KFKI-73-55

Bagyinszki J.

AZ m-ÉRTÉKŰ LOGIKA FÜGGVÉNYRENDSZEREINEK FUNKCIONÁLIS TELJESSÉGE

Hungarian Academy of Sciences

CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS

BUDAPEST

2017

KFKI-73-55

AZ m-ÉRTÉKŰ LOGIKA FÜGGVÉNYRENDSZEREINEK FUNKCIONÁLIS TELJESSÉGE

Bagyinszki János

Központi Fizikai Kutató Intézet, Budapest

Számitógép Főosztály

KIVONAT

A dolgozat az m-értékü logika függvény-rendszereinek funkcionális teljességéről ad áttekintést; az irodalomból ismert anyagot kiegészitve a szerző saját eredményeivel. A funkcionális teljesség alaptétele és néhány teljes rendszer megadása után az alapvető szerepet játszó egyes zárt függvény-osztályok, illetve kváziteljes osztályok tárgyalása következik, majd példaként a funkcionális teljesség a Boole függvények /m=2/ esetére. Végül néhány probléma felvetésével és hozzáfüzött megjegyzésekkel zárul a dolgozat.

Mind a funkcionális teljesség, mind az m ≧ 3 eset az utóbbi években a digitális rendszerek tervezésével, vizsgálatával foglalkozó folyóiratokban előtérbe került. Az előbbi az /integrált áramkör/ alkatrész-készlettel, az utóbbi pedig a részben-meghatározottság, a sejt-automaták, a megbizhatóság és uj, kettőnél több állapotu elemek térhóditásával kapcsolatban.

ABSTRACT

This paper sums up the functional completeness of the m-valued logic functional systems and adds author's own results on that subject. The discussion of some closed or precomplete function classes that play a fundamental role follows the principle of functional completeness and the discussion of some complete systems; then the functional completeness for the Boolean functions /m=2/ is given as an example. Finally this paper raises some problems and adds remarks to them.

The functional completeness as well as the m ≧ 3 case has come into prominence in the last years in the journals that discuss design and research of digital systems. The first one is important to determine integrated circuit elements-sets and the second one is used in connection with incompletely determined /Boolean/ functions, cell-automata, reliability and the spreading of elements with more than two states.

РЕЗЮМЕ

Настоящая работа является обзором теории функциональной полноты m-значных логик. Работа включает и некоторые результаты, полученные автором. После описания основной теоремы функциональной полноты и нескольких функционально полных систем излагается теория замкнутых и предполных классов, в частности, дается полное решение проблемы функциональной полноты для функций алгебры логики /m=2/. Наконец, в работе перечисляется несколько, пока еще нерешенных проблем.

В последние годы значительно возрос интерес, с одной стороны, к вопросам функциональной полноты в связи с распространением интегральных элементов, а с другой - к случаю m ≧ 3 в связи с возникновением вопросов частичной определенности, ячеечных автоматов, теории надежности, а также с возникновением запоминающих элементов, число устойчивых состояний которых больше двух.

TARTALOMJEGYZÉK

a,/ Bevezetés .... 1.
b,/ Igazság-függvények .... 5.
c,/ Két kombinatorikus lemma .... 9.
1. Alapvető fogalmak és a többértékü logika függvényeinek néhány tulajdonsága .... 15.
1.1. Fogalmak és néhány egyszerü eredmény .... 15.
1.2. Szimmetrikus függvények .... 21.
1.2.1. Szimmetrikus függvények identifikálása 24.
1.3. Szuperpozició és további definiciók 28.
1.4. Függvény-rendszerek homomorfizmusa, dualitás 36.
1.4.1. Homomorfizmus ....36.
1.4.2. Dualitás ....38.
2. Néhány funkcionálisan teljes rendszer és a funkcionális teljesség alaptétele ....42.
3. Teljességi kritériumok ....54.
3.1. Teljesség Γ -ban ....54.
3.2. A Γ_1 rendszerben teljes rendszerek.......59.
4. Szuperpozicióra nézve zárt függvény-osztályok. Kváziteljes osztályok............................ 66.
4.1. Zárt függvény-osztályok.................. 66.
4.2. Monoton függvények osztálya .... 73.
4.3. T_R-tipusu függvények osztálya .... 76.
4.4. U-tipusu függvények osztálya............. 79.
4.5. Lineáris függvények osztálya............. 81.
4.6. Önduális függvények osztálya............. 84.
4.7. Szemi-dualitás, szemi-önduális függvények osztálya 87.
4.8. Példa a funkcionális teljesség alaptételére: m=2 eset .... 94.
5. Befejező megjegyzések, további vizsgálatok és általánositások lehetőségei....................... 98.

Irodalom.................................... 104.

a./ Bevezetés

A digitális számitás- és méréstechnika, a digitális automaták, számológépek és ezek rendszereinek rohamos térhóditása következtében fellendültek a matematika véges diszkrét optimum-problémákkal foglalkozó ágai. Igy például a kombinatorikus analizis és gráfelmélet, a véges algebra egyes ágai (automaták és formális nyelvek elmélete), információ-elmélet vagy a matematikai programozás csaknem egészében az elmult 25 év terméke. A 60-as évek végéig a szintézis és analizis területén szinte egyeduralkodó volt a bináris felfogás, a Boole függvények elméletének alkalmazása - a technológia meghatározta körülmények következtében.

Azonban a különböző integráltsági foku áramköri elemek megjelenése, a mágneses buborék-memória és aritmetika-kutatások, az épitő-szekrény elv és a számológép-rendszerek elmélete szempontjából megnőtt a jelentősége olyan leirásnak, amelyben a természetes állapotok száma kettőnél nagyobb.

Az alap-elemek viszonylag nagy száma és nagyobb bonyolultsági foka következtében nagyobb jelentősége lesz annak a kérdésnek, hogy valamely épitő-elem készletből milyen tipusu rendszerek épithetők fel, illetve hogyan célszerü meghatározni a rendszerhez felhasználandó (különféle előirt feltételeket teljesitő) szükséges és elégséges halmazt. (Azt a halmazt, amely minden alapelemből elegendő számut tartalmaz, de bármely elemét elhagyva, ez a tulajdonsága megszünik.)

Ilyen és hasonló problémák vezethetnek (müszaki szempontból) az m-értékü logika függvényei funkcionális teljességének vizsgálatához. Mielőtt a témakör tényleges tárgyalását elkezdenénk, a "rokon" témákról szólunk néhány szót, illetve megpróbáljuk pontosan körülhatárolni a vizsgálni kivánt témakört. Egyáltalán nem foglalkozunk a müszaki szempontból egyébként fontos minimalizációs technika problémakörével.

A Boole-függvényekkel kapcsolatos legfontosabb tudnivalókat röviden összefoglaljuk, de ezek ismerete nélkül is megérthető a dolgozat. (lásd bővebben [3], [4], [13] .

Az m-értékü logika függvényei olyan függvények, melyek változói és értékei egyaránt egy rögzitett m-elemü halmaz elemei. (Boole függvények esetében m=2.)

A számos lehetséges megadási mód egyike az analitikus kifejezéssel való ábrázolás; az optimális (pl. minimális számu müveleti jelet tartalmazó) ábrázolás problémája előtt vetődik fel az a kérdés, hogy adott függvény-rendszerből mely függvények állithatók elő. Ezzel a problémakörrel foglalkozik a dolgozat. Célunk a téma jelenlegi állásának áttekintése, közben néhány megjegyzéssel, illetve tétel formájában is kimondott saját eredménnyel való kiegészitése. A tételesen is megfogalmazott önálló eredményeket a 2.1.a, 4.13, 4.22.a, 4.22.b, 4.23, 4.24. tételek, 1.2, 2.1, 4.1, 4.2, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7. lemmák tartalmazzák. Részben vagy egészében uj bizonyitást adtunk a 2.2, 2.3 tételekre és a 2.2 lemmára. Végül a 4. rész egyes részei, igy a 4.7. pont teljes egészében uj a dolgozatban. A 2.2. lemmára viszont az eredeti bizonyitásnak egy olyan módositását adtuk, amely alkalmasnak látszik a 2.3. tétel olyan általánositására, amely egy teljes rendszer helyett m számut eredményez.

Természetesen még e viszonylag nagy terjedelem ellenére sem törekedhettünk teljességre; az alapvető eredményeket szeretnénk bemutatni. (Egy következő dolgozatban szeretnénk további speciális fejezeteket és az azokhoz kapcsolódó önálló eredményeinket feldolgozni.) Az utolsó részben vázoljuk ezeket az itt nem részletezett eredményeket.

A kutatások jelentős hányada a részletesen kidolgozott m=2 eset eredményeinek általánositására vonatkozik. Megjegyezzük, hogy bár témája alapján a dolgozat egyaránt tartozhatna a matematikai logikához, az algebrához és a kombinatorikus elmélethez, valójában e tárgyalásmódnak nem sok köze van a matematikai logikához. (A logika nyelvén való leirás található pl. [1], [27] -ben.)

Az m-értékü logika függvényeinek a véges automaták elméletével való kapcsolatáról (m=2 esetre) [3], [67] -ben, illetve magyar nyelven [4]-ben tájékozódhat az olvasó, [67]-ben megtalálható a témakörünk m=2 esetének teljes tárgyalása is; az általunk használt jelölésmód részben ezekkel megegyezik. Az általános eset kifejtésének alapját viszont elsősorban a [65] dolgozat képezi.

Az m-értékü logika a már emlitett matematikai logikai és müszaki alkalmazáson kivül jó segédeszköznek bizonyul számos más tudományterületen, igy pl. a kvantum-fizikában [6] és a diszkrét összetevőjü sztochasztikus folyamatok elméletében.

A most következő két példa után a Boole- (vagy igazság-) függvények rövid ismertetése és két, a későbbiekben felhasznált kombinatorikus lemma következik.

Tekintsünk két rövid példát az alkalmazhatóságra.

1. Példa: Legyen adott egy k számu bemenettel és ℓ számu kimenettel rendelkező rendszer ($k+\ell$ pólus); tegyük fel, hogy a pólusok mindegyike egy rögzitett m-elemü M halmazból veszi értékeit. E diszkrét (kombinációs) rendszer (automata) teljes leirását adja az $f_1, f_2, \ldots, f_\ell$ függvény-sorozat, ahol

$$f_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in M \quad (i=1,2,\ldots,\ell)$$

$x_j \in M$ $(j=1,2,\ldots,k)$ az i-edik kimenet értékét adja meg a bemenet-vektor függvényében.

Kézenfekvő példa erre két tizes alapu számrendszer-beli szám szorzása: $A.B=C$, ahol

$$A = a_n\, a_{n-1} \ldots a_1$$

$$B = b_m\, b_{m-1} \ldots b_1$$

$$C = c_{m+n}\, c_{m+n-1} \ldots c_1$$

(Itt a $c_i = f_i(a_1, \ldots a_n;\ b_1, \ldots, b_m)$ $(i=1,2\ldots m+n)$ függvények nem függenek ténylegesen minden változójuktól.)

2. Példa: Valamely mérési eredményt hisztogrammon ábrázolunk, s e célból az $[0,n]$ intervallumot n egyenlő részre osztjuk. Legyen ismert az egyes mért értékek mérési hibája is (pl. konfidencia-intervallum). Igy a véges méretü objektumok $[0,\ n]$ intervallumon való elhelyezéséről kielégitő információt ad számunkra az $R = \| r_{ij} \|$ mátrix, ahol a mátrix-elemeket a következőképpen definiáljuk:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha a j. objektum az (i-1, i) nyilt intervallumba esik} \\ 0, & \text{ha a j. objektumnak nincs közös pontja az } [i-1, i] \text{ zárt intervallummal} \\ 2, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az R mátrix elemei 3-értékü függvények.

b./ Igazság-függvények

Az igazság-függvények elméletének elemeiből csak a továbbiak szempontjából szükséges minimumot foglaljuk össze. Ismertnek tételezzük fel a reláció, ekvivalencia-reláció, parciális és teljes rendezés, halmaz-partició, háló és Boole-algebra fogalmakat (lásd pl. [7], [13] , illetve magyar nyelven [4] -ben.)

Definició:

Az $A = \langle H;\ O_1, O_2, \dots, O_i;\ R_0,\ R_1, \dots R_j; c_0, c_1, \dots, c_n \rangle$ rendszert algebrai rendszernek nevezzük, ahol

H: nem üres halmaz (alaphalmaz)

O_k: $H^{\ell_k} \xrightarrow{} H$ leképezés (ℓ_k természetes szám, k=1,2,..,i)

R_k: a H halmazon értelmezett reláció (k=0,1,..,j)

c_k: H-beli rögzitett elem (k=0,1,...,n)

Megjegyzés: Az O_k operáció felfogható (ℓ_k+1) poziciós relációként is.

<u>Definició:</u> A' <u>részrendszere</u> A-nak, ha $H' \subseteq H$, O_k és R_k csak H'-re korlátozódik és $c_k \in H'$ minden lehetséges k-ra.

<u>Példák:</u> (a) Az $\mathcal{L} = \langle L;\ O_1, O_2 \rangle$ algebrai rendszer <u>háló</u>, ha az O_1, O_2 bináris müveletek ($\ell_1 = \ell_2 = 2$), asszociativ, kommutativ, idempotens ($xox=x$) és elnyelési tulajdonsággal ($xo_1(xo_2y)=x$, $xo_2(xo_1y)=x$) rendelkeznek.

(b) A $\mathcal{B} = \langle B;\ O_1, O_2; 0, 1 \rangle$ algebrai rendszer <u>Boole algebra,</u> ha B legalább kételemü és 0,1 rendre O_1, O_2 egység-elemei, továbbá mindkét müveletre érvényes a kommutativitás, asszociativitás, elnyelési tulajdonság és létezik inverz-elem (=komplementum: $\bar{X}$: $XO_1\bar{X}=0$ és $XO_2\bar{X}=1$).

Jól ismertek a következő összefüggések (x, y, z a B Boole algebra elemei):

(1) $xox = x$

(2) $(xo_1y)o_2x=x$, $(xo_2y)o_1x=x$

(3) $xo_20 = 0$, $xo_11=1$

(4) $\bar{x}$ egyértelmüen meghatározott elem.

(5) $\bar{\bar{x}} = x$

(6) $\overline{xo_1y} = \bar{x}o_2\bar{y}$, $\overline{xo_2y} = \bar{x}o_1\bar{y}$

(7) $xo_1(\bar{x}o_2y) = xo_1y$, $xo_2(\bar{x}o_1y) = xo_2y$.

Az $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ függvényt <u>igazság-függvénynek</u> vagy Boole függvénynek nevezzük, ha változói és értéke egyaránt a $\{0,1\} = B_2$ halmaz eleme: $f\colon \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$.

Két függvény <u>ekvivalens (azonos)</u>, ha a változók bármely értéke mellett azonosak a függvény-értékek. Néhány fontos igazság-függvény (több jelöléssel, illetve aritmetikai kifejezéssel megadva):

$$f_0 \equiv 0,\ f_1 \equiv 1,\ f_2(x) \equiv x = x^1, f_3(x) = \bar{x} = 1-x = x^0,$$

$$f_4(x_1,x_2) = x_1 \cdot x_2, \quad f_5(x_1,x_2) = x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2 - x_1 x_2$$

$$f_6(x_1,x_2) = x_1 \oplus x_2 = x_1 + x_2 - 2x_1 x_2;$$

$$f_7(x_1 x_2) = x_1 \sim x_2 = 1 - f_6(x_1,x_2) = 1 + 2x_1 x_2 - x_1 - x_2,$$

$$f_8(x_1 x_2) = x_1 | x_2 = \overline{x_1 \cdot x_2} = 1 - x_1 x_2.$$

Itt a +, - és $\cdot$ aritmetikai jelek, „$\cdot$" egyben a konjunkció jele is. (f_5 a diszjunkció, f_6 a kizáró vagy, f_7: ekvivalencia, f_8: Sheffer függvény.) Könnyen látható, hogy a bevezetett jelöléssel

$$x^\alpha = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = \alpha \\ 0, & \text{ha } x \neq \alpha \end{cases}$$

Az A. tétel 2. következménye alapján igaz az is, hogy f_3, f_4 és f_5 függvények segitségével bármely n-változós igazság-függvény kifejezhető (f_4 vagy f_5 el is hagyható, mert pl. $f_5(x_1,x_2) = \overline{f_4(\overline{x_1},\overline{x_2})}$).

Az is ellenőrizhető, hogy ha F_n jelöli az n-változós igazság-függvények halmazát, akkor az $\langle F_n; f_4, f_5; f_0, f_1\rangle$ algebrai rendszer Boole-algebra, amelyben $\overline{f} = f_3(f)$.

Most bebizonyitjuk a kifejtési tétel érvényességét, és két fontos következményét adjuk meg.

<u>A. Tétel</u> (kifejtési): Tetszőleges $f(x_1,\ldots x_n)$ igazság-függvény egyértelmüen irható fel a következő alakban:

$$f(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_n)=\bigvee_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\in B_2^k} x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_k^{\alpha_k}\cdot f(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,x_{k+1},\ldots,x_n) \quad (*)$$

ahol $1 \leq k \leq n$ tetszőleges egész szám.

<u>Bizonyitás:</u> Tetszőleges $(\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_k)\in B_2^k$, $x_1=\beta_1,\ldots,x_k=\beta_k$ esetén a baloldal $f(\beta_1,\ldots,\beta_k,x_{k+1},\ldots,x_n)$.

De a jobboldal is ugyanaz, mert

$$\beta_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\beta_k^{\alpha_k}=\begin{cases}1, & \text{ha } \alpha_1=\beta_1,\ldots,\alpha_k=\beta_k\\ 0, & \text{különben}\end{cases}$$

tehát csak egyetlen diszjunkciós tag nem zérus, s ez éppen az, amelyben

$$\alpha_1=\beta_1,\ \ldots,\ \alpha_k=\beta_k,$$

azaz

$$\beta_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\beta_k^{\alpha_k}f(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,x_{k+1},\ldots,x_n)=\begin{cases}f(\beta_1,\ldots,\beta_k,x_{k+1},\ldots,x_n) & \text{ha } \alpha_1=\beta_1,\ldots,\alpha_k=\beta_k\\ 0, & \text{különben.}\end{cases}$$ ▲

<u>1.Következmény:</u> Ha k=1, akkor (*)-ból adódik:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1\cdot f(1,x_2,\ldots,x_n)\vee\overline{x}_1\cdot f(0,x_2,\ldots,x_n).$$

<u>2.Következmény:</u> Ha k=n, akkor (*) a kitüntetett diszjunktiv normálformát adja:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\bigvee_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\\ f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1}} x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}.$$

c./ Két kombinatorikus lemma

B./ Lemma: Ha $V(n)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\cdot U(l)$,

akkor $U(n)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(-1)^{n-l}V(l)$.

A lemma fontossága miatt két bizonyitást is bemutatunk, (mindkettő tipikus e témakörben); az első teljes indukciós, a második generátor-függvény alkalmazását mutatja be.

1. Bizonyitás: n-re vonatkozó indukcióval.

$n=0,1$; $V(0)=U(0)$, $V(1)=U(0)+U(1) \Longrightarrow U(1)=-V(0)+V(1)$.

Feltéve, ha n-re igaz az állitás, bizonyitjuk, hogy n+1-re is igaz:

$$V(n+1)=\sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l}U(l),$$

innen

$$U(n+1)=V(n+1)-\sum_{l=0}^{n}\binom{n+1}{l}\cdot U(l)=$$

$$=V(n+1)-\sum_{l=0}^{n}\binom{n+1}{l}\cdot\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\cdot(-1)^{l-k}\cdot V(k)=$$

$$=V(n+1)+\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{l}(-1)^{l+k+1}\cdot\binom{n+1}{l}\binom{l}{k}V(k)=$$

$$=V(n+1)+\sum_{r=0}^{n}V(r)\cdot\sum_{s=0}^{n-r}(-1)^{s+1}\cdot\binom{n+1}{s+r}\cdot\binom{s+r}{r}$$

Tehát elegendő azt belátnunk, hogy

$$\sum_{s=0}^{n-r}(-1)^{s+1}\binom{n+1}{s+r}\binom{s+r}{r}=(-1)^{n-r+1}\cdot\binom{n+1}{r}.$$

Minthogy

$$\binom{u}{v}\binom{v}{p}=\frac{u!\cdot v!}{v!\,(u-v)!\,p!\,(v-p)!}=\binom{u}{p}\frac{(u-p)!}{(u-v)!\,(v-p)!}=\binom{u}{p}\binom{u-p}{v-p},$$

ezt az azonosságot alkalmazva a baloldal minden tagjára u = n+1, v=s+r, p=r szereposztással adódik:

$$\sum_{s=0}^{n-r}(-1)^{s+1}\binom{n+1}{s+r}\binom{s+r}{r}=-\sum_{s=0}^{n-r}\binom{n+1}{r}\binom{n+1-r}{s}(-1)^s=$$

$$=-\binom{n+1}{r}\cdot\sum_{s=0}^{n-r}\binom{n+1-r}{s}(-1)^s=$$

$$=-\binom{n+1}{r}\cdot\left\{(1-1)^{n+1-r}-(-1)^{n+1-r}\right\}=$$

$$=(-1)^{n-r+1}\cdot\binom{n+1}{r}.\qquad\blacktriangle$$

<u>II. Bizonyitás:</u> Egy a_0, a_1, ..., a_n,...sorozat <u>exponenciális generátor-függvényét</u> a következőképpen definiáljuk:

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k\cdot x^k}{k!}.$$

A függvénysorok elméletéből ismeretes, hogy ha az $\left|\frac{a_k}{k!}\right|$ sorozat korlátos, akkor a

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k x^k}{k!}$$

hatványsor egyenletesen konvergens az $|x|<1$ tartományban, és igy

$$a_n=g^{(n)}(x)\Big|_{x=0}=\frac{d^n g(x)}{dx^n}\Big|_{x=0}.$$

Jelölje U(k) és V(k) sorozatok generátor-függvényét rendre g(x) és h(x);

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{U(k)x^k}{k!},\qquad h(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{V(k)x^k}{k!}$$

A $V(n)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\cdot U(l)$

mindkét oldalát $\frac{x^n}{n!}$ értékkel megszorozva és n-re összegezve (0-tól ∞ -ig), a következőt kapjuk:

$$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{V(n)x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}U(l)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\frac{U(l)x^l}{l!}\cdot\frac{x^{n-l}}{(n-l)!}=e^x\cdot g(x).$$

Ebből $g(x)=e^{-x}.h(x)$, s a szorzat deriválási szabálya alapján:

$$g^{(n)}(x)=e^{-x}\cdot\sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}\binom{n}{l}\cdot h^{(l)}(x).$$

Ez utóbbiból a bizonyitandó azonosság nyilvánvalóan adódik.

▲

A következő lemmát a leszámlálásoknál fogjuk felhasználni.

C./ Lemma: Legyen a $|H| = r$ elemü H véges halmaz tetszőleges $h\in H$ eleméhez rendelt (nem negativ egész) suly $w(h)$. Legyenek $A_1, A_2, \dots A_s$ valamely tulajdonságok, amelyekkel H elemei rendelkezhetnek. Jelölje $W(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots A_{i_p})$ azon elemek sulyának összegét, amelyek rendelkeznek az argumentumban szereplő tulajdonságokkal, és legyen

$$W(p)=\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_p\le s}W(A_{i_1},A_{i_2},\dots,A_{i_p}),$$

ahol az összegzés az összes p-ed osztályu kombinációra terjesztendő ki.

Megállapodunk, hogy

$$W(0)=\sum_{h\in H}w(h).$$

Ha $E(t)$ jelöli H azon elemeinek sulyösszegét, amelyek pontosan t számu tulajdonsággal rendelkeznek az $\{A_1, A_2, \dots A_s\}$ halmazból, akkor

$$E(t)=\sum_{j=0}^{s-t}\binom{t+j}{t}(-1)^jW(t+j)=\sum_{i=t}^{s}\binom{i}{t}(-1)^{i+t}W(i).$$

Bizonyitás: Először belátjuk a következő egyenlőséget:

$$W(p)=\sum_{j=p}^{s}\binom{j}{p}\cdot E(j) \qquad (p=0,1,\dots,s).$$

Rögzitsük le p értéket. W(p) - definiciója szerint - H azon elemeinek sulyösszege, amelyek mindegyike rendelkezik p számu tulajdonsággal (a megfelelő multiplicitással értve, vagyis, ha egy elem pontosan q számu tulajdonsággal rendelkezik, akkor az $\binom{q}{p}$ sullyal számitandó).

Ezért a pontosan j számu tulajdonsággal rendelkező elemek suly-járuléka W(p)-ben: $E(j).\binom{j}{p}$. Minthogy a h elem azon tulajdonsága, hogy "pontosan j számu tulajdonsággal rendelkezik", ekvivalencia-reláció, s igy H egy particióját indukálja, ezért a diszjunktságból következően valóban W(p) az $E(j).\binom{j}{p}$ értékek összege a lehetséges j=p,p+1,...,s értékre, vagyis

$$W(p)=\sum_{j=p}^{s}E(j)\binom{j}{p}.$$

Most megadjuk az inverz relációt, vagyis E(t) értékét fejezzük ki a W(p) értékkel, (p=0,1...s). Azt állitjuk, hogy

$$E(t)=\sum_{i=t}^{s}\binom{i}{t}(-1)^{i+t}\cdot W(i)=\sum_{i=t}^{s}\binom{i}{t}(-1)^{i+t}\cdot\sum_{j=i}^{s}\binom{j}{i}E(j).$$

Az állitást s-re vonatkozó indukcióval bizonyitjuk.

s=1 esetén mindkét lehetőségre igaz az állitás:

$$t=0:\ \sum_{i=0}^{1}\binom{i}{0}(-1)^{i}W(i)=\sum_{j=0}^{1}\binom{j}{0}E(j)-\sum_{j=1}^{1}\binom{j}{1}E(j)=E(0)+E(1)-E(1)=E(0),$$

$$t=1:\ \sum_{i=1}^{1}\binom{i}{1}(-1)^{i+1}\cdot\sum_{j=i}^{1}E(j)\binom{j}{i}=E(1).$$

Feltéve, hogy s-re igaz az állitás, bizonyitjuk, hogy s+1-re is igaz:

$$\sum_{i=t}^{s+1}\binom{i}{t}(-1)^{i+t}\cdot\sum_{j=i}^{s+1}\binom{j}{i}E(j) =$$

$$= (-1)^{s+t+1}\binom{s+1}{t}\binom{s+1}{s+1}E(s+1) + \sum_{i=t}^{s}\binom{i}{t}(-1)^{i+t}\left[\binom{s+1}{i}E(s+1)+\sum_{j=i}^{s}\binom{j}{i}E(j)\right] =$$

$$= (-1)^{t}\cdot E(s+1)\left[(-1)^{s+1}\binom{s+1}{t}+\sum_{i=t}^{s}(-1)^{i}\binom{s+1}{i}\binom{i}{t}\right]+E(t) = E(t),$$

mert a szögletes zárójelben lévő kifejezés zérus. Ugyanis

$$\binom{s+1}{i}\binom{i}{t}=\binom{s+1}{t}\binom{s+1-t}{i-t},$$

mint azt az B./ Lemma bizonyitásánál láttuk, és igy

$$\sum_{i=t}^{s}(-1)^{i}\binom{s+1}{i}\binom{i}{t}=\binom{s+1}{t}\sum_{i=t}^{s}(-1)^{i}\binom{s+1-t}{i-t}=(-1)^{t}\binom{s+1}{t}\sum_{k=0}^{s-t}(-1)^{k}\binom{s-t+1}{k}=$$

$$=(-1)^{t}\binom{s+1}{t}\left[0-(-1)^{s-t+1}\right]=(-1)^{s}\binom{s+1}{t},$$

amely valóban az állitást eredményezi. ▲

Abból a célból, hogy bizonyos, különféle tulajdonság- - együttesekkel rendelkező elemek sulyösszegét könnyen származtathassuk, állitsuk elő az

E(o), E(1), ..., E(s)

sorozat közönséges (geometriai) generátor-függvényét, felhasználva a tételben bizonyitott egyenlőséget.

$$e(x)=\sum_{i=0}^{s}E(i)x^{i}=\sum_{i=0}^{s}\left(\sum_{j=i}^{s}\binom{j}{i}(-1)^{i+j}W(j)\right)x^{i}=$$

$$=\sum_{j=0}^{s} W(j)\cdot\left(\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i}\binom{j}{i}x^{j-i}\right)=\sum_{j=0}^{s} W(j)(x-1)^{j}.$$

Az x=1, -1, 2 helyettesitésekkel, pl. rendre a következő mennyiségek származtathatók (szemléletes jelentésük nyilvánvaló.);

$$e(1)=\sum_{i=0}^{s} E(i)=W(0)\ ;\qquad e(2)=\sum_{i=0}^{s} E(i)\cdot 2^{i}=\sum_{i=0}^{s} W(i)\ ;$$

$$\frac{e(1)+e(-1)}{2}=\sum_{i=0}^{[s/2]} E(2i)=\frac{1}{2}\left(W(0)+\sum_{j=0}^{s}(-2)^{j}\,W(j)\right)\ ;$$

$$\frac{e(1)-e(-1)}{2}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{s-1}{2}\right]} E(2i+1)=\frac{1}{2}\left(W(0)-\sum_{j=0}^{s}(-2)^{j}\,W(j)\right).$$

1. ALAPVETŐ FOGALMAK ÉS A TÖBBÉRTÉKÜ LOGIKA FÜGGVÉNYEINEK NÉHÁNY TULAJDONSÁGA

1.1. Fogalmak és néhány egyszerü eredmény

Mindenek előtt megadunk néhány jelölést és definiciót, amelyeket a dolgozatban gyakran fogunk alkalmazni.

Jelölések:

alaphalmaz: $M=\{0,1,2,\dots, m-1\}$, $m\geq 2$

egy rögzitett rendezés M-en:

$$m_0 \prec m_1 \prec \dots \prec m_i \prec m_{i+1} \prec \dots \prec m_{m-1}, \quad m_i \in M$$

indexhalmaz: $J_n = \{1,2,\dots, n\}$

Descartes-szorzat (n-szeres): $M \times M \times \dots \times M = M^n$

Az $\mathcal{A}$ állitás tagadása: $\neg\mathcal{A}$

(egy-) egyértelmü leképezés: $(A \longleftrightarrow B)$ $A \longrightarrow B$

(A és B halmazok)

$\mathcal{B}$ állitás következménye $\mathcal{A}$-nak: $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$

$\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ ekvivalens állitások: $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$

Univerzális ill. egzisztenciális kvantor: $\forall, \exists$

gyakran használt speciális függvények

(x, x_1, x_2 értékei M-beliek):

$$\mathfrak{Z}_0(x) = m-1-x$$

$$\mathfrak{Z}_1(x_1,x_2) = m(x_1,x_2) = \min(x_1,x_2)$$

$$\mathfrak{Z}_2(x_1,x_2) = M(x_1,x_2) = \max(x_1,x_2)$$

$$\mathfrak{Z}_3(x_1,x_2) = x_1+x_2 \pmod m$$

$$\mathfrak{Z}_4(x_1,x_2) = x_1 \cdot x_2 \pmod m$$

m = 2 esetén "$\mathfrak{Z}$" helyett "z"-t irunk.

A bizonyitások végét $\blacktriangle$ jelöli.

A továbbiakban reláció-jel feletti "d" betü jelentése: a relációban fellépő uj fogalmat ugy definiáljuk, hogy a reláció igaz legyen. (Például $m(x_1,x_2) \overset{d}{=} \min(x_1,x_2)$, azaz, tetszőleges x_1, x_2 valós számok közül a nem-nagyobbat $m(x_1,x_2)$-vel jelöljük.)

Definiciók:

(1) m-értékü logika függvény-einek halmaza:

$$\Gamma \overset{d}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$$

ahol

$$\Gamma_n \overset{d}{=} \{\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \varphi : M^n \to M\}$$

A továbbiakban függvényen $\varphi \in \Gamma$ (Post-) függvényt értünk (m=2 esetén a megfelelő latin betüvel jelöljük: $f \in G$. Szokásos elnevezései: igazság-függvény, logikai függvény, kapcsoló függvény, illetve Boole-függvény.) Ha nem okozhat félreértést, a $\varphi = \varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ függvény argumentumát nem irjuk ki.

(2) Rendezési relációk az

$$\mathfrak{M} \overset{d}{=} \{\underline{\mu} \mid \underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n),\ \mu_j \in M,\ j \in \mathfrak{I}_n\}$$

vektor-halmazon (parciális rendezések):

$$\underline{\mu} \leq \underline{\nu},\ \underline{\mu}, \underline{\nu} \in \mathfrak{M} \overset{d}{\iff} (\forall j \in \mathfrak{I}_n)\ \mu_j \leq \nu_j$$

$$\underline{\mu} < \underline{\nu} \overset{d}{\iff} \underline{\mu} \leq \underline{\nu} \wedge (\exists j \in \mathfrak{I}_n)\ \mu_j < \nu_j .$$

(3) Az x_i változóban növekvő a φ függvény, ha minden lehetséges $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in M^{n-1}$ esetén

$$\xi_i' < \xi_i'' \Longrightarrow \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \xi_i', x_{i+1}, \ldots, x_n) \leq \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \xi_i'', x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

Hasonlóan definiálható az x_i változóban csökkenő, illetve a szigoruan növekvő (csökkenő) függvény.

(4) Az x_i változóban degenerált a φ függvény, ha egyidejüleg növekvő és csökkenő is x_i-ben.

(5) x_i változótól lényegesen (≡ténylegesen) függ φ, ha x_i-ben nem-degenerált.

(6) Nem-degenerált a φ függvény, ha minden változójától lényegesen függ.

(7) A $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$ és $\varphi_2(y_1, \ldots, y_n)$ függvények azonosak (≡ekvivalensek) - az (1) definiciónak megfelelően -;

$$\varphi_1 = \varphi_2 \overset{d}{\Longleftrightarrow} (\forall \underline{\alpha} \in M^n)\ \varphi_1(\underline{\alpha}) = \varphi_2(\underline{\alpha}).$$

Minthogy $|M| = m$ véges érték, tetszőleges $\varphi \in \Gamma_n$ megadható értéktáblázattal is (φ argumentumának minden lehetséges értékére megadjuk a függvény értékét: lásd 1. táblázat.)

1. táblázat

$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$	$\varphi(x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0 0 ... 0 0	$\varphi(0, 0, \ldots, 0, 0)$
0 0 ... 0 1	$\varphi(0, 0, \ldots, 0, 1)$
- - - - - - - - - - -	- - - - - - - - - - - -
0 0 ... 0 m-1	$\varphi(0, 0, \ldots, 0, m-1)$
0 0 ... 1 0	$\varphi(0, 0, \ldots, 1, 0)$
- - - - - - - - - - -	- - - - - - - - - - - -
- - - - - - - - - - -	- - - - - - - - - - - -
m-1 m-1... m-1 m-1	$\varphi(m-1, m-1, \ldots m-1, m-1)$

A (7) definicióból közvetlenül leolvasható az

1.1. Tétel: Az n-változós függvények száma: $|\Gamma_n| = m^{m^n}$.

Bizonyitás: Az M halmaz elemeiből képezett n hosszuságu sorozatok - m elem n-ed osztályu ismétléses variációi - száma m^n, s hasonlóan, a függvény-értékek m^n hosszuságu sorozatainak száma: $|\Gamma_n| = m^{m^n}$. ▲

Megjegyzések: 1./ Az n=1 eset az algebrából jól ismert $M \longrightarrow M$ leképezéseket adja.

2./ Az m=2 eset a - szintén sok eredményt tartalmazó - igazság-függvények esete.

Tárgyalásmódban támaszkodunk arra a tényre, hogy az előbbi két megjegyzésben szereplő speciális esetek elmélete jelentős mértékben kidolgozottabb, mint az m-értékü logika függvényeinek elmélete. Az általánositási lehetőségek természetesen általában nem egyértelmüek; hogy az egyes esetekben melyiket választjuk, az attól függ, hogy a konkrét esetben melyik választás vezet pl. a szempontunkból előnyös azonosság megtarthatóságához. Például, az igazságfüggvények negáció-fogalmának megfelelő általánositási lehetőségek közül tekintve a $\zeta_0(x)$ és $\zeta_3(x,1)$ függvényeket, az első esetben a müvelet idempotens tulajdonságát emeljük ki (Boole algebrában $\neg\neg x = x$), a $\zeta_3(x,1)$ választásával viszont a "$\neg$" operáció "rákövetkezés" jellegét tartjuk lényegesnek. Ugyanis a definicióból közvetlenül adódik a következő

1.1. <u>Lemma:</u> A $\zeta_0(x)$ és $\zeta_3(x,1)$ függvényekre azonosan teljesül:

(i) $\zeta_0(\zeta_0(x)) = x,$

(ii) $\zeta_3^k(x,1) = \zeta_3(x,k)$

ahol: $\zeta_3^1(x,1) = \zeta_3(x,1)$; $\zeta_3^{k+1}(x,1) = \zeta_3(\zeta_3^k(x,1),1)$.

Még általánosabban, a negáció közvetlen általánositásának tekinthető minden $\varphi(x)$: M $\rightarrow$ M leképezés, amelyre $\varphi(x) \neq x$.

Most megadjuk az n-változós nem-degenerált függvények U(n) számát és ennek egy érdekes következményét.

<u>1.2. Tétel:</u> Az n-változós nem-degenerált függvények száma:

$$U(n) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^{n-l} \binom{n}{l} m^{m^l}.$$

Bizonyitás: Jelöléseink szerint a pontosan ℓ számu változóban nem-degenerált n-változós függvények száma $m^{n-\ell}\binom{n}{\ell}\cdot U(\ell)$, s minthogy a Γ_n halmaz ℓ szerinti ilyen felbontása elem-idegen osztályokat eredményez, nyilvánvalóan fennáll:

$$\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}m^{n-\ell}\cdot U(\ell)=m^{m^n}. \qquad (\text{Jelölés: } U(0)=1).$$

Ebből állitásunk a B. lemma alkalmazásával adódik, $U(\ell)$-nek $m^{n-\ell}\cdot U(\ell)$ kifejezést választva. ▲

I. Megjegyzés: A pontosan k számu változóban nem-degenerált n-változós függvények száma: $U_n(k)=\binom{n}{k}m^{n-k}\cdot U(k)$.

Bizonyitás: A tétel bizonyitásából leolvasható. ▲
Minthogy $|\Gamma_n|$ igen gyorsan nő n-nel, várható, hogy aszimptotikusan U(n) és $|\Gamma_n|$ egyenlő. Ezt mondja ki a

II. Következmény: $U(n)\sim m^{m^n}$, azaz nagy n értékekre majdnem minden függvény nem-degenerált.

Bizonyitás:

$$\left|\frac{U(n)-m^{m^n}}{m^{m^n}}\right|=m^{-m^n}\cdot\left|\sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^{n-\ell}\binom{n}{\ell}m^{m^\ell}\right|<m^{-m^n}\cdot\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n}{\ell}m^{m^\ell}<$$

$$<m^{-m^n}\cdot\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n}{\ell}m^{m^{n-1}}=(2^n-1)\,m^{(1-m)m^{n-1}}\to 0,\ \text{ha } n\to\infty \quad (m\geq 2) \ ▲$$

Definiáljuk a $\Theta\colon \Gamma_n^k\to\Gamma_n$ leképezést a következőképpen (k≥1 egész szám):

$$\Theta(\varphi_1,\dots,\varphi_k)=\varphi \overset{d}{\Longleftrightarrow} (\forall\underline{\alpha}\in M^n)\,\Theta(\varphi_1(\underline{\alpha}),\dots,\varphi_k(\underline{\alpha}))=\varphi(\underline{\alpha}).$$

Speciálisan, a $\zeta_1(\varphi_1,\varphi_2)$, $\zeta_2(\varphi_1,\varphi_2)$, $\zeta_0(\varphi)$ választás esetén könnyen ellenőrizethő, hogy a $\langle \Gamma_n; \zeta_1, \zeta_2 \rangle$ algebrai rendszer - ahol ζ_1, ζ_2 a Γ_n halmazon értelmezett, korábban definiált függvények - moduláris, disztributiv véges háló, azonban nem Boole-algebra, mert egyértelmü inverz általában nem létezik. Ugyanis a

$$(\forall x)(\exists y)\left(M(x,y) = m-1,\ m(x,y) = 0 \right)$$

egyenlet-rendszer csak m=2 esetben rendelkezik egyértelmü megoldással, s ez esetben a $\langle G_n; z_1, z_2, z_0; 0, 1 \rangle$ algebrai rendszer Boole algebra.

Ezzel a következő tétel bizonyitását vázoltuk:

1.3. Tétel: (i) A $\langle \Gamma_n; \zeta_1, \zeta_2 \rangle$ algebrai rendszer moduláris, disztributiv véges háló.

(ii) A $\langle G_n; z_0, z_1, z_2; 0, 1 \rangle$ algebrai rendszer véges Boole algebra.

1.2. Szimmetrikus függvények. [18] .

Mivel a függvények változóikra vonatkozó szimmetria-tulajdonságainak ismerete előnyösen használható fel különféle vizsgálatoknál, célszerü e szimmetria-tulajdonságokkal is foglalkozni.

Definició: A $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$ és $\varphi_2(y_1, \ldots, y_n)$ függvények permutációsan ekvivalensek:

$$\varphi_1 \simeq \varphi_2 \overset{d}{\Longleftrightarrow} \left(\exists \sigma(t): \mathfrak{I}_n \longleftrightarrow \mathfrak{I}_n \text{ (permutáció) } \varphi_2(y_1, \ldots, y_n) = \varphi_1(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \right)$$

Nyilvánvaló, hogy az igy definiált " $\overset{\sigma}{\sim}$ " bináris reláció ekvivalencia-reláció, és a $\sigma_0(x) = x$ speciális esetben átmegy a függvények azonosságának (7)-ben megadott definiciójába. A müszaki realizáció szempontjából gyakran éppen a permutációs-ekvivalencia fogalom szerinti osztályozás a megfelelő (az igazság-függvények esetében is.) Ezért megvizsgáljuk azokat a függvényeket, amelyek bármely $\sigma(t)$ permutációra nézve önmagukkal ekvivalensek; megadjuk ezeknek egy jellemzését és egy erre épülő olyan algoritmust irunk le, amely Γ_n tetszőleges eleméről eldönti, hogy az szimmetrikus-e vagy sem. (Nem térünk ki a szimmetrikus függvény fogalmának különféle általánositásaira - parciálisan szimmetrikus, kevert-szimmetrikus, stb. - ezeket lásd: [18], [13].)

<u>Definició:</u> $\varphi(\in \Gamma_n)$ <u>szimmetrikus függvény</u> $\Leftrightarrow (\forall \sigma)\Rightarrow(\varphi \overset{\sigma}{\sim} \varphi)$

<u>Definició:</u> Az $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in M^n$ vektor <u>suly-vektora</u> az $\underline{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{m-1})$ vektor, ahol

$$a_i = \sum_{\substack{j \\ \alpha_j = i}} 1 \,, \quad i \in I_n$$

A szimmetrikus függvények két jellemzését adja a következő két tétel:

<u>1.4. a.tétel:</u> Legyen $\sigma_1(t) = \begin{cases} 2, & \text{ha } t = 1 \\ 1, & \text{ha } t = 2 \\ t, & \text{egyébként} \end{cases}$

$$\sigma_2(t) = S_3(t, 1)$$

Állitás:

$\varphi = \varphi(x_1,\dots,x_n)$ szimmetrikus $\Longleftrightarrow$ φ -re igaz
a következő két állitás:

(i) $\varphi \overset{\sigma_1}{\sim} \varphi$
(ii) $\varphi \overset{\sigma_2}{\sim} \varphi$.

1.4.b. tétel:

$\varphi = \varphi(x_1,\dots,x_n)$ szimmetrikus $\Longleftrightarrow$ ha $\underline{\alpha}, \underline{\beta} \in M^n$ vektorok sulyvektora azonos, akkor $\varphi(\underline{\alpha}) = \varphi(\underline{\beta})$.

Bizonyitás: Az (a) tétel állitása annak az ismert csoportelméleti tételnek a következménye, amely szerint a $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ permutációpár generálja az n-edrendü szimmetrikus csoportot.

A (b) tétel állitása első részének bizonyitásához tegyük fel, hogy $\varphi \in \Gamma_m$ szimmetrikus függvény. Legyen $\underline{\alpha} \in M^n$ sulyvektora $\underline{a}$. Az állitás abból következik, hogy φ változóinak permutálása az értéktáblázatban a függvény--értékek változatlanul hagyásával az $\underline{x}$ változó-vektorok sorrendjét permutálja, s permutációval $\underline{\alpha}$-ból bármely olyan (és csak olyan) $\underline{\beta}$ vektor elérhető, amelynek sulyvektora $\underline{a}$.

Megforditva, minthogy tetszőleges σ permutáció csak azonos sulyvektorral rendelkező $\underline{\alpha}, \underline{\beta} (\in M^n)$ vektorpárt vihet át egymásba, s az állitás szerint ezekre $\varphi(\underline{\alpha}) = \varphi(\underline{\beta})$ teljesül, igy az értéktáblázatával megadott függvény σ alkalmazásával szemben invariáns, azaz φ szimmetrikus függvény. ▲

A következő tétel az n-változós szimmetrikus függvények számát adja meg, $a_{m,n} = \binom{n+m-1}{n}$ jelölést alkalmazva.

<u>1.5. tétel:</u> Az m-értékü logika n-változós szimmetrikus függvényeinek száma: $A_{m,n} = a^{a_{m,n}}$.

<u>Bizonyitás:</u> Az 1.4.b. tétel értelmében a φ szimmetrikus függvényt egyértelmüen meghatározzuk azáltal, hogy értelmezési tartományának összes különböző sulyvektorához hozzárendeljük az M halmaz egy-egy elemét. A lehetséges sulyvektorok $\mathcal{U}_{m,n} = \{(a_0, a_1, \dots, a_{m-1})\}$ halmazának elemszámát a(m,n)-nel jelölve, $A_{m,n} = m^{a(m,n)}$.

Másrészt $|\mathcal{U}_{m,n}| = a(m,n) = \binom{n+m-1}{n} = a_{m,n}$, mert a(m,n) meghatározása ekvivalens a következő urna-probléma megoldásával: "Adott m számozott urna, és n azonos szinü golyó; meghatározandó a lehetséges szétosztások száma". S ez a szám valóban az m elem n-edosztályu ismétléses kombinációinak száma. ▲

1.2.1. <u>Szimmetrikus függvények identifikálása</u>

Az alábbiakban leirunk egy algoritmust, amely tetszőleges $\varphi \in \Gamma_n$ függvényről eldönti, hogy az szimmetrikus-e vagy sem. Az algoritmus megadásához szükségünk lesz a következő definiciókra.

<u>Definició:</u> <u>j-csoport</u> $\stackrel{d}{=} \{\alpha \mid \alpha \in M^n, \varphi(\alpha) = j\}$ $(j \in M)$

azaz, az érték-táblázat olyan sorainak halmaza, amelyekhez a "j" függvényérték tartozik.

Szimmetrikus függvényekre ez az azonos <u>a</u> vektorral rendelkező sorok halmazát jelenti.

Definició: Adott j-csoport elemeire az i-edik oszlop r-vektora (i=1,2,...,n):

$$\underline{r}_i^{(j)} \stackrel{d}{=} (r_{i_0}^{(j)}, r_{i_1}^{(j)}, \ldots, r_{i_{m-1}}^{(j)}),$$

ahol

$r_{i_\ell}^{(j)} \stackrel{d}{=}$ az "ℓ"-ek száma a j-csoport elemeinek i-edik oszlopában.

Definició: $M_{\underline{a}_{(k)}^{(j)}} \stackrel{d}{=}$ a j-csoport azonos $\underline{a}_{(k)}^{(j)}$ vektorral rendelkező elemeinek száma (k=1,2,...).

Algoritmus (szimmetrikus függvények identifikálása):

o./ Az értéktáblázat sorait a j függvény-érték szerint osztályozzuk. (j-csoportok képzése).

1./ Minden j-csoportban meghatározzuk az $\underline{r}_i^{(j)}$ r-vektorokat, i=1,2,...,n.

2./ Minden $j \in M$-re megvizsgáljuk, hogy i=2,3,...,n értékekre teljesül-e az $\underline{r}_1^{(j)} = \underline{r}_i^{(j)}$ egyenlőség. Ha nem, akkor a vizsgált függvény nem szimmetrikus. Ha igen, akkor 3./ lépés következik.

3./ Ha minden $\underline{a}^{(j)}$ és j-re teljesül az

$$M_{\underline{a}_{(i)}^{(j)}} = \binom{n}{a_0^{(j)}} \cdot \binom{n-a_0^{(j)}}{a_1^{(j)}} \cdot \ldots \cdot \binom{n-\sum_{k=0}^{m-2} a_k^{(j)}}{a_{m-1}^{(j)}}$$

egyenlőség, akkor a függvény szimmetrikus, egyébként nem.

$$(\underline{a}_{(i)}^{(j)} = (a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, \ldots, a_{m-1}^{(j)}))$$

Példa: Vizsgáljuk meg, hogy szimmetrikus-e a 2. táblázatban megadott $\varphi(x_1, x_2)$ függvény (n=2, m=3)?

0.) 0-csoport: (0, 4, 8)

1-csoport: (1, 3)

2-csoport: (2, 5, 6, 7)

1.) $\underline{r}_1^{(0)} = (1,1,1)$, $\underline{r}_2^{(0)} = (1,1,1)$

$\underline{r}_1^{(1)} = (1,1,0)$, $\underline{r}_2^{(1)} = (1,1,0)$

$\underline{r}_1^{(2)} = (1,1,2)$, $\underline{r}_2^{(2)} = (1,1,2)$

2.) $r_1^{(j)} = r_2^{(j)}$ teljesül j = 0, 1, 2-re

3.) A 2. táblázatból látható, hogy az egyenlőségek teljesülnek.

Tehát a vizsgált függvény szimmetrikus.

2. táblázat.

decimális ábrázolás	x_1	x_2	$\underline{a}$	$\varphi(x_1,x_2)$	$M_{\underline{a}(i)}^{(x)}$	$\binom{2}{a_0^{(i)}}\binom{2-a_0^{(i)}}{a_1^{(i)}}\cdot\binom{2-a_0^{(i)}-a_1^{(i)}}{a_2^{(i)}}$
0	0	0	(2,0,0)	0	1	$\binom{2}{2}\binom{0}{0}\cdot\binom{0}{0}=1$
1	0	1	(1,1,0)	1		
2	0	2	(1,0,1) 1	2	2	$\binom{2}{1}\binom{1}{1}\binom{0}{0}=2$
3	1	0	(1,1,0)	1		$\binom{2}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}=2$; $\binom{2}{0}\binom{2}{2}\binom{0}{0}=1$
4	1	1	(0,2,0) 2	0	1 2	
5	1	2	(0,1,1)	2		
6	2	0	(1,0,1) 2	2	2	$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{1}{1}=2$
7	2	1	(0,1,1)	2		
8	2	2	(0,0,2)	0	1	$\binom{2}{0}\binom{2}{0}\binom{2}{2}=1$

<u>Megjegyzés:</u> Az 1.4.b. tétel alapján a $\varphi \in \Gamma_n$ szimmetrikus függvényt egyértelmüen jellemzi az u.n. <u>redukált értéktábla,</u> amely a különböző sulyvektorokhoz hozzárendelt függvényértékek táblázata. A redukció mértékére jellemző

$$rf \triangleq \frac{a_{m,n}}{m^n} = \frac{(n+m-1)!}{n!\,(m-1)!\,m^n}$$

redukciós faktor mindkét paraméterében monoton csökken és a megfelelő határértékek zérusok: $\lim\limits_{\substack{m \to \infty \\ n\ fix}} rf=0$, $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ m\ fix}} rf=0$.

E tulajdonság következtében a szimmetrikus függvények realizálása igen egyszerüvé válik.

<u>1.3. Szuperpozició és további definiciók</u>

A függvény-ekvivalencia fogalom átfogalmazására elsősorban a szuperpozició vizsgálata szempontjából volt szükség. Ugyanis felesleges bonyodalmat okozna, ha összetett függvény változóinak sorrendjét akarnánk értelmezni - a komponens-függvényekben előirt sorrendek alapján. Az alábbiakban a szuperpozicióval kapcsolatos néhány egyszerü fogalmat vezetünk be.

Definició: Legyen $\varphi(x_1,\dots,x_n)\in\Gamma_n$, $\psi(y_1,\dots,y_k)\in\Gamma_k$
s az $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ és $Y=\{y_1,\dots,y_k\}$
nem feltétlenül diszjunkt halmazok ($n,k\geq 1$). A

$$\varphi(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)\circ_i\psi(y_1,\dots,y_k)\stackrel{d}{=}$$

$$\stackrel{d}{=}\varphi(x_1,\dots,x_{i-1},\psi(y_1,\dots,y_k),x_{i+1},\dots,x_n) \qquad (1.)$$

összetett függvényt egyszerü szuperpoziciónak nevezzük. (A $\psi = x_i$ esetben nem akarunk különbséget tenni $\varphi\circ_i x_i$ és φ között.) A "$\varphi\circ_i\psi$" kifejezést igy olvassuk: " φ kör i, ψ ".

Definició: Tekintsük a nem feltétlenül diszjunkt

$$X=\{x_1,\dots,x_n\},\ Y_1=\{y_{11},\dots,y_{1k_1}\},\ \dots,\ Y_n=\{y_{n1},\dots,y_{nk_n}\}$$

argumentum-halmazok felett értelmezett

$$\begin{array}{ll}\varphi(x_1,\dots,x_n); & \\ \varphi_1(y_{11},\dots,y_{1k_1}) & (2.)\\ \text{-- -- -- -- --} & \\ \varphi_n(y_{n1},\dots,y_{nk_n}) & \end{array}$$

függvényrendszert. Képezzük a

$$\varphi^*\stackrel{d}{=}\varphi(x_1,\dots,x_n)\circ(\varphi_1,\dots,\varphi_n)\stackrel{d}{=}\varphi(\varphi_1(y_{11},\dots,y_{1k_1}),\dots,\varphi_n(y_{n1},\dots,y_{nk_n})) \quad (3.)$$

összetett függvényt; azt mondjuk, hogy a φ^* szuperpoziciót φ függvényből az $x_1 := \varphi_1,\dots, x_n := \varphi_n$ helyettesitéssel állitottuk elő. (Itt megengedjük a $\varphi_i = x_j$ függvényeket is minden i, j párra.)

Megjegyzések: 1./ Nem fog félreértést okozni, hogy az összetett függvényt és a müveletet egyaránt szuperpoziciónak nevezzük.

2./ Bár a szuperpoziciót és az egyszerü szuperpoziciót egymástól függetlenül definiáltuk, látni fogjuk, hogy a "O_i" müvelet "kommutativ" és asszociativ, ezért az előbbi az utóbbiból adódik:

$$O = \prod_{i=1}^{n} O_i = O_1 O_2 \ldots O_n$$

3./ Tulajdonképpen (3) a (2) függvényrendszer feletti szuperpoziciós formulát értelmezi, pontosabban a rekurziv definició:

a./ (2) elemei szuperpoziciós formulák

b./ ha $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ formulák, akkor (3) is az

c./ a./ és b./-vel minden formula előállitható.

Azonban a szuperpoziciós vonatkozások szempontjából nincs jelentős szerepe a formuláknak, mert csak adott formula által reprezentált függvények ekvivalenciáját értelmező ekvivalencia-relációt definiálunk a formulák halmazán.

Ismétlés nélküli szuperpozició: (3)-ban a $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ belső függvények $Y_1, \ldots, Y_n$ argumentum-halmazai páronként diszjunktak, továbbá, nem tartalmazzák a φ függvény egyetlen nem-helyettesitett változóját sem.

Definició: A $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ függvény X argumentum-halmazának egy $X' = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ részhalmaza szeparálható (φ-re nézve), ha létezik $\varphi = \psi o_i \varphi_i(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ ismétlés nélküli egyszerü szuperpoziciós reprezentáció.

Az $\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}$; $\{x_1, \ldots, x_n\}$ egy- és n-elemü részhalmazok nyilvánvalóan minden $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ függvényre szeparálhatók. A szeparálhatóság vizsgálata az optimális technikai realizálhatóság szempontjából is jelentőséggel bir.

A szuperpozició bevezetésénél megjegyeztük, hogy ez a művelet "kommutativ" és asszociativ; ennek pontos jelentését az alábbiakban fogjuk megadni. Az idézőjel azt jelzi, hogy nem a $\varphi o \psi = \psi o \varphi$ tipusu, hanem az operátorok közötti kommutativitásról van szó. Legyen x egy argumentuma φ-nek (de φ'-nek nem) és x' egy argumentuma φ'-nek (de φ''-nek nem); ekkor nyilvánvalóan fennáll a következő azonosság ($\odot_{x_i}$ és O_i jelentése azonos):

$$* \qquad (\varphi \odot_x \varphi') \odot_{x'} \varphi'' = \varphi \odot_x (\varphi' \odot_{x'} \varphi'') \stackrel{d}{=} \varphi \odot_x \varphi' \odot_{x'} \varphi''$$

Hasonlóan, ha x' és x'' argumentuma φ-nek (de φ' és φ''-nek nem), a következő azonosság igaz:

$$** \qquad (\varphi \odot_{x'} \varphi') \odot_{x''} \varphi'' = (\varphi \odot_{x''} \varphi'') \odot_{x'} \varphi' \stackrel{d}{=} \varphi \odot_{x', x''} (\varphi', \varphi'')$$

A ✱ és ✱✱ azonosság rendre az egyszerü szuperpozició asszociativitás illetve kommutativitás törvénye. A ✱✱ azonosság alapján valóban látható, hogy egyszerü szuperpoziciók egymásutánjaként adódik a (3) szuperpozició:

$$(\dots((\varphi o_1 \varphi_1) o_2 \varphi_2) o_3 \varphi_3 \dots) o_n \varphi_n = \varphi o(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n),$$

ahol $o = o_1 o_2 \dots o_n$ (Ha teljesül az $X \cap (\bigcup_{i=1}^{n} Y_i) = \emptyset$ feltétel.)

Ez utóbbi összefüggés, valamint ✱ és ✱✱ ismételt alkalmazásának eredménye a következő

1.6. Tétel: Az ismétlés nélküli szuperpozició asszociativ, azaz a

$$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \psi_{11}, \dots, \psi_{1k_1}, \psi_{21}, \dots, \psi_{2k_2}, \dots, \psi_{n1}, \dots, \psi_{nk_n}$$

függvények ismétlés nélküli szuperpoziciójára fennáll:

$$(\varphi o(\varphi_1, \dots, \varphi_n)) o(\psi_{11}, \dots, \psi_{1k_1}, \dots, \psi_{n1}, \dots, \psi_{nk_n}) = \varphi o(\varphi_1 o(\psi_{11}, \dots, \psi_{1k_1}), \dots, \varphi_n o(\psi_{n1}, \dots, \psi_{nk_n}))$$

A bizonyitás az előbbiek alapján minden nehézség nélkül rekonstruálható, ezért nem részletezzük.

Megkülönböztetett figyelmet érdemelnek az u.n. "jobb-zárójeles standard formáju" vagy reguális szuperpoziciók, mert ez esetben nem lényeges, hogy a szuperpozició ismétlésnélküli-e vagy sem. Algebrai szempontból egyik legfontosabb kérdés a $\langle \Gamma_n ; o \rangle$ algebrai rendszer strukturális vizsgálata, tehát pl. a $\langle \Gamma_n' ; o \mid \Gamma_n' \subseteq \Gamma_n \rangle$ részrendszerek jellemzése. Minthogy azonban Γ_n nem valamely rögzitett $\{x_1, \dots, x_n\}$ változó-halmazon értelmezett függvények halmaza, $\langle \Gamma_n ; o \rangle$ tetszőleges véges számu változótól függő függvényeket tartalmaz.

Hiszen $\langle \Gamma_n ; \circ \rangle$ a $\varphi(x_1,\dots,x_n) \in \Gamma_n$ függvény k-adik hatványát is tartalmazza (bármely $k \geq 1$ egész számra), amelyet a következőképpen definiálunk rekurzióval:

(i.) $\varphi^1 \overset{d}{=} \varphi$;

(ii.) $\varphi^k(z_1, z_2, \dots, z_{n^k}) \overset{d}{=} \varphi^{k-1}(y_1,\dots,y_{n^{k-1}}) \circ (\varphi(z_1,\dots,z_n), \varphi(z_{n+1},\dots,z_{2n}),\dots,\varphi(z_{n^k-n+1},\dots,z_{n^k}))$

Tehát a φ^k függvény n^k változós, s igy $\varphi^k \notin \Gamma_n$ ha $n>1$. A funkcionális teljesség vizsgálatánál megadunk olyan kétváltozós függvényt, amelyből szuperpozicióval generálható Γ. Ezért Γ_n helyett $(\Gamma_n \neq) \Gamma' \subset \Gamma$ részhalmazokat célszerü vizsgálni.

Definició: A $[\Gamma']$ függvény-osztályt $\Gamma' (\subseteq \Gamma)$ halmaz lezárásának nevezzük, ha $\Gamma' \subseteq [\Gamma']$ és bármely $\varphi, \psi \in [\Gamma']$ esetén $(\varphi \circ_i \psi) \in [\Gamma']$, ahol $\varphi = \varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)$.

Definició: A Γ' függvény-osztályt funkcionálisan zártnak nevezzük, ha $[\Gamma'] = \Gamma'$. A $\Gamma'' \subseteq \Gamma'$ osztályt funkcionálisan teljesnek nevezzük a Γ' zárt osztályban, ha $[\Gamma''] = \Gamma'$.

A definició következménye a lezárási operáció alábbi két tulajdonsága $(\Gamma' \subseteq \Gamma)$:

a./ $[[\Gamma']] = [\Gamma']$

b./ ha $\Gamma'' \subseteq \Gamma'$, akkor $[\Gamma''] \subseteq [\Gamma']$.

<u>Definició:</u> A Γ'' függvény-rendszert Γ' zárt osztály <u>bázis-rendszerének</u> (vagy: <u>bázisának</u>) nevezzük, ha Γ'' teljes Γ'-ben, és egyetlen $\Gamma'''\subset\Gamma''$ valódi rész-rendszer sem teljes Γ'-ben.

A Γ'' bázis-rendszer lehet véges halmaz vagy megszámlálható számosságu.

<u>Definició:</u> Γ'' <u>kváziteljes rendszer</u> Γ'-ben, ha Γ'' nem teljes Γ'-ben, de bármely $\varphi\in\Gamma'\setminus\Gamma''$ függvényre igaz, hogy $\Gamma''\cup\{\varphi\}$ teljes, azaz $[\Gamma''\cup\{\varphi\}]=\Gamma'$.

A definicióból következik, hogy a Γ'-ben kváziteljes rendszer zárt rendszer.

Nevezzük a $\varphi\in\Gamma$ függvény $k(\varphi)$ <u>rend</u>jének azon változóinak számát, melyektől ténylegesen függ. Legyen Γ'' véges bázis a Γ' zárt osztályban. Véges halmaz rendjén a maximális rendü elemének rendjét értve

$$k(\Gamma'')=\max_{\varphi\in\Gamma''}k(\varphi)$$

a <u>Γ' véges bázisu zárt osztály rend</u>jének definiciója:

$k(\Gamma')=\min_{\Gamma''}k(\Gamma'')$, azaz Γ' véges bázisai közül a minimális rendü rendje.

<u>Példák:</u> Tekintsünk most egy-egy példát az egyes fogalmakra. Az 1.1. lemmában indukcióval definiált $\mathfrak{Z}_3^k(x,1)$ egyváltozós függvény a $\Gamma^{(1)}\overset{d}{=}\{\mathfrak{Z}_3(x,1)\}$ egy-elemü halmaz feletti k-szor ismételt szuperpozicióval adódik, s igy ez (ebben a speciális esetben, ahol n=1) egyben példa a $\mathfrak{Z}_3(x,1)$ függvény k-adik hatványára is. A $\Gamma^{(1)}$ lezárása tehát :

$$[\Gamma^{(1)}]=\{\mathfrak{Z}_3^k(x,1)\mid k\in\mathfrak{J}_m\}=\bigcup_{k=1}^{m}\{\mathfrak{Z}_3(x,k)\}\overset{d}{=}\Gamma^{(2)}$$

Ezért a $\Gamma^{(2)}$ függvényosztály zárt, továbbá $\Gamma^{(1)}$ teljes $\Gamma^{(2)}$-ben és $\Gamma^{(1)}$ nyilvánvalóan bázisa is $\Gamma^{(2)}$-nek, mert egy elemü. Ha m páros, $\{\zeta_3(x,2)$ nem teljes és nem is kváziteljes $\Gamma^{(2)}$-ben, $[\{\zeta_3(x,2)\}]$ azonban már kváziteljes. Ugyanis nem teljes, mert a $\zeta_3(x,2\ell+1)$ alaku függvényeket nem állitja elő, másrészt bármely $\zeta_3(x,2\ell)$ alaku függvényt előállit, és ezért

$$\Gamma^{(1)}=\{\zeta_3(x,2\ell+1)\circ\zeta_3(x,m-2\ell)\}$$

bármely $\zeta_3(x,2\ell+1)\in\Gamma^{(2)}\setminus[\{\zeta_3(x,2)\}]$ elemre.

A következő két példára később is fogunk hivatkozni, ezért sorszámozzuk.

<u>I. Példa:</u> Legyen $T_{M',0}=\{\varphi\,|\,\varphi\in\Gamma,\ \varphi(M',M',\dots,M')\subseteq M'\subset M$,

ahol $\varphi(M',M',\dots,M')\subseteq M'$

jelentése: $\left((\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in(M')^n\right)\Rightarrow\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in M'$.

Nyilvánvaló, hogy az M'halmazt <u>megtartó</u> függvények $T_{M',0}$ osztálya zárt.

<u>II. Példa:</u> Legyen $M = M^{(0)}\cup M^{(1)}\cup\dots\cup M^{(\ell)}$ $(\ell\leq m-1)$ az M halmaznak egy (D-vel jelölt) particiója (azaz, páronként elem-idegen, valódi részhalmazok egyesitéseként állitjuk elő M-et.)

A <u>D particióra nézve ekvivalensek</u>nek mondjuk az α és β számokat: $\alpha\sim\beta$ (mod D), ha α és β azonos részhalmazba, pl. $M^{(j)}$-be esik. <u>n-esek ekvivalenciája:</u> $\underline{\alpha}\sim\underline{\beta}$ (mod D) $\overset{d}{\Longleftrightarrow}\alpha_i\sim\beta_i\,(\mathrm{mod}\,D),\ i\in\mathcal{I}_n$.

Könnyen látható, hogy a <u>D particiót megtartó</u> Γ-beli függvények

$$U_D\overset{d}{=}\{\varphi\,|\,\varphi\in\Gamma,\ (\underline{\alpha}\sim\underline{\beta}\,(\mathrm{mod}\,D))\Rightarrow(\varphi(\underline{\alpha})\sim\varphi(\underline{\beta})\ (\mathrm{mod}\,D))\}$$

halmaza zárt osztályt képez.

1.4. Függvény-rendszerek homomorfizmusa, dualitás.

1.4.1. Homomorfizmus.

Legyen $\Gamma^x \subseteq \Gamma$ és $\Gamma^y \subseteq \Gamma$ a természetes számokkal indexelt x, illetve y független változók halmazán értelmezett függvények egy-egy halmaza. A $\Gamma^x \to \Gamma^y$ leképezést homomorf leképezésnek nevezzük, ha az $x_i \longleftrightarrow y_i$ $(i = 1,2, \ldots)$ megfeleltetés esetén minden $\varphi(x_1,\ldots,x_n) \in \Gamma^x$ elemhez pontosan egy $\psi(y_1,\ldots,y_n) \in \Gamma^y$ elemet rendel hozzá, amelyre teljesül az alábbi két feltétel:

(i) $\Gamma^x \ni \varphi(x_{i_1},\ldots,x_{i_n}) \longrightarrow \psi(y_{i_1},\ldots,y_{i_n}) \in \Gamma^y$

(ii) Legyen a $\varphi_j(x_{j1},\ldots,x_{jk_j}) \in \Gamma^x$ megfelelője $\psi_j(y_{j1},\ldots,y_{jk_j}) \in \Gamma^y$,

vagy $\varphi_j = x_j$ és $\psi_j = y_j$, $j=1,2,\ldots n$.
Ez esetben $\psi(\psi_1,\ldots,\psi_n) \in \Gamma^y$ a $\varphi(\varphi_1,\ldots,\varphi_n) \in \Gamma^x$ függvénynek megfeleltetett függvény.

Ha a $\Gamma^x \to \Gamma^y$ homomorfizmussal egyidejüleg létezik egy $\Gamma^y \to \Gamma^x$ homomorfizmus is, akkor $\Gamma^x \longleftrightarrow \Gamma^y$ izomorfizmusról beszélünk.

Megjegyzés: A homomorfizmus müvelettartó jellege jobban kidomborodik a feltételek formális leirásánál.

$X_\infty = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, $Y_\infty = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$

jelöléssel

(i) $\Gamma^x \ni \varphi_0(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \longrightarrow \psi_0(y_{i_1}, \dots, y_{i_n}) \in \Gamma^y$

(ii) $\left(\Gamma^x \cup X_\infty \ni \varphi_j(x_{j_1}, \dots, x_{j_{k_j}}) \to \psi_j(y_{j_1}, \dots, y_{j_{k_j}}) \in \Gamma^y \cup Y_\infty,\ j \in \mathcal{J}_n\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Gamma^x \ni \varphi_0(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \to \psi_0(\psi_1, \dots, \psi_n) \in \Gamma^y.$$

Példa: Tekintsük az $L = \{0, 1, 2, \dots, l-1\}$ halmazt megtartó függvények $T_{L,0}$ osztályát. Feleltessük meg minden $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in T_{L,0}$ függvénynek azt a $\psi(y_1, \dots, y_n)$ függvényt, amelyre teljesül, hogy $\underline{\alpha} \in L^n$ esetén $\psi(\underline{\alpha}) = \varphi(\underline{\alpha})$, s az $M^n \setminus L^n$ halmazon nem definiáljuk. Nyilvánvaló, hogy $\psi \in \Lambda$, ahol $\Lambda \overset{d}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} \Lambda_n$ az l-értékü logika függvényeinek halmaza, azaz

$$\Lambda_n \overset{d}{=} \{\varphi \mid \varphi : L^n \to L\}.$$

Megmutatjuk, hogy a $T_{L,0} \to \Lambda_n$ leképezés homomorfizmus. Az (i) feltétel nyilvánvalóan teljesül, ezért elegendő (ii) teljesülését bizonyitani.

Jelölje a $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ $T_{L,0}$-beli függvények Λ-beli megfelelőjét rendre $\psi(y_1, \dots, y_n)$, $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$. A definicióból következően argumentumban L-re szoritkozva $\psi = \varphi$ és $j \in \mathcal{J}_n$ -re $\psi_j = \varphi_j$, s minthogy $T_{L,0}$ zárt, igy $\varphi_0(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in T_{L,0}$ (egyetlen) Λ-beli megfelelője $\psi_0(\psi_1, \dots, \psi_n)$, mert erre teljesül a $\varphi_0(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \psi_0(\psi_1, \dots, \psi_n)$ egyenlőség L-re szoritkozva.

A példában szereplő homomorfizmus igen fontos speciális esete az L=M automorfizmus, amelyre tehát $T_{M,0} = \Gamma$. Ezzel foglalkozunk az itt következő, dualitásról szóló részben.

Dualitás.

Legyen $\pi(x) \in \Gamma_1$ egy m különböző értéket felvevő (1-változós) függvény, azaz az M halmazon értelmezett permutáció, inverzét jelölje $\pi^{-1}(x)$. Nyilvánvaló, hogy $\langle \Gamma_1; o \rangle$ az m-edrendü szimmetrikus félcsoport és $\langle \Gamma_1'; o \rangle$ az m-edrendü szimmetrikus csoport, ha

$$\Gamma_1' = \langle \pi(x) \mid \pi(x) \in \Gamma_1 \text{ és } \pi(x) \text{ felvesz m különböző értéket} \rangle$$

Definició: A $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma$ függvénynek a $\pi(x)$ permutációra nézve duális függvénye (π-duál függvénye) a φ^{π} függvény:

$$\varphi^{\pi}(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{d}{=} \pi^{-1}(x) \circ \varphi(y_1, \ldots, y_n) \circ (\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)).$$

A definicióból adódik: $\varphi^{\pi} = \varphi \Longleftrightarrow \varphi^{\pi^{-1}} = \varphi$, azaz $\varphi^{\pi \circ \pi^{-1}} \equiv \varphi$, bármely $\varphi \in \Gamma$ és $\pi(x)$ permutáció esetén.

Példák: (a) φ = c konstans függvény π-duál függvénye:

$$\varphi^{\pi} = \pi^{-1}(c)$$

(b) $\varphi = x \equiv \mathfrak{Z}_3(x, o)$ függvény π-duálja:

$$\varphi^{\pi} = x = \mathfrak{Z}_3(x, o)$$

(c) $\mathfrak{Z}_3(x, k)$ π-duálja,

ha $\pi = \mathfrak{Z}_3(x, \ell)$: $\mathfrak{Z}_3^{\pi}(x, k) = \mathfrak{Z}_3(x, k)$;

ha $\pi_o = \mathfrak{Z}_o(x)$: $\mathfrak{Z}_3^{\pi_o}(x, k) = \mathfrak{Z}_3(x, m-k)$ (itt $\pi_o^{-1}(x) = \pi_o(x)$)

(d) $\mathfrak{Z}_1^{\pi_o}(x_1, x_2) = \mathfrak{Z}_2(x_1, x_2)$.

Belátása: $\mathfrak{Z}_1^{\pi_o}(x_1, x_2) = \pi_o^{-1} \circ \mathfrak{Z}_1(x, y) \circ (\pi_o(x_1), \pi_o(x_2)) =$

$$= \pi_o(x) \circ \mathfrak{Z}_1(m-1-x_1, m-1-x_2) = m-1-\mathfrak{Z}_1(m-1-x_1, m-1-x_2) = \mathfrak{Z}_2(x_1, x_2).$$

A $\Gamma' \subset \Gamma$ halmaz π-duál halmazának definiciója:

$$\Gamma'^{\pi} \overset{d}{=} \{\psi \mid \psi = \varphi^{\pi},\ \varphi \in \Gamma'\}.$$

Γ' önduális halmaz π -re nézve, ha $\Gamma'^{\pi} = \Gamma'$; ez természetesen nem azonos a π -re nézve önduális függvények

$$S_{\pi} \overset{d}{=} \{\varphi \mid \varphi \in \Gamma,\ \varphi^{\pi} = \varphi\}$$

halmazával. Ez utóbbival később részletesen fogunk foglalkozni. A következő példa azt is tanusitja, hogy adott π-re nézve több önduális halmaz is létezhet, s természetesen ezek egyesitése is önduális (ugyanazon π -re.) Nyilvánvaló, hogy $S_{\pi}^{\pi} = S_{\pi}$.

Példák: (a) Az előző példában szereplő $\pi_0 = \mathfrak{Z}_0(x)$ permutációra nézve önduális a következő két halmaz:

$$\Gamma' \overset{d}{=} \{\mathfrak{Z}_1(x_1,x_2),\ \mathfrak{Z}_2(x_1,x_2)\}$$

$$\Gamma'' \overset{d}{=} \bigcup_{k=0}^{m-1} \{\mathfrak{Z}_3(x,k)\}.$$

(b) Tetszőleges π -re $\Gamma_1^{\pi} = \Gamma_1$.

A π-duál operációk egymásutáni alkalmazására vonatkozik a következő:

1.2. Lemma: Legyen a $\pi_1(y)$ és $\pi_2(x)$ permutációk szuperpoziciója: $\pi(x) = \pi_1(y) \circ \pi_2(x)$.
$\varphi \in \Gamma$ π -duálja: $\varphi^{\pi} = (\varphi^{\pi_1})^{\pi_2}$.
Szavakban: Bármely $\varphi \in \Gamma$ π_1 -duáljának π_2 -duálja megegyezik φ -nek a $\pi_1 \circ \pi_2$ szuperpozicióra vonatkozó duáljával.

Megjegyzés: $\pi_1(y) \circ \pi_2(x) = \pi_2 \cdot \pi_1$,
ahol "·" permutáció-szorzást jelöl.

Bizonyitás:

$$\varphi^{\pi}=\pi^{-1}\circ\varphi\circ(\pi(x_1),\dots,\pi(x_n))=\pi_2^{-1}\circ\pi_1^{-1}\circ\varphi\circ(\pi_1\circ\pi_2(x_1),\dots,\pi_1\circ\pi_2(x_n))=$$
$$=\pi_2^{-1}\circ\left(\pi_1^{-1}\circ\varphi\circ(\pi_1(y_1),\dots,\pi_1(y_n))\right)\circ(\pi_2(x_1),\dots,\pi_2(x_n))=\left(\varphi^{\pi_1}\right)^{\pi_2}.$$

Az átalakitások közben a szuperpozició asszociativitását és a permutáció-szorzat inverz-képezési szabályát használtuk fel. ▲

Következmény: Tetszőleges $\varphi\in\Gamma$ esetén az r-szer iterált π-duált φ^{π^r} -el jelölve, $\varphi^{\pi^r}=\varphi$ pontosan akkor igaz, ha r többszöröse π (csoportelméleti értelemben vett) rendjének.

A következmény állitása tulajdonképpen ismert csoportelméleti tény átfogalmazása. A továbbiakban legyen $\pi(x)$ tetszőleges, rögzitett permutáció.

A következő lemma állitásai is könnyen leolvashatók a π-duál függvény definiciójából, ezért bizonyitás nélkül közöljük.

1.3. Lemma: Legyen $\varphi=\varphi(x_1,\dots,x_n)\in\Gamma$ és a π-duálját jelölje $\varphi^{\pi}(\in\Gamma)$. Igazak a következő állitások:

(1) Ha φ nem veszi fel a k_1, k_2, ... k_r értékeket, akkor φ^{π} sem veszi fel a megfelelő $\pi^{-1}(k_1), \pi^{-1}(k_2), \dots, \pi^{-1}(k_r)$ értékeket

(2) Ha $\varphi(\underline{\alpha})=\varphi(\underline{\beta})$, akkor $\varphi^{\pi}(\underline{\alpha}')=\varphi^{\pi}(\underline{\beta}')$, ahol

$\underline{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\underline{\beta}=(\beta_1,\dots,\beta_n)$, $\underline{\alpha}'=(\alpha_1',\dots,\alpha_n')$, $\underline{\beta}'=(\beta_1',\dots,\beta_n')$; $\alpha_i'=\pi^{-1}(\alpha_i)$, $\beta_i'=\pi^{-1}(\beta_i)$.

(3) Ha φ az $A\subset M^n$ halmazon páronként különböző értéket vesz fel, akkor φ^{π} ugyanilyen tulajdonságu a megfelelő $\{\underline{b}\mid\underline{b}=(\pi^{-1}(a_1),\dots,\pi^{-1}(a_n)),(a_1,\dots,a_n)\in A\}$ halmazon.

Most következő tétel a dualitás alaptételének tekinthető.

<u>1.7. Tétel:</u> Ha $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ a

$$\varphi_1(x_{11},\dots,x_{1i_1}),\ \varphi_2(x_{21},\dots,x_{2i_2}),\dots,\ \varphi_p(x_{p1},\dots,x_{pi_p}),\dots$$

függvények szuperpoziciója, akkor a $\varphi^{\pi}(x_1,\dots,x_n)$ π-duál függvény a megfelelő

$$\varphi_1^{\pi}(x_{11},\dots,x_{1i_1}),\ \varphi_2^{\pi}(x_{21},\dots,x_{2i_2}),\dots,\ \varphi_p^{\pi}(x_{p1},\dots,x_{pi_p}),\dots$$

π-duál függvényekből ugyanazon algoritmussal előállitható szuperpozicióval adódik.

<u>Bizonyitás:</u> Nyilvánvaló, hogy elegendő a tételt a szuperpozició definiciójánál megadott (3) elemi (nem iterált) szuperpozició esetére bizonyitani; innen már az általános eset (az iteráció-számra vonatkozó indukcióval) adódik. Legyen

$$\psi(x_1,\dots,x_k)=\psi_0(y_1,\dots,y_n)\circ\left(\psi_1(x_{11},\dots,x_{1i_1}),\psi_2(x_{21},\dots,x_{2i_2}),\dots,\psi_n(x_{n1},\dots,x_{ni_n})\right);$$

ez esetben (az asszociativitás következtében helyenként a zárójeleket elhagyva):

$$\psi^{\pi}(x_1,\dots,x_k)=\pi^{-1}(x)\circ\psi(z_1,\dots,z_k)\circ(\pi(x_1),\dots,\pi(x_k))=$$

$$=\pi^{-1}(x)\circ\psi_0(y_1,\dots,y_n)\circ\left(\psi_1\circ(\pi(x_{11}),\dots,\pi(x_{1i_1})),\dots,\psi_n\circ(\pi(x_{n1}),\dots,\pi(x_{ni_n}))\right)=$$

$$=\pi^{-1}(x)\circ\psi_0(y_1,\dots,y_n)\circ\left(\pi(u_1)\circ\pi^{-1}(v)\circ\psi_1\circ(\pi(x_{11}),\dots,\pi(x_{1i_1})),\dots,\pi(u_n)\circ\pi^{-1}(v)\circ\psi_n\circ(\pi(x_{n1}),\dots,\pi(x_{ni_n}))\right)=$$

$$=\pi^{-1}(x)\circ\psi_0(y_1,\dots,y_n)\circ\left(\pi(u_1)\circ\psi_1^{\pi},\dots,\pi(u_n)\circ\psi_n^{\pi}\right)=\psi_0^{\pi}(u_1,\dots,u_n)\circ(\psi_1^{\pi},\dots,\psi_n^{\pi})$$

▲

Következmények: 1./ Ha $\Gamma'\subset\Gamma$ funkcionálisan zárt osztály, akkor Γ'^{π} is az.

2./ Ha Γ' rendszer zárt és Γ'' teljes Γ'-ben, akkor Γ''^{π} is teljes Γ'^{π}-ben.

3./ Ha $\Gamma''\subset\Gamma'$, akkor $\Gamma''^{\pi}\subset\Gamma'^{\pi}$ reláció is igaz.

2. NÉHÁNY FUNKCIONÁLISAN TELJES RENDSZER ÉS A FUNKCIONÁLIS TELJESSÉG ALAPTÉTELE

Ebben a részben néhány - önmagában is érdekes - funkcionálisan teljes rendszert adunk meg; ezek jelentős szerephez jutnak az általános teljességi kritériumok tárgyalásánál. (Ha az ellenkezőjét nem hangsulyozzuk, funkcionális teljességen mindig a Γ rendszerbeli funkcionális teljességet értjük.)

Mindenek előtt bebizonyitjuk, hogy érvényes a következő

2.1. Lemma: A kétváltozós függvények halmaza teljes, azaz $[\Gamma_2] = \Gamma$.

Bizonyitás: A változók számára vonatkozó indukcióval bizonyitjuk, hogy bármely $\varphi(x_1,\dots,x_n) \in \Gamma_n$ n-változós függvényre igaz: $\varphi(x_1,\dots,x_n) \in [\Gamma_2]$.
Az állitás n=0,1,2-re igaz: n≤2-re

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) \in \Gamma_2 .$$

Az indukciós feltevés szerint n-1-re igaz az állitás, azaz bármely $i \in M$ esetén $\varphi(i) \overset{d}{=} \varphi(i,x_2,\dots,x_n) \in [\Gamma_2]$.
Az indukciós lépés bizonyitásához azt kell kimutatni, hogy $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ szuperpozicióval előállitható Γ_{n-1}-en. Ez azonban igaz, mert:

(i) $$J_2(x_1,x_2,\dots,x_n) = \max\{x_1,x_2,\dots,x_n \mid x_i \in M\} = J_2(x_1,x_2,\dots,x_{n-2},J_2(x_{n-1},x_n)).$$

Ez az előállithatóság $J_2(x,y)$ kommutativ és asszociativ voltából következik: $J_2(x,y) = J_2(y,x)$,

$$J_2(x,J_2(y,z)) = J_2(J_2(x,y),z) \overset{d}{=} J_2(x,y,z).$$

(ii) $$\mu_i(x,y) \overset{d}{=} \begin{cases} y, & \text{ha } x=i \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \qquad (1.)$$

$$\lambda_i(x_1,x_2,\dots,x_n) \overset{d}{=} \mu_i(x,y) \circ (x_1, \varphi(i)) \qquad (2.)$$

függvényekből $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ igy állitható elő:

$$\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n) = \mathfrak{Z}_2(z_1,z_2,\dots,z_m) \circ (\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{m-1}) \qquad (3.)$$

Ez az egyenlőség triviálisan adódik: $x_1=j$ $(j \in M)$ esetén mindkét oldal a $\varphi(j,x_2,\dots,x_n)$ értéket veszi fel.

Következmény:

Ha $\Gamma_2 \subseteq [\Gamma']$, akkor $[\Gamma'] = \Gamma$, vagy másként fogalmazva:

$$|\Gamma_2 \cap [\Gamma']| = m^{m^2} \Longrightarrow [\Gamma'] = \Gamma.$$

(A bizonyitás alap-ötletét [10]-ből vettük át.)

Megjegyezzük, hogy a lemma bizonyitásában szereplő gondolatmenet ismétlésével, az indukció kezdőlépéseként n=0-t irva, adódik a következő tétel bizonyitása (az (a) rész az irodalomban nem szerepel):

2.1. Tétel: (a) A $\Gamma^0 \overset{d}{=} \{0,1,\dots,m-1, \mathfrak{Z}_2(x_1,x_2), \mu_i(x,y), i=0,1,\dots,m-1\}$ rendszer funkcionálisan teljes.

(b) A

$$\Gamma^1 \overset{d}{=} \{0,1,\dots,m-1, \mathfrak{I}_1(x_1,x_2), \mathfrak{Z}_2(x_1,x_2), \mu_i(z,m-1) \overset{d}{=} \omega_i(z), i=0,1,\dots,m-1\}$$

teljes rendszer.

A tételben az m számu konstans a konstans függvényeket jelöli, az m számu $\mu_i(x,y)$ függvény szerepe pedig az igazságfüggvények vizsgálatából ismert "jelenléti függvény" szerepéhez hasonló. Továbbá, a (3) összefüggés az A. kifejtési tétel 1. következményének általánositása $m \geq 2$ esetre. ($\mu_i(x,y)$ az x^{α} általánositásának is tekinthető.)

A (b) rész állitása az alábbi nyilvánvaló azonosság következménye:

$$\lambda_i(x_1,x_2,\dots,x_n) = \mathfrak{I}_1(z_1,z_2)\circ(\omega_i(x_1),\varphi(i)) \qquad (2')$$

A kifejtési tétel általánositása is megadható (3) alapján (továbbá, ennek következményeként a diszjunktiv normálformával való előállitás), azonban ezt nem fogjuk felhasználni, s ezért bonyolultsága miatt explicite nem adjuk meg.

2.2. Tétel: A $\Gamma^2 \overset{d}{=} \{\mathfrak{I}_2(x_1,x_2),\ \mathfrak{I}_3(x,1)\}$ teljes rendszer.

Bizonyitás: A Γ^2 halmazon generáljuk Γ^1-et, s ezzel az előző tételre vezetjük vissza. Nyilvánvaló, hogy

$$\mathfrak{I}_2(x,\mathfrak{I}_3(x,1),\dots,\mathfrak{I}_3(x,m-1)) = m-1,$$

s ebből $\mathfrak{I}_3(x,1)$ alkalmazásával adódnak a konstans-függvények. ($\mathfrak{I}_3(x,k) = \mathfrak{I}_3^k(x,1)$ — láttuk.)

Továbbá $\omega_i(x) = \mathfrak{I}_3(\mathfrak{I}_2(\mathfrak{I}_3(x,\alpha)\,|\,\alpha \neq m-1-i),1)$

mert $\omega_i(i) = \mathfrak{I}_3(\mathfrak{I}_2(0,1,2,\dots,m-2),1) = \mathfrak{I}_3(m-2,1) = m-1,$

és $x \neq i$ esetén

$$\mathfrak{I}_3(\mathfrak{I}_2(\mathfrak{I}_3(x,\alpha)\,|\,\alpha \neq m-1-i),1) = 0$$

Ugyanis, ha $x = j \in M \setminus \{i\}$, akkor $\alpha = m-1-j$ értékre $\mathfrak{I}_3(j,\alpha) = m-1$, és igy valóban:

$$\mathfrak{I}_3(m-1,1) = 0.$$

Végül a $\mathfrak{I}_1(x_1,x_2)=\mathfrak{I}_2^{\Pi_0}(x_1,x_2)=\Pi_0(z)\circ\mathfrak{I}_2(y_1,y_2)\circ(\Pi_0(x_1),\Pi_0(x_2))$ előállitásban szereplő $\Pi_0(x)=\mathfrak{I}_0(x)$ függvényt kell generálni a Γ^2 halmazon (esetleg felhasználva a már előállitott függvényeket.) Azonban értékadással könnyen ellenőrizhető, hogy azonosan igaz:

$$\mathfrak{I}_0(x)=\mathfrak{I}_2(\mathfrak{I}_3(m-i,\mathfrak{I}_2(i,\omega_i(x)))\mid i=0,1,\dots,m-1).$$ ◢

<u>Következmények:</u> 1./ A $\{\mathfrak{I}_i(x_1,x_2),\mathfrak{I}_3(x,k)\}$ $i=1,2$ -re egyaránt teljes rendszerek, ha (m,k)=1, (azaz, ha m és k relativ primek.)

2./ $\{\mathfrak{I}_3(\mathfrak{I}_2(x_1,x_2),1)\}$ teljes rendszer (m-Sheffer függvény).

Az 1./ elemi számelméleti tény következménye, a 2./ pedig abból következik, hogy $\Psi(x_1,x_2)=\mathfrak{I}_3(\mathfrak{I}_2(x_1,x_2),1)$ jelöléssel

$$\Psi^{(1,1)}(x_1,x_2)\overset{d}{=}\Psi(x_1,x_2),\quad \Psi^{(k+1,k+1)}(x_1,x_2)\overset{d}{=}\Psi^{(k,k)}(y,z)\circ(\Psi,\Psi)=\mathfrak{I}_3(\mathfrak{I}_2(x_1,x_2),k+1)$$

(indukcióval bizonyitható), és ezért $\Psi^{(m,m)}(x_1,x_2)=\mathfrak{I}_2(x_1,x_2)$, továbbá a tétel bizonyitásában leirt módon

$$\mathfrak{I}_3(\Psi,\Psi^{(2,2)},\dots,\Psi^{(m,m)})=m-1,\ \Psi(m-1,m-1)=0,\ \mathfrak{I}_2(x_1,0)=x_1,\ \Psi(x_1,x_1)=\mathfrak{I}_3(x_1,1).$$

◢

A következő teljes rendszer megadása előtt bebizonyitjuk az alábbi lemmát, amelyet a tétel bizonyitásához fogunk felhasználni. A lemmában és a következő tételben a +, −, . jelek a szokásos aritmetikai müveleti jelek.

2.2. Lemma: Legyen $0<i<m-1$ esetén $\Psi_i(x) \overset{d}{=} \min(m-1, i(m-1-x))$ és $I=\left[\frac{i}{m-1-i}\right]$,

ahol $[A]$ az A szám egész részét jelöli: $A-1<[A]\leq A$ feltételt kielégitő egész szám. Igazak a következő állitások:

a./ $\omega_{m-1}(x)=\zeta_0(\Psi_{m-1}(x))$, $\omega_0(x)=\omega_{m-1}(\zeta_0(x))$;

b./ ha létezik pozitiv egész c, amelyre $i=\frac{c}{c+1}(m-1)$, akkor
$$\omega_i(x)=\omega_{m-1}(\zeta_1(m-1,\zeta_1(\Psi_I(x),x)-\zeta_2(\Psi_I(x),x)+m-1));$$

c./ ha nem létezik ilyen c, arra az esetre az $\omega_i(x)$ függvények rekurzive előállithatók j<i indexü $\omega_j(x)$ függvényekből.

Bizonyitás: Definiáljuk rekurziv módon a $\Psi_i(x,y)$ segédfüggvényt:
$$\Psi_1(x,y)\overset{d}{=}\zeta_1(y,\zeta_0(x)),\quad \Psi_{i+1}(x,y)\overset{d}{=}\min(y,\Psi_i(x,y)+\Psi_1(x,y)),\ i=1,2,\dots,m-2 \quad (4.)$$

i-re vonatkozó indukcióval bizonyitjuk, hogy
$$\Psi_i(x,y)=\min(y,i(m-1-x)).$$

Az állitás i=l-re a definició szerint igaz, és az indukciós feltevés alapján i-re is igaz. Ezért
$$\Psi_{i+1}(x,y)=\min(y,\Psi_i(x,y)+\Psi_1(x,y))=\min(y,\min(y,i(m-1-x))+\min(y,m-1-x))=$$
$$=\min(y,(i+1)(m-1-x))$$, mert, ha $y\leq m-1-x$,

akkor nyilvánvaló, ha viszont y> m-l-x, akkor
min (y,i(m-l-x)) + min (y,m-l-x) = min (m-l+y-x, (i+l)(m-l-x))
alapján
$$\Psi_{i+1}(x,y)=\min(y,y+(m-1-x),(i+1)(m-1-x))=$$
$$=\min(y,(i+1)(m-1-x)).$$

Speciálisan i=m-1-re kapjuk: $\Psi_{m-1}(x,y)=\begin{cases} y & \text{ha } x \neq m-1 \\ 0 & \text{ha } x=m-1 \end{cases}$, és

$$\Omega_i(x,y) \overset{d}{=} \mathcal{J}_0(\Psi_i(x,y)) \qquad (0 \leq i \leq m-1) \qquad (5)$$

definicióval: $\Omega_{m-1}(x,y)=\mathcal{J}_0(\Psi_{m-1}(x,y))=\begin{cases} m-1-y, & \text{ha } x\neq m-1 \\ m-1, & \text{ha } x=m-1. \end{cases}$

a./ Látható, hogy y=m-1 speciális esetben $\Psi_i(x,m-1)=\Psi_i(x)$, és igy valóban $\omega_{m-1}(x)=\Omega_{m-1}(x,m-1)=\mathcal{J}_0(\Psi_{m-1}(x))$, és nyilvánvalóan $\omega_0(x)=\omega_{m-1}(\mathcal{J}_0(x))$.

b./ Jelöljük az $\frac{i}{m-1-i}$ hányadost c-vel;

$c=\frac{i}{m-1-i}$, ahonnan $i=\frac{c}{c+1}(m-1)$.

(Itt $0<i<m-1$ feltevés következtében $0<c<m-1$ racionális szám.) Ezért $I=\left[\frac{i}{m-1-i}\right]=[c]\leq c$ s egyenlőség csak c egész értékeire áll.

$$\Psi_I(i)=\min(m-1,I(m-1-i))=(m-1)\min(1,[c]\cdot\tfrac{1}{c+1})=(m-1)\cdot\frac{[c]}{c+1}\leq i,$$

s egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha c egész szám (d(m-1)-1 számu i értékre lesz c egész, ahol d(h) a h osztóinak száma.) Ez esetben a

$$\varphi_I(x)=\omega_{m-1}(\mathcal{J}_1(m-1,\mathcal{J}_1(\Psi_I(x),x)-\mathcal{J}_2(\Psi_I(x),x)+m-1))$$

függvényről belátjuk, hogy $\varphi_I(i)=m-1$ és $x\neq i$ esetén $\varphi_I(x)=0$. Ugyanis

$$\varphi_I(i)=\omega_{m-1}(\mathcal{J}_1(m-1,\mathcal{J}_1(\Psi_I(i),i)-\mathcal{J}_2(\Psi_I(i),i)+m-1))=\omega_{m-1}(\mathcal{J}_1(m-1,m-1))=$$
$$=\omega_{m-1}(m-1)=m-1,$$

és $x\neq i$-re $\quad \Psi_I(x)\neq x$,

mert különben

$x<i$ esetén $\Psi_I(x)=x<i=\Psi_I(i)$,

$x>i$ esetén $\Psi_I(x)=x>i=\Psi_I(i)$

adódik, s ez lehetetlen, mert $\psi_I(x)$ monoton csökkenő, mint az a definicióból közvetlenül látható.

c./ Ha c nem egész, a megfelelő i értékekre

$$\psi_I(i) = \frac{[c]}{c+1}(m-1) = r < i \;;$$

minthogy i=1-re r=0 és $\omega_0(x)$ -et már előállitottuk, az állitást i-re vonatkozó indukcióval bizonyitjuk. Feltéve, hogy r< i-re az $\omega_r(x)$ függvényt már előállitottuk, azt állitjuk, hogy

$$\omega_i(x) = \omega_r(\psi_I(x)).$$

Ugyanis $\omega_r(\psi_I(i)) = \omega_r(r) = m-1$, és $x \neq i$

esetén $\psi_I(x) \neq \psi_I(i) = r$, mert egyenlőség esetén

$$i > r = \min(m-1, I(m-1-i)) = \min(m-1, I(m-1-x))$$

egyenlőségből — minthogy itt m-1>r — i = x ellentmondás adódik.

Tehát valóban $\omega_r(\psi_I(x)) = \begin{cases} m-1, & \text{ha } x = i \\ 0, & \text{ha } x \neq i. \end{cases}$ ▲

2.3. Tétel: A $\{\varphi_0 = m-2,\ \mathfrak{Z}_0(x),\ \varphi_1(x_1,x_2) = \min(m-1,\ x_2-x_1+m-1)\}$ rendszer teljes.

I. Bizonyitás: Azt fogjuk megmutatni, hogy generálható a 2.1.b. tételben szereplő Γ' rendszer, amely teljes. Felhasználva a

$$\varphi_1(x_1,x_2) = \min(m-1, x_2-x_1+m-1) = \begin{cases} m-1, & \text{ha } x_1 \le x_2 \\ x_2-x_1+m-1, & \text{ha } x_1 > x_2 \end{cases}$$

azonosságot, kapjuk:

$$\varphi_1(\varphi_1(x_1,x_2),x_2) = \mathfrak{Z}_1(m-1,\ x_2-\min(m-1, x_2-x_1+m-1)+m-1) =$$

$$= \mathfrak{Z}_1(m-1, \mathfrak{Z}_2(x_1,x_2)) = \mathfrak{Z}_2(x_1,x_2),$$

s ebből a már ismert módon adódik: $\mathfrak{I}_1(x_1,x_2)=\mathfrak{I}_2^{\pi_0}(x_1,x_2)$.

A konstansok származtatása:

$$\mathfrak{I}_0(\varphi_0)=m-1-(m-2)=1,$$

$$\varphi_1(\varphi_0,x_2)=\min(m-1,\ x_2-\varphi_0+m-1)=\min(m-1,x_2+1)=\begin{cases}x_2+1, & \text{ha } x_2<m-1\\ m-1, & \text{ha } x_2=m-1,\end{cases}$$

ezért $\varphi_1(\varphi_0,1)=2,\ \varphi_1(\varphi_0,2)=3,\dots,\varphi_1(\varphi_0,\varphi_0)=m-1,\ \mathfrak{I}_0(m-1)=m-1-(m-1)=0.$

Végül $\omega_i(x)$ származtatását eredményezi a 2.2. lemma állítása, mert a $\psi_i(x)$ függvények rekurziv származtatása $\varphi_1(x_1,x_2)$ -vel igy fejezhető ki:

$$\psi_{i+1}(x,m-1)=\min(m-1,\ \psi_i(x)-x+m-1)=\varphi_1(x,\psi_i(x)).$$ ▲

Megjegyzés: m>2 esetén $\{\mathfrak{I}_0(x),\ \varphi_1(x_1,x_2)\}$ rendszer nem teljes (bár m=2 esetben a megfelelő $\{\bar{x},\ x_1\to x_2\}$ rendszer teljes), mert az $M'=\{0,\ m-1\}$ halmazt megtartja, azaz

$$\left[\{\mathfrak{I}_0(x),\ \varphi_1(x_1,x_2)\}\right]\subseteq T_{M',0}\subset\Gamma,$$

hiszen nem állit elő egyetlen olyan $\varphi(x)$ függvényt sem, amely pl. az x=0 helyen $\varphi(0)=1$ értéket vesz fel.

Lényegesen egyszerübb és rövidebb bizonyitást adott a 2.3. tételre V.I. Klevacsev 1970-ben. [49]. Ez adta az ötletet az alábbi bizonyitáshoz, amely még ez utóbbinál is rövidebb.

II. Bizonyitás: Klevacsev bizonyitásához hasonlóan a 2.2. tételben szereplő Γ^2 teljes rendszert fogjuk generálni. A $\varphi_2(x_1,x_2)\stackrel{d}{=}\mathfrak{I}_0(\varphi_1(x_1,x_2))$ jelöléssel legyen

$$\varphi_2(m-2,x)\stackrel{d}{=}\vartheta_1(x)\ ;\qquad \varphi_2(x,m-2)\stackrel{d}{=}\vartheta_2(x)\ ;$$

$$\varphi_{i+1}(y,z)\stackrel{d}{=}\varphi_2(\varphi_i(y,z),\vartheta_2(z));\quad \varphi_i(\mathfrak{I}_0(\vartheta_2(x)),\vartheta_2(x))\stackrel{d}{=}\varphi_i'(x),\ i=2,3,\dots,m-1.$$

A 3. táblázat szerinti eset-szétválasztással könnyen ellenőrizhető, hogy i=2,3,...,m-1 értékekre

$$\varphi'_{i+1}(x) = \begin{cases} m-1, & \text{ha } x \neq m-1 \\ m-2-i, & \text{ha } x = m-1, \end{cases}$$

és ezért a $\zeta_3(x,1)$ függvény előállitása:

$$\varphi_2(\varphi'_{m-1}(x), \vartheta_1(x)) = \begin{cases} x+1, & \text{ha } x \neq m-1, \\ 0, & \text{ha } x = m-1. \end{cases}$$

Végül $\zeta_2(x_1,x_2) = \varphi_1(x_1, \varphi_1(x_1,x_2))$, mint az I. bizonyitásban.

3. táblázat

x = m-1	m-2-x	0	m-1
x = m-1	0	1	m-2

Következmények: 1./ $\{m-1, \alpha, \varphi_2(x_1,x_2)\}$ teljes rendszer, ha $(\alpha, m-1) = 1$ (relativ prim.)

2./ $\{\alpha, \zeta_0(x), \varphi_2(x_1,x_2)\}$ teljes rendszer, ha $(\alpha, m-1) = 1$.

3./ $\{\zeta_3(x,\alpha), \varphi_2(x_1,x_2)\}$ teljes rendszer, ha $(\alpha, m-1) = 1$

4./ $\{1, \varphi_1(x_1,\zeta_0(x_2))\}$ teljes rendszer,

5./ $\{e(x_1,x_2), \varphi_1(x_1,\zeta_0(x_2))\}$ teljes rendszer, ahol

$$e(x_1,x_2) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x_1 = x_2 \\ 0, & \text{ha } x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

Természetesen az 1./ - 5./ rendszerek duálisai is teljes rendszerek.

A funkcionálisan teljes függvény-rendszerek jellemzését m=2 esetén E.Post adta meg 1921-ben [21]. A tétel általunk (a későbbiekben) közölt fogalmazása Sz.V. Jablonszkij-tól származik [65], és a bizonyitást ebben az egyszerü formában A.V. Kuznyecov közölte. Az $m > 3$ esetben ma sem ismeretes a funkcionálisan teljes rendszerek Post által megadotthoz hasonló jellemzése, azaz, nem ismeretes a zárt osztályok olyan legkisebb rendszere, amelyre igaz lenne, hogy az adott függvényrendszer teljes, ha e zárt osztályok egyikének sem részhalmaza. (Az $m = 3$ esetre Jablonszkij adta meg a 18 zárt rendszert, amely jellemzi a funkcionálisan teljes 3-értékü függvényeket - kandidátusi disszertációjában, 1953-ban; lásd [65]).

Bár gyakorlati konstrukcióra lehetőséget adó jellemzés nem ismeretes, A.V.Kuznyecov megmutatta, hogy ilyen zárt osztályok rendszere minden m értékre létezik. A tétel pontos megfogalmazása előtt bebizonyitjuk, hogy igaz a következő

2.4. Tétel: Bármely funkcionálisan teljes rendszernek van olyan teljes rész-rendszere, amely véges.

Bizonyitás: Tekintsük az adott teljes rendszerben a $\mathfrak{Z}_3(\mathfrak{Z}_2(x_1,x_2),1)$ függvény előállitását - (a teljesség miatt Γ bármely eleme szuperpozicióval generálható, igy e Sheffer-függvény is.) Minthogy azonban $\{\mathfrak{Z}_3(\mathfrak{Z}_2(x_1,x_2),1)\}$ teljes rendszer, a szuperpoziciós előállitásában szereplő függvények halmaza is teljes, s az véges halmaz. ▲

Jelölje $\mathfrak{U}$ az $Y_p=\{y_1,\dots,y_p\}$ változó-halmazon értelmezett azon $\varphi_j(y_1,\dots,y_p)\in\Gamma$ függvények halmazát, amelyekre teljesül:

(a) ha $\varphi_j(y_1,\dots,y_p)\in\mathfrak{U}$, akkor $\varphi_j(y_{\pi(1)},\dots,y_{\pi(p)})\in\mathfrak{U}$, ahol $\pi(x)$ a $\mathfrak{I}_p$ index-halmazon értelmezett tetszőleges permutáció

(b) $\{\psi_i \mid \psi_i(y_1,\dots,y_p)=y_i,\ i\in\mathfrak{I}_p\}\subset\mathfrak{U}.$

<u>Definició:</u> A $\varphi(x_1,\dots,x_n)\in\Gamma_n$ <u>megtartja az $\mathfrak{U}\subset\Gamma$ halmazt</u>, ha $\varphi_j\in\mathfrak{U}$, $j\in\mathfrak{I}_n$ esetén

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)\circ(\varphi_1(y_1,\dots,y_p),\dots,\varphi_n(y_1,\dots,y_p))\in\mathfrak{U}.$$

Most már kimondhatjuk a <u>funkcionális teljesség alaptételét</u>:

<u>2.5. Tétel (Kuznyecov):</u> Megadható zárt osztályok olyan $\chi_1,\dots,\chi_s$ rendszere, amelyekre i ≠ j esetén $\chi_i \not\subseteq \chi_j$ és $\chi\subset\Gamma$ rendszer akkor és csak akkor funkcionálisan teljes, ha a $\chi\setminus\chi_i$ (i=1,2,...,s) halmazok egyike sem üres.

<u>Bizonyitás:</u> Jelölje $\Gamma_2^{\{x_1,x_2\}}$ a független változók $\{x_1,x_2\}$ halmazán értelmezett kétváltozós függvények halmazát, és legyen $\mathfrak{U}_1,\dots,\mathfrak{U}_\ell$ a $\Gamma_2^{\{x_1,x_2\}}$ összes olyan valódi részhalmazának (véges) sorozata, amelyek teljesitik az alábbi két feltételt (i=1,2,... ℓ -re):

(i) $\{\varphi_1(x_1,x_2)=x_1,\ \varphi_2(x_1,x_2)=x_2\}\stackrel{d}{=}\iota\subseteq\mathfrak{U}_i$

(ii) $([\mathfrak{U}_i]\setminus\mathfrak{U}_i)\cap\Gamma_2$ üres halmaz.

Az $\mathcal{U}_1,\dots,\mathcal{U}_l$ sorozatot ugy konstruálhatjuk, hogy a $\Gamma_2^{\{x_1,x_2\}}$ halmaz (i)-nek eleget tevő részhalmazai lezárását képezve, kiszürjük az (ii) feltételt nem teljesitő részhalmazokat. (Triviálisan: $l<2^{m^{m^2}}$.)

Legyen $\mathcal{X}_i'\subset\Gamma$ az $\mathcal{U}_i$ halmazt megtartó függvények halmaza. $\mathcal{X}_i'$ nyilvánvalóan zárt osztály, de nem teljes, mert csak $\mathcal{U}_i$ részhalmazba vezető függvényeket tartalmaz. (Az $\mathcal{U}_i$ valódi részhalmaz nem lehet teljes az (ii) feltétel miatt.) Elhagyva a $\mathcal{X}_1',\dots,\mathcal{X}_l'$ halmaz-sorozatból azokat az elemeket, amelyek valamely megmaradó osztályban benne vannak, a végül megmaradó rendszert (amelyre teljesül, hogy i≠j esetén $\mathcal{X}_i\not\subseteq\mathcal{X}_j$) jelölje $\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_s$. Azt állitjuk, hogy erre a rendszerre igaz a tétel állitása.

A feltétel <u>szükségessége</u> nyilvánvaló, mert $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{X}_i$ esetén - láttuk - $[\mathcal{X}]\subseteq[\mathcal{X}_i]$, és $\mathcal{X}_i$ nem teljes, tehát $[\mathcal{X}]\neq\Gamma$.

<u>Elégségesség.</u> Legyen $\mathcal{X}\subset\Gamma$ olyan rendszer, amelyre a $\mathcal{X}\setminus\mathcal{X}_i$ halmazok egyike sem üres, s jelölje $\mathcal{X}$ lezárását $\mathcal{X}^*$: $\mathcal{X}^*\overset{d}{=}[\mathcal{X}]$. Elegendő $\mathcal{X}^*$ teljességét megmutatni. Legyen $\mathcal{U}'=\mathcal{X}^*\cap\Gamma_2^{\{x_1,x_2\}}$ és $\mathcal{U}=\mathcal{U}'\cup\iota$. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{X}^*$ az $\mathcal{U}$ halmazt megtartó függvények osztálya, és $\mathcal{U}$ tartalmazza az összes 2-változós függvényt (s ezért teljes rendszer.) Ugyanis ellenkező esetben $\mathcal{U}=\mathcal{U}_i$ és ezért $\mathcal{X}^*\subset\mathcal{X}_i'\subset\mathcal{X}_j$, s ez ellentmond annak, hogy $\mathcal{X}^*\setminus\mathcal{X}_j$ nem üres. ▲

<u>Megjegyzés:</u> A $\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_s$ rendszerekre adott konstrukció már a legkisebb érdekes esetre (m=4) sem gyakorlatilag kivitelezhető algoritmushoz vezet.

3. TELJESSÉGI KRITÉRIUMOK

3.1. Teljesség Γ-ban.

Ebben a részben bizonyitás nélkül megadunk két lemmát és egy ezekre épülő teljességi kritériumot. Minthogy ezek feltételezik az egyváltozós függvények generálhatóságát, Γ_1 generátor-rendszereivel külön kell foglalkoznunk (ez a leképezés-félcsoportok elméletéből ismert eredmények átfogalmazását jelenti.) - ha gyakorlatilag használható kritériumot akarunk kapni.

Definició: Nevezzük a $\varphi(x_1,\dots,x_n)\in\Gamma$ $(n\geq 3)$ függvényt A_l-tulajdonságunak, ha ténylegesen függ egynél több változótól és felvesz $l>2$ számu értéket.

A következő lemma a bináris és a többértékü függvények között is kapcsolatot teremt, és megszámlálhatóan végtelen M alaphalmaz esetén is érvényes.

3.1. Alaplemma: Ha $\varphi(x_1,\dots,x_n)\in\Gamma$ A_l-tulajdonságu, akkor megadhatók olyan $M_i\subset M$ halmazok (i=1,2,...n), amelyekre $|M_i|\leq 2$ és φ az $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ halmaz elemein legalább három különböző értéket vesz fel.

(A bizonyitás eset-szétválasztással történik: lásd [65].) ▲

A bizonyitásból az is leolvasható, hogy igaz az

1. „Következmény": Ha $\varphi \in \Gamma_m$ A_ℓ- tulajdonságu, akkor találhatók olyan $M_i \subset M$ halmazok $(i=1,2,\dots,n)$, amelyekre $|M_i| \leq \ell-1$ és φ az $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ halmaz elemein ℓ számu értéket vesz fel.

2. Következmény: Ha $\varphi \in \Gamma_m$ A_m-tulajdonságu, akkor (mint az 1. következményből adódik) találhatók olyan M-beli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ számok, hogy az $\overset{n}{\underset{i=1}{X}} (M_i \setminus \{\alpha_i\})$ Descartes-szorzat elemein φ felvesz m különböző értéket. Ezért a $\psi_i(x_i) = \zeta_3(\zeta_3(\alpha_i,1), x_i)$ $(i=1,2,\dots,n)$ jelöléssel a $\varphi(y_1,\dots,y_n) \circ (\psi_1(x_1),\dots,\psi_n(x_n))$ függvény m különböző értéket vesz fel $\max\limits_i \{x_i\} \leq m-2$ esetén.

— . —

Vezessük be a következő jelölést:

$$\zeta_i^*(x_1,x_2) = \begin{cases} \zeta_i(x_1,x_2), & \text{ha } 0 \leq x_1, x_2 \leq m-2 \\ \text{tetszőleges, ha } & \max(x_1,x_2) = m-1 \end{cases} \qquad (i=1,2)$$

3.2. Lemma: $m \geq 3$-ra teljes az olyan Γ-beli függvény-rendszer, amely tartalmazza az összes egyváltozós függvényt, a $\zeta_1^*(x_1,x_2)$, $\zeta_2^*(x_1,x_2)$ függvényeket és egy olyan $\tau(x_1,\dots,x_n) \in \Gamma$ függvényt, amely ténylegesen függ $n > 1$ számu változótól és m különböző értéket vesz fel.

Bizonyitás: A $\mu_i(z, m-2) \overset{d}{=} \omega_i'(z)$ jelöléssel, a 2.1. tételben és az előző, 2.1. lemma bizonyitásában szereplő előállitáshoz hasonlóan, bármely olyan $\varphi(x_1,x_2) \in \Gamma_2$ függvény, amely az m-1 értéket nem veszi fel, megadható a következő szuperpozicióval:

$$\varphi(x_1,x_2) = \zeta_2^*(z_1,\dots,z_m) \circ (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}), \text{ ahol}$$

$$\lambda_i(x_1,x_2) = \zeta_1^*(t_1,t_2) \circ (\omega_i'(x_1), \varphi(i,x_2)).$$

Az Alaplemma 2. következménye alapján - minthogy az egyváltozós függvények adottak - feltehetjük, hogy az adott $\tau(x_1,\dots,x_n)$ függvény a $\max\limits_i \{x_i\} \leq m-2$ tartományon is felveszi az összes, m különböző értéket. Ezért létezik m különböző érték-n-es: (i=0,1,..., m-1-re)

$$(\beta_1^i,\beta_2^i,\dots,\beta_n^i)\in(M\setminus\{(m-1)\})^n,$$

amelyekre $\tau(\beta_1^i,\beta_2^i,\dots,\beta_n^i)=i$, továbbá, a már előállitott függvények között szerepelnek a $\varsigma_j(x_1,x_2)\overset{d}{=}\beta_j^{\max(x_1,x_2)}$ függvények (j = 1,2,...,n). Azonban, minthogy

$$\tau(z_1,\dots,z_n)\circ(\varsigma_1(x_1,x_2),\dots,\varsigma_n(x_1,x_2)) = \mathfrak{I}_2(x_1,x_2),$$

ez az egyváltozós $\mathfrak{I}_3(x,1)$ függvénnyel együtt a 2.2. tételben szereplő Γ^2 teljes rendszert adja. ▲

A most következő, teljességi kritériumot kimondó tétel bizonyitása egyrészt hosszabb az eddigieknél, másrészt az irodalomban szereplő bizonyitás az m=2 esetre vonatkozó funkcionális teljességi alaptételt használja fel (amely felépitésünkben később szerepel), ezért csak vázoljuk a bizonyitást. (lásd részletesen [65]-ben).

<u>3.1. Tétel:</u> Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy Γ-beli függvényrendszer — amely tartalmazza az összes egyváltozós, egy értékét kihagyó függvényeket — teljes legyen, az, hogy tartalmazzon egy n>1 számu változótól ténylegesen függő és m különböző értéket felvevő $\tau(x_1,\dots,x_n)\in\Gamma$ függvényt (m ≥ 3).

<u>Bizonyitás</u>: A <u>szükségesség</u> nyilvánvaló, mert egyrészt az egyváltozós függvényekből szuperpozicióval nem adódnak többváltozósak, másrészt az egy értéket kihagyó függvényekből nem generálhatók az m különböző értéket felvevő függvények.

<u>Elégségesség</u>.

(i) n=1-változós függvények előállitása. Az Alaplemma 2. következménye alapján léteznek olyan $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ számok $(\alpha_i\in M)$, amelyekre $\tau(x_1,\dots,x_n)$ az $\overset{n}{\underset{i=1}{\times}}(M\setminus\alpha_i)$ szorzat-halmazon felvesz m különböző értéket.

Tetszőleges $\varphi(x)$ egyváltozós függvényre a $\tau(\beta_1,\dots,\beta_n)=\varphi(j)$-nek megfelelő β_i értékeket $(\beta_i\in M\setminus\{\alpha_i\})$ $\beta_i^{\varphi(j)}$ -vel jelölve, definiáljuk az $\varepsilon_i(x)\overset{d}{=}\beta_i^{\varphi(x)}$ függvényeket. (Ezek kihagyják az α_i értékeket, s ezért adottak.) A $\varphi(x)$ egyváltozós függvény előállitása:

$$\varphi(x)=\tau(x_1,\dots,x_n)\circ(\varepsilon_1(x),\dots,\varepsilon_n(x)).$$

(ii) Ezért - ismét az Alaplemma 2. következménye alapján olyan $\tau'(x_1,\dots,x_n)\in\Gamma$ is előállitható, amely n változótól lényegesen függ és az m különböző értéket az $(M\setminus\{m-1\})^n$ halmazon felveszi. Ezt a megjegyzést kihasználva, a bizonyitás m-re vonatkozó indukcióval történik. A bizonyitásban lényeges szerepet játszik a

$$h_m(x)\overset{d}{=}\begin{cases}x, & \text{ha } x\neq m-1\\ \alpha, & \text{ha } x=m-1\end{cases}\qquad(\alpha\in M\setminus\{m-1\})$$

függvény.

(a) m=3. Képezve a $h_3(x) \circ \tau_3'(x_1,\dots,x_n)$ függvényt, ez a $\{0,1\}$ halmazon igazság-függvényt értelmez, s ezt $F(x_1,\dots,x_n)$ -nel jelölve, látható, hogy a

$$\{0, 1, (1-x)(\mathrm{mod}\,3), h_3(x) \circ \tau_3'(x_1,\dots,x_n)\} = \mathcal{H}_3$$

halmaz megtartja a $\{0,1\}$ halmazt, továbbá az m=3 és m=2 értékü függvények között megfeleltetés létesithető:

$0 \leftrightarrow 0$

$1 \leftrightarrow 1$

$\bar{x}$ (negált) $\leftrightarrow \mathfrak{I}_0(\mathfrak{I}_3(x,1)) = (1-x)(\mathrm{mod}\,3)$

$F(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow h_3(x) \circ \tau_3'(x_1,\dots,x_n)$

A megfeleltetés bal oldalán lévő függvények halmazát H-val jelölve ($H_2 = \{0,1, \bar{\bar{x}}, F(x_1,\dots,x_n)\}$), a $[\mathcal{H}_3] \to [H]$ homomorfizmus fennállása következtében — minthogy H teljes rendszer m=2-re (lásd később) — $\mathfrak{I}_1^*(x_1,x_2)$ és $\mathfrak{I}_2^*(x_1,x_2)$ függvények elemei $[\mathcal{H}_3]$-nak. Ezért a 3.2. lemma alapján m=3 esetre a teljességet beláttuk.

(b) Indukciós feltevés: $3 \le \ell \le m-1$ esetén a tétel igaz. Az (a) esethez hasonlóan járva el, az m értékü, $M \setminus \{m-1\}$ halmazt megtartó egyváltozós függvények halmazát $\mathcal{H}_m'$-vel jelölve, legyen $\mathcal{H}_m = \mathcal{H}_m' \cup \{h_m(x) \circ \tau_m'\}$. Most is képezve a $\mathcal{H}_m'$ elemeinek megfelelő egyváltozós (m-1)-értékü függvények halmazát ($\mathcal{H}_m'$ elemeinél az $M \setminus \{m-1\}$ halmazra szoritkozunk), fennáll az m=3 esetnek megfelelő homomorfizmus és az indukciós feltevés alapján $[\mathcal{H}_m]$-ben előáll $\mathfrak{I}_1^*(x_1,x_2)$ és $\mathfrak{I}_2^*(x_1,x_2)$, és igy a 3.2. lemmából következik a teljesség m-re is. ▲

<u>Megjegyzés:</u> Az m=2 eset teljességi tételét későbbre halasztottuk, és ezen kivül a bizonyitás teljessé tételéhez a 3.2. lemma felhasználhatóságához szükséges Alaplemma alkalmazhatósági feltételeinek (A-tulajdonság) teljesülését nem részleteztük. Ez azonban csak egyszerü eset-szétválasztást jelentene. (Ebből adódik Stupeski [34] és Kuznyecov (füg-

getlenül talált) eredménye:

Következmény: $\{\Gamma_1, \tau(x_1,\dots,x_m)\}$ rendszer teljes.
Az eredményt Malcev általánositotta 1967-ben: [56].

E következmény használhatóságát erősen korlátozza az a tény, hogy az egyváltozós függvények száma (m^m) m növekedésével igen gyorsan nő. Ezen azonban segit a leképezésfél-csoportok elméletéből ismert eredmény (S. Piccard), amely a leképezések (azaz: egyváltozós m-értékü függvények) generátor-rendszerére vonatkozik.

3.2. A Γ_1 rendszerben teljes rendszerek

3.2. Tétel: $m \geq 3$-ra a Γ -beli egyváltozós függvények halmazát generálja a következő három függvény:

$$\gamma_1(x) = x-1 \pmod m ,$$

$$\gamma_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x=0 \\ x, & \text{ha } x\neq 0 \end{cases}$$

$$\gamma_3(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x \leq m-3 \\ m-1, & \text{ha } x = m-2 \\ m-2, & \text{ha } x = m-1 \end{cases}$$

Egy másik generátor-rendszert ad a következő tétel:

3.3. Tétel: $m \geq 3$-ra a Γ -beli egyváltozós függvények halmazát generálja a következő m számu függvény:

$$\gamma_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x=0 \\ x, & \text{ha } x\neq 0 \end{cases}$$

$$\delta_i(x) = \begin{cases} i & \text{ha } x=0 \\ 0, & \text{ha } x=i \\ x, & \text{ha } x\neq 0, x\neq i \end{cases} \qquad (i=1,2,\dots,m-1)$$

Mindkét tétel bizonyitását visszavezetjük egy általános tételre, amely az egyváltozós függvények osztályára kimeritő választ ad a teljesség tekintetében. Előbb azonban bebizonyitjuk a következő két lemmát:

3.3. Lemma: (a) Ha $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ és $\varphi_i(y_{i1},\dots,y_{in_i})$ $(i=1,2,\dots,n)$ tetszőleges Γ -beli függvények, továbbá $\varphi\in\Gamma_n$ pontosan r különböző értéket vesz fel ($1\leq r\leq m$) akkor a $\varphi_0(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ függvény legfeljebb r különböző értéket vesz fel, továbbá, ha $\varphi(x_1,\dots x_n)$ értékeinek halmaza $Z=\{z_1,\dots z_r\}$, akkor a $\varphi_0(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ függvény értékeinek Z^* halmazára $Z^*\subseteq Z$ teljesül.

(b) Ha a φ_i függvények m különböző értéket vesznek fel és argumentumaik halmazai páronként diszjunktak, akkor $Z^*=Z$.

Bizonyitás:

(a) Az állitás második részéből következik az első; az elsőt csak azért mondtuk ki, mert ilyen alakban használjuk fel a lemmát. Tegyük fel indirekte, hogy $Z^*\nsubseteq Z$, azaz van olyan $z_j^*\in Z^*$ érték, amelyre $z_j^*\notin Z$. Legyen

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)\circ(\varphi_1(\alpha_{11},\dots,\alpha_{1n_1}),\dots,\varphi_n(\alpha_{n1},\dots,\alpha_{nn_n}))=z_j^*.$$

Minthogy $\varphi_i\in\Gamma$, igy $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)\in M^n$ minden $\{(\alpha_{i1},\dots,\alpha_{in_i})\mid i\in J_n\}$ halmazra, igy létezik $(\beta_1',\dots,\beta_n')\in M^n$, hogy

$$\beta_i'=\varphi_i(\alpha_{i1},\dots,\alpha_{in_i}),\quad i=1,2,\dots n.$$

De akkor $\varphi(\beta_1',\dots,\beta_n')=z_j^*$, és ez ellentmondás.

(b) Minthogy (a) alapján $Z^* \subseteq Z$, csak azt kell belátnunk, hogy $Z \subseteq Z^*$, azaz, tetszőleges $z' \in Z$ esetén $z' \in Z^*$. Minthogy $z' \in Z$, létezik olyan $(\beta_1', \dots, \beta_n')$ vektor, amelyre $z' = \varphi(\beta_1', \dots, \beta_n')$; tekintsük azon $(\alpha_{i1}', \dots, \alpha_{in_i}')$, $i=1,2,\dots,n$ vektorokat, amelyekre $\beta_j' = \varphi_j(\alpha_{j1}', \dots, \alpha_{jn_j}')$, $j=1,2,\dots,n$. (Ilyenek léteznek, mert a φ_j függvények minden értéket felvesznek.) Ekkor azonban a $\varphi(x_1,\dots,x_n)\alpha(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ függvény az $(\alpha_{11}', \dots \alpha_{1n_1}', \alpha_{21}', \dots, \dots, \alpha_{n1}', \dots, \alpha_{nn_n}')$ helyen a z' értéket veszi fel. ▲

3.4. Lemma: A 3.2 és 3.3 Tételben szereplő $\{\gamma_1(x), \gamma_3(x)\}$, illetve $\{\delta_i(x) | i=1,2,\dots,m-1\}$ rendszerek generálják az m különböző értéket felvevő egyváltozós függvények halmazát.

Bizonyitás: $\gamma_1(x)$ és $\gamma_3(x)$ előállithatósága a $\{\delta_i(x) | i=1,2,\dots,m-1\}$ rendszerből:

$$\gamma_1(x) = \delta_1(x_1) \circ \delta_2(x_2) \circ \dots \circ \delta_{m-2}(x_{m-2}) \circ \delta_{m-1}(x).$$

$$\gamma_3(x) = \delta_{m-2}(x'') \circ \delta_{m-1}(x') \circ \delta_{m-2}(x).$$

Végül, az m különböző értéket felvevő függvények $\{\delta_i(x) | i=1,\dots,m-1\}$ rendszerből generálhatóságát indukcióval mutatjuk meg:

m=3-ra az állitás könnyen ellenőrizhető, s feltéve, hogy m-re igaz, (az m különböző értéket felvevő m-értékü egyváltozós függvények halmazát $\Gamma_1^{(m)}$-el jelölve):

$$\Gamma_1^{(m+1)} = \bigcup_{i=0}^{m} (\nu_{im}(x) \circ \Gamma_1^{(m')}),$$ ahol

$$\nu_{im}(x) = \delta_m(x'') \circ \delta_i(x') \circ \delta_m(x),$$

(itt $\delta_i(x)$ m+1 értékü függvény).

és $$\Gamma_1^{(m')} = \left\{ \varphi'(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{ha } x \neq m \\ m, & \text{ha } x = m \end{cases} \;\middle|\; \varphi(x) \in \Gamma_1^{(m)} \right\}.$$

Az állitás abból következik, hogy $|\Gamma_1^{(m)}|=|\Gamma_1^{(m)}|=m!$ és igy a fent definiált $\Gamma_1^{(m+1)}$-re $|\Gamma_1^{(m+1)}|=(m+1)|\Gamma_1^{(m)}|=(m+1)!$, mert könnyen láthatóan $i\neq j$-re

$$(\nu_{im}(x)\circ\Gamma_1^{(m)})\cap(\nu_{jm}(x)\circ\Gamma_1^{(m)})=\phi.$$

Itt a $\quad \nu_{im}(x)\circ\Gamma_1^{(m)}\stackrel{d}{=}\{\nu_{im}(x)\circ\mu(x)\mid\mu(x)\in\Gamma_1^{(m)}\}$

rövid jelölést alkalmaztuk. ▲

3.4. Tétel: A $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)\}$ függvény-rendszer akkor és csak akkor teljes az egyváltozós függvények osztályában, ha $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ generálja az m különböző értéket felvevő függvények halmazát és $\varphi_3(x)$ pontosan m-1 értéket vesz fel.

Bizonyitás: Szükségesség: Ha $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ nem generálja az m különböző értéket felvevő függvények halmazát, akkor $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)\}$ sem, hiszen ha $\varphi_3(x)$ szerepel valamely szuperpozicióban, akkor a 3.3. (a).Lemma szerint (azt sorozatosan alkalmazva) az eredő függvény legfeljebb m-1 értéket vehet fel, és igy nem adódhatnak a $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ által nem generált m-értékü függvények. Ha viszont $\varphi_3(x)$ nem m-1 értéket vesz fel, két esetet kell megkülönböztetnünk.

1./ $\varphi_3(x)$ m különböző értéket vesz fel és $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ generálja az m különböző értéket felvevő függvények halmazát; ekkor a 3.3. (b). lemma szerint a $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)\}$ is ilyen, tehát $r<m$ számu értéket felvevő függvényeket nem állit elő.

2./ $\varphi_3(x)$ $r<m-1$ különböző értéket vesz fel; ekkor viszont az m-l különböző értéket felvevő függvények nem adódnak szuperpozicióval. (3.3.(a). lemma).

Elégségesség: Először előállitjuk az összes pontosan m-l különböző értéket felvevő függvényeket, majd indukcióval bizonyitjuk minden $1 \leq r < m-1$ értéket felvevő függvény előállithatóságát.

Jelölje a $\varphi_3(x)$ értékhalmazából hiányzó elemet u, a kétszer szereplőt v; ekkor $\varphi_3(x)$ a következőképpen állitható elő: $\varphi_3(x) = \tau(x') \circ \pi(x)$, ahol $\pi(x)$ m különböző értéket felvesz és

$$\tau(x) \stackrel{d}{=} \begin{cases} x, & \text{ha } x \neq u \\ v, & \text{ha } x = u. \end{cases}$$

Jelölje $\pi^{-1}(x)$ azt az (m különböző értéket felvevő) függvényt, amelyre $\pi^{-1}(x) \circ \pi(x) = x$.
(Azaz a $\pi(x)$ inverze). $\tau(x)$ szuperpoziciós előállitása:

$$\tau(x) = \varphi_3(x') \circ \pi^{-1}(x)$$

Legyen $\varphi_3'(x)$ olyan, m-l különböző értéket felvevő függvény, amelyre a hiányzó elem w, a kétszer szereplő: z.

$$\varphi_3'(x) = \tau'(x') \circ \pi'(x), \quad \text{s még} \quad \tau'(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \neq w \\ z, & \text{ha } x = w \end{cases}$$

előállitását kell megadni.

Azonban ez az előállithatóság az 1.3. lemma 1. és 2. állitása alapján biztositva van.

Végül, feltéve, hogy az összes, pontosan r+l különböző értéket felvevő függvényeket már előállitottuk, az r különböző értéket felvevő függvények generálásához definiáljuk egy függvény tipusát.

A $\varphi(x)$ függvény tipusa az $(s_1, \dots s_k)$ vektor, ha φ az előforduló k különböző értéket rendre $s_1, s_2, \dots s_k$ számu helyen veszi fel. $\left(1 \leq s_i \leq m,\ \sum_{i=1}^{k} s_i = m,\ 1 \leq k \leq m\right)$.

1.3. Lemma alapján világos, hogy egy adott tipusu függvényből Π-duálként (tehát szuperpozicióval) az összes ilyen tipusu függvény előáll. Viszont egy adott $(s_1, s_2, \dots s_r)$ tipushoz reprezentánst (r+1 különböző értéket felvevő) $(s_1, s_2, \dots s_r - 1, 1)$ tipusu $\varphi(x)$ függvényből $\varphi(x') \circ \eta(x)$ szuperpozicióval kaphatunk, ahol

$$\eta(x) = \begin{cases} x, \text{ ha } x \neq r+1 \\ r, \text{ ha } x = r+1 \end{cases}$$

már előzőleg előállitott függvény. ▲

Következmény: A 3.2. és 3.3. tétel igaz, mert $\{\delta_1(x), \delta_3(x)\}$ illetve $\{\delta_i(x)\}$ függvény-rendszerek generálják az m különböző értéket felvevő függvények halmazát. (3.4.Lemma).

Az egyváltozós függvények generálhatóságával kapcsolatos Martin egy eredményének általánositása, amely az m-Sheffer függvények jellemzését adja.[65].

3.5. Tétel: A $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma$ függvény akkor és csak akkor m-Sheffer függvény, ha generálja az egyváltozós függvények halmazát.

Bizonyitás: Nyilvánvaló, hogy csak az elégségességet kell bizonyitani. Ha φ generálja az egyváltozós függvények halmazát, akkor felvesz m számu különböző értéket, azonban az ilyen $\varphi' \in \Gamma_1$ függvények $r < m$ számu értéket felvevő Γ_1-beli függvényeket nem állitják elő, tehát φ $n > 1$ számu változótól függ ténylegesen.

Ezért a teljességi kritérium alapján (3.1. tétel) valóban teljes. ▲

Zaharov [46]-ban a tétel következő élesitését bizonyitotta:

<u>3.6. Tétel:</u> A $\varphi\in\Gamma$ függvény $m \geq 4$ esetén akkor és csak akkor m-Sheffer függvény, ha generálja a legalább két értéket kihagyó egyváltozós függvények Γ_1'' halmazát.

A 3.1. tétel előbbihez hasonló élesitése is szerepel ($m \geq 4$-re) [46]-ban, az A_m feltétel további szigoritásával, egyidejüleg Γ_1' helyett Γ_1'' -t véve.

Más irányu további szigoritással adódó szükséges és elégséges feltétel, valamint a most következő kváziteljes rendszerekkel kapcsolatos eredmények találhatók [47]-ben.

4. SZUPERPOZICIÓRA NÉZVE ZÁRT FÜGGVÉNYOSZTÁLYOK. KVÁZITELJES OSZTÁLYOK

4.1. Zárt függvényosztályok

Az eddigi vizsgálatokban lényeges szerepet játszott az a tény, hogy Γ véges bázissal rendelkezik. (Ezért tudtunk véges teljes rendszereket megadni.) Ebben a részben néhány, teljes rendszerekkel kapcsolatos eredményt általánositunk véges bázissal rendelkező zárt osztályra, továbbá a kváziteljes osztályok vizsgálatával foglkozunk. Az m=2 esetre a zárt osztályok kimeritő tárgyalása található [67]-ben, amely esetben a zárt osztályok véges bázissal rendelkeznek. [22], [67]. Jablonszkij [65]-ben azt a sejtést mondta ki, hogy $m \geq 3$-ra is minden Γ-beli zárt osztály rendelkezik véges bázissal - azonban ez hamisnak bizonyult. (l. [68]). A sejtés alapja: Jablonszkij m=3 esetre bizonyitotta, hogy igaz.

A végtelen bázissal rendelkező zárt rendszerek figyelembe-vétele lényegesen bonyolultabbá teszi a funkcionális teljesség problémájának vizsgálatát. A továbbiakban a Γ szerepét átvevő zárt osztályt általában Δ fogja jelölni.

4.1. Tétel: A Δ zárt osztály akkor és csak akkor rendelkezik véges bázissal, ha bármely $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \ldots \subseteq \Delta_i \subseteq \ldots$ Δ-beli zárt osztályok sorozatára, amelyre $\Delta = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i$, létezik olyan s, amelyre $\Delta_s = \Delta$.

Bizonyitás: Ha Δ véges bázisa $\{\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_k\}\subset\Delta$, van olyan legkisebb indexü Δ_{s_1}, amelyre $\varphi_1\in\Delta_{s_1}$ (de $\varphi_1\notin\Delta_r$, ha $r<s_1$). Hasonlóan $r\geq s_1$-re van olyan legkisebb s_2, hogy $\varphi_2\in\Delta_{s_2}$. Ezt folytatva, van olyan legkisebb s_k, hogy $\varphi_k\in\Delta_{s_k}$. Nyilvánvaló, hogy a $\Delta_{s_1}\subseteq\Delta_{s_2}\subseteq\dots\subseteq\Delta_{s_k}$ részsorozatra igaz, hogy $s_k=s$ jelöléssel $\{\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_k\}\subseteq\Delta_s$, s ezért $[\{\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_k\}]=\Delta_s$, ahonnan $\Delta_s=\Delta$. Megforditva, Δ_i^o jelölje a legfeljebb i számu változótól függő Δ-beli függvények halmazának lezárását. Minthogy $\Delta=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\Delta_i^o$ és a $\Delta_1^o\subseteq\Delta_2^o\subseteq\dots\subseteq\Delta_i^o\subseteq\dots$ sorozatban létezik olyan s, hogy $\Delta_s^o=\Delta$, ezért Δ egy véges generátor-rendszere a legfeljebb s számu változótól függő elemeinek halmaza. $\blacktriangle$

Az ehhez kapcsolódó következő tétel közvetlen általánositása a 2.4. tételnek, s bizonyitása is azonos, a Sheffer-függvény helyett Δ véges bázisrendszerét helyettesitve.

4.2. Tétel: Ha Δ véges bázisu zárt osztály, akkor bármely Δ-ban teljes függvény-rendszerből kiválasztható teljes részrendszer, amely véges.

A kváziteljes osztályokra vonatkozó következő három tétel Kuznyecov eredménye.

4.3. Tétel: Ha Δ véges bázisu zárt osztály, akkor tetszőleges Δ-beli $\Delta_0\neq\Delta$ zárt osztály kibővithető Δ-ban kváziteljes osztállyá.

Bizonyitás: Ha Δ_0 nem kváziteljes osztály Δ-ban, jelölje $\varphi_1^1, \varphi_2^1, \dots, \varphi_l^1, \dots$ $\Delta \setminus \Delta_0$ azon elemeinek sorozatát, amelyekre $[\Delta_0 \cup \{\varphi_l^1\}] \neq \Delta$. Nevezzük ezt a sorozatot a Δ_0 zárt osztályhoz tartozó U_0-sorozatnak. Legyen $\Delta_1 \overset{d}{=} [\Delta_0 \cup \{\varphi_1^1\}]$. Ha Δ_1 kváziteljes, akkor igaz az állitás, ellenkező esetben jelölje Δ_2 a Δ_1 U_1-sorozatának első elemével bővitett halmaza által generált halmazt:

$$\Delta_2 \overset{d}{=} [\Delta_1 \cup \{\varphi_1^2\}].$$

Ha a zárt osztályok

$$\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \dots \subset \Delta_l \subset \dots \qquad (1.)$$

sorozata valamely véges s-re befejeződik, akkor $\Delta_s (\supset \Delta_0)$ kváziteljes Δ-ban, ellenkező esetben azt állitjuk, hogy $\Delta' = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i$ zárt osztály kváziteljes. Ugyanis $[\Delta'] = \Delta$ esetén a 4.1. tétel alapján véges az (1.) sorozat, ellenkező esetben viszont Δ' kváziteljes, mert Δ' definiciója szerint Δ' U-sorozata üres.

▲

Következmény: Bármely Γ-beli Γ' zárt osztály $(\Gamma' \neq \Gamma)$ kibővithető Γ-ban kváziteljes osztállyá.

4.4. Tétel: Ha Δ véges bázisu zárt osztály, akkor a Δ-ban kváziteljes osztályok száma véges.

Bizonyitás: Az 4.1. tétel bizonyitásánál láttuk, hogy létezik olyan s, amelyre $\Delta_s^0 = \Delta$. (Δ_i^0: a legfeljebb i számu változótól függő Δ-beli függvények halmazának lezárása.) Megmutatjuk, hogy minden egyes Δ-ban kváziteljes Δ' osztálynak megfelel az $\{x_1, x_2, \dots, x_s\} \overset{d}{=} X_s$ változóhalmazon definiált függvények valamely Δ_s' részhalmaza, amely generálja Δ'-t. (A definicióból következően Δ' zárt osztály.) Ebből már következni fog, hogy a Δ-ban kváziteljes osztályok száma nem lehet nagyobb a Δ_s' részhalmazok számánál, s az legfeljebb Δ azon részhalmazainak száma, amelyek X_s-en vannak definiálva, azaz legfeljebb

$2^{m^{m^s}}$, tehát véges.

Az állitás bizonyitásához az X_s halmazon definiált Δ'-beli függvények halmazát Δ_s-sel jelölve, nyilvánvaló, hogy $\Delta_s \subset \Delta_s^o$, mert egyenlőség esetén $\Delta' = \Delta$ adódna. Másrészt jelölje Δ'' azon Δ-beli függvények halmazát, amelyek megőrzik a Δ_s halmazt. Minthogy Δ_s nem tartalmazza az X_s-en definiált összes függvényt, a Δ'' zárt osztály nem azonos Δ-val. Azonban a definicióból következően $\Delta'' \supset \Delta'$, másrészről Δ' kvázi-teljessége alapján $\Delta' \supset \Delta''$, ezért $\Delta' = \Delta''$. ▲

<u>Következmény:</u> A Γ-ban kváziteljes osztályok száma véges.

A funkcionális teljesség alaptétele itt a következőképpen fogalmazható:

<u>4.5. Tétel:</u> Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy a véges bázissal rendelkező Δ zárt osztályban a $\Delta' \subset \Delta$ rész-rendszer teljes legyen, az, hogy Δ egyetlen kváziteljes osztályának sem legyen Δ' részhalmaza.

<u>Bizonyitás:</u> A szükségesség nyilvánvaló, mert a kváziteljes osztályok nem teljesek és zártak. Az elégségesség bizonyitásához legyen $\Delta' \subset \Delta$ olyan rendszer, amely Δ egyetlen kváziteljes osztályának sem részhalmaza. Nyilvánvaló, hogy $[\Delta'] \subseteq \Delta$; ha $[\Delta'] = \Delta$ nem teljesülne, akkor a 4.4. tétel alapján $[\Delta']$ kibővithető lenne Δ-ban kváziteljes osztállyá. Ez esetben Δ' e kváziteljes osztály részhalmaza lenne, s ez ellentmond a feltevésnek.

▲

Következmény: Γ-beli függvény-rendszer teljességének szükséges és elégséges feltétele, hogy az Γ egyetlen kváziteljes osztályának sem legyen részhalmaza.

Bizonyitás nélkül közöljük a Γ-ban kváziteljes osztályok $k(m)$ számára vonatkozó javitott becslést, amely Γ_1 -et tartalmazó teljes rendszerekre vonatkozó tétel alapján adódik a 4.4. tétel alapján. Jelölje ℓ_1 a Γ_1 -beli zárt osztályok számát.

4.6. Tétel: $k(m) \leq \ell_1$.

A zárt függvény-osztályok tárgyalása előtt megadunk egy lemmát, amely bizonyos értelemben a zárt intervallumban folytonos függvények azon tételének megfelelője, amely szerint, ha egy zárt intervallumban folytonos függvény felvesz különböző előjelü értékeket, akkor felveszi a 0 értéket is. Előbb azonban a monoton függvények tárgyalásához szükséges néhány definiciót adunk meg. A monoton függvényekre vonatkozó, [65]-ben szereplő eredmények egy részének Martinjuk által megadott általánositott változatát tárgyaljuk [57]. A továbbiakban a tételek többségénél a bizonyitást illetően irodalomra hivatkozunk.

Definiciók: Legyen $<_r$ reláció az M halmazon értelmezett parciális rendezés, azaz teljesitse az alábbi három axiomát ($i,j,k \in M$):

i. $<_r$ reflexiv: $(\forall i \in M)\ i <_r i$

ii. $<_r$ anti-szimmetrikus: $(i <_r j) \wedge (j <_r i) \Longrightarrow i = j$

iii. $<_r$ tranzitiv: $(i <_r j) \wedge (j <_r k) \Longrightarrow i <_r k$.

Ha a $<_r$ parciális rendezés olyan, hogy teljesül:

iiii. $(\forall (i,j)\in M^2)\ i<_r j \vee j<_r i$,

azaz M bármely két eleme összehasonlitható akkor $<_r$ rendezés (teljes rendezés.)

Triviális az $<_r$, ha $(\forall (i,j)\in M^2)\ i\neq j \Rightarrow (i\not<_r j)\wedge(j\not<_r i)$, azaz nem összehasonlithatók a különböző elemek.

r_1 rendezés komplementere: $r_2=\tilde{r}_1$; $i<_{r_1} j \Leftrightarrow j<_{r_2} i$.

Az 1.1. pontban az M alaphalmaz feletti n-dimenziós vektorok $\mathfrak{M}$ halmazán parciális rendezést definiáltunk arra az esetre, ha M elemein egy rögzitett teljes rendezés van értelmezve. Ezt minden további nélkül kiterjeszthetjük arra az általánosabb esetre, ha az M halmazon egy $<_r$ parciális rendezést adunk meg. (A növekvő függvény is hasonlóan definiálható.) Ha $i<_r j$, akkor legyen $\max_r(i,j)=j$, $\min_r(i,j)=i$.

Jelölje az M halmazon értelmezett $<_r$ parciális rendezés által indukált M^n algebrai strukturát $\mathfrak{M}_r$. Könnyen látható, hogy ha $\mu,\nu\in\mathfrak{M}_r$ vektorok megfelelő komponensei összehasonlithatók, akkor a legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátjuk is létezik és ezek rendre:

$$(\max_r(\mu_1,\nu_1), \max_r(\mu_2,\nu_2), \ldots, \max_r(\mu_n,\nu_n)),$$

$$(\min_r(\mu_1,\nu_1), \min_r(\mu_2,\nu_2), \ldots, \min_r(\mu_n,\nu_n)).$$

(Teljes rendezés esetén ezek mindig léteznek.) Ha $\mu<_r\nu$ $\mathfrak{M}_r$-ben és $\mathfrak{M}_r^*\subseteq\mathfrak{M}_r$ rész-struktura (azaz $\mathfrak{M}_r^*$ bármely két elemére $\mu^*<_r\nu^*$ akkor és csak akkor teljesül, ha teljesül $\mathfrak{M}_r$-ben is erre az elempárra), és

$$(\forall \varrho^*\in\mathfrak{M}_r^*)\ (\mu^*<_r\varrho^*<_r\nu^*\Rightarrow(\varrho^*=\mu^*)\vee(\varrho^*=\nu^*)),$$

akkor azt mondjuk, hogy $\mathfrak{M}_r^*$ rész-strukturában ν^* közvetlenül követi μ^*-ot (μ^* megelőzi ν^*-ot). Jelölése: $\mu^*\lessdot_r\nu^*$

4.1. Lemma: (a) Ha az $\mathfrak{M}_r^* = \mathfrak{M}_r^{*'} \cup \mathfrak{M}_r^{*''}$ $(\mathfrak{M}_r^{*'} \neq \mathfrak{M}_r^{*''} = \mathfrak{M}_r^* \setminus \mathfrak{M}_r^{*'} \neq \phi)$ halmaz-partició előállitásban $\mu' \in \mathfrak{M}_r^{*'}$ és $\mu'' \in \mathfrak{M}_r^{*''}$ összehasonlitható elemek: $\mu' <_r \mu''$ (vagy: $\mu'' <_r \mu'$), akkor létezik $\nu' \in \mathfrak{M}_r^{*'}$ és $\nu'' \in \mathfrak{M}_r^{*''}$, amelyekre teljesül: $\mu' <_r \nu' \lessdot_r \nu'' <_r \mu''$ (vagy: $\mu'' <_r \nu'' \lessdot_r \nu' <_r \mu'$).

(b) Ha létezik $\varrho' \in \mathfrak{M}_r^{*'}$, $\varrho'' \in \mathfrak{M}_r^{*''}$ elempár, amelyek megfelelő komponensei összehasonlithatók, akkor létezik (μ', μ'') összehasonlitható elempár.

Megjegyzés: Bár a lemma csak abban a speciális esetben szerepel az irodalomban [65], amikor $<_r$ teljes rendezés, a bizonyitás lényegében ugyanaz. Ez esetben a (b) állitás feltétel nélkül állitja összehasonlitható elempár létezését.

Bizonyitás: (a) Ha $\mu' \lessdot_r \mu''$ nem teljesül, a $\mu' <_r \varrho <_r \mu''$ feltételnek csak véges sok ϱ vektor tehet eleget. Legyen ezek közül a legkisebb $\varrho^{(1)}$, azaz olyan, hogy $\mu' \lessdot_r \varrho^{(1)} <_r \mu''$ teljesüljön. Ha $\varrho^{(1)} \in \mathfrak{M}_r^{*''}$, ez bizonyitja az állitást, ellenkező esetben — μ' helyett $\varrho^{(1)}$-et választva, megismételjük a vizsgálatot. Véges számu lépésben vagy $\varrho^{(i)} \lessdot_r \varrho^{(i+1)}$, $\varrho^{(i)} \in \mathfrak{M}_r^{*'}$, $\varrho^{(i+1)} \in \mathfrak{M}_r^{*''}$, vagy $\varrho^{(i)} \lessdot_r \mu''$, $\varrho^{(i)} \in \mathfrak{M}_r^{*'}$ adódik.

(b) Ha létezik a mondott tulajdonságu (ϱ', ϱ'') vektorpár, de ezek nem összehasonlithatók, akkor képezzük ϱ' és ϱ'' legnagyobb alsó és legkisebb felső korlátját. Legyenek ezek rendre $\nu^{(1)}$ és $\nu^{(2)}$.

Nyilvánvaló a definicióból, hogy

$$\nu^{(1)} <_r \varrho' <_r \nu^{(2)}$$

$$\nu^{(1)} <_r \varrho'' <_r \nu^{(2)}$$

Az alábbi négy lehetséges eset mindegyikéhez megadunk egy (μ', μ'') összehasonlitható pár választást:

1./ $\nu^{(1)}, \nu^{(2)} \in \mathfrak{M}_r^{*'}$: $(\mu', \mu'') = (\nu^{(1)}, \varrho'')$

2./ $\nu^{(1)}, \nu^{(2)} \in \mathfrak{M}_r^{*''}$: $(\mu', \mu'') = (\varrho', \nu^{(2)})$

3./ $\nu^{(1)} \in \mathfrak{M}_r^{*'}, \nu^{(2)} \in \mathfrak{M}_r^{*''}$: $(\mu', \mu'') = (\nu^{(1)}, \nu^{(2)})$

4./ $\nu^{(1)} \in \mathfrak{M}_r^{*''}, \nu^{(2)} \in \mathfrak{M}_r^{*'}$: $(\mu', \mu'') = (\nu^{(1)}, \nu^{(2)})$ ▲

4.2. Monoton függvények osztálya.

Definició: A $\varphi \in \Gamma_n$ az r parciális rendezésre nézve monoton, ha $\forall (\alpha, \beta \in \mathfrak{M}_r)(\alpha <_r \beta \Rightarrow \varphi(\alpha) <_r \varphi(\beta))$.
Az r relációra nézve monoton függvények halmazát M_r-el jelöljük.

4.7. Tétel: Az r_1 és r_2 különböző parciális rendezések esetén M_{r_1} és M_{r_2} akkor és csak akkor azonosak, ha $r_2 = \tilde{r}_1$

Bizonyitás (vázlatos):

Elégségesség:
$(r_2 = \tilde{r}_1, \ \alpha <_{r_2} \beta) \Rightarrow (\beta <_{r_1} \alpha) \Rightarrow (\varphi(\beta) <_{r_1} \varphi(\alpha)) \Rightarrow (\varphi(\alpha) <_{r_2} \varphi(\beta)) : M_{r_1} \subseteq M_{r_2}$.
$r_1 = \tilde{r}_2$ -ből
hasonló következtetéssel $M_{r_2} \subseteq M_{r_1}$, azaz $M_{r_1} = M_{r_2}$.

Szükségesség: $(\tilde{r}_1 \neq r_2) \Rightarrow M_{r_1} \neq M_{r_2}$ bizonyitás alapja az alábbi eset-szétválasztás:

A./ r_1 és r_2 egyike triviális parciális rendezés

B./ r_1 és r_2 egyike sem triviális, és létezik $m_i, m_j \in M$, amelyek r_1-re és r_2-re egyaránt összehasonlithatók.

C./ r_1 és r_2 egyike sem triviális és nem létezik a B.- szerinti (m_i, m_j) számpár.

A részletes bizonyitást lásd [57]. ▲

Következmény: Ha r nem triviális, akkor az M_r osztály nem teljes.

4.8. Tétel: Az M_r függvény-osztály funkcionálisan zárt. (Azaz: monoton függvények szuperpoziciója is monoton.)

Bizonyitás: Legyenek $\varphi(x_1,\dots,x_n)$; $\psi_1(y_{11},\dots,y_{1k_1}),\dots,\psi_m(y_{m1},\dots,y_{mk_m})$ monoton függvények r-re nézve, azaz $\alpha <_r \beta$ $(\alpha,\beta \in \mathfrak{M}_r)$ esetén $\varphi(\alpha) <_r \varphi(\beta)$ és

$$\gamma^{(i)} = (\gamma_1,\dots,\gamma_{k_i}) <_r (\delta_1,\dots,\delta_{k_i}) = \delta^{(i)}$$

esetén $\psi_i(\gamma^{(i)}) <_r \psi_i(\delta^{(i)})$, $i = 1,2,\dots,m.$

Ez esetben $\varphi(\psi_1(\gamma^{(1)}),\dots,\psi_m(\gamma^{(m)})) <_r \varphi(\psi_1(\delta^{(1)}),\dots,\psi_m(\delta^{(m)}))$

valóban teljesül, mert fennáll:

$$(\psi_1(\gamma^{(1)}),\dots,\psi_m(\gamma^{(m)})) <_r (\psi_1(\delta^{(1)}),\dots,\psi_m(\delta^{(m)})). \quad ▲$$

1. Megjegyzés: Nyilvánvaló, hogy a konstans függvények bármely r esetén monoton függvények, továbbá az, hogy a triviális rendezésre minden függvény monoton. A $\varphi(x)=x$ függvény is monoton.

2. Megjegyzés: A hasonlóan definiálható monoton csökkenő függvények halmaza nem képez zárt osztályt.

Ha r teljes rendezés, a monoton függvények generálását adja a következő

4.9. Tétel: Ha r rendezés, akkor M_r zárt osztályban teljes a $\{0,1,\dots,m-1,\ \zeta_1(x_1,x_2),\ \zeta_2(y_1,y_2),\ \varrho_i(x),\ i=1,2,\dots,m-1\}$ rendszer, ahol

$$\varrho_i(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x<i\\ m-1, & \text{ha } x\geq i.\end{cases}\qquad (1\leq i\leq m-1).$$

Könnyen látható, hogy $\zeta_j(x_1,x_2)$ $(j=1,2)$, $\varrho_i(x)$ $(i=1,2,\dots,m-1)$ monoton függvények. A tétel bizonyitását lásd [65]. ▲

Definició: Az r parciális rendezés minimális eleme a, ha $(x<_r a)\Rightarrow x=a$. Hasonló a maximális elem definiciója.

Definició: Kvázipermutáció-nak nevezzük az olyan parciális rendezést, amelynek pontosan egy minimális és egy maximális eleme van.

Martinjuk bizonyitotta a következő szép tételt:

4.10. Tétel: Az M_r osztály akkor és csak akkor kváziteljes, ha az r parciális rendezés kvázipermutáció.

Az [57.] -ben megadott bizonyitás igen bonyolult és hosszadalmas; lényegesen egyszerübb (lásd [65]) abban a speciális esetben, ha r teljes rendezés. (A rendezés speciális kvázipermutáció, ugyanis permutáció.) ▲

1. Megjegyzés: Rendezés esetén egyszerüsiti a bizonyitást, hogy M_{r_1} és M_{r_2} egymás duál-halmazai.

2. Megjegyzés: A P_n^r -beli monoton függvények száma még rendezés és m=2 esetben sem ismert, aszimptotikus eredmények vannak csupán.

4.3. T_R- tipusu függvények osztálya

Jablonszkij [65]-ben az I. példában szereplő, adott részhalmazt megtartó zárt függvény-osztály általánositásaként vizsgálta az olyan $T_{E_0 s}$ zárt függvény-osztályokat, amelyek az E_o halmazt s-korlátoltan megtartják a következő értelemben.

Definició:

$$T_{E_0 s} \overset{d}{=} \{\varphi(x_1,\dots,x_n) \mid \exists (D \subset M \setminus E_0, |D|=s, \varphi(E_0 \cup D_1, \dots, E_0 \cup D_n) \subseteq E_0 \cup D; D_i \subseteq M, |D_i|=s\}.$$

A definicióból következik, hogy a $T_{E_0 s}$ osztályok funkcionálisan zártak, sőt - ezen tulmenően - érvényes az alábbi (lásd [65.]):

4.11.Tétel:

(a) $T_{E_0 s} = \Gamma$, ha (i) $|E_0| = 0$, és $s = 0, 1$, vagy m,

(ii) $|E_0| = \ell > 0$ és $s \neq 0$, $s \geq m - \ell$

(b) $T_{E_0 s}$ osztály kváziteljes $\Longleftrightarrow$ (i) $|E_0| = 0$ és $1 < s = m-1$

(ii) $|E_0| = \ell > 0$ és $0 \leq s < m - \ell$

A (b) alatt megadott T-tipusu kváziteljes osztályok mind különbözők, a számuk $m \geq 3$ esetén $1 + m(2^{m-1} - 1)$ és $m=2$ esetén: 2.

A $T_{E_0 s}$ függvény-osztályok [57.] -ben található általánositását fogjuk most tekinteni.

Legyen: $M \overset{d}{=} E \cup \varepsilon_1 \cup \dots \cup \varepsilon_\ell$ halmaz-partició

$(0 < |E| \leq m - \ell, 0 < |\varepsilon_i|, i = 1, \dots, \ell, 1 \leq \ell < m)$

és $R \overset{d}{=} \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell\}$.

Definició: $T_{EsR} \overset{d}{=} \{\varphi(x_1,\dots,x_n) \mid \varphi(E\cup R_1,\dots,E\cup R_m) \subseteq E\cup R_{m+1}\}$

ahol $R_i = \varepsilon_1^i \cup \dots \cup \varepsilon_s^i$, $\varepsilon_j^i \in R$; $i=1,2,\dots,m+1$; $j=1,2,\dots,s$.

Megjegyzés: Ha $|\varepsilon_j|=1$, j=1, ... ℓ, akkor speciális esetként T_{EsR} átmegy T_{Es} -be. Az irodalmtól eltérően, itt is kifejezőbbnek tartom és javasolom az "E halmazt s-R-korlátoltan megtartó függvények osztálya" elnevezést T_{EsR} -re. Nyilvánvaló, hogy a T_{EsR} osztályok zártak, továbbá s= ℓ esetén $T_{EsR} = \Gamma$.

4.12. Tétel: Ha $0 < s < \ell$, akkor a T_{EsR} osztály kvázitelјes.

(Bizonyitást lásd [57]). Az m=2 esetre vonatkozó teljességi tétel szempontjából érdekes speciális eset, ha $|E_0| = 1$.

Legyen $E_0 = \{\alpha\}$; ez esetben a $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ függvény α-tartó $(\alpha \in M)$, ha $\varphi(\alpha,\dots,\alpha)=\alpha$.

Jelölje A_α az α-tartó függvények halmazát. Nyilvánvaló, hogy $|A_\alpha| = m^{m^n-1}$.

A következő tételre elemi kombinatorikus bizonyitást is adunk.

4.13. Tétel: A pontosan k számu értéket megtartó $(0 \le k \le m)$ $\varphi \in \Gamma_m$ függvények száma:

$$m^{m^n} \cdot \left(1-\frac{1}{m}\right)^m \cdot \binom{m}{k} \cdot (m-1)^{-k}.$$

I. Bizonyitás: $\binom{m}{k}$ féleképpen választhatjuk ki az M^n halmaz elemeiből azt a k számu n-dimenziós vektort, amely helyeken az érték megőrződik, tehát ezen értékek egyértelmüen meghatározottak. További (m-k) számu helyen nem-megőrző a függvény, tehát e helyek mindegyikén m-1 értéket vehet fel a függvény, s ez $(m-1)^{m-k}$ számu lehetőséget eredményez.

Végül, minden más helyen - (m^n-m) számu hely - nincs megkötés, igy ezekre az ismétléses variációk száma:

$$m^{m^n-m}.$$

Nyilvánvaló, hogy az előirt tipusu függvények száma a három érték szorzata:

$$\binom{m}{k}(m-1)^{m-k}\cdot m^{m^n-m},$$

s ez a tétel állitását adja. ▲

A C. lemma felhasználásával egy második bizonyitást is adunk az alábbiakban.

II.Bizonyitás: A C. lemma alapján is adódik eredményünk. Esetünkben $H = \Gamma_n$, $r = m^{m^n}$, $w(h)=1$;

A_i azon tulajdonság, hogy $\varphi\in\Gamma$ $\{i\}$-tartó függvény, s=m.

Nyilvánvalóan

$$W(A_{i_1},\dots,A_{i_p}) = m^{m^n-p},$$

$$W(p) = \binom{m}{p} m^{m^n-p}.$$

Ezért

$$E(k)=\sum_{j=0}^{m-k}\binom{k+j}{k}(-1)^j\binom{m}{k+j}m^{m^n-(k+j)}=m^{m^n-k}\cdot\binom{m}{k}\cdot\sum_{j=0}^{m-k}\binom{m-k}{j}(-1)^j\cdot m^{-j}=$$

$$=\binom{m}{k}m^{m^n-k}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{m-k}=m^{m^n}\left(1-\frac{1}{m}\right)^m\binom{m}{k}(m-1)^{-k}.$$

Itt felhasználtuk a B. lemmában kimutatott $\binom{u}{v}\binom{v}{p}=\binom{u}{p}\binom{u-p}{v-p}$ ismert azonosságot. $\blacktriangle$

Ebből elemi számolással a következő szemléletes aszimptotikus egyenlőség adódik:

Következmény: Rögzitett k -re $m\to\infty$ esetén:

$$E(k)\sim\frac{m^{m^n}}{e\cdot k!}=\frac{1}{e\cdot k!}|\Gamma_n|.$$

4.4. U-tipusu függvények osztálya

A 1.3. részben II. példában definiált, D particiót megtartó U_D funkcionálisan zárt függvény-osztályról nyilvánvaló, hogy $\ell=0$ és $\ell=m-1$ esetben $U_D=\Gamma$. A megmaradó $1\le\ell<m-1$ esetekben a D particióban van legalább kételemü részhalmaz, legyen ennek két eleme: $\alpha\neq\beta$.

Legyen $\varphi(x_1,\dots,x_n)\in\Gamma$ olyan, hogy $\varphi(\alpha,\gamma_2,\dots,\gamma_n)\not\sim\varphi(\beta,\gamma_2,\dots,\gamma_n)\ (\mathrm{mod}\,D)$;
ezért $\varphi\notin U_D$, tehát U_D nem teljes, ha $1\le\ell<m-1$. $\blacktriangle$

4.14. Tétel: Az $1\le\ell<m-1$ értékekre az összes U_D osztály kváziteljes.

Bizonyitás (vázlatos): Nevezzük a D partició tipusának az $(s_0, s_1, \dots, s_l)$ sorozatot, ahol $s_i = |M^{(i)}|$, $i=0,1,\dots,l$.
Elegendő minden egyes tipus egyetlen reprezentánsára, pl.

$$D^*:\ M = \{0,1,\dots,s_0-1\} \cup \{s_0, s_0+1,\dots,s_0+s_1-1\} \cup \dots \cup \{s_0+s_1+\dots+s_{l-1},\dots,m-2,m-1\} = M_*^{(0)} \cup M_*^{(1)} \cup \dots \cup M_*^{(l)}$$

particióra bizonyitani, hogy U_{D^*} osztály kváziteljes, mert ebből az azonos tipusu particióhoz tartozó osztályok Π-duál-képzéssel adódnak, s ez a kváziteljességet is átörökiti. (A D^* tipusokra a bizonyitás jelölés-technikája egyszerübb.)

Könnyen látható, hogy $\Gamma^* \overset{d}{=} \{0,1,\dots,m-1, \jmath_1(x_1,x_2), \jmath_2(x_1,x_2)\} \subset U_{D^*}$.

A [65]-ben bizonyitott lemma szerint tetszőleges $\varphi(x_1,\dots,x_l) \notin U_D$ $(1 \le l < m-1)$ és a konstans függvényekből előállitható egy $\varphi'(x) \notin U_{D^*}$ egyváltozós függvény.

Legyen pl. $\alpha, \beta \in M_*^{(t)}$, de $\varphi'(\alpha) \in M_*^{(v)}$ és $\varphi'(\beta) \notin M_*^{(v)}$.

Látható, hogy
$$\tau(x) \overset{d}{=} \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin M_*^{(v)} \\ m-1, & \text{ha } x \in M_*^{(v)} \end{cases}$$

és
$$\psi_i(x) \overset{d}{=} \begin{cases} \alpha, & \text{ha } x \ge i \\ \beta, & \text{ha } x < i \end{cases} \qquad (i=1,2,\dots,m-1)$$

függvények U_{D^*} elemei, és $\tau(\varphi'(\psi_i(x))) = \varrho_i(x)$, ahol $\varrho_i(x)$ a monoton függvényeknél megadott függvény. Az ott ismertetett tétel alapján $[\Gamma^* \cup \{\varrho_1(x),\dots,\varrho_{m-1}(x)\}] = M_r$ (ha r rendezés), s M_r kváziteljes, ezért U_{D^*} kváziteljességének kimutatásához elegendő belátni, hogy van olyan eleme, amely nem monoton. Minthogy

$$\psi_i'(x) \overset{d}{=} \begin{cases} \beta, & \text{ha } x \ge i \\ \alpha, & \text{ha } x < i \end{cases} \qquad (i=1,2,\dots,m-1)$$

is U_{D^*} eleme, nyilvánvaló, hogy ψ_i és ψ_i' közül az egyik nem monoton. ▲

Könnyen látható, hogy az U_D $(1 \le l < m-1)$ osztályok mind különbözők, ezért számuk a D particiók $p(m)$ számával azonos. Ismeretes [65], hogy

$$m^{m(1-w_m)} < p(m) < m^{m(1+w_m)},$$

ahol $w_m = O\left(\frac{1}{\ln m}\right)^2.$

4.5. A lineáris függvények $L_{\pi(x)}$ osztálya.

Legyen $\pi(x)$ az a permutáció, amelynek inverze:

$$\pi^{-1}(x) \stackrel{d}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & m-1 \\ i_0 & i_1 & \dots & i_{m-1} \end{pmatrix}.$$

A π-duál függvény definiciójából következik, hogy

$$\varphi^{\pi(x)}(i_{\alpha_1}, \dots, i_{\alpha_n}) = i_{\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}.$$

Számunkra fontos példa lineáris függvényekre a $J_3^{\pi}(x_1, x_2)$ és $J_4^{\pi}(x_1, x_2)$ függvények(ahol $J_4(x_1, x_2) \stackrel{d}{=} x_1 \cdot x_2 \pmod m$.)

Ezekre könnyen látható, hogy asszociativ müveletek, tehát értelmezhető a többváltozós megfelelő függvény. Ugyanis igaz a következő:

4.2. Lemma: $\varphi^{\pi}(x_1, \dots, x_n)$ akkor és csak akkor asszociativ, ha a $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ függvény is az.

A lemma állitását könnyü belátni a következő egyenlőség alapján:

$$\varphi^{\pi}(i_{\alpha_1}, \varphi^{\pi}(i_{\alpha_2}, \dots, i_{\alpha_n})) = \varphi^{\pi}(i_{\alpha_1}, i_{\varphi(\alpha_2, \dots, \alpha_n)}) =$$
$$= i_{\varphi(\alpha_1, \varphi(\alpha_2, \dots, \alpha_n))}.$$ ▲

Definició: A $\varphi(x_1,\dots,x_n)\in\Gamma$ függvényt a $\mathfrak{Z}_3^\pi, \mathfrak{Z}_4^\pi$ operációkra nézve lineáris függvénynek nevezzük, ha a következő alakban irható:

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=\mathfrak{Z}_3^\pi(c_0,\mathfrak{Z}_4^\pi(c_1,x_1),\dots,\mathfrak{Z}_4^\pi(c_n,x_n)),$$

ahol c_0, c_1, ... c_n konstansok.

Jelölje a $\pi(x)$-re vonatkoztatva a lineáris függvények osztályát $L_{\pi(x)}$, s az egységpermutációra az index x: L_x a lineáris függvények osztálya.

A definicióból következik, hogy $L_{\pi(x)}$ osztály az L_x osztály π-duálja.

A következő példa mutatja, hogy létezik olyan $L_{\pi(x)}$ osztály, amely nem azonos L_x osztállyal.

Példa: Legyen $m=5$, $\pi(x)\overset{d}{=}\begin{cases}1, & \text{ha } x=0\\ 0, & \text{ha } x=1\\ x, & \text{ha } x=2,3,4\end{cases}$; $\varphi(x)\overset{d}{=}2x+1 \pmod 5$.

Könnyen számolhatjuk, hogy bár $\varphi(x)\in L_x$ és $\varphi^\pi(x)=x^3+4x^2+2x+3 \pmod 5)\in L_{\pi(x)}$, azonban $\varphi^\pi(x)\notin L_x$, tehát létezik olyan lineáris függvény, amelynek egy előre megadott permutációra vonatkoztatott π-duálja nem lineáris. $(\varphi^\pi(x)=\mathfrak{Z}_3^\pi(0,\mathfrak{Z}_4^\pi(2,x)))$.
Azonban belátható, hogy m=2,3 esetben ez nem léphet fel.

Megjegyzés: A példában szereplő π és φ egyaránt permutációk: $\pi(x)=(01)(2)(3)(4)$ és $\varphi(x)=(0132)(4)$.

4.15. Tétel: Az $L_{\pi(x)}$ osztályok funkcionálisan zártak.

A dualitás miatt elegendő megmutatni L_x osztály zártságát; ez viszont behelyettesitéssel adódik. Nyilvánvaló, hogy kváziteljesség vizsgálatánál is elegendő L_x-re szoritkozni.

A hosszadalmas bizonyitást elhagyva, kimondunk két fontos tételt: az első az egész-együtthatós mod m polinomokra vonatkozik, a második L_x kváziteljességéről szól.

4.16. Tétel: A Γ -beli egész-együtthatós (mod m) polinomok K rendszere m=p esetén teljes, $m \neq p$ esetben pedig nem az, sőt, nem is kváziteljes. (p primszámot jelöl és π egység-permutáció.)

Az érdekes bizonyitásban szerepel annak megmutatása is, hogy K részhalmaza egy particiótartó osztálynak [65].

4.17. Tétel: A lineáris függvények L_x osztálya akkor és csak akkor kvázi-teljes Γ -ban, ha m=p, ahol p primszám. (Mindkét tétel Jablonszkij és Kuznyecov közös eredménye.)

Végül megjegyezzük, hogy a definicióból láthatóan
$|L_x| = m^{n+1}$ (Ugyanis, ha $\varphi_i = c_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{n} c_k^{(i)} x_k$, $i \neq j$-re

legyen $d_k = \min(c_k^{(i)}, c_k^{(j)})$ és $\psi \stackrel{d}{=} d_0 + \sum_{k=1}^{n} d_k x^k$;

$(\varphi_i - \psi)$, $(\varphi_j - \psi)$

függvényekről közvetlenül látható, hogy lényeges változóikban diszjunktak.) ▲

4.6. Önduális függvények osztálya.

Legyen $\pi(x) \neq x$, egyébként tetszőleges permutáció. Korábban a duál-halmazok vizsgálatánál definiáltuk az önduális függvényeket.

(A $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma$ függvényt $\pi(x)$-re vonatkozóan önduálisnak neveztük, ha $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^{\pi}(x_1, \ldots, x_n)$, azaz, ha
$$\pi(x) \circ \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi \circ (\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)).)$$

Példa: $\pi(t) = \zeta_3(t,1)$, $\varphi(x,y) = x^2+y^2+(m-2)xy+x \pmod m$;
$$\pi(t) \circ \varphi^{\pi}(x,y) = \varphi(\zeta_3(x,1), \zeta_3(y,1)) = \ldots = x^2+y^2+(m-2)xy+x+1 \pmod m,$$
ahonnan $\varphi^{\pi}(x,y) = \varphi(x,y)$.

Jelölje az önduális (π -önduális) függvények halmazát $S_{\pi(x)}$. Néhány egyszerü, de jól használható tulajdonságot adunk meg az $S_{\pi(x)}$ osztályra.

4.3. Lemma: Ha $\varphi(x_1, \ldots x_n)$ önduális $\pi_1(x)$ és $\pi_2(x)$ permutációkra vonatkozóan, akkor önduális a $\pi(x) = \pi_1(y) \circ \pi_2(x)$ permutációra is.

Bizonyitás: A feltételek szerint
$$\varphi^{\pi_1}(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^{\pi_2}(x_1, \ldots, x_n),$$
ezért az 1.2. lemma alapján
$$\varphi^{\pi}(x_1, \ldots, x_n) = (\varphi^{\pi_1})^{\pi_2} = \varphi^{\pi_2} = \varphi. \qquad \blacktriangle$$

Legyen $\varphi(x_1,\dots x_n)$ önduális függvény $\pi(x)$-re vonatkozóan, és legyenek $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)\in M^n$, $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)\in M^n$. Azt mondjuk, hogy $\mu \overset{\pi(x)}{\sim} \nu$ (μ,ν π.-ekvivalensek), ha létezik olyan K szám, hogy $\nu_i=\pi^K(\mu_i)$, $i=1,\dots,n$.
Világos, hogy ez az osztályozás ekvivalencia-reláció. Jelölje a μ vektort tartalmazó osztályt R_μ.

Ha $\pi(x)$ rendje r, akkor $R_\mu=\{(\varrho_1,\dots,\varrho_n)\mid \varrho_i=\pi^j(\mu_i);\ i=1,\dots,n;\ j=0,1,\dots,r-1\}$
Az önduális függvény definiciójából következik, hogy az R_μ osztálybeli függvény-értéket egy tetszőleges R_μ-beli μ helyen felvett érték egyértelmüen meghatározza:

$$\varphi(\varrho_1,\dots,\varrho_n)=\varphi(\pi^j(\mu_1),\dots,\pi^j(\mu_n))=\pi^j(\varphi(\mu_1,\dots,\mu_n)).$$

Továbbá, a φ függvény értéke az egyes osztályokban egymástól független. Ezért a $\pi(x)$-re önduális (n-változós, azaz legfeljebb n változótól függő) függvények száma:

$$|S_{\pi(x)}|=m^{\frac{m^n}{r}},$$

ahol r a π permutáció rendje.

Könnyen látható, hogy igaz a következő:

<u>4.18. Tétel:</u> $\pi(x)\neq x$ esetén az $S_{\pi(x)}$ osztályok funkcionálisan zártak, de nem teljesek.

$\pi(x)=x$ esetén $S_x=\Gamma$, $\pi(x)\neq x$ esetén a zártság nyilvánvaló (1.7. tétel), a bizonyitáshoz csak azt kell belátni, hogy az osztály nem teljes. Ha $x=\xi$ érték olyan, amelyre $\pi(\xi)\neq\xi$, akkor a $\varphi(x)=\xi$ konstans függvényre a $\varphi^{\pi(x)}(x)$ π-duál értéke a ξ helyen: $\varphi^{\pi}(\xi)=\pi^{-1}(\xi)\neq\xi$, tehát $\varphi^{\pi}(x)\neq\varphi(x)$. ▲

Nyilvánvaló az is, hogy tetszőleges k természetes számra $\pi^k(x) \in S_{\pi(x)}$. Továbbá, a 4.3. lemma ismételt alkalmazásával adódik, hogy $\varphi^{\pi} = \varphi \Longrightarrow \varphi^{\pi^k} = \varphi$, azaz $S_{\pi(x)} \subset S_{\pi^k(x)}$.
Martin vizsgált egy $S_{\pi(x)}$ -hez hasonló függvény-osztályt, amelyet Jablonszkij általánositott a következő módon adva meg:

$$\tilde{S}_{\pi(x)} \overset{d}{=} \{ \varphi(x_1,\dots,x_n) \mid (\forall (i_1,\dots,i_n)\ \exists i)\ \varphi(\pi^{i_1}(x),\dots,\pi^{i_n}(x)) = \pi^{i}(x) \}$$

ahol $i_1,\dots,i_n$, i egész számok.

A definicióból következik a

<u>4.19. Tétel:</u> Az $\tilde{S}_{\pi(x)}$ osztályok funkcionálisan zártak.

▲

Minthogy $\tilde{S}_{\pi(x)}$ egyváltozós elemei $\pi(x)$ hatványai, $\tilde{S}_{\pi(x)}$ nem teljes. Az is látható, hogy $\tilde{S}_{\pi(x)}$ és $S_{\pi(x)}$ nem azonos; $\psi(x) \in S_{J_3(x,2)}$ ha m=4, $\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 2 \\ 2, & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$,

és $\psi(x)$ nyilván nem $\pi(x)$ hatványa, tehát $\psi(x) \notin \tilde{S}_{J_3(x,2)}$.
A két osztály kapcsolatára vonatkozik a

<u>4.20. Tétel:</u> Az $S_{\pi(x)}$ és $\tilde{S}_{\pi(x)}$ osztályok egybeesnek, ha $\pi(x)$ egyetlen ciklusból áll.
A bizonyitás alapja annak kimutatása, hogy $S_{\pi(x)}$ egyváltozós elemei is $\pi(x)$ hatványai, ezért $\varphi(x_1,\dots,x_n) \in S_{\pi(x)}$ függvényre $\varphi(s^{i_1}(x),\dots,s^{i_n}(x)) = s^{i}(x)$, azaz $S_{\pi(x)} \subseteq \tilde{S}_{\pi(x)}$.
A másik irányu tartalmazás indirekt módon bizonyitható. [65].

▲

Bizonyitás nélkül közöljük Jablonszkij és Kuznyecov közös eredményét. [65].

4.21. Tétel: $S_{\pi(x)}$ akkor és csak akkor kváziteljes, ha $\pi(x)$ előállitható r hosszuságu ciklusok szorzataként, ahol r primszám.

Végül, az önduális függvények osztályai közül a kváziteljesek száma: $\sum_{\substack{m=p\cdot d \\ p \text{ prím}}} ((p-1)!)^d$.

4.7. Szemi-dualitás, szemi-önduális függvények osztálya.

A π-duális függvény (és halmaz) fogalma általánositható a következő értelemben:

Definició: Legyen $\sigma(x) \in \Gamma_1$. A $\varphi(x_1,\dots,x_n) \in \Gamma_n$ függvény σ-szemi-duál függvénye

$$\sigma\varphi \stackrel{d}{=} \varphi(y_1,\dots,y_n) \in \Gamma_n,$$

ha

$$\sigma(x) \circ \varphi(x_1,\dots,x_n) = \varphi(y_1,\dots,y_n) \circ (\sigma(x_1),\dots,\sigma(x_n)).$$

Látható, hogy ez valóban általánositás, mert ha $\sigma(x)$ permutáció, a duál-függvények adódnak, ha viszont $\sigma(x)$ m-nél kevesebb különböző értéket vesz fel, $\sigma\varphi$ szemi-duál általában nem egyértelmüen meghatározott függvény és nem is minden σ, φ pár esetén létezik. (A következőkben megadott példák mutatják, hogy van olyan pár, amelyre $\sigma\varphi$ létezik, és σ nem permutáció.) Szükséges feltételt ad - φ-re vonatkozóan - $\sigma\varphi$ létezésére a következő:

4.4. Lemma: Legyen $\sigma(x)$ érték-készlete $M' \subset M$. Ha $\varphi \in \Gamma$ nem tartja meg az M' halmazt, akkor $\sigma\varphi$ nem létezik.

A lemma állitása $\sigma\varphi$ definiciójából egyszerüen adódik. ▲
Az M' halmazt megtartó függvényekre igaz a

4.22.a. Tétel: Legyen $\sigma(x)$ érték-készlete $M' \subset M$ és legyen $\varphi(M',\dots,M') = M'' \subseteq M'$. A $H_b \overset{d}{=} \{a \mid \sigma(a) = b, a \in M\}$ $h_b = |H_b|$ jelöléssel . Γ_n $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ σ- szemi-duál. függvényeinek száma: $\prod_{b \in M''} h_b$.

Bizonyitás: Legyen $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in M^n$ olyan vektor, amelyre $\varphi(\sigma(\alpha_1),\dots,\sigma(\alpha_n)) = b \,(\in M'')$. Minthogy a $\sigma(x) = b$ egyenlőséget h_b számu $a \in M$ érték elégiti ki, a ${}^{\sigma}\varphi = \psi$ definiciós egyenletében az adott $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ helyen ψ értéke h_b féleképpen választható. A ψ egyértelmü meghatározásához M^n minden elemére elő kell irni az értékét; minthogy ezek egymástól függetlenek, a lehetséges előirások száma: $\prod_{b \in M''} h_b$. (A $\sigma(x) = b \in M' \setminus M''$ megoldásokhoz nem létezik olyan $\psi \in \Gamma$, amely a definiciós egyenlőséget kielégitené.) ▲

A konstruktiv bizonyitásból kiolvasható egy ${}^{\sigma}\varphi$ szemi-dual függvényt megadó algoritmus is. A 4.22a.tétel adott $\sigma(x)$ és $\varphi \in \Gamma_n$ mellett ${}^{\sigma}\varphi$ létezésére vonatkozó állitást tartalmazott. Egy másik lehetséges kérdés-felvetés: adott $\sigma(x)$ és $\psi \in \Gamma_n$ mellett φ létezését vizsgáljuk. Erre vonatkozóan érvényes a következő

4.22.b. Tétel: Legyen $\sigma(x)$ érték-készlete $M' \subset M$ és $\psi \in \Gamma_n$. Irjuk elő $\varphi(y_1,\dots,y_n) \in \Gamma_n$ értékét az M' halmazra szoritkozva ugy, hogy teljesüljön:

$$\varphi(\sigma(x_1),\dots,\sigma(x_n)) = \sigma(\psi(x_1,\dots,x_n)).$$

Ekkor ${}^{\sigma}\varphi = \psi$ és az ilyen $\varphi \in \Gamma_n$ függvények száma: $|M \setminus M'|^n$.

A tétel bizonyitása triviális. ▲

Nem foglalkozunk azzal az esettel, ha φ, ψ adott és $\sigma(x)$ létezése a kérdés. Megjegyezzük, hogy a $\psi = {}^{\sigma}\varphi$ egyenlőségből általában nem következik σ^* létezése, amelyre fennáll a $\varphi = {}^{\sigma^*}\psi$ egyenlőség. (Ez az általánositott inverz létezésével kapcsolatos.)

Most is definiálható a $\Gamma' \subset \Gamma$ halmaz σ-szemi-duál halmaza: ${}^{\sigma}\Gamma' \overset{d}{=} \{\psi \mid {}^{\sigma}\varphi = \psi,\ \varphi \in \Gamma'\}$, továbbá Γ'' σ-szemi-önduális halmaz, ha ${}^{\sigma}\Gamma'' = \Gamma''$.

A σ-szemi-önduális függvények halmaza: ${}_{\sigma}S = \{\varphi \mid \varphi = {}^{\sigma}\varphi,\ \varphi \in \Gamma\}$, ugyanis σ-szemi-önduális a $\varphi \in \Gamma$, ha $\varphi = {}^{\sigma}\varphi$. Mielőtt megvizsgáljuk ${}_{\sigma}S$ osztály néhány tulajdonságát, tekintsük a példákat, és néhány σ-sz-d eredményt.

Példák: (1) Legyen
$$\sigma(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \neq 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\zeta_2(x_1, x_2)$ σ-szemi-önduális.

(2) Legyen $\sigma(x) = \alpha$ konstans függvény; pontosan azok a $\varphi \in \Gamma_n$ függvények σ-sz-ö (σ-szemi-önduálisak), amelyek α-tartók.

(3) Tetszőleges $\sigma(x) \in \Gamma_1$ -re: ${}^{\sigma}\Gamma_1 = \Gamma_1$.

Az 1.2. lemma általánositása is igaz:

4.5. Lemma: Legyen $\sigma(x) = \sigma_1(y) \circ \sigma_2(x)$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_1$, $\varphi \in \Gamma_n$. Ha létezik $\psi_1 = {}^{\sigma_1}\varphi$ és $\psi_2 = {}^{\sigma_2}\psi_1$, akkor létezik ${}^{\sigma}\varphi$ és ${}^{\sigma}\varphi = {}^{\sigma_2}({}^{\sigma_1}\varphi)$.

<u>Bizonyitás:</u> Minthogy $\sigma_1 \circ \psi_1 = \varphi \circ (\sigma_1, \dots, \sigma_1)$

és $\sigma_2 \circ \psi_2 = \psi_1 \circ (\sigma_2, \dots, \sigma_2)$, ezekből

$$\sigma_1 \circ \psi_1 \circ (\sigma_2, \dots, \sigma_2) = \sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \psi_2) = \sigma \circ \psi_2$$

másrészről

$$\sigma_1 \circ \psi_1 \circ (\sigma_2, \dots, \sigma_2) = (\varphi \circ (\sigma_1, \dots, \sigma_1)) \circ (\sigma_2, \dots, \sigma_2) = \varphi \circ (\sigma, \dots, \sigma).$$

▲

Az 1.3. Lemma általánositása (bizonyitása is nehézség nélkül megadható):

<u>4.6. Lemma:</u> Legyen $\sigma(x)$ érték-készlete $M' \subset M$ és létezzen

${}^{\sigma}\varphi = \psi \in \Gamma_n$, $\varphi \in \Gamma_n$.

Igazak a következő állitások:

(1) Ha φ az M' halmazon nem veszi fel a $k_1, k_2, \dots, k_r$ értékeket, akkor ψ sem veszi fel azokat az $i_1, i_2, \dots$ $\dots, i_r$ értékeket, amelyekre $\sigma(i_j) = k_j$, $j = 1, 2, \dots, r$.

(2) Ha $\underline{\alpha}, \underline{\beta} \in M'^n$ vektor-párra $\varphi(\underline{\alpha}) = \varphi(\underline{\beta})$, akkor ψ az $\underline{\alpha}'$, $\underline{\beta}'$ helyeken— amelyekre $(\forall j \in J_n)$ $\alpha_j = \sigma(\alpha'_j)$, $\beta_j = \sigma(\beta'_j)$ — olyan a, b értéket vesz fel, hogy $\sigma(a) = \sigma(b)$ teljesül.

(3) Ha φ az M'^n valamely A részhalmazán páronként különböző értéket vesz fel, akkor ψ ugyanilyen tulajdonságu a megfelelő

$$\{\underline{\beta} \mid \underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n),\ \alpha_j = \sigma(\beta_j),\ j = 1, \dots, n,\ \underline{\alpha} \in A\}$$

halmazon (sőt $\sigma \circ \psi$ is ilyen).

Az 1.7. tétel általánositása szintén lehetséges (bizonyitása azonban eltér az ott megadottól):

4.23. Tétel (a szemi-dualitás alaptétele): Ha $\varphi(x_1,\dots,x_k)$ a $\varphi_0,\ \varphi_1(x_{11},\dots,x_{1i_1}),\ \varphi_2(x_{21},\dots,x_{2i_2}),\dots,\varphi_p(x_{p1},\dots,x_{pi_p}),\dots$ függvények szuperpoziciója, akkor a $^{\sigma}\varphi(x_1,\dots,x_k)$ σ-szemi-duál függvények a megfelelő $^{\sigma}\varphi_0(y_1,\dots,y_n)$, $^{\sigma}\varphi_1(x_{11},\dots,x_{1i_1}),\ ^{\sigma}\varphi_2(x_{21},\dots,x_{2i_2}),\dots,\ ^{\sigma}\varphi_p(x_{p1},\dots,x_{pi_p}),\dots$ függvényekből ugyanazon algoritmussal előállitható szuperpozicióval adódik.

Bizonyitás: Itt is elegendő az állitást elemi szuperpozició esetére kimutatni.

Legyen

$$\varphi(x_1,\dots,x_k)=\varphi_0(y_1,\dots,y_n)\circ(\varphi_1(x_{11},\dots,x_{1i_1}),\dots,\varphi_n(x_{n1},\dots,x_{ni_n})) \qquad \text{I.}$$

Azt kell bizonyitani, hogy ha $^{\sigma}\varphi=\psi$, $^{\sigma}\varphi_0=\psi_0$, $^{\sigma}\varphi_j=\psi_j$ $(j=1,2,\dots,n)$ rendre megfelelő σ-sz-d függvényeket jelölnek, azaz

$$\sigma(x)\circ\psi(x_1,\dots,x_k)=\varphi(z_1,\dots,z_k)\circ(\sigma(x_1),\dots,\sigma(x_k)) \qquad \text{II.}$$

$$\sigma(x)\circ\psi_0(y_1,\dots,y_n)=\varphi_0(z_1,\dots,z_n)\circ(\sigma(y_1),\dots,\sigma(y_n)) \qquad \text{III.}$$

$$\sigma(x)\circ\psi_j(x_{j1},\dots,x_{ji_j})=\varphi_j(z_{j1},\dots,z_{ji_j})\circ(\sigma(x_{j1}),\dots,\sigma(x_{ji_j})) \qquad \text{IV.j.}$$

akkor bármely $\psi(x_1,\dots,x_k)={}^{\sigma}\varphi_0\circ({}^{\sigma}\varphi_1,\dots,{}^{\sigma}\varphi_n)$ függvény kielégiti a II. egyenlőséget. (A továbbiakban az áttekinthetőség kedvéért az argumentumokat elhagyjuk.) A felhasznált összefüggések sorszámát jelezve, az átalakitások:

$$\sigma\circ({}^{\sigma}\varphi_0\circ({}^{\sigma}\varphi_1,\dots,{}^{\sigma}\varphi_n))=\sigma\circ\psi_0\circ(\psi_1,\dots,\psi_n)\overset{\text{III}}{=}(\varphi_0\circ(\sigma_1,\dots,\sigma))\circ(\psi_1,\dots,\psi_n)=$$

$$=\varphi_0\circ(\sigma\circ\psi_1,\dots,\sigma\circ\psi_n)\overset{\text{IVi}}{=}\varphi_0\circ(\varphi_1\circ(\sigma_1,\dots,\sigma),\dots,\varphi_n\circ(\sigma_1,\dots,\sigma))=$$

$$=(\varphi_0\circ(\varphi_1,\dots,\varphi_n))\circ(\sigma_1,\dots,\sigma)=\varphi\circ(\sigma_1,\dots,\sigma).$$

▲

(A szuperpozició asszociativ és kommutativ tulajdonságának felhasználását itt sem jelöltük meg.)

Következmények:

1./ $\Gamma'\subset\Gamma$ és ${}^{\sigma}\Gamma'$ egyidejüleg zárt vagy nem zárt.

2./ Γ zárt osztályban Γ'' pontosan akkor teljes, ha ${}^{\sigma}\Gamma''$ is teljes ${}^{\sigma}\Gamma'$ -ban;

3./ A $\Gamma''\subset\Gamma'$ és ${}^{\sigma}\Gamma''\subset{}^{\sigma}\Gamma'$ reláció egyszerre igaz vagy hamis.

A σ-szemi-öndualitásra (σ-sz-ö) vonatkozó eredmények:

4.7. Lemma: Ha $\psi(x_1,\dots,x_n)\in\Gamma_n$ σ_1-sz-ö és σ_2-sz-ö $(\sigma_1,\sigma_2\in\Gamma_1)$, akkor ψ σ-sz-ö, ahol $\sigma\overset{d}{=}\sigma_1\circ\sigma_2$.

Bizonyitás: Az átalakitásokban az alábbi (definiciós) egyenlőségeket használjuk fel:

$$\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 , \quad \sigma_1 \circ \varphi = \varphi \circ (\sigma_1, \dots, \sigma_1),$$
$$\sigma_2 \circ \varphi = \varphi \circ (\sigma_2, \dots, \sigma_2).$$

$$\sigma \circ \varphi = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \varphi = \sigma_1 \circ \varphi \circ (\sigma_2, \dots, \sigma_2) =$$
$$= (\varphi \circ (\sigma_1, \dots, \sigma_1)) \circ (\sigma_2, \dots, \sigma_2) = \varphi \circ (\sigma, \dots, \sigma).$$ ▲

4.24. Tétel: Ha $\sigma(x) \in \Gamma_1'$ értékkészlete $M' \subset M (M' \neq M)$, akkor a σS osztály zárt, de nem teljes.

Bizonyitás: A zártsághoz azt kell bizonyitani, hogy σS elemeinek szuperpoziciója is σ-sz-ö függvény. A 4.23. tétel alapján a $\varphi_0, \varphi_j \; (j=1,2,\dots,n) \in \sigma S$ függvényekre $\varphi = \varphi_0 \circ (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ esetén teljesül a
$$^\sigma\varphi = {}^\sigma\varphi_0 \circ ({}^\sigma\varphi_1, \dots, {}^\sigma\varphi_n)$$
egyenlőség, s minthogy
$$^\sigma\varphi_0 = \varphi_0 , \quad {}^\sigma\varphi_j = \varphi_j \quad (j=1,2,\dots,n)$$
innen ${}^\sigma\varphi = \varphi_0 \circ (\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \varphi$ adódik, azaz
$$\varphi \in \sigma S.$$

Hogy a σS osztály nem teljes, az következik a 4.4. lemmából. ▲

A további (4.19-4.20-4.21) tételek általánositásával itt nem foglalkozunk.

4.8. Példa a funkcionális teljesség alaptételére: m=2 eset.

A funkcionális teljesség alaptételének (2.5. tétel) tárgyalásakor megjegyeztük, hogy ma sem ismeretesek (gyakorlatilag is használhatóan) a tételben előirt függvényrendszerek $m > 3$ esetén. Az $m=3$ eset is eléggé bonyolult - 18 kváziteljes osztályra épül - ezért illusztrálásként az $m=2$ esetet (igazság-függvények) fogjuk tárgyalni.

Az N, A_α, S, L betük rendre a monoton, az α-tartó ($\alpha \in \{0,1\}$), az önduális illetve a lineáris függvények osztályát jelentik.

Jelölje K^2 az $\equiv 1$ és $\equiv 0$ függvények halmazát.

4.25. Tétel: Az $\{f_1, f_2, \dots\} = F$ függvény-rendszer akkor és csak akkor funkcionálisan teljes, ha a $H_1 = F \setminus N$, $H_2 = F \setminus A_0$, $H_3 = F \setminus A_1$, $H_4 = F \setminus S$, $H_5 = F \setminus L$ halmazok egyike sem üres halmaz.

Bizonyitás: A szükségesség következik abból, hogy az N, A_α, S, L függvényosztályok mindegyike zárt, és nem teljes.

Elégségesség:

I. Először előállitjuk a K^2 halmazt. Legyen $f_2 \in H_2$, $f_3 \in H_3$, $f_4 \in H_4$; ezekre: $f_2(0,\dots 0) = 1$, $f_3(1,\dots 1) = 0$,

1./ Ha $f_2(1,\dots 1) = 1$, akkor az $f_2(x_1,\dots x_n)\, 0\, (x, \dots, x) = f_2(x,\dots x) \equiv 1$.

A másik konstans függvény ebből:
$f_3(x_1,\dots x_n)\, 0\, (f_2(x,\dots,x), \dots, f_2(x,\dots,x)) \equiv 0$.

2./ Ha $f_2(1\ldots1)=0$, akkor $f_2(x,\ldots x)=\overline{X}$. Továbbá, f_4 nem önduális, ezért létezik olyan $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$, amelyre $f_4(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)=f_4(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_k)$.

Tekintsük a következő függvényt (ezt függvényeinkből felépithetjük):

$$f(x)=f_4(g_1(x),\ g_2(x),\ldots g_k(x)),$$

ahol

$$g_\nu(x)=\begin{cases} x, & \text{ha } \alpha_\nu=0 \\ \overline{x}, & \text{ha } \alpha_\nu=1 \end{cases}$$

Igy $f(o)=f_4(g_1(0),\ldots g_k(0)=f_4(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)=$

$f_4(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_k)=f_4(g_1(\overline{0}),\ldots g_k(\overline{0}))=f(1),$

azaz $f(x)=$ konstans.

Ezért, $\overline{x}$ birtokában mindkét konstanst elő tudjuk állitani.

II. Minthogy H_1 nem — üres, létezik $f_1(x_1,\ldots,x_p\in H_1$, amelyre van olyan szomszédos vektorpár :

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_{l-1},0,\alpha_{l+1},\ldots,\alpha_p)=\underline{\alpha}^{(0)}$$
$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_{l-1},1,\alpha_{l+1},\ldots,\alpha_p)=\underline{\alpha}^{(1)}$$

hogy

$$f_1(\underline{\alpha}^{(0)})>f_1(\underline{\alpha}^{(1)}).$$

A konstansokat már előállitottuk, ezért legyen

$$h(x) = f_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}, x, \alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_p)$$

Minthogy ez nem monoton, $h(0) > h(1)$.

Ezért $h(x) = \overline{x}$.

Eddig előállitottuk az összes egyváltozós függvényt. Tekintve, hogy az $\{x \cdot y, \overline{x}\}$ rendszer - mint az jól ismert - teljes rendszer, elegendő x.y függvényt előállitani. (Indukcióval bizonyitható, hogy minden G-beli függvény előállitható - egyértelmüen - kitüntetett diszjunktiv normál alakban, s ez a $\{x \cdot y, \overline{x}\}$ rendszerből szuperpozicióval előáll.)

III. Legyen $f_5(z_1, \ldots, z_r) \in H_5$,
és jelölje $\zeta_3(x, y)$-t m=2 esetén $x \dotplus y$.
Minthogy f_5 nem-lineáris, van két olyan változója, pl. z_1 és z_2, hogy a kifejezésben ezek konjunkciója szerepel:

$$f_5(z_1, \ldots, z_r) = z_1 \cdot z_2 \cdot f'(z_3, \ldots, z_r) \dotplus z_1 \cdot f''(z_3, \ldots, z_r) \dotplus$$
$$\dotplus z_2 f'''(z_3, \ldots, z_r) \dotplus f''''(z_3, \ldots, z_r),$$
$$f'(z_3, \ldots, z_r) \not\equiv 0.$$

Minthogy $f' \not\equiv 0$, létezik olyan $(\gamma_3, \ldots, \gamma_r)$ vektor, amelyre

$$k(z_1 z_2) \overset{d}{=} f_5(z_1, z_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_r) = z_1 z_2 \dotplus a \cdot z_1 \dotplus b z_2 \dotplus c$$

Ebből a kivánt előállitás (minthogy a konstansokat már előállitottuk):

$$q(z_1, z_2) \overset{d}{=} k(z_1 \dotplus b, z_2 \dotplus a) \dotplus c \dotplus ab = z_1 \cdot z_2. \qquad \blacktriangle$$

Következmény: Minden bázis-rendszer legfeljebb öt függvényből áll.
Igaz azonban a következő

4.26. Tétel: A Boole függvények rendszerében minden bázis legfeljebb négy függvényt tartalmaz.

Bizonyitás: Ha f 0-t nem őrző, azaz $f(0,\dots,0)=1$, akkor ha $f(1,\dots 1) = 0$ lenne, f 1-et sem őrző egyben, s igy készen vagyunk. Ha viszont $f(0,\dots 0) = 1$ és $f(1,\dots 1)=1$ akkor $f(\bar{1},\dots,\bar{1}) = f(0,\dots 0) = 1 \neq 0 = \bar{f}(1,\dots,1)$,

tehát f nem önduális.

A tétel pontos, mert $\{f_1 \equiv 0,\ f_2 \equiv 1,\ f_3 = x_1x_2,\ f_4 = x_1 \dotplus x_2 \dotplus x_3\}$ rendszerről könnyen látható, hogy bázis.

▲

A 4.25. tétel alapján könnyen meghatározható az összes G-beli teljes rendszer.

5. BEFEJEZŐ MEGJEGYZÉSEK, A TOVÁBBI VIZSGÁLATOK ÉS ÁLTALÁNOSITÁSOK LEHETŐSÉGEI

α. A számitástechnika rohamos fejlődése az utóbbi évtizedben (egyik oldalról az operációs rendszerek, forditó-programok, stb. kidolgozásával, másik oldalról az uj technológia - integrált áramkörök, mágneses buborék memória és aritmetika, stb. - megjelenésével) fellenditette az automata-elmélet és a formális nyelvek kutatását. A dolgozatban egy viszonylag szük részterület, a Post-függvények funkcionális teljességének problémakörét tekintettük át, az egyes speciális kérdések részletezése nélkül. Nem foglalkoztunk részletesen pl. a Sheffer-függvények vizsgálatával, amelyek az utóbbi években előtérbe kerültek, a vele foglalkozó publikációk száma megnőtt. A Sheffer-függvények egy, a dolgozatban szereplő jellemzésétől eltérő teljes leirás található [37.]-ben, és [20]-ban m=3 esetre. (Jablonszkij [65] és Zaharova [46] eredményét tartalmazza a dolgozat). Malcev [56]-ban egy további lényeges általánositást ad meg [65] emlitett eredményére, szigoruan algebrai tárgyalásmódot követve. (A dolgozatok többsége inkább kombinatorikus jellegü.) Tárgyalásmódjában algebrai még: [3], [36], [42], [51], [15], [16], [29], [32].

β. Nem foglalkoztunk azoknak az algebrai strukturáknak a vizsgálatával sem, amelyek $\langle H; \Gamma'(\subset \Gamma)\rangle$ alakuak, azaz Γ egy Γ részhalmazát engedjük meg müveletként (a H alaphalmazon: itt lehet $H = \Gamma$ is.)

Az általunk vizsgált speciális esetben H = Γ' és mindig megadjuk a függvények egyenlőségét kifejező ekvivalencia-relációt is. Az emlitett általánosabb esetben már lényeges a formulák vizsgálatának a szerepe [1], [14], [27], [21], [40], [66]. Egy érdekes speciális algebrával foglalkozik [17], amely ortogonális teljes rendszereket eredményez Γ_m -ben.

Logikai tárgyalásmód található [1], [14], [24], [27] -ben.

γ. Egy lehetséges általánositás (az m=2 esetben jól ismert) nem teljesen meghatározott Post-függvények (bizonyos változó-kombinációkra a függvény nincs értelmezve). Ezek a függvények sok szempontból tárgyalhatók m+1-értékü Post-függvényekként: a határozatlansági helyen veszi fel a függvény az m+1-edik értéket. (Igen gyakori felhasználás az m=3 értékü Post függvény alkalmazása a nem teljesen meghatározott Boole függvények vizsgálatánál.) [35], [43].

Ismeretes [43], hogy ebben a függvény-rendszerben is véges a kváziteljes osztályok száma, továbbá, a teljességi alaptétel is változatlanul érvényes.

δ. Egy másik irányu általánositás: pszeudo-Post függvénynek nevezzük azokat a függvényeket, amelyek az M^n halmazon vannak értelmezve, de értékeiket a valós számok R halmazából veszik. Ezekre is érvényes az egyértelmüen kifejthetőség, szuperpozició szempontjából azonban ezek érdektelenek. Az m=2 esetben lásd [5].

E. A határ-logika függvényeihez jutunk, ha az M halmazt a $\lim_{m\to\infty} M = I$ halmazzal helyettesitjük. Az ilyen függvények P halmaza határ-logika, ha P megszámlálható számosságu halmaz és minden $m \geq 2$ esetén tartalmaz homomorf képeket Γ-ban. Jablonszkij és Gavrilov munkáihoz kapcsolódva Demetrovics a következő szép eredményt kapta: "Tetszőleges α kardinális számra létezik olyan határlogika, amelyben a különböző kvázi teljes osztályok száma α. (α lehet természetes szám, megszámlálható számosság, vagy kontinuum.)" [44].

Megjegyezzük, hogy Γ felfogható P olyan részhalmazaként, amely az M halmazt megtartja. Ez a megjegyzés érdekes lehet pl. a P halmaz olyan részhalmazainak vizsgálatánál, amelyek az M halmazt s-R-korlátoltan megtartják.

Könnyen belátható, hogy a lineárisan szeparálható Post-függvények osztálya zárt és tartalmazza a monoton függvények M_{r_0} osztályát, ahol r_0 teljes rendezés.

J. Számosság. Az egyes függvény-osztályok számossága ismert, más osztályokra csak aszimptotikus eredmények vannak. Megkisérelhető (legalább aszimptotikusan érvényes) olyan tételek megadása, amelyek $[\Gamma']$ $(\Gamma' \subset \Gamma)$ elem-számát adják meg (pl. a kombinatorikából ismert szita-formulával). Speciálisan $[\Gamma'] = \Gamma$ egyenlőségre szeretnénk következtetni számossági megfontolásokból. Ezek az eredmények felhasználhatók lennének olyan teljességi kritériumok tárgyalásánál, amelyek a jelenleginél gyengébbek és igy ezekre nézve a probléma teljes megoldása remélhető lenne.

(Ilyen jellegü kritériumok szükségességét felveti [48], amely a teljességi témakör rövid áttekintését is tartalmazza.)

η. Véleményünk szerint egy ilyen kritérium lehetne a statisztikus teljességre vonatkozó kritérium, amelyet az alábbiakban vázolunk.

Legyen $\mathcal{K}_s \overset{d}{=} \{\chi_1, \dots, \chi_s\}$ zárt osztályok egy rögzitett függvény-rendszere $(\chi_j \subset \Gamma,\ j=1,2,\dots,s)$, és $0 \leq p \leq 1$ adott valós szám. A $\mathcal{K}^{(n)} \overset{d}{=} \{\chi \mid \chi \subseteq \Gamma_n, \chi \setminus \chi_j \neq \emptyset, \chi_j \in \mathcal{K}_s\}$, $\mathcal{K}_t^{(n)'} = \{\chi_t \mid \chi_t \in \mathcal{K}^{(n)'}, \chi_t \text{ teljes}\}$ jelölésekkel a $\mathcal{K}^{(n)}$ valamely $\mathcal{K}^{(n)'} (\subseteq \mathcal{K}^{(n)})$ részhalmazát $\mathcal{K}_s$-re nézve (statisztikusan) p-teljesnek nevezzük, ha

$$\frac{|\mathcal{K}_t^{(n)'}|}{|\mathcal{K}^{(n)'}|} = p.$$

(Tetszőlegesen nagy változószámra értelmezhető a fogalom $\mathcal{K} \overset{d}{=} \lim\limits_{n \to \infty} \mathcal{K}^{(n)}$ definicióval.)

Statisztikus teljességre vonatkozó tétel $(\mathcal{K}_s, p)$ párok létezésére vonatkozik. Nyilvánvaló, hogy a $p=1$-re vonatkozó statisztikus teljesség is gyengébb követelmény, mint a teljesség, hiszen ez utóbbi a $|\mathcal{K}^{(n)}| = |\mathcal{K}_t^{(n)}| = 1$ speciális esetnek felel meg. A statisztikus teljességre egy későbbi dolgozatban szeretnénk visszatérni, itt csak megjegyezzük, hogy adott n esetén a p-teljesség szükséges feltétele, hogy p racionális legyen és egyszerüsitett alakjában a nevezője legfeljebb

$$2^{m^{m^n} - \sum_{j=1}^{s} 2^{k_j}},$$

ahol $k_j = |\chi_j|$, $j=1,2,\dots s$.

Természetesen elsősorban m szerinti aszimptotikus eredmények várhatók.

ϑ. Erdős és Turán a [8] sorozatban a szimmetrikus csoport statisztikus elméletének rendszeres kidolgozását adja, többek között vizsgálván az S_n szimmetrikus csoport elemeinek rend szerinti aszimptotikus eloszlását. Az analóg eredményt Harris adta meg szimmetrikus félcsoportra [12]-ben. Post-függvényekre a pontos átfogalmazás nem lehetséges, mert Γ nem véges halmaz. Mégis nagyon érdekes lenne a (lényegesen nehezebbnek tünő) Γ_2-beli megfelelő eredmények származtatása, mert Γ_2 teljes rendszer (2.1. lemma), és Γ_1 nem az.

Jelölje $K(m,x)$ azon Γ_2-beli φ elemek számát, amelyek $O(\varphi)$ rendjére $O(\varphi) \leq A(m,x)$ teljesül; meghatározandó a $\lim_{m\to\infty}\left(m^{-m^2}\cdot K(m,x)\right)$

határ-eloszlás x-függvényében.
($A(m,x)$ ismert függvény.)

További érdekes (de nehezebb) kérdés adódik, ha φ-t Γ_2 egy Γ' részhalmazával helyettesitjük; végül az

$A(m,x_1) = m^{m^2}-1$ és $A(m,x_0) = m^{m^2}$ megoldásaira a

$\lim_{m\to\infty}\left(m^{-m^2}\left(K(m,x_0)-K(m,x_1)\right)\right)$

jellemző a Γ_2-ben teljes részrendszerekre.

ι. A formális nyelvekkel és automatákkal való kapcsolat nyilvánvaló; a Post-függvények speciális, u.n. kombinatorikus automaták (az állapotok száma: 1) lásd [4]. Egy másik kapcsolat ugy adódik, hogy a Post-függvényeket a leképezések általánositásaként tekintve (a leképezések egyváltozós Post-függvények) olyan automatákat vizsgálunk, amelyek automata-leképezése egy adott Post-függvény.

Szintén a jelzett következő dolgozatban fogunk foglalkozni az itt csak felsorolt alábbi problémákkal:

κ. Sztochasztikus Post-függvények ([2] eredményeinek általánositása.)

λ. Post-függvények optimális realizálása kétpólusu (ill. m-pólusu) gráfokkal ([3] és [4] egyes eredményeinek általánositása).

μ. Kongruencia-tartó függvények osztályának vizsgálata. (Az ezzel kapcsolatos jelenlegi eredményeink a lineáris függvényekhez kapcsolódnak.)

ν. Formula-ábrázolások, interpolációs polinomok, minimalizálás.

IRODALOM

1. R. Ackermann: Introduction to Many-Valued Logics, Dover Publ. Inc. 1967.

2. A. Ádám: Über stochastische Wahrheitsfunktionen, Proc. Colloq. Information Theory, Debrecen, 1967. 15-34.

3. A.Ádám: Truth Functions and the Problem of their Realization by Two-terminal Graphs, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.

4. Bagyinszki J.: Véges automaták. MTA-Mat. Kut. Int. jegyzet, Budapest, 1972.

5. Bagyinszki J.: Digitális rendszerek tervezésének Boole módszerei, BME-TI -jegyzet, Budapest, 1971.

6. G.Birkhoff, J.Neumann; The Logic of Quantum Mechanics, Ann. Math, 37. (1936) 823-843.

7. G.Birkhoff; T.C.Bartee: Modern Applied Algebra, McGraw-Hill, 1970.

8. P.Erdős, P. Turán: On some Problems of a Statistical Group Theory; I-VI:

   I./ Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 4 (1965), 175-186.

   II./ Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 18 (1967), 151-163.

   III./ Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 18 (1967) 309-320.)

IV./ Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 19, (1968), 413-435.

V./

VI./ J. Indian Math. Soc. XXXIV. (1970), 175-192.

9. M.I.Gazale: Les structures de communication a m-valeurs et les calculatrices numeriques, Ganthier-Villars, Paris, 1959.

10. R.L. Graham: On m-valued Functionally Complete Thruth Functions, J. Symbolic Logic, 32 (1967), 190-195.

11. B.Harris: Probability Distributions Related to Random Mappings, Ann. Math. Statist., 31 (1960), 1045-1062.

12. B.Harris: The Asymptotic Distribution of the Order of Elements in Symmetric Semigroups, MRC. report #1195, Univ. of Wiscontin, Madison.

13. M.A.Harrison: Introduction to Switching and Automata Theory, McGraw Hill, 1965.

14. W.H.Jobe: Functional Completeness and Ganonical Forms in Many-Valued Logics, Journal of Symbolic Logic", 27, (1962), 409-422.

15. Y.A.Keir: Algebraic Properties of 3-valued Compositions, "IEEE Trans. on Electronic Computers", 13, (1964), 635-639.

16. V.Kirin: On the Intersection of Precomplete sets in Finite Algebras, "Glasnik mat.-fiz. i astronom." 20 (1965), 189-193.

17. T.Kitahashi, K. Tanaka: Orthogonal Expansion of Many-Valued Logical Functions and its Application to their Realization with a Single-Threshold Element, IEEE Trans. on Computers, C-21 (1972), 211-218.

18. S.C.Lee, E.T.Lee: On Multivalued Symmetric Functions, IEEE Trans. on Computers, C-21 (1972), 312-317.

19. C.L.Liu: Introduction to Combinatorial Mathematics, McGraw-Hill, 1968.

20. N.M.Martin: The Sheffer Functions of 3-valued Logic, "J.of Symbolic Logic", 19, (1954) 45-51.

21. E.L.Post: Introduction in a General Theory of Elementary Propositions, "American. Mathematical Monthly", 43, (1921), 163-185.

22. E.L.Post: The Two-valued Iterative Systems of Mathematical Logic, Annals of Math. Studies, 5, Princeton, 1941.

23. J. Riordan: Combinatorial Identities, John Wiley, 1968.

24. A.Rose: Binary Generators for the m-valued and χ_0-valued Lukasiewicz Propositional Calculi, Compositio Math., 20, (1968), 153-169.

25. I.Rosenberg: Zu einigen Fragen der Superposition von Funktionen Mehrere Veranderlicher, Bull Inst. Politehn. Jasi, 12, (1966) 7-15.

26. I.Rosenberg: La structure des fonctions de plusierus sur un ensemble fini, C.R. Acad. Sc., Paris, t.260, No 14, Groupe 1 (5 April 1965).

27. D.B.Rosser; A.R.Turquette: Many-valued Logics, North-Holland Publ. Co., 1952.

28. Arto Salomaa: On Essential Variables of Functions, Especially in the Algebra of Logic, Suomalais tiedeakt toimituks, Sar. A-1, No 339, 1963.

29. Arto Salomaa: On the Heigths of Closed Sets of Operations in Finite Algebras, ibid, No 365, 1965.

30. Arto Salomaa: On the Number of Simple Bases of the Set of Functions over a Finite Domain, Turun Yliopiston julkaisnja, Ser. A-1, No 52, 1962.

31. Arto Salomaa: Some Completness Criteria for Sets of Functions over a Finite Domain, part I, ibid, No 53, 1962, part II, ibid, No 63, 1963.

32. P.Schofield: Complete Subsets of Mapping over a Finite Domain, "Proceedings of the Cambridge Philosophical Society", 62, (1966), 597-611.

33. P.Schofield: On a Correspondence between Many-valued and Two-valued Logics, "Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik" bd. 4, (1964), 265-274.

34. J.Słupecki: Kryterium pelnosci wielowartosciowych Systemow logiki Zdan, ibid, Wydzial III. Rok XXXII, (1939), 102-109.

35. P.M.Spira: Computation Time of Arithmetic and Boolean Functions in (d,r) Circuits, IEEE Trans. on Computers, C-22 (1973), 552-555.

36. I.D.Swift: Algebraic Properties of N-valued Propositional Calculi, "American Mathematical Monthly", 59, (1952), 612-620.

37. E.Trevor, M.Lane: Sheffer Stroke Functions in Many-valued Logic, "Portugaliae Mathematica", 16, (1957), 83-94.

38. D.L. Webb; Definition of Post's Generalized Negative and Maximum in Terms of one Binary Operation, "American Journal of Mathematics", 58, (1936), 193-194.

39. D.L. Webb, Generation of Any n-valued Logic by One Binary Operator, "Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA", 21, /1935/ 252-254.

40. Н.Н. Айзенберг;О представлении суммы по модулю m в одном классе нормальных форм функций многозначной логики, Кибернетика, №4., К., 1965.

41. Р.А. Байрамов, Об одной серии предполных классов в к-значной логике, Кибернетика, №1., К., 1967.

42. В.Г. Бондарчук, Л.А. Калужнин, В.Н. Котов, Б.А. Ромов, Теория Галуа для алгебр Поста , журн. "Кибернетика" №3, К., 1969.

43. Ван Сян-хао, Строение полностью и частично определенных функций к -значений логики, Гаодэн сюэсяо изыжань кэсюэ сюэбао, т.2, №1, 1966.

44. Деметрович Я., О мощностях множеств предполных классов в предельных логиках, Acta Cybernetica, Tl Fasc. 4 /1972/ 233-239.

45. В.М. Гниденко, Нахождение порядков предполных классов в трехзначной логике, сб. "Проблемы кибернетики", вып. 8. М., I962, стр. 34I-346.

46. Е.Ю. Захарова, Об одном достаточном критерии полноты в $P_к$, сб. "Проблемы кибернетики", вып. I6, М., I960, стр. 239-244.

47. Е.Ю. Захарова, Критерий полноты систем функций из $P_к$, сб. "Проблемы кибернетики", вып. I7, М., I967, стр.5-I0.

48. Ю.Л. Иваськив, Д.А. Поспелов, Ж. Тошич, Представления в многозначных логиках, Кибернетика, №2., I969, 35-47.

49. В.И. Клевачев, О некоторых системах, полных в $P_к$, Кибернетика, №5., I970, I39-I40.

50. Б.М. Клосс, Э.И. Нечипорук, О классификации функций многозначной логики, сб. "Проблмы кибернетики", вып. 9, М., I963, стр. 27-36.

5I. А.В. Кузнецов, Структура с замыканием и критерии функциональной полноты, "Успехи математических наук", XVI, 2 (98), I96I, стр. 20I-202.

52. Ло Чжу - кай, О предполноте классов функций, сохраняющих разбиение, Цзилинь дасюэ. Цзыжань кэсюэ сюэбао, №2, I963.

53. Ло Чжу - кай, Предполнота множества и кольца линейных функций, там же.

54. Ло Чжу - кай, Лю Сюй - Хуа, Предполные классы, определяемые бинарными отношениями в многозначной логике, Цзилинь дасюэ. Цзыжань кэсюэ сюэбао, №4, 1963.

55. Ло Чжу - кай, Предполные классы, определяемые нормальными к-нарными отношениями в к-значной логике, Цзилинь кэсюэ сюэбао, №2, 1964.

56. А.И. Мальцев, Об одном усилении теорем Слупецкого и Яблонского, сб. "Алгебра и логика". Новосибирск, т. 6, вып. 3, 1967, стр. 61-75.

57. В.В. Мартынюк, Исследование некоторых классов функций в многозначных логиках, сб. "Проблемы кибернетики", вып. 3, М., 1960, стр. 49-60.

58. Гр.К. Моисил, Алгебраическая теория дискретных автоматических устройств, ИЛ, М., 1963.

59. Э.И. Нечипорук, О многополюсниках, реализующих функции многозначной логики, сб. "Проблемы кибернетики", вып. 5, М., 1961, стр. 49-50.

60. Пан - Юн - цзе, Один разрешающий метод для отыскания всех предполных классов в многозначной логике, Цзилинь дасюэ, Цзыжань кэсюэ сюэбао, №2, 1962.

61. Д.А. Поспелов, Логические методы анализа и синтеза схем, изд-во "Энергия", М., 1964.

62. А.М. Романкевич, Вопросы минимизации многозначных функций в одной расширенной алгебре, сб. "Вопросы теории ЭЦВМ", вып. 1, К., 1966, стр. 25-37.

63. Р.В. Фрейвалд, Критерии полноты для частичных функций алгебры логики и многозначных логик, ДАН СССР, т. 167, №6, М., 1967, 1249-1250.

64. Г.А. Шестопал, Простые базисы в замкнутых классах функций алгебры логики, ДАН СССР, т. 168, №5, М., 1967, стр. 1023-1026.

65. С.В. Яблонский, Функциональные построения в к-значных логиках, Труды МИ АН СССР, т. 51, М., 1958, стр. 5-142.

66. С.В. Яблонский, О суперпозиции функций в $P_к$, сб. "Проблемы кибернетики", вып. 9, М., 1963, стр. 337-340.

67. С.В. Яблонский, Г.П. Гаврилов, В.Б. Кудрявцев, Функции алгебры логики и классы Поста, Наука, Москва, 1966.

68. Ю.И. Янов, А.А. Мучник, О существовании к-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса, ДАН СССР, т. 127, №1, М., 1959, стр. 44-46.

Kiadja a Központi Fizikai Kutató Intézet
Felelős kiadó: Sándory Mihály igazgatóhe-
lyettes
Szakmai lektor: Rosta János
Példányszám: 145 Törzsszám: 73-8998
Készült a KFKI sokszorosító üzemében
Budapest, 1973. szeptember hó