MATHEMATICAI

PÁLYAMUNKÁK.

KIADJA

A' MAGYAR TUDÓS TÁRSASÁG.

MÁSODIK KÖTET.

A' KÉPZETES MENNYISÉGEK' TULAJDONSÁGAI, 'S MIND ANALYTICAI, MIND MÉRTANI ÉRTELMÖK.

ARENSTEIN JÓZSEF' KOSZORÚZOTT PÁLYAMUNKÁJA.

A' KÉPZETES

MENNYISÉGEK TULAJDONSÁGAI,

'S MIND ANALITICAI, MIND MÉRTANI

ÉRTELMÖK.

IRTA

DR. ARENSTEIN JÓZSEF

A' KIR. JÓZSEF-IPARTANODÁNÁL BETŰSZÁMTAN ELMÉLETI 'S GYAKORLATI MÉRTAN 'S ERÖMÜTAN N. R. TANÁRA.

ELSŐ RANGU PÁLYAMUNKA.

MATHEMATICAI

PÁLYAMUNKÁK.

KIADJA

A' MAGYAR TUDÓS TÁRSASÁG.

MÁSODIK KÖTET.

A' KÉPZETES MENNYISÉGEK' TULAJDONSÁGAI, 'S MIND ANALYTICAI, MIND MÉRTANI ÉRTELMÖK.

ARENSTEIN JÓZSEF' KOSZORÚZOTT PÁLYAMUNKÁJA.

ELŐSZÓ.

Az academiának 1844-ben tartott XV. nagy gyülése által kihirdetett következő mathematicai jutalomtételre: *Mik a' képzetes mennyiségek' tulajdonságai, 's mind analyticai, mind mértani értelmök?* 1846. martius' 31-ig mint határnapig öt pályamunka érkezett; mellyek közől az e' végre kinevezett három osztálybeli biráló, u. m. **Bitnicz Lajos, Győri Sándor** és **Vállas Antal** rendes tagok' előadása' nyomán a' XVII. nagy gyülés, 1846. december' 14. a' IV. és III. számok alattiakat találván kiadásra, e' mellett amazt az ötven arany jutalomra, ezt ívenként négy arany tiszteletdíjra, érdemeseknek; a' birálók' hivatalos tudósitásaiból azon okok' kivonata bocsáttatik itt közre, mellyek a' társaságot határozataiban vezették.

Győri Sándor rt. különösen igy nyilatkozott: „A' III. számú, „*omne opus difficile videtur antequam tentas*, és a' IV. számú *Mátyás király* jelmondatokkal mind ketten Gaussal egyértelmüleg a' képzetes mennyiségeket oldalagos öszrendeseknek tartják, 's mindkettőből kitünik, hogy szerzőik nem csak a'legközönségesebb mathematicai ismeretekkel birnak, hanem a'tudomány' jelen állásával 's előhaladásaival is ösmeretesek. De véleményök támogatására alig hoznak fel más egyéb megmutatást mint azt, hogy a' tagadó négyzet (quadratum) középarányos mennyiség (quantitas media pro–

portionalis) az állitó és tagadó mennyiségek között, minélfogva annak helyzetileg a' kettő között oldalvást kell esni, a' mi még magában nem kielégitő, 's további fejtegetések és bizonyitmányok nélkül, az analyticai mértanban sok kétségeket hagy fel." „De különösebben a' IV. számú értekezés érdemel legnagyobb figyelmet a' többiek felett. Ennek tudós szerzője beleereszkedik a' felsőbb analysis' mélységeibe, keresztül megy vizsgálataival a' függvények' különféle nemein, az egészítményeket (integralia) sem hagyván ki; 's előadásaiban tudománybeli jártasságával a' rendszerességet, következetes okoskodást 's a' tárgyalt kérdésnek alapos fejtegetését párosítja."

Vállas Antal rt. nézete szerint „a' III. számú értekezésben világosan és rendszeresen van összeállítva majdnem mind az, mit a' képzeleti mennyiségek' természetéről e' mai napiglan tudunk, egyszersmind pedig ki van mutatva azon mód, melly a' képzeletiek' mértani alkotására vezet. E' munkát véleményadó tiszteletdíj melletti kiadásra érdemesíti."

„Legjava azonban az idei *pályamunkáknak* a' IV. számú. Ennek szerzője ügyes analysta, ki a' tudomány jelen állapotját jól ismeri, és helyesen fogta fel a' kérdés mivoltát. Ő átvezeti a' képzeletieket az egész függvénytanon, az egészítményeket sem véve ki, mértani jelentésökről szintén kielégitőleg értekezik, 's több helyen elég érdekessé, sőt újjá is tudja tenni tárgyát. Véleményadó ezt tartja legjobbnak, 's így jutalomra érdemesnek."

Ezektől eltérőleg **Bitnicz Lajos** rt. a' III. számút itélte jutalomra méltónak. Ez, úgymond, „elsőben a' képzetesnek ismert kifejezését puszta analyticai jegynek, de azon mennyiségre utalónak tekinti, melly magával egyszer sokszoroztatván (—1)-t ad sokszorozatul, 's kifejti ennek különféle hatványait; szól továbbá a' képzetesnek tulajdonságairól 's ezeket, nem elégelvén meg az algebra egyetemiségére hivatkozást, magokból törekszik megmutatni; a' képzetes függvényeket egyenként felhordja, 's a' velek történhető munkálatokat megbizonyítja. Másodszor a' képzetesnek tértani értelmet tulajdonit, 's ezt egészen Gaus szerint terjeszti elő, hivatkozva Müllernek az *Archiv der Mathematik und Physik* I. rész. IV. füzetében álló értekezésére. Kár volt, hogy a' nevezett folyóiratban előjövő egyéb dolgozatokra is figyelmet nem forditott, mellyek' segedelmével a' kérdésben levő tárgyat bővebben felvilágosithatta volna. Kár volt továbbá, hogy az ellenkező nézetet nem vette vizsgálatra, 's ezt az előbbihez mérve amannak helyességét ki nem mutatta. Nyelve jó, előadása ügyes."

„A' IV. számú vagy: *Mátyás király* jelszavú emlitvén mint jöttenek a' tagadó, a' tört és a' szertelen mennyiségek fogalmai a' számtanba, 's mint terjesztetnek ki azokhoz képest a' munkálatok' értelmei, kifejti a' négyzetes egyenletből a' képzetes gyök értelmét 's azt állitja, hogy a' képzetesek sok esetben valót képviselnek, sokban nélkülözhetetlen symbolumok; kimutatja azután, mint lehet a' valómennyiségekről képzetesekre átmenni a) elméleti úton, 's itt Gaus szerint mutogatja, hogy a' képzetest a' tértanban ki lehet fejezni, következőleg létezik az analysisban; b) analyticai tapasztalás útján szinte mutatja, mikép lehet való mennyiségekről képzetesekre átmenni, mennyire e^x-ben x helyett képzetest tévén az ismert sorokat kifejti. Igy a' képzetesek' analyticai létét megbizonyítván, értekezik azok' átváltoztatásairól, a' velök végbevihető számtani munkálatok szabályairól, és azok alkalmaztatásáról az egyenletekben, különféle függvényekben és a' határozott egészitésekben. A' képzetesek' analyticai értelmét tehát elég bőven, 's talán kelletinél is bővebben fejtegeti, ellenben tértani értelmét, melly a' kérdés egyik főrészét teszi, csak röviden érinti, 's Gausnak nézetét bővebben, mint várni lehete, nem fejtegeti. Nyelve és előadása szabatosb lehetne."

„Alulirtnak véleménye szerint, egyik pályairat sem kielégitő ugyan; egybehasonlítva mindazonáltal, az *omne opus* 's t. b. és a' *Mátyás király* jelszavuak birnak legtöbb érdemmel. Innen véleményadó a' III. számut mind azért, hogy a' kérdés' részeit helyesen felfogta, azokra egyenként felelt 's taglalásaikban az újabb dolgozatokra is figyelt, mind azért, hogy rendszeres fejtegetését tiszta és szabatos nyelven terjeszti elő, jutalomra és kinyomatásra, a' IV. számut pedig, mivel a' képzetesekről bő és nyelvünkön mind eddig elő nem terjesztett analyticát foglal magában, tiszteletdíj mellett kiadásra bátorkodik ajánlani."

A' felbontott jeligés levelek az első rangunak ismert, IV. számu értekezés' szerzőjeül *Arenstein József*, pesti kir. József-ipartanodai r. tanárt; a' III. számuénak *Nékám Sándor*, bölcsészettudort és kir. egyetemi csillagőrdei gyakornokot, vallották.

Itt veszi már most a' közönség a' koszoruzott pályamunkát, melly az academia' kiadásainak CII. számát teszi.

Költ Pesten, a' magyar tudós társaság kis gyüléséből, augustus' 5. 1847.

Toldy Ferencz s. k.
titoknok.

A' KÉPZETES
MENNYISÉGEK TULAJDONSÁGAI,
'S MIND ANALITICAI, MIND MÉRTANI
ÉRTELMÖK.

IRTA

DR. ARENSTEIN JÓZSEF

A' KIR. JÓZSEF-IPARTANODÁNÁL BETÜSZÁMTAN ELMÉLETI 'S GYAKORLATI MÉRTAN 'S ERÖMÜTAN' N. R. TANÁRA.

ELSÖ RANGU PÁLYAMUNKA.

PESTEN,

BEIMEL JÓZSEF' NYOMÁSA.

M.DCCC.XLVII.

Mátyás király.

1. §.

A' mennyiségtannak tárgya csak mennyiségek lehetnek. Csodálatra méltó azonban az ügyesség, mellyel ezeket mindenütt hatáskörébe vonja. — Emlékezzünk csak azon hálókra, mellyekkel a' mennyiségtan az égi tekét úgy, mint a' földgömböt körülszőtte, emlékezzünk a' vonalóknak azon rendszerére, melly a' földrajzi hosszúságra és szélességre, vagy a' csillagászati körökre vonatkozik, 's emlékezzünk mind azon trigonometricus és logarithmicus függvényekre, mellyek mint annyi szerszámok csak arra várakoznak, hogy használtassanak. — Ezen szerszámok, mellyek összesen egy igen mesterséges gépet képeznek, és mellyeknek egyedül köszönhetjük a' mennyiségtannak azon legnagyobb előnyét, hogy a' lehetőségeket sokkal előbb áttekintjük, mintsem a' valóban létezőről biztos tapasztalatink volnának, ezen szerszámok kérdjük, valóban létező dolgok-e, vagy csak czélszerüen kigondolt segéd-eszközök? — Mi p. o. az égi teke? Talán egy valódi üres gömb, mellyen háromszögöket rajzolni lehetne? Mi a' súlypont, létez-e illyen pont valóban minden testben? Mi az ingásnak központja? a' tehetetlenségnek nyomadéka (Moment der Trägheit)? Miért beszélünk mennyiségtani emeltyűről, egyszerü ingáról, a' testeknek légüres térbeni letésökről, egy szóval, miért él a' mennyiségtan olly sokféle költött segéd-mennyiségekkel? — A' felelet már a' mondottakban rejlik. Ama költött segéd-mennyiségek t. i. valódi segitséget nyujtanak, melly nélkül a' mennyiségtannak fönemlített előnyét nem is élvezhetnők. Ezen segéd-eszközök közé tartoznak a' *képzetes mennyiségek* is, mellyeknek *eredete*, *tulajdoni* és *értelme* jelen értekezésnek tárgyai.

A' mennyiségtannak *kiváltságos tulajdona*: hogy a' mint hatásköre nagyobbodott, úgy alapfogalmainak határai kiterjedtek. Szükséges leend ezen tételünket példával fölvilágosítani. — Egykor ezen szó alatt „szám" csak egész állító számok értettek, és a' meddig csak határozott számokkal, és nem átalános számjegyekkel, azaz betükkel, vitettek a' számolások, tehát a' 16-dik század középéig, addig a' tagadó mennyiségek, a' mennyiségtanban honosítva alkalmasint nem voltak. Az első egyenlet, melly illy alakú volt:

$$x = a - b$$

ha $b > a$, azaz, ha a' kivonást a' jelentett rendben elvégezni nem lehetett, szükségképen tagadó mennyiségek fogalmára vezetett; valamint az első illy alakú egyenlet:

$$ax = b$$
$$x = \frac{b}{a}$$

ha b nem foglalá magában a-nak minden tényezőit tört-számokra, vagy ha a és b mennyiségeket képviseltek tört-mennyiségekre vezetett. 'S nem kis zavarodásban voltak azon mennyiségtudósok, kik olly föladatban, mellyben x időt, erőt, gyorsaságot 'stb. jelentett, x helyett először tagadó értéket, tehát tagadó időt, erőt, gyorsaságot 'stb. találtak. A' milly könyü volt némelly esetben kitalálni: mi feleljen meg a tagadó x-nek a természetben, olly nehéz és bonyolódott lehetett az más esetekben. P. o. tegyük, hogy két üstökösnek A és B ugyan azon útja vagyon, A minden órában a mértföldet, B ugyan azon időben b mértföldet tesz, 's ezen utóbbi egy bizonyos pontból c órával későbben indúl mint A. — Kerestetik, hány óra mulva fogja B elérni A-t. Ha ezen föladat mennyiségtani nyelvre áttétetik, és x a' keresett időt jelenti álland:

$$bx = a(c + x)$$
$$x(b - a) = ac$$
$$x = \frac{ac}{b - a} \qquad \alpha.)$$

Ha $b < a$, x tagadó értéket kap, és már nem olly közel fekszik azon gondolat: hogy ezen x nem csak a' két üstökös *együttlétének* időpontját jelenti, de egyszersmind arra is figyelmeztet bennünket: hogy a' kérdés rosszúl volt adva; mert *jövendőben nem* jöhetnek össze, mivel x óra előtt *voltak* együtt. — Alig barátkoztak meg a' mennyiségtudósok a' tört- és tagadó számokkal, a' mint ezen nemegyenletre vagy viszonyra akadtak:

$$a^m < x < (a+1)^m$$

hol a és m egész állító számok. Ime ezen x sem az egész, sem a' tört állító vagy tagadó számok osztályába nem illett, új osztályt állandósítottak tehát, és x-et a' hányszor a' fönebbi viszonynak megfelelt *irrationalis* számnak vagy mennyiségnek nevezték. A' számoknak a' különbféle osztályai a' számról adott meghatározásban foglalva nem voltak, 's természetesen nem is lehettek; mert midőn csak egész állító számok voltak használatban, ama meghatározásban „a' szám az egységek többsége“ az egység alatt csak

$$+1$$

volt értve, miből következett volna, hogy a' tagadó-, tört- és irrationalis számok nem számok. E' nehézségen azonban tüstént segítettek a' mennyiségtudósok *kiterjesztvén az egység fogalmát*, és ez által ama határozat (Definition) körét.

Hasonló eljárásra találunk a' hatványozásnál (Potenziren) Az egykor divatozott határozat: „*a' hatvány több egyenlö tényezöknek szorozmánya*“ csak egész állító kitevőkre (Exponent) alkalmazható volt. Azonban a' legegyszerűbb számolásban előfordúlhattak kifejezések, mint:

$$a^{-m},\quad a^{\frac{1}{m}},\quad a^{0}$$

mellyeket uj név által elkülönözni nem lehetett, mert a' hatványokkal minden tulajdonságaikban megegyeztek, ámbár a' fönemlített határozatba nem igen illettek. E' nehézségen is hasonlóképen segítettek a' mennyiségtudósok, kitágítván a' szűkké lett határozatot, úgy, hogy ha a és r bár mit jelent $-\infty$-től egész $+\infty$-ig, ezen kifejezést

$$a^{r}$$

így magyarázák: „*a-t r-ik hatványra emelni* annyit tesz, *mint a-bó a' legközelebbi magasabb mütétel által egy új számot úgy alkotni, mint r alkotva vagyon az egységből.* — Ezen határozat szerint a' gyökkivonás csak egy neme a' hatványozásnak lévén, az alapfogalmak száma egygyel fogy, t. i. a' gyökkivonásnak egykor elkülönözött fogalmával, mi a' tudományt egyszerübbé azaz könnyebbé teszi.

Vizsgálluk most már ezen eljárást, mellyet a' mennyiségtudósok követtek az eddig említett új mennyiségeknek a' tudományba való befogadásánál. Midőn „szám“ alatt csak egész, állítók értettek, szükségképen már léteztek szabályok legalább az egyszerü műtételekre nézve. Később a' szük körü fogalom kitágíttatván, és tagadó-, tört- és irrationalis számok hozzá járulván, kinek sem jutott eszébe a' már megalapított szabályokat változtatni, annál kevésbbé eldönteni; sőt az új elemektől, mint a' tudomány új polgáraitól követelték, hogy a' létező szabályokhoz simuljanak, és csak ha *új mütételek föltaláltattak*, mellyek új szabályokat föltételeztek, kellett a' későbben honositott elemekre különös tekintettel lenni. Így p. o. nem változtattak a' mennyiségtudósok a' szorzásnak szabályain, a' tagadó-, tört- és irrationalis számok miatt; nem késtek azonban a' szorzásnak határozatát, az új elemekhez képest nevezetesen kitágítani, szabályait pedig nemcsak a' számokra és menynyiségekre, hanem azoknak jeleire is, $+$ és $-$, kiterjeszteni.

Ha ezen, és az ehhez egészen hasonló eljárásról, mellyet a' mennyiségtudósok más új mennyiségek, mint log x, línea trig x 'stb. meghonosításánál követtek egy átalános szabályt elvonunk (abſtrahiren) találjuk: hogy a' mennyiségtanban, valamint más tudományokban új elemek elfogadásánál az ezek előtt alapított szabályok nem változtattak, hanem inkább az új elemek a' régiebbek számába soroztatván a' létező szabályokhoz simultak, és csak azon mütételek és szabályok, mellyek föltaláltattak, minekutána már az új elemeknek a' polgárijog adatott volna, nem fogadtattak el előbb, mintsem helybenhagyhatóságukat az új elemekre való törvényszerü alkalmazhatás által kimutatták volna. — A' tudománynak illy uj elemei magok a' képzetes mennyiségek is, ugy mint, mellyek csak akkor hozattak be a' tudomány rendszerébe, midőn ez mütételeinek, szabályainak 's alakzatjainak (Formel) helybenhagyhatóságát századok tapasztalatai által állandósítva látta. Mi tehát ezen értekezésnek folytában olly szabályoknál, mellyek való mennyiségekre nézve érvényesek voltak *még minekelőtte a' képzetesek honosíttattak volna*, uj bebizonyítást ezen utóbbiak miatt nem fogunk adni, sőt érvényességöket ezen esetben követelni fogjuk; olly módszereknél (Methode) pedig, mellyek a' legujabb kor termékei, tehát a' képzetesek után találtattak föl, az érvényességet ezekre nézve különösen és szigorúan meg fogjuk mutatni, mind a' két esetben azonban a' nyert kifejezéseknek analyticai, és ha lehet mértani értelmét ki fogjuk emelni.

2. §.

A' mint a' mennyiségtan annyira növekedett, hogy második fokú egyenletek, átalános alakban, vagy is betük által kifejezve, föloldattak, előfordulhatott:

$$x^2 = -a$$
$$x = \sqrt{-a}$$

melly egyenletnek semmiféle, számok által kifejezhető érték meg nem felelt; mert a' való számok között $-\infty$-től, egész $+\infty$-ig nincs ollyan, melly a' második hatványra emelve egyenlő legyen $-$ a-val. E' tekintetben tehát a' képzétes mennyiségek, a' tudománynak úgy szólván elemeivel egykorúak, mivel azonban értelmöket nem ismerték: sokáig a' közönséges mütételeknél kizárva voltak; a' mint az hasonló okból történt a' tagadó gyökökkel, mellyek sokáig *„hamis gyököknek“* mondattak. A' hányszor az analysis illy egyenletre vezetett:

$$x = \sqrt[2n]{-a}$$

hol n egész állító vagy tagadó, 2 n tehát mindég páros szám, x *képzetes mennyiségnek vagy lehetlen mennyiségnek mondatott.* E' szavak: *„képzetes vagy lehetlen mennyiség“* csak a' physicai tulajdonságokra, az anyagi természetre; nem pedig az analysisre vonatkozhatnak; mert az analysis, mint illyen, sem képzetes vagy lehetlen mennyiségeket, sem képzetes vagy lehetlen föladásokat nem ismer. Az analysisra nézve minden föladás, és minden mennyiség nem csak lehetéges, de létez is; *csak a' képviselés a' természetben hiányzik ott, hol képzetes mennyiségek, mint eredmény találtatnak.* Sőtt mi a' következő §§-ban eseteket fogunk előszámlálni, hol magok a' képzetes kifejezések világos valódi értelemmel birnak. Mindjárt itt tehát óvást kell tennünk azon vélemény ellen: mintha *a' képzetes mennyiségek valami fölösleges, csupán önkényesen képzelt költemények volnának; mert ezen mennyiségek sok esetben valót képviselnek, sokban nélkülözhetlen analyticai symbolumok.*

Első tekintetre úgy látszik, mintha a' kérdésnek szavaiból, *„mik a' képzetes mennyiségek tulajdonságai, 's mind analyticai, mind mértani értelmök?“* következnék, hogy a' feleletnek három elkülönözött, önálló része vagyon, mellyeknek elseje *a' képzetes mennyiségek tulajdonságait*, másodika *azoknak analyticai*, és harmadika *mértani értelmöket* tárgyalja. De közelebbi vizsgálatnál kitetszik: hogy valamennyi tulajdonságait a' képzetes mennyiségeknek nem lehet elősorolni a' nélkül, hogy analyticai és mértani értelmök meg ne érintessék, és hogy viszont, sem analyticai sem mértani értelmöket nem lehet kifejteni a' nélkül, hogy tulajdonságaikra ne vonatkozzunk.

Föltévén tehát az olvasónál némi ismereteket az analysisből, előadandjuk az *átmenetet* a' valóról a' képzetesre, melly alkalommal a' képzetes mennyiségek' analyticai *szükséges lételökről* meg fogunk győződni, továbbá megvizsgálandjuk a' *függvényeket*, az egyszerü szorozmánytól a' legbonyolódottabb többszerü integral-ig, melly alkalommal a' képzetes mennyiségek *tulajdonságai* ki fognak fejleni, és végre a' mondottak segítségével analyticai és mértani *értelmöket* mintegy elvonni (abstrahiren) fogjuk.

3. §.

Alig van találmány, mellyről minekutána létesült, nem mondották volna: „„„ezt régen lehetett volna tudni.“““ Így van a' dolog a' képzetes mennyiségekkel is. Azon számtalan úton kivül, mellyen a' műtételi analysis (operative analysis) maga gépileg a' képzetes mennyiségek fogalmára vezet, vagyon még egy mód, mellyen a' képzetes mennyiségek analyticai lételének szükségességét ‚a priori' is át lehet látni; úgy *hogy a' valóról a' képzetesre két módon lehet átmenni; tapasztalatin*: midőn p. o. illy alakú egyenletet vizsgálunk $x^2 = - a$, *és elméletin*: a' mint következik.

Azon körülmény, hogy az állító számoknak vagy mennyiségeknek a' tagadók, az egészeknek a' törtek, a' rationalisoknak az irrationalisok, mintegy ellentételvék már némi figyelmeztetésül szolgál, hogy a' *való* mennyiségekhez is alkalmasint föltalálható egy illyen ‚pendant.' — Az állítónak és tagadónak fogalmát csak ott lehet használni, hol annak mit számlálunk, vagy valami számolásnak alávetünk valódi ellentétje vagyon, úgy, hogy ha mind a' számláltat, mind ellentétjét egyesítjük, vagy a' mi ugyan az, egyidejűleg gondoljuk: ez megsemmisítést szül; azaz = o. Észre kell itt mindjárt vennünk, hogy ámbár nem mindég létez valódilag a' természetben ellenkezője annak, mit éppen számolásunk tárgyává teszünk, még is *ezen esetekben is* türjük, használjuk, *szükségeseknek tartjuk a' tagadó mennyiségeket.* A' fölebbi hypothesis, hogy t. i. állítót és tagadót egyidejűleg gondolni annyit tesz, mint mindkettőt megsemmisítni föltételezi:

1-ör hogy nem számolunk *anyagi* mennyiségekkel, hanem viszonyokkal 's fogalmakkal; mert azon két arany p. o. mellyel valaki tartozik, soha sem fogja megsemmisítni a' két aranyt, mely-lyet zsebében tart, ámbár tüstént észreveheti, hogy mit sem mondhat magáénak, mihányt az aranyt kétszer, mint saját birtokot, 's kétszer mint passiv adóságot *egyidejűleg gondolja.*

2-or hogy a' tárgyak bizonyos és *állandó rend* szerint vannak egy sorban elrendelve

$$a \quad b \quad c \quad d \quad e \; . \; . \; . \; . \; .$$

és úgy alkotva, hogy a' viszony, mellyben b áll a-hoz, egyenlő legyen a' viszonyhoz, mellyben c áll b-hez. Jeleljük e' viszonynak egyikét, azt p. o. mellyben c áll d-hez (+ 1)-gyel. Hogy (— 1)-et kapjunk, nem más szükséges, minthogy a' vett viszonyt fordítva, *d* tudni illik c-hez, tekintsük. — Tegyük föl, hogy a' vonal AB az a, b, c, d . . . pontok által egyenlő részekre el van osztva, és hogy e' vonalon bizonyos test egyforma gyorsasággal mozog A-tól B felé. Nevezzük az időt, mellyben a' mozgékony test a-tól b-ig ér t-nek, ha, tudván azon időt T, mellyben a' test c-ben volt, meg akarjuk tudni, mikor leend d-ben; ezen idő

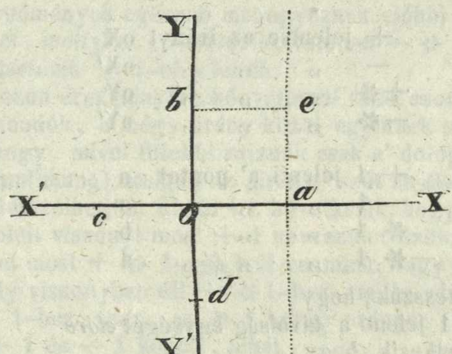
$$= T + t$$

ha pedig azon időt tudjuk, mellyben d-ben van, és keressük, mikor volt c-ben, álland:

$$T + t - t = T$$

Valahányszor tehát a' tárgyak így elrendelhetők 's egyenlők, mert ezt követeli az egyenlő viszony + 1 vagy — 1, annyiszor kényünk szerint átmehetünk az egyik tárgyról a' másikra, és pedig az állítónak fogalmával az egyik irányban, p. o. előre, a' tagadónak fogalmával az ellenkező irányban, tehát hátra, és ezen átmenetnek mértéke éppen a' viszonynak amaz értéke + 1 vagy — 1. — Azon mennyiségek, mellyek egy sorban elrendelhetők, azaz egy egyenes vonalnak pontjai által képviselhetők *egyméretüeknek* (von einer Dimension) mondatnak.

Tegyük föl most, hogy számolásunk tárgya egy sik, könyen lehet átlátni, hogy ez kétméretü mennyiség, mert mint tudva van, igen keveset tudunk valami síknak területéről (Fläche), ha a' síknak csak hosszát, 's nem egyszersmind szélességét is ismerjük. Legyen a' papiros ezen sík, és húzzuk rajta az x és y coordinátáknak derékszegü tengelyeit (rechtwinklige Coordinaten-Axen), mellyeknek közös kezdő pontjuk o-ban legyen:



's nevezzük azon x és y-t állítónak, melly oX és oY, tagadónak pedig, melly oX' és oY' részeken fekszik. Ha mindég csak *egy* tengelyt tartunk szemünk előtt, az állító és tagadónak fogalmával átmehetünk az egyik pontról a' másikra; így, ha a' vonalt o a a' vonalok egységének fogadjuk, és

$$oa = ob = oc = od;$$

akkor könyen magyarázhatók ezen egyenletek:

$$x = 1 \; ; \; x = -1$$
$$y = 1 \; ; \; y = -1$$

mellyek egymásután az a, c, b, d pontokat jelentik. De ha o-ról e-re akarunk átmenni, e' két egyenletet

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

egyidejüknek kell gondolnunk, ez pedig annyit tesz, mint mondani:

1-ör a' vonalok egysége vétessék a' + x (tevőleges x) tengelyén egyszer,

2-or a' végponton, azaz: *a* ponton keresztül vonassék egy YY′-hez párhuzamos, és

3-or ezen párhuzamoson vétessék *a*-tól kezdve, a' + y részén a' vonalok egysége egyszer. Ha ezen eljárást közelebbről vizsgáljuk, *látjuk*: hogy az *állító' fogalmának kétízbeni* használatán kivül még követeltük:

1-ör hogy az x-ek tengelye függőleges legyen az y-ok tengelyére, és

2-or hogy *a* ponton keresztül egy YY′-hez párhuzamos huzassék, azaz: az YY′ tengely magához párhuzamosan egészen a-ig előre mozditassék.

Fejezzük ki ezen követelésünket egy jelképpel, p. o. ✻-gal úgy, hogy

+ jelentse az irányt oX
— „ „ „ oX′
+✻ „ „ „ oY
—✻ „ „ „ oY′

tehát:

+ 1 jelenti a' pontot a
— 1 „ „ „ c
✻ 1 „ „ „ b
—✻ 1 „ „ „ d

Ha pedig föltesszük, hogy

+ 1 jelenti a' távolság egységét *elóre*

magából következik, hogy

— 1 jelenti a' távolság egységét *hátra*
✻ 1 „ „ „ „ *oldalag balra*
—✻ 1 „ „ „ „ „ *jobbra*

és most az analysis maga megmondja, mi tulajdonképen a' mi jelképünk: ✻

Mivel t. i. a' négy irány közül oX, oX′, oY, oY′ egyiknek sincs különös előjoga; oY irányt éppen úgy lehetett volna + 1-nek, azaz „előre"-nek venni, mint vettük oX-et; nincs tehát ok, mellynél fogva nem volna lehetséges és szabad azon módositásokat, mellyeket + ✻ és — ✻-gal jeleltünk kétszer egymás után ugyan azon egy pontra alkalmazni. Tegyük föl, hogy a' módositás — ✻

a' vonalra oa alkalmaztatik. Ez által ezen vonal átmenend ob vonalra (mert a' ki o-ból a' felé néz, annak baljára fekszik b). Alkalmazzuk ugyan azon módosítást ob vonalra még egyszer; ez által ob átmenend oc re; (mert annak, ki o- ból b felé néz, baljára vagyon c). De a' vonalt oc mi fölebb — 1-gyel jeleltük, tehát következik szükségképen:

$$+ * 1 . + * 1 = - 1 \qquad \alpha)$$

és innen

$$(+ * 1)^2 = - 1$$

és a' gyököt kivonván:

$$+ * 1 = \sqrt{-1} \qquad \beta)$$

Ha ezen eljárást még tovább folytatjuk, és a' $+ * 1$ módosítást harmadszor, negyedszer 'stb. ugyan azon vonalra alkalmazzuk; egymásután kapjuk a' pontokat d, a, b, c 'stb, — β)-ból pedig következik:

$$*1 . *1 . *1 = *1 . (*1)^2 = -1 . \sqrt{-1} = -\sqrt{-1} = -*1 \qquad \gamma)$$

$$*1 . *1 . *1 . *1 = (*1)^2 \, (*1)^2 = -1 . -1 = (-1)^2 = 1 \qquad \delta)$$

'stb. Ezen eredmények egészen megegyeznek előbbi fölvételünkkel, mert d-et, mellyhez γ) tartozik, valóban — $*$ 1-el, és a-t, mellyhez δ) tartozik + 1-el jeleltük.

Ugyan ezen eredményhez közvetlenül vezet azon körülmény, hogy, mint mondók, a' négy irány közül egyiknek sincs különös előjoga, és hogy, mivel fölebbi rajzunk csak a' dolognak érzékitésére (Versinnlichung) szolgál, az „irány" szót az átalánosabb viszony"-al fölcserélhetjük. Ebből t. i. következik, hogy ha az előbb $+ *$ 1-el jelelt viszonyt most + 1 nevezzük: szükségképen az előbbi — 1-et most $+ *$ 1-nek kell vennünk, vagy más szavakkal: + 1 olly viszonyban áll $+ *$ 1-hez, milly viszonyban áll $+ *$ 1 — 1-hez, azaz: $+ *$ 1 közép arányos (mittlere Proportionale) + 1 és — 1 között, tehát

$$+ 1 : + * 1 = + * 1 : - 1$$

és ugyan azon okokból

$$+ 1 : - * 1 = - * 1 : - 1$$

mind a' két arányból következik, mint már β)-ban volt:

$$+ * 1 = \sqrt{-1}$$

A' mondottakból következik: hogy

a) valahányszor a' tárgyak vagy mennyiségek ollyanok, hogy *egy* sorban nem, hanem csak *soroknak soraiban* elrendelhetők, azaz: *kétméretüek*, továbbá

b) úgy alkották, hogy az átmenet egy sorból a' másikba úgy történik, mint az egyméretűeknél az átmenet egy tagról, ugyanazon sornak egy más tagjára, és végre

c) sem valami követelésnek, sem fölvételnek helyt adni nem akarunk:

ekkor a' + 1 és — 1-en kivül $\sqrt{-1}$ és $-\sqrt{-1}$ -re is vagyon *szükségünk*, hogy az átmenetet a' rendszernek egyik tagjáról *bármelly* másikra jelelhessük, 's megmérhessük.

Mivel négy módosításaink eddig csak a' vonalok egységére vonatkoztak: $\sqrt{-1}$ és $-\sqrt{-1}$ csak arra szolgálhatnak, hogy az átmenetet az egyik sornak adott tagjáról, a' *legközelebbi* sornak bizonyos tagjára megmérjék. — Ha tehát a' második, harmadik vagy negyedik sorba akarunk átmenni: ekkor a' mint ezen sorok balra vagy jobbra fekszenek $\sqrt{-1}$ vagy $-\sqrt{-1}$ -el fogjuk az n-et szorozni. Már most könyen kitaláljuk, milly pontokat jelentenek ezen egyenletek:

$$4.(-\sqrt{-1}) = -4\sqrt{-1} \qquad 1)$$
$$3.(+\sqrt{-1}) = 3\sqrt{-1} \qquad 2)$$
$$6.\sqrt{-1}\ .\ 2.(-\sqrt{-1}) = 12 \qquad 3)$$
$$2.\sqrt{-1}\ .\ 2\sqrt{-1} = -4 \qquad 4)$$

magyarázzuk a' 3) és 4) alatt lévő egyenleteket:

6. $\sqrt{-1}$ jelenti, hogy a' vonalok egysége oYra hatszor vitessék; ezt szorozni $(-\sqrt{-1})$-el; azaz

$6.\sqrt{-1}.(-\sqrt{-1})$ annyit tesz, mint ama vonalt jobbra, tehát oX-re áttenni, és ezt 2-vel szorozni, azaz

$6\sqrt{-1}.2.(-\sqrt{-1})$ jelenti, hogy az oX-re vitt vonalt kétszer kell venni, azaz = 12.

$2\sqrt{-1} = 2.$ az oY részen

$2\sqrt{-1}.\sqrt{-1} =$ éppen ez az oX′ részen

$2\sqrt{-1}.2.\sqrt{-1} =$ ugyan az, ugyan ott, kétszer véve

tehát $2\sqrt{-1}.2.(-\sqrt{-1})$ éppen annyi, mint (— 4).

És ez azon út vagy mód, mellyen, mint mondók, a' képzetes mennyiségek fogalmához *a priori* juthatunk. Ezen okoskodásnak egyszersmind azon előnye vagyon, hogy a' képzetes mennyiségek nem csak ismeretéhez, hanem egyik tulajdonságukhoz és mértani értelmökhez is vezet. E' tulajdonságot kifejezik a' β), γ) és δ) alatt lévő egyenletek; a' mértani értelem pedig: *az oldalagi mennyiség* (Laterale Größe). — Egyszersmind világos, hogy ha e' nevezetek helyett: „*állító, tagadó, képzetes egység vagy mennyiség*“ használtattak volna mindjárt: „*egyenes, ellenkező, oldalagi egység vagy mennyiség*“; ama mysticismus, melly a' képzetes mennyiségek magyarázatát soká burkolá és akadályozá, alkalmasint eltünt volna.

4. §.

A' tapasztalati (itt csak analyticai tapasztalásról lehet szó) utak közül, mellyek a' képzetes mennyiségek ismeretéhez vezetnek, csak egyet említünk, melly fesztelen csinjáról különösen nevezetes.

Ha e' két sort:

$$\text{Sin } x = x - \frac{x^3}{1.\,2.\,3.} + \frac{x^5}{1\;2.\,3.\,4.\,5} - \frac{x^7}{1\,.\,.\,.\,.\,.\,7} + \ldots\ldots \quad 1)$$

$$\text{Cos } x = 1 - \frac{x^2}{1.\,2} + \frac{x^4}{1.\,2.\,3.\,4} - \frac{x^6}{1\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,6} + \ldots\ldots \quad 2)$$

összehasonlítjuk evvel:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.\,2.\,3} + \frac{x^4}{1.\,2.\,3.\,4} + \frac{x^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} + \ldots 3)$$

hol

$$e = 2{\cdot}718281\ldots\ldots$$

könyen észre vesszük; hogy e' három sor között bizonyos hasonlatosság vagyon; ha t. i. a' jegyeket nem tekintjük, látjuk: hogy a' sornak 3.) valamennyi 2n-dik tagja képezi a' sort 1.), és ugyan azon sornak valamennyi (2n+1)-dik tagja képezi a' sort 2.), azaz: *a' páros fokú vagy méretü tagok, a' második, a' páratlan fokúak az első sorhoz tartoznak.* — A' sorban 3.) x egészen tetszés szerinti lévén, helyébe tehetünk ix és —ix -et:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1} + \frac{i^2x^2}{1.\,2} + \frac{i^3x^3}{1.\,2.\,3} + \frac{i^4x^4}{1.\,2.\,3.\,4} + \frac{i^5x^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} + \ldots$$

$$e^{-ix} = 1 - \frac{ix}{1} + \frac{i^2x^2}{1.\,2} - \frac{i^3x^3}{1.\,2.\,3} + \frac{i^4x^4}{1.\,2.\,3.\,4} - \frac{i^5x^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} + \ldots$$

Ha e' két sort levonjuk és összeadjuk, 's az első esetben 2i-vel az utóbbiban 2-vel osztunk, leend:

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{x}{1} + \frac{i^2x^3}{1.\,2.\,3} + \frac{i^4x^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} + \ldots \quad 4)$$

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 1 + \frac{i^2x^2}{1.\,2.} + \frac{i^4x^4}{1.\,2.\,3.\,4} + \ldots \quad 5)$$

ha i-t mellőzzük, észrevehetjük, hogy e' két sorban ugyan azon hatványai fordulnak elő x-nek, mint a' sorokban 1.) és 2.) csak a' jegyváltozások hiányzanak; lehet tehát azon gondolatra jutni:

hogy a tetszésszerinti i, mellynek csak páros hatványai fordulnak elö 4) és 5) -ben *úgy választassék, miszerint egymás után köretkezö páros hatványai a' kivánt jegyváltozást elöidézzék.* Hogy tehát a' sorok 4) és 5) átváltozanak azokra 1) és 2) szükséges, hogy legyen:

$$i^2 = -1\ ;\ i^4 = 1\ ;\ i^6 = -1\ ;\ i^8 = 1\ ;\ i^{10} = -1 \ldots \qquad 6)$$

mind ezen egyenletek már a' legelsöben vannak foglalva, 's ennek következményei;

$$i^2 = -1$$

és ebből;

$$i = \sqrt{-1} \qquad 7)$$

Ha i-nek ezen értékét 4) és 5)-ben helyettesítjük, mivel:

$$(\sqrt{-1})^2 = -1\ ;\ (\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}\ ;\ (\sqrt{-1})^4 = 1\ ;$$
$$(\sqrt{-1})^5 = \sqrt{-1} \qquad 8)$$
$$(\sqrt{-1})^6 = -1\ ;\ (\sqrt{-1})^7 = - \quad -1\ ;\ (\sqrt{-1})^8 = 1\ ;$$
$$(\sqrt{-1})^9 = \sqrt{-1} \text{ 'stb.}$$

valóban az 1) és 2) alatt lévő sorokat kapjuk:

$$\frac{e^{x\sqrt{1}} - e^{-x\sqrt{1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.\ 2} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots \qquad 9)$$

$$\frac{e^{x\sqrt{1}} + e^{-x\sqrt{1}}}{2} = 1 - \frac{x^2}{1.\ 2} + \frac{x^4}{1.2 3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\ldots 10)$$

Ezen kifejezések a' következökben igen érdekes elmélkedésekre adandnak alkalmat, most azonban csak annyiban érdekelnek, a' mennyiben az egyenletre 7) vezettek:

$$i = \sqrt{-1}$$

Tehát mind elméleti módon, mind a' szabályszerü számtani helyettezéseknek tapasztalati utján jutottunk a' képzetes mennyiségek ismeretéhez, *analyticai lételök tehát nem kétséges*, és csak azt kell vizsgálnunk: *milly viszonyban állnak a' tudomány rendszeréhez, és ennek alkotó részeihez, milly módositásokat igénylenek, 's minö hasznot igérnek.* Vizsgálatinkat kezdjük a' számok tanával (Theorie der Zahlen).

5. §.

A' képzetes mennyiségeknek a' mennyiségtanban beiktatásuk elött lehetetlen volt a' számok elméletét, vagy tanát egész átalánosságban 's kimeritőleg adni. Erre szükséges volt, hogy ezen elméletnek tárgyáúl minden illy alakú szám

$$a + b\sqrt{-1}$$

vétessék, hol a és b akármelly való szám lehet $-\infty$-től egészen $+\infty$-ig. Ha a' kifejezést

$$a + b\sqrt{-1}$$

minden való vagy képzetes szám' jelképének elfogadjuk, ekkor általa képviseltetnek

1-ör *minden való számok*, ha t. i. $b = o$, és pedig különösen

a) a' nulla, ha $a = o$

b) az állító számok, o-tól egész $+\infty$-ig

c) a' tagadó számok, $-\infty$ -től egész o-ig.

2-or a' *képzetes számok*, ha t. i. b nem $= o$, és különösen:

a) a' tisztán képzetesek, hol t. i. $a = o$

b) az elegy képzetes számok, hol a nem $= o$

Ebből már következik, hogy a' számvetésnek illy formán tágított hatáskörében *négyféle egység* fordúl elő:

$$+1,\quad -1,\quad \sqrt{-1},\quad -\sqrt{-1}$$

mert, hogy $b\sqrt{-1}$ képzetes szám legyen, midőn maga b való szám, szükséges, hogy ezen minőséget $\sqrt{-1}$-től kapja; de ezen szorzó $\sqrt{-1}$ a' számszerinti értéket nem változtatja, tehát éppen úgy lehet tekinteni, mint -1-et e' szorozmányban $-1.\, a = -a$, azaz *képzetes egységnek.* — Némellyek rövidség okáért $\sqrt{-1}$ helyett írnak i-t, úgy hogy

$$a + b\sqrt{-1} = a + bi.$$

Valamint minden való számból *a*, szorozván $+1$ és -1-el két különböző számot lehet képezni, úgy lehet minden számból $a + b\sqrt{-1}$, kivévén azon esetet, ha $a = b = o$ szorozván $+1$, -1, $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$-el négy különböző számot képezni, mely-lyeket „*mellék számoknak*" lehet nevezni (Nebenzahlen).

Ha e' kifejezésben $a + b\sqrt{-1}$, $\sqrt{-1}$ helyett teszünk $-\sqrt{-1}$ leend:

$$a - b\sqrt{-1}$$

és ez az előbbinek *összerendelt kifejezésének, összerendelt számának* (Conjugirte Zahl) mondatik. Ebből következik:

a) *hogy egy való számnak összerendelt száma: ő maga.*

b) *hogy két összerendelt számnak összege és szorzata mindig való*, mert

$$(a+b\sqrt{-1})+(a-b\sqrt{-1})=2a$$
$$(a+b\sqrt{-1})(a-b-\sqrt{-1})=a^2+b^2$$

Két összerendelt számnak szorzata, a' fölebbi példában a^2+b^2, — *normájoknak* neveztetik. — Egy való számnak normája tehát: a' számnak négyszöge. — A' normának fogalma 's ismérete némelly esetben nagy könyüséget fog okozni.

Ezek szerint $a+b\sqrt{-1}$-ből lesznek a' mellékszámok:

$$a+b\sqrt{-1} \quad 1)$$
$$-a-b\sqrt{-1} \quad 2)$$
$$-b+a\sqrt{-1} \quad 3)$$
$$b-a\sqrt{-1} \quad 4)$$

ha mind a' négyben $-\sqrt{-1}$ teszünk $\sqrt{-1}$ helyett, leend:

$$a-b\sqrt{-1} \quad 5)$$
$$-a+b\sqrt{-1} \quad 6)$$
$$-b-a\sqrt{-1} \quad 7)$$
$$b+a\sqrt{-1} \quad 8)$$

és könyen vesszük észre, hogy az első az ötödikkel, a második a' hatodikkal, a' harmadik a' hetedikkel, 's a' negyedik a' nyolczadikkal összerendelt számok; — közös normája pedig mind a' nyolcznak:

$$a^2+b^2$$

Ha volna

$$a=\pm b$$

vagy $a=o$

vagy $b=o$

az előbbi nyolcz számból csak négy maradna.

Az eddigi meghatározásokból következik:

1-ör *Két elegy képzetes szám' szorzatának összerendeltje azon szorzat, melly e' két szám összerendeltjeinek szorzásából ered.* Legyen péld. okáért: a' két elegy képzetes szám $a+b\sqrt{-1}$, és $a'+b'\sqrt{-1}$; leend szorzatuk:

$$(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1})=aa'+a'b\sqrt{-1}+ab'\sqrt{-1}-bb'$$

ezen szorzatnak összerendeltje, $\sqrt{-1}$ változtatván $-\sqrt{-1}$-re — leend, azt C-nek nevezvén

$$C=aa'-a'b\sqrt{-1}-ab'\sqrt{-1}-bb'$$

A' két számnak összerendeltjei pedig $a-b\sqrt{-1}$, és $a'-b'\sqrt{-1}$, szorzatuk leend, ha C'-el jeleljük:

$$(a-b\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1})=aa'-a'b\sqrt{-1}-ab'\sqrt{-1}-bb'=C'$$

tehát valóban, mint állítottuk:

$$C = C'$$

A' mit itt két elegy képzetes tényezőről mutattunk, áll, habár hányan is volnának azok; mert ha p. o.

$$a+b\sqrt{-1},\ a'+b'\sqrt{-1},\ a''+b''\sqrt{-1}$$

volnának a' három tényezők, ekkor a' két első helyett C vagy C'-t lehetne írni:

$$C\ .\ (a''+b''\sqrt{-1})$$

vagy

$$C'\ .\ (a''-b''\sqrt{-1})$$

és mivel itt csak két tényező vagyon, előbbi okoskodásunkat lehet alkalmazni 'stb.

2-or *Két elegy képzetes szám' szorzatának normája egyenlő azon számok normáinak szorzatával.*

Legyen p. o. $a+b\sqrt{-1}$ és $a'+b'\sqrt{-1}$ szorzatuk $=C$ ennek normája, ha azt N-nek nevezzük:

$$(aa'-bb')^2+(a'b+ab')^2 = N$$

a' két mennyiségnek normái pedig

$$a^2+b^2 \text{ és } a'^2+b'^2$$

és ezeknek szorzata, N'-nek nevezvén azt:

$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)=a^2a'^2+b^2a'^2+a^2b'^2+b^2b'^2=N'$$

tehát mint állítottuk

$$N = N'$$

Ezen tételt is, mint az előbbit ki lehet terjeszteni akár hány tényezőre, úgy hogy átalában áll:

A' szorzatnak normája egyenlö a' normáknak szorzatával.

E' két tétellel egészen hasonszerü, és azért különösen nem is bebizonyítandó, e' következő kettő.

3-or *Két elegy képzetes szám' hányadosának összerendeltje azon hányados, melly a' két szám' összerendeltjeinek osztásából ered.*

4-er *Két elegy képzetes szám hányadosának normája, egyenlő azon számok normáinak hányadosával.* A' harmadik és negyedik tétel is, nem csak két, hanem akárhány képzetes számról áll.

Ha a és b egész, rationalis, való számok

$$a+b\sqrt{-1}$$

egész, rationalis elegy képzetes számnak mondatik.

6. §.

Egy egész, elegy képzetes szám *összetettnek mondatik*, ha két az egységtől különböző tényezőre osztható, ha ez nem lehetséges *elsöd számnak* neveztetik.

Ebből következik: hogy minden összetett való szám egyszersmind összetett elegy képzetesnek tekinthető, sött hogy nem lehetetlen: egy való elsődszámot két elegy képzetes tényezőre elosztani, azaz, mint összetettet kifejezni; és pedig álland ez *mind azon való számokról, mellyek illy alakúak*:

$$(4n + 1)$$

hol n minden egész való számot, melly > 0 jelelhet, és még ezeken kivül álland e *számról*: 2. — Így p. o. leend:

$$\begin{aligned}
2 &= (1+\sqrt{-1})(1-\sqrt{-1}) = 1^2-(\sqrt{-1})^2\\
5 &= (1+2\sqrt{-1})(1-2\sqrt{-1}) = 1^2-(2\sqrt{-1})^2\\
13 &= (3+2\sqrt{-1})(3-2\sqrt{-1}) = 3^2-(2\sqrt{-1})^2\\
17 &= (1+4\sqrt{-1})(1-4\sqrt{-1}) = 1^2-(4\sqrt{-1})^2\\
29 &= (5+2\sqrt{-1})(5-2\sqrt{-1}) = 5^2-(2\sqrt{-1})^2\\
37 &= (1+6\sqrt{-1})(1-6\sqrt{-1}) = 1^2-(6\sqrt{-1})^2\\
41 &= (5+4\sqrt{-1})(5-4\sqrt{-1}) = 5^2-(4\sqrt{-1})^2\\
53 &= (7+2\sqrt{-1})(7-2\sqrt{-1}) = 7^2-(2\sqrt{-1})^2
\end{aligned}$$

's a' t.

tehát az egységen kivül szét nem bontható elsődszámok maradnak:

3, 7, 11, 19, 23, 31, 's a' t.

átalánosan mind azok, mellyeknek alakja

$$(4n + 3)$$

hol n minden egész való számot, melly $\geqq 0$, azaz nagyobb vagy egyenlő a' nullával jelentheti; mert ha egy *illy* alakú szám, 9 szétbontható volna, állana:

$$9 = (a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1})$$

ebből pedig 5. §. szerint következik:

$$9 = (a-b\sqrt{-1})(a'\ b'\sqrt{-1})$$

és szorozván:

$$9^2 = (a^2+b^2)(a'^2+b'^2)$$

mivel 9 való elsődszám, 9^2 csak egyetlen módon két, az egységtől különböző tényezőre szétbontható, t. i. $9^2=9.9$; szükséges tehát, hogy az egyenlet jobb része is ugyan azon tulajdonsággal birjon; miért leend:

$$q = a^2 + b^2 \text{ és } q = a'^2 + b'^2$$

azaz:

$$q = a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$$

de q illy alakú: $(4n + 3)$, tehát $a^2 + b^2$ és $a'^2 + b'^2$-nak is illyen alakúnak kell lenni, ez pedig lehetetlen mert két négyszögnek összege soha sem lehet $(4n + 3)$ alakú; tehát áll fölebbi tételünk.

Az elegy képzetes számok nál, az elsőd-számoknak megkülömböztetésére az összetettekről, szolgál a' következő tétel, mellynek bebizonyitását mint nem egészen ide tartozót, mellőzzük.

Tétel. Minden egész elegy képzetes szám $a + b\sqrt{-1}$ *vagy elsödszám, vagy nem, a' mint normája vagy való elsödszám, vagy nem.*

Illetőleges (relativ) *elsödszámoknak* mondatnak két elegy képzetes számok, ha az egységen kivül más közös osztójok nincs. — Ha van több közös osztójuk az mondatik legnagyobbnak mellynek normája legnagyobb. — Ha létez *egy* illyen legnagyobb közös osztó, létez még más három, t. i. mellékszámai. Igy p. o. a' legnagyobb közös osztó e' két szám között

$$2 + 4\sqrt{-1} \text{ és } 4 + 6\sqrt{-1}$$

bizonyosan 2, de egyszersmind ezek is -2, $2\sqrt{-1}$ és $-2\sqrt{-1}$, úgy *hogy a' számvetésnek nagyobbitott határainál mindég, nem egy, hanem négy legnagyobb közös osztóról kell szólanunk.* Ha a' fölebbi példában valóban osztunk e' hányadosokat kapjuk:

$$\begin{array}{cc} 1 + 2\sqrt{-1} & 2 + 3\sqrt{-1} \\ -1 - 2\sqrt{-1} & -2 - 3 \quad -1 \\ 2 - \sqrt{-1} & 3 - 2\sqrt{-1} \\ -2 + \sqrt{-1} & -3 + 2\sqrt{-1} \end{array}$$

Az elegy képzetes számok vagy párosok, vagy félpárosok vagy páratlanok:

a) $a + b\sqrt{-1}$ *páros* ha 2-vel oszlható, a' mi lehetséges ha a és b páros; p. o. $4 + 6\sqrt{-1}$

b) *félpárosnak* mondatik $a + b\sqrt{-1}$, ha sem 2-vel sem $1 + \sqrt{-1}$-vel nem osztható, azaz ha a és b páratlan p. o. $3 + 5\sqrt{-1}$

c) *páratlannak* mondatik $a + b\sqrt{-1}$, ha $(1 + \sqrt{-1})$-vel nem-osztható, azaz ha *a* páros, b páratlan vagy b páros, *a* páratlan, p. o. $3 + 6\sqrt{-1}$ vagy $4 + \sqrt{-1}$

A' párosoknak normája mindég illy alakú

$$2^m (4n + 1)$$

hol m egész, állító, és 1; — a *félpárosoké*:

$$8n + 2$$

és a' páratlanoké:

$$4n + 1.$$

Az eddig mondottakból kitetszik milly kiterjedést nyernek a' számok' elméletének tételei a' képzetes számok által. *Mind* ezen tételeket elősorolni annyit tenne mint nem az adott kérdésre felelni, hanem a' számok elméletét (Theorie der Zahlen) egészen leirni.

A' mondottakban foglaltatnak a' képzeteseknek a' számolástan (Arithmetik) határaiba tartozó *fötulajdonságai*; átmegyünk tehát az általános mennyiségtanra.

7. §.

Vizsgáljuk a' 4. §. 9) és 10) alatt lévő formulákat:

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.\,2} + \frac{x^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} - \ldots$$

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{x^2}{1.2.} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

ezekből és 4. § 1) és 2)-ből következik:

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2.\sqrt{-1}} \qquad 1)$$

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

itt az látszhatik különösnek *hogy sin x, és cos x mint való mennyiségek képzetes mennyiségek által fejeztetnek ki*, *és ezekkel egyenlök.* Azonban e' nehézség mindjárt eltünik ha meggondoljuk, hogy ezen egyenletekben a' képzetes mennyiségek csak *látszólagosak*. Ha t. i. ezen egyenletek jobb részén az $e^{x\sqrt{-1}}$ és $e^{-x\sqrt{-1}}$ mennyiségeket 4. § 3) szerint kifejtjük, és a' jelentett mütételeket elvégezzük a' $\sqrt{-1}$ egészen eltünik, és megmaradnak egyedül a' sin x és cos x-hez tartozó sorok. A' fölebbi egyenletek tehát csak úgy nevezett *jelképi egyenletek*, (Symbolische Gleichung) mellyek azonban sok esetben igen hasznosak mind a' számolások rövidségére, mind azoknak symetriájára nézve. — Egyébiránt elöre tudhattuk volna, hogy ama kisérlet: sin x és cos x-et *kitevős függvény* által kifejezni, *szükségképen képzetes mennyiségekre vezetend.* Mert sin x és cos x körszaki (periodisch) függvények mellyeknek értéke csak —1 és + 1 között változhat bár mint növekedjék x; e^x és e^{-x} pedig olly függvények, mellyek növekedő x-el végtelenül nagyobbodnak vagy kissebbednek, e^x t. i. nagyobbodik, e^{-x} kissebbedik növekedő x-el, és igy ezen kifejezések:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) \qquad 2)$$

mint növekedő x-el mindég nagyobbodó függvények, semmikép sem szolgálhatnak *való természetökben* sin x és cos x-nek kifejezésére; és mivel ezt még is kivántuk: képzetes eredménnyel felelt az analysis. E' tekintetben hasonlít az analysis azon pénzverő gépekhöz, mellyek a' kelleténél könnyebb vagy nehezebb érczdarabokat maga kidobja. — Valahányszor képtelenséget kivánunk az analysistól, annyiszor hasonló feleletet nyerünk. Kivánhatnók p. o. tudni azon kört, melly három párhuzamos vonalt egyszerre érint (tangirt). Az analysis kört fog adni, de képzetest. Észrevehetjük itt mindjárt a' képzetes mennyiségek' egy nevezetes tulajdonságát: *a' képzetes mennyiségek' t. i. a' lehetlenségnek vagy képtelenségnek telegraphjai az analysisban.*

Ha az elsőt az 1) alatt lévő egyenletek közül $\sqrt{-1}$ el szorozzuk, ezután pedig összeadunk és levonunk leend:

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos. x + \sqrt{-1} \sin x \qquad 3)$$

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1} \sin x \qquad 4)$$

Ezen egyenletek valamint azok 4. § 9) és 10) tulajdonképen csak megmutatják *milly függvénybe megy át az e^x-nek sora ha a változható x képzetessé lesz.* Itt tehát az átmenet a' valórúl a' képzetesre „*per definitionem*" történik.

Egyébiránt föladásunk leend minden függvénynél megmutatni: milly módositást szenved az ha változója képzetessé válik. —

Mivel előbbi egyenleteink 3) és 4) amazokból 4 §) 9) és 10) könyen folynak, tehát mint jogszerü következmények tekinthetők, a' mellett pedig igen alkalmas és simuló alakúak t. i.

$$f\,(x\sqrt{-1}) = \varphi\,(x) + \sqrt{-1}\;\psi\,(x) \qquad 5)$$

hol f, φ, és ψ megnem határozott, egymástól különbözhető függvényeket jelentenek, úgy hogy 3) szerint

$$f\,(x\sqrt{-1}) = e^{x\sqrt{-1}}\,;\; \varphi\,(x) = \cos x\,;\; \psi\,(x) = \sin x.,$$

tehát czélunk leend a' következőkben:

1-ör *minden képzetes mennyiséget azon alakra* 5) *hozni.*

2-or *ebből olly kifejezéseket következtetni, mellyekben a' képzetes* $\sqrt{-1}$ *csak külsőleg, látszólagosan foglaltatik,* mint 4 §) 9) és 10.)

3-or *megvizsgálni: valljon nem változnak-e, a' függvény tulajdonságai ha a' változó képzetes lesz.* Illyen tulajdonság p. o. a' hatványé, hogy mindég:

$$x^m \,.\, y^m = (x\,y)^m$$

Ha minden bebizonyitás nélkül egyenesen fölvesszük, hogy ezen tulajdonság akkor is áll ha x és y képzetes: ezen fölvételünk *csupa önkényü*, *minden analyticai alap nélküli* volna. E' tekintetben valóban csodálatra méltók át 18-*dik* század analystái, kik tömérdek sokat számoltak képzetes mennyiségekkel a' nélkül hogy megvizsgálták volna: mennyire legyenek erre följogositva.

Az előbb említett pontok' második az illetőleges *analyticai értelemre*, harmadika *a' képzetesek tulajdonságaira fog vezetni.*

8. §.

Mit a' számvetésben „elegy képzetes számnak" mondottunk az itt átmegy „*elegy képzetes mennyiségre*" vagy „képzetes két tagúra" (Binom). Ez alatt értünk tehát egy illy alakú kifejezést

$$a + b\sqrt{-1}$$

hol a, és b való mennyiségek. Az illy kifejezésekről áll:

1-ör Ha

$$a + b\sqrt{-1} = a' + b'\sqrt{-1} \qquad 1)$$

szükségképen lesz:

$$a = a'$$
$$b = b' \qquad 2)$$

mert 1)-ből következik:

$$a - a' = (b' - b)\sqrt{-1} \qquad 3)$$

második hatványra emelve

$$(a - a')^2 = -(b' - b)^2 \qquad 4)$$

vagy:

$$(a - a')^2 + (b' - b)^2 = o \qquad 5)$$

két négyszögnek összege soha sem lehet = o mert négyszögek, mint mindenkor állító mennyiségek, egymást nem semmisíthetik, tehát 5) nem állhat hacsak nem

$$(a - a')^2 = o \text{ és } (b' - b)^2 = o$$

azaz

$$a = a' \text{ és } b = b'$$

Ezen tételben foglalva van azon eset is ha:

$$a + b\sqrt{-1} = o = o + o\sqrt{-1}$$

hol szükségképen

$$a = o \text{ és } b = o$$

Ezt különösen is meglehet mutatni. Mert ha azon esetben midőn

$$a + b\sqrt{-1} = o$$

nem volna

$$a = b = o$$

ekkor lehetne következtetni:

$$b\sqrt{-1} = -a$$

$$\sqrt{-1} = -\frac{a}{b}$$

két *képtelen* egyenlet, mert valót egyenlősítnek igazi képzetessel.

2-or. Minden képzetes kéttagút ezen alakra lehet hozni:

$$\nu\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) \qquad 6)$$

hol ν bármilly való számot vagy mennyiséget, φ pedig való ivet (az analysisban mindég kör-ivek értetnek ha más különösen nem jelentetik) képviselhet. Hogy ezt megmutassuk tegyük föl *hogy már volna*:

$$a + b\sqrt{-1} = \nu\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) \qquad 7)$$

Fölvételünk igazolva leend ha képtelenségek nem következnek belőle.

Első tételünkből következik

$$a = \nu\cos\varphi \qquad 8)$$
$$b = \nu\sin\varphi$$

négyszögitve és összeadva, mivel $\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2 = 1$

$$a^2 + b^2 = \nu^2$$

elosztva pedig, mivel $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b} \text{ és } \varphi = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{b}{a}$$

úgy hogy ν és φ értékeinek megtudására mindég áll:

$$\nu = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad 9)$$
$$\varphi = \operatorname{arc.}\operatorname{tg}\frac{b}{a}$$

ezen egyenletek pedig nem képtelenek, sőt mindég valósíthatók, mert bármit jelentsen a és b, világos: hogy olly számot, melly $= \sqrt{a^2 + b^2}$ mindég lehet találni, és mivel az *érintők* minden értéket fölvehetnek $-\infty$-től egészen $+\infty$-ig ha φ, azaz ivök $-\frac{\pi}{2}$ és $+\frac{\pi}{2}$-között változik, tehát φ-t is mindég lehet föltalálni; fölvételünk tehát igazolva van. — Egyszersmind világos hogy arc. tg $\frac{b}{a}$-nak végtelen sok értéke lehet mert tg $\frac{b}{a}$ nem csak φ-hez tartozik hanem $\varphi + 2n\pi$-hez is, hol n egész szám. —

A' mennyiség

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

a' képzetes mennyiség' *modulusának* neveztetik. Meg kell itt jegyeznünk, hogy ámbár a' modulus és norma között nagy a' hasonlatosság; t. i:

$$\text{modulus} = \frac{\text{norma}}{\sqrt{\text{norma}}} = \sqrt{\text{norma}}\ ,$$

még is aránytalanúl nagyobb sikerrel használtatik a' számvetésben a' normának fogalma, a' mennyiségtanban pedig a' modulusé. —

3-or. *A' szorzatnak modulusa egyenlő a' modulusok szorzatával.*

Tegyük föl hogy két tényezők volnának $a + b\sqrt{-1}$ és $a' + b'\sqrt{-1}$; modulusaik r és r', szorzatuknak modulusa pedig legyen R, álland tételünk szerint:

$$R = rr'$$

Második pontunk szerint vagyon:

$$a + b\sqrt{-1} = r\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$$
$$a' + b'\sqrt{-1} = r'\,(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi')$$

szorozva

$$(a + b\sqrt{-1})\,(a' + b'\sqrt{-1}) =$$
$$= rr'\cos\varphi\cos\varphi' + \sqrt{-1}.\ rr'\sin\varphi'\cos\varphi'$$
$$-\ rr'\sin\varphi\sin\varphi' + \sqrt{-1}.\ rr'\sin\varphi'\cos\varphi$$
$$= rr'\,(\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi')$$
$$+ \sqrt{-1}.\ rr'\,(\sin\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi'\cos\varphi)$$
$$= rr'\,[\cos(\varphi + \varphi') + \sqrt{-1}\sin(\varphi + \varphi')]$$

az első résznek modulusa rr', a' második részét megkapjuk ha $rr' \cos(\varphi + \varphi)$ és $rr' \sin(\varphi + \varphi')$-t négyszögitjük, összeadjuk, és az összegből a' gyököt kivonjuk. Leend

$$r^2 r'^2 \cos(\varphi + \varphi')^2 + r^2 r'^2 \sin(\varphi + \varphi')^2 =$$
$$r^2 r'^2\,[\cos(\varphi + \varphi')^2 + \sin(\varphi + \varphi')^2] = R^2$$

tehát:

$$R = rr'\ .$$

Mivel a' és b' egészen tetszés szerint választhatók; úgy választhatjuk hogy:

$$a' = a \text{ és } b' = b$$

de ekkor a' szorzat átmegy egy második hatványba, és mivel a' mit két tényezőnek szorzatáról mutattunk, áll bár hány tényezőből eredett szorzatról is, következik: hogy fölebbi 3-ik tételünknek csak egy különös esete ezen következő tétel:

Az n-dik hatványnak modulusa egyenlő a' gyök modulusának n-dik hatványával, p. o. ha ezen gyök: $a + b\sqrt{-1}$, modulusa: r, n-dik hatványa: $(a + b\sqrt{-1})^n$; ennek modulusa: R, leend;

$$r^n = R$$

4-er. *Az összegnek modulusa kisebb vagy legfölebb egyenlő a' modulusok összegével.*

Ha az összeadandók: $a + b\sqrt{-1}$ és $a' + b'\sqrt{-1}$, öszszegök S, modulusaik r és r' ' és S-nek modulusa ϱ, álland:

$$\varrho = < r + r'$$

Mert:

$$a + b\sqrt{-1} + a' + b'\sqrt{-1} = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) + r'(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi') = r\cos\varphi + r'\cos\varphi' + \sqrt{-1}(r\sin\varphi + r'\sin\varphi')$$

a' második résznek modulusa:

$$\varrho = \sqrt{[(r\cos\varphi + r'\cos\varphi')^2 + (r\sin\varphi + r'\sin\varphi')^2]}$$

$$\varrho = \sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'(\cos(\varphi - \varphi')}$$

azon *egy* esetben tehát ha $\varphi = \varphi'$ azaz $\cos(\varphi - \varphi') = 1$ áll a' gyök-jel alatt tökéletes négyszög, és ekkor

$$\varrho = r + r'$$

minden más esetben pedig, $\cos(\varphi - \varphi')$ törtet jelentvén, leend:

$$\varrho < r + r'$$

végre világos hogy egy *való mennyiségnek modulusa maga a' mennyiség.* Mert minden való mennyiség illy alakú:

$$a + o\sqrt{-1}$$

ennek modulusa:

$$\sqrt{a^2 + o^2} = a$$

Nézzük most már milly következményeket huzhatunk az alapított négy tételből.

Az első tétel arra szolgál, *hogy valahányszor* 2n *egyenleteink vannak, ezen számot felére lehozhatjuk* t. i. n-re azaz: ha p. o. négy egyenleteink vannak, ezekből az 1-ő tételnél fogva kettőt csinálhatunk. Legyen a' négy egyenlet

$$A = o;\ B = o;\ C = o;\ D = o \qquad 11)$$

ezek helyett, ugyanazon értelmet kifejezve, irhatunk

$$A + B\sqrt{-1} = o \text{ és } C + D\sqrt{-1} = o \qquad 12)$$

(hol A, B, C, D-t kényünk szerint fölcserélhetjük) mert 12)-ből következik $A = B = C = D = o$ azaz 11). Ezen tulajdonsága a' képzetes mennyiségeknek, hogy t. i. két egyenletet egybe füzhetnek, *nem kiváltságos tulajdonuk, ez mind azon mennyiségeknek tulajdona, mellyek egymás által ki nem fejezhetők.* Illy egymás által ki nem fejezhető mennyiségek p. o. 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$'s a' t. Ha tehát n egyenleteink vannak, csak n illy szorzókat kell föltalálnunk, és minden egyenletet egygyel szoroznunk, hogy az n egyenletek egybe összeolvadjanak. Legyen a' négy fölebbi egyenlet 11.), a' négy szorzó pedig 1, $\sqrt{-1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, leend

$$A + B\sqrt{-1} + C\sqrt{2} + D\sqrt{3} = o \qquad 13)$$

és ebből is szükségképen következik

$$A = B = C = D = o$$

Ezen szorzók választásában arra kell vigyáznunk nehogy azon egyenletben melly velök szorzandó, *már előforduljanak*, mert ha p. o. C-ben már volna $\sqrt{2}$, ez vagy minden tagjában leend vagy csak némelly tagjaiban; ha minden tagban vagyon úgy szorzás által $\sqrt{2}$-vel C rationalis lesz és most 13)-ból következik

$$A + C\sqrt{2} = o$$

tehát 11) nincs teljesitve. (A itt rationalisnak vétetik). Ha csak némelly tagjaiban van $\sqrt{2}$, úgy ezen tagok $\sqrt{2}$-veli szorzás által rationalisok lesznek, és már nem következik mint kell: $A = o$; $C = o$. Hogy pedig mindég olly szorzókat választhassunk mellyek egymás által ki nem fejezhetők erre útmutatást ád a' következő tétel:

Ha $\sqrt[k]{a}$ (hol a és k egész számok) egész számban ki nem fejezhető, akkor ez bármilly tört által sem lehetséges tökéletesen, mert ha föltesszük hogy tört által $\sqrt[k]{a}$-nak értéke tökéletesen kifejezhető; ebből képtelenség ered.

Legyen

$$\sqrt[k]{a} = \frac{p}{q}$$

hol $\frac{p}{q}$ legkisebb nevezőre hozott tört, leend k hatványra emelmind a' két részt

$$a = \frac{p^k}{q^k}$$

azaz: a mint egész szám egyenlő $\frac{p^k}{q^k}$-val, melly mindég tiszta tört.

A' fön elősorolt pontok másodika azon igen nagy előnyt szolgáltatja hogy $a + b\sqrt{-1}$ helyett számolásainkban a' sokkal simulóbb $r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$-val élhetünk, minek hasznát a' következő §-ban tapasztalandjuk. —

9. §.

Átmegyünk az első műtételekre. Itt előbb az

$$a + b\sqrt{-1} \qquad 1)$$

és ezután az

$$r\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi) \qquad 2)$$

alakú kifejezéseket fogjuk vizsgálni. — *Előre kell bocsátanunk hogy bárminő legyen a' képzetes mennyiség azt mindég lehet az alakra* 1.) *hozni.* (Ezen tételnek nem létez más megmutatása, mint „per inductionem.") Legyen p. o.

$$(a + b\sqrt{-1})^m$$

hogy ezen hatványnak az alakot 1) adjuk; szükséges hogy Newton formulája szerint kifejtvén, a' való tagokat elkülönözzük a' $\sqrt{-1}$ tényezővel összefüzettektől;

$$(a + b\sqrt{-1})^m = a^m + ma^{m-1}\,b\sqrt{-1} - \frac{m(m-1)}{1.\,2.}\,a^{m-2}\,b^2$$

$$-\frac{m(m-1)-(m-2)}{1.\,2.\,3}\,a^{m-3}\,b^3\sqrt{-1}$$

$$+\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{1.\,2.\,3.\,4.}\,a^{m-4}\,b^4$$

$$+\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,(m-4)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}\,a^{m-5}\,b^5\sqrt{-1}$$

$$-\ldots\ldots+\frac{m\,(m-1)\ldots\ldots\ldots(m-m+1)}{1.\,2.\,3\ldots\ldots\ldots m}\,b^m\,(\sqrt{-1})^m$$

hol $\sqrt{-1}$, mellynek kitevője mindég egyenlő b kitevőjével, az utolsó tagnak jegyét meghatározza. Ha a' való tagok összegét P, és a' képzetes tényezővel összefüzettekét Q-nak nevezzük leend:

$$P = a^m - \frac{m\,(m-1)}{1.\,2.}\,a^{m-2}\,b^2$$

$$+\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{1.\,2.\,3.\,4}\,a^{m-4}\,b^4 - \ldots\ldots$$

$$Q = ma^{m-1}\,b - \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1.2.\,3}\,a^{m-3}\,b^3$$

$$+\frac{m\,(m-1)\ldots\ldots(m-4)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}\,a^{m-5}\,b^5 - \ldots\ldots$$

következésképen

$$(a + b\sqrt{-1})^m = P + Q\sqrt{-1} \qquad 3)$$

melly épen a' kivánt alak. Az eljárás, mellyet itt követtünk minden egyéb képzetes mennyiségek, az 1) alakra hozásánál foganatosan követtetik. — Ha volna p. o.

mivel $\sqrt[m]{(a+b\sqrt{-1})}$

$$\sqrt[m]{a+b\sqrt{-1}} = (a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}$$

az idézett Newton formulája szerint kifejtve leend

$$\sqrt[m]{a+b\sqrt{-1}} = P' + Q'\sqrt{-1} \qquad 4)$$

Hogy egytagúak (Monom) is, mint

$$\sqrt[4]{-1} \quad \sqrt[6]{-1} \text{ és átalánosan } \sqrt[2n]{-1}$$

hol n egész szám, ezen alakra hozhatók: alább látandjuk. Mondjuk: „átalánosan $\sqrt[2n]{-1}$," mert a $(2n+1)^{ik}$ gyök, azaz $\sqrt[2n+1]{-1}$ *mindég való mennyiség.*

Ha két képzetes mennyiséget *összeadunk*, *levonunk* vagy *szorzunk* kapjuk azt mit képzetes mennyiségek' *összegének*, *különbség* vagy *maradékának*, és *szorzatának* nevezünk. Leend tehát:

$$a+b\sqrt{-1}+a'+b'\sqrt{-1} = a+a'+(b+b')\sqrt{-1} \qquad 5)$$
$$a+b\sqrt{-1}-(a'+b'\sqrt{-1}) = a-a'+(b-b')\sqrt{-1} \qquad 6)$$
$$(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1}) = aa'+bb'+(a'b+ab')\sqrt{-1} \qquad 7)$$

könyen meggyőződünk, különös bebizonyitás nélkül is *hogy a' rend, mellyben szorzunk itt sincs befolyással a' szorzatra.* Két képzetes mennyiség *osztását mindég lehet a' modulus' segitségével szorzásra változtatni*, mert ha vagyon:

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{a'+b'\sqrt{-1}}$$

a' számlálót és nevezőt az utóbbinak összerendeltjével szorozván leend:

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{a'+b'\sqrt{-1}} = \frac{(a+b\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1}}{a'^2+b'^2}$$
$$= \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + \frac{(a'b-ab')\sqrt{-1}}{a'^2+b'^2}. \qquad 8)$$

azaz két képzetes mennyiség *elosztatik* ha az *osztandó az osztónak összerendeltjével szoroztatik és a' szorzat az osztó modulasának négyszögével osztatik.* (Osztunk tehát mégis; de *való* mennyiséggel.)

Világos egyszersmind ebből: hogy lehet egy képzetes törtnek számlálójából vagy nevezőjéből, — és ez utóbbi mindég kivánatos, — a' képzetest eltávolítni. A' képzetes mennyiséget t. i. összerendeltjével szorozzuk. — Ezen fortély a' rationalissá változtatáskor is használtatik. p. o.

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}}=\frac{a(b-\sqrt{c})}{(b+\sqrt{c})(b-\sqrt{c})}=\frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c^2}$$

Képzetes mennyiséget az m^{-dik} *hatványra emelni* annyit tesz: mint m képzetes tényezőből álló szorzatot képezni, a' mi szokott módon jelentetik:

$$(a+b\sqrt{-1})^m$$

és ha szükséges úgy mint e' §. elején mutattuk véghez is vitetik.

$(a+b\sqrt{-1})$-t az $\frac{1}{n}$-*dik* hatványra emelni, az az, az n^{-dik} *gyököt kihuzni* annyit tesz: *mint olly mennyiséget találni*, *melly az* n^{-dik} *hatványra emelve egyenlő* $(a+b\sqrt{-1})$*-vel*. Mivel mint látandjuk, több mennyiséget lehet találni, melly az n^{-dik} hatványra emelve $= a+b\sqrt{-1}$, vagy is mivel $(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$-*nek több értéke vagyon;* mi pedig ezen értékek közül némellykor nem egy bizonyost, hanem bármellyiket akarandjuk kijelelni, tehát ezen utóbbi czélra egy különös jelképpel élendünk t. i.

$$((a+b\sqrt{-1}))^{\frac{1}{n}} \text{ vagy } \sqrt{\sqrt[n]{a+b\sqrt{-1}}}$$

ezen kifejezések tehát a' sok gyöknek *bármellyikét;*

$$(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} \text{ vagy } \sqrt[n]{a+b\sqrt{-1}}$$

pedig ezen gyökök közül *egy bizonyost, meghatározottat* jelent.

Ugyanez áll az $\frac{m}{n}$-*dik* hatványról is, mert

$$(a+b\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

az n^{-dik} gyöknek m^{-dik} hatványa, tehát

$$((a+b\sqrt{-1}))^{\frac{m}{n}}$$

az n^{-dik} gyök bár mellyik értékének m^{-dik} hatványa.

Ezen kifejezést $(a+b\sqrt{-1})$ a' hatványra:

$$-m,\ -\frac{1}{n},\ \text{és}\ -\frac{m}{n}\ \text{emelni}$$

annyit tesz: *mint az egységet az m,* $\frac{1}{n}$ *vagy* $\frac{m}{n}$-*dik* *hatványnyal osztani*, az első mennyiség egyértékű, vagy mint mondani szoktuk: *egyértelmü* leend, az utóbbi kettő pedig *többértelmü* (vieldeutig) innen e' jelelések:

$$(a + b\sqrt{-1})^{-m}$$

$$((a + b\sqrt{-1}))^{-\frac{1}{n}}$$

$$((a + b\sqrt{-1}))^{-\frac{1}{n}}$$

A' második gyöknek kivonására különös formulát lehet használni ; t. i.

$$((a + b\sqrt{-1}))^{\frac{1}{2}} = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \sqrt{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right]$$

ha b $>$ o az az állitó ;

$$((a + b\sqrt{-1}))^{\frac{1}{2}} = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - \sqrt{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right]$$

ha b $<$ o az az tagadó ; ha mind a' két részt második hatványra emeljük, *azonos* (identisch) egyenletek erednek.

10. §.

Eddig csak az $a + b\sqrt{-1}$ alakú kifejezéseket vizsgáltuk, de mindjárt meg fogunk győződni hogy a' minden esetben alkalmazható alak:

$$r\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$$

nevezetes előnyökkel bir, melly által t. i. minden műtétel egygyel alább szállíttatik, úgy hogy szorzásból összeadás, osztásból kivonás, hatványozásból szorzás, és gyökkivonásból osztás lesz.

Mivel a' mindég tevőleges, *való* tényező r, egyszersmind modulus, különös vizsgálódást vagy módositást nem igényel; azt ideiglen mellőzhetjük és csak a' kifejezést

$$\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$$

tekintjük.

Ha két illy kifejezést

$$\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi;\ \cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi'$$

egymással szorzunk leend:

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi') =$$

$$= \cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + \sqrt{-1}(\cos\varphi\sin\varphi' + \cos\varpi'\sin\varphi)$$
$$= \cos(\varphi + \varphi') + \sqrt{-1}\sin(\varphi + \varphi') \qquad 1)$$

szorozván ezen egyenletet egy harmadik hasonló kifejezéssel: $\cos\varphi'' + \sqrt{-1}\sin\varphi''$ leend:

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi')(\cos\varphi'' + \sqrt{-1}\sin\varphi'') =$$
$$[\cos(\varphi + \varphi') + \sqrt{-1}\sin(\varphi + \varphi')](\cos\varphi'' + \sqrt{-1}\sin\varphi'')$$

ha itt az 1) által kimondott tételt foganatositjuk (φ' — φ'')-t helyettezvén φ' helyébe leend:

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi')(\cos\varphi'' + \sqrt{-1}\sin\varphi'') =$$
$$= \cos(\varphi + \varphi' + \varphi'') + \sqrt{-1}\sin(\varphi + \varphi' + \varphi'') \qquad 2)$$

Ezen eljárásnak természete ollyan, hogy ki nem lehet gondolni valami okot, mellynélfogva azt egy negyedik, ötödik.... 's m-*dik* tényezőre ki nem lehetne terjeszteni úgy hogy átalánosan áll:

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi')\ldots(\cos\varphi^{(m)} + \sqrt{-1}\sin\varphi^{(m)}) =$$
$$= \cos(\varphi + \varphi' + \ldots + \varphi^{(m)}) + \sqrt{-1}\sin(\varphi + \varphi' + \ldots + \varphi^{(m)})$$

mi által *a' szorzás összeadásra visszahozatott.*

$\varphi^{(m)}$ itt φ-t jelent m vonással.

Ha 1)ben helyettezünk

$$\varphi' = -\varphi$$

mivel $\cos -\varphi = \cos\varphi$ és $\sin -\varphi = -\sin\varphi$, leend

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi) = 1 \qquad 4)$$

Az egség tehát modulusa ezen kifejezéseknek:

$$\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi \text{ vagy } \cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi$$

Ha pedig ugyan azon egyenletben teszünk: $-\varphi'$; φ' helyébe:

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi' - \sqrt{-1}\sin\varphi') = \cos(\varphi - \varphi') + \sqrt{-1}\sin(\varphi - \varphi') \qquad 5)$$

Ha az egyenletnek 2) első részében a' szorzást valóban elvégezzük, és tekintjük hogy a' való részek a' valókkal, a' képzetesek a' képzetesekkel szükségképen egyenlők; találjuk:

$$\cos(\varphi + \varphi' + \varphi'') = \cos\varphi.\cos\varphi.'\cos\varphi'' - \cos\varphi.\sin\varphi.'\sin\varphi''$$
$$- \sin\varphi\cos\varphi'\sin\varphi'' - \sin\varphi\sin\varphi'\cos\varphi'' \qquad 6)$$

$$\sin(\varphi + \varphi' + \varphi'') = \sin\varphi\cos\varphi'\cos\varphi'' + \cos\varphi\sin\varphi'\cos\varphi' +$$
$$\cos\varphi\cos\varphi'\sin\varphi - \sin\varphi\sin\varphi'\sin\varphi'' \qquad 7)$$

A' hányadosnak

$$\frac{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi}{\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi'}$$

értékét megtaláljuk a' 9. §. 8)-ban adott szabály szerint, mivel $\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2 = 1$ áll; *a' nevezetes egyenlet*:

$$\frac{\cos\varphi + \;\; -1 \sin\varphi}{\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi'} = (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi' - \sqrt{-1}\sin\varphi') \quad 8)$$

ez pedig 5) szerint:

$$\frac{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi}{\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi'} = \cos(\varphi - \varphi') + \sqrt{-1}\sin(\varphi - \varphi') \quad 9)$$

ha a' nevezőt 9. §. szerint eltávoztatjuk, marad 8)-ból az azonos egyenlet:

$$\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$$

9)-ben tévén $\varphi = o$ és $\varphi = \varphi'$ mivel $\cos o = 1$ és $\sin o = o$:

$$\frac{1}{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi} = \cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi \quad 10)$$

a' mi 4)-el egészen megegyez.

Az egyenletek 9) és 10) *az osztást kivonásra változtatni tanitják.*

Hogy az m-*dik* hatványt kapjuk e' kifejezésből:

$$\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$$

3)-ban helyettezünk:

$$\varphi = \varphi' = \varphi'' = \ldots = \varphi^{(m)}$$

hol m természetesen *egész*, *állitó* szám, és leend:

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi \quad 11)$$

Hogy ez a' *mennyiben 3)-ból folyik csak akkor áll*, *ha m egész 's állitó*, kitetszik abból: hogy 3)-ban van φ semmi vonással, ezután egy, két ..... m vonással, de nincs, nem is lehet, tagadó két, vagy harmadrész vonással 'sat. Meg fogjuk azonban mutatni 11)-nek helybenhatóságát bár mit jelentsen m.

Valódi szorzás által az egyenletnek 3) helybenhatósága, ha m=2 és m=3 állandósitva vagyon, ezen esetekben tehát az egyenlet 11) is áll. *Ha megtudnók mutatni hogy 11) ha m-re nézve áll*, *m + 1-re nézve is álland*: *következtetnök hogy 11) minden egész*, *állitó m-re nézve áll.* (Bernoulli's Inductions-Beweis).

Szorozzuk a' 11)-et $(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$-val leend:

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{m+1} &= (\cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi)(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)\\ &= \cos m\varphi\cos\varphi - \sin m\varphi\sin\varphi +\\ &\quad + \sqrt{-1}(\sin\varphi\cos m\varphi + \sin m\varphi\cos\varphi)\\ &= \cos(m\varphi + \varphi) + \sqrt{-1}\sin(m\varphi + \varphi)\\ &= \cos(m+1)\varphi + \sqrt{-1}\sin(m+1)\varphi \quad 12)\end{aligned}$$

ugyanezen eredményt kaptuk volna, ha 11)-ben m helyett egyszerre irtunk volna m+1 tehát 11) helyes *minden egész, állitó m-re nézve.*

Nem kevésbbé helyes 11) *ha m állító, tört.* Mivel 11)-ben φ tetszésszerinti értékű, helyette tehetünk $\frac{\varphi}{m}$ leend, m egész állitó lévén:

$$\left(\cos\frac{\varphi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{m}\right)^m=\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi \qquad 13)$$

vonjuk ki az m^{-dik} gyököt, és emeljük azt az n^{-dik} hatványra

$$\left(\cos\frac{\varphi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{m}\right)^n=\left(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi\right)^{\frac{n}{m}} \qquad 14)$$

az elsö részt, mivel n egész állitó 11) szerint, átalakitván, 's tagokat cserélvén:

$$(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^{\frac{m}{n}}=\cos\frac{n\varphi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{n\varphi}{m} \qquad 15)$$

tehát 11) *helyes ha m állitó tört is.*

Hogy helybenhagyhatóságát egész, tagadó kitevőkre nézve megmutassuk emlékezzünk az egyenletre 10) mellyet mivel $\cos-\varphi=\cos\varphi$ és $\sin\varphi-\varphi=-\sin\varphi$, így is lehet írni:

$$\frac{1}{\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi}=\cos-\varphi+\sqrt{-1}\sin-\varphi$$

emeljük mind a' két részt az m^{-dik} hatványra, m egész állitó lévén, és *egyezzünk meg* abban hogy:

$$\frac{1}{(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^m}=(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^{-m}$$

leend:

$$(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^{-m}=(\cos-\varphi+\sqrt{-1}\sin-\varphi)^m$$

és 11) szerint

$$(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^{-m}=\cos-m\varphi+\sqrt{-1}\sin-m\varphi \qquad 16)$$
$$=\cos m\varphi-\sqrt{-1}\sin m\varphi$$

Ha a' fölebbihez hasonlólag 16)-ban φ helyett teszünk: $-\frac{\varphi}{m}$ leend:

$$\left(\cos-\frac{\varphi}{m}+\sqrt{-1}\sin-\frac{\varphi}{m}\right)^n=\left(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi\right)^{-\frac{n}{1m}}$$

mivel n egész állitó az elsö részt 11) szerint kifejtvén találunk

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{-\frac{m}{n}} = \cos - \frac{n\varphi}{m} + \sqrt{-1}\sin - \frac{n\varphi}{m} \quad 17)$$

$$= \cos\frac{n\varphi}{m} - \sqrt{-1}\sin\frac{n\varphi}{m}$$

az az: *11) helyes ha m tagadó egész*, *vagy tört*, tehát *bármilly* értékü legyen m, *mindég áll*:

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi$$

és mivel a' szorzatnak: $\sqrt{-1}\sin\varphi$ jegye semmi befolyással sincs bizonyitásunkra átalánosabban irhatunk:

$$(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi)^m = \cos m\varphi \pm \sin m\varphi \quad 18)$$

melly egyenlet, föltalálója után, ***Moivre** († 1754) formulájának* neveztetik.

15)-ben azon bökkenöre találunk hogy az elsö rész, mint látandjuk, több, t. i. m értékü, holott a' második rész csak egy értékü, és ezen körülmény miatt, melly a' legújabb korig méltánylást nem talált, átalános formulánkról 18) még szólandunk.

Az elöbbiek szerint a' képzetes mennyiségek hatványozása és gyökkivonása átmegy szorzásra és osztásra.

Mivel 18)-ban az elsö rész Newton formulája szerínt kifejthetö, továbbá a' való részek a' valókkal, a' képzetesek a' képzetesekkel egyenlök; tehát 18)-ból ered:

$$\cos m\varphi = \cos\varphi^m - \frac{m(m-1)}{1.2.}\cos\varphi^{m-2}\sin\varphi^2 + \ldots \quad 19)$$

$$\sin m\varphi = m\cos\varphi^{m-1}\sin\varphi - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.}\cos\varphi^{m-3}\sin\varphi^3 + \ldots \quad 20)$$

A' mondottak segítségével a' képzetes mennyiségeket könyüséggel *szorozzuk*, *osztjuk* vagy *bár milly egész v. tört hatványra emeljük*. Ha p. o. két képzetes mennyiség szorzandó volna, mindenek elött r $(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ alakot adunk nekik, ezután a' modulusokkal r úgy bánunk mint való mennyiségeknél szokás, a' modulusnak tényezöjével pedig a' fön adott szabályok szerint; és leend:

$$r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi).\, r'(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi') =$$
$$= rr'(\cos(\varphi + \varphi') + \sqrt{-1}\sin(\varphi + \varphi'))$$

Világos hogy két képzetes nem-összerendelt tényezö mindég képzetes szorzatot ád.

Most már megmutathatjuk, hogy a' hatványnak saját tulajdona

$$x^m\ y^m = (xy)^m$$

akkor is áll, ha x és y képzetesek. Mert

$$[r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)]^m\,[r'(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi')]^m =$$
$$= r^m(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^m\, r'^m(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi')^m$$
$$= [r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi).\, r'(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi')]^m$$

a' mi már a' fönebbi egyenletet igazolja.

11. §.

Ha ϱ egész, állító, vagy tagadó számot jelent, áll

$$\text{linea trigon. } x = \text{linea trigon } (x \pm 2\varrho\pi) \qquad 1)$$

azaz: a' trigonometricus függvények nem változnak ha szögükhöz bár hány *egész* körszél adatik, vagy attól levonatik, vagy is:

$$\left.\begin{matrix}\sin\\ \text{cosin}\\ \text{tang}\\ \cot\\ \dots\\ \dots\end{matrix}\right\} 30^0 = \left.\begin{matrix}\sin\\ \text{cosin}\\ \text{tang}\\ \cot\\ \dots\\ \dots\end{matrix}\right\}(30 \pm \varrho . 360)^0$$

E' szerint formuláinkat 10 §. 18) 19) és 20) így is lehet irni:

$$((\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi))^m = \cos m((\varphi + 2\varrho\pi)) \pm \sqrt{-1}\sin m((\varphi + 2\varrho\pi)) \qquad 2)$$

$$\cos m(\varphi + 2\varrho\pi) = \cos\varphi^m - \frac{m(m-1)}{1.2.}\cos\varphi^{m-2}\sin\varphi^2 + \dots \qquad 3)$$

$$\sin m(\varphi + 2\varrho\pi) = m\cos\varphi^{m-1}\sin\varphi - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos\varphi^{m-3}\sin\varphi^3 + \dots \qquad 4)$$

Bár mit jelentsen m, 2) mindég helyes leend, azaz: az első rész valamellyik értékéhez mindég fog találtatni a' második résznek egyik értéke. De 3) és 4) csak akkor helyes, ha m egész szám, mert ha m tört volna, akkor φ-hez nem egész hanem tört körszéleket adnánk, ha p. o. $m = \frac{1}{5}$ leend

$$\cos\left(\frac{\varphi}{5} + \frac{2\varrho\pi}{5}\right) = \text{'s a' t} \dots$$

ha ϱ az 5-öt nem foglalja magában $\frac{2\varrho\pi}{5}$ tört, tehát

$$\cos\left(\frac{\varphi}{5} + \frac{2\varrho\pi}{5}\right) \text{ nem} = \cos\frac{\varphi}{5}$$

következésképen 3) nem áll. Ezért meg kell vizsgálnunk milly értéke legyen ϱ nak hogy 3) és 4) mindenkor, bár mit jelentsen m, állhasson.

Állitjuk hogy 3) és 4) *minden* m-re nézve csak akkor helyes ha $\varrho = o$.

Ha $\varphi = o$: ez igen világos, mert ekkor 2) ből leend:

$$\cos 2m\varrho\pi = 1$$

hogy ez álljon bár mit jelentsen is m, szükségképen $\varrho = o$. De ha φ különbözik is a' nullától, még is $\varrho = o$; mert ϱ nem folytonos függvénye φ-nek, *ha pedig nem folytonos függvénye: nem-folytonos* (unſtetig) *függvénye nem lehet*, megkell tehát mutatnunk, hogy ϱ nem folytonos függvénye φ-nek. —

Tegyünk 3) ban először:

$$\varphi = \alpha \text{ és } \varrho = \varrho_1$$

ezután:

$$\varphi = \alpha + \delta \text{ és } \varrho = \varrho_2$$

hol δ igen kis ívet jelent; leend:

$$\cos(m\alpha + 2m\,\varrho_1\,\pi) = \cos\alpha^m - \frac{m\,(m-1)}{1.\,2}\cos\alpha^{m-2}\sin\alpha^2 + \ldots = P_1$$

$$\cos(m\,\alpha + m\,\delta + 2m\varrho_2\pi) = \cos(\alpha + \delta)^m - \frac{m\,(m-1)}{1.\,2.}\cos(\alpha + \delta)^{m-2}\sin(\alpha + \delta)^2 + \ldots = P_2$$

kivonván:

$$\cos(m\alpha + 2m\,\varrho_1\,\pi) - \cos(m\alpha + m\delta + 2m\,\varrho_2\,\pi) = P_1 - P_2$$

ha $\delta = o$, lesz $P_1 = P_2$ tehát ezen egyenlet második része t. i. $P_1 - P_2 = o$ következésképen az első résznek is ezen esetben egyenlőnek kell lenni a' nullával, azaz:

$$\cos(m\,\alpha + 2m\,\varrho_1\,\pi) - \cos(m\,\alpha + 2m\,\varrho_2\,\pi) = o$$

hogy ez állhasson, bár mit jelentsen m, szükségképen $\varrho_1 = \varrho_2$, Mert tegyük hogy

$$m\,\alpha + 2m\varrho_1\,\pi = \alpha - \beta$$

$$m\alpha + m\delta + 2m\varrho_2\pi = \alpha + \beta$$

összeadván, és kivonván kapunk:

$$\alpha = m\alpha + \frac{m\delta}{2} + m\pi\,(\varrho_1 + \varrho_2)$$

$$\beta = \frac{m\delta}{2} + m\pi\,(\varrho_2 - \varrho_1)$$

és mivel trigonometriából:

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$$

$$P_1 - P_2 = o = 2\sin\left[m\alpha + \frac{m\delta}{2} + m\pi\,(\varrho_1 + \varrho_2)\right] \times \left[\sin\frac{m\delta}{2} + m\pi\,(\varrho_2 - \varrho_1)\right]$$

a' mi csak akkor lehetséges ha $\varrho_1 = \varrho_2$, emlékezetben t. i. tartván, hogy $\delta = o$ vagy is inkább végtelen a' nullához közeledik;

azaz ϱ nem lehet folytonos függvénye φ-nek, mert folytonos függvény csak akkor volna, ha φ-től ugy függne, hogy ennek legkisebb változásával maga is aránylagossan változnék; — ha pedig folytonos függvénynek nem lehet tartani, annál kevésbé nem-folytonosnak. Mivel 3) ban és 4) ben a' második rész egy értékü, az első is szükségképen az; nem lehet pedig, ha csak ϱ, φ-nek függvénye nem lévén, nem egyenlő a' nullával, *tehát* 3) *és* 4) *csak azon alakban áll a' mint azt az előbbi* §-*ban* 19) *és* 20) *alatt adtuk, vagy kettős zárjelt kell használni.*

$$\cos m\,((\varphi + 2\,\varrho\,\pi)) = \cos \varphi^{m} - \frac{m\,(m-1)}{1.\,2}\cos \varphi^{m-2}\sin \varphi^{2}$$

's a' t.

Az egyenlet 2) áll, bár milly lehetséges értéke legyen φ-nek, álland tehát akkor is ha $\varphi = o$, ezen esetben 2) átmegy ebbe:

$$1 = \cos 2\,m\,\varrho\,\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin 2\,m\,\varrho\,\pi \qquad 5)$$

az m-dik gyököt 10. §. szerint kivonván, és a' 9 §-ban elfogadott eleléssel élvén, végre mϱ helyett rövidebben k-t irván, hol m és ϱ tehát k is egész szám:

$$((1))^{\frac{1}{m}} = \cos \frac{2\,k\,\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\sin \frac{2\,k\,\pi}{m} \qquad 6)$$

k nak minden lehetséges értékei ekkép jelelhetők;

I. *ha m páros szám:*

$$0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,\ldots\ldots\,\frac{m}{2}-2,\,\frac{m}{2}-1,\,\frac{m}{2}$$

$$\frac{m}{2}+1,\,\frac{m}{2}\,\ldots\ldots\,m-2,\,m-1,\,m$$

$$m+1,\,m+2\,\ldots\ldots\,\frac{3m}{2}-2,\,\frac{3m}{2}-1,\,\frac{3m}{2}$$

$$\frac{3m}{2}+1,\,\frac{3m}{2}+2\,\ldots\,2m-2,\,2m-1,\,2m \text{ 's a' t.}$$

vagy ugyanazon tagokat czélunkra jobban alkalmazva:

$$0,\,1,\,2,\,3,\,\ldots\ldots\,\frac{m}{2}-2,\,\frac{m}{2}-1,\,\frac{m}{2}$$

$$m-\left(\frac{m}{2}-1\right);\,m-\left(\frac{m}{2}-2\right)\ldots m-2,\,m-1,\,m \qquad 7)$$

$$m+1,\,m+2,\,\ldots\,m+\left(\frac{m}{2}-2\right),\,m+\left(\frac{m}{2}-1\right),\,\frac{3m}{2}$$

$$2\,m-\left(\frac{m}{2}-1\right);\,2\,m-\left(\frac{m}{2}-2\right)\ldots 2\,m-2,2m-1,2m \text{ 'sat.}$$

Helyettesítsük 6)-ba k-nak azon értékeit mellyek 7)-nek első vízirányos sorában állnak:

$$((1))^{\frac{1}{m}} = \begin{cases} 1 \\ \cos\frac{2\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{m} \\ \cos\frac{4\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{m} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \cos\frac{m-4}{m}\pi \pm \sqrt{-1}\sin\frac{m-4}{m}\pi \\ \cos\frac{m-2}{m}\pi \pm \sqrt{-1}\sin\frac{m-2}{m}\pi \\ -1 \end{cases} \quad 8)$$

ha folytatva helyettesítjük k-nak a' második sorban álló értekeit ugyan azt kapjuk mit 8)-ban, csak visszás rendben, ha a' harmadik sorban lévő értékeket vesszük, ugyan azt mit 8)-ban ugyan azon rendben kapjuk 's a' t. Hogy ez szembetünőbb legyen helyettesítsük valóban 6)-ba a' második sornak értékeit, észrevévén egyszersmind, hogy $2m\pi$ kimaradhat, mint bizonyos számú egész körszélek:

$$((1))^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{2m-2\left(\frac{m}{2}-1\right)\pi}{m}$$

$$\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2m-2\left(\frac{m}{2}-1\right)\pi}{m} \quad 9)$$

$$= \cos\frac{m-2}{m}\pi \mp \sqrt{-1}\sin\frac{m-2}{m}\pi$$

a' második értékből ugyan azon sorból:

$$(1)^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{m-4}{m}\pi \mp \sqrt{-1}\sin\frac{m-4}{m}\pi \quad 10)$$

de 9) és 10) *már* 8)-ban előfordúltak, 's ha a' helyettesítést folytatnók, csak a' *többi más* 8)-ban előfordúlt értékeket kapnók, tehát $((1))^{\frac{1}{m}}$ nek nincs több értéke *mint* a' *hány* 7)-nek egy sorából kifejthető. A' tagok ott $\frac{m}{2}+1$ számmal vannak, helyettesítésnél $\frac{m}{2}-1$ közülök kétféle jegyet kap összesen tehát $((1))^{\frac{1}{m}}$ nek

$$\left(\frac{m}{2}+1\right)+\left(\frac{m}{2}-1\right)=m$$

értéke vagyon; t. i.

$$((1))^{\frac{1}{m}} = \begin{cases} +1 \\ \cos\frac{2}{m}\pi+\sqrt{-1}\sin\frac{2}{m}\pi \\ \cos\frac{4}{m}\pi+\sqrt{-1}\sin\frac{4}{m}\pi \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cos\frac{m-2}{m}\pi+\sqrt{-1}\sin\frac{m-2}{m}\pi \\ -1 \\ \cos\frac{2}{m}\pi-\sqrt{-1}\sin\frac{2}{m}\pi \\ \cos\frac{4}{m}\pi-\sqrt{-1}\sin\frac{4}{m}\pi \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cos\frac{m-2}{m}\pi-\sqrt{-1}\sin\frac{m-2}{m}\pi \end{cases} \qquad 11)$$

II. *ha m páratlan szám;* k-nak lehetséges értékei ezek:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ \frac{m-3}{2}\ \ \frac{m-1}{2}$$

$$m-\frac{m-1}{1},-m-\frac{m-3}{2}\ \ldots\ m-2,\ \ m-1 \qquad 12)$$

$$m, m+1\ m+2\ \ldots\ m+\frac{m-3}{2},\ m-\frac{m-1}{2}, \text{'s a' t.}$$

Ha ezen értékeket 6) ban helyettezzük megint csak az első sorból erednek különböző értékek, ezen sorban pedig $\frac{m+1}{2}$ tag, és ezek közül $\frac{m-1}{2}$ kétféle jegyű lévén, következik hogy ezen esetben is

$$\frac{m+1}{2}+\frac{m-1}{2}=m$$

értéke leend $((1))^{\frac{1}{m}}$ nek; t. i.

$$((1))^{\frac{1}{m}} = \left\{ \begin{array}{l} 1 + \\ \cos \frac{2}{m}\pi + \sqrt{-1} \sin \frac{2}{m}\pi \\ \cos \frac{4}{m}\pi + \sqrt{-1} \sin \frac{4}{m}\pi \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \cos \frac{m-1}{m}\pi + \sqrt{-1} \sin \frac{m-1}{m}\pi \\ \cos \frac{2}{m}\pi - \sqrt{-1} \sin \frac{2}{m}\pi \\ \cos \frac{4}{m}\pi - \sqrt{-1} \sin \frac{4}{m}\pi \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \cos \frac{m-1}{m}\pi - \sqrt{-1} \sin \frac{m-1}{m}\pi \end{array} \right. \qquad 13)$$

A' 11) és 13)-ban előforduló értékek csak akkor lesznek mindnyájan teljes (geschlossen) algebraicus kifejezések ha a' körszél 2m egyenlő részre mértanilag osztható, mert sin. és cos. csak ekkor teljes algebraicus kifejezések. — Így p. o. ha $m = 4$ (11) ből lesz:

$$((1))^{\frac{1}{m}} = 1, = \sqrt{-1}, = -1, = -\sqrt{-1}$$

vagy rövidebben.

$$((1))^{\frac{1}{4}} = \pm\sqrt{\pm 1} \qquad 14)$$

Ha $m = 3$, 13) szerint leend:

$$\begin{aligned} ((1))^{\frac{1}{3}} &= 1 \\ &= \cos \frac{2}{3}\pi + \sqrt{-1} \sin \frac{2}{3}\pi \\ &= \cos \frac{4}{3}\pi + \sqrt{-1} \sin \frac{4}{3}\pi \\ &= \cos \frac{2}{3}\pi - \sqrt{-1} \sin \frac{2}{3}\pi \\ &= \cos \frac{4}{3}\pi - \sqrt{-1} \sin \frac{4}{3}\pi \end{aligned} \qquad 15)$$

úgy látszik mintha itt három helyett, öt értéket találtunk volna, de mivel:

$$\cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos \frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} \sin \frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{1}$$

15)-ben leend

$$\text{a 2-dik érték} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1}$$

$$3 \;,, \;\; ,, \; = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1}$$

$$4 \;,, \;\; ,, \; = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1}$$

$$5 \;,, \;\; ,, \; = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1}$$

azaz: a' második az ötödikkel, a' harmadik a' negyedikkel egyenlő, tehát csak három érték marad.

A' mondottak segitségével könnyen föltaláljuk különbféle értékeit e' kifejezésnek

$$((1))^{\frac{n}{m}}$$

mivel t. i. mindég áll:

$$((1))^{\frac{n}{m}} = \left[((1))^{\frac{1}{m}} \right]^{n} \qquad 16)$$

tehát csak $((1))^{\frac{1}{m}}$-nek m értékeit kell fölkeresnünk és mindegyikét az n dik hatványra emelnünk.

Az egyenlet 16) magyarra fordítva így hangzanék: *a'* $((1))^{\frac{n}{m}}$ *egyik értéke egyenlö a'* $((1))^{\frac{1}{m}}$ *egyik értékének* n dik *hatványával.*

A' 10 dik § ban megalapítottuk ezen egyenletet:

$$(a + b\sqrt{-1})^{-m} = \frac{1}{(a + b\sqrt{-1})^{m}}$$

ebből következik:

$$((1))^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{((1))^{\frac{1}{m}}} \qquad 17)$$

tehát $((1))^{-\frac{1}{m}}$ nek értékeit föltalálhatjuk 11) és 13) segitségével, osztván az egységet az ott talált értékekkel. — Ha ezen értékeket az n dik hatványra emeljük találjuk

$$((1))^{-\frac{n}{m}}$$

-nek minden értékeit, mellyek egészen egyenlők $((1))^{\frac{n}{m}}$ nek értékeivel. — Egy illyen érték p. o. volt

$$((1))^{\frac{n}{m}} = \cos\frac{2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}$$

ugyan ezen érték $((1))^{\frac{n}{m}}$-re nézve így iratik:

$$((1))^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{((1))^{\frac{n}{m}}} = \frac{1}{\cos\frac{2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}} \qquad 18)$$

ez pedig 10. §. 10) szerint:

$$= \cos\frac{2n\pi}{m} \mp \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}.$$

következésképen:

$$((1))^{\frac{n}{m}} = ((1))^{-\frac{n}{m}} \qquad 19)$$

Ha tehát egy képzetes mennyiséget az f dik hatványra akarjuk emelni, hol f egész vagy tört, állító vagy tagadó lehet, mindenek előtt az alakot $r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ adjuk neki, és mivel:

$$r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) = (1)\, r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$$

tehát f-nek bár milly értékére nézve leend:

$$(a + b\sqrt{-1})^f = ((1))^f\, r^f(\cos f\varphi + \sqrt{-1}\sin f\varphi)$$

a' kettős zárjel $((1))^f$ itt csak akkor bir jelentőséggel ha f tört, mert *egész hatvány több értékü nem lehet.*

12. §.

Minekutána az állító egységnek különbféle hatványait vizsgáltuk ugyan azt kell tennünk a' tagadó egységre nézve. — Könyen fordúlhat elő az egyenlet:

$$x^m + 1 = o$$
$$x^m = -1$$
$$x = \sqrt[m]{-1} \qquad 1)$$

itt x-nek értékeit meg nem tudhatjuk ha csak nem $((-1))^{\frac{1}{m}}$ értékei által, 's ezek megint csak a' képzetes mennyiségek segitségével kifejthetők. Az eljárás egészen hasonló az előbbihez, miért is rövidebben elvégezhetjük. — 11. § 2) volt

$$((\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi))^m = \cos(m\varphi + 2m\varrho\pi)$$
$$\pm\sqrt{-1}\sin(m\varphi + 2m\varrho\pi)$$

tegyük:

$$\varphi = \pi$$

mivel:

$$\cos\pi = -1 \quad \sin\pi = 0$$

leend:

$$((-1))^m = \cos(m\pi + 2m\varrho\pi) \pm \sqrt{-1}\sin(m\pi + 2m\varrho\pi) \qquad 2)$$

és mivel föltesszük, hogy m és ϱ egész számok:

$$(-1)^m = \cos m\pi \pm \sqrt{-1}\sin m\pi$$
$$= \pm 1 \qquad 3)$$

hol a' fölső vagy alsó jegy érvényes a' mint m páros vagy párallan.

11. § 2) áll, bár mit jelentsen m, tehát áll ha m átmegy is $\frac{1}{m}$-be

$$((\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi))^{\frac{1}{m}}$$
$$= \cos\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{2\varrho\pi}{m}\right) \pm \sqrt{-1}\sin\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{2\varrho\pi}{m}\right) \qquad 4)$$

tegyük:

$$\varphi = \pi$$

leend:

$$((-1))^{\frac{1}{m}} = \cos\left(\frac{\pi}{m} + \frac{2\varrho\pi}{m}\right) \pm \sqrt{-1}\sin\left(\frac{\pi}{m} + \frac{2\varrho\pi}{m}\right)$$
$$= \cos\frac{\pi}{m}(2\varrho + 1) \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{m}(2\varrho + 1) \qquad 5)$$

Ámbár itt ϱ akár millyen egész számot jelenthet, $((-1))^{\frac{1}{m}}$-nek értékei még sem végtelen sokan vannak. — Ha m páros szám ϱ értékei így csoportozhatók (gruppiren)

$$0, 1, 2, \ldots\ldots \frac{m}{2} - 2, \frac{m}{2} - 1$$
$$m - \frac{m}{2}, m - \left(\frac{m}{2} - 1\right) \ldots\ldots m-2, m-1 \qquad 6)$$
$$m, m + 1, \ldots\ldots m + \left(\frac{m}{2} - 2\right), m + \left(\frac{m}{2} - 1\right)$$
$$2m - \frac{m}{2}, 2m - \left(\frac{m}{2} - 1\right) \ldots\ldots 2m-2, 2m-1 \text{ 'sa' t.}$$

ha pedig m páratlan:

$$0, 1, 2, \ldots\ldots \frac{m-5}{2}, \frac{m-3}{2}, \frac{m-1}{2}$$

$$m-\frac{m-1}{2},\ m-\frac{m-3}{2}\ .\ .\ .\ .\ m-2,\ m-1 \qquad 7)$$

$$m,\ m+1\ .\ .\ .\ .\ m-\frac{m-3}{2},\ m+\frac{m-1}{2},\ \text{'s a' t.}$$

mind a' két esetben, éppen úgy mint 11. §-ban csak az első sor' helyettezéséből nyerhetünk különböző értékeket, ezen értékek száma m, mert az első sor 6)-ban $\frac{m}{2}$ tagot számlál, mind kétféle jegygyel, tehát m értéket ád; az első sor 7)-ben $\frac{m+1}{2}$ tagot számlál, ezek közül $\frac{m-1}{2}$ kétféle jegyü, tehát:

$$\frac{m+1}{2}+\frac{m-1}{2}=m$$

értéket ád, következésképen páros m esetében:

$$\left\{\begin{array}{l}
\cos\frac{1}{m}\pi+\sqrt{-1}\sin\frac{1}{m}\pi \\
\cos\frac{3}{m}\pi+\sqrt{-1}\sin\frac{3}{m}\pi \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
\cos\frac{m-1}{m}\pi+\sqrt{-1}\sin\frac{m-1}{m}\pi \\
\cos\frac{1}{m}\pi-\sqrt{-1}\sin\frac{1}{m}\pi \\
\cos\frac{3}{m}\pi-\sqrt{-1}\sin\frac{3}{m}\pi \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
\cos\frac{m-1}{m}\pi-\sqrt{-1}\sin\frac{m-1}{m}\pi
\end{array}\right. \qquad 8)$$

Hogy ezek között *egy való érték sincs* abból világos, hogy -1 soha sem lehet *páros hatványa valamelly való számnak.*

Ha m páratlan:

$$((-1))^{\frac{1}{m}}=\left\{\begin{array}{l}
-1 \\
\cos\frac{1}{m}\pi+\sqrt{-1}\sin\frac{1}{m}\pi \\
\cos\frac{3}{m}\pi+\sqrt{-1}\sin\frac{3}{m}\pi
\end{array}\right.$$

$$((-1))^{\frac{1}{m}} = \begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cos\frac{m-2}{m}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{m-2}{m}\pi \\ \cos\frac{1}{m}\pi - \sqrt{-1}\sin\frac{1}{m}\pi \\ \cos\frac{3}{m}\pi - \sqrt{-1}\sin\frac{3}{m}\pi \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cos\frac{m-2}{m}\pi - \sqrt{-1}\sin\frac{m-2}{m}\pi \end{cases} \quad 9)$$

Ha a' körszélt 2m egyenlő részre mértanilag osztani lehet: a' föle bbi értékekben sin és cos teljes algebraicus kifejezések lesznek. P. o. ha $m = 4$:

$$\begin{aligned} ((-1))^{\frac{1}{4}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1} \end{aligned} \quad 10)$$

vagy rövidebben:

$$((-1))^{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}$$

ha $m = 3$:

$$\begin{aligned} ((-1))^{\frac{1}{3}} &= -1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1} = \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1} = \frac{1-\sqrt{-3}}{2} \end{aligned} \quad 11)$$

most már $((-1))^{\frac{n}{m}}$ és $^{-\frac{n}{m}}$ könyen kifejthetők, az előbbi: ha a' 8) és 9) alatt lévő értékeket az n dik hatványra emeljük, az utóbbi: midőn az igy talált értékekkel az egységet osztjuk. Itt is találjuk hogy

$$((-1))^{\frac{n}{m}} = ((-1))^{-\frac{n}{m}} \quad 12)$$

Ha tehát egy képzetes mennyiség $-a - b\sqrt{-1}$ a' $\left(\pm\frac{n}{m}\right)$ dik hatványra emelendő, előbb ezen alakra hozzuk

$$-a-b\sqrt{-1}=(-1)\,r.\,(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$$

miből:

$$(-a-b\sqrt{-1})\pm\frac{n}{m}$$

$$=((-1))\pm\frac{n}{m}\,r\pm\frac{n}{m}\,(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)\pm\frac{n}{m} \qquad 13)$$

melly egyenlet a' kivánt hatványt minden értékével adja.

Állítottuk hogy $((\pm 1))\pm\frac{n}{m}$ mindég m értékkel bír. Hogy több értékkel nem bírhat, az 11. §. 11). és 13), és 12, §. 8) és 9)-ből világosan következik, *de hogy ezen értékek kevesebbek sem lehetnek mint m, azt különösen meg kell mutatnunk.*

Ha $((\pm 1))\pm\frac{n}{m}$ kevesebb értékkel birna mint m -mel ez máskép nem volna lehetséges, mint ha föltesszük hogy nehány az idézett érték közül egyenlő. Tegyük föl, hogy két illyen egyenlő értékben ϱ átmenjen ϱ_1 és ϱ_2-be, hol ϱ_1 és ϱ_2 minden esetre o és m között fekszik. Helyettezve átalános formulánkba:

$$((\pm 1))\pm\frac{n}{m}=\cos\pm\frac{2n\varrho\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\sin\pm\frac{2n\varrho\pi}{m}$$

adnak:

$$\frac{2\,n\,\varrho_1\,\pi}{m} \text{ és } \frac{2\,n\,\varrho_2\,\pi}{m} \qquad \alpha)$$

hol föltesszük, hogy $\frac{n}{m}$ legkisebb nevezőre vagyon hozva.

Ha $n\varrho_1 > m$ és $n\varrho_2 > m$ az osztást el lehet végezni 's eredménye leend a' hányados q és a' maradék p, azaz:

$$\frac{n\varrho_1}{m}=q_1+\frac{p_1}{m} \text{ és } \frac{n\varrho_2}{m}=q_2+\frac{p_2}{m}$$

ebből:

$$n\varrho_1=mq_1+p_1 \text{ és } n\varrho_2=mq_2+p_2$$

ha ezt α) ba helyettezzük; leend:

$$2\,\pi\left(q_1+\frac{p_1}{m}\right) \text{ és } 2\pi\left(q_2+\frac{p_2}{m}\right)$$

Fölvételünk szerint azon két érték, hol ϱ_1 és ϱ_2 előfordul, egyenlő tehát, mivel a' vaió rész a' valóval a' képzetes a' képzetessel egyenlő; szükségképen:

$$\sin 2\pi\left(q_1+\frac{p_1}{m}\right)=\sin 2\pi\left(q_2+\frac{p_2}{m}\right).$$

q_1 és q_2 mint hányadosak egész számok, tehát $2\pi q_1$ és $2\pi q_2$ kihagyható, következésképen

$$\sin\frac{2\pi\,p_1}{m}=\sin\frac{2\pi\,p_2}{m} \qquad \beta)$$

ez csak akkor lehetséges ha $p_1 = p_2$ ez pedig nem állhat, következésképen β) sem állhat, azaz két egyenlő érték nem létez $((\pm 1)) \pm \frac{n}{m}$-nek m értéke között. Hogy pedig $p_1 = p_2$ nem lehet, kitetszik abból: hogy ha a' fölebbi egyenleteket kivonjuk:

$$n\varrho_2 - n\varrho_1 = mq_2 - mq_1 + p_2 - p_1$$

és itt megengedjük hogy $p_1 = p_2$, leend:

$$n(\varrho_2, - \varrho_1) = m(q_2 - q_1)$$

ha ezen egyenlet helyes, akkor m-el lehet osztani, de az első rész m-el nem osztékony mert n semmi tényezőjét m-nek nem foglalja magában, $\varrho_2 - \varrho_1$ pedig osztékony nem lehet m-el, mert már ϱ_2 vagy ϱ_1 kisebb mint m annál inkább tehát $\varrho_2 - \varrho_1$, tehát az utolsó egyenlet nem áll, következésképen p_2 nem $= p_1$.

$((\pm 1)) \pm \frac{n}{m}$*-nek tehát m értéke vagyon, sem több sem kevesebb.*

Az eddig mondottakból még következik hogy:

$$((1))^{\frac{1}{m}} = ((1))^{\frac{n}{m}} = ((1))^{-\frac{1}{m}} = ((1))^{-\frac{n}{m}}$$

$$= ((-1))^{\frac{n}{m}} = (([-1]^n))^{\frac{1}{m}} = ((-1))^{-\frac{n}{m}}$$

$$((-1))^{\frac{1}{m}} = ((-1))^{-\frac{1}{m}}$$

hol a' jel $=$ csak azt jelenti *hogy az egyenlet egyik részének valamellyik értéke egyenlö a' másik résznek valamellyik értékével.*

Ha h állító, vagy tagadó tört e' két átalános formulát birjuk:

$$((1))^h = \cos 2\,h\,\varrho\,\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin 2\,h\,\varrho\,\pi$$

$$((-1))^h = \cos(2\,\varrho + 1)\,h\,\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin(2\,\varrho + 1)\,h\,\pi$$

hol ϱ mint eddig nullától $+ \infty$-ig minden egész számot jelenthet, magát a' nullát sem vévén ki.

Ha h *irrationalis* volna az előbbi két egyenletnek végtelen sok értéke volna, és jelelési módunk,

$$((1))^h \quad \text{és} \quad ((-1))^h$$

az eddigi értelemben legalább, nem volna alkalmazható.

13 §.

Az eddig alapitott elvek elegendők arra, hogy a' képzetes mennyiségek bár milly hatványainak analyticai, és ha vagyon mértani értelmét és illetőleges tulajdonságát megtudhassuk. Midőn föntartjuk magunknak, hogy ezekről a' következőkben bővebben szóljunk, átmegyünk következő mennyiségek' analyticai értelmének kifejtésére; úgy mint:

$$A^x \quad \text{Log } x \quad \sin x \quad \cos x \quad \text{arcsin } x \quad \text{arccos } x \qquad 1)$$

azon esetben ha x képzetes volna. —

Némelly átalános észrevételt előre kell bocsátanunk: Ha $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ két való függvény, akkor;

$$\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1} \text{ vagy}$$
$$\psi(x) + \varphi(x)\sqrt{-1}$$

képzetes függvénynek fog neveztethetni, és

$$\varphi(x\,y\,z\,\ldots) + \psi(x\,y\,z\,\ldots)\sqrt{-1}$$

több változónak ugyan azon függvénye leend. A' szerint mint a' függvények $\varphi(x\,y\,z\,\ldots)$ és $\psi(x\,y\,z\,\ldots)$ algebraicusok, exponentialisok, logarithmicusok, vagy tzigometricusok, és ha algebraicusok: rationalisok, vagy irrationalisok, egészek, vagy törtek 's a' t. lehetnek, úgy birhat a' képzetes függvény is ugyan azon tulajdonokkal.

Végtelen kicsinynek mondatik egy képzetes kifejezés, ha a' nullához közeledik (itt „közeledik" tulajdonképen annyit tesz mint „convergirt"). Ha

$$a + b\sqrt{-1}$$

végtelen kicsiny az máskép nem lehetséges mint ha a szinte mind b a' nullához közeledik, vagy mivel

$$a + b\sqrt{-1} = r.\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)$$

(itt φ ivet jelent, előbb pedig függvény-jel volt) ha r végtelen kis mennyiség. —

Ha egy képzetes függvényben

$$\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}$$

x nek végtelen kis változása, végtelen kis változást okoz a' képzetes függvény folytonosnak mondatik; gyakran a' függvény x-nek nem minden értékére nézve folytonos, hanem csak némelly, sokszor igen szük határok között fekvő, értékére nézve; ezen határokon kivül a' függvény illyen esetben nem-folytonosnak mondatik. Igen világos, hogy a' képzetes függvény folytonos nem lehet hacsak $\varphi(x)$ és $\psi(x)$, mellyek való függvények nem folytonosak, ebből pedig következik: *hogy ugyan azon tételek és szabályok, mellyek a' való függvények folytonosságáról állanak a' képzetes függvényekre nézve is érvényesek.*

Éppen olly világos az is, hogy a' képzetes függvény csak akkor fog elenyészni, ha mind $\varphi(x) = o$ mind $\psi(x) = o$, azonban megtörténhetik, *hogy egy képzetes függvény változójának bizonyos értékére nézve egyszerre való lesz.* p. o. legyen a' képzetes függvény F (x)

$$F(x) = \varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}$$

ha tesszük $\varphi(x) = \cos x$ és $\psi(x) = \sin x$ leend

$$F(x) = \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x$$

ha $x = n\pi$, F (x) való lészen és pedig:

$$F(x) = 1 +$$

hol a' fölső vagy alsó jegy érvényes a' mint n páros vagy páratlan.

Az 1) alatt elősorolt függvények, mind ollyan természetűek, hogy értékök végtelen sorok által kifejezhető. *Meg kell tehát vizsgálnunk a' végtelen sorokat azon fölvétel mellett, hogy tagjaik képzetesek.*

Ha

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \qquad 2)$$
$$b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots$$

két való sort képeznek, ekkor

$$a_0 + b_0 \sqrt{-1} + a_1 + b_1 \sqrt{-1} + a_2 + b_2 \quad -1 + \dots$$
$$+ a_n + b_n \sqrt{-1} + \dots =$$
$$= (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \dots a_n + \dots) + (b_0 + b_1 + b_2$$
$$+ \dots + b_n + \dots) \sqrt{-1} \qquad 3)$$

képzetes sornak fog neveztetni. Ha a' két való sor összetartó (convergent) a' belőlök alkotott képzetes sor is összetartó leend, ha pedig az egyik vagy a' másik való sor széttartó (divergent) a' képzetes is az leend.

A' legegyszerübb sorok közé tartozik:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \qquad 4)$$

legyen x képzetes, az az

$$x = z (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) \qquad 5)$$

hol z új változót jelent, leend 4)ből

$$1 + z (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) + z^2 (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)^2 \dots$$
$$+ z^n (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)^n \text{ t} \dots \qquad 6)$$

Ha 4)ből csak az első n tagot adjuk össze leend:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} \qquad 7)$$

ha x-nek értékét 5)ből helyettezzük: találjuk a' 6)-ban lévő n első tagnak összegét, az az:

$$1 + z (\cos \varphi \sqrt{-1} \sin \varphi) + z^2 (\cos 2 \varphi + \sqrt{-1} \sin 2 \varphi)$$
$$+ \dots + z^{n-1} (\cos (n-1) \varphi + \sqrt{-1} \sin (n-1) \varphi) =$$
$$= \frac{1}{1 - z (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)} - \frac{z^n (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)}{1 - z (\cos n\varphi + \sqrt{-1} \sin n\varphi)} \qquad 8)$$

e' sor összetartó leend, *ha összege egy mindég növekedő n-re nézve egy bizonyos meghatározott határhoz közeledik.* Ezen összszeg két tagból áll, az egyik n-től nem függ, a' másik növekedő n-nel végtelen növekedik vagy végtelen fogy, a' szerint mint r> vagy <1, következésképen a' sor 8) összetartó lesz, ha összege növekedő n-nél az első taghoz

$$\frac{1}{1-z\,(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\sin\varphi)}$$

közeledik, vagy is ha növekedő n-nel ezen kifejezés:

$$\frac{z^n\,(\cos n\,\varphi+\sqrt{-1}\sin n\,\varphi)}{1-z\,(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\sin\varphi)}$$

a' nullához közeledik, vagy is elenyészik. Képzetes mennyiség pedig nem enyészhetik el, ha csak modulusa nem elenyészik (8 §.) szükséges tehát hogy előbbi kifejezésünknek modulusa,

$$\frac{\pm\,z^{+n}}{\sqrt{1-2\,z\cos\varphi+z^2}}$$

növekedő n-nel a' nullához közelitsen, a' mi csak akkor fog történni ha $z<1$ tehát 8) összetartó sor ha $z<1$,

Ha tehát n végtelen nagy és $z<1$, leend:

$$1+z\,(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\sin\varphi)+z^2\,(\cos 2\,\varphi+\sqrt{-1}\,\sin 2\,\varphi)+\ldots$$
$$+\,z^{n-1}\,(\cos\varphi\,(n-1)+\sqrt{-1}\,\sin\varphi\,(n-1))=$$
$$=\frac{1}{1-z\,(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\sin\varphi)}=\frac{1-z\,(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)}{1-2\,z\,\cos\varphi+z^2} \qquad 10)$$

vagy a' valót elválasztván a' képzetestől:

$$1+\cos\varphi+z^2\cos 2\,\varphi+\ldots+z^{n-1}\cos(n-1)\,\varphi$$
$$+\sqrt{-1}\,(z\sin\varphi+z^2\sin 2\,\varphi+\ldots..)=$$
$$=\frac{1-z\cos\varphi}{1-2\,z\cos\varphi+z^2}+\frac{z\sin\varphi}{1-2\,z\cos\varphi+z^2}\sqrt{-1} \qquad 11)$$

és ebből ezon föltétel alatt hogy $+1\quad z>-1$:

$$1+z\cos\varphi+z^2\cos 2\,\varphi+\ldots\ldots=\frac{1-z\cos\varphi}{1-2\,z\cos\varphi+z^2} \qquad 12)$$

$$z\sin\varphi+z^2\sin 2\,\varphi+\ldots\ldots\ldots=\frac{z\sin\varphi}{1-2\,z\cos\varphi+z^2} \qquad 13)$$

tehát a' képzetes értéknek helyettezése 4)-ben két új sor összegéhez vezetett, t. i. 12) és 13). Mondottuk, hogy a' sor 10) csak akkor fog összetartani, ha $+1>z>-1$; z pedig 5) szerint x-nek modulusa, a' sor 4) maga is csak akkor összetartó ha $+1>x>-1$, tehát azon szabályt következtethetjük:

Ha egy való sor, változójának bizonyos értékeire nézve összetartó, és változója helyett képzetes mennyiséget teszünk az igy eredendő képzetes sor özszetartó leend, ha a' modulust ugyanazon határok közé zárjuk, mellyek között a' változónak lennie kell, hogy a' való sor összetartson, p. o. 4) összetartó ha $+1>x>-1$, ha x helyett akarjuk tenni:

$$x=z\,(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\sin\varphi)$$

szükséges hogy $+1 \quad z \quad -1$; azaz: z ugyan azon föltételnek megfeleljen, mellynek x megfelel.

Innen következik azon átalános tétel: *hogy ha egy képzetes sorban*

$$r_0 (\cos \varphi_0 + \sqrt{-1} \sin \varphi_0) + r_1 (\cos \varphi_1 + \sqrt{-1} \sin \varphi_1) + \dots$$
$$+ r_n (\cos \varphi_n + \sqrt{-1} \sin \varphi_n) + \dots \quad 14)$$

a' modulusok sora

$$r_0 + r_1 + r_2 + \dots + r_n + \dots \quad 15)$$

összetartó a' sor 14) maga is összetartó; de nem forditva. Mert ha 14 összetartó, nem szükségképen következik hogy 15) is összetartó legyen. Helyettezzünk p. o. 14) és 15)-ben

$$r_n = \frac{1}{n+1} \qquad \varphi_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

hol n természetesen csak állitó egész számokat jelent; leend 14)-ből

$$\sqrt{-1} - \frac{1}{n}\sqrt{-1} + \frac{1}{3}\sqrt{-1} - \frac{1}{4}\sqrt{-1} + \dots$$
$$+ (-1)^n \frac{1}{n} \sqrt{-1} \dots \quad 16)$$

hol $(-1)^n$ jelenti hogy az n-*dik* tag állitó vagy tagadó, ha n páros vagy páratlan, 15)-ből pedig leend:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad 17)$$

16) összetartó és összege

$$= \sqrt{-1} \log 2 \quad 18)$$

17) pedig széttartó.

I. Keressük ezen sornak összegét:

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \dots$$
$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots\dots n} x^n + \dots \quad 19)$$

azon esetben ha x képzetes az az:

$$x = z (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)$$

és tegyük föl hogy $+1 > z \quad -1$

helyettezve leend:

$$1 + mz (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) + \frac{m(m-1)}{2} z^2$$
$$(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)^2 + \dots \quad 20)$$

Ha ezen sornak összegét S-nek nevezzük, mindég találhatunk olly r és p-t mellyre nézve áll:

$$S = r^m (\cos mp + \sqrt{-1} \sin mp) \qquad 21)$$

mivel r és p nem ismeretes helyettezzünk 20)-ban

$$m = 1$$

leend:

$$1 + z (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) = r \cos p + \sqrt{-1} \sin p) \qquad 22)$$

és ebből

$$\left.\begin{aligned} r \cos p &= 1 + z \cos \varphi \\ r \sin p &= z \sin \varphi \end{aligned}\right\} \qquad 23)$$

második hatványra emelve 's összeadva:

$$r^2 = 1 + 2 z \cos \varphi + z^2 \qquad 24$$

$$r = \sqrt{1 + 2^2 z \cos \varphi + z^2}$$

23)-at osztva:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} p &= \frac{z \sin \varphi}{1 + z \cos \varphi} \\ p &= \operatorname{arc\,tg} \frac{z \sin \varphi}{1 + z \cos \varphi} \end{aligned}\right. \qquad 25)$$

Ha ezen értékeket 21)-ben helyettezzük találjuk 20)-nak keresett összegét:

$$S = (1 + 2 z \cos \varphi + z^2)^{\frac{m}{2}} (\cos p + \sqrt{-1} \sin p)^m \qquad 26)$$

hol p-t rövidség miatt megtartjuk.

Emlékezzünk most, hogy 8. §. 7) szerint mindég lehet;

$$a + b \sqrt{-1} = \varrho (\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha)$$

miből

$$a = \varrho \cos \alpha \text{ és } b = \varrho \sin \alpha$$

Ha tekintetbe vesszük hogy 26)-nak második része éppen $\varrho (\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha)$ alakú, 's hogy tehát jogunk van tenni:

$$\varrho = (1 + 2z \cos \varphi + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos \alpha = \cos p = \frac{1 + z \cos \varphi}{r} \qquad 27)$$

$$\sin \alpha = \sin p = \frac{z \sin \varphi}{r}$$

leend:

$$a = 1 + z \cos \varphi \text{ és } b = z \sin \varphi \qquad 28)$$

következésképen

$$S = [1 + z(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)]^m \qquad 29)$$

és visszahelyettezvén x-et

$$S = [1 + x]^m$$

az az *Newton formulája*

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3}x^3 \ldots \qquad 30)$$

akkor is helyes ha x képzetes értéket kap. De valamint 30) csak akkor összetartó ha $x < 1$ (számszerint) vagy ha: $+1 \quad x > -1$, x való mennyiség lévén: úgy 20) is, vagy 30) ha x képzetes értéket kap, ugyanazon föltétel alatt leend összetartó.

Ha $\varphi = \frac{\pi}{2}$ leend 25) szerint:

$$p = \text{arc tg } z, \quad z = \text{tg } p. \qquad 31)$$

mivel pedig $+1 > z > -1$ következik: hogy p-nek értéke $+\frac{\pi}{4}$ és $-\frac{\pi}{5}$ között marad, az az: $\frac{\pi}{4} > p > -\frac{\pi}{4}$; ha ezen értékeket helyettezzük

$$(1 + 2z\cos\varphi + z^2)^{\frac{m}{2}}$$

-be, mivel $\sqrt{1 + \text{tg } p^2} = \sec. p$ és $\cos\varphi = o$; leend:

$$(1 + 2z\cos\varphi + z^2)^{\frac{m}{2}} = \sec p^m = \frac{1}{\cos p^m} \qquad 32)$$

Ha 26)-ban S-nek értékét kiirjuk, és a' valórészeket a' valókkal, a' képzeteseket a' képzetesekkel egyenlősitjük, találunk:

$$\left.\begin{aligned}(1 + 2z\cos\varphi + z^2)^{\frac{m}{2}}\cos mp = 1 &+ mz\cos\varphi \\ &+ \frac{m(m-1)}{2}z^2\cos 2\varphi + \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}z^3\cos 3\varphi + \ldots\end{aligned}\right\} \qquad 33)$$

$$\begin{aligned}(1 + 2z\cos\varphi + z^2)^{\frac{m}{2}}\sin mp &= \frac{m}{1}z\sin\varphi \\ &+ \frac{m(m-1)}{1.\ 2}z^2\sin 2\varphi + \ldots\end{aligned} \qquad 34)$$

helyettezzük itt az értékeket 31) és 32)-ből, leend:

$$\cos mp = \cos p^m - \frac{m(m-1)}{1.\ 2}\cos p^{m-2}\sin p^2$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\cos p^{m-4}\sin p^4 - \ldots \quad 35)$$

$$\sin mp = m\cos p^{m-1}\sin p - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3.}\cos p^{m-3}\sin p^3 + \quad 36)$$

Ezen sorok már előfordultak 10. §. 19) és 20), és 11. §. 3) és 4) alatt. 10. §-ban leginkább azt vizsgáltuk: milly ertéke lehet m-nek 's találtuk hogy az egyenletek 19) és 20) (10 §.) helyesek bármit jelentsen m; 11. §-ban vizsgáltuk hogyan lehessen elkerülni 35) és 36) első részök sok értelmüségét midőn a' második rész csak egyértelmü, most pedig, fönebbi vizsgálódásunk által megtudtuk: millyen értékének kell p-nek lenni, bogy a' sorok 35) és 36) m-nek *minden* értékre nézve *összetartsanak*, az az használhatók legyenek, mert széttartó sorokat használni nem szabad. — E' szerint 35) és 36) összetartó leend, bármit jelentsen is m *csak való maradjon*, *ha* p *számszerint kisebb mint* $\frac{\pi}{4}$.

II. Legyen a' következő sorban:

$$1+\frac{z}{1}(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)+\frac{z^2}{1.\ 2}(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^2$$
$$+\frac{z^3}{1.\ 2.\ 3}(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^3+\ldots \quad 37)$$

z bármillyen értékü, és keressük ezen föltétel alatt összegét.

Tegyünk 25) és 26)-ban z helyett: αz és m helyett: $\frac{1}{\alpha}$, hol α végtelen kis mennyiséget jelent, találandunk: αz azon értékeire nézve mellyek — 1 és + 1 között vagynak, tehát

$$z = -\frac{1}{\alpha}\text{-tól egész } z = \frac{1}{\alpha}\text{-ig}: \quad 38)$$

$$1+z(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)+\frac{z^2}{1.\ 2}$$
$$(\cos 2\varphi+\sqrt{-1}\sin 2\varphi)(1-\alpha)$$
$$+\frac{z^3}{1.2.3}(\cos 3\varphi+\sqrt{-1}\sin 3\varphi)(1-\alpha)(1-2\alpha)+\ldots$$
$$39)$$
$$=(1+2\alpha z\cos\varphi+\alpha^2z^2)^{\frac{1}{2\alpha}}\left(\cos\frac{p}{\alpha}+\quad-1\sin\frac{p}{\alpha}\right)$$

ha itt föitesszük hogy α végtelen a' nullához közeledik az az elenyészik: ekkor 39)-nek első része átmegy 37)-be. A' második rész is határaihoz fog közeledni, de mivel ezen határokat még nem ismerjük, tehát csak jelentjük szokás szerint ezen szótaggal: lim. (limes=határ)

$$1 + z(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) + \frac{z^2}{1.2}$$

$$(\cos 2\varphi + \sqrt{-1}\sin 2\varphi) + \ldots\ldots$$

$$= \lim \left\{ (1 + 2\alpha z \cos\varphi + \alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}} \left(\cos\frac{p}{\alpha} + \sqrt{-1}\sin\frac{p}{\alpha}\right) \right\} \qquad 40)$$

föl kell tehát keresnünk azon határokat, mellyekhez közeledik

$$(1 + 2\alpha z \cos\varphi + \alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}} \text{ és } \frac{p}{\alpha}$$

ha α végtelen a' nullához közeledik.

Ha tesszük:

$$2\alpha z \cos\varphi + a^2 z^2 = \beta \qquad 41)$$

leend:

$$2a = \frac{\beta}{z\cos\varphi + \frac{\alpha z^2}{2}}$$

tehát

$$(1 + 2\alpha z \cos\varphi + \alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}} = (1+\beta)^{\frac{z\cos\varphi + \frac{\alpha z^2}{2}}{\beta}} \qquad 42)$$

$$\lim(1 + 2\alpha z \cos\varphi + \alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}}$$

$$= \left[\lim(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}\right]^{\lim\left(z\cos\varphi + \frac{\alpha z^2}{2}\right)} \qquad 43)$$

Tudva van hogy:

$$\lim(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} = e = 2.718281\ldots. \qquad 44)$$

$$\lim\left(z\cos\varphi + \frac{\alpha z^2}{2}\right) = z\cos\varphi$$

tehát

$$\lim(1 + 2\alpha z \cos\varphi + \alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}} = e^{z\cos\varphi} \qquad 45)$$

25)-ből következik hogy

$$\operatorname{tg} p = \frac{\alpha z \sin \varphi}{1 + \alpha z \cos \varphi}$$

$$\frac{\operatorname{tg} p}{\alpha} = \frac{z \sin \varphi}{1 + \alpha z \cos \varphi}$$

mind a' két részt szorozván $\frac{p}{\operatorname{tg} p}$-vel:

$$\frac{p}{\alpha} = \frac{p}{\operatorname{tg} p} \cdot \frac{z \sin \varphi}{1 + \alpha z \cos \varphi} =$$

$$= \frac{\operatorname{arctg} \frac{\alpha z \sin \varphi}{1 + \alpha z \cos \varphi} \cdot z \sin \varphi}{\frac{\alpha z \sin \varphi}{1 + \alpha z \cos \varphi} \cdot (1 + \alpha z \cos \varphi)} \qquad 46)$$

és ebből

$$\lim \frac{p}{\alpha} = z \sin \varphi \qquad 47)$$

helyettezve 45) és 47)-ből 40)-be, lészen:

$$1 + z(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) + \frac{z^2}{3.2}(\cos 2\varphi + \sqrt{-1} \sin 2\varphi) +$$

$$= \left\{\cos(z \sin \varphi) + \sqrt{-1} \sin(z \sin \varphi)\right\} e^{z \cos \varphi} \qquad 48)$$

hol z minden valómennyiséget jelenthet. Ebből közvetlen következik:

$$1 + z \cos \varphi + \frac{z^3}{1.2.} \cos 2\varphi + \frac{z^3}{1.2.3.} \cos 3\varphi + \ldots$$

$$= \cos(z \sin \varphi)\, e^{z \cos \varphi} \qquad 49)$$

$$z \sin \varphi + \frac{z^2}{1.2} \sin 2\varphi + \frac{z^3}{1.2.3} \sin 3\varphi + \ldots$$

$$= \sin(z \sin \varphi)\, e^{z \cos \varphi} \qquad 50)$$

ha $\varphi = \frac{\pi}{2}$

49) és 50) átmennek ezekbe:

$$1 - \frac{z^2}{1\,2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1\ldots.6} + \ldots\ldots = \cos z \qquad 51)$$

$$z - \frac{z^3}{1.\,2.\,3} + \frac{z^5}{1.\ldots.5} - \frac{z^7}{1.\ldots.7} + \ldots\ldots = \sin z \qquad 52)$$

III. Keressük ezen sornak összegét:

$$z\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi) - \frac{z^2}{2}\,(\cos 2\,\varphi + \sqrt{-1}\,\sin 2\,\varphi)$$

$$+ \frac{z^3}{3}(\cos 3\,\varphi + \sqrt{-1}\,\sin 3) -$$

$$- \frac{z^4}{4}\,(\cos 4\,\varphi + \sqrt{-1}\,\sin 4\,\varphi) + \ldots\ldots \qquad 53)$$

azon föltétel alatt hogy $+1 > z \quad -1$

Mivel átalánosan

$$(1 + 2\,z\cos\varphi + z^2)^{\frac{m}{2}} + e^{\frac{m}{2}\log\,(1\,+\,2\,z\,\cos\varphi\,+\,z^2)} \qquad 54)$$

hol e a' természetes logarithmok alapszáma és log ezen rendszernek jelleme; 26) szerint leend:

$$1 + m\,z\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi) + \frac{m\,(m-1)}{1.\,2.}$$

$$z^2\,(\cos 2\,\varphi + \sqrt{-1}\,\sin 2\,\varphi) + \ldots. \qquad 55)$$

$$= e^{\frac{m}{2}\log\,(1\,+\,2\,z\cos\varphi\,+\,z^2)}\,[\cos mp + \sqrt{-1}\,\sin mp]$$

hol p-nek ugyanazon értéke vagyon mint 25)-ben. Az 55) második részét ki lehet fejteni olly sorokba, mellyek m-nek növekedő hatványai szerint haladnak:

$$e^{\frac{m}{2}\log\,(1+2\,z\cos\varphi\,+\,z^2)} = 1 + \frac{m}{2}\log\,(1 + 2\,z\,\cos\varphi\, z^2)$$

$$+ \frac{[m\,\log\,(1 + 2\,z\,\cos\varphi + z^2)]^2}{1.\,2.\,4} + \ldots.. \qquad 56)$$

$$\cos mp = 1 - \frac{m^2\,p^2}{1.\,2} + \frac{m^4\,p^4}{1.\,2.\,3.\,4} - \frac{m^6\,p^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots. \qquad 57)$$

$$\text{Sin}\ mp = mp - \frac{m^3\,p^3}{2.\,3} + \frac{m^5\,p^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} - \ldots\ldots \qquad 58)$$

ha 58)-at $\sqrt{-1}$ szorozzuk és 57)-el összeadjuk egyszersmind m-nek hatványai szeriut rendezvén leend:

$$\cos mp + \sqrt{-1}\,\sin mp = 1 + mp\sqrt{-1} - \frac{m^2\,p^2}{1.\,2.} -$$

$$- \frac{m^3 p^3\sqrt{-1}}{1.\,2.\,3} + \frac{m^4\,p^4}{1.2.\,3.\,4} + \frac{m^5\,p^5\sqrt{-1}}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} - \ldots \qquad 59)$$

7. §. 3) szerint vagyon

$$e^{mp\sqrt{-1}} = \cos mp + \sqrt{-1} \sin mp \qquad 60)$$

tehát 55)-nek második része

$$= e^{mp\sqrt{-1}} \; e^{\frac{m}{2} \log (1 + 2 z \cos \varphi + z^2)}$$

$$= e^{mp\sqrt{-1} + \frac{m}{2} \log (1 + 2 z \cos \varphi + z^2)} \qquad 61)$$

és most ha kevesebbé szigorúak akarnánk lenni 61) második részét az exponentiálisok sora szerint lehetne kifejteni és 55) első részével egyenlősítni, de mivel 60)-nak szigoru megalapítását csak ezután adhatjuk, 61) kifejtésére pedig a' mondott sor szerint még nem vagyunk földjogosítva, más útra kell térnünk. — Világos hogy 55)nek második része, az 56) és 59) alatt lévő soroknak szorzata; két való sornak szorzatára különös formulánk van (mellynek állandósitása ide nem tartozhatik) a' 48. lapon mondottaknál fogva pedig minden műtétel, melly való sorokra alkalmazható, alkalmazható leend képzetes sorokra is, az ott emlitett föltétel alatt; következésképen a' való sorok szorzatának formuláját használhatjuk az 56) alatt lévő való, és az 59) alatt álló képzetes sornak szorzására is.

Az emlitett formula pedig, ha a' szorzandó sorok

$$1 + x + \frac{x^2}{1.\,2} + \frac{x^3}{1.\,2.\,3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots . \qquad 62)$$

és

$$1 + y + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.\,2.\,3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \ldots . \qquad 63)$$

e' következő

$$1 + (x + y) + \frac{(x+y)^2}{1.\,2} + \frac{(x+y)^3}{1.\,2.\,3} + \ldots . \qquad 64)$$

és mivel 62) és 63) x és y minden váló értékére nézve összetartók 64) is minden való, és a' 48. lapon mondottaknál fogva, minden képzetes értékre nézve összetartó. Hogy pedig 56) és 59) alatt levő soraink ugyanazon alakúak mint 62) vagy 63) kitetszik, ha tesszük:

$$x = \frac{m}{2} \log (1 + 2 z \cos \varphi + z^2)$$

és

$$y = mp\sqrt{-1}$$

Ha ezen értékeket helyettezzük leend:

$$1 + m\,z\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) + \frac{m(m-1)}{1.\,2}$$
$$z^2(\cos 2\varphi + \sqrt{-1}\sin 2\varphi) + \ldots$$
$$= 1 + m\left[\frac{1}{2}\log(1 + 2\,z\cos\varphi + z^2) + p\sqrt{-1}\right] + \quad 65)$$
$$+ \frac{m^2}{1.\,2}\left[\frac{1}{2}\log(1 + 2\,z\cos\varphi + z^2) + p\sqrt{-1}\right]^2 + \ldots$$

osszunk itt m-el minekutána mind a' két részről az egységet levontuk, és tegyük föl hogy a' maradékban m a' nullához végtelen közelítsen, az az elenyésszék; ezáltal 65) első részében jegyváltozást kapunk, a' második részben pedig csak az első tag marad meg; tehát 53)-nak keresett összege:

$$z(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) - \frac{z^2}{2}(\cos z\,\varphi + \sqrt{-1}\sin 2\,\varphi)$$
$$+ \frac{z^3}{3}(\cos 3\varphi + \sqrt{-1}\sin 3\varphi) = \frac{1}{2}\log(1 + 2\,z\cos\varphi + z^2)$$
$$+ p\sqrt{-1} \qquad 66)$$

Egyenlősitsük itt a' való részeket a' valókkal és a' képzeteseket a' képzetesekkel:

$$z\cos\varphi - \frac{z^2}{2}\cos 2\beta + \frac{z^3}{3}\cos 3\varphi - \frac{z^4}{4}\cos 4\varphi + \ldots$$
$$= \frac{1}{2}\log(1 + 2\,z\cos\varphi + z^2) \qquad 67)$$

$$z\sin\varphi - \frac{z^2}{2}\sin 2\varphi + \frac{z^3}{3}\sin 3\varphi - \frac{z^4}{4}\sin 4\varphi + \ldots$$
$$= p = \operatorname{arc\,tg}\frac{z\sin\varphi}{1 + z\cos\varphi} \qquad 68)$$

Ha $\varphi = \frac{\pi}{2}$ leend:

$$z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots = \operatorname{arc\,tg} z \qquad 69)$$

mivel ezen sor, melly Leibnitz sorának neveztetik, z-nek határértékére nézve is az az: ha $z=1$ öszszetartó, tehát π-nek megközelitő kiszámolására szolgálhatna; ha igen csekély összetartása a' számolást hosszasnak nem tenné.

14. §.

Térjünk vissza 13. §. 1) alatt adott jeleléseinkhez

$$A^x, \sin x$$
$$\text{Sin } x, \text{ arc } \sin x \qquad 1)$$
$$\text{Cos } x, \text{ arc } \cos x$$

mellyek úgy alkotvák, hogy *minden párban az egyik azon mütétel által találtatik meg, mellynek képviselöje a' másik;* p. o. ha A azon logarithmicus rendszernek alapszáma, mellynek jelleme log és

$$A^x = B \qquad 2)$$
$$\log x^1 = \alpha \qquad 3)$$

2)-ből keresvén x-et, *logarithmusokat* veszünk:

$$x = \log B \qquad 4)$$

3)-ból keresvén x'-et az alapszámot A *α hatványra* emeljük

$$x' = A^\alpha \qquad 5)$$

vagy:

$$\text{Sin } x = a \qquad 6)$$
$$\text{arc } \sin x' = b \qquad 7)$$

b)-ből x-et keresvén veszem *arc sin*:

$$x = \text{arc } \sin a \qquad 8)$$

7)-ből x-t keresvén találok *sin*:

$$x' = \sin b \qquad 9)$$

Ezen jeleléseknek analyticai értelmét keressük azon különös esetben ha változójuk képzetes.

A' függvényeket A^x, sin x, cos x, ha x való mindég tudjuk x-nek hatványai szerint haladó sorban kifejteni, t. i.

$$A^x = 1 + x \log A + \frac{(x \log A)^2}{1.\,2} + \ldots. \qquad 10)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.\,3} + \frac{x^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} - \ldots. \qquad 11)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.\,2} + \frac{x^4}{1.2.3.\,4} - \frac{x^6}{1.\,2.\,3.4.5.6} + \ldots. \qquad 12)$$

Ezen sorok 13. §. szerint használhatók ugyan azon esetben ha x képzetes, de mi e' három függvény értékét képzetes x esetében is *nem végetlen sorokban hanem teljes, véges kifejezésekben akarjuk tudni*

Ha 10)-ben A=e, hol e a' természetes logarithmok alapszáma; leend:

$$e^x = 2 + x + \frac{x^2}{1.\,2} + \frac{x^3}{2.\,3} + \ldots. \qquad 13)$$

helyettezzünk itt x helyett egymásután x log A, $x\sqrt{-1}$ és $-x\sqrt{-1}$:

$$e^{x \log A} = 1 + x \log A + \frac{(x \log A)^2}{1.\,2.} \qquad 14)$$

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.\,2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.\,2.\,3} + \frac{x^4}{1.\,2.\,3.\,4} + \qquad 15)$$

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 - x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.\,2} + \frac{x^3\sqrt{-1}}{2.\,3} + \ldots . \qquad 16)$$

mivel a' sor 14) egészen egyenlő 10)-el, tehát

$$e^{x \log A} = A^x \qquad 16)'$$

15) pedig egyenlő lévén második rászében a' 13. §. 59) alatt lévő sorral; leend:

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x \qquad 17)$$

ha 13. §. 50)ct szorozzuk $\sqrt{-1}$-el és 57)-ből levonjuk nyerendünk egy 16)-hoz egészen megegyező sort, tehát:

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1} \sin x \qquad 18)$$

Minekutána e' két nevezetes formulát szigorúan megalapítottuk, könyen megmutathatjuk *hogy a' különös tulajdonság:*

$$e^x \, e^y \, e^{x+y} \qquad 19)$$

akkor is áll ha x és y képzetesek. Az előbbiek szerint

$$\begin{aligned} e^{x\sqrt{-1}} \, e^{y\sqrt{-1}} &= (\cos x + \sqrt{-1} \sin x)(\cos y + \sqrt{-1} \sin y) \\ &= \cos (x + y) + \sqrt{-1} \sin (x + y) \\ &= e^{(x + y)\sqrt{-1}} \qquad 20) \end{aligned}$$

Nem különben áll

$$(e^x)^m = e^{m x} \qquad 21)$$

akkor is ha x képzetes, mert

$$\begin{aligned} (e^{x\sqrt{-1}})^m = e^{(x\sqrt{-1})m} &= (\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^m \\ &= (\cos m x + \sqrt{-1} \sin m x \\ &= e^{m x\sqrt{-1}} \qquad 22) \end{aligned}$$

Mivel továbbá:

$$a^{x\sqrt{-1}} = (e^{\log a})^{x\sqrt{-1}} \, e^{x\sqrt{-1} \log a} \qquad 23)$$

leend:

$$a^{x\sqrt{-1}} = \cos (x \log a) + \sqrt{-1} \sin (x \log a) \qquad 24)$$

és hasonló módon:

$$a^{x\sqrt{-1}} = \cos(x \log a) - \sqrt{-1} \sin(x \log a) \qquad 25)$$

és e' két egyenlet összeadásából és kivonásából:

$$\cos(x \log a) = \frac{a^{x\sqrt{-1}} + a^{-x\sqrt{-1}}}{2} \qquad 26)$$

$$\sin(x \log a) = \frac{a^{x\sqrt{-1}} - a^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \qquad 27)$$

miből egészen az előbbi mód szerint, meglehet mutatni *hogy ha x és y képzetesek is, mindég áll átalánosan*:

$$a^x\, a^y = a^{x+y} \qquad 28)$$

és

$$(a^x)^y = a^{xy} \qquad 29)$$

Ha 16)' és 17)-ben x helyett teszünk $a + b\sqrt{-1}$, találunk:

$$A^{a+b\sqrt{-1}} = e^{(a+b\sqrt{-1})\log A}$$

$$= e^{a \log A}\, e^{b \log A \sqrt{-1}}$$

$$= A^a [\cos(b \log A) + \sqrt{-1} \sin(b \log A)] \qquad 30)$$

melly egyenlet az exponentialisok értelmét adja azon esetben, ha a' kitevö képzetes.

17) és 18)-ból könnyen találunk

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

ha $x = a + b\sqrt{-1}$ leend:

$$\cos(a + b\sqrt{-1}) = \frac{e^{a\sqrt{-1}}\, e^{-b} + e^{-a\sqrt{-1}}\, e^{b}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{e^{-b} (\cos a + \sqrt{-1} \sin a) + e^{b} (\cos a - \sqrt{-1} \sin a)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(e^{b} + e^{-b}) \cos a + (e^{-b} - e^{b}) \sin a \sqrt{-1}\right\}$$

$$= \cos a \frac{e^{b} + e^{-b}}{2} \sqrt{-1} \sin a \frac{e^{b} - e^{-b}}{2} \qquad 31)$$

mivel pedig:

$$\cos(b\sqrt{-1} = \frac{e^{b} + e^{-b}}{2} \qquad 32)$$

$$\sin(b\sqrt{-1}) = \frac{e^{-b} - e^{b} +}{2\sqrt{-1}} = \frac{e^{b} - e^{-b}}{2}\sqrt{-1} \qquad 33)$$

tehát a' keresett:

$$\cos(a + b\sqrt{-1}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a + b\sqrt{-1}\right) \qquad 34)$$

és hasonló módon:

$$\sin(a + b\sqrt{-1}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\sqrt{-1}\right) \qquad 35)$$

a' mit így is lehetne találni t. i.

$$\sin(a + b\sqrt{-1} = \frac{e^{(a+b\sqrt{-1})\sqrt{-1}} - e^{-(a+b\sqrt{-1})\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{e^{a\sqrt{-1} - b} - e^{-a\sqrt{-1} + b}}{2\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{e^{b} + e^{-b}}{2} \cdot \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-ai}}{2\sqrt{-1}}$$

$$+ \frac{e^{b} - e^{-b}}{2} \cdot \frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2}\sqrt{-1}$$

miről egyszerü szorzás által meglehet győződni, következésképpen:

$$\sin(a + b\sqrt{-1}) = \sin a \,\frac{e^{b} + e^{-b}}{2}$$

$$+ \sqrt{-1}\cos a \,\frac{e^{b} - e^{-b}}{2} \qquad 36)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\sqrt{-1}\right) \qquad 37)$$

31) és 36)-ból már következik hogy az egyenletek

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \qquad 38)$$

akkor is helyesek ha x és y képzetesek; mert ha 31) és 36)-ba helyettezzük 32) és 33)-ból az értékeket találunk:

$$\cos(a + b\sqrt{-1}) = \cos a \cos(b\sqrt{-1}) - \sin a \sin(b\sqrt{-1})$$
$$\sin(a + b\sqrt{-1}) = \sin a \cos(b\sqrt{-1}) + \sin(b\sqrt{-1}) \cos a. \quad 39)$$

és mivel e' két egyenlet minden többi goniometricus függvények forrása: következik hogy valamennyi goniometricus formuláink képzetes változókra nézve is érvényesek, ha bennök a' 32) és 33)-ban adott értékeket használjuk.

Jelelésinknek A^x, sin x, cos x, ha x képzetes, analyticai értelmöket e' három egyenlet fejezi ki:

$$\left.\begin{array}{l} A^x = A^a \{\cos(b \log A) + \sqrt{-1} \sin(b \log A)\} \\ \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\sqrt{-1}\right) \\ \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a + b\sqrt{-1}\right) \end{array}\right\} \text{Hol } x = a + b\sqrt{-1} \quad 40)$$

Vizsgáljuk már most analyticai értelmét, képzetes változó esetében, e' három kifejezésnek:

$$\log x, \text{ arc } \sin x, \text{ és arc } \cos x,$$

Legyen $x = a + b\sqrt{-1} = r(\cos\varphi + \sqrt{-1} \sin\varphi)$ hol a, b, r, φ való mennyiségek, továbbá A egy logarithmicus rendszernek alapszáma, és $u + v\sqrt{-1}$ úgy választva hogy

$$A^{u+v\sqrt{-1}} = a + b\sqrt{-1} = x \quad 41)$$

ekkor log x leend az mit képzetes logarithmusnak mondunk; mivel pedig látni fogjuk, hogy minden akár való akár képzetes mennyiségnek azon esetben is ha b=o több képzetes logarithmusa vagyon tehát valahányszor ezen képzetes logarithmusok egyes valamellyikét akarjuk jelelni, az előbbiekben már használt jeleléssel élünk

$$\log((x))$$

hol ha különösen mást nem mondunk mindég a' természetes logarithmusok rendszere értetik.

Mindenekelőtt vizsgáljuk a' kifejezéseket:

$$\log((1)), \log((-1)) \text{ és } \log((a + b\sqrt{-1}))$$

Tegyük hogy log ((1)) egyik értéke legyen: $u + v\sqrt{-1}$, 41) szerint leend:

$$e^{u+v\sqrt{-1}} = 1 \quad 42)$$

17) szerint pedig

$$= e^u(\cos v + \sqrt{-1} \sin v) \quad 43)$$

és ebből mivel 43) második része csak egy módon szétszedhető tényezőire:

$$e^1 = 1 \text{ és } \cos v + \sqrt{-1} \sin v = 1$$

az az:

$$u = 0 \quad v = 0 \pm 2\, k\, \pi$$

hol k egész, állító, vagy tagadó szám lehet; tehát;

$$u + v\sqrt{-1} = \pm 2\, k\, \pi \sqrt{-1} \qquad 44)$$

következésképen:

$$\log ((1)) = \pm 2\, k\, \pi \sqrt{-1} \qquad 45)$$

mivel k a' nullától kezeve $\pm$ ∞-ig minden egész számot jelenthet világos hogy log ((1))-nek *végtelen sok képzetes értéke vagyon, de való csak egy*, t. i. ha k=0, tehát:

$$\log 1 = 0 \qquad 46)$$

Hasonló módon találjuk log ((—1)); ha $u + v\sqrt{-1}$ az egyik értéke log ((—1))-nek, leend:

$$e^{u + v\sqrt{-1}} = -1 = e^u (\cos v + \sqrt{-1} \sin v)$$

a' miből

$$e^u = 1 \quad \cos v + \sqrt{-1} \sin v = -1$$

az az:

$$u = 0 \quad v = \pm (2\, k + 1)\, \pi$$

tehát:

$$\log ((-1)) = \pm (2\, k + 1)\, \pi \sqrt{-1} \qquad 47)$$

és látjuk, hogy log ((—1))-nek is végtelen sok értéke vagyon, de közöttök egy sem való.

Az eddigiek segitségével fölkereshetjük:

$$\log ((a + b\sqrt{-1}))$$

Legyen ennek egyik értéke $u + v\sqrt{-1}$, leend:

$$e^{u + v\sqrt{-1}} = a + b\sqrt{-1} = r (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) \qquad 48)$$

$$= e^u (\cos v + \sqrt{-1} \sin v)$$

ebből:

$$r (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) = e^u (\cos v + \sqrt{-1} \sin v)$$

tehát:

$$r = e^u, \text{ és } \cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi = \cos v + \sqrt{-1} \sin v$$

az az:

$$u = \log r = \log (a^2 + b^2)$$

$$\cos\varphi = \cos v$$
$$\sin\varphi = \sin v$$

tehát:

$$v = \varphi \pm 2k\pi$$

hol k előbbi jelentését megtartja, következésképpen mivel

$$u + v\sqrt{-1} = \log r + (\varphi \pm 2k\pi)\sqrt{-1}, \qquad 49)$$

$$\log(a + b\sqrt{-1}) = \log r + \varphi\sqrt{-1} + 2k\pi\sqrt{-1}$$
$$= \log r + \varphi\sqrt{-1} + \log((1)) \qquad 50)$$

itt φ azon ív, mellynek 48) szerint cosinusa $= \frac{a}{r}$, az az:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} \text{ és}$$

$$\sin = \frac{b}{r}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$$

φ tehát más leend ha a állító, és más ha a tagadó. Ha átalános formulánkból 50) másokat, e' két különös esetre illőket akarunk kifejteni, csak tekintetbe kell vennünk hogy: ha

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a};\ \varphi = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{b}{a} \qquad 51)$$

leend:

$$\operatorname{tg}(\varphi + \pi) = \frac{b}{-a};\ \varphi + \pi = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{b}{-a}. \qquad 52)$$

ha tehát a tagadó az az $a < 0$ 50)-ből lesz:

$$\log((a + b\sqrt{-1})) = \log r + \varphi\sqrt{-1} + \pi\sqrt{-1} + \log((1)) \qquad 53)$$

a és b tetszés szerint választható levén, tegyünk:

$$a = -1 \text{ és } b = 0 \qquad 54)$$

miből

$$r = 1 \text{ és } \varphi = 0$$

találunk 53) szerint:

$$\log((-1)) = \pi\sqrt{-1} + \log((1)) \qquad 55)$$

helyettezzük ezen értéket 53)-ba egyszersmind 50)-be helyettezvén r és φ értékét leend:

ha $a > 0$

$$\log((a + b\sqrt{-1})) = \frac{1}{2}(\log a^2 + b^2)$$
$$+ \left(\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{b}{a}\right)\sqrt{-1} + \log((1)) \qquad 56)$$

ha a<o

$$\log\left((a+b\sqrt{-1})\right)=\frac{1}{2}\log(a^2+b^2)$$
$$+\left(\text{arc tg}\,\frac{b}{a}\right)\sqrt{-1}+\log\left((-1)\right) \qquad 57)$$

E' két formula teljesen kielégitö mert nem csak minden képzetes de ha tesszük b=o *minden valómennyiségnek is, való és képzetes logarithmusait adják.*

Ha 56)-ban log ((1))-nek egyetlen való értékét 46)-ból helyettezzük, a' formula elveszti átalánosságát, és nem szabad többé kettős zárjelt irni, hanem:

$$\log(a+b\sqrt{-1})=\frac{1}{2}\log(a^2+b^2)+\left(\text{arc tg}\,\frac{b}{a}\right)\sqrt{-1} \qquad 58)$$

ha ebben b helyett —b irunk, leend:

$$\log(a-b\sqrt{-1})=\frac{1}{2}\log(a^2+b^2)-\left(\text{arc tg}\,\frac{b}{a}\right)\sqrt{-1} \qquad 59)$$

ha ezt és 58) összeadjuk:

$$\log(a+b\sqrt{-1})+\log(a-b\sqrt{-1})=\log(a^2+b^2) \qquad 60)$$

és ebből nem nehéz a' *logarithmusok különös tulajdonságát*

$$\log x+\log y=\log x\,y \qquad 61)$$

képzetes mennyiségekre nézve is állandósitni.

Legyen $a+b\sqrt{-1}=\alpha$, és $a-b\sqrt{-1}=\beta$, leend:

$$a=\frac{\alpha+\beta}{2}\quad b=\frac{\alpha-\beta}{2\sqrt{-1}}$$
$$a^2+b^2=\alpha\beta;$$

tehát:

$$\log(a+b\sqrt{-1})+\log(a-b\sqrt{-1})$$
$$=\log\left[(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})\right] \qquad 62)$$

éppen úgy mint való mennyiségeknél. És ezt bár hány egyenlö tényezöre ki lehet terjeszteni, az az, képzeteseknél is áll:

$$\log(x^m)=m\log x$$

Nem különben áll:

$$\log x-\log y=\log\frac{x}{y} \qquad 63)$$

Mert ha tesszük

$$\alpha\beta=\delta,$$
$$\beta=\frac{\delta}{\alpha}$$

63) szerint leend:

$$\log\alpha + \log\left(\frac{\delta}{\alpha}\right) = \log\delta$$

és ebből

$$\log\delta - \log\alpha = \frac{\delta}{\alpha} \qquad 64)$$

mint valóknál.

Ha $(a + b\sqrt{-1})$-nek, nem természetes, hanem bármilylyen alapszámra B vonatkozó logarithmusát keressük, és a' jellemzés log a' természetes, és *Log* a' mesterséges logarithmusokra vonatkozik; végre ha tesszük hogy a' keresett logarithmus $u + v\sqrt{-1}$, az az:

$$\mathrm{Log}\,((a + b\sqrt{-1})) = u + v\sqrt{-1}$$

leend:

$$a + b\sqrt{-1} = B^{u + v\sqrt{-1}}$$

$$B^{u + v\sqrt{-1}} = e^{(u + v\sqrt{-1})\log B}$$

$$\log\,((a + b\sqrt{-1})) = (u + v\sqrt{-1})\log^B,$$

tehát:

$$u + v\sqrt{-1} = \frac{\log\,((a + b\sqrt{-1}))}{\log B}$$

$$\mathrm{Log}\,((a + b\sqrt{-1})) = \frac{\log\,((\,a + b\sqrt{-1}))}{\log B} \qquad 65)$$

éppen úgy mint való mennyiségeknél. — Azonban 62) 64) és 65)-nek átalánosságáról még szólandunk.

Mivel, a' mint láttuk *képzetes iveknek trigonometricus függvényei mindég* $A + B\sqrt{-1}$ *alakúak az az képzetesek*, viszont kérdezhetjük: *milly ívek felelnek meg képzetes trigonometricus függvényeknek*?

Legyen $a + b\sqrt{-1})$ egy képzetes ívnek $u + v\sqrt{-1}$ sinusa az az:

$$\mathrm{arc\,sin}\,(a + b\sqrt{-1}) = u + v\sqrt{-1} \qquad 66)$$

$$a + b\sqrt{-1} = \sin\,(u + v\sqrt{-1})$$

vag 36) szerint

$$a + b\sqrt{-1} = \frac{e^v + e^{-v}}{2}\sin u + \sqrt{-1}\,\frac{e_v - e^{-v}}{2}\cos u$$

a' valót a' valóval a' képzetest a' képzetessel egyenlősitvén

$$\frac{a}{\sin u} = \frac{e^v + e^{-v}}{2}; \quad \frac{b}{\cos u} = \frac{e_v - e^{-v}}{2}$$

és ebből összeadás, és kivonás által:

$$e^v = \frac{a}{\sin u} + \frac{b}{\cos u} \tag{67}$$

$$e^{-v} = \frac{a}{\sin u} - \frac{b}{\cos u} \tag{68}$$

e' két egyenletet szorozván:

$$1 = \frac{a^2}{\sin u^2} - \frac{b^2}{\cos u^2}$$

vagy:

$$\sin u^2 \cos u^2 = a^2 \cos u^2 - b^2 \sin u^2 \tag{69}$$

hogy ebből u-t találjuk, helyettezzünk: $1 - \sin u^2 = \cos u^2$

$$\sin u^4 - (1 + a^2 + b^2) \sin u^2 = - a^2$$

és a' második fokú egyenletek szabálya szerint:

$$\sin u^2 = \frac{1 + a^2 + b^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + a^2 + b^2)^2 - 4 a^2} \tag{70}$$

a' kettős jegynél fogva két értéket kapunk, de érvényes csak az egyik lehet, tehát meg kell határoznunk, a' két jegy közől mellyik legyen választandó. Erre pedig igen jól szolgál azon körülmény hogy $\cos u^2$ szükségképpen állitó. Keressük tehát 69)-ből $\cos u^2$. Helyettezzünk ezen czélra 69)-be $1 - \cos u^2$ e' helyett: $\sin u^2$

$$\cos u^4 - (1 - a^2 + b^2) \cos u^2 = b^2$$

tehát:

$$\cos u^2 = \frac{1 - a^2 - b^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 - a^2 - b^2)^2 + 4 b^2}$$

mivel $\cos u^2 > 0$ csak a' felső jelt lehet használni, tehát:

$$\cos u^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - a^2 - b^2 + \sqrt{(1 - a^2 - b^2)^2 + 4 b^2} \right\}$$

ebből keresvén $\sin u^2$ mivel $\sin u^2 = 1 - \cos u^2$

$$\sin u^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + a^2 + b^2 - \sqrt{(1 - a^2 - b^2)^2 + 4 b^2} \right\}$$

mivel pedig:

$$(1 - a^2 - b^2)^2 + 4 b^2 = (1 + a^2 + b^2)^2 - 4 a^2$$

leend:

$$\sin u^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + a^2 + b^2 - \sqrt{(1 + a^2 + b^2)^2 - 4 a^2} \right\} \tag{71}$$

az az 70)-ben ezen esetben az alsó jegy az érvényes. Legyen rövidség okáért:

$$A = \sin u$$
$$B = \cos u$$

az az:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + a^2 + b^2 - \sqrt{(1+a^2+b^2)^2 - 4a^2}}$$
$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - a^2 - b^2 + \sqrt{(1-a^2-b^2)^2 + 4b^2}} \qquad 72)$$

mivel A és B ismeretes mennyiségek, u is ismeretes,

$$u = \text{arc} \sin A + 2k\pi$$

hol k minden egész állitó számot jelenthet.

67) és 68)-ból találtatik v;

$$v = \log\left(\frac{a}{\sin u} + \frac{b}{\cos u}\right) = \log\left(\frac{a}{A} + \frac{b}{B}\right)$$

következésképpen:

$$\text{Arc} \sin ((a + b\sqrt{-1})) = 2k\pi + \text{arc} \sin A$$
$$+ \sqrt{-1} \log\left(\frac{a}{A} + \frac{b}{B}\right) \qquad 73)$$

a' legegyszerübb eset ha $k = 0$, melly egyszersmind minden $\sin((a + b\sqrt{-1}))$-hoz tartozó ívek között a' legkisebb, ekkor a' kettős zárjel többé nem használható:

$$\text{arc} \sin (a + b\sqrt{-1}) = \text{arc} \sin A + \sqrt{-1} \log\left(\frac{a}{A} + \frac{b}{B}\right) \qquad 74)$$

Ha tekintetbe vesszük hogy $2k\pi$ olly ívet jelent, mellynek cosin $= 1$ leend:

$$\text{arc} \sin ((a + b\sqrt{-1})) = \text{arc} \sin (a + b\sqrt{-1}) + \text{arc} \cos ((1))$$
$$= \text{arc} \sin (a + b\sqrt{-1}) + \text{arc} \sin ((0)) \qquad 75)$$

Vizsgáljuk most e' kifejezést

$$\text{arc} \cos ((a + b\sqrt{-1})) \qquad 76)$$

Legyen ennek egy értéke $u + v\sqrt{-1}$, leend:

$$\text{arc} \cos ((a + b\sqrt{-1})) = u + v\sqrt{-1} \qquad 77)$$

$$a + b\sqrt{-1} = \cos (u + v\sqrt{-1})$$
$$= \frac{e^v + e^{-v}}{2} \cos u - \sqrt{-1} \sin u \frac{e^v - e^{-v}}{2} \qquad 78)$$

és ebből:

$$\frac{e^{v} + e^{-v}}{2} = \frac{a}{\cos u}\ ; \quad \frac{e^{v} - e^{-v}}{2} = -\frac{b}{\sin u}$$

$$e_{v} = \frac{a}{\cos u} - \frac{b}{\sin u}\ ; \quad e^{-v} = \frac{a}{\cos u} + \frac{b}{\sin u} \qquad 79)$$

és szorzás által:

$$1 = \frac{a^2}{\cos u^2} - \frac{b^2}{\sin u^2}$$

az az:

$$\sin u^4 - (1 - a^2 - b^2) \sin u^2 = b^2$$

ebből mivel $\sin u^2$ szükségképpen állitó:

$$\sin u^2 = \frac{1 - a^2 - b^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(1 - a^4 - b^2) + 4\,b^2}$$

és mivel:

$$(1 - a^2 - b^2)^2 + 4\,b^2 = (1 + a^2 + b^2)^2 - 4\,a^2$$

$$\cos u^2 = \frac{1 + a^2 + b^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(1 + a^2 + b^2)^2 - 4a^2}$$

az az:

$$\cos u = A$$

$$\sin u = B$$

hol A, és B ugyanazt jelentik mit fölebb. — Tehát:

$$u = \text{arc} \cos A \pm 2\,k\,\pi$$

és 79) szerint

$$v = \log\left(\frac{a}{\cos u} - \frac{b}{\sin u}\right) = \log\left(\frac{a}{A} - \frac{b}{B}\right) \qquad 80)$$

következésképpen 77) után:

$$\text{arc} \cos\,((a + b\sqrt{-1})) = \pm\,2\,k\,\pi + \text{arc} \cos A$$

$$+ \sqrt{-1}\,\log\left(\frac{a}{A} - \frac{b}{B}\right)$$

ha $2\,k\,\pi$ kihagyatik, a' sok arc cos $((a \quad b\sqrt{-1}))$-hez tartozó ívek közöl a' legkisebb jeleltetik, tehát

$$\text{arc} \cos\,(a + b\sqrt{-1}) = \text{arc} \cos A + \sqrt{-1}\,\log\left(\frac{a}{A} - \frac{b}{B}\right) \qquad 81)$$

Hogy a' veló mennyiségeknél álló egyenletet

$$\text{arc} \sin x + \text{arc} \cos x = \frac{\pi}{2} \qquad 82)$$

képzetesekre nézve is állandósithassuk, szükséges hogy a' kifejezéseket A, B, $\frac{a}{A}$ és $\frac{b}{B}$ legegyszerübb alakra hozzuk, hol két esetet megkülönböztetünk t. i. $a<1$ és $a>1$.

Legyen ezen czélra $b = 0$ leend 72)-ből

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + a^2 - \sqrt{(1 - a^2)^2}}$$

ha itt $a<1$ szükségképpen

$$\sqrt{(1 - a^2)^2} = 1 - a^2$$

és ekkor 72)

$$A = a ; B = \sqrt{1 - a^2}$$

ha pedig a 1, szükségképpen:

$$\sqrt{(1 - a^2)^2} = \sqrt{(a^2 - 1)^2} = a^2 - 1$$

mert másképpen A képzetes leendne mi nem lehet mert a' való szögnek u függvénye, — ekkor

$$A = 1 ; B = 0$$

első esetben tehát, mivel $b = 0$, leend:

$$\frac{a}{A} = 1 ; \frac{b}{B} = 0$$

második esetben:

$$\frac{a}{A} = a ; \frac{b}{B} = \frac{0}{0}$$

mivel $\frac{0}{0}$ különbféle a' föladás természetéből folyó értékekkel birhat, meg kell határoznunk mellyik legyen ezen érték a' jelen esetben.

Tudva van hogy olly törtnek, melly $\frac{0}{0}$ alak alatt jelenik meg igazi értékét megtudjuk: ha a' számlálónak első, a' nullával nem egyenlő differentialis quotiensét elosztjuk a' nevezőnek első a' nullától különböző differentialis quotiensével. Ezen átalános szabályt itt is lehetne használni; *rövidebb* azonban e' következő mód:

$$\frac{b^2}{B^2} = \frac{2\,b^2}{\sqrt{(1 - a^2 - b^2)^2 + 4\,b^2} + 1 - a^2 - b^2}$$

és a' nevezőt rationalissá csinálván és tekintetbe vévén, hogy két mennyiség összegének és különbségének szorzata mindég egyenlő a' két mennyiség négyszögeinek különbségével, az az:

$$(p + q)(p - q) = p^2 - q^2$$

leend:

$$\frac{b^2}{B^2}=\frac{\sqrt{(1-a^2-b^2)^2+4b^2}-(1-a^2-b^2)}{2}$$

tehát ha $b = 0$ és $a>1$

$$\frac{b^3}{B^2}=\frac{a^2-1-(1-a^2)}{2}=a^2-1$$

$$\frac{b}{B}=\sqrt{a^2-1}$$

következésképpen:

$$\left.\begin{array}{l} A = a \\ \frac{a}{A} = 1 \\ \frac{b}{B} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{ha } b = 0 \\ a<1 \end{array} \qquad 83)$$

$$\left.\begin{array}{l} A = 1 \\ \frac{a}{A} = a \\ \frac{b}{B} = \sqrt{a^2=1} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{ha } b = 0 \\ a>1 \end{array} \qquad 84)$$

és ezen utóbbi esetben 74)-ből következik

$$\text{arc sin } a = \text{arc sin } (1) + \sqrt{-1} \log \left(a + \sqrt{a^2-1}\right)$$

vagyis:

$$\text{arc sin } a = \frac{\pi}{2} + \sqrt{-1} \log \left(a + \sqrt{a^2-1}\right) \qquad 85)$$

miből látjuk, hogy az analysis ha képtelen kérdést teszünk mindég hasonló feleletet ád; mivel föltettük hogy $a>1$, illyen sinus pedig nem létez, tehát szükségképpen képzetes ivet adott az utolsó egyenlet. — Ugyanazon föltételek alatt 81)-ből:

$$\text{arc cos } a = \quad -1 \log \left(a - \sqrt{a^2-1}\right) \qquad 86)$$

85) és 86) összeadásából:

$$\text{arc sin } a + \text{arc cos } a = \frac{\pi}{2} \qquad 87)$$

tehát 82) akkor is áll ha $x>1$.

Ha 72)-ben teszszük $a = 0$, leend $A = 0$; $B = 1$, tehát

$$\frac{a}{A}=\frac{0}{0}$$

ennek meghatározására vagyon:

$$\frac{a^2}{A^2}=\frac{2\,a^2}{1+a^2+b^2-\sqrt{(1+a^2+b^2)^2-4\,a^2}}$$

a' nevezőt rationalissá csinálván

$$=\frac{1}{2}(1+a^2+b^2+\sqrt{(1+a^2+b^2)^2-4\,a^2})$$

tehát, mivel: $a=0$

$$\frac{a^2}{A^2}=1+b^2$$

$$\frac{a}{A}=\sqrt{1+b^2}$$

következésképpen 74) és 81) szerint:

$$\left.\begin{aligned} \text{arc sin}\,(b\sqrt{-1}) &= \sqrt{-1}\log(b+\sqrt{1+b^2}) \\ \text{arc cos}\,(b\sqrt{-1}) &= \frac{\pi}{2}+\sqrt{-1}\log(\sqrt{1+b^2}-b) \end{aligned}\right\} \quad 88)$$

e' két egyenlet összeadásából:

$$\text{arc sin}\,(b\sqrt{-1})+\text{arc cos}\,(b\sqrt{-1})=\frac{\pi}{2} \qquad 89)$$

mert:

$$\begin{aligned} &\sqrt{-1}\left\{\log(b+\sqrt{1+b^2})+\log(\sqrt{1+b^2})\right\} \\ &= \sqrt{-1}\log(b^2-(1+b^2)) \\ &= \sqrt{-1}\log 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

következésképpen 82) akkor is áll, ha x képzetes Ha ezt használni akartuk volna midőn 76)-ot kerestük, az 'ottani hosszas számolás helyett, azonban nem teljes következetességgel, mindjárt mondhattuk volna 89) szerint

$$\text{arc cos}\,(a+b\sqrt{-1})=\frac{\pi}{2}-\text{arc sin}\,(a+\sqrt{-1}) \qquad 90)$$

15. §.

Ha az eddig nyert eredményeket áttekintjük, észrevesszük hogy föladásunknak: *megvizsgálni i. i. milly változásokon mennek keresztül a' különbféle függvények ha változójok képzetes értéket kap*, teljesen megfeleltünk mert, a' mondottak szerint a' függvényeknek:

$$x\pm y,\ xy,\ \frac{x}{y},\ x^m,\ a^x,\ \log x,\ \sin x,\ \cos x$$

arc sin x, arc cos x,

nem csak értéköket tudjuk ha változójuk képzetes, hanem ha tekintetbe vesszük: hogy olly egyenletben hol mind a' két rész, vagy csak az egyik sokértelmü az egyenlöségnek jele mindég csak annyit jelent: hogy az egyik résznek valamellyik értéke egyenlö a' másik résznek valamellyik értékével; — még azt is állithatjuk, hogy a' vizsgált függvényekre nézve, ha képzetesek is, ugyanazon viszonyok, szabályok és formulák érvényesek, mellyek e' függvényeknek ha valók természetöket képezik, és használatukat módositják. Söt több egyenlet által p. o.

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$$

$$\log(a + b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \sqrt{-1}\operatorname{arctang}\frac{b}{a}$$

olly viszonyokra akadtunk, mellyek *látszólag idegen függvényekneh összefüggését* tanusitják, ollyanok p. o. az exponentialis és trigonometricus, a' logarithmicus és trigonometricus függvények, és 13 §, 55) és 61) szerint a' hatvány és az exponentialis függvény, úgy hogy a' képzetes mennyiségek úgyszólván révek az egyik függvény határából a' másikba.

Minekelötte integrálokhoz átmennénk, még némelly átalános észrevételeket és adalékokat akarunk adni.

Azt kérdezhetné valaki: hogy ha mi a' kéttagúak alakzatjának érvényességét megmutattuk azon esetre ha a' kéttagú képzetes, mért nem mutatjuk meg azon esetre ha a' kitevö képzetes?

Azonkivül hogy arra utalunk, mit 14. §-ban A^x-ról mondottunk, állitjuk: *hogy a' kéttagúak alakzatját képzetes kitevö esetében bebizonyitani nem szükséges;* azon egyszezü okból, mert az alakzat ezen esetben analyticai definitiója a' képzetes mennyiségnek: $\sqrt{-1}$. Nert ha szóval kiakarjuk mondani ezen analyticai jelképet

$$(1 + a)^{\sqrt{-1}}$$

azt nem tehetjük másképp mint: „$(1 + a)^{\sqrt{-1}}$ az: *a' mi a' binomialis formulából ered, vagy az mibe a' binomialis formula átmegy ha benne a' kitevö helyett, $\sqrt{-1}$ helyettesittetik.* Ezután pedig a' binomialis formula érvényességét megmutatni, „circulus" volna.

Némellykor a' képzetes mennyiségek csak látszólag jelennek tmeg számolásinkban, és egyedül a' kifejezések alakjai által föltéleztetnek p. o.

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

minekelötte tehát a' $\sqrt{-1}$-nek megjelenéséböl számolásinkban valamit következtetnénk, jól meg kell vizsgálnunk valljon nem lehet-e a' képzetest eltávolitani. — Világos példa erre *Cardan*-nak formulája. A' harmadik fokú egyenletek föloldásánál előfordult egy eset mellyet egykor „casus irreducibilis"-nek mondottak. Most az emlitett formula által mi ezen esetet könnyen föloldjuk. A' formula képzetes, de csak látszólag.

Ámbár a' mennyiséget: $\sqrt{-1}$ semmiféle szám által kifejezni nem tudjuk, ***képzetes hatványai még is való számokban kifejezhetők.***

Legyen 14. §. 58)

$$\log(a + b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\log(a^2 + b^2) + \sqrt{-1}\ \mathrm{arc\,tg}\frac{b}{a}$$

ha itt

$$a=0\ b=1$$

mivel;

$$\mathrm{arc\,tg}\frac{1}{0} = \mathrm{arc\,tg}\,\infty = \frac{\pi}{2}$$

leend:

$$\log\sqrt{-1} = \frac{\pi\sqrt{-1}}{2}$$

$$\frac{\log\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\pi}{2}$$

és a' logarithmok tulajdonságánál fogva:

$$\frac{\pi}{2}\log\left[(\sqrt{-1})^{\frac{1}{\sqrt{-1}}}\right] = \log e^{\frac{1}{2}\pi}$$

tehát:

$$(\sqrt{-1})^{\frac{1}{\sqrt{-1}}} = e^{\frac{1}{2}\pi} \qquad 1)$$

mivel pedig:

$$(\sqrt{-1})^{\frac{1}{\sqrt{-1}}} = (\sqrt{-1})^{\frac{\sqrt{-1}}{-1}} = (\sqrt{-1})^{-\sqrt{-1}}$$

tehát:

$$(\sqrt{-1})^{-\sqrt{-1}} = e^{\frac{1}{2}\pi}$$

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{1}{2}\pi} \qquad 2)$$

$e^{\frac{1}{2}\pi}$ és $e^{-\frac{1}{2}\pi}$ soroknak alakjában kifejezhetők, tehát:

$$(\sqrt{-1})^{\frac{1}{\sqrt{-1}}} = 1 + \frac{\pi}{1.2.} + \frac{\pi^2}{1.\,2.\,4} + \frac{\pi^3}{1.2\cdot 3.8} + \frac{\pi^4}{1.2.3.4.16} + ..$$

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = 1 - \frac{\pi}{1.\,2} + \frac{\pi}{1.\,2.\,4} - \frac{\pi^3}{1.2.3.8} + \frac{\pi^4}{1.\,2.\,3.\,4.\,16} - .$$

az az:

$$(\sqrt{-1})^{\frac{1}{\sqrt{-1}}} = 4{\cdot}18049 \,.....$$

$$(\sqrt{-2})^{\sqrt{-1}} = 0{\cdot}207879 \,.....$$

és ez csak egyik értéke $((\sqrt{-1}))^{\sqrt{-1}}$-nek, mert arc tg ∞ nem csak $= \frac{\pi}{2}$ hanem $= 2r\pi + \frac{\pi}{2}$ is, – és ugyanez áll $((\sqrt{-1}))^{\frac{1}{\sqrt{-1}}}$-ról is.

Ezen eredményekről kételkedni lehetne, mert a' formulát 14. §. 58) tulajdonképpen csak két esetben ha t. i. a$<>$o nem pedig ha a=o állandósitottuk. Azonban ugyanezen eredményekhez jutunk h az átalánosabb, és szigorúan alapított formulában:

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x$$

teszünk: $x = \frac{\pi}{2}$, tehát:

$$e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$$

$$e^{-\frac{\pi}{2}} = (\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} \text{ 'sa't.}$$

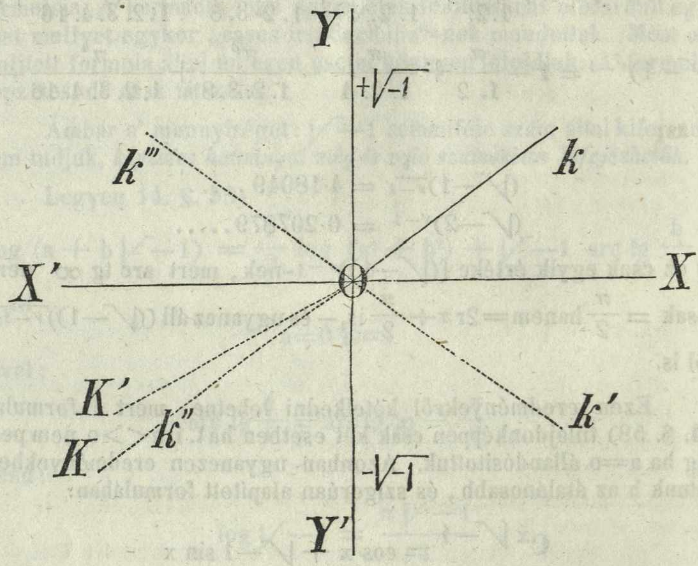
úgy hogy ez által nem csak eredményeink igazolva vannak, hanem az idézett formula azon esetre is ha a=0 állandósitva vagyon.

Hogy $\sqrt{-1}$ az egész számok közé nem tartozhatik abból kitetszik hogy $((\sqrt{-1}))^{\sqrt{-1}}$-nek sok értéke vagyon: mert mint a' maga helyén mondottuk, egész hatványnak csak egy értéke lehet.

Azok által, miket a' legnevezetesb függvényekről mondottunk vonatkozólag azon esetre, ha változójuk képzetes, meghatároztatik ezen függvényeknek az emlitett esetben analyticai értelmök.

A' mi a' mértani értelmet illeti, most már bővebben kifejezhetjük azon eszmét mellyet a' 3. §-ban *az oldalagi mennyiségről emlitettünk.*

Legyen mint 3. §-ban



X′X az abscissák′ és YY′ az erre függőleges ordináták tengelye, és a' pontnak k abscissája x, ordinatája y, k-nak fekvése meg lesz határozva e' két egyenlet által

$$k\begin{cases}x=a\\ y=b\end{cases}$$

hol a és b számokban kifejezve gondoltatnak. Húzzunk most 0-tól k-hoz egy egyenes vonalt $0k=r$, a' szögöt $x0k$ φ-nek nevezzük, leend

$$x=r\cos\varphi$$
$$y=r\sin\varphi$$

ha most $\sqrt{-1}$-nek megadjuk a' 3. §-ban emlitett tulajdonságát, t. i. hogy a' távolság vagy vonalok egységét jelenti balra (annak baljára t. i. ki 0-ból az állitó x irányában néz), úgy az előbbi két egyenlet értelmét új és egy egyenlet által ki lehet fejezni, és általa k fekvését meghatározni, és leend:

$$k\{r(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$$

Ha azon relatiót melly k-nak fekvését meghatározza egy betüvel p. o, z jeleljük, leend:

$$z=r(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)\,;\ \varphi=x\,0\,k$$

és mivel illy kifejezést mindég két részre oszolva lehet gondolni, a' valóra $r \cos \varphi = \alpha$ és $\sqrt{-1}$ szorzójára $r \sin \varphi = \beta$ leend még:

$$z = \alpha + \beta \sqrt{-1} = r (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)$$

hol ismeretes okoknál fogva:

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Ha *Ok* a' vonalok vagy távolság egységének vétetik, leend: $1 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ az az:

$$k \left\{ z = \cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi; \text{ modulus} = 1: \right.$$

ha k helyett egymásután vesszük $k' \, k'' \, k'''$ az útolsó egyenlet, egészen egyetértőleg $\sqrt{-1}$-nek adott értelméből átmegy ezekbe:

$$k' \left\{ z' = \cos \varphi_1 - \sqrt{-1} \sin \varphi_1 ; \; \varphi_1 = x \, 0 \, k' \right.$$

$$k'' \left\{ z'' = - \cos \varphi_2 - \sqrt{-1} \sin \varphi_2 ; \; \varphi_2 = x \, 0 \, k'' \right.$$

$$k''' \left\{ z''' = - \cos \varphi_3 + \sqrt{-1} \sin \varphi_3 ; \; \varphi_3 = x \, 0 \, k''' \right.$$

itt $\sin \varphi$, számszerinti értékében, mindég állitónak vétetik, tehát *nem* trigometricus, az az negyedlőt (Quadrant) határozó értelemben. — Mivel az utolsó négy egyenletben a' modnlus mindenütt $=1$, tehát

$$0k = 0k' = 0k'' = 0k'''$$

Ha k'' átmegy K-ba, φ_2 megmaradván ugyan az, z'' átmenend Z-be, és ha $0K = R$, leend

$$Z = \alpha' + \beta' \sqrt{-1} = - R (\cos \varphi_2 + \sqrt{-1} \sin \varphi_2)$$

$$R = \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}$$

Ha pedig 0K megmaradván φ_2 változik, és φ' lesz: z átmenend Z'-be:

$$Z' = \alpha'' + \beta'' \sqrt{-1} = - R (\cos \varphi' + \sqrt{-1} \sin \varphi')$$

$$R = \sqrt{\alpha''^2 + \beta''^2}$$

's a' t.

A' 10. §. 11. §. és 12. §. segitségével minden illy alakú egyenletkek

$$x^m \pm 1 = 0$$

gyökeit tudjuk föltalálni. Ha ezen egyenletnek $x^m + 1 = 0$ gyökeit $x_1 \; x_2 \; x_3 \; \ldots \; x_m$-nek hijuk leend:

$$x^m + 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_m)$$

ha x_1, $x_2 \ldots$ helyett az értékeket 12. §. 8) és 9)-ből irjuk, egyszersmind két egymás mellett álló értéket szorzunk, észrevévén: hogy átalánosan:

$$\left(x - \cos\frac{2\varrho+1}{m}\pi - \sqrt{-1}\sin\frac{2\varrho+1}{m}\pi\right)$$

$$\left(x - \cos\frac{2\varrho+1}{m}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{2\varrho+1}{m}\pi\right)$$

$$= \left(x - \cos\frac{2\varrho+1}{m}\pi\right)^2 - \left(\sqrt{-1}\sin\frac{2\varrho+1}{m}\pi\right)^2$$

$$= x^2 - 2x\cos\frac{2\varrho+1}{m}\pi + 1$$

leend, *ha m páros*:

$$x^m + 1 = \left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{m}\ 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{m} + 1\right)\dots$$

$$\dots\left(x^2 - 2x\cos\frac{m-1}{m}\pi + 1\right)$$

ha pedig m páratlan:

$$x^m + 1 = \left(x+1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{m} + 1\right)$$

$$\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{m} + 1\right)\dots\left(x^2 - 2x\cos\frac{m-2}{m}\pi + 1\right)$$

ha x helyett teszünk $\frac{x}{a}$, és mind a' két részt a^m-mel szorozzuk, leend:

ha m páros

$$x^m + a^m = \left(x^2 - 2ax\cos\frac{\pi}{m} + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{3\pi}{m} + a^2\right)\dots \quad 3)$$

$$\dots\left(x^2 - 2ax\frac{m-1}{m}\pi + a^2\right)$$

ha pedig m páratlan

$$x^m + a^m = \left(x+a\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{\pi}{m} + a^2\right)$$

$$\left(a^2 - 2ax\cos\frac{3\pi}{m} + a^2\right)\dots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{m-2}{m}\pi + a^2\right) \quad 4)$$

Egészen hasonló az eljárás ha az egyenlet volna $x^m - 1 = 0$. Ha a' gyökök $x_1\ x_2 \dots x_m$, ezeknek értéköket 11. §. 11) és 13)-ban találjuk, és ha a' következő egyenletben helyettesitjük, egyszersmind két csak jegyben különböző értéket egymással szorzunk észrevévén hogy:

$$\left(x - \cos\frac{2\varrho\pi}{m} - \sqrt{-1}\sin\frac{2\varrho\pi}{m}\right)\left(x - \cos\frac{2\varrho\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\varrho\pi}{m}\right) = x^2 - 2x\cos\frac{2\varrho}{m}\pi + 1$$

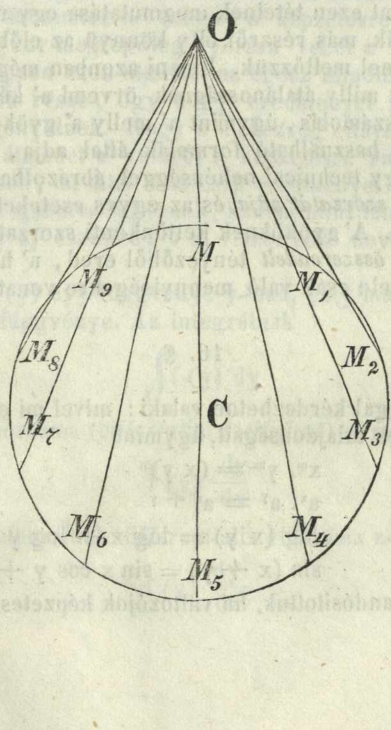
végre x helyett teszünk : $\frac{x}{a}$, és mind a' két részt szorozzuk a^m-mel ; találunk, *ha m páros* :

$$x^m - a^m = \left(x^2 - a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{m} + a^2\right)$$
$$\left(x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{m} + a^2\right)..\left(x^2 - 2ax\cos\frac{m-2}{m}\pi + a^2\right) \quad 5)$$

ha pedig m páratlan :

$$x^m - a^m = \left(x - a\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{m} + a^2\right)$$
$$\left(x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{m} + a^2\right)..\left(x^2 - 2ax\cos\frac{m-1}{m}\pi + a^2\right) \quad 6)$$

Az egyenleteknek 3) 4) 5) és 6) mértani értelmezését Cotes 1716. találta föl, és ezért a' következő tétel „*Cotes tételének*" neveztetik:



Ha egy körszélt egy bizonyos pontból M indulván 2m egyforma részre osztunk, ezen ponton M keresztül egy átmérőt huzunk és tetszés szerint meghosszabbitjuk, továbbá ezen átmérőn vagy annak meghosszabbitásán egy pontot O tetszés szerint választunk, és ezen pontból a' körszélnek valamennyi osztáspontjaihoz egyenes vonalakat huzunk, végre a' körnek központját C-nek nevezzük: ekkor a' páros számú, O-ból huzott vonaloknak szorzata:

$$OM.\ OM_2.\ OM_4.\ OM_6\ldots = CM^m - CO^m \qquad 7)$$

ha a' pont O a' körszélen belül fekszik, és

$$= CO^m - CM^m \qquad 8)$$

ha O a' körszélen kivül fekszik; a' páratlan számú vonaloknak szorzata pedig mind a' két esetben:

$$= CO^m + CM^m \qquad 9)$$

Ha $CO = x$ és $CM = a$, 8) és 9) leend:

$$= x^m \pm a^m$$

7) pedig

$$= -(x^m - a^m)$$

és most már 3), 4), 5) és 6)-ból a' különbféle vonalokat, az az

$$\pm (x^m \pm a^m)$$

-nek gyökeit föl lehet találni.

Egyébiránt ezen tételnek megmutatása egy részről nem egészen ide tartozik, más részről olly könnyü az előbbiek segitségével, hogy ezennel mellőzzük. Idézni azonban mégis akartuk mert belőle kitetszik milly átalánosságnak örvend a' képzetes mennyiségekkel való számolás, úgymint a' melly a' gyököket *közvetlen* és *minden esetben* használható formulák által adja, még a' mértani constructio, nagy technicai nehézséggel ábrázolható, *a' gyököknek csak kettőnkénti szorzatát adja*, és az egyes eseteket különösen tárgyalni kéntelen. A' gyököknek kettőnkénti szorzata természetesen való, mert két *összerendelt* tényezőből ered, a' honnan kitetszik: hogy Cotes' tétele csak való mennyiségekre vonatkozik.

16. §.

Némi joggal kérdezhetné valaki: mivel mi eddig a' különbféle függvények tulajdonságait, úgymint

$$x^m.\ y^m = (x\,y)^m$$
$$a^x.\ a^y = a^{x+y}$$
$$\log (x\,y) = \log x + \log y$$
$$\sin (x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

azon esetre állandósitottuk, ha változójok képzetes, mért nem teszszük ugyanezt a' sok differentialis formulákra nézve is, hanem mellőzvén ezeket átmegyünk a' meghatározott integralokra? — Erre egyszerü feleletünk csak az: ha valamelly függvényben a' változó egy vagy több változhatlanokkal (constante) össze vagyon kötve, ezen utóbbiakra a' differentialis számolásnak semmi befolyása nincs; $\sqrt{-1}$ pedig éppen mint illyen változhatlan tekinthető, valamint tehát a' többi változhatlanok, úgy $\sqrt{-1}$ is a' differentialis calculusban, csak előszámnak (coefficient) szerepét viseli. — Így p. o. ha a egy változhatlan:

$$\text{d. } a\, x^m = m\, a\, x^{m-1}\, dx$$

és ha $a = \sqrt{-1}$

$$\text{d. } x^m. \sqrt{-1} = m \sqrt{-1}.\, x^{m-1}\, dx$$

és így a' többi függvények differentiatiojánál is. A' mit a' differentialis formulákról mondunk, azt az átalános, vagyis határozatlan intregalokról is lehet mondani, mert az intregatio átalánosan nem más mint a' differentiationak ellentétje. ***Máskép vagyon azonban a' dolog a' meghatározott integrálokkal.*** Mivel sok föladások határozott integralokra vezetnek, a' legnagyobb mathematicusok avval foglalkoztak, hogy azoknak értékét föltalálják. E' czélra számos és igen elmésen kigondolt tételekkel birunk, mellyeket többeken kívül Euler, Laplace és Legendre-nak köszönhetünk. De a' nyert integralok között legtöbben föltaláltattak az inductionak egy neme által, melly az átmeneten a' valóról a' képzetesre alapszik. Ezen átmenet némellykor meglepőleg gyorsan vezet a' kivánt czélhoz, mindazonáltal éppen ezen átmenet az egész elméletnek és eljárásnak leggyengébb része, úgy hogy eredményei mindég különös bebizonyitást igényelnek. Hogy e' nehézség eltávolittassék, szükséges, hogy az átmenet a' valóról a' képzetesre analyticai szigorú alapokra fektessék, mi által nem csak eredményei minden előfordulható esetben igazolva legyenek, hanem mint látni fogjuk, az integrationak egy új eszköze, 's új viszonyok' nevezetes sora találtatik.

Legyen f (y) eyy függvénye y-nak, és y maga két más változónak x és z függvénye. Az integrálnak

$$\int f(y)\, dy$$

differentialis-előszáma (differential koeffizient) x-re nézve leend

$$f(y)\, \frac{dy}{dx}$$

és ugyanazon integrálnak differentialis előszáma z-re nézve:

$$f(y)\, \frac{dy}{dz}$$

A' másodrendü differentialis előszám mind a' két változóra nézve leend:

$$\frac{d}{dz}\left(f(y)\frac{dy}{dx}\right)$$

vagy:

$$\frac{d}{dx}\left(f(y)\frac{dy}{dz}\right)$$

az az:

$$\frac{d}{dz}\left(f(y)\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(f(y)\frac{dy}{dz}\right) \quad 1)$$

Ezen egyenlet helyessége kitetszik valóságos differentiatió á'$\text{v}$al:

$$\frac{d}{dz}\left(f(y)\frac{dy}{dx}\right)=f(y)\frac{d^2y}{dx\,dz}+f^1(y)\frac{dy}{dz}\frac{dy}{dx} \quad 2)$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(y)\frac{dy}{dz}\right)=f(y)\frac{d^2y}{dz\,dx}+f^1(y)\frac{dy}{dx}\frac{dy}{dx} \quad 3)$$

Av egyenlet 1) érvényes, y bármilly függvénye legyen x és z-nek, érvényes tehát akkor is, ha y helyett olly fügyényt helyettesitünk, melly részint való, részint képzetes. Ha tehát u és v két tetszésre választott való függvénye x és z-nek mindég lehet helyettesítni

$$y = u + v - 1 \quad 4)$$

és tehát:

$$f(y) = f(u + v\sqrt{-1} \quad 5)$$

Legyen továbbá

$$f(u + v\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1} \quad 6)$$

leend:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{du}{dx}+\sqrt{-1}\,\frac{dv}{dx}\\ \frac{dy}{dz}&=\frac{du}{dz}+\sqrt{-1}\,\frac{dv}{dz}\end{aligned}\right\} \quad 7)$$

tehát:

$$\left.\begin{aligned}f(y)\frac{dy}{dx}&=\left(\frac{du}{dx}+\sqrt{-1}\,\frac{dv}{dx}\right)(U + V\sqrt{-1})\\ f(y)\frac{dy}{dz}&=\left(\frac{du}{dz}+\sqrt{-1}\,\frac{dv}{dz}\right)(U + V\sqrt{-1})\end{aligned}\right\} \quad 8)$$

szorozván:

$$f(y)\frac{dy}{dx}=U\frac{du}{dx}+U\frac{dv}{dx}\sqrt{-1}+V\frac{du}{dx}\sqrt{-1}-V\frac{dv}{dx}$$

$$f(y)\frac{dy}{dz} = U\frac{du}{dz} + U\frac{dv}{dz}\sqrt{-1} + V\frac{du}{dz}\sqrt{-1} - V\frac{dv}{dz} \qquad 9)$$

ha a' való tagokat rövidség okáért egy betüvel, és $\sqrt{-1}$-nek előszámait is egy betüvel jeleljük, úgy hogy:

$$\left.\begin{aligned} P &= U\frac{du}{dx} - V\frac{dv}{dx} \\ R &= U\frac{dv}{dx} + V\frac{du}{dx} \\ Q &= U\frac{du}{dz} - V\frac{dv}{dz} \\ S &= U\frac{dv}{dz} + V\frac{du}{dz} \end{aligned}\right\} \qquad 10)$$

az egyenlet 1) átmenend a' következőbe:

$$\frac{dP}{dz} + \frac{dR}{dz}\sqrt{-1} = \frac{dQ}{dx} + \frac{dS}{dx}\sqrt{-1} \qquad 11)$$

melly kettőre oszlik:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP}{dz} &= \frac{dQ}{dx} \\ \frac{dR}{dz} &= \frac{dS}{dx} \end{aligned}\right\} \qquad 12)$$

Ennek helyességéről is valóságos differentiatio által meg lehet győződni, mert:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP}{dz} &= U\frac{d^2u}{dx\,dz} + U\frac{du}{dx}\frac{du}{dz} - V\frac{d^2v}{dx\,dz} - V\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dz} \\ \frac{dQ}{dx} &= U\frac{d^2u}{dz\,dx} + U\frac{du}{dz}\frac{du}{dx} - V\frac{d^2v}{dz\,dx} - V\frac{dv}{dz}\frac{dv}{dx} \end{aligned}\right\} \qquad 13)$$

Ha pedig:

$$y = u - v\sqrt{-1} \qquad 14)$$

11) helyett találtunk volna:

$$\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dz}\sqrt{-1} = \frac{dQ}{dx} - \frac{dS}{dx}\sqrt{-1} \qquad 15)$$

világos hogy ez által 12) semmi változást nem szenved. — *E' két egyenleten (12) alapszik az átmenetnek a' valóról a' képzetesre egész elmélete.*

Szorozzuk az említett két egyenlete dx dz-vel, leend; egyszersmind az integratiot jelentvén:

6*

$$\left.\begin{aligned}\iint \frac{dP}{dz}\,dx\,dz &= \iint \frac{dQ}{dx}\,dx\,dz\\ \iint \frac{dR}{dz}\,dx\,dz &= \iint \frac{dS}{dx}\,dx\,dz\end{aligned}\right\} \quad 16)$$

itt mindég lehet egy integratiot elvégezni. Legyenek az integratio határai x', x'', z', z'', és éljünk Fourier jelelési módjával, melly szerint:

$$\int_{x'}^{x''} A\,dx$$

annyit tesz: hogy a' határozott integrál $\int A\,dx$ vétessék $x=x'$ és $x=x''$ határok között, — nevezzük végre P'', P', R'', R'-nek P és R értékeit z'' és z'-re nézve, és Q'', Q', S'', S'-nek Q és S értékeit x'' és x'-re nézve; leend:

$$\left.\begin{aligned}\int_{x'}^{x''} P''\,dx - \int_{x'}^{x''} P'\,dx &= \int_{z'}^{z''} Q''\,dz - \int_{z'}^{z''} Q'\,dz\\ \int_{x'}^{x''} R''\,dx - \int_{x'}^{x''} R'\,dx &= \int_{z'}^{z''} S''\,dz - \int_{z'}^{z''} S'\,dz\end{aligned}\right\} \quad 17)$$

e' két egyenlet, melly fölteszi hogy P, Q, R, S az integratio határai között mindég meghatározott értéket kapjanak, egybe is foglalható: t. i.

$$\left.\begin{aligned}&\int_{x'}^{x''} (P'' + R''\sqrt{-1})\,dx - \int_{x'}^{x''} (P' + R'\sqrt{-1})\,dx =\\ &= \int_{z'}^{z''} (Q'' + S''\sqrt{-1})\,dz - \int_{z'}^{z''} (Q' + S'\sqrt{-1})\,dz\end{aligned}\right\} \quad 18)$$

Tegyük nagyobb egyszerüség kedvéért:

$$x' = 0,\ x'' = x,\ z' = 0,\ z'' = z \qquad 19)$$

és legyen ezen esetben:

$$P' = p,\ Q' = q,\ R' = r,\ S' = s \qquad 20)$$

17)-ből leend:

$$\int_0^x P\,dx - \int_0^x p\,dx = \int_0^z Q\,dz - \int_0^z q\,dz$$

$$\int_0^x R\,dx - \int_0^x r\,dz = \int_0^z S\,dz - \int_0^z s\,dz \qquad 21)$$

Minekelötte mutatnók: hogyan kellend ezen egyenleteket használni, visszatérünk észrevételünkre, mellyszerint föltétetik hogy P, Q, R, S, az integratio határai között, mindég határozott értéküek legyenek. Ha P, Q, R, S, bizonyos meghatározott értéket nem kapnának, kényünktől nem függne: mellyik intregatiot végezzük elöbb 16)-ban, mert ezen esetben

$$\int\int \frac{dP}{dz}\,dx\,dz$$

más értéket kaphat ha elöbb z és ezután x-re nézve, vagy elöbb x és ezután z-re nézve végezzük az integratiot, következésképpen 17) alatt lévő egyenleteink helyességéről nem lehetnénk meggyőződve.

Nézzük már hogyan lehessen a' 21) használni.

Legyen:

$$u = x \quad v = z$$

$$f\,(x \pm z\sqrt{-1}) = U \pm V\sqrt{-1}$$

$$\frac{du}{dx} = 1, \quad \frac{du}{dz} = 0, \quad \frac{dv}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dz} = 1$$

$$P = U,\ Q = -V,\ R = V,\ S = U$$

továbbá ha tesszük:

$$f\,(x) = n, \quad f\,(\pm z\sqrt{-1}) = M \pm N\sqrt{-1}$$

találunk:

$$p = n,\ q = -N,\ r\text{-}0\ s = M$$

következésképpen 21)-ből:

$$\int_0^x U\,dx - \int_0^x n\,dx = -\int_0^z N\,dz + \int_0^z V\,dz$$

$$\int_0^x V\,dx = \int_0^z U\,dz - \int_0^z M\,dz$$

és e' két egyenletet egybefoglalván:

$$\int_0^x f(x + z\sqrt{-1})\,dx - \int_0^x f\,(x)\,dx = \sqrt{-1}$$

$$\left\{\int_0^z f\,(x + z\sqrt{-1})\,dz - \int_0^z f(z\sqrt{-1})\,dz\right\}$$

Ezek után könyü leend ezen elméletet más példákban is gyakorlatilag használni.

17. §.

Hogy a' képzetes mennyiségek különös tekintetet igényelnek nem csak kettős de egyes határozott integráloknál is, és nem csak ha a' függvényben, hanem akkor is, ha az integratio *határaiban* előfordulnak a' következőkből láthatjuk.

Legyen, a' Laplace-ról nevezett integrál

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad 1)$$

x itt tetszésszerinti, tehát helyette tehetünk $x\sqrt{a}$, mivel a' határok ugyanazok maradnak, leend:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad 2)$$

mivel a egészen tetszésszerint választható, tehetjük

$$a = -1$$

ez által x-ből leend $x\sqrt{-1}$, és x^2-ből: $-x^2$; ha a' határokat keressük: találunk: mivel ha

$$x = 0;\ \text{leend}\ x\sqrt{-1} = 0$$
$$x = \infty,\ \text{„}\ x\sqrt{-1} = \infty\sqrt{-1}:$$

$$\int_0^{\infty\sqrt{-1}} e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{-\pi}} \qquad 3)$$

és ez tökéletesen helyes. De ha itt a' határokat nem változtattuk volna: leendett 2)-ből

$$\int_0^\infty e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{-\pi}} \qquad 4)$$

a' mi szembeszökőleg hamis, mert mindenesetre:

$$\int_0^\infty e^{x^2}\,dx = \infty \qquad 5)$$

Míndazonáltal átalános szabálynak koránt sem lehet venni, hogy valahányszor ∞ átmegy $\infty\sqrt{-1}$-be annyiszor az eredmények csak akkor helyesek ha ezen utóbbi határul vétetik. Mert mindjárt meg fogunk győződni hogy 2)

$$\int_0^\infty e^{-x^{2a}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

ugyanazon határok között véve helyes, ha

$$a = \sqrt{-1} \qquad 6)$$

ámbár láttuk hogy hamis eredményt adott, ha a' határok meghagyatván:

$$a = -1 \qquad 7)$$

Helyettesitsük 6)-ot 2)-be, meghagyván a' határokat; leend:

$$\int_0^\infty e^{-x^2\sqrt{-1}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{-1}}} \qquad 8)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{-\pi\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\sqrt{\pi}, \text{ Moivre szerint}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left\{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left\{\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{-1}}\right\}$$

$$= \sqrt{\pi}\left\{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{-1}}{4}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\left\{1-\sqrt{-1}\right\}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2\sqrt{-1}}\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\,(+1-\sqrt{-1}) \qquad 9)$$

mivel pedig 14. §. szerint:

$$e^{-x^2\sqrt{-1}} = \cos x^2 - \sqrt{-1}\sin x^2$$

tehát:

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx + \sqrt{-1}\int_0^\infty -\sin x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\left\{-1+\sqrt{-1}\right\} \qquad 10)$$

következésképpen:

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = -\frac{1}{4}\sqrt{2\pi} \qquad 11)$$

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = -\frac{1}{4}\sqrt{2\pi} \qquad 12)$$

ezen eredmények helyesek ha 9) helyes; tehát 9)-nek helyességét meg kell mutatnunk. Ez pedig annál jobban sikerülend mennél nagyobb átalánosságnak örvend az eljárás mellyel e' czélra élendünk:

Ha egy fügvényben

$$f\,(x + ay)$$

a változhatlan, de tetszésszerint választható és ezen függvénynek differentialéját vesszük x és y-ra nézve, leend mint tudva van:

$$a \frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \qquad 13)$$

mind a' két részt dx dy-nal szorozván:

$$a \frac{df}{dx}\, dx\, dy = \frac{df}{dy}\, dx\, dy, \qquad 14)$$

Legyenek az integratio határai x', x'', y', y'', leend:

$$a \int_{x'}^{x''} \int_{y'}^{y''} \frac{df}{dx}\, dx\, dy = \int_{x'}^{x''} \int_{y'}^{y''} \frac{df}{dy}\, dx\, dy \qquad 15)$$

Ha föltesszük hogy f (y + ay) ezen határok között mindég bizonyos határozott értékü marad: ekkor egy integratiót ellehet végezni; tehát:

$$a \int_{y'}^{y''} f\,(x'' + a\,y)\, dy - a \int_{y'}^{y''} f\,(x' + a\,y)\, dy =$$

$$\int_{x'}^{x''} f\,(x + ay'')\, dx - \int_{x'}^{x''} f\,(x + ay')\, dx \qquad 16)$$

egy egészen átalános, igen czélszerü formula.

Legyen most már:

$$f\,(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}},\ a = \sqrt{-1} \qquad 17)$$

tehát

$$f\,(x + y\sqrt{-1} = \frac{e^{-(x + y\sqrt{-1})}}{\sqrt{x + y\sqrt{-1}}} \qquad 18)$$

ha tesszük:

$$x' = y' = 0 \text{ és } x'' = y'' = \infty \qquad 19)$$

leend:

$$f(x'' + y\sqrt{-1}) = \frac{e^{-x''}\, e^{-y\sqrt{-1}}}{\sqrt{x'' + y\sqrt{-1}}} = 0 \qquad 20)$$

$$f(x' + y\sqrt{-1}) = \frac{e^{-y\sqrt{-1}}}{\sqrt{y\sqrt{-1}}} \qquad 21)$$

$$f(x + y''\sqrt{-1}) = 0 \qquad 22)$$

$$f(x + y'\sqrt{-1}) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi}} \qquad 23)$$

emlékezetre méltó hogy 20) és 21) érvényes minden y-ra nézve melly 0 és ∞ között fekszik, 22) és 23) pedig minden x-re nézve, melly ugyanazon határok között található.

Ha ezen értékeket 16)-ba helyettesitjük leend:

$$\sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{e^{-y\sqrt{-1}}}{\sqrt{y\sqrt{-1}}}\,dy = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad 24)$$

hogy ezen integrált

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

vagy inkább értékét föltaláljuk, irjunk Laplace' integrájában 1) x helyett: $\sqrt{x}$, tehát dx helyett: $\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ leend; a' határok ugyanazok maradván:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

tehát:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\pi} \qquad 25)$$

következésképpen:

$$\sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{e^{-y\sqrt{-1}}}{\sqrt{y\sqrt{-1}}}\,dy = \sqrt{\pi} \qquad 26)$$

y mint mondottuk mindent jelenthet, nullától végetlenig tehát lehet:

$$y = x^2;\ dy = 2x\,dx$$

helyettesítvén ezt 26)-ba

$$2\sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{e^{-x^2\sqrt{-1}}}{\sqrt[4]{-1}}\,dx = \sqrt{\pi} \qquad 27)$$

$2\sqrt{-1}$-vel osztván:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2\sqrt{-1}}}{\sqrt[4]{-1}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-1}}$$

ha $\sqrt[4]{-1}$-vel szorzunk és 12. §. 10)-ből értékét irjuk:

$$\int_0^\infty e^{--x^2\sqrt{-1}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-1}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\,(1-\sqrt{-1}) \qquad 28)$$

az az: fölebbi integrálunk 9), és tehát azok is 11) és 12) helyesek. E' szerint itt azon különös körülményre akadunk hogy ugyanazon határok között; az integrál:

$$\int_0^\infty e^{-x^2a}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

helyes ha

$$a = \sqrt{-1}$$

és nem helyes ha

$$a = -1$$

az az: a-nak egy *való* értékére nézve melly t. i. $= -1$ az integrál nem áll, ámbár egy *képzetes* értékre nézve melly t. i. $= \sqrt{-1}$ helyességét megmutattuk.

Ezen utóbbi esetben az integrálnak helyességét megmutatni szükséges volt, mert nem lehetett tudni valljon fölvagyunk-e jogositva az illy helyettesitésre vagy nem. Megmutatásunk azonban az integrál helyességét csak azon egy különös esetre állandósította, ha $a = \sqrt{-1}$, az a' kérdés támad tehát: valljon a-nak egy másik képzetes értéke nem vezet-e hamis eredményekre? Ezen kérdésre a' következő tétellel felelünk:

Az integrál

$$\int_0^\infty e^{-x^2a}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (\alpha)$$

érvényes ha a *helyett teszünk* $h + k\sqrt{-1}$ *hol* h *és* k *való mennyiségek és* $h > 0$ *az az állító.*

Legyen tehát

$$\int_0^\infty e^{-x^2(h+k\sqrt{-1})}\,dx = A \qquad 29)$$

hol A ismeretlen függvénye h és k-nak.

x^2 itt tetszés szerint választható, tehetünk tehát helyette x^2a, és dx helyett: adx, leend:

$$\int_0^\infty e^{-x^2 a^2 (h + k\sqrt{-1})} adx = A \qquad 30)$$

de éppen olly joggal tehetünk x helyett: a-t, és leend:

$$\int_0^\infty e^{-a^2 (h + k\sqrt{-1})} da = A \qquad 31)$$

hogy ez is $=$A kitetszik abból, mert A csak h és k-nak nem pedig x vagy a-nak függvénye.

Ha e' két integrált szorozzuk, leend:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a^2 (h + k\sqrt{-1})(1 + x^2)} ada\, dx = A^2 \qquad 32)$$

itt az integratiot a szerint ellehet végezni; vegyük előbb a' határozatlan integrált:

$$\int e^{-a^2 (h + k\sqrt{-1})(1 + x^2)} ada =$$

$$- \frac{e^{-a^2 (h + k\sqrt{-1})(1 + x^2)}}{2(h + k\sqrt{-1})(1 + x^2)} \qquad 33)$$

ha ezt határok között vesszük találunk:

$$\int_0^\infty e^{-a^2 (h + k\sqrt{-1})(1 + x^2)} ada =$$

$$\frac{1}{2(h + k\sqrt{-1})(1 + x^2)} \qquad 34)$$

és ime ezen eredmény az, melly miatt kellett azon óvást tennünk hogy $h>0$ legyen; mert ha $h<0$

$$e^{-a^2 (h + k\sqrt{-1})(1 + x^2)}$$

ha $a=\infty$ nem lesz, mint követeltük

$$\frac{1}{e^{+a^2 (h + k\sqrt{-1})(1 + x^2)}} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

hanem:

$$\frac{1}{e^{a^2 (-h + k\sqrt{-1})(1 + x^2)}}$$

lehetend legalább

$$=\frac{1}{e^{-\infty}}$$

vagy határozatlan értékü; tehát szükségképpen $h>0$.

Ha a' 34)-ben nyert eredményt dx-el szorozzuk leend:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{2\,(h+k\sqrt{-1})\,(1+x^2)}=A^2$$

mivel itt h és k mint változhatlanok az integratio' jegye elejébe irathatók:

$$\frac{1}{2\,(h+k\sqrt{-1})}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2\,(h+k\sqrt{-1})}$$

$$\left\{\text{arc tg}\,\infty-\text{arc tg}\,0\right\}=A^2$$

mivel pedig $\text{arc tg}\,\infty=\frac{\pi}{2}$ és $\text{arc tg}\,0=0$;

$$\frac{\pi}{4\,(h+k\sqrt{-1})}=A^2$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{h+k\sqrt{-1}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{h+k\sqrt{-1}}}=A$$

tehát 29) szerint:

$$\int_0^\infty e^{-x^2\,(h+k\sqrt{-1})}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{h+k\sqrt{-1}}}$$

és ez egy tökéletes jogszerüséggel és szigorusággal nyert eredmény, mellyet hasonlólag találtunk volna ha (α)-ba egyszerűn helyettesítünk vala

$$a=h+k\sqrt{-1},\ h>0$$

következésképpen tételünk tökéletesen igazolva 's állandósitva vagyon.

18. §.

Az eddig mondottakban foglaltatik mind az, mit a' képzetes mennyiségek tulajdonságairól, és értelmükről a' mennyiségtan a' legújabb korig fölmutathat. Ha alkalmazásukat vagy használatukat akartuk volna egész kiterjedésben adni, a' félmennyiségtani litteraturát kellett volna leirnunk.

Láttuk hogy a' képzetes mennyiségek mindenütt simulnak a' valók szabályaihoz, és különös tekintetet csak

$$\log x, \text{ arc sin } x, \text{ és arc cos } x$$

valamint a' határozott integráloknál is igényelnek; az előbbi három függvénynél, mert sorokon alapulnak, mellyek csak bizonyos föltételek alatt összetartanak, mint 52. lap. emlitettük, — az utóbbiaknál mert folytonosságukat némellykor elvesztik.

A' képzetes mennyiségeknek tulajdonságait az illetőleges helyeken kiemeltük. Láttuk hogy azon tulajdonságot, miszerint két egyenletet egybefoglalhatnak más inconmensurabilis mennyiségek is birják. Hasonlóképpen közösen birják a' képzetesek a' logarithmokkal azon tulajdonságot: hogy a' műtételeket egygyel alább számitják, valamint minden egyéb mennyiségekkel azt, hogy lehetlenséget jelképeznek. Könyen fog bárki esetekre akadni, mellyekben egész, vagy tört, állitó vagy tagadó számok 'sat. lehetlenséget, az az a' föladásnak képtelenségét jelentik. Illyen eset p. o. ezen föladás: mellyik azon kétjegyű (zwei ziffrig) szám melly 3-al szorozva, ugyanazt a' két számot de visszás rendben adja, 's melly két számjegynek összege $= 9$. az az:

$$30.\, a + 3.\, b = 10.\, b + a$$

$$a + b = 9$$

ha b az ismert szabályok szerint kerestetik, leend:

$$b = \frac{29}{4}$$

a' mi lehetlen, mert b mint számjegy nem lehet tört.

Kiváltságos tulajdonságai tehát a' képzetes mennyiségeknek:

a) hogy mig némelly egyes tulajdonságaikat más mennyiségek is birják, összesen 's egyetemben csak a' képzetesek birják azokat.

b) hogy átmenetet képeznek az egyik függvényből a' másikra, melly körülmény az integrationál hol a' trigonometricus függvényeket többnyire átalakitjuk exponentialisokra, — egy igen kivánatos és sokszor használt passe-par-tout.

c) és végre hogy csak általuk nyerték számolásink azon átalánosságot, melly a' számok elméletét annyira érdekesssé, 's messzehatóvá tette, számtalan új integralokhoz vezetett, 's a' legújabb mennyiségtani eredményeket az opticában, magnetismusban, csillagászatban 's a' t. mind annyi emlékszobrát az emberi éleselméjüségnek, lehetségesekké tették.

Az előbbiekben alapitott, vagy következtetett vagy idézett formulák magokban foglalják a' képzetesek analyticai értelmét; a' mértanit, mennyire azt egy egyszerü *jelképről* kivánni lehet, a' 3. §. és 15. §-ban megalapitani iparkodtunk.

Láttuk hogy a' képzetes mennyiségek mindenütt simulnak a' valók szabályaihoz, és különös tekintetet csak

log x, arc sin x, és arc cos x

valamint a' határozott integráloknál is igényelnek; az előbbi három függvénynél, mert sorokon alapulnak, mellyek csak bizonyos föltételek alatt összetartanak, mint 32 lap. említettük, — az utóbbiaknál mert folytonosságukat némellykor elvesztik.

A' képzetes mennyiségeknek tulajdonságait az illetőleges helyeken kiemeltük. Láttuk hogy azon tulajdonságot, miszerint két egyenletet egybefoglalhatnak min incommensurabilis mennyiségek is birják. Hasonlóképpen közösen birják a' képzetesek a' logarithmokkal azon tulajdonságot: hogy a műtételeket egymással alább szállitják, valamint minden egyéb mennyiségekkel azt, hogy lehetlenséget jelképeznek. Könyen fog bárki esetekre akadni, mellyekben egész, vagy tört állító vagy tagadó számok 's a t. lehetlenséget, az az a' föladásnak képtelenségét jelentik. Illyen eset p. o. ezen föladás: mellyik azon kétjegyü (zweiziffrig) szám melly 3-al szorozva, ugyanazt a' két számot de visszás rendben adja, 's melly két számjegyeinek összege $= 9$, az az:

$$30 . a + 3 . b = 10 . b + a$$

$$a + b = 9$$

ha b az ismert szabályok szerint kerestetik, lesend:

$$b = \frac{29}{4}$$

a' mi lehetlen, mert b mint számjegy nem lehet tört.

Jellemző tulajdonságai tehát a' képzetes mennyiségeknek:

a) hogy azt mellyet egyes tulajdonságaikat más mennyiségek is birják, *együttesen*, 's *egyetemben* csak a' képzetesek birják azokat.

b) hogy általános képzetek az ollyan függvényeket a' tudásra, melly formára vagy az integrálásnál kor a' trigonometricus függvényeket többnyire átalakítják exponentialisokra, — egy igen kitűnő és sokszor használt passe-par-tout;

c) és végre hogy csak általuk nyerték számolásunk azon általánosságot, melly a' számok elméletét annyira érdekessé, 's messzehatóvá tette, számtalan új integrálokhoz vezetett, 's a' legújabb mennyiségtani eredményeket az opticában, magnetismusban, csillagászatban 's a' t. mind annyi emlékoszlopát az emberi elmeéleselméjüségnek, lehetségessé tették.

Az előbbiekben állított, vagy következtetett, vagy idézett formulák magokban foglalják a' képzetesek analyticai értelmét; a' mellett, mennyire azt csak egyes tételekről kivánni lehet a' 3. §. és 15. §-ban megalapítani.

KILIÁN GYÖRGYNÉL

megjelentek, és minden más könyvárusoknál kaphatók:

Görög-romai

MYTHOLOGIAI ZSEBSZÓTÁR.

Készitette

CSÁSZÁR FERENCZ.

20 kőnyomatu képpel, XVI és 520 lap: 16-rét csinosan fűzve csak 1 ft. 12 kr. aranyozott táblával 1 ft. 30 kr. p. p.

Vörösmarty Mihály

MINDEN MUNKÁI.

Kiadják barátai ***BAJZA*** *és* ***SCHEDEL.***

Kétféle alakban:

1. Nemzeti kiadás, a' Nemzeti könyvtárhoz csatlakozó kis 4 réten egy kötetben, 12 szállitványban.

   Ára az egésznek egy aczélmetszetü arczképpel 8 ft. p. p.

2. Kézi kiadás, Kisfaludy Károly negyedik kiadásához csatlakozó, n. 12-rét, tiz kötetben, 10 szállitványban.

   Szinte egy arczképpel, 10 ft. p. p.

Népszerü

FÖLDRAJZI OKTATÁS,

iskolai 's magán használatul

irta

KANYA PÁL,

a' pesti protestánsok középtanodájának rendes oktatója, 's a' kir. magyar Természettudományi Társulat rendes tagja.

Három kőnyomatu táblával.

Nagy 8-rét, 632 sürüen nyomatott lap, boritékban 3 ft. 40 kr. pp.

TARTALOM.

Nyomtatási hibák.

---

2. lap 3. sor alólról, olvass: Íme most $\sqrt{}x$ sem az stb.

„ „ 1. „ „ „ és $\sqrt{}x$ — et a' hányszor x a' fönebbi stb.

8. „ 1. „ „ „ a módositás $+$ *

12. „ 18 és 19. sor fölülr. „ mindenütt $\sqrt{-1}$ e helyett: 1.

16. „ 1—9 sor alólról „ „ 19 „ „ 9

30. „ 3. „ fölülről „ $\dfrac{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi}{\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi'}$

31. „ 12. „ „ „ a kitevő: $\dfrac{n}{m}$

58. „ 1. „ „ „ A^x, log x

74. „ 9. fölülr. „ $\dfrac{\pi}{2} = \log$ stb.

81. „ 4. „ „ „ Differenzialkoeffizient.

82. „ 15. „ „ „ $u + v\sqrt{-1}$

86. „ 9. „ „ „ $\int_0^\infty e^{-ax^2}$

„ 16. „ „ „ $= \frac{1}{2}\sqrt{-\pi}$

„ 19. „ „ „ $= \frac{1}{2}\sqrt{-\pi}$

87. „ 5. „ „ „ $dx = \frac{1}{2}\sqrt{}$ stb.

„ 6. „ „ „ $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{-1}}$

„ 11. „ „ „ $= \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\,(1 - \sqrt{-1})$

PESTEN.
BEIMEL NYOMÁSA. 1847.