AZ

ELMÉLETI PHYSIKA

KÉZIKÖNYVE.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MEGBIZÁSÁBÓL

IRTA

Dr FRÖHLICH IZIDOR

A BUDAPESTI KIR. TUDOMÁNY-EGYETEMEN AZ ELMÉLETI PHYSIKA NY. R. TANÁRA,
A M. T. AKADÉMIA R. TAGJA.

MÁSODIK KÖTET:

DYNAMIKA

ELSŐ RÉSZE.

(ALAPFOGALMAK ÉS AZ ANYAGI PONT DYNAMIKÁJA.)

BUDAPEST.

1896.

FRÖHLICH IZIDOR.

*

DYNAMIKA

ELSŐ RÉSZE.

ALAPFOGALMAK. AZ ANYAGI PONT DYNAMIKÁJA.

KÜLÖNÖS TEKINTETTEL A KEZDŐK IGÉNYEIRE.

A SZÖVEG KÖZÖTTI SZÁZHÉT ÁBRÁVAL.

BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

1896.

220088

A M. T. AKADÉMIA
FŐTITKÁRI HIVATALA

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

R
1977

Magyar Tudományos Akadémia
Könyvtára 792 /1958 sz.

ELŐSZÓ.

Mikor a M. Tud. Akadémia kitüntető megbizásából megirandó «Elméleti physika» kézikönyvem első kötete, a «Kinematika» az 1892. év elején jelent meg: ennek előszavában részletesen fejtettem volt ki azokat a megfontolásokat, melyeket a reám bizott munka megirása közben szem előtt tartani törekedtem.

Azóta az általánosabb értelemben vett mathematikai tudományok állása és kézikönyveinek irodalma hazánkban lényeges változást nem mutatott és így nem találtam okot arra nézve, hogy a munka folytatása közben az akkor körvonalozott elvektől lényegesen eltérjek.

De méltán adhatna megjegyzésekre okot e munka egyes részei megjelenésének lassusága és e tekintetben tényleg a Tek. Akadémia elnézését kell kérnem, bár részemről mulasztás vagy szándékos halogatás nem történt.

Mentségül szolgáljon a tervbe vett mű megirásával járó munka nagysága; illetékes körökben beismert tapasztalás *, hogy különösen a mechanika teljes kézikönyvének olyatén megirása, hogy ez úgy a kezdőnek bevezetésül e tudományba szolgálna, mint az összes lényeges eredmények felölelésével a tudomány jelenlegi színvonalán állva, a megérthetés tekintetében is megfelelő volna és a benne megállapított valamennyi tételes igazságoknak alkalmazását is nyujtaná: nem csekély feladat.

I. A munkának a jelen alkalommal megjelenő kötete a dynamika első része; ez a dynamikai alapfogalmakat és az anyagi pont dynamikáját tartalmazza, úgy gondolom eléggé kimerítő tárgyalásban, miként ez a részletes tartalomjegyzékből is kitetszik; de legyen szabad e tárgynak mikénti felfogásáról, elrendezéséről és feldolgozásáról már e helyen és pedig azon oknál fogva is röviden említést

---

* V. ö. pl. O. Rausenberger: Lehrbuch der analytischen Mechanik, I. kötete előszava harmadik kikezdését, Leipzig, 1888.

tennem, mivel munkám e tekintetben lényegesen eltér a nemzetközi irodalom általánosabban elterjedt, ily tárgyú kézikönyveitől.

1. Tárgyalva a kötet bevezető részében a kinematikának a dynamikához való viszonyát, legnagyobb gondot fordítottam azon alaptapasztalatok és alapfeltevések tüzetes kifejtésére, melyek közül az elsők közvetetlenül magukban, az utóbbiak pedig összes következményeikben mechanikai ismereteinkkel teljes megegyezésben állanak és ezért jogosan e tudomány alapjául tekintendők.

Közelebbről az első főfejezet általánosságban az anyaggal és a mechanikai erővel foglalkozik; azután következik a rendesen úgy nevezett dynamikai elvek rövid áttekintése.

2. Ezen elvekhez egy általánosabb jellegű megjegyzést kell fűznöm. Meglepő ugyanis, de mindazonáltal tény, hogy az oly exact tudományban, milyen a mechanika, a dynamikai elvek definitiója és *különösen jelentésüknek* megállapítása körül a legnagyobb eltérések, következetlenségek, sőt többnyire téves felfogások merültek fel, melyek csak lassan látszanak helyes irányba terelődni.

Munkámban az általános mechanikai alapelv (principium) elnevezést megtartom ugyan, de megkülönböztetek független és nem független elveket.

*Függetlenek*nek nevezem az olyanokat, melyek más elvekből le nem származtathatók, hanem független tapasztalati alaptényt fejeznek ki. Ezekhez tartoznak: Newton három tapasztalati axiómája és a mechanikai energia megmaradásának tapasztalati tétele. Ezek a független elvek szükségesek és elegendők a dynamikai egyenletek előállítására.

Nem független elvek az olyanok, melyek az előbbiekből mathematikai míveletek segélyével állíthatók elő és ezek folyományainak tekintendők: ilyenek a tömegközéppont mozgása megtartásának elve, a területi nyomatékok elve és végre a közönséges eleven erő elve, összesen hét összefüggés, melyet a mozgás-egyenletek hét integráljának szokás nevezni. De nem ezek a tételek szokták az előbb említett fogalomzavart létesíteni, hanem inkább azok a mathematikai eljárások, helyesen mondva a dynamika módszertani elvei, melyek mechanikai értelmezéssel is birnak ugyan, de a melyek tulajdonképen vagy a dynamika egyenleteinek más-más analytikai míveletek segélyével való előállítását czélozzák, vagy ezen egyenleteknek-, további megfejtésükre alkalmasabb formába való-, transformatióját adják, vagy végre ezek integrálására szolgáló módszerekből állanak.

Számos szerző ezen módszertani elveknek nagyobb jelentőséget látszik tulajdonítani, mint az előbb érintett független alapelveknek,

a mi mechanikai szempontból nem tekinthető indokoltnak, bár mathematikai tekintetben a differentiálegyenletek bizonyos osztályának tárgyalására igen alkalmas substratumot nyujtanak, mint ezt Jacobi* dynamikája igen jellemzően mutatja, mely azonban sokkal inkább differentiálegyenletek elmélete, mint mechanika.

Munkámban ezen eljárásokat a «dynamika módszertani elvei» elnevezése alatt foglalom össze, kisebb jelentőséget tulajdonítok nekik, mint a független alapelveknek, bár kifejtésük emezeknél jóval nagyobb tért vesz igénybe.

Valószínű, hogy e tekintetben a nemzetközi irodalomban is nemsokára be fog következni a felfogás megváltozása, első hirnökként látszott jelentkezni a mult évben Painlevé-nek erre vonatkozó műve,** mely a «mechanika differentiálegyenletei integrálása» címe alatt tárgyalja ez előbb említett elveket.

II. A kötet következő, nagyobb főrésze az anyagi pont általános és részletes dynamikáját dolgozza fel.

1. Ennek első, általános főfejezete a pont statikáját és kinetikáját tartalmazza, a szükséges fogalmak kifejtésével, úgy a szabad, mint a kényszernek alávetett pontra nézve; értve ezen utóbbi alatt még azon eseteket is, mikor a pont előírt változó alakú és mozgó, sima vagy érdes pályán vagy felületen egyensúlyban vagy mozgásban van.

A statikai rész és a kinetikai rész említett vonatkozásai itt a fent említett független dynamikai elvek segélyével vannak előállítva.

Ezután kifejtettem az érintett módszertani elveket egy pontra nézve, tettem azt nem csak azért, hogy a pont teljes dynamikáját adjam, hanem mert úgy véltem, hogy könnyebben érthetővé tehetem ezeket, az értelmük szerint különösen a kezdőre nézve oly nehezen felfogható eljárásokat, ha azokat először az anyagi pontra nézve szabatosan állapítom meg.

Ezen elveknek a nemzetközi irodalomban való tárgyalására nézve Jacobi dynamikájában érdekes megjegyzést tesz,*** mikor a legkisebb működés elvéről szólva, mondja, hogy ezen elv majdnem minden tankönyvben, még a legjobbakban is, mint Poisson, Lagrange és Laplace könyveiben, úgy van tárgyalva, hogy az ő (Jacobi)

* C. G. J. Jacobi: Vorlesungen über Dynamik. Herausgegeben von A. Clebsch. Berlin, 1866.

** P. Painlevé: Intégration des Équations différentielles de la Mécanique. Kőnyomatos kiadás. Páris, 1895.

*** Jacobi, Dynamik. 44. l.

véleménye szerint ezt nem lehet megérteni. Igénytelen véleményem szerint ez az észrevétel a jelenlegi kézikönyvek és elvek legnagyobb részére nézve még ma is változatlanul helyesnek tekinthető.

Ezért legnagyobb gondot fordítottam a felölelt ily elvek lehetőleg egyszerű, érthető és szabatos előállítására és mechanikai jelentésük kifejtésére; ekként tárgyaltam a virtuális elmozdulások elvét, d'Alembert elvét, Lagrange mozgásegyenletei első alakját és multiplicátorait, Fourier elvét, a legkisebb kényszer elvét. Továbbá a legkisebb működés elvét, a stationárius működés és a variáló működés Hamilton-féle elvét, Jacobi eljárását, König energéma elvét; mindezeket az utolsó kivételével nemcsak derékszögű, hanem általános coordinátákban is.

Végre ugyanígy a Lagrange-féle mozgás-egyenletek második alakját, Hamilton kánon-alakjait, Jacobi utolsó multiplicátora elvét, Lagrange integráló módszerét.

Befejezi ezen általános részt az anyagi pont relativ mozgása dynamikájának tárgyalása.

2. A részletes rész az anyagi pont egyensúlyának és mozgásának általános és speciális problémáival foglalkozik és az általános rész elkerülhetetlenül szükséges kiegészítését képezi. Először is a szabad és a kényszernek alávetett anyagi pont statikája többrendbeli példájának részletes kifejtése után megoldással ellátott ötven feladat következik.

Az anyagi pont mozgásának problémái közül mindazok ki vannak zárva, melyek egyszerűen kinematikaiakra vezethetők vissza, azaz a szabad pont mozgásáéi; kivételt képez ezeknek egy igen fontos főesete: ugyanis az általános gravitátió, a két test problémája, Keppler feladata, melyek jelentőségükhöz képest elég kimerítő tárgyalást nyernek.

A többi problémák első főcsoportja meghatározott szilárd vagy változó és mozgó, sima vagy érdes pályákon vagy felületeken való mozgásra vonatkoznak, különös tekintettel a physikai tekintetben vagy a tudomány fejlődése szempontjából fontos esetekre, milyenek az ideális, sík és gömbi inga, a tautochrón és a brachystochrón görbék, Foucault ingakisérlete, s i. t.

Egy következő főcsoport tárgyalja a pontmozgást ellenálló közegben. Fejezeteit képezik: a pontballistika általános és részletes problémája; a harmonikus mozgásoknak és a centrális mozgásoknak megzavarása ellenálló közegben.

Ezt követi egy főfejezet, mely az általános részben tárgyalt, fentemlített dynamikai elveket tényleges mozgásproblémákra alkal-

mazza és analytikai nehézségek elől ki nem tér; benne egy külön fejezet tárgyalja az elliptikus coordináták különböző rendszereit és értékesítésüket mechanikai problémákra.

Az utolsó főfejezet tartalmazza az előbbiekben alkalmazott valamennyi eljárásra, mozgásfajra és elvre nézve kiválasztott, megoldással ellátott feladatokat, számszerint százhetvenet.

III. A könyv tartalmának itt adott áttekintéséhez legyen szabad még megjegyeznem, hogy nemcsak e könyv elvi részét kellett ismételve átdolgoznom és elrendeznem, hanem, hogy ugyanezt kellett tennem a benne előforduló összes mozgásproblémákra nézve, melyek közül számos egészen új van; ez az utóbbi megjegyzés a feladatokra nézve is áll, melyek legnagyobb részének megoldásait szintén többszörös átszámítással törekedtem ellenőrízni. A kéziratot több mint két évvel ezelőtt adtam a nyomdába; de a szedés fárasztó volta, tartalmának pontos ellenőrzése és a számos correcturák gondos elintézése késleltették a munkát; ezek és a fent érintett körülmények magyarázzák a Kinematika s a jelen kötet megjelenése közötti öt évi időközt.

Miután a benne felölelt anyag lényeges részeiben teljességre és a tudomány jelenlegi színvonalának elérésére törekedtem, várható volt, hogy munkám ezen kötetének terjedelme majdnem túlhaladja a hasonczélú nagyobb szabásu nemzetközi irodalmi termékek keretét; s hogy berendezésére nézve emezektől lényegesen eltér; de a jelzett czélnak sem az áttekinthetőséget, még kevesbé a megérthetést nem áldoztam fel. Sőt, hogy miként a Kinematikát, úgy e kötetet a kezdő is használhassa, a XXVII. lapon soroltam fel a neki szánt paragraphusokat és szakaszokat, melyek önmagukban összefüggő kis vezérfonalat képezve, e tudományba való bevezetésre alkalmasak.

IV. Nem hagyhatok egészen érintetlenül egy alárendeltnek látszó, de még sem teljesen jelentéktelen kérdést: a tudományos műnyelv kérdését. A műnyelv maga az idővel változó műszavak összesége, mely a legtöbb esetben az irodalomban és az élő nyelvben nem egységes s mely bővítésre szorul, mihelyt új fogalmakra vonatkozó kifejezések képzése és ezeknek a nyelvbe olvasztása szükséges. Az európai nagy mívelt nemzeteknél az ily folyamatok önként, minden nehézség nélkül mennek végbe, mert rendesen a latin, ritkábban a görög nyelv szókincse szolgál e bővítések forrásául, a mi még avval a rendkívüli előnynyel is jár, hogy az így keletkezett terminologia nemzetközi. Sajnos, hogy a magyar tudományos műnyelv nagyrészében nem simult a nemzetközihez; a purismus korában keletkezett, jelenleg feleslegesnek felismert számos tudományos magyarítást most alig lehetséges a nemzetközi kifejezésekkel helyette-

síteni, s ez a körülmény a magyar tudományos irodalom elszigeteltségét nem csökkentheti.

Munkám megirása közben a magyar irodalomban eddig még föl nem merült többrendbeli fogalomra kifejezéseket kellett alkotnom; magyarításokat a szükséges esetekben alkalmaztam; de nagyobbára a nemzetközi terminologiával éltem és bár nem állíthatom, hogy használt műszavaim ingadozásoktól mentek, vagy kifogástalanok volnának mégis ahhoz az elterjedt tapasztaláshoz hajlok, hogy általában véve a magyar nyelvérzéket legjobban elégíti ki az idegen műnyelvi fő- és melléknevek latinos képzése s hogy nyelvünk ezeket fogadja be legszivesebben.*

V. Hátra van, hogy a Tekintetes Akadémiának mélyen érzett hálámat fejezem ki a jelen kötet kiadásával tanusított jelentékeny áldozatkészségeért; köszönetet mondok továbbá Csillag Vilmos műegyetemi tanársegéd úrnak, ki rajzaim szerint a kötet ábráit geométriailag helyes vetitésben készítette el; elismerést érdemel még a Franklin-társulat nyomdája is, mely a könyv technikai kiállításával a jogosan emelhető igényeknek eleget tenni törekedett.

Evvel elbocsátom e könyvet hazai irodalmunk mezejére, hogy a benne hirdetett igazságoknak meghonosításához és terjesztéséhez érdeme szerint hozzájárulhasson; kivánom, hogy e munka az említett czélra, ha bármily csekély mértékben is, alkalmasnak találtassék.

Budapesten, 1896. évi deczember 1-én. *A szerző.*

---

* Különösen az idegen származásu főnevekből készült melléknevekben mutatkozik nagy eltérés; így pl. az ellipsis-ből keletkeztek az irodalmilag használt elliptikus, elliptikai, ellipsises, ellipsisi melléknevek.

TARTALOM.

Lap

Előszó ... V
Tartalom ... XI
Figyelmeztetés ... XXVIII
A «Dynamika» észrevett sajtóhibái ... XXIX
Az elméleti mechanika főbb irodalmi jelenségei sorozatának kiegészítése ... XXIX
A «Kinematika» ujabban észrevett sajtóhibái ... XXX
A «Mathematikai Repertórium» ujabban észrevett sajtóhibái ... XXXIV

Az erő, az anyag, a dynamika alapfogalmai és alapelvei (axiomái.)

I. Kinematika és Dynamika. Anyag és mechanikai erő.

1. §. Geométria, kinematika, dynamika. Tehetetlenség és erő mint a mozgás alapokai ... 1
2. §. A mechanikai erő különböző nyilvánulása. Statika és kinetika ... 3
3. §. A dynamika axiomái, mint a tapasztalás és a feltevés egyesítésének eredményei ... 4
4. §. Anyag. Tömeg. Jellege. Egysége. Tömeggeométria ... 5
5. §. A mechanikai erő jellemzői. Térfogatbeli, felületi, vonalra, pontra ható erő. Elemi erő. Az erő vector. Hat meghatározó adata. Méréséről általánosságban ... 6

II. A dynamika független alapelvei (axiomái).

6. §. A dynamika alaptényeinek megállapításáról. GALILEI és NEWTON. Az axioma fogalma ... 9
7. §. A dynamika általános, független axiomáinak NEWTON-féle fogalmazása. Az energia elve független, de speciális dynamikai elv. Energetika ... 10
8. §. Az első axioma, az anyag tehetetlenségének (kitartóságának) elve ... 13
9. §. Az első axioma második részének tapasztalati általánosítása: a mozgató erő az elsőrendű gyorsulás oka. Ennek feltevésszerű (hypothetikus) kiterjesztése ... 14
10. §. Tapasztalás: A magasabbrendű gyorsulások változására nem kell külön okokat felvenni ... 15
11. §. A második axioma: A mozgató erő a tömeg és a gyorsulás szorzatával arányos vector. Egysége. Jellege ... 16

Lap

12. §. A harmadik axioma: A hatás és viszszahatás (ellenhatás) statikai és kinetikai erőkre nézve mindig ellentetten egyenlő 19
13. §. Anyagi pont és rendszer kényszermozgása. Kényszererők, független (szabad) erők. A mozgás viszszavezetése szabad mozgásra. Effectiv erők, reactió-erők. A második és a harmadik axioma alkalmazása ... 21

III. A tömeg, a statikai, a kinetikai erő egysége és mérése; az utóbbiak kisérleti egyenértékűsége. Munka és erély. Az energia tapasztalati tétele.

14. §. A statikai erők és a tömegek méréséről általánosságban ... 23
15. §. A mozgató erő egysége; a din (dyne); mérése 25
16. §. A statikai és kinetikai erő egymással való összehasonlítása. Egy és ugyanazon erőnek egyszerre statikai és kinetikai nyilvánulása 26
17. §. Az absolut (tudományos) és a gyakorlati erőegységek egymással való összehasonlítása. Erőegység Budapesten. Egyenlő erők 28
18. §. Munka. Mértéke. Jellege 29
19. §. Tudományos (absolut) és gyakorlati munkaegység. Erg és kilogrammeter (meterkilogramm) 30
20. §. Munkasiker (effectus). Mértéke. Jellege. Lóerő. Watt ... 32
21. §. Dynamikai energia: mozgási és helyzeti erély 32
22. §. Az erély megmaradásának tapasztalati elve 34

IV. A dynamika nem független alapelveinek (az integráltételek és a módszertani elvek) áttekintése.

23. §. Általános megjegyzés. Az általános dynamikai tételek és elvek, mint a tapasztalati elvek folyományai 36
24. §. A mozgásegyenletek általános integráljai kifejezte dynamikai elvek kimutatása. Példák 37
25. §. A dynamika módszertani elveinek áttekintése. A methodusok főbbjeinek fogalmazása 42
26. §. Az általános coordináták alkalmazásának módszere 47

ANYAGI PONT DYNAMIKÁJA.

A. ÁLTALÁNOS RÉSZ.

I. Anyagi pont statikája (egyensúlya és változatlan mozgásállapota).

27. §. Az egyensúly általánosságban relativ. Szabadon mozogható pont egyensúlya 49

Lap

28. §. Előírt sima felületen avagy sima görbén mozogható pont egyensúlya ... 50
29. §. Surlódás. Sikló (csúsztató) és gördülő súrlódás. Együtthatójuk. Előírt érdes felületen vagy görbén lévő pont egyensúlya. A súrlódás szöge ... 54

II. Anyagi pont kinetikája (mozgástana).

1. Az anyagi pont helyzetével és mozgásával kapcsolatos dynamikai fogalmak. Szabad tömegpont mozgásának egyenletei és tételei.

30. §. Általános megjegyzés: Az elmozdulásnak, a sebességnek, a gyorsulásnak s í. t. dynamikai analogonjai ... 56
31. §. Tömegvector vagy tömegnyomaték. Jellege ... 56
32. §. A tömegvector változásának mérve a mozgás nagysága ... 57
33. §. A tömegvector gyorsulása a mozgató erő. Magasabb rendű gyorsulásai ... 58
34. §. Anyagi pontra ható mozgató erő componenseinek különböző kifejezései ... 59
35. §. Az anyagi pont tehetetlenségi (négyzetes) nyomatékai ... 60
36. §. Az anyagi pont eleven ereje ... 61
37. §. Magasabb rendű erők a dynamikában nem szükségesek ... 62
38. §. Munkaelem és munka analytikai kifejezése ... 62
39. §. Az eleven erő formális tétele szabadon mozgó anyagi pontra nézve ... 64
40. §. Impulsus. Impulsiv erő ... 65
41. §. A viriál. Az eleven erő középértéke ... 67
42. §. Erőfüggvény. Potentiál ... 69
43. §. Az aequipotentiális (szín-, niveau-, egyensúlyi-) felületek és erőgörbék. Erőcsövek, erőfonalak ... 71
44. §. Az energia elve egy pontra nézve ... 74
45. §. Anyagi pont mozgása ellenálló közegben ... 77

2. Az anyagi pont kényszermozgásának általános tárgyalása. Kényszer és kényszererő.

46. §. Az anyagi pont kényszereiről és kényszererőiről általánosságban ... 80

a) Előírt szilárd pályán surlódás nélkül és surlódással történő mozgás.

47. §. Az előírt pályán végbemenő mozgásról általánosságban ... 80
48. §. Az előírt sima pálya szilárd síkbeli görbe. A mozgás egyenletei. A nyomás ... 82

Lap

49. §. Az előírt sima pálya szilárd térbeli görbe. A mozgás egyenletei. A nyomás ... 85
50. §. Előírt szilárd érdes pályán (surlódással) történő pontmozgás egyenletei ... 88
51. §. Az eleven erő és az energia tételei előírt szilárd sima és érdes pályánál ... 90

b) Előírt szilárd felületen surlódással vagy surlódás nélkül végbemenő pontmozgás.

52. §. Előírt felületen történő mozgásról általánosságban ... 91
53. §. Előírt szilárd sima felületen történő pontmozgás egyenletei ... 92
54. §. A kényszererő más meghatározási módja; megegyeztetése az előbbivel ... 96
55. §. Folytatás. Esetek, melyekben a pont az előírt szilárd felületen geodätikus görbét ír le ... 99
56. §. Előírt szilárd felületen surlódással történő mozgás ... 100

c) Mozgó és változó előírt sima vagy érdes felületen és pályán végbemenő mozgás és fennálló egyensúly.

57. §. Sima vagy érdes mozgó és változó előírt felületen végbemenő mozgás ... 103
58. §. Sima vagy érdes mozgó és változó előírt pályán történő mozgás 107
59. §. Mozgó és változó sima vagy érdes előírt felületen vagy pályán lévő pont egyensúlya ... 110

3. A dynamika általános módszertani elveinek kifejtése egy pontra vonatkozólag közönséges coordinátákban.

60. §. Általános megjegyzések ... 111

a) A virtuális elmozdulások elve. Az egyensúly jellege. D'Alembert *elve és* Lagrange *mozgásegyenleteinek első alakja.* Fourier *elve. A legkisebb kényszer* Gauss*-féle elve.*

61. §. A virtuális elmozdulásokról (elmozdításokról) és a virtuális munkáról általánosságban ... 112
62. §. A virtuális elmozdulások elve, mint az egyensúly feltételeinek egy alakja ... 113
63. §. Az egyensúlyi helyzetből való véges és végtelen kicsiny elmozdulás (elmozdítás) közben végezett munka ... 115
64. §. Az anyagi pont egyensúlyának különböző eseteiről és ezeknek ismertető jeleiről. Tapasztalatbeli eljárás ... 116

Lap

65. §. A pont erőfüggvénye és egyensúlya között fennálló vonatkozás ... 118
66. §. D'Alembert elve a gyorsító, az elveszett és a független (szabad) erők egyensúlyáról ... 119
67. §. A virtuális elmozdulások elvéből az egyensúly egyenletei, a kényszererők; az Euler-Lagrange-féle multiplicátorok ... 122
68. §. Lagrange mozgásegyenleteinek első alakja az időtől explicite függő feltételek esetében D'Alembert elve alapján. A kényszererők és az Euler-Lagrange-féle multiplicátorok 126
69. §. Az egyensúly egyenletei előírt mozgó és változó, érdes vagy sima felület vagy pálya esetében a virtuális elmozdulások elve alapján ... 129
70. §. Fourier elve: Egyensúly alkalmával a virtuális munka positiv nem lehet ... 131
71. §. A legkisebb kényszer elve (Gauss elve) ... 133

b) A működés és variatiója. A legkisebb működés Maupertius-*féle elve. A stationárius működés* Hamilton-*féle elve.*

72. §. A működés (actió) definitiója és kifejezésének különböző alakjai ... 135
73. §. Variátió. Az eleven erő variátiója csak erőfüggvény esetében egyenlő a virtuális munkával ... 138
74. §. A legkisebb működés elve. Conservativ erők ... 140
75. §. Folytatás. A működés zavartalan pályára nézve minimum vagy állandó ... 144
76. §. A mozgás közönséges egyenletei a legkisebb működés elvéből ... 146
77. §. A stationárius működés elvének Hamilton-féle alakja; ennek értelmezése ... 148

c) Hamilton *integrálja és ennek teljes variatiója. A variáló működés elve; a mozgás egyenleteinek transformátiója. A characteristikus egyenlet teljes integráljának* Jacobi-*féle alakja.*

78. §. A Hamilton-féle integrál általános sajátságai ... 152
79. §. Hamilton integráljának characteristikus egyenlete, mikor az energia megmaradásának elve áll és mikor ez nem áll 155
80. §. A működés (actió) jellemző egyenlete az energia elve esetében 157
81. §. A működés, mint characteristikus függvény teljesen meghatározza a conservativ mozgást ... 160
82. §. A characteristikus egyenlet teljes integráljának sajátságairól, és integrálásának egy egyszerű módjáról ... 162

Lap

83. §. Egyenműködési (aequiactionális) felületek. Tulajdonságaik 167
84. §. HAMILTON integráljának és jellemző egyenletének sajátságai, ha a dynamikai energia elve nem áll ... 168

d) Az energéma elve: a dynamika alapegyenleteinek értelmezése KÖNIG *szerint.*

85. §. KÖNIG tárgyalásának czélja. Uj mechanikai fogalmai. Alaptörvényének körvonalozása ... 172
86. §. Az erő dispositiója (irányítása); a kényszer egyenlete; a kényszernek alávetett erőcomponens ... 174
87. §. Az *egy* feltételnek alávetett mozgás egyenleteinek származtatása KÖNIG alaptörvénye első alakjából ... 175
88. §. Az alaptörvény, két feltételnek alávetett pontmozgásra alkalmazva ... 177
89. §. A gyorsulási viriál a tényleges mozgásnál maximum ... 183
90. §. Szabadon mozgó pont tényleges energémája minimum ... 183
91. §. A kényszererők energémájának minimumtétele. (A kényszererők elve). Megegyezés a legkisebb kényszer elvével ... 184

4. Az anyagi pont mozgásegyenletei általános coordinátákban.

a) Általános és orthogonális coordináták, sebességek, gyorsulások, erőcomponensek.

92. §. Általános coordináták, sebességek, gyorsulások. Szabad- és kényszermozgás független coordinátái. Jelölések ... 186
93. §. Altalános orthogonális coordináták néhány alaptulajdonsága 188
94. §. Az általános erőcomponensek és virtuális munkájuk, kifejezve derékszögű erőkkel ... 190

b) A mozgás általános egyenleteinek LAGRANGE*-féle második alakja szabad- és kényszermozgásnál.*

95. §. LAGRANGE általános mozgásegyenleteinek második alakja szabad mozgásnál ... 191
96. §. A mozgásegyenletek LAGRANGE-féle második alakja, származtatva a stationárius működés HAMILTON-féle elvéből ... 193
97. §. LAGRANGE mozgásegyenleteinek második alakja bármily kényszermozgás esetén közvetetlenül érvényes ... 194

c) A mozgás egyenleteinek HAMILTON*-féle kánon-alakja.*

98. §. A mozgásnyomatékok (kinetikus momentumok) általános coordinátákban ... 198

Lap
99. §. Az eleven erőnek különböző kifejezéseiről ... 199
100. §. Az eleven erő különböző alakjainak differentiálquotientsei ... 200
101. §. A mozgás egyenleteinek HAMILTON-féle kánon-alakja. Kétféle eljárás. A kánon-alak erőfüggvény esetében ... 202
102. §. Az energia elve, származtatva a LAGRANGE-féle mozgásegyenletek második alakjából ... 203

d) A variáló működés elve, a characteristikus egyenlet és a characteristikus függvény általános coordinátákban.

103. §. HAMILTON integrálja és a jellemző egyenlet általános coordinátákban ... 205
104. §. A működés (actió) jellemző egyenlete és ennek teljes integrálja, mikor az energia elve fennáll ... 207
105. §. HAMILTON jellemző egyenlete és ennek teljes integrálja, mikor az energia elve nem áll ... 212
106. §. Az erőfüggvény a sebességektől is függ; de az energia elve áll. I. A munkaelem egyenlete nem elegendő az erő kifejezésének egyértékű előállítására ... 213
106*a*. §. Az erőfüggvény a sebességektől is függ; de az energia elve áll. II. Az erő kifejezésének egyértékű előállítása HAMILTON elve alapján LAGRANGE mozgásegyenletei segélyével ... 216
107. §. Példák az előbbiekre az electrodynamikából: W. WEBER, B. RIEMANN, R. CLAUSIUS electrodynamikus alaptörvényei ... 218

5. A dynamika differentiálegyenleteinek integrálására szolgáló JACOBI*-féle és* LAGRANGE*-féle módszerek.*

a) JACOBI *utolsó multiplicátorának elve.*

108. §. A dynamika egyenletei, tárgyalva ezeket mint lineáris differentiál egyenleteket ... 220
109. §. Lineáris totális differentiálegyenletrendszer általános és teljes integrálja. Functionális determinánsa és multiplicátora ... 220
110. §. A multiplicátor jellemző partiális differentiálegyenlete ... 223
111. §. A redukált differentiálegyenletrendszer és multiplicátora; ennek meghatározása ... 228
112. §. Folytatás. Az utolsó multiplicátor és meghatározása ... 230
113. §. Az utolsó multiplicátor egyszersmind integráló tényező. Kétféle bizonyítás. Az utolsó teljes integrál ... 233
114. §. Az utolsó multiplicátor nevezője determináns alakjában ... 235
115. §. A mozgás egyenletrendszerei HAMILTON-féle általános typusának multiplicátora szabad és surlódás nélküli kényszermozgásnál állandó menynyiség ... 236

Lap

b) LAGRANGE *eljárása elsőrendű partiális differentiálegyenletek integrálására. A characteristikus egyenlet integrálása.*

116. §. Elsőrendő partiális differentiálegyenletekről. A teljes, az általános és a singuláris integrál (megoldás). A mechanika partiális differentiálegyenletei ... 237
117. §. Partiális differentiálegyenlet teljes integráljából (megoldásából) az általános és a singuláris megoldás képzése ... 238
118. §. Az elsőrendű partiális differentiálegyenlet bármily megoldása a teljes, az általános vagy a singuláris megoldások csoportjába tartozik. Bármely teljes integrál az összes integrálfajokat szolgáltatja ... 242
119. §. Lineáris, elsőrendű partiális differentiálegyenlet általános integrálja, származtatva a segéd-differentiálegyenletrendszer integráljaiból ... 244
120. §. LAGRANGE integráló módszere, alkalmazva két független változóval biró, tetszőleges fokú elsőrendű partiális differentiálegyenletre ... 250
121. §. LAGRANGE integráló módszere. Folytatás: az adott differentiálegyenlet a függő változót explicite nem tartalmazza ... 251
122. §. LAGRANGE módszerének alkalmazása HAMILTON characteristikus függvényének meghatározására, mikor az energia elve áll ... 253

6. Anyagi pont relativ mozgásának erői, dynamikai elvei és egyenletrendszerei.

123. §. Anyagi pont relativ mozgásának erői és egyenletei ... 255
124. §. A dynamikai elvek relativ pontmozgás esetében ... 256
125. §. LAGRANGE mozgásegyenletei második alakjának alkalmazása a relativ mozgásra és CORIOLIS tételének származtatására ... 257

B. RÉSZLETES RÉSZ.

Az anyagi pont egyensúlyának és mozgásának általános és speciális problémái.

I. Az anyagi pont egyensúlyának problémái.

1. Eljárások és példák anyagi pont egyensúlyára.

126. §. Példa szabad pont egyensúlyára. Erőfüggvény. Az egyensúly stabilis vagy labilis voltának eldöntése ... 260

Lap
127. §. Példák előírt sima görbén és felületen való egyensúlyra 262
128. §. Példák anyagi pont egyensúlyára d'ALEMBERT elve alapján 265

2. Feladatok szabad és kényszernek alávetett anyagi pont egyensúlyára.

129. §. Feladatok szabad pont egyensúlyára (tíz feladat megoldással) 268
130. §. Feladatok előírt sima pályán mozogható pont egyensúlyára (tizenöt feladat megoldással) 272
131. §. Feladatok előírt sima felületen mozogható pont egyensúlyára (tizenöt feladat megoldással) 276
132. §. Feladatok pont egyensúlyára előírt érdes pályákon és felületeken (tíz feladat megoldással) 282

II. Az anyagi pont mozgásának problémái.

133. §. Általános megjegyzések a geométriai és az anyagi pontok szabad és kényszermozgására nézve 286

1. Eljárások és példák anyagi pont mozgására.

a. Az általános gravitátió; a két test problémája; KEPPLER feladata.

1) NEWTON vonzási törvénye és az attractió állandója.

134. §. Az általános gravitátió (tömegvonzás) törvénye, mint a tapasztalás kifejezése. A gravitátió állandója 287

2) A két test problemája: bolygók és üstökösök mozgása a nap körül; holdak mozgása bolygójuk körül.

135. §. A NEWTON-féle törvény szerint egymást vonzó szabad két tömegpont mozgásegyenletei 290
136. §. A bolygók rendszerének tömegközéppontja egyenletesen mozog egyenesben. A bolygók relativ mozgása centrális mozgás 292
137. §. A bolygók relativ mozgása. A területek elve és az eleven erő tétele 294
138. §. Folytatás. A relativ pályák kúpszeletek. Megkülönböztető jeleik 296
139. §. A bolygók ellipsis-pályáinak teljes meghatározása a kezdet adataiból 298
140. §. Az ellipsisben mozgó bolygók keringési ideje. KEPPLER harmadik törvénye. Az attractiónak csillagászati (GAUSS-féle) állandója 300

Lap

140*a*. §. Bolygóholdak zárt pályái. Holdas bolygók valamint kettős csillagok tömegei ... 302
141. §. A parabola-pálya teljes meghatározása a kezdet adataiból 303
142. §. A hyperbola-pálya teljes meghatározása a kezdet adataiból 305
143. §. A coordináták és az idő közötti véges összefüggések ... 306
144. §. A két test mozgása differentiálegyenleteinek teljes integráljai (törzsegyenletei) ... 307
145. §. Kivételes eset: Egyenesvonalú pálya ... 308
146. §. A pálya meghatározása a vezérsugár időbeli differentiálegyenlete alapján ... 310
147. §. A relativ pálya alakjának származtatása rövid úton ... 313
148. §. A bolygók és üstökösök pályáinak hodographjai körök ... 314

3) A bolygók heliocentrikus coordinátáinak az idővel való explicit kifejezése: Keppler problémája.

149. §. A valódi, az excentrikus, a közép anomália. Keppler egyenlete. Középponti egyenlet ... 319
150. §. Keppler problémájának közelítő megfejtéseiről ... 322
151. §. Keppler problémájának szigorú sorkifejtéseiről: Kifejtés 1) Lagrange megfordító sora segélyével és 2) első fajú Bessel-féle függvények szerint ... 324

4) A bolygók pályaelemeinek és heliocentrikus coordinátáinak összefüggése.

152. §. Bolygók pályaelemei ... 331
153. §. Az i, Π, Ω elemek összefüggése a pályasík normálisának és focális tengelyének irányaival ... 333
154. §. A bolygók derékszögű coordinátái, kifejezve a pályaelemek segélyével ... 335

b) Eljárások és problémák meghatározott pályán haladó anyagi pont kényszermozgására.

1) Anyagi pontmozgás előírt szilárd sima pályán.

155. §. Anyagi pont mozgása vertikális síkú sima előírt pályán a földnehézség egyedüli hatása alatt. Az egyenletek kétféle alakja. Lejtő ... 336
156. §. Folytatás: Ideális inga. A nehéz pont vertikális sima kör homorú oldalán mozog. Derékszögű és polárcoordináták ... 338
157. §. Folytatás: Az egyes esetek tárgyalása; egyirányú körmozgás, lengő körmozgás; határeset ... 339
158. §. Vertikális síkú sima görbék domború oldalán végbemenő

Lap

mozgás a földnehézség egyedüli hatása alatt (parabola, ellipsis, kör, cyclois esetei) ... 347

159. §. Logarithmikus csigagörbén haladó anyagi pont mozgása centrális erő befolyása alatt; három eset ... 350

160. §. Előírt ellipsis-alapú csavargörbén végbemenő mozgás a földnehézség egyedüli hatása alatt ... 354

2) Anyagi pontmozgás a mozgás feltételei által meghatározott sima pályán (Tautochróna és brachystochróna [az egyenlő érkezés és a legrövidebb érkezés görbéi]).

161. §. Anyagi pont sima vertikális cyclois homorú oldalán a földnehézség hatása alatt mozog. Tautochróna. A tautochronismus pontja 356

162. §. A földnehézség egyedüli hatása alatt végbemenő mozgásokra nézve a cyclois az egyedüli tautochróna ... 358

163. §. A földnehézségi erő tautochróna-problémájának általánosítása (Abel feladata) ... 360

164. §. Tetszőleges erők befolyása alatt végbemenő tautochrón mozgás tangentiális gyorsulása az egyszerű harmonikus mozgáséval egyenlő ... 363

165. §. A tautochronismus feltétele, ha a független erő a sebesség négyzetének lineáris függvénye ... 365

166. §. A tautochróna egyenlete centrális független erők esetében 368

167. §. A brachystochróna. Általános differentiálegyenletei ... 371

168. §. A brachystochróna egy pont s egy felület, két felület, görbe vonal és felület, s két görbe vonal között ... 374

169. §. A brachystochróna néhány fontos általános tulajdonsága. A reflexió tétele ... 376

170. §. A brachystochróna a földnehézség egyedüli hatása alatt. Analytikai tárgyalás; a görbe cyclois ... 379

171. §. Ugyanez a feladat. Általánosítás. Bernoulli geométriai eljárása 383

172. §. A brachystochróna feltétele és a legkisebb működés elve között fennálló vonatkozás ... 386

173. §. A brachystochróna egyenlete centrális erőkre nézve ... 387

174. §. A brachystochróna egyenlete párhuzamos erőkre nézve ... 388

3) Anyagi pontmozgás előírt mozgó sima pályákon.

175. §. Sík, sima belsejű, síkjában lévő tengely körül forgó csőben történő mozgás differentiálegyenletei. Egyszerű esetek 389

176. §. Folytatás: A cső vertikális kör, mely függélyes átmérője körül egyenletesen forog. Részletezés ... 393

177. §. Egyenletesen forgó sima csőben a földnehézség egyedüli hatása alatt állandó sebességgel mozog az m; mily alakú a cső? Kétféle eljárás ... 398

Lap

4) Surlódó pontmozgás előírt szilárd pályán.

178. §. Surlódó pontmozgás. I. külső erők nem hatnak. Egyszerű esetek: sík görbék, állandó görbületi görbék, logarithmikus csigagörbe ... 400
179. §. Surlódó pontmozgás. II. Nehéz pont surlódó mozgása előírt egyenesen, körön, tautochrón cycloison, vertikális csavargörbén ... 402

c) Eljárások és problémák meghatározott felületen haladó anyagi pont kényszermozgására.

1) Anyagi pontmozgás előírt sima felületen.

180. §. Anyagi pont a földnehézségi erő hatása alatt sima gömbfelület homorú oldalán mozog. Ideális gömbi inga mozgásának részletezése ... 406
181. §. Folytatás: A kúp-(konikus) inga ... 415
182. §. Folytatás: A gömbi inga igen kicsiny lengései ... 416
183. §. Vertikális tengelyű sima forgás-felületen haladó nehéz pont mozgásegyenleteinek integrátiója. Általánosítás ... 416
184. §. Pontmozgás sima forgás-felület geodätikus görbéin. CLAIRAUT tétele. Egyszerű példák ... 419
185. §. Pontmozgás háromtengelyű ellipsoid geodätikus görbéin 422

2) Anyagi pontmozgás előírt mozgó sima felületen.

186. §. Az ideális gömbi inga mozgása a forgó földön. FOUCAULT ingakisérletének elmélete ... 424
187. §. Valamely pont egy másik, mozgó ponttól változatlan távolságban tartozik maradni. Tractoria és directrix. Egyszerű példák ... 427

3) Anyagi pontmozgás a mozgás feltételei által meghatározott sima felületen.

188. §. Mozgás legnagyobb esésű görbék mentén. JOACHIMSTHAL tétele. Párkányzat-felület (Surface moulure) ... 431

4) Surlódó pontmozgás előírt szilárd felületen.

189. §. Súlytalan és súlyos pont mozog érdes gömbfelület homorú oldalán ... 435
190. §. Nehéz pont vertikális tengelyű körhenger belső érdes felületén mozog. Ugyanez súlytalan pontra nézve ... 437

Lap

d) Eljárások és példák ellenálló közegben végbemenő pontmozgásokra.

1) Állandó erő. A ballistika egyszerű és általános problémája pontra nézve.

191. §. Az ellenállás a sebesség tetszőleges hatványával arányos; független (szabad) erők nincsenek ... 441
192. §. Az ellenállás a sebesség négyzetével arányos; a független erő nagysága és iránya állandó és a mozgás irányába esik. A levegőben függélyesen felfelé hajított vagy lefelé eső test vagy lövedék mozgása ... 442
193. §. A pont ballistikus problémájának Jacobi-féle általános tárgyalása $\{mS=m(a+bv^n)\}$. A probléma visszavezetése quadraturákra ... 445
194. §. Folytatás: Egyszerűsítés, az ellenállásnak nincs állandó tagja $\{mS=mbv^n\}$ ... 448
195. §. Az ellenállás a sebesség első hatványával arányos. Közvetetlen eljárás ... 450
196. §. Az ellenállás a sebesség második hatványával arányos. Közvetetlen eljárás. Részletezés ... 450
197. §. A pont általános ballistikus problémájának megfordítása: Az ellenállás, kifejezve az állandó irányú erő és a pálya alakja segélyével ... 455

2) Egyszerű harmonikus mozgások megzavarása ellenálló közegben.

198. §. A kényszerített rezgés és a resonantia egyszerű esetei ... 456
199. §. A légüres térben tautochrón görbe ilyen marad, ha az ellenállás a sebesség első hatványával arányos ... 459
200. §. Kis lengésű ingamozgás ellenálló közegben. Egyszerű eset 459
201. §. Folytatás: Kis lengésű ingamozgás tetszőleges ellenálló közegben ... 460

3) Centrális mozgás ellenálló közegben.

202. §. Ellenálló közegben végbemenő centrális mozgás differentiálegyenletei ... 463
203. §. Az ellenálláson kívül vezérsugári és forgató gyorsulással biró mozgás differentiálegyenletei ... 465
204. §. A centrális vonzó erő a távolsággal, az ellenállás a sebességgel arányos. Rezgő pálczák és kis lengésű gömbi ingák tényleges pályái: fogyó ellipsispályák; fogyó és deformálódó ellipsispályák ... 466

Lap

205. §. Folytatás. Kivételes eset: A pálya logarithmusos spirális. A probléma megfordítása ... 468
206. §. Bolygók relativ mozgása ellenálló közegben ... 472
207. §. Folytatás: Az ellenállás a sebesség négyzetével arányos. Közelítések ... 472
208. §. Folytatás: A bolygó eredeti körmozgásának igen kis ellenállású közeg létesítette megzavarása. A pálya, a keringési idő és a sebesség megváltozása ... 474

2. A dynamika módszertani elveinek alkalmazása mozgásproblémák megfejtésére.

a) D'Alembert elvének alkalmazása változó pályájú, mozgó pályájú és relativ pontmozgásokra.

209. §. Előírt, törvényszerűen változó pályán végbemenő anyagi pontmozgás. Egyszerű példák ... 475
210. §. Folytatás: D'Alembert elvének alkalmazása mozgó pályák és mozgó felületek problémáira. Egyszerű példák ... 478
211. §. Súlytalan fonálon függő két súly (egymással kapcsolt egyszerű két inga) lengése. Igen kicsiny lengések részletezése ... 482
212. §. D'Alembert elve relativ centrális mozgás esetében: a relativ coordináta-rendszer a centrum körül saját síkjában egyenletesen forog. Részletezés: a relativ pálya logarithmusi spirális kényszer- és szabadmozgásnál ... 487

b) A legkisebb vagy a stationárius működés elvének alkalmazása.

213. §. A mozgó részecske különböző két közegben fekvő két pont közötti utat futja be a két közegben különböző, de állandó sebességgel. (A fénytörés az emanátió-elmélet alapján) ... 489
214. §. A centrális mozgás differentiálegyenletei a stationárius működés elvéből, ha a sebesség csak a távolságtól függ ... 491
215. §. Folytatás: A pálya differentiálegyenlete közvetetlenül a stationárius működés elvéből ... 492
216. §. A sebesség csak egy coordináta függvénye; a mozgás egyenletei a stationárius működés elve alapján ... 493

c) A variáló működés elvének alkalmazása: a pontmozgás problémáinak megfejtése Hamilton characteristikus egyenletének Jacobi-féle teljes megoldása segélyével.

217. §. A földnehézség okozta szabad mozgás Hamilton elve alapján 494
218. §. A centrális mozgás teljes megfejtése Hamilton elve alapján 496

Lap

218*a*. §. Folytatás: A characteristikus függvény bolygók relativ mozgására nézve, ellipsis-, parabola-, hyperbola-pálya esetében ... 498

218*b*. §. A bolygók relativ mozgásának JACOBI-féle tárgyalása. EULER és LAMBERT tétele két vezérsugárról és összekötő pályahúrjukról ... 504

219. §. Előírt sima felületen mozgó pont characteristikus egyenlete 510

d) LAGRANGE általános erőcomponenseinek és általános mozgásegyenletei második alakjának alkalmazása.

220. §. Példák LAGRANGE mozgásegyenleteire általános coordinátákban: Az erő szétbontása térbeli polárcoordináták-, orthogonális felületek normálisai-, tetszőleges görbevonalú orthogonális coordináták szerint ... 511

221. §. Egymással kapcsolt egyszerű két inga LAGRANGE-féle mozgásegyenletei, általános erőcomponensei és mozgásuk részletezése ... 514

e) Elliptikus coordináták rendszerei és alkalmazásaik a pontmozgás problémáinak a HAMILTON-JACOBI*-féle eljárás segélyével való megoldására.*

222. §. Az elliptikus coordinátákról általánosságban; fajaik ... 518

223. §. Elliptikus coordináták a síkban. I. Confocális ellipsisek és hyperbolák ... 519

224. §. Sík elliptikus coordináták alkalmazása szilárd két vonzó centrum körüli szabad síkbeli mozgásra (EULER problémája) 522

225. §. Folytatás: Vonzás két centrum felé. A pálya nem sík ... 526

226. §. Elliptikus (parabolikus) coordináták a síkban. II. Confocális, ellentett irányú parabolák ... 529

227. §. Mozgásproblémák parabolikus coordinátákra nézve. Az integrálhatóság esetei ... 531

228. §. Elliptikus coordináták a térben. I. Confocális középponti másodrendű felületek ... 532

229. §. Elliptikus felületen való kényszermozgás a távolsággal arányos centrális erő esetében. Geodätikus vonalak az ellipsoidon ... 536

230. §. Térbeli elliptikus (parabolikus) coordináták. II. Confocális paraboloidok ... 541

231. §. Nehéz pont mozgása vertikális tengelyű elliptikus paraboloidon ... 544

Lap

f) Jacobi utolsó multiplicátora elvének alkalmazása.

232. §. Példák a Jacobi-féle multiplicátorok meghatározására. Szabad pontmozgás: 1) Az erők az időtől függetlenek. 2) A centrális erők csak a távolságtól függenek ... 544

g) Lagrange integráló eljárásának alkalmazása.

233. §. Példák a Lagrange-féle integráló eljárásnak a characteristikus egyenlet megfejtését célzó alkalmazására: 1) Szabad síkbeli mozgás. 2) Mozgás előírt felületen ... 547

3. Feladatok anyagi pontmozgásra.

a) Előírt, vagy a mozgás feltételei által meghatározott sima pályájú mozgások.

234. §. Feladatok meghatározott szilárd, sima pályán végbemenő pontmozgásra (tizennyolcz feladat megfejtéssel) ... 550
235. §. Feladatok tautochrón és synchrón görbékre (tizenegy feladat megfejtéssel) ... 557
236. §. Feladatok brachystochrón görbékre (tizenhat feladat megfejtéssel) ... 560
237. §. Feladatok előírt mozgó sima görbéken (sima csövekben) történő pontmozgásra (hét feladat megfejtéssel) ... 563

b) Feladatok előírt, vagy a mozgás feltételei által meghatározott sima felületeken végbemenő pontmozgásokra.

238. §. Feladatok szilárd sima gömbfelületen haladó pont mozgására (nyolcz feladat megfejtéssel) ... 566
239. §. Feladatok szilárd sima hengeren és körkúpon történő pontmozgásra (hat feladat megfejtéssel) ... 569
240. §. Feladatok szilárd sima másodrendű- és általános forgásfelületeken történő pontmozgásra (kilencz feladat megfejtéssel) ... 572
241. §. Feladatok forgásfelületek geodätikus görbéire (nyolcz feladat megfejtéssel) ... 576
242. §. Feladatok szilárd sima felületeken végbemenő vegyes mozgásokra (tizenhárom feladat megfejtéssel) ... 580
243. §. Feladatok előírt mozgó sima felületeken történő pontmozgásokra (öt feladat megfejtéssel) ... 586

Lap

c) Feladatok surlódással és közeg-ellenállással végbemenő pontmozgásokra.

244. §. Feladatok előírt szilárd vagy mozgó, érdes pályán történő mozgásokra (nyolcz feladat megfejtéssel) ... 588
245. §. Feladatok előírt szilárd vagy mozgó érdes felületen történő pontmozgásokra (hét feladat megfejtéssel) ... 592
246. §. Feladatok ellenálló közegben történő szabad pontmozgásra (tizennyolcz feladat megfejtéssel) ... 593
247. §. Feladatok előírt pályán és felületen közegellenállással történő pontmozgásokra. Synchrónák, tautochrónák és geodätikus görbék ellenálló közegben (tizenhét feladat megfejtéssel) ... 598

d) Feladatok a dynamika módszertani elveire.

248. §. Feladatok d'Alembert elvére [mozgó előírt pályákon és felületeken végbemenő relativ pontmozgásokra] (hat feladat megfejtéssel) ... 602
249. §. Feladatok a legkisebb, a stationárius és a variáló működés elvére (kilencz feladat megfejtéssel) ... 608
250. §. Feladatok a Hamilton-féle characteristikus egyenlet megoldására derékszögű és általános coordinátákban (öt feladat megfejtéssel) ... 610

FIGYELMEZTETÉS.

A *kezdőnek*, ki az analysis és az analytikai geométria legelső elemeivel rendelkezik s ki előtt a dynamika *új tárgy*, e tan első tanulmányozására e mű jelen kötete következő, magukban véve összefüggő kis dynamikai vezérfonalat képező paragraphusai ajánlhatók (a többiek inkább a további tanulmányozásúl szolgálnak):

Az erő, az anyag, a dynamika alapfogalmai és alapelvei:

I. Főfejezet: 1, 2, 3, 4, 5. §§.
II. Főfejezet: 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. §§.
III. Főfejezet: 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22. §§.
IV. Főfejezet: 23. §., 24. §. lábjegyzékeivel.

Anyagi pont dynamikája. Általános rész.

I. Főfejezet, Statika: 27, 28, 29. §§.
II. Főfejezet, Kinetika.
1. Fejezet: 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45. §§.
2. Fejezet: 46, 47, 48, 52. §§.
3. Fejezet: 60, 61, 62, 63, 64, 65, 70, 71. §§.

Anyagi pont dynamikája. Részletes rész.

I. Főfejezet, Egyensúlyi problémák: 126*, 127*, 128* §§.
II. Főfejezet, Mozgásproblémák: 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 147, 148, 149, 155*, 156*, 157*, 161. §§.; 177. §. II. szakasza*, 181. §. 2. pontja*, 191*, 192*, 199, 200. §§.

* A csillaggal jelölt paragraphusok részletesen kidolgozott példákat tartalmaznak.

A «Dynamika» észrevett sajtóhibái.

11. lap 11. sora alulról, *viszszahatás* után igtasd be: vagy *ellenhatás*.
19. lap 1. sora felülről, « « « « « «
26. lap tizedik sora felülről, *second* helyett olvasd *secundum*.
122. lap harmadik sora alulról $X\delta y$ helyett olvasd $X\delta x$.
145. lap fejczíme: 74. §. helyett olvasd 75. §.
220. lap 108. §. czímében differentiálegyenletek helyett olvasd differentiálegyenleteket.

A «Kinematika» 11. és 12. lapjain közölt irodalmi jegyzék kiegészítése.

Appel P.: Traité de Mécanique rationelle, I. és II. kötet, Paris, 1893, 1896.

Farkas Gyula: A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásáról. M. T. Akadémia Math. és Termtt. Ertesítője, XII. k. 457—472. ll. Budapest, 1895.

Gilbert Ph.: Cours de Mécanique analytique. Troisième édition. Paris, 1891.

Herrmann Emil: Szilárdságtan, tekintettel a gépészet igényeire. Szerző kiadása. Budapest, Franklin-Társulat nyomdája, 1894.

Hertz H.: (Gesammelte Werke Bd. III.) Die Principien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt. Leipzig, 1894.

Kraft F.: Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik. Két kötet. Stuttgart, 1884, 1885. (Nagyobbára Walton alább felsorolt művének fordítása).

Painlevé P.: Intégration des Équations différentielles de la Mécanique. Kőnyomat. Paris, 1895.

Réthy Mór: A legkisebb actió elve. M. T. Akadémia Math. és Termtt. Értesítője, XIII. k. 1—15 és 299—310 ll., XIV. k. 267—298. ll. Budapest, 1895, 1896.

Tait P. G.: Dynamics. (Az Encyclopædia britannica utolsó kiadása «Mechanics» czímű czikkének különlenyomata.) London, 1895.

Walton W.: Collection of problems in illustration of the principles of theoretical mechanics. Third edition. Cambridge, 1876.

Zech P. v.: Aufgaben aus der theoretischen Mechanik nebst Auflösungen. Zweite Auflage, unter Mithilfe von C. Cranz. Stuttgart 1891.

A «Kinematika» újabban észrevett sajtóhibái.

5. lap tizedik sora alulról, defineálni helyett olvasd definiálni.
28. lap *Jegyzete* negyedik sora, defineálva helyett olvasd definiálva.
33. lap (1) formulája, $\overrightarrow{BC}$ helyett olvasd $\overrightarrow{CB}$.
40. lap 40. §-a címében, *defineálva* helyett olvasd *definiálva.*
54. lap második sora alulról, melyben helyett olvasd melyen.
59. lap kilenczedik sora alulról fd és ϑf helyett olvasd df és df.
60. lap tizenhetedik sora felülről, defineált helyett olvasd definiált.
65. lap huszonegyedik sora felülről, a (3) egyenletek helyett olvasd az 56. §. (3) egyenletei.
89. lap 73. §. fejezet czíme: *felületek elve* helyett olvasd *területek elve.*
89. lap első sora alulról (4) helyett olvasd (3).
90. lap 3. pontjának czíme: *felületek elve* helyett olvasd *területek elve.*
95. lap hetedik sora felülről, menynyiséggel helyett olvasd menynyiség egy részével.
97. lap hatodik sora alulról, (5) helyett olvasd (6).
102. lap 81. §-a utolsó sora, mozgása helyett olvasd mozgását.
117. lap (5) formulája, ΩA helyett olvasd ΩA_0.
119. lap hatodik sora felülről, kifejezések helyett olvasd kifejezések gyökértékei.
137. lap hetedik sora felülről az $s=\pm\infty$ után olvasd a szerint, a mint B negativ vagy positiv.
138. lap (7) formula után következő sora, kifejezése helyett olvasd kifejezését.
145. lap negyedik sora fölülről, közelítésében helyett olvasd közelítésben.
149. lap csillag alatti első sora d helyett olvasd dy.
163. lap (19) formula után következő sora, Y helyett olvasd X.
164. lapon a b_1-ek helyett olvasd a_2.
166. lap kilenczedik sora felülről $s:v=OM:u$ helyett olvasd $s:u=OM:v$.
167. lap utolsó sorában az $\frac{1}{2}$ elhagyandó.
168. lap tizenharmadik sora alulról, tengely fölötti része után olvasd: pl. a B'-ben kezdődőnek vett.
176. lap hatodik sora alulról } akkor után igtasd be: az ε az idővel
178. lap második sora felülről } arányos phasiskülönbség, mely az idővel lassan növekszik; ekkor
176. lap utolsó sora, egészen elhagyandó.
192. lap 2. pontjának második sora, valamely után igtasd: saját síkjában.

194. lap 13. feladata harmadik sorában és formulájában negativ helyett positiv teendő.

195. lap 16. feladata utolsó sorában olvasd $0<\operatorname{tg}\alpha_0$.

195. lap 19. feladatában *parabola* után olvasd (a biztossági parabola),

196. lapon, lövet helyett olvasd lövedék.

203. lap (17) formulájában a gyök értéke: $\sqrt{4c^2K+(v_0^2-Kr_0^2)^2}$.

203. lap negyedik sora alulról hogy után igtasd be: ugyanazon c-nél.

203. lap harmadik és második sora alulról: de függetlenek a kettő által bezárt szögtől és a kettő irányításától a térben helyett olvasd: Ámde, c lévén a sebesség állandó nyomatéka $=pv$ [73. §. (4)], mely a 77. ábra szerint $c=v_0 . r_0 . \sin(\varepsilon_0-\vartheta_0)$, hol $\varepsilon_0-\vartheta_0$ az r_0 és a v_0 által bezárt szög.

229. lap (1) formulájában u^2 helyett olvasd u.

239. lap hatodik sora felülről
249. lap 42. és 43. feladatában } Jakobi helyett olvasd Jacobi.

243. lap kilenczedik sora után igtasd: de ekkor a mozgás nem szabadon, hanem ezen előírt pályán, surlódás nélkül történik s a feltételi gyorsulás a 130. §. alapján adódik.

251. lap 47. feladata harmadik sora alulról, hol helyett olvasd: hol $r_1+r_2=2a$ és

251. lap 48. feladata harmadik sorában, parabolát helyett olvasd hyperbolát.

251. l. 48. fel. negyedik sorában $\sqrt{r_1r_2}$ helyett olvasd $\sqrt{r_1r_2}:\sqrt{2a^2-r_1r_2}$.

252. lap negyedik sora alulról, ψ helyett olvasd r.

262. lap 2. pontja végéhez igtasd: a gyakorlati kinematikában az elsőt *póluspályá*nak, az utóbbit *pólusgörbé*nek nevezik.

269. lap hatodik sora felülről, $d\vartheta_2$ helyett olvasd $d\vartheta$.

269. lap hetedik sora felülről előmozdulására helyett olvasd elmozdulására.

277. lap II. szakasza nyolczadik sora, azaz elé igtasd: ϑ_2-, kilenczedik sorában ϑ_2 helyett olvasd $\vartheta_1+\vartheta_2$.

278. lap (1) rendszerében a helyett olvasd a_2.

278. lap (2) rendszere után igtasd be: Ezen rendszer az (1)-ből közvetetlenül is származtatható, ha ebben az a_2, a $\vartheta_2=\frac{a_1}{a_2}\vartheta_1$ és a ϱ helyébe rendre irunk: $-a_2$-t; $-\vartheta_2=-\frac{a_1}{a_2}\vartheta_1$-t és $-\varrho$-t.

280. lap 151. §-ának (3) rendszere után igtasd be: Ez a rendszer teljesen megegyezik a (2)-vel.

281. lap fejczimében hypoclois helyett olvasd hypocyclois.

284. lap harmadik sora, felülről *cardidois* helyett olvasd *cardiois*.

286. lap utolsó sora, egyenesekre helyett olvasd egyenesre.

295. lap 157. §-a után igtasd be: *Elemi* két forgásnál az I az $\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2$-be esik s a sorrend megfordítása csak másodrendű kicsiny, azaz elhanyagolható translátiót eredményez.

341. lap ötödik sora felülről, IA helyett olvasd OA.

370. lap 51. feladatában 152. §. 2. helyett olvasd 153. §. 2., 112. ábra, 285. l.

385. lap 214. §-a utolsó sorában, lép fel helyett olvasd: mint független három adat lép fel. A (2) és (3) felhasználása bonyolódottabb kifejezésekhez vezet.

407. lap harmadik sora alulról, 199. §. helyett olvasd 199. ábra.

407. lap második sora alulról, mozdíthat el helyett olvasd mozdithatja el.

410. lap hatodik sora felülről, $\Theta\Theta_2$ helyett olvasd $O\Theta_2$.

468. lap második sora felülről Mathematiques helyett olvasd Mathématiques.

468. lap hatodik sora felülről, a forgás *vector* helyett olvasd az elemi forgás *vector*.

468. lap 271. §-a címében, *minden pontra nézve ugyanaz* helyett olvasd: *a merev rendszer minden pontjára mint centrumra nézve ugyanaz.*

469. lap tizenkettedik sora felülről, Mivel e véghelyzet az 1-ben *a* és *b* alatt említett véghelyzettel egybevág azért helyett olvasd: Az 1. pontból.

492. lap negyedik sora fölülről, körü) helyett olvasd körül.

563. lap tizenötödik sora fölülről, az (5) helyett olvasd a (10).

563. lap *b)* pontja negyedik sorában, nézve § helyett olvasd nézve a jelen §.

563. lap *b)* pontja nyolczadik sorában, (6*b*) helyett olvasd (3*b*).

564. lap * alatti jegyzete helyett olvasd: a számlálók előjeleire nézve megjegyzendő, hogy a (14) egyenletek csak a $\xi_0 - x = \lambda_0 \varrho_0$ s í. t. *szorozmányok* értékét és előjelét adhatják meg, az utóbbira nézve a (14) harmadik egyenlete a döntő, mely a (15) és (16) értelmében csak a $\lambda_0 \varrho_0 = +X' : \{X'x'' + Y'y'' + Z'z''\}$ stb. értékek által elégíthető ki; e szerint, ha a (15) számlálói $+X'$ stb. volnának, a (16) és a (18) jobb oldalán az előjel megváltoznék.

589. lap 4. pontja utolsó sora helyett olvasd: azaz OM_1 az ON_3 mentén, OM_2 az ON_1 mentén, és OM_3 az ON_2 mentén esik.

603. lap kilenczedik és tizenkettedik sora felülről, second helyett olvasd secundum.

607. lap tizenegyedik sora alulról, vonunk helyett olvasd vonnunk.

608. lap első és második sora felülről, φ_{cy} és φ_{cx} helyett olvasd φ_{cx} és φ_{cy}.

608. lap hatodik és hetedik sora felülről, φ_{ry} és φ_{rx} helyett olvasd φ_{rx} és φ_{ry}.

608. lap 353. §-a végéhez igtasd: [V. ö. a 371. §. 36*a*. feladatát a (7) rendszer felállítását illetőleg].

612. lap negyedik sora felülről, első formulája helyett olvasd:

$$x'' = +2\omega y' \sin \lambda.$$

642. lap 36. feladata nyolczadik sorában *XXZ* helyett olvasd *XYZ*.

643. lap 46. feladata első kikezdése végéhez igtasd: v. ö. a Dynamika 175. §-át.

643. lap utolsó kikezdése első sorában, ψ_{n_1} helyett olvasd ψ'_{n_1}.

643. lap utolsó kikezdése harmadik sorában, ψ_{n_2} helyett olvasd ψ''_n.

643. lap utolsó kikezdése negyedik sorában, mely itt mindig a forgás sebességével ellentett irányú helyett olvasd: mely merőleges ds-re és melynek egyik, a ds-re az s síkjában merőleges componense ψ''_{n_1}, míg az ezen síkra merőleges componense ψ_{n_2}; ez utóbbi a forgás sebességével egyenlő vagy ellentett irányú.

643. lap utolsó kikezdése hatodik sorában, fekszik után igtasd be: Igy a ψ_n feltételi gyorsulásnak $\psi_{n_1} = \psi'_{n_1} + \psi''_{n_1}$ a normális, ψ_{n_2} a binormális componense.

A «Mathematikai Repertórium» újabban észrevett sajtóhibái.

6. lap 6. §. címe után igtasd be: *melyek* $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ *esetben érvényesek.*

18. lap 4. pontja elhagyandó.

73. lap (10) formulája után, *segmentuma* helyett olvasd *segmentum területe.*

74. lap (27) formulája után igtasd be: A végérintőkre mint coordinátatengelyekre vonatkoztatott egyenlet: $xy=\frac{1}{4}(a^2+b^2)=\frac{1}{4}e^2$.

97. lap (8*a*), (2*a*), (8*b*) formuláinak jobb oldalai $\pm$, az utolsó $\mp$ kettős előjellel látandó el.

124. lap 17. formulája jobb oldali második tagjának előjele $+$.

125. lap 125. §-a 4. pontja második mondata helyett olvasd: Feltétlenül convergáló hatványsor által előtüntetett függvény integrálja egyenlő e sor egyes tagjai integráljainak összegével.

126. lap 9. formulája jobb oldali második tagjának együtthatója: $\frac{1}{b^2}$.

127. lap 31. formulája jobb oldali első tagja nevezőjének első együtthatója $(4ac-b^2)$.

129. lap 3. formulája jobb oldali második tagja nevezőjéből a *3* elhagyandó.

133. lap 16. formulája jobb oldalán dx helyett olvasd dz.

133. lap 18. formulája jobb oldalán x helyett olvasd $\sqrt{a+bx}$.

133. lap 23. formulája jobb oldali nevezője $(\alpha b-\beta a)$ tényezője helyett olvasd $(\alpha b+\beta a)$.

159. lap IV. szakaszának második formulájában $f(t)$ után még dt irandó.

165. lap 1) Első transformatió után következő sorban $m=\sqrt{a_{12}}$-ben olvasd m_2-t.

170. lap 11. formulája utolsó sorában, (— helyett olvasd (1—.

171. és következő lapokon *Brigg* helyett mindenütt olvasd *Briggs.*

173. lap utolsó sorában lg^n helyett olvasd lg_n.

176. lapon 166. logarithmusa 2201.

177. lapon 783. « 8938.

Kiegészítések, 2. lap az (1) fölötti sor jobb oldalai $-X' : \Delta$; $-Y' : \Delta$; $-Z' : \Delta$; v. ö. a Kinematika újabb sajtóhibái közül az 564. laphoz tartozót, e kötet XXXII. l.

Kiegészítések, 2. lap hatodik, hetedik, nyolczadik sorában alulról a ϱ_0 helyett olvasd ϱ_1.

Kiegészítések, 2. lap hatodik sora alulról, az osculáló gömb sugara helyett olvasd: az egész görbület sugara, melyre nézve

$$\frac{1}{\varrho_1^2} = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\tau^2}.$$

AZ ERŐ, AZ ANYAG, A DYNAMIKA ALAPFOGALMAI ÉS ALAPELVEI (AXIOMÁI).

I. Kinematika és Dynamika. Anyag és mechanikai erő.

1. §. *Geométria, kinematika, dynamika. Tehetetlenség és erő mint a mozgás alapokai.*

1. A geométria a testek térbeli vonatkozásait, a kinematika e vonatkozásoknak időbeli lefolyását vizsgálja.

Mindkét tan eltekint a testek anyagi mivoltától és ezeket oly geométriai alakzatokkal (configurátiókkal) helyettesíti, melyek mindenkor a tekintetbe vett test geométriai viszonyai- és vonatkozásaival congruensek.

E tanok e szerint a nyugalom (az egyensúly) és a mozgás jelenségének csak geométriai és kinematikai sajátságaira vonatkozhatnak, a menynyiben ezek függetlenek a testek anyagának természetétől és azoktól az okoktól, melyek a testek környezetükhöz viszonyított nyugalmát (relativ egyensúlyát), vagy mozgását, vagy mozgásuk változását létesítették.

2. De az emberi szellem mindig és mindenütt keresi a jelenségek okait, a változások létesítőit.

Ha ilyeneket talált: ezeknek is keresi az okait, úgy hogy az előbbieket már csak hatásoknak tekinti és így addig folytatja kutatásait, míg a természet maga, vagy az emberi megismerés határoltsága további vizsgálatainak nem szab határt.

De ekkor sem állapodik meg; *feltevés*hez, *hypothesis*hez folyamodik: az előtte ismeretlen és általa talán soha fel nem ismerhető okok helyébe *képzel* magának olyanokat, melyeket megért, felfog és melyek hatása végeredményükben a megfigyelhető jelenségeket létesíthetik.

A mechanikában is épen így járunk el.

A mozgás (illetve az egyensúly) okait a megfigyelésnek és a kisérletezésnek alávethető dynamikai jelenségeknél bizonyos határig fürkészhetjük és megállapíthatjuk a nélkül, hogy ezeket teljesen át kellene vagy lehetne értenünk, ezeket az okokat azután tovább viszsza nem vezethető *alaptény*eknek nevezzük.

Másrészt a kisérletezésnek alá nem vethető vagy a közvetetlenül hozzá nem férhető mozgásokról (pl. a föld és a többi égi testek forgásáról és keringéséről s i. t.) *felveszszük*, hogy alapokai ugyanolyan természetüek, mint a kisérletnek alávethető mozgás-jelenségekéi. Az ily feltevés, hypothesis abban leli legnagyobb jogosúltságát, hogy a belőle vont következtetések a megfigyelhető dynamikai jelenségekkel teljes megegyezésben állanak.

3. A tapasztalás kimutatta, hogy a dynamikai jelenségek alapokai az anyag *tehetetlenségében* (*inertiájában*) és az anyagra ható *erőben* keresendők (v. ö. Newton első axiomáját, 7. és 8. §§.); az első a testeket mozgási vagy egyensúlyi állapotukban megtartani, az utóbbi ezt megváltoztatni törekszik.

A *tehetetlenség* az összes hozzáférhető és kisérletezésnek alávethető testeknél akként jelentkezik, hogy ezek maguktól, reájuk való hatás nélkül, — dynamikai állapotukat *megtartják*,* ezt nem képesek megváltoztatni, azaz erre *tehetetlenek*; innen ez az elnevezés.

Erőnek nevezzük a mechanikában a testekre működő anyagi behatást; ezt az elnevezést már ős időktől kezdve használja az ember a saját szervezete tagjai által a környező testekre közvetetlenül gyakorlott mechanikai hatáskifejtés jelölésére.

De a természet mechanikai jelenségei legnagyobbrészt emberi közreműködés nélkül folynak le és az őket létesítő okokat többnyire nem ismerjük.

Mindazonáltal önkéntelenül képződik bennünk az a felfogás, hogy mind az emberi szervezet által közvetetlenül létesíthető vagy változtatható, mind pedig a mechanikailag csak közvetve vagy épen nem hozzáférhető mechanikai jelenségek ugyanoly természetű alapokok folytán létesíthetők, illetve létesülnek, mint a milyenek a tehetetlenség és a szervezetünk kifejtette erők, csakhogy ez utóbbiak működési mértéke igen gyakran nagyon különböző.

Ezen felfogás értelmében *az összes mechanikai jelenségekre vonatkozólag a mozgásállapotot változtató, előttünk ismeretlen okokat* (gondolatban) *helyettesítjük oly erőkkel, melyek ugyanazokat a hatásokat eredményezik, azaz, mely erők az ismeretlen okokkal mechanikai tekintetben egyenértékűek (aequivalensek).*

Ugyanily értelemben *mechanikai erőnek* nevezzük mind *azokat az okokat, melyek a testek nyugalmának (egyensúlyának) vagy mozgásának, azaz a testek helyzetének, vagy alakzatának*, szóval *mozgásbeli állapotának megváltoztatására törekszenek.*

---

* Innen a «*kitartóság*» elnevezés is, mely a «Beharrungsvermögen»-szónak felel meg, de nincsen általánosan elfogadva.

A tant, mely az erőknek sem vegyi, sem halmazállapotbeli, sem másféle electromos vagy mágnességi, sem optikai stb., hanem az előbb felsorolt mechanikai hatásairól szól: *dynamikának*, az *erők tanának* nevezik [a $\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$ = *erő* görög szó után].

Jegyzet. Ujabb időben több helyt jelentkezett a törekvés, az erő helyébe az *erélyt (energiát)* mint mechanikai alapfogalmat bevezetni és a mechanikát a következő négy független alapfogalomra építeni: *tér* és *idő* (kinematikai fogalmak), *tömeg* és *erély* (dynamikai fogalmak), mely utóbbi kettő mint adott megváltozhatatlan menynyiségü és megsemmisíthetlen physikai menynyiségek szerepelnek.*

Közelebbről pedig a dynamika feladata bármily testnek, melyre tetszőleges erők hatnak, a helyzetét és alakzatát minden időpillanatra nézve meghatározni [az alakzat puha vagy rugalmas vagy folyékony anyagoknál változó].

2. §. *A mechanikai erő különböző nyilvánulása. Statika és Kinetika.*

Az erőnek a változások létrehozására irányított törekvése a gyakran felmerülő ellenhatások és más akadályoknál fogva nem juthat mindig teljesen érvényre, de ezek daczára mindenkor és mindenhol, a mikor és a hol jelentkezik, a kedvező vagy kedvezőtlenebb körülmények szerint nagyobb vagy kisebb mechanikai változásokat létesít.

a) *Statikai*nak nevezzük az *erőt*, ha nyugvó, egyensúlyban lévő és ebben maradó testre működik; vagy, ha a mozgó testre úgy hat, hogy mozgását nem változtatja meg; ily erő *hatását* is *statikai*nak mondjuk. A *statikai erő* rendesen jelentkezik mint *súly, nyomás, feszültség, húzás, rugalmas ellen- húzás* vagy *-nyomás, csavarásbeli hatás* s i. t., mely a testnek ezen erő nélkül való alakját és méreteit, szóval *alakzatát* (és így az evvel kapcsolatos többi sajátságait is) állandóan megváltoztatott állapotban tartja.

b) *Kinetikai*nak (vagy szorosabb értelemben vett *dynamikai*nak) nevezzük az *erőt*, ha ez a testnek vagy egyes részeinek mozgásállapotát megváltoztatja.

Ily erőt hatásának megfelelőleg sokszor mozgató vagy gyorsító erőnek is mondjuk és *hatását* is általában véve *kinetikai*nak.

Ezen megkülönböztetés szerint [s a $\sigma\tau\acute{\omega}$= *állok* és $\kappa\iota\nu\acute{\epsilon}\omega$ = *mozgok* görög szavak után (mely utóbbiból nem egészen helyesen a kinematika szó is készült]:

Statika a dynamikának az a része, mely az erők által létesített nyugalmi, *egyensúlyi*, illetve *változatlan mozgásbeli* állapotokat öleli fel.

---

* V. ö. az 5. l. lábjegyzékét, továbbá H. Hertz: Principien der Mechanik, Leipzig 1894. 18 l.

Kinetika (vagy szorosabb értelemben vett dynamika) az erők létesítette vagy megváltoztatta mozgások tana.

A statikai jelenségeket a kinetikai jelenségek egyszerű eseteinek szabad tekinteni, melyekben a mozgásállapot változatlan, vagy (relativ) mozgás egyáltalában nincs és ezért sok tan- és kézikönyvben a statika a kinetika egy fejezeteképen van tárgyalva.

Didactikai szempontból előnyösnek látszik a statikát a kinetika előtt külön tárgyalni.

3. §. *A dynamika axiomái, mint a tapasztalás és a feltevés egyesítése. A menynyiségtan alkalmazása.*

1. A dynamika általában véve a valóságban létező anyagi testek tényleges mozgásbeli és egyensúlyi viszonyaival és erőivel foglalkozván, alapját, miként már az 1. §-ban említettük, részint bizonyos, a *tapasztalás* nyujtotta *tények*, részben pedig bizonyos, analogiákból következtetett, tapasztalatilag egyenesen be nem bizonyítható, de következtetéseikben a tapasztalással teljesen egyező, és ezért nagyon valószínű *feltevések* képezik.

A *tapasztalati tényeket* vagy a természetben önként jelentkező mechanikai jelenségeknek *megfigyeléséből* vagy emberi közreműködés segélyével mesterségesen előállított és czéltudatosan változtatott ily jelenségek megvizsgálásából, a *kisérletezésből* nyerjük; ezeket mindaddig helyeseknek kell tartanunk, míg más tapasztalati tények meg nem ingatják.

A mechanikai *feltevések* tulajdonképen a tapasztalati tényeknek és értelmezésüknek valamenynyi mechanikai jelenségre való érvényes voltának feltevésszerű kiterjesztésében állanak; legfőbb jogosultságuk abban rejlik, hogy a belőlük folyó következtetések eredményükben a megfigyeléssel, a tapasztalással mindenben egyezők.

A tapasztalati tények és a feltevések egyesítése, azaz a tapasztalati alaptények érvényességének feltevésszerű általánosítása, az u. n. *mechanikai alapelvek*hez (*alaptörvények*hez, *axiomák*hoz) vezetett, melyek az összes mechanikai jelenségek tudományos tárgyalása alapját képezik; v. ö. a 6. §. 3. pontját.

Ezek az elvek teljesen más jellegüek, mint a menynyiségtaniak, geométriaiak és kinematikaiak; mert míg ezek a logikai gondolkodás szigorú és szükségképeni folyományai, addig a mechanikai (dynamikai) alapelvek megállapítására a természetben jelentkező egyensúlyi viszonyok, a lefolyó mozgások és a velük kapcsolatos mechanikai hatások tényleges ismerete volt szükséges. Az elvek megengedhetőségét, illetve igazolását épen a valóságban végbemenő mozgásjelenségekkel való összehasonlításuk, illetve megegyezésük képezi.

A nevezett axiomák [6—12. §§.] az erők alaptulajdonságaira, az erők, az anyag és a mozgás között fennálló kapcsolatokra vonatkoznak.

2. Bármely dynamikai vizsgálat szabatos fogalmazására a mechanikai alapelveken kívül kell, hogy még a tekintetbe vett test anyagának *tér*beli eloszlása (sűrűsége), halmazállapota s környezetéhez képest való (relativ) nyugalmának, egyensúlyának, vagy mozgásának korlátozó feltételei ismeretesek legyenek.

Mihelyt mindezek advák, a dynamikai probléma egyenletrendszer alakjában formulázható, melynek értelmezésére a geométriai és a mathematikai módszerek közvetlenül alkalmazhatók.

Sok esetben a mértan és az analysis segédeszközei nem képesek a dynamikai problémát kifejező egyenlet vagy egyenletrendszer megfejtésére; ilyenkor a physikus vagy az astronomus úgy közelíti meg a célját, hogy bizonyos elhanyagolások által az egyenleteket megfejthetővé teszi és a belőlük nyert eredményt alkalmas eljárások segélyével tetszőleges pontosságig javítja [v. ö. pl. a 150. §-ot].

4. §. *Anyag. Tömeg. Jellege. Egysége. Tömeggeométria.*

1. Már a kinematika 6. §-ában kiemeltük, hogy az anyag és az erő fogalmát egymástól függetlenül nem lehet adni, hogy egyik a másik nélkül nem léphet fel.

Mindazonáltal az erőt és az anyagot teljesen különböző menynyiségeknek kell tekintenünk, az első a hatáskifejtés maga, a második az a substratum, a melyen e hatáskifejtés megnyilatkozik.*

A *tömeg* a *test (anyagi rendszer) anyagtartalmának összsege.*

A tömegnek számbeli előtüntetésére, kifejezésére a *tömegegység* szolgál; valamely test tömegét ismerjük, ha a benne foglalt tömegegységek számát ismerjük.

E szerint a test m tömegét $m = \mu M$ szorzattal fejezhetjük ki, hol M a tömegegység, μ ezek száma a tekintetbe vett testben.

Ezek értelmében a tömeg nem irány-menynyiség, hanem, miután egységén kívül csak *egy* számadatra, a tömeg-mérő számára van

---

* Érdekes W. Ostwald felfogása az anyagról [v. ö. Math. és Phys. Lapok II. kötete 138—147. ll.], melyben ezt az erélylyel [21. §.] helyettesíteni törekszik, mondván, hogy miután az energia az egyetlen olyan menynyiség, mely minden tüneményfajban közös, de megnyilatkozásának az alakjai igen különbözők: az anyag tulajdonképen nem más, mint az energia-menynyiségeknek térbelileg megkülönböztethető, összefüggő kapcsolata (complexuma).

Evvel az electromosság, a mágnesség és a hő jelenségei, melyekben a tömeg szintén csak mint az energia hordozója szerepel, de a nélkül, hogy e tömeg mozogna, ugyanúgy, mint a többi jelenség tárgyalható; v. ö. a 7. §. lábjegyzékét az energetikáról, a 12. l. és a 35. l. lábjegyzékét.

szükségünk, a *tömeg* csak *léptékes (scalár-) jellegű lehet.* Méréséről a 14. §-ban fogunk szólani.

Maga a *tömegegység* egy *conventionális (közös megegyezésben megállapított) tömeg;* ez az egység változatlan marad, bármely helyére a földnek is viszszük el; ellenben a reá ható földnehézségi erő, azaz, e tömegegység súlya helyről-helyre változik, miért is czélszerű a tömegegységet alapúl tekinteni és nem ennek súlyát; v. ö. a 14. §-ot.

Rendesen a térfogategységben foglalt 4 Celsius fokú *víz* anyagmenynyiségét szokás tömegegységül választani; így, ha a köbcentimeter a térfogategység, a *gramm-*, a köbdecimeter térfogategységnél a *kilogramm* tömege (**nem** súlya) a tömegegység.

2. Jegyzet a *tömeggeometriáról.*

Mindazon a viszonyok és vonatkozások összeségét, melyek anyagoknak térbeli eloszlására vonatkoznak, melyek tömegek és helymeghatározók (coordináták) egymással való bármily módon képezett egybekapcsolásából származnak: *tömeggeometriának* nevezik; az *idő* e vonatkozásokban nem fordúl elő.

Ide tartozik különösen a sűrűség fogalma; a lineáris, a quadrátos stb. tömegnyomatékok fogalmai és ezek sajátságai, melyekből a tömegközéppont, a tehetetlenségi nyomaték s i. t. mint egyszerűbb csoportok adódnak.

A tömeggeometria a rendszerek (testek) dynamikájához egészen analog viszonyban áll, mint a pontrendszerek geometriája a rendszerek kinematikájához; ugyanis vonatkozásba hozva az elmozdulásokat az időhöz, kinematikai fogalmakat és tételeket nyertünk, míg a tömeggeometriai fogalmakat az idővel kapcsolatba hozva, dynamikai fogalmakat és tételeket fogunk nyerni.

Ennélfogva helyesnek látszik, ha a tömeggeometriát az anyagi rendszerek dynamikáját közvetlenül megelőző, külön bevezető fejezetben fogjuk tárgyalni.

5. §. *A mechanikai erő jellemzői. Térfogatbeli, felületi, vonalra, pontra ható erő. Elemi erő. Az erő vector. Hat meghatározó adata. Méréséről általánosságban.*

Minden mechanikai erőnél a következő jellemző tulajdonságok különböztetendők meg:

1. Az erő *foghelye (támadási helye);* ez az az anyagi pont vagy az anyagnak az a része, melyre a tekintetbe vett erő közvetetlenül hat.

2. Az erő *nagysága* (értéke, erőssége, intensitása).

3. Az erő *iránya* (hatásának egyenese).

I. *Az erő foghelye.* A ténylegesen fellépő erőnél kivétel nélkül azt találjuk, hogy *foghelyük mindig véges kiterjedésű.*

a) Így, a mikor két szilárd test érintkezik és egymásra *nyomást* gyakorol, a nyomó erő támadó helye a közös érintkező felület, mely mindig véges kiterjedésű, még akkor is, ha az egyik test vagy mindkettő finom csúcsban érintkezik a másikkal, illetve egymással; mert még ebben az esetben is az érintkezés helye a valóságban nem pont, hanem kicsiny, de véges nagyságú felület, a mely a nyomó erőnek (a nyomásnak) támadó helye.

Ez még a legmerevebb anyagok érintkezésére nézve is áll; ebből folyik az a tapasztalati tétel, hogy bármily nemű érintkezés mindenkor véges kiterjedésű felületen történik, mely felület egyszersmind a nyomó erő foghelye. (A nyomást a felület anyagi részei a test belsejébe viszik át.)

b) Tekintve más jellegű erőt, például az anyagoknak az általános nehézkedésből származó vonzását, hasonló viszonyokat találunk, csakhogy itt az erő támadó helye *térfogatbeli* kiterjedésű. Ugyanis ezen vonzás az anyagnak minden részére terjed ki és így ennek az erőnek a támadó helye az egész, anyaggal eltöltött *tér.*

c) Kiterjesztve ebbeli megfontolásainkat a természetben fellépő valamenynyi erőre, a rugalmassági, mágnességi, elektromos, s i. t. erőkre, mindenütt azt tapasztaljuk, hogy *az erő támadó helye tényleg mindenkor véges kiterjedésű felület vagy térfogat.*

E szerint az erőknek két csoportját különböztetjük meg: *felületre ható erőket (nyomásokat* vagy *húzásokat)* és *térfogatbeli anyagra* (vagy általában *hatókra*) *működő erőket.*

d) Minden testnél ezen kétnemű erők együttesen lépnek fel: egy nehéz anyag, mely horizontális lapon fekszik, a föld nehézségi erejénél fogva egész térfogatában levő anyagára vonzást szenved, míg az alappal való érintkező *felületen* nyomás keletkezik, mely a test súlyával ellentetten egyenlő és vele a testet egyensúlyban tartja.

e) Ha a test anyaga vonalszerű eloszlású, a reá ható térfogatbeli erők a jelen §. gondolatmenete alapján első közelítésben a test geometriai tengelyére ható erőkkel, azaz *vonalra ható erőkkel* helyettesíthetők.

Elemi erő. Mennél kisebb az a felületi- vagy térfogatbeli rész, melyre az *a)* és *b)* alatt részletezett erők hatnak, annál kisebb is az utóbbi; egy *felületi* vagy *térfogati elemre* ható erő e szerint végtelen kicsiny, s ekkor *elemi erő*nek nevezik.

Ilyenkor a mechanikai vizsgálat czéljaira nézve elegendő pontossággal járunk el, ha a nevezett felületi vagy térfogati elemek méreteitől eltekintünk és így első közelítésben ezen erő támadási helyét *pontszerű*nek tekintjük és *fogpont*nak nevezzük.

II. *Az erő vector.*

Iránya. Az erőt meghatározó második jellemző az *iránya.* Ez annak az egyenesnek az iránya, melynek mentén az erő hat. *Elemi* erőnek, vagy csak fog*pont*tal biró erőnek iránya az, melynek mentén az erő a foghelyét képező felületi vagy tömegelemet elmozdítani törekszik.

Nagysága. Az erőt meghatározó harmadik jellemző a *nagysága* (értéke, erőssége, *intensitása*). Ezen jellemzőről itt csak anynyit mondhatunk, hogy ez a mechanikai erő *hatásával egyenesen arányos.* V. ö. az erő méréséről szóló 14—17. §§-okat.

Ezekből kiderül, hogy az erő *iránymenynyiség;* e szerint az erőre a vectorok valamenynyi sajátságai és tételei közvetetlenül érvényesek.

Valamely erőt teljesen ismerünk, ha *fogpontjának helyét (három* coordinátáját), *irányát* (*két* független irányszögét) és *nagyságát (értékét),* összesen *hat meghatározó adatát* ismerjük.

[Sok esetben lehetséges és a vizsgálat könnyítése czéljából sokszor kivánatos az egy *véges felületen* vagy *véges térfogatú testben* ható elemi erők összeségét helyettesíteni egyetlen egy oly véges erővel, melynek bizonyos (de nem minden) mechanikai hatása a nevezett összeség megfelelő hatásával egyenértékű s mely erőnek csak egyetlen egy fogpontja van. Ily esetek: A gőzhenger dugattyújára ható gőz nyomó erejének helyettezése egy a dugattyú lapja középpontjára ható, az egész lapra működővel egyenlő erősségű erővel; vagy valamely testre ható földnehézségi erő helyettezése a valamenynyi testrészre működő földvonzási erők összegével egyenlő erősségű oly erővel, melynek fogpontja a test tömegközéppontjába (itt súlypontjába) esik.]

III. *Az erő méréséről általánosságban.* Valamely erő nagyságát közvetetlenül csak akkor fejezhetjük ki szabatosan, ha mértékegységét ismerjük, mely a dolog természete szerint ismét csak erő lehet; ez az erő egysége [v. ö. a 14. és 15. §§-okat].

Itt az erők méréséről csak anynyit akarunk kiemelni, hogy közvetetlenül statikai erőt csak statikaival, dynamikai (kinetikai, mozgató) erőt ismét csak dynamikaival hasonlíthatunk összse, illetve mérhetünk meg.

Gyakran találjuk a statikai erőt kinetikai erővel kifejezve és megfordítva; az ilyféle egyenlővé tevése a két különböző hatásformában nyilvánuló erőknek mindig azon a feltevésen alapszik, hogy egyazon erő erőssége ugyanaz marad, akár nyugalmat, akár mozgásváltozást létesít. [Így például hallgatagon mindig felveszszük, hogy a föld nehézségi ereje egy egyensúlyban lévő anyagi pontra ugyanoly

nagy, mint a mikor az a térben szabadon mozog és mozgását ez az erő megváltoztatja.] V. ö. a 16. §-t.

Nem csak a szorosabb értelemben vett mechanikai, hanem a többi természeti jelenségeknél felmerülő electromos, mágnességi, rugalmassági, capillaritásbeli s i. t. erők is, a menynyiben közvetetlenül vagy közvetve mechanikai vagy a mechanikaiakkal összemérhető hatásokat létesítenek, hasonlíthatók összse, mérhetők mechanikai erőkkel, illetve helyettesíthetők ilyenekkel.

A természeti erőknek mechanikai erőkkel való méréséből keletkező mértékrendszereket *mechanikai* (gyakran egyszerűen *absolut*) *mértékrendszereknek* * nevezik.

II. A dynamika független alapelvei (axiomái).

6. §. *A dynamika alaptényeinek megállapításáról.*** Galilei *és* Newton. *Az axioma fogalma.*

1. A classikus ó-kor mechanikai ismeretei a gyakorlati-statikaiakon kívül alig egy-két dynamikai jelenségre terjedtek s habár sok empirikus statikai és építészeti szabályt tudtak: egyet sem voltak képesek szigorúan bebizonyítani.

Leonardo da Vinci (1452—1519) festői lángelméje dynamikai problemákkal is sikeresen foglalkozott; így ismerte a lejtőn való mozgást és a szabadon eső test sebessége növekedését.

J. B. Benedetti (1530—1590) már tudta, hogy a légüres térben a testek esése tömegüktől független; ő az emeltyűnél az erő (statikai) nyomatéka fogalmát alkalmazta.

Guido Ubaldi del Monte (1545—1607; Mechanicorum liber, Pisauri 1577) statikával foglalkozott, különösen az ó-kor ebbeli ismereteit tüntette elő és a virtuális elmozdulások tételét az emeltyűre alkalmazta.

A két utóbbi név viselőjénél sokkal többet létesített az első; mindazonáltal a tudományos mechanika alapítójául jogosan tekinthető Galileo Galilei (szül. 1564 Pisa-ban, megh. 1642 Florenzben).

---

* V. ö. Kinematika, 10. §. 8. l.; Czógler A.: Fizikai egységek. Budapest, 1891.

** A mechanika tudományos fejlődése történetére nézve v. ö. pl. Czógler Alajos: A fizika története életrajzokban. Két kötet. Budapest, 1882. A kir. m. termtt. Társulat kiadványa; Heller Ágost: A fizika története a XIX. században. I. kötet, a legrégibb időktől 1820-ig; a M. T. Akadémia megbizásából. Budapest, 1891. Kiadja a kir. m. termtt. Társulat; E. Dühring: Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Berlin, 1873; harmadik kiadás 1887; E. Mach: Die Mechanik in ihrer Entwickelung. Leipzig, 1883.

2. Galilei sok egyes mozgásjelenség kisérleti vagy megfigyeléssel való megvizsgálása után a dynamika egységes tárgyalására törekedett. Az erők összetevése, a lejtőn való mozgás, a szabad esés, az inga mozgása, az elhajított testek mozgása, a testek ütközése s i. t. törvényeinek kisérleti kipuhatolása megtanította őt a statikában és a dynamikában a közös alaptények felismerésére és alapfogalmak felállítására. Főmunkája «*Discorsi e demonstrazione matematiche intorno a due nuove scienze* s i. t.» (Társalgások és mathematikai fejtegetések két új tudományról) 1638,* melylyel nézete szerint az elméleti physika megalapítója lett, de helyesebb őt az elméleti mechanika megalapítójának tekinteni.

Abban az évben, melyben Galilei meghalt, született Isaac Newton, a ki: «*Philosophiae naturalis principia mathematica*» című művének** «*Axiomata sive Leges motus*» című fejezetében három szabatos mondatba, *axiomá*ba foglalta a dynamikának alapját képező s már előtte ismert, Galileitől is kimondott *tapasztalatokat* (l. a köv. §-ot).

3. *Axioma* alatt (a 3. §. 1. pontjával megegyezőleg) a tapasztalatból merített oly tételt értünk, melynek helyessége mindenki előtt, ki az arra vonatkozó tényeket ismeri, minden különös bizonyítás nélkül világos, mely tételt azután általános érvényűnek tekintünk.

Ezért valamely természettudományi axioma felfogására és megértésére nézve okvetetlenül szükséges, hogy a reá vonatkozó természeti jelenségek tapasztalati ismereteivel tisztában legyünk és hogy az axioma kifejezésére szolgáló definitiók már előre gondosan megállapítva legyenek.

Általános az axioma, ha kivétel nélkül valamenynyi mechanikai jelenségre érvényes; *független* az axioma, ha más axiomából vagy axiomákból le nem származtatható, hanem *független tapasztalati alaptényt fejez ki.*

7. §. *A dynamika általános, független axiomáinak* Newton-*féle fogalmazása. Az energia elve független, de speciális dynamikai elv. Energetika.*

Ebben a §-ban felsoroljuk a független dynamikai elveket; a következő §§-ban értelmezzük a Newton-féléket; azután a III. szakasz-

---

* Német fordításban Öttingentől. Leipzig, 1890, 1891.

** London 1686 (első kiadás). Newton ezen műve *az első elméleti physiká*-nak tekinthető, mely nagyobb részében a dynamikának és a gravitátiónak tapasztalaton alapuló elméletével foglalkozik, de a physika akkor ismert többi ágaira is kiterjed. Newtonnak kezdeményezésére az angolok a theoretikus physikát még jelenleg is igen jellemzően «*Natural philosophy*» (természetbölcselet) névvel jelölik.

ban nehány dynamikai fogalom és eljárás értelmezése után, melyek az energia elvének megértésére szükségesek, áttérünk ezen elv részletezésére, 22. §.

1. Newton fogalmazása az idézett helyen a következő:

Lex I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Minden test nyugvó, vagy egyenletesen és egyenesben mozgó állapotában marad meg, ha csak reá ható erők által nem kényszerittetik, ezt az állapotát megváltoztatni.

(Ezt a tételt az *anyag tehetetlensége elvé*nek nevezik, 8. §.)

Lex. II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

A mozgás változása a mozgató külső erővel arányos és azon egyenes mentén történik, a melyben ez az erő hat.*

(Ezt a tételt az *erő tételének* nevezhetjük, 11. §.)

Lex III. Actioni contrariam semper et æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi.

Minden hatással mindig egyenlő és ellentett irányú az ellenhatás: avagy két testnek egymásra gyakorolt hatásai mindig egyenlők és ellentett irányúak.

(Ezt a tételt a *hatás és viszszahatás elvé*nek nevezik, 12. §.)

Ezen axiomák még jelenleg is épen úgy vannak érvényben, mint két évszázaddal ezelőtt; még most is képezik a dynamika tapasztalati alapjának egy részét; minden kisérlet, ezeket a tapasztalati tételeket mások által helyettesíteni, sikertelen volt.** Az egyetlen változás, a mely a tételekhez kapcsolható, ezeknek oly módon való kibővítésében áll, hogy a felállításuk óta elmult két évszázadnak a dynamikában való haladását felkarolhassák.

Ismerettani rendkívüli fontosságuknál fogva a következő §§-okban részletezzük azokat a *tapasztalati tényeket*, melyekből ezek az axiomák levonhatók és az ezekből nyerhető következtetéseket.

---

* A *kívülről* a testre ható erőt megkülönböztetésül a testben úgyis mindig működő belső erőktől Newton «*vis impressa*»-nak nevezi; ez az elnevezés azóta az angol szerzőknél használatos és ujabb időben az európai szárazföldi irodalomba is ment át.

** A mechanika alapjának más álláspontokról való felfogására nézve v. ö. a 22. §. lábjegyzékében, 35. l. idézett helyeket és napjainkban megjelent, felette érdekes, de inkább haladottabb kezdőknek ajánlható művet: H. Hertz: Die Principien der Mechanik, in neuem Zusammenhange dargestellt (Gesammelte Werke Bd. III.) Leipzig, 1894; különösen a bevezetést.

2. A felsoroltakon kívül van azonban még egy, az *előbbiektől teljesen független tapasztalati* tétel: az *erély megmaradása elve* * [v. ö. a 22. §-ot].

Léteznek ugyanis bizonyos tulajdonságú anyagi rendszerek, melyeknek mechanikai munkaképességük változatlan marad, ha a rendszerek csak dynamikai változásokat mutatnak; e munkaképességek alakjai változók, de összegük állandó. Ezeket conservativ (erélyüket megtartó) anyagi rendszereknek nevezik.

Ha pedig a dynamikaiakon kívül még a hőbeli, az electromos, a mágnesi, a chemiai s i. t. változásokat is mind veszszük tekintetbe, akkor a tapasztalás azt mutatja, hogy bármily változásokon is menjen át valamely anyagi rendszer, az egész erélye, melynek részei dynamikai, electromos, mágnességi, thermikus, chemiai s i. t. erély alakjában lépnek fel, mindig állandó marad.

A természet jelenségeinek a bennük közös *energia* alapján való tárgyalását rendesen «*energetiká*»-nak nevezik.**

[*Jegyzet. A mechanikai hőelmélet* (thermodynamika) első tétele azt a tapasztalatot fejezi ki, hogy minden mechanikai, chemiai energia, mely surlódás, ütközés, vegyi átalakulás s i. t. folytán meleggé alakul, vele arányos melegmenynyiséget szolgáltat és megfordítva; ez nem más, mint az energia elve, alkalmazva a hőjelenségekre.

A thermodynamika második tapasztalati elve az *entropia tétele*, mely azon az empirikus tényen alapszik, hogy a melegség hidegebb testből melegebbe magától (azaz emberi közvetítés vagy berendezés nélkül) nem mehet át. E tételt mechanikai alapon csak bizonyos be nem bizonyítható, a hőt rezgő mozgásnak tekintő hypothetikus feltevések segélyével lehet származtatni, miért is általános mechanikai természettörvénynek még nem tekinthető.]

3. A felsorolt független általános alapelvekből más összefüggések származtathatók, melyeknek az anyagi rendszerek megfelelni tartoznak, de ezek már nem független vonatkozások, hanem a tekintetben

---

* Ezen elv első nyomai már Galileinél jelentkeznek, ki azt állította, hogy a leeső test elért végsebességével ugyanakkora magasságra képes emelkedni, mint a melyből leesett; Ch. Huyghens kiterjesztette ezt az állítást testek (különösen lengő ingák) súlypontja mozgására; Bernoulli János, Daniel és Jakab, valamint l'Hôpital munkái után Lagrange fogalmazta szabatosan az eleven erő tételét, melybe csak (a conservativ anyagi rendszereknél mindig létező) erőfüggvényt kell helyettesíteni, hogy az energia elvét nyerjük, 39. és 44. §§., 64. és 74. ll.

* Az elnevezés J. S. S. Glennie-től származik [On the principles of energetics, Philosophical Magazine XXI. k. 274—281, 350—358 és XXII. köt. 62—64. ll., 1861.], ki azt más értelemben vette; szerinte az energetika a *mechanikai* erők elmélete, ellentétben a biologiai (élő szervezetekben fellépő) erőkkel; Rankine használta ez elnevezést először [On the history of energetics, Phil. Mag. XXVIII. köt., 404. l., 1864.] mostani értelmében. V. ö. Heller Ágost: Az energiatan alapjairól. M. T. Ak. Ért. a Math. Tud. köréből. XV. köt. 5. szám, 1—14. ll. 1894.

birnak közös vonással, hogy a testek mozgás-adataitól függő bizonyos összegek *állandóságát* fejezik ki és így a tehetetlenséggel együtt a mozgás *conservativ elveit* képviselik [v. ö. 23—25. §§.].

8. §. *Az első axioma, az anyag tehetetlenségének (kitartóságának) elve kifejezi az anyagnak a saját egyensúlya és a mozgás bizonyos állapotai állandó megtartására irányított törekvését.*

1. A következőkben felsoroljuk azokat a tapasztalati tényeket, melyek kétségtelenül bizonyítják, hogy minden test anyagában magában van meg a hajlam, a törekvés, egyensúlya, továbbá *bizonyos (de* **nem** *valamenynyi)* mozgás-állapotok állandó megtartása iránt.*

a) Ha valamely test egyensúlyban (nyugalomban) van, mindig hatnak reá erők, de olyképen, hogy összhatásuk e testet nyugalomban tartja, *úgy, hogy ezt csak új erő hozzálépése mozdíthatja ki ezen egyensúlyi helyzetéből.*

b) Ha valamely test egyenletes, egyenesvonalú (azaz translatórius, haladó) mozgásban van, akkor erre általában véve erők hathatnak ugyan, de olyképen, hogy összhatásuk, ha a test nyugalomban volna, egyensúlyt létesítene.** *A test ezen egyenletes egyenesvonalú mozgását csak új erő hozzálépése képes megváltoztatni.*

c) Ha valamely *pontszerű test* (vagy véges testnek tömegközéppontja 24. §. II., 1., 37. l.) tetszőleges erők behatása alatt bármily mozgásban van és ezen erők bizonyos időpillanattól kezdve egyszerre megszünnének hatni (azaz, ha ettől fogva a test magára hagyatnék), akkor a pontszerű test (illetve a véges méretű test tömegközéppontja) ezentúl az e pillanatban bírt sebességét irány és nagyság szerint tartja meg s evvel egyenletes, egyenesvonalú mozgást végez.

d) Ha valamely szabadon mozogható merev vagy folyékony test

---

* V. ö a 24. §. II. szakasza 1. pontját, 41. l.

** A vízszintes sima jég tükrén elgördített sima golyóra, melynek középpontja, a surlódástól és a levegő ellenállásától eltekintve, egyenletes, egyenesvonalú mozgást végez, mindig még két erő hat: 1. a föld nehézségi ereje, mely a golyót függőlegesen lefelé mozgatni törekszik, de ezt a jég áthatatlanságánál fogva nem teheti, hanem ezért a jégre gyakorolt függélyes nyomásban nyilvánul; 2. e nyomás a jég anyagában ellennyomást létesít, mely a nyomással egyenlő nagyságú, de ellentett irányú.

E két erő a jégen nyugvó golyónál is van jelen, összhatásuk egyensúlyt létesít és a mozgó golyó vízszintes haladását nem képes megváltoztatni.

Analog viszonyok érvényesek pl. egyenletes sebességgel vízszintes pályán haladó vasuti vonatnál; itt a kocsik súlyán és a sínek ellennyomásán kívül még a vízszintes mozgás egyenesében ható gőzhajtóerő és a vele ellentett irányú súrlódás s a levegő ellenállásának összhatása a mozgásra vonatkozólag zérus.

Ugyanígy értelmezendő a többi ide tartozó jelenség.

oly forgást végez, hogy forgásának tengelye állandó irányú és forgásának szögsebessége is állandó, akkor (a forgás tengelyét egyensúlyi tengelynek nevezik és) a testre ható erők olyanok, hogy összhatásuk, ha a test nyugalomban volna, egyensúlyt létesítene. E mozgás-állapot megváltoztatására új erő hozzálépése szükséges.

2. Ezek értelmében valamely pontszerű test vagy véges test tömegközéppontja, ha e testekre kívülről ható erők nem működnek, egyenletes, egyenesvonalú mozgását megtartja; hasonlóképen tartja meg az egyensúlyi tengely körül egyenletesen forgó merev vagy folyékony test mozgási állapotát, ha reá külső hatások nem működnek.

Épen úgy áll megfordítva: a *nevezett* mozgásállapotok megváltoztatását létesítő hatást mechanikai erőnek nevezzük s az anyagi testek érintett mozgás-állapotuk megtartására irányított sajátságát az anyag *tehetetlenségének*, kitartóságának (*inertiájának*) nevezik. Ezt a tapasztalásbeli sajátságát az anyagnak már Keppler és Galilei és pedig az 1. pont *c)* alatti nyilvánulásában ismerték.

E szerint a kinetikai *erő* az az ok, mely a fenti 1. pont *a), b), d)* alatt részletezett mozgás változtatására okvetetlenül szükséges vagy általában mindazon mozgásoknak változtatására szükséges ok, mely mozgásokat a testek, tehetetlenségüknél fogva megtartanának. Ennek tapasztalatbeli részletezését l. a köv. §-ban.

I. *Jegyzet.* Vannak azonban mozgás-állapotok, melyeket a test még akkor is változtat meg, mikor reá külső erők nem hatnak. Ezekre nézve l. a 24. §. II. szakasza 1. pontját, 41. l.

II. *Jegyzet.* Az *idő mérése* a tehetetlenség elvén alapszik, közelebbről pedig azon a hypothesisen, hogy a föld tengely körüli forgása is ezen elv szerint, azaz változatlanúl történik. Egy körülforgása a *csillagnap*, mely 86164·09 közép másodpercz, vagy 23 óra 56 első 4·09 másodpercz és így a nap-culminátiótól nap-culminátióig számított napi középnapnak 0,99727-ed része.

A csillagászok e forgás tartamát a többi égi testek mozgásával összehasonlították és több évezredre terjedő megfigyeléseikből a csillagnap észrevehető változását nem mutathatták ki, daczára annak, hogy az apály és dagály vizeinek a tenger medrén és partjain való surlódása a föld e forgását lassítani törekszik.

9. §. *Az első axioma második részének tapasztalati általánosítása: a mozgató erő az elsőrendű gyorsulás oka. Ennek hypothetikus kiterjesztése.*

1. Szervezetünk erői [1. §. 3.] nem csak statikai hatást fejthetnek ki, hanem az anyagi testek mozgásbeli állapotát is változtathatják meg, a menynyiben nyugvó testeket mozgásba hozhatnak, egyenletesen

egyenesben mozgó testek sebességét növeszthetik vagy lassíthatják, és tetszőleges pályán haladó test mozgását megmásíthatják: szóval az *anyagi testek sebességét irány és nagyság szerint megváltoztatják.*

Izmaink kifejtette e fajta erői ilyenkor *mozgató, kinetikai erők;* működésük megszünésével (ha másnemű külső hatások nem lépnek hozzá) a sebesség további változása megszünik [megelőző §. 1, *b)* pontja].

A mozgás vagy nyugalom változása kinematikai tekintetben anynyit mond, hogy a test *gyorsulással* bir; illetve a már meglévő gyorsuláshoz új gyorsulást nyer; *ennek tapasztalásbeli oka a nevezett organikus mozgató erőkben keresendő.*

2. Gyorsulást mutat még számos oly test-mozgás, mely vagy állati szervezetek erői vagy oly anorganikus hatások befolyása alatt áll, mely erők, illetve hatások az emberi szervezet erőivel közvetetlenül összehasonlíthatók és melyek dynamikai tekintetben ezekkel teljesen egy természetüeknek mutatkoznak és így emberi erőkkel helyettesíthetők.

Ezekről a *mozgató erőkről* is az a *tapasztalás* áll, hogy a *jelenlétükkel kapcsolatos gyorsulásnak ők az okai.*

3. Ismét más, még sokkal számosabb, gyorsulással biró oly test-mozgás létezik, melyeknél a testekre működő hatásokat közvetetlenül nem hasonlíthatjuk összse szervezetünk kifejtette erőivel, már csak hozzáférhetetlenségüknél fogva sem [1. §. 3. pontja].

Ezeknél nem bizonyíthatjuk be kisérletileg, hogy az organikus erőkkel egytermészetű mozgató erők létesítik a gyorsulást, hanem, mivel a kisérletileg megvizsgálható változó mozgás jelenségeinél a gyorsulás oka az organikus természetű vagy vele egyenértékü mozgató erő: ez *analogiából következtetve,* **felveszszük,** hogy a *számunkra mechanikailag közvetetlenülhozzá nem férhető valamenynyi mozgás gyorsulásának okai az organikusakkal helyettesíthető, velük egy fajta mozgató erők.*

Az e feltevésből vont következtetések a megfigyeléssel teljesen megegyeznek.

10. §. *Tapasztalás: A magasabbrendű gyorsulások változására nem kell külön okokat felvenni.*

Az állandó irányú és nagyságú gyorsulással mozgó anyagi pontra a megelőző §. értelmében mozgató erő hat, mely ok, miután állandó eredményt (gyorsulást) létesít, állandónak tekintendő; a másodrendű gyorsulás zérus.

Az irány és nagyság szerinti állandó gyorsulás megváltoztatására új gyorsulás, illetve az ezt létesítő új erő hozzájárulása szükséges; de ha most az elsőrendű gyorsulás változó, akkor a másodrendű

gyorsulás nem zérus s ha ez utóbbi nem állandó, akkor a harmadrendű gyorsulás sem zérus s i. t.

E szerint a változó erők általánosságban nem csak az első-, hanem ezekkel együtt közvetve a magasabbrendű gyorsulásokat is változtatják; az utóbbiak változása az elsőrendű gyorsulás differentiál-quotienseiből adódik.

A mechanikai jelenségek megfigyelésbeli és kisérleti megvizsgálása arra az eredményre vezetett, hogy a magasabbrendű gyorsulások létesítésére nem kell független okokat felvenni, mint az elsőrendüeknél, mert az ezen utóbbiakat létesítő erők mindig elegendők az összes ismert mechanikai, illetve kinetikai jelenségek magyarázatára.

11. §. *A második axioma: A mozgató (kinetikai) erő a tömeg és a gyorsulás szorzatával arányos vector. Egysége. Jellege.*

I. *Közvetetlen tapasztalások.* Szervezetünk kifejtette mozgató erőiről a tapasztalás a következőket mutatta ki:

1. Valamely eleinte nyugvó tömegnek surlódás nélküli megmozgatásánál (pl. sima gömbnek sima jégen való elgördítésénél; kocsinak vízszintes síneken [surlódástól eltekintve] való megindításánál s i. t.) ez erő a mozgatott tömegnek bizonyos időköz alatt bizonyos sebességet tulajdonított.

Ezen erő *különben egyenlő körülmények között* annál nagyobb,

a) Mennél nagyobb az elindított test *tömege* [4. §., 5. l.];

b) Mennél nagyobb az ugyanazon időköz alatt *nyert sebesség.*

2. Ezek az eredmények például egyenletesen egyenesben mozgó hajón s i. t. szintén érvényesek, azaz absolut mozgó, de relativ nyugvó testek *relativ* mozgatására ugyanily nagyságú erők szükségesek, melyeknek magaviselete az *a)* és *b)* alatti sajátságokat mutatja.

3. A nyert sebesség iránya mindig megegyezik az azt létesítő mozgató erőével és más irányban nem változik meg a sebesség, mint a milyenben a mozgató erő hat.

II. *Kisérletek egyenes vonalú, állandó gyorsulást létesítő mozgató erőkkel.*

Az I. alatt felsorolt nagyobbára qualitativ tapasztalások egyenes *quantitativ* kisérletekké alakíthatók pl. az Atwood-féle ejtőgép súlyainak túlsúlyok segélyével való mozgatásánál, hol a mozgató erő a földnehézségi erőnek a «túlsúly»-ra gyakorolt hatása, azaz, ennek súlya (v. ö. a 16. §. 2. pontjában említett összehasonlítást, 27. l.), mely itt a sebességnek nagyságát, de nem irányát változtatja meg. Ezen ismert kisérletekből kiderül, hogy a mozgató erő által a mozgatott tömegekben létesített gyorsulás tényleg egyenesen arányos ezen erővel, de fordítva arányos

a mozgatott (gyorsított) tömeggel. A gyorsulás iránya pedig mindig egybeesik a mozgató erőével.

E szerint e *tapasztalást* mindig kifejezi a

$$\vec{\varphi}=k(\vec{P}:m) \text{ avagy: } \vec{P}=Km\vec{\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

egyenlet, melyben P a mozgató erő, m az egész mozgatott tömeg, φ a létesített gyorsulás és $K=1:k$ állandó arányossági tényező.

III. *Kísérletek állandó sebességű körmozgás mozgató erőivel.*

Rugalmas, egyik végén megerősített fonal másik végéhez egy fémgömböcske van kötve, mely a szilárd vég körül gyorsan forog; a gömböcske kifeszíti a fonalat és körpályát ír le. Ha a mozgás állandó lett, a fonál meghoszszabbodása is állandó. E kifeszítést, a rendesen *középfutó erő*nek nevezett ok létesíti; de ez nem más, mint a gömböcske tehetetlenségének megnyilatkozása, mert ennek az a törekvése, a gömböt a pálya mindenkori érintője mentén egyenletes, egyenesvonalú mozgásban tartani, azaz, a szilárd végtől eltávolítani. Ez a törekvés, a tapasztalás szerint, abban a pillanatban valósul meg, melyben a fonál elszakad vagy elmetszetik.

Másrészt a fonál megnyulása folytán a fonálban keletkező rugalmas erő a gömböt a szilárd vég felé törekszik húzni és állandó forgássebességnél ez az erő és a középfutó erő ellentetten egyenlők lévén és a fonál mindenkori irányában feküdvén, a gömb távolsága a szilárd végtől állandó marad.

A gyorsulás itt [Kinematika 49. l. (5)] a szilárd vég felé van fordítva és $\varphi=v^2:a$ értékű, ha v a gömb sebessége, a a körpálya sugara.

De azért gyorsító erő is van itt.

Ugyanis a nevezett rugalmas erő a gömböt minden pillanatban elteríti a mindenkori érintő menti egyenesvonalú mozgástól; ez itt a gyorsító erő, mely jelen esetünkben a sebességnek nem a nagyságát, hanem az *irányát* változtatja meg.

Maga ez a gyorsító erő a gömbtől a szilárd vég felé vont irányba esvén, a mindenkori sebességre merőleges és irányát mozgás közben folytonosan változtatja.

A tapasztalás kimutatta, hogy a fonál meghoszszabbodásával mért ezen erő egyenesen arányos a gömböcske tömegével, sebessége négyzetével és fordítva arányos a körpálya sugarával:

$$\vec{P}=Km\frac{v^2}{a}=Km\vec{\varphi}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

azaz itt is a mozgató erő a mozgó tömeggel és a létesítette gyorsulással egyenesen arányos, s ezen utóbbi irányába esik.

IV. *Általánosítás.*

A II-ben az állandó *tangentiális-*, a III-ban az állandó *normális* gyorsulást létesítő erőkre s az általuk létesített gyorsulásra nézve ugyanazon (1) és (2) tapasztalati összefüggést találtuk: közel fekvő

gondolat ezt az összefüggést valamenynyi mozgató erőre és az általuk létesített gyorsulásra nézve érvényesnek tekinteni.

Az érintett tapasztalások alapján, az egyenes kisérletezésnek alá nem vethető, vagy közvetetlenül hozzá nem férhető szabad mozgásoknál supponált mozgató erőkre nézve [1 §. 3.] felveszszük, hogy ezek szintén a mozgatott tömeggel és a mozgásában létesített gyorsulással egyenesen arányosak s hogy irányuk e gyorsulás irányába esik.

A tapasztalás kimutatta, hogy evvel a feltevéssel az összes szabad mozgások, továbbá a súrlódás nélküli kényszermozgások kielégítőleg magyarázhatók, teljesen leírhatók; sőt leírhatók a súrlódással és más mozgás-akadálylyal történő mozgások is, ha e mozgás-akadályok tapasztalatbeli hatását velük teljesen æquivalens, a mozgás sebességét csökkenteni törekvő erőkkel helyettesítjük [13., 29., 50., 56. s i. t. §§.].

Ezek értelmében egy m tömegű pontnak $\vec{\varphi}$ gyorsulással biró mozgásánál a mozgató erő:

$$\vec{P} = K m \vec{\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

A *mozgató erő e szerint vector, melynek nagysága az $m\varphi$ szorzat értékével (nagyságával) arányos, iránya a létesítette gyorsulás irányába esik.*

Ez a második axioma szabatos kifejezése, mert a «mozgás változása» kifejezés csak a gyorsulásra vonatkozhatik.

V. A *K együtthatót* rendesen a *számegységgel egyenlőnek* veszszük, úgy, hogy:

$$\vec{P} = m\vec{\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Az állandó fölötti ezen disponálás avval a dynamikai jelentéssel bir, hogy (4) szerint:

1*a*. *A mozgató erő egysége az az erő, mely a tömeg egységre hatva, abban a gyorsulás egységét létesíti;* vagy Gauss-sal más szóval fejezve ki ugyanezt az összefüggést [15. §., 26. l.]:

1*b*. *A kinetikai erő egysége az az erő, mely a tömegegységre az időegységen keresztül hatva, ez alatt sebességét a sebesség egységével változtatja* (a sebességet *vector*nak tekintve).

2. Ezen erő jellege (dimensiója): tömeg $\times$ gyorsulás, ezen erő $[P]$ egysége, ha M, L, T a tömeg, a hoszszúság és az idő egységei:

$$[P] = \frac{ML}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

3. A kinetikai erőt, (4) definitiója alapján a mozgatott tömeg s a létesített gyorsulás méri, v. ö. a 15. §-ot, 26. l.

12. §. *A harmadik axioma: A hatás és viszszahatás statikai és kinetikai erőkre nézve mindig ellentetten egyenlő.*

A tapasztalás kimutatta, hogy minden test, minden anyagi pont nem csak a környező testektől, anyagoktól szenved hatásokat, nem csak e testek fejtenek ki reá erőket, hanem viszont: e test vagy e pont környezetének minden anyagi részére fejt ki erőket. A pontra a környezetéből reá működő erők nyilvánulását *hatás*nak, az általa a környezetre kifejtett erők nyilvánulását *viszszahatás*nak nevezzük.

E kétféle hatás mindenkor egyszerre lép fel, ezek az anyagi testek *kölcsönös egymásra hatásának* (mert csak ilyenek léteznek a természetben) egyes részei.

Ha *hatás-* és *viszszahatásról* szólunk: mindig legalább **két** anyagi részből álló anyagi rendszert kell tekintetbe vennünk.

Gyakran, ha *egy* anyagi résznek mint egésznek mozgását kívánjuk csak megvizsgálni: a hatások egyikének a tekintetbe vétele is elegendő.

I. *A hatás és viszszahatás elve az érintkezésnél és anyagi testek közvetítésével fellépő erőkre nézve.*

1. Már az egyensúly felemlítésénél [2. §.] jeleztük azt a tapasztalatot, hogy minden statikai erő valamely anyagi részen hat, melynek kisebb vagy nagyobb mérvű deformatiót tulajdonít, s hogy ez az alakváltozás a deformált testben a deformálóval egyenlő erősségű, de vele ellentett irányú erőt ébreszt; e két erő állandó működése a deformátió fentartásában nyilvánul, de a testnek mint ilyennek az egyensúlyát nem változtathatja.

Más kisérlet az, mikor pl. rugalmas testet valami csavarszerkezettel erősen összeszorítjuk és e szerkezetet a testtel együtt fonálon felfüggesztjük.

Az így mozoghatóvá tett szerkezet bármiképen is helyezkedett legyen egyensúlyba: abban meg is marad, bármily nagyok is legyenek a benne az összenyomás létesítette nyomások és ellennyomások.

Hasonlóképen tapasztaljuk, ha pl. az így összenyomott testet szorító csavarával együtt (vagy összeszorított folyadékot vagy légnemű testet bezáró edényével együtt) elhajítjuk, vagy az Atwood-féle ejtőgép egyik súlyához helyezzük s í. t., hogy a mozgás független az összenyomás mértékétől, sőt magától az összenyomás tényétől is.

E tapasztalásból közvetetlenül az folyik, hogy a tekintetbe vett rendszer belső (itt statikai) erőknek bármely irány szerint vett összetevői összesen zérust adnak.

2. Vannak azonban tapasztalataink a hatás és viszszahatás *kinetikai* jelenségeire vonatkozólag is.

Ha pl. egy kifeszített rugalmas fonál végeihez erősített, két kezünkben tartott két gömböcskét egyszerre elbocsátjuk: az előbb statikai erő alakjában nyilvánuló rugalmas hatás most mozgató erő alakjában jelentkezik, melyről kisérletileg könynyen kimutatható, hogy egymással egyenlők.

Továbbá, ha a 11. §. III. pontja kisérletében, 17. l. a fonál egyik, szilárd végét kezünkkel tartjuk, akkor kezünk a fonalat ugyanoly erővel tartja, a milyennel a gömböcske húzza, a mit a centrifugális gép segélyével quantitative is ki lehet mutatni.

Ide tartoznak továbbá az *ütközés* jelenségei is, melyeknél az ütközés létesítette deformátiók folytán fellépő statikai vagy kinetikai erők az elemekből ismert tapasztalás szerint mindig egymással ellentetten egyenlők, úgy, hogy az ütközés tartama alatt ezen erőknek bármily irány szerint vett összetevői összesen zérust adnak. Ezen ténynek mathematikai fogalmazása [a mozgásnyomatékok megtartása] az ütközés mozgásegyenletei egyikét szolgáltatja.

3. E tényekből következtetjük azt, hogy nagyon valószínű, miszerint az egyenes kisérletezésnek alá nem vethető ily érintkezési és anyag-közvetítésbeli erők mindenütt megfelelnek e sajátságnak. A tapasztalás itt is kimutatta, hogy az ily fajta hozzá nem férhető mechanikai jelenségek ezen feltevéssel megegyezőleg folynak le.

II. A természeti erők másik nagy csoportjába tartoznak az ú. n. *távolba-hatás erői;* a föld nehézségi erő, az általános Newton-féle attractió, az electromos és mágnességi erők s í. t., melyek látszólag a közegtől, melyben az egymásra hatók vannak, függetlenek * és csakis ezen hatók egymáshoz viszonyított *relativ* helyzetétől függenek.

[Ujabb időben a világürt kitöltő anyagot, az æthert véve fel, mathematikai transformátiók segélyével sikerült a távolba-hatás ezen erőit e közegnek moleculáris, a rugalmasságiakhoz analog, az előbbiekkel teljesen æquivalens erőkkel helyettesíteni, azaz a távolba-hatás erőit érintkezési, anyag-közvetítésbeli, molekuláris erőkre viszszavezetni.]

1. Ezeknél a hatás és viszszahatás elvét számos egyenes kisérlettel ki lehet mutatni.

Így az általános vonzásnál két tömeg kölcsönös vonzását észlelhetni, mely finom fonalakon függő, vízszintesen mozogható, két karon egymás közelében van elhelyezve, melyek mindegyike a másikat egyensúlyi helyzetéből kitéríti. Ugyanígy mutatható kisérletileg ki az electrostatikai, a magnetostatikai, az electromágnesi és az electrodynamikus erőkre nézve ez elvnek fennállása; de a kisérleti berendezést sokféleképen módosíthatjuk.

---

* Az electrostatikai és a magnetostatikai erők a közegnek electromos és mágnességi magaviseletétől függenek.

2. Ezek alapján felveszszük, hogy a többi, egyenes kisérletezésnek alá nem vethető dynamikai jelenségek távolságbeli erői, akár egyensúlyt, akár mozgást létesítsenek, a hatás és viszszahatás elvének felelnek meg; e feltevésből vont következtetések a tapasztalással megegyeznek.

III. Egy sajátszerűségét a hatás- és viszszahatásnak kell még felemlítenünk. Ugyanis általános tapasztalati törvény, hogy e két hatás vagy *egyszerre statikai*, vagy *egyszerre kinetikai*; e törvénytől való eltérések csak látszólagosak.

Így a föld és a középpontja felé eső kő közötti kölcsönhatásnál a föld a követ lefelé, a kő a földet fölfelé mozgatja, csakhogy az utóbbi mozgás gyorsulása, a földnek a kőhöz képest rendkívül nagy tömegénél fogva, oly kicsiny, hogy azt egyenesen ki nem mutathatjuk s a földet a kőhöz képest nyugvónak tekinthetjük. De a föld és hold kölcsönhatásánál a földnek a holdtól szenvedett gyorsulása már tetemes.

Hasonlóan, ha a falba vert szöghöz erősített rugalmas fonál másik végéhez kisebb súlyt akasztunk és kezünkkel a súly hatását megnövesztjük s azután a súlyt eleresztjük: a rugalmas hatás a súlyt fölfelé mozgatja, ellenhatása pedig a szöget, vele együtt a falat, a földet húzza lefelé, de a föld óriási tömegénél fogva ez utóbbi mozgás gyorsulása észrevehetetlen.

Mindenütt érvényes ez az értelmezés; ha a kölcsönhatás egyik része mozgató, a másik is mindig az, csakhogy sokszor az utóbbi létesítette gyorsulás elhanyagolható s így ez statikai hatásnak *látszik*.

A kifejtettek értelmében e harmadik axiomát a természet összes dynamikai jelenségeinél fennállónak kell tekintenünk.

13. §. *Anyagi pont és rendszer általános kényszermozgása. Kényszererők, független (szabad) erők. A mozgás viszszavezetése szabad mozgásra. Effectiv-, reactió-erők. A második és harmadik axioma alkalmazása.*

1. Ha a test vagy a pont szabadon mozoghat: a reá ható erők, a létesítettük gyorsulás és a pont tömege között fennálló összefüggést Newton második axiomája [7. §. 1. pontja és 14. §. (4), 18. l.] fejezi ki.

A kívülről ható erőt Newton *vis impressa*-nak nevezi [i. h.] mert ez a test mozgásába kívülről mintegy benyomult és gyorsulást létesített; ezt itt *külső mozgató erő*nek nevezhetjük.

2. Ha a test vagy a pont *surlódás nélküli feltételeknek* van alávetve [Kinematika 359. §.], ez rendesen anynyit jelent, hogy e feltételek a test egyes pontjait bizonyos felületeken vagy görbéken való mozgásra késztetik, míg a test mozgása, ha az szabad volna, más lenne.

De a feltétel *akadályozó* is lehet [Kinematika 89. és 358. §§.],

mely a mozgás szabadságát csak bizonyos helyzetek beállásánál korlátozza.

Ezen kényszerekhez és feltételekhez számitjuk azokat az összefüggéseket is, melyek az anyagi rendszer consistentiáját meghatározzák; így a merev testeknél azokat a feltételeket, hogy pontjaik egymáshoz viszonyított helyzetüket nem változtathatják; rugalmas testeknél, hogy ily relativ helyzeteltolódás mily rugalmas erőket létesít s i. t.

Ámde a feltételek (a kényszer) létesítette mozgásváltozást mindenkor és mindenütt alkalmasan választott és alkalmazott *erők* által is létesíthetjük, melyeket, mivel a kényszerrel egyenértékű dynamikai hatást mutatnak, jogosan *feltételi erők*nek vagy *kényszererők*nek nevezhetjük. Ellenben a feltételektől függetlenül a testre ható erőket rendesen a kényszertől *független, szabad erők*nek nevezik. Ezek mikénti meghatározásáról a kellő helyen lesz szó; itt elegendő annak a felemlítése, hogy e kényszererők mindenütt az előírt felületekre vagy görbékre merőlegesek (épen úgy, mint a feltételi gyorsulások, Kinematika 366., 130,, 89*a* §§.].

3. Ha a test vagy a pont *súrlódással* vagy *ellenálló közegben* mozog, akkor ez is feltételnek tekintendő, mely azonban a 2. alattiaktól elütő természetű; a tapasztalat szerint a súrlódás és a közeg ellenállása teljesen egyenértékű egy a mindenkori sebességgel ellentett irányú egy mozgató erővel; az ellenállás ereje a test sebességétől, alakjától és felszíne simasági fokától, a súrlódásbeli erő ellenben, mely sikló (csúsztató) vagy gördülő súrlódásból származik, a súrlódó testek természetétől, felületen uralkodó nyomástól függ és e felülettel arányos.

4. A megelőzőkből következik, hogy bármily mozgási feltételeknek is legyen alávetve a rendszer: e feltételeket mind *erők*kel helyettesíthetjük; ezért a test kényszermozgása tényleg úgy megyen végbe, mintha a test szabadon mozoghatna, de reá, a feltételektől független mozgató erőkön kívül még a feltételi, a kényszererők működnének.

5. Ezen tapasztalatok értelmébeu a test vagy a rendszer bármily mozgása viszsza van vezetve szabad mozgásra. A feltételektől független (szabad) erők (a vires impressæ) és a kényszererők *eredői* képezik ezen általános esetben a *mozgató erőket,* melyeket itt helyesen neveznek *effectiv erők*nek, mozgásbeli hatást létesítőknek, s melyeket a most már teljesen szabadon mozgónak vett rendszerre hatóknak tekintjük.

Jeleljék P_i a rendszer m_i tömegpontjára ható effectiv erőt, φ_i az általa létesített gyorsulást, akkor Newton második axiomája értelmében

$\vec{P}_i = m_i \vec{\varphi}_i$ és mivel $\vec{P}_i$ az m_i-re gyakorolt egész hatás: a harmadik axioma értelmében $-\vec{P}_i = -m_i \vec{\varphi}_i$ az m_i-ből eredő egész dynamikai viszszahatás, melyet jogosan *reactió erő*nek neveznek.

E szerint az *effectiv erő és a reactió erő összege minden pontra nézve zérussal egyenlő.*

III. A tömeg, a statikai, a kinetikai erő egysége és mérése; az utóbbiak kisérleti egyenértékűsége. Munka és erély. Az energia tapasztalati tétele.

14. §. *A statikai erők és a tömegek méréséről általánosságban.*

1. Minden statikai erő megváltoztatja annak a testnek, melyre hat, az állapotát, kivéve nyugalmi állapotát. Így megváltoznak a testek alakja, méretei, sűrűsége, rugalmassági viszonyai, de még pl. olvadási vagy fagypontja, fény-törő és -szóródó képessége s í. t., ha az ú. n. normális állapotban reá ható erőkön kívül új statikai erő lép fel.

E változások az őket létesítette statikai erő mérésére szolgálhatnak, mert a tapasztalás szerint e változások az erő nagyságától függenek.

Egyike az e czélra legalkalmasabb sajátságoknak a testek *deformátiója.*

Egy rugalmas fonál megnyujtása, egy spirális rúgó vagy gáznemű test összenyomódása, egy szilárd rugalmas rúd hajlítása vagy megcsavarodása s í. t. annál nagyobb mérvű, mennél nagyobb erőt fejt ki e czélra kezünk.

2. Tekintsünk meg közelebbről pl. a felső végén megerősített, alsó végén csészét vivő, vertikális tengelyű spirálisból álló *rúgós mérleget.*

a) Helyezzünk reá pl. egy 4 C-fokú, egy köbdecimeter térfogatú vizet; mihelyt a mérleg egyensúlyba jutott, e víznek a csészére s így a rúgó alsó végére gyakorolt nyomása, illetve húzása nem más, mint a *víz súlya;* ez pedig az a statikai erő, melylyel a föld nehézségi vonzása e víztömegre függőlegesen lefelé hat, azt lefelé mozgatni törekszik. Ez az erő a rúgót bizonyos hoszszal megnyujtja. A tapasztalás mutatja, hogy bármily más ily hőmérsékű és ily térfogatú vízmenynyiség ugyanakkora megnyujtást létesít.

E szerint a föld vonzása minden egyes gramm-vízre a mérleg helyén ugyanazt a súlyt (erőt) létesíti, miből következik, hogy kétszer, háromszor akkora vízmenynyiség súlya is kétszer, háromszor akkora, mint a gramm-vízé.

Röviden: a földfelület minden kisebb (néhány méternyi) területű helyén *a víz súlya egyenesen arányos anyag-menynyiségével, azaz tömegével.*

b) Rakjuk most meg a csészét rendre pl. egy-, két-, három s í. t. gramm-vízzel és figyeljük meg az evvel létesített megnyujtásokat; így calibrálhatjuk mérlegünket és léptéket készíthetünk, melynek vonalai meghatározott, ismert víztömegek súlyának, azaz meghatározott statikai erőknek felelnek meg.

Ezek szerint e *mérleg a statikai erő absolut értékének mérésére* alkalmas; egységeül pl. a víz tömegegységének a föld bizonyos helyén való súlya szolgálhat.

Ha most ismeretlen víztömeget rakunk a csészére: a leolvasott megnyulás az ismeretlen tömeg súlyára, ez pedig a fentemlítettek szerint ennek anyagmenynyiségére, azaz az ismeretlen tömegre enged következtetni, mivel itt a különböző víz-tömegek úgy aránylanak, mint a súlyaik. E mérleg ezek értelmében víztömeg mérésére is alkalmas; egység lehet pl. a gramm-víz.

3. Megejtve a 2. alatt említett kisérleteket más, maguk között egynemű anyagokkal: a tapasztalás ezekre nézve is külön-külön a megelőző 2. pont eredményeit érvényben lévőknek mutatja és így e mérleg bármily más, *egynemü* (egyfajta) testek különböző anyagmenynyiségének, tömegének, mérésére szolgálhat.

4. *Különnemű* testekkel terhelve meg egymásután a csészét: a *mérleg megnyulása a testek súlyát* adja meg (pl. gramm-vízsúlyokban, mint egységekben); *hogy azonban e különnemű tömegek összehasonlíttathassanak, a fent részletezett tapasztalatok nem elegendők,* hanem egy *hypothesis,* egy *bebizonyíthatatlan feltevés* szükséges.

E *hypothesis* a következő: *Ha két különnemű test súlya a föld felülete egy helyén egyenlő, akkor a két test tömege egyenlő.*

Elfogadva ezt a feltevést, mérlegünk bármily test tömegének mérésére alkalmas.

A tapasztalás kimutatta, hogy két ily különböző természetű, de egyenlő tömegű test *súlya* a föld felülete különböző helyein változik ugyan, de egymás között mindig egyenlő.

5. A rúgós mérlegünket egy s ugyanazon tömeggel (pl. a tömegegységgel) a föld különböző, s a tengerszín felett is különböző magasságú helyein megrakva: azt tapasztaljuk, hogy e *tömeg súlya* e különböző helyeken *különböző.** Ennek oka a föld lapultsága, ten-

---

* Ezt érzékeny kinetikai módszerekkel, pl. ingával sokkal könnyebben lehet kimutatni.

gely körüli forgása és a nehézségi vonzásnak függése a föld középpontjától számított távolságtól [Kinematika 352. §.].

Ez oknál fogva a *változó súlyegység* helyett czélszerűbb az *állandó «tömegegységet»* mértékül választani.

6. A 2—5. pontokban említett valamenynyi mérés bármely oly szerkezettel is végezhető, mely az 1. pont végén említett sajátságok valamelyikén alapszik.

7. A *közönséges emeltyűs mérleg* csészéibe helyezett tömegek *súlyai* a mérleg emeltyűjére erő-nyomatékokat fejtenek ki s ezt tengelye (éle) körül forgatni törekszenek; a mérleg a helyes egyensúlyban van, ha e nyomatékok ellentetten egyenlők, s helyzete ugyanaz, mint a tömegek felrakása előtt. Ez az egyensúly ugyanazokkal a tömegekkel a föld bármily pontján fennáll, mert a két súly értéke a föld különböző helyein mindig egy közös tényezővel változik s ugyanaz áll az erők nyomatékaira nézve is.

Ha a *mérleg egyenlő karú*: a *két* erő-nyomaték-, e szerint a két erő (a két súly)- és 4. szerint a két *tömeg is egyenlő.*

Tizedes mérleg vagy másnemű, az emeltyű elvén alapuló mérlegnél, egyensúly alkalmával a tömegek viszonya egyenlő a megfelelő karok hoszszának egymáshoz való viszonyával.

Az emeltyűs mérleg e szerint rendesen *tömegek összehasonlítására szolgál.*

A mérleghez adott *súly*-sorozat tulajdonképen *tömeg*-sorozat; s a midőn a mérleget alkalmazzuk: tulajdonképen csak az ismeretlen tömegű testnek a *tömegét* hasonlítjuk összse a súlysorozat tömegeivel, mert rendesen ennek tömege, anyagmenynyisége, de nem a súlya iránt érdeklődünk a közéletben.

Számos esetben azonban (pl. az absolut electrométernél), az electromos áram-mérlegelőnél s í. t.) az *emeltyűs mérleg statikai erők mérésére szolgál*, a menynyiben egyik karja végén a meghatározandó, különben tetszőleges természetű erő, a másik karja végén ismert súly működik.

8. Statikai erők összehasonlítására (mérésére) az emeltyűn kívül még a többi egyszerű és összetett gépek is szolgálhatnak, de ezekkel itt nem foglalkozunk.

15. §. *A mozgató erő egysége; a din; mérése.*

A kinetikai erő mozgásváltozásban nyilvánulván, ebbeli hatása mérésének alapjául szolgálhat.

1. Közelebbről pedig a tömeg, az erő s a létesítette gyorsulás közötti kapcsolatot tekintetbe véve [11. §. V. szakasza, 18. l.], erő-

egységül oly erőt választhatunk, mely bizonyos idő alatt bizonyos tömegű testhaladó (translatórius) mozgásában bizonyos változást létesít.

Gauss * még egyszerűsítette az erőegység definitióját avval, hogy a tömeg, idő s sebesség egységeit vette alapúl; szerinte a *kinetikai erőegység az az erő, mely ez időegységen keresztül a tömegegységre hatva, ez alatt sebességét irány és nagyság szerint a sebesség-egységével változtatja.*

Ezen egységet *absolut erőegység*nek vagy *tudományos erőegység*nek nevezik.

2. A *centimeter-gramm-second* [C. G. S.]-*rendszerben* a centimeter a hoszszúság-, a gramm a tömeg-, a másodpercz az idő egysége; ebben az erőegység az az erő, mely egy grammnyi tömegű anyagi testnek haladó (translatórius, de nem rotatórius) sebességét egy idő-másodpercz alatt irány és nagyság szerint a sebességnek $\frac{\text{centimeter}}{\text{másodpercz}}$ egységével változtatja; a létesített gyorsulás e szerint itt $\frac{\text{centimeter}}{\text{másodpercz}}$: másodpercz.

Ez az ú. n. centimeter-gramm-second [C. G. S.] erőegység, melyet az angol physikusok kezdeményezésére «*dyne*»-nak nevezik, nem angol szerzők pedig többnyire «*din*»-nak írják és ejtik ki [az elnevezés a «*dynamis*» *(δύναμις)* szó kezdő szótagjából származik], e szerint

$$\text{dyne vagy din} = \frac{\text{gramm-centimeter}}{(\text{másodpercz})^2} = \text{absolut C. G. S. erőegység} \quad (1)$$

Milliomszorosa a *megadin*.

3. Valamely kinetikai erő mérése anynyit tesz, mint azt a megállapított erőegységgel, pl. *din*-nal összehasonlítani; ezt pedig azonnal tehetjük, mihelyt a mozgó anyag tömegegységeinek és gyorsulása egységeinek számát ismerjük.

16. §. *A statikai és a kinetikai erő egymással való összehasonlítása. Egy és ugyanazon erőnek egyszerre statikai és kinetikai nyilvánulása.*

Az egész dynamikára nézve alapvető fontosságú annak *kisérleti* megállapítása, vajjon valamely testre ható erő intensitása (erőssége) ugyanaz marad-e, akár e test nyugalomban van, akár mozog? azaz,

---

* Intensitas vis magneticæ terrestris ad mensuram absolutam revocata. Előterjesztetett a göttingai tudós társaság 1832. évi decz. 15-én tartott ülésén; megjelent Commentationes societatis regiæ scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. VIII. Göttinga, 1841. Német fordítása E. Dorn-tól Leipzig, 1894; vagy: Gauss Werke, Band V. 81—118. ll. Göttingen, 1867.

vajjon pl. valamely nyugvó test súlya ugyanakkora, mint a földnehézségnek reá ható ereje, ha az lefelé esik?

1. Az ATWOOD-féle ejtőgéppel végrehajtott kisérletek kimutatták ugyan, hogy a túlsúly létesítette gyorsító erő a mozgás egész folyamában állandó, mert a mozgatott tömeg és a gyorsulás állandó; e szerint e *mozgató erő a mozgatott tömegek sebességétől független.**

2. Kivánatos azonban a döntő egyenes kisérlet, az «experimentum crucis».

Ezt pl. a következő berendezéssel létesíthetni: Az ATWOOD-féle gép fonalának azon végéhez, mely rendesen a kisebbik súlyt viszi, egy verticális rugalmas szalag vagy spirális rúgó vagy más rugalmas szerkezet van erősítve, melynek alsó vége viszi most közvetetlenül a kisebb súlyt. Ha a nagyobb súly alátámasztás vagy külön verticális fonál segélyével nyugalomban van tartva, a kisebb súly is nyugodtan lóg le a gép másik oldalán, de az őt vivő rugalmas szalagot vagy rúgót, súlyával egyenlő statikai erővel *kinyujtja.*

Ha most a nagyobb súly megakasztó berendezését eltávolítjuk (e súlyt kiváltjuk), akkor a súlyok a közönséges, jól ismert gyorsuló mozgásba jönnek, de a nevezett *szalag (rúgó) megnyúlása most nagyobb,* mint a nyugalom esetén, mert a szalag (rúgó) most nem csak a kisebb tömeg *súlyát* viszi, hanem kénytelen a túlsúlytól származó mozgató erőnek azt a részét is, mely a kisebb tömeg gyorsítására fordíttatik, e tömegre kifejteni.

Ez az utóbbi erő e szerint egyszerre megnyilatkozik a megnyulás növekedésében és a kisebb tömeg gyorsításában, azaz *ez az erő egyszerre láthatólag lép fel mint statikai és mint kinetikai erő.*

Miután pedig *egy és ugyanaz az erő* egyszerre létesíti a megnyulás növekedését és a gyorsulást: ezt az erőt statikailag a meghoszszabbodás növekedésével, vagy kinetikailag a létesített gyorsulással szabad és lehet mérnünk, de az erőnek ugyanannak kell lennie, akár az egyik, akár a másik módon van kifejezve.

A kisérlet egyenesen igazolja, hogy a megnyulás növekedése annál nagyobb, mennél nagyobb a gyorsulás és hogy az e növekedéshez szükséges statikai erő oly viszonyban áll a rúgón függő tömeg (statikai) súlyához, mint az e növekedéshez tartozó megészlelt gyorsulás a *szabadon* eső tömeg gyorsulásához.

---

* E helyen megjegyezhetjük, hogy nehány jelenség-csoport magyarázatánál a sebességtől függő erőket vettek fel; így pl. az electro-dynamikus és -inductiv jelenségeket W. WEBER, R. CLAUSIUS, B. RIEMANN oly erőtörvényekkel magyarázzák, melyeknél mozgó electromosságok egymásra hatása két részből áll: az egyik a közönséges COULOMB-féle electrostatikai erő, mely csak a kölcsönös távolságtól függ; a másik, mely még egymáshoz viszonyított relativ sebességeiktől függ; v. ö. a 106. §. 1. pontját, 214. l.

Röviden, a tekintetbe vett tömeg (kisebb súly) mozgatására szolgáló kinetikai erő e *tömeg súlyának anynyiad* része, a hányad része a létesített gyorsulás a szabad esés gyorsulásának, s így következik, hogy *a szabadon eső test gyorsulását létesítő mozgató erő teljesen egyenlő értékű, aequivalens a test statikai súlyával.*

3. A 11. §. III. pontja mozgásában, 17. l. szintén azt látjuk, hogy a gömböcskét körpályában megtartó mozgató erő statikailag is nyilvánul, t. i. a rugalmas fonál megnyulásában.

E megnyulást függőlegesen lógó fonál alsó végéhez alkalmazott tömeg által is létesíthetni, s ennek súlya az a statikai erő, mely a körmozgás centripetális, gyorsító erejével teljesen æquivalens.

4. Egészen analog jelenséget mutat egy vasúti vonat bármely kocsija. A megindításkor az egymásra következő két kocsit egybekapcsoló rúgós kapocs rúgója megfeszül és mozgás közben is mindig megfeszítve marad. A mozgatott kocsira ható erő egyfelől statikailag, a rúgó megfeszítésében, másfelől kinetikailag, a kocsi gyorsításában nyilvánul.*

Még egyenletesen haladó vonatnál is van rugalmas feszültség, mivel a kocsik *súrlódását* kell legyőzni, mihez mindig mozgató erő kell. Pontosabb mérésekre e jelenség nem alkalmas.

5. E tapasztalások alapján a többi, egyenesen hozzá nem férhető jelenségekre nézve felveszszük, hogy különben egyenlő körülmények között az erő ugyanaz (æquivalens), akár nyugvó, akár mozgó tömegre hat; továbbá, hogy egészen egyre megy, akár statikailag, akár kinetikailag fejezzük ki, illetve mérjük le az erőt.

17. §. *Az absolut és a gyakorlati erőegységek egymással való összehasonlítása. Erőegység Budapesten. Egyenlő erők.*

1. A mindennapi gyakorlatban, de a tudományos méréseknél is a földnehézségi erő áll mindig rendelkezésünkre; ennek segélyével fejezendő ki a tudományos erőegység.

A földnehézségi gyorsulás g különösen ingakisérletek segélyével [Richer, Bessel, Sabine, Kater, Budapesten Gruber Lajos 1885.] igen nagy pontossággal van meghatározva [v. ö. Kinematika 351. §.]; kiderült, hogy ez a mozgatott *anyag természetétől, tömegétől független.*

Egy m tömeg *súlya* e szerint mg és ez a megelőző §. 2. kisérletei értelmében a szabadon eső m-re ható gyorsító erővel egyenértékű, mely az idézett hely szerint:

$$mg = m\,[983{\cdot}1603 - 5{\cdot}0875\,\cos^2\lambda - 0{\cdot}000003\,h] \text{ (centimeter : sec.}^2\text{)},$$

hol λ a geographiai szélesség, h a centimeterekben kifejezett magasság a tenger színe felett.

Budapesten Gruber szerint, az adriai tenger színére vonatkoztatva

$$mg = m \,.\, 980{\cdot}880 \text{ (centimeter : secundum}^2\text{)},$$

---

* Ezen elven alapul Hrabowski K. feszültség- és gyorsulásmérője (Wied. Ann. d. Ph. u. Ch. 56. k. 768—770. ll. 1895. decz.).

vagy, mivel Budapesten a Duna zéruspontja körülbelül *100* méternyi magasságban e szín felett van, e zéruspont szinén:

$$mg = 980{\cdot}85 \,.\, m \,.\, (\text{centimeter} : \text{sec}^2).$$

E szerint nálunk

$$\text{egy gramm-tömeg súlya} = 980{\cdot}85 \frac{\text{gramm} \,.\, \text{centimeter}}{(\text{secundum})^2} = 980{\cdot}85 \text{ din} \quad . \quad (1)$$

és így Budapesten:

$$\text{a din} = \text{absolut C. G. S. erőegység} = \frac{1}{980{\cdot}85} \times \text{egy gramm súlya},$$

röviden: *a din valamivel (2 százalékkal) nagyobb, mint a milligramm súlya.*

Rendesen a *kilogramm súlya* a gyakorlati erőegység; ez az (1) szerint a *din*-nek *980850*-szerese, azaz, körülbelül egy milliomszorosa.

2. *Egyenlő*nek nevezzük azt a két erőt, mely a tér tetszőleges helyein egy s ugyanazon tömegre hatva, reá egyenlő statikai hatást (rúgó-deformátiót) gyakorol, vagy e tömegnek egyenlő gyorsulást tulajdonít. Megfordítva: két tömeg akkor egyenlő, ha a tér egy és ugyanazon helyén reájuk ugyanaz az erő hat [v. ö. a 14. §-ot, 23. l.].

3. Már a 4. §. 1. pontjában, 6. l., kiemeltük, hogy a g gyorsulás a föld felülete különböző pontjain különböző lévén, az mg súly is különböző, miért is kivánatos nem a *súlyt*, hanem a *tömegegységet* ősmértékül választani, mert a fent említett gyakorlati erőegység nem állandó.

18. §. *Munka. Mértéke. Jellege.*

Ha szervezetünk kifejtette hatások valamely rendszer alakzatában vagy helyzetében, vagy mozgásbeli állapotában vagy mindezekben változást létesítettek oly erők ellenében, melyek e változásnak ellenállnak: azt mondjuk, hogy szervezetünk *munkát végzett.* E kifejezéssel más erők létesítette változások esetében is élünk.

Ha az erők végezte változást *teljesen* akarjuk ismerni: a hatás és viszszahatás elvénél fogva a kölcsönhatásból származó *valamenynyi* változást kell tekintetbe vennünk.

1. *A munka mértéke az erők létesitette változás nagysága.*

De valamely *dynamikai erő csak akkor létesithet változást, ha támadási (fog-) pontja helyzetét változtatja.* A változás nagysága, azaz a munka pedig egyenesen arányos az erővel és fogpontjának (támadási helyének) az erő iránya mentén való elmozdulásával, azaz:

$$\text{Munka} = K \,.\, \text{erő} \,.\, \text{erőmenti elmozdulás} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

A K arányossági tényezőt az *egységgel* egyenlőnek szokás választani; a mi dynamikailag jelenti, hogy:

$$\left.\begin{array}{l}\text{munka} = \text{erő . erőmenti elmozdulás,}\\ \text{munkaegység} = \text{erőegység . elmozdulásegység.}\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ha **L** a munka jele (a *labor* szó kezdőbetűje), akkor jellege erő$\times$hoszszuság; egysége (tekintettel a 11. §. (5) kifejezésére, 18. l.):

$$[\mathbf{L}] = [P] \,.\, L{=}M \,.\, \frac{L^2}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

2. Ha egy és ugyanazon erő egymásután különböző irányokban hat s fogpontjának erőmenti elmozdulása ugyanaz: a munka is ugyanaz, miből következik, hogy *a munka az iránytól független, azaz scálar (léptékes) menynyiség.* Ezt egyébként a (3) kifejezés szerkezete is mutatja, miután a tömeg scálar és a sebesség négyzete az irányától nem függ, azaz szintén scálar.

3. A munka még akkor is ugyanaz, ha az azt létesítette erő különböző, de az erőmenti elmozdulás nagysága olyan, hogy szorzatuk ugyanaz.

4. Önként következik, hogy a munka attól az időköztől is független, mely közben végeztetett, mert a változást az anyagi test eredeti- és vég-helyzete és -configurátiója határozza meg, mely változás tetszésszerinti időközben mehet végbe.

19. §. *Tudományos (absolut) és gyakorlati munkaegység. Erg és kilogrammeter (meterkilogramm).*

Ha a megelőző §. (2) összefüggéseibe az erő helyébe a tudományos vagy a gyakorlati erőegységet teszszük, nyerjük a tudományos, illetve a gyakorlati munkaegységet.

1. A C. G. S. rendszer erőegysége a *din* [15. §. 26. l.], e szerint:

$$\text{C. G. S. rendszerbeli munkaegység} = (\text{din}) \,.\, \text{centimeter};$$

e szorzatot *erg*-nak nevezték az angol physikusok az ἔργον = munka görög szó után; ennek kifejezése:

$$\text{erg} = \text{gramm} \left(\frac{\text{centimeter}}{\text{másodpercz}}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ezt a tudományos munkaegységet végzi az erőegység (din), ha hatása közben fogpontja egy centimeterrel mozdúl el; a test, melyre hat, tetszőleges lehet. Milliomszorosa a *megalerg.*

2. A közélet egyik legelterjedtebb munkaegysége az a munka, melyet karunknak végeznie kell, hogy egy kilogrammnyi tömeget egy meterrel emeljen, vagy, mely munkát a föld nehézségi ereje végez,

miközben egy kilogrammnyi tömeget egy meterrel mozgat lefelé; e munka neve a *kilogrammeter* vagy *meterkilogramm*.

Ezt könnyen fejezhetjük ki tudományos egységekben.

Ugyanis, tekintettel a 17. §-ra, 29. l. Budapesten:

$$\begin{aligned} \text{kilogrammeter-munka} &= 1000 \text{ . gramm súlya . } 100 \text{ centimeter} \\ &= 100000 \text{ . } 980{\cdot}85 \text{ din . centimeter} \\ \text{kilogrammeter-munka} &= 98085000 \text{ erg} = 98{\cdot}085 \text{ megalerg.} \quad . \quad (2) \end{aligned}$$

azaz, közelítőleg a tudományos munkaegység százmilliomszorosa.

A *milligramm súlya Budapesten 0·98085 din* lévén, ennek egy centimeterrel való emelése közben végzett munka = 0·98085 din. centimeter, azaz körülbelül 2% híjával az erg.

3. Egy másik gyakorlati munkaegység a *joule*,* mely az electromos folyamatok munkája mérésére szolgál; ez:

$$1 \text{ joule} = 10^7 \text{ erg} = \text{közelítőleg } 0{\cdot}102 \text{ kilogrammeter-munka} \quad . \quad (3)$$

20. §. *Munkasiker (effectus). Lóerő. Watt.*

A végzett munka az időtől független, de a különböző munkaforrások, ugyanazt a munkát általában véve különböző időben végezhetik.

A végzett munkának viszonya a végzése közben lefolyt időközhöz a *munkasiker (effectus)*.

1. A C. G. S. rendszerben a munkasiker egysége:

$$\frac{\text{erg}}{\text{másodpercz}} = \text{gramm} \frac{(\text{centimeter})^2}{(\text{secundum})^3} .$$

2. Gyakran végzett *kilogrammeterek*-ben fejezik ki e sikert, sokszor ismét *lóerők*ben; az utóbbi alatt az európai szárazföldi nemzetek oly munkaforrást értenek, mely másodperczenként 75 kilogrammetermunkát végez, míg az angol a «horse-power», «*HP*» 76 ily egységet.

E szerint:

$$1 \text{ lóerő} = 75 \text{ . } \frac{\text{kilogrammeter-munka}}{\text{másodpercz}} = 75 \text{ . } 9{\cdot}8085 \text{ . } 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{másodpercz}} ;$$

$$1 \text{ lóerő} = 7{\cdot}35 \frac{\text{erg}}{\text{secundum}} 10^9 .$$

3. Egy másik gyakorlati sikeregység a *joule* alapján [megelőző §. (3)] a «*watt*»; ez:

$$1 \text{ watt} = \frac{\text{joule}}{\text{másodpercz}} = 0{\cdot}102 \frac{\text{kilogrammeter-munka}}{\text{másodpercz}} ,$$

úgy, hogy:

$$1 \text{ lóerő} = 735 \text{ watt.}$$

---

* Czógler A.: Fizikai egységek 130. l. Budapest, 1891.

Ezen egységek további részletezését l. Czógler fentidézett munkájában.

21. §. *Dynamikai energia: mozgási és helyzeti erély.*

Arra nézve, hogy valamely anyagi test környezetében munkát végezhessen, szükséges, hogy a test arra alkalmas képességgel, *munka-képességgel* birjon. Mennél nagyobb ebbeli képessége, annál nagyobb munkát végezhet, annál erélyesebb a környezetében létesített változás.

E munkaképesség *dynamikai*, ha közvetetlenül mechanikai változásokat hoz létre, *chemiai*, ha vegyi átalakításokat létesít, *electromos*, *mágnességi* s í. t., ha a környezet electromos, mágnesi s í. t. állapotát változtatja meg közvetetlenül.

Az energia elve értelmében [22. §. 34. l.] ezek egy és ugyanazon természetű munkaképességnek, melyet *erély*nek, *energiá*nak nevezünk, különböző nyilvánulási formái.

A dynamikai energia azonban *általánosságban véve* kétféleképen megnyilatkozik, két részből áll: az anyagi pontok *sebességétől* és az azok *helyzetétől* függő részekből.

1. A mozgó anyagi testek *sebességüknél* fogva képesek környezetükben változást létesíteni; munkaképességüknek a sebességtől függő ezen részet *mozgási erély*nek (*kinetikai energiá*nak) nevezzük. Ez a tapasztalat szerint a mozgó tömeggel és sebessége négyzetével arányos és szorzatuk felével egyenlő [l. alább (1)]; ennek még «*eleven erő*»* is a neve.

Ez az utóbbi nagyon elterjedt elnevezés nem szerencsés, mivel a mozgási erély nem erő-, hanem munkajellegű menynyiség.

Ha például v_0 az m tömegnek függőlegesen fölfelé irányított elhajítási sebessége: az elemek értelmében [v. ö. Kinematika 108. §. (10), 185. l.] e pont $h_0 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$ magasságra emelkedhetik a légüres térben és így

$$mg \,.\, h_0 = \tfrac{1}{2} m v_0^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

munkát végezhet a földnehézségi erő ellenében.

E szerint a v sebességű m tömegnek a sebességénél fogva meglévő munkaképessége (mozgási erélye) $\frac{1}{2} m v^2$, melyet a fentjelzett esetben munkává alakít át.

A *mozgási erély*, az *eleven erő* e szerint a *munkával egy természetű* léptékes menynyiség; ezt rendesen E_m-mal vagy **T**-vel jelelik.

---

* E kifejezést Leibnitz (1646—1716) használta először 1695-ben a tömegnek a sebesség négyzetével való szorzata számára, ellentétben a nyomással vagy húzással, melyet «*holt erő*»-nek nevezte; az utóbbi elnevezés nem lett elfogadva.

Ha a rendszer több anyagi részből áll, akkor ebbeli energiája:

$$E_m = T = \Sigma \tfrac{1}{2} m v^2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

hol az összegezés valamenynyi mozgó anyagi pontra terjesztendő ki.

[Ezt az erélyt gyakran és pedig helyesen *ponderikus kinetikus energiá*nak nevezik, mert az u. n. *súlyos* tömegek sebességével jár; van még másféle mozgási erély jellegével biró munkaképesség, így a *kalorikus (hő-) energia*, mely a testek *hőtartalmánál* fogva bennük rejlő munkaképesség (melyet a testek molekuláinak és atomjainak supponált kicsiny közű gyors rezgései mozgási erélyének lehet és szokás tekinteni); továbbá az *electrokinetikus energia*, mely valamely electromos áram fennállásával jár s mely pl akkor nyilvánúl, ha ez áramot forrásától teljesen elzárjuk és a vezetőben magára hagyjuk. Ez az áram ekkor tapasztalatszerűleg nagyon gyorsan megszünik, de az elzárástól a megszünésig terjedő kis idő alatt az áram, a benne függetlenül rejlő (és a mozgó electromosságoknak tulajdonított) erélyénél fogva megfigyelhető mechanikai, electromos és hőmunkát végezhet.]

2. Az anyagi testek *helyzetüknél, alakzatuknál* fogva is képesek munka végzésére.

Egy kifeszített rugalmas szalag, egy összenyomott rúgó, egy hajlított pálcza s í. t. azonnal formálódik viszszafelé, mihelyt a deformáló erő kisebb lett s ekkor munkát is végez. Háztetőn nyugvó kő a földfeletti magasságánál fogva bír munkaképességgel, mely azonnal nyilvánúl, mihelyt e követ legörditjük, mert esése közben sebességet, s így kinetikus energiát nyer. Ha a földre leérkezett, a föld vonzása már nem hozhatja közelebb a föld középpontjához, azaz itt a kő helyzete olyan, hogy helyzeténél fogva már nem bír munkaképességgel, hanem előbbi (a háztetőn való) helyzeténél fogva bírt munkaképessége a leesés közben teljesen átváltozott mozgási erélylyé.

A munkaképességnek ezen, a test helyzetétől függő részét *helyzeti erély*nek *(potentiális* energiá*nak) nevezik; ezt a következőkben mindig oly definitióval használjuk, hogy:

Helyzeti erély az a munka, melyet az anyagi rendszer erői a közben végeznek, a miközben a rendszer egy tetszőleges configurátióból és helyzetből egy másik meghatározott configurátióba és helyzetbe mozog. Jele az E_h.

3. *Anyagi test vagy anyagi rendszer összes dynamikai energiája a helyzeti és a mozgási erélyének összegével* egyenlő:

$$E = E_h + E_m = E_h + T \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

4. Ha például v valamely, a föld felett h magasságban lévő m tömegnek a vertikális sebessége, akkor mozgási erélye $\frac{1}{2} m v^2$; ellenben helyzeti erélye

* V. ö. a *potentiál* és az erőfüggvény sajátságait [24. 42. és 44. §§. 40., 69. és 74. ll.].

az a munka, melyet a föld nehézségi ereje végez, ha az m tömeg ezen h magasságon át leesik; e munka az 1. pont szerint mgh.

E szerint az m egész dynamikai energiája:

$$E=T+E_h=E_m+E_h=\tfrac{1}{2}mv^2+mgh \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ha v_0 az m elhajítási sebessége (és egyszersmind a földre viszszaérkezés sebessége, h_0 az elért legnagyobb magassága, akkor v az a sebesség, melyet m nyer, miközben h_0 magasságáról a h_0-h közön át h magasságig esik; ezekre nézve (1) szerint:

$$\tfrac{1}{2}v_0^2=gh_0; \qquad \tfrac{1}{2}v^2=g\,(h_0-h),$$

mely utóbbit (4)-be helyettezve:

$$E=mgh_0=\tfrac{1}{2}mv_0^2=\text{állandó} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

E szerint a tárgyalt mozgás közben az *egész energia állandó.*

Ezek értelmében ezen 4. esetében a test *helyzeti és mozgási erélyének összege mindig állandó*, habár a kétféle energia külön-külön változó; ez *az energia megmaradása elvének* egyik legegyszerűbb esete [v. ö. a köv. §-ot és a 44. §. 4. pontja I. szakaszát, 75. l.].

22. §. *Az erély megmaradásának tapasztalati elve.*

1. A tapasztalás kimutatta, hogy a természetben számos oly anyagi rendszer van, mely ha csak dynamikai (azaz egyes anyagpontjainak helyzet- és sebességbeli) változásokat mutat, annak a nevezetes tételnek vannak alávetve, hogy dynamikai erélyüknek (azaz mozgási és helyzeti energiájuknak) az összege a mozgás minden stádiumában állandó.

Ide tartoznak mindazok a rendszerek, melyek belső erői által végzett munkájuk csak az anyagi részeknek ez alatt bekövetkezett *helyzet-különbségétől* függ, ellenben független azon utak alakjától, melyen e helyzetváltozás végbement.

Az ilyen rendszereket, miként már a 7. §. 2. pontjában, 12. l. kiemeltük, *conservativ anyagi rendszerek*nek nevezzük, mert jellemző sajátságuk, hogy a *dynamikai* energiájukat állandó értékben megtartják.

De minden ilyen rendszer, ha természetét megtartja, *csak bizonyos határok között változhatik.*

Ilyen a földből és a felülete valamely pontjából elhajított testből álló rendszer; itt a mindenkori helyzeti erély az a munkaképesség, mely a testben a föld felszíne fölötti h magasságánál fogva van meg s a mely a 21. §. 1. pontja értelmében az mgh szorzattal egyenlő. E rendszer egyik határconfigurátiója az, mikor a test a legnagyobb magasságban van, másika, mikor a földre érkezik.

Ilyen továbbá a földből és a holdból álló rendszer; ennek az alakzata a legnagyobb és a legkisebb holdtávolság szabta határok között változhatik csak és itt a helyzeti energia az a munka, melyet e rendszer

belső erői végeznek a közben, a mi alatt a rendszer egy tetszőleges helyzetből a holdközel adta configurátióba mozog.

Ilyen még a földből és egy közönséges physikai ingából álló rendszer, melynél az inga tömegközéppontja (súlypontja) csak bizonyos határmagasságok között mozoghat, melyek e rendszer határconfigurátiójának felelnek meg. A helyzeti erély itt az a munka, melyet a föld vonzása végez, a miközben az inga egy tetszőleges helyzetből legmélyebb helyzetébe mozog.

Általánosabb példa ily rendszerre a napból és a bolygókból álló tömegrendszer, melynél az egyes bolygóknak a naptól való távolságaik mind csak bizonyos határok között változhatnak és melyben a helyzeti energia az a munka, melyet a naprendszer erői végeznek, miközben a bolygók egy tetszőleges helyzetből abba a configurátióba mozognak, hol a naptól való távolságaik a legkisebbek.

A *dynamikai energia* megmaradásának elve a tapasztalás szerint a *szabad mozgásra* és a *súrlódás nélküli* kényszermozgásra vonatkozólag érvényes, mikor másnemű, mint dynamikai változások nem lépnek fel. Ilyenek az előbb felsorolt mozgások, legalább nagy megközelítésben.

2. De a földön észlelhető legtöbb mozgás súrlódással, ellenállással vagy chemiai, electromos, mágnességi s í. t. változásokkal jár, melyek rendesen hőváltozásokat is vonnak maguk után. Az ily változásokat mutató rendszereket a dynamikai energia szempontjából *dissipativ (szétszóró) rendszerek*nek nevezik.

De a tapasztalás a hőnek és a mechanikai energiának egyenértékűségét mutatta ki, valamint azt is, hogy a hőbeli, az electromos, a mágnességi s a chemiai állapotokban ugyanoly természetű munkaképesség rejlik, mint a milyen a mechanikai mozgásállapotokban, ugyanis dynamikai energia és hogy az utóbbi alkalmas eljárások segélyével hővé, electromos, mágnességi, chemiai energiává alakulhat és viszont.

Ezek értelmében, bármily változásoknak is legyen alávetve valamely anyagi rendszer, feltéve, hogy e változások csak e rendszer egyes részeinek kölcsönhatásából, és nem külső behatásoktól származnak, a rendszer összes energia-menynyisége, bármily alakban is lépjenek fel ezen energia részei, mindenkor változatlan marad, habár egyes részeinek értéke és megnyilatkozásának alakja változik.

Ez az *energia megmaradásának általános elve.**

---

* Legujabban W. Ostwald [Studien zur Energetik, Ber. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. 1891, 271. l. és 1892, 211. l. és Math. és Phys. Lapok II. kötet, 138—147. l.] megkisérli a csak korlátolt jelentéssel biró *tömeg* helyébe az általánosabb jellegű *energiá*-t az absolut mértékrendszerbe alapmenynyiségül helyettesíteni s így a *hoszsz*, az *idő* és az *energia* képeznék a mechanikai rendszer alapmenynyiségeit.

A többi physikai jelenségekre nézve az energia szintén az egyetlen

3. A *dynamikában* a *dynamikai energia állandóságának tétele* egy *független* egyenlet alakjába foglalható, mely conservativ rendszereknél a NEWTON axiomái nyujtotta mozgás-egyenletekhez hozzálép és ezeknek egy integrálját képezi [v. ö. a 24. §. I. szakaszának *Jegyzetét*, 40. l.].

IV. A dynamika nem független alapelveinek (az integráltételek és a módszertani elvek) felsorolása.*

23. §. *Általános megjegyzés. Az általános dynamikai tételek és elvek, mint a tapasztalati elvek folyományai.*

A 6—13. §§-okban részletezett tapasztalatok s a belőlük folyó elvek egymástól függetlenek; s ha valamely rendszer egyes pontjainak mozgásegyenleteit ezen elvek alapján képezzük: oly összefüggéseket nyerünk, melyek minden dynamikai változásra nézve kivétel nélkül érvényesek.

Ezen általános egyenletekhez hozzálépnek a tekintetbe vett egyes anyagi rendszerek speciális tulajdonságait előtüntető összefüggések, így pl. a conservativ rendszereknél az energia elve [22. §.]; a rugalmas testeknél a rugalmas erők tapasztalati törvénye; az általános gravitatió mozgásainál a távolbahatás NEWTON-féle törvénye s í. t.

Eképen mindig anynyi mozgásegyenletet nyerünk, a menynyi a mozgás leírására szükséges.

De ezek másodrendű differentiálegyenletek, melyeknek teljes megfejtése a legritkább esetekben lehetséges.

1. Azonban a *szabad* mozgások és *súrlódásnélküli* kényszermozgások differentiálegyenleteiből mindig képezhető *hét integrál* [24. §. I.] és conservativ rendszereknél még egy nyolczadik, mely az

---

egy közös menynyiség; az electromos, mágnességi, hő, fény (-sugárzó energiabeli) s a chemiai erők jelenségeinél a felsoroltakon kívül még egy negyedik, a megfelelő jelenségcsoporthoz tartozó egység állapítandó meg, így pl. az electromosság-, a mágnesség, a hő- s í. t. egysége, mely azonban a mindig fennálló physikai összefüggések értelmében a fentnevezett három menynyiséggel határozott viszonyba áll s így mindig ezek egységeiben fejezhető ki.

E felfogással az absolut mértékek alkalmazása a hő, a fény (sugárzó energia) és a chemiai erők jelenségeire is terjeszthető ki, a mi a GAUSS és WEBER-től kezdeményezett eljárással [26. lap lábjegyzéke és Kinematika 10. §., 8. l.] nem volt lehetséges.

* E fejezet csak a már *haladottabb kezdőnek van szánva* s inkább *áttekintést*, ellenben bizonyítást csak a 24. §. lábjegyzékeiben nyujt; a többi, a 24. §-ban felsorolt tételek és a 25. és 26. §-ban felsorolt módszerek bizonyítását a minden egyes tételnél idézett §§-ok részletezve adják.

erély elvét fejezi ki. Ezen integrálok kifejezte mozgásbeli sajátságokat rendesen a dynamika általános elveihez számítják.

2. Továbbá, a nem conservativ és a conservativ, valamint a szabad vagy a tetszőleges kényszernek alávetett mozgás differentiálegyenleteit új kisérleti tapasztalások hozzákapcsolása nélkül mathematikailag át lehet alakítani és nagyon különböző formákban előtüntetni, melyek bizonyos mathematikai eljárások végrehajtására alkalmasak. Hasonlóképen lehetséges a mechanika általános mozgásegyenleteit különböző alapfeltevésekből származtatni, illetőleg ezen egyenleteknek, mindenkori előállításuk módja szerint, különböző értelmezést adni. Ezen methodusokat, értelmezéseket és az egyenletek mathematikai kezelésének bizonyos szabályait szintén az általános dynamikai elvekhez számítják [v. ö. a 25. §-ot].

3. A kifejtettek értelmében ezeknek az elveknek, kivéve az energia tételét, teljesen más és mechanikai szempontból mindenesetre sokkal alárendeltebb szerepet kell tulajdonítanunk, mint a tapasztalati tényekből közvetetlenül folyó empirikus axiomáknak; mert az előbbiek az utóbbiakból minden új tapasztalati vagy kisérleti igazság hozzákapcsolása nélkül, mathematikai vagy geometriai megfontolások segélyével származtathatók és így az előbbiekben implicite tartalmaztatnak; ezért jogosan nevezhetjük őket függő, nem önálló elveknek.

24. §. *A mozgás-egyenletek általános integráljai kifejezte dynamikai elvek. Példák.*

I. *Az elvek kimutatása és értelmezése.*

1. *A tömegközéppont* mozgása megtartásának elve.* Ha vala-

---

* A tömegközéppontról a tömeggeometriában fogunk részletesebben szólani, itt elegendő, ha róla azt mondjuk, hogy ez az anyagi test vagy rendszer anyagának mértani középhelye; jelelve x_0, y_0, z_0-lal a tömegközéppont derékszögü coordinátáit, x, y, z-vel a rendszer tetszőleges m tömegű pontéit, akkor x_0, y_0, z_0 oly közép-coordináták, melyekre nézve:

$$x_0\Sigma m=\Sigma mx;\quad y_0\Sigma m=\Sigma my;\quad z_0\Sigma m=\Sigma mz,\quad .\ .\ .\quad (\alpha)$$

hol az összegezés a rendszer minden részére terjesztendő ki.

A szövegben idézett tételt bebizonyítandó, a 33. §. (2) értelmében: az m-re ható külső és belső erők X_k, Y_k, Z_k, X_b, Y_b, Z_b componenseinek megfelelő összegei a gyorsító (mozgató, effectiv) erő componenseiv egyenlők:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X_k+X_b;\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y_k+Y_b;\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z_k+Z_b.\ .\quad (\beta)$$

Itt a belső erők a kényszererőket is tartalmazzák.

Összegezve ezen egyenleteket a rendszer minden pontjára nézve, a tömegközéppont (α) alatti coordinátái felhasználásával folytatólagosan:

mely anyagi rendszer vagy test, mint egész, szabadon mozoghat, de egyes részei egymáshoz képest tetszőlegesen, szabadon, vagy súrlódással és kényszerrel mozoghatnak, akkor a rendszer tömegközéppontjának a gyorsulása egészen független a rendszer egyes részeinek egymásra való hatásától és egymáshoz viszonyított mozgásától, hanem kizárólagosan függ a rendszerre ható *külső* (kívüle fekvő hatókból származó) erőktől és pedig olyképen, mintha ezek az erők közvetetlenül a tömegközéppontra hatnának.

Ha ezek az utóbbi erők zérussal egyenlők, akkor a tömegközéppont a térben egyenletes, egyenesvonalú mozgást végez; ennek három egyenlete a rendszer mozgás-egyenleteinek *három* integrálját képezi.

Ez a tömegközéppont megtartásának elve, mely a NEWTON-féle második axioma mozgás-egyenleteiből, a hatás és viszszahatás egyenlő voltából és a tömegközéppont definitiójából következik.

2. *A területi nyomatékok- vagy a változatlan sík- vagy a területek megtartásának elve.** Ha az anyagi rendszerre vagy testre ható külső

$$\Sigma X_k + \Sigma X_b = \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma \frac{d^2}{dt^2}(mx) = \frac{d^2}{dt^2}\Sigma mx = \frac{d^2x_0}{dt^2}\Sigma m; \text{ s. í. t.} \quad (\gamma)$$

Ámde, a belső erők ΣX_b s. í. t. összegében a minden egyes pontra gyakorolt hatás és a minden egyes ponttól gyakorolt viszszahatás lép fel; ezek pedig a hatás és viszszahatás elvénél fogva [12. §. 19. l.] páronként ellentetten egyenlők és így $\Sigma X_b = 0$, s. í. t.

Marad (γ)-ból:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2}\Sigma m = \Sigma X_k; \quad \frac{d^2y_0}{dt^2}\Sigma m = \Sigma Y_k; \quad \frac{d^2z_0}{dt^2}\Sigma m = \Sigma Z_k; \quad \ldots \quad (\delta)$$

ezek kifejezik a szöveg tétele első részét; e szerint az x_0, y_0, z_0 coordinátájú tömegközéppont gyorsulása egyenlő avval a gyorsulással, mely létesül, ha az anyagi rendszerre tényleg ható erők e rendszernek, tömegközéppontjában központosított egész tömegére hatnának.

Ha a külső erők ΣX_k s. í. t. összegei zérusok, a (δ)-ból nyerjük:

$$\frac{dx_0}{dt} = a; \quad \frac{dy_0}{dt} = b; \quad \frac{dz_0}{dt} = c; \quad \ldots \ldots \quad (\varepsilon)$$

ez a mozgás három első integrálegyenlete, bennük a, b, c, független integrál-állandók levén; ekkor a tömegközéppont egyenletes egyenesvonalú mozgást végez.

* Az idézett tételt röviden bebizonyítandó, az x, y, z coordinatájú m pontra ható X, Y, Z erőkomponensek nyomatéki összetevői a coordináták kezdetére vonatkoztatva [v. ö. Kinematika 55. §. (2)]:

$$yZ - zY; \quad zX - xZ; \quad xY - yX,$$

hol mint a megelőző lábjegyzékben $X = X_k + X_b$ s. í. t.

A rendszer valamenynyi pontjára ható ily erők nyomatéki componenseinek összegei:

erők olyanok, hogy ezen erőknek valamely pontra vonatkozó nyomatékaik összege zérus, akkor NEWTON axiomáiból következik, hogy a rendszer olyforma mozgást végez, hogy anyagi pontjai mozgásnagysága nyomatékainak vetületei a nevezett ponton átmenő bármely szilárd síkra mozgás közben mindig állandó összeget képeznek. Ez az összeg egy meghatározott fekvésű ily síkra nézve *maximum*; e sík a rendszer *invariabilis (változatlan)* sikja; normálisának

$$F_x = \Sigma(yZ - zY) = \Sigma(yZ_k - zY_k) + \Sigma(yZ_b - zY_b)\,;\ \text{s í. t.} \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

az egyes pontok között ható belső erőket itt az ezen pontokat egybekapcsoló egyenesek mentén fekvőknek veszszük fel, és így a minden egyes pontpárban fellépő két erő a hatás és viszszahatás elvénél fogva [12. §.] ellentetten egyenlő lévén, e két erő nyomatékai is ellentetten egyenlők és így összegük zérus. E szerint a belső erők nyomatéki összegei zérusok: $\Sigma(yZ_b - zY_b) = 0$ s í. t. és így folytatólag NEWTON második axiomája felhasználásával [megelőző lábjegyzék, (β)]:

$$\Sigma(yZ_k - zY_k) = \Sigma\{y(Z_k + Z_b) - z(Y_k + Y_b)\} = \Sigma\left(ym\frac{d^2z}{dt^2} - zm\frac{d^2y}{dt^2}\right) =$$

$$= \Sigma m\frac{d}{dt}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)\,;\ \text{s í. t.} \quad . \quad (\beta)$$

Ha e külső erők nyomatéka zérus (a mi akkor is áll, ha ezen erők maguk zérusok), akkor ezen (β) egyenletekből nyerjük az

$$\Sigma m(yz' - zy') = A\,;\quad \Sigma m(zx' - xz') = B\,;\quad \Sigma m(xy' - yx') = C \ . \ . \ (\gamma)$$

három első integrálegyenletet, melyekben A, B, C független integrálállandók. A (γ) értelmezésére nézve szem előtt tartandó, hogy a v sebességű $(x', y', z'$ sebességi componensekkel biró) m tömegű pont mozgásnagysága [32. §.] mv; továbbá, ha p a v-nek vagy folytatásának a coordináták kezdetétől való távolsága akkor [Kinematika 54. §.] mpv az mv mozgásnagyság nyomatéka, mely szintén vector, iránya a pv sík normálisa; e nyomatéknak az YZ, a ZX, az XY coordináta-síkokra vonatkozó vetületei [i. h.] $m(yz' - zy')$ s í. t.

E vetületeket a mozgó anyagi rendszer valamenynyi m pontjára nézve képezve: megfelelő összegeik a (γ) egyenletek szerint állandók. Ezen mpv mozgásnagysági nyomatékok összegének eredője épen úgy vector, mint maguk az egyes mpv-k; az eredő értéke és iránycosinusai

$$\left.\begin{aligned}\{[\Sigma m(yz' - zy')]^2 + [\Sigma m(zx' - xz')]^2 + [\Sigma m(xy' - yx')]^2\}^{\frac{1}{2}} = \\ = \{A^2 + B^2 + C^2\}^{\frac{1}{2}} = G\,;\end{aligned}\right\} \ . \ . \ (\delta)$$

$$\cos\lambda = A : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2};\quad \cos\mu = B : \sqrt{\dots}\,;\quad \cos\nu = C : \sqrt{\dots} \ . \quad (\varepsilon)$$

E nyomaték-eredő értéke állandó, iránya változatlan; az erre merőleges sík szintén állandó helyzetű és G jelenti a mozgásnagyság nyomatéki vetületeinek összegét e síkra vonatkozólag. Egy másik, az utóbbi síkkal tetszőleges ϑ szöget képező síkra vonatkozólag a nevezett nyomatéki vetületek összege, a vectorok sajátságai szerint $G\cos\vartheta$, és így az (ε) egyenletek adta irányra normális síkra nézve e vetületi összeg maximum.

Evvel a szöveg tétele ki van fejezve.

irányocsinusai és az említett vetületi maximum három független állandót képvisel, melyet *három* első integrál-egyenlet fejez ki.

A tétel még következőleg is formulázható: Ha valamely pontra vonatkozólag a rendszerre ható külső erők nyomatékainak összege zérus, akkor képezve az egyes anyagi pontoknak e meghatározott pont körül leírta területek vetületeit a nevezett ponton átmenő bármely szilárd síkra, és szorozva ezeket az őket leíró anyagi pontok tömegeivel, e szorozmányok összege az idővel arányos és az összeg az invariabilis síkra nézve maximum.

3. *Az eleven erő elve* [v. ö. a 39. §. bizonyítását, 64. l.].

A rendszer egyes pontjainak mozgás-egyenleteiből, ha ezek szabad vagy súrlódás nélküli mozgásra vonatkoznak, egyszerű mathematikai, formális, megfontolások alapján bebizonyítható [i. h.], hogy a rendszerre ható összes erők végezte munka, a közben, mialatt ez egy helyzetből egy másikba mozog, egyenlő a rendszer eleven erejének e közben bekövetkezett változásával. Ezt az összefüggést a mozgás-egyenletek *egy* első integrálja fejezi ki.

Ha a belső erők nem végeznek vagy nem végezhetnek munkát, mint pl. a merev testek mozgása közben, akkor az eleven erő változását csak a külső hatások létesíthetik; ha pedig még a külső erők sem végeznek munkát vagy zérussal egyenlők, akkor az egész rendszer eleven ereje változatlanul megmarad.

Jegyzet. A dynamikai erély megtartásának elve [v. ö. a 44. §-ot, 74. l.], miként már a 22. §-ban kiemeltük, tapasztalati, azaz *független* tétel és *conservativ anyagi rendszerekre* érvényes; itt csak a mozgás-egyenleteihez való viszonyát említjük. Ugyanis, minden ily rendszerre nézve létezik oly mathematikai függvény, mely a rendszer egyes részei tömegétől, helyzetétől, esetleg sebességétől függvén, azon sajátsággal bír, hogy az a közben, mialatt a rendszer egy helyzetből és alakzatból egy másikba megyen át, a belső erők végezte munka mindig egyenlő e függvénynek ez alatt bekövetkezett változásával, ez utóbbi változás független azon utak alakjától, melyeken a tömegpontok az előbbi helyzetükből az utóbbiba jutottak.

E függvény még avval a tulajdonsággal is bír, hogy belőle a rendszer bármely pontjára ható belső erő összetevőit nyerjük, ha e függvénynek a pont megfelelő coordinátái szerint vett első differentiálquotienseit képezzük; ez oknál fogva ezt a függvényt *erőfüggvény*nek nevezik, jele legyen V. Miután a *V erőfüggvény növekedése* közben a belső erők *positiv munkát* végeznek s miután a belső erők végezte *positiv munka* közben az $\mathbf{E}_h$ *helyzeti erély ugyananynyival fogy*: az *erőfüggvény* és a *helyzeti energia összege*, $V+\mathbf{E}_h$ állandó.

Amde a mozgási s a helyzeti energia összege, $\mathbf{T}+\mathbf{E}_h$ állandó lévén, a dynamikus energia megmaradásának elve úgy is fejezhető ki, hogy a test belső (tömegközéppontjához viszonyított) eleven ereje **T** és a V erőfüggvény különbsége $H=\mathbf{T}-V=$ állandó [44. §. (3), 75. l.].

Ez az összefüggés a rendszer mozgás-egyenleteinek szintén egy első, de már csak speciális és független integrálja.

II. *Példák.*

1. Egy *merev* test tetszőlegesen mozog a térben; mozgása minden pillanatban szétbontható tömegközéppontjának translátiójára és e pont körüli forgásra [Kinematika 270. §.]. A belső erők itt nem végezhetnek munkát, mert a test egyes részei egymáshoz képest nem változtathatják helyzetüket.

Ha külső erők nem hatnak: a megelőző I. szakasz 1., 2., 3. tétele szerint rendre 1. a test tömegközéppontja egyenesvonalú egyenletes mozgást végez vagy nyugalomban van; 2. a testmozgásnak invariabilis síkja van és 3. a test eleven ereje állandó. Ha a test egy egyensúlyi tengely körül forog [8. §. 1. *d)* pontja, 13. l.], forgási tengelyét megtartja, ellenkező esetben a forgási tengely úgy a térben, mint a testben folytonosan és pedig elég bonyolódott módon változtathatja a helyzetét, habár a mozgás az 1., 2. és 3. tételnek mindig megfelel.

Ezen, külső erők behatása nélkül végbemenő forgó mozgás meghatározására e szerint Newton második axiomája teljesen elégtelen [v. ö. a 8. §. I. *Jegyzetét*, 14. l.].

2. Egy folyékony, a világűrben haladó és forgó tömeg, vagy pl. naprendszerünk, mely csak egyes részei kölcsönhatásának, gravitátiójának van alávetve, erőfüggvénynyel bír, melyet a rendszer önpotentiáljának neveznek; az I. szakasz szerint rendre 1. tömegközéppontjának mozgása egyenes és egyenletes, 2. a rendszer belső mozgása invariabilis síkkal bír, 3. az eleven erő tételéhez lép itt: 4. az energia elve, mely szerint a rendszernek a tömegközéppontjához viszonyított eleven ereje és belső helyzeti energiájának összege állandó.

E rendszerek belső mozgásai igen nagy változatosságot mutatnak.

3. Egymással rugalmas szalagokkal vagy rúgókkal egybekapcsolt golyók rendszerét a föld felülete közelében forgatólag elhajítva és magára hagyva, a rendszer belső erői itt a centrifugális erők ébresztette rugalmas erők, melyek szintén erőfüggvénynyel bírnak; a külső erők a föld vonzásából származó gyorsító erők, melyek egymáshoz párhuzamosak lévén, a rendszer tömegközéppontja mozgását, mint valamely szabad pontét változtatják (eltekintve a levegő ellenállásától), de a rendszer forgására nem gyakorolhatnak befolyást. Ezek szerint 1. e rendszer tömegközéppontja parabola-pályát ír le; 2. belső mozgása invariabilis síkkal bír; 3. az eleven erő tételét kiegészíti itt: 4. az energia elve, mely szerint a tömegközépponthoz viszonyított eleven erő s az erőfüggvény különbsége állandó.

További ily példákat az olvasó a természeti mozgások nagy számából maga is közvetetlenül meríthet.

25. §. *A dynamika módszertani elvei. A methodusok főbbjeinek fogalmazása.*

1. *A virtuális (lehetséges) elmozdulások elve.** [V. ö. a 62. §. bizonyítását, 113. l.].

Ha valamely anyagi rendszer tetszőleges erőknek és tetszőleges feltételeknek van alávetve, akkor minden elmozdulás, mely e feltételeknek megfelel, *virtuális (lehetséges) elmozdulás* és az e közben az összes erők által végezett munka *virtuális munka.*

A virtuális elmozdulások elve kimondja, hogy valamely anyagi rendszer egyensúlyi helyzetben van akkor, ha e helyzetétől számított végtelen kicsiny virtuális elmozdulás közben végzett virtuális munka zérus **; épen így megfordítva: ha a virtuális munka zérus, a rendszer egyensúlyban van.

E tétel lényegében véve nem jelent mást, mint azt, hogy egyensúly alkalmával minden egyes anyagi pontra ható (a független és a feltételi erőkből alkotott) *eredő erő* zérus [27. §.(1) és (2)], de e tapaszmás alakban fejezi ki; v. ö. a 60—65. és 69. §§-okat.

2. D'Alembert *elve* [először kimondva «Taité de Dynamique» című művében (1743) olyformán, hogy a szabad és a kényszermozgás közben végzett munka egymással egyenlő; v. ö. a 66. §. II. szakaszát, 122. l.

A bármely feltételeknek alávetett mozgó rendszer minden pontjára nézve [a 13. §. taglalásai szerint] a reá ható független (szabad) erők és feltételi (kényszer-) erők eredője a gyorsító (effectiv) erő; ez az utóbbi pedig egyenlő a reactió-erők negativ értékével; más szóval: a független (szabad) erők meg a feltételi erők meg a reactió erők minden pontban és mindig zérust adnak (egyensúlyban tartják egymást).

D'Alembert ezen elve a mozgás problemáját viszszavezeti az egyensúly problemájára.

A független erőt mindig szétbonthatni oly két componensre, melyek egyike a feltételi erővel ellentetten egyenlő; e componenst gyakran *elveszett erő*nek nevezik, mert ez a feltételi erőt tartja egyensúlyban és így a mozgásra nézve elveszett; csak a másik componense a független erőnek létesíthet mozgásváltozást, melyet ezért *effectiv*, tényleg gyorsító hatást létesítő erőnek neveznek.

---

* Helytelenül, de általánosan elterjedt «*a virtuális* sebességek *elve*» elnevezés; eredetére nézve l. a 3. pont Jegyzetét.

** Esetleg másodrendü csekély, 63. §., 115. l.

3. *A virtuális elmozdulás, alkalmazva a mozgásokra.* Lagrange *egyenletei* [v. ö. a 67. és 68. §-ot].

A rendszerre ható erőket a független, a feltételi és a reactióerőkből állóknak tekintve [13. §. 22. l.] d'Alembert szerint, 2. pont, egyensúly áll fenn, melyre a virtuális elmozdulások elve azonnal alkalmazható és így kimondhatjuk, hogy bármiféle rendszerre nézve, mely tetszőleges mozgásban van, az összes erők virtuális munkája zérus. Lagrange híres «*Mécanique analytique*»-jének (1788) e tétel képezi az alapját.

A feltételek, illetve a kényszer mindig egyenletek alakjában fejezhetők ki, melyeket a mozgás általános axiomáit kifejező egyenletekkel alkalmas módon combinálva, a feltételi, illetve a kényszererőt mindig kifejezhetni ezen összefüggések segélyével. Ezt a mathematikai eljárást Lagrange alkalmazta először; ő a mozgás dynamikai egyenleteit a független erők, a feltételi egyenletek és ez utóbbiakkal egyenlő számú határozatlan együtthatók segélyével fejezte ki; ezek képezik a *mozgás* Lagrange-féle *általános egyenleteinek első alakját*, mely bármily feltételeknek alávetett rendszerre nézve érvényes. Az együtthatók kifejezhetők a sebességek és a feltételi egyenletek segélyével, és egyszerű összefüggésben állanak a kényszererőkkel.

Jegyzet. Gyakran az 1., 2., 3. pontok alatt felsorolt mind a három eljárást a *virtuális elmozdulás* (elmozdítás) *elvé*nek nevezik, mert Lagrange fogalmazása az előbbi kettőt is magában foglalja. Ezen elv kezdetei már Leonardo de Vinci-nél jelentkeznek, Guido Ubaldi, Galileo Galilei, Cartesius, a Bernoulli-ak, Newton ismerték s részben alkalmazták ez elvet; de Lagrange ismerte fel rendkívüli módszertani fontosságát és ezt zsinórmértékül véve, a mechanika összes igazságait rendszeresítve, ezeket ezen elvből egységesen és következetesen vezette le.

3*a*. A virtuális elmozdulás elvével egy természetű, de nála valamivel általánosabb a Fourier-féle elv,* mely azt mondja, hogy tetszőleges feltételeknek alávetett anyagi rendszer csak úgy maradhat egyensúlyban, ha a reá ható, a feltételektől független erők virtuális munkája zérus vagy negativ, de soha sem positiv [v. ö. a 70. §-ot].

E tétel a legáltalánosabb természetű, akár kényszerítő, akár akadályozó, akár súrlódásbeli feltételek esetében áll fenn és lényegében véve azt az általános természeti tapasztalást fejezi ki, hogy a természeti erők a valóságban csak akkor létesítenek elmozdulást, ha e közben positiv munkát végezhetnek; ha pedig a lehetséges elmozdulások olyanok, hogy e közben csak negativ munkát végezhetnének,

* Először megállapítva Fourier-től: Mémoire sur la Statique, Journal de l'École polytechnique, 5. füzet, 6. év, 20—60 ll. 1798.

akkor ily elmozdulások egyáltalában vagy nem létesülnek vagy csak idegen erők hozzájárulásával, miáltal a virtuális munka positiv lett.

4. *A legkisebb kényszer elve vagy* Gauss *elve.**

Ha a rendszer szabadon mozoghatna, minden pontja egy időelem alatt a mozgató erők lefolyása alatt meghatározott pályaívet futna be; de a feltételek, melyeknek a rendszer alá van vetve, ezen ívelemeket módosítják. A szabad mozgás íveleme és a tényleges feltételi mozgás íveleme végpontjainak különbsége nem más, mint a feltételek létesítette *deviatió* [eltérítés, Kinematika 47. §.]. E deviatió négyzetének a mozgó pont tömegével való szorzatát Gauss «*kényszer*»-nek nevezi; anyagi rendszer esetében a kényszer egyenlő az összes anyagi pontokra vonatkozólag képezett ily szorzatok összegével.

Elemi geometriai és kisérleti-dynamikai megfontolások bizonyítják, hogy a valóságban végbemenő mozgáshoz tartozó «kényszer» minden lehetséges (azaz a feltételekkel megegyező) mozgás «kényszerei» között a legkisebb; v. ö. a 71. §. bizonyítását.

4*a*. *Az energéma elve* (König *alaptörvénye*).**

Az anyagi testek általános mozgás-egyenleteit König Gyula hazánkfia a szokásos eljárásoktól teljesen eltérő megfontolások alapján új fogalmak segélyével állítja elő.

Ha X, Y, Z az m-re ható, a feltételektől független erő componensei és x'', y'', z'' az m gyorsulási componensei, akkor $\frac{1}{2}\Sigma m(x''^2+y''^2+z''^2)$ a rendszer gyorsulási energiája, $\Sigma(Xx''+Yy''+Zz'')$ a rendszerre ható összes erők gyorsulási viriálja és $\frac{1}{2}\Sigma m^{-1}(X^2+Y^2+Z^2)$ ezen erőknek energémája.

König a rendszerre ható és a feltételektől független erőket bizonyos megállapodások szerint szétbontja a «kényszernek alávetett» és a «szabad»*** componensre; alaptörvényét pedig a következő két részben fejezi ki:

1. Az erők szabad componensének gyorsulási viriálja egyenlő ugyanezen erőcomponens energémájával.

2. A feltételeknek és az 1. alatti tételnek megfelelő valamenynyi lehetséges mozgások közül a tényleg végbemenő mozgás bír a legkisebb gyorsulási energiával.

---

* C. F. Gauss: Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik, Crelle's Journal für r. und a. Mathematik, IV. kötet, 232—235. ll. 1829.

** König Gy.: A dynamika egyenleteinek jelentéséről. M. T. Ak. Értek. a Math. Tudd. köréből. XIV. köt. 1. sz. 1—43. ll. 1888.

*** *Egy* mozgó pontnak surlódás nélküli mozgására nézve e componensek rendre egyenlők a független erőnek az előírt pályára vagy felületre *normális*, illetve tangentiális componensével.

Az ezen tételekből nyert összefüggések szolgáltatják a mozgás általános egyenleteit. V. ö. a 85—91. §§-okat.

5. *A legkisebb működés* MAUPERTIUS-*féle elve.**

Az anyagi pont mv mozgásmenynyiségének a leírt útelemmel való szorzata, összegezve ezt s_2—s_1 véges útrészre nézve a pont »*működése*», «*actió*»-ja, azaz ez:

$$A = m \int_{s_1}^{s_2} v ds = \int_{t_1}^{t_2} mv^2 dt;$$

az egész rendszer «működése» az ily kifejezések összege.

Ha a rendszer bármily feltételek alatt, kivéve a surlódást, de az energia elve fennállásával tetszőleges 1. helyzetből és configurátióból egy másik 2. helyzetbe és configurátióba mozog, akkor bebizonyítható, hogy a tényleges mozgásra, azaz a magára hagyatott rendszer nem zavart, ú. n. *spontán* mozgására vonatkozólag a működés kisebb, mint e két helyzet és configurátió közötti bármily más, a feltételekkel megegyező lehetséges pályájú mozgásra nézve.

Ez a MAUPERTIUS*-től származó legkisebb működés elve, [72—76. §§.] melynek most már a physika néhány ágában is nagy fontosságot tulajdonítanak; HAMILTON** a stationárius működés elvének nevezte, mivel a tényleges (spontán) mozgástól való kicsiny eltérítés a működés kifejezésében végtelenszer kisebb változást létesít azaz a működés a tényleges pálya közelében fekvő szomszédos pályákra nézve állandónak tekinthető, avagy e pályákra nézve $\delta A = 0$ [v. ö. a köv. 6. pontot].

6. HAMILTON elve** formailag és tartalmilag különbözik az előbbitől, általánosabb nála, mivel csak erőfüggvényt tételez fel, mely az időtől explicite is függhet s így az energia állandósága elvét nem kell felvennie, ezenkívül a mozgásegyenleteknek nevezetes transformátiójához vezet [v. ö. a 77. §-ot].

Jeleljék T a rendszer eleven erejét, V erőfüggvényét, H a $T - V$ különbséget; t_1 és t_2 a rendszer 1. helyzetének és configurátiójának és 2. helyzetének és configurátiójának megfelelő időpontokat, akkor az

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (T + V)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} H dt, \qquad I = \int_{t_1}^{t_2} (T + V)\, dt$$

---

* MAUPERTIUS: Mémoires de l'Ac. Française, 1744; Mém. de l'Ac. de Berlin, 1746.

** HAMILTON, W. R.: On a general method in Dynamics. Philosophical Transactions, 1834, 247—308. ll. és 1835, 95—144.

integrálok elseje, az A, az 5. pontban definiált működés, és az I az ú. n. HAMILTON-féle integrál.

a) *A stationárius működés elve.* Ha most δ oly változtatásnak (variátiónak) a jele, melynél a nevezett két helyzet s configurátió közötti utak változnak, de a két helyzet és a két configurátió, valamint a t_1 és t_2 időpontok változatlanok maradnak, akkor a

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{T}+V)\, dt = 0$$

feltétel fejezi ki a HAMILTON-féle elvet, melyből analytikai úton a mozgás összes egyenletei nyerhetők.

Az *erély megmaradása* törvényének fennállásánál H az időtől független állandó [24. §. I. szakaszának *Jegyzete*, 40. l.]; ekkor az A második részének a jelzett módon képezett variátiója zérus és a feltétel redukálódik

$$\delta \mathrm{A} = 0 \qquad \text{vagy} \qquad \delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{T} - \mathrm{E}_h)\, dt = 0 \,*$$

alakra, melynek elsejétől az elv ezen része nevét is nyerte [v. ö. a megelőző 5. pont utolsó kikezdését, 45. l. és a 77. §. (17) egyenletét, 151. l.].

b) *A variáló működés elve.*

Ha az I oly módon lesz variálva, hogy a fentjelzett 1. és 2. helyzet- és configurátió is változzon, akkor a számítás adja:

$$\delta I = \Sigma m \{x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z\}_2 - \Sigma m \{x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z\}_1,$$

mely egyenlet alapján kimutatható, hogy az összes mozgásegyenletek kész integráljai egyetlen egy függvényből, a HAMILTON-féle *characteristikus függvényből* állíthatók elő. E függvény a

$$\frac{\partial I}{\partial t} + H = 0 \qquad \text{vagy} \qquad \frac{\partial I}{\partial t} + \mathrm{T} - V = 0$$

characteristikus egyenlet teljes integrálja; ezen egyenletben $\mathrm{T}-V$ az I-nek [45. l.] a coordináták szerint képezett differentiálquotienseivel, a coordinátákkal és az idővel van kifejezve.

Evvel a dynamikai problémák ezen jellemző egyenlet megoldására azaz az I characteristikus függvény felkeresésére vannak viszszavezetve [v. ö. a 78—84. §§-okat].

Az *erély megmaradása* esetében a jellemző függvény egyenlő az A működéssel, mely ekkor az

$$\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}\right)^2 = 2m\,[H + V(x, y, z)]$$

alakú characteristikus egyenlet teljes megoldása [80. §. (9), 159. l.].

---

* Mivel a 24. §. I. szakaszának Jegyzete értelmében, 40. l., itt $V = \mathrm{const} - \mathrm{E}_h$.

7. Jacobi * «*az utolsó multiplicátor elve*» czímén a dynamikába oly elvet vezetett be, mely tulajdonképen integrálási eljárás s a dynamika egyenleteire is alkalmazható [v. ö. a 108—115. §§-okat].

Ugyanis valamely n számú pontból álló anyagi rendszer mozgásegyenletei $3n$ számú *másodrendű* differentiál-egyenletből álló rendszert alkotnak; ha ezekben az x', y', z' sebességi componenseket új változóknak tekintjük, akkor ezeknek csak első quotienseiből vannak szerkesztve a gyorsulások s így a mozgás-egyenletek elsőrendűek lettek, de $x' = \frac{dx}{dt}$ alakú $3n$ számú elsőrendű kinematikai egyenlet járult az előbbi $3n$ mozgásegyenlethez.

Ez által az $x, y, z, x', y', z' \ldots$ összesen $6n$ változó közötti $6n$ számú *elsőrendű* differentiálegyenletet nyertünk.

Jacobi bizonyította be először, ha e rendszernek $6n-1$ teljes integrálját és egy integráló tényezőjét (multiplicátorát) ismerjük, hogy evvel az egyenletrendszer két változó közötti elsőrendű differentiál-egyenletre van viszszavezetve, mely az ő mindig kifejezhető integráló tényezője (az utolsó multiplicátor) segélyével integrálható.

Ha az erők csak a coordináták és az explicit idő függvényei, akkor *szabad* pontrendszer esetében az utolsó multiplicátor állandó, ugyanígy állandó e multiplicátor a Hamilton-féle mozgásegyenletek rendszerére nézve.

8. Lagrange-nek ** az elsőrendű partiális differentiál-egyenletek integrátiójára vonatkozó eljárása szintén kizárólagosan mathematikai jellegű; közelebbről arra szolgál, hogy a mechanikában felmerülő elsőrendű, de magasabb fokú, két független változójú ily egyenletek (pl. a Hamilton-féle characteristikus egyenlet) integrátióját viszszavezesse egy elsőrendű, de elsőfokú partiális és egy közönséges (totális) differentiálegyenlet integrátiójára [120. §.].

Az eljárás általában véve általánosabb elsőrendű, magasabb fokú partiális differentiális egyenletek integratióját viszszavezeti a lineáris, elsőrendű totális differentiálegyenletek egy rendszerének integrátiójára [v. ö, a 116—122. §§-okat].

26. §. *Az általános coordináták alkalmazásának módszere.*

A dynamika tapasztalati tételei, az integráltételek és a módszertani elvei függetlenek azon coordináta-rendszer természetétől, melyben ezeket kifejezzük.

Számos mechanikai probléma tárgyalását és megfejtését alkal-

---

* Vorlesungen über Dynamik 71. s köv. ll. 1866.

** Mémoires de l' Ac. roy. de Berlin 1772; vagy Oeuvres, T. III, 549—575 ll., Paris, 1869.

masan megválasztott coordináták [v. ö. Math. Rep. 41. és 42. §§-ait] rendkívül megkönnyítik, illetve lehetővé teszik, mely czélra a szükséges dynamikai egyenletek és összefüggések a minden egyes esetben alkalmazott coordinátákban fejezendők ki.

E szempontból tekintve, kívánatos a coordináták oly rendszerének a bevezetése, mely független a közönséges ily rendszerek korlátaitól és megszorításaitól, mely a mozgó anyagi pontok mindegyikének helyét tetszőleges három helymeghatározó (coordináta) segélyével adja meg. E helymeghatározók közül annyi a független, a hány szabadsági fokkal bír a tekintetbe vett anyagi pontrendszer mozgása s e független adatok (coordináták) meghatározzák az anyagi rendszer mindenkori helyzetét. Ezen adatok különböző formában lehetnek adva, de számuk az anyagi rendszer természetétől függ és nem változtatható meg.

Lagrange híres «Mécanique analytique»-je második része negyedik fejezetében * adott először oly módszert, mely a mozgás dynamikai egyenleteit közvetetlenül kifejezi az érintett általános coordinátákban, míg számukat a rendszer szabadsági fokai számára redukálja és e mellett a mozgást megszorító feltételek kifejezéseit ez egyenletekből teljesen kiküszöböli. E módszer methodikai szempontból legnagyobb fontosságú; jellemző alakját a *mozgás általános dynamikai egyenletei* Lagrange-féle *második alakjának* nevezik. De megjegyzendő, hogy az ezen egyenletekben felmerülő általános erőcomponenseknek a megfelelő általános coordináta-változásokkal való szorzat-összegük itt is elemi munkát jelent; miután pedig e coordináták itt általánosságban nem hoszszúságok: az általános erők jellege (dimensiója, természete) itt nem mindig egyezik meg a közönséges erőkével s minden egyes esetben külön-külön állapítandó meg.

A megelőző §§-ok tételei, illetve eljárásai mind kifejezhetők, illetve végezhetők ily általános coordináták segélyével. V. ö. 92—107. §§-okat.

---

* Lagrange, Oeuvres, XI. kötete 325—344. ll., Paris, 1888.

ANYAGI PONT DYNAMIKÁJA.

A. ÁLTALÁNOS RÉSZ.

I. Anyagi pont statikája.

(Anyagi pont egyensúlya és változatlan mozgásállapota.)

27. §. *Az egyensúly általánosságban relativ. Szabadon mozogható pont egyensúlya.*

1. Valamely anyagi test egyensúlyban van, ha az őt környező anyagi testekhez képest nyugalomban van. Az egyensúly e szerint *mindig relativ,* mert minden testnek környezete legalább absolut mozgásban van.

Így relativ egyensúlyban van a függő lámpa az egyenletesen (egyenesben vagy körben) mozgó hajó lakószobájában, az egyensúlyozott, megnyugtatott mérleg a mozgó föld felületén s í. t.

A pont egyensúlyára nézve ugyanezen észrevételek érvényesek.

2. Ha a pont minden irányban szabadon mozoghat, akkor az anyag tehetetlenségénél fogva, e pont, ha nyugalomban van, csak úgy maradhat továbbra is nyugalomban, ha reá semmiféle erő nem hat, avagy, a mint azt a tapasztalás mutatja, ha a reá ható erők *eredője* zérus. [De ez nem jelenti azt, hogy a pontra semmiféle erők nem hatnak.]

Az erő vector természeténél fogva a nevezett eredő csak akkor zérus, ha három jellemzője (pl. három derékszögű componense) zérus.

Jeleljék P_1, P_2, ... P_i ... P_n az anyagi pontra ható erőket, X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2, ... X_i, Y_i, Z_i ... X_n, Y_n, Z_n ezek derékszögű componenseit; akkor az egyensúly előbb kimondott feltételeinek alakja:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

[Az anyagi rendszerek dynamikájában egy egész anyagi rendszer

tömegközéppontjának egyensúlyára vagy egyenletes mozgására nézve ugyanily egyenletrendszer áll fenn, 24. §. 1. pontja 137. l.]

Röviden, ha P a nyugvó pontra működő erők eredője, X, Y, Z ezen eredő derékszögű componensei, akkor az egyensúly feltételei

$$X=0; \quad Y=0; \quad Z=0. \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

3. Megfordítva: ha a teljesen szabadon mozogható pontra ható erők eredője zérus, akkor az anyag tehetetlenségénél fogva (8. §., 13. l.) ez vagy egyenletes egyenesvonalú mozgást végez vagy nyugalomban marad, szóval mozgásállapotát nem változtatja.

28. §. *Előírt sima felületen vagy sima görbén mozogható pont egyensúlya.*

Ha a pont mozgásának szabadsága kényszerítő feltétel által korlátozva van (Kinematika 89. és 89*a*. §§.) akkor a pont mindig bizonyos áthatatlannak tekintett felületen vagy görbe vonalon kénytelen maradni, mely e szerint a pontnak a felület normálisa menti vagy a görbe normális síkja menti mozgását lehetetlenné teszi.

1. *A pont előírt felületen tartozik maradni.*

[Ezt az esetet érzékíthetjük egymáshoz teljesen hasonló, egymástól mindenütt állandó kicsiny távolságban lévő *két* szilárd, sima felülettel, mely mindenütt egyenlő vastagságú rétegszerű tért határol; e térben kénytelen egy sima gömböcske mozogni, mely a két felületet mindig érinti. Evvel el van érve, hogy a gömböcske középpontja a szilárd két felület között mindenütt a közepén lévő felületen, a tulajdonképeni előírt felületen tartozik maradni; a szilárd két felület falai attól való eltávozást nem engednek meg (v. ö. a 92. lapon a 16. ábrát)].

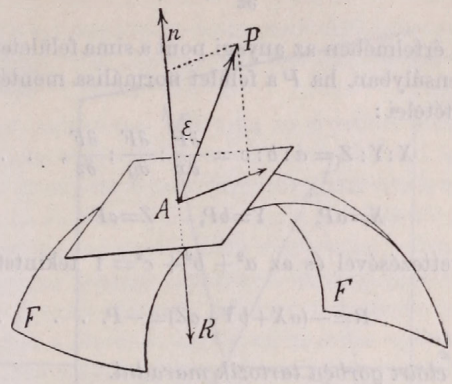
Ekkor a reá ható, a kényszertől független erők mindegyikét két-két componensre lehet bontani, melyek közül az egyik a felületnek (a pont mindenkori helyéből mint talppontból emelt) normálisa mentén, a másik e pontban a felülethez húzott érintősíkban fekszik, 1. ábra.

a) Az előbbi, a felület normálisa menti componensek eredője a felületre merőleges *nyomást* létesít, mely ezen eredővel æquivalens; de a felület anyaga a hatás és viszszahatás tapasztalati tételénél fogva, a reá normálisa mentén gyakorolt nyomás ellenében evvel egyenlő nagyságú, de ellentett irányú ellennyomást fejt ki, melyet helyesen nevezünk *kényszererőnek* vagy *feltételi erőnek*, mivel ez a kényszer vagy a feltétel jelenléte folytán keletkezik.

Mechanikai szempontból szabad e szerint a kényszert ezen kényszererővel helyettesíteni.

A megelőzőkből kiderül, hogy a kényszertől függetlenül működő

erőkhöz hozzákapcsolva a kényszert helyettesítő (vele æquivalens) feltételi erőt: ez által a pontot szabadon mozogható ponttá tettük és egyensúlyi feltételeit a szabad pont ebbeli feltételeire vezethetjük viszsza;



1. ábra.

e kényszererő a felületre gyakorolt nyomással együtt a felület normálisa mentén zérus eredőt létesít és így a felületen nyugalomban lévő pont ezen irány mentén soha sem változtathatja meg egyensúlyi állapotát.

β) Az utóbbi, az érintő sík mentén fekvő componensek eredője szintén az érintősíkban fekszik és a pontot e síkban elmozgatni törekszik.

A felületet itt *simának* tekintve, a pont elemi mozgása az érintősík mentén mindenütt szabadon, minden akadály nélkül történhetik; e szerint az eredetileg a felületen nyugalomban lévő pont csak akkor maradhat továbbra is nyugalomban, ha az érintősík menti eredő zérus, azaz, ha az egész eredő erő a felületre merőleges. Ez az egyensúly feltétele ebben az esetben.

Jeleljék X, Y, Z a kényszertől függetlenül a pontra ható P eredő erő componenseit, R a kényszererőt, a, b, c a felület n normálisának iránycosinusait és ε a P és az n közötti szöget.

Akkor a P erő létesítette, a felületre gyakorolt nyomás e P-nek a normális menti vetületével $P\cos\varepsilon$-vel egyenlő és így az eredő normális erő:

$$P\cos\varepsilon+R=aX+bY+cZ+R=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ha $F(x, y, z) = 0$ a felület egyenlete akkor [Math. Rep. 79. §. (8*a*)]

$$a = \frac{\partial F}{\partial x} : \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}; \qquad b = \frac{\partial F}{\partial y} : \sqrt{\ldots};$$

$$c = \frac{\partial F}{\partial z} : \sqrt{\ldots} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

A *β)* pont értelmében az anyagi pont a sima felületen csak akkor maradhat egyensúlyban, ha P a felület normálisa mentén fekszik.

Ennek feltételei:

$$X : Y : Z = a : b : c = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

azaz

$$X = aP, \qquad Y = bP, \qquad Z = cP.$$

Ezek helyettezésével és az $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ tekintetbe vételével (1)-ből

$$R = -(aX + bY + cZ) = -P. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

2. *A pont előírt görbén tartozik maradni.*

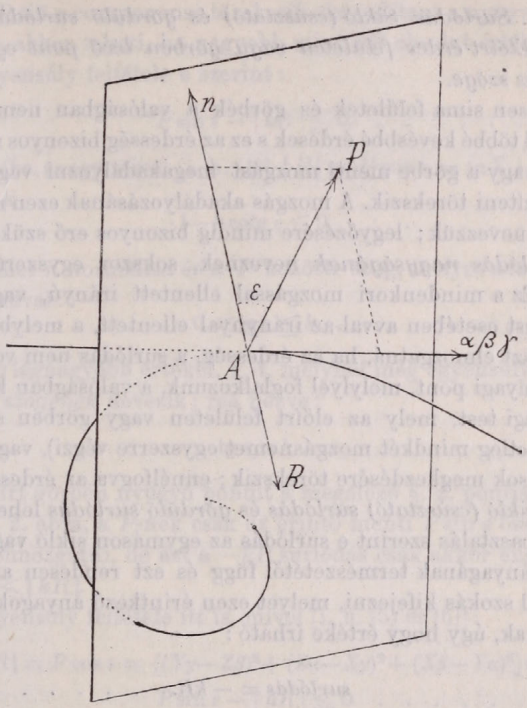
[Ez az eset úgy valósítható meg, hogy egy tetszőleges geometriai tengelyű, állandó kicsiny körkeresztmetszetű (szilárd) sima csőben egy épen beleillő sima gömböcske kénytelen mozogni. Evvel el van érve, hogy a gömböcske középpontja e cső geometriai hoszsztengelyén, a tulajdonképeni előírt görbén tartozik maradni; a cső szilárd falai az attól való eltérést nem engedik meg (v. ö. a 81. lapon a 12. ábrát)].

Ezen esetben a tömegpontra ható a kényszertől független erőket mind a pont mindenkori helyén a görbe normális síkjában fekvő és a görbe érintője mentén fekvő componensekre lehet bontani, 2. ábra.

a) Az előbbi, a görbe ívelemére merőleges összszetevők eredője szintén merőleges a görbére és miután a pont nem távozhatik el a görbétől, erre normális *nyomást* létesít, mely ezen eredővel magával egyenlő s mely a görbe anyagának áthatatlanságánál fogva, ugyancsak a nyomással egyenlő nagyságú, de vele ellentett *ellennyomást* létesít. Ez az ellennyomás itt a *kényszererő* vagy *feltételi erő, mely a kényszer mechanikai helyettesítése.* Észreveszszük, hogy itt is hozzákapcsolva a kényszertől függetlenül működő erőkhöz a kényszer létesítette feltételi erőt, a pontot szabadon mozoghatóvá tettük és egyensúlyi feltételei is a szabad pontéira vezethetők vissza. A nyomás és az ellennyomás összege itt is zérus és így a görbén nyugalomban lévő pont a görbe normálisa mentén nem változtathatja meg ebbeli állapotát.

β) Az utóbbi, a görbe érintője menti componensek eredője szintén az érintő mentén fekszik s miután a görbe *sima,* a rajta nyugvó pont csak akkor maradhat nyugalomban, ha ezen érintőmenti erő zérus. Ez az egyensúly feltétele ebben az esetben.

Jeleljék itt is a nyugvó pontra ható, a kényszertől független P erő derékszögű összszetevőit X, Y, Z; R a kényszererőt, α, β, γ az előírt görbe érintőjének iránycosinusait és ε a P és a normális sík közötti szöget.



2. ábra.

Ekkor a P létesítette, a görbe anyagára gyakorolt nyomás a P-nek a normális síkra való vetületével egyenlő és az eredő normális erő

$$P\cos\varepsilon + R = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Továbbá [Math. Repertórium 75. §. (4).]:

$$dx = \alpha ds, \qquad dy = \beta ds, \qquad dz = \gamma ds,$$

és

$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi - \varepsilon) = \frac{X}{P}\cdot\alpha + \frac{Y}{P}\beta + \frac{Z}{P}\gamma. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

A *β)* szerint az egyensúly ezen esetében a P a görbére merőleges, azaz $\varepsilon = 0$, mely feltétel (6)-ból:

$$X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

és így (5)-ből:

$$R=-P. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

29. §. *Surlódás. Sikló (csúsztató) és gördülő surlódás. Együtthatójuk. Előírt érdes felületen vagy görbén lévő pont egyensúlya. A surlódás szöge.*

Teljesen sima felületek és görbék a valóságban nem léteznek, ezek mind többé kevésbbé érdesek s ez az érdesség bizonyos mértékben a felület vagy a görbe menti mozgást megakadályozni vagy legalább megnehezíteni törekszik. A mozgás akadályozásának ezen nemét *surlódásnak* nevezzük; legyőzésére mindig bizonyos erő szükséges, melyet a *surlódás nagyságának* neveznek, sokszor egyszerűen *surlódásnak*. Ez a mindenkori mozgással ellentett irányú, vagy nyugvó surlódó test esetében avval az iránynyal ellentett, a melybe a testre ható erő azt elmozgatná, ha az érdesség, a surlódás nem volna.

Az anyagi pont, melylyel foglalkozunk, a valóságban kis kiterjedésű anyagi test, mely az előírt felületen vagy görbén síklik vagy gördül (esetleg mindkét mozgásnemet egyszerre végzi), vagy legalább ily mozgások megkezdésére törekszik; ennélfogva az érdesség okozta surlódás *sikló (csúsztató) surlódás* és *gördülő surlódás* lehet.

A tapasztalás szerint e surlódás az egymáson sikló vagy gördülő felületek anyagának természetétől függ és ezt rendesen avval az R nyomással szokás kifejezni, melyet ezen érintkező anyagok egymásra gyakorolnak, úgy hogy értéke írható:

$$\text{surlódás} = -kR. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Itt k a *surlódás együtthatója*, mely a nyugalomra s a mozgásra nézve lényegesen különböző; az előbbi esetben a *statikai*, az utóbbiban a *dynamikai* vagy helyesebben *kinetikai* surlódási együttható; az utóbbi általában véve az egymással érintkező testek (felületi részek) egymáshoz viszonyított relativ sebességének függvénye. Ezenkívül a statikai, illetve a dynamikai surlódási együttható különböző még a szerint, a mint a tömegpontra ható független P erő e pontot előírt pályáján vagy felületén *gördítve* vagy *siklólag (csúsztatva)* mozgatni törekszik, illetve ezt *gördítve* vagy *siklólag* mozgatja.

Az (1) negativ jele annak a kifejezésére szolgál, hogy a surlódás a mozgató vagy mozgatni törekvő erővel mindenkor ellentett irányú.

Végre még kiemelendő, hogy a surlódásbeli erő mindig csak a tényleges mozgásnál vagy a testet mozgatni törekvő erőnél léphet csak fel, mely utóbbi csak akkor létesíthet mozgást, ha nagyobb a

surlódásnál s ez a körülmény a következőkben, a pont egyensúlyi feltételeinek képzésénél mérvadó.

1. Ha a pont előírt felületen kénytelen maradni, akkor a megelőző §. 1. pontja szerint, 51. l., 1. ábra, a P-nek csak a tangentiális sík menti $P \sin \varepsilon$ componense törekszik elmozdítani a nyugvó pontot, de ezt csak akkor teheti, ha nagyobb mint kR absolut értéke.

Az egyensúly feltétele e szerint:

$$P \sin \varepsilon - |kR| \leqq 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

absolut értéke, avagy mivel [i. h. (1)] $|R| = P \cos \varepsilon = (aX + bY + cZ)$, egyenletünk

$$1 - k \operatorname{cotg} \varepsilon \leqq 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

hol ε a felület n normálisa és a P közötti szög, melyre nézve egyensúly alkalmával:

$$0 < \operatorname{tg} \varepsilon \leqq k. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2a)$$

E szög legnagyobb értékét, ε_0-t, melynél még egyensúly áll fenn, a *surlódás szögének* nevezik; reá nézve:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_0 = k. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

2. Előírt görbén nyugvó pontot a megelőző §. 2. pontja értelmében, 53. l., 2. ábra, a P-nek csak az érintő menti $P \sin \varepsilon$ összetevője törekszik elmozgatni, de azt a $-kR$ surlódás csak akkor engedi meg, ha $P \sin \varepsilon < |kR|$.

Az egyensúly feltétele itt is, mivel [i. h. (5) és (6)]:

$$|R| = P \cos \varepsilon = \{(Y\gamma - Z\beta)^2 + (Z\alpha - X\gamma)^2 + (X\beta - Y\alpha)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$P \sin \varepsilon - |kR| \leqq 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

$$1 - k \operatorname{cotg} \varepsilon \leqq 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

hol ε a görbe normális síkja és a P közötti szög.

Az ε_0 *surlódási szögre* nézve itt is áll

$$\operatorname{tg} \varepsilon_0 = k. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Jegyzet. A pont egyensúlyi feltételeit meg más, a mozgás kinetikai sajátságain alapuló megfontolások (pl. a virtuális elmozdulások elve s í. t.) segélyével állíthatni fel, de ily eljárások a kinetikába tartoznak (v. ö. a 67. §-ot, 122. l.).

II. Anyagi pont kinetikája.

(ANYAGI PONT MOZGÁSTANA.)

1. Az anyagi pont helyzetével és mozgásával kapcsolatos dynamikai fogalmak. Szabad tömegpont mozgásának egyenletei és tételei.

30. §. *Általános megjegyzés: Az elmozdulásnak, a sebességnek, a gyorsulásnak s í. t. dynamikai analogonjai.*

A *kinematikában* a *geometriai pont* helyzetének és helyzetváltozásának szabatos kifejezése czéljából az elmozdulásnak, a sebességnek és a különböző rendű gyorsulások fogalmait hoztuk volt be, melyek a pont mozgásának leírására szolgáltak.

A *dynamikában* az *anyagi pont* mozgását ugyanazon kinematikai fogalmak segélyével írjuk le ; de az anyagi pont *tömegénél* fogva ezeken kívül még új, dynamikai fogalmak szükségesek, melyek az előbb említett kinematikai menynyiségeknek a mozgó pont *tömegével* való *szorzatából* keletkeznek. Az anyagi pont tömegét a következőkben állandónak tekintjük.

Ezek az erők tanában felette fontos alapfogalmak; de vannak rajtuk kívül még más oly fogalmak is, melyek a kinematikában nem külön fogalmakként szereplő hoszszúság-négyzeteknek, sebesség-négyzeteknek s í. t. a tömeggel való szorzatából keletkeztek, milyenek a tehetetlenségi nyomaték, az eleven erő s í. t.

Az anyagi pont definitiója szerint [Kinematika 1. §.] ennek méretei a megejtendő vizsgálat szempontjából elhanyagolható kicsinyek; ezért a következőkben az anyagi pont mozgása tárgyalásánál csak ennek *haladó* (translatórius) mozgását veszszük tekintetbe, míg netáni *forgó mozgását*, melylyel szintén bírhat, a nevezett körülményeknél fogva elhanyagolhatjuk.

31. §. *Tömegvector vagy tömegnyomaték. Jellege.*

1. Jeleljék m az anyagi pont tömegét, r távolságát valamely tetszőleges O ponttól, 3. ábra, akkor az

$$mr=h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

szorzatot az m-nek az O-ra vonatkoztatott *tömegvectorának* vagy *tömegnyomatékának* nevezik.

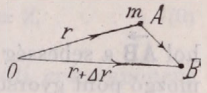
Miután m léptékes, r vectormenynyiség, e nyomaték is vector, mely az r positiv (0-tól számított) irányába esik. Jellege: *tömeg* × *hoszszúság*.

E tömegvector csak abban különbözik az elmozdulástól, hogy m-mel van szorozva; különben az utóbbi vector valamenynyi sajátságaival bír.

Ha a (mozgó vagy nyugvó) m pontnak 0-ra vonatkoztatott derékszögű coordinátái x, y, z, akkor tömegnyomatékának derékszögű vetületei

$$h_x = mx, \quad h_y = my, \quad h_z = mz. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

[Tetszőleges számú anyagi pontokból álló rendszerre nézve a tömegvector derékszögű componensei a (2) alakú, egyirányú szorzatok megfelelő összegeivel egyenlők, melyekből a *tömegközéppont* fogalma adódik v. ö. a 24. §. első lábjegyzékét, 37. l.].



3. ábra.

32. §. *A tömegvector változásának mérve a mozgás nagysága.*

A tömegvector mozgó pontra nézve az időben változó; irány és nagyság szerinti változásának azon elemi időközhöz való viszonyát, mely alatt e változás bekövetkezett (szóval e változás mérvét) a *tömegvector sebességének*, gyakran *mozgásmenynyiségnek* vagy *mozgásnagyságnak* vagy még a *mozgás nyomatékának* nevezik.

Ennek kifejezése, 3. ábra:

$$j = \lim m \cdot \frac{\overline{AB}}{\Delta t} = m \frac{ds}{dt} = mv. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

E menynyiséget e szerint mint a *mozgó pont tömegének sebességével való szorzata* gyanánt is definiálhatjuk. Jellege: *tömeg* × *sebesség*.

Az m léptékes menynyiség lévén, az mv szorzat a v-vel egyirányú vector.

A tömegvector sebessége a kinematikai sebességtől csak az m szorzóval különbözik; ezért a (2)-ből a derékszögű componensei:

$$\left.\begin{aligned} j_x &= mv_x = m\frac{dx}{dt} = \frac{dh_x}{dt}; \\ j_y &= mv_y = m\frac{dy}{dt} = \frac{dh_y}{dt} \\ j_z &= mv_z = m\frac{dz}{dt} = \frac{dh_z}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

[Tetszőleges anyagi rendszerre nézve, melynek tömege m, e formulák csak akkor fejezik ki a rendszer mozgásnyomatékát, ha valamenynyi

pontjának sebessége ugyanaz, azaz, ha a rendszer translatórius mozgást végez.]

33. §. *A tömegvector gyorsulása a mozgató erő. Magasabb rendű gyorsulásai.*

1. Az egyenletes egyenesvonalú pontmozgásnál a v sebesség irány és nagyság szerint változatlan; ezért mv mozgásnyomatéka is változatlan; de minden más mozgásnál változó; itt a változás viszonyát a bekövetkezése közben lefolyt elemi időközhöz (szóval e változás mérvét) a *mozgásmenynyiség sebességének* vagy a *tömegnyomaték gyorsulásának* nevezik.

Ennek kifejezése, 4. ábra:

$$P = \lim m \frac{\overline{AB}}{\Delta t} = m\varphi, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

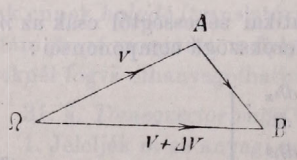
hol $\overrightarrow{AB}$ a sebesség teljes (irány és nagyság szerinti) változása és φ a mozgó pont gyorsulása.

E menynyiség a mozgó anyagi pont tömegének gyorsulásával való szorzata; az m scalarikus, a φ pedig vectormenynyiség; $m\varphi$ szorzatuk e szerint *vector*, jellege: *tömeg × gyorsulás;* az $\overrightarrow{m\varphi}$ iránya a φ-évl esik egybe.

Derékszögű componensei, ha a, b, c a φ iránycosinusai:

$$\left.\begin{aligned} X = ma\varphi = m\varphi_x = m\frac{dv_x}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dj_x}{dt} = \frac{d^2h_x}{dt^2}; \\ Y = mb\varphi = m\varphi_y = m\frac{dv_y}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dj_y}{dt} = \frac{d^2h_y}{dt^2}; \\ Z = mc\varphi = m\varphi_z = m\frac{dv_z}{dt} = m\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dj_z}{dt} = \frac{d^2h_z}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

[A 11. §-ban, 16 l. kifejtettük azokat a tapasztalokat, melyekből kiderül, hogy a $P = m\varphi$ menynyiség az m-re ható mozgató erővel (az elsőrendű gyorsulás okával) egyenlő s hogy X, Y, Z ezen erő derékszögű componensei].



4. ábra.

2. A (2) egyenleteknek ez idő szerint képezett további magasabb-differentiálquotiensei megadják a tömegvector magasabbrendű gyorsulásának componenseit. De a dynamikában az eddig szerzett tapasztalások [10. §., 15. l.] nem tették szükségessé az oly okoknak vagy hatásoknak a feltevését, melyek mozgó tömegeknek csak másod- és magasabbrendű gyorsulását megváltoztatnák, habár

nincsen kizárva, hogy idővel oly tapasztalások merüljenek fel, melyekből az efféle okokra (magasabbrendű erőkre) következtetnünk kell.

Ez okból a tömegvector magasabbrendű gyorsulásaival itt nem foglalkozunk, már csak azért sem, mivel vectortulajdonságai a megfelelő magasabb kinematikai gyorsulásokéivel megegyeznek.

34. §. *Angagi pontra ható mozgató erő componenseinek különböző kifejezései.*

A mozgató erő vector, mely a scalarikus tömegnek a vector jellegü gyorsulással való szorzatából áll; e szerint az erő vetületeit a gyorsulás megfelelő vetületeiből közvetetlenül nyerjük, ha ez utóbbiakat az m-mel szorozzuk.

Kiindulunk a 33. §. (2) egyenleteiből:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X;\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y;\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (0)$$

1. A λ, μ, ν iránycosinusokkal biró *iránymenti erőcomponens* [v. ö. Kinematika 42. §. (3)]:

$$P_{\lambda\mu\nu}=\lambda X+\mu Y+\nu Z=(a\lambda+b\mu+c\nu)\,P=P\cos\varepsilon, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

hol ε a P és a (λ, μ, ν) közötti szög.

2. *Az erő tangentiális* és *normális componense* [melyek a pálya mindenkori osculáló síkjába esnek, v. ö. Kinematika 46. §. (5) és 51. és 52. §§-ait]:

$$\left.\begin{aligned} P_t=T=m\varphi_t=m\frac{d^2s}{dt^2};\\ P_n=N=m\varphi_n=m\frac{v^2}{\varrho}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

3. *Az erő polárcomponensei* [v. ö. Kinematika 44. §. (7) és 45. §. (6)]:

a) *Sik polár-összetevők:*

$$\left.\begin{aligned} P_r=R=m\varphi_r=m\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right);\\ P_\vartheta=Q=m\varphi_\vartheta=m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

b) *Térbeli polár-összetevők:*

$$\left.\begin{aligned} P_r=R=m\varphi_r=m\left\{\frac{d^2r}{dt^2}-r\left[\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\sin^2\eta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right]\right\};\\ P_\eta=H=m\varphi_\eta=m\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\eta}{dt}\right)-r\sin\eta\cos\eta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\};\\ P_\vartheta=Q=m\varphi_\vartheta=m\frac{1}{r\sin\eta}\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\eta\frac{d\vartheta}{dt}\right). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (3b)$$

Jegyzet. Az anyagi pont szabad mozgásánál a mozgató erő mindig beleesik az osculáló síkba, mint a gyorsulás [Kinematika 51. és 52. §§.]; továbbá, az erőnek tangentiális, normális és binormális componenseit derékszögű összetevőkből s a tangens α, β, γ, a normális λ, μ, ν, a binormális f, g, h iránycosinusaiból is fejezhetni ki, úgy, hogy:

$$\left.\begin{aligned} P_t &= T = \alpha X + \beta Y + \gamma Z; \\ P_n &= N = \lambda X + \mu Y + \nu Z; \\ P_b &= O = fX + gY + hZ, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

hol a nevezett iránycosinusok a sebesség és componensei segélyével is fejezhetők ki [v. ö. Kinematika 58. §.]:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{x'}{s'} \text{ s í. t.}; \\ \lambda &= \frac{\varrho}{s'^3}(s'x'' - x's'') \text{ s í. t.}; \\ f &= \frac{\varrho}{s'^3}(y'z'' - z'y'') \text{ s í. t.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

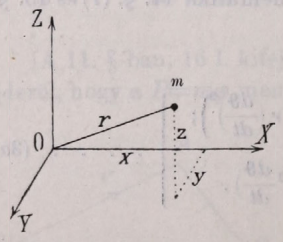
és bennük $s' = v$, ϱ a pálya görbületi sugara, x', y', z'; x'', y'', z'' a sebesség s a gyorsulás componensei.

Mindezen kifejezéseket a következőkben használni fogjuk.

35. §. *Az anyagi pont tehetetlenségi (négyzetes) nyomatékai.*

Rátérünk most a tömegnek az elmozdulás-, a sebesség-, a gyorsulás *négyzetével* való szorzása útján [4. §. 2. pontja6. l.; 31. §. 56. l.] keletkezett menynyiségek taglalására.

Valamely *tömegnek szorzatát* bármily, tőle számított *távolság négyzetével* Euler kezdeményezésére *e tömeg tehetetlenségi nyomatéka (momentum inertiae; moment d'inertie, Trägheitsmoment, moment of inertia).*



5. ábra.

Közelebbről pedig, 5. ábra:

1. Az m-nek az O-tól való r távolság négyzetével való szorzata:

$$K_p = mr^2 = m(x^2 + y^2 + z^2). \quad . \quad (1)$$

az m-nek *O-ra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka*, melyet gyakran *polár-tehetetlenségi nyomatéknak* is neveznek, O lévén *a pólus* (az r-ek kezdete).

2. Az m-et rendre szorozva az X-, Y-, Z-tengelyektől való $\sqrt{y^2+z^2}$ s í. t. távolságai négyzeteivel, nyerjük a:

$$K_x = m(y^2+z^2), \quad K_y = m(z^2+x^2), \quad K_z = m(x^2+y^2) \quad . \quad (2)$$

szorzatokat, melyeket rendre az *m-nek az X-, az Y-, a Z-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékai*nak nevezik.

3. Ha az m-et rendre szorozzuk az YZ-, ZX-, XY-síkoktól való x, y, z távolságai négyzeteivel, akkor a származó

$$K_{yz}=mx^2; \quad K_{zx}=my^2; \quad K_{xy}=mz^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

szorzatok rendre az *m-nek az YZ-, ZX-, XY-síkra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékai.*

4. Ezen menynyiségek összszefüggésére nézve az (1)-, (2)-, (3)-ból:

$$K_p=K_{yz}+K_{zx}+K_{xy}=\tfrac{1}{2}(K_x+K_y+K_z). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

5. Gyakran a tömeg két coordináta szorzatával fordul elő:

$$D_{yz}=myz; \quad D_{zx}=mzx; \quad D_{xy}=mxy; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

e menynyiségeket az *m tehetetlenségi szorzatai*nak, vagy RANKINE szerint *deviátió-nyomatékok*nak nevezik.

Az itt felmerülő (1)—(3) nyomatékok értéke mindig *positiv*; *ezek nem vectorok*; közelebbről pedig:

a) Az mr^2 csak az m és az r *értékétől*, de *nem* az r *térbeli* irányától függ; ezért K_p *térbeli scálar.*

b) Az y^2+z^2 csak az m-nek az X tengelytől való távolságától, de nem ennek (az X-re mindig merőleges) irányától függ s í. t.; ezért a K_x az *YZ síkra vonatkozólag scálar* s í. t.

c) A K_{yz} az x előjelétől független s ezért az *X tengelyre vonatkozólag scálar* s í. t.

d) Az (5) alatti D menynyiségek előjele a pont helyzete szerint lehet positiv vagy negativ.

[Véges anyagi rendszerek ebbeli nyomatékai egyes tömegpontjai megfelelő nyomatékai összszegeivel egyenlők].

Jegyzet. A *tehetetlenségi nyomatékok jelölésére* gyakran nem az itt használt K, hanem az $\mathbf{I}$ betűt (az *inertia* kezdőbetűjét) használják.

36. §. *Az anyagi pont eleven ereje.*

A pont fél tömegének sebessége négyzetével való:

$$T=\tfrac{1}{2}mv^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

szorzatát a *pont eleven erejé*nek nevezik; az elnevezésre nézve v. ö. a 21. §. lábjegyzékét, 32. l.

E menynyiség alapján a megelőző §. (2), (3), (4) egyenleteihez analog módon írható:

$$T_x=\tfrac{1}{2}m(v_y^2+v_z^2); \quad T_y=\tfrac{1}{2}m(v_z^2+v_x^2); \quad T_z=\tfrac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2); \quad . \quad . \quad (2)$$

$$T_{yz}=\tfrac{1}{2}mv_x^2; \quad T_{zx}=\tfrac{1}{2}mv_y^2; \quad T_{xy}=\tfrac{1}{2}mv_z^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\Delta_{yz}=\tfrac{1}{2}mv_yv_z; \quad \Delta_{zx}=\tfrac{1}{2}mv_zv_x; \quad \Delta_{xy}=\tfrac{1}{2}mv_xv_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

E menynyiségek között szintén állanak fenn a

$$T=T_{yz}+T_{zx}+T_{xy}=\tfrac{1}{2}(T_x+T_y+T_z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

összefüggések és e menynyiségek szintén a megelőző §. *a), b), c)* pontjaiban jellemzett scalarikus jelleggel bírnak.

[E kifejezések egy m tömegű anyagi rendszerre nézve csak akkor érvényesek, ha e rendszer valamenynyi pontjának sebessége æquivalens, azaz, ha az translatórius mozgásban van, minden más esetben az (1) kifejezés a rendszer valamenynyi pontjára vonatkozólag képezendő és összegezendő].

Az eleven erő időbeli növekedése (1)-ből:

$$dT=m\frac{dv}{dt}\cdot vdt=m\frac{d^2s}{dt^2}\,ds, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

ez egyenlő a tömegnek az érintői gyorsulással és a befutott ívelemmel való szorzatával.

37. §. *Magasabbrendű eleven erők a dynamikában nem szükségesek.*

Az

$$\tfrac{1}{2}mr^2; \quad \tfrac{1}{2}mv^2; \quad \tfrac{1}{2}m\varphi^2;$$

szorzatok közül a kinetikában csak az első kettő talált alkalmazást; az első- és magasabbrendű gyorsulások négyzeteinek a tömeg felével való szorzatai a mechanikai jelenségek tanulmányozására és leírására eddig még nem voltak szükségesek.

38. §. *Munkaelem és munka analytikai kifejezése.*

A 18. §. definitiója szerint, 29. l., valamely pontra ható erő munkája egyenlő az erőnek s az iránya menti elmozdulási componensnek egymással való szorzatával.

1. Jeleljék P az erőt, ds az m pont elemi elmozdulását (pályájának ívelemét), mely a P-vel ε szöget képez, akkor $ds\cos\varepsilon$ az elmozdulás vetülete a P irányára és

$$dL=Pds\cos\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

azon *elemi munka* vagy *munkaelem* kifejezése, melyet a P erő az m-en a ds elmozdulás közben végez. Ez, miként azonnal önként kitünik, a választott coordináta-rendszertől független.

Ha az elmozdulás az erőre merőleges, akkor $\varepsilon=\frac{1}{2}\pi$ s az erő nem végezhet munkát; ez pl. bekövetkezik, egy vízszintes sima síkban gördülő golyó és a föld vonzó erejénél: mindaddig, míg a golyó a síkon marad, ez az erő nem végezhet munkát.

Továbbá, a munka, különben egyenlő elmozdulásnál a legnagyobb, ha az elmozdulás az erő mentén megyen végbe.

2. Jeleljék a, b, c a P-nek; α, β, γ a ds-nek (illetve az m pályája mindenkori érintőjének) iránycosinusait, X, Y, Z a P-nek; dx, dy, dz a ds-nek derékszögű vetületeit, akkor rendre:

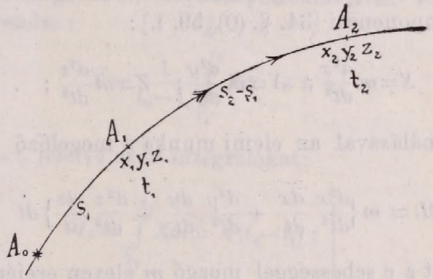
$$dx=\alpha ds;\quad dy=\beta ds;\quad dz=\gamma ds;\quad X=aP,\quad Y=bP,\quad Z=cP;$$
$$\cos\varepsilon=a\alpha+b\beta+c\gamma,$$

melyek helyettezésével az (1)-ből

$$dL=Xdx+Ydy+Zdz, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

mint az elemi munkának derékszögű coordináta-rendszerre vonatkozó, teljesen symmetrikus kifejezése.

A munka léptékes menynyiség [18. §. 2. pontja, 30. l.]; a (2) szerint ez három rész algebrai összege, melyek rendre az X, az Y, a



6. ábra.

Z erőcomponens végezte munkarészleteket fejezik ki. Ha valamely irány mentén nincs erőcomponens vagy nincs elmozdulási összetevő: a munka ezen irány menti része zérus.

Az m pont a ds ívelemet dt időelem alatt futotta be; miután t a független változó: $dx=\frac{dx}{dt}dt$ s í. t., úgy, hogy (2) írható:

$$dL=\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt. \quad \ldots\ldots \quad (2a)$$

3. Ha a pont $x_1y_1z_1$ helyből $x_2y_2z_2$ helyig haladt, azaz pályájában az A_1A_2 ívet írta le, 6. ábra, az m-re ható erők munkája az egyes ds ívelemek leírása közben végzett (2) elemi munkák összege, azaz

$$\int_1^2 dL=L_2-L_1=\int_1^2(Xdx+Ydy+Zdz). \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Ellenben a (3*a*)-ból

$$L_2 - L_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right) dt, \quad \ldots\ldots (3a)$$

hol t_1 és t_2 az s_1 és s_2 íveknek megfelelő időpontok.

[Mozgó anyagi rendszerre ható erők munkája az egyes anyagi pontokra ható erők végezte munkák összegével egyenlő; ez érvényes úgy a végtelen kicsiny (elemi), mint a véges elmozdulások esetében, tekintet nélkül a rendszer halmazállapotára és structurájára].

39. §. *Az eleven erő formális tétele szabadon mozgó anyagi pontra nézve.*

Az elemi munka kifejezése szabadon mozgó tömegpont esetében tisztán mathematikai úton transformálható az eleven erő megfelelő változásának kifejezésébe.

1. Ugyanis, a szabad m pontra nézve a mozgató P erő X, Y, Z derékszögű componensei [34. §. (0), 59. l.]:

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2}; \quad Y = m\frac{d^2y}{dt^2}; \quad Z = m\frac{d^2z}{dt^2}; \quad \ldots\ldots (1)$$

melyek felhasználásával az elemi munka a megelőző §. (2*a*) kifejezéséből:

$$dL = m\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right\} dt \quad \ldots\ldots (2)$$

2. Másrészt a v sebességgel mozgó m eleven erejének dt közben bekövetkezett változása:

$$d\mathrm{T} = d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) = \tfrac{1}{2}m\frac{d}{dt}(v^2)\,dt = \tfrac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} dt =$$

$$= m\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right\} dt. \quad \ldots\ldots (3)$$

3. Összehasonlítva (1)-et és (2)-őt a (3)-mal, azonnal nyerjük:

$$dL = Xdx + Ydy + Zdz = d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) = d\mathrm{T} \quad \ldots\ldots (4)$$

Szóval: *az m pontra ható erők végezte elemi munka egyenlő az m eleven erejének e közben bekövetkezett elemi változásával.*

Az A_1 és A_2 helyzetek közötti véges elmozdulásra nézve, 6. ábra e tétel:

$$L_2 - L_1 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 = \mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1 \quad \ldots\ldots (4a)$$

Ez az eleven erő tétele, melyet sokszor, de tévesen, az erély elvének is nevezik.

4. Válaszszuk a (4*a*) sebességeit úgy, hogy v_1 legyen zérus; v_2 ellenben a tetszőleges t időpillanatban érvényes v sebesség: akkor az egyenlet jobboldala az $\frac{1}{2}mv^2$-t, az m egész eleven erejét fejezi ki, baloldala pedig azt a munkát, melyet az m-re ható erők a közben végeznek, míg m sebessége 0-tól v-ig növekedett.

V. ö. az impulsiv mozgást, a köv. §. 4. pontját, 67. l.

[Az eleven erő tétele tetszőleges szabadon mozgó anyagi rendszerre is érvényes, mert az egész végzett munka és az egész eleven erő egyenlő az egyes anyagi pontokra vonatkozó ezen menynyiségek összegével].

40. §. *Impulsus. Impulsív erő.*

1. Valamely m tömegű szabad pontra hasson a tetszőlegesen változó P erő; ennek derékszögű componensei legyenek X, Y, Z, melyek a 34. §. (0) kifejezéseivel egyenlők. Az m a pálya A_1A_2 ívrészét t_2-t_1 időköz alatt futja be, 6. ábra, 63. l.; az erőcomponensek ezen közre vonatkozó időbeli középértékeit $\overline{X}$-el, $\overline{Y}$-al, $\overline{Z}$-vel jelöljük; értékük rendre:

$$\overline{X} = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} X dt \quad \text{s í. t.}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

miből, I_x-el s í. t, jelelve ezen integrálokat:

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \int_{t_1}^{t_2} X dt = \overline{X}(t_2-t_1); \\ I_y &= \int_{t_1}^{t_2} Y dt = \overline{Y}(t_2-t_1); \\ I_z &= \int_{t_3}^{t_2} Z dt = \overline{Z}(t_2-t_1). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

A (2) bal oldalai az *erőösszetevők időintegráljai*, melyek rendre a megfelelő erőcomponensek középértékeinek a hozzájuk tartozó időközzel való szorzataival egyenlők; e *szorzatokat az* illető *erőcomponensek impulsusai*nak nevezik. Mindegyik impulsus a megfelelő erőösszetevő irányába esik; belőlük egy eredő impulsus I képezhető; négyzete ugyanis:

$$I^2 = I_x^2 + I_y^2 + I_z^2; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

iránycosinusai

$$I_x : I; \qquad I_y : I; \qquad I_z : I.$$

2. Az impulsust a sebességekkel is fejezhetjük ki.

Ugyanis, az m szabadon mozogván:

$$\int_1^2 X dt = \int_1^2 m\frac{d^2x}{dt^2}\,dt = m\int_1^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)dt,$$

és így, ha v_1 és v_2 a sebességek az A_1 és A_2 helyzetekben, 6. ábra, 63. l. és v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}; v_{2x}, v_{2y}, v_{2z} ezek componensei, a (2)-ből:

$$I_x = mv_{2x} - mv_{1x}; \quad I_y = mv_{2y} - mv_{1y}; \quad I_z = mv_{2z} - mv_{1z}; \quad . \quad . \quad (4)$$

azaz: az impulsus vetületei egyenlők a megfelelő mozgásmenynyiségek vetületei különbségével és így maga az egész *impulsus* a (3)- és (4)-ből nem lehet más, mint az *m mozgás-mennyiségének teljes, irány és nagyság szerinti* $\overrightarrow{mv_2} - \overrightarrow{mv_1}$ *véges változása, azaz:*

$$\left.\begin{aligned} I &= m\{v_1^2 + v_2^2 - 2(v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} + v_{1z}v_{2z})\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= m\{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos(v_1, v_2)\}^{\frac{1}{2}} = \overrightarrow{mv_2} - \overrightarrow{mv_1} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

s ezen impulsus iránya egybeesik a $\overrightarrow{v_1}$ és $\overrightarrow{v_2}$ közötti vectorkülönbség $\overrightarrow{A_1A_2}$ irányával, 7. ábra.

3. Az A_1 helyzetet most úgy választjuk, hogy benne $t = 0$ és $v_1 = 0$ legyen, míg az A_2 most a tetszőleges A helyzet legyen, melyet az m pont t-kor elfoglal és melyben sebessége v, és ennek componensei v_x, v_y, v_z.

Ekkor (2)- és (4)-ből:

$$I_x = \int_0^t X dt = mv_x; \quad I_y = \int_0^t Y dt = mv_y; \quad I_z = \int_0^t Z dt = mv_z \quad . \quad . \quad (6)$$

és

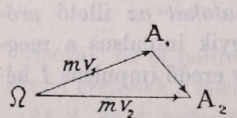
$$I = [I_x^2 + I_y^2 + I_z^2]^{\frac{1}{2}} = mv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

E szerint itt *az impulsus a mozgás-nagysággal, a mozgás-nyomatékkal egyenlő.*

3*a*. Ha a $P = [X^2 + X^2 + Z^2]^{\frac{1}{2}}$ erő még *változatlan irányú* is, akkor az *m pályája egyenesvonalú* és a (6)- és (7)-ből marad:

$$I = \int_0^t P dt = mv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7a)$$

A t idő, a mely közben a P erő az m-nek v sebességet tulajdonít, tetszőleges; de ha meghatározott mv nyomatékot akarunk létesíteni: a P-t annál nagyobbnak kell választanunk, mennél rövidebb a t időköz.



7. ábra.

Oly erőket, melyek igen nagy értékűek, igen rövid ideig működnek, de véges mozgás-változást létesítenek: *impulsív erőknek* szokás nevezni. Ilyenek a testek ütközésénél, a lőpor elégésénél, minden lökésnél, ütésnél s í. t. fellépő erők, melyek igen rövid ideig működnek, de igen nagy mérvű mozgás-változásokat létesítenek.

Bármi módon is származott legyen m pont mozgásállapota, mindig úgy tekinthető ez, mintha impulsiv erők létesítették volna.

4. A *munka*, melyet az m-re ható P erő a $t_2 - t_1$ közben végez, az eleven erő tétele szerint [39. §. (4*a*)]:

$$L_2 - L_1 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 = (mv_2 - mv_1)\,\tfrac{1}{2}(v_1 + v_2); \quad . \; . \; . \quad (8)$$

e szerint ez egyenlő a mozgásmenynyiségek algebrai különbségének és a kezdő s a végsebesség középértékének egymással való szorzatával.

Az egyes componensek végezte munkák:

$$\int_1^2 X dx = m \int_1^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{dx}{dt}\,dt = \tfrac{1}{2}m \int_1^2 d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = \tfrac{1}{2}mv_{2x}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{1x}^2 \quad \text{s í. t.}$$

azaz tekintettel (4)-re:

$$\left.\begin{aligned} \int_1^2 X dx &= I_x\,\tfrac{1}{2}(v_{1x} + v_{2x}); \\ \int_1^2 Y dy &= I_y\,\tfrac{1}{2}(v_{1y} + v_{2y}); \\ \int_1^2 Z dz &= I_z\,\tfrac{1}{2}(v_{1z} + v_{2z}). \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

4*a*. *Változatlan* irányú $P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ erőnél és *egyenesvonalú pályánál*, mint 3*a* pontban a (9)-ből:

$$\int_1^2 P ds = I\,\tfrac{1}{2}(v_1 + v_2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9a)$$

5. Ha I a (7)-ben írt impulsus, akkor a pont eleven ereje a tetszőleges t időpontban:

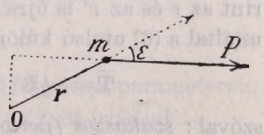
$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2}mv^2 = I\,\tfrac{1}{2}v \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

41. §. *A viriál. Az eleven erő időbeli középértéke.*

1. Legyen, 8 ábra, P a szabad m-re ható erő, r az m távolsága egy 0 pólustól (coordináta-kezdettől) és ε a P és az r positiv iránya közötti szög; ekkor Clausius kezdeményezésére a

$$\mathfrak{V} = Pr\cos(P, r) = Pr\cos\varepsilon \; . \; . \quad (1)$$

szorzatot a P erőnek az O pontra vonatkoztatott *viriáljának* nevezik.



8. ábra.

Ha x, y, z az m-nek O-ra vonatkoztatott derékszögű coordinátái és X, Y, Z a P-nek componensei, akkor:

$$\cos\varepsilon = \frac{X}{P}\cdot\frac{x}{r} + \frac{Y}{P}\cdot\frac{y}{r} + \frac{Z}{P}\cdot\frac{z}{r},$$

úgy, hogy az (1)-ből:

$$\mathfrak{V}=Xx+Yy+Zz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

2. E kifejezés a sebességek s a tömeg segélyével is tüntethető elő. Áll:

$$\frac{d^2(x^2)}{dt^2}=2\frac{d}{dt}\left(x\frac{dx}{dt}\right)=2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2x\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$x\frac{d^2x}{dt^2}=\tfrac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(x^2)-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \text{ s í. t.}$$

Szorozva m-el:

$$Xx=m\frac{d^2x}{dt^2}\,x=\tfrac{1}{2}m\frac{d^2(x^2)}{dt^2}-m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \text{ s í. t. } . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Képezve (3a)-val (2)-t és (1)-et

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{V}&=Xx+Yy+Zz=\tfrac{1}{2}m\frac{d^2}{dt^2}(x^2+y^2+z^2)-m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}\\ \mathfrak{V}&=Pr\cos\varepsilon=\tfrac{1}{2}m\frac{d^2}{dt^2}(r^2)-mv^2;\end{aligned}\right\}. \quad (3)$$

$$\mathrm{T}=\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{4}m\frac{d^2}{dt^2}(r^2)-\tfrac{1}{2}Pr\cos(P,\,r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

3. Szorozva a (4) egyenletet dt-vel, integrálva 0 és τ között és osztva τ időközzel, az eleven erő időbeli középértéke

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \tfrac{1}{2}mv^2\,dt=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\tau}\int_0^\tau (Xx+Yy+Zz)\,dt+\frac{m}{4}\,\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{d}{dt}\left(\frac{d(r^2)}{dt}\right)dt, \quad (5)$$

vagy, ha rövidség kedveért a középértékeket a menynyiségek fölé vont vízszintes vonallal jelöljük:

$$\overline{\mathrm{T}}=\overline{\tfrac{1}{2}mv^2}=-\tfrac{1}{2}\overline{(Xx+Yy+Zz)}+\frac{m}{2\tau}\{(rr')_\tau-(rr')_0\}. \quad . \quad . \quad (6)$$

4. Ha az m mozgása *szakaszos*, és ha pl. τ egy ily periodus tartama: akkor ennek leforgása után a mozgás *összes* jellemzői, e szerint az r és az r' is újra felveszik a periodus elején bírt értékeiket, miáltal a (6) utolsó különbsége zérus és

$$\overline{\mathrm{T}}=-\tfrac{1}{2}\overline{\mathfrak{V}} \quad \text{vagy} \quad \overline{\tfrac{1}{2}mv^2}=-\tfrac{1}{2}\overline{(Xx+Yy+Zz)}\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

szóval: *szakaszos (periodusos) mozgás eleven erejének időbeli középértéke egyenlő viriálja időbeli középértékének negativ felével.*

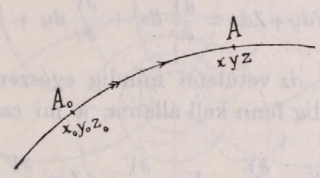
5. Ha a mozgás nem szakaszos, hanem tetszőleges és az r és r' mindíg, minden időre véges marad (azaz a mozgás az O-tól mindig véges távolságban foly le): akkor a τ időköz szakadatlan növekedésével a (6) utolsó tagja a zérus felé convergál és ekkor a 4-ben kimondott (7) tétel itt is érvényes.

42. §. *Erőfüggvény. Potentiál.*

Az anyagi pont számos mozgása olyan, hogy a pont két helyzete közötti ívrész leírása közben reá ható erők munkája a pályarész alakjától független és csak ezen ívrész két végpontja helyzetétől függ [v. ö. a 24. §. I. szakaszának Jegyzetét, 40. l.].

A tapasztalás kimutatta, hogy pl. a föld felülete közelében történő mozgásoknál a földnehézségi erő bír ily tulajdonsággal, hasonlóan az általános gravitatió erői, az electromos és a mágnességi erők s í. t.; továbbá, miként könnyű kimutatni, minden oly centrális erő, mely csak a távolság függvénye [Kinematika 75. §.].

1. Jeleljék, mint eddig X, Y, Z az m-re ható P erő componenseit, A_1 és A_2 az m két helyzetét és $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$ ezek coordinátáit (6. ábra, 63. l.); ha a P végezte munka csak az A_1 és A_2 helyzeteitől függ, akkor ez kifejezhető az



9. ábra.

$$L_2 - L_1 = V(x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

alakban, hol V a munkának a két helyzettől való függésének alakja.

A két helyzetre nézve most azt a közönséges feltevést teszszük, 9. ábra, hogy az $_1$ indexű bizonyos meghatározott helyzet, a $_2$ indexű pedig a pontnak folytonosan változó tetszőleges helyzete legyen, a mit az által is akarunk kifejezni, hogy az $_1$ index helyébe a $_2$ indexet írjuk, a $_2$ indexet pedig egészen elhagyjuk, úgy hogy (1)-ből:

$$L - L_0 = V(x_0, y_0, z_0, \quad x, y, z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Itt az L_0 állandó és az x_0, y_0, z_0 az időtől független parameterek, míg L és x, y, z az idő függvényei; e szerint a (2)-őt írhatjuk:

$$L = V(x, y, z) + \text{constans},$$

vagy, a V-t ezentúl mindig az A pont (xyz) helyzete függvényének tekintve:

vagy
$$\left.\begin{aligned} L &= V + C \\ dL &= dV. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

E szerint ily tulajdonságú erőknél az ezek végezte elemi munka mindig egyenlő bizonyos V függvény teljes növekedésével (differentiáljával).

Az m szabad pont lévén, reá az eleven erő tétele [39. §., 64. 1.] alkalmazható, miáltal:

$$\left.\begin{aligned} d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) &= d'\mathrm{T} = dV \\ \text{vagy} \quad \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 &= \mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1 = V_2 - V_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

2. A V függvénynek még más igen jellemző tulajdonsága van. Ugyanis, a pálya ds ívének leirása közben végzett elemi munka kifejezését [38. §. (2)] és a $V(x, y, z)$-nek e közben bekövetkezett dV teljes növekedését a (3) szerint egymással egyenlővé téve, nyerjük:

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz.$$

Itt ds és dx, dy, dz vetületei mindig egészen tetszőlegesek, de az egyenletnek mindig fenn kell állania, a mi csak úgy lehetséges, ha rendre

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Szóval: az m-re *ható erő componensei a V-függvénynek a megfelelő coordináták szerint képezett első differentiálquotienseivel rendre egyenlők.*

E sajátságánál fogva a V-t ezen erő *erőfüggvényének* nevezik.

Abban az esetben, ha az erő a Newton-féle gravitátió (vagy a Coulomb-féle mágnességi és electromos távolbahatás) ereje, akkor az erőfüggvényt *potentiál*nak nevezzük; de legtöbb esetben az erőfüggvény általában véve a potentiál szóval is lesz jelölve.

3. A ds tetszőleges irányú ívelem; iránycosinusai,

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}; \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}; \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}$$

és így az $(\alpha\beta\gamma)$ irányú ds menti erőcomponens:

$$X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{ds};$$

azaz:

$$P_{\alpha\beta\gamma} = P\cos(P, ds) = \frac{\partial V}{\partial s}; \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

szóval: az m-re ható erőnek bármily ds iránymenti componense egyenlő az erőfüggvénynek ez iránymenti coordináta (itt az s) szerint képezett első differentiál-quotiensével.

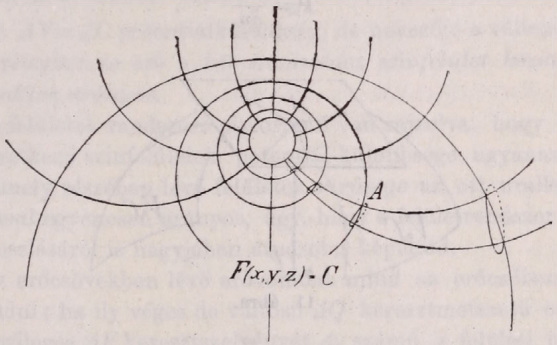
43. §. *Az aequipotentiális (szin-, niveau-, egyensúlyi-) felületek és erőgörbék. Erőcsövek, erőfonalak.*

A természetben fellépő erők mindenütt végesek és folytonosak; e szerint a $V(x, y, z)$ erőfüggvénynek a coordináták szerint képezett differentiálquotiensei szintén ilyenek.

Maga a V, vagy legalább változó része a tapasztalás szerint egyértékű függvény.

a) Mindazok a térbeli pontok, melyekben a V értéke ugyanaz, pl. C, egy felületen fekszenek, melynek egyenlete:

$$V(x, y, z) - C = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$



10. ábra.

E felületet *egyenlő potentiál-felület*nek vagy *potentiálfelület*nek nevezik, mert jellemző vonása épen az, hogy az erőfüggvény minden pontjában ugyanaz; a C e felület egyik parametere.

Ha V más, pl. C_1 értékű, az előbbivel egyenlő természetű æquipotentiál-felületet nyerünk, melynek parametere C_1 és mely már csak azért sem mutathat közös pontot a C parameterü felülettel, mivel a V a coordinátáknak egyértékű függvénye.

Szerkesztve e szerint a V-nek $C_1, C_2, \ldots$ szabályos értéksorozatához tartozó potentiálfelületeket: e felületeknek szabályos rendszerét nyerjük, mely azt az egész tért, hol a V értéke a zérustól különbözik, rétegszerű (héjszerű) részekre osztja (10. ábra).

b) A $V = C$ potentiálfelület tetszésszerinti A pontjából e felületen számtalan s görbét húzhatunk, melyeknek az A-ból induló ds elemei mind a felülethez az A-ban húzott érintősíkjában fekszenek, 11. ábra. A felület természete szerint a V minden pontjában ugyanaz

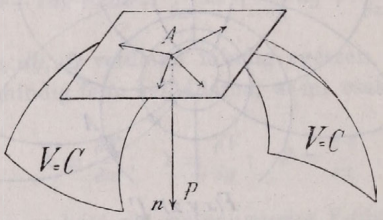
lévén, a nevezett, a tangentiális sikban fekvő valamenynyi ds ív mentén a V nem változik, azaz, ezekre nézve $\frac{\partial V}{\partial s} = 0$.

E szerint az A-ban lévő m-re ható és V erőfüggvénynyel biró P erőnek olyannak kell lennie, hogy a potentiálfelülethez az A-ban húzott érintősík mentén semmiféle componenssel nem bírhat; ez pedig csak úgy lehetséges, ha a P *erő e felület normálisá*ba esik, 11. ábra.

Röviden: *Az erőfüggvénynyel biró erő mindenütt merőleges a potentiálfelületre.*

Jelelve n-nel e felület normálisát:

$$P = \frac{\partial V}{\partial n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$



11. ábra.

[Valamely folyadék felülete akkor marad egyensúlyban, ha a reá ható erők mindenütt merőlegesek a felületre, azaz, ha erre mindenütt *merőleges nyomás* hat, ellenkező esetben a folyadék felületi részei, gördülékenységüknél fogva mozgásba jönnek. Az egyensúlyban lévő folyadék felületére e szerint épen úgy, mint a potentiálfelületekre a ható erő mindenütt merőleges, miért is ezen utóbbi felületeket gyakran *egyensúlyi-, niveau-,* vagy *(fel-) szinfelületek*-nek nevezik].

c) Húzva a tetszőleges A-ból a potentiálfelületeket mindenütt merőleges metsző görbét [e felületeknek merőleges trajectoriáját], akkor e görbéhez, ennek bármely pontjában húzott érintő mindenütt merőleges arra a szinfelületre, melyet a görbe e tekintetbe vett pontban metsz, 10. ábra.

Az erő pedig szintén mindenütt merőleges lévén felületre: a nevezett görbe bármely pontjában ható erő a görbe mindenkori **érintőjébe** esik; ezért e görbét helyesen *erőgörbé*nek vagy *erővonal*nak nevezik.

A felület minden pontjából húzhatunk ily erővonalat, úgy, hogy a szinfelületek és erővonalak egész rendszerét nyerjük, 10. ábra.

Ha a szinfelületek valamelyikén Δf felületi elemet választunk és kerületének minden pontjából kiindulólag meghúzzuk az erővonalakat, ezek egy csőalakú, kürtszerű térrészt határolnak, melynek keresztmetszete a színfelületek positiv görbületi sugarai felé kisebbedik, 10. ábra.

E tereket, melyek minden alkotója a szinfelületekre merőleges, *erőcsövek*nek nevezik, vagy, ha keresztmetszetük végtelen kicsiny: *erőfonalak*nak.

d) Legyen $\Delta V = \Delta C$ egymásra következő két szinfelület kicsiny, de véges potentiálkülönbsége, és Δn e felületek egyes elemeinek egymástól való (normális) távolsága. A két felület határolta rétegben a $P = \frac{\partial V}{\partial n}$ erőnek *közelítő* értéke a $\frac{\Delta V}{\Delta n}$ viszony, melynek számlálója az állandó $\Delta V = \Delta C$ potentiálkülönbség, de nevezője a változó Δn; e szerint e rétegben az erő a *két szomszédos szinfelület közötti távolsággal fordítva arányos.*

Ha e felületek rendszere olyformán van rajzolva, hogy az egymásra következő szinfelületek potentiál-különbsége ugyanaz, akkor a tér valamely részében lévő felületek *sűrűsége* az ott uralkodó *erő nagyságával* egyenesen arányos, úgy, hogy e felületrendszer az erő térbeli eloszlásáról is nagyjában átnézetes képet ád.

e) Az erőcsövekben lévő erővonalak mind az erőcsőben tartoznak maradni; ha ily véges de változó ΔQ keresztmetszetű cső valamely tetszőleges ΔF keresztszelvényét $\Delta \nu$ számú q felületi elemekre bontjuk, és mindegyik ily elemre erőfonalat szerkesztünk: ezek $\Delta \nu$ *száma* a tekintetbe vett véges erőcső bármely keresztmetszetére nézve ugyanaz marad.

A $\Delta \nu$ állandó számnak a változó ΔQ keresztszelvényhez való viszonya határértékét, σ-át, az *erőfonalak sűrűségé*nek nevezik:

$$\sigma = \lim \frac{\Delta \nu}{\Delta Q} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

f) A ΔF-re emelt erőcső ΔQ keresztmetszete *igen kicsiny* és *változó;* de e változás és a mindenkori ΔQ-ban felmerülő P erőre nézve Green-nek egy (később Gauss-tól ujra felfedezett) tétele szerint a cső egész kiterjedésében áll:

$$\Delta Q \,.\, P = \text{állandó}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

azaz egy és ugyanazen erőcsőben az erő a mindenkori keresztmetszettel fordítva arányos, mely tétel azonban csak a távolság négyzetével fordítva arányosan ható erők esetében áll.*

* V. ö. pl. Hoór Mór: Az electromosság és a mágnesség elmélete 22—25. ll., Budapest 1893.

g) Igen kicsiny ΔQ esetében a (4)-ből $\sigma \,.\, \Delta Q$=állandó; ezt összekapcsolva az (5)-el és K-val egy állandó tényezőt jelelve:

$$P = K \,.\, \sigma, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

azaz, az erő mindenütt az erőfonalak sürűségével arányos.

További tárgyalások a potentiálelmélet keretébe tartoznak.

44. §. *Az energia elve egy pontra nézve.**

1. Az anyagi pont mindig csak bizonyos, a körülmények adta határok között mozoghat.

Így valamely a föld felülete közelében elhajított test csak bizonyos magasságig emelkedhetik s azután a földre esik viszsza; e szerint a mozgás tartamára a pont magassága csak bizonyos határokon belül változhatik. Ilyféle korlátozás minden pontmozgásra nézve áll fenn [v. ö. a 22. §-ot, 34. l.].

A pontra ható erők törekvése mindig oda irányul, hogy a pontot saját (positiv) irányuk mentén mozgassák, szóval, hogy *positiv* munkát végezzenek s csak valamely mozgási akadály vagy kényszer hiusíthatja meg ebbeli tötekvéseiket.

Már a 21. §.-ban *helyzeti erélynek* neveztük azt a munkát, melyet a pontra ható erők a közbeu végeznek, a mialatt a pont egy tetszőleges helyzetből abba a határhelyzetbe mozog, a melyen túl már nem mozoghat s így az erők már több munkát nem végezhetnek; szóval, ez az erély a pont helyzeténél fogva benne lévő *munkaképesség (a tömegpontnak potentiális energiája)*. Másrészt a tömegpont eleven ereje ennek *mozgási erélye (kinetikus energiája)*.

2. Jelöljük $_0$ indexxel az m azon említett helyzetét, melyen túl a reá ható erők már nem végezhetnek positiv munkát és legyenek V_0, $\mathbf{T}_0$ az e helyzetre vonatkozó erőfüggvény és eleven erő, melyek *meghatározott értékek*.

A munka, melyet az m-re ható erők a közben végeznek, a mi közben az m egy tetszőleges helyzetből az említett határhelyzetbe mozog, a 42. §. (3) és (4) egyenletei szerint:

$$L_0 - L = V_0 - V = \mathrm{T}_0 - \mathrm{T}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Ez a megelőző definitió szerint az m helyzeti erélye a tetszőleges (xyz) helyzetben s ezt $\mathbf{E}_h$-val jelöljük:

$$\mathbf{E}_h = V_0 - V = \mathrm{T}_0 - \mathrm{T} \ldots \ldots \ldots \quad (1a)$$

---

* A 12. §. kifejtései szerint, 19. l., a hatás és viszszahatás elvénél fogva a pontra ható erőknek a ponton kívül lévő viszszahatások felelnek meg s az energia tárgyalásánál mindig anyagi *rendszer* jő tekintetbe, mely legalább is két tömegpontból áll. A szöveg az energia tételének nem teljes alakjával, hanem a csak egy pontra vonatkozó energiával foglalkozik.

Másrészt a m eleven ereje, mely ennek $\mathbf{E}_m$-mel jelölendő mozgási erélye:

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{T} = \tfrac{1}{2} m v^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1b)$$

A pont egész dynamikai energiája a kétféle energia összegével egyenlő [21. §. (3)], mely itt (1a)- és (1b)-ből:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_h + \mathbf{E}_m = \mathbf{T}_0 = \text{constans}, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

ez pedig *állandó* és egyenlő a pont legnagyobb eleven erejével.

Ez a dynamikai erély megmaradásának tétele egy pontra nézve; miként látjuk, ez az eleven erő tételéből mindig következik, ha a pontra ható erők erőfüggvénynyel birnak.

3. Az egész erélyt az (1a)- és (2)-ből még következőleg írhatjuk:

$$\mathbf{E} = V_0 - V + \mathbf{T} = \text{constans}.$$

Miután az $\mathbf{E}$-n kívül a V_0 szintén állandó, az $\mathbf{E} - V_0$ különbsége rendesen H-val jelölik, mely e szerint állandót jelent:

$$\mathbf{T} - V = H^* = \text{állandó}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

hol e megállapodás s a (2) szerint:

$$H = \mathbf{E} - V_0 = \mathbf{T}_0 - V_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3a)$$

Az energia elvének ezen (3) alakja kifejezi, hogy a *pont eleven erejének és erőfüggvényének különbsége állandó;* de e különbség a (3a) szerint pont egész energiájától $\mathbf{E}$-től a V_0 állandóval különbözik.

4. Példák.

I. A föld felülete közelében vertikálisban mozgó m-re ható földnehézségi erő egyenlő az m-nek mg súlyával és függőlegesen lefelé van irányítva. Az m helyzetét vonatkoztassuk egy derékszögű coordinátarendszerre, melynek kezdete a földfelületen van és Z tengelye függélyesen fölfelé van irányitva.

Az m-re ható, itt állandónak vehető erő componensei itt:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Y = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = Z = -mg,$$

melyekből

$$V = -mgz + \text{const.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

következik.

Az m határhelyzete az, mikor a földfelületre, érkezik sebessége ekkor v_0; a föld áthatatlansága a vonzásnak további követésében aka-

---

* Úgy látszik, Hamilton vezette be először ezen, gyakran Hamilton-féle függvénynek nevezett menynyiséget, melyet szerzője kezdőbetűjével H-val jelelnek [v. ö. a 25. §. 6. pontját, 45. l.].

dályozza; ez erő e $z=0$ helyzeten túl nem végezhet már positiv munkát. Az m kétféle dynamikai erélye (1a)- és (1b)-ből:

$$E_h = V_{z=0} - V = mgz; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$E_m = \tfrac{1}{2}mv^2$$

és így összes energiája:

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgz. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Alkalmazva (6)-ot az alsó határhelyzetre, ott $v=v_0$, $z=0$ és

$$E = \tfrac{1}{2}mv_0 = T_0;$$

ellenben a felső határhelyzetben $v=0$, $z=z_1$, miáltal

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 = 0 + mgz_1; \quad z_1 = \tfrac{1}{2}v_0^2 : g.$$

Ezen két határhelyzet között lefolyó mozgásra érvényes a (6), mely a 21. §. (4) egyenletével, 35. l. teljesen egyező.

II. Egy m tömegű pont mozog egy homogén (vagy homogén concentrikus héjakból álló) M tömegű a sugarú gömb közelében.

Az M-en kívül lévő m-re gyakorolt Newton-féle vonzás egyenlő avval, mely fennállana, ha az M egész tömege középpontjában összpontosítva volna; ha f a gravitátió állandója,* x, y, z az m coordinátái, ezek kezdete a gömb középpontja és $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, akkor e vonzás componensei:

$$X = -f\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{x}{r}; \quad Y = -f\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{y}{r}; \quad Z = -f\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{z}{r};$$

az elemi munka:

$$dL = Xdx + Ydy + Zdz = -f\frac{Mm}{r^3}(xdx + ydy + zdz) = -f\frac{Mm}{r^3}\tfrac{1}{2}d(r^2)$$

$$= -fMm\frac{dr}{r^2} = d\left(f\frac{Mm}{r}\right).$$

E szerint, ha V e vonzás erőfüggvénye, tekintettel a 42. §. (3) egyenletére:

$$dV = d\left(f\frac{Mm}{r}\right); \quad V = f\frac{Mm}{r} + \text{constans.}$$

Ha az additionális constanst zérussal egyenlővé teszszük, akkor

$$V = f\frac{Mm}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

az M-nek az m-re vonatkozó Newton-féle erőfüggvénye *(potentiálja)* az r távolságban.**

---

* Ez a C. G. S. rendszerben: $f = 0{\cdot}0000000663\ \frac{(\text{cm})^3}{\text{gm.}\,(\text{sec})^2}$; v. ö. a 134. §-ot.

** A potentiált rendesen az m vonzott test tömegegységére szokás vonatkoztatni és f-et az M-ben tartalmazottnak tekinteni; úgy, hogy $\frac{M}{r}$ az M potentiálja valamely középpontjától r távolságú pontban.

Ugyanehhez az eredményhez közvetetlenül is eljuthatunk, ha megjegyezzük, hogy a 42. §. (5) tétele szerint

$$X=\frac{\partial V}{\partial x};\quad \text{azaz itt:}\quad \frac{\partial V}{\partial x}=-f\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{x}{r}\ \text{s í. t.,}$$

avagy, mivel

$$-\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\ \text{s í. t.,}$$

nyerjük: $V=f\frac{Mm}{r}$, az addendus állandótól eltekintve.

Itt a határhelyzet, melyben a vonzó erő már nem végezhet positiv munkát, az, mikor az m az a távolságban, azaz az M felületén van; ekkor az M-nek áthatatlansága megakadályozza az m-et a vonzási erő további követésében s az erő az m ezen helyzetében nem végezhet már positiv munkát.

Az m helyzeti energiája, mozgási energiája és egész erélye rendre:

$$\mathrm{E}_h=V_a-V=fMm\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right);\quad\ldots\ldots\quad(8)$$

$$\mathrm{E}_m=\mathrm{T}=\tfrac{1}{2}mv^2;$$

$$\mathrm{E}=fMm\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)+\tfrac{1}{2}mv^2\ldots\ldots\quad(9)$$

Jegyzet. A (9) alak akkor alkalmazandó, ha az m pont mozgása olyan, hogy az M felületére érkezhetik, ez a rendes eset; de az m mozgása olyan is lehet, hogy az meghatározott két r_1 és r_2 távolság között mozoghat csak, ez pl. a nap körül ellipsis-pályában keringő bolygó esete. Ha $r_1<r_2$, akkor bármely r e kettő között fekszik és a (6) irandó:

$$\mathrm{E}=fMm\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)+\tfrac{1}{2}mv^2\ldots\ldots\quad(10)$$

Ha $r=r_1$, a bolygó a napközelben van és v_1 a legnagyobb sebessége; ekkor (10)-ből

$$\mathrm{E}=\tfrac{1}{2}mv_1^2=\mathrm{T}_1,$$

mely megegyezésben a (2)-vel: az m tömegpont legnagyobb eleven ereje.

A (10) a parabola- és hyperbola-pályákra nézve is érvényes; ezeknél a legnagyobb távolság végtelen nagy.

45. §. *Anyagi pontnak mozgása ellenálló közegben.*

Valamely test helyzetét a valóságban csak úgy változtathatja, ha mozgása útjában lévő testeket vagy testrészeket helyükből eltávolítja: szóval ha magának az utat a környező testeken vagy közegeken keresztül egyengeti.

Ha az útját álló test oly szerkezetű és elhelyezésű, hogy rajta nem haladhat keresztül: akkor ez *akadályt* képez [13. §. 2. pontja, 21. l.], mely a mozgást megszünteti; ha a test egy másik test felülete mentén

mozoghat csak: mozgásának pályája bizonyos geométriai feltételnek vagy feltételeknek tartozik eleget tenni [u. o.] s ezenkívül a mozgó test *surlódik* a másikhoz, miáltal a mozgással ellentett irányú surlódó erő keletkezik [13. §. 3. pontja, 22. l.].

1. Ha a *test* mozgása csak annak a feltételnek van alávetve, hogy az *cseppfolyós vagy légnemű közegben történik:* akkor az útjában eső közegrészeket helyükből kiszorítja vagy részben maga előtt tolja és oldalaival az áthaladt a közeg részeihez surlódik.

E hatások a test mindenkori mozgásával ellentett irányúak; *eredő hatásuk*at közmegegyezés szerint a *közeg ellenállás*ának nevezik.

Tapasztalati törvényei általánosságban véve nem egyszerűek; ez irányban tett igen számos s legkülönbözőbb kisérletek szerint az ellenállás a mozgó test alakjától (felületétől), haladó és forgási sebességétől, alakjának a haladó sebesség irányához való relativ fekvésétől és az ellenálló közeg természetétől függ. E függésnek teljesen szabatos kiderítése valószinűleg soha sem fog sikerülni, mert az ellenállást sokféle körülmény összszhatása okozza; de közelítő, empirikus (tapasztalati) kapcsolatok már nagy számban felállíttattak.

2. Kicsiny méretű, *anyagi pontnak* tekinthető testre nézve az ellenállásbeli viszonyok igen lényegesen egyszerűbbek: ugyanis itt a test alakja, felülete és forgási sebessége nem bírhat befolyással és az ellenállás csakis a translatórius sebesség függvénye lehet.

a) Közelebbről pedig, *igen csekély* vagy legalább a földfelületi mozgásokhoz képest *csekély sebességek*nél az ellenállás a tapasztalás szerint igen nagy közelítéssel e *sebesség első hatványával arányosnak vehető* (ez tengelyük körül a levegőben vagy más gázokban lassan forgó vagy lengő *testek* szenvedte ellenállásra nézve szintén érvényes).

b) Középsebességeknél, milyenekkel kisebb sebességű lövetek a levegőben mozognak (vagy vasuti vonatok és gőzösök haladnak) az ellenállást a *sebesség négyzetével,* még nagyobb sebességeknél *harmadik hatványá*val arányosnak veszik, illetve az a sebességnek még bonyolodottabb függvénye.

3. A mozgás formális egyenleteinek felállítása igen könnyű.

Jelelje S a közeg-ellenállást, mely a mindenkori sebességgel ellentett irányú; legyenek X, Y, Z az m-pontra az ellenállástól függetlenül kívülről ható erő (vis impressa) componensei, továbbá a tényleges pálya tangensének, normálisának és binormálisának iránycosinusai rendre: α, β, γ; λ, μ, ν; f, g, h; végre ϱ görbületi sugara, hol s lévén a független változó [34. §. (5) vagy Math. Rep. 75. §. (2) és (4)]:

$$\alpha = \frac{dx}{ds} \text{ s í. t.}; \quad \lambda = \varrho \frac{d^2x}{ds^2} \text{ s í. t.}; \quad f = \varrho \left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right) \text{s í. t.} \quad (1)$$

Hozzákapcsolva a surlódásbeli erő $-\alpha S$, $-\beta S$, $-\gamma S$ componenseit a független erő megfelelő componenseihez [34. §. (0)]: az m-re mint most már teljesen szabadon mozgónak tekinthető pontra ható mozgató vagy gyorsító erőcomponensek:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X-\alpha S;\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y-\beta S;\quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z-\gamma S. \quad . \quad . \quad (2)$$

Ha pedig a mozgást a tangensre, normálisra és binormálisra vonatkoztatjuk, a 34. §. (4) egyenleteiből itt:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = \alpha X+\beta Y+\gamma Z-S;\quad m\frac{v^2}{\varrho} = \lambda X+\mu Y+\nu Z;\quad 0=fX+gY+hZ. \quad (3)$$

Ismert adatok az X, Y, Z, m, továbbá az S-nek a v-től való függésének függvényalakja; ellenben ismeretlenek az x, y, z s az ezekből az (1) vagy a 34. §. (5) kifejezései szerint képezendő α, β, γ, λ, μ, ν; f, g, h iránycosinusok, miáltal (2) az x, y, z és t közötti differentiál egyenlet-rendszerbe megyen át, mely csak a legegyszerűbb esetekben fejthető meg teljesen; legtöbb esetben közelítő módszereket kell alkalmazni.

4. Úgy a *surlódással*, mint az *ellenállással történő mozgások a meg nem fordítható* mechanikai jelenségekhez tartoznak, ugyanis itt a tisztán dynamikaiakon kívül még *hőbeli, thermikus* változások állanak be, míg a hőből nem állítható elő közvetetlenül surlódás és mozgás; ezért az eleven erő s az energia tételei itt következőleg módosulnak [39 és 44. §§.].

a) Szorozva a (2) egyenleteit rendre $dx = \frac{dx}{dt}\,dt = \frac{dx}{ds}\,ds$-vel jük s í. t.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}\,dt = Xdx - \frac{dx}{ds}\cdot\frac{dx}{ds}Sds \text{ s í. t.,}$$

ezen egyenletek összegéből a 39. §. mintájára és jelölésével:

$$d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)=Xdx+Ydy+Zdz-Sds,$$
$$dL=d\mathrm{T}+Sds; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

azaz, a független erők munkája az eleven erő növelésére és az ellenállás legyőzésére fordíttatik; a munka ezen második része átalakul meleggé vagy hangmozgássá, szél- vagy folyadék-mozgássá s í. t., mely utóbbi mozgások, magukra hagyatva, lassan megszűnnek és szintén hővé válnak.

b) Ha az m-re ható független erők erőfüggvénynyel bírnak, akkor munkájuk [42. §. (3)] $dL=dV$ s akkor (4)-ből

$$\mathrm{T}-V+\int Sds=\text{constans}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

mely az energia elvének itt érvényes alakja [44. §. (3)].

A (4) és (5) egészen analog a surlódó mozgás megfelelő tételeihez [51. §. (5) és (6), 91. l.].

2. Az anyagi pont kényszermozgásának általános tárgyalása.

KÉNYSZER ÉS KÉNYSZERERŐ.

46. §. *Az anyagi pont kényszereiről és kényszererőiről általánosságban.*

A dynamika általános része 13. §-ában, 22. l., és az anyagi pont statikájában [28 és 29. §§.] kimutattuk, hogy minden akadály, kényszer vagy bármily mozgási feltétel alkalmas erők által helyettesíthető, melyeknek a feltételektől függetlenül működő erőkhöz való kapcsolása által az anyagi pontot szabadon mozgó ponttá teszszük, melyre a megelőző §§-ok eredményei közvetetlenül alkalmazhatók.

Ha a kényszer csak a mozgás-szabadság fokainak megszorításában áll, akkor a *pont előírt felületen* vagy *előírt görbén surlódás nélkül tartozik mozogni*, 28. §.

De a feltétel még abban is állhat, hogy a tömegpont csak *surlódással* vagy pedig *ellenálló közegben* mozog, [29. §. és a megelőző §.]; sőt még abban is, hogy a pontmozgást létesítő erőkhöz még más, kívülről származó erők járulnak, melyek e mozgást lényegesen más jellegűvé teszik, mint pl. a kényszerített rezgések esetében [198—201. §§.].

Kimutatjuk, hogy az előírt pályán vagy felületen surlódás nélkül történő mozgásnál a feltételi erő [épen úgy, mint a feltételi gyorsulás, Kinematika 89*a* és 130. §§.] mindig merőleges a pályára, de más értékű, mint a nyugvó pontnál, 28. §.; de ha a mozgás surlódással történik (esetleg még ellenállással is), akkor a mindenkori pályaérintő mentén, a sebességgel ellentett irányú surlódásbeli (illetve ellenállásbeli) erő lép még az előbbi kényszererőkhöz, úgy, hogy az eredő kényszererő a pálya mindenkori érintőjével *ferde* szöget képez.

A pont szabad mozgását zavaró többi külső behatások feltételi erőire nézve hasonló megfontolások érvényesek.

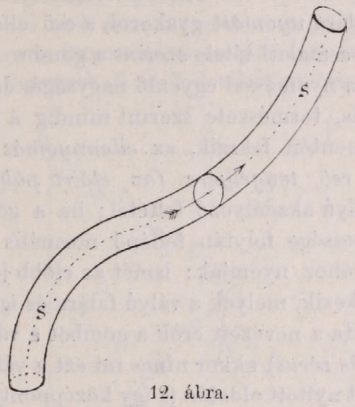
a) *Előírt szilárd pályán surlódás nélkül és surlódással történő mozgás.*

47. §. *Az előírt pályán való mozgásáról általánosságban.*

Az anyagi pontnak előírt pályán való mozgása feltételét (kényszerét) a 28. §. 2. pontjában is említett, szilárd falú, egyenletes kör-

keresztmetszetű cső által érzékíthetjük, melyen belül a tömegpont kis gömböcske alakjában mozoghat. A gömb középpontja egy meghatározott görbén, a cső tengelyén kénytelen maradni s ez a kényszer kifejezése 12. ábra.

Legtöbb esetben a pontnak az előírt pályán való mozgására nézve még közelebbi feltételek és megszorítások vannak adva: így ha a pálya *sík*, hogy a pont (tulajdonképen kis gömböcske) a pálya *homorú* vagy pedig *domború* oldalán tartozik maradni; térbeli pályánál, hogy a rajta gördülő vagy sikló kis gömböcske középpontján és a mindenkori ívelemen átfektetett sík (az érintő sík) mily szöget



12. ábra.

képez a pálya mindenkori osculáló síkjával; ez utóbbi különösen akkor veendő tekintetbe, ha az előírt pálya bizonyos felületen fekszik melynek egyik oldalán a mozgó pont maradni tartozik.

Ilyenkor az előírt pálya kényszer gyanánt és akadály gyanánt is szerepel; ugyanis a mozgó pont a pálya mentén, annak egyik oldalán mozoghat csak s addig a pálya kényszer, vagy pedig, ha a sebesség bizonyos határt túllépte, a pont elhagyja a pályát és a pálya egyik oldalától számított térben szabadon mozoghat; ez különösen oly felületeken fekvő pályáknál áll, mely felületek egyik oldalán kénytelen a pont mozogni: ekkor a pálya akadályozó feltétel.

Mindezekben az esetekben a kényszer érzékítésére elegendő egy fél-cső, azaz egy félkör-keresztmetszetű *vályú*, 13. ábra, melyben a tömeggömböcske, a vályú tengelye (az előírt pálya) mentén mozoghat, s mely vályú medre a pályának mindig azon oldalán van, a melyen a mozgás végbe megyen, úgy hogy a pont, ha sebessége bizonyos határértéket elért, e vályút a nyitott oldalán minden akadály nélkül elhagyhatja.

A továbbiakban általánosságban megkülönböztetjük 1) az előírt pályán surlódás nélkül történő mozgást, mely mindig csak abstractió, legjobb esetben kisebb vagy nagyobb mérvű megközelítése a valóságnak; 2) a surlódással történő ily mozgást, mely a tényleges viszonyoknak felel meg.

1. Ha a cső, illetve a vályú belső fala és a gömböcske felülete egészen *sima:* a gömböcske sikló és gördülő mozgása semmiképen nincs akadályozva. A cső csak anynyiban képez kényszert, hogy fala áthatatlanságánál fogva nem engedi a gömb középpontjának a cső tengelyétől való eltávolodását. Ha a gömb, kívülről reá ható erők vagy saját sebessége folytán a csőtől való eltávozás törekvésével bír, akkor a cső falára *nyomást* gyakorol, a cső ellenben, a viszszahatás tapasztalati tétele szerint a gömbre *ellennyomást* fejt ki, mely a nyomással egyenlő nagyságú, de ellentett irányú.



13. ábra.

A nyomás, természete szerint mindig a cső falának normálisa mentén fekszik, az *ellennyomás* szintén; ezek *az erők e szerint a cső tengelyére (az előírt pályára) mindenütt merőlegesek.* A vályú akadályozó feltétel; ha a gömbre ható külső erők s a gömb sebessége folytán fellépő normális erőcomponens a gömböt a vályú falához nyomják: ismét az előbb jelzett nyomás és ellennyomás keletkezik, melyek a vályú falára és így tengelyére szintén merőlegesek. Ha a nevezett erők a gömböt a vályúhoz nem szorítják (ha a *nyomás zérus*), akkor nincs mi ezt a vályúban tartaná s a gömböcske a vályút nyitott oldalán (s így középpontja az előírt pályát) elhagyhatja.

A nyomás ébresztette, a sebességre merőleges ellennyomás képezi a mozgás ezen fajánál felmerülő kényszererőt.

2. A valóságban minden sikló vagy gördülő mozgás *surlódással* megy végbe; ez a mindenkori sebesség irányával ellenkező mozgató erővel egyenértékű, mely a tapasztalás szerint a mozgó pont (gömböcske) által az előírt pályára (a kényszer falára) gyakorolt *nyomással* arányosnak vehető; de ez az arányossági tényező általában véve a sebesség függvénye, v. ö. az 50. §.-ot.

E surlódásbeli erő az ellennyomáshoz járulván az egész kényszererő most a pálya mindenkori érintőjével (a sebességgel) ferde és pedig *tompa* szöget képez.

48. §. *Az előírt sima pálya nyugvó síkbeli görbe. A mozgás egyenletei. A nyomás.*

Legyen MN az előírt, adott sík pálya, melyet az XY coordinátasíkban fektetjük, 14. ábra; jeleljék α, β e görbe érintője-, λ, μ nor-

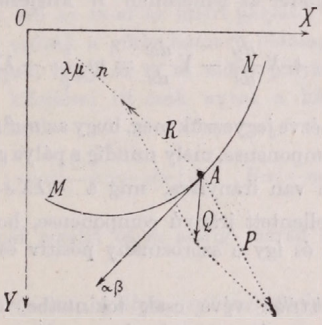
málisa irányconsinusait, s ívét, ϱ görbületi sugarát: akkor ezekre nézve [Math. Repertórium 75. §. (1)—(5) és 55. §. (6)]:

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha=\dfrac{dx}{ds}; & \beta=\dfrac{dy}{ds}; & \lambda=\varrho\dfrac{d^2x}{ds^2}; \quad \mu=\varrho\dfrac{d^2y}{ds^2}; \\ \alpha\lambda+\beta\mu=0; & & \lambda=-\beta; \quad \mu=+\alpha^* \\ \left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2=\dfrac{1}{\varrho^2}=\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2:\left(1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right)^3 & & \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

I. Az m tömegpont a *pálya homorú oldalán* mozog, 14. ábra.

1. A kényszererő a megelőző §. 1. pontja értelmében az $\overrightarrow{An}$ normális mentén ható ellennyomás, *reactió*, melyet R-el jelölünk; derékszögű componensei $R_x=\lambda R$; $R_y=\mu R$.

Jelelje P az m-re ható azon mozgató erőt, mely a kényszer jelenlététől független (a «vis impressa») s melyet rendesen ismertnek (adottnak) tekintünk; és legyenek X és Y derékszögű összetevői.



14. ábra.

Képezve az R kényszererő s a P független erő eredőjét Q-t, az *effectiv erőt*, 14. ábra: a pont a 46. §. értelmében a Q erő mozgató hatása alatt szabadon mozgónak tekintendő.

Miután P és R az XY síkban fekszenek, Q is benne fekszik; ennek Q_x és Q_y componensei és négyzete:

$$Q_x=X+R_x; \quad Q_y=Y+R_y; \quad Q^2=(X+R_x)^2+(Y+R_y)^2 \; . \; . \quad (2)$$

A mozgás egyenletei és az R componensei e szerint

$$\left.\begin{array}{ll} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=X+R_x; & m\dfrac{d^2y}{dt^2}=Y+R_y; \\ R_x=\lambda R=-R\dfrac{dy}{ds}; & R_y=\mu R=+R\dfrac{dx}{ds}. \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

* Mert itt az ábra szerint α a második, β az első, λ a harmadik, a második quadransban lévő szög cosinusa.

A (3) az ismeretlen kényszererőt, R-et tartalmazza, melyet a mozgás további tárgyalására ismernünk vagy legalább egyszerűbb egyenlettel kifejeznünk kell.

2. E czélra szétbontjuk a Q-t tangentiális és normális componenseire, T-re és N-re, megjegyezve, hogy R úgy is a normális mentén fekszik:

$$T=X\alpha+Y\beta; \quad N=R+X\lambda+Y\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Másrészt, miután az m most *szabad* pontnak tekinthető, a T és az N componens dynamikai értékei a 34. §. (2) értelmében $T=ms''$; $N=mv^2:\varrho$; ha még az α, β, $\lambda=-\beta$, $\mu=+\alpha$ értékeket az (1)-ből felhasználjuk, a (4)-ből:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}; \quad m\frac{v^2}{\varrho}=R-X\frac{dy}{ds}+Y\frac{dx}{ds}, \quad . \quad . \quad (5)$$

mely egyenletrendszer a (3)-mal egyenértékű, de formailag különböző.

Az utóbbi egyenletet az ismeretlen R kifejezésére használhatjuk:

$$R=m\frac{v^2}{\varrho}+X\frac{dy}{ds}-Y\frac{dx}{ds}=m\frac{v^2}{\varrho}-\lambda X-\mu Y; \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

ennek értelmezésére nézve jegyezzük meg, hogy az $mv^2:\varrho$ a szabadnak tekintett m normális erőcomponense, mely mindig a pálya görbületi középpontja *felé,* azaz $\overrightarrow{An}$ mentén van irányítva, míg a $-(\lambda X+\mu Y)=-P\cos(P, n)$ a P-nek az $\overrightarrow{An}$-nel ellentett irányú componense, hol a 14. ábra szerint $(P, n)\measuredangle$ *tompa* szög és így e szorozmány positiv és a (6) jobb oldalát növeli.

Az R *absolut értékét* véve csak tekintetbe, ez az előbbiek és a 14. ábra értelmében avval a nyomással egyenlő, melylyel az m-et a pálya szilárd falához nyomja:

a) az m sebességénél fogva fellépő $mv^2:\varrho$ nagyságú centrifugális erő, *b)* az m-re ható P erőnek normális componense.

Általában pedig ezen *a)* illetve *b)* alatti erő az m-et az előírt pályához nyomni avagy tőle eltávolítani törekszik, a szerint a mint:

a) az m a pálya homorú vagy domború oldalán halad, illetve *b)* az m és a P a szilárd falú előírt pálya különböző oldalain vagy egy oldalán fekszenek.

3. A (6) összefüggésben az m, ϱ, X, Y, $dx:ds$, $dy:ds$ ismert adatok; R és v ismeretlen; de az utóbbi az (5) első egyenletének egyszeri integratiója alapján azonnal nyerhető.

Ugyanis, szorozva az (5) első egyenlete két oldalát $(ds:dt)\,dt=ds$-sel, belőle:

$$\tfrac{1}{2}md(v^2)=Xdx+Ydy;$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2=\int(Xdx+Ydy)+\text{constans}; \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

szóval: a sebesség négyzete ismert menynyiségek quadraturájával van

kifejezve; az integrátió állandóját az egyes mozgások kezdő feltételei adják meg. [A (7) itt az eleven erő tétele, 51. §. (3)].

E szerint az R (6)-ban ismertnek tekintendő s így a (3) első rendszerének jobb oldalai adott függvények; a probléma e szerint közönséges kinematikai feladatra van redukálva.

Gyakran sikerül a (7)-nek még egyszeri integratiója, miáltal az s ív az idő függvényeként meghatározható.

4. A pálya azon pontja, melyben az m az *előírt görbét elhagyja*, a 47. §. 1. pontja értelmében az a hely, hol az m-nek nyomása, e szerint az ébresztette R ellennyomás is zérus; erre nézve (6)-ból e feltétel:

$$m\frac{v^2}{\varrho} = -X\frac{dy}{ds} + Y\frac{dx}{ds}; \quad \ldots\ldots (8)$$

a továbbira nézve l. a következő §. 4. pontját, 87. l.

II. Ha az m a *pálya domború oldalán mozog*, akkor az R ellennyomás (kényszererő) a domború oldalra emelt normálisba esik és az $mv^2 : \varrho$ centrifugális erő az m-et az előírt pályától eltávolítani törekszik; ezért a P független erőnek a görbe homorú oldala felé irányítottnak kell lennie, ha azt akarjuk, hogy az m az előírt pályán maradjon.

E szerint e §. kifejtései itt csak avval a különbséggel maradnak érvényben, hogy bennük

$$\lambda = +\beta = dy : ds; \quad \mu = -\alpha = -dx : ds; \quad R = -m\frac{v^2}{\varrho} - (\lambda X + \mu Y),$$

hol $-(\lambda X + \mu Y)$ ismét positiv és m addig marad az előírt pályán, míg R positiv.

49. §. *Az előírt sima pálya nyugvó térbeli görbe. A mozgás egyenletei. A nyomás.*

Jeleljék α, β, γ; λ, μ, ν; f, g, h a görbe tangense, normálisa és binormálisa iránycosinusait, ϱ első fő-görbületi sugarát, s ívét; akkor [45. §. (1) és Math. Repertórium 75. §. (4)]:

$$\left.\begin{aligned} \alpha = \frac{dx}{ds} \text{ s í. t.}; \quad \lambda = \varrho\frac{d^2x}{ds^2} \text{ s í. t.}; \quad f = \varrho\left(\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}\right); \\ \frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2; \\ \lambda f + \mu g + \nu h = 0; \quad f\alpha + g\beta + h\gamma = 0; \quad \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

1. Az m az előírt pályára $-R$ nagyságú nyomást gyakorol, mely az R ellennyomást *(reactiót)*, a kényszererőt létesíti; ennek a, b, c legyenek az iránycosinusai; az R iránya a 47. §. értelmében csak annak a feltételnek tartozik eleget tenni, hogy a pálya mindenkori érintőjére merőleges, azaz hogy a mindenkori normális síkban fekszik, szóval, hogy

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$

Az R derékszögű componensei:

$$R_x = aR; \quad R_y = bR; \quad R_z = cR \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Az m-re a feltételtől függetlenül működő erő (vis impressa) P; derékszögű componensei X, Y, Z; ezeket rendesen ismerteknek tekintjük.

Hozzákapcsolva P-hez az R kényszererőt: Q eredő erőt nyerünk, mely a most szabadnak tekintendő m-re ható mozgató erő *(effectiv erő)*; ennek derékszögű componensei és négyzete:

$$\left.\begin{aligned} &Q_x = X+R_x; \quad Q_y = Y+R_y; \quad Q_z = Z+R_z; \\ &Q^2 = (X+R_x)^2+(Y+R_y)^2+(Z+R_z)^2. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

A mozgás derékszögű coordinátákra vonatkoztatott egyenletei:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + R_x; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y+R_y; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z+R_z. \quad . \quad . \quad (5)$$

A továbbiakra az ismeretlen kényszererő R teljes ismeretére van szükségünk, azaz két adatára: nagyságára (egy adat) és a mindenkori normális síkban való irányára (egy adat).

2. E czélból képezzük a P erőnek és az R erőnek a tangens, normális és a binormális menti componenseit, a P-éi legyenek, P_t, P_n, P_b; az R-éi 0, R_n, R_b; ezek rendre

$$\left.\begin{aligned} &P_t = \alpha X+\beta Y+\gamma Z; \quad P_n = \lambda X+\mu Y+\nu Z; \quad P_b = fX+gY+hZ; \\ &0 = R(a\alpha+b\beta+c\gamma); \quad R_n = R(a\lambda+b\mu+c\nu); \quad R_b = R(af+bg+ch). \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

E szerint az eredő $\overrightarrow{Q} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}$ erőnek e három irány menti componensei, T, N, B rendre:

$$T = P_t + 0; \quad N = P_n + R_n; \quad B = P_b + R_b. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Miután az m a $\overrightarrow{Q}$ effectív erő hasása alatt szabadon mozgónak veendő, a 34. §. értelmében ezen eredő erő tangentiális, normális és binormális componenseinek dynamikai kifejezései: $T = m \cdot s''$, $N = mv^2 : \varrho$ $B = 0$ érvényesek, úgy hogy

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2s}{dt^2} &= \alpha X+\beta Y+\gamma Z; \\ m\frac{v^2}{\varrho} &= R_n+\lambda X+\mu Y+\nu Z; \\ 0 &= R_b+fX+gY+hZ=0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

A (8) rendszer az (5) rendszerrel æquivalens, de formája más, benne az R_n összetevő az az ellennyomás, mely az m centrifugális ereje és a P-nek a főnormális menti P_n componense összehatásából származik, míg az R_b ellennyomás a P-nek a binormális menti P_b componensével ellentetten egyenlő.

Itt is érvényes a megelőző §. I. 2. pontja végén tett megjegyzés, 84. l.. az $mv^2 : \varrho$ centrifugális erő, illetőleg a P_n és a P_b componens az m-et az előírt pályához nyomja vagy tőle el akarja távolítani, a szerint, a mint

az m a pálya homorú vagy domború oldalán mozog, illetőleg a mint a P_n és az első görbületi sugár ϱ a pálya ellentett oldalain vagy egy oldalán-, illetve a mint a P_b és a csavarodási sugár τ a pálya ellentett oldalain vagy egy oldalán fekszenek.

A (8) egyenletekben az s'', a v^2, az R_n és R_b ismeretlen; e négy menynyiség meghatározására nézve megjegyzendő, hogy az első kettő egymástól nem független, mivel $s'' = dv : dt$; továbbá, hogy az s'' és R_b az első s a harmadik egyenletből közvetetlenül adódik.

3. Helyettesítve a (8) első egyenletébe $\alpha = dx : ds$-et s í. t., szorozva ds-el, azonnal nyerjük:

$$mvdv = Xdx + Ydy + Zdz,$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \int (Xdx + Ydy + Zdz) + \text{constans}, \quad \ldots \quad (9)$$

miáltal a v^2 közönséges quadraturára van viszszavezetve, azaz ismertnek veendő [ez az eleven erő tétele, 51. §. (3)]. Ebből folyólag a (8) középső egyenletéből az R_n is meghatározható, mely a már szintén meghatározott R_b-vel együtt a pálya normális síkjában fekvő egész kényszererőt, az R-et adja. Legyen ψ a szög, melyet R a pálya mindenkori osculáló síkjával képez, ekkor:

$$R^2 = R_n^2 + R_b^2; \quad \operatorname{tg} \psi = R_b : R_n \quad \ldots \quad (10)$$

Az (5) vagy a (8) rendszerben e szerint az R, illetve R_n s R_b a v-nek s adott menynyiségeknek függvényei, úgy, hogy a probléma ismét tiszta kinematikai problémára van viszszavezetve.

Gyakran a (9)-nek még egyszeri integrálása lehetséges.

4. A hely, melyen a pont a pályát elhagyhatja [48. §. I. 4. pontja, 85. l.] az, hol a nyomás s így az R ellennyomás is zérus; azaz (10) és (8) szerint

$$R = 0; \quad R_n = 0; \quad R_b = 0;$$

$$m\frac{v^2}{\varrho} = \lambda X + \mu Y + \nu Z; \quad 0 = fX + gY + hZ. \quad \ldots \quad (11)$$

Az első egyenlet szerint az eredő normális erő csak a P független erőnek normális componense; a második szerint e P erő a pálya osculáló síkjában fekszik.

4*a*. A (11) első egyenletének egyszerű geometriai értelme van. Ugyanis, 15. ábra, 88. l., a P erőnek a ϱ görbületi sugár menti P_ϱ componense írható:

$$P_\varrho = \lambda X + \mu Y + \nu Z = P \cos (P, \varrho),$$

úgy, hogy az idézett (11) egyenletből:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}P\varrho \cos (P, \varrho).$$

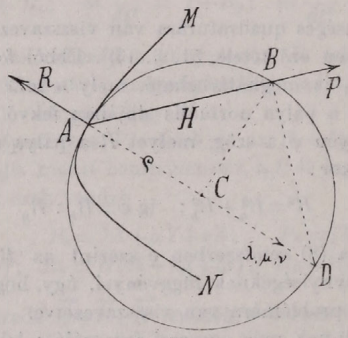
Szerkesztve a pálya A pontjához tartozó ϱ sugarú osculáló kört, jelelve H-val e körnek a P iránya meghatározta AB húrját és megjegyezve, hogy

a B-nél mindig derékszögű ABD háromszögben $\overline{AD}\cos(P, \varrho)=\overline{AB}$, azaz $2\varrho\cos(P, \varrho)=H$, az egyenletünk

$$\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{4}P.H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Szóval: a pálya elváló (elhagyási) pontjában az m eleven ereje avval a munkával egyenlő, melyet a független P erő végezne, ha a közben állandó maradna, mialatt m a H görbületi húr negyedrészét futja meg.

Rendesen az elhagyási *sebesség* ismerete szükséges; ez a (12) értelmében oly nagy, mint az a sebesség, melyet a független P erőnek az elváló pontban fellépő, állandónak tekintendő értéke az eleinte nyugvó m-nek kölcsönöz, a mi alatt az az elváló pont görbületi körének a P mentén fekvő AB húrja negyedrészén elhaladt.



15. ábra.

50. §. *Előírt nyugvó érdes pályán (surlódással) történő pontmozgás egyenletei.*

A surlódásból származó erő [13. §. 3. pontja; 29. §.] *mozgás mindenkori sebességével ellentett irányú* és így írható:

$$\text{surlódásbeli erő}=-kR, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

hol k a *surlódási együttható*, mely a súrlódó két test természetétől, egymáshoz viszonyított relativ sebességétől és attól is függ, vajjon a mozgás a pályán *gördülő* vagy *sikló*. Ez az együttható csak kisebb sebességű sikló mozgásoknál, ismeretes, mert nagy sebességeknél a siklás szabálytalan, míg gördülő mozgásnál a szabályosság még nagy sebességekre nézve is fennáll.

[A megelőző 49. §. jelöléseit itt is megtartjuk.]

1. Az összes erők itt a következők: *a)* a független P erő X, Y, Z componenseivel; *b)* az R reactiónak a főnormális menti R_n componense, melynek λ, μ, ν az iránycosinusai; *c)* az R-nek a binormális menti R_b componense, melynek f, g, h az iránycosinusai: *d)* a

$$kR = k\sqrt{R_n^2 + R_b^2}$$

értékű súrlódás, melynek $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ az iránycosinusai.

Egyesítve mindezeket: ezek Q eredőjének befolyása alatt az m tömegpont szabadon mozgónak tekintendő, úgy, hogy a coordináta-tengelyekre vonatkoztatott mozgásegyenletei:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X - \alpha k\sqrt{R_n^2 + R_b^2} + \lambda R_n + fR_b\,{}^*; \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y - \beta k\sqrt{R_n^2 + R_b^2} + \mu R_n + gR_b; \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z - \gamma k\sqrt{R_n^2 + R_b^2} + \nu R_n + hR_b. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

[Az *egész kényszererő* a normális síkban fekvő R s a reá merőlegesen, az érintő mentén fekvő $-kR$ erők eredője, $R\sqrt{1+k^2}$, mely a mindenkori sebességgel tompa szöget képez; iránycosinusait az R_n, R_b és a k határozza meg (l. alább a 2. pontot)].

Ha az összes erőknek a tangens, normális és binormális szerinti componenseit képezzük: ezek a 49. §. (8)-éitől csak abban különbözhetnek hogy az érintő componenshez $-kR$ járul, e szerint a megfelelő mozgásegyenletek:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2s}{dt^2} &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z - k\sqrt{R_n^2 + R_b^2}; \\ m\frac{v^2}{\varrho} &= R_n + \lambda X + \mu Y + \nu Z; \\ 0 &= R_b + fX + gY + hZ; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

melyek az (1)-el egyenértékűek, de más alakúak.

2. A továbbiakra itt is reactió R_n és R_b componenseinek ismeretére van szükségünk, melyek a (2) utolsó két egyenletéből:

$$R_n = m\frac{v^2}{\varrho} - \lambda X - \mu Y - \nu Z; \quad R_b = -fX - gY - hZ; \quad \ldots \quad (3)$$

bennük a v még ismeretlen s így az R_n, R_b és a v közötti még egy összefüggésre van szükségünk. Ezt a (2) első egyenletéből ds-el való szorzás segélyével nyerjük, hol még $\alpha ds = (dx : ds)\, ds = dx$ s í. t. úgy, hogy az idézett egyenletből;

avagy:

$$\left.\begin{aligned} mvdv &= Xdx + Ydy + Zdz - k\sqrt{R_n^2 + R_b^2}\,ds; \\ \tfrac{1}{2}mv^2 &= \int (Xdx + Ydy + Zdz) - \int k\sqrt{R_n^2 + R_b^2}\,ds. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

---

* Hol $\lambda R_n + fR_b$ nem más, mint az $R = \sqrt{R_n^2 + R_b^2}$ reactiónak vetülete az X-tengelyre, azaz [49. §. (3)]: $R_x = aR = \lambda R_n + fR_b$ s í. t.

E szerint a (3) és (4) egymástól különböző, független *három* összefüggés az R_n, R_b és v között, melyek e menynyiségeknek az ismert adatokkal és a folyó idővel való kifejezésére elegendők.

E szerint a mozgás (1) egyenleteinek jobb oldalai ismertek levén, a feladat ismét kinematikai problémára van viszszavezetve.

3. A hely, melyen az m az előírt pályát elhagyja, az $R=0$, azaz $R_n=0$ és $R_b=0$ feltételekből adódik; e szerint erre nézve a viszonyok a (2)-ből ugyanazok, mint a surlódás nélküli mozgásnál (megelőző §. 4. és 4*a* pontjai).

51. §. *Az eleven erő és az energia tételei előírt nyugvó sima és érdes pályánál.*

A tárgyalást térbeli görbékre nézve ejtjük meg; eredményei természetesen a sík görbékre is fennállanak [a megelőző §. jelöléseit megtartjuk.].

1. Könnyű kimutatni, hogy előírt *sima* pálya esetében a kényszererő nem szünteti meg az eleven erő és az energia tételének a szabad mozgásokra fennálló érvényességét.

a) A *szabadnak tekintendő* m-re ható *összes* erők derékszögű componensei $X+R_x$ s í. t., 49. §. (5), e szerint ezen összes erők elemi munkája, mely *mindig az eleven erő változásával egyenlő:*

$$dL=d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)=(X+R_x)\,dx+(Y+R_y)\,dy+(Z+R_z)\,dz, \quad . \; . \quad (1)$$

hol dx, dy, dz az előírt pálya ds elemének vetületei. Ezekre és az R_x s í. t. componensekre nézve áll:

$$dx=\alpha ds, \quad dy=\beta ds; \quad dz=\gamma ds; \quad R_x=aR; \quad R_y=bR; \quad R_z=cR. \quad . \; (1a)$$

E szerint a reactió-(kényszer-) erő munkája

$$R_x dx+R_y dy+R_z dz=R\,(a\alpha+b\beta+c\gamma)\,ds=0, \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

mert az R a mindenkori pályaérintőre merőleges [49. §. (2)].

Marad (1)-ből:

$$\mathrm{T}=\tfrac{1}{2}mv^2=\int(Xdx+Ydy+Zdz)+\text{constans}, \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

s ez az eleven erőnek már a 49. §. (9) kifejezésében talált tétele, mely itt a kényszererőktől független.

b) Ha a független P erő V erőfüggvénynyel bír [42. §. (3) és (5)]:

$$X=\frac{\partial V}{\partial x} \text{ s í. t. és } Xdx+Ydy+Zdz=dV,$$

úgy, hogy (3)-ból

$$\mathrm{T}-V=\text{constans}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

mely az energiának a kényszererőtől független elve [44. §. (3)].

2. Lényegesen más jellegű e két tétel, ha a pálya kényszerén kívül *súrlódás* is jelentkezik.

Ekkor ugyanis a szabadnak tekintendő m-re ható összes erők derékszögű componensei [50. §. (1)]

$$X-\alpha kR+aR; \qquad Y-\beta kR+bR; \qquad Z-\gamma kR+cR.$$

Ezeknek a ds ívelelem dx-, dy-, dz-vetületeivel való szorzat-összegük a dL munka-elemmel egyenlő, mely szabad mozgásoknál mindig az eleven erő változásával egyenlő.

Tekintettel az $(1a)$-ra és a (2)-re, a reactió munkája itt szintén zérus és

$$dL=d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)=Xdx+Ydy+Zdz-k\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)Rds,$$

azaz:

$$\int(Xdx+Ydy+Zdz)=\tfrac{1}{2}mv^2+\int kRds+\text{constans}, \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

mely az 50. §. (4) egyenletével egyezik.

Szóval: ezen esetben a független X, Y, Z erőcomponensek munkája az eleven erő növelésére és a surlódás legyőzésére fordíttatik. A munka ezen utóbbi része a tapasztalat szerint mint dynamikai munka eltünik s helyébe a surlódás létesitette egyenértékű meleg-menynyiség lép fel [22. §. 2. pontja, 35. l.].

Erőfüggvény létezése esetében az (5)-ből

$$T-V+\int kRds=\text{állandó}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Az (5) és (6) tételek a szabad mozgás ebbeli tételei alakjaitól [melyekkel a (3) és (4) megegyeznek] lényegesen különböznek, de teljesen analogok az ellenálló közegben történő mozgásokéhoz [45.§ (4) és (5)].

b) *Előírt szilárd felületen surlódás nélkül és surlódással végbemenő pontmozgás.*

52. §. *Előírt felületen történő mozgásról általánosságban.*

Meghatározott felületen való maradás kényszerét úgy érzékíthetjük, hogy [28. §. 1. pontja] két szilárd falat egymástól állandó távolságban veszünk fel, melyek közötti rétegszerű térben a réteg vastagságával egyenlő átmérőjű gömbalakúnak tekintett anyagi testecske mozog, 16. ábra, 92. l.

A gömböcske középpontja akkor egy meghatározott FF felületen kénytelen maradni, mivel a nevezett két fal az FF-től való eltávolodását nem engedi meg.

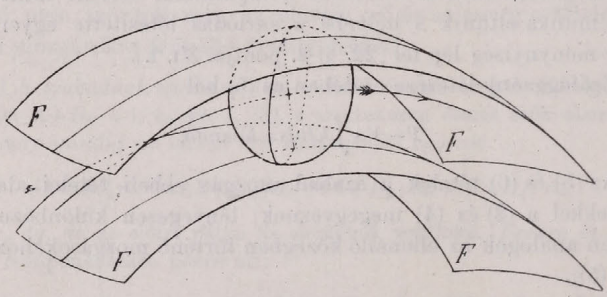
Itt is még egy közelebbi megszorítás szokott fellépni; ugyanis, hogy az m tömegpont az előírt felületnek egyik vagy másik oldalán mozoghat csak; ekkor a feltétel kényszer és akadály gyanánt szerepel, mert addig, míg m az előírt felületen marad, e feltétel egyszersmind kényszer; de az m e felületet el is hagyhatja s az F egyik oldalán

lévő térben szabadon mozoghat és ekkor F itt csak anynyiban akadály, a menynyiben az m-nek a tér másik részébe való áthatolását megakadályozza.

Ilyenkor az érzékítésre elegendő, ha az FF felületet szilárd lemezből állónak és az m gömböcskét e lemez egyik vagy másik oldalán gördülőnek tekintjük, 17. ábra.

1. Ha a felület *sima*, az m-nek e felület mentén való mozgását mi sem akadályozza, de az m-et a reá ható független erő, továbbá saját sebességénél fogva centrifugális ereje a 16. ábrában érzékített határfalak egyikéhez vagy másikához nyomja; e nyomás reactiója az ellennyomás, a kényszererő; a nyomás és ellennyomás az FF felületre merőleges, ellentten egyenlő erők.

De a mikor az FF szilárd felület a 17. ábra szerint *akadály*: az m e felület mentén szabadon mozoghat, de el is távozhatik tőle; az



16. ábra.

eltávozás ott kezdődik, hol az előbb említett nyomás zéruson átmenve negativ értékeket kezd felvenni.

2. Ha a mozgás *surlódással* jár: ez a mindenkori sebesség irányával ellenkező erőt létesít, melyet a reactió erővel (az elennyomással) egyesítve a sebességgel mindig *tompa* szőget képező akadályozó erőt (eredő kényszererőt) nyerünk [46. §. és 50. §. 1. pontja].

3. Az előírt felületen történő mozgás problémája sokkal bonyolodottabb és nehezebb, mint az előírt görbén történő mozgásé; mert az előírt felületen a mozgó pont még mindig a pályák egy méretű végtelen sokaságát irhatja le. A pálya tényleges meghatározása itt a feladatnak új, az előbbi problémánál fölösleges (mert ott adott) része.

53. §. *Előírt nugvó sima felületen történő pontmozgás egyenletei.*

1. *Jelölések.* Legyenek

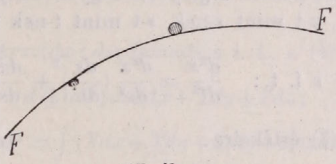
$$F(x, y, z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

az előírt felület egyenlete és a, b, c az F azon oldalához tartozó n normálisának iránycosinusai, a melyen az m mozog, 17. ábra; ekkor:

$$\left.\begin{aligned} a=\frac{1}{\Phi}\cdot\frac{\partial F}{\partial x};\quad b=\frac{1}{\Phi}\cdot\frac{\partial F}{\partial y};\quad c=\frac{1}{\Phi}\cdot\frac{\partial F}{\partial z};\\ \Phi=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}\,. \end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(2)$$

Az m tömegpont az F felületen *pályát* ír le; geométriai elemeit a 49. §. jelöléseivel megegyezően jelöljük, ugyanis legyenek α, β, γ e pálya érintője λ, μ, ν normálisa (illetve ϱ görbületi sugara), f, g, h binormálisa iránycosinusai, melyekre nézve, ha s a pálya íve, a 49. §. (1) rendszere szerint:

$$\alpha=\frac{dx}{ds}\text{ s. í. t.};\quad \lambda=\varrho\frac{d^2x}{ds^2}\text{ s í. t.};\quad f=\varrho\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)\text{sí.t.}\quad(3)$$



17. ábra.

Az (α, β, γ) irányú pálya-érintő a felület mindenkori érintő síkjában feküdvén, a felület (a, b, c) normálisára merőleges:

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=0\quad\ldots\quad(4$$

A pálya ϱ görbületi sugara e görbe osculáló síkjában fekszik és általánosságban véve nem esik a felület n normálisába, hanem vele $(\varrho, n)\sphericalangle=\varepsilon$ szöget képez; ez az ε egyszersmind az a szög, melyet a ds pálya-elemen átmenő, a felületre normális metsző sík a pálya ugyanezen ds eleméhez tartozó osculáló síkkal képez; e szög cosinusa:

$$\cos(\varrho, n)=\cos\varepsilon=a\lambda+b\mu+c\gamma.\quad\ldots\quad(5)$$

Ha ϱ_n a ds-en áthaladó *normális* metszet görbületi sugara, akkor Meusnier tétele szerint [Math. Rep. 85. §. (3)]:

$$\varrho_n\cos\varepsilon=\varrho\quad\ldots\quad(6)$$

2. Az m-re P független erő hasson, melynek X, Y, Z a componensei; a kényszererő (a reactió) legyen R, iránya az F-nek (a, b, c) irányú normálisba esik, componensei:

$$R_x=aR;\quad R_y=bR;\quad R_z=cR;\quad\ldots\quad(7)$$

ezeket az előbbiekhez adva, az m szabadon mozgónak tekintendő; mozgásegyenletei:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X+R_x;\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y+R_y;\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z+R_z \quad . \quad . \quad (8)$$

[A mozgásegyenleteknek a pálya tangense-, normálisa- s binormálisára való vonatkoztatása, mint a 49. §. 2. pontjában, itt nem előnyös, mert magát a pályát még nem ismerjük.]

3. A kényszererő meghatározása czéljából szorozzuk a (8) egyenleteit rendre a-, b, c-vel és összegezzük a szorzatokat; tekintettel a (7)-re nyerjük:

$$m\left\{a\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{d^2y}{dt^2}+c\frac{d^2z}{dt^2}\right\}=aX+bY+cZ+R=P_n+R, \quad . \quad . \quad (9)$$

hol $P_n=aX+bY+cZ$ a P-nek a felület n normálisa menti componense [mely azonban itt más jelentésű, mint a 49. §. P_n-je, mely utóbbi a P-nek az előírt *pálya* főnormálisa (görbületi sugara) menti componense].

Ez egyenletet olyképen transformáljuk, hogy R a sebesség, a ϱ_n görbületi sugár és ismert adatok segélyével legyen kifejezve.

Tekintve x-, y-, z-t mint s-nek, s-t mint t-nek a függvényét:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} \text{ s í. t.};\quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2s}{dt^2} \text{ s í. t.} \quad (9a)$$

avagy, tekintettel a (3) értékeire.

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=\frac{\lambda}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\alpha\frac{d^2s}{dt^2};\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{\mu}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\beta\frac{d^2s}{dt^2};\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=\frac{\nu}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\gamma\frac{d^2s}{dt^2}.\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9b)$$

Ezekkel a (9) baloldala:

$$a\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{d^2y}{dt^2}+c\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{v^2}{\varrho}(a\lambda+b\mu+c\nu)+\frac{d^2s}{dt^2}(a\alpha+b\beta+c\gamma);$$

s így a (4), (5) és (6) összefüggéseket véve tekintetbe, (9)-ből

$$R=m\frac{v^2}{\varrho_n}-aX-bY-cZ=m\frac{v^2}{\varrho_n}-P_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Ezen egyenletet a 49. §. 2. pontja végén tett megjegyzés szerint értelmezzük: az R ellennyomás az $mv^2:\varrho_n$ nagyságú centrifugális erő és a $P_n=aX+bY+cZ$ normális erőcomponens által ébresztett nyomással ellentetten egyenlő.

Közelebbről pedig ezen centrifugális erő, illetve a P_n componens az m-et a felülethez nyomni vagy tőle eltávolítani törekszik, a szerint, a mint az m pályájának (s így az előírt felületnek is) homorú vagy

domború oldalán mozog, illetve a mint a P erő és az m pont ezen felület különböző oldalán vagy egy oldalán fekszenek.

A (10)-ben az R, a v és a ϱ_n ismeretlen; a v^2-re nézve egy elemi összefüggést fogunk felállítani, a ϱ_n-át a *pályá*ból fogjuk meghatározni (v. ö. a köv. 4. és 5. pontot).

3*a*. A hely, melyen az m az előírt felületet elhagyja az $R=0$ feltétel által, a nyomás és ellennyomás megszünése által van jellemezve; erre nézve (10)-ből:

$$m\frac{v^2}{\varrho_n}=aX+bY+cZ, \quad \ldots\ldots \quad (10a)$$

melyre, mivel a ϱ_n az a, b, c iránycosinusú normálisban fekszik: minden tekintetben a 49. §. 4*a*. pontja értelmezése közvetetlenül alkalmazható, csakhogy itt ϱ_n lép az ott szereplő ϱ pályagörbületi sugár helyébe.

4. Képezve a (8) és (7)-ből az összes erők végezte munka-elemet:

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}+\cdot+\cdot\right)dt=Xdx+Ydy+Zdz+R\,(adx+bdy+cdz).$$

Ámde, mivel $dx=(dx:ds)\,ds=ads$ s i. t., a (4) szerint:

$$d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)=Xdx+Ydy+Zdz;$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2=\int(Xdx+Ydy+Zdz)+\text{constans}, \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

miáltal a sebesség négyzete quadraturára van viszszavezetve; a constans a kezdő feltételekből adódik [ez az eleven erő tétele, 56*a*. §. (1)].

5. A *pálya meghatározása czéljá*ból a (8) minden egyenletéből a (7) segélyével az R kifejezhető:

$$R=\frac{1}{a}(mx''-X)=\frac{1}{b}(my''-Y)=\frac{1}{c}(mz''-Z)=R. \quad \ldots \quad (12)$$

A (12) kettős egyenletet jelent, mert belőle két független és egy függő egyenlet:

$$\left.\begin{aligned} b\,(mz''-Z)&=c\,(my''-Y);\\ c\,(mx''-X)&=a\,(mz''-Z);\\ a\,(my''-Y)&=b\,(mx''-X);\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

adódik, melyekben az x'', y'', z'' ismeretlen.

Ha a (13) egyenletek megoldhatók: integráljaik a mozgó m pontnak x, y, z coordinátái és a t folyó idő közötti összefüggéseket fejezik ki.

Vegyük fel, hogy a (13) két független egyenletének integráljait $F_1(x, y, z, t)=0$ és $F_2(x, y, z, t)=0$ alakban megtaláltuk; eliminálva belőlük a t-t, nyerünk a coordináták közötti

$$F_0(x, y, z)=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

alakú egyenletet; ez oly *felületet* képvisel, melyen az (x, y, z) coordinátájú m pont szintén halad.

De miután az m a feltétel értelmében az adott

$$F(x, y, z)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

felületen tartozik maradni: a pályája nem lehet más, mint e két felület metszőgörbéje; s e pálya egyenleteit nyerjük, ha (14)- és (15)-ből rendre kiküszöböljük az x, az y és a z coordinátát.

6. Előírt *forgási felület* esetében ennek egyenlete írható:

$$F[x^2+y^2), z]=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

ha Z a forgási tengely és $r=\sqrt{x^2+y^2}$ egy felületi pontnak e tengelytől való távolsága.

A (16) mindig még következőleg is írható:

$$2F[x^2+y^2), z] = x^2+y^2-2\psi(z)=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

miből:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=x; \quad \frac{\partial F}{\partial y}=y; \quad \frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{d\psi(z)}{dz}=-\psi'(z); \quad . \quad . \quad (18)$$

és (2) szerint

$$a=x:\sqrt{x^2+y^2+[\psi'(z)]^2}; \quad b=y:\sqrt{\ldots}; \quad c=-\psi'(z):\sqrt{\ldots};$$

ezekkel a (12):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{R}{\sqrt{x^2+y^2+[\psi'(z)]^2}} = \\ &= \frac{1}{x}\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X\right) = \frac{1}{y}\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right) = -\frac{1}{\psi'(z)}\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right). \end{aligned}\right\} \quad . \quad (19)$$

54. §. *A kényszererő más meghatározási módja; megegyeztetés az előbbivel.*

A kényszererőnek a sebességi componensek és az előírt felület geométriai vonatkozásai segélyével való kifejezésére a megelőző §.-ától különböző eljárás is létezik, mely ugyanazon végeredményhez vezet ugyan, de a melyet már csak azért is tárgyaljuk, mert a követendő gondolatmenet általánosabb feltételeknél is alkalmazható, mikor ugyanis az előírt pálya vagy felület alakját és helyzetét a térben folytonosan változtatja [v. ö. az 57. §.-ot, 103. l.].

1. A mozgó m-nek coordinátái x, y, z; az előírt felület egyenlete:

$$F(x, y, z)=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Az F-nek t szerinti első és magasabb rendű differentiálquotientsei:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2F}{dt^2} = &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{dz}{dt}+ \\ &+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{d^2z}{dt^2}=0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (3)$$

Itt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}\frac{dz}{dt} \quad \text{s í t.}$$

Rövidség kedveért jelöljük a (3) jobboldali első három tagját Ψ-vel:

$$\left.\begin{aligned}\Psi &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \\ &+ 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\frac{dy}{dt}\frac{dz}{dt} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}\frac{dz}{dt}\frac{dx}{dt} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} = \Psi.\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Továbbá, a megelőző §. (8), (7), (2) egyenletei értelmében:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{X}{m} + \frac{R}{m\Phi}\frac{\partial F}{\partial x};\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{Y}{m} + \frac{R}{m\Phi}\frac{\partial F}{\partial y};\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{Z}{m} + \frac{R}{m\Phi}\frac{\partial F}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Helyettezve (4)-et és (5)-öt a (3)-ba, m-mel szorozva és rendezve:

$$m\Psi + X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} + Z\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{R}{\Phi}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right\} = 0.$$

Ámde [megelőző §. (2)] a Φ^2 egyenlő lévén az utolsó tag $\{\ \}$ záró-jeles tényezőjével egyenletünkből:

$$R = -m\frac{\Psi}{\Phi} - aX - bY - cZ \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Az R e kifejezésében minden adat ismert, kivéve a Ψ-nek (4) alatti kifejezésében fellépő sebességi componenseket; helyettezve (6)-ot az (5) rendszerbe, ez az x, y, z-nek t szerinti másodrendű egyenletrendszerét képviseli, mely a szokásos eljárások szerint tárgyalható.

2. Összehasonlítva a (6)-ot a megelőző §. (10) kifejezésével észreveszszük, hogy állnia kell:

$$-m\frac{\Psi}{\Phi} = m\frac{v^2}{\varrho_n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

mely egyenletnek v^2-vel osztott alakja a felületelméletből ismeretes [Math. Rep. 86. §. (1) és 83, 84 s 85. §§.].

Ezen összefüggés egyszerű, egyenes igazolása elég érdekes.

Ugyanis az előírt felületen fekvő ismeretlen pálya s ívét a t-nek-, az m mozgó pont x, y, z coordinátáit pedig az s-nek függvényeiként tekintve, áll:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} \quad \text{s í. t.;} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{ds}{dt} \quad \text{s. í. t.,}$$

úgy, hogy (2)-ből, továbbá (4) szerint a Ψ :

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{ds}=0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

$$\Psi=\left\{\frac{dx}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)+\frac{dy}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)+\frac{dz}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right\}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \quad (9)$$

Másrészt a felület normálisa a, b, c iránycosinusaiból:

$$a=\frac{1}{\Phi}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}; \text{ s í. t.}; \quad \frac{da}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{1}{\Phi}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Phi}\right) \text{ s í. t.},$$

mely utóbbi quotienseket rendre szorozva $dx:ds$-el s í. t., összegük:

$$\frac{dx}{ds}\frac{da}{ds}+\frac{dy}{ds}\frac{db}{ds}+\frac{dz}{ds}\frac{dc}{ds}=\frac{1}{\Phi}\left\{\frac{dx}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)+\cdot+\cdot\right\}+$$
$$+\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\cdot+\cdot\right\}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Phi}\right).$$

Tekintettel (8)-ra a jobb oldali második rész elesik; ezenkívül $dx=\alpha ds$, $dy=\beta ds$, $dz=\gamma ds$, hol α, β, γ a pálya érintőjének iránycosinusai, úgy hogy (9) írható

$$\Psi=\Phi\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left\{\alpha\frac{da}{ds}+\beta\frac{db}{ds}+\gamma\frac{dc}{ds}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Ámde az érintő a felület normálisára mindig merőleges lévén, az ezen merőlegességet kifejező $a\alpha+b\beta+\gamma c=0$ egyenletet s szerint differentiálva:

$$\alpha\frac{da}{ds}+\beta\frac{db}{ds}+\gamma\frac{dc}{ds}+a\frac{d\alpha}{ds}+b\frac{d\beta}{ds}+c\frac{d\gamma}{ds}=0. \quad . \quad . \quad (11)$$

Ha $AB=ds$, 18. ábra, és α, β, γ A-ban az s-hez húzott érintő iránycosinusai, és $\alpha+d\alpha$, $\beta+d\beta$, $\gamma+d\gamma$ a B-ben húzott-éi; az An felületi normális-éi a, b, c, akkor a B érintője, magasabbrendű kicsinyek elhanyagolásával [Math. Repertórium 75a. §. 2. pontja] az nAB síkban fekvőnek tekinthető. Legyen BO a B-ben ez *érintőre* ugyanazon *nAB síkban* emelt normális, mely azonban általánosságban *nem esik egybe* a B-ben a *felületre emelt normális*sal [ez akkor következnék be, ha s *görbületi* vonal volna, azaz, ha az nAB sík főmetszet volna].

Az AOB sík e szerint a felület *normális* metszete lévén, az $OA=OB$ nem lehet más, mint az $AB=ds$-en *átmenő normális metszetnek görbületi sugara*, azaz a ϱ_n, úgy, hogy

$$\varrho_n d\vartheta=ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Ámde:

$$\sin d\vartheta=\cos(OCB)\measuredangle=[a(\alpha+d\alpha)+b(\beta+d\beta)+c(\gamma+d\gamma)],$$

avagy, tekintettel (12)- és (11)-re:

$$\frac{1}{\varrho_n}=\frac{d\vartheta}{ds}=+a\frac{d\alpha}{ds}+b\frac{d\beta}{ds}+c\frac{d\gamma}{ds}=-\alpha\frac{da}{ds}-\beta\frac{db}{ds}-\gamma\frac{dc}{ds}, \quad (13)$$

melynek (10)-be való helyettezésével

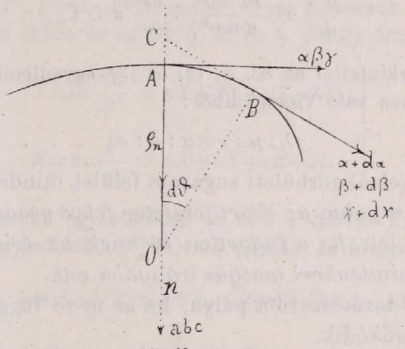
$$\mathfrak{P} = -\Phi \cdot \frac{v^2}{\varrho_n}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

és evvel a (7) alatti összefüggés igazolva van.

55. §. *Folytatás. Esetek, melyekben a pont az előírt nyugvó felületen geodäsiai görbét ir le.*

Bontsuk szét a P független erőt a felület n normálisa menti P_n és tangentiális síkjában fekvő P_t componenseire; az elsőnek a, b, c az iránycosinásai; az utóbbiéi α_1, β_1, γ_1.

A P_n és P_t derékszögű componensei rendre:



18. ábra.

$$aP_n = \frac{P_n}{\Phi}\frac{\partial F}{\partial x} \text{ s í. t.}; \quad \alpha_1 P_t \text{ s í. t.}, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

úgy, hogy a P derékszögű componensei:

$$X = \frac{P_n}{\Phi}\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha_1 P_t; \text{ s í. t.} \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Az R kényszererő szintén az (a, b, c) irányú n normálisba esik és aR s í. t. a derékszögű componensei.

Az m-re ható összes erők derékszögű componensei

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + aR \text{ s í. t.},$$

avagy az 53. §. (9a) kifejtései s az (1) és (2) felhasználásával

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + m\frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{P_n}{\Phi}\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha_1 P_t + \frac{R}{\Phi}\frac{\partial F}{\partial x} \text{ s í. t.} \quad (3)$$

1. A P erőre nézve most azt a feltevést teszszük, hogy az előírt felület érintő síkjába eső P_t componense az m mindenkori mozgása irányába essék, azaz, hogy $\alpha_1=\alpha$; $\beta_1=\beta$, $\gamma_1=\gamma$. Ekkor tehát P_t egyenlő a *pályamenti* T erőcomponenssel, melynek értéke és vetületei itt:

$$P_t = T = m\frac{d^2s}{dt^2}; \quad \alpha_1 P_t = m\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx}{ds} \text{ s í. t.},$$

úgy, hogy evvel a (3)-ból:

$$m\frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + m\frac{d^2s}{dt^2}\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{P_n+R}{\Phi}\frac{\partial F}{\partial x} + m\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx}{ds} \text{ s í. t.};$$

azaz rövidítve:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{P_n+R}{\Phi m v^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial x} \text{ s í. t.}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

E szerint tekintettel az 53. §. (2) és (3) egyenleteire, a (4) egyenleteinek egymáshoz való viszonyaiból:

$$\lambda : \mu : \nu = a : b : c; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

szóval: a pálya (első) görbületi sugara a felület mindenkori normálisába esik; s így a *pálya az előírt felületen fekvő geodäsiai vonal,* melyet az m pont leír, *ha a független erőknek az érintősíkban fekvő componense a mindenkori mozgás irányába esik.*

2. Ugyanily természetű a pálya, ha az m-re független erő egyáltalában nem működik.

Ekkor ugyanis P s ezért P_n és P_t valamint X, Y, Z componensei zérussal egyenlők lévén, az 53. §. (11) egyenlete értelmében a *sebesség állandó* és így a pályamenti gyorsulás: $(d^2s : dt^2)$ *zérus*; ezek tekintetbevételével (3)-ból:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{R}{\Phi m v^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial x} \text{ s í. t.}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

úgy, hogy [53. §. (2) és (3)] itt is:

$$\lambda : \mu : \nu = a : b : c, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

azaz *előírt sima felületen mozgó, független erőknek alá nem vetett pont e felületen geodäsiai görbét ir le.*

Mindkét esetben az előírt felületnek és rajta a sebességnek bármely időpontra vonatkozó ismerete elegendő a pálya meghatározására.

56. §. *Előírt nyugvó felületen surlódással történő mozgás.*

A megelőző 53—55. §§. jelölései itt is érvényesek.

1. A surlódásbeli erő itt is az R nyomás-értékkel arányos és az m mindenkori sebességével ellentett irányú; componensei: $-k\alpha R$, $-k\beta R$, $-k\gamma R$; ezek az 53. §. (8) jobboldalaihoz kapcsolandók, miáltal:

$$mx''=X+(a-k\alpha)R;\quad my''=Y+(b-k\beta)R;\quad mz''=Z+(c-k\gamma)R \quad (1)$$

a most szabadnak tekintendő m-nek mozgás-egyenletei.

Ezekben R, α, β, γ az ismeretlenek; de az utóbbiak között az

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1;\qquad \alpha a+\beta b+\gamma c=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

összefüggések állván fen: a négy ismeretlen kettőre redukálódik [v. ö. e §. 4. pontját].

Az *egész kényszererő* itt is az egymásra merőleges R és $-kR$ erőknek $R\sqrt{1+k^2}$ eredője, mely a mindenkori sebesség irányával tompa szöget képez.

2. A pályát még nem ismerjük; de a pályamenti és a felület normálisa menti erőcomponenseket az (1)-ből képezhetjük, ha ennek egyenleteit rendre α-, β-, γ-val, illetve a-, b-, c-vel szorozzuk és összegezzük.

Tekintettel a (2)-re és az 53. §. 3. és 4. pontja transformátiójára

$$\left.\begin{aligned} T&=m\frac{d^2s}{dt^2}=aX+\beta Y+\gamma Z-kR;\\ N&=m\frac{v^2}{\varrho_n}=aX+bY+cZ+R. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

3. A (3) második egyenletében az R a v^2-tel van kifejezve; ez utóbbit a (3) első egyenletéből ds-el való szorzás- és integrálással nyerjük:

$$\tfrac{1}{2}mv^2=\int(Xdx+Ydy+Zdz)-\int kRds+\text{állandó}. \quad . \quad . \quad (4)$$

De itt is az s pálya ismerete szükséges.

4. Kifejezve (1)-ből az R-et, nyerjük:

$$\frac{mx''-X}{a-k\alpha}=\frac{my''-Y}{b-k\beta}=\frac{mz''-Z}{c-k\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Ezek a pálya egyenletei; bennük α, β, γ-ra nézve a (2) összefüggések állanak fen, s így közülök csak *egy* a független, melynek δ legyen a neve.

E szerint (5)-ben x, y, z és δ az ismeretlenek s a további eljárás pl. abban állhatna, hogy δ-át az (5) rendszer mind a három egyenletpárjából kiküszöböljük és így az x, y, z és ezeknek t szerinti differentiálquotiensei közötti három összefüggést nyerünk,melyek közül épen úgy, mint az (5)-ben csak kettő független. E két független egyenletből az 53. §. 5. pontja eljárásával az időt eliminálva egy $F_0(x, y, z)=0$ alakú összefüggést nyerünk, mely *felületet* jelent s melynek az előírt $F(x, y, z)=0$ felülettel való metszővonala az m pont keresett pályája.

5. *Geodäsiai* görbét ír le a pont, miként azonnal kimutatjuk, ha a független erő ugyanazon sajátságú, mint a melynél a *sima* felületen leírt pálya geodäsiai görbe [v. ö. a megelőző §-ot].

Ugyanis a surlódásbeli erő derékszögű componensei:

$$-kR\frac{dx}{ds}; \qquad -kR\frac{dy}{ds}; \qquad -kR\frac{dz}{ds}$$

hozzájárulnak a megelőző §. (3) egyenletei jobb oldalához, úgy, hogy belőlük

$$m\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+m\frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{P_n+R}{\Phi}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}+\alpha_1 P_t-kR\frac{dx}{ds} \text{ s í. t. } (6)$$

a) Ámde ha a P_t erőcomponens a mindenkori mozgás iránya mentén fekszik [55. §. 1. pontja], akkor $\alpha_1=\alpha$, $\beta_1=\beta$, $\gamma_1=\gamma$ és az egész tangentiális (pályamenti) erőnek, T-nek értéke és componensei:

$$T=m\frac{d^2s}{dt^2}=P_t-kR; \qquad T_x=m\frac{d^2s}{dt^2}\cdot\frac{dx}{ds}=\alpha_1 P_t-kR\frac{dx}{ds} \text{ s í. t.,}$$

melynek (6)-ba helyettezésével

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{P_n+R}{\Phi mv^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}, \text{ s í. t., } \ldots\ldots (7)$$

mely az 55. §. (4) egyenletrendszerével egyenlő, s így a bebizonyítás megtörtént.

b) Ha pedig független erők nincsenek, akkor P_n és P_t zérusok és (7)-ből:

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{R}{\Phi mv^2}\frac{\partial F}{\partial x} \text{ s í. t.,}$$

s ez az 55. §. (6) egyenlete s így állításunk be van bizonyítva.

56*a*. §. *Az eleven erő és az erély tétele nyugvó sima és érdes felületen végbemenő mozgásnál.*

Itt is ki fog tünni, hogy az eleven erő s az erély tétele az előírt *sima* felülettől függetlenül áll, de a felület érdessége folytán módosul.

1. A sima felületen mozgó m-re ható összes erők derékszögű componenseit [53. §. (7) és (8)] rendre szorozva a ds pályaelemnek dx, dy, dz vetületeivel (hol $dx=\alpha ds$ s í. t.), az egész munka-elem

$$dL=m\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}+\cdot+\cdot\right\}dt=Xdx+\cdot+\cdot+(a\alpha+\cdot+\cdot)R;$$

ennek jobboldali második tagja a pályaérintő és a felületnormális egymásra való merőlegességénél fogva [53. §. (4)] elesik s így marad:

$$T=\tfrac{1}{2}mv^2=\int(Xdx+Ydy+Zdz)+\text{const.}, \quad \ldots\ldots (1)$$

azaz, a független erők munkája az eleven erő változásával egyenlő [53. §. 11)]; az eleven erő e tétele e szerint a mozgás-feltételtől független.

Erőfüggvény létezése esetében [42. §. (5)] $X=\partial V:\partial x$ s í. t., úgy, hogy (1)-ből

$$T - V = \text{constans}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

a dynamikai energia elvének az alakja, mely itt a feltételtől szintén független.

2. Surlódás esetében a $-kR$ erő a ds ívelem leírása közben $-kRds$ munkát végez (illetve $+kRds$ munkát *fogyaszt*), melynek integrálja az (1) bal oldalához kapcsolandó, úgy, hogy:

$$\int(Xdx+Ydy+Zdz)=\tfrac{1}{2}mv^2+\int kRds+\text{constans}; \quad \ldots \quad (3)$$

e szerint a független erők munkája az eleven erő növelésére és a surlódás legyőzésére fordíttatik [56. §. (4)].

Erőfüggvény esetében (3)-ból

$$T-V+\int kRds=\text{constans}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

és így a dynamikai energia tétele itt sem áll.

[A surlódás legyőzésére fordított munka meleggé alakul, mely közvetetlenül nem változtatható viszsza dynamikai energiává s ez az oka, hogy a két tétel itt másként értelmezendő, mint a szabad mozgásnál, illetve sima előírt felületen történő mozgásnál, v. ö. a 22. §. 2. pontját].

c) *Mozgó és változó előírt sima vagy érdes felületen és pályán végbemenő mozgás és egyensúly.*

57. §. *Sima és érdes mozgó és változó előírt felületen való mozgás.*

Ily esetek érzékitésére a 52. §-ban említett, a 92. lapon a 16. ábrával előtüntetett falpárt mozgónak és alakját változónak tekinthetjük.

Jeleljék mint eddig, x, y, z a mozgó m pontnak egy *mozdulatlan* coordináta-rendszerre vonatkoztatott coordinátáit, melyek az időtől, mint független változótól függenek és legyen

$$F(x, y, z, t) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

az előírt felület egyenlete, mely t-től explicite is függ. Ez a függés úgy értelmezendő, hogy a felület geométriai *alakját* jellemző *parameterek*, továbbá a *helyzetét* a térben meghatározó elemei az időnek explicit függvényei.

E körülmény általánosságban véve nagy mértékben nehezíti meg a problema megfejtését; de azért általános elmélete könnyen felállítható, különösen az 53. §. kifejtéseinek tekintetbe vételével, miután az 52—56*a*. §§. megfontolásai ezen esetekre nem elegendők.

1. Ha a felület *sima*, a független erő componensei X, Y, Z, a kényszererőéi aR, bR, cR, hol az a, b, c a felület mindenkori mozgó normálisa iránycosinusai, akkor itt is a szabadnak tekintendő m-re ható összes erők componensei:

$$mx''=X+aR; \qquad my''=Y+bR; \qquad mz''=Z+cR. \quad . \quad . \quad (2)$$

Az R-nek az ismeretlen sebességek és az ismert adatok segélyével való kifejezése czéljából a 54. §. 1. pontja mintájára az (1)-ből rendre képezendő:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial F}{\partial t}=0; \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2F}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial x}+\cdot+\cdot+\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)+\cdot+\cdot+\\ +\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial x}+\cdot+\cdot+\Psi=0;\end{aligned}\right\} \quad . \quad (4)$$

hol a jelen esetben az 54. §. (4) kifejtését kiegészítve:

$$\left.\begin{aligned}\Psi=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\cdot+\cdot+\frac{\partial^2F}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2F}{\partial y\partial z}\frac{dy}{dt}\frac{dz}{dt}+\cdot+\cdot+\\ +2\frac{\partial^2F}{\partial t\partial x}+\cdot+2\frac{\partial^2F}{\partial t\partial z}.\end{aligned}\right\} \quad . \quad (5)$$

A további eljárás megegyezik az 54. §-ével: helyettesítve itt is a (2)-ből a $x''=d^2x:dt^2$ s í. t. quotienseket a (4)-be, az idézett 54. §. transformátiói után ismét nyerjük:

$$R=-m\frac{\Psi}{\Phi}-aX-bY-cZ, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

hol a Ψ az (1)-ből az (5) szerint képezendő és $a\,.\,\Phi=\partial F:\partial x$ s í. t.

A további fejtegetéseket a következő 2. pont adja, melynek összes kifejtéseiben és eredményeiben csak $k=0$ teendő, hogy a surlódás nélküli esetre is érvenyesek legyenek.

2. A mozgó felület *érdessége kinetikai* surlódást csak anynyiban ébreszthet, a menynyiben az m-nek a felülethez képest *relativ mozgása* van; mert ha m a felületen *nyugszik*, a surlódás csak *statikai* erőt fejthet ki.

Jeleljék, ismét *mozdulatlan* coordináta-rendszerre vonatkoztatva, a *felület* tetszőleges ξ, η, ζ coordinátájú pontjának absolut sebességi componenseit rendre v_x, v_y, v_z; ellenben a felületen mozgó x, y, z coordinátájú m pontéit v_x, v_y, v_z. Ha most $\xi=x$; $\eta=y$; $\zeta=z$, ez anynyit jelent, hogy a felületnek azt a pontját veszszük mindig tekintetbe, mely az m mindenkori helyzetével egybeesik (coincidál), melylyel m mindenkor érintkezik; de a két pont *sebessége* általában véve *nem egyenlő*.

Ha azt akarjuk, hogy az m az előírt felületen maradjon, akkor az m-nek és a vele mindenkor érintkező felületi pontnak a felület normálisa menti sebességi componensei egyenlőknek tartoznak maradni, úgy, hogy az m-nek a *felülethez relativ sebessége* e *felület mindenkori érintő síkjában fekszik*.

Az m-nek az előírt felületen való *relativ* pályájának íve legyen s; ezt az m az említett relativ sebességgel írja le.

Az m absolut sebessége v, a felület coincidáló pontjáé v, és az m-nek e felülethez relativ sebessége u; componenseik rendre:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \text{ s í. t.}; \quad v_x = \frac{d\xi}{dt} \text{ s í. t.}; \quad u_x = \frac{dx}{dt} - \frac{d\xi}{dt} = v_x - v_x \text{ s í. t.} \quad (7)$$

A felületen leírt $ds = udt$ pálya-elem vetületei és α, β, γ irány-cosinusai rendre:

$$dx - d\xi = ds_x = \alpha ds = u_x dt \text{ s í. t.}; \quad \alpha = u_x : u = ds_x : ds, \quad . \quad . \quad (8)$$

hol:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8a)$$

Az m absolut mozgásának egyenletei és az *egész kényszererő* itt:

$$mx'' = X + (a - k\alpha) R; \quad my'' = Y + (b - k\beta) R; \quad mz'' = Z + (c - k\gamma) R; \quad (9)$$

$$R \{(a - k\alpha)^2 + (b - k\beta)^2 + (c - k\gamma)^2\}^{\frac{1}{2}} = R\sqrt{1 + k^2}. \quad . \quad . \quad (9a\alpha)$$

Szorozva a (9) egyenleteket rendre a, b, c-vel, összegük, tekintettel a Ψ-nek (4) és (5) alatti értékeire ismét a (6) alatti egyenletet és így az R-et is szolgáltatja.

Ezt a (9)-be helyettesítve, oly egyenletrendszert nyerünk, melyben az ismert adatokon kívül a coordinátáknak az időszerint képezett első és második differentiálquotiensei lépnek fel.

Az egyenletek e szerint az általános eljárások szerint tárgyalandók; a pálya differentiálegyenleteit ismét az R-nek a (9)-ből való eliminálásával nyerjük, alakjuk az 56. §. (5)-ével egyezik, de az idézett 56. §. (3) és (4) egyenletei itt nem állanak.

Helyükbe a következők lépnek:

a) A (7) és (8) értelemében:

$$mx'' = mu_x' + m\xi'' \text{ s í. t.}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9a)$$

szorozva rendre $\alpha = u_x : u$-val s í. t., az összeg:

$$m(\alpha x'' + \beta y'' + \gamma z'') = m(u_x u_x' + u_y u_y' + u_z u_z') u^{-1} + m(\alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta''). \quad (9b)$$

Ámde

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = u^2 = s'^2; \quad \text{belőle} \quad u_x u_x' + u_y u_y' + u_z u_z' = uu' = s's'';$$

és így (9)-ből (9*b*) egyenletünket alkotva:

$$mu' + m(\alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta'') = m(\alpha x'' + \beta y'' + \gamma z'') =$$
$$= \alpha X + \beta Y + \gamma Z + (a\alpha + b\beta + c\gamma - k) R,$$

avagy, tekintettel (8*a*)-ra:

$$m\frac{du}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2} = \alpha(X - m\xi'') + \beta(Y - m\eta'') + \gamma(Z - m\zeta'') - kR. \quad (10)$$

b) Felhasználva itt is az 53. és 56. §§. jelöléseit [az x, y, z coordináták differentiálquotiensein és a v_x, v_y, v_z sebességi componenseken kívül, melyek helyébe itt (8) szerint az s_x, s_y, s_z differentiálquotiensei és u_x, u_y, u_z lépnek], rendre áll [53. §. (3)]:

$$\frac{ds_x}{ds}=\alpha \text{ s í. t.}; \quad \varrho\frac{d^2s_x}{ds^2}=\lambda \text{ s í. t.}; \quad \frac{ds}{dt}=u; \quad \frac{d^2s}{dt^2}=u';$$

$$u_x=\frac{ds_x}{dt}=\frac{ds_x}{ds}\cdot\frac{ds}{dt};$$

$$u'_x=\frac{du_x}{dt}=\frac{d^2s_x}{ds^2}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{ds_x}{ds}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{u^2}{\varrho}\lambda+u'\alpha \text{ s í. t.},$$

mely utóbbi három egyenletből a-, b-, c-vel való szorzás és összegezés után, a (8a) és az idézett 53. §. (5) és (6) alakjában is használt Meusnier-féle tétel értelmében:

$$au'_x+bu'_y+cu'_z=\frac{u^2}{\varrho}(\lambda a+\mu b+\nu c)+u'(\alpha a+\beta b+\gamma c)=\frac{u^2}{\varrho_n}. \quad (9b)$$

Másrészt a (9b) baloldali összegét a (8a), (9a) és (9) segélyével képezve:

$$m(au'_x+bu'_y+cu'_z)=m(ax''+by''+cz'')-m(a\xi''+b\eta''+c\zeta'')=$$
$$=aX+bY+cZ+R-m(a\xi''+b\eta''+c\zeta''),$$

melyet (9b)-vel egyesítve:

$$m\frac{u^2}{\varrho_n}=a(X-m\xi'')+b(Y-m\eta'')+c(Z-m\zeta'')+R. \quad . \quad . \quad (11)$$

c) Végre, szorozva a (9) egyenleteit rendre dx, dy, dz absolut coordináta-növekedésekkel és megjegyezve, hogy a következő identitás írható:

$$(a-k\alpha)dx=a(dx-d\xi)-k\alpha(dx-d\xi)+(a-k\alpha)\,d\xi \text{ s í. t.},$$

hol

$$dx-d\xi=\alpha ds \text{ s í. t.} \qquad \text{és} \qquad a\alpha+b\beta+c\gamma=0,$$

a nevezett szorzatok összege:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)dt=Xdx+Ydy+Zdz-kRds+[(a-k\alpha)\,d\xi+\\ +(b-k\beta)\,d\eta+(c-k\gamma)\,d\zeta]\,R,\end{aligned}\right\} \quad . \quad (12)$$

mely az eleven erő tételének itt érvényes alakja.

Áttekinthetőbb e kifejezés, ha $d\sigma$-val jeleljük a felület $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$ pontjának (a mindenkori *coincidáló* pontnak) *absolut* pálya-elemét a térben és ε-nal a szöget, melyet $d\sigma$ az eredő (9aa) kényszererővel, $R\sqrt{1+k^2}$-al képez; ugyanis a (12)-nek R-el szorzott utolsó trinomja nem más, mint e kényszererő $R(a-k\alpha)$ s í. t. derékszögü vetületeinek [(9) és (9aa)] a $d\sigma$ ívelem $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, vetületeivel való szorzat-összege és így

$$Xdx+Ydy+Zdz=d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)+kRds-R\sqrt{1+k^2}.d\sigma\cos\varepsilon. \quad . \quad (12a)$$

E szerint a független erők munkája az m absolut eleven ereje növelésére, és a surlódás legyőzésére fordíttatik; hozzájárul az egész kényszererőnek szorzata a fogpontjának ez erő iránya menti útjával. A (10), (11), (12) egyen-

letek csak más alakban fejezik ki a (9) összefüggéseket. Erőfüggvény esetében a (12) jobboldali első három tagja dV-vel egyenlő.

Az egyenletek általános további értelmezését az olvasóra bízzuk.

58. §. *Síma és érdes mozgó és változó előírt pályán való mozgás.* Ez az eset érzékíthető, ha a 28. §. 2. pontjában és a 47. §-ban említett, a 12. ábrával előtüntetett csövet, 81. l., mozgónak és alakját változónak tekintjük. A mozgás általános tárgyalása következőképen történhetik:

Jeleljék

$$F_1(x, y, z, t) = 0; \qquad F_2(x, y, z, t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

azt a két mozgó és változó felületet, melyek metszővonala az előírt pálya, ennek folyó *absolut* coordinátái x, y, z.

E felületek n_1 és n_2 normálisainak iránycosinusai a_1, b_1, c_1; a_2; b_2, c_2; a pálya α, β, γ iránycosinusú ds íveleme ezekre mindig merőleges lévén:

$$\alpha a_1+\beta b_1+\gamma c_1=0; \qquad \alpha a_2+\beta b_2+\gamma c_2=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ezenkívül:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial x} : \Phi_1 \text{ s í. t.}; \qquad a_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x} : \Phi_2 \text{ s í. t.}, \\ \text{hol} \qquad \Phi_1^2 &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)^2; \quad \Phi_2^2 = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)^2. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Továbbá, megegyezésben az 57. §. jelölésével és (4) és (5) kifejtéseivel:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2F_1}{dt^2} &= \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{d^2z}{dt^2} + \Psi_1 = 0; \\ \frac{d^2F_2}{dt^2} &= \frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{d^2z}{dt^2} + \Psi_2 = 0; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

hol a Ψ_1 s a Ψ_2 csak abban különbözik az 57. §. (4) és (5) egyenleteiben írt Ψ kifejezéstől, hogy az ott előforduló F helyébe itt F_1, illetve F_2 lép.

1. *Síma* pályánál az a, b, c iránycosinusú R kényszererő a pálya mindenkori normális síkjában fekszik, úgy, hogy:

$$a^2+b^2+c^2=1; \qquad \alpha a+\beta b+\gamma c=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

és az m absolut mozgásának egyenletei

$$mx''=X+aR; \quad my''=Y+bR; \quad mz''=Z+cR. \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Szorozva a (6) egyenleteit rendre a_1-, b_1-, c_1-el, összegezve őket; hasonlóképen szorozva őket rendre a_2-, b_2-, c_2-vel, összegezve őket, nyerjük, tekintettel a (3)-ra és (4)-re:

$$\left.\begin{aligned} (aa_1+bb_1+cc_1)\,R = R_{n_1} &= -m\frac{\Psi_1}{\Phi_1} - a_1X - b_1Y - c_1Z = -m\frac{\Psi_1}{\Phi_1} - P_{n_1}; \\ (aa_2+bb_2+cc_2)\,R = R_{n_2} &= -m\frac{\Psi_2}{\Phi_2} - a_2X - b_2Y - c_2Z = -m\frac{\Psi_2}{\Phi_2} - P_{n_2}; \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

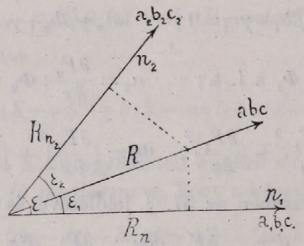
mely összefüggések az R-nek a felületek n_1 s n_2 normálisai menti R_{n_1} és R_{n_2} derékszögű componenseit (vetületeit) adják, bennük P_{n_1} és P_{n_2} a P-nek az n_1 és n_2 menti derékszögű vetületei (componensei). Az R és a, b, c iránycosinusai meghatározására az (5) és a (7) két-két, összesen négy egyenlete szolgál; de gondosan szem elől tartandó, hogy az R *nem* az R_{n_1} és R_{n_2} eredője, hanem hogy R_{n_1} és R_{n_2} az R-nek derékszögű *vetületei* az n_1 és n_2 mentén, 19. ábra.

Ha rövidség kedveért

$$(R, R_{n_1})\measuredangle = \varepsilon_1; \quad (R, R_{n_2})\measuredangle = \varepsilon_2; \quad (R_{n_1}, R_{n_2})\measuredangle = \varepsilon,$$

akkor (3) es (7) szerint:

$$\left.\begin{aligned} \cos\varepsilon_1 &= aa_1+bb_1+cc_1; \qquad \cos\varepsilon_2 = aa_2+bb_2+cc_2; \\ \cos\varepsilon &= a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2; \\ R_{n_1} &= R\cos\varepsilon_1; \qquad R_{n_2} = R\cos\varepsilon_2; \qquad \varepsilon = \varepsilon_1+\varepsilon_2; \end{aligned}\right\} \quad (7aa)$$



19. ábra.

hol R_{n_1}, R_{n_2}, ε a (3)-mal és (7)-tel kifejezetteknek tekintendők.

Segélyükkel R következőleg állítható elő:

$$\begin{aligned} R_{n_2} &= R\cos\varepsilon_2 = R\cos(\varepsilon-\varepsilon_1) = R\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon + R\sin\varepsilon_1\sin\varepsilon \\ &= R_{n_1}\cos\varepsilon + \sqrt{R^2-R^2\cos^2\varepsilon_1}\,.\,\sin\varepsilon = R_{n_2}; \\ (R_{n_2}-R_{n_1}\cos\varepsilon)^2 &= (R^2-R_{n_1}^2)\sin^2\varepsilon; \\ R &= [R_{n_1}^2+R_{n_2}^2-2R_{n_1}R_{n_2}\cos\varepsilon]^{\frac{1}{2}}\sin^{-1}\varepsilon. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7a) \end{aligned}$$

Helyettesítve ezt a (6)-ba, a továbbira nézve a másodrendű differentiál-egyenletek közönséges eljárásai alkalmazhatók.

A mozgásegyenletek további átalakításait a következő 2. pont adja, melynek összes kifejtéseiben és eredményeiben csak $k=0$ teendő, hogy surlódás nélküli esetre érvényesek legyenek.

2. *Érdes* pálya esetében a $-kR$ surlódásbeli erő hozzácsatolásával a mozgás (6) egyenleteiből:

$$mx''=X+(a-k\alpha)R; \quad my''=Y+(b-k\beta)R; \quad mz''=Z+(c-k\gamma)R\,. \quad (8)$$

Szorozva ezeket rendre a_1-, b_1-, c_1-el, illetve a_2-, b_2-, c_2-vel s tekintetbe véve a (2)-tőt és (4)-et, a (7) két egyenletét nyerjük, melyek ismét

az R-nek és az a, b, c iránycosinusok egyikének, ugyanis az (5)-ben felmerülő ismeretlennek kifejezésére alkalmasak.

A további eljárás mint fent a (7)-től kezdve az 1. pont végéig.

A kinetikai surlódás itt is az m-nek a *pályán való* (azaz *ehhez relativ*) mozgásától függ; magának a pályának mozgása és alakváltozása (1)-ben adott s így ismert lévén, jeleljék, megegyezésben a megelőző §. 2. pontja jelölésével: ξ, η, ζ az előírt pálya azon pontjának (a *coincidáló* pontnak) absolut coordinátáit, mely t-kor az m-nek x, y, z absolut helyzetével esik egybe; a coincidáló pontnak a sebessége általánosságban véve más mint a pályával együtt mozgó, de ezenkívül még rajta haladó m-é; legyen v az m-nek, ν a coincidáló pontnak absolut, u az előbbinek az utóbbihoz viszonyított relativ (azaz a pályán való) sebessége, mely a pálya mindenkori érintőjében fekszik, végre l, σ, s az e sebességekkel a nevezett pontok leírt pályaívek. Áll az 57. §. 2. pontja jelölésével:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}=\vec{\nu}+\vec{u}; \quad v=\dfrac{dl}{dt}; \quad \nu=\dfrac{d\sigma}{dt}; \quad u=\dfrac{ds}{dt}; \\ ds_x=\alpha ds=dx-d\xi=u_x dt \text{ s í. t.}, \quad \alpha=u_x:u=ds_x:ds \text{ s í. t.} \end{array}\right\} \quad (9)$$

Itt a ξ, η, ζ; ν, α, β, γ az idő*nek adott, ismert* függvényei.

A megelőző §. 2. pontja *a)*, *b)*, *c)* szakaszainak egyenletei helyébe a pályamenti, a normális s a binormális erőcomponensnek és az eleven erőtételének egyenletei lépnek.

a) Teljesen a megelőző §. 2-ik pontja *a)* szakaszának mintájára nyerjük a (8)-ból:

$$m\frac{du}{dt}=m\frac{d^2s}{dt^2}=\alpha(X-m\xi'')+\beta(Y-m\eta'')+\gamma(Z-m\zeta'')-kR. \quad (10)$$

b) Szorozva a (8) egyenleteit rendre λ-, μ-, ν*-vel (a pálya mindenkori első (fő)-normálisa iránycosinusaival), összszegezve őket, R_n-nel jelelve R-nek e főnormális menti $R(a\lambda+b\mu+c\nu)$ componensét és megjegyezve, hogy itt

$$u_x=\frac{ds_x}{dt}=\frac{ds_x}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}; \quad u'_x=x''-\xi''=\frac{d^2s_x}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{ds_x}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} \text{ s í. t.}, \quad (10a)$$

hol $ds_x:ds=\alpha$; $\varrho d^2s_x:ds^2=\lambda$ s í. t., ϱ a pálya első görbületi sugara, mely ϱ az érintőre merőleges, a megelőző §. 2. szakasza *b)* pontja mintájára nyerjük:

$$m\frac{u^2}{\varrho}=\lambda(X-m\xi'')+\mu(Y-m\eta'')+\nu(Z-m\zeta'')+R_n. \quad . \quad . \quad (11)$$

c) Végre, szorozva a (8)-at a pálya binormálisának f, g, h iránycosinusaival, figyelembe véve a (10*a*)-t és a tangens, normális és binormális egymásra való merőleges voltát:

---

* A ν e §-ban ezentúl már nem jelent relativ sebességet.

$$0=f(X-m\xi'')+g(Y-m\eta'')+h(Z-m\zeta'')+R^b=0, \quad . \; . \quad (12)$$

hol $R^b=R(af+bg+ch)$ az R-nek a binormális menti componense.

d) végre a megelőző §. 2. pontja *c)* szakasza eljárása és jelölése szerint a (8)-ból nyerjük az eleven erőnek itt érvényes tételét:

$$Xdx+Ydy+Zdz=d(\tfrac{1}{2}mv^2)+kRds-R\sqrt{1+k^2}d\sigma\cos\varepsilon, \; . \; . \quad (13)$$

melynek jelentése itt ugyanaz, mint ott.

Jegyzet. A pálya mozgásának és alakváltozásainak egyszerűbb eseteiben gyakran egyszerűbb megfontolások is elegendők [v. ö. a 175—177. §§. példáit].

59. §. *Mozgó és változó sima vagy érdes előírt felületen vagy pályán lévő pontnak egyensúlya.*

A tárgyalást azonnal érdes felületre alkalmazzuk, mert a származtatandó eredményekben csak a (statikai) surlódás k coefficiensét kell zérussal egyenlővé tennünk, hogy a sima felületre, illetve pályára érvényes egyensúlyi feltételeket nyerjük.

Az m pont az előírt felületen vagy pályán egyensúlyban marad, ha ehhez képest relativ mozgása nincsen, szóval, ha a felületnek vagy pályának az m-mel egybeeső (coincidáló) $\xi\eta\zeta$ pontja mindig nem csak ugyanazon coordinátákkal, hanem ugyanazon sebességi és gyorsulási componensekkel bír, mint az m, azaz, hogy az 57. §. (7) és (8), továbbá az 58. §. (9) jelölései értelmében:

$$\xi=x; \quad \xi'=x'; \quad \xi''=x'' \text{ s í. t.}; \qquad u_x=0; \quad u'_x=0 \text{ s í. t.}, \qquad (1)$$

hol ξ, ξ', ξ'' s í. t. a felület, illetve a pálya adott mozgásából ismerteknek tekintendők; épen úgy ismertek az m-re ható X, Y, Z független erőcomponensek.

Ha ismét R az előírt felületre, illetve pályára merőleges ellennyomás és $-k_1R$ a surlódásbeli, itt *statikai* erő, mely a felület tangentiális síkjában, illetve a pálya érintője mentén fekszik és melyre nézve egyensúly alkalmából $k_1 \leqq k$; akkor $R\sqrt{1+k_1^2}$ az egész kényszererő, melynek iránycosinusai legyenek a_1, b_1, c_1.

A mozgás egyenletei e szerint itt

$$m\xi''=X+a_1R\sqrt{1+k_1^2}, \; m\eta''=Y+b_1R\sqrt{1+k_1^2}, \; m\zeta''=Z+c_1R\sqrt{1+k_1^2}, \; . \quad (2)$$

melyekből az R, a_1, b_1, c_1 ismeretlenek azonnal adódnak:

$$\left.\begin{aligned} R\sqrt{1+k_1^2}&=[(m\xi''-X)^2+(m\eta''-Y)^2+(m\zeta''-Z)^2]^{\frac{1}{2}}; \\ a_1&=(m\xi''-X):[(m\xi''-X)^2+(\;)^2+(\;)^2]; \; b_1=\cdots; \; c_1=\cdots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

I. A 29. §. 1. és 2. pontja értelmében az m pont az *érdes* felületen, illetve pályán egyensúlyban marad, ha az eredő kényszererőnek, $R\sqrt{1+k_1^2}$-nek a felület tangentiális síkjával, illetve a pálya érintőjével képezett $\frac{1}{2}\pi-\varepsilon$ szöge nagyobb, mint az $\frac{1}{2}\pi-\varepsilon_0$ határszög, hol

$$\operatorname{tg}\varepsilon = k_{,}\,; \quad \operatorname{tg}\varepsilon_0 = k, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

azaz:

$$\cos\varepsilon \gtreqless \cos\varepsilon_0\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

mely feltételt a (2) vagy a (3) rendszernek ki kell elégítenie és így a (2)-ből csak két független egyenlet marad.

1. Előírt *felület* esetében legyenek a, b, c e felület (coincidáló $\xi\eta\zeta$ pontja) *normálisának* mindenkori iránycosinusai, akkor e feltétel:

$$\cos\varepsilon = aa_{,} + bb_{,} + cc_{,} \gtreqless \cos\varepsilon_0\,, \quad \ldots\ldots \quad (5_1)$$

hol a, b, c a felület adott mozgásából, $a_{,}, b_{,}, c_{,}$ a (3)-ból ismert adatok.

2. Előírt *pálya* esetében legyenek α, β, γ a pálya (coincidáló $\xi\eta\zeta$ pontja) *érintőjének* mindenkori iránycosinusai; a feltétel írható:

$$\sin\varepsilon = \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - \varepsilon\right) = \alpha a_{,} + \beta b_{,} + \gamma c_{,} \lesseqgtr \sin\varepsilon_0\,, \quad \ldots \quad (5_2)$$

hol α, β, γ a pálya adott mozgásából, $a_{,}, b_{,}, c_{,}$ a (3)-ból ismert adatok.

Evvel e kérdés általánosságban teljesen meg van fejtve.

II. Ha *surlódás nincs*, akkor (2)-, (3)-, (4)-ben $k = k_{,} = 0$ irandó s akkor (5_1) és (5_2) csak azt fejezik ki, hogy az R kényszererő az előírt felületre, illetve pályára merőleges.

Ekkor előírt felület esetében a (3)-ban írt $a_{,,}, b_{,,}, c_{,}$ iránycosinusok kifejezései jobboldalainak a felület coincidáló $\xi\eta\zeta$ pontjában emelt mindenkori normálisa iránycosinusaival kell egyenlőknek lenniök; ez két független feltétel, s így a (2)-ből csak egy független egyenlet marad, mely az R nagyságát szolgáltatja.

Ellenben előírt pálya esetében a (3) kifejezte $a_{,,}, b_{,,}, c_{,}$ iránycosinusok a pálya coincidáló $\xi\eta\zeta$ pontjában emelt normális síkban fekvő valamely irányhoz tartoznak; ez egy független feltétel és így (2)-ből két független egyenlet marad, mely a nevezett normális síkban fekvő R nagyságát és irányát szolgáltatja.

3. A dynamika általános módszertani elvei egy pontra vonatkozólag közönséges coordinátákban.

60. §. *Általános megjegyzések.*

A pontmozgás számára a 30—58. §§-okban felállított egyenletrendszerek, mathematikailag véve, a mozgás teljes meghatározására, azaz tökéletes leírására elegendők.

De ezen egyenletek *előállítási módjai*, továbbá *értelmezései*, valamint a megfejtésükre szolgáló vagy legalább egyszerűsítő eljárások és módszerek nagyon különbözők lehetnek.

Az ilyen általános előállítási módszereket, transformátiókat, integrátiókat és értelmezési módokat a dynamika általános módszertani elveinek nevezik (25. §.).

Ha ezek csak transformátiók: nem fejezhetnek ki mást, vagy nem mondhatnak többet, mint azt, a mi már a mozgás-, illetve

egyensúly egyenleteiben foglaltatik ; ha ezek mozgás-egyenleteknek új előállítási módjai, akkor vannak közülök olyanok, melyekből a természetben tényleg végbemehető mozgásoknak csak egy részét lehet nyerni,* míg mások a valóságban végbemenő mozgásokon kívül még olyanokat is, melyek tényleg nem történnek, szolgáltatnak.*

A következőkben ezen módszerek közül azokat, melyek *egy* pontra vonatkozólag érvényesek, taglalni fogjuk; kiterjesztésük anyagi rendszerekre semmi nehézséggel nem jár ; a csakis rendszerekre érvényes integráltételeket [24. §. 1. és 2. tétele] az idézett helyen bebizonyítottuk.

a) *A virtuális elmozdulások elve. Az egyensúly jellege. D'Alembert elve és Lagrange mozgásegyenleteinek első alakja. Fourier elve. A legkisebb kényszer Gauss-féle elve.*

61. §. *A virtuális elmozdulásokról és a virtuális munkáról általánosságban.*

A pont egyensúlyának feltételei [27—29. §§.] még a következő megfontolások alapján állapíthatók meg :

Adva legyen az m tömegű A pont, melynek mozgása általánosságban feltételeknek van alávetve [hogy előírt felületen vagy görbén tartozik maradni s í. t., 13. és 28. §.], melyek e mozgás szabadságát egy vagy két fokkal csökkentik [Kinematika 89. §. 4.] Az m-re hassanak a feltételek létezésétől *független erők* (vires impressæ); ezeken kívül természetesen még *kényszererők*.

1. *Virtuális elmozdulás. A pontnak minden olyféle helyzetváltozása, mely a feltétellel vagy a feltételekkel megegyezik: virtuális elmozdulás.*** A virtuális szó csak a *feltételekkel megegyező, ezeknek megfelelő* jelentéssel bír, értelmét legjobban adhatjuk viszsza a fenforgó körülmények között *lehetséges* szóval.

Nem szükséges, hogy ez az elmozdulás tényleg bekövetkezett legyen : elegendő ha ennek lehetősége fennáll ; *a virtuális elmozdulást mindig az időtől függetlennek tekintjük.*

2. *Virtuális munka.* Szorozva a virtuális elmozdulást az m-re ható erőnek ezen elmozdulás menti componensével : nyerjük a *virtuális munkát;*** ennek kifejezése a tényleges munka kifejezésével egye-

---

* V. ö. Hertz-nek a 7. §-ban, 11. l. idézett műve 16., 23., 24. lapjait.

** A legtöbb modern szerző, a régiebbek kivétel nélkül, nem helyesen virtuális *sebesség*nek nevezik.

*** E munkát sokan virtuális *nyomaték*nak nevezik.

zik meg, de tőle abban különbözik, hogy a virtuális munkára nézve szintén nem a tényleges végzése szükséges, hanem csak lehetőségének fennállása.

A *jelölésre* nézve az általános megállapodás az, hogy minden menynyiségnek a lehetséges (de nem szükségképen bekövetkező) változását a menynyiség jele elé tett δ betűvel jeleljük; ha s azon pályaívek egyike, melyek mentén az m mozoghat, P a reá ható eredő erő, akkor δs a virtuális elmozdulás, δp ennek a P menti componense, δL a virtuális munka, akkor erre nézve:

$$\delta L = P\delta s \cos(P, \delta s) = P\delta p. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Vagy: ha δx, δy, δz az m derékszögű coordinátáinak lehetséges változásai és X, Y, Z a P-nek componensei, az (1) a 38. §. (2) értelmében még írható:

$$\delta L = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

hol a P általánosságban véve a független és a kényszererők eredője.

Ezen utóbbiak közül csak a surlódásbeliek szolgáltatnak járulékot a virtuális munkához [67. §. 2. pontja].

62. §. *A virtuális elmozdulások elve mint az egyensúly feltételeinek egy alakja.*

I. *Surlódás nélküli egyensúlyi fellételéknél* a kényszererők mindig merőlegesek a lehetséges elmozdulás irányára [28. §.]; ezért ezen esetben ezen erők virtuális munkája zérus s fenmarad a független (szabad) erők virtuális munkája.

1. *Egyensúlyban*, nyugalomban van az m, ha a P független erő az előírt felületre vagy pályára *merőleges*, ekkor ez az erő a lehetséges elmozdulás irányára merőleges, azaz (1)-ben $\cos(P, \delta s) = 0$ s így ezen esetben a virtuális munka zérussal egyenlő:

$$\delta L = P\delta s \cos(P, \delta s) = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Viszont, ha a P nem zérus, ellenben a virtuális munka zérus, akkor az (1)-ből

$$\cos(P, \delta s) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

azaz: a P a lehetséges elmozdulásra merőleges s így elmozdulást a nyugvó m-ben nem létesít, azaz, az egyensúly még továbbra is áll fenn; ugyancsak fennáll ez, ha P zérus és $\cos(P, \delta s)$ tetszőleges.

Ezek szerint az egyensúly fennállására szükséges és elegendő feltétel az, hogy a *virtuális munka zérussal egyenlő legyen.*

Ez a virtuális elmozdulás elve egy pontra nézve (de egy anyagi rendszerre nézve is).

2. Az elvet úgy látszik Ubaldo Guido (del Monte) vette észre és pedig egy emeltyűn, Galilei (1665) ezt az eljárást a lejtőre s néhány más egyszerű gépre alkalmazta; egész jelentésében azonban Bernoulli János fogta fel ezt az elvet, miként az 1717-ben Varignon-hoz intézett leveléből kitetszik.*

Lagrange ezt az általa a *virtuális sebesség elvé*nek nevezett tételt az ő híres «*Mécanique analytique*»-jének alapjául és kiinduló pontjául vette.

II. *Surlódással járó egyensúlyi feltételeknél* a független P erő s az előírt felület érintősíkja, illetve az előírt pálya érintője közötti $\frac{1}{2}\pi - \varepsilon$ szögnek nagyobbnak vagy legalább egyenlőnek kell lennie az $\frac{1}{2}\pi - \varepsilon_0$ szöggel, hol $k = \operatorname{tg} \varepsilon_0$, a statikai surlódási együttható [29. §.].

Mindaddig, míg egyensúly áll fenn: a P-nek $P_t = P \sin \varepsilon$ tangentiális componense kisebb vagy legfeljebb egyenlő a $kP_n = kP \cos \varepsilon$ értékkel; a statikai surlódás $-P \sin \varepsilon = -P_t$-vel egyenlő; a feltételt azért még írhatni: $P_t = k_1 P_n$, $k_1 \leqq k$.

Hogy ezen esetre nézve az egyensúly feltételeit a virtuális elmozdulás elvéből lehessen nyerni, jegyezzük meg, hogy az ellennyomás R ereje itt is merőleges a lehetséges elmozdulás irányára és így ennek virtuális munkája, önmagában zérus; fenmarad a P szabad erőnek és a $-P_t$ surlódásnak virtuális munkája, mely egyensúly alkalmával zérussal egyenlő:

$$\delta L = P \delta s \cos (P, \delta s) - P_t \delta s \cos (P_t, \delta s) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

hol megjegyzendő, hogy előírt felületnél a δs elmozdulás a tangentiális síkban, a P_t componens szintén ebben a síkban fekszik, de a kettőnek iránya általánosságban véve nem esik egybe; ellenben előírt pályánál mindkettő ennek érintőjébe esik.

A (3) első tagja az egész P erő végezte virtuális munka, második része ennek P_t tangentiális componense által végezett munka negativ értéke; miután pedig a P, a P_n s a P_t componensekből áll és munkája e kettő munkájának az összege: a (3) különbség nem lehet más, mint a P_n componens virtuális munkája, melyhez itt a $P_t - P \sin \varepsilon = 0$ identitásnak a virtuális munkája kapcsolható:

$$\delta L = P_n \delta s \cos (P_n, \delta s) + (P_t - P \sin \varepsilon)\, \delta s \cos (P_t, \delta s) = 0. \quad . \quad . \quad (4)$$

Itt a $\cos (P_n, \delta s)$ minden esetben zérus, mert P_n a lehetséges elmozdulásra merőleges; továbbá, egyensúly esetében $P_t = P \sin \varepsilon$, $\varepsilon < \varepsilon_0$; e szerint (4) két feltételre bomlik:

$$(P_n, \delta s) \measuredangle = \tfrac{1}{2}\pi; \qquad P_t = k_1 P_n; \qquad k_1 \leqq k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

melyek az ismert egyensúlyi feltételek.

---

* V. ö.: E. Dühring, Geschichte der Principien der Mechanik, 309. l., Berlin 1873.

63. §. *Az egyensúlyi helyzetből való véges és végtelen kicsiny elmozdulás közben végzett munka.*

Jeleljék, megegyezésben a megelőző §§-ok jelöléseivel X, Y, Z, a független erő componenseit, mikor m fogpontjuk helyzete x, y, z és X_0, Y_0, Z_0, mikor m az x_0, y_0, z_0 helyzetben van, 20. ábra, 116. l.

1. Az X, Y, Z componensek a coordináták egyértékű függvényei lévén:

$$X_0=X(x_0, y_0, z_0); \quad Y_0=Y(x_0, y_0, z_0); \quad Z_0=Z(x_0, y_0, z_0) \ . \quad (1)$$

$$X=X(x, y, z)=X[x_0+(x-x_0), y_0+(y-y_0), z_0+(z-z_0)] \text{ s í. t., } . \quad (2)$$

avagy, Taylor sora szerint kifejtve:

$$X=X_0+\frac{\partial X_0}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial X_0}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial X_0}{\partial z}(z-z_0)+\cdots \text{ s í. t.} \quad (3)$$

2. Irva most rövidség kedvéért:

$$\left.\begin{array}{lll} x-x_0=\xi; & y-y_0=\eta; & z-z_0=\zeta; \\ dx=d\xi; & dy=d\eta; & dz=d\zeta; \end{array}\right\} \ . \ . \ . \ . \quad (4)$$

a munkaelem a (3) és (4) segélyével:

$$Xdx+Ydy+Zdz=X_0d\xi+Y_0d\eta+Z_0d\zeta+ \\ +\frac{\partial X_0}{\partial x}\xi d\xi+\frac{\partial X_0}{\partial y}\eta d\xi+\frac{\partial X_0}{\partial z}\zeta d\xi+\cdots+\frac{\partial Z_0}{\partial z}\zeta d\zeta,$$

melyben csak ξ, η, ζ a változók.

3. Ha az m véges, de kicsiny lehetséges Δh elmozdulásának componensei Δx, Δy, Δz és Δs a befutott véges ívrész: akkor az ezen véges helyzetváltozás közben a térbelileg változó X, Y, Z, erők által végezett munka

$$\Delta L=\int_0^{\Delta s}\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)ds=X_0\int_0^{\Delta x}d\xi+Y_0\int_0^{\Delta y}d\eta+Z_0\int_0^{\Delta z}d\zeta+ \\ +\frac{\partial X_0}{\partial x}\int\xi d\xi+\frac{\partial X_0}{\partial y}\int\eta d\xi+\cdots,$$

hol az $\int\eta d\xi$ s í. t. tagok integrátiója csak a Δs pályarész ismeretével lehetséges; e szerint

$$\Delta L=\left\{X_0\frac{\Delta x}{\Delta h}+Y_0\frac{\Delta y}{\Delta h}+Z_0\frac{\Delta z}{\Delta h}\right\}\Delta h+\text{másod- és magasabbrendű tagok.} \quad (5)$$

4. A Δh véges kicsiny elmozdulás iránycosinusai legyenek α, β, γ; a δs elemi lehetséges elmozdulásái α_0, β_0, γ_0 és az utóbbinak componensei δx, δy, δz; irva $\alpha-\alpha_0=\Delta\alpha$, $\beta-\beta_0=\Delta\beta$, $\gamma-\gamma_0=\Delta\gamma$, a 116. lapon lévő 20. ábra szerint áll:

$$\delta x=\alpha_0\delta s \text{ s í. t.}; \qquad \Delta x=\alpha\Delta h=(\alpha_0+\Delta\alpha)\Delta h \text{ s í. t.};$$

miáltal (5)-ből:

$$\Delta L=(\alpha_0 X_0+\beta_0 Y_0+\gamma_0 Z_0)\,\Delta h+(X_0\Delta\alpha+Y_0\Delta\beta+Z_0\Delta\gamma)\,\Delta h+\ldots \quad (6)$$

5. Legyen most az $(x_0\ y_0\ z_0)$ az m-nek egy *egyensúlyi helyzete;* akkor a 4. pont jelöléseivel a virtuális elmozdulások elvének kifejezése:

$$\delta L=(X_0\delta x+Y_0\delta y+Z_0\delta z)=(\alpha_0 X_0+\beta_0 Y_0+\gamma_0 Z_0)\,\delta s=0\ ; \quad (7a)$$

azaz

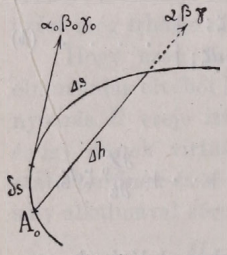
$$\alpha_0 X_0+\beta_0 Y_0+\gamma_0 Z_0=0, \quad (7)$$

és így a (6)-ból a (7) alapján:

$$\Delta L=(X_0\Delta\alpha+Y_0\Delta\beta+Z_0\Delta\gamma)\,\Delta h+\text{másod- és magasabbrendű tagok.} \quad (8)$$

Itt a (8) jobboldali első része is másodrendű és így a ΔL munka az elmozdulási componensekhez képest másodrendű kicsiny.

6. Ez az az eredmény, mely szerint az *egyensúlyi helyzettől számított* minden virtuális elmozdulásnak megfelelő munkát kell értelmezni; ez *másodrendű végtelen* vagy *másodrendű véges kicsiny,* a szerint, a mint az elmozdulás *végtelen* vagy *véges kicsiny.*



20. ábra.

Az első esetben, a másodrendű végtelen kicsiny tagokat elhanyagolva, nyerjük a (7) egyenletet, illetve a megelőző §. (1), (2), (3) egyenleteit.

A második eset az egyensúly természetének, (jellegének, fajtájának) megállapítására alkalmas [v. ö. a következő két §§-ot].

64. §. *Az anyagi pont egyensúlyának különböző eseteiről és ezeknek ismertető jeleiről. Tapasztalatbeli eljárás.*

Stabilis (állékony, maradandó) a pont egyensúlya, ha az, egy véges kis lehetséges elmozdulás után magára hagyatva, egyensúlyi helyzetébe viszszatér; *labilis (csékeny, mulékony),* ha e helyzettől még jobban eltávozik; *indifferens, neutralis (közönbös, semleges)* a test, ha minden lehetséges helyzetben egyensúlyban marad.

E különböző viszonyok helyes megitélhetésére a független erőknek azt az általános, tapasztalatszerű törekvését kell csak szem előtt tartani, hogy ezek a testet, melyre hatnak, saját irányuk mentén mozgatni s így *mindig positiv munkát* végezni akarnak.

Negativ munkát csak akkor végezhetnek, ha ezen erőkön kívül még más okok (pl. más erők vagy a már mozgó test tehetetlensége — mikor mozgásának iránya az erővel tompa szöget képez —) vannak jelen és érvényesülnek [v. ö. alább a jelen §. 2. pontját].

Ha az m egyensúlyban van: akkor annak egy lehetséges végtelen kicsiny elmozdulást tulajdonítva, a független erők végezte munka

zérus, jobban mondva, másodrendű kicsiny [63. §. 6. pontja]; ha eredeti helyzetébe viszszamozdítjuk: ezen erők végezte munka ismét zérus. E szerint az m még a tulajdonképeni egyensúlyi helyzetéhez végtelen közel fekvő helyzetekben is egyensúlyban marad.

Másként áll a dolog, ha az egyensúlyi helyzetből való elmozdulás kicsiny ugyan, de *véges*. Ekkor a független erők végezte munka általánosságban véve nem zérus, hanem habár kicsiny, de *véges* másodrendű [63. §. 6. pontja]; hasonlóképen véges lesz munkájuk, ha az m eredeti egyensúlyi helyzetébe ismét visszamozdúl; ha e viszszamozdulás ugyanazon az úton történik, mint a kimozdulás, akkor az utóbbi esetben végzett munka az előbbi esetben végzettel ellentetten egyenlő.

1. Ha az egyensúlyi helyzettől való kicsiny, de véges elmozdulás közben a független erők végezte munka *positiv*, akkor, az elmozdítás után m-et a mindig reá ható független erőkkel magára hagyva, ezen erők, fent említett általános sajátságuknál fogva, még tovább is akarnak és fognak is positiv munkát végezni, a mit csak úgy tehetnek, hogy az m-et még jobban távolítják el egyensúlyi helyzetéből: e szerint e helyzet egy *labilis (mulékony) egyensúlyi helyzet.*

Példa: Egy domborúságával fölfelé helyezett sima felület legmagasabb pontján lévő m tömegpont, melyre ható független erő csak a föld nehézségi ereje, a legkisebb elmozdulásnál lefelé kezd gördülni, mert ezen elmozdulás folytán ez az erő azt a törekvését, hogy positiv munkát végezzen, azonnal érvényesítheti s így ez az egyensúly *labilis.*

2. Ha az egyensúlyi helyzettől való kicsiny, de véges elmozdulás közben a független erők végezte munka *negativ*, akkor ezen elmozdulás létesítésére még más erők pl. karunk, kezünk ereje s í. t. szükségesek; ha ezek az elmozdulás megtörténte után megszűnnek s az m a mindig reá ható független erőkkel magára leszen hagyatva: akkor ezek az erők *positiv* munkát akarnak és fognak végezni, de ezt csak úgy tehetik, ha az m-et eredeti egyensúlyi helyzete felé *viszsza*mozgatják; e szerint ez *stabilis (maradandó) egyensúlyi helyzet.*

Példa: Domborúságával lefelé helyezett felület sima belső oldala legmélyebb pontján legyen elhelyezve m, melyre ható független erő ismét csak a föld nehézségi ereje; ennek kimozdítására pl. kezünk erejére van szükségünk; a kimozdítás után magára hagyatva az m viszszamozog, mert a földnehézségi erő (ennek a felület érintősíkjában fekvő componense) az m-nek eredeti helyzete felé mozgatása közben végez positiv munkát s így ez az egyensúly *stabilis.*

3. Végre, ha az m-nek kicsiny, de véges elmozdulása közben a

független erők végezte munka zérus, akkor az ugyanezen úton való viszszamozgatás közben sem végeznek ez erők munkát s így ezeknek nincs is törekvésük az m-et viszszamozgatni, mert e közben positiv munkát nem végezhetnek. Ekkor az m a feltételeknek megfelelő minden helyzetben egyensúlyban marad; ez az egyensúly a *közönbös (indifferens)* egyensúly.

Példa: Vízszintes sima felületen egy homogén gömböcske mindenütt marad egyensúlyban s í. t.

4. Vannak esetek, mikor a *pontnak egyensúlyi helyzete egyszerre lehet stabilis, labilis és indifferens,* a szerint, a mint az elmozdulás iránya különböző. Ilyen minden nyeregszerű (anticlastikus) felület esete, pl. a hyperbolás paraboloid-é (Kinematika 523. lap 249*a* ábra), melynek a nyereg symmetria-pontjához húzott érintősíkja vízszintes. Az ezen pontban nyugvó gömböcske, melyre ható független erő a föld nehézsége, egyensúlyban van; és pedig stabilis, labilis és indifferens egyensúlyban, a szerint, a mint a gömböcske elmozdulása oly irányban van, melyben e gömb emelkedik, alábbszáll vagy a vízszintesben marad.

65. §. *A pont erőfüggvényének és egyensúlyának egymáshoz való viszonya.*

A V erőfüggvény sajátsága szerint [42. §. 2. pontja] a δx, δy, δz componensekkel biró virtuális elmozdulásnak megfelelő munka:

$$\delta L = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z = \delta V. \quad . \quad . \quad (1)$$

Egyensúly alkalmával e munka zérus és így

$$\delta V = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

az egyensúly feltétele, mely kifejezi, hogy az *erőfüggvénynek lehetséges (virtuális) változása* az *egyensúly alkalmával zérus* (helyesebben a 63. §. 6. pontjának értelmezése szerint, *másodrendű kicsiny).*

Ez anynyit mond, hogy ekkor az erőfüggvény feltételes [az elmozdulás feltételeivel megegyező] maximumot, minimumot vagy maximum-minimumot mutat.

Ámde: mivel a 44. §. (1*a*) értelmében az $\mathbf{E}_h$ helyzeti erély $\mathbf{E}_h = V_0 - V$, hol V_0 egy véghelyzetre vonatkozó erőfüggvény: a helyzeti erély egyensúly alkalmával minimum vagy maximum vagy minimum-maximum.

1. Ha az egyensúlyi helyzetben a V *minimum:* akkor a δV változás, ha a magasabbrendű tagokat is veszszük tekintetbe: *másodrendü, positiv* menynyiség lehet csak, azaz a független erők (1) alatti

virtuális munkája *positiv* s így az egyensúly csak *labilis* lehet [megelőző §. 1. pontja]; a *helyzeti erély maximum.*

2. Ha ellenben az egyensúlyi helyzetben a V *maximum*, akkor δV, a virtuális munka csak *negativ* lehet és így az egyensúly ez esetben *stabilis* [megelőző §. 2. pontja]; a *helyzeti erély minimum.*

3. Ha a V az m lehetséges pályája mentén *állandó:* akkor a pont egy egyensúlyi felületen van [43. §.] és az egyensúly *közönbös; a helyzeti erély állandó.*

4. Ha az egyensúlyi helyzetben V *maximum-minimum* (ugyanis bizonyos elmozdulási irányokra nézve maximum, másokra nézve minimum [64. §. 4. pontja]), akkor az egyensúly is bizonyos elmozdulásokra nézve *stabilis*, másokra nézve *labilis;* a helyzeti erély is minimum-maximum.

A megelőző §. példáiban az m-re ható földnehézségi erő erőfüggvénye, ha R a gömbalakúnak tekintett, M tömegű föld sugara, h az m-nek a föld felszine feletti magassága [44. §. (7)]:

$$V=f\frac{mM}{r}=f\frac{mM}{R+h}=f\frac{mM}{R}\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-1}=f\left(\frac{mM}{R}-\frac{mM}{R^2}h+\cdots\right). \quad (1)$$

hol a kifejtés első két tagja rendesen elegendő.

Ha h_0 a h nak egy meghatározott értéke, melyre nézve az erőüggvény V_0, akkor a helyzeti erély:

$$\mathrm{E}_h=V_0-V=f\frac{mM}{R^2}(h-h_0)=f\frac{mM}{R^2}h+\text{constans.} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Az m az idézett példák elsejében [64. §. 1. pontja] egyensúlyban van, ha a domborúság legmagasabb helyén van, ott h a legnagyobb és így V minimum, E_h maximum; a másodikban [64. §. 2. pontja] a legmélyebb helyen, hol h a legkisebb és így V maximum, E_h minimum. A harmadik példa vízszintes síkjára nézve a h és így a V is constans, végre a nyeregszerű felület áthajló pontjára nézve a h és az E_h maximum-minimum s így a V minimum-maximum.

Analog viszonyok érvényesek más egyensúlyi helyzetek és másféle erőfüggvények esetében.

66. §. D'Alembert *elve a gyorsító, az elveszett és a független (szabad) erők egyensúlyáról.*

I. D'Alembert, helyesen értelmezve a tetszőleges feltételeknek alávetett testek mozgásegyenleteit: ezeket az utóbbiakat az egyensúly egyenleteinek alakjába hozta.

1. Az A-ban lévő m tömegpontra hasson az X, Y, Z összetevőjű független erő P; az m ezen kívül *tetszőleges* feltételnek vagy feltételeknek legyen alávetve. Ezeknek az utóbbiaknak dynamikai hatása

mindenkor helyettesíthető kényszererő által [13.. 28., 46. §§.], melynek R legyen a nagysága, R_x, R_y, R_z a componensei; 21. ábra.

A most szabadnak tekinthető m mozgásegyenletei [49. §. (5) és 53. §. (8).]:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X+R_x;\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y+R_y;\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z+R_z. \qquad (1)$$

2. Bontsuk szét a $P=\overrightarrow{AB}$ erőt olyformán két componensre, hogy az egyik, az $\overrightarrow{AE}$ az $\overrightarrow{AC}=R$-rel ellentetten egyenlő legyen, a mi mindig lehetséges; ekkor a másikat nyerjük, ha a B végpontot az E-vel egybekapcsoljuk, úgy hogy $\overrightarrow{AB}$ az $\overrightarrow{AE}$ és az $\overrightarrow{AD}$ eredője, 21. ábra.

E szerint az $\overrightarrow{AE}$ és az $\overrightarrow{AC}$ erők egymást teljesen egyensúlyozzák és csak az $\overrightarrow{AD}$ erő marad fenn, mely, miként a 22. ábra is mutatja, a P független erő és az R kényszererő *eredője*. Ez az $\overrightarrow{AD}$ az m-re úgy hat, mintha ez szabad pont volna; az m mozgását csakis ez képes változtatni, e szerint

$$\overrightarrow{AD}=\text{gyorsító erő}=\overrightarrow{m\varphi}=m.\ \text{gyorsulás}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

A független P erőnek $\overrightarrow{AE}$ része az R kényszererőt ellensúlyozván, az m mozgását nem képes megváltoztatni s így a mozgásra nézve hatástalan; ez oknál fogva D'Alembert ezt az $\overrightarrow{AE}$ componenst mely a *kényszererővel mindig ellentetten egyenlő, elveszett erő*nek nevezte; ennek derékszögű componensei $-R_x$, $-R_y$, $-R_z$.

3. Levonva az elveszett erő $-R_x$, $-R_y$, $-R_z$ componenseit a független erő X, Y, Z összszetevőiből, nyerjük a megelőzők szerint a gyorsító erő componenseit, [miként ez az (1)-ből is adódik]:

$$X-(-R_x)=m\frac{d^2x}{dt^2};\quad Y-(-R_y)=m\frac{d^2y}{dt^2};\quad Z-(-R_z)=m\frac{d^2z}{dt^2};\ . \qquad (3)$$

mely egyenletek kifejezik, hogy az elveszett erőcomponensek a független erőcomponenseknek azon részei, melyek az m gyorsulására nincsenek befolyással.

4. Az (1) vagy (3) rendszer írható:

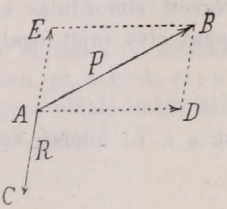
$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}-R_x-X&=0;\\ m\frac{d^2y}{dt^2}-R_y-Y&=0;\\ m\frac{d^2z}{dt^2}-R_z-Z&=0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

szóval: a gyorsító erők, az elveszett erők s a negativ független (szabad) erők összesen zérust adnak, azaz egymást egyensúlyban tartják.

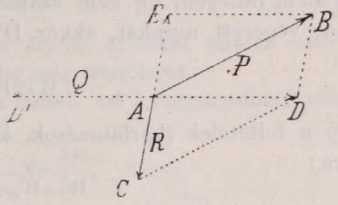
5. Nevezzük D'Alembert-tel az eredő $\overrightarrow{AD}$ gyorsító erővel ellentetten egyenlő $\overrightarrow{AD'}=-Q$ erőt *reactióerő*nek,* 22. ábra; ennek derékszögű componensei $-m\frac{d^2x}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z}{dt^2}$; a (4) írható:

$$X+R_x-m\frac{d^2x}{dt^2}=0\,;\quad Y+R_y-m\frac{d^2y}{dt^2}=0\,;\quad Z+R_z-m\frac{d^2z}{dt^2}=0\,; \quad (5)$$

szóval: a *független erők*, a *kényszererők* és a *reactióerők összege minden pillanatban zérus*, azaz *ezek az erők mindig egyensúlyban tartják egymást.*



21. ábra.



22. ábra.

Az (5) rendszer a legtermészetesebb módon vezet az egyensúly állapotából a mozgás állapotába; erre nézve az egyensúly egyenleteibe [27. §. (2) és 28. §. (4) és (8)] az X, Y, Z helyébe rendre $X-mx''$; $Y-my''$; $Z-mz''$ irandó csak.

6. Ha *nincs surlódás:* a kényszererő a virtuális elmozdulásra merőleges, s így virtuális munkája zérus [62. §. I. szakasza]; e szerint (5)-ből a virtuális munkát képezve, marad:

$$\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z=0.** \quad (6)$$

7. A surlódás erői az 57. §. (9), az 58. §. (8) egyenletei értelmében $-kaR$, $-k\beta R$, $-k\gamma R$ componensekkel bírnak, melyek természetük szerint szintén *elveszett erők*, úgy, hogy az egész elveszett erő componensei:

$$-R_x+k\alpha R\,;\qquad -R_y+k\beta R\,;\qquad -R_z+k\gamma R\,;$$

melyeket a (3)-ba a $-R_x$, $-R_y$, $-R_z$ helyébe kell helyettesíteni.

---

* Összse nem tévesztendő a 48., 49. és 53. §§-ban ugyanígy is nevezett R kényszererővel.

** V. ö. még J. W. Gibbs érdekes értekezését: «On the fundamental formulæ of dynamics», (American Journal of Mathematics, II. k. 49—64. ll., Baltimore 1879), melyben a (6)-ban $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ lép a δx, δy, δz helyébe.

Ekkor D'Alembert elve szintén érvényes.

II. Ezt az elvét szerzője más alakban, más jelentéssel mondta ki [v. ö. erre nézve Szily Kálmán érdekes közleményét a M. T. Akadémia birtokában lévő D'Alembert-féle *Traité de Dynamique* első kiadásának (1743) egy nevezetes példányáról (Műegyetemi Lapok III. kötet, 27. l., 1878), mely a «Gr. Telekiek Alapítványából» való s melybe maga D'Alembert írt a második kiadásnak szánt jegyzeteket, javításokat és pótlásokat!]

Ugyanis, jelelje W a feltételeknek megfelelő virtuális elmozdulás közben az anyagi rendszerre ható erők (t. i. szabad erők) végezte munkát, ha a rendszer ezt az elmozdulást szabadon végezné; W_e pedig az ugyanezen, de nem szabadon végzett elmozdulás közben tényleg végezett munkát, akkor D'Alembert elve, saját fogalmazásában

$$W = W_e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

és így a feltételek (korlátozások, kapcsok s í. t.) folytán vesztett munka:

$$W - W_e = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

avagy, a mi jelölésünkkel

$$(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = (X + R_x)\,\delta x + (Y + R_y)\,\delta y + (Z + R_z)\,\delta z;$$
$$R_x\delta x + R_y\delta y + R_z\delta z = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Ez azt mondja, hogy a *feltételi (kényszer-)erők munkája zérus* [62. §. I. szakasza]; érvényes ha surlódás nincs.

Jelen §. I. pontjában előterjesztett fogalmazás a szokásos Euler-Lagrange-féle.

67. §. *A virtuális elmozdulások elvéből az egyensúly egyenletei; a kényszererők; az* Euler-Lagrange-*féle multiplicátorok.*

Habár 27—29. §§. tárgyalásai teljesen elegendők az egyensúly meghatározására: a következőkben az egyensúly feltételeit olyformán fogjuk transformálni, hogy alakjuk ne csak az egyensúly, hanem a mozgás egyenleteinek előtüntetésére is legyen alkalmas, sőt, hogy azután mintájukra nem csak egy anyagi pont, hanem tetszőleges anyagi rendszer mozgás-egyenleteinek egyik alakját, az ú. n. Lagrange-félét lehessen képezni [68. §].

1. *Sima* előírt felületnél illetve pályánál a 65. §. (1) egyenlete

$$\delta L = X\delta x + X\delta y + Z\delta z = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

a) Az előírt *felület* egyenlete legyen

$$F(x, y, z) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

A virtuális elmozdulás csak a felület mentén történhetvén, (2)-ből:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Az (1)-ben fellépő δx, δy, δz a (3) feltételnek tartoznak eleget tenni, ezért közülük csak kettő lehet független.

Az (1)-et s az egyidejűleg fennálló (3)-et a közönséges módon úgy egyesítjük, hogy (3)-et egy egyelőre ismeretlen, de később meghatározandó és értelmezendő λ együtthatóval, egy EULER-LAGRANGE-féle *multiplicátor*ral megszorozva, (1)-hez hozzáadjuk:

$$\left(X+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}\right)\delta x + \left(Y+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}\right)\delta y + \left(Z+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}\right)\delta z = 0. \quad . \quad . \quad (4)$$

A (4)-ben a (3) értelmében a δx, δy, δz közül szintén csak kettő független, pl. a δy és δz; a λ pedig még tetszőleges.

Ezen utóbbi meghatározására nézve azt a megengedhető választást teszszük, hogy

$$\lambda = -X : \frac{\partial F}{\partial x}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

miáltal a (4)-ben δx együtthatója zérus lesz s (4)-nek csak a második és a harmadik tagja, a független δy- és δz-vel szorzott együtthatók maradnak meg. Ezen két tag összege csak akkor lehet mindig zérussal egyenlő, ha említett együtthatóik elenyésznek: ezek értelmében és az (5) szerint:

$$X+\lambda\frac{\partial F}{\partial x} = 0; \qquad Y+\lambda\frac{\partial F}{\partial y} = 0; \qquad Z+\lambda\frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Az egyenletek természete (homogeneitása) szerint második tagjaik csak erőket jelenthetnek és pedig az $F=0$ feltételnél fogva fellépő kényszererőket R_x-, R_y- R_z-et, melyek az X, Y, Z független erőkkel együtt, egyensúly alkalmával minden irányra nézve zérust adnak [28. és 29. §§].

A 28. §. (2) és (3) eredményei és jelölései tekintetbe vételével

$$\lambda\frac{\partial F}{\partial x} = R_x = Ra = R\frac{\partial F}{\partial x} : \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \text{ s í. t.,}$$

azaz, Φ-vel jelelve e gyököt:

$$\lambda = R : \Phi; \qquad \lambda\Phi = R = -P, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

mely egyenlet a λ együttható értékét és értelmét adja meg.

b) Előírt *pálya* esetében ennek egyenletei legyenek:

$$F_1(x, y, z) = 0; \qquad F_2(x, y, z) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

ezek felületeket jelentenek, melyek közös metszővonala az előírt pálya.

A virtuális elmozdulás e vonal mentén történhetvén csak, (8)-ból:

$$\left.\begin{aligned} \delta F_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F_1}{\partial z}\delta z = 0; \\ \delta F_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F_2}{\partial z}\delta z = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

A δx, δy, δz a (9) két egyenletének tartozván megfelelni: közülük csak egy független van; ez áll most az (1)-ben fellépő δx-, δy-, δz-re nézve is.

A (9)-et a szokásos módon egyesítjük (1)-el, ha őket a még tetszőleges, de később meghatározandó λ_1 és λ_2 együtthatókkal (az EULER-LAGRANGE-féle *multiplicátorok*kal) szorozva az (1)-hez adjuk. Nyerjük így:

$$\left.\begin{aligned} &\left(X+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)\delta x + \left(Y+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)\delta y + \\ &\qquad + \left(Z+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\delta z = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (10)$$

Legyen pl. δz a független coordináta-variátió; a λ_1 és λ_2 együtthatókat most úgy szabad választanunk, hogy értékük a (10)-ben a δx és δy együtthatóit zérussá tegye.

Ezt elérjük, miként azonnal látjuk, ha λ_1-et és λ_2-őt a (10) első két, zérusnak vett együtthatójából meghatározzuk:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 = \left(X\frac{\partial F_2}{\partial y} - Y\frac{\partial F_2}{\partial x}\right) : \Delta_{12}; \qquad \lambda_2 = \left(X\frac{\partial F_1}{\partial y} - Y\frac{\partial F_1}{\partial x}\right) : \Delta_{21} \\ &\text{hol:} \qquad \Delta_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial y} = -\Delta_{21}. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

A λ_1 és λ_2 ezen értékeinél a (10) csak úgy állhat, ha a független δz együtthatója is mindig zérus, úgy, hogy:

$$\left.\begin{aligned} X+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x} &= 0; \\ Y+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial y} &= 0; \\ Z+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Itt is, a (12) egyenletek második és harmadik tagjai az $F_1=0$ s $F_2=0$ feltételeknél fogva fellépő kényszererőket jelenthetnek csak, melyek a független X, Y, Z erőkkel együtt egyensúlyt tartanak.

A λ_1 és λ_2 együtthatókat mechanikailag értelmezendő, jeleljék R_1 és R_2 az F_1- és F_2-nek megfelelő kényszererőket, melyek hozzátartozó felületeik n_1 s n_2 normálisaiba esnek és a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 ezek iránycosinusait, 23. ábra; akkor a (12) értelmében ezen erők derékcomponenseire nézve áll:

$$\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} = R_{1x} = R_1 a_1 = R_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} : \sqrt{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)^2} =$$

$$= R_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} : \Phi_1 \text{ s í. t.}$$

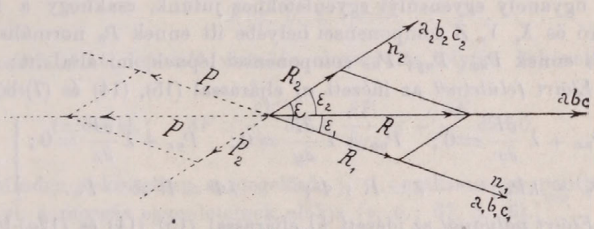
$$\lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x} = R_{2x} = R_2 a_2 = R_2 \frac{\partial F_2}{\partial x} : \sqrt{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)^2} =$$

$$= R_2 \frac{\partial F_2}{\partial x} : \Phi_2 \text{ s í. t.}$$

Jelelve P_1- s P_2-vel a P-nek az n_1 és n_2 menti *azon* ferdeszögű componenseit (*nem* derékszögű vetületeit), melyek eredője a P, 23. ábra, akkor (7) értelmében az egyensúly közönséges feltételei:

$$\lambda_1 \Phi_1 = R_1 = -P_1; \quad \lambda_2 \Phi_2 = R_2 = -P_2 \ldots\ldots (12a)$$

Ezen erők eredője az egész R kényszererő, mely a két felület mindenkori metszőpontjában, ezekre emelt n_1 s n_2 normálisai meghatározta



23. ábra.

síkban fekszik és melynek $R = -P$ a nagysága, a, b, c az iránycosinusai; az R_1 és R_2 componenseiből az eredő kényszererő derékszögű componensei és négyzete:

$$\left.\begin{aligned} R_x = R_{1x} + R_{2x}; \quad R_y = R_{1y} + R_{2y}; \quad R_z = R_{1z} + R_{2z}; \\ R^2 = R_1^2 + R_2^2 + 2R_1 R_2 \cos(R_1, R_2) = P^2. \end{aligned}\right\} \ldots (13)$$

A (12a)-val a λ_1 és λ_2 együtthatók jelentése elő van tüntetve; meghatározásukra nézve megjegyzendő, hogy R a mindenkori adott P-vel ellentetten egyenlő és így szintén nagyság és irányra nézve ismert; továbbá, az R_1 és R_2 a (8)-ból ismert n_1 és n_2 irányokba esnek és így az R_1, R_2, R képezte parallelogrammban [23. ábra] e három erő iránya és az R nagysága adva lévén: az R_1 és R_2 az egyenközény szabályai szerint előállíthatók és a (12a) egyenletek a λ_1-és λ_2-t teljesen kifejezik.

2. *Érdes* előírt felületnél, illetve pályánál a 62. §. II. szakasza értelmében az egyensúly feltétele:

$$P_t = k_t P_n; \quad k_t \leqq k, \ldots\ldots (14)$$

míg a független erő P_n componense a lehetséges elmozdulásra merőleges s így ennek virtuális munkája zérus, azaz:

$$\delta L = P_{nx}\delta_x + P_{ny}\delta_y + P_{nz}\delta_z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

A P-nek P_t componense és a $-k_1 P_n$ surlódási erő ellentetten egyenlők lévén, virtuális munkáik is ellentetten egyenlők:

$$(P_{tx} - k_1 P_{nx})\,\delta x + (P_{ty} - k_1 P_{ny})\,\delta y + (P_{tz} - k_1 P_{nz})\,\delta z = 0,$$

melyet a (15)-hez csatolva és megjegyezve, hogy a P derékszögű componensei: $X = P_{nx} + P_{tx}$ s í. t.,

$$\delta L = (X - k_1 P_{nx})\,\delta x + (Y - k_1 P_{ny})\,\delta y + (Z - k_1 P_{nz})\,\delta z = 0. \quad . \quad (16)$$

A (14) és (15) e formális egyesítése kevesebbet mond, mint az eredeti két egyenlet; azért czélszerűbb a nevezett két egyenlet megtartása.

A pontnak $F(x, y, z) = 0$ feltételét, illetve $F_1(x, y, z) = 0$ és $F_2(x, y, z) = 0$ feltételeit a megelőző 1. szakasz *a)* és *b)* eljárásai szerint kapcsoljuk a (15) egyenlethez; alkalmazva ugyanazokat a megfontolásokat, ugyanoly egyensúlyi egyenletekhez jutunk, csakhogy a független P erő és X, Y, Z componensei helyébe itt ennek P_n normális összetevője és ennek P_{nx}, P_{ny}, P_{nz} componensei lépnek, mi által itt:

a) Előírt felületnél az idézett *a)* eljárással (15), (14) és (7)-ből:

$$\left.\begin{array}{lll} P_{nx} + \lambda \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0; & P_{ny} + \lambda \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0; & P_{nz} + \lambda \dfrac{\partial F}{\partial z} = 0; \\ P_t \leqq k P_n; & \lambda = R : \Phi; & \lambda\Phi = R = -P_n. \end{array}\right\} \quad . \quad (17)$$

b) Előírt pályánál az idézett *b)* eljárással (15), (14) és (12*a*)-ből: ha P_{n_1} és P_{n_2} a P_n-nek azon n_1 és n_2 menti componensei, melyek eredője P_n:

$$\left.\begin{array}{l} P_{nx} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial x} = 0; \\ P_{ny} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial y} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial y} = 0; \\ P_{nz} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial z} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial z} = 0; \\ P_t \leqq k P_n; \quad \lambda_1 \Phi_1 = R_1 = -P_{n_1}; \quad \lambda_2 \Phi_2 = R_2 = -P_{n_2}; \\ R^2 = R_1^2 + R_2^2 + 2R_1 R_2 \cos(R_1, R_2) = P_n^2. \end{array}\right\} \quad . \quad (18)$$

68. §. Lagrange *mozgásegyenleteinek első alakja az időtől explicite függő feltételek esetében* D' Alembert *elve alapján. A kényszererők és az* Euler-Lagrange-*féle multiplicátorok.*

A 66. §. 5. pontjában kifejezett tételt, mely az egyensúly eseteiből a mozgáséira vezet át, most fel akarjuk használni.

De előbb egy fontos megállapodást kell tennünk.

Ugyanis a mozgó pont általánosságban az olyan feltételnek vagy feltételeknek lehet alávetve, melyek az időt explicite, a coordi-

nátákon kívül tartalmazzák; ez akkor áll, mikor az előírt felület, illetve görbe, helyzetét és alakját változtatja [57—59. §§.]

Ilyenkor *virtuális*nak nevezzük *az oly elmozdulást, mely a feltétellel vagy a feltételekkel megegyezik ugyan, de az időtől független* [61. §. 1. pontja], azaz, *melyre nézve az idő a feltételi egyenletben vagy egyenletekben állandó.* Ez anynyit jelent, hogy a mozgó és változó előírt felület, illetve görbe a virtuális elmozdulás közben nyugvónak és változatlannak tekintendő.

Ebben jelentkezik jellemzően a virtuális és a tényleges elmozdulás közötti különbség.

1. *Síma* előírt felület vagy pálya esetében a 62. §. (1) egyenletébe X helyébe $X-mx''$ s í. t. irandó, mi által ebből:

$$\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z=0. \quad . \quad . \quad (1)$$

a) Az előírt felület egyenlete legyen:

$$F(x,\ y,\ z,\ t)=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

melynek a fent definiált virtuális elmozdulás folytán bekövetkező variátiója:

$$t=\text{const.}; \qquad \delta F=\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\delta z=0. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Minden tekintetben a megelőző §. 1. szakasza *a)* pontja szerint járva el, a mozgás egyenleteinek alakja [v. ö.: 67. §. (6).]:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}; \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}; \quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z+\lambda\frac{\partial F}{\partial s}; \quad . \quad (4)$$

hol a jobb oldalak második tagjai a (3) folytán fennálló R kényszererőnek R_x, R_y, R_z, derékszögű componensei.

E kényszererő iránya az (e pillanatban nyugvónak és változatlannak tekintett) $F=0$ felület mindenkori n normálisába esik, úgy, hogy a 67. §. (7) jelölésével itt is:

$$\lambda\Phi=R. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Az R s vele a λ meghatározását az 57. §. (6) egyenlete adja; itt az F és összes differentiálquotiensei az idő explicit függvényei.

b) Az előírt pálya két egyenlete legyen:

$$F_1(x,\ y,\ z,\ t)=0; \qquad F_2(x,\ y,\ z,\ t)=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

melyek virtuális variatiója:

$$t=\text{const.}; \quad \left.\begin{aligned}\delta F_1&=\frac{\partial F_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_1}{\partial z}\delta z=0;\\ \delta F_2&=\frac{\partial F_2}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F_2}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_2}{\partial z}\delta z=0.\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Ezekből a 67. §. 1. szakaszának *b)* pontja alapján a mozgás egyenletei [v. ö. i. h. (12)]:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x};\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y+\lambda_1\frac{dF_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial y};\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial z}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Itt is az egyenletek jobb oldalainak második és harmadik tagjai a (6) folytán fellépő kényszererőket jelentenek, melyek közül az előbbiek eredője az F_1-nek n_1, a második az F_2-nek n_2 normálisába esik, úgy, hogy a 67. §. (12*a*) jelölésével:

$$\lambda_1\Phi_1=R_1; \qquad \lambda_2\Phi_2=R_2, \quad \ldots\ldots \quad (8a)$$

mely R_1 és R_2 és így a λ_1 és λ_2 meghatározására megjegyzendő, hogy az 58. §. (7), (7*aa*), (7*a*) egyenletei az egész R kényszererőt adják meg, mely itt az n_1-menti R_1 és az n_2-menti R_2 eredője; az n_1 és n_2 irányok a (6)-ból ismertek lévén, az R pedig az idézett módon ki lévén fejezve: az R_1 és R_2 a 125. lapon adott 23. ábra parallelogramm-szabályai szerint képezendők. [Az 58. §. idézett egyenleteiben fellépő R_{n_1} és R_{n_2} az R-nek az n_1 és n_2 irányaira való derékszögű vetületei, 19. ábra, 108. l. és így nem egyenlők az R_1- és R_2-vel]. Az F_1 és F_2 és differentiálquotiensei az idő explicit függvényei.

A (4) és (8) az m mozgása LAGRANGE-féle egyenleteinek első alakjai.

c) Ha a (6) feltételekhez még egy, pl. $F_3(x, y, z, t)=0$ feltétel járul, akkor az m e három mozgó s változó felület közös mozgó metszőpontjával esik egybe és így előírt pályán előírt sebességű mozgást végez, melynek e szerint gyorsulásai teljesen advák. De ez már nem mozgási probléma, hanem e mozgás kinematikai jellemzőinek explicit megadása.

Jegyzet. Jeleljék δL a független X, Y, Z erőcomponensek virtuális munkáját, $\delta\lambda$ pedig a gyorsító erő mx'' s í. t. összszetevőinek virtuális munkáját:

$$\delta L=X\delta x+Y\delta y+Z\delta z \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

$$\delta\lambda=m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) \quad \ldots\ldots \quad (9a)$$

Ha mozgás feltételei surlódás nélküliek, akkor e pont (2)—(8) egyenletei érvényesek; szozozva a (4) vagy a (8) egyenleteket rendre δx-, δy-, δz-vel, összegezve őket, és tekintetbe véve a (3), illetve (7) egyenleteket, a (9) és (10) jelölésével

$$\delta L=\delta\lambda, \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

szóval, ily esetekben *a független erők virtuális munkája a gyorsító erőkével egyenlő;* ez pedig ismét az (1) egyenlet.

2. *Érdes* előírt felület vagy pálya esetében a surlódás componensei [50. és 56. §§.] $-k\alpha R$, $-k\beta R$, $-k\gamma R$, melyek a surlódástól nem függő erőkhöz hozzájárulva, az (1) egyenletből

$$(X-k\alpha R-mx'')\,\delta x+(Y-k\beta R-my'')\,\delta y+(Z-k\gamma R-mz'')\,\delta z=0\,. \quad (11)$$

alak keletkezik, melyben α, β, γ az m-nek a mindenkori relativ [(57) és 58. §. 2. szakaszai, ugyanis az előírt mozgó s változó felülethez vagy

pályához viszonyított relativ] mozgásának az iránycosinusai, melyek értékei $\alpha=u_x : u$ s í. t.

Közelebbről pedig,

a) Előírt felület esetében, az (5) tekintetbe vételével, miután $R=\lambda\Phi$ a (4) mozgásegyenletek írhatók:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X+\lambda\left(\frac{\partial F}{\partial x}-k\frac{u_x}{u}\Phi\right);\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y+\lambda\left(\frac{\partial F}{\partial y}-k\frac{u_y}{u}\Phi\right);\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z+\lambda\left(\frac{\partial F}{\partial z}-k\frac{u_z}{u}\Phi\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

A további az 57. §. 2. pontjában található.

b) Előírt pálya esetében a (8) mozgásegyenletekből:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x}-k\frac{u_x}{u}R \text{ s í. t.}$$

avagy, mivel (23. ábra): $R=R_1\cos(R_1, R)+R_2\cos(R_2, R)$ és (7) szerint $\lambda_1\Phi_1=R_1$; $\lambda_2\Phi_2=R_2$,

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X+\lambda_1\left\{\frac{\partial F_1}{\partial x}-k\frac{u_x}{u}\Phi_1\cos(R_1, R)\right\}+\\ &\quad +\lambda_2\left\{\frac{\partial F_2}{\partial x}-k\frac{u_x}{u}\Phi_2\cos(R_2, R)\right\};\\ \ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (13)$$

mely egyenletek további tárgyalása az 58. §. 2. pontja szerint történhetik.

A (12) és (13) a LAGRANGE-féle mozgásegyenletek első alakja ezen esetekben.

c) Egy harmadik feltétel hozzájárulásánál a megelőző 1. pont *c)* szakaszában említett észrevétel érvényes.

69. §. *Az egyensúly egyenletei előírt mozgó és változó érdes vagy sima felület vagy pálya esetében a virtuális elmozdulások elve alapján.*

Ezen tárgyalásnál is, mint az 59. §-ban, surlódást akarunk felvenni, mert a felirandó kifejezéseink a síma felületre, illetve pályára is érvényesíthetők, mihelyt bennük a surlódás együtthatóját zérussal egyenlővé teszszük.

I. Az idézett 59. §. jelöléseit mindenben megtartva, itt is $-k_1R$ a statikai surlódás értéke, R a normális kényszererő; a kettőnek eredője itt is $R\sqrt{1+k_1^2}$, iránycosinusaik rendre α, β, γ; a, b, c; a_1, b_1, c_1; az R mindig merőleges a 68. §-ban definiált virtuális elmozdulásra, míg a $-k_1R$ mindig merőleges az R-re.

A mozgás (azaz itt a relativ nyugalom) egyenletei:

$$m\xi''=X+\alpha,R\sqrt{1+k_1^2}=X+\alpha R-k,\alpha R=X+R_x-k,\alpha R \text{ s i. t.,} \quad . \quad (1)$$

melyek további tárgyalását az idézett 59. §. tartalmazza.

A virtuális munka képzésére az R nem folyhat be, mert a fent nevezett merőlegességnél fogva $R_x\delta x+R_y\delta y+R_z\delta z=0$; e munka (1)-ből:

$$\delta L=(X-m\xi''-k,\alpha R)\,\delta x+(Y-m\eta''-k,\beta R)\,\delta y+(Z-m\xi''-k,\gamma R)\,\delta z=0 \quad (2)$$

Irva most rövidség kedveért

$$\left.\begin{aligned} X-m\xi''=\Xi;\quad Y-m\eta''=H;\quad Z-m\zeta''=Z;\\ \Pi^2=\Xi^2+H^2+Z^2; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

a Π erőt a 62. §. II. szakasza és 67. §. 2. pontja értelmében Π_n és Π_t componensekre bonthatni, melyek közül az első a virtuális elmozdulásra merőleges, az utóbbi pedig az előírt felület érintő síkjában, illetve az előírt pálya érintője mentén fekszik.

Az előbbi ébreszti az R reactióerőt (ellenyomást), az utóbbi a $-k,R$ surlódási erőt, úgy, hogy itt:

$$R=-\Pi_n;\quad -k,R=k,\Pi_n=\Pi_t;\quad k,\leqq k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ezekből észreveszszük, hogy ezen esetre, a (3) s (4) tekintetbe vételével, az (1) írható:

$$\Xi=\Pi_{nx}-\Pi_{tx}=-R_x+k'\alpha R=+\Pi_{nx}+k'\alpha R \text{ s i. t.,}$$

azaz az összes viszonyok és egyenletek az idézett 67. §. 2. pontjának viszonyaitól és egyenleteitől csak abban különböznek, hogy az ott felmerülő X, Y, Z; P, P_n, P_t, P_{nx}, P_{ny}, P_{nz}; P_{tx}, P_{ty}, P_{tz}; P_{n1}, P_{n2} erők helyett itt a (3) értelmében Ξ, H, Z; Π, Π_n, Π_t, Π_{nx}, Π_{ny}, Π_{nz}; Π_{tx}, Π_{ty}, Π_{tz}; Π_{n1}, Π_{n2}* erők lépnek.

A Π erő nagyságát és irányát az ismert ξ'', η'', ζ'' és X, Y, Z adatokból a (3) alapján határozhatjuk meg; Π-t most ismerve:

a) *előírt felületnél* az $R=-\Pi_n$ iránya e felület ismert normálisába esik, melyet tudva, Π a Π_n s a Π_t componenseire bontható, s így $\lambda\Phi=R=-\Pi_n$; a továbbit az idézett 67. §. 2. pontja *a)* szakasza adja.

b) *előírt pályánál* a Π_t ennek érintőjébe esik; ennek irányát ismerve, a Π a Π_n és Π_t componenseire bontható; ezek elseje az F_1 s F_2 felületek n_1 és n_2 ismert irányú normálisai mentén szétbontható

---

* Az a körülmény, hogy az idézett 67. §-ban az $F=0$, $F_1=0$, $F_2=0$ egyenletek az időt explicite nem tartalmazzák, míg itt a t-től explicite függenek, a virtuális elmozdulások elve segélyével képezendő egyenletekre nézve mellékes, mert ezen elmozdulásoknál a t állandónak vétetik [68. §. eleje].

Π_{n1}, Π_{n2} componenseire s így $\lambda_1\Phi_1=R_1=-\Pi_{n1}$, $\lambda_2\Phi_2=R_2=-\Pi_{n2}$; a többit az idézett 67. §. 2. pontja *b)* szakasza adja.

II. *Síma* felület, illetve pálya esetében a fent írt kifejezésekbe $k_t=k=0$ irandó, miáltal $\Pi_t=0$ és az $R=-\Pi$ kényszererő merőleges a felületre, illetve pályára.

70. §. Fourier *elve: Egyensúly alkalmával a virtuális munka positiv nem lehet.*

A megelőző §§-okban tekintetbe vett feltételek értelmében a pont előírt síma vagy érdes, nyugvó vagy mozgó felületen vagy pályán tartozott maradni, melyeknek görbülete hallgatagon végesnek lett felvéve.

Ezen esetekben láttuk, hogy egyensúly alkalmával a pontra ható független erő virtuális munkája másodrendű kicsiny és pedig positiv, zérus vagy negativ, a szerint, a mint az egyensúly esékeny, közömbös vagy állékony [63 és 64. §§.]. Ez a kriterium a természeti erők azon általános tapasztalati sajátságából következett, hogy a pontra ható eredő erő csak akkor fog helyváltozást létesíteni, ha ezen elmozdulás közben positiv munkát végezhet; ellenben, ha e helyváltozás közben ez az erő csak negativ munkát végezhetne: az elmozdulás csak más erő hozzájárulásával létesülhet és ekkor az új eredő erő munkája ismét positiv.

1. Hasonló megfontolások érvényesek, mikor az anyagi pont *akadályozó* feltételeknek [Kinematika 89. §.] vagy oly kényszerítő feltételeknek van alávetve, melyeknél a lehetséges elmozdulások nem egy síkban fekszenek, hol e szerint a görbület végtelen nagy (szakadó).

Ugyanis akadályozó feltétel esetében az egyensúlyban lévő pont lehetséges elmozdulása nem csak a felület vagy a görbe mentén történhetik, mely az akadály határolását képezi, hanem e határtól a szabad tér belsejébe is. A határmenti virtuális elmozdulások a megelőző §§-aiban tárgyaltakhoz tartoznak s így ezekre nézve a virtuális munka zérus. Ellenben a határtól a szabad tér felé való elmozdulások csak akkor létesülnek tényleg, ha e közben a pontra ható erő positiv munkát végezhet, s az egyensúlyi helyzetéből a pontot a reá ható erők a valóságban csak akkor, de akkor mindig fogják kimozdíthatni, ha virtuális munkájuk positiv. De, ha a virtuális elmozdulás olyan, hogy ez erők e közben csak negativ munkát végezhetnek, akkor ezek az erők önmagukban az ilyen elmozdulást soha sem fogják létesíthetni s a pont egyensúlyban marad a határon.

Ugyanily viszonyok állanak, ha pont valamely előírt felület vagy görbe oly helyén van, hol a görbület végtelen nagy, pl. egy kúp csúcsában, vagy egy ékben az élénél, vagy két egyenes képezte 180°-nál kisebb szög csúcsában s í. t. Itt a tér szabad része felé irányított elmozdulásokra a megelőző megfontolások érvényesek, ellenben a határ-

menti elmozdulások itt nem eredményeznek mindig zérus értékű virtuális munkát, mert ezen elmozdulások most nem fekszenek egy síkban és így a pontra ható eredő erővel nem képezhetnek mindig $\frac{1}{2}n$-vel egyenlő szögeket. E szerint itt a határmenti elmozdulásoknál is, egyensúly alkalmával, a virtuális munka zérus vagy negativ.

Összefoglalva a mondottakat: bármily természetű feltételeknek is legyen alávetve az anyagi pont, ez egyensúlyban csak úgy maradhat, ha az erők virtuális munkája zérus vagy negativ * és ezen utóbbi esetben e munka rendje az elmozdulásokéval egyenlő.

Az egyensúly természetére nézve tett megállapodásokat [64. §.] és a jelen §. megfontolásait szem előtt tartva: az *egyensúly*ban lévő pont mind azon virtuális elmozdulásai, melyek munkái elsőrendűek: okvetetlenül negativ virtuális munkát és ezen elmozdulásokra vonatkozólag feltétlenül *stabilis* egyensúlyt involválnak, míg azokra az elmozdulásokra nézve, melyek munkái másodrendűek, az egyensúly stabilis vagy labilis lehet.

2. A mi illeti az anyagi pont *mozgását* az ily általános feltételek esetében, erre nézve kiemelendő, hogy a végtelen nagy görbületi helyeken való mozgás, ha ilyet felvennének, az m sebességénél fogva felmerülő $mv^2 : \varrho$ normális erő értelmében végtelen nagy ily normális erőt s evvel végtelen nagy ellennyomást involválna; az efféle mozgás és erő egyáltalában nem lehetséges a valóságban s legfeljebb csak igen nagy görbületű pályákon való mozgás elvont határeseteinek tekintendő.

Tényleg ily hely csak akkor lehet pályapont, ha benne a *sebesség zérus;* ilyen helyek a pályák forduló pontjai [így pl. egyenesvonalú harmonikus mozgásnál a legnagyobb elongatió helyei, az ingamozgás legmagasabb pontjai, vagy kör gördülésénél leírt cycloisok forduló pontjai s í. t.].

Az akadályozó feltétel ellenben megszünik mozgás-akadály lenni, mihelyt a feltételektől független erőnek a pályára merőleges componense és az m sebességénél fogva felmerülő $mv^2 : \varrho$ erő eredője, a mozgó (vagy nyugvó) pontot az előírt felülethez vagy görbéhez megszünik nyomni, mert ekkor az m az előírt szilárd vagy változó és mozgó pá-

---

* Ezt az elvet kimondatta először Fourier: Mémoire sur la Statique, contenant la démonstration du Principe des Vitesses virtuelles. Journal de l'École polytechnique, V Cahier, an VI, 20—40 ll., 1798., vagy: Oeuvres, Tome II, 477—521 ll. Paris 1890.

Előfordul továbbá Gauss-nak a legkisebb kényszert megállapító értekezésében (l. a 71. §. lábjegyzékét, 133. l.), továbbá Ostrogradsky: Considerations générales sur le Momens de Forces, Mém. de St. Pétersburg 1835; és Farkas Gyula: A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásáról, M. T. Akademia Math. és Természett. Értesitője, XII. kötet 457—472. ll. 1895.

Könyvekben: Rausenberger: Lehrbuch d. analyt. Mechanik, I. köt. 146—149 ll., 1888; Schell: Theorie der Bewegung und der Kräfte, II. köt. 174—175, 195—197. ll. 1880.

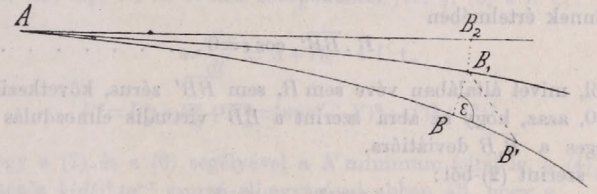
lyát elhagyhatja s mozgása teljesen szabad lesz. V. ö. a 48. §. I. szakasza 4. és a 49. §. 4. és 4*a*, továbbá a 47. §. 1. pontját.

71. §. *A legkisebb kényszer elve (*Gauss *elve).*

Ha az anyagi pont mozgása *surlódás nélkül* történik, akkor e mozgás egy nevezetes sajátságot mutat, melyet Gauss * a legkisebb kényszer elvének nevezett és melyet itt a virtuális elmozdulások elve segélyével bizonyítunk be.

Jeleljék P az m-re ható független erőt, R a feltételekből származó kényszererőt; legyen, 24. ábra, A az m helyzete t-kor, B pedig $t+dt$-kor.

Ha A-ban az összes erők megszünnének, az m az AB_2 egyenesben haladna és B_2 volna a helyzete $t+dt$-kor; ha A-ban csak a kényszererők megszünnének de nem a P, akkor, a pont szabad pályája AB_1-volna, és B_1 volna a helyzete $t+dt$-kor; de a feltételek, illetve az



24. ábra.

ezekkel æquivalens kényszererők eltérítik az m-et e szabad pályától és AB pálya mentén haladni késztetik, úgy, hogy B a tényleges helyzete $t+dt$-kor.

E szerint $\overrightarrow{B_2B_1}$ az az eltérítés, melyet az m-re ható P független erő és $\overrightarrow{B_1B}$ az az eltérítés, melyet az m-re ható R kényszererő a dt időelem alatt létesít; ezek eredője a $\overrightarrow{B_2B}$ deviátió; nagyságukat alább az (5) typus adja.

Gauss «*kényszer*»-nek nevezi a kényszererő létesítette deviátió négyzetének a mozgó tömeggel való szorzatát; jelelve ezt K-val, itt:

$$\text{Kényszer} = K = \overline{B_1B}^2 . m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

1. *A kényszer elve geométriai úton.*

Legyen most B' az m oly helyzete, mely a feltételekkel megegyezik, de a mely nem a dt időelem után tényleg bekövetkezett hely, ha-

* Gauss: Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik. Crelle's Journal für r. u. a. Mathematik, Bd. IV, 232—235. ll., 1829; vagy: Werke, Bd. V., 25—28. ll. 1867.

nem m-nek csak egy *lehetséges, virtuális* helye. Ekkor $\overline{B_1B'}$ volna a kényszererő virtuális deviátiója, míg $\overline{B_1B}$ a tényleges deviátiója; az előbbi a B_1B és a $\overline{BB'}$ componensekből állónak tekinthető, melyek közül a $\overline{BB'}$ a feltételekkel megegyező virtuális elmozdulás, végre ε a nevezett két componens közötti szög, 24. ábra.

Jelelje K' a $\overline{B_1B'}$ virtuális deviátiónak megfelelő kényszert; ez az (1) szerint:

$$K'=\overline{B_1B'}^2 . m, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2a)$$

avagy, az ábra szerint

$$K' = \{\overline{B_1B}^2+\overline{BB'}^2-2\overline{B_1B} . \overline{BB'} . \cos\varepsilon\} m \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Másrészt, az említett BB' virtuális elmozdulás közben az R kényszererő, mely a $\overrightarrow{B_1B}$-vel egyirányú, $R . \overline{BB'} . \cos\varepsilon$ munkát végez, mely azonban azon oknál fogva zérussal egyenlőnek tartozik lenni, mivel a surlódás nélküli kényszererő általános tulajdonsága, hogy virtuális elmozdulások közben munkát nem végezhet.

Ennek értelmében

$$R . \overline{BB'} . \cos\varepsilon = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

a miből, mivel általában véve sem R, sem $\overline{BB'}$ zérus, következik, hogy $\cos\varepsilon=0$, azaz, hogy az ábra szerint a $\overline{BB'}$ virtuális elmozdulás mindig merőleges a $\overline{B_1B}$ deviátióra.

E szerint (2)-ből:

$$K'=\overline{B_1B}^2 . m+\overline{BB'}^2 . m,$$

azaz, tekintettel (1)-re, mindig áll:

$$K' > K; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

szóval: A tényleges mozgásnál fellépő kényszer mindig kisebb, mint bármily más, a feltételekkel megegyező mozgás kényszere; avagy Gauss fogalmazásában: *a valóságban végbemenő mozgás mindig a szabad mozgáshoz a lehető legközelebbi megegyezésben megyen végbe, azaz, a tényleges kényszermozgás kényszere minden lehetséges (a feltételekkel egyező) mozgás kényszerei között a legkisebb.*

A tétel e fogalmazásban csak surlódást nem mutató mozgásoknál érvényes.

Jegyzet. Az «*elveszett*» erő [66. §.] itt $-R$; ennek iránya a $\overrightarrow{B_1B}$-be esik és így az elveszett erők munkája,

$$-R . \overline{B_1B}$$

mindig *ugyanaz marad*, bármilyen is legyen a virtuális B_1B' deviátió, mert ennek a $-R$ menti componense mindig csak a $\overline{B_1B}$.

2. *A kényszer elve analytikailag.*

Valamely gyorsulás s a létesítette deviátióra nézve az áll, hogy

az utóbbi iránya a gyorsuláséval megegyezik, nagysága pedig egyenlő a gyorsulás felének az időelem négyzetébe való szorzatával [Kinematika 47. §. (4)].

Ha a pont sebessége az időelem elején zérus, akkor e deviátió egyszersmind az időelem közben tényleg leírt (másodrendű kicsiny) utat jelenti.*

a) Az R kényszererőnek $R:m$ gyorsulás s ennek $\overline{B_1B}$ deviátió felel meg; az idézett tétel szerint:

$$\overline{B_1B}=\tfrac{1}{2}\frac{R}{m}(dt)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

és így (1) szerint a kényszer:

$$K=\overline{B_1B}^2 . m=\tfrac{1}{4}\frac{R^2}{m}.(dt)^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

b) Másrészt, minden kényszermozgás differentiálegyenletei, ha X, Y, Z a P-nek, R_x, R_y, R_z az R-nek componensei [49. §. (5) s í. t.]:

$$m\frac{d^2x}{dt}=X+R_x \quad \text{s í. t.,}$$

miből

$$R^2=R_x^2+R_y^2+R_z^2=(mx''-X)^2+(\,'')^2+(\,'')^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

úgy, hogy a (7) és a (6) segélyével a K minimum feltétele, a (4) egyenlet, a közös $\frac{1}{4}(dt)^4 m^{-1}$ szorzó elhagyásával abban áll, hogy a

$$\left\{\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)^2+\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)^2+\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)^2\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

*kifejezés az összes lehetséges mozgások között a ténylegesen bekövetkező mozgásra nézve minimum legyen.***

b) *A működés és variátiója. A legkisebb működés Maupertius-féle elve. A stationárius működés Hamilton-féle elve.*

72. §. *A működés (actió) definitiója és kifejezésének különböző alakjai.*

Jeleljék, mint eddig, m a mozgó pont tömegét, s pályaívét, $v=ds:dt$ sebességét, t a folyó időt, s_1, s_2 az ívhoszszat t_1, t_2 időpillanatokban (6, 25. és 29. ábrák; 63, 136 és 154. ll.).

Képezve az mv mozgás-menynyiségnek a ds ívelemmel való szorzatát: nyerjük az m pont *működés-elemét* vagy *elemi actióját*, $d\mathbf{A}$-t:

---

* Mint az egyenletesen gyorsuló egyenesvonalú mozgásnál, mert a gyorsulás az időelem alatt állandónak tekinthető.

** V. ö. Gibbs-nek a 121. l. lábjegyzékében idézett értekezése 62. l.

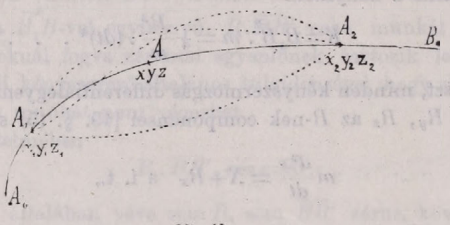
$$dA = mvds = mv^2dt, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

avagy, integrálva e szorzatokat az $_1$ és $_2$ határok között, keletkezik a MAUPERTUIS *-től úgynevezett *működés* vagy *actió*:

$$A = m\int_{s_1}^{s_2} vds = m\int_{t_1}^{t_2} v^2dt = A, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

hol az m-tömeget hallgatagon az időtől függetlennek tekintjük.

A $\imath ds = v^2dt = (x'^2+y'^2+z'^2)\,dt$ és az $x'dt = dx$, $y'dt = dy$, $z'dt = dz$ figyelembe vételével (2)-ből:



25. ábra.

$$A = m\int_1^2 vds = m\int_1^2 (x'dx+y'dy+z'dz). \quad \ldots\ldots \quad (2a)$$

a) Ha v_m a sebességnek az s_2—s_1 ívkülönbségre vonatkozó *középértéke*, akkor erre nézve az arithmetikai középértékek általános szabályai szerint áll $v_m(s_2-s_1) = \int_{s_1}^{s_2} vds$; s ekkor a (2) első alakjából:

$$A = (mv_m)\,.\,(s_2-s_1); \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

szóval: *a működés egyenlő a mozgás-menynyiség középértékének a befutott ívrészszel való szorzatával.*

b) Az m eleven ereje: $\mathbf{T} = \frac{1}{2}mv^2$; s ennek a t_2—t_1 időközre vonatkozó középértéke, $\mathbf{T}_m = (\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{T}dt) : (t_2-t_1)$, úgy, hogy a (2) második alakjából:

---

* V. ö. a 75. §-ot és 4. pontja lábjegyzékét, 145. l.; továbbá BEKE MANÓ: A legkisebb működés elve a GAUSS-féle görbület-elmélet alapján. M. T. Ak. Math. és Termtt. Értesítő, II. k. 133—162. ll. 1885.

A. MAYER: Geschichte des Principes der kleinsten Action. Leipzig, 1877 (Veith u. Comp.); v. HELMHOLTZ, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1887, részletesebben a 145. l. lábjegyzékében.

$$A=2\int_{t_1}^{t_2} T dt=2T_m(t_2-t_1); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

azaz: *a működés egyenlő az eleven erő kétszeres középértékének a lefolyt időközzel való szorzatával.*

c) Ha az m mozgására nézve az *eleven erő tétele áll*, és ez *csak surlódás nélküli* mozgásokra nézve áll, [51. és 56*a*. §. 1. pontjai] akkor az eleven erő $d\mathbf{T}$ változása egyenlő a *független* erők dL munkájával és ez ismét a *gyorsító* erők $d\lambda$ munkájával [68. §. 1. szakaszának *Jegyzete* (10)], úgy, hogy

$$T=L+C=\lambda+I \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4aa)$$

hol C, illetve I az eleven erő azon értékei, melyekkel az m abban az időpillanatban bír, a melytől az L, illetve a λ munkát kezdjük számítani; ezek e szerint kezdő állandók, melyek a *kezdő sebességek*től függenek.

A (4) egyenletbe *egy* $\mathbf{T}$ helyébe a (4*aa*)-t téve:

$$A=\int_{t_1}^{t_2}(T+L)\,dt+C(t_2-t_1); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

$$A=\int_{t_1}^{t_2}(T+\lambda)\,dt+I(t_2-t_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4b)$$

d) Conservativ erőknél a független erők munkája ∂L mindig egyenlő az erőfüggvény ∂V változásával; ha ezenkívül *még az eleven erő tétele is áll*, akkor e két tétel egyesítésének alakja az *energia elve* [44. §. (3) és (2)]:

$$T=V+H; \quad \text{vagy} \quad T=E-E_h, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5a)$$

hol H constans és a 44. §. 2. egyenlete szerint $\mathbf{E}=\mathbf{T}_0$, az eleven erő értéke, mikor a helyzeti energia zérus.

Az (5*a*) két alakjának különbségéből $E_h+V=E-H=$ két állandó különbségével, mely szintén csak állandó lehet, és így a H az $\mathbf{E}$-től, azaz a $\mathbf{T}_0$-kezdő eleven erőtől csak az időtől független állandóval különbözhetik, szóval H épen úgy, mint a $\mathbf{T}_0$ *a kezdősebesség függvénye*, hol kezdősebesség alatt általában az abban (a különben tetszőlegesen választható) pillanatban érvényes sebességet értjük, melyben a helyzeti erélyt zérusnak veszszük [44. §.].

Az (5*a*) mindkét oldalaihoz $\mathbf{T}$-t adva, avagy ezeket 2-vel szorozva, a (4)-ből:

$$A=\int_{t_1}^{t_2}(T+V)\,dt+H(t_2-t_1)=\int_{t_1}^{t_2}(T-E_h)\,dt+E(t_2-t_1) \quad . \quad . \quad (5)$$

$$A = 2\int_{t_1}^{t_2} V dt + 2H(t_2 - t_1) = -2\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{E}_h dt + 2\mathbf{E}(t_2 - t_1) \quad . \quad . \quad . \quad (5a)$$

d a) Ha pedig a $\mathbf{T} = V + H$ és az $\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = V + H$ egyenletek elsejéből a **T**-t, másodikából a dt-t kifejezve, ezeket (4)-be helyettezzük, nyerjük, az idő elemet így eliminálva, JACOBI alakját *

$$A = \int_1^2 \sqrt{2m(V+H)}\, ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

73. §. *Variátió. Az eleven erő variátiója csak erőfüggvény esetében egyenlő a virtuális munkával.*

1. *Variátió* alatt értjük itt általában véve a menynyiségeknek azt az elemi változását, mely a mozgásnak minden tetszőleges gondolható kis változása folytán bekövetkezik.

Mind a coordináták, mind a sebességek variálhatnak; a mozgást olyképen is szabad variáltnak felvennünk, hogy az e variálással már nem felel meg a mozgás általános egyenleteinek és így az eleven erőnek ezekből közvetetlenül folyó tételének sem; az ilyen mozgás e szerint a valóságban nem fog végbe menni.

Ha ellenben a variálás a mozgás egyenleteinek megfelel, s így az eleven erő tételének is, akkor e variálással való mozgás olyan, mely a valóságban *végbe mehet* és ilyen számtalan van, míg adott erőknél, feltételeknél és kezdő-állapotnál *tényleg* csak *egy* meghatározott mozgás következik be.

Legyenek x, y, z a mozgó pont coordinátái és δx, δy, δz ezeknek tetszőleges variátiói, akkor ezek az utóbbiak általában véve az m minden helyzetére nézve mások lévén, a coordináták folytonos függvényeinek tekintendők és értelmezésük:

$$\delta x = x + \delta x - x\,; \quad \delta y = y + \delta y - y\,; \quad \delta z = z + \delta z - z\,; \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

továbbá, a variátió folytán

$$\left.\begin{array}{llll} x, & y, & z & \text{átment:} \quad x+\delta x\text{-, } y+\delta y\text{-, } z+\delta z\text{-be;} \\ x+dx, & y+dy, & z+dz & \text{«} \quad x+dx+\delta(x+dx)\text{-be s í. t.} \end{array}\right\} \quad (1a)$$

E szerint x, y, z-ben δx, δy, δz a három variátió, [mely a coordinátáknak tetszőleges három függvénye], ellenben $(x+dx, y+dy, z+dz)$-ben e variátiók differentiáljaikkal, azaz $d(\delta x)$-, $d(\delta y)$-, $d(\delta z)$-el növekedtek; e növekedések másrészt az (1a)-ból rendre a következők:

$$d(\delta x) = \delta(x+dx) - \delta x = \delta(dx)\,; \text{ s. í. t.}: \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

miből kitünik, hogy a d és δ *jelű műveletek sorrendje felcserélhető.*

---

* Dynamik 45. l.

2. *Az eleven erő variátiója és a gyorsító erők virtuális munkája.*

Az eleven erő közönséges tétele szabad, vagy surlódás nélküli mozgásnál [39. §. (4); továbbá az 51. és 56*a*. §§. 1. pontjai]:

$$dT = Xdx + Ydy + Zdz; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

ennek variátiója:

$$\delta(dT) = \delta(Xdx) + \delta(Ydy) + \delta(Zdz);$$

avagy, kifejtve és (2)-nél fogva a d-vel és δ-val jelelt míveletek sorrendjét megfordítva

$$d\delta T = Xd\delta x + \delta Xdx + Yd\delta y + \delta Ydy + Zd\delta z + \delta Zdz. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Integrálva és a partiális integrátió

$$\int Xd\delta x = X\delta x - \int dX\delta x \text{ s í. t.}$$

formáit használva, (4)-ből

$$\delta T = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + \int (\delta Xdx - dX\delta x + \delta Ydy - dY\delta y + \delta Zdz - dZ\delta z), \quad (5)$$

Itt X, Y, Z az m-re ható független erő componensei úgy a szabad, mint a surlódásnélküli mozgásnál és ezek virtuális munkája ekkor mindig egyenlő a gyorsító erők munkájával [68. §. (10)]:

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

melynek az (5)-be való helyettesítésével:

$$\left.\begin{aligned} &\delta T - m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) = \\ &= \int (\delta Xdx - dX\delta x + \delta Ydy - dY\delta y + \delta Zdz - dZ\delta z). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

A (7) jobb oldala általában véve nem zérus s így bal oldala sem.

3. *Az eleven erő variatiója erőfüggvény esetében a virtuális munkával egyenlő.*

Kimutatjuk, hogy a (7) jobb oldala eltünik, ha az erők csak a coordinátáktól függő $V(x, y, z)$ erőfüggvénynyel bírnak; * ekkor [42. §. (5)]

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

s ezen erők szintén csak a coordináták függvényei, úgy hogy:

$$\delta X = \frac{\partial X}{\partial x}\delta x + \frac{\partial X}{\partial y}\delta y + \frac{\partial X}{\partial z}\delta z \text{ s í. t.};$$

$$dX = \frac{\partial X}{\partial x}dx + \frac{\partial X}{\partial y}dy + \frac{\partial X}{\partial z}dz \text{ s í. t.};$$

---

* Az időtől explicite is függő erőfüggvényekre való kiterjesztését l. Réthy Mór: «A legkisebb actió elve», M. T. Ak. Math. és Természettudományi Értesítő XIII. kötet 1—15. és 299—310. ll. 1895.

melyek felhasználásával a (7) jobb oldali differentiálja:

$$\left.\begin{aligned}&(\delta X dx - dX\delta x)+(\delta Y dy - dY\delta y)+(\delta Z dz - dZ\delta z)=\\ &=\frac{\partial X}{\partial x}(\delta x dx - dx\delta x)+\frac{\partial Y}{\partial y}(\delta y dy - dy\delta y)+\frac{\partial Z}{\partial z}(\delta z dz - dz\delta z)+\\ &+\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)(\delta z dy - dz\delta y)+\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)(\delta x dz - dx\delta z)+\\ &+\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)(\delta y dx - dy\delta x).\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (9)$$

A jobb oldali első három tag identikusan zérus; a három utolsó tag pedig csak akkor tünik el mindig, ha rendre:

$$\frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y}; \qquad \frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial z}; \qquad \frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}; \quad . \; . \; . \; (10)$$

ezek az egyenletek pedig a (8) kifejezések által elégíthetők ki és így a (7) jobb oldala csakugyan zérus és belőle:

$$\delta \mathrm{T}=m(x''\delta x+y''\delta y+z''\delta z), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

ha az erők csak a coordinátáktól függő $V(x, y, z)$ erőfüggvénynyel bírnak,* azaz, ha az energia elve áll, 22. és 44. §§.

A (8) helyettezésével a (3)-ból, a (6)-ból és a (11)-ből:

$$d\mathrm{T}=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz=dV; \quad . \; . \; . \; . \; (12)$$

$$m(x''\delta x+y''\delta y+z''\delta z)=\frac{\partial V}{\partial x}\delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\delta y+\frac{\partial V}{\partial z}\delta z=\delta V; \quad . \; . \; . \; . \; (13)$$

$$\delta \mathrm{T}=\delta V. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

74. §. *A legkisebb működés elve. Conservativ erők.*

Képezzük a működés variátióját az eleven erő variátiója segélyével.**

---

* Lagrange [Oeuvres, T. I, 375. l. (1867)] mondja már: ha a (10) összefüggések nem állanak, akkor a (7) jobboldali integráljait meg kell vizsgálni, de az ennek tekintetbe vételével talált egyenletek már nem a «valóságos mozgásegyenletek».

** A variátió értelmezésének könynyítése czéljából a mozgást teljesen ismertnek, az összes coordinátákat, sebességeket, gyorsulásokat, erőket s í. t. *egy független u változó* (az u. n. *sorozó-változó) segélyével kifejezetteknek tekintjük;* igy pl.

$$x=f(a, b, c, \ldots u); \quad y=g(a, b, c, \ldots u); \quad z=h(a, b, c, \ldots u);$$

hol $a, b, c, \ldots$ a zavartalan $A_0A_1AA_2$ pálya parameterei, 26. ábra, 142. l. melyek n száma tetszőleges nagy lehet.

A *variált* $A_0A_1'A'A_2'$ pályának egyenletei legyenek:

$$x+\delta x=f_1(a+\delta a, b+\delta b, c+\delta c, \ldots u); \quad y+\delta y=g_1(a+\delta a, \ldots, u),$$
$$z+\delta z=h_1(\ldots),$$

1. *Az eleven erő és variátiója:* *

$$T=\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\delta T^{**}=mv\delta v=m(x'\delta x'+y'\delta y'+z'\delta z') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Felhasználva a $vdt=ds$, $x'dt=dx$, $y'dt=dy$, $z'dt=dz$ összefüggéseket

$$\delta T dt=mds\delta v=m(dx\delta x'+dy\delta y'+dz\delta z') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

2. *A működés és variátiója:* **

A 72. §. (2a) kifejezése alapján:

$$A=\int_1^2 mvds=\int_1^2 m(x'dx+y'dy+z'dz); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\delta A^{**}=\int_1^2 m[\delta vds+v\delta(ds)]=\int_1^2 m(\delta x'dx+\delta y'dy+\delta z'dz)+$$

$$+\int_1^2 m[x'\delta(dx)+y'\delta(dy)+z'\delta(dz)];$$

azaz tekintettel (3)-ra és a δ és d felcserélhetőségére [73. §. (2)]:

$$\delta A=\int_1^2 \delta T dt+\int_1^2 m[x'd(\delta x)+y'd(\delta y)+z'd(\delta z)] \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

A jobb oldali második rész partiális integrátióval transformálható:

$$\int_1^2 x'd(\delta x)=(x'\delta x)_2-(x'\delta x)_1-\int_1^2 \delta x dx' \text{ s í. t.},$$

hol a dx', dy', dz' az x'', y'', z'' gyorsulási componensekkel fejezhetők ki: $x''dt=dx'$ s í. t., úgy, hogy (5)-ből

---

hol az f, g, h függvény-alakok átmentek a tetszőleges f_1, g_1, h_1 alakokba és a δa, δb, δc . . . parameter-variátiók is tetszőlegesek legyenek; mindezek pl. csak annak a feltételnek feleljenek meg, hogy $u=u_0$ argumentumnál $\delta x_0=\delta y_0=\delta z_0=0$, miáltal az eredeti s a variálás után előállott pályák egymást $x_0 y_0 z_0$ helyen A_0-ban metszik, 26. ábra, a mi összehasonlítások megtevésére igen előnyös.

A pályáknak A és A', illetve A_1 és A_1' illetve A_2 és A_2' pontjaiban u, u_1, u_2 a közös argumentumok; a mozgás egyenleteiben felmerülő menynyiségek variátiója azokat a különbségeket jelentik, melyek e menynyiségeknek a zavartalan és a megvariált pálya ugyanazon u argumentumára nézve képezett értékei között fenállanak.

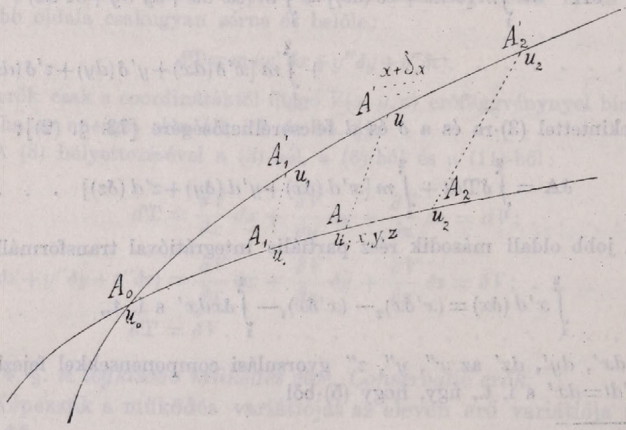
* A δT értelmezése szintén a 26. ábra alapján történhetik: ugyanis, ha T_0 az eleven erő értéke A_0-ban, T- és $T+\delta T$ az A- és A'-ben, akkor $T-T_0$ az eleven erő növekedése az eredeti pálya A_0A íve befutása közben és $T+\delta T-T_0$ a variált pálya A_0A' íve befutása közben.

** Itt A az eredeti pálya, 26. ábra, A_1A_2 íve mentén vett (4) alatti integrál; u_1 és u_2 a független változó határai lévén; $A+\delta A$ pedig a variált pálya $A_1'A_2'$ íve mentén vett (4) integrál *ugyanazon* független u_1 és u_2 határok mellett.

$$\delta A = \int_1^2 \delta T dt + (x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z)_2 - (x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z)_1$$
$$- \int_1^2 m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Ez a működés teljes változásának analytikai kifejezése; ez eddig kizárólagosan kinematikai összefüggés, mely érvényes, ha a pálya variátiója egészen tetszőleges és a tekintetbe vett A_1A_2 pályarész kezdő- és vég-*helyzete* is tetszőlegesen változott.

Ha a (6)-ot mathematikai kifogástalansággal akarjuk felírni, akkor a benne felmerülő összes menynyiségeket az u független változóval kifejezetteknek kell tekintenünk és dt helyébe $\frac{dt}{du}\,du$-t írnunk, hol $\frac{dt}{d}$ szintén u függvényének tekintendő, miáltal a (6):



26. ábra.

$$\delta A = \int_{u_1}^{u_2} \delta T \frac{dt}{du} du - \int_{u_1}^{u_2} (x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) \frac{dt}{du} du$$
$$+ (x_2'\delta x_2 + y_2'\delta y_2 + z_2'\delta z_2) - (x_1'\delta x_1 + y_1'\delta y_1 + z_1'\delta z_1), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

mely alak az integrálok u_1 és u_2 határainak állandóságát, de az A_1, A és A_2, A_2' kezdő- és vég*helyzetei*-nek változhatóságát fejezi ki.

3. *A működés variátiója szilárd kezdő- és véghelyzet esetében.*

A pályát most olyképen tekintjük variáltnak, hogy az A_1A_2 ív kezdő- és végpontja változatlan maradjon, ellenben a közöttük fekvő ívrész alakja tetszőlegesen változzon, 27. ábra.

Ekkor az A_1 és A_2 helyzetek variátiói zérusok, azaz

$$0 = \delta x_1 = \delta y_1 = \delta z_1 = \delta x_2 = \delta y_2 = \delta z_2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8$$

miáltal a (6) vagy (7) egyenletből:

$$\delta \mathbf{A} = \int_1^2 [\delta \mathbf{T} - m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z)]\, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

4. *Az energia elve esetében a működés variátiója zérus.*

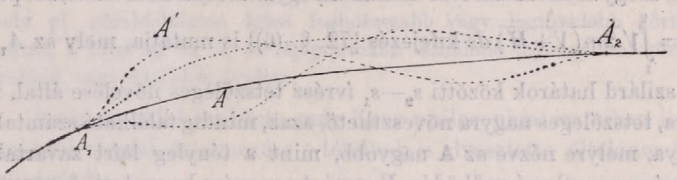
Ha az m-re ható erők csak a coordinátáktól függő erőfüggvénynyel bírnak: a megelőző §. (11) egyenlete szerint

$$\delta \mathbf{T} - m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

és így a (9)-ből:

$$\delta \mathbf{A} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

azaz a működés variátiója zérus.



27. ábra.

5. *A legkisebb működés elvének értelmezése.*

A (11) tétel mechanikai jelentése a következő:

Az **A** jelenti az m tömegpont működését, a mely tömegpont szabadon vagy surlódás nélküli feltételek mellett (tetszőleges, de) tényleges mozgásának megfelelő erők hatása alatt magára hagyatva, zavartalan pályájának A_1 helyétől A_2-ig mozog (27. ábra); δ**A** jelenti e működés azon változását, mely bekövetkeznék, ha az m ezen A_1A_2 tényleges pályaívét, változatlan kezdő- és végpontok mellett, zavartalan alakjától végtelen kis mértékben elváltoztatná, de ezen eltérített mozgás szintén szabad-, vagy a surlódásnélküli erőfüggvényes mozgás.

Talált (11) alatti tételünk azt mondja, hogy *a működés ezen így keletkezett variátiója zérus, azaz végtelenszer kisebb, mint a zavartalan tényleges pályától való eltérés (deviátió) értéke.*

Az m pont pályájára nézve az ily variátió csak akkor lehetséges, ha mozgása szabad, vagy ha surlódásnélküli *felületen* történik; *előírt pálya alakja nem variálható.*

Ilyen variátió létesíthető, ha pl. az m előírt síma felületen tetszőleges erők behatása alatt mozog s magára hagyatva A_1AA_2 pályarészt ír le; ha most a felületen e pályához végtelen közel fekvő $A_1A'A_2$ síma barázdát (vagy síma vályút, csövet) képzelünk, melyen az m az A_1-től A_2-ig kénytelen mozogni: akkor ez az m-nek a 3. pont szerint variált mozgása.

Hasonlóképen, mikor a pont egészen szabadon mozog és tényleg A_1AA_2 pályarészt futja be, akkor az ehhez végtelen közel vezetett $A_1A'A_2$ tengelyű síma csövek segélyével a bennük haladó m pályáját ugyancsak a 3. pont értelmében variáltuk.]

75. §. *Folytatás. A működés a zavartalan pályára nézve minimum vagy állandó.*

1. A megelőző §. (11) alatti $\delta\mathbf{A}=0$ a *szükséges* feltétel, hogy **A** maximum vagy minimum legyen; de *nem elegendő* egy ilyennek létezésére [l. alább a 3. pontot].

E szerint a $\delta\mathbf{A}=0$ jelenti, hogy a zavartalan pályára nézve az **A** működés maximum vagy minimum vagy állandó.

Hogy azonban absolut maximum egyáltalában nem lehet, azt pl. az $\mathbf{A}=\int_1^2 \sqrt{2m(V+H)}\,ds$ kifejezés [72. §. (6)] is mutatja, mely az A_1 és A_2 szilárd határok közötti s_2—s_1 ívrész tetszőleges növelése által, 27. ábra, tetszőleges nagyra növeszthető, azaz, mindig található számtalan pálya, melyre nézve az **A** nagyobb, mint a tényleg leírt zavartalan pályára vonatkozó működés. E szerint a magára hagyatott m zavartalan (el nem térített) pályájára vonatkozó ezen működés absolut maximum nem lehet, csak relativ maximum vagy minimum vagy állandó.

2. E tétel megállapítója, Maupertuis (1744, 1746) abban a véleményben volt, hogy a működés minden természeti mozgásra nézve kivétel nélkül minimum, habár Maupertuis maga elvét csak az ütközésre és a geométriai fénytörésre és fényviszszaverődésre alkalmazta, de ezt mégis abban a teleologiai alakban mondotta ki, hogy a természet a mozgásai végzésére a legkisebb működést fordítja.

L. Euler (1744) ezen metaphysikai értelmezéssel nem volt megelégedve és különösen kiemelte, hogy az elv ellenálló (surlódó) közegben való mozgásra nem áll. Lagrange «Mécanique analytique»-jében * az elvnek bármely philosophiai értelmezését határozottan elvetve, ezt tisztán csak analytikai fogalmazásában tekintette érvényesnek és tekintettel az **A**-nak a 72. §. (4) kifejezésére, ezt «a legnagyobb vagy legkisebb eleven erő» elvének nevezte s az **A**-nak maximum vagy minimum feltételt tulajdonított.

3. Hogy azonban az **A** nem mindig minimum, azt úgy látszik először Poisson ** vette észre; abban a speciális esetben pedig, mikor az m-re független erők nem működnek, és m az előírt sima felületen tartozik maradni [55. §.], mikor e szerint gæodäsiai görbét ír

* I. kötete, 1811, Dynamique, §. VI. Section III. 39. pont; vagy: Oeuvres, Tome XI. 315. l. Paris, 1888.

** V. ö. Jacobi: Dynamik, 46. és 51. ll.

le, Jacobi [i. h.] mutatta ki, hogy a működés sem maximum, sem minimum-, illetve maximum is, minimum is lehet.

Ugyanis a 72. §. (4) alakjából indulva ki, a most nevezett speciális esetben az m eleven ereje nem változhatik, hanem nyerjük

$$A=2T(t_2-t_1)$$

és az A variátiója csak a t_2-t_1 időköz változása folytán állhatna be.

E szerint itt:

$$\delta A=2T\delta t$$

és a $\delta A=0$ feltételből a $\delta t=0$ következik, azaz a pont az A_1 és A_2 helyzetek közötti ívrészt itt (állandó sebességgel) a legkisebb vagy a legnagyobb időköz alatt futja meg; ezen ív ennek értelmében geodäsiai görbe, mely pl. gömbfelületen lehet leghoszszabb vagy legrövidebb görbe, a szerint, a mint az az A_1 és A_2 pontokon áthaladó legnagyobb kör nagyobbik vagy kisebbik ívrésze.

Evvel az előbb említett, még Kant philosophiai irataiban is szereplő teleologiai értelmezése e tételnek is elvesztette általános jogosultságát.*

4. Az elvnek Jacobi-féle alakja.

Ezt a 72. §. (6) egyenlete variátiójának zérussal való egyenlő tevése adja:

$$\delta A=\delta\int_1^2\sqrt{2m(V+H)}\,ds=0\,,\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

hol ds az m leírta ívelem és H a variátióra nézve állandó.

5. Nem fölösleges megjegyezni, hogy a megelőző §. (11) egyenlete még akkor is áll, ha az A_1 és A_2 végpontok *helyzete* akként variáltatik, hogy az A_1 elemi eltolodása, δr_1, melynek δx_1, δy_1, δz_1 a componensei, merőleges az m-nek A_1 helyen való sebességére (a pályához A_1-ben húzott érintőre) és az A_2-é, δr_2, melynek componensei δx_2, δy_2, δz_2, merőleges az A_2-ben a pályához húzott érintőre (28. ábra, 146. l.), mert ekkor

$$x_1'\delta x_1+y_1'\delta y_1+z_1'\delta z_1=0\qquad\text{és}\qquad x_2'\delta x_2+y_2'\delta y_2+z_2'\delta z_2=0,$$

s a megelőző §. (6) és (10) értelmében $\delta A=0$ ki van elégítve s a legkisebb működés elve a mozgás ezen variátiójára nézve is fennáll. Azonban lehetetlen a pálya ezen változtatását tényleg létesíteni, mivel az

---

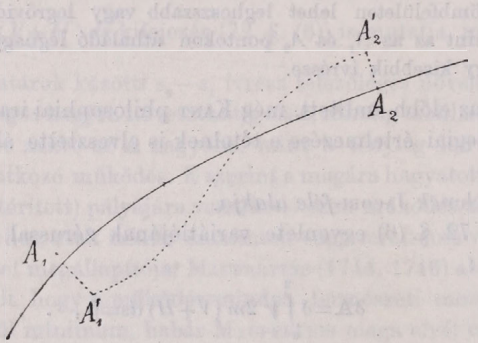
* Jelenleg ismét nagyobb jelentőséget tulajdonítanak ezen elvnek nem csak a mechanikában, hanem a physika nehány más fontos ágaiban is; v. ö. Thomson & Tait, Natural Philosophy, 2. kiadás I_1, 326. §., 337. l. 1879; v. Helmholtz: Über die physikalische Bedeutung des Principes der kleinsten Wirkung, Crelle's Journal für r. u. a. Mathematik, Bd. 100, 137—166, 213—222. ll. 1887; Hertz: Principien der Mechanik, XXV. l. és 16—29. ll. 1894.

m, merőlegesen találva az A_1A_1' áthatatlan pályarészt, beleütközik s vagy nyugodtan ott marad, vagy viszszappattan, a szerint, a mint az ütközés rugalmatlan vagy rugalmas.

6. Itt a legkisebb működés elvét az eleven erő, és az energia elvéből (e szerint implicite a surlódás nélküli erőfüggvényes mozgás egyenleteiből) származtattuk; megfordítva: a mozgás egyenleteit a legkisebb működés elvéből is nyerhetjük; ezt a következő §-ban fogjuk tenni.

76. §. *A mozgás közönséges egyenletei a legkisebb működés elvéből.*

Induljunk ki az eleven erőnek a 72. §. (5*a*) alatti



28. ábra.

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{T} &= \tfrac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = H+V, \\ \text{illetve:}\quad dt &= \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\,(H+V)}}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

erőfüggvényes alakjából és a működésnek Jacobi-féle formájából [megelőző §. (1)]:

$$\delta\mathrm{A} = \delta\int_1^2 \sqrt{2m\,(H+V)}\ \sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2} = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

A variátió végrehajthatása czéljából tekintsük a mozgás problémáját megoldottnak, belőle az *időt eliminált*nak és az x, y, z-t *egy* független q coordinátával kifejezettnek; írjunk

$$\frac{dx}{dq} = \dot{x}, \quad \frac{dy}{dq} = \dot{y}, \quad \frac{dz}{dq} = \dot{z}, \quad \ldots\ldots (2a)$$

miáltal (1)-ből

$$dt = \frac{\sqrt{m}\ \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}{\sqrt{2(H+V)}}\,dq\,; \quad \ldots\ldots \quad (1a)$$

továbbá Jacobi rövidítése:

$$\sqrt{2m(H+V)}\ \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} = P, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

hol P a V által a coordinátáktól, ezenkívül $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$-től függ.

E szerint a (2), melyben a határok és a független q nem variálnak [74. §. első lábjegyzéke, 140. és 141. ll., és 3. és 4. pontjai]:

$$0 = \delta \int_1^2 P\,dq = \int_1^2 \delta P\,dq = 0 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$0 = \int_1^2 \left\{ \frac{\partial P}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial P}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial P}{\partial z}\,\delta z + \frac{\partial P}{\partial \dot{x}}\,\delta\dot{x} + \frac{\partial P}{\partial \dot{y}}\,\delta\dot{y} + \frac{\partial P}{\partial \dot{z}}\,\delta\dot{z} \right\} dq = 0 \quad (5)$$

Ámde itt partiális integrálás segélyével és tekintettel a határ-*helyzet*ek állandóságára a δ és d míveletek felcserélhetőségére [73. §. (2)] és (2a)-ra:

$$\int_1^2 \frac{\partial P}{\partial \dot{x}}\,\delta\dot{x}\,dq = \int_1^2 \frac{\partial P}{\partial \dot{x}}\,\frac{\delta dx}{dq}\,dq = \int_1^2 \frac{\partial P}{\partial \dot{x}}\,d(\delta x) =$$

$$= \left[\frac{\partial P}{\partial \dot{x}}\,\delta x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{d}{dq}\left(\frac{\partial P}{\partial \dot{x}}\right)\delta x\,dq.$$

A jobb oldali első tag $\delta x_1 = \delta x_2 = 0$-nál fogva elesik; s így (5)-ből

$$0 = \int_1^2 \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{d}{dq}\left(\frac{\partial P}{\partial \dot{x}}\right)\right)\delta x + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{d}{dq}\left(\frac{\partial P}{\partial \dot{y}}\right)\right)\delta y + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{d}{dq}\left(\frac{\partial P}{\partial \dot{z}}\right)\right)\delta z \right\} dq. \quad \ldots \quad (6)$$

Ámde (3) alapján:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}{2\sqrt{H+V}}\sqrt{2m}\,\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{s. í. t.}; \quad \ldots \quad (7)$$

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{\partial P}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dq}\left(\frac{\sqrt{2m(H+V)}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\cdot\dot{x}\right) \text{ s. í. t.};$$

de ebben a (2a) és (1a) értelmében

$$\dot{x} = \frac{dx}{dq} = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{dq} = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{\sqrt{m}\,\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}{\sqrt{2(H+V)}},$$

miáltal

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{x}} = \frac{\sqrt{2m(H+V)}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\,\dot{x} = m\frac{dx}{dt},$$

és

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{\partial P}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dq}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\sqrt{m}\,\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}{\sqrt{2(H+V)}}\,\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) \text{ s. í. t.} \quad (8)$$

A (7)- és (8)-al a (6) írható:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \int_1^2 & \frac{\sqrt{m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}}{\sqrt{2(H+V)}} \times \\ \Big\{ & \Big(\frac{\partial V}{\partial x} - m\frac{d^2x}{dt^2}\Big)\delta x + \Big(\frac{\partial V}{\partial y} - m\frac{d^2y}{dt^2}\Big)\delta y + \Big(\frac{\partial V}{\partial z} - m\frac{d^2z}{dt^2}\Big)\delta z \Big\}\, dq, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

mely integrál tetszőleges határokra nézve csak akkor zérus, ha a { } zárójeles kifejezés zérus; ez pedig d'Alembert elvét jelenti csak a coordinátáktól függő erőfüggvény esetében [68. §. 1. pontja].

Jegyzet: Az *idő* a variátióban nem szerepel, mert már eleve ki lett küszöbölve.

77. §. *A stationárius működés elvének* Hamilton*-féle alakja, ennek értelmezése.*

1. A megelőző 74. és 75. §§. értelmében a működés a zavartalanhoz végtelen közel fekvő, ugyanazon kezdő- és végpontokkal biró pályákra nézve állandó, azaz, a működés csak magasabbrendű kicsiny menynyiségekkel térhet el a zavartalan pályára vonatkozó működéstől [74. §. 5. pontja]; ezért nevezte Hamilton e tételt az *állandó* vagy a *stationárius működés elvé*nek.

2. De Hamilton * ezen elvnek lényegesen más formát adott és érvényessége körét is szelesítette, a menynyiben az energia megmaradása elvét nem kellett feltételeznie, csak erőfüggvény létezését, mely azonban az időtől explicite is függhet.

Ugyanis, legyen az

$$I = \int_1^2 (\mathrm{T}+V)\, dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

integrálban (az ú. n. Hamilton-féle integrálban, melyet szerzője *főfüggvény*nek [principal function] és *characteristikus függvény*nek is nevez) **T** az eleven erő, V a coordinátáktól és az időtől is explicite függő $V(x, y, z, t)$ erőfüggvény, és az integrál kiterjedjen azon t_2—t_1 időközre, mely alatt az m az A_1A_2 pályaívet futja be (25. és 26. ábrák, 136. és 142. ll.); ezen integrál e szerint szemlátomást a *működés* egyik, a 72. §. (5) egyenletében kifejezett

$$\mathrm{A} = \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{T}+V)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} H dt = I + \int_{t_1}^{t_2} H dt. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

alakjának *első része.*

a) Ha most az *I integrált* úgy variáljuk, hogy a t_1 és t_2 időpontok és az A_1 és A_2 kezdő- és véghelyzetek változatlanok maradjanak,

* V. ö. a 25. §. 5. pontjának második lábjegyzékét, 45. l.

27. ábra 143. l., és hogy a folyó t idő a független változó, mely e szerint nem variál,* akkor az így képezett δI variátiót zérussal egyenlővé téve, Hamilton kimutatta, hogy a $\delta I=0$, azaz a:

$$\delta I=\delta\int_{t_1}^{t_2}(\mathrm{T}+V)\,dt=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

feltétel a mozgás általános egyenleteit tartalmazza.

(b) A *működés* (2) egyenletét az *a)* alatt említett módon variálva: első tagjából a (3) jobb oldalát nyerjük, második tagjáról kimutathatjuk, hogy a jelzett eljárással képezett variátiója zérus.

E tagban ugyanis a $H=\mathrm{T}-V$ menynyiség állandó vagy változó, a szerint, a mint V az időtől független vagy ennek explicit függvénye; ezen utóbbi esetben az m összes dynamikai energiája általában véve nem állandó, hanem az időnek függvénye.

[Példa ily esetre egy m tömegű gömböcske, mely a föld felszíne feletti z magasságú vízszintes síkban egyenletes v sebességgel halad; összes energiája $\mathrm{E}=\frac{1}{2}mv^2+mgz$, g lévén a földnehézségi gyorsulás; és $mgz=\mathrm{E}_h=V_{z=0}-V$ az m helyzeti erélye, $V=f\frac{Mm}{R+z}$, hol M a föld tömege, R sugara, [44. §. (5), (6), (7)]; ha most pl. felvennők, hogy változatlan tömeg mellett a föld sugara az idővel növekszik-, vagy, hogy változatlan R mellett maga az M tömeg változnék, vagy, hogy mindkettő változnék: akkor a $g=-f\frac{M}{R^2}$ az időnek explicit függvénye és E még állandó z mellett is a t-től függ.]

Mindaddig, míg V függvénynek $V(x, y, z, t)$ alakja (azaz az erőfüggvény törvénye) az *a)* alatti variátió közben ugyanaz marad, a most t-től függő H nem variálhat, mivel a független t nem variál és így a (2) jobb oldali második tagjának variátiója zérus.

E szerint csakugyan, *ugyanazon erőtörvény mellett* az A (2) alatti kifejezésének az *a)* pontban megállapított módon történt *variátiója* az I (1) alatti integráljának ugyanily módon végezett *variátiójával egyenlő*, röviden, ily esetben:

$$\delta\mathrm{A}=\delta I \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

3. A következőkben a Hamilton-féle

$$\delta I=\delta\int_{t_1}^{t_2}(\mathrm{T}+V)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\delta(\mathrm{T}+V)\,dt=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

feltételből előállítjuk a mozgás egyenleteit.

---

* V. ö. a 74. §. első lábjegyzékében, 140. és 141. ll., az u-ra nézve mondottakat.

a) Az (5)-ben jelelt variálások végrehajtása előtt jegyezzük meg, hogy a 73. §. 1. pontja értelmében itt [a t és dt *nem* variál] folytatólagosan:

$$\delta(dx)=d(\delta x);\quad \delta(dy)=d(\delta y);\quad \delta(dz)=d(\delta z);\quad \ldots \quad (6)$$

$$\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d(\delta x)}{dt};\quad \delta\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d(\delta y)}{dt};\quad \delta\left(\frac{dz}{dt}\right)=\frac{d(\delta z)}{dt};\quad . \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x\right)=\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{dx}{dt}\frac{d(\delta x)}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{dx}{dt}\delta\left(\frac{dx}{dt}\right);$$

$$\tfrac{1}{2}\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{dx}{dt}\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}dx\right)-\frac{d^2x}{dt^2}\delta x \quad \text{s í. t.} \quad (8)$$

b) Az eleven erő variátiója és ennek időintegrálja a (8) tekintetbe vételével:

$$\delta\mathrm{T}=\tfrac{1}{2}m\left\{\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\delta\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\delta\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\};$$

$$\left.\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\delta\mathrm{T}dt=m\Big[\frac{dx}{dt}\delta x+\frac{dy}{dt}\delta y+\frac{dz}{dt}\delta z\Big]_{t_1}^{t_2}-\\ -\int_{t_1}^{t_2}m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)dt.\end{aligned}\right\}\quad \ldots \quad (9)$$

c) Másrészt az erőfüggvény variátiójának időintegrálja:

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta V dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\delta y+\frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right)dt \quad \ldots \quad (10)$$

d) Ha most a variátiónak a jelen §. 2. pontja *a)* és *b)* szakaszaiban adott értelmezése szerint az 1 és 2 határhelyzetek nem variálnak, akkor

$$0=\delta x_1=\delta y_1=\delta z_1=\delta x_2=\delta y_2=\delta z_2=0; \quad \ldots \quad (11)$$

és a (9) jobb oldali első része eltünik.

Összegezve (9) fenmaradó részét és (10)-et, az (5) feltételből

$$\left.\begin{aligned}\delta\int_{t_1}^{t_2}(\mathrm{T}+V)\,dt=\\ =\int_{t_1}^{t_2}\Big[\Big(\frac{\partial V}{\partial x}-m\frac{d^2x}{dt^2}\Big)\delta x+\Big(\frac{\partial V}{\partial y}-m\frac{d^2y}{dt^2}\Big)\delta y+\Big(\frac{\partial V}{\partial z}-m\frac{d^2z}{dt^2}\Big)\delta z\Big]dt=0,\end{aligned}\right\}\quad (12)$$

mely egyenlet tetszőleges t_1 és t_2 határokra nézve csak akkor állhat, ha a [ ] zárójeles kifejezés zérus.

e) Azonnal kiderül, hogy a (12)-nek zérussal egyenlített ezen [ ] zárójeles kifejezése a d'Alembert-féle elvet fejezi ki erőfüggvény esetében; ugyanis megállapodásunk szerint $V(x, y, z, t)$ az erőfüggvény és

$$X=\frac{\partial V}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial V}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial V}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

az m-re ható független erő componensei; e szerint [*t nem* variál] (12)-ből

$$\left.\begin{aligned} X\delta x+Y\delta y+Z\delta z &= \frac{\partial V}{dx}\delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\delta y+\frac{\partial V}{\partial z}\delta z= \\ &=\delta V=m(x''\delta x+y''\delta y+z''\delta z) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Ez pedig d'Alembert elve, mikor erőfüggvény létezik [68. §. (1)]; ezen esetben ez az elv egyenértékű a stationárius működés Hamilton-féle elvével, azaz az (5) feltétellel.

4. Gyakran

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta\mathbf{T}+X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)\,dt=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

alakban írják ezt az elvet, mondván, hogy az m mozgásának variátiója tetszőleges, de annak a feltételnek van alávetve, hogy az m t_1-kor A_1-ben, t_2-kor A_2-ben legyen, 27. ábra, 113. l. Felhasználva a (9)-et és (11)-et, a (15)-ből nyerjük:

$$X\delta x+Y\delta x+Y\delta z=m\,(x''\delta x+y''\delta y+z''\delta z)\,; \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

s ez d'Alembert elve surlódás nélküli feltételes mozgásra nézve [68. §. (1)].

De a (15) alak, mely általánosabb, mint az (5), már nem jelenti egy határozott integrál variátióját, hanem az eleven erő variátiója és a virtuális munka öszszegének időintegrálját, mely mindazon variált pályára nézve zérus, melynél az m t_1-kor A_1-ben, t_2-ben A_2-ben van.

5. Még más fogalmazását adhatni Hamilton ezen elvének; ugyanis, kiindulva a működésnek a 72. §. (5) egyenletében adott második alakjából, az ott fellépő $\mathbf{E}$ öszszes energia az itt tárgyalt $V=V(x, y, z, t)$ esetben szintén az időnek explicit függvénye, mely nem variál [2. pont *b)* szakasza] és így az elv írható:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(\mathbf{T}-\mathbf{E}_h)\,dt=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

azaz: az *m tömegpont pályájának tetszőleges két pontja közötti ívrészét a meghatározott t_2-t_1 időköz alatt úgy írja le, hogy e közben a kinetikus energiája és a helyzeti energiája közötti különbségnek időintegrálja minimum.*

6. De a legfontosabb sajátsága az (5) alatti Hamilton-féle elvnek abban áll, hogy a $\mathbf{T}$ eleven erő s a V erőfüggvény segélyével a mozgás differentiálegyenleteit a derékszögű coordináták helyett bármily más coordinátákban (helymeghatározókban) nagy könnyűséggel fejezhetni ki, sokkal egyszerűbben, mintha a kész derékszögű mozgás-

differentiálegyenletekbe pl. a Lagrange-éiba [68. §. (4) és (8)] közvetetlenül helyettesítenők az x, y, z és differentiálquotiensei helyébe bármily más q_1, q_2, q_3 coordinátákat és differentialquotienseiket, melyekkel az x, y, z bármiféle transformáló formulák segélyével állanak kapcsolatban [92. §. (3a)—(3bb)].

Ugyanis az (5)-ben a T csak a sebességnek és V a coordinátáknak és az időnek explicit függvénye; ha ezt a két menynyiséget bármily q_1, q_2, q_3 három helymeghatározó és ezek első differentiálquotiensei (a sebességi componensek) segélyével fejezzük ki s az (5)-ben jelelt variátiót a coordináták, illetve a sebességek változásai segélyével képezzük, akkor az (5) csak úgy állhat fen, ha az integrál jele alatt álló egyes, a nevezett független δq_1, δq_2, ... variátiókkal szorzott tagjai zérussal egyenlők, mely összefüggések közvetetlenül egyenlők a mozgásegyenleteknek a szóban forgó coordináták szerinti alakjaival [v. ö. a 94. és 95. §§. eljárását].

c) *Hamilton integrálja és ennek teljes variátiója. A variáló működés elve; a mozgás egyenleteinek transformátiója. A characteristikus egyenlet teljes integráljának Jacobi-féle alakja.*

78. §. *A Hamilton-féle integrál általános sajátságai.*

Hamilton észrevette, hogy a róla nevezett I integrál [77. §. (1)], legyen a benne előforduló V erőfüggvény az időnek csak implicit (t. i. csak x, y, z folytán) vagy explicit függvénye, (azaz akár fennáll a dynamikai erély megmaradásának elve, akár nem) igen nevezetes sajátságokat mutat.

Ha függvény alakjában van előállítva, ez az integrál a mozgás nehány általános tulajdonságának előtüntetésére és számos mechanikai probléma tárgyalásának nagymérvű könnyítésére alkalmas; így különösen fontos az a sajátsága, hogy segélyével, ha bizonyos alakba van hozva, a mozgás kész integrál-egyenletei közvetetlenül felírhatók [l. a 82. és 84. §§. 2. pontjait].

Azt az eljárást, a melylyel a nevezett integrál ezen sajátságait megállapítjuk, Hamilton szerint a variáló működés elvének nevezik.

Abban a speciális esetben, a mikor V csakis a coordináták függvénye s az időt explicite nem tartalmazza, a mikor e szerint az energia elve közönséges fogalmazásában áll s így $H=\mathbf{T}-V$ *állandó* [44. §. (3)], akkor magáról a *működés*ről [77. §. (2)] kimutatjuk, hogy a Hamilton-féle integrálhoz igen analog és épen oly fontos szereppel bír a dynamikában.

De előbb a működés [77. §. (2)] első részével, az Hamilton-féle I integrállal kell foglalkoznunk s már előre megjegyezzük, hogy az *ezen integrálra nézve* a jelen §. 1, 2, 3, 4 pontjaiban és (1), (2), (5)—(13) *egyenleteiben kifejezett sajátságok egyaránt érvényesek*, akár az I-ben fellépő V erőfüggvény csak a coordinátáktól, akár pedig még explicite az időtől is függ, *azaz akár a dynamikai energia megmaradásának elve fennáll, akár nem.*

1. Hamilton *integrálja a kezdő- és véghelyzetnek és az időnek függvénye.*

A megelőző §-ban bebizonyítottuk, hogy az

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{T}+V)\, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

integrál értéke nem változik, ha ezt adott A_1 és A_2 kezdő- és véghelyzetek között fekvő, különböző, a zavartalanhoz (a spontán, magától leírthoz) végtelen közel eső pályákra vonatkoztatjuk, a $t_2 - t_1$ időköz ugyanaz maradván.

Ebből következik, hogy az I határozott integrál csak az A_1 kezdő- és az A_2 véghelyzetnek, valamint a t_1 és t_2 időknek függvénye lehet (az utóbbi azért, mivel t_1 és t_2 az integrál határai és mivel V az időnek explicit függvénye is lehet), azaz:

$$I = I(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ t_1, t_2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ennek variátiója, ha (29. ábra) a határhelyzetek változnak [*az idő nem variál*]:

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial I}{\partial y_1}\delta y_1 + \cdot + \cdot + \cdot + \frac{\partial I}{\partial z_2}\delta z_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

2. Hamilton *integráljának tényleg lehetséges változása, ha a határhelyzetek is variálnak.*

A 77. §. (5) és (9) egyenletei értelmében, állandó t_1 és t_2, de változó x_1, y_1, z_1 és x_2, y_2, z_2 mellett az (1) integrál variátiója:

$$\left.\begin{aligned} \delta I = \int_{t_1}^{t_2} \delta(\mathrm{T}+V)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \{\delta V - m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z)\}\, dt + \\ m[x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z]_2 - m[x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z]_1 . \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Ezt a *variatiót most tényleg lehetséges mozgásokra akarjuk vonatkoztatni*, ugyanis olyanokra, melyeket az m pont, tetszőlegesen különböző kezdő- és véghelyzetek között az adott erők hatása alatt, ugyanazon $t_2 - t_1$ időköz alatt a valóságban végezhet; de mind ezekben a tényleg lehetséges esetekben d'Alembert elve, azaz a 77. §. (14) összefüggése érvényes, miáltal (4)-ből marad:

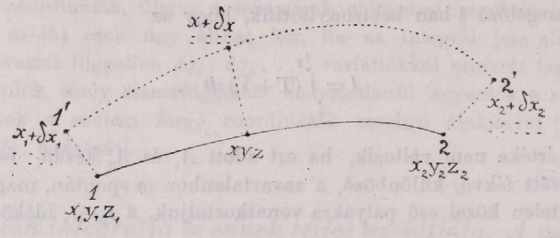
$$\delta I = m\,[x_2'\delta x_2 + y_2'\delta y_2 + z_2'\delta z_2] - m\,[x_1'\delta x_1 + y_1'\delta y_1 + z_1'\delta z_1] \quad . \quad . \quad (5)$$

3. *A mozgás nyomatékainak kifejezése* Hamilton *integráljából.* A következőkben úgy az I, mint az A integrálra nézve megváltoztatjuk a határok jelöléseit; írunk

$$\begin{array}{lllllll} x_1 y_1 z_1, & x_2 y_2 z_2, & \delta x_1 \delta y_1 \delta z_1, & \delta x_2 \delta y_2 \delta z_2, & t_1, & t_2 & \text{helyébe} \\ x_0 y_0 z_0, & x\ y\ z, & \delta x_0 \delta y_0 \delta z_0, & \delta x\ \delta y\ \delta z, & 0, & t & \text{betűket;} \end{array}$$

rendre:

mely jelöléssel azt akarjuk kifejezni, hogy a felső határt tetszőlegesen változónak tekintjük, 30. ábra.



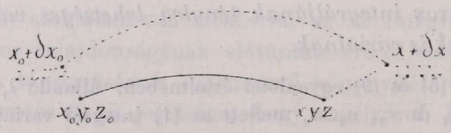
29. ábra.

E jelöléssel az (1), (2), (3), (5) egyenletekből:

$$I = \int_0^t (\mathrm{T}+V)\,dt = I(x_0, y_0, z_0;\ x, y, z;\ t); \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial I}{\partial y_0}\delta y_0 + \frac{\partial I}{\partial z_0}\delta z_0 + \frac{\partial I}{\partial x}\delta x + \frac{\partial I}{\partial y}\delta y + \frac{\partial I}{\partial z}\delta z; \quad (7)$$

$$\delta I = -m\,(x_0'\delta x_0 + y_0'\delta y_0 + z_0'\delta z_0) + m\,(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z). \quad . \quad (8)$$



30. ábra.

A (8) és (7) egyenletek összehasonlításából azonnal nyerjük:

$$\left.\begin{array}{lll} -mx_0' = \dfrac{\partial I}{\partial x_0}, & -my_0' = \dfrac{\partial I}{\partial y_0}, & -mz_0' = \dfrac{\partial I}{\partial z_0}; \\ mx' = \dfrac{\partial I}{\partial x}, & my' = \dfrac{\partial I}{\partial y}, & mz' = \dfrac{\partial I}{\partial z}. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (9)$$

Szóval: az m mozgás-nyomatéka componenseinek absolut értékei az I-nek a megfelelő coordináták szerint képezett differentiál-

quotienseivel egyenlők; és pedig a *kezdőnyomatékok* e quotiensek *negativ-*, a *tetszőleges nyomatékok* ezek *positiv* értékeivel egyenlők.

4. Hamilton *integráljának az idő szerint képezett partiális differentiálquotiense a negativ* Hamilton*-féle* $H=\mathrm{T}-V$ *függvénynyel egyenlő.*

Az I-t a (6) értelmében a *mozgó* m-re akarjuk vonatkoztatni; akkor benne az x_0, y_0, z_0 kezdő coordináták állandó parameterek és I a t-től explicite és x, y, z által még implicite is függ; úgy, hogy I-nek t szerinti totalis differentiálquotiense a (6) két alakjából:

$$\frac{dI}{dt} = \mathrm{T} + V; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial I}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial I}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial I}{\partial t}. \quad \ldots \quad (11)$$

Tekintettel a (9) második rendszerére és mivel $x'dt=dx$ s. í. t., a (11)

$$\frac{dI}{dt} = m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} + \frac{\partial I}{\partial t} = 2\mathrm{T} + \frac{\partial I}{\partial t} \quad . \quad (12)$$

Egyesítve (10)- és (12)-őt:

$$\mathrm{T} + V = 2\mathrm{T} + \frac{\partial I}{\partial t},$$

avagy a $\mathrm{T}-V=H$ jelöléssel [77. §. 2. pontjának *b)* szakasza]

$$\frac{\partial I}{\partial t} + H = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

és ez a jelen pont czímében kimondott tétel.

79. §. Hamilton *integráljának characteristikus egyenlete, mikor az energia megmaradásának elve áll és mikor ez nem áll.*

A megelőző §. (13) egyenlete:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + H = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (0)$$

nevezetes értelmezést enged meg és igen jellemző alakba hozható.

1. *Az energia megmaradásának elve áll.*

Akkor az I-ben a V csak az x, y, z coordináták függvénye és $H=\mathrm{T}-V$ *állandó* [77. §. 2. pontjának *b)* szakasza], az időtől sem implicite, sem explicite nem függ; e szerint (0) egyenletben a $\frac{\partial I}{\partial t}$ quotiens csak állandó lehet, melynek $-H$ az értéke s melyet α-val szokás jelelni.

Másrészt a $H=\mathrm{T}-V$ különbség T tagja csak sebességek függvénye [általános coordinátákkal kifejezett alakjában a T még a coordinátáknak is függvénye, 99. §. (3)]; V itt csak a coordinátáktól függ és így itt H a sebességeknek és a coordinátáknak állandó értékű függvénye ugyanis:

$H(x, y, z; x', y', z')$; ámde, a sebességek a megelőző §. (9) második rendszere szerint az I quotienseiből fejezhetők ki, miáltal végre H a coordináták és a nevezett quotiensek állandó értékű függvényeképen adódik és a (0) egyenlet írható:

$$\alpha + H(x, y, z, \frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y}, \frac{\partial I}{\partial z}) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ezen I-re nézve elsőrendű partiális differentiále egyenlet, Hamilton szerint a *characteristikus egyenlet*, melyben x, y, z a *független változók*.

A $H = \mathbf{T} - V$ formája a $\mathbf{T}$ közönséges kifejezéséből és a V adott alakjából ismert lévén, az (1) egyenlet mindig képezhető és így az I oly függvénynek tekintendő, mely az (1)-et kielégíti. Hamilton az így értelmezett I-t *characteristikus (fő)-függvénynek* nevezte.

[*Szabad mozgásnál* $H = \mathbf{T} - V = \frac{1}{2}m\{x'^2 + y'^2 + z'^2\} - V(x, y, z)$; ebbe az x'-, y'-, z'-t a megelőző §. (9) egyenlete második csoportjából helyettesítve, az (1)-ből

$$\alpha + \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial z}\right)^2\right\} - V(x, y, z) = 0; \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ez I-re nézve elsőrendű, másodfokú, három független x, y, z változóval biró partiális differentiálegyenlet.

Surlódás nélküli feltételes mozgásnál a (2)-hez járuló $F(x, y, z) = 0$* feltételek mindegyike segélyével az eddig független x, y, z változók közül egy-egy eliminálható, miáltal a (2) rendesen bonyolódottabb, alkalmasan választott általános coordináták esetében egyszerűbb lesz (219 és 222—231. §§.)].

E szakasz fejtegetéseit a következő §-ban folytatjuk.

2. *Az erély megmaradásának elve nem áll.*

Ekkor a V a coordinátákon kívül még az időtől is explicite függ, és a $H = \mathbf{T} - V$ *nem állandó* [77. §. 2. pontjának *(b)* szakasza], hanem explicite az időtől is függ és így (0)-ban $\frac{\partial I}{\partial t}$ sem lehet állandó.

Másrészt a $H = \mathbf{T} - V$ különbség itt a sebességeken és coordinátákon kívül még az időtől is függ; de a sebességek a megelőző §. (9) második rendszere segélyével az I quotienseivel lévén kifejezhetők, és így a (0)-ból:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + H(x, y, z, t; \frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y}, \frac{\partial I}{\partial z}) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

---

* Ha az energia elve áll, az $F = 0$ feltétel nem függhet explicite az időtől, mert az $F(x, y, z, t) = 0$ mozgó és változó felületek *külön erőket tételeznek fel*, melyek m-et e felületeken tartják, azaz, melyek az m-et e felületekkel együtt mozgatják.

Ezen characteristikus egyenlet itt is elsőrendű, de az x, y, z, t *független változók* száma *négy*, s e tekintetben a (3) tetemesen bonyolódottabb, mint az energia elve esetében fennálló (1) egyenlet.

Az I characteristikus függvény itt a (3)-at kielégíti, azaz ezen egyenlet megoldása.

[*Szabad* mozgásnál

$$H=\mathrm{T}-V=\tfrac{1}{2}m\{x'^2+y'^2+z'^2\}-V(x,\,y,\,z,\,t),$$

melybe x'-et s í. t. a megelőző §. (9) rendszere második csoportjából helyettezve, a (3)

$$\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial I}{\partial z}\right)^2\right\}-V(x,y,z\,;\,t)=0, \quad . \quad (4)$$

mely I-re nézve elsőrendű másodfokú partiális differentiálegyenlet.

*Feltételes mozgás*nál a (4)-hez járuló $F(x,y,z\,;\,t)=0$ s í. t. feltételek mindegyike segélyével az eddig független x, y, z, t változók közül egy-egy eliminálható, miáltal a (4) rendesen bonyolódottabb, alkalmasan választott általános coordináták esetében egyszerűbb lesz, 219, 222—231. §§.]

E szakasz fejtegetéseit a 84. §-ban folytatjuk.

80. §. *A működés jellemző egyenlete az energia elve esetében.*

A mechanikában legfontosabbak a csak a coordinátáktól függő erőfüggvények; ekkor az összenergia $\mathbf{E}=H+V_0$ és így a $H=\mathbf{T}-V$ különbség is *állandó* [44. §. (3)]; ezen esetekben, miként azonnal kimutatjuk, a megelőző két §. vizsgálatai és eredményei előnyösebben tárgyalhatók a *működés*sel, mint a Hamilton integráljával.

Ugyanis, a 77. §. (2) és (1) egyenletei a 78. §. 3. pontja jelölésével:

$$\mathrm{A}=\int_0^t(\mathrm{T}+V)\,dt+Ht=I+Ht, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

hol a H állandó parameter a kezdő állapot x_0, y_0, z_0; x_0', y_0', z_0'-jellemzőkkel is fejezhető ki, lévén ugyanis

$$H=\mathrm{T}_0-V_0=\tfrac{1}{2}m\{x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2\}-V(x_0,\,y_0,\,z_0) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

E szerint H a *kezdőhelyzetnek* és a *kezdősebességnek* állandó értékű *függvénye;* ez az $\mathbf{E}$ összenergiától csak állandóval külön bözik, mert $H=\mathbf{E}-V_0$ [44. §. (3)].

1. *A működés az időtől explicite nem függ, hanem a határhelyzetektől és az összenergiától.*

Képezve az (1)-nek a t szerinti partiális differentiálquotiensét, a megelőző §. (0) egyenlete értelmében:

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} = \frac{\partial I}{\partial t} + H = 0, \quad \ldots \ldots \ldots$$

azaz, A nem lehet a t-nek explicit függvénye.

Tekintettel az I-nek általános alakjára [78. §. (6)]:

$$\mathrm{A} = I + Ht = I(x_0, y_0, z_0; x, y, z; t) + Ht, \quad \ldots \ldots \quad (4a)$$

a (3) alapján:

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}(x_0, y_0, z_0; x, y, z; H), \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

azaz a működés kizárólagosan a kezdőhelyzet és a H energia, valamint a tetszőleges (x, y, z) helyzet függvénye; benne x_0, y_0, z_0, H *parameterek*, míg x, y, z a mozgás folyó változói.

2. *A működés teljes variátiója (a variáló működés).*

Variáljuk most (4*a*)-t *teljesen* és vonatkoztassuk e variátiót *tényleg lehetséges mozgásokra* [78. §. 2. pontja]; akkor a $\delta\mathrm{A}$ az I-nek és a Ht-nek variátiói összegével egyenlő; ámde az I-nek állandó t melletti variátiója a 78. §. (8) kifejezése adja; e szerint ehhez hozzákapcsolandó I-nek t szerinti variátiója és Ht változása, azaz, a

$$\frac{\partial I}{\partial t}\delta t + t\delta H + H\delta t$$

tagok, melyek összege a (3) értelmében $t\delta H$-ra redukálódik; e tagot az idézett §. (8) kifejezéséhez írva, a működés keresett teljes variátiója:

$$\delta\mathrm{A} = -m(x_0'\delta x_0 + y_0'\delta y_0 + z_0'\delta z_0) + m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) + t\delta H. \quad (5)$$

Másrészt a (4) teljes variátiója:

$$\left.\begin{aligned} \delta\mathrm{A} = {} & \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y_0}\delta y_0 + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z_0}\delta z_0 + \\ & + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial H}\delta H, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

hol $H = \mathrm{E} - V_0 = \mathrm{T}_0 - V_0$ alapján [44. §. (3*a*)], a δH a (2) értelmében a kezdősebesség és a kezdőhelyzet-, szóval a *kezdőállapot megváltoztatásának következménye;* maga az $\mathrm{E} + \delta\mathrm{E}$ összenergia és δH is, a *mozgás* közben nem változik.

3. *A mozgásnyomatékok és az idő a működésből kifejezve.*

Az (5) és (6) egyenletek összehasonlításából:

$$\left.\begin{aligned} & \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} = m\frac{dx}{dt}, \quad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} = m\frac{dy}{dt}, \quad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z} = m\frac{dz}{dt}; \\ & \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x_0} = -m\left(\frac{dx}{dt}\right)_0, \quad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y_0} = -m\left(\frac{dy}{dt}\right)_0, \quad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z_0} = -m\left(\frac{dz}{dt}\right)_0; \\ & \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial H} = t = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{E}}, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

hol az $\mathbf{E} = H +$ constans összefüggésnél fogva az utolsó egyenlet is fennáll.

A (7) egyenletrendszer az **A** működésnek nevezetes sajátságait tünteti elő, ugyanis, az **A**-nak a kezdőhelyzet coordinátái szerint képezett első differentiálquotiensei egyenlők az m-nek e helyzetre vonatkozó mozgás-nyomaték negativ componenseivel, ellenben a végkelyzet coordinátái szerinti ily quotiensek e helyzetre vonatkozó positiv nyomatéki összetevőkkel egyenlők; e szerint ezekben a működés teljesen úgy viselkedik, mint a Hamilton-féle integrál [78. §. (9)]. Továbbá az összenergia szerint képezett első differentiálquotiense avval az idővel egyenlő, mely alatt az m a kezdőhelyzetből a végkelyzetig mozog; de ezen sajátsággal Hamilton integrálja nem bír.

4. *A működés jellemző (characteristikus) egyenlete és a jellemző függvény.*

Az energia egyenlete $\mathbf{T}-V=H$ [44. §. (3)] itt:

$$\mathbf{T}=\tfrac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}=H+V; \quad . \ . \ . \quad (8)$$

ez a (7) alapján az **A** partiális differentiálquotiensei segélyével kifejezhető, úgy, hogy belőle

$$\frac{1}{m}\left\{\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}\right)^2\right\}=2\,[H+V(x,y,z)]. \ . \ . \quad (9)$$

Ez a *működés jellemző egyenlete;* tekintettel a 79. §. (1) alatti $a=-H$ és (2) egyenletére, azonnal kiderül, hogy *az energia megmaradása esetében a működés jellemző egyenlete teljesen egyenlő a* Hamilton*-féle integrál characteristikus egyenletével;* ez a 3. pontban említett azon körülményből folyik, hogy a két függvénynek a coordináták szerint képezett differentiálquotiensei egymással rendre egyenlők.

De ebből korántsem következik, hogy az **A** és az I függvények maguk is egymással egyenlők, ez csak a coordinátáktól függő részeikre áll; miután (4*a*) és (4) szerint $\mathbf{A}=I+Ht$ csak a coordinátáktól függ, és miután $I=I+Ht-Ht=\mathbf{A}-Ht$, észreveszszük hogy az I-nek csak a coordinátáktól függő része az **A**, és az időtől függő része $-Ht$; mind az **A**, mind az I kielégíti a jellemző egyenlet (9) alakját.

Rendesen a V erőfüggvény, mint a coordináták ismert függvénye, van adva s az **A** a jellemző (9) egyenletből meghatározandó; e meghatározás még a legegyszerűbb esetekben is meglehetősen bonyolódott és legtöbb esetben nem is lehetséges.

Mindazonáltal az a tény, hogy minden conservativ mozgásnál ily characteristikus függvény létezik, melylyel a mozgás sajátságait a

fent jellemzett módon elő lehet tüntetni [v. ö. a köv. §-ot], már magában véve is igen nevezetes. A mozgás tárgyalásának ezen módja nemcsak sok esetben könnyíti és egyszerűsíti a problémák megfejtését, hanem a mozgás számos új sajátságának felderítésére alkalmas.

Jegyzet. Az energia egyenletének $\mathrm{T}=H+V=\mathrm{E}-\mathrm{E}_h$ alakjaival [72. §. (5*a*)] a (9) jellemző egyenletből:

$$2\mathrm{T}=\frac{1}{m}\left\{\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}\right)^2\right\}=2\,(\mathrm{E}-\mathrm{E}_h) \quad . \; . \quad (2a)$$

81. §. *A működés, mint characteristikus függvény, teljesen meghatározza a conservativ mozgást.*

Az A működés a 80. §. (9) alatti jellemző egyenletet kielégíti és így mindenesetre egy characteristikus függvény, mely a 80. §. (4) egyenlete értelmében:

$$\mathrm{A}=\mathrm{A}(x_0,\, y_0,\, z_0;\, x,\, y,\, z,\, H). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (0)$$

Ha az m pont *mozgását* vizsgáljuk csak: x_0, y_0, z_0 és H parameterek és x, y, z változók. Továbbá az erőfüggvény $V=V(x, y, z)$.

a) Képezve a jellemző egyenlet [80. §. (9)] első partiális differentiálquotiensét x szerint:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial (H+V)}{\partial x}=\frac{1}{m}\Big\{&\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}\right)+\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\right)+\\&+\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}\right)\Big\}\ \text{s í. t.}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (1)$$

b) Másrészt az eleven erő közönséges kifejezéséből [80. §. (8)]:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial (H+V)}{\partial x}=\frac{1}{m}\Big\{&m\,\frac{dx}{dt}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(m\,\frac{dx}{dt}\right)+m\,\frac{dy}{dt}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(m\,\frac{dy}{dt}\right)+\\&+m\,\frac{dz}{dt}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(m\,\frac{dz}{dt}\right)\Big\}\ \text{s í. t.}\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

c) [Az (1) s a (2) három-három egyenlete csak úgy egyeztethető meg egymással, ha rendre, áll

$$m\,\frac{dx}{dt}=\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}\,; \quad m\,\frac{dy}{dt}=\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\,; \quad m\,\frac{dz}{dt}=\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}\,, \quad . \; . \; . \quad (3)$$

mely öszszefüggéseket már előbb találtuk [80. §. (7)] és a jellemző egyenlet képzésére felhasználtuk; itt természetesen újra előtünnek.

1. *A mozgás egyenleteinek a jellemző függvényből való képzése szabad pontra nézve.*

A (3)-ból differentiálás útján nyerjük:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(m\,\frac{dz}{dt}\right)\,; \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial z\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(m\,\frac{dy}{dt}\right) \text{ s í. t.,}$$

mely quotiensek egymással egyenlők lévén, rendre:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(m\frac{dz}{dt}\right) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(m\frac{dy}{dt}\right); \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(m\frac{dz}{dt}\right); \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(m\frac{dy}{dt}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(m\frac{dx}{dt}\right). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Ezen egyenletek tekintetbe vételével a (2)-ből, ha azt m-mel szorozzuk és megjegyezzük, hogy H állandó:

$$\frac{\partial (V+H)}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x};$$

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dx}{dt}\frac{\partial}{\partial x}\left(m\frac{dx}{dt}\right) + m\frac{dy}{dt}\frac{\partial}{\partial y}\left(m\frac{dx}{dt}\right) + \\ + m\frac{dz}{dt}\frac{\partial}{\partial z}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = m\frac{\partial V}{\partial x} \text{ s í. t.} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Miután m is állandó és:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right),$$

az (5)-ből rendre nyerjük

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x}; \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y}; \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z}; \quad . \quad . \quad (6)$$

ezek pedig a conservativ erőknek alávetett szabad m pont közönséges mozgásegyenletei, melyeket itt a characteristikus függvényből egyenesen leszármaztattuk.

Jegyzet: A $H=\mathrm{T}-V$ a coordináták és a sebességek állandó értékű függvényének is tekinthető [79. §. 1. pontja]; de itt a 80. §. (8) egyenlete szerint T a coordinátáktól nem függ, hanem csak V; ezért a (6)-ból

$$\frac{d(mx')}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}; \qquad \frac{d(my')}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}; \qquad \frac{d(mz')}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z}; \quad (6a)$$

v. ö. a köv. §. 2. pontja *a)* szakasza *Jegyzetét*, 165. l.

2. *A mozgás egyenleteinek képzése surlódás nélküli feltételek esetében.*

Rövidség kedveért mindjárt két feltételt veszünk fel:

$$F_1(x, y, z) = 0; \qquad F_2(x, y, z) = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F_1}{\partial z}\delta z = 0; \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F_2}{\partial z}\delta z = 0. \quad (8)$$

Másrészt itt az energia tétele [73. §. (14) és (8)]:

$$\delta \mathrm{T} = \delta V; \qquad X = \frac{\partial V}{\partial x} \text{ s í. t.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

A **T** és a V csak a coordinátáktól és a sebességektől függőknek tekintetnek, de az időt explicite nem tartalmazzák; az idézett 73. § (8)—(14) egyenletei pedig még akkor is érvényesek, mikor az utóbbi függés fennáll, anynyival inkább a jelen esetünkben és így az erőfüggvény és az eleven erő variatiója [i. h.]:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z; \quad . \; . \quad (10)$$

$$m\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right\} = X\delta x + Y\delta z + Z\delta z, \quad . \; . \quad (11)$$

mely az eleven erő tétele surlódás nélküli mozgásoknál.

Szorozva a (8) egyenleteit rendre az egyelőre tetszőleges λ_1- s λ_2-vel és hozzáadva őket a (11) jobb oldalához, rendezés után:

$$\left(m\frac{d^2x}{dt^2} - X - \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x} - \lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)\delta x + \cdot + \cdot = 0. \quad . \; . \; . \quad (12)$$

Itt a λ_1 és a λ_2-t mindig úgy választhatjuk, hogy a δx és a δy együtthatói zérussal egyenlők legyenek [mint pl. a 67. §. (10) és (11) egyenleteit]; akkor (12) egyenlet első két tagja elenyészvén, a megmaradó tag csak úgy állhat fen, ha a δz együtthatója is zérussal egyenlő.

Ezek pedig a mozgásnak Lagrange-féle egyenletei [68. §. (8)] s így ezen esetben is ki van mutatva, hogy a mozgás egyenletei a characteristikus egyenletből leszármaztathatók és így a mozgás teljesen meg van határozva.

82. §. *A characteristikus egyenlet teljes integráljának sajátságairól, és integrálásának egy egyszerű módjáról.*

Az **A** a működésről a 80. §-ban kimutattuk, hogy a jellemző egyenletnek [80. §. (9)] megfelel s így az **A** a mozgás legalább egy tényleges esetének az előtüntetésére alkalmas; de megfordítva is: minden **A** függvény, mely ezt az egyenletet kielégíti, bír e sajátsággal.

Ez az **A** az m-nek x_0, y_0, z_0 kezdő- és x, y, z, tetszőleges coordinátáitól és az egész energiától $\mathbf{E}=H+\text{const}$-tól függ [81. §. (0); a t idő a két helyzet függvénye lévén 78. §. 3. pontja]; az **A** e helyzetektől symmetrikusan függ, mert ezek felcserélésével az **A**-t kifejező integrál határai kölcsönösen változtatják helyüket s így az **A**-nak csak az előjele változik meg.

1. *A teljes integrál általános sajátságai.*

[Valamely n független változót tartalmazó *elsőrendű* partiális differentiálegyenlet *teljes megoldása* e változók oly függvénye, mely az egyenletet kielégíti és n számú egymástól független, a differentiálegyenletben elő nem forduló integrátió-állandókat (parametereket) tartalmaz; v. ö. a 116. §-ot].

a) Az m pont *szabad mozgása* esetében a jellemző egyenlet [80. §. (9)] *elsőrendű*, a *három* x, y, z független változót tartalmazó partiális

differentiál-egyenlet lévén: teljes integrálegyenlete, azaz az **A** characteristikus függvény *három*, egymástól független, a jellemző egyenletben fel nem lépő, integrátió-állandókat (parametereket) tartalmaz; ha pedig segélyével a *mozgás véges integrálegyenleteit* akarjuk képezni [pl. a 81. §. (3) alatti $m\frac{dx}{dt}=\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}$ s í. t. egyenletekből az x, y, z coordinátákat kifejezni], még három, s így összesen *hat* független integrál-parameterre van szükségünk. [Egyébként: a pont mozgása közönséges differentiálegyenletei másodrendűek s számukra nézve hárman lévén, teljes integrátiójuk *hat* független integrátió-állandót követel, Kinematika 88. §. 3.].

Igy a 80. §. (4) alatti $\mathbf{A}=\mathbf{A}(x_0, y_0, z_0, x, y, z, H)$ formában x_0, y_0, z_0 ily három független parameter; képezve a 80. §. (7) második rendszerét: $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_0}=-mx_0'$; $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y_0}=-my_0'$; $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_0}=-mz_0'$ egyenleteket, ezekben x_0', y_0', z_0' kezdő sebességek új parameterek; közülük azonban, mivel a 80. §. (8) és (9) egyenletei a kezdő állapotra is érvényesek tartoznak lenni, a

$$\left.\begin{aligned} H&=\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_0}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y_0}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_0}\right)^2\right\}-V(x_0, y_0, z_0);\\ H&=\mathbf{T}_0-V_0=\tfrac{1}{2}m\left[x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2\right]-V(x_0, y_0, z_0)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (0)$$

összefüggések értelmében az egyik egyenlet és parameter függő s így a fenmaradó kettő a folyó coordináták és a parameterek közötti egyenletek lévén, egyesítésük a *pályát* szolgáltatja. Végre a $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial H}=t$, melyben az időszámítás kezdete a hatodik független parameter, a coordináták és az idő közötti összefüggést fejezi ki.

E szerint **A** segélyével a mozgás problémája meg van fejtve; v. ö. az alább következő 2. pontot.

b) Ha az m mozgása az $F(x, y, z)=0$ *feltétel*nek van alávetve, akkor a fentnevezett független változók száma és így **A**-ban a független integrátió-állandók-é is egygyel kisebb, azaz *kettő*re redukálódik, melyekhez a mozgás véges integrálegyenletei *két* új parametere járul.

c) Ha az m mozgása *két* feltételnek van alávetve, akkor az $F_1(x, y, z)=0$, $F_2(x, y, z)=0$ összefüggések folytán csak *egy* független változó marad és így az **A** szintén csak *egy* integrátió-parametert tartalmaz, melyhez a mozgás véges integrálegyenletei még *egy* független állandóval járulnak.

Miután itt a characteristikus függvényt csak conservativ erőkre nézve vizsgáljuk: az összes energia $\mathbf{E}=H+$constans, a mozgás egyik állandója, mely azonban már jellemző egyenletben lépvén fel, a független integrál-parameterekhez nem számítható.

2. *A teljes integrál* Jacobi*-féle alakjának tulajdonságai.*

Az **A** teljes integrálban az említett három független állandók

egyike az $\mathbf{A}$-hoz addendus constans alakjában hozzájárulhat, melynek $\mathbf{A}_0$ legyen a neve; ez a jellemző egyenletet már csak azért sem képes változtatni, mivel ebben az $\mathbf{A}$-nak csak a coordináták szerint képezett differentiálquotientsei lépnek fel, melyekből $\mathbf{A}_0$ kiesik.

Ezek alapján Jacobi * szerint írhatjuk a teljes integrált:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_0+\mathbf{A}(x, y, z, c_1, c_2, H) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

melyben $\mathbf{A}_0$, c_1, c_2 a 80. §. (9) jellemző egyenlete integrátiójának három független parametere; ellenben a mozgás véges integrálegyenleteinek többi három független állandója a következő összefüggések által legyen meghatározva:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial c_1}=\gamma_1; \qquad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial c_2}=\gamma_2; \qquad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial H}=t+\tau, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

hol γ_1, γ_1 és τ állandók; a τ az időszámítás kezdetétől függ. E szerint $\mathbf{A}_0$, c_1, c_2, γ_1, γ_2, τ az összes felmerülő és szükséges *hat* integrátió-parameter.

a) A pont *szabadon* mozoghasson; kényszermozgására nézve l. alább a *b)* pontot.

A következőkben kimutatjuk, hogy a (2) *első két egyenlete* az m *pályájának egyenletei,* mert az időtől független coordináta-összefüggéseknek fognak bizonyulni.

Ugyanis, mivel meghatározott x_0, y_0, z_0 kezdőcoordináták esetén a t csakis az x, y, z függvénye [78. §. 3. pontja], a $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial c_1}$ és a $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial c_2}$-nek a t szerinti differentiálquotientsei:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial c_1}\right)&=\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x \partial c_1}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y \partial c_1}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z \partial c_1}\frac{dz}{dt}; \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial c_2}\right)&=\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x \partial c_2}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y \partial c_2}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z \partial c_2}\frac{dz}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (3)$$

Másrészt differentiálva a jellemző egyenletet [80. §. 9] a c_1 és c_2 szerint és megjegyezve, hogy a c_1 és c_2 független integrátió-parameterek a jellemző egyenlet $H+V$ összegében elő nem fordulhatnak [jelen §. 1. pontja], továbbá, hogy ezen egyenletben az $\mathbf{A}$ differentiálquotientseit az (1)-ből kifejezetteknek tekintjük:

$$\left.\begin{aligned} 0=\frac{\partial (H+V)}{\partial c_1}&=\frac{1}{m}\left\{\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial c_1 \partial x}+\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial c_1 \partial y}+\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial c_1 \partial z}\right\}=0; \\ 0=\frac{\partial (H+V)}{\partial c_2}&=\frac{1}{m}\left\{\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial c_2 \partial x}+\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial c_2 \partial y}+\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial c_2 \partial z}\right\}=0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Tekintettel a 81. §. (3) egyenleteire, melyek szerint $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}=m\frac{dx}{dt}$ s í. t., azonnal észreveszszük, hogy a (3) és (4) egyenletrendszerek jobb oldalai

* Dynamik, 167. lap.

egyenlők, e szerint bal oldalaik is egyenlők; és így a $\frac{\partial A}{\partial c_1}$ és $\frac{\partial A}{\partial c_2}$ az *időtől függetlenek* s ezért e quotiensek az (1) alapján csak az x, y, z változóknak (az m coordinátáinak) *az időben állandó értékű függvényei* lehetnek:

$$\frac{\partial A}{\partial c_1} = \gamma_1 = \gamma_1(x, y, z) = \text{const.}; \quad \frac{\partial A}{\partial c_2} = \gamma_2 = \gamma_2(x, y, z) = \text{const.} \quad (5)$$

Ezek pedig oly felületek egyenletei, melyeken az m mozog, melyek metszőgörbéje nem lehet más, mint az m pályája [58. §. (1)].

Evvel fent kimondott állításunk be van bizonyítva.

De, evvel egyszersmind a jellemző függvény következő rendkívül fontos sajátsága is ki van mutatva. Ugyanis:

Ha a jellemző egyenlet megoldása $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}(x, y, z, c_1, c_2, H)$ alakban már találtatott, akkor ennek a c_1, c_2, H állandók szerinti partiális differentiálquotiensei közül az első kettő az időtől független állandók és formára nézve a pont pályája egyenletei, az utolsó pedig a coordináták és a folyó idő között fennálló összefüggést fejezi ki.

Röviden: az $\mathbf{A}$-nak *mint a jellemző egyenlet teljes megoldása (1) alatti alakjának az állandók szerinti partiális differentiálquotiensei a mozgás kész integrálegyenleteivel egyenlők.*

Jegyzet: A $H = \mathbf{T} - V$ a coordináták és a sebességek függvénye [79. §. 1. pontja], de a sebességek a 80. §. (7) első rendszerével az $\mathbf{A}$ quotienseiben lévén kifejezhetők, ezen quotiensek az (1) szerint a c_1, c_2 parametereket is tartalmazzák és így H csak a sebességeknél, illetve mx' s í. t. nyomatékoknál fogva függ a c_1- és c_2-től. E meggondolás alapján nyerjük

$$\frac{\partial H}{\partial c_1} = \frac{\partial H}{\partial (mx')} \frac{\partial (mx')}{\partial c_1} + \frac{\partial H}{\partial (my')} \frac{\partial (my')}{\partial c_1} + \frac{\partial H}{\partial (mz')} \frac{\partial (mz')}{\partial c_1} \quad \text{s í. t.}$$

Ámde az idézett 80. §. (7) első rendszere felhasználásával a 79. §. (1) alatti jellemző egyenletének c_1- s c_2 szerinti quotiensei

$$\left.\begin{aligned} 0 = \frac{\partial (\alpha + H)}{\partial c_1} &= 0 + \frac{\partial H}{\partial (mx')} \frac{\partial (mx')}{\partial c_1} + \cdot + \cdot = \\ &= \frac{\partial H}{\partial (mx')} \frac{\partial^2 A}{\partial c_1 \partial x} + \cdot + \cdot, \end{aligned}\right\} \quad . \quad (4a)$$

melyet a zérussal egyenlőnek talált (3) rendszerrel összehasonlítva:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial (mx')}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial (my')}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial (mz')} \quad . \quad (4aa)$$

A megelőző §. (6*a*) és ezen §. (4*aa*) egyenleteit Hamilton *kánonalak*jainak nevezik; ezeket itt derékszögű coordinátákban fejeztük ki; a 101. §-ban adjuk alakjukat általános coordinátákban.

b) Ha m mozgása az $F_1(x, y, z) = 0$ surlódás nélküli feltételnek van alávetve, akkor ez az egyenlet már eleve az (5) egyenletek egyikét képezi; ha még az $F_2(x, y, z) = 0$ második feltétel is járul hozzá, ez az (5) egyenletek másodikát képviseli s a pálya alakja teljesen ismert.

3. Hamilton ezen eljárásának alkalmazhatósága egy erőfüggvény létezésében s a jellemző egyenlet megoldhatóságában rejlik; segélyével ugyanis a pontmozgás három, másodrendű, elsőfokú differentiálegyenletének integrátiója viszsza van vezetve (helyettesítve) a characteristikus, azaz egy elsőrendű, másodfokú partiális differentiálegyenlet megoldására. E szerint Hamilton ezen elve *nem integrátió, hanem transformátió,* és jellemző egyenletének megfejtése sokszor nagyobb nehézségeket okoz, mint a közönséges mozgás-egyenleteké.

Mindazonáltal meg vannak az eljárásnak a 78. és a jelen §-ban említett nagy előnyei.

4. *A jellemző egyenletnek próbálgatással való megoldásáról.*

A characteristikus egyenlet teljes megoldása egyenes megtalálására nézve nem léteznek általános eljárások [v. ö. Jacobi utolsó multiplicátora elméletét és Lagrange integrálási módszerét 116—122. §§.], de a legtöbb mechanikai pontproblémánál, hol az erőfüggvény nem függ explicite az időtől és csak három coordináta léphet fel, a következő eljárás megkisérthető:

A

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}\right)^2 = 2m(H+V) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (6)$$

jellemző egyenletet gyakran a következő feltevésekkel sikerül kielégíteni, illetve megoldani:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z; \qquad V = V_x + V_y + V_z, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

hol az $_{x,\ y,\ z}$ indexű menynyiségek csak az x-, illetve csak az y, illetve csak a z-től függenek, és így $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \frac{d\mathbf{A}_x}{dx}$ s í. t., miáltal a (6) szétesik a csak az x, illetve csak az y, illetve csak a z-től függő következő totális (közönséges), nem partiális, differentiálegyenletekre:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{A}_x}{dx}\right)^2 &= 2m(H_x + V_x); \\ \left(\frac{d\mathbf{A}_y}{dy}\right)^2 &= 2m(H_y + V_y); \\ \left(\frac{d\mathbf{A}_z}{dz}\right)^2 &= 2m(H_z + V_z), \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

hol $H = H_x + H_y + H_z$ állandók összegével egyenlő.

A (8) rendszer integrálása quadraturát igényel csak.

Az eljárás *orthogonális* általános coordinátákra is terjeszthető

ki [104. §. 3. pontja *d)* szakasza] és rendesen partikuláris, de gyakran teljes megoldást is nyújt [v. ö. a 217—219, 222—231. §§. példáit].

83. §. *Egyenműködési (aequiactionális) felületek. Tulajdonságaik.*

Tekintsük a működés kifejezésében [pl. a 80. §. (4) egyenletében] csak az x, y, z coordinátákat változóknak; akkor az

$$\int_{A_0}^{A} mvds = \mathrm{A}(x, y, z) = C = \text{constans} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

egyenlet az ú. n. *egyenlő működési (æquiactionális) felület*nek az egyenlete.

Ez úgy értendő, hogy az m, ha $x_0 y_0 z_0$ coordinátájú A_0 kezdőhelyzetéből bármily irányban ugyanazon meghatározott v_0 sebességgel indul ki, az **A** működéssel biró erők hatása alatt haladva s a C felület bármely A pontjához érve: mindig egyenlő működést mutat fel; innen e felület elnevezése; ennek két jellemző tulajdonságát mutatjuk be, mely a 43. §-ban említett æquipotentiális felületek megfelelő tulajdonságaival analog.

1. Az $\mathrm{A} = C$ felület n normálisának iránycosinusait a-, b-, c-vel jelelve, ezek

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} : \sqrt{\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}\right)^2}; \\ b &= \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} : \sqrt{\ldots}; \qquad c = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z} : \sqrt{\ldots}; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ámde, mivel a 81. §. (3) egyenlete szerint $\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} = m \frac{dx}{dt}$ s í. t., azaz

$$\left.\begin{aligned} mv_x &= \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}, \quad mv_y = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}, \quad mv_z = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}; \\ mv &= \sqrt{\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}\right)^2}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

s ezekből a mindenkori v sebesség α, β, γ iránycosinusai, tekintettel (2)-re:

$$\alpha = v_x : v = a; \qquad \beta = v_y : v = b; \qquad \gamma = v_z : v = c. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Szóval: *a mindenkori tényleges sebesség iránya* és így *a mindenkori mv mozgásnagyság iránya is az egyenműködési felületre merőleges.*

A C parameter értékrendszerének az (1) szerint az egyenműködésű felületek egész rendszere felel meg, mely felületek mind az $(x_0 y_0 z_0)$ kezdőhelyzetre vonatkoznak; a megelőzők szerint az m *pályája e felületrendszerre merőleges trajectoriát* képez.

Maga sz $(x_0 y_0 z_0)$ hely végtelen kis sugarú gömbalakú æquiactionális felületnek tekinthető.

Jegyzet: Az (1)-et a megelőző §. (1) kifejezése értelmében

$$\mathrm{A}(x, y, z, c_1, c_2, H) = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

alakban írhatjuk, benne c_1, c_2, H szilárd értékek, míg C a tetszőleges parameter; a tényleges pálya a (4) szerint az (1*a*) felületrendszert mindenütt merőlegesen metszi; ámde a megelőző §. (2) rendszere szerint

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial c_1} = \gamma_1; \qquad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial c_2} = \gamma_2$$

a pálya egyenletei, és az említett orthogonalitás a γ_1 és γ_2 tetszőleges parameterű összes pályákra nézve fennáll.

2. Az $\mathrm{A}=C$ és az $\mathrm{A}+d\mathrm{A}=C+dC$ szomszédos két felület között héjszerű tér terül el, melynek dn legyen a vastagsága. Ez a dn az 1. pont szerint az m leírta útelemmel, ds-el egyenlő, melynek vetületei az m pont x, y, z coordinátáinak dx, dy, dz növekedéseivel egyenlők, azaz (4) szerint:

$$dx = a\,dn, \qquad dy = b\,dn, \qquad dz = c\,dn. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Másrészt itt tekintettel az (5)-re:

$$d\mathrm{A} = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}\,dz = \left\{a\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + b\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} + c\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}\right\} dn;$$

helyettesítve ebbe a (2)-ből az a-, b-, c-t, nyerjük

$$d\mathrm{A} = \left\{\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} dn,$$

avagy, a (3) tekintetbe vételével:

$$mv = \frac{d\mathrm{A}}{dn} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Szóval: *a mozgás nagysága a szomszédos két aequiactionális felületek közötti réteg vastagságával fordítva arányos.* V. ö. a 249. §. 159. számú feladatát.

3. Összehasonlítva az 1. és 2. alatt nyert eredményeket a 43. §-éival: észreveszszük, hogy az mv, a mozgás nagysága, irányra és nagyságra nézve épen úgy viselkedik az egyenműködésű felületekhez képest, miként az erő az æquipotentiális felületekkel szemben.

Ebből következik, hogy az ezen utóbbi felületekre s az erőre vonatkozó többi tételek az æquiactionális felületekre s a mozgás nagyságára nézve szintén érvényesek.

84. §. Hamilton *integráljának és jellemző egyenletének saját ságai, ha a dynamikai energia elve nem áll.*

A 79. §. 2. pontja tárgyalását itt azon szempontból folytatjuk, hogy azon esetre nézve, mikor *az erőfüggvény az időtől explicite függ*, a HAMILTON integráljának, mint a jellemző egyenlet [79. §. (3), (4)] megoldásának sajátságaival megismerkedjünk.

Ezek nagy analogiát mutatnak a működés megfelelő tulajdonságaihoz, a mikor az energia elve fenáll [80—83. §§.].

Az idézett egyenlet általános alakja tetszőleges, illetve szabad mozgás esetében:

$$0 = \frac{\partial I}{\partial t} + \mathrm{T} - V = \frac{\partial I}{\partial t} + H\left(x, y, z, t, \frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y}, \frac{\partial I}{\partial z}\right) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial z}\right)^2\right\} - V(x, y, z, t) = 0. \quad . \quad . \quad (2)$$

Az I-t HAMILTON szerint itt is *characteristikus függvény*nek nevezzük, 79. §. 1. pontja, mely írható [78. §. (6)]:

$$I = I(x_0, y_0, z_0, x, y, z, t). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

1. *A characteristikus fügyvény teljesen meghatározza a mozgást.*

a) A 78. §. (9) rendszere

$$\left.\begin{aligned} -mx_0' &= \frac{\partial I}{\partial x_0}, & -my_0' &= \frac{\partial I}{\partial y_0}, & -mz_0' &= \frac{\partial I}{\partial z_0}, \\ mx' &= \frac{\partial I}{\partial x}, & my' &= \frac{\partial I}{\partial y}, & mz' &= \frac{\partial I}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (4)$$

második csoportja alapján az eleven erő két kifejezése itt:

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial z}\right)^2\right\} \quad . \quad . \quad (5)$$

A nevezett csoportból rendre:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y \partial z} = \frac{\partial (mz')}{\partial y}; \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial z \partial y} = \frac{\partial (my')}{\partial z} \quad \text{s í. t.}$$

s miután x, y, z szabad mozgásnál egymástól függetlenek:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 I}{\partial z \partial y}; \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial z}; \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 I}{\partial y \partial x} \quad . \quad . \quad (6)$$

b) Az idő szerint teljesen differentiálva a (4) negyedik egyenletét és tekintetbe véve (6)-ot:

$$\frac{d(mx')}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)\frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)\frac{dz}{dt} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right);$$

$$mx'' = \frac{1}{m}\left\{\frac{\partial I}{\partial x}\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial I}{\partial y}\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} + \frac{\partial I}{\partial z}\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial z}\right\} + \frac{\partial^2 I}{\partial t \partial x} \quad . \quad . \quad (7)$$

c) Másrészt x szerint differentiálva (2)-őt, nyerjük:

$$0=\frac{1}{m}\left\{\frac{\partial I}{\partial x}\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}+\frac{\partial I}{\partial y}\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial y}+\frac{\partial I}{\partial z}\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial z}\right\}+\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial t}-\frac{\partial V}{\partial x} \quad . \quad (8)$$

d) A (7) és (8) különbségéből és ugyanígy rendre

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial V}{\partial x}; \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial V}{\partial y}; \qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial V}{\partial z}, \quad . \quad . \quad (9)$$

melyek a mozgás közönséges egyenletei [mint az energia elve esetében 81. §. (6)].

Miután itt: $H=\mathrm{T}-V=\frac{1}{2}m\{x'^2+y'^2+z'^2\}-V(x, y, z, t)$, azért a V-nek a coordináták szerint képezett differentiálquotiensei a $-H$-nak ugyanily nevű quotienseivel egyenlők, miáltal (9)-ből:

$$\frac{d(mx')}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}; \qquad \frac{d(my')}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial g}; \qquad \frac{d(mz')}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial z}. \quad (9a)$$

*e) Feltételes mozgás*nál legyenek a surlódást nem tartalmazó feltételek:

$$F_1(x, y, z, t)=0; \qquad F_2(x, y, z, t)=0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

ilyenkor mindig áll d'Alembert elve a gyorsító és a független erők virtuális munkáinak egyenlő voltáról [66. §. (6)]:

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)=\frac{\partial V}{\partial x}\delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\delta y+\frac{\partial V}{\partial z}\delta z. \quad (11)$$

Ezekhez kapcsolva a (10) virtuális variatióit [t nem variál]:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_1}{\partial z}\delta z=0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F_2}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_2}{\partial z}\delta z=0, \ldots (12)$$

a 81. §. 2. pontja mintájára nyerjük Lagrange mozgásegyenleteit, bennük $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ lévén a feltételektől független ható erők.

[*Surlódás* esetében a (11) bal oldalához az $-(S_x\delta x+S_y\delta y+S_z\delta z)$ surlódásbeli virtuális munka járul, miáltal Lagrange említett egyenleteiben $\frac{\partial V}{\partial x}$ s í. t. helyébe $\frac{\partial V}{\partial x}-S_x$ s í. t. lép.]

2. *A characteristikus egyenlet teljes integrálja főbb tulajdonságai.*

Alapul véve a 82. §. 1. pontja definitióját: az (1) vagy (2) egyenlet teljes integrálja (megoldása) *négy független integrátió-parametert* mutat; ha ezen megoldással a mozgás véges integrálegyenleteit akarjuk képezni [pl. a (4) rendszer második csoportjából az x, y, z coordinátákat kiszámítani]: még *három* ily független integrátió-állandó járul hozzá, s így ezek száma összesen *hét*.

[Igy a (3) alak kiegészíthető

$$I=I_0+I(x_0, y_0, z_0, x, y, z, t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

alakká, melynek I_0 addendus állandója a jellemző egyenletet nem változtathatja; a (13)-ban az I_0, x_0, y_0, z_0, *négy* független integrátió parameter; ha evvel a (4) első rendszerét képezzük

$$\frac{\partial I}{\partial x_0}=-mx_0'; \qquad \frac{\partial I}{\partial y_0}=-my_0'; \qquad \frac{\partial I}{\partial z_0}=-mz_0', \quad . \quad . \quad (14)$$

ezekben x_0', y_0', z_0' kezdősebességek új parameterek és így a (14) rendszer (melyből az I_0 a differentiálás folytán kiesett) az x, y, z, t változók és az x_0, y_0, z_0; x_0', y_0', z_0' parameterek között fenálló három egyenlet, azaz három teljes integrál: *a mozgás három véges integrálegyenlete*].

Jacobi alakja itt írható [82. §. (1)]:

$$I=I_0+I(x, y, z, t, c_1, c_2, c_3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

és a belőle a c_1, c_2, c_3 állandók szerint képezhető- és új γ_1, γ_2, γ_3 állandókkal egyenlővé tett differentiálquotiensek [82. §. (2)]:

$$\frac{\partial I}{\partial c_1}=\gamma_1; \qquad \frac{\partial I}{\partial c_2}=\gamma_2; \qquad \frac{\partial I}{\partial c_3}=\gamma_3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

három egyenletet képviselnek, melyben az I_0 a differentiálás folytán eltünt és [az x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0' helyett] a c_1, c_2, c_3; γ_1, γ_2, γ_3 parameterek és az x, y, z, t változók merülnek fel; e szerint (16) *a mozgás véges három integrálegyenlete.*

Röviden: *Az I-nek, mint a (2) jellemző egyenlet teljes megoldása (15) alakjának a c_1, c_2, c_3 állandók szerint képezett partiális differentiálquotienseit új γ_1, γ_2, γ_3, állandókkal egyenlővé téve: az így nyert egyenletek a mozgás kész integrálegyenleteivel egyenlők.*

Jegyzet. Feltételes mozgás esetében az $F_1(x, y, z, t)=0$, illetve még az $F_2(x, y, z, t)=0$ feltételek közvetetlenül egyenlők a (16) rendszer egy vagy két egyenletével; még egy feltétel hozzájárulása a mozgást teljesen ismertté teszi.

3. *A sebességek kifejezve a H-nak a nyomatékok szerint képezett differentiálquotienseivel.*

Teljesen differentiálva (16) egyenleteit t szerint:

$$\left.\begin{aligned} 0=\frac{d\gamma_1}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial c_1}\right)=\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial c_1}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial^2 I}{\partial y \partial c_1}\frac{dy}{dt}+ \\ +\frac{\partial^2 I}{\partial z \partial c_1}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial^2 I}{\partial t \partial c_1}=0 \text{ s í. t.} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (17)$$

Másrészt az (1)-et c_1, c_2, c_3 szerint akarjuk differentiálni; de az (1)-ben a c állandók a (15) értelmében csak az I quotienseiben fordul-

hatnak elő, melyeket (4) alapján mx'-, my'-, mz'-vel helyettesítve, az (1) egyenlet és jelzett quotiensei:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + H(x, y, z, t, mx', my', mz') = 0;$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 I}{\partial c_1 \partial t} + \frac{\partial H}{\partial (mx')}\frac{\partial (mx')}{\partial c_1} + \frac{\partial H}{\partial (my')}\frac{\partial (my')}{\partial c_1} + \\ &\qquad + \frac{\partial H}{\partial (mz')}\frac{\partial (mz')}{\partial c_1} = 0 \quad \text{s í. t.} \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Ámde (4)-ből

$$\frac{\partial (mx')}{\partial c_1} = \frac{\partial^2 I}{\partial c_1 \partial x}; \qquad \frac{\partial (my')}{\partial c_1} = \frac{\partial^2 I}{\partial c_1 \partial y}; \qquad \frac{\partial (mz')}{\partial c_1} = \frac{\partial^2 I}{\partial c_1 \partial z}$$

s így a (17) és (18) egymás mellett csak úgy állhat meg, ha rendre

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial (mx')}; \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial (my')}; \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial (mz')} \quad . \quad . \quad (19)$$

A (19) és a (9*a*) Hamilton *kánon-alakjai nem conservativ erőknél derékszögű coordinátákban,* [82. §. 2. pontja *a)* szakaszának Jegyzete 165 l.; 81. §. (6*a*), 82. §. (4*aa*)].

d) *Az energéma-elve : a dynamika alapegyenleteinek értelmezése Kőnig szerint.*

85. §. *Kőnig tárgyalásának célja. Uj mechanikai fogalmai. Alaptörvényeinek körvonalozása.*

1. A mozgás-egyenletek Lagrange-féle két alakja, a d'Alembert-féle elv, a legkisebb kényszernek Gauss-féle elve a közönséges mozgás-egyenletek tisztán analytikai transformatiójára vonatkozó tételeknek tekinthetők, melyek mindegyike ezen egyenleteknek új, sajátszerű előállítását szolgáltatja, de melyek mindegyike physikai (mechanikai) értelmezéssel is bír.

Kőnig Gyula 1887 április 18-án a M. T. Akadémia elé terjesztett egy dolgozatában * kiindul a legegyszerűbb mozgásjelenségből, az m tömegű pontnak a P erő hatása alatt leírt szabad mozgásából, melyre nézve Newton második axiomája értelmében: «Az m mozgásának φ gyorsulása érték szerint egyenlő P: m-mel, iránya pedig a P irányával egyenlő»; vagy a vectorok nyelvén röviden $m\vec{\varphi} = \vec{P}$.

Kőnig az idézett helyen a dynamika oly alaptörvényét kereste és

* A dynamika alapegyenleteinek jelentéséről. M. T. Akad. Értekezések a Mathematikai Tudományok köréből. XIV. kötet 1. sz. 1—43-ik lap 1888.

találta, mely az idézett Newton-féle tétel általánosításából áll, bármily anyagi pontrendszernek bármily erők hatása alatt és bármily feltételek mellett történő mozgására nézve érvényes, és e mozgást teljesen meghatározza.

Itt, hol Kőnig elvi eljárásának lényegét áttekinthetően kívánjuk tárgyalni: az anyagi pont mozgására szorítkozunk, melyen a dynamika alapegyenleteinek Kőnig-féle előállítási módszerét könnyen tanulmányozhatjuk.

2. *A szükséges mechanikai fogalmak.*

Alaptörvényének megszerkesztéséhez Kőnig néhány új fogalmat alkot, melyek a megfelelő közönséges mechanikai fogalmakból úgy származnak, hogy ezekbe a coordináták, illetve sebességek helyébe a megfelelő sebességek, illetve gyorsulások helyettesíttetnek.

Ezeket itt *derékszögű coordinátákra* vonatkoztatva, egy pontra nézve felírjuk; egy pontrendszerre nézve nyerjük őket, ha minden egyes pontjára nézve képezzük és összegezzük.

Az m coordinátái x, y, z; az idő szerint képezett differentiálquotienseket az $'$, $''$, veszszőkkel jeleljük; X, Y, Z az m-re ható P szabad (független) erőnek componensei; ekkor Kőnig terminologiája szerint:

$\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)$	az m közönséges, *sebességi* energiája;
$\frac{1}{2}m(x''^2+y''^2+z''^2)$	az m *gyorsulási* energiája;
$\int_{t_0}^{t}(Xx'+Yy'+Zz')\,dt$	a P közönséges, *sebességi* munkája;
$\int_{t_0}^{t}(Xx''+Yy''+Zz'')\,dt$	a P *gyorsulási* munkája;
$Xx+Yy+Zz$	a P erőnek Clausius-féle közönséges, *coordináta*-viriálja; *
$Xx'+Yy'+Zz'$	a P *sebességi* viriálja;
$Xx''+Yy''+Zz''$	a P *gyorsulási* viriálja;
$\frac{1}{2m}(X^2+Y^2+Z^2)$	a P erő *energémája*.**

3. *Az alaptörvény kétféle fogalmazása.*

A 2. pont fogalmai segélyével Kőnig a tőle talált alaptörvénynek kétféle, egymástól független alakját adja:

a) *Első alak:* Az összes ‚szabad' erők gyorsulási viriálja egyenlő ugyanezen erők kétszeres energémájával; és a ténylegesen végbemenő mozgásra nézve a gyorsulási energiának minimumnak kell lennie.

---

* V. ö. a 41. §. (2) egyenletét, 68. l.

** Ezt az elnevezést Szily Kálmán hozta javaslatba.

b) *Második alak:* Ebben a gyorsulási viriál és a gyorsulási energia előbbi szerepüket felcserélik és az előbbinek maximumnak kell lennie.

König csak az első alak részletes tárgyalásával foglalkozott, a második kevésbé egyszerű lévén; ezért a következőkben itt szintén csak az elsőre szorítkozunk; végre három tétellel, melyek utolsója a legkisebb kényszerrel egyenértékű, zárjuk be e fejezetet.

86. §. *Az erő dispositiója (irányítása); a kényszer egyenlete; a kényszernek alávetett erőcomponens.*

Valamely erő *dispositiója* alatt König ennek *irányítását* érti, melyet a *dispositió-coëfficiensek* határoznak meg; ezek egy tömegpont esetében az erő iránycosinusaira redukálódnak; itt az utóbbi, szokásos elnevezést tartjuk meg.

1. A feltétel, mely alatt az m mozogni tartozik, az

$$F(x, y, z, t)=\text{const.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

alakban (felület által) legyen előállítva, melynek t szerint képzett első és második differentiálquotiensét az 57. §-ban (3), (4) és (5) alatt felírtuk; az utóbbi, jelen jelölésünkkel

$$\frac{\partial F}{\partial x}x''+\frac{\partial F}{\partial y}y''+\frac{\partial F}{\partial z}z''=-\Psi,$$

avagy, osztva $\Phi=\pm\sqrt{(\frac{\partial F}{\partial x})^2+(\frac{\partial F}{\partial y})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^2}$-vel és rövidség kedveért írva

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}:\Phi=a;\quad \frac{\partial F}{\partial y}:\Phi=b;\quad \frac{\partial F}{\partial z}:\Phi=c \\ a^2+b^2+c^2=1;\quad -\Psi:\Phi=+G; \end{aligned}\right\}; \quad \ldots \quad (1a)$$

$$ax''+by''+cz''=+G \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

2. Legyenek Q egy egyelőre határozatlan erő, Q_x, Q_y, Q_z a componensei; ezt a P adott erőből vectormódra levonva és hozzáadva, a P maga $\vec{P}-\vec{Q}$ és $+\vec{Q}$ részekből állónak tekinthető és derékszögű componensei írhatók:

$$X=(X-Q_x)+Q_x;\quad Y=(Y-Q_y)+Q_y;\quad Z=(Z-Q_z)+Q_z. \quad (3)$$

A Q erőt most König azon megállapodás alapján határozza meg, hogy *iránya az* (1*a*) *alatti a, b, c iránycosinusok meghatározta egyenesbe essék, nagysága pedig azon feltételből következzék, hogy az adott* $\vec{P}$ *erő energémája egyenlő legyen* $\vec{P}-\vec{Q}$ *erő-különbség és a* $\vec{Q}$ *erő energémája összegével.* Az így definiált Q, König elnevezése szerint a P erőnek «*a kényszernek alávetett componense*», a $\vec{P}-\vec{Q}$ pedig «*szabad*

componense». A Q számára most megállapított definitiók kifejezései:

$$Q_x = aQ, \quad Q_y = bQ, \quad Q_z = cQ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

$$\left.\begin{aligned} m^{-1}(X^2+Y^2+Z^2) = m^{-1}\{(X-Q_x)^2+(Y-Q_y)^2+(Z-Q_z)^2\}+ \\ +m^{-1}(Q_x^2+Q_y^2+Q_z^2). \end{aligned}\right\} \quad (4b)$$

Kifejtve az utóbbi egyenletet, egyszerű rövidítéssel marad:

$$0 = -2(XQ_x+YQ_y+ZQ_z)+Q^2+Q^2,$$

a miből a (4*a*) egyenletei tekintetbe vételével:

$$Q = (Xa+Yb+Zc). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Azaz, az ily módon meghatározott, «a kényszernek alávetett erőcomponens» egyenlő az adott (független, rendesen szabadnak nevezett) P erőnek az (abc) iránymenti vetületével, avagy a P-nek az (1) alatti F felületre normális P_n componensével [53. §. (10)].

87. §. *Az egy feltételnek alávetett mozgás egyenleteinek származtatása* Kőnig *alaptörvénye első alakjából.*

A megelőző §. megállapodásai értelmében adottaknak tekintjük a P erőt és X, Y, Z componenseit; az F feltételt és így a Q-t és G-t is; keressük Kőnig alaptörvénye segélyével a gyorsulásoknak ezekkel való összefüggéseit (a mozgás egyenleteit).

1. Az alaptörvény első alakjának *első része* [85. §. 3. pontjának *a)* szakasza] a *gyorsulási egyenlet*ben nyer kifejezést: szerinte «*az erő* ««*szabad componensének*»» *gyorsulási viriálja egyenlő ugyanezen erőcomponens kétszeres energémájával*», azaz:

$$\left.\begin{aligned} (X-Q_x)\,x''+(Y-Q_y)\,y''+(Z-Q_z)\,z'' = \\ = m^{-1}\{(X-Q_x)^2+(Y-Q_y)^2+(Z-Q_z)^2\}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

A baloldal $Q_x x''+\cdot+\cdot$ része a megelőző §. (2) és (4*a*) egyenletei alapján:

$$Q_x x''+Q_y y''+Q_z z'' = +GQ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

a jobb oldal, kifejtve,

$$m^{-1}\{P^2-2(XQ_x+YQ_y+ZQ_z)+Q^2\};$$

s így, tekintettel a megelőző §. (4*a*) és (5) egyenletére, az (1)-ből:

$$Xx''+Yy''+Zz'' = +GQ+m^{-1}P^2-m^{-1}Q^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

mely a gyorsulási viriál egyenletének ezentúl használt alakja.

2. Ezen alaptörvény *második része* azt fejezi ki, hogy «*az m-nek mindazon mozgásai közül, melyek az 1. alatti tételnek és a kényszeregyenletnek megfelelőleg történhetnek, a tényleg végbemenő mozgás a legkisebb gyorsulási energiával bír*».

a) Az E_2 gyorsulási energia növekedése:

$$E_2+\Delta E_2-E_2=\tfrac{1}{2}m\{(x''+\Delta x'')^2+(y''+\Delta y'')^2+(z''+\Delta z'')^2\}-$$
$$-\tfrac{1}{2}m(x''^2+y''^2+z''^2);$$
$$\Delta E_2=m(x''\Delta x''+y''\Delta y''+z''\Delta z'')+\tfrac{1}{2}m(\overline{\Delta x''}^2+\overline{\Delta y''}^2+\overline{\Delta z''}^2). \quad . \quad (3)$$

Másrészt, a $\Delta x''$, $\Delta y''$, $\Delta z''$ variatióknak az x'', y'', z''-hez való hozzálépése sem a gyorsulási viriál (2) egyenlete jobb oldalát, sem az (1*a*) kényszeregyenlet jobb oldalát nem változtathatja, mert ezek adott, meghatározott értékek; ezért ezen egyenletekből

$$X\Delta x''+Y\Delta y''+Z\Delta z''=0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$
$$Q_x\Delta x''+Q_y\Delta y''+Q_z\Delta z''=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Az E_2-nek a 2. feltevés szerinti minimuma ezek alapján oly *feltételes minimum*, hogy (4) és (5) a $\Delta x''$, $\Delta y''$, $\Delta z''$ variatiók minden értékére nézve álljon; a szokásos eljárást alkalmazva, szorozzuk (4)-et és (5)-öt μ, illetve λ ismeretlen és még meghatározandó együtthatókkal és vonjuk azokat (3)-ból le, miáltal ez:

$$\left.\begin{aligned}\Delta E_2=(mx''-\mu X-\lambda Q_x)\Delta x''+(\ldots)\Delta y''+(\ldots)\Delta z''+\\ +\tfrac{1}{2}m(\overline{\Delta x''}^2+\overline{\Delta y''}^2+\overline{\Delta z''}^2).\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6)$$

A nevezett variatiókat most oly kicsinyeknek választjuk, hogy a másodrendű tagok nem változtathatják meg az elsőrendűek összegének előjelét; e szerint ha a (6)-ban $\Delta x''$, $\Delta y''$, $\Delta z''$ variatiók *együtthatói zérusok*, a ΔE_2 positiv és az E_2 tényleg minimum.

E zérussal egyenlített coëfficiensekből közvetetlenül

$$mx''=+\mu X+\lambda Q_x; \quad my''=+\mu Y+\lambda Q_y; \quad mz''=+\mu Z+\lambda Q_z. \quad . \quad (7)$$

b) A μ és λ meghatározására az (1*a*) kényszeregyenlet és a gyorsulási energia (2) egyenlete szolgál.

Ugyanis, szorozva a (7) rendszer egyenleteit a, b, c-vel, összegük a 86. §. (2), (4*a*) és (5) egyenletei tekintetbe vételével

$$mG=m(ax''+by''+cz'')=+\mu(Xa+Yb+Zc)+\lambda(Q_xa+Q_yb+Q_zc);$$
$$mG=\mu Q+\lambda Q,$$

azaz:

$$(\mu+\lambda)Q^2=mGQ. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Másrészt, szorozva a (7) egyenleteit rendre X, Y, Z-vel, összegük a most idézett egyenletek és a jelen §. (2) egyenlete tekintetbe vételével:

$$=\mu(X^2+Y^2+Z^2)+\lambda(XQ_x+YQ_y+ZQ_z)=m(Xx''+Yy''+Zz'')=$$
$$=mGQ+P^2-Q^2=\mu P^2+\lambda Q^2,$$
$$(1-\mu)P^2-(1+\lambda)Q^2=-mGQ. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

A (8) és (9) összegéből λ kiesik és marad

$$(1-\mu)\,P^2-(1-\mu)\,Q^2=0,$$

a miből, a $P=Q$ kivételes esettől eltekintve:

$$1-\mu=0, \quad \mu=+1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

melylyel a (8) vagy a (9)

$$(1+\lambda)\,Q^2=mGQ,$$

$$\lambda=-\left(1-m\frac{G}{Q}\right). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

A (10) és (11) alapján a (7) rendszer, téve benne $Q_x=aQ$ s. í. t.,

$$\left.\begin{aligned} mx''&=X-a\,(Q-mG),\\ my''&=Y-b\,(Q-mG),\\ mz''&=Z-c\,(Q-mG). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

c) Összehasonlítva e rendszert a kényszermozgás typusszerű egyenleteivel [pl. 57. §. (2)], észreveszszük, hogy a közönséges értelemben vett R nagyságú, $a=\frac{\partial F}{\partial x}:\Phi,-,-$, iránycosinusú *tényleges kényszererő* (11) szerint a (12)-ben:

$$R=-(Q-mG)=+\lambda Q, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13a)$$

vagy a 86. §. (5) és (1*a*) egyenletei figyelembe vételével:

$$\lambda Q=-(Xa+Yb+Zc)-m\frac{\Psi}{\Phi}=R \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

s ez teljesen megegyező az R számára az 57. §-ban (6) alatt talált kifejezéssel.

A jelen §. kifejtéseivel ki van mutatva, hogy az egy feltételnek alávetett mozgás közönséges egyenletei a Kőnig-féle alaptörvény első alakjának feltevéseiből közvetetlenül folynak s hogy így ez az alaptörvény mechanikai szempontból a mozgásegyenletekkel egyenértékű.

88. §. *Az alaptörvény, két feltételnek alávetett pontmozgásra alkalmazva.*

Ezen esetben a tárgyalás nehány pontja bonyolódottabb, de a Kőnig-féle «a kényszernek alávetett erőcomponens» természetébe s az alaptörvény általánosabb alkalmazásának eljárásába mélyebb betekintést enged meg.

Legyenek

$$F_1(x,y,z,t)=C_1; \quad F_2(x,y,z,t)=C_2 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

az adott feltételek (előírt felületek); belőlük a 86. §. míveletei szerint a megfelelő indexek hozzácsatolásával:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}x''+\frac{\partial F_1}{\partial y}y''+\frac{\partial F_1}{\partial z}z''=-\Psi_1; \quad \frac{\partial F_2}{\partial x}x''+\frac{\partial F_2}{\partial y}y''+\frac{\partial F_2}{\partial z}z''=-\Psi_2;$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} : \Phi_1 = a_1 \text{ s. í. t.}; \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} : \Phi_2 = a_2 \text{ s í. t.};$$

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1; \quad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1;$$

$$-\frac{\Psi_1}{\Phi_1} = G_1; \quad -\frac{\Psi_2}{\Phi_2} = G_2; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$a_1 x'' + b_1 y'' + c_1 z'' = G_1; \quad a_2 x'' + b_2 y'' + c_2 z'' = G_2. \quad \ldots \quad (3)$$

1. *A kényszernek alávetett erőcomponensek.*

Az (1) két kényszeregyenletnek a Q_1 és Q_2 Kőnig-féle «a kényszernek alávetett erőcomponensek» feleljenek meg; ezek a 86. §. 2. pontjának megállapításai szerint határozódnak meg; ugyanis Q_1 irányának cosinusai (dispositió-coëfficienseі) a_1, b_1, c_1; Q_2-éi a_2, b_2, c_2; nagyságukat pedig az idézett helyen (*4b*) alatt adott energéma-tételnek a Q_1-re és Q_2-re külön-külön alkalmazása adja:

$$m^{-1} P^2 = m^{-1} [(X - a_1 Q_1)^2 + (Y - b_1 Q_1)^2 + (Z - c_1 Q_1)^2] + m^{-1} Q_1^2;$$

$$m^{-1} P^2 = m^{-1} [(X - a_2 Q_2)^2 + (Y - b_2 Q_2)^2 + (Z - c_2 Q_2)^2] + m^{-1} Q_2^2;$$

melyekből [i. h. (5)]:

$$Q_1 = (X a_1 + Y b_1 + Z c_1); \quad Q_2 = (X a_2 + Y b_2 + Z c_2); \quad \ldots \quad (4)$$

azaz, ezek a P független erőnek az (1) alatti F_1, illetve F_2 felületekre normális P_{n_1} és P_{n_2} componensei [58. §. (7)].

a) Kőnig most egy új *(eredő)* «a kényszernek alávetett erőcomponenst» Q-t és ennek a, b, c iránycosinusait (dispositió-coëfficienseit) abból a megfontolásból határoz meg, hogy egyrészt a Q_1 és a Q_2 a Q-nak az $(a_1 b_1 c_1)$ illetve $(a_2 b_2 c_2)$ irányok menti componensei *(vetületei)* legyenek, azaz, hogy álljon:

$$\left.\begin{aligned} (Qa)\, a_1 + (Qb)\, b_1 + (Qc)\, c_1 &= Q_1; \\ (Qa)\, a_2 + (Qb)\, b_2 + (Qc)\, c_2 &= Q_2; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

másrészt, hogy az (abc) irány teljes meghatározására l_1 és l_2 segédszámok oly módon szolgáljanak, hogy legyen:

$$a = a_1 l_1 + a_2 l_2; \quad b = b_1 l_1 + b_2 l_2; \quad c = c_1 l_1 + c_2 l_2; \quad \ldots \quad (6)$$

$$(a_1 l_1 + a_2 l_2)^2 + (b_1 l_1 + b_2 l_2)^2 + (c_1 l_1 + c_2 l_2)^2 = 1. \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

[Az a, b, c-t a (6)-ból (5)-be helyettesítve: az (5) és a (7) egyenletek elegendők az ismeretlen Q, l_1, l_2 menynyiségek meghatározására].

b) Szorozva az (5) elsejét l_1-, másodikát l_2-vel, összegük, tekintettel (6)-ra és (7)-re:

$$Q = Q_1 l_1 + Q_2 l_2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Rövidség kedveért vezessük be a Q, Q_1, Q_2 közötti szögeket:

$$\left.\begin{array}{c}(Q, Q_1)\measuredangle=\varepsilon_1;\quad (Q, Q_2)\measuredangle=\varepsilon_2;\quad (Q_1, Q_2)\measuredangle=\varepsilon;\\ \cos\varepsilon_1=aa_1+bb_1+cc_1;\quad \cos\varepsilon_2=aa_2+bb_2+cc_2;\\ \cos\varepsilon=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2;\end{array}\right\}\quad . \quad (6a)$$

helyettesítve $\cos\varepsilon_1$ és $\cos\varepsilon_2$ itt írt kifejezéseibe (6)-ból a, b, c-t:

$$\cos\varepsilon_1=l_1+l_2\cos\varepsilon;\quad \cos\varepsilon_2=l_1\cos\varepsilon+l_2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7a)$$

Bebizonyítjuk továbbá, hogy az így meghatározott Q a (Q_1Q_2) síkban fekszik; ugyanis ezen utóbbi sík normálisának iránycosinusai kettős előjelüktől eltekintve, [Math. Repert. 44. §. (3), 42. lap.]:

$$(b_1c_2-b_2c_1)\sin^{-1}\varepsilon;\quad (c_1a_2-c_2a_1)\sin^{-1}\varepsilon;\quad (a_1b_2-a_2b_1)\sin^{-1}\varepsilon;$$

szorozva ezeket rendre a Q-nak (6) alakú a, b, c iránycosinusaival, összegük a nevezett normális és a Q közötti szög cosinusát adja. De ezen összegben mind az l_1, mind az l_2-vel szorzott együttható ellentetten egyenlő tagokból áll s így az összeg s vele a cosinus is zérus, azaz Q_1, Q_2, Q s velük az ε_1, ε_2, ε szögek is *egy síkban fekszenek*, minek folytán:

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7aa)$$

Az l_1 és l_2 az ε, ε_1, ε_2 segélyével a (7a) alapján fejezhetők ki; így pl. eliminálva (7a)-ból l_2-őt:

$$l_1-l_1\cos^2\varepsilon=\cos\varepsilon_1-\cos\varepsilon_2\cos\varepsilon=\cos\varepsilon_1-\cos\varepsilon_2\cos(\varepsilon_1+\varepsilon_2);$$

$$l_1\sin^2\varepsilon=\cos\varepsilon_1(1-\cos^2\varepsilon_2)+\cos\varepsilon_2\sin\varepsilon_1\sin\varepsilon_2=$$

$$=\sin\varepsilon_2(\cos\varepsilon_1\sin\varepsilon_2+\cos\varepsilon_2\sin\varepsilon_1),$$

és így l_1 és megfelelőleg l_2:

$$l_1=\frac{\sin\varepsilon_2}{\sin\varepsilon};\quad l_2=\frac{\sin\varepsilon_1}{\sin\varepsilon}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7b)$$

c) Végre az (5) componensek a (6a) jelölésekkel írhatók:

$$Q_1=Q\cos\varepsilon_1;\quad Q_2=Q\cos\varepsilon_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5a)$$

melyek az $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$ egyenlettel kapcsolatban a Q kifejezésére szolgálhatnak. Ugyanis rendre áll:

$$Q_2=Q\cos\varepsilon_2=Q\cos(\varepsilon-\varepsilon_1)=Q\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon+Q\sin\varepsilon_1\sin\varepsilon;$$

$$Q_2=Q_1\cos\varepsilon+\sin\varepsilon\sqrt{Q^2-Q^2\cos^2\varepsilon_1};$$

$$(Q_2-Q_1\cos\varepsilon)^2=(Q^2-Q_1^2)\sin^2\varepsilon,$$

miből végre:

$$Q^2=(Q_1^2+Q_2^2-2Q_1Q_2\cos\varepsilon)\sin^{-2}\varepsilon. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8a)$$

E szerint a Q_1, Q_2, ε a (8a)-val megadják a Q-t; ez azután (5a)-val az ε_1 és ε_2-őt, és miután e három erő egy síkban fekszik, evvel a Q iránya és nagysága explicite van képezve. A (7b)-vel l_1-et és l_2-őt és végre (6)-al az a, b, c-t fejezhetni ki.

d) Ezek szerint itt «a kényszernek alávetett eredő erőcomponens» a Q, és (6) szerint ennek derékszögű vetületei:

$$Qa=Q(a_1l_1+a_2l_2) \text{ s í. t.}$$

s a «szabad erőcomponens» ilyen vetületei:

$$X-Q(a_1l_1+a_2l_2) \text{ s í. t.}$$

2. A *gyorsulási viriál tétele* [87. §. 1. pontja] a megelőző *d)* szakasz felhasználásával itt következőleg lesz formulázva:

$$[X-Q(l_1a_1+l_2a_2)]x''+[Y-Q(l_1b_1+l_2b_2)]y''+[Z-Q(l_1c_1+l_2c_2)]z''=$$
$$=m^{-1}\{[X-Q(l_1a_1+l_2a_2)]^2+[Y-Q(l_1b_1+l_2b_2)]^2+[Z-Q(l_1c_1+l_2c_2)]^2\}.$$

A baloldal a (3) egyenletek tekintetbe vételével egyszerűsíthető; a jobboldal pedig kifejthető s a (4) rendszer és a (7) segélyével összevonható; nyerjük:

$$Xx''+Yy''+Zz''-l_1G_1Q-l_2G_2Q=m^{-1}P^2-2m^{-1}Q\lfloor l_1(Xa_1+Yb_1+Zc_1)+$$
$$+l_2(Xa_2+Yb_2+Zc_2)]+m^{-1}Q^2.$$

A jobboldali 2-vel szorzott tag a (4) és (8) szerint $-2m^{-1}Q[Q_1l_1+Q_2l_2]=-2m^{-1}Q^2$, miáltal végre az m-el szorzott egyenlet írható:

$$m(Xx''+Yy''+Zz'')=mQ(l_1G_1+l_2G_2)+P^2-Q^2. \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

3. A *gyorsulási energia* változása, továbbá a $\Delta x''$, $\Delta y''$, $\Delta z''$ variátióknak a gyorsulási viriálból s a két feltételből folyó egyenletei itt a (9) és (3)-ból [megfelelőleg a 87. §. (3), (4), (5) egyenleteinek]:

$$\Delta E_2=m(x''\Delta x''+y''\Delta y''+z''\Delta z'')+\tfrac{1}{2}m(\overline{\Delta x''}^2+\overline{\Delta y''}^2+\overline{\Delta z''}^2);$$

$$0=X\Delta x''+Y\Delta y''+Z\Delta z'';$$
$$0=Ql_1(a_1\Delta x''+b_1\Delta y''+c_1\Delta z'');$$
$$0=Ql_2(a_2\Delta x''+b_2\Delta y''+c_2\Delta z'').$$

Szorozva a második, harmadikat és negyediket rendre a μ, λ_1, λ_2 egyelőre határozatlan együtthatókkal, és levonva őket az elsőből: az idézett 87. §. 2. pontja *a)* szakaszában adott eljárással nyerjük az E_2 feltételi minimumából

$$\left.\begin{aligned} mx''&=\mu X+Q(\lambda_1l_1a_1+\lambda_2l_2a_2)\\ my''&=\mu Y+Q(\lambda_1l_1b_1+\lambda_2l_2b_2)\\ mz''&=\mu Z+Q(\lambda_1l_1c_1+\lambda_2l_2c_2)\end{aligned}\right\}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

mely egyenletek szerkezete értelmében a tényleges kényszererő derékszögű componensei a (10)-nek Q-val szorzott részeivel egyenlők és ezen erő nagysága (ezek vector-eredője) a (6*a*) jelölésével:

$$Q[\lambda_1^2l_1^2+\lambda_2^2l_2^2+2\lambda_1\lambda_2l_1l_2\cos\varepsilon]^{\frac{1}{2}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10a)$$

4. A μ, λ_1, λ_2 *együtthatók meghatározására* a gyorsulási energia (9) alatti és a (3) feltételi két egyenlet szolgál.

Képezve (10)-ből a (9) baloldalát, ez

$$\mu(X^2+Y^2+Z^2)+\lambda_1 Ql_1(Xa_1+Yb_1+Zc_1)+\lambda_2 Ql_2(Xa_2+Yb_2+Zc_2);$$

avagy (4) szerint

$$\mu P^2+Q\lambda_1 Q_1 l_1+Q\lambda_2 Q_2 l_2,$$

melyet a (9) jobb oldalával egyenlővé téve, nyerjük:

$$mQ(G_1 l_1+G_2 l_2)=(-1+\mu)P^2+Q^2+Q(\lambda_1 Q_1 l_1+\lambda_2 Q_2 l_2). \quad . \quad (11)$$

Másrészt, szintén (10)-ből képezve a (3) egyenletek m-szereseit, a (4) felhasználásával:

$$mG_1=m(a_1x''+b_1y''+c_1z'')=\mu(Xa_1+Yb_1+Zc_1)+Q\lambda_1 l_1(a_1^2+b_1^2+c_1^2)+$$
$$+Q\lambda_2 l_2(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)=m_1G_1;$$

avagy, a (6a) jelölések felhasználásával rendre:

$$\left.\begin{aligned} mG_1&=\mu Q_1+Q(\lambda_1 l_1+\lambda_2 l_2\cos\varepsilon);\\ mG_2&=\mu Q_2+Q(\lambda_1 l_1\cos\varepsilon+\lambda_2 l_2).\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Szorozva az első egyenletet l_1-el, a másodikat l_2-el, összegük képzésénél a λ_1 a $Ql_1(l_1+l_2\cos\varepsilon)$, a λ_2 pedig a $Ql_2(l_1\cos\varepsilon+l_2)$ együtthatóval szorozva lép fel; de ezen zárojeles tényezők (7a) szerint $\cos\varepsilon_1$ illetve $\cos\varepsilon_2$-vel egyenlők lévén, a nevezett összeg írható:

$$m(G_1 l_1+G_2 l_2)=\mu(Q_1 l_1+Q_2 l_2)+Q\lambda_1 l_1\cos\varepsilon_1+Q\lambda_2 l_2\cos\varepsilon_2,$$

avagy (5a) és (8) értelmében, ha Q-val szorozzuk:

$$mQ(G_1 l_1+G_2 l_2)=\mu Q^2+Q\lambda_1 Q_1 l_1+Q\lambda_2 Q_2 l_2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

A (11) és (13) különbsége:

$$0=(1-\mu)(P^2-Q^2),$$

mely, eltekintve a $P=Q$ kivételes esettől, mindig adja

$$1-\mu=0, \quad \mu=+1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14$$

Ezzel a (12) rendszer

$$\left.\begin{aligned} mG_1-Q_1&=+Q(\lambda_1 l_1+\lambda_2 l_2\cos\varepsilon);\\ mG_2-Q_2&=+Q(\lambda_1 l_1\cos\varepsilon+\lambda_2 l_2);\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

s ezt $\lambda_1 l_1$-re és $\lambda_2 l_2$-re megoldva, ha rövidség kedvéért

$$-Q_1+mG_1=R_{n_1}; \quad -Q_2+mG_2=R_{n_2}; \quad . \quad . \quad . \quad (16a)$$

$$Q\lambda_1 l_1=\frac{1}{\sin^2\varepsilon}(R_{n_1}-R_{n_2}\cos\varepsilon); \quad Q\lambda_2 l_2=\frac{1}{\sin^2\varepsilon}(R_{n_2}-R_{n_1}\cos\varepsilon). \quad . \quad (16)$$

5. A *mozgásegyenletek* (10) alakja a (14) és (16) szerint:

$$mx''=X+\frac{R_{n_1}-R_{n_2}\cos\varepsilon}{\sin^2\varepsilon}a_1+\frac{R_{n_2}-R_{n_1}\cos\varepsilon}{\sin^2\varepsilon}a_2 \text{ s í. t.,} \quad . \quad (17)$$

hol a jobboldali második és harmadik tagok összegei a tényleges kényszererőnek, R-nek R_x, R_y, R_z derékszögű componensei:

$$R_x=[(R_{n_1}-R_{n_2}\cos\varepsilon)a_1+(R_{n_2}-R_{n_1}\cos\varepsilon)a_2]\sin^{-2}\varepsilon; \text{ s í. t.} \quad (18a)$$

és ezekből az R négyzete:

$$R^2\sin^4\varepsilon=(R_{n_1}-R_{n_2}\cos\varepsilon)^2+(R_{n_2}-R_{n_1}\cos\varepsilon)^2+$$
$$+2(R_{n_1}-R_{n_2}\cos\varepsilon)(R_{n_2}-R_{n_1}\cos\varepsilon)\cos\varepsilon,$$

avagy, egyszerű összevonások után:

$$R=[R_{n_1}^2+R_{n_2}^2-2R_{n_1}R_{n_2}\cos\varepsilon]^{\frac{1}{2}}\sin^{-1}\varepsilon. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Továbbá, szorozva (18*a*) egyenleteit rendre a_1, b_1, c_1, illetve a_2, b_2, c_2-vel, összegük az R-nek az $(a_1b_1c_1)$, illetve $(a_2b_2c_2)$ irányok menti componenseit adják; az összegek pedig, a (6*a*) tekintetbe vételével egyszerű számítással redukálódnak R_{n_1} és R_{n_2}-re:

$$R_xa_1+R_yb_1+R_zc_1=R_{n_1}; \quad R_xa_2+R_yb_2+R_zc_2=R_{n_2}. \quad . \quad (19)$$

Az R e szerint oly vector, melynek az $(a_1b_1c_1)$ és $(a_2b_2c_2)$ irányokra való *vetületei* az R_{n_1} és R_{n_2}-őt adják, míg nagyságát a (18) értelmében az R_{n_1}, R_{n_2} és a nevezett két irány közötti ε szög határozza meg.

E szerint az R, R_{n_1}, R_{n_2} közötti ezen három kapcsolat teljesen egyező a Q, Q_1, Q_2 közötti három kapcsolatokkal, [(5*a*) és (8*a*) egyenletek] s mivel R_{n_1} és R_{n_2} a (19) szerint Q_1 és Q_2 irányaiba esnek, az R is kell, hogy a Q irányába essék, azaz, hogy (19)-ből

$$R\cos\varepsilon_1=R_{n_1}; \quad R\cos\varepsilon_2=R_{n_2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19a)$$

Evvel be van bizonyítva, hogy az (abc) irányú R, az $(a_1b_1c_1)$ és $(a_2b_2c_2)$ irányú R_{n_1} és R_{n_2}, azaz a (18), (19) és (16*a*) kifejezések jelentése és értelme teljesen megegyezik a kényszermozgás közönséges tárgyalásnál [58. §. (7), (7*aa*), (7*a*) alatt] nyert eredményekkel s így ebben a bonyolódott esetben is a Kőnig-féle eljárás ugyanazokat a mozgásegyenleteket szolgáltatta, mint a közönséges eljárás.

Jegyzet. A (19*a*) és (5*a*) értelmében a (16*a*) írható:

$$R\cos\varepsilon_1=mG_1-Q\cos\varepsilon_1, \quad R\cos\varepsilon_2=mG_2-Q\cos\varepsilon_2; \quad . \quad (16aa)$$

miből azonnal:

$$G_1:G_2=\cos\varepsilon_1:\cos\varepsilon_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

vagy a (8*a*) és (18) sémájával bevezetve a G_1 és G_2-ből így eredő G menynyiséget a G_1 és G_2 helyébe:

$$G_1=G\cos\varepsilon_1; \quad G_2=G\cos\varepsilon_2; \quad G=[G_1^2+G_2^2-2G_1G_2\cos\varepsilon]^{\frac{1}{2}}\sin^{-1}\varepsilon, \quad . \quad (21)$$

miáltal a (16*aa*) egyenletei egyszerűen

$$R=mG-Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

alakra redukálódnak [v. ö. a 87. §. (13*a*) egyenletét].

89. §. *A gyorsulási viriál a tényleges mozgásnál maximum.*

A 85. §. végén említett második alakját a KÖNIG-féle alaptörvénynek itt mellőzve, helyébe egy tőle származó tételt adunk, mely a mozgásnak azt a nevezetes sajátságát fejezi ki, hogy: «*A tényleg történő mozgásnál a gyorsulási viriál minden időpillanatban nagyobb, mint bármely más lehetséges oly mozgásnál, mely a kényszeregyenleteinek megfelel s melyre nézve a gyorsulási energia ugyanaz, mint a tényleges mozgásnál*».

Ugyanis, a gyorsulási viriál, 173. l.:

$$V_2=Xx''+Yy''+Zz'';$$

más mozgás-törvényeknél a gyorsulás componensei $x''+\Delta x''$; $y''+\Delta y''$; $z''+\Delta z''$ s így e viriál változása:

$$\Delta V_2=X\Delta x''+Y\Delta y''+Z\Delta z''. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Továbbá, a kényszeregyenletek a 88. §. 3. pontja harmadik és negyedik egyenlete értelmében írhatók:

$$Ql_1(a_1\Delta x''+b_1\Delta y''+c_1\Delta z'')=0; \quad Ql_2(a_2\Delta x''+b_2\Delta y''+c_2\Delta z'')=0; \quad (2)$$

és ugyanezen pont első egyenlete szerint a gyorsulási energia változása, mely itt a feltevés szerint zérus:

$$\Delta E_2=m(x''\Delta x''+y''\Delta y''+z''\Delta z'')+\tfrac{1}{2}m(\overline{\Delta x''}^2+\overline{\Delta y''}^2+\overline{\Delta z''}^2)=0. \quad (3)$$

Szorozva a (2) egyenleteit λ_1 és λ_2-vel s ezeket (1)-hez adva, a (3)-t pedig ebből levonva: ezek a ΔV_2 jobboldala értékét nem változtathatják; de a $\Delta x''$-el s í. t. szorzott együtthatók: $X+Q(\lambda_1 l_1 a_1+\lambda_2 l_2 a_2)—mx''$ s í. t. a 88. §. (10) és (14) kifejezései értelmében zérusok s így ΔV_2 számára marad:

$$\Delta V_2=-\tfrac{1}{2}m\{\overline{\Delta x''}^2+\overline{\Delta y''}^2+\overline{\Delta z''}^2\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

mely lényegesen negativ lévén, fent kimondott tételünk be van bizonyítva.*

90. §. *Szabad pont tényleges energémája minimum.*

Ezen §.-ban megfordítjuk a 85. §. 1. pontjában felállított s az eddigiekben megfejtett problemát, ugyanis, a gyorsulás componenseit

---

* E tétel analog, de nem identikus W. GIBBS azon tételével [v. ö. a 121. lapon idézett értekezése 58. lapja (14) kifejezését], mely szerint a mozgás egyenleteinek formája:

$$\delta\{Xx''+Yy''+Zz''—\tfrac{1}{2}(x''^2+y''^2+z''^2)\}\leqq 0,$$

hol a δ variátiójel csak a gyorsulásokra vonatkozik, mely utóbbiak a kényszer feltételeinek tartoznak eleget tenni.

A szöveg fogalmaival kifejezve GIBBS tételét: *A gyorsulási viriál s a gyorsulási energia különbsége a tényleges mozgásra nézve maximum.*

a mozgásállapot adott függvényeinek tekintve, keressük azokat az erőket, illetve ezek kifejezéseit, melyek ugyanezt a mozgást szolgáltatják.

A szabad mozgásra nézve ezt a problemát KÖNIG a következő tétellel fejti meg:

«*Szabad erők gyorsulási viriálja mindig egyenlő a pont kétszeres gyorsulási energiájával; az erők tényleges energémája kisebb, mint minden más erőké, melyekre nézve a gyorsulási viriál és a kétszeres gyorsulási energia egyenlősége fennáll*».

Legyenek X, Y, Z az energéma-minimumnak megfelelő erők; $X+\Delta X$, $Y+\Delta Y$, $Z+\Delta Z$ más erők; akkor, mivel a gyorsulási viriálnak minden pillanatban az adott gyorsulási energia kétszeresével egyenlőnek kell lennie:

$$Xx''+Yy''+Zz''=m(x''^2+y''^2+z''^2); \quad \ldots \quad (1)$$

$$x''\Delta X+y''\Delta Y+z''\Delta Z=0. \quad \ldots \quad (2)$$

Továbbá, az energéma és ennek variátiója:

$$E=\tfrac{1}{2}m^{-1}[X^2+Y^2+Z^2];$$

$$\Delta E=m^{-1}[X\Delta X+Y\Delta Y+Z\Delta Z]+\tfrac{1}{2}m^{-1}[\overline{\Delta X}^2+\overline{\Delta Y}^2+\overline{\Delta Z}^2]. \quad 3)$$

Szorozva (2)-őt később meghatározandó ν együtthatóval s levonva (3)-ból, lesz

$$\Delta E=(Xm^{-1}-\nu x'')\Delta X+(Ym^{-1}-\nu y'')\Delta Y+(Zm^{-1}-\nu z'')\Delta Z+$$
$$+\tfrac{1}{2}m^{-1}[\overline{\Delta X}^2+\overline{\Delta Y}^2+\overline{\Delta Z}^2].$$

Az E minimumának feltételei e szerint: $Xm^{-1}-\nu x''=0$ s í. t., azaz:

$$X=m\nu x''; \quad Y=m\nu y'' \quad Z=m\nu z''; \quad \ldots \quad (4)$$

a ν meghatározására szorozzuk ezeket rendre x'', y'', z''-el; összegüket (1)-el egybevetve, azonnal látjuk, hogy $\nu=1$ s így

$$X=mx''; \quad Y=my''; \quad Z=mz'' \quad \ldots \quad (5)$$

azok az erők, illetve kifejezéseik, melyek a tényleges, szabad mozgást létesítik.

91. §. *A kényszererők energémájának minimumtétele. (A kényszererők elve.) Megegyezés a legkisebb kényszer elvével.*

A megelőző §. tétele kényszermozgásra is terjeszthetők ki; ugyanis minden kényszer erők által helyettesíthető, mert mechanikai hatásában ezekkel egyenértékű; e kényszererőknek az adott erőkhöz való kapcsolása által a mozgás szabadnak tekinthető s így a kényszererők meghatározásának problémája előtt állunk.

E problémát KÖNIG a következő tétellel fejti meg:

«*A kényszererők energémája minimum, összehasonlítva ezt mind azon erőrendszerek energémájával, mely erőknek az eredetileg adott*

erőkhöz való hozzákapcsolása által a pont szabad mozgása a kényszeregyenleteknek megfelelő mozgássá válna.»

1. A kényszeregyenletek [88. §. (3)]:

$$a_1x''+b_1y''+c_1z''=G_1;\quad a_2x''+b_2y''+c_2z''=G_2;\quad \ldots \quad (1)$$

és R_x, R_y, R_z legyenek azok a kényszererők, melyek az említett minimum-feltételnek és a kényszeregyenleteknek megfelelnek, míg $R_x+\Delta R_x$, $R_y+\Delta R_y$, $R_z+\Delta R_z$ oly kényszererők, melyek csak a kényszeregyenleteknek, de nem a minimumnak feleljenek meg.

E szerint az elsőkre nézve:

$$mx''=X+R_x \text{ s í. t.}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1a)$$

az utóbbiakra nézve

$$mx''=X+R_x+\Delta R_x \text{ s í. t.}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1b)$$

melyek mind az (1)-nek megfelelnek s így:

$$m^{-1}[(X+R_x)a_i+(Y+R_y)b_i+(Z+R_z)c_i]=G_i;\quad i=1,2; \quad \ldots \quad (2)$$

$$m^{-1}[\Delta R_x a_i+\Delta R_y b_i+\Delta R_z c_i]=0; \qquad i=1,2. \quad \ldots \quad (3)$$

2. Másrészt az R erő energémája s ennek ΔR folytán beálló növekedése:

$$E_R=\tfrac{1}{2}m^{-1}[R_x^2+R_y^2+R_z^2] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} E_{R+\Delta R}-E_R=\Delta E_R=m^{-1}[R_x\Delta R_x+R_y\Delta R_y+R_z\Delta R_z]+\\ +\tfrac{1}{2}m^{-1}[\overline{\Delta R_x^2}+\overline{\Delta R_y^2}+\overline{\Delta R_z^2}]. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4a)$$

Az E_R minimuma feltételeinek megállapítása czéljából szorozva most a (3) kényszeregyenleteket rendre $Q\lambda_1 l_1$, $Q\lambda_2 l_2$ egyelőre határozatlan együtthatókkal és levonva őket (4a)-ből:

$$\Delta E_R=m^{-1}\{[R_x-Q(\lambda_1 l_1 a_1+\lambda_2 l_2 b_2)]\Delta R_x+[\ldots]\Delta R_y+[\ldots]\Delta R_z\}+$$
$$+\tfrac{1}{2}m^{-1}[\overline{\Delta R_x^2}+\overline{\Delta R_y^2}+\overline{\Delta R_z^2}],$$

mely kifejezés csak úgy lehet mindig positiv, ha ΔR_x s í. t. együtthatói zérusok, azaz, ha áll:

$$R_x=Q(\lambda_1 l_1 a_1+\lambda_2 l_2 a_2);\ R_y=Q(\lambda_1 l_1 b_1+\lambda_2 l_2 b_2);\ R_z=Q(\lambda_1 l_1 c_1+\lambda_2 l_2 c_2). \quad (5)$$

3. A bevezetett együtthatók meghatározása a (2) segélyével történik; (5)-öt (2) egyenleteibe helyettezve, ezek írhatók:

$$mG_i=(Xa_i+Yb_i+Zc_i)+Q[\lambda_i l_i(a_i^2+b_i^2+c_i^2)+\lambda_j l_j(a_i a_j+b_i b_j+c_i c_j)]; \quad (6)$$

hol egyszerre:

$$\left.\begin{matrix} i=1 \\ j=2 \end{matrix}\right\};\quad \text{vagy} \quad \left.\begin{matrix} i=2 \\ j=1 \end{matrix}\right\};$$

ezek pedig a 88. §. (4), (6a), (12), (14) egyenleteivel egyezők, s így az előbbi mozgásegyenleteket, most is találjuk.

4. Az (1*a*) alatti $R_x = mx'' - X$ s í. t. egyenletek értelmében az e §. elején kimondott és 2. pontjában kifejtett feltétel, hogy a *kényszererők energémája minimum* legyen, ugyanaz, mint az a feltétel, hogy az

$$(mx'' - X)^2 + (my'' - Y)^2 + (mz'' - Z)^2$$

összeg minimum legyen; ez pedig a *legkisebb kényszer* feltétele [71. §. (8), 135. l.], melylyel e §. tétele, tartalma és érvényességi köre tekintetében egyezik.

4. Az anyagi pont mozgásegyenletei általános coordinátákban.

a) *Általános és orthogonális coordináták, sebességek, gyorsulások, erőcomponensek.*

92. §. *Általános coordináták, sebességek, gyorsulások. Szabad és kényszermozgás független coordinátái. Jelölések.*

1. A pont helyzetét a térben mozdulatlan bármily alakzathoz képest három coordináta, három helyhatározó adja meg.

Bár eddig túlnyomólag a derékszögű- és a polár- s ritkábban a henger-coordináták rendszerét alkalmaztuk: e fejezetben a coordináták rendszerére nézve semmiféle megszorítást nem teszünk, ezeket csakis bármi fajú helymeghatározóknak tekintjük, és ezen oknál fogva *általános coordinátáknak* nevezzük.

Ezeknek az időszerint képezett első és magasabb rendű differentiálquotiensei az *általános sebességek, gyorsulások* s í. t.

Az általános coordináták használata mindenek előtt azon lényeges előnynyel bír, hogy a segélyükkel szerkesztett bármily kifejezések, összefüggések és egyenletek teljesen függetlenek a coordinátarendszertől és így a mozgásnak egészen általános tulajdonságait tüntetik elő.

2. *Szabad* pont *három független* helymeghatározóval bír; *kényszernek alávetett pont* csak *két* vagy *egy* ily *független* coordinátával.

A következő 93—96. §§. kifejtései szabad pontmozgásra vonatkoznak; a 97. §-ban pedig azt a fontos sajátságukat bizonyítjuk be, hogy a talált eredmények kényszermozgásra is közvetetlenül érvényesek, csakhogy itt a független coordináták s velük együtt a kifejezések tagjainak s maguknak a mozgásegyenleteknek is a száma a szabad mozgáséinál anynyival kisebb, a menynyi a feltételek száma.

3. *Jelölések.* Az m derékszögű coordinátái x, y, z; általános coordinátái q_1, q_2, q_3; ezekből:

$$x, y, z; \qquad \left.\begin{aligned} x' &= \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad z' = \frac{dz}{dt}; \\ x'' &= \frac{d^2x}{dt^2}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad z'' = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

$$q_1, q_2, q_3; \qquad \left.\begin{aligned} q_1' &= \frac{dq_1}{dt}; \quad q_2' = \frac{dq_2}{dt}; \quad q_3' = \frac{dq_3}{dt}; \\ q_1'' &= \frac{d^2q_1}{dt^2}; \quad q_2'' = \frac{d^2q_2}{dt^2}; \quad q_3'' = \frac{d^2q_3}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

A quotienseket Newton a betűk fölé írt pontok segélyével jelölte, Lagrange ellenben vonásokkal; ez rövidség okáért ajánlatosabb a közönséges, quotiens alakú Leibnitz-féle jelölésnél.

a) Ha az XYZ és a $Q_1Q_2Q_3$ coordináta-rendszerek egymáshoz képest nem változtatják helyzetüket, azaz egymáshoz viszonyított *relativ nyugalomban* vannak, akkor egy és ugyanazon térbeli pontnak x, y, z és q_1, q_2, q_3 coordinátái között mindenesetre

$$x = g_x(q_1, q_2, q_3); \quad y = g_y(q_1, q_2, q_3); \quad z = g_z(q_1, q_2, q_3) \ldots (3a)$$

$$q_1 = g_1(x, y, z); \quad q_2 = g_2(x, y, z); \quad q_3 = g_3(x, y, z) \ldots (3b)$$

alakú összefüggések állanak fenn, melyek második csoportjából világosan kitetszik, hogy q_1, q_2, q_3 oly *három* nyugvó *felület parameterei (görbevonalú coordináták),* mely felületek egymást az (xyz) pontban metszik.

b) De a mikor, miként ez az általánosabb esetekben felmerül, az egyik coordinátarendszer a másikhoz képest *mozog,* akkor a coordináták közötti összefüggések az időtől, azaz a coordináta-rendszereknek *egymáshoz viszonyított relativ mozgásától* explicite függenek, s így írhatók:

$$x = g_x(q_1, q_2, q_3, t); \quad y = g_y(q_1, q_2, q_3, t); \quad z = g_z(q_1, q_2, q_3, t) \ldots (3aa)$$

$$q_1 = g_1(x, y, z, t); \quad q_2 = g_2(x, y, z, t); \quad q_3 = g_3(x, y, z, t). \ldots (3bb)$$

A (3*bb*)-ben q_1, q_2, q_3 három *mozgó* és *változó alakú* felület parameterei, melyek metszőpontja az (xyz) pont.

Ezen általánosabb összefüggéseket veszszük a következő kifejtések alapjául, egyrészt általánosabb érvényességüknél fogva, másrészt mert a velük dolgozás alig fáradságosabb, mint a (3*a*) és (3*b*)-veli.

A (3*aa*)-ból a sebesség derékszögű componensei;

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial x}{\partial q_3}\frac{dq_3}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t}; \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial y}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial y}{\partial q_3}\frac{dq_3}{dt} + \frac{\partial y}{\partial t}; \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial z}{\partial q_3}\frac{dq_3}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

hol a (3*aa*) értelmében a $\frac{\partial x}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial z}{\partial q_3}$; $\frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$ quotiensek a q_1, q_2, q_3 coordináták és a t idő függvényei.

Jegyzet: Az (1) és (2) alatti jelöléssel élve, a (4)-ből

$$x' = \frac{\partial x}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x}{\partial q_2} q_2' + \frac{\partial x}{\partial q_3} q_3' + \frac{\partial x}{\partial t} \text{ s í. t.}; \quad \ldots \quad (4a)$$

ezeket a q' sebességek szerint partiálisan differentiálva, rendre nyerjük:

$$\frac{\partial x'}{\partial q_1'} = \frac{\partial x}{\partial q_1}; \quad \frac{\partial x'}{\partial q_2'} = \frac{\partial x}{\partial q_2}; \ldots; \frac{\partial z'}{\partial q_3'} = \frac{\partial z}{\partial q_3}. \quad \ldots \quad (5)$$

93. §. *Általános orthogonális coordináták néhány alaptulajdonsága.*

Orthogonális coordináták. A gyakran felmerülő fontos eset, mikor a megelőző §. (3*b*) felületei egymást merőlegesen metszik, mikor a q_1, q_2, q_3 *orthogonális coordináták*, néhány nevezetes, s a következőkben többször idézendő sajátsággal bir, melyet itt kimutatunk [v. ö. pl. a Kinematika 343. §. I. részét és 265. ábráját, 587. lap.]

1. Az idézett 92. §. (3*b*) felületei N_1, N_2, N_3 normálisainak iránycosinusai rendre legyenek $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$; ezeket a (3*b*) egyenletekből nyerjük [Math. Rep. 79. §. (8*a*), 97. lap]:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_1 = \frac{1}{\Phi_1}\frac{\partial q_1}{\partial x}, \quad \cos\beta_1 = \frac{1}{\Phi_1}\frac{\partial q_1}{\partial y}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{1}{\Phi_1}\frac{\partial q_1}{\partial z}; \\ \Phi_1^2 = \left(\frac{\partial q_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_1}{\partial z}\right)^2 \text{ s í. t.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Az orthogonálitás az N_1, N_2, N_3 normálisak egymásra való merőlegességében áll; ennek három feltétele

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_2\cos\alpha_3 + \cos\beta_2\cos\beta_3 + \cos\gamma_2\cos\gamma_3 = 0 \quad \text{s. í. t.}; \\ \text{avagy (1)-ből} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x}\frac{\partial q_3}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y}\frac{\partial q_3}{\partial y} + \frac{\partial q_2}{\partial z}\frac{\partial q_3}{\partial z} = 0 \quad \text{s í. t.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

2. Az (x, y, z) és $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ pontok megfelelő görbevonalú coordinátái (q_1, q_2, q_3), $(q_1+dq_1,\ q_2+dq_2,\ q_3+dq_3)$; e pontok egymástól való távolsága ds; ennek vetületei a derékszögű coordináta-tengelyekre dx, dy, dz, az N_1, N_2, N_3 normálisak mentén pedig: ds_1, ds_2, ds_3; ez utóbbiak szintén egymásra kölcsönösen merőleges coordináta-növekedések, és s_1, s_2, s_3 a nevezett három felület orthogonális metszővonalai [Kinematika i. h.]; a derékszögű coordináta-transformátiók értelmében [Math. Reper. 48. §. (2), 49. lap]:

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{aligned} dx = ds_1\cos\alpha_1 + ds_2\cos\alpha_2 + ds_3\cos\alpha_3 \\ dy = ds_1\cos\beta_1 + ds_2\cos\beta_2 + ds_3\cos\beta_3 \\ dz = ds_1\cos\gamma_1 + ds_2\cos\gamma_2 + ds_3\cos\gamma_3 \end{aligned}\right\}; \\ \left.\begin{aligned} ds_1 = dx\cos\alpha_1 + dy\cos\beta_1 + dz\cos\gamma_1 \\ ds_2 = dx\cos\alpha_2 + dy\cos\beta_2 + dz\cos\gamma_2 \\ ds_3 = dx\cos\alpha_3 + dy\cos\beta_3 + dz\cos\gamma_3 \end{aligned}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

3. A q_1, q_2, q_3 az x, y, z függvényei lévén, a megelőző §. (3*b*) egyenleteiből:

$$dq_1 = \frac{\partial q_1}{\partial x} dx + \frac{\partial q_1}{\partial y} dy + \frac{\partial q_1}{\partial z} dz \text{ s í. t.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Szorozva az (1) kiírt egyenleteit rendre dx, dy, dz-vel, összegük, a (3) második rendszere és a (4) értelmében:

$$ds_1 = dx \cos \alpha_1 + dy \cos \beta_1 + dz \cos \gamma_1 =$$

$$= \frac{1}{\Phi_1} \left(\frac{\partial q_1}{\partial x} dx + \frac{\partial q_1}{\partial y} dy + \frac{\partial q_1}{\partial z} dz \right) = \frac{1}{\Phi_1} dq_1;$$

azaz rendre:

$$dq_1 = \Phi_1 ds_1; \quad dq_2 = \Phi_2 ds_2; \quad dq_3 = \Phi_3 ds_3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

4. Végre, az x, y, z coordinátákat az s_1, s_2, s_3 függvényeinek tekintve

$$dx = \frac{\partial x}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial x}{\partial s_2} ds_2 + \frac{\partial x}{\partial s_3} ds_3 \text{ s í. t.,} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

melyet a (3) első rendszerével összehasonlítva:

$$\cos \alpha_1 = \frac{\partial x}{\partial s_1}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{\partial x}{\partial s_2}, \quad \cos \alpha_3 = \frac{\partial x}{\partial s_3} \text{ s. í. t.} \quad . \quad . \quad (7)$$

Ámde (5) szerint az s_1 csak a q_1 parameterrel együtt változván

$$\cos \alpha_1 = \frac{\partial x}{\partial s_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{dq_1}{ds_1} = \Phi_1 \frac{\partial x}{\partial q_1}, \quad \cos \beta_1 = \frac{\partial y}{\partial s_1} = \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{dq_1}{ds_1} = \Phi_1 \frac{\partial x}{\partial q_1} \text{ s í. t.,}$$

melyeket az (1) egyenleteivel egyesítve:

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} = \Phi_1^2 \frac{\partial x}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial y} = \Phi_1^2 \frac{\partial y}{\partial q_1} \text{ s. í. t., . . .,} \quad \frac{\partial q_3}{\partial z} = \Phi_3^2 \frac{\partial z}{\partial q_3}. \quad . \quad (8)$$

5. A (8) első három egyenlete négyzetösszegéből, az (1)-nek Φ_1^2 értékével rendre:

$$\frac{1}{\Phi_1^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^2 \text{ s í. t.;} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

míg a (8)-al képezve az orthogonálitás (2) feltételeit, ezek:

$$\frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial y}{\partial q_2} \frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial z}{\partial q_2} \frac{\partial z}{\partial q_3} = 0 \text{ s. í. t.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

és így a megelőző §. (4*a*) négyzetösszegéből, [az itt elő nem forduló $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ elhagyásával] a (8) és (10) felhasználásával a sebesség négyzete:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = v^2 = \Phi_1^{-2} q_1'^2 + \Phi_2^{-2} q_2'^2 + \Phi_3^{-2} q_3'^2, \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

mely tiszta négyzetes tagok összege, és ez az orthogonalitásnak szintén jellemző egyenlete.

94. §. *Az általános erőcomponensek és virtuális munkájuk, kifejezve derékszögű erőkkel.*

1. Legyenek X, Y, Z az m-re ható P független erő derékszögű componensei és δx, δy, δz a δs virtuális elmozdulásai, ellenben δq_1, δq_2, δq_3 az általános coordináták változásai ezen elmozdulás folytán.

A virtuális elmozdulások természete szerint [61. §. 1. pontja] a 92. §. (3aa)-ból:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}\delta q_3 ; \\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3}\delta q_3 ; \\ \delta z &= \frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}\delta q_3 . \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

A virtuális munka δL itt:

$$\delta L = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z, \quad \ldots\ldots (2)$$

avagy az (1) jobboldalai felhasználásával, ha rövidség kedveért:

$$Q_i = X\frac{\partial x}{\partial q_i} + Y\frac{\partial y}{\partial q_i} + Z\frac{\partial z}{\partial q_i}, \quad i=1, 2, 3, \quad \ldots\ldots (3)$$

$$\delta L = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + Q_3\delta q_3. \quad \ldots\ldots (4)$$

Miután a $Q_i\delta q_i$ a (4)-ben épen úgy mint az $X\delta x$ s í. t. a (2)-ben virtuális munkát jelent és az X erőcomponens a δx együtthatója, a Q_i pedig a δq_i-é: ezért a Q_i-t a q_i coordinátához tartozó *általános erőcomponens*nek nevezik.

[Ha q_i szintén hoszszuság, akkor $\frac{\partial x}{\partial q_i}$ s í. t. iránycosinusok és (3) szerint a Q_i a P-nek vetülete a q_i iránya mentén; de ha q_i nem hoszsz, hanem pl. szög s í. t., akkor Q_i nem tulajdonképeni mechanikai értelemben vett erőt jelent, hanem az ilyennek valami geometriai menynyiséggel való szorozmányát; v. ö. a 220 és 221. §§-okat.]

Szabad mozgás esetében $X=mx''$ s. í. t., és (3)-ból:

$$Q_i = m\left\{x''\frac{\partial x}{\partial q_i} + y''\frac{\partial y}{\partial q_i} + z''\frac{\partial z}{\partial q_i}\right\}, \quad i=1, 2, 3. \quad \ldots (5)$$

2. Ha a P erő erőfüggvénynyel bír, mely a coordinátáknak és az explicit időnek functiója, akkor:

$$V = V(x, y, z, t), \quad \text{vagy} \quad V = V(q_1, q_2, q_3, t);$$

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \| \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z};$$

és így a virtuális munka [a t nem variál, 61. §. 1. pontja]:

$$\delta L=\delta V=\frac{\partial V}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial V}{\partial q_2}\delta q_2+\frac{\partial V}{\partial q_3}\delta q_3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Miután a δq_i variátiók egészen tetszőlegesek, a (4)- és a (6)-ból:

$$Q_i=\frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad i=1, 2, 3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Jegyzet: A Q_i jelenti a P *absolut* (az XYZ nyugvó coordinátarendszerre vonatkozó) *erőnek* a q_i *coordináta menti componensét;* de *nem* az m pontnak a mozgó $Q_1Q_2Q_3$ rendszerhez viszonyított relativ mozgásának a q_i menti gyorsító componensét; mert ezt a Clairaut-Coriolis-féle tétel szolgáltatja. [123—125. §.].

b) *A mozgás általános egyenleteinek Lagrange-féle második alakja szabad és kényszermozgásnál.*

95. §. Lagrange *általános mozgásegyenleteinek második alakja szabad mozgásnál.*

Az eleven erő

$$\mathrm{T}=\tfrac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

kifejezésébe az x', y', z' a 92. §. (4*a*) rendszeréből helyettesítendő, miáltal $\mathbf{T}$ a q_1, q_2, q_3 coordináták, a q_1', q_2', q_3' sebességek és a t függvényeképen van előállítva.

Képezve $\mathbf{T}$-nek q_i' szerinti differentiálquotiensét és tekintetbe véve a 92. §. (5) összefüggéseit, rendre nyerjük:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i'}&=m\left\{x'\frac{\partial x'}{\partial q_i'}+y'\frac{\partial y'}{\partial q_i'}+z'\frac{\partial z'}{\partial q_i'}\right\}=m\left\{x'\frac{\partial x}{\partial q_i}+y'\frac{\partial y}{\partial q_i}+z'\frac{\partial z}{\partial q_i}\right\};\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i'}\right)&=m\left\{x''\frac{\partial x}{\partial q_i}+y''\frac{\partial y}{\partial q_i}+z''\frac{\partial z}{\partial q_i}\right\}+\\ &\quad +m\left\{x'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)+y'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)+z'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)\right\}.\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2)$$

A (2) jobboldali első tagja [megelőző §. (5)] a Q_i erőcomponens, második része következőleg egyszerűsíthető:

A 92. §. (3*aa*) értelmében a $\dfrac{\partial x}{\partial q_i}$ s í. t. quotiensek a q_1, q_2, q_3 és t függvényei lévén, áll:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)q_1'+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)q_2'+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)q_3'+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right); \quad . \quad (3)$$

Másrészt ugyane 92. §. (4a) egyenletei alapján a $\frac{dx}{dt}$ csak anynyiban függ a q_i-től, a menynyiben az épen említett $\frac{\partial x}{\partial q_i}$ s í. t. quotiensek és a $\frac{\partial x}{\partial t}$ a q_i-től függnek; ezért az idézett 92. §. (4a) egyenleteiből:

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{\partial x'}{\partial q_i}=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)q_1'+\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)q_2'+\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)q_3'+\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) \quad (4)$$

A q_1, q_2, q_3 és t itt egymástól független változókként szerepelnek:

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right);\quad \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right);\quad \begin{matrix} i=1,2,3 \\ k=1,2,3. \end{matrix} \quad (5)$$

Ezek szerint (3) és (4) egymással egyenlő lévén, baloldalaikból rendre

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial x'}{\partial q_i};\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial y'}{\partial q_i};\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial z'}{\partial q_i};\quad i=1,2,3; \quad (6)$$

miáltal a (2) jobboldali második része, s ennek egyszerűsítése

$$m\left\{x'\frac{\partial x'}{\partial q_i}+y'\frac{\partial y'}{\partial q_i}+z'\frac{\partial z'}{\partial q_i}\right\}=m\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}\left\{x'^2+y'^2+z'^2\right\}=\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i}. \quad (7)$$

E szerint [és a megelőző §. (5) egyenletei értelmében] a (2)-ből

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i'}\right)=Q_i+\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i};$$

$$Q_i=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i'}\right)-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Ez a Lagrange-féle mozgásegyenletek második alakja, mely a Q_i általános erőcomponenst a tetszőleges q_i coordinátára vonatkozólag a **T** eleven erő differentiálquotiensei segélyével fejezi ki, az eleven erő itt a coordináták, a sebességek és az explicit idő függvénye lévén.

A 97. §.-ban kimutatjuk, hogy a (8) alak *kényszer* és *surlódás* esetében is fennáll, szóval bármily természetű és jellegű feltétel esetében.

Erőfüggvény esetében, mely az időtől explicite is függhet [77. §. (13)] áll: $Q_i=\partial V:\partial q_i$; ennek helyettesítésével a (8)-ból

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_1'}\right)-\frac{\partial(\mathrm{T}+V)}{\partial q_i}=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

mely alakra a következőkben gyakran fogunk hivatkozni.

Jegyzet: Derékszögű coordinátákra alkalmazva (8)-at, rendre:

$$q_1=x,\quad q_2=y,\quad q_3=z,\qquad Q_1=X,\quad Q_2=Y,\quad Q_3=Z;$$

$$T=\tfrac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2); \quad \frac{\partial T}{\partial q_1}=\frac{\partial T}{\partial x}=0, \text{ s í. t.};$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'}=\frac{\partial T}{\partial x'}=mx' \text{ s í. t.}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right)=mx''; \text{ s í. t.}$$

s így marad (8)-ból:

$$X=m\frac{d^2x}{dt^2}; \qquad \text{s. í. t.}$$

96. §. *A mozgásegyenletek* Lagrange*-féle második alakja, származtatva a stationárius működés* Hamilton*-féle elvéből.*

1. A 77. §. (15) egyenlete értelmében a stationárius működés elve, mikor erőfüggvény létezését nem tételezünk fel és a határokat a 78. §. 3. pontja szerint jeleljük:

$$\int_0^t(\delta T+\delta L)\,dt=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

hol δL a munka variatiója vagy a virtuális munka, mely itt [94. §. 4)]:

$$\delta L=Q_1\delta q_1+Q_2\delta q_2+Q_3\delta q_3=\sum_{i=1}^{3}Q_i\,\delta q_i \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Másrészt a T a megelőző §. bekezdése értelmében a q_i coordináták, a q_i' sebességek és a t függvénye lévén, variatiója közben a t, az (1) integrál felső határa, nem változik [77. §. 4. pontja]:

$$\delta T=\sum_{i=1}^{3}\left\{\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial T}{\partial q_i'}\delta q_i'\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

2. E szerint a (2) és (3) alapján:

$$\int_0^t(\delta T+\delta L)\,dt=\int_0^t\sum_{i=1}^{3}\left\{\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}+Q_i\right)\delta q_i+\frac{\partial T}{\partial q_i'}\delta q_i'\right\}dt. \quad \ldots \quad (4)$$

Ámde, a 73. §. (2) és a 77. §. (6) és (7) sémája szerint, (a t itt sem variál)

$$\delta q_i'=\delta\left(\frac{dq_i}{dt}\right)=\frac{d(q_i+\delta q_i)}{dt}-\frac{dq_i}{dt}=\frac{d(\delta q_i)}{dt}; \quad \ldots \quad (5)$$

e sémát és partiális integratiót alkalmazva:

$$\int_0^t\frac{\partial T}{\partial q_i'}\delta q_i'dt=\int_0^t\frac{\partial T}{\partial q_i'}\frac{d\delta q_i}{dt}\,dt=\left[\frac{\partial T\,\delta q_i}{\partial q_i'}\right]_0^t-\int_0^t\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)\delta q_i dt. \quad (6)$$

Ennek segélyével a (4):

$$\int_0^t(\delta T+\delta L)\,dt=\int_0^t\left[\sum_{i=1}^{3}\left\{\frac{\partial T}{\partial q_i}+Q_i-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)\right\}\delta q_i\right]dt+\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial T}{\partial q_i'}\delta q_i\right]_0^t. \quad (7)$$

3. A *stationárius működés* elve [77. §. 4. pontja] kimondja, hogy az (1) vagy (7) baloldala zérus, ha a δq_i variátiók a 0 és t időbeli kezdő- és véghelyzetre nézve zérusok, azaz, ha e két helyzet nem variál [i. h. (11) és (15)].

De ekkor a (7) utolsó része, mely épen az e határhelyzetekre vonatkozó δq_i variátiókat tartalmazza, elenyészik; az első részében felmerülő δq_i-k a 0 és t között fekvő tetszőleges helyzetekre vonatkoznak és maguk is tetszőlegesek és egymástól függetlenek; e szerint ekkor a (7) csak úgy lehet zérus, ha jobboldali első részének δq_i-vel szorzott együtthatói külön-külön zérussal egyenlők, azaz, ha:

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial q_i} + Q_i - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial q_i'}\right) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Ez pedig a Lagrange-féle második alak [95. §. (8)].

4. *Erőfüggvény esetében* a *stationárius működés* Hamilton-féle elve [77. (3) és (5)]:

$$\delta I = \int_0^t \delta\,(\mathbf{T} + V)\,dt = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

hol a $V = V(x, y, z, t)$ erőfüggvény variatiója, (t nem variál):

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial V}{\partial q_3}\delta q_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial q_i}\delta q_i, \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

míg a $\mathbf{T}$ variátiója és ennek transformátiója a jelen §. 1, 2, 3 pontjai-évei teljesen egyező, úgy, hogy a (7) és (10)-ből, a 3. pont megfontolásai értelmében

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial q_i'}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

mely a Lagrange-féle egyenleteknek 95. §. (9) alakja.

97. §. Lagrange *mozgásegyenleteinek második alakja bármily kényszermozgás esetén közvetetlenül érvényes.*

Kimutatjuk a következőkben Lagrange általános mozgás-egyenletei második alakjának egyik legfontosabb tulajdonságát, ugyanis hogy surlódás nélküli és surlódással végbemenő kényszermozgásra szintén közvetetlenül érvényesek.

1. *A sebesség componensei, az eleven erő és quotiensei feltételek esetében.*

Egy feltétel $F(x, y, z, t) = 0$ vagy $F(q_1, q_2, q_3, t) = 0$, *kettő* pedig $F_1(q_1, q_2, q_3, t) = 0$ és $F_2(q_1, q_2, q_3, t) = 0$ alakú összefüggéseket involvál, miáltal a *független* q_i-ik *száma kettőre,* illetve *egyre* redukálódik; ezekkel vagy evvel fejezendők ki a 92—96. §§. összes egyenletei.

Ezen esetekben q_1, q_2, q_3 alatt az *általános coordináták változó részeit* értve, a 92. §. (3*bb*) egy vagy két egyenlete helyébe pl. a $q_3=F(x, y, z, t)=0$ feltételi egyenlet, illetve a $q_2=F_1(x, y, z, t)=0$ és $q_3=F_2(x, y, z, t)=0$ feltételi egyenletek lépnek, és így a megelőző 92—96. §§. összes kifejezéseibe az első esetben $q_3=0$, $\delta q_3=0$, $q_3'=0$; a második esetben $q_2=q_3=0$, $\delta q_2=\delta q_3=0$, $q_2'=q_3'=0$ teendő. Továbbá, az említett feltétel, illetve feltételek esetében az x, y, z az idézett 92. §. (3*aa*) egyenleteiben csak a q_1 q_2, t, illetve csak a q_1, t független változók függvényeinek tekinthetők; ezért az x, y, z coordinátáknak a q_3, illetve a q_2 és a q_3 szerint képezett quotiensei zérussal egyenlők, és így a Q_i-k száma is egygyel, illetve kettővel kisebb.

Ezek szerint a megelőző 94—96. §§. egyenletei közül az $i=3$, illetve az $i=2$ és $i=3$ indexüek *teljesen eltűnnek*; a fenmaradókat itt külön kiírni nem szükséges; elegendő ha a mondottak alapján megjegyezzük, hogy *a feltétel* illetve *a feltételek fennállása a megmaradó kifejezések és egyenletek typusát (szerkezetét, structuráját) nem változtatja*, csak tagjainak számát s az általános coordináták, sebességek és erőcomponensek számát anynyival kisebbíti, a menynyi a feltételek száma; e szerint Lagrange egyenleteinek második alakja itt szintén közvetlenül érvényes.

2. *A feltételi egyenleteknek a független coordináták szerinti differentiálquotiensei zérusok.*

Hogy a következő 3. pont bizonyítását végezhessük, a feltételi egyenletek egy nevezetes sajátságát kell kimutatnunk.

a) *Egy* feltétel esetében [57. §. (1)] $F(x, y, z, t)=0$, miáltal a q_i független helymeghatározók száma kettőre: q_1 és q_2-re redukálódik, melyekkel az F-et kifejezve, az $F(q_1, q_2, t)=0$ *identikusan zérus lesz*, azaz, az $F(q_1, q_2, t)$ kifejezés képzésénél és összevonásánál mind a q_1, mind a q_2 az F-ből eltűnik s F baloldala, függetlenül jobboldalától zérus lesz. Az alább itt felsorolandó példák ezt a sajátságot jól fogják előtüntetni.

α) Ha $F=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ a feltétel és pl. x és y a független változók, akkor ezekkel fejezve ki $F=0$-ból z-t, az F alakja $F=$ $=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$, azaz identikusan zérus. Ez az q_1 és q_2 független általános coordinátákra nézve is áll, ugyanis itt $x:a$, $y:b$, $z:c$ cosinusoknak tekinthetők, melyeket az itt pl. szögeket jelentő q_1 és q_2 független változókkal következőleg is fejezhetni ki: $x=a\sin q_1\cos q_2$; $y=b\sin q_1\sin q_2$; $z=c\cos q_1$; ezek segélyével az adott F-et kifejezve, ez:

$$F=\sin^2 q_1(\sin^2 q_2+\cos^2 q_2)+\cos^2 q_1-1=0,$$

csakugyan identikusan zérus.

β) Ha $F=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$, akkor, miként azonnal átlátni, az $x=a\cos q_2\sqrt{1+q_1^2}$; $y=b\sin q_2\sqrt{1+q_1^2}$; $z=cq_1$ formák kielégítik az F-et, mely most: $F=(\sin^2 q_2+\cos^2 q_2)(1+q_1^2)-q_1^2-1=0$, azaz szintén identikusan zérus.

γ) Ha $F=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ a feltétel, akkor az $x=a\sqrt{1+q_1^2}$, $y=bq_1\cos q_2$, $z=cq_1\sin q_2$ helyettezés által az adott feltétel:

$$F=1+q_1^2-q_1^2(\sin^2 q_2+\cos^2 q_2)-1=0,$$

azaz ismét identikusan zérus.

Ennek értelmében itt mindig

$$\frac{\partial F}{\partial q_1}=0;\quad \frac{\partial F}{\partial q_2}=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

b) *Két* feltétel esetében [58. §. (1)] $F_1(x,y,z,t)=0$, $F_2(x,y,z,t)=0$ és csak *egy* független q_i coordináta marad meg, melylyel az F_1-et és F_2-őt kifejezve, ezek identikusan zérusok lesznek; az F_1 és F_2 kifejezéseiből összevonás után a q_i eltűnik s vagy zérust vagy állandót ád.

Így ha pl. a megelőző a) szakasz *β)* és *γ)* feltételei állanak egyszerre: ezek összegéből és különbségéből $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ és $\frac{y^2}{b^2}=0$, melyek a pont előírt pályájának egyenletei. Ezek a *β)* vagy a *γ)* helyettesítésekkel úgy kielégíthetők, ha *β)*-ba $q_2=0$, vagy *γ)*-ba $q_2=\frac{1}{2}\pi$-t teszünk, miáltal az F mindkét kifejezései $F_1=F_2=1+q_1^2-q_1^2-1=0$-ra redukálódnak, a q_2 itt állandó lévén, mely F kifejezéseiből eltűnik.

E szerint itt

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_1}=0;\quad \frac{\partial F_2}{\partial q_1}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Röviden: kifejezve a feltételi egyenleteket a független változók vagy változó segélyével: ezen egyenletek identikusan zérust adnak s ezért a független változók, illetve változó szerint vett (1) differentiálquotiensei, illetve (2) quotienseik mindig zérussal egyenlők.

3. Lagrange *általános erőcomponensei a mozgás egyenleteinek első alakjából.*

a) Szorozva a 68. §. (4) egyenleteit rendre $\frac{\partial x}{\partial q_i}, \frac{\partial y}{\partial q_i}, \frac{\partial z}{\partial q_i}$-vel, összegük:

$$m\left\{x''\frac{\partial x}{\partial q_i}+y''\frac{\partial y}{\partial q_i}+z''\frac{\partial z}{\partial q_i}\right\}=X\frac{\partial x}{\partial q_i}+Y\frac{\partial y}{\partial q_i}+Z\frac{\partial z}{\partial q_i}+$$

$$+\lambda\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial q_i}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial q_i}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_i}\right\};\quad i=1,2.$$

Ámde itt a λ szorzója nyilván a $\frac{\partial F}{\partial q_i}$ quotiens,* mely (1) értelmében zérus, miáltal ez az egyenlet a 94. §. (3) és (5) Q_i alakjára redukálódik, de itt i csak *két*-féle indexértéket vehet fel, és Q_i a független (szabad) erő megfelelő componensét jelenti.

b) Ugyanily eredményhez vezet az idézett 68. §. (8) egyenleteinek ugyanezen módon való egyesítése; az így keletkező egyenletben a λ_1 szorzója $\frac{\partial F_1}{\partial q_i}$, a λ_2-é $\frac{\partial F_2}{\partial q_i}$, e quotiensek a (2) értelmében zérusok s így itt is nyerjük a 94. §. (3) és (5) alakját; de itt i csak *egy* indexértéket jelenthet.

Észreveszszük, hogy a Q_i ezen képzésénél a $\lambda \frac{\partial F}{\partial q_i}$ *kényszererő az egyenletekből eltűnt* s így az 1. pontban említett fenmaradó Lagrange-féle mozgásegyenletek második alakja egyenleteiben a *kényszer nem fordul elő.*

4. *Surlódással történő kényszermozgások*ra a megelőző 1, 2, 3. pontok megfontolásai mind egy tollvonással kiterjeszthetők; ekkor ugyanis a Q_i a *független* és a *surlódásbeli* erőnek q_i *menti componensei összegét jelenti* és itt is a virtuális munka:

$$Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2, \quad \text{vagy} \quad Q_1\delta q_1;$$

a szerint, a mint egy vagy két feltétel áll fen.

A Q_i ezen értelmezésével a jelen §. minden eredménye közvetetlenül érvényes.

5. Evvel fenti állításunk be van bizonyítva, ugyanis, hogy a *mozgásegyenleteknek* Lagrange-féle *második alakja a surlódás nélküli és surlódással való feltételi mozgásra nézve is közvetetlenül érvényes, csakhogy az egyenletek száma a mozgás szabadsági fokai számával egyenlő;* ezen érvényességében és alkalmazhatóságában rejlik ezen alak egyik főfontossága. A további, a 94—96. §§.-okban részletezett kifejtések mind, kivétel nélkül, a kényszermozgásra nézve is fennállanak, avval az egyszerűsítéssel, hogy az i itt is csak két, illetve csak egy indexértéket vehet fel.

Az *egyedüli hiánya* a mozgásegyenletek ezen formájának abban áll, hogy a feltételi egyenletek (maguk a feltételek) és velük együtt a kényszererők is, belőlük teljesen eliminálva vannak és hogy ezek

---

* Ugyanis az $F(x,y,z,t)=0$ feltételt a 2. p. értelmében q_1, q_2, t független változókkal fejezve ki, ez $F[x(q_1, q_2, t), y(q_1, q_2, t), z(q_1, q_2, t), t]=0$; belőle $\frac{\partial F}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_i}$, mint a szövegben.

az utóbbiak, melyek ismeretére gyakran szükség van, külön határozandók meg. Ez pl. a mozgásegyenletek megfejtése után az 57—58. §§. eljárásai segélyével történhetik meg.

c) *A mozgás egyenleteinek Hamilton-féle kánon-alakja.*

98. §. *A mozgás-nyomatékok (kinetikus momentumok) általános coordinátákban.*

1. Az m tömegpont *derékszögű* mozgásnyomatékai [32. §. (2)]:

$$mx'; \quad my'; \quad mz'; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ezekből az *általános* mozgásnyomatékokat az általános erőcomponensek módjára [94. §. (3)] képezzük, Jacobi jelölésével élve:

$$p_i = m\left\{x'\frac{\partial x}{\partial q_i} + y'\frac{\partial y}{\partial q_i} + z'\frac{\partial z}{\partial q_i}\right\}, \quad i=1, 2, 3. \ldots \quad (2)$$

A továbbiakban felveszszük, hogy az x, y, z és a q_1, q_2, q_3 *coordináták közötti összefüggések az időtől függetlenek* legyenek [92. §. (3*a*), (3*b*)], miáltal az idézett §. (4) és (4*a*) egyenletei utolsó tagjai elesnek.

Helyettesítve ezen utóbbi egyenletekből az x', y', z' értékeit (2)-be, rendezve az így származó p_i kifejezéseket a q_1', q_2', q_3' sebességek szerint és ezek együtthatóit rövidség kedveért: $\mathfrak{q}_{11}$, $\mathfrak{q}_{22}$, $\mathfrak{q}_{33}$; $\mathfrak{q}_{23}$, $\mathfrak{q}_{31}$, $\mathfrak{q}_{12}$; $\mathfrak{q}_{32}$, $\mathfrak{q}_{13}$, $\mathfrak{q}_{21}$ betűkkel jelelve, találjuk:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{q}_{ii} &= m\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2\right\} = \mathfrak{q}_{ii}, \quad i=1, 2, 3; \\ \mathfrak{q}_{ik} &= m\left\{\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_k}\right\} = \mathfrak{q}_{ki}; \quad k \gtrless i, \quad \begin{matrix} i=1, 2, 3; \\ k=1, 2, 3; \end{matrix} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$p_i = \mathfrak{q}_{i1}q_1' + \mathfrak{q}_{i2}q_2' + \mathfrak{q}_{i3}q_3'; \quad \mathfrak{q}_{ik} = \mathfrak{q}_{ki}; \quad i=1, 2, 3. \ldots \quad (4)$$

A 92. §. (4) egyenleteihez fűzött megjegyzések értelmében a $\mathfrak{q}$ *együtthatók itt csak a coordináták függvényei.*

2. A (4) lineáris egyenletrendszerből azonnal fejezhetők ki a q_i' sebességek [pl. determinánsok segélyével, Math. Rep. 25. §. 2. és 9. pontjai]:

$$q_i' = \mathfrak{p}_{i1}p_1 + \mathfrak{p}_{i2}p_2 + \mathfrak{p}_{i3}p_3; \quad \mathfrak{p}_{ik} = \mathfrak{p}_{ki}; \quad i=1, 2, 3; \ldots \quad (5)$$

hol a $\mathfrak{p}$ *együtthatók* a $\mathfrak{q}$-kból lévén szerkesztve, szintén *csak a coordináták függvényei;* a $\mathfrak{p}_{ik}=\mathfrak{p}_{ki}$ összefüggés a symmetrikus determinánsok elemeiből [i. h.] a $\mathfrak{q}_{ik}=\mathfrak{q}_{ki}$ összefüggés alapján adódik.

3. Az (5)-ből partiális differentiálás útján pl.

$$\frac{\partial q_2'}{\partial p_3}=\mathfrak{p}_{23};\quad \frac{\partial q_3'}{\partial p_2}=\mathfrak{p}_{32};$$

de $\mathfrak{p}_{23}=\mathfrak{p}_{32}$ lévén, rendre:

$$\frac{\partial q_2'}{\partial p_3}=\frac{\partial q_3'}{\partial p_2};\quad \frac{\partial q_3'}{\partial p_1}=\frac{\partial q_1'}{\partial p_3};\quad \frac{\partial q_1'}{\partial p_2}=\frac{\partial q_2'}{\partial p_1}\ldots\ldots \quad (6)$$

Jegyzet: Orthogonális coordinátáknál az orthogonalitás feltétele szerint [93. §. (10) formula] a $\mathfrak{q}_{ik}$ együtthatók *zérus*ok, miáltal a (4)- és (5)-ből

$$p_i=\mathfrak{q}_{ii}\,q_i';\quad q_i'=\mathfrak{p}_{ii}\,p_i;\quad \mathfrak{p}_{ii}\,\mathfrak{q}_{ii}=1;\quad i=1,2,3;\quad \ldots \quad (7)$$

e szerint a $\mathfrak{p}_{ik}$ együtthatók is *zérus*ok; továbbá a (6) rendszer identikusan zérus.

99. §. *Az eleven erőnek különböző kifejezéseiről.*

Az eleven erő közönséges kifejezésébe:

$$\mathrm{T}=\tfrac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}=\tfrac{1}{2}m\,(x'^2+y'^2+z'^2)\quad \ldots \quad (1)$$

általános coordinátákat vezetve be, e menynyiséget a szerint fejezhetni ki különbözőképen, a mint az általános *coordináták, sebességek* és *kinetikus nyomatékok* mint változók közül kettő-kettőt mint függetlent használunk fel a **T** előtüntetésére.

Az így különbözőképen kifejezett **T**-ket indexekkel is szokás egymástól megkülönböztetni, ugyanis [v. ö. még alább a (3), (4), (5) alakokat] következőképen:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{T}_{q'}&=\mathrm{T}\,(q_1,\ q_2,\ q_3;\ \ q_1',\ q_2',\ q_3');\\ \mathrm{T}_{pq'}&=\mathrm{T}\,(p_1,\ p_2,\ p_3;\ \ q_1',\ q_2',\ q_3');\\ \mathrm{T}_{p}\ &=\mathrm{T}\,(p_1,\ p_2,\ p_3;\ \ q_1,\ q_2,\ q_3).\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots \quad (2)$$

1. *Az eleven erő kifejezve a coordináták és a sebességek segélyével.*

Képezve a 92. §. (4*a*) jobboldalai segélyével [a $\partial x:\partial t$ s í. t. elhagyásával] az (1) zárójeles kifejezést és rendezve a keletkező kifejezést a $q_i'^2$ illetve $q_i'q_k'$ s í. t. sebesség-négyzetek és -szorzatok szerint: azonnal találjuk, hogy e négyzetek, illetve szorzatok együtthatói rendre a már a megelőző §. (3) egyenleteivel kifejezett $\mathfrak{q}_{ii}$ és $\mathfrak{q}_{ik}$ coëfficiensekkel egyenlők, melyek csak a q coordináták függvényei, miáltal (1)-ből:

$$\mathrm{T}=\mathrm{T}_{q'}=\tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{q}_{11}q_1'^2+\mathfrak{q}_{22}q_2'^2+\mathfrak{q}_{33}q_3'^2)+\mathfrak{q}_{23}q_2'q_3'+\mathfrak{q}_{31}q_3'q_1'+\mathfrak{q}_{12}q_1'q_2', \quad (3)$$

melyben **T** a q_1, q_2, q_3 coordinátáktól függ és a q' sebességek homogén quadrátos függvénye; ezen utóbbi oknál fogva adtunk az így előtüntetett **T**-nek q' jelzőt.

Jegyzet: Orthogonális coordináták esetében a $\mathfrak{q}_{ik}$ együtthatók

zérusok lévén [megelőző §. Jegyzete], a **T** a (3) első részére redukálódik, azaz a q' *sebességek tiszta quadrátos függvénye.*

2. *Az eleven erő, kifejezve a kinetikus nyomatékok és a sebességek segélyével.*

Írva a (3) utolsó három tagját rendre $\mathfrak{q}_{23}q'_2q'_3=\frac{1}{2}\mathfrak{q}_{23}q'_2q'_3+\frac{1}{2}\mathfrak{q}_{32}q'_3q'_2$; s. í. t., hol [az 1. pont és a 98. §. (3) és (4) egyenletei szerint] $\mathfrak{q}_{23}=\mathfrak{q}_{32}$, és összefoglalva (3)-ban a q'_1, q'_2, q'_3-al szorzott tagokat, (3)-ból:

$$\mathbf{T}=\tfrac{1}{2}(\mathfrak{q}_{11}q'_1+\mathfrak{q}_{12}q'_2+\mathfrak{q}_{13}q'_3)\,q'_1+\tfrac{1}{2}(\mathfrak{q}_{21}q'_1+\mathfrak{q}_{22}q'_2+\mathfrak{q}_{23}q'_3)\,q'_2+$$
$$+\tfrac{1}{2}(\mathfrak{q}_{31}q'_1+\mathfrak{q}_{32}q'_2+\mathfrak{q}_{33}q'_3)\,q'_3.$$

Amde, a megelőző §. (4) összefüggéseit felhasználva, ez a kifejezés:

$$\mathbf{T}=\mathbf{T}_{pq'}=\tfrac{1}{2}(p_1q'_1+p_2q'_2+p_3q'_3), \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

hol a **T**-nek $_{pq'}$ indexe a **T** ezen alakjának szerkezetét jelzi, mely szerint ez az egymáshoz tartozó nyomatékok és sebességek szorzatainak fél összege.

3. *Az eleven erő, kifejezve a coordináták és a kinetikus nyomatékok segélyével.*

Helyettesítve a megelőző §. (5) egyenletei jobboldalait a q'_i sebességek helyébe, a (4)-ből, némi rendezés és $\mathfrak{p}_{ik}=\mathfrak{p}_{ki}$ összefüggés tekintetbe vétele után:

$$\mathbf{T}=\mathbf{T}_p=\tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}_{11}p_1^2+\mathfrak{p}_{22}p_2^2+\mathfrak{p}_{33}p_3^2)+(\mathfrak{p}_{23}p_2p_3+\mathfrak{p}_{31}p_3p_1+\mathfrak{p}_{12}p_1p_2), \quad (5)$$

mely alak a p nyomatékok homogén quadrátos függvénye és ezenkívül a $\mathfrak{p}$ együtthatóknál fogva [98. §. 2. pontja] a q coordinátáktól is függ. A $_p$ index a **T**-nek p-től való függését jelzi.

A **T** ezen alakját Hamilton használta először.

Jegyzet. Ha **T**-hez nincsen index adva, akkor kivétel nélkül ennek a coordináták és a sebességek által kifejezett $\mathbf{T}_{q'}$ alakját, (3)-at értjük [v. ö. a 95. §.-ot].

100. §. *Az eleven erő különböző alakjainak differentiálquotiensei.*

1. A megelőző §. (5) $\mathbf{T}_p$ alakjából

$$\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial p_1}=\mathfrak{p}_{11}p_1+\mathfrak{p}_{12}p_2+\mathfrak{p}_{31}p_3 \text{ s. í. t.};$$

azaz, tekintettel a 98. §. (5) rendszerében írt q'_i sebességekre:

$$q'_1=\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial p_1}; \quad q'_2=\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial p_2}; \quad q'_3=\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial p_3}. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

2. A megelőző §. (3) $\mathbf{T}_{q'}$ alakjából:

$$\frac{\partial T_{q'}}{\partial q_1'} = q_{11} q_1' + q_{12} q_2' + q_{31} q_3' \text{ s í. t.};$$

azaz, a 98. §. (4) rendszere figyelembe vételével

$$p_1 = \frac{\partial T_{q'}}{\partial q_1'}; \quad p_2 = \frac{\partial T_{q'}}{\partial q_2'}; \quad p_3 = \frac{\partial T_{q'}}{\partial q_3'}. \quad \ldots \quad (2)$$

3. A megelőző §. (4) alatti $\mathbf{T}_{pq'}$ alakjából:

$$\frac{\partial T_{pq'}}{\partial p_1} = \tfrac{1}{2} q_1' \text{ s í. t.}; \quad \frac{\partial T_{pq'}}{\partial q_1'} = \tfrac{1}{2} p_1 \text{ s í. t.}; \quad \ldots \quad (3a)$$

azaz, tekintettel (1)-re és (2)-re:

$$\frac{\partial T_p}{\partial p_1} = 2 \frac{\partial T_{pq'}}{\partial p_1} \text{ s í. t.}; \quad \frac{\partial T_{q'}}{\partial q_1'} = 2 \frac{\partial T_{pq'}}{\partial q_1'} \text{ s í. t. } \ldots \quad (3b)$$

4. A $\mathbf{T}_p$ a q coordináták- és a p nyomatékok-, a $\mathbf{T}_{q'}$ pedig a q coordinátáknak és a q' sebességeknek függvénye; ezen alakoknak a coordináták szerint képezendő differentiálquotientiensei összehasonlítására nézve az egyenes út igen bonyodalmas. Ezért, szemmel tartva, hogy az eleven erő értéke ugyanaz, bármily is legyen kifejezésének alakja, áll, tekintettel a megelőző §. (4) kifejezésére:

$$0 = T_p + T_{q'} - 2T_{pq'} = T_p + T_{q'} - p_1 q_1' - p_2 q_2' - p_3 q_3' \quad \ldots \quad (4)$$

Miután $\mathbf{T}_p = \mathbf{T}(q, p)$, $\mathbf{T}_{q'} = \mathbf{T}(q, q')$, a (4) teljes növekedése:

$$0 = dT_p + dT_{q'} - 2dT_{pq'} =$$
$$= \frac{\partial T_p}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial T_p}{\partial q_1} dq_1 + \cdots + \frac{\partial T_{q'}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial T_{q'}}{\partial q_1'} dq_1' +$$
$$+ \cdots - q_1' dp_1 - p_1 dq_1' - \cdots = 0.$$

Összszefoglalva a dq_1-, dp_1-, dq_1'-el s í. t. szorzott tagokat:

$$\left(\frac{\partial T_p}{\partial p_1} - q_1'\right) dp_1 + \left(\frac{\partial T_{q'}}{\partial q_1'} - p_1\right) dq_1' + \left(\frac{\partial T_p}{\partial q_1} + \frac{\partial T_{q'}}{\partial q_1}\right) dq_1 + \cdots = 0. \quad (5)$$

Tekintettel az (1) és (2) egyenletekre az (5)-ben a dp_1, dp_2, dp_3 és a dq_1', dq_2', dq_3' együtthatói zérusok, míg a q_1, q_2, q_3 egymástól függetlenek és így dq_1, dq_2, dq_3 tetszőlegesek: e szerint az (5) szétbomlik a következő egyenletekre:

$$\frac{\partial T_p}{\partial q_1} = -\frac{\partial T_{q'}}{\partial q_1}; \quad \frac{\partial T_p}{\partial q_2} = -\frac{\partial T_{q'}}{\partial q_2}; \quad \frac{\partial T_p}{\partial q_3} = -\frac{\partial T_{q'}}{\partial q_3} \quad \ldots \quad (6)$$

Az (1), (2), (3a), (3b), (6) összefüggéseket a következőkben alkalmazni fogjuk.

101. §. *A mozgás egyenleteinek* Hamilton-*féle kánon alakja. Kétféle eljárás. Ugyanaz erőfüggvény esetében.*

1. *Származtatás a* Lagrange-*féle második alakból.*

A megelőző §. (2) és (6) egyenletei általában véve

$$\frac{\partial T_{q'}}{\partial q_i'} = p_i; \quad -\frac{\partial T_{q'}}{\partial q_i} = \frac{\partial T_p}{\partial q_i}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (0)$$

miáltal a 95. vagy a 96. §. (8) egyenletéből:

$$Q_i = \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial T_p}{\partial q_i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

mint a Hamilton-féle általános alak typusa keletkezik.

2. Hamilton *egyenes származtatása az eleven erő tételéből és az erőfüggvényből.*

Hamilton a T_p alakból [99. §. (5)] indúlt ki, mely a q coordináták s a p nyomatékok függvénye; ennek teljes növekedése:

$$dT_p = \frac{\partial T_p}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial T_p}{\partial p_1} dp_1 + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot,$$

avagy, mivel a megelőző §. (1) egyenletei tekintetbe vételével:

$$\frac{\partial T_p}{\partial p_1} dp_1 = q_1' \frac{dp_1}{dt} dt = \frac{dq_1}{dt} dt \frac{dp_1}{dt} = \frac{dp_1}{dt} dq_1 \text{ s í. t.,}$$

$$dT_p = \left(\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial T_p}{\partial q_1}\right) dq_1 + (..)\, dq_2 + (..)\, dq_3 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Másrészt a munkaelem általános kifejezése [94. §. (4)]:

$$dL = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + Q_3 dq_3. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Miután pedig a pont surlódás nélkül mozog: az eleven erő formális tétele [39. §. (4)]

$$dL = dT = dT_p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

itt érvényes, a (2) és (3) jobboldalai egyenlők s miután a dq_1, dq_2, dq_3 változások tetszőlegesek és egymástól függetlenek: együtthatóik a (2)-ben és (3)-ban egyenlőknek tartoznak lenni; s ez szolgáltatja ismét az (1) egyenletet az $_1$, $_2$, $_3$ indexű menynyiségekre nézve.

Az (1) alakot, de még inkább a (7) alakokat [l. alább] *kánon*-alakoknak nevezik, mivel ezekbe a mechanika igen számos problémáját foglalhatjuk és mivel ott, a hol ezek állanak, alakjuk a legkülönbözőbb transformátiók után ismét felmerűl és mivel végre a belőlük nyerendő kifejtések ez alakokból legegyszerűbben származtathatók.

3. *A kánon-alak erőfüggvény esetében.*

Helyettesítve a 94. §. (7) egyenletéből $Q_i = \partial V : \partial q_i$-t (1)-be :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial (T_p - V)}{\partial q_i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Továbbá a mikor V, mint a 77. §. 2. pontjában, a coordináták *és az idő függvénye*, de a p nyomatékoktól azaz a *sebességektől független*, akkor általában :

$$\frac{\partial (T_p - V)}{\partial p_i} = \frac{\partial T_p}{\partial p_i},$$

miáltal a 100. §. (1) egyenleteinek typusa :

$$q_i' = \frac{\partial T_p}{\partial p_i} = \frac{\partial (T_p - V)}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Ámde $T_p - V$, azaz az eleven erő kevesebb az erőfüggvénynyel mindig egyenlő a H-val jelölt Hamilton-féle függvénynyel [77. §. 2. pontjának *b)* szakasza] ; e szerint az (5) és (6) írható :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= +\frac{\partial H}{\partial p_i}; \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, 3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

s ezek a rendesen *kánon-alakoknak nevezett egyenletek*, melyekben a $H = T_p - V = T - V$ függvénynek T_p része a q coordináták és a p nyomatékok függvénye [99. §. 3. pontja]. míg a V csak a q coordinátáktól és a t időtől függ [77. §. 2. pontja].

E szerint itt a H a *q coordináták*, a *p nyomatékok* (azaz a *sebességek*) és a *t függvénye.**

102. §. *Az energia elve, származtatva a* Lagrange-*féle mozgásegyenletek második alakjából.*

1. *Erőfüggvény esetében* Lagrange általános egyenleteit a 96. §. 4. pontjában a

$$\delta \int_0^t (T + V)\, dt = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

---

* Hamilton ezen módszere igen nagy terjedelmű irodalmat ébresztett, mind a tisztán mathematikai tartalmának fejtegetése, mind tényleges mozgási problémákra való alkalmazása tekintetében.

[Az előbbi szempontból l. Kőnig Gyula : A Hamilton-féle rendszerek és az elsőrendű partiális differentiális rendszerek általános elmélete. M. T. Akadémia, Értekezések a Mathematikai Tudományok köréből. VIII. kötet X. szám. 1—71. lap. 1881 ; v. ö. továbbá a 108—115 és a 122. §§.-okat].

feltételből, Hamilton elvéből a

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial q_i'}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

alakban nyertük, hol $\mathbf{T}=\mathbf{T}_{q'}$ [99. §. 3. pontjának *Jegyzete*].

Ugyanez a (2) egyenlet a p_i nyomatékok [98. §. (2) és (4); 100. §. (2) és (6)]; és a $\mathbf{T}_p$ alak [99. §. (5)] felhasználásával a megelőző §. (5) alatti:

$$-\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{dp_i}{dt} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

kánon-alakban adódott, mely e szerint nem más, mint a (2) alatti Lagrange-féle egyenletnek csekély, formális módosulata.

Mindezekben a V erőfüggvény a coordinátáktól és még explicite az időtől függ.

2. Bebizonyítjuk, hogy a *mikor az erőfüggvény csak a coordinátáktól függ*, Lagrange (3) alatti mozgásegyenletei, és ennek értelmében az (1) alatti feltétel is, az energia elvét tartalmazzák.

Az energia elve $\mathbf{T}-V=H=$constans alakja [44. §. (3)] fenállását a (3) alapján bebizonyítandó, elegendő, ha kimutatjuk, hogy $\mathbf{T}-V$ az időtől nem függ, azaz, hogy e különbségnek az idő szerint képezett differentiálquotiense zérus.

a) Alapúl véve az eleven erőnek $\mathbf{T}_p$ alakját [99. §. (5)], ez a q_i coordináták és a p_i nyomatékok függvénye, míg V itt csak a q_i-któl függ; e szerint

$$\frac{d(\mathbf{T}-V)}{dt} = \frac{d(\mathbf{T}_p - V)}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} \quad . \quad (4)$$

b) Másrészt, szorozva a (3) rendszer minden egyenletét a megfelelő $-\frac{dq_i}{dt}$-vel, zérus értékű összegük alakja:

$$0 = + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \sum_{i=1}^{3} \frac{dq_i}{dt}\frac{dp_i}{dt} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} = 0 \quad . \quad . \quad (5)$$

c) Ámde, a 100. §. (1) rendszere:

$$\frac{dq_i}{dt} = q_i' = \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial p_i},$$

melynek tekintetbe vételével a (4) és az (5) egyenletek jobboldalai tagonként egyenlők, s igy csakugyan:

$$\frac{d}{dt}(T_p - V)=0; \quad \text{azaz} \quad T-V=\text{constans}, \ldots\ldots (6)$$

a mit kimutatni akartunk.

3. Tekintetbe véve, hogy a (2) és a (3) rendszer az (1) feltételnek szükségszerű analytikai folyományai s hogy ezeken alapszik a 2. pont bizonyítása, a jelen §. eredményét analytikailag a következő alakban mondhatjuk ki:

Ha V csak a q_i coordináták függvénye és az időtől explicite nem függ és ha $\mathbf{T}$ coordinátáktól függ és a q_i' sebességek homogén négyzetes függvénye, akkor a

$$\delta \int_1^t (T+V)\, dt=0$$

a szükséges és elegendő feltétel arra nézve, hogy legyen

$$T-V=\text{constans}.$$

Ezt az eredményt fogjuk szem előtt tartani, mikor a sebességtől is függő erőfüggvényekkel foglalkozunk [106. §.].

d) *A variáló működés elve, a characteristikus egyenlet és a characteristikus függvény általános coordinátákban.*

103. §. Hamilton *integrálja és a jellemző egyenlet általános coordinátákban.*

A Hamilton-féle integrált a 78. §. 2. pontjában részletezett módon akarjuk variálni; ugyanis a kezdő és véghelyzetet variálva, a variált pályákat *tényleg lehetséges mozgásokra* akarjuk vonatkoztatni, ilyenkor Lagrange egyenleteinek második alakja áll fen [95. és 96. §§. (8)] és és így a 96. §. (7)-ében kifejezett ezen variátiójából marad

$$\int_0^t (\delta T+\delta L)\, dt = \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\partial T}{\partial q_i'}\delta q_i\right]_0^t \ldots\ldots (1)$$

Itt $\mathbf{T}$ az idézett §. értelmében a q_i coordinátáknak és a q_i' sebességeknek, de nem az időnek a függvénye [98. §. 1. pontja], azaz ugyanaz, mint a 99. §. (3)-ban a $\mathbf{T}_{q'}$, és így a 100. §. (2) összefüggései felhasználásával

$$\int_1^t (\delta T+\delta L)\, dt=\left\{p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+p_3\delta q_3\right\}_0^t \ldots\ldots (2)$$

1. *A mozgás nyomatékai és az eleven erő* Hamilton *integráljából.*

α) Erőfüggvény esetében a (2), t nem variálván [96. §. 4. pontja]:

$$\delta I=\delta\int_0^t (\mathrm{T}+V)\,dt=-p_{1_0}\delta q_{1_0}-p_{2_0}\delta q_{2_0}-p_{3_0}\delta q_{3_0}+p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+p_3\delta q_3\,, \quad (3)$$

avagy, miután [78. §. (6)] I a $q_{1_0}q_{2_0}q_{3_0}$ kezdő- és a $q_1q_2q_3$ tetszőleges véghelyzetnek és az időnek függvénye:

$$I=I(q_{1_0}, q_{2_0}, q_{3_0}, q_1, q_2, q_3, t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\delta I=\frac{\partial I}{\partial q_{1_0}}\delta q_{1_0}+\frac{\partial I}{\partial q_{1_0}}\delta q_{2_0}+\frac{\partial I}{\partial q_{3_0}}\delta q_{3_0}+\frac{\partial I}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial I}{\partial q_2}\delta q_2+\frac{\partial I}{\partial q_3}\delta q_3 \quad (4a)$$

A (3) és (4*a*) összehasonlításából

$$-p_{i_0}=\frac{\partial I}{\partial q_{i_0}}\,; \qquad +p_i=\frac{\partial I}{\partial q_i}\,; \quad i=1,\ 2,\ 3, \quad . \ . \quad (5)$$

melyek a 78. §. (9) rendszereivel egyenértékűek.

β) A 98. §. (5) értelmében a 99. §. (4)-ből ugyane §. (5) egyenlete:

$$\left.\begin{aligned} 2\mathrm{T}=p_1q_1'+p_2q_2'+p_3q_3'=p_1(\mathfrak{p}_{11}p_1+\mathfrak{p}_{12}p_2+\mathfrak{p}_{13}p_3)+p_2(\ldots)+p_3(\ldots)= \\ =\mathfrak{p}_{11}p_1^2+\mathfrak{p}_{22}p_2^2+\mathfrak{p}_{33}p_3^2+2\mathfrak{p}_{23}p_2p_3+2\mathfrak{p}_{31}p_3p_1+2\mathfrak{p}_{12}p_1p_2\,. \end{aligned}\right\} \quad (6a)$$

Helyettesítve a p_i-k helyébe (5)-ből az I quotienseit:

$$2(H+V)=2\mathrm{T}=\mathfrak{p}_{11}\left(\frac{\partial I}{\partial q_1}\right)^2+.+.+2\mathfrak{p}_{23}\frac{\partial I}{\partial q_2}\frac{\partial I}{\partial q_3}+.+\,, \quad . \ . \quad (6)$$

mely az eleven erőt vagy a $H+V$ összeget fejezi ki.

2. *A characteristikus egyenlet.*

A 78. §. 4. pontja mintájára:

$$\mathrm{T}+V=\frac{dI}{dt}=\frac{\partial I}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial I}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\frac{\partial I}{\partial q_3}\frac{dq_3}{dt}+\frac{\partial I}{\partial t}\,;$$

ámde, tekintettel (5)-re és a 99. §. (4) alatti egyenletre

$$\mathrm{T}+V=p_1q_1'+p_2q_2'+p_3q_3'+\frac{\partial I}{\partial t}=2\mathrm{T}+\frac{\partial I}{\partial t}\,;$$

$$\frac{\partial I}{\partial t}+\mathrm{T}-V=0 \quad \text{vagy} \quad \frac{\partial I}{\partial t}+H=0, \quad . \ . \ . \ . \quad (7)$$

mely a characteristikus függvénynek a 78. §. (13) alatti egyenletével [79. §. 1. pontja és 84. §. (1)] egyező.

a) *Ha az energia elve áll,* akkor a $H=\mathrm{T}-V$ a coordinátáknak és a sebességeknek az időben állandó értékű függvénye; a sebességeket a 98. §. (5) segélyével a nyomatékokkal, ezeket ismét a jelen §. (5) rendszerével kifejezve és a 79. §. 1. pontja mintájára $\alpha=-H$-t bevezetve, lesz:

$$\alpha+H\left(q_1, q_2, q_3;\ \frac{\partial I}{\partial q_1}, \frac{\partial I}{\partial q_2}, \frac{\partial I}{\partial q_3}\right)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

a characteristikus egyenlet, mikor V az explicit időtől független.

Szabad mozgásnál a (6) értelmében a H-t (8)-ba téve:

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\tfrac{1}{2}\mathfrak{p}_{11}\left(\frac{\partial I}{\partial q_1}\right)^2+\tfrac{1}{2}\mathfrak{p}_{22}\left(\frac{\partial I}{\partial q_2}\right)^2+\tfrac{1}{2}\mathfrak{p}_{33}\left(\frac{\partial I}{\partial q_3}\right)^2+\mathfrak{p}_{23}\frac{\partial I}{\partial q_2}\frac{\partial I}{\partial q_3}+\\ +\mathfrak{p}_{31}\frac{\partial I}{\partial q_3}\frac{\partial I}{\partial q_1}+\mathfrak{p}_{12}\frac{\partial I}{\partial q_1}\frac{\partial I}{\partial q_2}-V(q_1, q_2, q_3)=0.\end{aligned}\right\} \quad . \quad (9)$$

Kényszer esetében q_i-k és a szerintük képezett quotiensek közül egy vagy kettő elesik [97. §. 1. pontja].

b) *Ha az energia elve nem áll*, akkor $H=\mathbf{T}-V$ a coordinátáknak, sebességeknek és explicite még az *időnek* függvénye; itt is a sebességeket a nyomatékokkal [98. §. (5)] és az utóbbiakat (5) szerint az I quotienseivel kifejezve, a (7)-ből a jellemző egyenlet:

$$\frac{\partial I}{\partial t}+H\left(q_1, q_2, q_3, t, \frac{\partial I}{\partial q_1}, \frac{\partial I}{\partial q_2}, \frac{\partial I}{\partial q_3}\right)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Szabad mozgásnál a (6)-ból a H-t (10)-be helyettezve:

$$\frac{\partial I}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\mathfrak{p}_{11}\left(\frac{\partial I}{\partial q_1}\right)^2+.+.+\mathfrak{p}_{23}\frac{\partial I}{\partial q_2}\frac{\partial I}{\partial q_3}+.+\mathfrak{p}_{12}\frac{\partial I}{\partial q_1}\frac{\partial I}{\partial q_2}-V(q_1, q_2, q_3, t)=0 \quad (11)$$

Kényszer mozgásnál a q_i-k s az I-nek a q_i-k szerint képezett quotiensei közül egy vagy kettő elesik [97. §. 1. pontja].

104. §. *A működés jellemző egyenlete és ennek teljes integrálja, mikor az energia elve fennáll.*

A következőkben a 80—83. §§. megfontolásait és eredményeit általános coordinátákban fejezzük ki; magukat a tárgyalásokat itt fölösleges ismételni, csak a lényegesebb egyenletek felirására szorítkozunk, melyek csak formailag térnek el a derékszögű coordinátákra vonatkozóktól.

A működés itt is [80. §. (4*a*) és 78. §. (6)]:

$$\mathbf{A}=I\left(q_{1_0}, q_{2_0}, q_{3_0}, q_1, q_2, q_3, t\right)+Ht. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ámde $\mathbf{A}$ a 80. §. (3) értelmében az explicit t-től nem függ:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}\left(q_{1_0}, q_{2_0}, q_{3_0}, q_1, q_2, q_3, H\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

1. *A characteristikus egyenlet.*

Teljesen variálva a működést mint a 80. §. 2. pontjában, az (1)-ből az idézett hely értelmében a teljes $\partial\mathbf{A}$-t úgy nyerjük, ha $t\partial H$ tagot

aduuk azon $\delta \mathbf{I}$ változáshoz, melyben t nem variált [megelőző §. (3)]

$$\delta \mathbf{A} = -p_{1_0}\delta q_{1_0} - \cdots + p_1 \delta q_1 + \cdots + t\delta H, \quad \ldots \quad (3)$$

míg (2)-ből

$$\delta \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_{1_0}}\delta q_{1_0} + \cdots + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial H}\delta H; \quad \ldots \quad (4)$$

s így a (3) és (4) összehasonlításából

$$p_{i_0} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_{i_0}}; \quad p_i = +\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_i}; \quad i = 1, 2, 3; \quad t = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial H} \quad \ldots \quad (5)$$

Ezekkel a megelőző §. (6a)-ból képezve **T**-t, a jellemző egyenlet szabad mozgásnál:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{p}_{11}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_1}\right)^2 + \mathfrak{p}_{22}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_2}\right)^2 + \mathfrak{p}_{33}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_3}\right) + 2\mathfrak{p}_{23}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_2}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_3} + \\ &+ 2\mathfrak{p}_{31}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_3}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_1} + 2\mathfrak{p}_{12}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_1}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_2} = 2H + 2V(q_1, q_2, q_3), \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

melynek szerkezete az ugyanezen esetben a Hamilton-féle integrálra nézve érvényejellemző egyenlettel egyezik meg [megelőző §. (9)].

2. *A jellemző függvény szolgáltatja a mozgás általános egyenleteit.*

Ha **A** függvényt a (6) megoldásaképen [pl. a (2) alakban] találtnak tekintjük, belőle (5) szerint a nyomatékok

$$p_1 = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_2}, \quad p_3 = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_3}, \quad \ldots \quad (7)$$

melyek így lévén kifejezve, az **A**-nak (2) alakja értelmében ezek itt *csak a folyó* q_1, q_2, q_3 *coordináták függvényei;* és miután szabad mozgásnál a q coordináták egymástól függetlenek, a (7) alapján:

$$\frac{\partial p_2}{\partial q_3} = \frac{\partial p_3}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial p_3}{\partial q_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_3}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial q_2} = \frac{\partial p_2}{\partial q_1} \quad \ldots \quad (8)$$

Differentiálva a megelőző §. (6a) egyenletét

$$2\mathbf{T} = p_1 q_1' + p_2 q_2' + p_3 q_3' = 2(H + V) \quad \ldots \quad (9)$$

az egyik coordináta, pl. q_1 szerint, és megjegyezve, hogy a q' sebességek a 98. §. (5) összefüggései értelmében a p együtthatók-, azaz a q coordináták- és a p nyomatékok függvényei, míg H állandó:

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial q_1}q_1' + \frac{\partial p_2}{\partial q_1}q_2' + \frac{\partial p_3}{\partial q_1}q_3'\right) + \left(p_1\frac{\partial q_1'}{\partial q_1} + p_2\frac{\partial q_2'}{\partial q_1} + p_3\frac{\partial q_3'}{\partial q_1}\right) = 2\frac{\partial V}{\partial q_1} \text{ s í. t.} \quad (10)$$

Ámde, a (8) tekintetbe vételével, mivel itt a (7)-re tett megjegyzés értelmében a p nyomatékok csak a q coordinátáktól függenek, a (10) baloldali első része:

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_1}\cdot\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial p_1}{\partial q_2}\cdot\frac{dq_2}{dt}+\frac{\partial p_1}{\partial q_3}\cdot\frac{dq_3}{dt}=\frac{dp_1}{dt};\ \text{s i. t.},\ \ldots \quad (11)$$

mert t a független változó.

Másrészt, az idézett 98. §. (5) öszszefüggései alapján:

$$\left.\begin{aligned} p_1\frac{\partial q_1'}{\partial q_1} &= p_1\frac{\partial}{\partial q_1}(\mathfrak{p}_{11}p_1)+p_1\frac{\partial}{\partial q_1}(\mathfrak{p}_{12}p_2)+p_1\frac{\partial}{\partial q_1}(\mathfrak{p}_{13}p_3);\\ &= p_1^2\frac{\partial \mathfrak{p}_{11}}{\partial q_1}+p_1p_2\frac{\partial \mathfrak{p}_{12}}{\partial q_1}+p_1p_3\frac{\partial \mathfrak{p}_{13}}{\partial q_1}+p_1\mathfrak{p}_{11}\frac{\partial p_1}{\partial q_1}+\\ &\quad +p_1\mathfrak{p}_{12}\frac{\partial p_2}{\partial q_1}+p_1\mathfrak{p}_{13}\frac{\partial p_3}{\partial q_1};\ \text{s i. t.} \end{aligned}\right\}\ . \quad (12)$$

úgy, hogy a (10) baloldali második része a (12) rendszerből, lévén [i. h.] $\mathfrak{p}_{ik}=\mathfrak{p}_{ki}$,

$$\left.\begin{aligned} p_1\frac{\partial q_1'}{\partial q_1}+p_2\frac{\partial q_2'}{\partial q_1}+p_3\frac{\partial q_3'}{\partial q_1} &= p_1^2\frac{\partial \mathfrak{p}_{11}}{\partial q_1}+p_2^2\frac{\partial \mathfrak{p}_{22}}{\partial q_1}+p_3^2\frac{\partial \mathfrak{p}_{33}}{\partial q_1}+\\ &\quad +2p_2p_3\frac{\partial \mathfrak{p}_{23}}{\partial q_1}+2p_3p_1\frac{\partial \mathfrak{p}_{31}}{\partial q_1}+2p_1p_2\frac{\partial \mathfrak{p}_{12}}{\partial q_1}+\\ &\quad +\frac{\partial p_1}{\partial q_1}(p_1\mathfrak{p}_{11}+p_2\mathfrak{p}_{21}+p_3\mathfrak{p}_{31})+\frac{\partial p_2}{\partial q_1}(\ldots)+\frac{\partial p_3}{\partial q_1}(\ldots). \end{aligned}\right\}\ . \quad (13)$$

A (13) jobboldali első része nem más, mint a T_p alakú eleven erőnek [99. §. (5)] a q_1 coordináta szerint képezett partiális differentiálquotiense kétszerese; második része, a 98. §. (5) öszszefüggéseinek tekintetbe vételével:

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial p_2}{\partial q_1}q_2'+\frac{\partial p_3}{\partial q_1}q_3',$$

melynek a (11)- és (8) szerinti értékével a (13):

$$p_1\frac{\partial q_1'}{\partial q_1}+p_2\frac{\partial q_2'}{\partial q_1}+p_3\frac{\partial q_3'}{\partial q_1}=2\frac{\partial \mathrm{T}_p}{\partial q_1}+\frac{dp_1}{dt}.$$

E szerint maga a (10):

$$\frac{dp_1}{dt}+2\frac{\partial \mathrm{T}_p}{\partial q_1}+\frac{dp_1}{dt}=2\frac{\partial V}{\partial q_1},$$

azaz, a most már i-vel jelölendő index esetében:

$$Q_i=\frac{\partial V}{\partial q_i}=\frac{dp_i}{dt}+\frac{\partial \mathrm{T}_p}{\partial q_i}\ \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

mely a mozgásegyenleteknek Hamilton-féle kánonalakja, mikor erőfüggvény létezik [101. §. (5)]; ezt itt az A jellemző függvényből nyertük.

Kényszermozgás esetében a q_i és p_i, q_i' és Q_i menynyiségek száma egy-egygyel, illetve kettő-kettővel fogy, egyébként a felmerülő kifejezések typusa és szerkezete ugyanaz marad [97. §. 1. pontja].

3. *A jellemző egyenlet teljes integrálja sajátságairól és próbálgatás útján való felkereséséről.*

A 82. §-ban mondottak itt általánosságban is érvényesek.

a) Ha **A** mint a (6) egyenlet teljes megoldása pl. a (2) alakban találtatott, akkor benne a q_{1_0}, q_{2_0}, q_{3_0} három integrátió-parameter és a

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_{i_0}} = -p_{i_0}, \quad i=1, 2, 3; \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial H} = t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

egyenletek első csoportja egyikének jobb és bal oldala a [82. §. (0) és 99. §. (5)]

$$H=\tfrac{1}{2}\mathfrak{p}_{11_0}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_{1_0}}\right)+\cdot+\cdot+\mathfrak{p}_{23_0}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_{2_0}}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_{3_0}}+\cdot+\cdot-V(q_{1_0}, q_{2_0}, q_{3_0});$$

$$H=\mathbf{T}_0-V_0=\mathbf{T}_{p_0}-V_0=\tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}_{11}p_1^2+\cdot+\cdot)_0+(\mathfrak{p}_{23}p_2p_3+\cdot+\cdot)_0-V(q_{1_0}, q_{2_0}, q_{3_0})$$

egyenletekkel vannak meghatározva; közülök a két független egyenlet a pálya *alakját*, a (15) utolsó egyenlete pedig a coordináták és az idő közötti kapcsolatot fejezi ki.

A q_{1_0}, q_{2_0}, q_{3_0}, p_{1_0}, p_{2_0}, p_{3_0} integrátió-parameterek közül öt független van, a hatodik a (15) utolsó egyenletében az időszámítás kezdete.

E szerint **A** ismerete a problémát teljesen megfejti.

b) Jacobi integrál-alakja itt [82. §. (1)]:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_0+\mathbf{A}(q_1, q_2, q_3, c_1, c_2, H) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

és ebből, az idézett hely megfontolásai értelmében, a

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial c_1}=\gamma_1; \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial c_2}=\gamma_2; \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial H}=t+\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

egyenletek elseje és masodika a pálya alakját szolgáltatja, míg a harmadik a coordináták és az idő közötti összefüggést nyújtja.

Itt $\mathbf{A}_0$, c_1, c_2, γ_1, γ_2, τ a hat független integrátió-parameter.

c) $F(q_1, q_2, q_3)=0$ alakú *feltételek* szerepe itt ugyanaz, mint a 82. §. 2. pontja *b)* kikezdésében: egy-egy megfelel a (17) első vagy második egyenleteinek.

d) Hasonlóképen, a 82. §. 4. pontjának *kisérletező eljárása a jellemző függvény*nek a characteristikus egyenletből való *felkeresésére* itt is, de csak *orthogonális coordináták* esetében alkalmazható, mert ekkor [99. §. 1. pontjának Jegyzete] a **T** a q_i'-k tiszta négyzetes függvénye:

$$\mathbf{T}=\tfrac{1}{2}(\mathfrak{q}_{11}q_1'^2+\mathfrak{q}_{22}q_2'^2+\mathfrak{q}_{33}q_3'^2);$$

továbbá a 100. §. (2) és a jelen §. (7) értelmében,

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_i} = p_i = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial q_i'} = \mathfrak{q}_{ii}\, q_i',$$

miáltal a $2\mathbf{T}=2(H+V)$ egyenletből a jellemző egyenlet:

$$\frac{1}{\mathfrak{q}_{11}}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{\mathfrak{q}_{22}}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_2}\right)^2 + \frac{1}{\mathfrak{q}_{33}}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_3}\right)^2 = 2H + 2V(q_1, q_2, q_3) \quad . \quad (18)$$

Ha a (18)-at úgy sikerül pl. közös szorzóval transformálni, hogy a $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_i}$ quotiensek együtthatói csak a megfelelő q_i függvényei s jobb oldala három addendus tagból áll, melyek rendre csak a q_1, csak a q_2, csak a q_3 függvényei, akkor az

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{q_1} + \mathbf{A}_{q_2} + \mathbf{A}_{q_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

alakkal a (18) megfejtése megkisérthető; ez által a (18), mint a 82. §. 4. pontjában, három totális differentiálegyenletre bomlik szét és $\mathbf{A}$ három quadratura összegével egyenlő.

4. *Egyenműködési (aequiactionális) felületek általános coordinátákban.*

A 83. §-ban részletezett egyenműködésű felületek és a ténylegesen lehetséges valamenynyi pályák (a trajectoriák) összes sajátságai a dolog természete szerint a használt coordinátarendszertől függetlenek; de azért itt az összes lehetséges pályáknak az

$$\mathbf{A}(q_1, q_2, q_3, c_1, c_2, H) = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

æquiactionális felületekre való orthogonalitását az idézett helytől függetlenül következőleg mutatjuk ki:

a. Ugyanis, az m pont mindenkori coordinátái x, y, z és sebessége componensei x', y', z'; ha most δx, δy, δz valamely tetszőleges, de az m sebességére *merőleges* $\delta\sigma$ vonalelem derékszögű componensei, akkor az orthogonalitás feltétele

$$x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Ámde általános coordinátákban [92. §. (3*a*), (4*a*)]:

$$\left.\begin{aligned} x = x(q_1, q_2, q_3); \quad y = y(q_1, q_2, q_3); \quad z = z(q_1, q_2, q_3); \\ x' = \frac{\partial x}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x}{\partial q_2} q_2' + \frac{\partial x}{\partial q_3} q_3'; \quad y' = \frac{\partial y}{\partial q_1} q_1' + .+.; \\ z' = \frac{\partial z}{\partial q_1} q_1' + .+.; \\ \delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}\delta q_3; \quad y = \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + .+.; \\ \delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 + .+.; \end{aligned}\right\} \quad . \quad (22)$$

hol δq_1, δq_2, δq_3 a δx-, δy-, δz-nek megfelelő elemi változásai az általános coordinátáknak.

Tekintettel az eleven erő

$$T=\tfrac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)=\tfrac{1}{2}m\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial x}{\partial q_2}q_2'+\frac{\partial x}{\partial q_3}q_3'\right)^2+(...)^2+(...)^2\right\} \quad (23)$$

kifejezésére, a (22) felhasználásával a (21) feltétel írható:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'}\delta q_1+\frac{\partial T}{\partial q_2'}\delta q_2+\frac{\partial T}{\partial q_3'}\delta q_3=0,$$

vagy [100. §. (2)]:

$$p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+p_3\delta q_3+0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

b. Másrészt a (20) alatti felület *mentén* valamely tetszőleges eltolódás megfelelő componensei legyenek δq_1, δq_2, δq_3; ezek (20)-ból folyólag eleget tesznek a

$$\frac{\partial A}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial A}{\partial q_2}\delta q_2+\frac{\partial A}{\partial q_3}\delta q_3=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

feltételeknek; miután pedig a jelen §. (5) összefüggései szerint:

$$\frac{\partial A}{\partial q_1}=p_1, \qquad \frac{\partial A}{\partial q_2}=p_2; \qquad \frac{\partial A}{\partial q_3}=p_3,$$

a (24) és (25) egybeeső, ha mindkettőben a δq_1, δq_2, δq_3 jelentése ugyanaz.

Röviden: a (20) æquiactionális felület minden érintősíkja merőleges az érintő ponton fellépő mindenkori tényleges sebességre és evvel be van bizonyítva, hogy az összes lehetséges pályák a (20) felületrendszer orthogonális trajectoriái.

105. §. Hamilton *jellemző egyenlete s ennek teljes integrálja, mikor az energia elve nem áll.*

E helyen folytatjuk és befejezzük a 103. §. 2. pontja *b)* szakaszának tárgyalásait.

Alapul szolgálnak 103. §. (5), (6*a*), (10), (11) egyenletei, melyek utolsója a jellemző egyenlet; e §-ban fel akarjuk venni azt, hogy ezen egyenlet teljes integrálját, a jellemző függvényt pl. az idézett 103. §. (4) alakjában megtaláltuk és ezen integrálról ki akarjuk mutatni, hogy lényegében véve ugyanoly tulajdonságokkal bír, mint az **A** működés a megelőző §-ban.

1. *A jellemző függvény teljesen meghatározza a mozgást.*

Tekintettel az idézett egyenletekre, az I-ből rendre:

$$p_i=\frac{\partial I}{\partial q_i}; \quad i=1,\ 2,\ 3; \qquad \frac{\partial p_i}{\partial q_k}=\frac{\partial^2 I}{\partial q_k\partial q_i}=\frac{\partial^2 I}{\partial q_i\partial q_k}=\frac{\partial p_k}{\partial q_i}, \quad . \quad (1)$$

mint a megelőző §. (8) rendszerében és a p_i-k a q_i-k és a t függvényei.

Ha most a 103. §. idézett (6*a*) egyenletét:

$$2T=2(H+V)=p_1q_1'+p_2q_2'+p_3q_3' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

a megelőző §. 2. pontja szerint tárgyaljuk, akkor ott (11)-be és a (14)-et megelőző két egyenletbe $\frac{dp_1}{dt} - \frac{\partial p_1}{\partial t}$ irandó $\frac{dp_1}{dt}$ helyébe és H csak a t-től függvén: közvetetlenül nyerjük az ott (14) alatt talált LAGRANGE-féle mozgásegyenleteket, melyek $V = V(q_1, q_2, q_3, t)$ esetben is fennállanak, miután az erőcomponensek a V-nek a coordináták szerint képezett differentiálquotiensei [77. §. (13)].

2. *A teljes integrál* JACOBI-*féle alakja.*

Megegyezésben a 84. §. (15) kifejezésével, itt:

$$I = I_0 + I(q_1, q_2, q_3, t, c_1, c_2, c_3), \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

melyből, a megelőző §. 3. pontja *b)* szakaszában idézett megfontolása értelmében a

$$\frac{\partial I}{\partial c_1} = \gamma_1, \qquad \frac{\partial I}{\partial c_2} = \gamma_2, \qquad \frac{\partial I}{\partial c_3} = \gamma_3 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

összefüggések a $[q_{1_0}, q_{2_0}, q_{3_0}, q'_{1_0}, q'_{2_0}, q'_{3_0}$, azaz a$]$ $c_1, c_2, c_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ független parametereken kívül a q_1, q_2, q_3, t változókat tartalmazzák s így a mozgás kész integrálegyenleteit képezik.

E szerint az idézett helyen [84. §. 2. pontjában] I-re nézve kimondott tétel itt is érvényes.

A mozgásnak $F_1(q_1, q_2, q_3, t)=0$, illetve még $F(q_1, q_2, q_3, t)=0$ feltételei a (4) rendszer egy vagy két egyenletével közvetetlenül egyenlők.

A megelőzőkből észreveszszük, hogy az általános coordinátákban kifejezett HAMILTON-féle I integrál minden lényeges tulajdonsága ugyanaz maradt, mint a derékszögű coordinátákban kifejezett-é [84. §.].

106. §. *Az erőfüggvény a sebességektől is függ, de az energia elve áll.* I. *A munkaelem egyenlete nem elegendő az erő kifejezésére.*

1. A tapasztalásnak alávethető legtöbb természeti erő olyannak bizonyult, hogy nagysága és iránya csak a coordináták függvénye; ilyenek az összes gravitátionális, az electrostatikai, a mágnetostatikai erők s í. t.

Azonban oly erők sem lehetetlenek, melyek (illetve az általuk létesített gyorsulások) a sebességektől, sőt még a gyorsulásoktól is függenek.*

---

* E tárgyra nézve v. ö. pl. E. SCHERING: HAMILTON-JACOBI'sche Theorie für Kräfte, deren Maass von der Bewegung der Körper abhängt. Abhandlungen der k. Ges. d. W. zu Göttingen, Bd. XVIII, 1—54, ll. 1873; továbbá RÉTHY Mór és SZILY Kálmán értekezéseit, Műegyetemi Lapok II. kötete, 276, 297. ll., III. kötete 2, 11, 13, 14, 49, 110, 174, ll. 1877, 1878.

[Igen tanulságosak e tekintetben pl. egy pontnak a forgó földhöz viszonyított mozgása differentiálegyenletei, Kinematika, 353. §. (7), 608. l., melyekben e relativ mozgás x'', y'', z'' gyorsulási componensei az ω szögsebességnek és a relativ sebesség x', y', z' componenseinek a függvényei].

(Közelebbről pedig W. Weber,* B. Riemann* és R. Clausius* az electrodynamikus és az electro-inductiv hatás magyarázatára felvették, hogy statikai electromosságok, mikor mozgásban vannak, nemcsak avval a Coulomb-féle törvény kifejezte erővel hatnak egymásra, mint a mikor nyugalomban vannak, hanem ezenkívül még oly erőt is fejtenek ki, mely ezen electromosságok *sebességétől* és *gyorsulásától* függ. Az erő ezen utóbbi részének kifejezését az *electrodynamikus kölcsönös hatás alaptörvényének* nevezik; ez a nevezett három szerző adta kifejezések szerint különböző. Jelenleg e törvények inkább csak tudományfejlődési szempontból bírnak történelmi becscsel; v. ö. 107. §-ot.)

Ha az ily erőknél az energia elve még fennáll: akkor ez általánosságban csak úgy lehetséges, ha az az erőfüggvény, melynek teljes változása a végzett munkával egyenlő, a coordinátákon kívül még a sebességek, illetve még a gyorsulások függvénye.

2. A következőkben csak azt az esetcsoportot kívánjuk megvizsgálni, mikor az erőfüggvény két részből állónak vétetik, melyek elseje, V csak a coordinátáktól, másodika $\mathfrak{V}$ a sebességektől is függ, azaz $V=V(q_1, q_2, q_3)$; $\mathfrak{V}=\mathfrak{V}(q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3')$. E szerint itt az energia elve a 44. (3) egyenlete és a 102. §. 2. pontja mintájára:

$$T-(V+\mathfrak{V})=H=\text{constans}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (0)$$

míg a munkaelem ezeken kívül még

$$Q_1dq_1+Q_2dq_2+Q_3dq_3=d(V+\mathfrak{V}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

alakkal bír, hol a d jel a dt időelem alatt bekövetkezett *teljes* változást jelenti.

Az (1) egyenlet írható:

$$\sum_{i=1}^{3} Q_i q_i' dt = \sum_{i=1}^{3} \left\{ \frac{\partial (V+\mathfrak{V})}{\partial q_i} q_i' + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial q_i'} q_i'' \right\} dt, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

és ez az összefüggés csak úgy állhat fenn, ha az egyenlet jobboldali részének minden tagja a q_i' sebességek valamelyikével van szorozva.

Ez pedig csak akkor lehetséges, ha $\mathfrak{V}$ a sebességeknek *legalább másodfokú függvénye*, mert ekkor a $\partial\mathfrak{V}:\partial q_i'$ quotiensek a sebességeknek legalább első hatványát tartalmazzák.

---

* V. ö. pl. Műegyetemi Lapok III. kötet, 255. l. 1878.

3. Könnyű bebizonyítani, hogy még a legegyszerűbb feltevésnél is, mikor ugyanis a $\mathfrak{V}$ a coordinátáknak és a sebességeknek quadrátos függvénye, a (2) *alak nem szolgáltathatja egyféle értékben az erőcomponensek kifejezéseit.*

Legyen ugyanis az erőfüggvény említett $\mathfrak{V}$ részének alakja:

$$\mathfrak{V}=\tfrac{1}{2}(\mathfrak{D}_{11}q_1'^2+\mathfrak{D}_{22}q_2'^2+\mathfrak{D}_{33}q_3'^2)+\mathfrak{D}_{23}q_2'q_3'+\mathfrak{D}_{31}q_3'q_1'+\mathfrak{D}_{12}q_1'q_2', \quad . \quad (3)$$

hol a $\mathfrak{D}$ együtthatók csak a coordináták függvényei; ebből rendre

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial q_1}q_1' &= \left\{\tfrac{1}{2}\frac{\partial\mathfrak{D}_{11}}{\partial q_1}q_1'^2+.+.+\frac{\partial\mathfrak{D}_{23}}{\partial q_1}q_2'q_3'+.+.\right\}q_1', \text{ s í. t.};\\ \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial q_1'}q_1'' &= \{\mathfrak{D}_{11}q_1'+\mathfrak{D}_{12}q_2'+\mathfrak{D}_{31}q_3'\}\,q_1'', \text{ s í. t.};\end{aligned}\right\} \quad . \quad (4)$$

és így a

$$d\mathfrak{V}=\sum_{i=1}^{3}\left\{\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial q_i}q_1'+\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial q_i'}q_i''\right\}dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

növekedés a coordinátáktól való függésen kívül a sebességek első és harmadik hatványaitól és a gyorsulás első hatványaitól függ.

Az (5) összeget a (4) értelmében igen különbözőképen lehet oly három taggá egyesíteni, melyek rendre a q_1'-, q_2'-, q_3'-t mint tényezőt tartalmazzák; és így a (2) egyenlet fennállhatásának feltétele, t. i. hogy jobb oldala a q_1'-, q_2'-, q_3'-al szorzott tagok összegéből álljon, kielégíthető. Ezenkívül a (2)-őt zérus formába írva, a tetszőleges $q_1'dt=dq_1$, $q_2'dt=dq_2$, $q_3'dt=dq_3$-vel szorzott tagoknak zérussal egyenlőknek kell lenniök; miután pedig e tagok az (5) részeinek különböző csoportosítása szerint különböző, a Q_1, Q_2, Q_3 számára is különböző értékek adódnak, habár a munka (2) egyenlete még mindig ki van elégítve.

E szerint ezen (2) egyenlet önmagában véve nem elegendő az erőcomponensek egyértékű meghatározására; de mindenkor megadja azt a változatlan keretet, melyet az erők kifejezései különböző alakjainak ki kell tölteniök.

De megjegyzendő, hogy szabadon mozgó oly tömegpontok, melyekre ható erők a sebességektől is függenek, mozgásuk tekintetében még nem vizsgáltathattak meg kisérletileg, hanem csak az energia megmaradása elve találtatott igazoltnak.

4. Az erők alakjára nézve a legegyszerűbb *feltevések*nek egyike az, hogy kifejezéseik *symmetrikus*ak legyenek, azaz hogy az egyikről a másikra megfelelő cyclus-szerű indexfelcseréléssel át lehessen menni.

Ilyen választásnak kínálkozik a (2) és (4) tekintetbe vételével:

$$Q_i=\frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial q_i}+\mathfrak{D}_{i1}q_1''+\mathfrak{D}_{i2}q_2''+\mathfrak{D}_{i3}q_3''; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

illetve, derékszögű coordináták esetében:

$$X=\frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial x}+\mathfrak{D}_{xx}x''+\mathfrak{D}_{xy}y''+\mathfrak{D}_{xz}z'', \quad \ldots \quad (6a)$$

mely alakok mindenesetre kielégítik a (3)-t s a (2)-őt, de nem tartoznak a következő §. (6) vagy (8) typusával megegyezni.

106a. §. *Az erőfüggvény a sebességektől is függ; de az energia elve áll.* II. *Az erő kifejezése* Hamilton *elve alapján* Lagrange *egyenleteivel.*

Az erőnek egyértékű meghatározására nézve a következő megfontolásokból indulunk ki:

1. A 102. §-ban kimutattuk, hogy a mikor a $\mathbf{T}$ a q_i coordinátáktól függ és a q_i' sebességek homogén quadrátos függvénye, míg a V csak a coordináták függvénye s az időtől explicite nem függ, akkor a

$$\delta\int_0^t(\mathbf{T}+V)\,dt=0 \quad \ldots \quad (1)$$

a szükséges és elegendő feltétel arra nézve, hogy álljon az energia elve:

$$\mathbf{T}-V=\text{constans.}$$

E feltételnek egyik közbeneső, szükségszerű folyománya a Lagrange-féle egyenletrendszer [102. §. (2)]:

$$\frac{\partial(\mathbf{T}+V)}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial q_i'}\right) \quad \ldots \quad (2)$$

2. Jelen esetünkben [megelőző §. (0)] $\mathbf{T}-\mathfrak{V}-V=$ constans az energia elve; benne az idézett §. 3. pontja értelmében a $\mathbf{T}-\mathfrak{V}$ különbség a coordinátáktól függ és a sebességek homogén quadrátos függvénye, míg V csak a coordináták függvénye és explicite az időtől nem függ.

E szerint ezen esetre közvetetlenül alkalmazhatjnk a 102. §. 3. pontjában kifejezett és a jelen §. 1. pontjában idézett tételt, ha a benne $\mathbf{T}$ helyébe $\mathbf{T}-\mathfrak{V}$, V helyébe ismét V lép; ennek értelmében itt, hogy a mozgás az energia

$$\mathbf{T}-\mathfrak{V}-V=H=\text{constans} \quad \ldots \quad (3)$$

törvénye szerint menjen végbe, a szükséges és elegendő feltétel:

$$\delta\int_0^t(\mathbf{T}-\mathfrak{V}+V)\,dt=0 \quad \ldots \quad (4)$$

elégítessék ki.

E feltételből a Lagrange-féle mozgásegyenletek folynak, melye-

ket a (2) sémájából nyerjük, ha benne **T** helyébe **T**—$\mathfrak{V}$-t, * V helyébe ismét V-t írunk:

$$\frac{\partial(\mathbf{T}-\mathfrak{V}+V)}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial(\mathbf{T}-\mathfrak{V})}{\partial q_i'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

3. *Derékszögű* coordinátákban a 95. §. Jegyzete sémájára:

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial q}=\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x}=0\,;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x'}\right)=m\frac{d^2x}{dt^2}\ \text{s í. t.}$$

és így (5)-ből az m-re ható *tényleges gyorsító erők*:

$$X=m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x'}\right)\ \text{s í. t.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Ez a rendszer is teljesen *symmetrikus* a coordinátákra és a sebességekre vonatkozólag; de azért általánosságban mégis különbözik a megelőző §. (6*a*) alakjától.

4. E különbség kimutatására induljunk ki a megelőző §. (3) alakjából (derékszögű coordinátákra vonatkoztatva) és képezzük belőle az erőcomponenseknek a megelőző §. (6*a*) és a jelen §. (6) egyenleteiben előtüntetett alakjait:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{V}=\tfrac{1}{2}\mathfrak{D}_{xx}x'^2+.+.+\mathfrak{D}_{yz}y'z'+.+.;\ \mathfrak{D}_{yz}=\mathfrak{D}_{zy}\ \text{s í. t.}\\
&\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{D}_{xx}}{\partial x}x'^2+\tfrac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{D}_{yy}}{\partial x}y'^2+\tfrac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{D}_{zz}}{\partial x}z'^2+\\
&\qquad+\frac{\partial \mathfrak{D}_{yz}}{\partial x}y'z'+\frac{\partial \mathfrak{D}_{zx}}{\partial x}z'x'+\frac{\partial \mathfrak{D}_{xy}}{\partial x}x'y';\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x'}\right)=\frac{d}{dt}\left\{\mathfrak{D}_{xx}x'+\mathfrak{D}_{xy}y'+\mathfrak{D}_{xz}z'\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

a) A (7) alapján a munka egyenletét [megelőző §. (1) vagy (2)] kielégítő erők egyik *választott* alakja [megelőző §. (6*a*)]:

$$\left.\begin{aligned}
X=&\frac{\partial V}{\partial x}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{D}_{xx}}{\partial x}x'^2+\frac{\partial \mathfrak{D}_{yy}}{\partial x}y'^2+\frac{\partial \mathfrak{D}_{zz}}{\partial x}z'^2\right)+\\
&+\frac{\partial \mathfrak{D}_{yz}}{\partial x}y'z'+\frac{\partial \mathfrak{D}_{zx}}{\partial x}z'x'+\frac{\partial \mathfrak{D}_{xy}}{\partial x}x'y'+\\
&+\mathfrak{D}_{xx}x''+\mathfrak{D}_{xy}y''+\mathfrak{D}_{xz}z''.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (8)$$

b) Ellenben az energia (3) elvét kielégítő *tényleges erő* (5) illetve (6) alakja, némi számítás után:

---

* Miután itt a T—$\mathfrak{V}$ ugyanavval a szereppel bír, mint az 1. pontban a **T**, miért is több szerző a most tárgyalt erő- s mozgásviszonyoknál a T—$\mathfrak{V}$ különbséget nevezik eleven erőnek. Ugyanis a csak a helyzettől függő helyzeti energia [44. §. (1*a*)] $\mathbf{E}_h=V_0-V$; ellenben a sebességektől függő $\mathbf{E}_m$ mozgási energia az erély (3) alatti elve esetében is az $\mathbf{E}_h$-val állandó **E** összeget ád: $\mathbf{E}=\mathbf{E}_m+\mathbf{E}_h=\mathbf{E}_m+V_0-V=$constans, melyet (3)-mal összehasonlítva $V=\mathbf{E}_m+V_0-$const. $=\mathbf{T}-\mathfrak{V}-H$, azaz, téve V_0-const.$=H$, a mit szabad tennünk: $\mathbf{E}_m=\mathbf{T}-\mathfrak{V}$, mint mondva volt.

$$\left.\begin{aligned} mx''=X=\frac{\partial V}{\partial x}&+\tfrac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{D}_{xx}}{\partial x}x'^2+\left(\frac{\partial \mathfrak{D}_{xy}}{\partial y}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{D}_{yy}}{\partial x}\right)y'^2+\\ &+\left(\frac{\partial \mathfrak{D}_{xz}}{\partial z}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{D}_{zz}}{\partial x}\right)z'^2+\left(\frac{\partial \mathfrak{D}_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{D}_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial \mathfrak{D}_{yz}}{\partial x}\right)y'z'+\\ &+\frac{\partial \mathfrak{D}_{xx}}{\partial z}z'x'+\frac{\partial \mathfrak{D}_{xx}}{\partial y}x'y'+\mathfrak{D}_{xx}x''+\mathfrak{D}_{xy}y''+\mathfrak{D}_{xz}z''. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

A (8) és (9) világosan mutatják a fent állított különbséget.

Jegyzet: A mi illeti a (9) mozgásegyenleteknek közönséges, kinematikai formájú rendszerét: erre nézve a (9) három egyenletei rendre irandók fel s belőlük az x'', y'', z'' gyorsulások fejezendők ki, mint a coordináták és a sebességek függvényei; az ekként nyert kinematikai egyenletrendszer általánosságban véve nagyon bonyolódott, de typusa mindenesetre a következő:

$$\begin{aligned} x''&=\Xi+\tfrac{1}{2}\xi_{11}x'^2+\tfrac{1}{2}\xi_{22}y'^2+\tfrac{1}{2}\xi_{33}z'^2+\xi_{23}y'z'+\xi_{31}z'x'+\xi_{12}x'y';\\ y''&=H+\tfrac{1}{2}\eta_{11}x'^2+\ .\ \ +\ .\ \ +\ .\ \ +\ .\ \ +\eta_{12}x'y';\\ z''&=Z+\tfrac{1}{2}\zeta_{11}x'^2+\ .\ \ +\ .\ \ +\ .\ \ +\ .\ \ +\zeta_{12}x'y'; \end{aligned}$$

hol Ξ, H, Z a coordináták-, ξ_{11} . . . ζ_{12} szintén csak a coordináták függvényei.

A mozgás problémáinak megfejtése még a legegyszerűbb idetartozó esetekben is, rendkívüli nehézséggel jár, v. ö. a következő §-ot.

107. §. *Példák az electrodynamikából.* W. Weber, B. Riemann, R. Clausius *electrodynamikus alaptörvényei.*

Jeleljék m_1, m_2 két anyagi pont tömegét, e_1, e_2 az ezeken lévő szabad electromosságok menynyiségét, x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 derékszögű coordinátáit, r ezek egymástól való távolságát; akkor:

$$r^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2;$$

$$\mathrm{T}=\tfrac{1}{2}m_1(x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2)+\tfrac{1}{2}m_2(x_2'^2+y_2'^2+z_2'^2); \quad . \ . \ . \ . \quad (1)$$

$$V=-K\frac{e_1e_2}{r}+f\frac{m_1m_2}{r}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

hol a T az ú. n. *ponderikus* eleven erő (t. i. az *anyagi* részek mozgási energiája); továbbá a V-nek első része az electrostatikai (Coulomb-féle) potentiál, második az általános gravitatió (Newton-féle) potentiálja [44. §. (7) de electrostatikai egységekben], mely utóbbi a közönséges electrostatikai jelenségeknél sokkal kisebb, mint az előbbi.

Az erőfüggvénynek a *sebességek*től függő része, az ú. n. *electrodynamikus potentiál* a nevezett szerzők hypothesisei szerint a következők [v. ö. pl. Szily Kálmán: Műegyetemi Lapok III. kötet 255. l., 1878 és Fröhlich I.: Wiedemann's Annalen der Ph. u. Ch., Bd. IX., 262. l. 1880]:

$$\mathfrak{B}_W = + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{e_1 e_2}{r} \left\{ \frac{x_1 - x_2}{r} (x_1' - x_2') + \frac{y_1 - y_2}{r} (y_1' - y_2') + \frac{z_1 - z_2}{r} (z_1' - z_2') \right\}^2 =$$

$$= + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{e_1 e_2}{r} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 ; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3_W)$$

$$\mathfrak{B}_R = + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{e_1 e_2}{r} \left\{ (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2 \right\} ; \quad \ldots \ldots \quad (3_R)$$

$$\mathfrak{B}_C = - \frac{2}{c^2} \cdot \frac{e_1 e_2}{r} \left\{ x_1' x_2' + y_1' y_2' + z_1' z_2' \right\} . \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3_C)$$

Ezekkel a megelőző §. (9) sémáiból nyerhetők az erőcomponensek.

Döntő kisérlet mozgó szabad electromosságok közvetetlen egymásra hatását illetőleg még nem történt; az egyedüli kisérlet ily electromos convectió (electromosságok elszállítása) alapján Rowland * végezte, Lecher ** ezt ismételte. Ő electrostatikailag töltött fegyverzett üvegkorongot tengelye körül gyorsan forgatott és ennek electromágnesi hatását egy közelében lévő felfüggesztett mágnesre észlelte; ha e mágnest stationárius electromos körfolyammal egyenértékűnek tekintjük, akkor az észlelt hatás egyenlőképen megfelel a fentnevezett három hypothesisnek.***

A továbbiakra nézve megjegyzendő, hogy a nevezett hypothesisek az elektromos áramokat vezetőkben haladó electromosságokból állóknak tekintetik s hogy ezen áramok electrodynamikus-ponderomotórius és electrodynamikus-inductórius hatása épen az electromosságok mozgása és ezen mozgás változása által a (3) rendszer bármelyik kifejezése alapján könnyen képezhető.

Az electrodynamika s az inductió tapasztalati tételei értelmében a «vezetőkben keringő electromos áramok»-nak mint ilyeneknek, függetlenül az áramokat fentartó forrástól bizonyos munkaképességük van, mely akkor nyilatkozik meg, mikor pl. a nevezett forrást rövid zárlattal (shunt-tal) a folyamkörből kizárjuk vagy az áramkört megszakítjuk; ekkor ugyanis a magára hagyatott áram nem szünik meg azonnal, hanem kis ideig folytonosan fogyó intensitással keringve, a vezetőben melegedést, rajta kívül electromágnesi vagy electrodynamikus munkát végez vagy szikrát létesít s í. t.

E munkaképességet az áramot létesítő forrás a közben szolgáltatta az «áram»-nak, a mi közben ennek erősségét zérustól a mindenkori erősségig emelte.

Ez a munkaképesség, mely tapasztalat szerint az áramintensitások (s így e felfogás szerint az electromosság sebességei-nek) homogén quadrátos függvénye, ez *áramok electrokinetikus energiájának* neveztetik. †

---

* Rowland, Pogg. Annalen CLVIII., 487. l. 1876.

** V. ö. pl. Winkelmann, Handbuch der Physik, III. kötet 2. része, 552. l. 1895.

*** Fröhlich, Wiedemann's Annalen IX. kötet, 283. l. 1880 és XII kötet 126. l. 1881.

† Ez a 217. l. lábjegyzéke szerint az összes eleven erőnek $\Sigma(T - \mathfrak{B})$-nek, $-\Sigma\mathfrak{B}$-részével egyenlő.

Ezek szerint itt az áramokat vivő vezetők (ponderikus tömegek) T eleven ereje és az áramok electrokinetikus energiája e rendszer összes mozgási erélyét képviselik.

További fejtegetések az electrodynamika keretébe tartoznak.

5. A dynamika differentiálegyenleteinek integrálására szolgáló Jacobi-féle és Lagrange-féle módszerek.

a) *Jacobi utolsó multiplicátorának elve.*

108. §. *A dynamika egyenletei, tárgyalva mint lineáris differentiálegyenletek.*

Az anyagi pont derékszögű coordinátái legyenek x, y, z; az időszerint képezett differentiálhányadosaik x', y', z'; x'', y'', z''; a közönséges dynamikai [kinematikai] egyenletek írhatók

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx'}{dt} = X'; \quad \frac{dy'}{dt} = Y'; \quad \frac{dz'}{dt} = Z'; \\ &x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad z' = \frac{dz}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

Ezekben X', Y' Z' az x, y, z; x', y', z' és t tetszőleges, adott függvényei legyenek.

A dynamikai egyenletek, ha ezeket az x, y, z és a t közötti összefüggéseknek tekintjük, a másodrendű differentiálegyenletek simultán rendszerét alkotják [33. §. (2)], ha ellenben az $x' = dx : dt$ s í. t. sebességi componenseket szintén (és pedig t-től függő) változókként vezetjük be, akkor, miként az (1) mutatja, a mozgás egyenleteiben t a független és x, y, z; x', y', z' a tőle függő *hat* változó, melyek meghatározására az (1) rendszer *hat, lineáris* differentiálegyenlete szolgál.

E hat egyenlet (1) szerint következőleg írható:

$$dt : dx : dy : dz : dx' : dy' : dz' = 1 : x' : y' : z' : X' : Y' : Z'; \quad . \; . \quad (2)$$

és ez az a séma, melylyel a dynamika *másodrendű* differentiálegyenleteit az x', y', z' új változók segélyével *kétszer anynyi elsőrendű* differentiálegyenlettel helyettesíthetni.

109. §. *Lineáris totális differentiálegyenletrendszer általános és teljes integrálja; functionális determinánsa és multiplicátora*

A megelőző §. (2) rendszerét jelölése megváltoztatásával következőleg akarjuk írni:

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n ; \quad \ldots \quad (1)$$

és legyen pl. x *a független változó;* az (1) egyenlő a következő rendszerrel

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{X_1}{X}; \quad \frac{dx_2}{dx} = \frac{X_2}{X}; \ldots \frac{dx_n}{dx} = \frac{X_n}{X}; \quad \ldots \quad (1a)$$

melyben az X, X_1, X_2, $\ldots X_n$ az x, x_1, $x_2 \ldots x_n$ változók adott függvényei; e szerint ez a rendszer n számú *totális* (partiális differentiálhányadosokat nem tartalmazó) elsőrendű differentiálegyenletből áll.

Ily rendszernek n számú integrálegyenlete van; ezek ugyanis a változók közötti véges összefüggések, röviden integrálok, mely integrálegyenletek összesége (rendszere), ha összesen n számú, egymástól független, az (1)-ben fel nem lépő integrátió-állandókat tartalmaznak: az (1) rendszer *általános integráljának* neveztetik.

Ezen általános integrál mindig úgy állítható elő, hogy az x_1, x_2, $\ldots x_n$ menynyiségek mindegyike a független x és a γ_1, γ_2, $\ldots \gamma_n$ integrátió-állandók segélyével legyen kifejezve:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= f_1(x, \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_i \ldots \gamma_n); \\ x_2 &= f_2(x, \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_i \ldots \gamma_n); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= f_n(x, \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_i \ldots \gamma_n). \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2a)$$

Megoldva e rendszert a γ_i-kre, azaz kifejezve a γ_i-ket az x, x_1, x_2, $\ldots x_n$ segélyével, nyerjük a (2*a*)-val egyenértékű, ú. n. normálalakú rendszert:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x, x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n) &= \gamma_1; \\ \varphi_2(x, x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n) &= \gamma_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x, x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n) &= \gamma_n. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

Származtatásuk alapján a (2) minden i-edik egyenlete oly sajátságú, hogy baloldala φ_i alakjába helyettezve az (1) általános integrálját képező (2*a*) alatti $x_1 = f_1$, $\ldots x_n = f_n$ kifejezéseket: ez által φ_i *állandó* lett; az ily sajátságú $\varphi_i(x, x_1, x_2, \ldots, x_i \ldots x_n) = \gamma_i$ összefüggéseket általában véve az (1) rendszer egy *teljes integráljának* (franczia szerzők *első integráljának*) nevezik.

Ezen (2) rendszert a független x szerint differentiálva:

$$\frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dx} + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx} = 0 \text{ s í. t.};$$

azaz rendre:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx}+\cdots+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dx}+\cdots+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx}=-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x};\\
&\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx}+\cdots+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dx}+\cdots+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx}=-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx}+\cdots+\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dx}+\cdots+\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx}=-\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}.
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(3)$$

Ezen (3) rendszerből a $dx_i : dx$ hányadosok adódnak; ugyanis jelöljék:

$$D=\begin{vmatrix}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}\cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\\
\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}\cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}\cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}\cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}
\end{vmatrix};\qquad
D_i=\begin{vmatrix}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\cdots & -\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\\
\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\cdots & -\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}\cdots & -\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}\cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}
\end{vmatrix};\quad(4)$$

hol D a (2) alatti φ_1, $\varphi_2 \ldots \varphi_i \ldots \varphi_n$ függvények *functionális determinánsa;* ekkor:

$$\frac{dx_i}{dx}=\frac{D_i}{D},\quad\ldots\quad(5)$$

avagy

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots dx_i : \ldots dx_n = D : D_1 : D_2 \ldots D_i \ldots D_n \quad\ldots\quad(6)$$

Az (1) és (6) bal oldalai ugyanazok lévén, jobb oldalaik csak úgy lehetnek egyenlők, ha az X-ek és a D-k csak egy közös, M-mel jelölendő együtthatóval különböznek egymástól, azaz, ha:

$$D=MX;\quad D_1=MX_1;\quad \ldots\quad D_i=MX_i,\quad \ldots\quad D_n=MX_n.\quad\ldots\quad(7)$$

Ez az M az (1) rendszer egyik *multiplicátora.*

Multiplicátor alatt általában véve az $x, x_1, x_2 \ldots x_n$ változik oly függvényét akarjuk érteni, melynek az $X, X_1 \ldots X_n$-nel való szorozmányai a (2) alatti $\varphi_1=\gamma_1 \ldots \varphi_n=\gamma_n$ teljes integrálokból a (4) sémák szerint képezett $D_1, \ldots D_n$ determinánsokkal egyenlő.

Ha *két* változó közötti *egy* differentiál-egyenlet áll csak fenn: a multiplicátor egyszersmind integráló tényező, t. i. oly függvény, melylyel ezt az egyenletet megszorozva, ez teljes differentiállá válik [113. §.].

Jegyzet: A (4) alatti D_i determináns i-ik sorát elsőnek téve s ezt -1-el szorozva: $i-1+1=i$ számú jelváltozás áll be és így (4)-ből

$$D_i=(-1)^i\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{i+1}} \cdots \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_{i+1}} \cdots \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots \cdots \cdots & \cdots \cdots \cdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_{i+1}} \cdots \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

110. §. *A multiplicátor jellemző partiális differentiálegyenlete.*

1. A megelőző §. (4) determinánsairól be fogjuk bizonyítani, hogy áll:

$$\frac{\partial D}{\partial x}+\frac{\partial D_1}{\partial x_1}+\frac{\partial D_2}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial D_i}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial D_n}{\partial x_n}=0; \quad . \quad . \quad . \quad (0)$$

és eleve megjegyezzük, hogy az alább a tetszőleges D_i-re és x_i-re nézve megejtendő vizsgálatok és megállapítandó eredmények a D-re és az x-re nézve is fennállanak (könnyítés céljából ezeket pl. $_0$ indexxel ellátottaknak gondolhatjuk).

a) Az idézett (4) séma értelmében a $\frac{\partial D_i}{\partial x_i}$ quotiens az oly tagok aggregatuma, melyek mindegyike $(n-1)$ számú $\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_m}$ alakú- és *egy* $\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_i\,\partial x_j}$ alakú tényező szorozmánya. Ezen utóbbira nézve megjegyzendő, hogy mivel D-ben nincsen x szerint-, és D_i-ben nincsen x_i szerint képezett differentiálhányados: a $\frac{\partial D_i}{\partial x_i}$-ben a $\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_i^2}$- vagy még a $\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_i^2}$-, és a $\frac{\partial D}{\partial x}$-ben a $\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x^2}$ tényező elő nem fordulhat és így a $\frac{\partial D_i}{\partial x_i}$ tagjainak typusa

$$\Phi_{i,j}^{(k)}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_i\partial x_j} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

hol $\Phi_{i,j}^{(k)}$ a fent említett $(n-1)$ számú $\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_m}$ tényezők szorozmánya.

A D_i szerkezetéből [109. (4)] azonnal kitünik, hogy a $\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_i\partial x_j}$ tényező a (0)-nak csak $\frac{\partial D_i}{\partial x_i}$ és $\frac{\partial D_j}{\partial x_j}$ részeiben fordulhat elő.

Ámde a determinánsok elemi tulajdonsága szerint * írható:

---

* Ugyanis a

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1i} & a_{1j}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2i} & a_{2j}\ldots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{ni} & a_{nj}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

$$D_i = \frac{\partial D_i}{\partial \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \frac{\partial D_i}{\partial \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial D_i}{\partial \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j}} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j}; \quad j \gtrless i; \quad . \quad (2_i)$$

$$D_j = \frac{\partial D_j}{\partial \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial D_j}{\partial \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial D_j}{\partial \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}; \quad i \gtrless j; \quad . \quad (2_j)$$

az elsőt x_i-, a másodikat x_j szerint differentiálva, észreveszszük, hogy

---

determináns írható:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1i}A_{1i} + \cdots + a_{1n}A_{1n},$$

. . . . . .

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{ij}A_{ij} + \cdots + a_{nj}A_{nj},$$

hol az utóbbi egyenletben pl. az a_{ij} elem csak mint az A_{ij} aldeterminánsszorzója és különben sehol sem lép fel, úgy, hogy:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}} = A_{ij}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

$$\Delta = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{1j}} a_{1j} + \frac{\partial \Delta}{\partial a_{2j}} a_{2j} + \cdots + \frac{\partial \Delta}{\partial a_{nj}} a_{nj}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

és ez a szövegben (2_i) és (2_j) alatt használt tétel.

Itt az (α)-ból az A_{ij} aldeterminánsban:

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad . \quad (\beta\beta)$$

Az i-ik (vízszintes) sort elsőnek téve: $i-1$-szer változik A_{ij} jele; a j-ik (függélyes) oszlopot elsőnek téve. még $j-1$ jelváltozás áll elő; ezen $i-1+j-1$ számú jelváltozás eredménye végre még az $i+j$ jelváltozással lévén egyenlő, a (β)- és $(\beta\beta)$-ból nyerjük:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}} = A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad . \quad (\beta\beta\beta)$$

mely alakra a szöveg (5) kifejezéseinél hivatkozni fogunk.

az így származó, $\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_j}$-t tartalmazó tagja a $\frac{\partial D_i}{\partial x_i}$-nek, illetve a $\frac{\partial D_j}{\partial x_j}$-nek:

$$\frac{\partial D_i}{\partial \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \text{illetve:} \quad \frac{\partial D_j}{\partial \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_j \partial x_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ezen tagokról könnyen kimutatjuk, hogy ellentetten egyenlők.

b) E czélból legyen $\varphi(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = \gamma$ egy tetszőleges segédfüggvény; evvel és a 109. §. (2) alatti φ_i függvényeivel képezzük az

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \ldots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \ldots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} \ldots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \ldots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

determinánst; ebből a lábjegyzékben idézett (β) tétel szerint tekintettel a megelőző §. (4) és (8) alakjaira rendre *

$$D = \frac{\partial R}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x}}, \qquad D_i = \frac{\partial R}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}, \qquad D_j = \frac{\partial R}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}}; \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\frac{\partial D_i}{\partial \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}} = \frac{\partial^2 R}{\partial \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \partial \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}; \qquad \frac{\partial D_j}{\partial \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}} = \frac{\partial^2 R}{\partial \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \partial \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}} \quad . \quad . \quad (6)$$

A (6) jobb oldali két kifejezése egymástól csak anynyiban különbözik, hogy bennük az i és a j indexek fel vannak cserélve; de ekkor, a determinánsok egy elemi tétele szerint ** az R ezen második par-

---

* Mert csakugyan, az R-nek $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ szerinti differentiálquotiensét a megelőző lábjegyzék (β), ($\beta\beta$) és ($\beta\beta\beta$) sémái szerint képezve: a $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ az R-nek $i+1$-edik oszlopában és *első* sorában van; ezért ($\beta\beta\beta$) séma szerint $i+2$ a jelváltozások száma (a mi i számú jelváltozással egyenértékű) és a nevezett hányados a D_i-nek a megelőző §. (8) alakjával teljesen megegyezik. Miután i tetszőleges, ugyane tétel D_j-re nézve is áll.

** Ugyanis, a 224. lap lábjegyzéke jelöléseit megtartva, az $A_{kj} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{kj}}$ aldeterminánsa Δ-ban az a_{kj} elem egyedüli együtthatója és ugyanezen A_{kj}-ben az a_{li} elem egyedüli együtthatója $\frac{\partial A_{kj}}{\partial a_{li}}$; e szerint a Δ-ban az $a_{kj}\, a_{li}$ szorzat egyedüli együtthatója $\frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{kj} \partial a_{li}}$.

tiális két differentiálquotiense ellentetten egyenlő és így összegük zérus, azaz

$$\frac{\partial D_i}{\partial \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}} + \frac{\partial D_j}{\partial \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

c) Képezve a (0) egyenlet bal oldalát: ez az *a)* pontban mondottak szerint az (1) alakú, illetve (3) alakú tagok összegéből áll, ezek pedig (7) értelmében páronként ellentetten egyenlők lévén: ez a (0) összeg zérus és így ezen egyenlet tényleg fennáll.

2. *A multiplicátor differentiálegyenlete; a multiplicátorok csak állandó tényezővel különböznek egymástól.*

a) Tekintettel a megelőző §. (7) egyenletére, az idézett (0) kifejezés folytatólagosan írható:

$$\frac{\partial (MX)}{\partial x} + \frac{\partial (MX_1)}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial (MX_i)}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial (MX_n)}{\partial x_n} = 0;$$

vagy

$$X\frac{\partial M}{\partial x} + X_1\frac{\partial M}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial M}{\partial x_n} + M\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) = 0 \ldots \quad (8)$$

Ámde, a 109. §. (1) rendszere tekintetbe vételével áll:

$$X_i\frac{\partial M}{\partial x_i} = X\frac{\partial M}{\partial x_i}\quad \frac{X_i}{X} = X\frac{\partial M}{\partial x_i}\quad \frac{dx_i}{dx};$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial M}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dx} + \cdots + \frac{\partial M}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx} = \frac{dM}{dx};$$

Felcserélve az i és j indexeket, az $a_{ki}\,a_{lj}$ egyedüli együtthatója a Δ-ban: $\dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{ki}\,\partial a_{lj}}$.

Másrészt az a_{ki}, a_{kj}, a_{li}, a_{lj} elemekből képezett $(a_{ki}a_{lj} - a_{kj}a_{li})$ aldeterminánsa a Δ-ban egy meghatározott $(n-2)$-ed rendű aldeterminánssal van szorozva, [így pl. miként azonnal látni, a 223. lap lábjegyzékének (α) determinánsában az $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ szorozva van az

$$\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n3} & a_{n4} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

aldeterminánssal] és így az $a_{ki}\,a_{lj}$ és az $a_{kj}\,a_{li}$ szorzatok egyedüli együtthatói ellentetten egyenlők, azaz

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{kj}\,\partial a_{li}} = -\frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{ki}\,\partial a_{lj}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\delta)$$

és ez a szövegben a (6) számára felhasznált tétel.

e szerint a (8)-nak M-el osztott első része $\frac{X}{M}\frac{dM}{dx} = X\frac{d\lg M}{dx}$-el egyenlő s így a (8) maga írható:

$$X\frac{d\lg M}{dx} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

és ez az M multiplicator jellemző (meghatározó) partiális differentiálegyenlete.*

b) Ha M a (9) egy megoldása, M_1 egy másik megoldás, akkor a (9) az M_1-re is érvényes; e szerint az M-re és az M_1-re vonatkozó (9) egyenletek különbsége

$$X\frac{d\lg M}{dx} - X\frac{d\lg M_1}{dx} = 0, \quad \text{avagy} \quad M_1 = M.\,\text{constans} \quad . \quad . \quad (10)$$

Röviden: az (1) rendszer M és M_1 multiplicátorai között csak *állandó tényező* lehet a különbség.

A következő §§-okban azt mutatjuk ki, hogy az M_1 multiplicátor, ha ezt valami úton-módon találtuk, miképen könnyníti a 109. §. (1) rendszere és vele együtt a 108. §. (1) rendszere integrálását.

Bebizonyítjuk Jacobi azon tételét, hogy ha az idézett differentiálegyenletrendszer $(n-1)$ számú teljes integrálját és egy multiplicátorát ismerjük: a rendszer utolsó, n-edik teljes integrálja mindig kiszámítható [113. §. II. szakasza].

I. *Jegyzet. Szabad* pontmozgásnál a 108. §. (2) és a 109. §. (1) egyenletei értelmében x a t folyó időt, x_1, x_2, x_3 a pont x, y, z coordinátáit, x_4, x_5, x_6 ennek x', y', z' sebességi componenseit jelentik, míg az X-ekre nézve a 108. §. (2) szerint rendre áll: $X=1$; $X_1=x'$, $X_2=y'$, $Y_3=z'$; $X_4=x''$, $X_5=y''$, $X_6=z''$; e szerint itt X_1, X_2, X_3 az x, y, z coordinátákat, X_4, X_5, X_6 az x', y', z' sebességeket nem tartalmazzák és így

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial X_1}{\partial x_1} = 0, \ \ldots \ \frac{\partial X_6}{\partial x_6} = 0,$$

miáltal a (9)-ből

$$X\frac{d\lg M}{dx} = 0, \quad \text{avagy:} \quad M = \text{constans} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

mely a szabad pontmozgás differentiálegyenleteinek multiplicátora.

II. *Jegyzet.* Ha az $\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)$ valamely, pl. Ω függvénynek x szerinti teljes differentiálquotiense, akkor, miként első pillantásra észrevenni, a (9) egyenlet integrálható, az M meghatározható.

---

* Jacobi, Dynamik, 110. l.

111. §. *A redukált differentiálegyenletrendszer és multiplicátora; ennek meghatározása.*

1. Vegyük fel, hogy a

$$dx : dx_1 : dx_2 \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n \quad \ldots \quad (1)$$

eredeti rendszer egy M multiplicátora és egy, a 109. §. (2) sémája szerint írt

$$\varphi_n(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = \gamma_n \quad \ldots \quad (2)$$

teljes integrálja ismeretes. Az M-re nézve a 109. §. (7) egyenlete értelmében áll $MX = D$; az általánosabb M, multiplicátor a megelőző §. (10) egyenlete szerint $M,X = D$. const. alakban írható, melyet, a 109. §. (2) alatti $\varphi_1 = \gamma_1$ s í. t. rendszere értelmében

$$M,X = D \,.\, \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n) \quad \ldots \quad (2a)$$

formában írhatni, hol Φ a $\varphi_1 = \gamma_1 \ldots \varphi_n = \gamma_n$ integrátió-*állandók*nak (*parameterek*nek) függvénye; de a Φ az idézett 109. §. (2) rendszere értelmében az $x, x_1, x_2 \ldots x_n$ változók *állandó értékű függvényé*-nek is tekinthető.

2. Fejezzük ki most a (2)-ből az x_n-et az $x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ és φ_n segélyével; helyettezzük az így előállított x_n-et az (1)-be. Ez által (1)-ből az x_n eltünik és benne csak $x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ lép fel; az (1) rendszer maga

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots dx_{n-1} = (X) : (X_1) : (X_2) : \ldots (X_{n-1}) \quad \ldots \quad (3)$$

alakú lesz, hol az $(X), (X_1) \ldots (X_{n-1})$ nem identikusak az (1) alatti $X, X_1 \ldots X_{n-1}$ ugyanily nevű menynyiségekkel, hanem x_n-nek most említett kiküszöbölése folytán származottak.

A (3)-at *redukált rendszer*nek nevezik; a következőkben bebizonyítjuk, hogy ha az eredeti (1) rendszernek egy $\varphi_n = \gamma_n$ teljes integrálja és egy M multiplicátora ismeretes: a (3) redukált rendszernek mindig kiszámítható egy multiplicátora.

Ugyanis, ha $\varphi_i(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = \gamma_i$ az (1). rendszer egy *ismeretlen*, de teljes integrálja, akkor ebbe a (2) segélyével az $x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ és a φ_n- által kifejezett x_n helyettesíthető és így x_n kiküszöbölhető; jelöljük ( ) zárójelekkel az így előállított φ_i-ket és azon hányadosait, melyek ezen utóbbi-, a φ_n-t is tartalmazó alakból származtak, akkor φ_i-ből

$$\varphi_i(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = (\varphi_i[x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, \varphi_n]) = (\varphi_i) = \gamma_i; \quad (4a)$$

mely (φ_i)-ben az $x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ változók explicite és a φ_n argumentumban még implicite is lépnek fel;

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} &= \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi_n}\right) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}; \ \ldots \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{n-1}} &= \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{n-1}}\right) + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi_n}\right) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{n-1}}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi_n}\right) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}; \\ & i = 1, 2, 3 \ldots n-1. \end{aligned}\right\} \quad (4b)$$

Ezeket a 109. §. (4) alatti D functionális determinánsa első n—1 sora elemei helyébe téve:

$$D=\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right)+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi_n}\right)\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}\cdots\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{n-1}}\right)+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi_n}\right)\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_{n-1}}, & \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi_n}\right)\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots\

determináns; ha $M^{(1)}$ e reducált rendszer egy multiplicátora, akkor erre nézve a 109. §. (7) tétele alkalmazásával áll $M^{(1)}(X)=D^{(1)}$, ellenben általánosabb $M_f^{(1)}$ multiplicátora, a 110. §. (10) értelmében megfelel az $M_f^{(1)}(X)=D^{(1)}$. constans feltételnek, melyet a $(2a)$ séma szerint szabad írnunk:

$$M_f^{(1)}(X)=D^{(1)}\,\Phi[(\varphi_1),\ (\varphi_2),\ \ldots\ (\varphi_{n-1}),\ \gamma_n], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

mert a Φ a (φ_1), (φ_2), $\ldots$ (φ_{n-1}), γ_n állandóknak (az integrátió parametereinek) a függvénye, mely Φ a 109. §. (2) rendszere és a jelen §. 2. pontjában végzett kiküszöbölés értelmében az x, x_1, x_2, $\ldots$ x_{n-1} változók és a γ_n parameter állandó értékű függvényének is tekinthető.

3. Helyettezve a (6)-ból a $D^{(1)}$-nek értékét, a (7)-be

$$M_f^{(1)}(X)\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}=D\Phi[(\varphi_1),\ (\varphi_2)\ \ldots\ (\varphi_{n-1}),\ \gamma_n]. \quad . \quad . \quad . \quad (8a)$$

Másrészt a $(2a)$ egyenletből a (2) segélyével a már többször nevezett módon eliminálva x_n-et, azaz, kifejezve $(2a)$-t $x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ és γ_n segélyével, ez a 2. pontban elfogadott ( ) zárójeles jelöléssel irható:

$$(M_f)(X)=D\Phi[(\varphi_1),\ (\varphi_2),\ \ldots\ (\varphi_{n-1}),\ \gamma_n], \quad . \quad . \quad . \quad (8b)$$

melyet (7)-tel és $(8a)$-val összehasonlítva:

$$M_f^{(1)}:(M_f)=D^{(1)}:D=1:\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n},$$

$$M_f^{(1)}=\frac{(M_f)}{\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

E szerint a (3) reducált rendszer $M_f^{(1)}$ multiplicátora az eredeti rendszer ismert $(2a)$ alatti M_f multiplicátora és ugyanezen eredeti rendszer $\varphi_n(x, x_1, x_2, \ldots x_n)=\gamma_n$ teljes integrálja segélyével mindig kiszámítható, miután (M_f) az M_f-ből az x_n-nek a $(8b)$-ben jelzett kiküszöböléséből adódik.

Jegyzet: Miután az $M_f^{(1)}$ a (3) redukált rendszer multiplicátora és a (3)-ban az x_n nem fordul elő: az $M_f^{(1)}$ sem tartalmazhatja az x_n-et és így a $(8a)$ és (8)-ban felmerülő $\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}$-ből is a quotiens képzése *után*, a $\varphi_n=\gamma_n$ segélyével az x_n kiküszöböltnek tekintendő; ugyanaz áll a $(8a)$ és $(8b)$ D-jére nézve is.

112. §. *Folytatás. Az utolsó multiplicátor és meghatározása.*

A megelőző §. eljárását folytatólagosan ujra meg ujra alkalmazhatjuk.

1. Igy, ha az eredeti egyenletrendszernek [megelőző §. (1)] a $\varphi_n=\gamma_n$ teljes integrálján kívül még egy második ilyet, pl. a $\varphi_{n-1}=\gamma_{n-1}$-et

ismerünk, akkor az első segélyével a megelőző §. (3) reducált rendszerét képezve, a φ_{n-1} írható $\varphi_{n-1}(x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, \varphi_n)=\gamma_{n-1}$; ez utóbbiból az x_{n-1} az $x, x_1, x_2, \ldots x_{n-2}, \varphi_n$ segélyével meghatározható s az idézett (3) reducált rendszerbe helyettesíthető, melyből ilyformán az x_{n-1} ki lesz küszöbölve és mely így, folytatólagosan alkalmazva a 111. §. 2. pontjának zárójeles jelölési módját:

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots dx_{n-2} = ((X)) : ((X_1)) : ((X_2)) : \ldots : ((X_{n-2})) \quad . \quad (1)$$

alakra redukálódott, benne $((X))$, $((X_1))$, $\ldots$ $((X_{n-2}))$ nem identikusak az idézett (3) egyenlet (X), (X_1), $\ldots$ (X_{n-2}) mennyiségeivel, hanem belőlük az x_{n-1} említett kiküszöbölése után származottak.

E redukált rendszer functionális determinánsát $D^{(2)}$-t a 111. §. (6) rendszerben kiírt $D^{(1)}$-ből nyerjük, ha evvel most, a megelőző §. eljárását olyformán hajtjuk végre, mint ott a D-re nézve.

Ugyanis, ott a $\varphi_i=\gamma_i$ integrál-typusban az x_n-et kiküszöbölve, e typust írtuk [111. §. (4a)]: $(\varphi_i[x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \varphi_n])=\gamma_i$; benne az x, $x_1, \ldots x_{n-1}$ explicite és φ_n argumentumban még implicite is fordulnak elő és $(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k})$-vel jeleltük *ezen* alakból az *explicit* x_k szerint képezett quotienset. Most az előbb írt $\varphi_{n-1}=(\varphi_{n-1}[x, x_1 \ldots x_{n-1}, \varphi_n])=\gamma_{n-1}$ egyenlet segélyével az x_{n-1}-et fejezzük ki a többi argumentumok és φ_{n-1} segélyével és helyettezzük az így előállított x_{n-1}-et az ismeretlen $(\varphi_i)=\gamma_i$, $i=1, 2, \ldots n-2$ integrálokba, miáltal ezek a 111. §. 2. pontja zárójeles jelölési módjának folytatólagos alkalmazásával:

$$\left.\begin{aligned}(\varphi_i[x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, \varphi_n]) = \\ =((\varphi_i[x, x_1, x_2 \ldots x_{n-2}, \varphi_{n-1}, \varphi_n]))=((\varphi_i))=\gamma_i\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (1a a)$$

alakban jelentkeznek.

Ezen utóbbiakban az $x, x_1, x_2 \ldots x_{n-2}$ explicite és a φ_{n-1} argumentumban még implicite is lépnek fel és így az előbb jelzett, a 111. §. (6) egyenletében fellépő, (φ_i)-ből az *explicit* x_k szerint képezett differentiálquotiens az (1$a a$) alapján írható:

$$\left.\begin{aligned}(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}) = ((\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k})) + ((\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi_{n-1}}))\,(\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_k}); \quad k=1, 2 \ldots n-2; \\ ((\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{n-1}})) = ((\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi_{n-1}}))\,(\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}).\end{aligned}\right\} \quad (1a)$$

Ezeket a megelőző §. $D^{(1)}$ (6) kifejezésébe helyettesítve: a legalsó sor kivételével minden elem két tagból áll s e determináns tökéletesen úgy egyszerűsíthető, mint a megelőző §. (5) alatti, illetve a 109. §. (4) alatti D determinása; e szerint

$$D^{(1)} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right) & \dots & \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n-1}}\right) \\ \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right) & \dots & \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{n-1}}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_2}\right) & \dots & \left(\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) \begin{vmatrix} \left(\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right)\right) & \left(\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right)\right) & \dots & \left(\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n-2}}\right)\right) \\ \left(\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right)\right) & \left(\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right)\right) & \dots & \left(\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{n-2}}\right)\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\left(\frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_1}\right)\right) & \left(\left(\frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_2}\right)\right) & \dots & \left(\left(\frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_{n-2}}\right)\right) \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) D^{(2)}, \quad (2)$$

hol a $D^{(2)}$ az (1) alatti másodízben redukált rendszer functionális determinánsa; elemeinek száma $(n-2)^2$.

E szerint nyertük a megelőző §. (6), a jelen §. (2) egyenleteiben és folytatólagosan ugyanígy nyerjük:

$$D = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} D^{(1)}; \quad D^{(1)} = \left(\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) D^{(2)}; \quad D^{(2)} = \left(\left(\frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_{n-2}}\right)\right) D^{(3)};$$
$$D^{(3)} = \left(\left(\left(\frac{\partial \varphi_{n-3}}{\partial x_{n-3}}\right)\right)\right) D^{(4)}, \dots D^{(n-2)} = \left(\left(\left(\dots \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \dots\right)\right)\right) D^{(n-1)}. \quad (3)$$

A jelen §. (1) egyenletrendszerének multiplicátora $M'^{(2)}$; ez a megelőző §. (7) egyenlete sémájával

$$M'^{(2)}((X)) = D^{(2)} \Phi [((\varphi_1)), ((\varphi_2)), \dots ((\varphi_{n-2})), \gamma_{n-1}, \gamma_n] \quad . \quad (4a)$$

Másrészt, a megelőző §. (7) és (8b) egyenleteiből a $\varphi_{n-1} = \gamma_{n-1}$ segélyével eliminálva x_{n-1}-et, az alkalmazott zárójeles jelöléssel:

$$(M'^{(1)}) ((X)) = D^{(1)} \Phi [((\varphi_1)), ((\varphi_2)), \dots ((\varphi_{n-2})), \gamma_{n-1}, \gamma_n]; \quad . \quad (4b)$$
$$((M',)) ((X)) = D \quad \Phi [((\varphi_1)), ((\varphi_2)), \dots ((\varphi_{n-2})), \gamma_{n-1}, \gamma_n]. \quad . \quad (4c)$$

Összehasonlítva a (4a), (4b), (4c) egyenleteket, a (3) tekintetbe vételével:

$$M'^{(2)} = (M'^{(1)}) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) = ((M',)) : \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \cdot \left(\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right); \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Jegyzet: Az $M'^{(2)}$ a jelen §. (1) redukált rendszere multiplicátora lévén, nem tartalmazhatja az x_n-et és x_{n-1}-et és így [megelőző §. 3.

pontjának *Jegyzete*] a (4)-ben felmerülő $\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}$ és $\left(\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)$ quotiensek képzése után az elsőből x_n és x_{n-1}, a másodikból x_{n-1} küszöbölendő ki az ismert $\varphi_n=\gamma_n$ és $\varphi_{n-1}=\gamma_{n-1}$ egyenletek segélyével.

2. Ha k számú $\varphi_n=\gamma_n$, $\varphi_{n-1}=\gamma_{n-1}$, ... $\varphi_{n-k+1}=\gamma_{n-k+1}$ teljes integrál ismeretes: segélyükkel folytatólagosan az x_n-t, azután az x_{n-1}-et, az x_{n-2}-et ... x_{n-k-1}-et az eredeti differentiálegyenletrendszerből kiküszöbölhetni, úgy hogy belőle transformálás után marad:

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots dx_{n-k} = (((..X..))) : (((..X_1..))) : \ldots (((..X_{n-k}))); \quad (5)$$

hol az $(((..X..)))$, $(((..X_1..)))$, ... $(((..X_{n-k}..)))$ nem egyenlők a 111. §. (1) rendszerének X, X_1, X_{n-k} menynyiségeivel, hanem ezekből az x_n, x_{n-1}, x_{n-2} ... x_{n-k+1} folytatólagos kiküszöböléséből származtak.

E rendszer multiplicátora $M_1^{(k)}$; ez a (4) összefüggés folytatólagos alkalmazásával:

$$M_1^{(k)}=(((..M_1..))) : \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}\left(\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)\left(\left(\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial x_{n-2}}\right)\right)\cdot\left(\left(\left(..\frac{\partial\varphi_{n-k+1}}{\partial x_{n-k+1}}..\right)\right)\right) \ldots \quad (6)$$

3. Végre, ha az eredeti differentiálegyenletrendszernek $n-1$ számú teljes integrálját ismerjük és egy, M_1 multiplicátorát, akkor a $\varphi_n=\gamma_n$, $\varphi_{n-1}=\gamma_{n-1}$, ... $\varphi_2=\gamma_2$ ismert integrálegyenletek segélyével az x_n, x_{n-1}, ... x_2-t folytatólagosan kiküszöbölve, az egyenletrendszer végre, a transformálás után

$$dx : dx_1 = (((..X..))) : (((..X_1..))) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

utolsó alakra redukálódik, melynek $M_1^{(n-1)}$ multiplicátora a (6) értelmében:

$$M_1^{(n-1)}=(((..M_1..))) : \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}\left(\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)\left(\left(\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial x_{n-2}}\right)\right)\cdots\left(\left(\left(\cdot\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3}\cdot\right)\right)\right)\left(\left(\left(..\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}..\right)\right)\right)^* \quad (8)$$

Ez az úgynevezett *utolsó multiplicátor.*

Jegyzet. E (8) kifejezés képzésére nézve a megelőző §. 3-ik és a jelen §. 1. pontjának *Jegyzete* általánosított érvényességgel áll: ugyanis az $M_1^{(n-1)}$ a (7) értelmében csak x és x_1-től függhetvén, a (8) jobb oldala M_1, $\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}$, $\left(\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)$, s í. t. tényezőiből az x_n, x_{n-1} ... x_3, x_2 (a menynyiben még nem eliminálttatnak volna), folytatólagosan kiküszöbölendők a $\varphi_n=\gamma_n$, $\varphi_{n-1}=\gamma_{n-1}$, ... $\varphi_2=\gamma_2$ integrálegyenletek segélyével.

113. §. *Az utolsó multiplicátor egyszersmind integráló tényező. Kétféle bizonyítás. Az utolsó teljes integrál.*

I. Legyen

$$dx : dx_1 = X : X_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

* Jacobi, Dynamik, 116. l.

a megvizsgálandó két változójú differentiálegyenlet, mely

$$Xdx_1 - X_1 dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

alakban is írható és legyen

$$\varphi_1(x, x_1) = \gamma_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

az egyenlet teljes integrálja; akkor ezen utóbbiból:

$$d\varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 = 0 \text{ vagy } dx : dx_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} : -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \quad . \quad . \quad (3)$$

I*a*. *Közvetetlen bizonyítás.* Az (1) és (3) egyszerre csak úgy állhat fenn, ha baloldalaik megfelelő tagjai egymással arányosak; ha μ ezen arányossági tényező, akkor kell, hogy álljon:

$$\mu X = + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}; \qquad \mu X_1 = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Szorozva μ-vel az egyenlet (1*a*) alakját s tekintetbe véve (4)-et, e szorozmány nem más, mint a (3) első alakjában kiírt $d\varphi_1$, azaz a *μ-vel való szorzás által* (1) *egyenletünk teljes differentiállá* válik, melynek integrálja az (1)-nek (2) alatti φ_1 integrálfüggvénye. Ezen μ ezek szerint közvetetlenül integráló tényező, mert (1) egyenletünket integrálhatóvá teszi és mihelyt μ-t találtuk, (1*a*) egyenletünk is integrálható:

$$\int \mu (Xdx_1 - X_1 dx) = \varphi_1 = \gamma_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

I*b*. *Közvetett bizonyítás:* Ha a 109. vagy a 111. §. (1) rendszere csak a jelen §. (1) egyenletéből áll [avagy a megelőző két §. eljárása szerint erre lett redukálva], akkor az összes φ_i integrálfunctiókból csak φ_1 marad meg és az idézett 109. §. (4) és (8) determinánsai csak $D = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}$ és $D_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$-ből állanak s igy miután az idézett 107. §. (7) egyenletei szerint, ha μ a multiplicátor ideiglenes jele, $\mu X = D$; $\mu X_1 = D_1$, az (1*a*)-ból ismét az (5) integrál következik.

II. Ha a jelen §. (1) rendszere a 111. §. (1) rendszeréből a megelőző két §. szerint végzett reductió alapján keletkezett és így a 112. §. (7) rendszerével egyenértékű: akkor az itt μ-vel jelelt multiplicátor a megelőző §. (8) jelölésében $M_1^{(n-1)}$; és elhagyva ott az M_1-, X-, és X_1-nek most már fölösleges zárójeles jelölését: ennek az idézett §. (8) alakját a jelen §. (5) egyenletébe téve, ez:

$$\int \frac{M_1 (Xdx_1 - X_1 dx)}{\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \left(\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) \left(\left(\frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_{n-2}}\right)\right) \cdots \left(\left(\left(\cdot\cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \cdot\cdot\right)\right)\right)} = \varphi_1 = \gamma_1 \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

alakban írható; ez a φ_1 egyszersmind a teljes differentiálegyenletrendszer [109. vagy a 111. §. (1)] utolsó, n-edik teljes integrálja.

Evvel be van bizonyítva JACOBI-nak a 25. §. 7. pontjában és a 110. §. 2. pontja végén állított tétele:

Ha egy $n+1$ számú változót tartalmazó, lineáris differentiálegyenletrendszer egy M, multiplicátora és $(n-1)$ számú teljes integrálja ismeretes: akkor e rendszer utolsó teljes integrálja ezek alapján (6) segélyével mindig kiszámítható.

114. §. *Az utolsó multiplicátor nevezője determináns alakjában.* Még a megelőző §. (6) kifejezésének nevezője egyszerűsitendő.

Jeleljen, a 111. §. (6) alakjával analog jelöléssel

$$D_{(1)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

mely determináns a 109. §. (2) rendszerének $\varphi_2=\gamma_2$, $\varphi_3=\gamma_3, \ldots \varphi_n=\gamma_n$ egyenleteiből van képezve (és ezen $n-1$ számú egyenlet functiónális determinánsának is nevezhető); bebizonyítjuk, hogy az utolsó multiplicátor nevezője ezen $D_{(1)}$-el egyenlő.

A 111. §. (4*b*) quotienseit φ_2, $\varphi_3 \ldots \varphi_{n-1}$-re érvényesítve és ezeket a jelen §. (1) kifejezésébe helyettesítve, az idézett 111. §. 2. pontjának eljárása alkalmazásával azonnal nyerjük:

$$D_{(1)}=\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right) & \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_{n-1}}\right) \\ \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2}\right) & \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_{n-1}}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_2}\right) & \left(\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_3}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) \end{vmatrix}=\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}D_{(2)} \quad \ldots \quad (2)$$

Alkalmazva most a 112. §. (1*a*) quotienseit (φ_2), $(\varphi_3) \ldots (\varphi_{n-2})$-re és ezekkel képezve $D_{(2)}$-t, az idézett eljárás azonnal adja:

$$D_{(2)}=\left(\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)\begin{vmatrix} \left(\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right)\right) & \left(\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3}\right)\right) & \cdots & \left(\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_{n-2}}\right)\right) \\ \left(\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2}\right)\right) & \left(\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3}\right)\right) & \cdots & \left(\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_{n-2}}\right)\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\left(\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial x_2}\right)\right) & \left(\left(\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial x_3}\right)\right) & \cdots & \left(\left(\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial x_{n-2}}\right)\right) \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)D_{(3)}. \quad (3)$$

Ezen eljárás folytatásával általánosan

$$D_{(k)} = \left(\left(\ldots \frac{\partial \varphi_{n-k+1}}{\partial x_{n-k+1}} \ldots\right)\right) D_{(k+1)}, \quad \ldots\ldots (4)$$

hol végre:

$$D_{(n-1)} = \left(\left(\ldots \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \ldots\right)\right) \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Ezek szerint:

$$D_{(k)} = \left(\left(\ldots \frac{\partial \varphi_{n-k+1}}{\partial x_{n-k+1}} \ldots\right)\right) \left(\left(\ldots \frac{\partial \varphi_{n-k}}{\partial x_{n-k}} \ldots\right)\right) \ldots \left(\left(\ldots \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \ldots\right)\right); \quad (6)$$

és így viszszatérve (2)-re:

$$D_{(1)} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \left(\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) \left(\left(\frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_{n-2}}\right)\right) \ldots \left(\left(\ldots \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \ldots\right)\right) \left(\left(\ldots \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \ldots\right)\right) \quad \ldots (7)$$

Evvel az e §. elején kimondott állításunk be van bizonyítva és maga az n-edik integrál a megelőző §. (6) és a jelen §. (1) és (7) összefüggései értelmében:

$$\int (X dx_1 - X_1 dx) \frac{M_r}{D_{(1)}} = \varphi_1 = \gamma_1 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

hol a $D_{(1)}$ az *ismert* φ_n, φ_{n-1}, ... φ_2 integrálokból az (1) séma értelmében közvetetlenül képezhető, de belőle, a 112. §. (8) egyenletére tett megjegyzés értelmében, képzése után az x_n, x_{n-1}, ... x_3, x_2 [a menynyiben még nem küszöböltettek volna ki] a $\varphi_n = \gamma_n$, ... $\varphi_2 = \gamma_2$ egyenletek segélyével folytatólagosan eliminálandók.

115. §. *A mozgás egyenletrendszerei* Hamilton-*féle általános typusának multiplicátora szabad és surlódás nélküli kényszermozgásnál állandó.*

Az utolsó multiplicátor elvének a *kényszermozgások*ra vonatkozó alkalmazását ezen §-ban a mozgás-egyenletek Lagrange-féle második alakjára, illetve a Hamilton-féle kánon-alakokra adjuk; a Lagrange-féle első alakra nézve, ennek tárgyalása itt nem okvetetlenül szükséges.*

a) Kiindulva a 101. §. (1) és a 100. §. (1) typusából, mely szabad valamint surlódás nélküli mozgásra érvényes, ezek írhatók:

$$\frac{dp_i}{dt} = Q_i - \frac{\partial T_p}{\partial q_i}; \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial T_p}{\partial p_i} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

hol a 99. §. (5) értelmében

---

* Jacobi, Dynamik, 132—141. l.

$$T_p = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}_{11}p_1^2 + \cdot + \cdot) + (\mathfrak{p}_{23}p_2p_3 + \cdot + \cdot),$$

melyben a p-k csak a q coordináták függvényei.

Az (1) rendszer a 108. §. (2) és a 109. §. (1) sémája alapján írható

$$dt : dq_1 : dq_2 : dq_3 : dp_1 : dp_2 : dp_3 =$$

$$1 : \frac{\partial T_p}{\partial p_1} : \frac{\partial T_p}{\partial p_2} : \frac{\partial T_p}{\partial p_3} : \left(Q_1 - \frac{\partial T_p}{\partial q_1}\right) : \left(Q_2 - \frac{\partial T_p}{\partial q_2}\right) : \left(Q_3 - \frac{\partial T_p}{\partial q_3}\right) . \quad (1a)$$

Az (1a) rendszer M multiplicátorának jellemző egyenlete [110. §. (9)] itt

$$\frac{d}{dt}(\lg M) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial T_p}{\partial p_i}\right) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial p_i}\left(Q_i - \frac{\partial T_p}{\partial q_i}\right) = 0.$$

Itt mindig

$$\frac{\partial^2 T_p}{\partial q_i \partial p_i} = \frac{\partial^2 T_p}{\partial p_i \partial q_i},$$

miáltal:

$$\frac{d}{dt}(\lg M) + \sum_{i=1}^{r3} \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

b) A Q_i erők a sebességektől explicite nem függenek; legalább a legtöbb esetben nem [106. § 1. pontja.]; a p_i nyomatékok pedig a sebességi componensekből lévén szerkesztve [98. §. (4)], ilyenkor a Q_i-k függetlenek a p_i-ktől s így a (2) jobboldali második tagja zérus, úgy, hogy a (2)-ből

$$M = \text{constans}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

mi által állításunk be van bizonyítva.

[*Példákat* az utolsó multiplicátor elvére l. a 232. §-ban.]

b) *Lagrange eljárása elsőrendű partiális differentiálegyenletek integrálására. A characteristikus egyenlet integrálása.*

116. §. *Elsőrendű partiális differentiálegyenletekről. A teljes, az általános és a singuláris integrál (megoldás). A mechanika partiális differentiálegyenletei.*

1. *Partiális* valamely differentiálegyenlet, ha benne legalább *két független* változó és a függő változónak ezek szerint képezett *partiális* differentiálquotiensei lépnek fel. A differentiálegyenlet *rendje* e quotiensek legmagasabb rendűjének rendjével, foka pedig e quotiens fokával egyenlő.

Lagrange definitiója szerint az ily partiális, *elsőrendű*, n független változóval biró differentiálegyenlet egy *teljes megoldása (integrálja)*: e változóknak az oly véges függvénye, mely az egyenletet kielégíti és melyben n *számú tetszőleges független állandója* az integrátiónak lép fel, mely utóbbiak az eredeti differentiálegyenletben

elő nem fordulnak. Ellenben ezen egyenletnek egy *általános megoldása (integrálja)* a független változóknak oly véges függvénye (integrálegyenlete), mely a differentiálegyenletet kielégíti és e *változók* egy *tetszőleges függvényét* tartalmazza. Végre egy *singuláris megoldás (integrál)* a független változók oly véges egyenlete, mely a differentiálegyenletnek megfelel, de integrátió-állandókat nem tartalmaz.

E három megoldás-faj egymással összszefügg ugyan [v. ö. a köv. §-ot], de egymástól természetüknél fogva teljesen különbözik.

2. A mechanika több nevezetes tétele és összszefüggése partiális differentiálegyenletek alakjában jelentkezik; így pl. a mozgás Hamilton-féle egyenleteinek kánon-alakja [101. §. (7)], a Hamilton-féle charakteristikus egyenlet [104. §. (6); 103. §. (9) és (11)]; a szabad mozgás egyenletei erőfüggvény esetében [42. §. (5) egyesítve a 34. §. (0)-al] s í. t.

Ezek közül az elsők elsőrendűek és elsőfokúak, a characteristikus egyenlet elsőrendű, de másodfokú, az utóbbiak másodrendűek és elsőfokúak.

3. A 108. §-ban részletezett módon mind a magasabbrendű totális differentiálegyenlet alkalmas változók bevezetésével elsőrendűvé változtatható.

A következőkben pedig kimutatjuk, hogy Lagrange* eljárása értelmében [120. §.] minden *magasabbfokú*, de *elsőrendű* partiális differentiálegyenlet, mely csak egy függő változót tartalmaz, viszszavezethető *lineáris* és *elsőrendű* ily egyenletre.

Lagrange eljárása továbbá bebizonyítja, hogy minden ilyen, csak egy függő változót tartalmazó lineáris, elsőrendű *partiális* differentiálegyenlet a *totális* differentiálegyenletek egy rendszerére vezethető viszsza, mely az utolsó multiplicátor módszeréhez hasonlóan [119. §.] integrálható.

117. §. *Partiális differentiálegyenlet teljes integráljából (megoldásából) az általános és a singuláris megoldás képzése.*

I. Kiindulunk az adott, véges n számú tetszőleges (független) a állandót tartalmazó véges egyenletből és partiális differentiálquotienseiből:

$$z=\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2, \ldots a_n); \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2}=\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}=\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Az (1) és a (2) összszesen $n+1$ számú egyenletet képviselnek; ha belőlük az n számú a állandót eliminájuk, nyerjük a

---

* Nouveaux Mémoires de l'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin, année 1772; vagy: Oeuvres de Lagrange. Tome III, Paris 1869, 549—575. ll.

$$\psi\left(x_1, x_2, \ldots x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

alakú partiális differentiális egyenletet.

E gondolatmenetből kitetszik, hogy egy (3) alakú partiális differentiálegyenletnek egy (1) alakú *teljes integrál* felel meg.

II. Az a állandókat az (1)-ben az $x_1, x_2, \ldots x_n$ változók *állandó értékű* függvényeinek is tekinthetjük; ekkor a (2) jobb oldalai képzésénél e körülmény tekintetbe veendő és általánosan:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_i} \quad \ldots \quad (4)$$

Az (1)- és (2)-ből az a-k eliminálásával a (3) differentiálegyenlet állott elő; ha ugyanezt a (3)-at az a_i-knak az (1)- és a (4)-ből való kiküszöbölésével akarjuk előállítani: akkor ez általában véve csak úgy lehetséges, ha a (2) és a (4) jobb oldalai egymással rendre egyenlők, azaz, ha

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_1} = 0;\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_2} = 0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_n} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

Az (5) jobb oldalai zérusok lévén, ha egy pillanatra a $\frac{\partial \varphi}{\partial a_i}$-ket tekintjük ismeretleneknek, és rövidség kedveért irunk:

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_n}{\partial x_1}\\
\frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial a_n}{\partial x_2}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{\partial a_1}{\partial x_n} & \frac{\partial a_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial a_n}{\partial x_n}
\end{vmatrix} = \Delta, \quad \ldots \quad (6)$$

akkor az (5)-ből közvetetlenül [v. ö. pl. Math. Rep. 25. §. 9. pontját]:

$$\Delta\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = 0, \quad \Delta\frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = 0, \ldots, \Delta\frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = 0. \quad \ldots \quad (7)$$

E feltételek kétféleképen elégíthetők ki:

IIα. Ha (7)-ben a

$$\Delta = 0, \quad \ldots \quad (8)$$

akkor a (7) ki van elégítve, de ekkor a $\Delta=0$ egyenlet a (6) értelmében az a_i állandók között fennálló egy összefüggést jelent, melyet pl.

$$a_n = \chi_1(a_1, a_2, \ldots a_{n-1}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

alakban írhatni; ez által az (5) utolsó tagjai második szorzóinak typusa

$$\frac{\partial a_n}{\partial x_i} = \frac{\partial a_n}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \frac{\partial a_n}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial a_{n-1}}\frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_i}, \quad \ldots \quad (10)$$

és így az (5) egyenletek rendezett typusa

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_n}\dfrac{\partial a_n}{\partial a_1}\right)\dfrac{\partial a_1}{\partial x_i} + \cdots + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial a_{n-1}} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_n}\dfrac{\partial a_n}{\partial a_{n-1}}\right)\dfrac{\partial a_{n-1}}{\partial x_i} = 0, \\ i = 1, 2, \ldots n. \end{array}\right\} \ldots (11)$$

A (11)-ben n számú egyenlet és benne a zárójeleken kívül az $n-1$ számú a-knak $n.(n-1)$ számú quotiensei lépnek fel; ha az $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ között összefüggések nincsenek: a (11) egyenletek csak úgy állhatnak fenn, ha ezen egymástól független quotiensek együtthatói különkülön zérussal egyenlők, azaz, ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots n-1. \quad \ldots \quad (12)$$

Ezen (12) alatti $n-1$ számú egyenlet az (1) és a (9) segélyével közvetetlenül képezhető; bennük a φ-nek differentiálquotiensei az (1) értelmében az $x_1, x_2, \ldots x_n$ és az $a_1, a_2, \ldots a_n$ függvényei, míg az a_n-nek a_k szerint képezett quotiensei a (9) értelmében az $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$-től függenek.

Ezek szerint a (12) egyenletek az n számú x_i-k és az n számú a_i-k között fennálló, könnyen kiszámítható, $(n-1)$ számú összefüggést képviselnek; ezekhez járul még a (9) és így ezen összesen n számú összefüggésből az a_i-k mint az $x_1, x_2, \ldots x_n$ változók állandó értékű függvényei határozódnak meg, de bennük a még egészen tetszőleges χ_1 függvény is fordul elő. Behelyettezve az így nyert a-kat (1)-be: ezen (1) teljes megoldásból ezen az úton nyertük a (3) egyenlet *általános* integrálját, melynek e szerint a typusa:

$$z = \varphi[x_1, x_2, \ldots x_n, g_1\{h_1(x_1, x_2, \ldots x_n)\}]. \quad \ldots \quad (13)$$

hol φ és h meghatározott, g tetszőleges függvényalakok,*

1. *Jegyzet.* Ha az a_i-k között a (9)-en kívül még egy másik összefüggés, pl.

$$\omega(a_1, a_2 \ldots a_{n-1}, a_n) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14a)$$

alakban áll fenn, akkor (9)-ből a_n-et (14a)-ba helyettesítve, a (14a) csak az $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ közötti összefüggést tartalmazza, mely írható

$$a_{n-1} = \chi_2(a_1, a_2, \ldots a_{n-2}); \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

---

* A $g_1\{h_1(\ldots)\}$ függvényeket *egy* tetszőleges függvénynyel lehetne jelelni, de az előbbi jelölés az alábbi kifejtésekre alkalmasabb.

és belőle

$$\frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_i} = \frac{\partial a_{n-1}}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{n-1}}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial a_{n-1}}{\partial a_{n-2}}\frac{\partial a_{n-2}}{\partial x_i} \quad . \quad (15)$$

A (15) jobb oldalát a (11) utolsó tagjába helyettesítve, e tagból:

$$\left.\begin{aligned} \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_1} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a_{n-1}} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_{n-1}}\right)\frac{\partial a_{n-1}}{\partial a_1}\right\}\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \\ + \cdots + \left\{\cdots\right\}\frac{\partial a_{n-2}}{\partial x_i} = 0; \qquad i = 1, 2, \ldots n. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (16)$$

A (11)-re tett megjegyzés értelmében a (16) rendszer csak úgy állhat meg, ha a $\frac{\partial a_l}{\partial x_k}$, $l = 1, 2, \ldots n-2$; $k = 1, 2, \ldots n$, összesen $n.(n-2)$ egymástól független quotiensek együtthatói eltünnek, azaz, ha:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_k} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a_{n-1}} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\cdot\frac{\partial a_n}{\partial a_{n-1}}\right)\frac{\partial a_{n-1}}{\partial a_k} = 0; \; k = 1, 2, \ldots n-2. \quad (17)$$

Alkalmazva most ezen $(n-2)$ számú (17) egyenletre és a (9) és (14) egyenletre a fent a (12)-re és (9)-re részletezett gondolatmenetet és megjegyezve, hogy itt *két* tetszőleges χ_1 és χ_2 függvény merül fel: az (1)-ből végre az általános integrál:

$$z = \varphi\,[x_1, x_2 \ldots x_n, g_1\{h_1(x_1, \ldots x_n)\}, g_2\{h_2(x_1, \ldots x_n)\}]. \quad (18)$$

2. *Jegyzet.* Ha a (9) és (14)-en kívül még egy harmadik, negyedik s í. t. összszefüggés áll fenn az a_i-k között, ezek tekintetbe vétele a II_a pont és 1. *Jegyzete* értelmében történik, miáltal az általános integrál (13) illetve (18) kifejezéseiben mindig egygyel több $g\{h(\cdot\,\cdot)\}$ tetszőleges függvény merül fel, úgy, hogy végre, ha $n-1$ számú összszefüggés van adva az a_i-k között [és több nem lehet, mert különben az n számú a_i-k mind már *előre* meg vannak határozva, és független állandó nem lévén, a singuláris megoldást nyernők, l. alább a II_b-t], az általános integrál

$$z = \varphi\,[x_1, x_2, \ldots x_n, g_1\{h_1(x_1, x_2, \ldots x_n)\}, \ldots g_{n-1}\{h_{n-1}(x_1, x_2, \ldots x_n)\}], \quad (19)$$

melyben φ és a h-k az *adott*, a g-k a tetszőleges függvény-alakok.

3. *Jegyzet.* Könnyű megfordítva az általános megoldásból az eredeti differentiálegyenletet megszerkeszteni.

Ugyanis (19)-ből:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial \varphi}{\partial g_k}\frac{\partial g_k}{\partial h_k}\cdot\frac{\partial h_k}{\partial x_i}; \quad i = 1, 2, \ldots n. \quad . \quad . \quad (20)$$

Az n számú (20) egyenletekből az $n-1$ számú $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial g_k}\cdot\frac{\partial g_k}{\partial h_k}\right)$ szorozmányok kiküszöbölhetők, miáltal a (20) egyetlen egy egyenletre redukálódott, melyben már csak a $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, $\frac{\partial h_k}{\partial x_i}$ és a $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ quotiensek fordulnak elő; ezekre nézve áll, hogy a $\frac{\partial h_k}{\partial x_i}$ quotiensek közvetetlenül kiszá-

míthatók és az $x_1, x_2, \ldots x_n$ függvényei; a $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$-k az $x_1, x_2, \ldots x_n$-en kivül még a $g_1, \ldots g_{n-1}$ függvények függvényei; de ezen utóbbiakban a g_i függvények a φ-nek az explicit x_i szerinti partiális differentiálása által nem lévén érintve, ugyanoly módon fordulnak elő e quotiensek argumentumában, mint a (19) φ-jében és így ezen függvények (19) segélyével a $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ quotiensekből kiküszöbölhetők, úgy, hogy e quotiensek szintén csak az $x_1, x_2, \ldots x_n$ explicit függvényei és így végre a (20) eredő egyenlete oly összefüggés, mely az $x_1, x_2, \ldots x_n$, a z és a $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial z}{\partial x_n}$ között fennáll; ez pedig a (3) differentiálegyenlet.

II$_b$. A (7) rendszer még a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} = 0, \quad \cdots \frac{\partial\varphi}{\partial a_n} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

feltételekkel elégíthető ki; ekkor az n számú (21) egyenletek az (1)-ből közvetetlenül képezhetők, belőlük az $a_1, a_2, \ldots a_n$ állandók kiszámíthatók és (1)-be behelyettesíthetők; így nyerjük ezen az úton az (1) teljes megoldásból a *singuláris megoldást*, mely az $x_1, x_2, \ldots x_n$ változók meghatározott függvénye de integrátió-állandókat nem tartalmaz.

118. §. *Az elsőrendű partiális differentiálegyenlet bármily megoldása a teljes, az általános vagy a singuláris megoldások csoportjába tartozik. Bármely teljes integrál az összes integrálfajt szolgáltatja*

Adott differentiálegyenletünk [megelőző §. (3)]

$$\psi\left(x_1, x_2, \ldots x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

egy teljes megoldása [i. h. (1)]:

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n; a_1, a_2, \ldots a_n), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

melyben az $a_1, a_2, \ldots a_n$ egészen tetszőleges integrál-állandók.

Legyen most

$$z = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

szintén az (1) megoldása; róla nem tudunk és nem tételezünk fel mást, mint azt, hogy az (1)-et kielégíti, azaz hogy (3) az (1)-nek egy teljes, vagy általános vagy singuláris megoldása.

Be akarjuk most bizonyítani, hogy a (2)-ben a tetszőleges a_i állandók mindig úgy választhatók, hogy a φ függvény átmegyen a φ_1 függvénybe, szóval, hogy a (3) megoldás mint a (2) megoldásnak egy speciális esete, a (2)-ben tartalmaztatik.

Ugyanis a (2)-vel illetve a (3)-mal helyettezve z-t (1)-ben:

$$\psi\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\psi\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \varphi_1, \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

1. Először is kimutatjuk, hogy ha az n számú a_i-k úgy vannak választva, hogy az $n+1$ számú

$$\varphi=\varphi_1, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

egyenletek közül n számút kielégítenek, hogy akkor az $n+1$-iket is kielégítik.

Igy, ha pl. az első k és az utolsó $n-k$ számúakat kielégítenék: a (4) és (5)-ből

$$\left.\begin{aligned}\psi\left(x_1, \ldots x_n, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \cdots \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)=0;\\ \psi\left(x_1, \ldots x_n, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k} \cdots \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)=0,\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

melyek megtekintéséből

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k}, \quad k=k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

azaz a (6) rendszer $k+1$-ik egyenlete is kell, hogy álljon.

2. A (2)-ben írt φ alak az (1)-nek megoldása marad, bármily állandó értékekkel is bírjanak az a_i integrál-állandók a (2)-ben; a (4) egyenlet e szerint ki lesz elégítve, akármilyen ezen a_i-knek számértéke e (4)-nek $\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$ argumentumaiban.

Ennek értelmében a φ még akkor is fogja kielégíteni a (4)-et, ha ezen utóbbinak említett, a (2)-ből képezett, n számú

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\{\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2, \ldots a_n)\}, \quad i=1, 2, \ldots n \quad (9)$$

argumentumaiban az *explicit* x_i *szerint végzett partiális differentiálás után*, az $a_1, \ldots a_n$ tetszőleges számértékek helyébe az $x_1, x_2, \ldots x_n$ változóknak egyelőre tetszőleges, de állandó értékű függvényeit helyettesítjük [hiszen a «függvény» nem jelent mást, mint a számértékek folytonos, végtelen sokaságát], és ugyanazt a helyettesítést teszszük a (4)-nek φ argumentumában, mely evvel kizárólagosan az $x_1, x_2, \ldots x_n$ függvényévé vált, és melyet írhatni:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n, a_1[x_1, x_2, \ldots x_n], \ldots a_n[x_1, x_2, \ldots x_n])=\\ =[\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)],\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

hol az $x_1, x_2, \ldots x_n$ a φ-ben explicite és az a_i argumentumoknál fogva implicite is fordul elő, ellenben a belőle a jelzett rendezés után keletkezett $[\varphi]$-ben csak explicite.

A (10)-nek az x_i szerint képezett partiális quotienseinek teljes kifejezései:

$$\frac{\partial[\varphi]}{\partial x_i}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_i}; \quad i=1, 2, \ldots n; \quad (11)$$

ennek jobboldali *első*, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ tagjai a (10)-ből úgy képződtek, mintha benne az a_i-k állandók (nem pedig az $x_1, x_2, \ldots x_n$ állandó értékű függvényei) volnának, azaz teljesen a (9) után említett módon; e szerint a (4) mindig kielégíthető ha benne a φ helyébe $[\varphi]$-t, de az ottani $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ helyébe a (11)-ben írt $\frac{\partial [\varphi]}{\partial x_i}$-nek első tagjait, a (10)-ből képződött $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$-ket írjuk.

3. A (10)-ben az eddig még tetszőlegesen hagyott n számú a_i állandó értékű függvényeket most a következő n számú feltétellel akarjuk meghatározni: a (10)-nek az x_i szerinti partiális quotienseinek (11) alatti teljes kifejezései egyenlők legyenek a (3) alatti φ, megoldásnak x_i szerinti quotienseivel

$$\frac{\partial [\varphi]}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}; \quad i=1, 2, \ldots n. \quad (12)$$

Miután pedig a (3) alatti φ, az (1) megoldása: a (12) egyenletek és az 1. pont tétele értelmében a (10) alatti $[\varphi]$-nek is, és pedig a φ_i-el egyenlő megoldásnak kell lennie; de ez a $[\varphi]$ a 2. pont utolsó mondata értelmében csak akkor elégítheti ki az (1)-et, ha (10)-nek x_i szerinti partiális quotiensei a (11) első, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ tagjára redukálódnak, azaz, ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_i} = 0, \quad i=1, 2, \ldots n. \quad (13)$$

De ez az egyenletrendszer azonos a megelőző §. (5) rendszerével, melynek segélyével a jelen §. (2) vagy a megelőző §. (1) alatt adott teljes integrálból a megelőző §. II, II*a*, II*b*, eljárásai alapján az általános és a singuláris megoldást nyertük s melynek jelenleg is a (2)-be helyettezendő a_i-knek meg kell felelniök, hogy a (2) a (3)-ba menjen át.

Evvel be van bizonyítva, hogy a (2) teljes megoldás a_i argumentumait a (13)-ból meghatározva: a (2) a (3)-mal megegyezik; de ekkor a megelőző §. értelmében a (3) a teljes, az általános vagy a singuláris megoldások egyike.

119. §. *Lineáris, elsőrendü partiális differentiálegyenlet általános integrálja, származtatva a segéd-differentiálegyenletrendszer integráljaiból.*

A következő vizsgálat jelölését a 109—114. §. totális egyenletei tárgyalásaihoz analog módon választjuk; legyenek itt $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ az $n+1$ számú független változók és az adott differentiálegyenlet:

$$X\frac{\partial z}{\partial x} + X_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial z}{\partial x} + \cdots + X_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \quad \ldots \quad (1)$$

hol az X, $X_1 \ldots X_n$ az x, x_1, x_2, $\ldots x_n$ változók tetszőleges függvényei lehetnek, melyekben azonban a z elő nem fordul.

Be akarjuk bizonyítani, hogy az (1) általános integrálja viszszavezethető az (1) alkatrészeiből képezhető totális differentiálegyenlet rendszer teljes integráljaira.

1. Vegyük ideiglenesen fel, hogy az X-ek és az x-ek között a következő simultán egyenletrendszer áll fenn [v. ö. a 109. §. (1) rendszerét], azaz, vezessük be a következő segédegyenleteket:

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

mely n számú első fokú és elsőrendű totális differentiálegyenletet képvisel s melynek n számú,

$$z_i = \varphi_i(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = \gamma_i, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots n \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

alakú integrálegyenlet felel meg [109. §. (2)]; ebből:

$$d\varphi_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} dx_n = 0 \ , \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

avagy miután (2) szerint

$$dx_1 = \frac{X_1}{X} dx, \quad \ldots \quad dx_n = \frac{X_n}{X} dx,$$

a (4)-ből, $X : dx$-el való szorzás után:

$$X \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} = 0; \qquad i = 1, 2, \ldots n, \quad . \quad (5)$$

mely az (1)-el egyező, mihelyt a z egyenlő a $z_i = \varphi_i$-k valamelyikével.

E szerint: a (2) rendszernek minden (3) alakú integrálja kielégíti az (1) egyenletet.

2. De kimutatjuk még, hogy a (3) alatti φ_1, φ_2, $\ldots \varphi_n$ integrálok tetszőleges, pl. Φ nevezetű függvénye is kielégíti az (1)-et; ugyanis, írva

$$z = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_k}, \quad x_k = x, x_1, \ldots x_n, \quad . \quad (7)$$

melyekkel az (1)-et képezve és rendezve, belőle:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(X \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

mely egyenlet, az (5) értelmében ki van elégítve.

3. Bebizonyítjuk, hogy a (6) alakja: $z = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$ akkor képviseli az (1) legáltalánosabb integrálját, ha a φ_1, φ_2, $\ldots \varphi_n$ egymás-

tól függetlenek, azaz, ha egy φ_i sem állítható elő mint a többiek függvénye.

Legyen ugyanis a (3) typusa szerint

$$z=\varphi(x, x_1, x_2, \ldots x_n)=\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

az (1)-nek egy megoldása; akkor ez az (1)-et kielégíti és áll

$$X\frac{\partial\varphi}{\partial x}+X_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\cdots+X_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=0, \quad \ldots \quad (10)$$

mely egyenlet az (5)-nek n számú egyenletéhez hozzájárul.

Evvel az $X, X_1, \ldots X_n$ menynyiségek között $(n+1)$ számú egyenlet van előállítva, melyek jobb oldalai mind zérussal egyenlők lévén: az egyenletek egyszerre csak úgy állhatnak fenn, ha az X-ek együtthatóiból képezett R functionális determináns [110. §. (4)] szorozmányai az X-, $X_1, \ldots X_n$-nel külön-külön zérusok [v. ö. a 117. §. (5), (6), (7) egyenleteit], avagy, miután az X-ek általában véve nem zérusok, az R-nek kell zérusnak lennie:

$$R=\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}=0 \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Ezen egyenlet a $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ partiális differentiálquotientsei között fennálló egy összefüggés; ennek alapján, miként azonnal kimutatjuk, kifejezhetjük a φ-t mint a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ függvényét.

Ugyanis, a (3) értelmében az (1)-et kielégítő integrálok alakja

$$z_i=\varphi_i(x, x_1, x_2, \ldots x_n)=\gamma_i; \quad i=1, 2, \ldots n; \quad \ldots \quad (3)$$

mely n számú egyenletből az $x_1, x_2, \ldots x_n$ kifejezhető az x és a $z_1, z_2, \ldots z_n$ segélyével; helyettezve az így előállított $x_1, x_2, \ldots x_n$-et a (9) jobb oldalába és $z=[\varphi(x, z_1, z_2, \ldots z_n)]$-nel jelelve e transformálás eredményét, benne a $z, z_1, z_2, \ldots z_n$ helyébe a (3) és (9) szerint írunk ismét $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$-et, úgy, hogy:

$$\varphi=[\varphi(x, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n)]=\gamma, \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

és belőle, ha $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]$, $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_1}\right]$, s í. t. jelelik a (12)-nek a benne *explicite* előforduló $x, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ szerint képezett partiális differentiálquotienseit:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_1}\right]\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_2}\right]\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\cdots+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_n}\right]\frac{\partial\varphi_n}{\partial x};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_1}\right]\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_2}\right]\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}+\cdots+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_n}\right]\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1};$$

$$\cdots\cdots\cdots

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right] + \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_2}\right]\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \cdots + \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_n}\right]\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1};$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_2}\right]\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \cdots + \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_n}\right]\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} = \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_2}\right]\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \cdots + \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_n}\right]\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n};$$

ezekkel képezve a (13) D-jét, mely itt zérus: ez a (11)-nek R módjára transformálható és belőle a (13) séma értelmében

$$0 = D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right] \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right] . D_{(1)} = 0. \quad (15)$$

E feltételből ismét következik, hogy (15)-ben vagy az első tényező: $\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right] = 0$, a mi azt mondja, hogy a (14) alakban φ_1 az explicit x_1-től független és csak x, φ_2, φ_3, ... φ_n-től függ, azaz, a φ_1 nem tetszőleges, hanem az x függő változónak és a φ_2, φ_3, ... φ_n integráloknak függvénye:

$$\varphi_1 = \varphi_1 [(x, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n] = \gamma_1; \quad \ldots\ldots (15a)$$

vagy, hogy a (15) második tényezője zérus:

$$D_{(1)} = \frac{\partial D}{\partial \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}} = 0.$$

4. Ezen utóbbi esetet folytatólagosan az előbbi 3. pont eljárása szerint tárgyalva: az következik, hogy vagy a (12) és a (14) alakjai folytatásaképen szerkesztett $\varphi_2 = [\varphi_2 (x, x_1, x_2, \varphi_3, \varphi_4, \ldots \varphi_n)] = \gamma_2$ függvény az explicit x_2-től nem függ és így a φ_2 nem független, hanem az x, x_1, φ_3, φ_4, ... φ_n-nek függvénye és pedig megfelelőleg a (13a) és a (15a) függvényalakok folytatásának:

$$\varphi_2 = [\varphi_2 (x, x_1, \varphi_3, \varphi_4, \ldots \varphi_n)] = \gamma_2; \quad \ldots\ldots (15aa)$$

vagy pedig, hogy $D_{(2)} = \frac{\partial D_{(1)}}{\partial \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}} = 0$ s í. t.

5. Az utolsó ilyen determináns $D_{(n-1)} = \frac{\partial D_{(n-2)}}{\partial \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}$; s ha a megelőzőkben említett $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right]$, $\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right]$, ... $\left[\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right]$ quotiensek nem zérusok,

akkor kell hogy álljon $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} = 0$ azaz, φ_n az x_n-től független és csak az $x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ változóknak a függvénye:

$$\varphi_n = [\varphi_n(x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1})] = \gamma_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15aaa)$$

Ha ebbe e változóknak a (9) és a (3) alatti $\varphi = \gamma$, $\varphi_1 = \gamma_1, \ldots \varphi_{n-1} = \gamma_{n-1}$ egyenletekből az x_n és a $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}$ segélyével kifejezett értékeit helyettezzük, akkor belőle

$$\varphi_n = [\varphi_n(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}, x_n] = \gamma_n ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

és a feltétel, hogy φ_n az x_n-től független:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} = \left[\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varphi}\right] \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + \left[\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varphi_1}\right] \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \cdots + \\ + \left[\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varphi_{n-1}}\right] \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} + \left[\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}\right] = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (17)$$

6. Összefoglalva a megfontolások eredményeit: az (5) és a (10) [avagy a (3) és a (9)] egyenletek egyszerre csak úgy állhatnak fenn, ha vagy (13a), vagy(15a) vagy (15aa) s í. t. vagy végre a (17) fennáll, azaz ha:

$$\varphi = [\varphi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n)] = \gamma ;$$

vagy általában

$$\varphi_i = [\varphi_i(x, x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, \varphi_{i+1}, \varphi_{i+2}, \ldots \varphi_n)] = \gamma_i ; \; i = 1, 2, \ldots n-1 ;$$

vagy végre

$$0 = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varphi_i}\right] \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} + \left[\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}\right] = 0.$$

Bármely eset is legyen érvényes: a $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ menynyiségek valamenynyien egymástól nem lehetnek függetlenek, hanem közöttük mindig legalább *egy* functionális összefüggés áll fenn.

Ebből következik, hogy a (6)-ban írt Φ *alak az (1) egyenlet legáltalánosabb integrálja,* melyet a (2) segédegyenleteknek (3) alatti teljes integráljaiból tetszőleges módon állíthatunk összse.

Az (1)-nek teljes integráljait a (6)-ból nyerjük, ha a φ_i-ket a (3) alapján az $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ változók és a $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ állandók segélyével kifejezzük és az így képezett φ_i-ket a (6)-ba helyettezzük, mi által a Φ a teljes integrál jellegét veszi fel [116. §. 1. pontja]; de miután a Φ függvény-alak tetszőleges: ez egyszersmind az általános integrál [i. h.]

120. §. Lagrange *integráló módszere két független változóval bíró tetszőleges fokú elsőrendű partiális differentiálegyenlet esetében. Viszszavezetés egy elsőfokú, elsőrendű partiális és egy elsőfokú totális differentiálegyenlet integrátiójára.*

E helyen a tetszőleges fokú, elsőrendű partiális differentiálegyenleteknek első fokúakra való redukálását a dynamikában gyakran felmerülő két független változójú ily egyenleten mutatjuk meg; általánosítása tetszőleges változójú egyenletre önként világos.

Legyen, a szokásos jelöléssel, x_1, x_2 a független, x a függő változó és az adott differentiálegyenlet:

$$\psi(x, x_1, x_2, p_1, p_2)=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

melyben a

$$p_1=\frac{\partial x}{\partial x_1}, \qquad p_2=\frac{\partial x}{\partial x_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

quotiensek tetszőleges hatványon fordulnak elő s hol

$$dx=\frac{\partial x}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial x}{\partial x_2}dx_2=p_1dx_1+p_2dx_2. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

1. Hogy (1)-nek egy teljes megoldása felkeresésére módot nyújtsunk: fejtsük meg az (1)-et p_2-re nézve és írjunk:

$$p_2=\psi_2(x, x_1, x_2, p_1); \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1a)$$

és most még csak azt kell végeznünk, hogy a p_1 quotiens számára oly

$$p_1=\varphi_1(x, x_1, x_2, a) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

függvényt találjunk, mely az (1*a*)-val együtt a (3) jobb oldalát teljes differentiállá teszi.

E φ_1 függvényben az a tetszőleges integrálállandónak elő kell fordulnia, mert a φ_1-nek (3)-ba helyettezése és integrálása után még egy másik pl. b integrálállandó járul hozzá, úgy hogy az így nyert x csakugyan a teljes megoldásnak megfelelő két független, új állandóval bír.

2. Ámde a (2) értelmében, ha a (3) baloldala teljes differentiál, kell, hogy álljon:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_2}=\frac{\partial^2 x}{\partial x_2 \partial x_1}=\frac{\partial p_2}{\partial x_1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

de a (4) és (1*a*) felhasználásával:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_2}=\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x_2}; \qquad \frac{\partial p_2}{\partial x_1}=\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}+\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1}+\frac{\partial \psi_2}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1};$$

és a (2) jelöléssel az (5):

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}+p_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}=\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial \psi_2}{\partial x}+\frac{\partial \psi_2}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}; \quad \ldots \quad (5a)$$

vagy, írva a p_1 és p_2 szorzók helyébe (4) és (1*a*) szerint φ_1-t és ψ_2-t és megjegyezve, hogy (4)-ből

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} p_1,$$

melynek az (5a) utolsó tagjába helyettezésével ez írható

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \psi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \varphi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial p_1}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\varphi_1\right),$$

$$\varphi_1\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right) - \psi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_2}{\partial p_1}. \quad (6)$$

Itt az utolsó, $\frac{\partial \psi_2}{\partial p_1}$ quotienset ily alakban meg kell hagyni, mert (1a) alapján képezendő.

A (6)-ban a ψ_2 és ennek x, x_1, p_1 szerinti quotiensei az (1a)-ból, mint az adott (1) differentiálegyenlet egy transformált és ismert alakjából közvetetlenül képezhetők és ismert függvények; e szerint ez a nyert (6) összefüggés nem más, mint a (4) alatti φ_1-, azaz a p_1 ismeretlen-, még keresendő függvény számára fennálló *elsőrendű, lineáris partiális* differentiálegyenlet, melyben x, x_1, x_2 tekintendők független változóknak.

3. Ha (6)-nak valamely $\varphi_1(x, x_1, x_2, a) = p_1$ alakú megoldását [v. ö. a (4)-et] megtaláltuk: akkor evvel és az ismert (1a)-val képezhetjük a (3)-ban írt

$$dx = \varphi_1(x, x_1, x_2, a)\,dx_1 + \psi_2(x, x_1, x_2, \varphi_1)\,dx_2 \quad . \quad . \quad (3a)$$

elsőrendű totális differentiálegyenletet, melybe a ψ_2-ben p_1 helyébe φ_1-et írtunk.

Evvel be van bizonyítva, hogy az adott (1) differentiálegyenlet integrátiója viszsza van vezetve a (6) lineáris, elsőrendű partiális differentiálegyenletnek *egyetlen* egy megoldásának * felkeresésére és ezután a (3a) közönséges elsőrendű, totális differentiálegyenlet integrátiójára.

A (6) integrátiója a megelőző §-ban részletezett, a segéd-differentiálegyenletek rendszerén alapuló eljárás szerint történhetik.

121. §. Lagrange *integráló módszere. Folytatás: az adott differentiálegyenlet a függő változót nem tartalmazza explicite.*

1. A legtöbb esetben (mechanikai problémában) az x függő változó explicite ki van fejezve az x_1 és x_2 függetlenek által [pl. ha a pont előírt felületen tartozik maradni, x_1, x_2 a független coordináták, x a függő-coordináta **]; ezt így helyettezve a megelőző §. (1) egyenletébe, ez

$$\psi(x_1, x_2, p_1, p_2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

és belőle:

$$p_2 = \psi_2(x_1, x_2, p_1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

---

* Több megoldás is létezhetik.

** A felület egyenlete az egyik, az (1) a másik összefüggés az x, x_1, x_2 között, mely két kapcsolat a pályát szolgáltatja.

Épen így a keresendő φ_1-ről felveszszük, hogy az x-et explicite nem tartalmazza:

$$p_1 = \varphi_1(x_1, x_2, a). \quad \ldots \quad (2)$$

Ezekkel a megelőző §. (6) egyenletének baloldala elesik és marad:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_2}{\partial p_1} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} = 0. \quad \ldots \quad (3)$$

Most még (2)-őt a-ra megfejtve és írva

$$a = \psi_1(x_1, x_2, p_1), \quad \ldots \quad (2a)$$

a (3) egyenletet a ψ és a ψ_1 differentiálquotiensei segélyével fogjuk kifejezni.

2. Ugyanis, a (2)-ből és az (1a)-ból közvetetlenül:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}, \quad (4)$$

miből rögtön kitetszik, hogy a (3) tényleg az eredeti [megelőző §. (5)]:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial p_2}{\partial x_1} \quad \ldots \quad (5)$$

feltételt fejezi ki.

Továbbá (2a)-t az x_1 és x_2 független szerint differentiálva

$$0 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}, \quad 0 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_2},$$

és ezekből, a (4) első két egyenlete felhasználásával:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} : \frac{\partial \psi_1}{\partial p_1}; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial p_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} : \frac{\partial \psi_1}{\partial p_1}. \quad (6)$$

Másrészt az (1)-nek az x_i független szerint képezett quotiense csak zérus lehet:

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_1};$$

ebből az utolsó quotienset kifejezve, az (5) feltétel:

$$\frac{\partial p_2}{\partial x_1} = -\left\{\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}\right\} : \frac{\partial \psi}{\partial p_2} = \frac{\partial p_1}{\partial x_2},$$

avagy a p_1 quotienseit (6)-ból helyettezve és az egyenletet $\frac{\partial \psi}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial p_1}$-el szorozva, végre

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial p_2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial p_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0, \quad \ldots \quad (7)$$

melyben a ψ quotiensei az adott (1) differentiálegyenletből képezhetők.

E szerint a (7) a ψ_1-re nézve egy lineáris, elsőrendű partiális differentiálegyenlet, melynek itt x_1, x_2, p_1 a változói, melynek (2*a*) alakú teljes integrálja a 119. §. sémája szerint képezett totális segéd-differentiálegyenletek typusa alapján történhetik.

3. A (7)-nek a most említett módon talált (2*a*) alakú $\psi_1 = a$ teljes integráljából és az adott (1) alatti $\psi = 0$ differentiálegyenletből meghatározzuk most a p_1 és p_2 quotienseket, melyek [megelőző §. (3)] a $p_1 dx_1 + p_2 dx_2$-et teljes differentiállá teszik és így a keresett függő változó:

$$x = \int dx = \int (p_1 dx_1 + p_2 dx_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

csak egy közönséges, elsőrendű totális differentiálegyenlet integratióját involválja.

122. §. Lagrange *módszerének alkalmazása* Hamilton *characteristikus függvényének meghatározására, mikor az energia elve áll.*

1. Alkalmazzuk a megelőző §§. eljárását a surlódás nélküli *egy* feltételnek alávetett anyagi pont mozgására, melynek Hamilton-féle kánon-egyenletei közvetetlenül felírhatók [101. §. (7)]; a független változók itt a független *két* általános coordináta, a függő változó ellenben a characteristikus függvény [itt a működés, 104. §. (2) és (5)]; a feltétel tekintetbe vételével [104. §. 2. szakaszának utolsó kikezdése] az idézett egyenletek itt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= +\frac{\partial H}{\partial p_1}, \qquad \frac{dq_2}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial p_2}; \\ \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \qquad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$p_1 = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial q_1}, \qquad p_2 = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial q_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

E szerint a megelőző két §. x, x_1, x_2, p_1, p_2 menynyiségeinek itt rendre **A**, q_1, q_2, p_1, p_2 felelnek meg; az ott [121. §. (1)] előforduló $\psi(x_1, x_2, p_1, p_2) = 0$ adott differentiálegyenletnek itt a *characteristikus egyenlet* felel meg, melynek a jelzett feltétel melletti alakjai [104. §. (6), 103. §. (6*a*)]:

$$\mathrm{T} - V = H = \text{constans}$$

vagy

$$\tfrac{1}{2}\left\{\mathfrak{p}_{11}\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial q_1}\right)^2 + 2\mathfrak{p}_{12}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial q_1}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial q_2} + \mathfrak{p}_{22}\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial q_2}\right)^2\right\} - V = H. \quad . \quad (3a)$$

$$H = \tfrac{1}{2}\left[\mathfrak{p}_{11}p_1^2 + 2\mathfrak{p}_{12}p_1p_2 + \mathfrak{p}_{22}p_2^2\right] - V(q_1, q_2) = H, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

hol a $\mathfrak{p}_{11}$, $\mathfrak{p}_{12}$, $\mathfrak{p}_{22}$ és a V is a q_1 és q_2 coordináták függvényei.

A (3) értelmében a H a q_1, q_2 és p_1, p_2 által van kifejezve és ily értelemben is veendő az adott differentiálegyenlet itt

$$\psi = \alpha + H(q_1, q_2, p_1, p_2) = 0, \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

hol $\alpha = -H =$ állandó és így a (4) a jellemző egyenlet egy alakja.

2. A 121. §. Lagrange-féle (7) differentiálegyenlete itt [a ψ quotiensei (4) értelmében a H-éivel egyenlők és (3)-ból képezendők]:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

A jelzett műveletek végrehajtásával az (5)-ből a (3) segélyével:

$$(\mathfrak{p}_{11}p_1 + \mathfrak{p}_{12}p_2)\frac{\partial \psi_1}{\partial q_1} + (\mathfrak{p}_{12}p_1 + \mathfrak{p}_{22}p_2)\frac{\partial \psi_1}{\partial q_2} +$$

$$+ \left\{\frac{\partial V}{\partial q_1} - \left[\tfrac{1}{2}p_1^2\frac{\partial \mathfrak{p}_{11}}{\partial q_1} + p_1p_2\frac{\partial \mathfrak{p}_{12}}{\partial q_1} + \tfrac{1}{2}p_2^2\frac{\partial \mathfrak{p}_{22}}{\partial q_1}\right]\right\}\frac{\partial \psi_1}{\partial p_1} = 0, \quad (5a)$$

mely egyenletben a p_2 a (3)-ból p_1, q_1, q_2 segélyével kifejezettnek tekintendő és így a ψ_1 is [azaz az (5)-nek vagy az (5a)-nak megoldása] e mennyiségek függvénye, mely írható [121. §. (2a)]

$$\psi_1(q_1, q_2, p_1) = a. \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

[Hogy egy ily ψ_1 függvény kielégíti az (5)-öt, ez azonnal világos, ha a H quotienseit (1)-ből (5)-be helyettezzük, mert így az (5)-ből:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \psi_1}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial \psi_1}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt} = 0; \quad \ldots \ldots \quad (5a)$$

és ez tényleg a (6) alatti $\psi_1 = a$ totális quotiense t szerint.]

3. Ha most [pl. a 119. §. eljárása alapján] az (5)-nek egy megoldását találtuk, akkor ez a (6) megoldás a (4) characteristikus egyenlettel úgy combinálandó, hogy (4)-ből és (6)-ból a p_1 és p_2 a q_1 és q_2 függvényeiképen s az a és H állandókkal meghatározandók; az így nyert p_1 és p_2 a (2) értelmében teljes differentiállá teszi a

$$p_1dq_1 + p_2dq_2 = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial q_2}dq_2 = d\mathfrak{A} \quad \ldots \ldots \quad (7a)$$

összeget, mely egy totális, elsőrendű, lineáris differentiálegyenlet.

A (3a) teljes integráljának typusa itt [104. §. (16)]:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}(q_1, q_2, a, H), \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

hol H a (3a)-ban előforduló állandó, a a (6)-ban felmerülő és $\mathfrak{A}_0$ az addendus állandója az integrátiónak [120. §. 1. pontjának második kikezdése].

E szerint a (7*a*)-ból az **A** és belőle (mivel e 3. pont első kikezdése értelmében az a és a H állandók csak p_1- és p_2-ben fordulnak elő)* az explicit, kész mozgásegyenletek [104. §. (17)]:

$$A = \int (p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2) + A_0; \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

$$\gamma = \frac{\partial A}{\partial a} = \int \left(\frac{\partial p_1}{\partial a}\, dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a}\, dq_2\right) = \text{constans}; \quad \ldots \quad (9)$$

$$\tau + t = \frac{\partial A}{\partial H} = \int \left(\frac{\partial p_1}{\partial H}\, dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial H}\, dq_2\right) = \text{idő} + \text{állandó}, \quad \ldots \quad (10)$$

miáltal a probléma az (5) integrátiójára és a (8) képzésére, illetve a (9) és (10) integrátiókra van viszszavezetve. [Példákat l. a 233. §-ban.]

6. Anyagi pont relativ mozgásának erői, dynamikai elvei és egyenletrendszerei.

123. §. *Anyagi pont relativ mozgásának erői és egyenletei.*

1. A relativ és az absolut gyorsulás összefüggéseinek kifejezései [Kinematika 336—339. §§.] a mozgó pont tömegével szorozhatók és így Coriolis (Clairaut) tétele írható [i. h. 336. §. (4)

$$\vec{m\varphi} = \vec{m\varphi}_r + \vec{m\varphi}_e + \overrightarrow{2mv_r\omega, \sin\eta} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Szóval: az absolut (a *tényleges* absolut) erő egyenlő a relativ coordináta-rendszerben tényleg gyorsító $\vec{m\varphi}_r$ erővel, meg az $\vec{m\varphi}_e$ elszállító erővel, meg a $\overrightarrow{2mv_r\omega, \sin\eta}$ összetett centripetális erővel. Az $\vec{m\varphi}_r$ erő az m-nek oly absolut mozgást tulajdonítana, a milyen az ő relativ mozgása a mozgó coordináta-rendszerben; a többi két erőt gyakran *látszólagos erők*nek nevezik és pedig a következő oknál fogva:

2. A tétel megfordítása, ugyanis a relativ erők kifejezése a többi három erő segélyével, önként következik; ezen czélból írjuk az absolut erőknek a relativ coordináták tengelyei menti componenseit (vetületeit) rendre $(X)_r$-, $(Y)_r$-, $(Z)_r$-el, miáltal a relativ gyorsító erőcomponensek keresett egyenletrendszere [i. h. 339. (6) és (5)]:

$$m\frac{d^2x_r}{dt^2} = (X)_r - m\varphi_{ex_r} - 2m\left(\omega_{y_r}\frac{dz_r}{dt} - \omega_{z_r}\frac{dy_r}{dt}\right), \text{ s i. t.}; \quad \ldots \quad (2)$$

hol ω_{x_r}, ω_{y_r}, ω_{z_r} a mozgó X, Y, Z, coordinátarendszer absolut [t. i. szilárd coordináta-tengelyekre vonatkoztatott] ω_r szögsebességének

* Itt a (6) szerint a p_1 a H-tól független ugyan, de a $\partial p_1 : \partial H$ quotienset a symmetria kedvéért hagytuk a (10)-ben.

vetületei a mozgó $X_,$, $Y_,$, $Z_,$ tengelyek mentén és $m\varphi_{ex_,}$ az elszállító erőnek $X_,$-menti componense, melynek gyorsulása [i. h. 339. §. (4)*]:

$$\varphi_{ex_,}=\varphi_{0,x_,}+\omega'_{y_,}z_,-\omega'_{z_,}y_,+(x_,\omega_{x_,}+y_,\omega_{y_,}+z_,\omega_{z_,})\omega_{x_,}-\omega_r^2 x_, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

A $-m\varphi_{ex_,}$ és a $-2m\,(\omega_{y_,}z'_,-\omega_{z_,}y'_,)$ s í. t. componensek, melyek a fentnevezett látszólagos erőknek *negativ* összszetevői, itt az *elszállítás tehetetlensége ereje*-,** illetve az *összetett centrifugális erő* componenseinek mondatnak.

A relativ mozgás gyorsító erőinek dynamikai kifejezéseit ugyanis $mx''_,$-et stb. a (2) értelmében nyerjük, ha a tényleg működő (X), absolut erőkhöz a most nevezett két látszólagos erőt kapcsoljuk.

124. §. *A dynamikai elvek relativ pontmozgás esetében.*

A statikának és a dynamikának valamenynyi tétele és elve alkalmazható a relativ mozgásokra; e czélra a tényleges absolut erőkhöz csak a megelőző §. 2. pontja végén említett két látszólagos erő kapcsolandó. Ezért a következőkben csak néhány megjegyzésre szorítkozunk.

1. *Az eleven erő tétele a relativ mozgásokra nézve* adódik, ha a 123. §. (2) egyenleteit rendre $dx_,$-, $dy_,$-, $dz_,$-el szorozzuk és összegezzük. Jelelve $v_r^2=x_,'^2+y_,'^2+z_,'^2$-el a relativ sebesség négyzetét, az idézett §. egyenleteiből a 39. §. mintájára könnyen nyerjük:

$$d\,(\tfrac{1}{2}mv_r^2)=[(X),dx_,+.+.]-m\,[\varphi_{ex_,}dx_,+.+.];$$

a jobboldali utolsó három tag összege zérussal lévén egyenlő.

Irva

$$ds_,^2=\overline{dx_,}^2+\overline{dy_,}^2+\overline{dz_,}^2 \quad \text{és} \quad P_e^2=m^2\,(\varphi_{ex_,}^2+\varphi_{ey_,}^2+\varphi_{ez_,}^2),$$

végre P-vel jelelve a tényleges absolut reális erőt, azonnal észreveszszük, hogy

$$d\,(\tfrac{1}{2}mv_r^2)=Pds_,\cos\,(P,\ ds_,)-P_e ds_,\cos\,(P_e,\ ds_,); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

---

* Félreértés kikerülése czéljából jelöljük (3)-ban, eltérőleg a szövegben idézett kifejezés [Kinematika 339. §. (4), 581. l.] egy tagjának jelölésétől, a mozgó X,Y,Z, coordinátarendszer O, kezdete absolut φ_0, gyorsulásának a mindenkori $X_,$, $Y_,$, $Z_,$ irányok menti componenseit rendre következőleg:

$$\varphi_{0,x_,},\quad \varphi_{0,y_,},\quad \varphi_{0,z_,},$$

melyek, az idézett hely 339. §. (3) és 336. §. (1) egyenletei értelmében:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{0,x_,}&=a''\alpha_1+b''\alpha_2+c''\alpha_3;\\ \varphi_{0,y_,}&=a''\beta_1+b''\beta_2+c''\beta_3;\\ \varphi_{0,z_,}&=a''\gamma_1+b''\gamma_2+c''\gamma_3.\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varepsilon)$$

** (force d'inertie d'entrainement).

azaz: a relativ eleven erő változása egyenlő az absolut P erő munkája kevesebb a P_e elszállító erő munkájával. Az összetett centripetális erő itt nem végezhet munkát, mert (a mint az az előbb említett összegezés eredményéből is következik), iránya mindig merőleges a relativ elmozdulásra.

2. *A feltételeknek alávetett relativ mozgások* egyenleteit akként nyerjük, hogy a relativ coordinátákban és esetleg még az időben is kifejezett feltételből vagy feltételekből az 57—59. §§. eljárásai szerint kényszererők formális értékei képeztetnek, melyek a megelőző §. (2) rendszere jobb oldalaihoz csatolandók. A kényszererők meghatározása, illetve kiküszöbölése ugyanezen idézett 57—59. §§. módszerei szerint történik.

3. A *relativ kényszermozgásoknak* a D'ALEMBERT-féle *elv segélyével való tárgyalása* teljesen a 66—69. §§. értelmében történik; de megjegyzendő, hogy ekkor az összetett centrifugális erő virtuális munkája általában véve nem zérus, mert a virtuális elmozdulás nem esik mindig a tényleges mozgás irányába, mely utóbbi ez erőre merőleges.

A virtuális munka itt [megelőző §. (2) és 68. §. (1)]:

$$\{(X),—m\varphi_{ex},—2m\,(\omega_y,z_r'—\omega_z,y_r')—mx_r''\}\,\delta x,+\{\ldots\}\,\delta y,+\{\ldots\}\,\delta z,=0.$$

Az $F_1\,(x,,\ y,,\ z,,\ t)=0$ és ha ilyen van, még az $F_2\,(x,,\ y,,\ z,,\ t)=0$ feltételekből a 68. §. (8) eljárásával:

$$mx_r''=(X),—m\varphi_{ex},—2m\,(\omega_y,z_r'—\omega_z,y_r')+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x,}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x,}=0\,;\quad .\quad (2)$$

v. ö. a 243. §. 97. és 98., továbbá a 248. §. 153. sz. feladata kidolgozását.

125. LAGRANGE *mozgásegyenletei második alakjának alkalmazása a relativ mozgásra, és* CORIOLIS *tételének származtatására.*

A jelen §-ban kimutatjuk, hogy LAGRANGE egyenleteit a relativ mozgásra alkalmazva, ezek közvetetlenül a 123. §. (2) rendszerét, azaz CORIOLIS tételét szolgáltatják.

A tárgyalás egyszersmind igen alkalmas példát nyújt a 92. §. általános coordinátáinak azon (3*aa*), (3*bb*); (4) eseteire, mikor ezek a coordináták az időtől is függenek.

1. Az m tömegű mozgó A pontra nézve legyenek [Kinematika, 335. §., 241. ábra, 574. l.] $x,\ y,\ z$ az absolut, $x,,\ y,,\ z,$ a relativ coordináták, úgy, hogy az idézett jelöléssel

$$\left.\begin{aligned} x&=a+x,\alpha_1+y,\beta_1+z,\gamma_1\,;\\ y&=b+x,\alpha_2+y,\beta_2+z,\gamma_2\,;\\ z&=c+x,\alpha_3+y,\beta_3+z,\gamma_3\,. \end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

melyekből az idézett hely (2) rendszerében kifejezett x', y', z' *absolut* sebességi componensek következnek:

$$v_x=x'=a'+x'_r\alpha_1+y'_r\beta_1+z'_r\gamma_1+x,\alpha'_1+y,\beta'_1+z,\gamma'_1,\ \text{s. i. t.},\quad .\quad (1a)$$

E sebességek eredője legyen v (vagy v_a); ezt most a mozgó X_r, Y_r, Z_r tengelyek irányaira vetítve, legyenek v_{x_r}, v_{y_r}, v_{z_r} componensei, melyek:

$$v_{x_r}=x'\alpha_1+y'\alpha_2+z'\alpha_3;\quad v_{y_r}=x'\beta_1+y'\beta_2+z'\beta_3;\quad v_{z_r}=x'\gamma_1+y'\gamma_2+z'\gamma_3; \quad (2)$$

avagy, az (1)-ből képezett x', y', z'-t az $(1a)$ rendszerből a (2)-be helyettetzve, a két coordinátarendszer orthogonalitását tekintetbe véve és a Kinematika 293. §. (2) és (3) továbbá 243. §. (2) rendszere jelöléseit használva, kis számítással:

$$v_{x_r}=u_{x_r}+\omega_{y_r}z_r-\omega_{z_r}y_r+x_r';\ \text{s í. t.};\quad .\ .\ .\ .\ .\quad (3)$$

hol e szerint v_{x_r}, v_{y_r}, v_{z_r} a tetszőleges A pont absolut sebességi componensei; u_{x_r}, u_{y_r}, u_{z_r} a mozgó X,Y,Z, coordináta-rendszer O, kezdetének absolut sebességi componensei, ω_{x_r}, ω_{y_r}, ω_{z_r} ugyanezen coordinátarendszer forgásának szögsebességi componensei az X_r, Y_r, Z_r irányokra vonatkozólag és végre x_r', y_r', z_r' az A-nak e mozgó rendszerhez viszonyított relativ sebességei.

Az m tömegű A pont absolut eleven ereje e szerint:

$$T=\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}m(v_{x_r}^2+v_{y_r}^2+v_{z_r}^2)=\tfrac{1}{2}m\left[(u_{x_r}+\omega_{y_r}z_r-\omega_{z_r}y_r+x_r')^2+(..)^2+(..)^2\right];\quad (4)$$

mely kifejezésben a T az x_r, y_r, z_r relativ coordináták, az x_r', y_r', z_r' relativ sebességek és végre az u_{x_r}, u_{y_r}, u_{z_r}; ω_{x_r}, ω_{y_r}, ω_{z_r} menynyiségek függvénye. Ez az utóbbi hat menynyiség, mint épen mondva volt, az X,Y,Z, elszállító coordinátarendszernek ismert s így adott, absolut translatórius és rotatórius sebességi componensei, melyek a t időnek explicit függvényei.

E szerint a (4)-ben a T az x_r, y_r, z_r, x_r', y_r', z_r' relativ coordináták és a t explicit függvénye és az előbbi hat relativ menynyiség lép a 95. §. T-jében és differentiálquotienseiben a q_1, q_2, q_3; q_1', q_2', q_3' általános coordináták és sebességek helyébe.

2. Lagrange egyenletei második alakjának typusa [95. §. (8)] itt:

$$(X)_r=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x_r'}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_r};\ \text{s í. t.};\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\quad (5)$$

az $(X)_r$, $(Y)_r$, $(Z)_r$ erőcomponensek értelmezésére alapul veendő, hogy a tényleg ható absolut P erő virtuális munkája ezen componensek virtuális munkájával egyenlő [94. §. (4) és (5)].

De a virtuális elmozdulásra nézve az idő állandó [61. §. 1. pontja] s ha δx_r, δy_r, δz_r a tetszőleges elmozdulási componensek az x_r, y_r, z_r coordináták irányai-, azaz az X_r, Y_r, Z_r irányok mentén, akkor e munka

$$(X)_r\delta x_r+(Y)_r\delta y_r+(Z)_r\delta z_r=P_{x_r}\delta x_r+P_{y_r}\delta y_r+P_{z_r}\delta z_r;\quad .\ .\ .\quad (6)$$

e szerint az $(X)_r=P_{x_r}$ s í. t., az *absolut erőnek componensei* az x_r, y_r, z_r *relativ coordináták irányai*, azaz az X_r, Y_r, Z_r irányok mentén.

[Ugyanily tulajdonságot mutatnak a 95. §. (8) és a 94. §. (4) és (5) egyenleteiben a Q_i componensek is, melyek az egészen általános,

tetszőleges, absolut vagy relativ q_i coordináta mindenkori *iránya* menti componensei az absolut mozgató (gyorsító) erőnek.

3. Könnyű kimutatni, hogy (5) a relativ mozgás differentiálegyenleteit, illetve Coriolis tételét tartalmazza [123. §. (2) és (3)]

Ugyanis (4) segélyével az (5)-ből

$$(X)_r = m\frac{d}{dt}(u_{x_r}+\omega_y z_r-\omega_z y_r+x_r')-m\omega_z(u_{y_r}+\omega_z x_r-\omega_x z_r+y_r')+ \\ +m\omega_y(u_{z_r}+\omega_x y_r-\omega_y x_r+z_r'). \quad . \quad (7)$$

Végezve a jelzett míveleteket és tekintetbe véve, hogy az eredő relativ szögsebesség négyzete $\omega_{x_r}^2+\omega_{y_r}^2+\omega_{z_r}^2=\omega_r^2$, némi összevonások után nyerjük:

$$(X)_r = m\frac{d^2x_r}{dt^2}+m\frac{du_{x_r}}{dt}+m[\omega_y' z_r-\omega_z' y_r+\omega_{x_r}(\omega_{x_r}x_r+\omega_{y_r}y_r+\omega_{z_r}z_r)-\omega_r^2 x_r]+ \\ +m(\omega_{y_r}u_{z_r}-\omega_{z_r}u_{y_r})+2m(\omega_{y_r}\frac{dz_r}{dt}-\omega_{z_r}\frac{dy_r}{dt}); \text{ s í. t.} \quad 7a)$$

Ámde, az (1*a*), (2) és (3) értelmében:

$$u_{x_r}=a'\alpha_1+b'\alpha_2+c'\alpha_3;\ u_{y_r}=a'\beta_1+b'\beta_2+c'\beta_3;\ u_{z_r}=a'\gamma_1+b'\gamma_2+c'\gamma_3. \quad (8)$$

Továbbá az ω_r szögsebesség componensei [Kinematika 243. §. (2)]:

$$\omega_{y_r}=-(\alpha_1'\gamma_1+\alpha_2'\gamma_2+\alpha_3'\gamma_3);\quad \omega_{z_r}=+(\alpha_1'\beta_1+\alpha_2'\beta_2+\alpha_3'\beta_3) \quad . \quad . \quad (9)$$

Ezekkel rendre:

$$\frac{du_{x_r}}{dt}=a''\alpha_1+b''\alpha_2+c''\alpha_3+a'\alpha_1'+b'\alpha_2'+c'\alpha_3'; \quad . \quad . \quad . \quad (8a)$$

$$-\omega_{z_r}u_{y'}+\omega_{y_r}u_{z_r}=-a'[\alpha_1'(\beta_1^2+\gamma_1^2)+\alpha_2'(\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)+\alpha_3'(\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3)]- \\ -b'[\ .\ .\ .]-c'[\ .\ .\ .];$$

hozzákapcsolva az a' együtthatójához az $\alpha_1(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)'=0$, azaz, az

$$\alpha_1(\alpha_1'\alpha_1+\alpha_2'\alpha_2+\alpha_3'\alpha_3)=0$$

identitást és az XYZ s X,Y,Z, rendszerek orthogonálitását véve tekintetbe [Kinematika 241. §. (3), (4)], és hasonlóképen tárgyalva a b' és a c' együtthatóit, marad:

$$-\omega_{z_r}u_{y_r}+\omega_{y_r}u_{z_r}=-(a'\alpha_1'+b'\alpha_2'+c'\alpha_3') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

A (8*a*) és (10) összege, a 123. §. lábjegyzéke (ε) jelölésével

$$\frac{du_{x_r}}{dt}-\omega_{z_r}u_{y_r}+\omega_{y_r}u_{z_r}=a''\alpha_1+b''\alpha_2+c''\alpha_3=\varphi_{0,x_r}, \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

melyet (7*a*)-ba helyettezve, ez átmegyen a 123. §. (2) és (3) összefüggéseibe, a Coriolis-féle tételbe.

B. RÉSZLETES RÉSZ:

AZ ANYAGI PONT EGYENSULYÁNAK ÉS MOZGÁSÁNAK ALTALÁNOS ES SPECZIALIS PROBLÉMÁI.

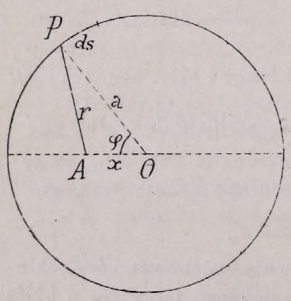
I. Az anyagi pont egyensúlyának problémái.

1. Eljárások és példák anyagi pont egyensúlyára.

126. §. *Példa szabad pont egyensúlyára. Erőfüggvény. Az egyensúly stabilis vagy labilis voltának eldöntése.*

Egyenletes vonalas körgyűrű elemei a gyürű vonalán kívül lévő külső pontokra csak a távolságtól függő centrális erőkkel hatnak. Milyennek kell ezen erők törvényének lennie, hogy a gyűrű középpontjába helyezett, a gyűrű síkjában szabadon mozogható pont ezen erők behatása alatt *stabilis* egyensúlyban maradjon?

Legyen (31. ábra) A a vonzott vagy taszított pont, O a kör középpontja, a sugara, ds íveleme, x az A és O-, r az A és ds közötti távolság, $ds\,f(r)$ az ezek között működő r-menti erő és $ds\,\Phi(r)$ a ds erőfüggvénye A-ra vonatkozólag, hol $f(r)=d\Phi:dr$.



31. ábra.

A $ds\,.\,\Phi(r)$ változása egyenlő az $f(r)$ erő végezte munkával, ez pedig

$$ds\,.\,d\Phi=ds\,\frac{d\Phi}{dr}\,dr=ds\,f(r)\,dr\,;$$

ha most dr *positiv* (azaz növekmény), akkor e változás közben a taszító erő positiv-, a vonzó negativ munkát végez, azaz: ha $f(r)$ *positiv*, ez *taszító*-, ha $f(r)$ *negativ*, ez *vonzó* erőt jelent.

Az egyensúly *stabilis* voltának a feltétele az, hogy a gyűrűnek az A-ra vonatkozó V erőfüggvénye *maximum* legyen, ha A az O-ban van [65. §. 2. pontja, 119. l.].

Az ábra szerint

$$ds=a\,d\varphi\,;\qquad r^2=a^2+x^2-2ax\cos\varphi\,;\quad .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

$$V=\int_0^{2\pi a} ds\;\Phi(r)=a\int_0^{2\pi}\Phi(r)\,d\varphi\,,\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

hol még (1)-ből könnyű számítással:

$$\frac{dr}{dx}=\frac{x-a\cos\varphi}{r};\quad \frac{d^2r}{dx^2}=\frac{1}{r}-\frac{x-a\cos\varphi}{r^2}\frac{dr}{dx}=\frac{1}{r}\left\{1-\left(\frac{x-a\cos\varphi}{r}\right)^2\right\}$$
$$\frac{d^2r}{dx^2}=\frac{a^2\sin^2\varphi}{r^3}.$$

Az A helyzetben lévő pontra nézve az AO-hoz symmetrikusan fekvő ds elemek erőinek az AO-ra merőleges componenseik ellentetten egyenlők s így összegük zérust ád, míg AO-hoz párhuzamos componenseik egyenlők s így a gyűrű eredő hatása egy AO menti erő, mely mindenesetre az $\overline{OA}=x$ távolság függvénye és $x=0$-lal szintén zérussá válik, mert ekkor a ds elemek teljesen egyenletesen fekszenek a most O-ban lévő A-körül s az eredő erő zérus.

Az A helyzetben az x-menti erő [x és φ egymástól független lévén, 42. §. (5), 70. l.]:

$$X=\frac{dV}{dx}=a\int_0^{2\pi}\frac{d\Phi}{dr}\cdot\frac{dr}{dx}\,d\varphi=a\int_0^{2\pi}f(r)\,\frac{x-a\cos\varphi}{r}\,d\varphi;$$

alkalmazva ezt az $x=0$ középponti helyzetre, $x=0$-nál $r=a$, és

$$X_{r=a}=a\int_0^{2\pi}f(a)\,\frac{-a\cos\varphi}{a}\,d\varphi=0,$$

miként ezt az előbbiek szerint vártuk.

Továbbá

$$\frac{d^2V}{dx^2}=a\int_0^{2\pi}\left\{f(r)\frac{dr}{dx}\right\}d\varphi=a\int_0^{2\pi}\left\{\frac{df(r)}{dr}\left(\frac{dr}{dx}\right)^2+f(r)\frac{d^2r}{dx^2}\right\}d\varphi,$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}=a\int_0^{2\pi}\left\{\frac{df(r)}{dr}\left(\frac{x-a\cos\varphi}{r}\right)^2+f(r)\,\frac{a^2\sin^2\varphi}{r^3}\right\}d\varphi \quad . \quad . \quad (3)$$

E quotiens az $x=0$, $r=a$ középponti helyzetben:

$$\left\{\frac{d^2V}{dx^2}\right\}_{x=0}=a\,\frac{df(a)}{da}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi+f(a)\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi$$
$$=\pi a\left\{\frac{df(a)}{da}+\frac{f(a)}{a}\right\}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

E szerint stabilis illetve instabilis egyensúly esetére az f függvény eleget tartozik tenni a következő feltételnek:

$$\frac{df(a)}{da}+\frac{f(a)}{a}\lesseqgtr 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Azonnal észrevenni, hogy van a vonzó és a taszító erők bizonyos

csoportja, mely stabilis-, s van mindkét nembeli erők más-más csoportja, mely labilis egyensúlyt létesít.

Kivételes az $f(a) = \frac{K}{a}$ eset, hol K positiv vagy negativ lehet; ekkor az (5) bal oldala zérus s a kérdés eldöntésére a $\left(\frac{d^4 V}{dx^4}\right)_{x=0}$ quotienst kell a megelőzőek nyomán képezni: de ez, valamint a magasabb rendű páros quotiensek mind zérussal egyenlők, miről az olvasó könnyű számítással meggyőződhetik. [Ez az eset megfelel az egyenletes, végtelen hoszszú hengerhéj vagy hengerfelület attractionális vonzásának belső pontokra, mely vonzás a héj ürében mindenütt zérus s így az egyensúly *közömbös*]. V. ö. Math. és Phys. Lapok III. kötete 322—324. ll., 1894.

127. §. *Példák előírt sima görbén és felületen való egyensúlyra.*

1. Az *m tömegpont sima csavargörbén tartozik maradni* a földnehézség és az r távolság tetszőleges függvényével kifejezett $f(r)$ centrális erő hatása alatt; az utóbbinak centruma a görbe függélyes tengelyének egy pontja, mely egyszersmind a coordináták kezdete.

A görbe egyenletei:

$$x = a\cos\vartheta\,; \qquad y = a\sin\vartheta\,; \qquad z = a\vartheta\,\mathrm{tg}\,i, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

hol a, ϑ, z az m henger-coordinátái és i a görbe érintőjének a vízszinteshez való hajlásszöge míg a $+Z$ tengely *fölfelé* van irányítva; továbbá

$$r^2 = a^2 + z^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

A független erők derékszögű componensei:

$$X = f(r)\frac{x}{r}\,; \qquad Y = f(r)\frac{y}{r}\,; \qquad Z = f(r)\frac{z}{r} - mg\,; \quad \ldots \quad (2)$$

a görbe íveleme pedig

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = a\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 i}\, d\vartheta,$$

érintőjének iránycosinusai

$$\frac{dx}{ds} = -\sin\vartheta\cos i\,; \qquad \frac{dy}{ds} = +\cos\vartheta\cos i\,; \qquad \frac{dz}{ds} = +\sin i\,. \quad (3)$$

Az egyensúly feltétele, hogy a független erők eredője a görbe érintőjére merőleges legyen; ez az (1), (2), (3) alapján:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \quad \text{vagy} \quad \left\{f(r)\frac{z}{r} - mg\right\}\sin i = 0,$$

melyből

$$zf(r) = mgr\,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

a) Igy, ha $f(r) = C^2 r$, ez a távolsággal arányos *taszitást* jelent;

ennek erőfüggvénye [42. §.] $+\frac{1}{2}C^2r^2$; a földnehézségeé [44. §. 4. pontja (4), 75. l.]: $-mgz$ és így e két erő erőfüggvénye:

$$V=\tfrac{1}{2}C^2r^2-mgz=\tfrac{1}{2}C^2(a^2+z^2)-mgz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

za egyensúly (4) feltétele itt:

$$C^2z=mg; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

maga az egyensúly itt *labilis*, mert a V e helyen *minimum* [65. §. 1. pontja, 118. l.].

β) Ha $f(r)=-C^2r^{-2}$, ez a távolsággal fordítva arányos *vonzás*; a két erő erőfüggvénye., akkor:

$$V=+C^2r^{-1}-mgz. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Az egyensúly (4) feltétele, tekintettel a (2)-re

$$-C^2z=mg(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{vagy} \quad m^2g^2(a^2+z^2)^3-C^4z^2=0; \quad . \quad . \quad (8)$$

ez z^2-re nézve harmadfokú egyenlet, mely a $z^2=0$-tól a $z^2=+\infty$-ig terjedő közben *egy* jelváltozatot mutat s így *egy* reális gyöke van, s ez felel meg az egyensúlyi helyzetnek, mely a negativ z-k oldalán fekszik.

Az egyensúly természetét a

$$\frac{d^2V}{dz^2}=\frac{C^2}{r^3}\left(\frac{3z^2}{r^2}-1\right)$$

quotiens adja; e szerint az egyensúly stabilis vagy labilis, ha $3z^2-r^2=2z^2-a^2<0$, vagy >0, benne a z^2-t a (8)-al fejezve ki.

A *nyomás* az egyensúly esetében a független erőknek az előírt sima görbére merőleges eredője; értéke az R ellennyomással (reactióval) ellentetten egyenlő:

$$\left.\begin{aligned} -R&=\left\{\left(f(r)\frac{x}{r}\right)^2+\left(f(r)\frac{y}{r}\right)^2+\left(f(r)\frac{z}{r}-mg\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}= \\ &=\left\{\left(f(r)\right)^2-2mgf(r)\frac{z}{r}+m^2g^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (9)$$

2. *Az m tömegpont sima gömbfelületen tartozik maradni* a földnehézség és csak az r távolságtól függő oly $f(r)$ centralis *vonzó* erő hatása alatt, melynek centruma a gömb vertikális átmérője felső végpontjában van.

A gömb egyenlete, 32. ábra (köv. l.):

$$r=2a\cos\eta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

ha a a sugara, η a vertikális és az m-hez húzott r közötti szög.

Az mg és az $f(r)$ erők a mindenkori r-en átmenő vertikális síkban feküdvén, ezek az m-et csak e síkban eltolni törekszenek s így az

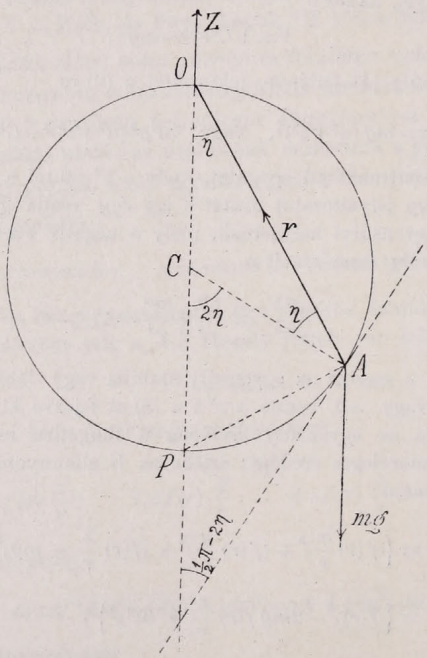
adott hatások alatt az m a gömbön egyensúlyban marad, ha az OAP vertikális körön van egyensúlyban.

Az utóbbi pedig fennáll, ha az m-re ható két független erőnek e kör mindenkori érintője menti componensei ellentetten egyenlők, azaz, ha:

$$f(r)\sin\eta = mg\sin 2\eta\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

ez vízszintes *kört* jelent, melynek kúpnyilása:

$$\eta = \arccos\tfrac{1}{2}\frac{f(r)}{mg}\,.$$



32. ábra.

A (11) még az $\eta=0$ singuláris érték által is elégíthető ki.

A *nyomás*, miként az ábra mutatja, a független két erőnek a nevezett kör normálisa menti componenseinek összege:

$$-R = mg\cos 2\eta - f(r)\cos\eta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

[*Kivételes eset:* Ha $f(r)=C^2.r$, azaz, ha a vonzás a távolsággal egyenesen arányos, akkor a (11), tekintettel a (10)-re

$$C^2 a\sin 2\eta = mg\sin 2\eta,$$

mely egyenlet csak $C^2=mga^{-1}$ esetben, de ekkor *minden* η-ra nézve fennáll].

Ha $f(r)=-C^2r^{-2}$, akkor a szabad erők erőfüggvénye, tekintettel az ábrára, ($-z=r\cos\eta$ lévén):

$$V=C^2r^{-1}-mgz=2^{-1}C^2a^{-1}\cos^{-1}\eta+mg\,2a\cos^2\eta$$

s az egyensúly feltétele

$$O=\frac{dV}{d\eta}=2^{-1}C^2a^{-1}\sin\eta\cos^{-2}\eta-4mga\sin\eta\cos\eta=0,$$

melyből

$$\sin\eta=0 \qquad \text{és} \qquad C^2=8mga^2\cos^3\eta.$$

Ezen két egyensúlyi helyzet jellegét a

$$\frac{d^2V}{d\eta^2}=\frac{C^2}{2a}\,\frac{1+\sin^2\eta}{\cos^3\eta}-4mga\cos 2\eta$$

quotiens értéke adja meg; ez kis számítással:

$$\eta=0 \quad \text{esetben:} \quad \frac{C^2}{2a}-4mga;$$

$$\cos^3\eta=\frac{C^2}{8mga^2} \quad \text{esetben:} \quad 8\,(1+2^{\frac{1}{3}})\,mga-(1+4.2^{\frac{1}{3}})\left\{\frac{mgC^4}{a}\right\}^{\frac{1}{3}}.$$

E quotiensek *positiv* vagy *negativ* előjele szerint az egyensúly *labilis* vagy *stabilis*; ezen előjel a $C:a$ viszony értékétől függ; így az első helyzet labilis vagy stabilis, a szerint, a mint $C^2\gtrless 8mga$; a második pedig a szerint, a mint:

$$8\,\frac{1+2^{\frac{1}{3}}}{1+4.2^{\frac{1}{3}}}\left\{\frac{2mga^2}{C^2}\right\}^{\frac{2}{3}}\gtrless 1.$$

128. §. *Példák pont egyensúlyára* d'Alembert *elve alapján.*

1. *Szabad pont az* R_1 *és* R_2 *két centrális erőnek van alávetve.*

a. Geometriai (statikai) eljárás. Mindazokban az A helyeken, 33. ábra, (köv. l.) hol az R_1 és R_2 egy egyenesbe nem esnek: ezen erőknek

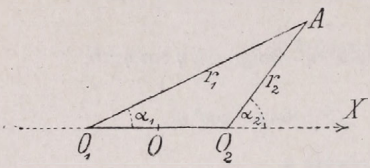
$$\{R_1^2+R_2^2+2R_1R_2\cos(R_1,\ R_2)\}^{\frac{1}{2}}$$

eredője sem lehet zérus. Ellenben az O_1O_2 egyenes mentén lévő A pontokra nézve e két erő ezen egyenesbe esik és ha R_1 és R_2 ellentetten egyenlők, eredőjük zérus. Ha O_1O_2 mentén ily hely van, akkor a pont ott egyensúlyban van; az egyensúly állandó, ha a tőle számított tetszőleges kis elmozdulás közben az R_1 és R_2 által végezett másodrendű kicsiny munka negativ; ellenkező esetben mulékony (labilis); lehetséges, hogy bizonyos irányok mentén az egyik, más irányok mentén a másik egyensúly áll fenn [v. ö. a 64. §. 4. pontját 118. l.].

b. *A virtuális elmozdulások elvével való eljárás.* Ha δs az A-nak tulajdonított virtuális elmozdulás, akkor

$$R_1\delta s\cos(R_1, \delta s)+R_2\delta s\cos(R_2, \delta s)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

az egyensúly feltétele, hol δs az R_1R_2 síkban fekszik [e síkra merőleges elmozdulás közben sem az R_1 sem az R_2 nem végezhet munkát és így ily elmozdulás itt nem jő tekintetbe], de különben tetszőleges irányú. Jelelve δx-, δy-el a δs derékszögű vetületeit, α_1- és α_2-vel az R_1 s R_2 és az O_1O_2 egyenes közötti szögeket, (1)-ből és a rajz szerint



33. ábra.

$$R_1(\delta x\cos\alpha_1+\delta y\sin\alpha_1)+R_2(\delta x\cos\alpha_2+\delta y\sin\alpha_2)=0 \quad . \quad . \quad (2)$$

$$4a^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\alpha_2-\alpha_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

A δx és δy tetszőleges lévén: (2) szétbomlik

$$R_1\cos\alpha_1+R_2\cos\alpha_2=0; \qquad R_1\sin\alpha_1+R_2\sin\alpha_2=0,$$

$$R_1\cos\alpha_1=-R_2\cos\alpha_2, \qquad R_1\sin\alpha_1=-R_2\sin\alpha_2 \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

egyenletekre, melyek négyzet-összegéből és osztatából;

$$R_2=\pm R_1; \qquad \operatorname{tg}\alpha_1=\operatorname{tg}\alpha_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

α) Az $R_2=+R_1$ esetben csak $\alpha_2=\pi+\alpha_1$ elégítheti ki a (4*a*) egyenleteket, de mivel α_1 és α_2 csak 0 és π-között feküdhet, itt $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\pi$ az egyetlen megoldás s a pont O_1 és O_2 *között* valahol van egyensúlyban.

β) Az $R_2=-R_1$ esetben csak az $\alpha_1=\alpha_2$ elégíti ki a (4a)-t; de ez az ábra szerint véges távolságokban csak $\alpha_1=\alpha_2=0$ esetben lehetséges s a pont az O_1O_2 tengelyen valahol, de az O_1O_2 vonalrészen *kívül*, van egyensúlyban.

Az eredmény egyező az *α.* alattival.

2. Anyagi pont egyensúlya vertikális tengely körül egyenletesen forgó sima forgási felület homorú oldalán.

Legyen $f(r,z)=0$ a felület meridiánjának egyenlete, ω a szögsebessége; ekkor e felület s a rajta lévő tömegpont nyugvónak, és ezen utóbbira az $m\omega^2r$ centrifugális és az $-mg$ földnehézségi erő hatónak tekinthető, 34. ábra. Az m virtuális elmozdulása a meridián mentén lehetséges csak (reá merőlegesen az egyensúly közömbös lévén); δr és δz ezen elmozdulás componensei és így az egyensúly feltétele

$$m\omega^2r\delta r-mg\delta z=0,$$

miből, miután $\delta r:\delta z=\operatorname{tg}\alpha$, α lévén a meridián érintője és a $+Z$-közötti szög,

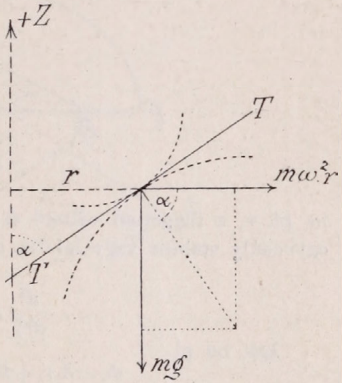
$$\operatorname{tg}\alpha = g : \omega^2 r = \frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{1}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

mint az egyensúly helyének feltétele. A *nyomás* a nevezett két componensnek

$$m\sqrt{g^2+\omega^4 r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

eredője s a felületre merőleges.

Ha azt akarjuk, hogy a meridián *minden* pontjában legyen egyensúly, akkor (5)-nek a görbe minden elemére nézve érvényesnek kell lennie. azaz (5) a görbe egyenlete, mely [Math. Repertorium 64. §. 16. formula] vertikális tengelyű $p=g:\omega^2$ parameterű, csúcsával lefelé álló parabolát képvisel [v. ö. Kinematika 371. §-ának 52. feladatát].



34. ábra.

Könnyű belátni, hogy az egyensúly mindenütt közönbös, ha a görbe a nevezett speciális parabola; továbbá, hogy az általános esetben az egyensúly stabilis vagy labilis a szerint, a mint az egyensúlyi helyzethez az (5) szerint szerkesztett érintő parabolának görbülete kisebb vagy nagyobb, mint a meridiángörbének az egyensúlyi helyzetben való görbületi sugara. Egyenes vonalú vagy a forgási tengelyhez domború meridián esetében az egyensúly mindenesetre labilis.

3. *Pont egyensúlya sima ellipsisen, melynek gyúpontjaiból középponti erők hatnak.*

α) Az R_1 és R_2 centrális erők az r_1 és r_2 vezérsugarak mentén működnek s egyensúly esetében eredőjük az ellipsis normálisába esik; ez pedig felezi az r_1 és r_2 közötti $\alpha_2-\alpha_1$ szöget, 35. ábra, (köv. l.). Az egyensúly feltétele itt:

$$R_1 \sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1) = R_2 \sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

azaz az erőknek az érintő menti componensei ellentetten egyenlők; az egyenlet az $R_1=R_2$ vagy az $\alpha_2=\alpha_1$ feltétel által elégíthető ki.

A nyomás nagysága

$$R_1 \cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1) + R_2 \cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

β) D'Alembert elve alapján az ellipsismenti eltolásnál a virtuális munka

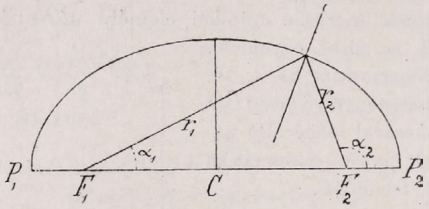
$$R_1\delta r_1 + R_2\delta r_2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

melyet az ellipsisnek $r_1+r_2=2a$ egyenletével, ugyanis

$$\delta r_1+\delta r_2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

feltétellel combinálva, $R_1=R_2$-t vagy $\delta r_1=\delta r_2=0$-t nyerünk; az utóbbi feltétel is egyezik az *α)* alatti második feltétellel, mert $\alpha_1=\alpha_2$-nal az r_1-nek maximuma és r_2-nek minimuma van vagy megfordítva.

γ) Az *egyensúly jellegét* kipuhatolandó, legyenek $\Phi_1(r_1)$ és $\Phi_2(r_2)$ az R_1 és R_2 erőknek erőfüggvényei, úgy, hogy $d\Phi_1=R_1dr_1$ és $d\Phi_2=R_2dr_2$;



35. ábra.

ha pl. r_1 a független változó és így $r_2=2a-r_1$ és $dr_2=-dr_1$; ekkor az egyensúly stabilis vagy labilis, a szerint, a mint

$$\frac{d^2}{dr_1^2}(\Phi_1+\Phi_2) \gtrless 0.$$

Így, ha pl.

$$\Phi_1=A_1r_1+B_1r_1^2; \qquad \Phi_2=A_2r_2+B_2r_2^2,$$

e feltétel: $(B_1+B_2) \gtrless 0$.

A $B_1=-B_2$ esetben az egyensúly *indifferens*.

E példa további részletezését az olvasóra bízzuk.

2. Feladatok szabad és kényszernek alávetett anyagi pont egyensúlyára.

129. §. *Feladatok szabad pont egyensúlyára.**

1. Bizonyíttassék be, hogy egy állandó irányú és nagyságú s egy a térben változó erő szabadon mozogható pontot nem képes stabilis egyensúlyban tartani. *V.*

---

* A feladatok végéhez illesztett betü-rövidítések azt a forrást jelentik, melyből merítvék; így jelenti:

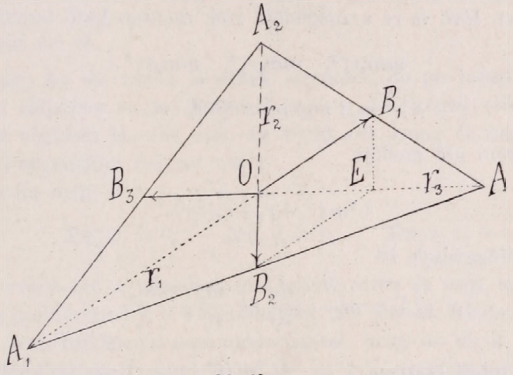
Ap.: Paul Appell: Traité de Mécanique rationelle, Tome I. Paris 1893; Tome II. 1896.

Eu.: Leonhard Euler: Theoria motus corporum etc. Rostock és Greifswald 1765 s í. t. Német fordítása Wolfers-től, négy kötet. Greifswald 1848—1853.

F.: A. Fuhrmann: Aufgaben aus der analytischen Mechanik; második és első kiadás, Leipzig 1879 és 1871.

2. Valamely m anyagi pontra egymástól $2a$ távolságban lévő m_1 és m_2 szilárd tömegek a távolság négyzetével fordítva arányos erőkkel hatnak. Kerestessék meg az m egyensúlyi helyzete, ha ez az m_1 és m_2 között, ezek összekapcsoló egyenesében fekszik és bizonyittassék be, hogy ez az egyensúly a nevezett egyenes mentén labilis [miután az erőfüggvény ekkor minimum, [65. §.]; ellenben, ezen egyenesre merőleges irányban stabilis [mert ily elmozdulásra nézve az erőfüggvény maximum]. *V.*

3. Az előbbi feladat avval az általánosítással, hogy az m-re ható erők $\pm C_1^2 r_1^{n_1}$ és $\pm C_2^2 r_2^{n_2}$, hol n_1 és n_2 tetszőleges reális számok [V. ö. a Kinematika 101. §. a 21—26. feladatait, 155 és 156. l.]; az egyensúly kriteriumát a



36. ábra.

$$V=\pm(n_1+1)^{-1} C_1^2 r_1^{n_1+1} \pm (n_2+1)^{-1} C_2^2 r_2^{n_2+1}$$

erőfüggvény szolgáltatja. *A.*

4. Ha az m-re három, nem egyenesben lévő A_1, A_2, A_3 helyzetű, m_1, m_2, m_3 tömegű pontok a távolság négyzetével fordítva arányos

---

Ph. G.: Ph. Gilbert: Cours de Mécanique analytique; troisième édition, Paris 1891.

K.: F. Kraft: Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik, két kötet, Stuttgart 1884, 1885. (Lényegében véve Walton alább idézett művének fordítása).

S. G.: A. de Saint Germain: Récueil d'Exercises sur la Mécanique rationelle. Deuxième édition, Paris 1889.

T. a. St.: Tait and Steele: Dynamics of a particle. Fifth edition. London 1882.

W.: W. Walton: Collection of Problems in illustration of principles of theoretical Mechanics. Third edition, Cambridge 1876.

Z.: P. v. Zech: Aufgaben aus der theoretischen Mechanik, második kiadás. Stuttgart 1891.

V.: Vulgare exemplum (általánosan elterjedt, több helyen található példa vagy feladvány).

A.: Az Autor-tól (a szerzőtől) származó feladvány vagy kidolgozás.

taszító erőket fejtenek ki: akkor az m az $A_1A_2A_3$ háromszög felező egyeneseinek közös O metszőpontjában stabilis egyensúlyban marad, ha áll:

$$m_1 : m_2 : m_3 = \overline{OA_1}^3 : \overline{OA_2}^3 : \overline{OA_3}^3 . \quad V.$$

[Ugyanis: az O metsző pontra nézve áll (36. ábra):

$$\overline{OB_1} = \tfrac{1}{2}\overline{A_1O} = \tfrac{1}{2}r_1 ; \qquad \overline{OB_2} = \tfrac{1}{2}\overline{A_2O} = \tfrac{1}{2}r_2 ; \qquad \overline{OB_3} = \tfrac{1}{2}\overline{A_3O} = \tfrac{1}{2}r_3 ;$$

továbbá, $\overline{B_1E} \parallel \overline{A_2B_2}$ lévén, $\overline{B_1E} = \tfrac{1}{2}\overline{A_2O} = \overline{OB_2}$ és $\overline{OE} = \tfrac{1}{2}\overline{OA_3} = -\overline{OB_3}$; e szerint az $\overrightarrow{OB_1}$ és $\overrightarrow{OB_2}$ eredője az $\overrightarrow{OB_3}$-mal ellentetten egyenlő s ebből $\overrightarrow{r_1}+\overrightarrow{r_2}+\overrightarrow{r_3}=0$.

A O-ban lévő m-re a megfelelő r-ek mentén ható taszító erők:

$$mm_1r_1^{-2}, \quad mm_2r_2^{-2}, \quad mm_3r_2^{-2}.$$

Ha az

$$m_1 : m_2 : m_3 = r_1^3 : r_2^3 : r_2^3 ,$$

akkor a három erő eredője

$$C^2m\,(\overrightarrow{r_1}+\overrightarrow{r_2}+\overrightarrow{r_3})=0.$$

Az erők erőfüggvénye itt

$$V = m\left(-\frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} - \frac{m_3}{r_3}\right)$$

lévén, az érintett esetben $V = -C^2m\,(r_1^2+r_2^2+r_3^2)$-ra redukálódik, mely maximum, mivel az O metszőpontra nézve a geometria egy elemi tétele értelmében $r_1^2+r_2^2+r_3^2$ minimum. A.]

5. Szabályos négyszög oldalainak hoszsz-elemei csak a távolságtól függő centrális erőkkel hatnak a síkjában lévő m-re. Mily erőtörvény mellett marad m a négyzet közepén stabilis egyensúlyban, ha az *α)* csak a diagonális *β)* csak az oldalakhoz párhuzamosan mozoghat? *A.*

6. Szabályos n szögű sokszög csúcsai ugyanazon törvény szerint fejtenek ki csak a távolságtól függő centrális erőket a síkjukban mozogható s a polygon belsejében lévő m pontra, mely e sokszög középpontjában egyensúlyban marad. Mily erőtörvény mellett lesz e helyzet stabilis s mikor labilis? *A.*

7. Az (xyz) helyzetű m-re tetszőleges számú

$$(x_1\,y_1\,z_1),\ \ldots\ (x_i\,y_i\,z_i)\ \ldots\ (x_n\,y_n\,z_n)$$

helyzetű $m_1, m_2, \ldots m_i \ldots m_n$ tömeg hat és pedig mindegyik az m_i tömegével és az m-től való r_i távolsággal arányos mm_ir_i nagyságú centrális *vonzó* erővel. Bebizonyítandó, hogy e tömegek vonzásának eredője egyenlő avval a vonzással, melyet ezek A_0 tömegközéppontjában [24. §. lábjegyzéke 37. l.] központosítottnak tekintett összes tömegük t. i. $\Sigma m_i = M$, az m-re e centrumtól való r_0 távolsággal arányosan fejtenek

ki; továbbá, hogy az m stabilis egyensúlyi helyzete e tömegközéppont. [Ez abból következtethető, mert ezen erőknek eredő componensei a tömegközéppont x_0, y_0, z_0 coordinátái felhasználásával:

$$X=-m\Sigma m_i x_i=-mMx_0; \qquad Y=-m\Sigma m_i y_i=-mMy_0;$$
$$Z=-m\Sigma m_i z_i=-mMz_0;$$

ezek az m-et mindig az $(x_0 y_0 z_0)$ hely felé húzzák és így m nek a helyből való kimozdítása közben mindig negativ munkát végeznek. E szerint e hely az m stabilis egyensúlyi helyzete, melyben a reáható erők nek erőfüggvénye

$$V=-m\Sigma\tfrac{1}{2}m_i r_i^2$$

maximumát éri el.

Jegyzet. Az m_i hatók lehetnek egyenlő-, de pl. mágnesek esetében különböző előjelűek is; az $\Sigma m_i = 0$ eset is lehetséges, ekkor a tömegközéppont végtelen távolba esik, az eredő erő irány és nagyságra nézve állandó és egyensúlyi helyzet nincs.

Csak ha még

$$\Sigma m_i x_i = 0, \qquad \Sigma m_i y_i = 0, \qquad \Sigma m_i z_i = 0,$$

akkor az eredő erő a végesben mindenütt zérus és ezen egész térben az egyensúly indifferens.] V. ö. a Kinematika 129. §-a 44. feladatát, 249. l. V.

8. A megelőző feladat azon módosítással, hogy az m_i-k áz XY *sík*ban fekszenek s a kifejtett *vonzó* erők az m_i-vel egyenesen, de az r_i-vel fordítva arányosak; bizonyíttassék be, hogy az egyensúly két feltétele (t. i. hogy az m-re ható eredő erőnek X-menti és Y-menti componensei zérusok) az

$$F(z)=(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\ldots(z-z_i)^{m_i}\ldots(z-z_n)^{m_n}$$

függvény z szerinti totalis differentiálquotiensének zérussá tevéséből származnak, ha x, y az m; x_i, y_i az m_i coordinátái, $z=x+y\sqrt{-1}$; $z_i=x_i+y_i\sqrt{-1}$; ekkor a zérus egyenlet reális és $\sqrt{-1}$-el szorzott része egyenlő a nevezett két egyensúlyi feltétellel. [A tényleges bizonyításra jobb az $F(z)$ logarithmusát differentiálni. A.]. V.

9. Bizonyíttassék be, hogy a megelőző 8. feladatban fellépő erők erőfüggvénye $V=-\Sigma m_i \lg r_i$ (az ú. n. *logarithmikus potentiál*); származtassanak ebből az ott jelzett feltételek. Végre vizsgáltassék meg a 126. §. körfeladatának e §. utolsó kikezdésében érintett kivételes esete, melyről kiderítendő, hogy az egyensúly *közömbös*. A.

10. A 126. §. példája gömbre kiterjesztve; ugyanis, a gömb df felületi elemei területükkel arányos s csak a távolságtól függő centrális erőket fejtenek ki a felületen kívül levő pontra; ekkor, a 37. ábra (köv. l.), és az idézett §. [és a Math. Rep. 52. §.-a (2) egyenlete] szerint a P melletti df, a hozzátartozó r, a V erőfüggvény és differentiálquotiensei rendre:

$$df = a^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi\,; \qquad r^2 = a^2 + x^2 - 2ax\sin\vartheta\cos\varphi$$

$$V = a^2 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta \int_{\varphi=0}^{2\pi} \Phi\left[(a^2+x^2-2ax\sin\vartheta\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}\right] d\varphi$$

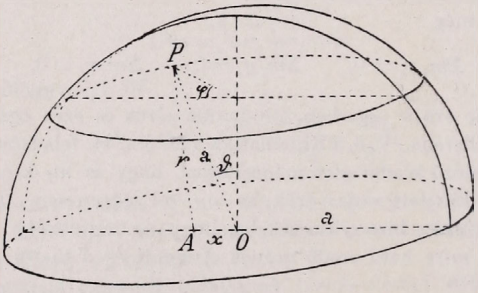
Ebből, a $d\Phi : dr = f(r)$ rövidítéssel élve, egyszerű számítással:

$$X = \frac{dV}{dx} = a^2 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(r)\,\frac{x - a\sin\vartheta\cos\varphi}{r}\,d\varphi\,;$$

$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=0} = \frac{4}{3}a^2\pi\left\{\frac{df(a)}{da} + 2\frac{f(a)}{a}\right\};$$

miből a stabilitás vagy labilitás feltétele adódik:

$$\frac{df(a)}{da} + 2\frac{f(a)}{a} \lessgtr 0. \qquad \text{A.}$$



37. ábra.

Jegyzet. Az $f(a) = K : a^2$ kivételes eset, mely a távolság négyzetével fordítva arányos erőkre vonatkozik; feltételünk zérust ád s V magasabb rendű quotiensei is ugyanazt adják; ezen eset ugyanis az egyenletes gömbhéj vagy gömbfelület gravitationális vagy electrostatikai vonzása, mely a héj ürében lévő bármily helyzetű pontra nézve zérus.

130. §. *Feladatok előírt sima pályán mozogható pont egyensúlyára.*

11. Erőfüggvénynyel biró erőknél a mozogható pont a niveau (szint-) felületeken közömbös egyensúlyban marad; a távolság négyzetével fordítva arányosan ható két centrum, melyek egyike vonzó, másika taszító, $V = \frac{C_1^2}{r_1} - \frac{C_2^2}{r_2}$ erőfüggvénynyel bír, hol r_1 s r_2 az m vonzott pont távolsága a két centrumtól és $2a$ e két centrum egymástól való távolsága. Bizonyíttassék be, hogy a $V=0$ szinfelület egy $r_1C_2^2 = r_2C_1^2$ egyenletű *gömb*felület, mely a nagyobb tömegű (nagyobb C^2 állandójú) centrumot

bezárja, melynek középpontja a centrumokat egybekapcsoló egyenesben, középpontjuktól $a\frac{C_2^4+C_1^4}{C_2^4-C_1^4}$ távolságban fekszik, sugara pedig $2a\frac{C_1^2C_2^2}{C_2^4-C_1^4}$. V.

12. Az A pont surlódás nélkül a sugarú körön tartozik maradni oly centrális, csak az r-től függő $R=\frac{a-r}{r}$ nagyságú erő hatása alatt, melynek O centruma e kör kerületén fekszik, mely erő *taszító*, ha R *positiv*; *vonzó*, ha R *negativ*. Bizonyíttassék be, hogy három egyensúlyi helyzet van: kettő, mikor $r=a$ és egy, mikor $r=2a$; az előbbi kettő stabilis, az utóbbi labilis; ha $R=\frac{r-a}{r}$: a megfordított viszonyok állanak. V.

13. Nehéz pont vertikális síkban mozoghat a föld nehézségi erő és egy vízszintes taszító erő hatása alatt, mely utóbbi a vertikális Y tengelytől számított x távolsággal arányos, és $+C^2x$, nagyságú; az X-tengely vízszintes lévén. Bizonyíttassék be, hogy a két erő síngörbéi az XY síkban fekvő, csúcsaikkal lefelé néző *paraboláik*, melyek tengelyei az Y tengelybe esnek. [Ugyanis: a virtuális elmozdulások elvéből $C^2x\,.\,dx-mgdy=0$, miből $C^2x^2-2mgy=0$, a parabolák egyenlete, a csúcs a kezdet. A nyomás $\sqrt{(mg)^2+(C^2x)^2}$ és a görbe belső oldalára hat.] V.

14. A megelőző feladat erői hassanak az m-re, mely most vertikális kis tengelyű *ellipsis* homorú oldalán mozoghat; a virtuális elmozdulások elve ismét $C^2xdx-mgdy=0$-át szolgáltat, melyet az ellipsis

$$x^2a^{-2}+y^2b^{-2}=1$$

egyenletével egyesítve, az $x=0$ kivételes egyensúlyi helyzeteken kívül még az

$$x_1=\pm\{\sqrt{C^4a^4-(mgb)^2}\}:C^2a^1;\qquad y_1=-mgb^2:C^2a^2;$$

coordináták adta egyensúlyi helyzeteket találunk. A nyomás két componense $-R_x=C^2x_1$; $-R_y=-mg$; eredőjük a domború oldalra emelt normálisba esik. V.

15. Vertikális síkú, $y=f(x)$ egyenletű görbe egyenletes ω szögsebességgel forog a vertikális Y-tengely körül; rajta egy m tömegű nehéz pont tartozik maradni; ekkor a vízszintes középfutó erő:

$$mv^2:x=m\omega^2x^2:x=m\omega^2x$$

s a földnehézségi erő $-mg$, úgy hogy a 13. és 14. feladatok eseteivel állunk szemben s az egyensúly feltétele itt is $m\omega^2xdx=mgdy$, e szerint az ott írt C^2 itt $m\omega^2$-val felcserélendő. A 14. feladat ellipsisére nézve az egyensúly csak úgy lehetséges, ha $\omega^4a^4>(gb)^2$; ha a forgó görbe vertikális főtengelyű $x^2a^{-2}-y^2b^{-2}=1$ egyenletű hyperbola, akkor az $x=0$-án kívül az egyensúlyi helyzet

$$x_1=\pm\{\sqrt{(a\omega)^4+(bg)^2}\}:a\omega^2;\qquad y_1=b^2g:a^2\omega^2$$

a nyomás componensei itt is

$$-R_x = m\omega^2 x_1; \qquad -R_y = -mg.$$

A parabolán az m mindenütt marad egyensúlyban, ha parametere $p = g : \omega^2$. V.

16. Sima lejtőn lévő P súlyra egyenlő nagyságú két erő hat, az egyik $\frac{1}{2}P$ a lejtő hajlásvonalához párhuzamosan fölfelé, a másik $\frac{1}{2}P$ vízszintesen a lejtő vertikális befogója felé; mindkettő törekvése a P-t felfelé mozgatni, de a P súlylyal egyensúlyt tart. Bizonyíttassék be, hogy ekkor a lejtő i hajlásszögére nézve kell hogy álljon $\operatorname{tg} \frac{1}{2} i = \frac{1}{2}$. V.

17. A megelőző feladat P súlyára $\frac{1}{3}Q$ erő függőlegesen felfelé, $\frac{1}{3}Q$ a hajlásvonalhoz párhuzamosan, $\frac{1}{3}Q$ vízszintesen hat; mind a három a P-t felfelé akarja mozgatni. Egyensúly esetében az i hajlásszög

$$i = 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{Q}{3P - Q} \right). \qquad \text{V.}$$

18. Sima lejtőn levő P *súlyra* Q erő a hajlásszöggel párhuzamosan, S vízszintesen hat s mindegyik külön egyensúlyban tartja P-t; bizonyíttassék be, hogy ekkor $P = QS : \sqrt{S^2 - Q^2}$. W.

[Ez az eredmény könnyen nyerhető az itt fennálló $P \sin i = Q = S \cos i$ összefüggésből. A.]

19. Az m vertikális síkú álló sima görbén tartozik maradni a földnehézségi erő s egy vízszintes, a positiv x-ek mentén ható $H(x)$ erő hatása alatt. Az egyensúly feltétele $H(x)\,dx - mg\,dy = 0$, melyből a 13. feladat értelmében $\int H(x)\,dx = mgy + c$ az egyensúlyi görbe egyenlete. Ha $H(x) = -C^2 : x^2$, egyenoldalú hyperbolát nyerünk; melynek egyik asymptotusa vízszintes, másika a vertikális Y tengely. Ha $H(x) = C^2 : x$, a niveaugörbe logarithmikus vonal s í. t. V.

20. Az m pont vízszintes nagy tengelyű, vertikális síkú ellipsis külső oldalán tartozik maradni; reá saját súlyán kívül még egy állandó Q nagyságú centrális vonzó erő hat, mely mindig a görbe egyik pl. a positiv x-ek oldalán fekvő gyúpontján megyen keresztül. A görbe féltengelyei és excentricitása a, b, $e^2 = a^2 - b^2$, lévén, az egyensúlyi helyzet abscissája

$$x_1 = -\frac{aeQ}{\sqrt{Q^2e^2 + (mgb)^2}},$$

miből y_1 is adódik. Ha $Q = mg$, akkor $x_1 = -e$ és m ekkor a másik gyúponton átmenő vertikálison (a góczhúr felső végpontján) van. V

[A számításra nézve a coordináták kezdete az ellipsis középpontjában legyen, továbbá a $+Y$ tengely függélyesen *lefelé* legyen irányítva; akkor a $-Y$ és $+X$ tengelyek közötti negyedben fekvő (xy)-pontból az e negyedben fekvő gyúpont felé vont r vezérsugár irány-cosinusai $-(x-e) : r$ és $-y : r$ (az y e negyedben önmagában negativ lévén); e szerint az elemi virtuális munka itt:

$$-\frac{x-e}{r}Qdx+mgdy-\frac{y}{r}Qdy=0,$$

melyet a görbe egyenletének differentiáljával: $xdxa^{-2}+ydyb^{-2}=0$-sal combinálva s az $r=a-\varepsilon x$, $a\varepsilon=e$ összefüggéseket felhasználva, a jelzett eredmény adódik. A.]

21. Ha a megelőző feladatban a Q állandó vonzó erő centruma az ellipsis középpontja, akkor

$$x_1=\pm\frac{a}{e}\left\{\frac{Q^2e^4-(mgb^2)^2}{Q^2e^2+(mgb)^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

miből y_1; az egyensúly lehetséges, míg $Qe^2>mgb^2$; ha $Q=mg$, akkor

$$x_1=\frac{a}{e}\sqrt{e^2-b^2},$$

mely $e^2>b^2$-nál lehetséges. Bizonyíttassék be, hogy ezen s a megelőző feladat egyensúlyai labilis állapotok. V.

[Itt a számítás a megelőző feladatétól abban különbözik, hogy a most a középpont felé vont $r=\sqrt{x^2+y^2}$ sugárnak $-x:r$ és $-y:r$ az iránycosinusai és a virtuális munka $-(x:r)\,Qdx+mgdy-(y:r)\,Qdy=0$; ez s a görbe egyenletének differentiálja szolgáltatja az eredményt. A.]

22. Vertikális síkú, $r=f(\vartheta)$ egyenletű sima görbén levő m-re X és Y független (szabad) erőcomponensek működnek, melyek eredője P; az egyensúly feltétele $Xdx+Ydy=0$; belőle [Math. Rep. 60. l.]:

$$X+Y\frac{dy}{dx}=X+Y\left(\frac{dr}{d\vartheta}\operatorname{tg}\vartheta+r\right):\left(\frac{dr}{d\vartheta}-r\operatorname{tg}\vartheta\right)=0.$$

Ha $r=ae^{\vartheta}$ a logarithmikus spirális, akkor az egyensúlyi helyzetre nézve

$$\operatorname{tg}\vartheta_1=(X+Y):(X-Y);$$

ha csak a földnehézsége hat, és a ϑ-kat az X-tengelytől számítjuk, akkor

$$X=0,\quad Y=-mg,\quad \text{és}\quad \vartheta_1=(n-\tfrac{1}{4})\pi,\ n=1,\ 2,\ \ldots;$$

az egyensúly a belső oldalon stabilis, a külsőn labilis; ellenben, ha ezenkívül még a görbe pólusából induló mindenkori vezérsugár mentén állandó Q *taszító* erő hat, az egyensúly feltétele, miként könnyű belátni: $Q\cos\eta=Y\sin(\eta+\vartheta)$, hol η az r s az érintő közötti hegyes szög, itt $\frac{1}{4}\pi$; 59. ábra, 351. l. V.

23. Valamely m pontra ható független erő derékszögű componensei $X=Mx$, $Y=Ny$, az M és N állandók lévén; bizonyíttassék be, hogy az a sima görbe, melynek minden pontján az m egyensúlyban marad, (a *színgörbe*) az $Mx^2+Ny^2=K$ egyenletű ellipsis, melyre gyakorolt nyomás $-R=\sqrt{NK+M(M-N)x^2}$, hol K tetszőleges positiv állandó, ha M és N is positiv azaz a független erők *taszítók*; ekkor m a görbe belső oldalán van és a nyomás kifelé van irányítva. Ha az X s Y erők *von-*

zók, megfordítva áll a dolog. Ha az X s Y elseje vonzó, másodika taszító, a görbe hyperbola, melynek főtengelye az X- vagy az Y-tengelybe esik, a szerint, a mint K positiv vagy negativ; a nyomás értéke szintén $\sqrt{X^2+Y^2}$. V.

24. Az m-re ható független erőcomponensek legyenek $X=C^2x^{-1}$, $Y=C^2y^{-1}$; bebizonyítandó, hogy a színgörbe az $xy=K$ egyenoldalú hyperbola, melynek asymptotusai az X- s az Y-tengelyek, a K tetszőleges állandó lévén; végre a nyomás $-R=\frac{C^2}{K}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$. V.

25. Az m-re a földnehézségén kívül hat még egy centrális, $mg:\sin\vartheta$ nagyságú *taszító* erő, melynek centruma a coordináták kezdete, x a vízszintes, y a vertikális coordináta, $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$. A színgörbe itt az $x^2a^{-2}+y^2 2a^{-2}=1$ egyenletű ellipsis, a tetszőleges. A.

131. §. *Feladatok előírt sima felületen mozogható pont egyensúlyára.*

26. Az m nehéz pont oly lejtőn tartozik maradni, melynek egyenlete

$$F=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0;$$

x, y, z e sík folyó coordinátái α, β, γ normálisának iránycosinusai, p távolsága a coordináták kezdetétől. Az m-re ható független erők componensei legyenek $X=Ax$, $Y=By$, $Z=Cz$. Az egyensúly feltételei a 28. §. (2) szerint $X:Y:Z=\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma$ s í. t., melyek itt

$$By\cos\gamma=Cz\cos\beta;\qquad Cz\cos\alpha=Ax\cos\gamma;\qquad Ax\cos\beta=By\cos\alpha;$$

ezekből s az $F=0$-ból

$$\left.\begin{array}{lll} x\cos\alpha+ & y\cos\beta+z\cos\gamma=p \\ Ax\cos\beta- & By\cos\alpha \quad\quad =0 \\ Ax\cos\gamma & \quad -Cz\cos\alpha=0 \end{array}\right\};\qquad \begin{array}{l} x=p\ BC\,.\cos^2\alpha:D \\ y=p\,.CA\,.\cos\ \beta:D \\ z=p\,.AB\,.\cos\ \gamma:D \end{array}$$

$$D=\{B\,.\,C\,.\cos^2\alpha+C\,.\,A\,.\cos^2\beta+A\,.\,B\,.\cos^2\gamma\}\cos\alpha=\Delta\,.\cos\alpha.$$

A nyomás

$$=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=-R=p\,.\,A\,.\,B\,.\,C:\Delta.\qquad \text{A.}$$

27. A megelőző feladat oly módosítással, hogy a föld nehézsége is hozzálép; ekkor $Z=Cz-mg$ s az egyensúly három feltételi egyenlete:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p;\qquad Ax\cos\beta-By\cos\alpha=0;$$
$$Ax\cos\gamma-Cz\cos\alpha=-mg\cos\alpha,$$

mely ugyanígy tárgyalható. A.

28. Sima gömbfelületen levő nehéz pontra a gömb csúcsában székelő, csak a távolságtól függő $f(r)$ *vonzó* erő hat; kerestessék az egyensúlyi helyzet. A gömb egyenlete $r=2a\cos\eta$, ha a a sugara s η a vertikális s az r közötti szög, 38. ábra; az egyensúly feltétele:

$$f(r)\sin\eta = mg\sin 2\eta,$$

mely a gömbön vízszintes,

$$\eta = \arccos\tfrac{1}{2}\cdot\frac{f(r)}{mg}$$

nyilású *kört* jelent.

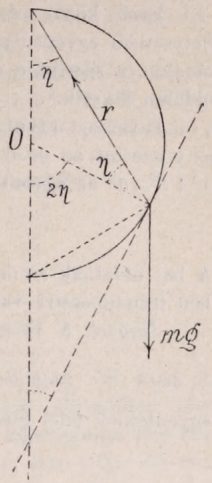
A nyomás: $-R = mg\cos 2\eta - f(r)\cos\eta$.

Az $f(r)=C^2r$ esetben a feltétel $C^2a=mg$ és az egyensúly az egész körön indifferens. A

29. Sima gömbön lévő m pontra a földnehézségén kívül még a távolság harmadik hatványával fordítva arányos mgc^3r^{-3} centrális *vonzó* erő hat, melynek centruma a gömb valamely vízszintes átmérőjének végpontja. S. G.

[A centrum a vízszintes X-tengelyen, a kezdettől $-a$ távolságban legyen; a gömb s az r távolság egyenlete:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= x^2+y^2+z^2;\\ r^2 &= (x+a)^2+y^2+z^2 = 2a(a+x)\end{aligned}\right\}\ .\ .\ 1)$$



38. ábra.

melyekben az Y vízszintes és a Z függélyesen felfelé van irányítva.

A két független erő erőfüggvénye

$$V = \tfrac{1}{2}mg\,\frac{c^3}{r^2} - mgz; \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

az erők componensei

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial V}{\partial x} = -mg\,\frac{c^3}{r^3}\cdot\frac{x+a}{r}\\ Y &= \frac{\partial V}{\partial y} = -mg\,\frac{c^3}{r^3}\cdot\frac{y}{r}\\ Z &= \frac{\partial V}{\partial z} = -mg\,\frac{c^3}{r^3}\cdot\frac{z}{r} - mg\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

A gömb befelé vont normálisának iránycosinusai:

$$-xr^{-1},\ -yr^{-1},\ -zr^{-1}$$

és így az egyensúly feltételei:

$$X : Y : Z = -xr^{-1} : -yr^{-1} : zr^{-1},$$

avagy:

$$x+a : y : (z+c^{-3}r^4) = x : y : z,$$

melyek írhatók:

$$(x+a)y = xy; \qquad yz = y(z+c^{-3}r^4); \qquad (x+a)z = x(z+c^{-3}r^4)\ .\ (4)$$

Az első egyenlet csak $y=0$-nál állhat fenn; a második az $y=0$-nál vagy az $r=0$-nál; a harmadik egyenlet feltétele:

$$ac^3z = xr^4 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (5)$$

Ezek közül az $r=0$ az erő centrumát jelenti és az m e *singuláris* helyzetben egyensúlyban marad és pedig a gömbfelület belső vagy külső oldalán, a szerint a mint a vonzás centruma e felület külső vagy belső oldalán fekszik.

E helyen kívül az $y=0$ és az (5) adják az egyensúlyi helyzetet; ez e szerint az $y=0$ sikú vertikális legnagyobb körön fekszik, melynek $x^2+z^2=a^2$ az egyenlete; evvel az (5) $ac^3\sqrt{a^2-x^2}=x4a^2(a+x)^2$, vagy:

$$16a^2x^2(x+a)^3-c^6(a-x)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

A bal oldalnak $x=a$ és $x=0$ között jelváltozata lévén: a (6)-nak e közben mindenesetre van reális gyöke s ez felel meg az egyensúlynak.

Jegyzet. A $V=$constans egyensúlyi görbe a gömbön a (2) szerint az

$$2mg(z-z_0)=mgc^3r^{-2}$$

egyenletnek felel meg; ezt az r (1) kifejezésével egyesítve:

$$c^3=4a(x+a)(z-z_0),$$

mely e görbe vetülete ez XZ síkra; ez egyenoldalú hyperbola, egyik asymptotusa a gömböt a vonzó centrumban érinti. De az m e görbén csak a *görbe menti* eltolódásokra nézve marad egyensúlyban, más irányu elmozdításokra nézve általában véve nem.

A *nyomás* itt a független erők eredőjével ellentetten egyenlő; a (3)-ból $-R=mg\{1+2c^3zr^{-4}+c^6r^{-6}\}^{\frac{1}{2}}$; ebbe a (4) és (5)-ből folyó értékek helyettezendők; a $V=$const. görbe pontjaira nézve pedig $r^{-2}=2c^{-3}(z-z_0)$ teendő. A.]

30. Az $x^2a^{-2}+y^2b^{-2}+z^2c^{-2}-1=0$ egyenletű sima ellipsoidon lévő m-re ható független erők $X=A$, $Y=B$, $Z=C$ állandók. Az egyensúly feltételei [28. §. (3)] $Bzc^{-2}=Cyb^{-2}$; $Cxa^{-2}=Azc^{-2}$; $Ayb^{-2}=Bxa^{-2}$; ezek közül kettőt az ellipsoid egyenletével combinálva, nyerjük:

$$x=\pm a\,.\,Aa:\sqrt{\ }.,\quad y=\pm b\,.\,Bb:\sqrt{\ }.,\quad z=\pm c\,.\,Cc:\sqrt{\ }.;$$

$$\sqrt{\ }.=\sqrt{A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2};$$

a nyomás itt

$$-R=\sqrt{A^2+B^2+C^2}. \quad \text{V.}$$

31. Az $x^2a^{-2}+y^2b^{-2}+z^2c^{-2}=1$ sima ellipsoid felületen lévő m-re $X=Ax$, $Y=By$, $Z=Cz$ független erők hatnak, hol A, B, C egyszerre positivok vagy egyszerre negativok; az egyensúly feltételei:

$$Byzc^{-2}=Czyb^{-2},\quad Czxa^{-2}=Axyzc^{-2},\quad Axyb^{-2}=Byxa^{-2};$$

melyek csak $A=Ka^{-2}$, $B=Kb^{-2}$; $C=Kc^{-2}$-vel elégíthetők ki, K tetszőleges állandó lévén. [Ez önként még abból is folyik, hogy az X, Y, Z-nek erőfüggvényei rendre $\frac{1}{2}Ax^2$, $\frac{1}{2}By^2$, $\frac{1}{2}Cz^2$ s így az összes erőfüggvény $V=\frac{1}{2}(Ax^2+By^2+Cz^2)$; a színfelület: $V=$const. ellipsoid, melynek fél tengelyei az A, B, C négyzetgyökeivel fordítva arányosak. A.

32. A független erők componensei $X=Ax+\alpha$; $Y=By+\beta$; $Z=Cz+\gamma$; bizonyíttassék be, hogy a niveau felület másodrendű felület s hogy ilyrendű felületnek marad, ha a földnehézség hozzálép. V.

33. Síma felületű, $r_1+r_2=2a$ egyenletű meghoszszabbodott forgási ellipsoidon (ovoidon) lévő pontra a fócusokból $R_1=C_1^2 r_1^{n_1}$ és $R_2=C_2^2 r_2^{n_2}$ centrális erők hatnak; bizonyíttassék be, hogy az egyensúlyi helyzetet a

$$C_1^2 r_1^{n_1}=C_2^2(2a-r_1)^{n_2} \quad \text{vagy a} \quad C_1^2(2a-r_2)^{n_1}=C_2^2 r_2^{n_2}$$

egyenlet határozza meg; a nyomás

$$-R=(R_1+R_2)\cos\tfrac{1}{2}\eta,$$

hol

$$4e^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\eta, \quad \eta=(r_1, r_2)\measuredangle,$$

e a lineáris excentricitás. V. ö. a 128. §. 3. pontja példáját. W. kieg. A.

34. Sima felületű $F=x^2a^{-2}+y^2b^{-2}+z^2c^{-2}-1=0$ ellipsoidon lévő nehéz pontra saját mg súlyán kívül még a felület középpontja felé irányított állandó Q erő hat. Itt $X=-Qx:r$, $Y=-Qy:r$, $Z=-(Qz:r)-mg$, hol $r^2=x^2+y^2+z^2$; az erőfüggvény:

$$V=-Q\sqrt{x^2+y^2+z^2}-mgz.$$

A $V=$constans egyenletet az $F=0$ egyenlettel egyesítve, nyerjük az ellipsoidon a szingörbéket; de ezek csak a saját ívelemeik mentén való elmozdulásokra nézve egyensúlygörbék. Az egyensúly közönséges feltételei, t. i., hogy az X, Y, Z componensek az $F=0$ felület normálisa iránycosinusaival arányosak, itt:

$$\alpha) \quad Q\frac{y}{r}\frac{z}{c^2}=\left(Q\frac{z}{r}+mg\right)\frac{y}{b^2}; \qquad \beta) \quad \left(Q\frac{z}{r}+mg\right)\frac{x}{a^2}=Q\frac{x}{r}\frac{z}{c^2};$$

a fel nem írt harmadik ezen első kettő folyománya. Ezek egyszerre állanak, de szétesnek

$$y=0; \quad mgrc^2=Qz(b^2-c^2) \quad \text{és:} \quad x=0; \quad mgrc^2=Qz(a^2-c^2)$$

egyenletekre, melyek közül a dolog természete szerint előbbi kettő közül *egy* s az utóbbi kettő közül szintén csak *egy állhat* fenn *egyszerre*; ezek e szerint négy egyenlet-pár-combinátiót engednek meg:

1) $y=0$; $x=0$; 2) $y=0$; $mgrc^2=Qz(a^2-c^2)$;
3) $mgrc^2=Qz(b^2-c^2)$; $x=0$; 4) $mgrc^2=Qz(b^2-c^2)$; $mgrc^2=Qz(a^2-c^2)$.

Az 1) a felület alsó és felső csúcsát jelenti; továbbá, írva

$$k_1^2=c^2:(a^2-c^2), \quad k_2^2=c^2:(b^2-c^2)$$

nyerjük az $F=0$ segélyével a 2)-ből:

$$x = \pm a \sqrt{\frac{Q^2 - (mg)^2 k_1^4}{Q^2 - (mg)^2 k_1^2}}; \quad y = 0;$$

a 3)-ból:

$$x = 0; \quad y = \pm b \sqrt{\frac{Q^2 - (mg)^2 k_2^4}{Q^2 - (mg)^2 k_2^2}};$$

végre a 4) combinátió csak $a=b$-, azaz forgási ellipsoid esetében állhat fenn, és párhuzamos kört jelent; sugarát a 2) x-e vagy a 3) y-ja adja.

Az egyensúly jellegének a V-ből való felkeresését az olvasóra bízzuk.

F. kieg. A.

35. A megelőző feladat, azon módosítással, hogy a felület középpontjából származó állandó Q erő *taszító*. Bizonyíttassék be, hogy az egyensúlyi helyzetek a vertikális két főmetszetben fekvő két-két, a centrumon symmetrikusan áthaladó egyeneseken fekszenek, de egy-egy egyenesen csak egy-egy reális egyensúlyi helyzet van; ezeken kívül a felület alsó s felső csúcsa is az. A bizonyítás menete teljesen ugyanaz, mint a megelőző feladatban. S. G.; V.

36. Az m nehéz pont az $F=x^2a^{-2}+y^2b^{-2}+z^2c^{-2}-1=0$ ellipsoidon marad, $2c$ kis tengelye vertikális, a $2b$ középső tengely egyik végpontjában székelő, a távolsággal arányos $(mgb^{-1})\,r$ vonzó erő is hat m-re, hol $r^2=x^2+(y+b)^2+z^2$. [A független erő componensei

$$X=-mgxb^{-1}; \quad Y=-mg\,(y+b)\,b^{-1}; \quad Z=-mg\,(z+b)\,b^{-1}.$$

Az egyensúly közönséges feltételei itt:

$$X : Y : Z = x : (y+b) : (z+b) = xa^{-2} : yb^{-2} : zc^{-2}, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

vagy:

$$xya^2 = x\,(y+b)\,b^2 \quad \text{és} \quad y\,(z+b)\,c^2 = z\,(y+b)\,b^2,$$

a fel nem írt harmadik e kettő folyománya.

Ezek egyszerre állanak, de szétesnek

$$x=0; \quad ya^2=(y+b)\,b^2 \quad \text{és} \quad y=z=-b; \quad (y+b)\,y^{-1}\,b^2=(z+b)\,z^{-1}\,c^2$$

egyenletekre, melyek közűl az első párból csak *egy*, a másodikból szintén csak *egy* állhat fenn egyszerre; de ezek csak az:

1) $x=0, \quad y=z=-b;$ 2) $x=0, \quad (y+b)\,y^{-1}b^2=(z+b)\,z^{-1}\,c^2;$

3) $a^2=(y+b)\,y^{-1}\,b^2, \quad (y+b)\,y^{-1}\,b^2=(z+b)\,z^{-1}\,c^2$

combinátiókat engednek meg.

Az 1) esetben $X=Y=Z=0$, e helyen a távolsággal egyenesen arányos eredő vonzó erő zérus, a mi várható is volt; a 2) esetben a második egyenletet egyesítve az $F=0$-nak most $y^2b^{-2}+z^2c^{-2}=1$ alakjával, általában véve négy, közöttük egyensúlyi helyzetet is nyerünk, a 3) esetben áll

$$(y+b)\,y^{-1}b^2=a^2=(z+b)\,z^{-1}\,c^2,$$

mely új két reális egyensúlyi helyzetet nyújt. Az erőfüggvény itt $V=-mg\,(r^2b^{-1}+z)$. A.]

37. Nehéz pont súlya $mg=P$; reá ezenkívül még állandó nagyságú, a coordináták kezdete felé tartó *vonzó* Q centrális erő hat. Ekkor $r^2=x^2+y^2+z^2$ s a független erők componensei:

$$X=-Qx:r; \qquad Y=-Qy:r; \qquad Z=-Qz:r-P;$$

az erőfüggvény

$$V=-Qr-Pz.$$

A színfelületek $V=$constans egyenlete írható:

$$Q^2(x^2+y^2+z^2)=P^2(c-z)^2,$$

c tetszőleges állandó lévén; e felület vertikális symmetria-tengelyű forgási ellipsoid, paraboloid, hyperboloid a szerint, a mint $P<Q$, vagy $P=Q$, vagy $P>Q$.

A nyomás nagysága e felületeken

$$-R=\{X^2+Y^2+Z^2\}^{\frac{1}{2}}=\{P^2+Q^2+2PQzr^{-1}\}^{\frac{1}{2}},$$

avagy a $Pz=Pc-Qr$ helyettezés segélyével r-et kiküszöbölve:

$$-R=\{P^2-Q^2+2Q^2c:(c-z)\}^{\frac{1}{2}};$$

ez a symmetria-tengely felé tart (a reális egyensúlyi esetekben a hyperboloidnak csak alsó köpenye, de az ellipsoid s a paraboloid egész felülete szerepel). S. G.; V.

38. Egy $x^2+y^2=2pz$ sima paraboloidon levő m-re ható független erőcomponensek $X=-A^2y$; $Y=+A^2x$; $Z=-B^2z$; az egyensúly feltétele $A^2(xdy-ydx)-B^2zdz=0$ avagy, egyesítve a felület egyenletével:

$$2A^2p\,(xdy-ydx)=B^2\,(x^2+y^2)\,dz.$$

Téve: $u^2=x^2+y^2$; $x=u\cos\vartheta$, $y=u\sin\vartheta$, nyerjük: $2A^2p\,.\,d\vartheta=B^2dz$; avagy $2A^2p\vartheta=B^2z$, illetve $4A^2p^2\vartheta=B^2u^2$. E két egyenlet a paraboloidon lehetséges egyensúlyi helyzetek görbéjét adják; az egyenletek szemlátomást csavarvonalat jelentenek: az első e vonalnak egy Z-tengelyű körhengerre való vetülete, mely henger sikba fejtésével egyeneset ád; a második vízszintes, az u növekedtével szűkülő menetű spirális. A *nyomás:*

$$-R=\{A^2\,(x^2+y^2)+B^2z^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Erőfüggvény itt nincs. S. G.

39. Az m-re a fölnehézségén kívül egy meghatározott vízszintes egyenestől való távolság négyzetével fordítva arányos s e vonalra merőleges vonzó vagy taszító erő hat; ekkor

$$X=0; \quad Y=-Ky:(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}; \quad Z=-Kz:y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-mg.$$

Az erőfüggvény:

$$V=\frac{K}{\sqrt{y^2+z^2}}-mgz,$$

s így a színfelület egy vízszintes alkotójú henger, melynek vertikális harántmetszete

$$K=mg\,(c+z)\sqrt{y^2+z^2};$$

e görbe $c+z=0$-ra nézve vizszintes két asymptotussal bír s nyitott görbe.

A *nyomás* itt

$$-R=\{K^2\,(y^2+z^2)^{-2}+2Kmgz\,(y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+m^2g^2\}^{\frac{1}{2}}.\qquad \text{A.}$$

40. A megelőző feladat avval a módosítással, hogy a nevezett egyenes *vertikális;* ekkor:

$$X=-Kx:(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}};\qquad Y=-Ky:(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}};\qquad Z=-mg.$$

Az erőfüggvény

$$V=\frac{K}{\sqrt{x^2+y^2}}-mgz$$

és az egyensúlyi felület egyenlete:

$$K=mg\,(c+z)\sqrt{x^2+y^2};$$

ez Z tengelyű forgási felület; melynek a $z=-c$ asymptota-síkja és $|z|=\infty$-ben csúcsa van. A.

132. §. *Feladatok pont egyensúlyára előírt érdes pályákon és felületeken.*

41. Anyagi pontra, mely i hajlásszögű érdes lejtőn van, a földnehézségén kívül egy másik saját súlyával egyenlő, lefelé működő erő hat, mely η hegyes szöget képez a lefelé menő lejtővel; bizonyíttassék be, hogy egyensúly esetében $\eta=i+\frac{1}{2}\pi-2\gamma$, hol γ a $-\operatorname{arc\,tg} k$ és $+\operatorname{arc\,tg} k$, azaz $-\varepsilon_0$ és $+\varepsilon_0$ között fekvő szög, k lévén a surlódás együtthatója és ε_0 a surlódás szöge. V.

[A két erőnek a lejtőhöz párhuzamos és normális vetületei:

$$mg\,(\sin i+\cos\eta);\qquad mg\,(\cos i+\sin\eta);$$

a kettő viszonya

$$(\sin i+\cos\eta):(\cos i+\sin\eta)=\operatorname{tg}\gamma,$$

hol egyensúly alkalmával $-\varepsilon_0<\gamma<+\varepsilon_0$; e feltételből

$$-\sin(\gamma-i)+\cos(\gamma+\eta)=0,$$

mely a jelzett eredménynyel egyenlő. A.]

42. Nehéz, P súlyú m pont i hajlású érdes lejtőn van; hozzá van erősítve egy súlytalan fonál, mely súlytalan szilárd csigán át van vetve

s másik, lelógó szabad vége Q súlyú tömeget visz. A fonál egyenletes feszültsége, Q az m-től a csigáig és ettől a Q-ig terjedő része egy vertikálisban vannak; az előbbi fonálrész a felfelé menő lejtővel η szöget képez; bizonyíttassék be, ha m épen a siklás határán van, hogy

$$Q\cos(\eta \pm \varepsilon_0) = P \,.\, \sin(i \mp \varepsilon_0). \qquad \text{V.}$$

[Az egyensúly feltétele itt

$$(P\sin i - Q\cos\eta) : (P\cos i - Q\sin\eta) = \pm \operatorname{tg}\varepsilon_0;$$

hol egyszere a felső vagy egyszerre az alsó előjelek érvényesek, a szerint, a mint a Q az m-et a lejtőn felfelé vagy lefelé mozgatni törekszik. A.]

43. Anyagi P súlyú m pontot i hajlású érdes lejtőn épen még egyensúlyban tart egy vízszintes Q erő; másrészt ugyanez az m egy i_0 hajlású, ugyanazon anyagú lejtőn saját súlya alatt szintén még épen egyensúlyban marad; bizonyíttassék be, hogy ekkor áll

$$\operatorname{tg} i = \frac{Q + P\operatorname{tg} i_0}{P - Q\operatorname{tg} i_0}. \qquad \text{W., S. G.}$$

[Ugyanis, itt i_0 a surlódás szöge és az egyensúly feltétele itt:

$$(P\sin i - Q\cos i) : (P\cos i + Q\sin i) = \operatorname{tg} i_0,$$

mely a jelzett eredmény. A.]

44. Nehéz, P súlyú m pont i hajlású érdes lejtőn van; reá saját súlyán kívül még egy tetszőleges α, β, γ irányú, Q nagyságú erő olyképen hat, hogy m épen a siklás határán (sikló félben) van. A positiv X-tengelyt a lejtő esése mentén, az Y-tengelyt a lejtő síkjában vízszintesen, a Z-t e síknak fölfelé menő normálisa mentén választva, a független erők:

$$X = Q\cos\alpha + P\sin i; \qquad Y = Q\cos\beta; \qquad Z = Q\cos\gamma - P\cos i;$$

a surlódás melletti a siklás határán lévő egyensúly feltétele itt

$$-kZ = (X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}},$$

melyet P, Q, i, α, β, γ-val kifejezve, minden irányhoz megadja a Q-t s megfordítva. Részleteztessék ez az összefüggés. S. G.

45. Csúcsával fölfelé néző érdes felület domború oldalán vagy csúcsával lefelé néző felület homorú oldalán lévő nehéz pontnak egyensúlyi helye a felületnek a csúcs körül fekvő azon része, melyet az *isoklin normálisok egy görbéje* * határol, az a görbe ugyanis, mely a felületnek azon pontjait kapcsolja összse, melyekben e felület normálisai

---

* V. ö. Suták József: Az isoklin normálisok görbéinek meghatározása. Tudori értekezés, Budapest 1891.

a vertikálissal mind ugyanazon ε_0 szöget képeznek, $\operatorname{tg}\varepsilon_0=k$ lévén a surlódás együtthatója. Példa:

Az $F=x^2a^{-2}+y^2b^{-2}+z^2c^{-2}-1=0$ egyenletű ellipsoid $2c$ tengelye legyen vertikális; a normális hajlásszögének feltétele itt

$$(1+k^2)^{-\frac{1}{2}}=\cos\varepsilon_0=zc^{-2}:\sqrt{x^2a^{-4}+y^2b^{-4}+z^2c^{-4}},$$

mely írható

$$x^2a^{-4}+y^2b^{-4}-z^2c^{-4}\operatorname{tg}^2\varepsilon_0=0;$$

ez *ellipsises kúp*, melynek az $F=0$ ellipsoiddal való metszővonala a keresett görbe; ez az ellipsoid felület azon részét határolja, mely a $2c$ tengely felső vége körül elterülvén, az egyensúly helyét képviseli. A.

46. A P súlyú m pont vertikális tengelyű, csúcsával fölfelé néző p parameterű parabola külső érdes oldalán van, reá a földnehézségén kívül még a gyúpontból induló, a távolság négyzetével fordítva arányos $P\frac{1}{4}p^2:r^2$ nagyságú *vonzó* erő hat, mely a csúcsban P-vel egyenlő. A k legyen itt $0{\cdot}6=3:5$ es α az érintőnek a vízszinteshez való hajlásszöge. Ha az m még egyensúlyban ugyan, de a lefelé való siklás határán van, akkor áll:

$$-R=P\cos\alpha\,(1+\cos^4\alpha);\qquad 5\operatorname{tg}^5\alpha-3\operatorname{tg}^4\alpha+10\operatorname{tg}^3\alpha-6\operatorname{tg}^2\alpha-6=0,$$

mely a $\operatorname{tg}\alpha=1$ gyököt is adja; osztva $\operatorname{tg}\alpha-1$-el, marad

$$5\operatorname{tg}^4\alpha+2\operatorname{tg}^3\alpha+12\operatorname{tg}^2\alpha+6\operatorname{tg}\alpha+6=0,$$

mely positiv gyököt nem ád s így az $\alpha=\frac{1}{4}\pi$ a keresett pont, mely az itt vízszintes góczhúrnak a görbével való két metszőpontja. S. G.

[Ugyanis itt könnyű bebizonyítani, hogy áll $\alpha=\frac{1}{2}\vartheta$, hol ϑ a parabola csúcsa és az r közötti polárszög; ekkor [Math. Rep. 64. §. (14)] a parabola egyenlete $r=p:2\cos^2\alpha$, továbbá

$$P\tfrac{1}{4}p^2:r^2=P\cos^4\alpha$$

a centrális erő; az egyensúly feltétele:

$$(P\sin\alpha-P\cos^4\alpha\sin\alpha):(P\cos\alpha+P\cos^4\alpha\cos\alpha)=3:5,$$

mely írható:

$$5\operatorname{tg}\alpha\,(1-\cos^4\alpha)=3\,(1+\cos^4\alpha);$$

téve benne $\cos^2\alpha=(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^{-1}$, a jelzett egyenletet nyerjük. A.]

47. A 128. §. 2. példája szerint az m nehéz pont az ω szögsebességgel forgó, p parameterű, csúcsával lefelé néző forgási paraboloid sima belső oldalán mindenütt egyensúlyban marad, míg $p\omega^2=g$; ekkor a forgási tengelytől r távolságban lévő m-re ható $mr\omega^2$ középfutó erőnek és mg súlyának eredője a vízszintessel α szöget képez s a felület mindenkori normálisába esik.

Érdes ily felület esetében az ω bizonyos Ω határértékig megváltoztatható a nélkül, hogy az egyensúly megszűnnék; az $mr\Omega^2$ és az mg

eredője most A szöget képez a vízszintessel és $A-\alpha$ szöget a felület normálisával; az egyensúly határfeltétele $\operatorname{tg}(A-\alpha)=\pm k=\pm tg\,\varepsilon_0$.

Ámde [128. §. (5)]: $\operatorname{tg}\alpha=g:\omega^2 r$; $\operatorname{tg}A=g:\Omega^2 r$ s így e feltétel

$$g(\Omega^2-\omega^2)\,r=\mp k\,(\Omega^2\omega^2 r^2+g^2),$$

melyből csekély számítással

$$\Omega^2=\omega^2\mp\frac{k}{r}\,\frac{g^2+\omega^4 r^2}{g\pm k\omega^2 r},$$

hol egyszerre használandók a felső vagy az alsó előjelek. A.

48. A P súlyú m pont az $F=xy-az=0$ egyenoldalú hyperbolás paraboloid érdes felületén saját súlya és a vertikális Z-tengelytől való u távolság első hatványával arányos $Q=Pu:a$ nagyságú vízszintes *taszító* erő hatása alatt áll; kerestessék e felületen az a görbe, melyen m még egyensúlyban, de épen sikló félben van. A független erők componensei $X=Pxa^{-1}$; $Y=Pya^{-1}$; $Z=-P$; eredőjük $Pa^{-1}\sqrt{x^2+y^2+a^2}$; a határegyensúly feltétele [29. §. (1) és (3).] *Eredő* . $\sin\varepsilon_0=-\operatorname{tg}\varepsilon_0 R$, hol $-R$ az X, Y, Z erőknek az F-normálisa menti componense; e normális irány-cosinusai $y:\sqrt{y^2+x^2+a^2}$, $x:\sqrt{\ldots}$, $-a:\sqrt{\ldots}$ lévén, a feltétel:

$$Pa^{-1}\sqrt{x^2+y^2+a^2}=\cos^{-1}\varepsilon_0\left(2P\frac{xy}{a}+Pa\right):\sqrt{\ldots},$$

azaz

$$(x^2+y^2+a^2)\cos\varepsilon_0=2xy+a^2=a\,(2z+a).$$

E két egyenlet közül $2xy+a^2=a\,(2z+a)$ az adott hyperbolás paraboloidot jelenti s az

$$(x^2+y^2+a^2)\cos\varepsilon_0=a\,(2z+a)$$

egy Z tengelyű forgási paraboloidot; metszővonalúk a keresett görbe, vízszintes vetületének egyenlete

$$(x^2+y^2+a^2)\cos\varepsilon_0=2xy+a^2,$$

mely, miután discriminánsa $\cos\varepsilon_0^2-1<0$, csak hyperbolát jelenthet. E szerint a keresett egyensúlyi hely végtelen ágakkal biró térbeli görbe. S. G.; A.

49. Nehéz test i hajlású érdes lejtő legmagasabb helyére hozandó; bizonyíttassék be, hogy könnyebb a testet oda emelni vagy a lejtő hajlásvonalán felfelé húzni, a szerint, a mint a surlódás k együtthatója nagyobb * vagy kisebb, mint $\sin\frac{1}{4}(\pi-2i):\sin\frac{1}{4}(\pi+2i)$. W., K., A.

[Ugyanis, a felfelé húzó erő ellensúlyozza a P-nek a lejtő menti $P\sin i$ componensét és legyőzi a $(P\cos i).k$ surlódást; e szerint ez az erő legalább $P(k\cos i+\sin i)$ nagyságú; a felemelésre szükséges erő P; a

* Walton, i. h. 55. l. és utána Kraft, i. h. I. kötet 499. l. tévesen megfordítva adják az eredményt.

jelzett alternativa kifejezése: $P \lesseqgtr P(k \cos i + \sin i)$ vagy $(1 - \sin i) : \cos i \gtrless k$ és ez a fent kimondott eredmény. A.]

50. Vízszintes tengelyű csavarvonal alakú cső érdes belsejében nehéz pont van; ez e csőnek azon részein marad egyensúlyban, melyek érintőinek a vízszintessel képezett i szögére nézve $k \geqq \operatorname{tg} i$ áll; e részek a tengelyen átmenő vízszintes síkra nézve symmetrikus, isolált ívek. A

II. Az anyagi pont mozgásának problémái.

133. §. *Általános megjegyzések a geométriai és az anyagi pontok szabad- és kényszer-mozgására nézve.*

1. Anyagi pont mozgási problémáinál általánosságban a geométriai pont ebbeli problémáinál tárgyaltak érvényesek; de ezeken kívül hozzájárulnak itt a tömeg- és erőviszonyok, mely utóbbiak különösen a kényszermozgásnál külön megvizsgálandók s a megfejtést gyakran nagy mértékben megnehezítik.

2. Ha az m pont teljesen szabad, akkor derékszögű mozgásegyenletei

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z;$$

s ekkor ezeket csak m-el kell osztanunk, hogy a megfelelő kinematikai egyenleteket nyerjük; ezért a kinematikai problémák is mind, megoldásaikkal együtt az anyagi pont megfelelő problémáinak tekintendők, csakhogy a mi ott gyorsulás, az itt gyorsító erő.

Ezen oknál fogva a Kinematika 90—129. §§-aiban felsorolt példák, eljárások és feladatok mind anyagi pont mozgására vonatkoztathatók; ezért is az e fajta mozgások közűl itt rendkívüli fontosságánál fogva csak a távolság négyzetével fordítva arányos erővel egymást vonzó két tömegpont *(bolygó)* mozgásával foglalkozunk, mely a pont relativ mozgására vezethető viszsza.

3. Másként áll a dolog az anyagi pont kényszermozgására, valamint ellenálló közegben és surlódással való mozgására nézve: az előbbi mozgásnál a kényszer folytán fellépő nyomás és ellennyomás, az utóbbi mozgásoknál pedig a mechanikai energia szétszórása (dissipátiója) oly viszonyokat tüntetnek elő, melyek tisztán kinematikai fogalmakkal teljesen nem tárgyalhatók.

Ez okoknál fogva a következő §§-okban az ily fajta problémákkal fog kelleni foglalkoznunk; kiválasztjuk azokat, melyek nem annyira számításbeli de főleg mechanikai és általánosabb physikai érdekkel bírnak.

A kifejtést magát mindenütt a legszükségesebbre szorítjuk, de a követett eljárás menetét mindig összefüggőleg, minden lényeges lépés felemlítésével adjuk.

1. Eljárások és példák anyagi pont mozgására.

a. *Az általános gravitátió ; a két test problémája ; Keppler feladata.*

1) Newton vonzási törvénye és az attractió állandója.

134. §. *Az általános gravitátió (tömegvonzás) törvénye, mint a tapasztalás kifejezése. A gravitátió állandója.*

1. Keppler törvényei naprendszerünk bolygói mozgásának néhány alaptulajdonságát mint a megfigyelés tapasztalati eredményeit fejezik ki. [Kinematika 123. §. 227. l.] Ha e mozgásokat a nap középpontjára mint centrumra vonatkoztatott, csak a távolságtól függő középponti erő behatása alatt végbemenőknek tekintjük s ezen erő törvényét felkeressük, miként ezt Newton tette: a naptól való távolság négyzetével fordítva arányos törvényt nyerünk, [Kinematika i. h.] melyek állandója [l. alább] minden bolygóra nézve ugyanaz.

De Newton a földre s a holdra vonatkozólag is ugyanezt a törvényt találta, ugyanis, hogy a föld felületéhez közel lévő, szabadon eső test gyorsulása s a holdnak a földhöz viszonyított gyorsulása a földsugár s a holdtávolság négyzeteivel fordítva arányosak. Hasonlóképen érvényeseknek találtattak Keppler idézett törvényei a több holdas bolygók holdjaira nézve, és első két törvénye az üstökösökre nézve is. Az ez irányú tudományos kutatás eredménye értelmében, Newton attractio-törvénye: *egymásra ható pontszerű tömegek vonzása az összekapcsoló egyenes mentén történik, a ható tömegek szorzatával egyenesen, egymástól való távolságaik második hatványával fordítva arányos s az egyik tömegnek a másikra való vonzása ellentetten egyenlő az utóbbinak az előbbire való vonzásával.* E törvény, tapasztalat szerint, teljesen elegendő naprendszerünk minden tagja mozgásának [beleértve a bolygók egymásra gyakorolt hatását, az ú. n. perturbátiókat, háborgatásokat is] az eddigi legpontosabb megfigyelésekkel egyező elméleti meghatározására.

2. A csillagászok azonban az ú. n. kettős csillagokra nézve is azt a meglepő tapasztalatot tették, hogy bármelyiküknek a másikhoz viszonyított relativ mozgása Keppler első két törvénye szerint megyen végbe (áll t. i. a területek elve s hogy a pályák ellipsisek), miből a

supponált centrális törvény számára ismét a NEWTON-féle következik [Kinematika 123. §. I. pontja]. De a kérdést, vajjon az attractió állandója a tömegek ily rendszereire nézve ugyanaz, mint naprendszerünk tömegei vonzására vonatkozólag, ezt a meszsze távolban levő tömegek s naprendszerünk kölcsönös hatása csekély ismereténél fogva még nem lehetett eldönteni; mindazonáltal szokás felvenni, hogy ez az állandó a világür minden tömegvonzására nézve egyenlő.*

3. NEWTON ezen törvénye értelmében az m_1-re az m_2 által gyakorolt erő, mely (a hatás- és viszszahatásnak itt is tapasztalatszerűleg érvényes tételénél fogva) az m_2-re az m_1 által gyakorolt erővel ellentetten egyenlő:

$$P=C^2\frac{m_1m_2}{r^2} \quad \text{vagy} \quad P=f\frac{m_1m_2}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

hol C^2 vagy f az *általános gravitátió állandója*. Ezen fontos állandó *jellege* (mérete, dimensiója) abból adódik, hogy (1)-ben P mozgató (esetleg statikai) erőt, m_1-, m_2-, tömegeket, r ezek egymástól való távolságát jelenti és így

$$\frac{\text{tömeg, hoszszúság}}{(\text{idő})^2}=\text{erő}=C^2.\frac{\text{tömeg. tömeg}}{(\text{hoszszúság})^2},$$

$$C^2=f=\frac{(\text{hoszszúság})^3}{(\text{tömeg})\ (\text{idő})^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

---

* Ujabb időben BERTRAND a következő problémát állította fel: Valamely tömegpont kúpszeletet ír le oly centrális erő befolyása alatt, mely csak a mozgó pont helyzetétől függ; a kezdet feltételei tetszőlegesek lévén, milyen az erő törvénye? [Comptes Rendus de l'Académie Francaise, LXXXIV. 731—732. ll. Paris, 1877]. E feladatot egyidejűleg DARBOUX [C. R. LXXXIV. 760—762 és 936—938. ll.] és HALPHEN [C. R. LXXXV. 939—941. ll. 1877] fejtették meg. Eredményük, melyet hely szűke miatt itt csak említhetjük, a következő:

Ha r és ϑ a polárcoordináták, a vonzó centrális erőknek csak következő két családja elégíti ki a követelményeket:

$$-\frac{\mu C^2 r}{(Br\cos\vartheta+Er\sin\vartheta+C)^3}; \qquad -\frac{\mu}{r^2(A\cos^2\vartheta+D\sin 2\vartheta+F\sin^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}$$

hol μ, A, B, C, D, E, F állandók.

Ha az erőket csak az r-től függőnek tekintjük, akkor a nevezőknek ϑ-től függetleneknek kell lenniök, a mi az első erőnél csak $B=E=0$, a másodiknál csak $D=0$, $A=F$ feltételeknél lehetséges, miáltal

$$-\frac{\mu}{C^2}r; \qquad -\frac{\mu}{A^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{r^2}$$

mint az egyedül lehetséges két erő következik. Az elsőnél a pálya ellipsis, melynek középpontja az erő székhelye [Kinematika 112—115. §§.], a másik NEWTON törvénye, melynél KEPPLER törvényei érvényesek, v. ö. a jelen kötet 135—154. §§-ait. A kettős csillagok mozgása (a szöveg 2. pontja) szintén ez utóbbira vall.

A közvetlenül vagy közvetve nyilvánuló tömegvonzás hatásának megfigyeléséből az f nyerhető; Maskelyne és Hutton (1775- és 1778-ben) a scótországi, különálló, közel kúpalakú Shehallion hegy vonzását a függő ónra, Cavendish (1798-ben), Reich (1852-ben) nagytömegű golyók vonzását a Coulomb-féle torzió-mérleg karjai végén levő gömböcskékre vizsgálták meg; Baily 1842-ben, Cornu és Bailie 1870-, 73-, 78-ben s í. t. ismételték Cavendish kisérleteit. Közönséges mérleg segélyével mérte a tömegvonzást Jolly (1880) és utána Poynting (1878—91) nagy pontossággal. 1886-tól kezdve báró Eötvös Loránd, a Coulomb-féle mérleg érzékenységét rendkívüli módon fokozva, ennek oly elrendezést adott hogy a vonzó tömegek áthelyezése folytán beálló vonzáskülönbségek a mérleg-karnak néhány ív-foknyi kitérést adtak s a gravitátió állandója még egy előadási kisérletben is majdnem egy százaléknyi pontossággal volt meghatározható.*

Ugyanily eljárással, finom quarcz-fonálon függő torsió-mérleg-kar segélyével végzett rendkívül gondos méréseket Boys (1889—1894), melyek eredménye csak $\frac{1}{10}$ százalékkal nagyobb, mint a báró Eötvös által talált, (3)-ban kiírt érték.

Ezen mérések eredménye következőleg formulázható:

Két egy-egy gramm tömegű anyagi pont (vagy homogén gömb) mely egymástól egy centimeter távolságban van, egymásra oly vonzást gyakorol, mely

$$0{\cdot}0000000665.\,\text{din}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

hol a 665 értékének $\frac{1}{500}$-ad részéig megbízható s így benne az 5 már nem egészen biztos; továbbá itt a *din* a c. g. s. rendszer erőegysége, mely írható [15. §. (1)]:

$$\text{din} = \text{gramm. centimeter} : (\text{secundum})^2.$$

[Miután {17. §. (1)} a *din* Budapesten körülbelül 100 meter magasságban az ádriai tenger szine felett a gramm súlyának 1/980·85-ed része, a (3) kifejezte erő még:

$$\left.\begin{aligned} 6{\cdot}65\ 10^{-8}.\ 1{\cdot}0195\ 10^{-3}\ \text{gr. súly} &= 6{\cdot}78.10^{-11}\ \text{gr. súly} = \\ &= 0{\cdot}0000000000678\ \text{gramm-súly}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3a)$$

mely közönséges erőegységekben adja ezen vonzás értékét].

A (3) szerint e golyók mindegyikének a gyorsulása (ha ezek szabadon mozoghatnának):

* Ezen kisérletekre vonatkozó összefoglaló jelentés a M. T. Akadémia 1896. évi április hó 20-án tartott ülésén terjesztetett elő; v. ö. M. T. Ak. Math. és Termtt. Értesítő XIV. kötete 221—266. ll., Budapest 1896.

$$0{\cdot}000000065\,.\,\frac{\text{centimeter}}{(\text{secundum})^2};$$

és így, ha e két tömeg az egy centimeter távolságban nyugalomban van s csak kölcsönös vonzásuknak alávetve, elbocsáttatnak: mindegyik az elbocsátás után az első másodpercz alatt

$$0{\cdot}0000000665\,.\,\frac{\text{centimeter}}{\text{secundum}}$$ sebességet nyer

és

$$0{\cdot}0000000665\,.\,\tfrac{1}{2}\,\text{centimeter}$$ utat fut be.

Az (1), (2) (3) értelmében $663.10^{-10}\,\text{din} = C^2.(\text{gramm})^2 : (\text{centimeter})^2$ miből

$$C^2 = f = 0{\cdot}0000000665\,\frac{(\text{centimeter})^3}{\text{gramm.}\,(\text{secundum})^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

A csillagászok ebbeli állandóját l. a 140. §. 3. pontjában.

2) A két test problémája: bolygók és üstökösök mozgása a nap körül; holdak mozgása bolygójuk körül.

135. §. *A* Newton*-féle törvény szerint egymást vonzó két szabad tömegpont mozgásegyenletei.*

Jeleljék:

m_1, m_2 a két tömegpont tömegeit,

x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 ezek coordinátáit, vonatkoztatva szilárd coordináta-rendszerre;

r egymástól való távolságukat, melyet m_1-től m_2-felé számítunk positivnek;

x, y, z e távolság derékszögű vetületeit, azaz az m_2-nek relativ (az m_1-hez viszonyított) coordinátáit;

x_0, y_0, z_0 az m_1 és m_2 tömegközéppontjának coordinátáit,

ξ_1, η_1, ζ_1 az m_1-nek
ξ_2, η_2, ζ_2 az m_2-nek
} közös tömegközéppontjukhoz viszonyított relativ coordinátáit.

ϱ_1 és ϱ_2 az m_1- s az m_2 távolságát e tömegközépponttól.

C^2 a gravitátió állandóját.

Ekkor e coordinátákra nézve a 39. ábra és a 24. §. első lábjegyzéke szerint:

$$x = x_2 - x_1; \qquad y = y_2 - y_1; \qquad z = z_2 - z_1 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}; \quad y_0 = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}; \quad z_0 = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2} \quad . \quad (2)$$

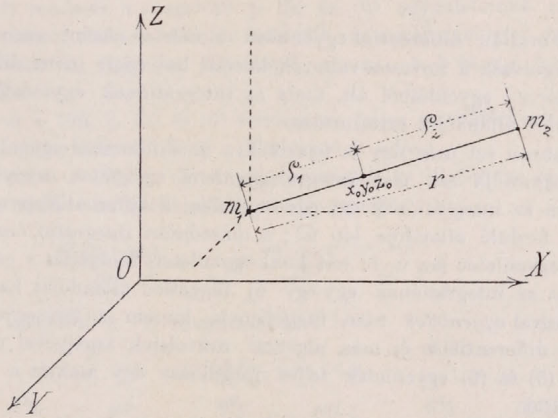
$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{m_2}{m_1+m_2}x; & \eta_1 &= -\frac{m_2}{m_1+m_2}y; & \zeta_1 &= -\frac{m_2}{m_1+m_2}z \\ \xi_2 &= +\frac{m_1}{m_1+m_2}x; & \eta_2 &= +\frac{m_1}{m_1+m_2}y; & \zeta_2 &= +\frac{m_1}{m_1+m_2}z \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\xi_2 - \xi_1 = x; \qquad \eta_2 - \eta_1 = y; \qquad \zeta_2 - \zeta_1 = z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\varrho_2 - \varrho_1 = r; \qquad \varrho_1 m_1 + \varrho_2 m_2 = 0; \qquad \varrho_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}r; \qquad \varrho_2 = +\frac{m_1}{m_1+m_2}r.$$

Az m_1-re az m_2 által gyakorolt vonzó erő (melylyel ellentetten egyenlő az m_2-re az m_1-ből eredő vonzó erő):

$$C^2\frac{m_1 m_2}{r^2};$$



39. ábra.

iránya a positiv r-ével esik egybe, melynek iránycosinusai rendre

$$\frac{x_2-x_1}{r}, \qquad \frac{y_2-y_1}{r}, \qquad \frac{z_2-z_1}{r}.$$

Ezen erő derékszögű vetületei az m_1-re ható mozgató erő összetevői:

$$\left.\begin{aligned} m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= C^2\frac{m_1m_2}{r^2}\cdot\frac{x_2-x_1}{r} \\ m_1\frac{d^2y_1}{dt^2} &= C^2\frac{m_1m_2}{r^2}\cdot\frac{y_2-y_1}{r} \\ m_1\frac{d^2z_1}{dt^2} &= C^2\frac{m_1m_2}{r^2}\cdot\frac{z_2-z_1}{r} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Az m_2-re az m-től gyakorolt mozgató erő összetevői a megelőzőkkel, rendre ellentetten egyenlők:

$$\left.\begin{aligned} m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -C^2\frac{m_1m_2}{r^2}\cdot\frac{x_2-x_1}{r};\\ m_2\frac{d^2y_2}{dt^2} &= -C^2\frac{m_1m_2}{r^2}\cdot\frac{y_2-y_1}{r};\\ m_2\frac{d^2z_2}{dt^2} &= -C^2\frac{m_1m_2}{r^2}\cdot\frac{z_2-z_1}{r};\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(6)$$

Az (5) és (6) kifejezések a két bolygó mozgásának simultán (együttesen fennálló) differentiál-egyenlet-rendszerét képezik, mely *hat* másodrendű, összesen az $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, t$ *hét* változót tartalmazó differentiál-egyenletből áll; a változók csak egyike független.

A simultán differentiál-egyenletek elmélete szerint ezen rendszer teljes megoldása a nevezett változók közötti hat *véges* (nem differentiál-, hanem *törzs*-) egyenletből áll, mely az integrátiónak egymástól független *tizenkét* állandóját tartalmazza.

Gyakran ezt még úgy is fejezik ki: A differentiál-egyenletek egyszeri integrátiója *hat* első integrálegyenletet szolgáltat, melyek mindegyikében az integrátiónak egy-egy független, a differentiálegyenletekben elő nem forduló állandója lép fel; a másodszori integrátió *hat* második integrál-egyenletet (az ú. n. hat *törzs*-egyenletet) szolgáltat s ezek mindegyikéhez az integrátiónak egy-egy új független állandóját kapcsol. Az első integrál-*egyenletek* nem függetlenek, hanem a törzsegyenletekből egyszeri differentiálás és más, algebrai műveletek segélyével nyerhetők.

Az (5) és (6) egyenletek teljes megoldása egy alakját a következő §-ban adjuk.

136. §. *A bolygók rendszerének tömegközéppontja egyenletesen mozog egyenesben. A bolygók relativ mozgása centrális mozgás.*

A két bolygón kívül lévő tömegeknek amazokra való hatásától eltekintünk, azaz az m_1-t és m_2-t csak egymásra való kölcsönös hatásuk befolyása alatt mozgóknak tekintjük.

E mozgás a megelőző §. (5) és (6) egyenleteinek van alávetve.

1. Összegezve rendre e rendszerek első, második és harmadik egyenleteit, nyerjük:

$$\left.\begin{aligned} m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} &= 0;\\ m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}+m_2\frac{d^2y_2}{dt^2} &= 0;\\ m_1\frac{d^2z_1}{dt^2}+m_2\frac{d^2z_2}{dt^2} &= 0;\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(1a)$$

mely egyenletek, tekintettel a megelőző §. (2) összefüggéseire, kifejezik, hogy a rendszer $x_0 y_0 z_0$ helyzetű tömegközéppontjának gyorsulása zérus, azaz, hogy

$$\frac{d^2x_0}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2y_0}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2z_0}{dt^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ezekből

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_0}{dt}=v_x, && \frac{dy_0}{dt}=v_y, && \frac{dz_0}{dt}=v_z, \\ &x_0=v_x t+a_0, && y_0=v_y t+b_0; && z_0=v_z t+c_0; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2)$$

hol v_x, v_y, v_z a tömegközéppont *állandó* sebességi összetevői és a_0, b_0, c_0 e pont coordinátái $t=0$-kor; e szerint e pont állandó irányú és nagyságú sebességgel halad a térben tovább (mely eredmény a tömegközéppont mozgása megmaradása tételének egyszerű esete, 24. §. I. szakasza 1. pontja és első lábjegyzéke).

E (2) rendszer a megelőző §. (5) és (6) egyenleteinek egymáshoz tartozó három első és három második integrálegyenlete, melyek az integrátiónak hat független állandóját, v_x-, v_y-, v_z-t és a_0-, b_0-, c_0-t tartalmazzák.

Evvel a 135. §. (5) és (6) rendszerei teljes megoldásának csak első felét ismerjük; második felét a következő §. adja.

2. Osztva a 135. §. (5) és (6) egyenleteit m_1-el illetve m_2-vel s levonva az elsőket az utóbbiakból, rendre nyerjük:

$$\frac{d^2(x_2-x_1)}{dt^2}=-C^2\frac{m_1+m_2}{r^2}\cdot\frac{x_2-x}{r}; \text{ s i. t. } . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

avagy a megelőző §. (1) rövidítéseivel s írva

$$C^2(m_1+m_2)=\mu, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3b)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\mu x}{r^3}; \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{\mu y}{r^3}; \qquad \frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{\mu z}{r^3} \quad . \quad . \quad (3)$$

Ezek az m_2-nek az m_1-hez viszonyított relativ mozgása egyenletei.

Megfordítva, az m_1-nek az m_2-höz viszonyított relatív mozgáséit nyerjük, ha a (3) egyenleteit -1-el szorozzuk. E két relativ pálya egyébiránt egymással egyenlő, de ellentett fekvésű (Kinematika 82. §.)

A (3)-ban kifejezett relativ gyorsulás összetevői az x, y, z relativ coordinátákkal arányosak lévén: e *mozgás centrális* (Kinematika 72. §.)

A bolygók absolút coordinátái a 135. §. (1)—(3) egyenleteiből:

$$\left.\begin{aligned} &x_1=x_0-\frac{m_2}{m_1+m_2}x; \quad y_1=y_0-\frac{m_2}{m_1+m_2}y; \quad z_1=z_0-\frac{m_2}{m_1+m_2}z; \\ &x_2=x_0+\frac{m_1}{m_1+m_2}x; \quad y_2=y_0+\frac{m_1}{m_1+m_2}y; \quad z_2=z_0+\frac{m_1}{m_1+m_2}z; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (4)$$

Jegyzet. A bolygóknak az $(x_0 y_0 z_0)$ *tömegközépponthoz viszonyított relativ mozgásuk is centrális mozgás.*

Szorozva ugyanis a (3) egyenleteit rendre $-\frac{m_2}{m_1+m_2}$-vel, illetve $+\frac{m_1}{m_1+m_2}$-vel s kifejezve ξ_1-t, η_1-t, ζ_1-t, ϱ_1-t, illetve ξ_2-t, η_2-t, ζ_2-t, ϱ_2-t a megelőző §. (3) és (4) kifejezései segélyével, végre pedig rövidítés czéljából írva:

$$C^2(m_1+m_2)\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^3=\mu_1; \qquad C^2(m_1+m_2)\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^3=\mu_2. \quad (5a)$$

nyerjük

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2}=+\frac{\mu_1\xi_1}{\varrho_1^3}; \quad \frac{d^2\eta_1}{dt^2}=+\frac{\mu_1\eta_1}{\varrho_1^3}; \quad \frac{d^2\zeta_1}{dt^2}=+\frac{\mu_1\zeta_1}{\varrho_1^3}; \ldots (5_1)$$

$$\frac{d^2\xi_2}{dt^2}=-\frac{\mu_2\xi_2}{\varrho_2^3}; \quad \frac{d^2\eta_2}{dt^2}=-\frac{\mu_2\eta_2}{\varrho_2^3}; \quad \frac{d^2\zeta_2}{dt^2}=-\frac{\mu_2\zeta_2}{\varrho_2^3}; \ldots (5_2)$$

mely egyenletek fenti állításunk helyességét igazolják.

A (3), (5_1), (5_2) egyenletek typusa egyenlő s megfejtésük is egyenlő typusú törzsegyenleteket szolgáltat. Elegendő ezért *egy* rendszernek, pl. a (3)-nak a megvizsgálása, anynyival is inkább, mivel a megelőző §. (3) összefüggései a $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \varrho_1$ s a $\xi_2, \eta_2, \zeta_2, \varrho_2$ coordinátákat az x, y, z, ϱ-ban explicite fejezik ki.

137. §. *A bolygók relativ mozgása. A területek elve és az eleven erő tétele.*

1. *A területek elve három integrálegyenletet szolgáltat.*

Képezve a megelőző §. (3) kifejezéseiből a gyorsulás nyomatékait az m_1-re mint az x, y, z coordináták kezdetére (Kinematika 73. §.), nyerjük $y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}=0$; s í. t.; melyekből;

$$y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}=c_1; \qquad z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}=c_2; \qquad x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=c_3 \ . \quad (1)$$

Ezen összefüggések a megelőző §. (3) differentiálegyenletrendszerének három első integrálegyenlete, melyek az integrátiónak egymástól független három állandóját, c_1-t, c_2-t, c_3-t, a területi sebesség kétszeresének avagy a sebesség nyomatékának a coordináta-síkokra való vetületeit tartalmazza (Kinematika 73. §.).

E három egyenletet gyakran a három *területi integrál*nak nevezik; ezek egyesíthetők, ha rendre x-el, y-al, z-vel szorozzuk és összegezzük; nyerjük

$$c_1x+c_2y+c_3z=0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1a)$$

E szerint a relativ mozgás oly állandó fekvésű síkban történik,

mely az xyz-k kezdetén, az m_1-en megyen át, míg e sík normálisának iránycosinusai egymáshoz oly viszonyban állanak, mint $c_1 : c_2 : c_3$.

A centrális mozgás általános sajátságai szerint (i. h.) e pályában a területi sebesség:

$$\tfrac{1}{2}c = \tfrac{1}{2}\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1aa)$$

s így a változatlan (invariabilis) pályasík iránycosinusai

$$\gamma_1 = c_1 : c; \qquad \gamma_2 = c_2 : c; \qquad \gamma_3 = c_3 : c \quad \ldots\ldots \quad (1ab)$$

Az $(1a)$-ban az integrátiónak új állandója nem fordul elő.

[Az (1) egyenleteket könnyű a területek elve közönséges alakjába hozni.

Négyzetre emelve és összegezve őket s bal oldalukat elemi eljárás [Math. Repertórium **44.** §. $(2a)$] szerint átalakítva, nyerjük:

$$(x^2+y^2+z^2)\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} -$$

$$-\,r^2\left\{\frac{x}{r}\frac{dx}{dt}+\frac{y}{r}\frac{dy}{dt}+\frac{z}{r}\frac{dz}{dt}\right\}^2 = c_1^2+c_2^2+c_3^2.$$

Az első tag első tényezője az r^2, a második a relativ sebesség négyzete, v^2; a második tag második tényezője e sebesség vezérsugári összetevőjének négyzete, mert

$$r\frac{dr}{dt} = \tfrac{1}{2}\frac{d(r^2)}{dt} = \tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2+y^2+z^2) = x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}.$$

E szerint az egyenlet:

$$c^2 = r^2v^2 - \left(r\frac{dr}{dt}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1b)$$

Ámde, ha r és ϑ az m_2 polárcoordinátái a relativ pálya síkjában, az m_1-hez viszonyítva, akkor

$$v^2 = v_r^2+v_\vartheta^2; \quad \text{hol} \quad v_r = \frac{dr}{dt}; \quad v_\vartheta = r\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Nyerjük így végre

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = c. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1c)$$

mely a területek elve a közönséges alakban.]

2. *Az eleven erő tétele egy új integrálegyenletet szolgáltat.*

Szorozva a 136. §. (3) egyenleteit rendre dx-, dy-, dz-vel, összegük a 39. §. (3) sémája szerint rendre írható

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right)dt=-\frac{\mu}{r^3}(xdx+ydy+zdz);$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}dt=-\frac{\mu}{r^3}\tfrac{1}{2}d(x^2+y^2+z^2),$$

$$d\left(\tfrac{1}{2}v^2\right)=-\frac{\mu}{r^3}\tfrac{1}{2}d(r^2)=-\mu\frac{dr}{r^2};$$

és így végre:

$$\tfrac{1}{2}v^2=+\frac{\mu}{r}+\tfrac{1}{2}k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

hol az integrátiónak $\frac{1}{2}k$ új független állandója positiv és negativ is lehet.

A k jelentése egyszerű: ha v_0 és r_0 a t_0 időpillanathoz tartozó értékek (kezdet-állandók), akkor a (2) ezen kezdetállapotra nézve:

$$k=v_0^2-\frac{2\mu}{r_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Jegyzet. Tévedés volna, a (2) egyenlet jobb oldalát a rendszer *erőfüggvényének* tekinteni; ez, miként a 44. §. 4. pontja II. példájában kimutattuk:

$$U=\frac{C^2m_1m_2}{r};$$

míg itt $\mu=C^2(m_1+m_2)$.

138. §. *Folytatás. A relativ pályák kúpszeletek. Megkülönböztető jeleik.*

A megelőző §. (1a) és (2) egyenleteinek egyesítése, kapcsolatban a sebességnek polárcoordinátákban való kifejezésével, még két integrál-egyenletet szolgáltat a coordináták és az idő között.

Helyettezve a 137. §. (1c) egyenletéből dt-t az (1b)-be, kifejezve ez utóbbiból v^2-t s egyesítve ezt (2)-vel:

$$v^2=\frac{(dr)^2}{r^4}\frac{c^2}{(d\vartheta)^2}+\frac{c^2}{r^2}=\frac{2\mu}{r}+k,$$

avagy, a centrális mozgásnál szokásos $u=1:r$ változót behozva

$$\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2+u^2=\frac{1}{c^2}\{2\mu u+k\},$$

$$\pm d\vartheta=\frac{cdu}{\sqrt{2\mu u-c^2u^2+k}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Ebből (Math. Repertórium 131. lap. 44. formula):

$$\pm\vartheta=\arccos\left(\frac{-2\frac{\mu}{c^2}+2u}{\sqrt{4\frac{\mu^2}{c^4}+\frac{4k}{c^2}}}\right)\pm\alpha,$$

hol $\pm\alpha$ az integrátió új független állandója és a kettős előjelek közül egyszerre csak a felsők vagy az alsók érvényesek.

Más alakban

$$\left[\sqrt{\frac{\mu^2}{c^4}+\frac{k}{c^2}}\right]\cos(\vartheta-\alpha)=-\frac{\mu}{c^2}+u,$$

$$u=\frac{\mu}{c^2}\left\{1+\left[\sqrt{1+\frac{c^2k}{\mu^2}}\right]\cos(\vartheta-\alpha)\right\},$$

vagy r-t téve u helyébe:

$$r=\frac{\frac{c^2}{\mu}}{1+\left[\sqrt{1+\frac{c^2k}{\mu^2}}\right]\cos(\vartheta-\alpha)} \quad \ldots\ldots (2)$$

Ez az r és ϑ polárcoordináták között fennálló véges összefüggés, (integrál-egyenlet), mely nyilván másodfokú görbét képvisel, miután ezek egyenlete, ha a góczpontokat egybekapcsoló egyenes a polártengely, a góczpontok egyike a kezdet, r és η a polárcoordináták, p a góczhúr fele, s a számbeli excentricitás [Math. Repertórium 64. §. (7), (14) és (26) formulák]:

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\eta} \quad \ldots\ldots\ldots (2a)$$

A (2) és (2a) összehasonlításából:

$$\eta=\vartheta-\alpha, \quad \ldots\ldots\ldots (2b)$$

hol α a szög, melyet a góczpontokat egybekapcsoló OP-tengely, az *apsis-vonal*, avval az LM egyenessel képez, melytől a ϑ-kat számítják (40. és 41, 42, 42. ábrák, köv. ll.); továbbá:

$$p=\frac{c^2}{\mu}; \quad \ldots\ldots\ldots (2c)$$

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{c^2k}{\mu^2}}, \quad \text{vagy} \quad 1-\varepsilon^2=-\frac{c^2k}{\mu^2} \quad \ldots\ldots (2d)$$

Ennek értelmében az *egyik bolygónaka másikhoz* (pl. a *nap*hoz) *viszonyított relativ pályája másodrendű görbe, melynek egyik gyúpontját az utóbbi bolygó* (illetve pl. a *nap*) *foglalja el.*

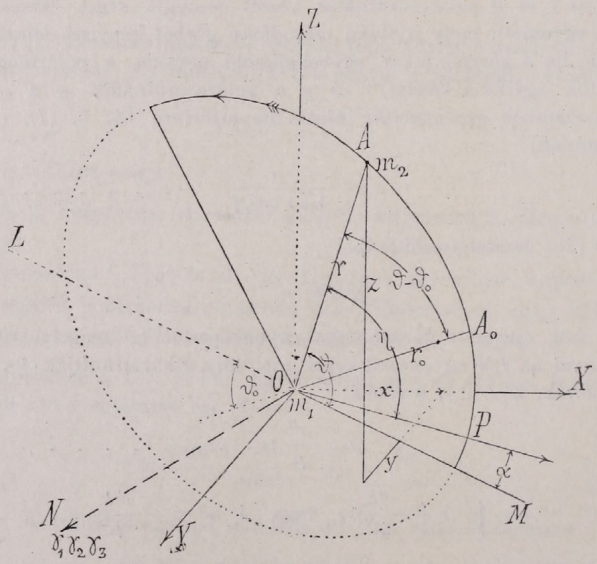
[Ezenkívül a 135, §. (3) egyenletei szerint a két bolygónak közös középpontjukhoz viszonyított relativ coordinátái s így pályái is arányosak, illetve hasonlók az egyiknek a másikhoz viszonyított relativ coordinátáihoz, illetve pályájához. Ebből következik, hogy a két bolygó közös súlypontjuk körül a (2)-höz hasonló oly két másodrendű görbét ír le, melyek méretei a bolygók tömegeivel megfordítva arányosak, s melyek egy közös gyúpontja a tömegközéppontban van].

Közelebbről pedig, a (2)—(2*d*) értelmében a relatív pálya ellipsis, parabola, hyperbola, a szerint, a mint $1-\varepsilon^2$ positiv, negativ vagy zérus. Ámde, tekintettel a megelőző §. (3) és a jelen §. (2*c*) egyenleteire, a (2*d*)-ből e különbség:

$$1-\varepsilon^2=p\left(\frac{2}{r_0}-\frac{v_0^2}{\mu}\right); \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

e szerint:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a pálya } \textit{ellipsis}, & \text{ha } k<0, \text{ azaz, ha: } \dfrac{2\mu}{r_0}-v_0^2>0; \\ \text{a pálya } \textit{parabola}, & \text{ha } k=0, \text{ azaz, ha: } \dfrac{2\mu}{r_0}=v_0^2; \\ \text{a pálya } \textit{hyperbola}, & \text{ha } k>0, \text{ azaz, ha: } \dfrac{2\mu}{r_0}-v_0^2<0. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$



40. ábra.

139. §. *A bolygók ellipsis-pályáinak teljes meghatározása a kezdet adataiból.*

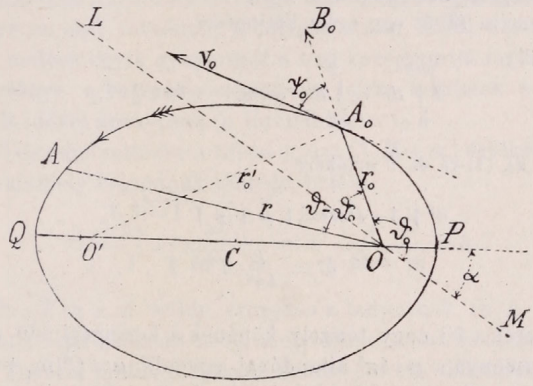
Ezen esetben a p parameter értéke: $p=a(1-\varepsilon^2)$; melylyel a megelőző §. (3) egyenletéből

$$\frac{1}{a}=\frac{2}{r_0}-\frac{v_0^2}{\mu}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

azaz, az (1) az ellipsis-pálya fél nagyobb tengelyét a kezdet-állapot r_0 és v_0 adatai és a μ állandó segélyével fejezi ki.

Ha a mozgást úgy keletkezettnek tekintjük, 41. ábra, hogy t_0-kor az m_1-től r_0 távolságban A_0-ban lévő m_2 bolygó valalami lökés, összeütközés vagy más oknál fogva v_0 sebességet nyert volna, vagy ezen sebességgel bírna, mely sebesség az r_0 positiv irányával ψ_0 szöget képez, akkor ezen r_0, v_0 x_0 kezdő adatok az m_2 bolygó relativ pályája alakját és állandóit teljesen meghatározzák.

Ugyanis, a pálya ellipsis, ha az (1) jobb oldala positiv, e pálya síkja az r_0- és a v_0-n át fektetett síkkal esik egybe, nagy tengelye az (1)-ben az r_0 s a v_0^2 segélyével van kifejezve; *e nagy tengely hoszsza e szerint csak a* v_0 *értékétől, de nem az irányától függ.*



41. ábra.

A pálya többi két adatának, az ε excentricitás értékének s a nagy tengelynek a pálya síkjában való irányának a meghatározására a ψ_0 szög szükséges, melylyel a pálya második, O' gyúpontjának még ismeretlen helyzetét felkeressük. Felhasználjuk e czélra az ellipsis jól ismert azon sajátságát, hogy érintője (itt a v_0 sebesség iránya) felezi az egyik gyúpontból vont r_0 vezérsugár folytatása s a másik gyúpontból vont r_0' vezérsugár közötti szöget [41. ábra, v. ö. pl. Kinematika 107. §-ának 1. pontját]; ezenkívül áll

$$r_0 + r_0' = 2a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Az r_0 és v_0 adva lévén: az (1)-ből az a, s így (2)-ből az r_0' következik, melynek $2a - r_0$ hoszszát az A_0-ból kiindulólag, a v_0 és r_0 között, a v_0-lal ψ_0 szöget képezve viszszük fel.

Az így szerkesztett vonal végpontja a pálya másik gyúpontja, az O'. Mihelyt az ellipsis két gyúpontja helyzetét és nagy tengelyét, $2a$-t ismer-

jük, az ellipsis alakja s helyzete teljesen ismeretes és feladatunk meg van oldva. (41. ábra).

140. §. *Az ellipsisben mozgó bolyók keringési ideje.* Keppler *harmadik törvénye. Az attractiónak csillagászati (Gauss-féle) állandója.*

1. A jelen esetben $p=a(1-\varepsilon^2)$ lévén, a 138. §. (2*c*) egyenlete:

$$c=\sqrt{\mu}\sqrt{a}\sqrt{1-\varepsilon^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

A pálya sector-elemét df-el jelelve, a területek elve:

$$r^2 d\vartheta = 2df = c\,dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Az egész pálya befutására szükséges T idő (a *keringési idő*) alatt az r vezérsugár az ellipsis-pálya egész területét, $ab\pi$-t írta le, hol a és b e pálya főtengelyeinek felei és $b=a\sqrt{1-\varepsilon^2}$.

Alkalmazva (2)-őt egy egész keringésre:

$$2\int_0^{ab\pi} df = c\int_0^T dt, \quad \text{azaz:} \quad ab\pi = \tfrac{1}{2}cT.$$

Tekintettel az (1)-re és b értékére:

$$a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{\mu}\sqrt{a}\sqrt{1-\varepsilon^2}\,T,$$

$$a^3 = \frac{\mu}{4\pi^2}T^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

E szerint a fél nagy tengely köbének a keringési idő négyzetéhez való viszonya a $\mu : 4\pi^2$ állandóval egyenlő, $\mu = C^2(m_1+m_2)$ lévén a relativ gyorsulás állandója. Ez az állandó és a fél nagy tengely teljesen meghatározza a keringési időt.

2. Ha egy nagy $\mathbf{M}$ tömegű centrális test (a nap) körül két sokszorta kisebb m_1 és m_2 tömegű bolygó kering, mely utóbbiak egymásra hatása e szerint sokszorta kisebb, mint a nap hatása mindegyik bolygóra, akkor mindegyiknek a nap körüli keringését első megközelítésben a másik bolygótól függetlennek szabad tekintenünk.

Jeleljék a_1 s a_2 ellipsis-pályáik fél nagy tengelyeit, T_1 és T_2 a keringési időket, akkor ezekre nézve a (3):

$$a_1^3 = \frac{C^2}{4\pi^2}(\mathbf{M}+m_1)T_1^2; \qquad a_2^3 = \frac{C^2}{4\pi^2}(\mathbf{M}+m_2)T_2^2, \quad \ldots \quad (3a)$$

hol a gravitátió C^2 constansa bármily tömegek vonzására nézve ugyanaz.

Rövidség kedvéért írva

$$\gamma_1 = \frac{m_1}{\mathbf{M}}; \qquad \gamma_2 = \frac{m_2}{\mathbf{M}};$$

(3a)-ból nyerjük:

$$a_1^3 : a_2^3 = (1+\gamma_1)\, T_1^2 : (1+\gamma_2)\, T_2^2 \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ezt az egyenlet Keppler általánosított harmadik törvénynek nevezhetni, benne a bolygók tömegei is előfordulnak.

Ha a γ_1 és γ_2 az egységhez képest elhanyagolhatóan kicsinyek (a mint az naprendszerünk legtöbb bolygójára nézve elég közelítéssel áll), akkor a (4)-ből:

$$a_1^3 : a_2^3 = T_1^2 : T_2^2 \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

mely egyenlet szerint tetszőleges *két bolygó fél nagy tengelyeinek köbei úgy aránylanak egymáshoz, mint keringési idejeik négyzetei.* [E tétel több holddal biró bolygó esetében e holdak pálya-tengelyeire és keringési idejeire vonatkozólag is érvényes, v. ö. a következő §-t].

Ez Keppler *harmadik törvénye* közönséges fogalmazásában.

[Keppler első törvénye: a bolygók a nap körül oly ellipsiseket írnak le, melyek egyik gyúpontját a nap középpontja foglalja el; második törvénye: a bolygók vezérsugarai leírta területek a leirásukra szükségelt idővel arányosak (a területek elve)].

3. Viszszahelyettezve a (3)-ba a $\mu = C^2(\mathbf{M}+m)$ értékét, hol $\mathbf{M}$ a nap, m valamely bolygónak tömege, belőle:

$$C = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mathbf{M}+m}} = n \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mathbf{M}+m}} = k \,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

hol $n = 2\pi : T$ az ú. n. *közép mozgása* a bolygónak és k a C-nek a csillagászok által használt neve, melyet Gauss-nak kezdeményezésére [Gauss: Theoria motus corporum cœlestium etc. Hamburg, 1809] a *theoria motus állandójának* neveznek. Ez nem más, mint az általános gravitátió állandója, de a számértéke megállapításánál használt egységek, Gauss szerint, a következők:

A hoszszúság egysége a földnek a naptól való távolságának középértéke (a földpálya nagy tengelyének a fele); az idő egysége a napi közép nap; a tömeg egysége a nap tömege. Ekkor a nap, a föld s a földpálya adataiból:

$$T = 365{\cdot}2563835\,; \quad a = 1\,; \quad \mathbf{M} = 1\,; \quad m = 1 : 354710 = 0{\cdot}0000028192\,;$$
$$C = 0{\cdot}01720209895 = k\,; \qquad \lg_{10} C = 8{\cdot}2355814414 = \lg_{10} k.^*$$

A területi sebesség az (1)-ből itt mivel $\mu = C^2(\mathbf{M}+m) = k^2(\mathbf{M}+m)$,

$$\tfrac{1}{2} c = \tfrac{1}{2} k \sqrt{1{\cdot}0000028192}\, \sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

---

* Ha a k értékét megtartjuk, ellenben a föld tömegei és keringési ideje helyébe ezeknek, újabb észlelésekből nyert, értékeit teszszük, akkor az a már nem tekinthető egységnek, hanem $\lg_{10} a = 0{\cdot}0000000099$.

140a. §. *Bolygóholdak zárt pályái. Holdas bolygók valamint kettős csillagok tömegei.*

Jeleljék **M** a nap, m egy holdas bolygójának és m_1 egyik holdjának tömegeit; továbbá x, y, z az m, x_1, y_1, z_1 az m_1 absolút coordinátáit.

Az m és m_1 közelségénél fogva kölcsönös egymásra hatásuk sokkal nagyobb, mint a tőlük nagy távolságban lévő nap s a többi külső testeké; ezenkívül e külső testeknek az m- s az m_1-re való, itt közelebbről ki nem számítandó hatásának gyorsulása, φ_k e két testre nézve első közelítésben egyenlőnek tekinthető, mivel e gyorsulások különbségét csak az m s m_1-nek egymástól való r_1 távolsága okozza, mely a külső testeknek m- s m_1-től való távolsághoz képest igen kicsiny.

Ezek szerint, a nevezett külső hatások okozta φ_k gyorsulás $\varphi_{k,x}$, $\varphi_{k,y}$, $\varphi_{k,z}$ componenseit is az m- és m_1-re nézve első közelítésben egyenlőknek véve, az m és az m_1-re ható erők dynamikai kifejezései első közelítésben, a 135. §. (5) és (6) sémája alapján:

$$mx'' = m\varphi_{k,x} + mC^2m_1\frac{x_1-x}{r_1^3} \text{ s í. t.}; \quad \ldots\ldots (1a)$$

$$m_1x_1'' = m_1\varphi_{k,x} - m_1C^2m\frac{x_1-x}{r_1^3} \text{ s í. t.} \quad \ldots\ldots (1b)$$

Osztva az első rendszert m-, a másodikat m_1-el, különbségük:

$$(x_1-x)'' = -C^2(m+m_1)\frac{x_1-x}{r_1^3} \text{ s í. t.} \quad \ldots\ldots (2)$$

hol x_1-x, y_1-y, z_1-z az m_1 holdnak az m bolygójához viszonyított relativ coordinátái s a (2) rendszer szerkezete teljesen megegyezik a 136. §. (3) rendszerével. A relativ mozgás ezen egyenleteiből (a közelítés ezen fokánál) a külső hatás eltűnt, mit már NEWTON talált.

Ennek értelmében az ezen egyenletekből a 137—139. §§-ban nyert eredményeink közvetetlenül érvényesek a jelen rendszerünk esetében is. Ha az m_1-nek m-hez viszonyított pályája zárt görbe, akkor ez csak ellipsis lehet, melynek egyik gyúpontjában az m bolygó középpontja van, míg a 139 §. (3a) egyenlete szerint az m bolygónak a *nap* körüli s az m_1 holdnak az m bolygó körüli T és T_1 keringési ideje és e pályáik a s a_1 féltengelyeire nézve:

$$T^2 = \frac{4\pi^2a^3}{C^2(\mathbf{M}+m)}; \quad T_1^2 = \frac{4\pi^2a_1^3}{C^2(m+m_1)} \quad \ldots\ldots (3)$$

Ezekből:

$$a^3 : a_1^3 = T^2.\mathbf{M}\left(1+\frac{m}{\mathbf{M}}\right) : T_1^2m\left(1+\frac{m_1}{m}\right) \quad \ldots\ldots (4)$$

Ha a bolygó tömege a napéhoz, és a hold tömege bolygójaéhoz igen kicsiny, az $m:\mathbf{M}$ és az $m_1:m$ viszonyok az egységhez képest elhanyagolhatók, miáltal (4)-ből közelítőleg

$$\frac{m}{\mathrm{M}} = \frac{a_1^3}{a^3} \cdot \frac{T^2}{T_1^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

mely relátió a holdas bolygónak a naphoz viszonyított tömege meghatározására alkalmas, ha a bolygó s holdjának keringési ideje s pályáik féltengelyei advák.

Jegyzet: Naprendszerünk legnagyobb bolygójának, Jupiter-nek tömege a napénál több mint ezerszerte kisebb s így (4)-ben az $m:\mathrm{M}$-nek az elhanyagolása az egységhez képest eléggé indokolt. A Jupiter- s a Saturnus-holdak tömegei is igen kicsinyek a bolygójuk tömegéhez képest, de már pl. földünk holdja a föld tömegének körülbelől $^1/_{80}$-adát teszi ki s itt az $m_1:m$ elhanyagolása nem engedhető meg. Ezen esetben első közelítésben a földet gömbalakúnak és homogén concentrikus héjakból alkotottnak tekintve, ennek vonzása a felületén és kívüli fekvő anyagokra olyan, mint ha a föld tömege saját középpontjában központosítva volna; G-vel jelelve a földvonzás létesítette gyorsulást a földfelület közelében [Kinematika 352. §.], m-mel a föld tömegét, R-rel sugarát: az általános gravitátió szabályai szerint itt:

$$G = C^2 \cdot \frac{m}{R^2},$$

melyet (3) első, itt érvényes egyenletével egyesítve

$$\frac{m}{\mathrm{M}+m} = \frac{T^2R^2}{4\pi^2a^3}G, \quad \text{vagy} \quad \frac{m}{\mathrm{M}} = \left\{\frac{4\pi^2a^3}{T^2R^2G} - 1\right\}^{-1} \quad \ldots \quad (6)$$

mely a földnek a naphoz viszonyított tömegét szolgáltatja.

A földnek tényleges tömegét a 134. §. a C-, G-, R-ből adja.

Egyébként a bolygók tömegét a csillagászok ezeknek háborgásaiból is számítják ki.

141. §. *A parabola-pálya teljes meghatározása a kezdet adataiból.*

Parabolánál $\varepsilon=1$ s a pálya jellemzői redukálódnak a p parameter értékére és az O centrumon átmenő tengelye helyzetére; e jellemzők az A_0-ra vonatkozó r_0, v_0, ψ_0 kezdet-adatokból s az adott μ állandóból határozandók meg (42. ábra, köv. l.).

A pálya síkja itt is az r_0- és v_0-n átmenő sík; továbbá mivel itt $\varepsilon=1$, a 138. §. (2d) és (4) rendszere értelmében $k=0$ és:

$$r_0v_0^2 = 2\mu \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Alkalmazzuk a parabolára érvényes azon elemi geométriai tételt, hogy kerületének bármily A_0 pontjában az e görbéhez húzott érintő (42. ábra), azaz a v_0 sebesség iránya azt a szöget felezi, melyet az e ponthoz vont r_0 vezérsugár A_0B_0 folytatása, az A_0-ból a parabola tengelyé-

hez párhuzamosan húzott A_0O' egyenessel képez, hol O' a végtelenben lévő másik gyúpontot jelent, 139. §., 41. ábra].

E szerint:

$$(B_0A_0O')\sphericalangle = 2\psi_0; \quad (O'A_0O)\sphericalangle = \pi - 2\psi_0;$$

mivel pedig $(O'A_0O)\sphericalangle = (A_0OP)\sphericalangle$, s ez utóbbi az ábra szerint $\vartheta_0 - \alpha$, hol LM egyenestől számítjuk a ϑ-ákat s α az OP apsis s az LM közötti szög:

$$\vartheta_0 - \alpha = \pi - 2\psi_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Másrészt pálya poláregyenlete [138. §. (2) és (2a)] itt

$$r = \frac{p}{1 + \cos(\vartheta - \alpha)} = \frac{1}{2} \frac{p}{\cos^2 \frac{1}{2}(\vartheta - \alpha)};$$

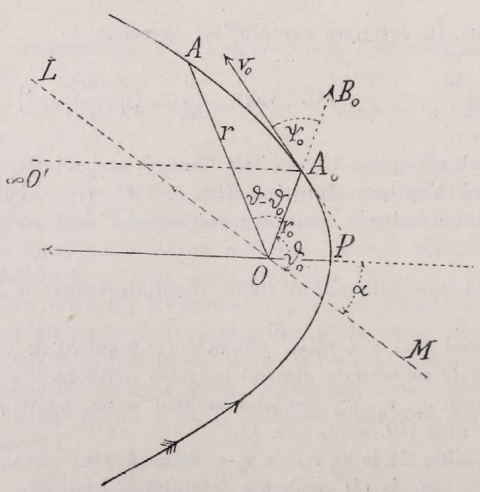
mely az A_0 helyzetre nézve, tekintettel (2)-re:

$$r_0 = \frac{1}{2} \frac{p}{\cos^2 \frac{1}{2}(\vartheta_0 - \alpha)} = \frac{1}{2} \frac{p}{\cos^2 (\frac{1}{2}\pi - \psi_0)}$$

s így végre

$$p = 2r_0 \sin^2 \psi_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

mely egyenlet a p parameter hoszszát r_0- és ψ_0-ban adja meg.



42. ábra.

A parabola tengelyének az r_0v_0 síkban való irányát és helyzetét pedig az határozza meg, hogy e tengelynek az O-n kell áthaladni s positiv irányának az $\overrightarrow{OA_0} = r_0$-val $2\psi_0$ szöget kell képeznie.

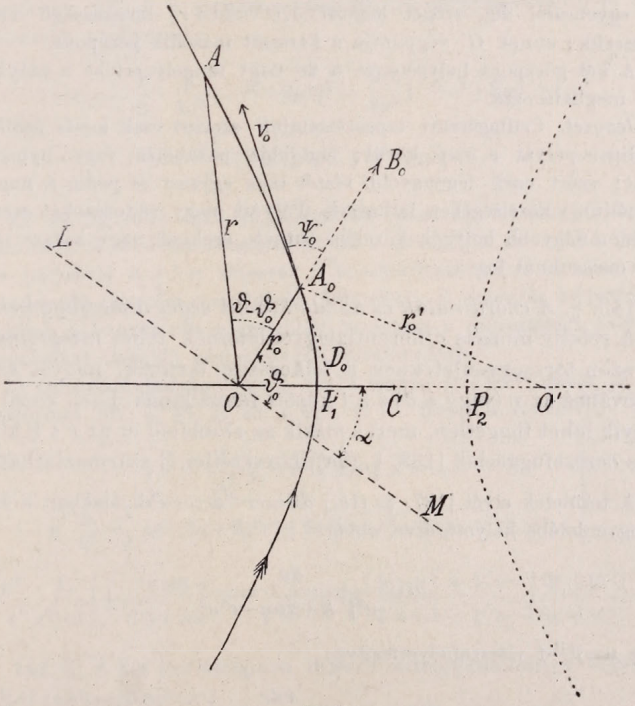
E mozgásnak nincsen keringési ideje, mert a pálya nem zárt.

142. §. *A hyperbola-pálya teljes meghatározása a kezdet adataiból.*

A 138. §. (4) rendszere értelmében a pálya hyperbola, ha $\varepsilon > 1$, avagy $(v_0^2 : \mu) - (2 : r) > 0$; a paraméter itt: $p = a(\varepsilon^2 - 1)$, miáltal az idézett §. (3) egyenletéből

$$\frac{1}{a} = \frac{v_0^2}{\mu} - \frac{2}{r_0}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

hol esetünkben az (1) jobb oldala positiv s a hyperbola féltengelyét a μ-n kívül az r_0 és v_0^2 adják meg, az a itt is mint az ellipsis-pályánál a v_0-nak csak *értékétől, de nem irányától* függvén.



43. ábra.

A pálya síkja az r_0- és v_0-n átfektetett sík; egyik, O gyúpontja a mozgás centruma; hátra van még a pálya nagy tengelyének e síkban való helyzetének s még egy-egy adatának, pl. a második O' góczpont ezen tengelyen való helyzetének a meghatározása.

E célból ismét szükségünk van a kezdethelyzetben az r_0 s a v_0 positiv irányai által képezett ψ_0 szögre (43. ábra).

A hyperbolára nézve is érvényes a 139. és 141. §§-okban alkalmazott és idézett geométriai tételhez analog sajátság, t. i. hogy a görbéhez (pl. az A_0-ban) húzott érintő (itt a v_0 sebesség iránya) felezi az A_0-ból az O- és az O'-hoz húzott r_0 és r_0' vezérsugarak képezte (OA_0O') szöget.

Ezenkívül

$$r_0'-r_0=2a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Az idézett tétel értelmében az ábra szerint

$$(OA_0O')\sphericalangle=2(OA_0D_0)\sphericalangle=2\psi_0, \quad \text{és} \quad r_0'=2a+r_0;$$

és így a második góczpontot, O'-t találjuk, ha az A_0-ból kiindulólag az $\overrightarrow{A_0O}$ egyenessel $2\psi_0$ szöget képező $A_0O'=2a+r_0$ hoszszaságú vonalat felviszszük; ennek O' végpontja a keresett második góczpont.

A két góczpont helyzete és a $2a$ nagy tengely értéke a pályát teljesen meghatározza.

Jegyzet. Csillagászati tapasztalataink szerint csak kevés *üstökös* ír le ellipsis-pályát a nap körül; legtöbbje parabolás vagy hyperbolás pályát; ezért ezek legnagyobb részét csak egyszer és pedig a napközel (perihélium) közelségében láthatjuk. Pályáik nagy változásokat szenvednek, ha a nagyobb bolygók közelébe jutnak, ezeknek nagy zavaró nehézségi vonzásuknál fogva.

143. §. *A coordináták és az idő közötti véges összefüggések.*

A relativ mozgás differentiálegyenleteinek teljes integrálásához még azon törzsegyenleteknek a felkeresése tartozik, melyek az r és a t, továbbá az η (vagy a ϑ) s a t között fennállanak. Ezek közül csak az egyik lehet független, mert a másik az előbbiből és az r s η közötti véges összefüggésből [138. §. (2a)] közvetetlenül származtatható.

A területek elvét [137. §. (1c)] $d\vartheta=cr^{-2}dt=cu^2dt$ alakban a 138. §. (1c) egyenletébe helyettesítve, ebből

$$dt=\frac{du}{u^2\sqrt{k+2\mu u-c^2u^2}},$$

avagy $u=r^{-1}$-t viszszahelyettesítve:

$$dt=-\frac{rdr}{\sqrt{-c^2+2\mu r+kr^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_1)$$

Másrészt egyesítve a 138. §. (2a) alatti r értékét a 137. §. (1c) alatti területek elvével és megjegyezve, hogy $\vartheta-\alpha=\eta$, $d\vartheta=d\eta$, nyerjük:

$$dt=\frac{p^2}{c}\cdot\frac{d\eta}{(1+\varepsilon\cos\eta)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_2)$$

Az (1_1) és (1_2) könnyen integrálható; de itt a k állandó *előjele* és az ε *értéke* lényeges [138. §. (4)].

a) Ellipsis-pályánál $k<0$, $\varepsilon<1$; legyen $k=-\varkappa^2$; ekkor [a Math. Repertórium 107. §. 46. és 44. és 110. §. 36. formulái segélyével] az (1_1)-ből és a (1_2)-ből:

$$t=+\frac{1}{\varkappa^2}\sqrt{-c^2+2\mu r-\varkappa^2 r^2}-\frac{\mu}{\varkappa^2}\cdot\frac{1}{\varkappa}\arccos\left(\frac{-2\mu+2\varkappa^2 r}{\sqrt{4\mu^2-4c^2\varkappa^2}}\right)+t_0; \quad (2_1)$$

$$t=\frac{p^2}{c}\frac{1}{1-\varepsilon^2}\left\{-\frac{\varepsilon\sin\eta}{1+\varepsilon\cos\eta}+\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\eta\right)\right\}+t_0\,. \quad (3_1)$$

Ezen összefüggések részletes tárgyalását a 149—151. §§-okban adjuk.

b) Parabola-pályánál $\varepsilon=1$, $k=0$ és így (1_1)-ből s (1_2)-ből [a Math. Repertórium 107. §. 3. (javítás, a második tag nevezője csak b^2) és 110. §. 33. formulái segélyével]:

$$t=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4\mu^2}(-c^2+2\mu r)^{\frac{3}{2}}-\frac{2c^2}{4\mu^2}\sqrt{-c^2+2\mu r}+t_0; \quad . \quad . \quad (2_2)$$

$$t=\frac{p^2}{c}\left\{\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\eta\right)+\tfrac{1}{6}\operatorname{tg}^3\left(\tfrac{1}{2}\eta\right)\right\}+t_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3_2)$$

Ez az egyenlet igen jó szolgálatot tesz, ha t-t akarjuk az η-ból kiszámítani, de rendesen megfordítva áll a dolog, t. i. az üstökösök parabolás pályáinál a t-hez keressük a hozzátartozó η-t, ez azonban a (3_2) harmadrendű egyenlet megoldását feltételezi. E számítás könnyítésére szolgálnak a Barker-féle számtáblák, melyeket a csillagászati pályameghatározásokat tárgyaló kézi könyvek tartalmaznak.

c) Hyperbola-pályánál $k>0$, $\varepsilon>1$; legyen $k=+\varkappa^2$; ekkor [a Math. Repertórium 107. §. 46. és 43. s 110. §. 37. formulái szerint]:

$$\left.\begin{aligned} t=&-\frac{1}{\varkappa^2}\sqrt{-c^2+2\mu r+\varkappa^2 r^2}+\\ &+\frac{\mu}{\varkappa^2}\frac{1}{\varkappa}\lg\left[(2\mu+2\varkappa^2 r)+2\varkappa\sqrt{-c^2+2\mu r+\varkappa^2 r^2}\right]+t_0; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2_3)$$

$$t=\frac{p^2}{c}\frac{1}{\varepsilon^2-1}\left\{+\frac{\varepsilon\sin\eta}{1+\varepsilon\cos\eta}-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\lg\left[\frac{\sqrt{\varepsilon+1}+\sqrt{\varepsilon-1}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\eta\right)}{\sqrt{\varepsilon+1}-\sqrt{\varepsilon-1}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\eta\right)}\right]\right\}+t_0 \quad (3_3)$$

144. §. *A két test mozgása differentiálegyenleteinek teljes integráljai (törzsegyenletei).*

Szemmel tartva a 135. §-ban a simultán differentiálegyenletek teljes megoldásairól mondottakat, észreveszszük, hogy a megelőző 136—143. §§-okban a relativ mozgás differentiálegyenletei [136. §. (3)] teljesen meg lettek fejtve, azaz három törzsegyenletük meg lett találva.

Ugyanis a 137. §. (1) egyenletei, melyek a sebességi nyomaték

vetületei állandóságát fejezik ki, a 136. §. (3) rendszerének három első integrálegyenlete; továbbá az eleven erő tétele [137. §. (2)], a pálya egyenlete [138. §. (2)] és a coordináták és az idő közötti véges összefüggések egyike [jelen §. (2_1)—(3_3) egyenleteinek bármelyike] három új integrálegyenlet. *Törzsegyenletek* e szerint itt a pálya síkbeli voltát kifejező egyenlet [137. §. (1*a*)], a pálya egyenlete, és a coordináták valamelyikének az idővel való véges összefüggése. E három egyenletből a többi egyenlet mind leszármaztatható.

Az integrátió független állandói az említett törzsegyenletekben: c_1, c_2, c_3; k, a, t_0; de miután ezek, miként az idézett §§-okban láttuk, az r_0, v_0, ψ_0 kezdet-állandók s az $(r_0 v_0)$ sík $a_1 a_2 a_3$ irányú normálisának *két* független iránycosinusa és a t_0-al kifejezhetők: ez utóbbiak is tekinthetők független integrálállandóknak.

145. §. *Kivételes eset: Egyenesvonalú pálya.*

Ha a két test egymáshoz viszonyított relativ mozgása az ezeket egybekapcsoló egyenes mentén történik, akkor területi sebesség nincs és a 136. §. (3) egyenletei közül az egyik is elegendő, mely a változó r távolságra vonatkozik:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

A gömbalakúnak felvett m_1 és m_2 testek sugarait R_1- s R_2-vel jelelve, az r távolság legkisebb értéke $r_{min} = R_1 + R_2 = R$, s így általában véve az r az R és a végtelen között változhatik csak az m_1-től egy oldalon fekvő egyenesen.

Szorozva az egyenletet $vdt = \frac{dr}{dt} dt = dr$-rel, integrálja:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2\frac{\mu}{r} + k, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

hol a k integrátió-állandó, positiv, zérus és negativ lehet.

Az egyenlet írható:

$$dt = \pm \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\mu + kr}} dr,^* \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2a)$$

melyből [Math. Repertórium 113. §. 3. formula]:

---

* A + előjel jelenti, hogy a dt közben bekövetkezett dr távolságváltozás positiv, azaz, hogy az m_2 relativ sebessége positiv (az m_1-től el van fordítva); a — előjel, hogy e sebesség negativ.

$$\left.\begin{aligned}\mp t=\int\frac{\sqrt{r}\,dr}{\sqrt{2\mu+kr}}=\frac{1}{k}\sqrt{r}\sqrt{2\mu+kr}-\\ -\frac{\mu}{k}\int\frac{dr}{\sqrt{r}\sqrt{2\mu+kr}}+\text{constans.}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(3)$$

A további integrátió a k előjelétől függ.

1. Ha k *negativ*, írjunk (mint a 143. §-ban) $k=-\varkappa^2$; ekkor:

$$v^2=2\frac{\mu}{r}-\varkappa^2\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(4)$$

A mozgásnak forduló pontja van, legyen $2a$ az r legnagyobb értéke; ez a (4)-ből

$$r_{max}=2\frac{\mu}{\varkappa^2}=2a\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(5)$$

A mozgás ezen esetben az $r=R$-től $r=2a$-ig terjedő egyenes szakaszon történik; a sebesség négyzete, melylyel m_2 az m_1-re esik:

$$v_R^2=2\mu\left\{\frac{1}{R}-\frac{1}{2a}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(6)$$

Elhanyagolhatóan kicsinynek véve R-et, az m_2 mozgása egy $2a$ nagy tengelyű egészen lapos ellipsisben történik, melynek gyúpontjai a perihéliumba és az aphéliumba esnek; az előbbiben van az m_1 mozgási centrum, az utóbbi az említett fordulópont.

A (3)-ból ezen alesetben [Math. Rep. 107. §. 31. form.]:

$$\mp t=-\frac{1}{\varkappa^2}\sqrt{2\mu r-\varkappa^2r^2}+\frac{\mu}{\varkappa^3}\operatorname{arc\,cos}\left(1-\frac{2\varkappa^2}{2\mu}r\right)+t_0;\quad\ldots\quad(7a)$$

$$\mp t=-\sqrt{\frac{a}{\mu}}\sqrt{2ar-r^2}+a\sqrt{\frac{a}{\mu}}\operatorname{arc\,cos}\frac{a-r}{a}+t_0\quad\ldots\quad(7)$$

Ha az időt $r=0$-tól számíthatnók: a t_0-t zérussal lehetne egyenlővé tenni; ellenben, a t-t az $r=2a$ forduló ponttól számítva, nyerjük $t_0=-\pi a\sqrt{\frac{a}{\mu}}$. Végtelen kicsinynek tekintve R-et, és $\frac{1}{2}T$-val jelelve az $r=0$-tól $r=2a$-ig terjedő vonalrész befutására szükséges időt, ez a (7)-ből:

$$\tfrac{1}{2}T=\pi a\sqrt{\frac{a}{\mu}};\quad\text{avagy:}\quad T^2=\frac{4\pi^2}{\mu}a^3,$$

mely T az a féltengelyű ellipsis keringés-idejével egyenlő [140. §. (3).

2. Ha a k *zérus*, akkor (2)-ből és a ($2a$)-ból:

$$v^2=2\frac{\mu}{r}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(8)$$

$$\mp t=\frac{2}{3}\frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\mu}}+t_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

A mozgás itt az m_1 bolygó (a nap) egyik oldalán az $r=R$ s az $r=\infty$ határok közötti egyenesen történik; a sebesség $r=\infty$-kor zérus.

Ha t-t az $r=0$-tól számíthatnók, (9)-ben $t_0=0$ volna.

Ez az eset megfelel az m_2 oly parabola-pályának, melynek parametere elenyésző kicsiny.

3. Ha a k *positiv*, írjunk $k=+\varkappa^2$; ekkor (2)-ből:

$$v^2=2\frac{\mu}{r}+\varkappa^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Ezen esetben a sebesség még az $r=\infty$ távolságban sem zérus, s az m_2 az $r=R$-től a végtelenbe terjedő egyenes vonalon mozoghat.

A (10) értelmében, $\varkappa$ az a sebesség, melylyel az m_2 e végtelen távolságban mozog; vezessük be e $\varkappa^2$ helyébe a következő egyenlet segélyével a-t:

$$v^2_{r=\infty}=\varkappa^2=\frac{\mu}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Az idő a (3)-ból [Math. Repertórium 107. §. 30. form.]:

$$\mp t=+\frac{1}{\varkappa^2}\sqrt{2\mu r+\varkappa^2 r^2}-\frac{\mu}{\varkappa^3}\lg\left(\frac{\sqrt{2\mu r+\varkappa^2 r^2}+r\varkappa}{\sqrt{2\mu r+\varkappa^2 r^2}-r\varkappa}\right)+t_0; \quad . \quad (12a)$$

$$\mp t=+\sqrt{\frac{a}{\mu}}\sqrt{2ar+r^2}-a\sqrt{\frac{a}{\mu}}\lg\left(\frac{\sqrt{2ar+r^2}+r}{\sqrt{2ar+r^2}-r}\right)+t_0 \quad . \quad (12)$$

Ha az időt $r=0$-tól számíthatnók, a t_0 értéke zérus.

Ez az eset megfelel az m_2 oly hyperbola-pályájának, melynek a a véges féltengelye, míg a másik végtelen kicsiny.

Mind a három esetben a t előjele értelmében az m_2 mozgása az m_1-felé tarthat, vagy attól el lehet fordítva. A (7a), (9), (12a) egyenletek a 143. §. (2_1), (2_2), (2_3) egyenleteiből közvetetlenül is származtathatók, ha bennük $c=0$ tételtik; hogy ezt a (12a)-re nézve is könnyen kimutathassuk, szorozzuk a (12a)-nak a lg jele alatti tört számlálóját és nevezőjét, e számlálóval, rövidítsünk r-el, s a nevezőben marad 2μ. Igy a t változó részére nézve a megegyezés az idézett (2_3) egyenlettel szembetüuő, csak az integrátió állandója (12a)-ban $t_0+\mu\varkappa^{-3}\lg 2\mu$ lett, mely a 143. §. (2_3) egyenletének t_0-al jelelt állandójával egyenértékű. A tényleges összehasonlítást az olvasónak ajánljuk.

146. §. *A pálya meghatározása a vezérsugár időbeli differentiálegyenlete alapján.*

Teljesség kedvéért és érdekességénél fogva felemlítünk itt oly eljárást, mely a vezérsugár és a coordináták első differentiálquotiensei között a felületek elvében kifejezettekhez egészen hasonló egyen-

letekhez vezet s mely a pálya apsis-vonala irányát s magát a pályát is adja meg.

1. *A vezérsugár differentiálegyenlete.*

Az $r^2=x^2+y^2+z^2$ kifejezésből rendre:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}(r^2)=r\frac{dr}{dt}=x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}; \quad \ldots \quad (1a)$$

$$\left.\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(r^2)=\frac{d}{dt}\left(r\frac{dr}{dt}\right)=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+\\ +x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1b)$$

A jobboldali első három tag összege a sebesség négyzete, mely [137. §. (2)] $v^2=k+2(\mu:r)$; a többi három tag összege a 136. §. (3) egyenletei értelmében $-\mu(x^2+y^2+z^2):r^3=-\mu:r$, úgy hogy (1*b*)-ből

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(r\frac{dr}{dt}\right)=v^2-\frac{\mu}{r}, \quad \ldots \quad (1)$$

avagy $'$-vel jelelve az idő szerinti differentiálquotienset:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2}=\tfrac{1}{2}(r^2)'=\frac{d(rr')}{dt}=+\frac{\mu}{r}+k^* \quad \ldots \quad (2)$$

A (2)-t t szerint differentiálva:

$$\frac{d^2(rr')}{dt^2}=-\frac{\mu}{r^3}(rr') \quad \ldots \quad (3)$$

és így az rr' szorzat differentiálegyenletének szerkezete ugyanaz, mint az x, y, z relatív coordinátákéi [136. §. (3)].

2. A (3) egyenlet a 136. §. (3) egyenleteivel épen úgy combinálható, mint ezek önmagukkal [137. §. 1. pontja] ez által új alakú integrál-egyenleteket nyerünk.

Szorozva ugyanis a (3)-t x-el s levonva belőle az idézett 136. §. (3) egyenleteinek rr'-el megszorzott elsejét:

$$x\frac{d^2(rr')}{dt^2}-(rr')\frac{d^2x}{dt^2}=0 \text{ s í. t.,}$$

melyekből

$$\left.\begin{aligned}x\frac{d(rr')}{dt}-(rr')\frac{dx}{dt}=g_1;\\ y\frac{d(rr')}{dt}-(rr')\frac{dy}{dt}=g_2;\\ z\frac{d(rr')}{dt}-(rr')\frac{dz}{dt}=g_3,\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

---

* V. ö. a Kinematika 76. §-a 3. pontja 12. egyenletét, 96. l., itt $R(r)=-\mu:r^2$.

hol g_1, g_2, g_3 az integrátió új állandói, melyek egyike független, míg a többi kettő a c_1, c_2, c_3 állandókból határozódik meg [v. ö. a (9) és (10) egyenleteket].

3. Jeleljen α_1, α_2, α_3 oly három iránycosinust, mely a g_1, g_2, g_3-al arányos és legyen g^2 ez utóbbiak négyzet-öszszege:

$$\left.\begin{aligned} g^2&=g_1^2+g_2^2+g_3^2; \\ \alpha_1=g_1:g\,;\quad \alpha_2&=g_2:g\,;\quad \alpha_3=g_3:g \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

akkor a (4) négyzet-öszszege, tekintettel az (1a)-ra:

$$r^2\left(\frac{d\,(rr')}{dt}\right)^2-2\,(rr')^2\,\frac{d\,(rr')}{dt}+(rr')^2\,v^2=g^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Helyettezve (6)-ba a (2)-ből a $\frac{d\,(rr')}{dt}=\frac{\mu}{r}+k$ értéket és a 137. §. (2)-ből az idézett $v^2=\frac{2\mu}{r}+k$-t, és megjegyezve, hogy (6)-ban $(rr')^2$ együtthatója e szerint $v^2-2\,(rr')'=2\mu r^{-1}+k-2\mu r^{-1}-2k=-k$, ezen (6)-ból:

$$r^2\left(\frac{\mu}{r}+k\right)^2-(rr')^2k=g^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Végre a v^2-nek idézett értékét a 137. §. (1b) $c^2=r^2v^2-(rr')^2$ egyenletébe téve

$$c^2=2\mu r+kr^2-(rr')^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

helyettezve ebből $(rr')^2$-t a kifejtett (7)-be:

$$r^2\left(\frac{\mu^2}{r^2}+2\mu\,\frac{k}{r}+k^2\right)-(2\mu r+kr^2-c^2)\,k=g^2,$$

avagy rövidítve és a 137. §. (1aa) és a jelen §. (5) jelölésével

$$\left.\begin{aligned} \mu^2+kc^2&=g^2 \\ \mu^2+k\,(c_1^2+c_2^2+c_3^2)&=g_1^2+g_2^2+g_3^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Végre a 137. §. (1) s a jelen (4) egyenleteit egymással rendre megszorozva, szorzat-öszszegük:

$$c_1g_1+c_2g_2+c_3g_3=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

A (9) és (10) a c_1, c_2, c_3 és a g_1, g_2, g_3 állandók közötti öszszefüggések.

4. A coordináták közötti véges egyenletek.

A (4) egyenleteit rendre x-, y-, z-vel szorozva öszszegezzük; a jelen §. (1a) egyenlete tekintetbe vételével:

$$r^2\,\frac{d\,(rr')}{dt}-(rr')^2=g_1x+g_2y+g_3z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Kifejezve $(rr')'$-t a (2) és $(rr')^2$-t a (8) egyenletekből:

$$r^2\left(\frac{\mu}{r}+k\right)+c^2-2\mu r-kr^2=g_1x+g_2y+g_3z;$$

$$c^2-\mu r=g_1x+g_2y+g_3z. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Bebizonyítjuk, hogy a (12) oly másodrendű forgási felületet képvisel, melynek tengelye az (5)-ben említett α_1, α_2, α_3 iránycosinusokkal bír s melynek egyik gyúpontja az az r-k kezdete.

Ugyanis, ha η az r és a g (azaz az $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$) irányok közötti szög, akkor:

$$\cos\eta=\cos(r,g)=\frac{x}{r}\frac{g_1}{g}+\frac{y}{r}\frac{g_2}{g}+\frac{z}{r}\frac{g_3}{g};$$

s így a (12) írható:

$$c^2-\mu r=gr\cos\eta, \quad \text{azaz} \quad r=\frac{\frac{c^2}{\mu}}{1+\frac{g}{\mu}\cos\eta} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

A (13) mind azokra a síkokra nézve érvényes, melyek a g azaz az $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ irányon átmennek; ezért a (13) a (12) felület *meridiángörbéjének* egyenlete, melynek alakja [138. §. (2*a*)] előbbi állításunkat bizonyítja.

Maga a pálya nem más, mint a (12) forgási felületnek a pálya síkjával [137. §. (1*a*)] való metszőgörbéje, mely sík, miután normálisa (10) szerint a (12) forgási tengelyére merőleges, e tengelyen megyen át és így a metszőgörbének, azaz a pályának egyenlete a (13) meridián.

Ezen másodrendű görbe síkjának normálisa $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$-, focális tengelye ellenben $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ iránycosinusokkal bír; egyik góczpontja az r-ek kezdete.

A g-nek (9) szerinti értékével a (13) a 138. §. (2) s (2*b*) egyenleteivel egyezik.

147. §. *A relativ pálya alakjának származtatása rövid úton.*

Az m_2-nek az m_1-hez viszonyított relativ pályája a 136. §. (3) egyenletei alapján közvetetlenül meghatározható.

Szerintük ugyanis e relativ mozgás *centrális* jellegű; a centrum (az m_1) az xyz-ek kezdete és a centrális gyorsulás törvénye itt, $r=u^{-1}$ lévén:

$$R(r)=-\frac{\mu}{r^2}=-\mu u^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Helyettesítve ezt a centrális pályák általános differentiálegyenletébe $\left[\frac{d^2u}{d\vartheta^2}+u+\frac{R(r)}{c^2u^2}=0\right.$, Kinematika 74. §. (7), 92. l.$\left.\right]$, ebből:

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2}+u-\frac{\mu}{c^2}=0; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ez pedig az

$$u-\frac{\mu}{c^2}=w; \quad \frac{d^2u}{d\vartheta^2}=\frac{d^2w}{d\vartheta^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

helyettezés által átmegyen a

$$\frac{d^2w}{d\vartheta^2}+w=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

alakba, mely az egyszerű harmonikus mozgás differentiálegyenletével egyezik meg. [Kinematika 92. §. (1), 123. l.].

Ezen egyenlet teljes megoldása [az idézett §. (5a) kifejezésének mintája]:

$$w=g\cos(\vartheta+2\pi\delta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

hol g és δ az integrátió állandói.

Viszszahelyettesítve (3)-ból u-t és $u=r^{-1}$-et, az (5)-ből:

$$r=\frac{1}{\frac{\mu}{c^2}+g\cos(\vartheta+2\pi\delta)}=\frac{\frac{c^2}{\mu}}{1+\frac{gc^2}{\mu}\cos(\vartheta+2\pi\delta)} \quad \ldots \quad (6)$$

Ez pedig a másodrendű görbék poláregyenlete, mely a közönséges alakba [138. §. (2a)] megyen át, ha írjuk:

$$\frac{c^2}{\mu}=p\,; \qquad \frac{gc^2}{\mu}=\varepsilon\,; \qquad \vartheta+2\pi\delta=\eta.$$

Evvel a pálya alakja általánosságban meg van határozva; de ha az integrátió állandóit a kezdőállapot adataiból, továbbá a pálya helyzetét a térben és az idő s a coordináták közötti összefüggéseket kívánjuk meghatározni: a megelőző §§-ban végzett kifejtésekhez kell folyamodnunk.

148. §. *A bolygók és üstökösök pályáinak hodographjai körök.* Már Hamilton, kitől a hodograph eszméje származik, mint e görbe alkalmazásának egyik legszebb eredményét azt találta, hogy a bolygók sebességi görbéi *körök*. E tételt azonnal nyerjük, ha a centrális pályák sebességi görbéinek görbületi sugarára fennálló egyenletbe [Kinematika 78. §. (8), 99. l.], $\rho=r^2c^{-1}R(r)$-be a bolygók relativ pályája $R(r)=-\mu:r^2$ gyorsulását helyettesítjük:

$$\rho=-\mu c^{-1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

melynek állandó volta kört jelez.

[*Jegyzet.* Észreveszszük, hogy a ρ jellege (méretes dimensiója) nem egyezik a pályák parameterei: $p=c^2\mu^{-1}$ méretével, mely utóbbi hoszszúság [jelen §. (6) és 138. §. (2c)].

Ugyanis e fejezet megállapodása szerint [v. ö. pl. a 138. §. (3) egyenleteit] $\mu:r^2$ *gyorsulást* jelent, melynek jellege: hoszszúság: (idő)^2 és így a μ jellege: (hoszszúság)^3: (idő)^2. Másfelől c a kétszeres területi

sebesség, melynek jellege terület : (idő) vagy *(hosszúság)*^{2} : *idő*; s így a $c^2 : \mu$ jellege csakugyan hosszúság, ellenben a $\mu : c$-é hosszúság : idő, azaz *sebesség*.

E látszólagos ellentmondás abból származik, hogy a hodograph sajátságainak megállapításánál [Kinematika 50. §] és a most idézett tétel levezetésénél. [U. o. 78. §. 3. pontja] a hodographbeli coordinátákat, illetve sebességet a pályabeli sebességekkel, illetve gyorsulással tettük egyenlővé, a mi természetesen csak ezek számértékeiről állhat. Ezért a hodographnak minden lineáris menynyisége, s így a ϱ is *sebességet* képvisel s az (1) jobb oldalának *számértéke* egyenlő a ϱ görbületi sugár számértékével.]

Megjegyzendő, hogy *zárt (ellipsis-)* pályáknál a sebességi görbe is zárt lévén, a hodograph *egész kör*; *nem zárt (hyperbola-)* pályáknál a sebesség iránya és nagysága nem periodikus s így a hodograph nem lehet egész kör, hanem ennél kisebb körív; a parabola-pályáknál még egész kör (l. alább).

Erdekes azonban e hodograph-körnek a pályához képest való helyzete.

Rajzoljuk fel a mozgás centrumából kiindulólag a hodographnak vezérsugarait; ezek hoszsza a pályabeli sebességekkel egyenesen arányos, de irányaik e sebességeitől mindig $\frac{1}{2}\pi$-vel *jobbfelé* (az óramutató járásával egyezőleg) elforgatva legyenek. Szóval az egész hodograph a mozgás O centruma körül $\frac{1}{2}\pi$-vel jobbfelé van elforgatva.

A sebesség négyzete [137. §. (2)]:

$$v^2 = 2\frac{\mu}{r} + k; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

1. *Ellipsis-pályánál* a 143. §. *a)* pontja szerint $k = -\varkappa^2$; és ha a a pálya fél nagy tengelye, ε számbeli excentricitása, akkor az r legkisebb, ha a bolygó a P_1 perihéliumban (napközelben) van és legnagyobb, ha a P_2 aphéliumban (naptávolban) van; e távolságok: $r_{min} = r_1 = a(1-\varepsilon)$; $r_{max} = r_2 = a(1+\varepsilon)$, 44. ábra, köv. l.

A P_1 és P_2 pontokban a v_1 és v_2 sebességek a P_1P_2 apsisvonalra merőlegesek; négyzeteik a (2)-ből

$$v_1^2 = \frac{2\mu}{a(1-\varepsilon)} - \varkappa^2; \qquad v_2^2 = \frac{2\mu}{a(1+\varepsilon)} - \varkappa^2 \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Felvive v_1- és v_2-t a mozgás O centrumából nagyság (számérték) szerint, de irányra nézve $\frac{1}{2}\pi$-vel jobbfelé elforgatva, nyerjük a meghatározandó hodograph-kör $OA_1 = v_1$ és $OA_2 = v_2$ vezérsugarait.

A pálya a P_1P_2 apsisvonalra nézve symmetrikus lévén: a pálya symmetrikusan fekvő A pontpárjai sebességei is egyenlők s e vonalhoz symmetrikus irányuak, s az e sebességeket képviselő, az O-ból ezen irányokra merőlegesen húzott hodograph-vezérsugarak is egyenlő hosz-

szúak és a P_1P_2-höz symmetrikusak. E szerint az egész hodograph is symmetrikus a P_1P_2- vagy az A_1A_2-höz, szóval az A_1A_2 a hodographkörnek *átmérője*, melynek számértéke $|v_1|+|v_2|$, középpontja Γ (44. ábra), úgy hogy:

Az *ellipsises bolygópálya hodographja* oly *egész kör, melynek középpontja az apsisvonalnak a mozgás centrumától a perihélium felé húzott részén fekszik s mely a mozgás centrumát magába zárja.*

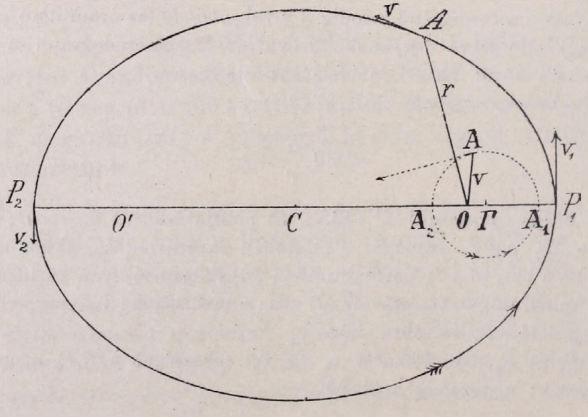
2. *Parabola-pályánál* a 143. §. *b)* pontja szerint $k=0$ és így (2)-ből:

$$v^2=\frac{2\mu}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2b)$$

A sebesség v_1 maximuma a P_1 perihéliumban lép fel, 45. ábra; a P_1 távolsága az O gyúponttól a $2p$ góczhúr negyedrészével egyenlő; a v_1 iránya a P_1-ben az apsisvonalra merőleges, négyzete

$$v_1^2=\frac{4\mu}{p}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

minden más pontban v kisebb és a pálya mindegyik ágában $r=\infty$-kor értéke zérus, iránya az apsisvonalhoz párhuzamos irány felé convergál.



44. ábra.

A hodograph szerkesztésénél a megelőző pont szerint járva el, OA_1 megfelel v_1-nek és az O pont maga a nevezett zérus értékű sebességminimumoknak. Ezek szerint

A *parabolás pálya hodographja oly egész kör, melynek középpontja az apsisvonalon fekszik s melynek a perihéliumtól legtávolabban fekvő kerületi pontja a mozgás centruma* (45. ábra).

Ez az ellipsis-pályák s hodographjaik határesete.

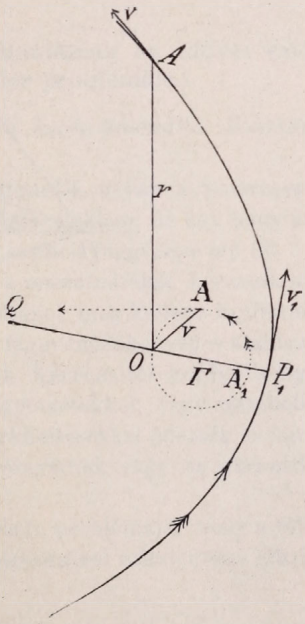
3. *Hyperbola-pályáknál* a 143. §. *c)* pontja szerint $k=+\varkappa^2$; s ha a a pálya fél nagy tengelye, ε számbeli excentricitása, akkor a legkisebb $r_1=a(\varepsilon-1)$ távolság a P_1 perihéliumnak felel meg, melyben a sebesség maximum s az apsisvonalra merőleges, 46. ábra, köv. l.; négyzete (2)-ből

$$v_1^2=\frac{2\mu}{a(\varepsilon-1)}+\varkappa^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Az r növekedésével a sebesség fogy és a pálya mindkét ágában $r=\infty$-esetében a sebesség minimum és az egyik, illetve a másik asymptotushoz párhuzamos; négyzete (2) szerint ekkor $v_2^2=\varkappa^2$.

A hodographot a megelőző *a)* és *b)* pontok eljárása szerint szerkesztve, OA_1 vezérsugara megfelel a v_1-nek míg a CG_1- és CG_2-végérintőkre merőleges $O\mathrm{L}_1$ és $O\mathrm{L}_2$ vezérsugarak megfelelnek az említett két sebességminimumnak; a hodograph-nak az $O\mathrm{L}_1$- vagy $O\mathrm{L}_2$-nél kisebb vezérsugarai már nem felelhetnek meg valós sebességeknek.

A hodograph-kör e szerint az OP_1-hez symmetrikusan fekvő, az L_1 és L_2 s az OP_1-n lévő A_1 pontokon áthaladó kör; e három pont teljesen meghatározza e kör helyzetét; így pl. felezve az $\mathrm{A}_1\mathrm{L}_1$ s $\mathrm{A}_2\mathrm{L}_2$ húrokat s a felező pontokból reájuk merőlegeseket emelve, ezek metszőpontja az apsisvonalon fekvő Γ, mely a hodograph-kör középpontja.



45. ábra.

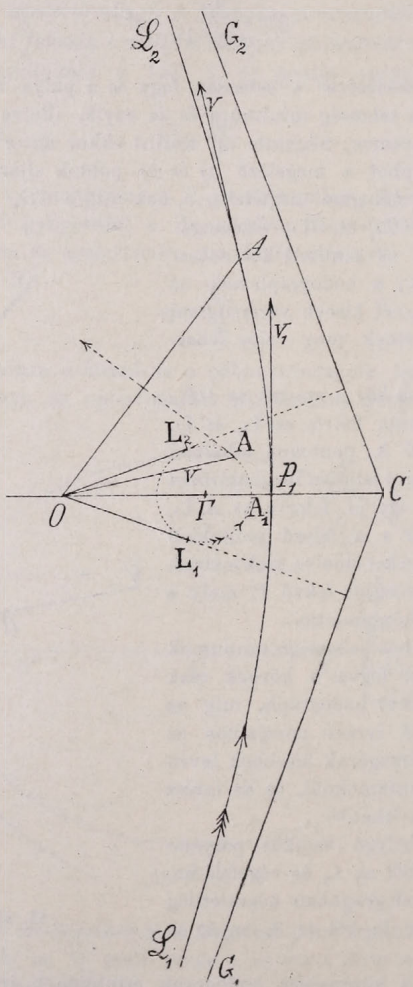
A fentemlített sebességminimumok $v_2=\varkappa$ értékeinél fogva e körnek csak $\mathrm{L}_1\mathrm{A}_1\mathrm{L}_2$ íve lehet hodograph, míg az $\mathrm{L}_2\mathrm{L}_1$ kiegészítő ívrész pontjaihoz az O-ból vont vezérsugarak kisebbek levén a sebesség-minimumoknál, ez az ívrész hodograph nem lehet.

Mialatt a bolygó (üstökös) pályájának L_1 ág-végéből az L_2 ág-végefelé halad: addig a hodographban képzeletileg mozgó pont az L_1-ből az A_1-en át az L_2-felé halad.

Továbbá, a közönséges hodograph érintőjének iránya a pályabeli gyorsulás irányával párhuzamos lévén, jelen hodographunk érintője e gyorsulástól mindig $\frac{1}{2}\pi$-vel jobbfelé van elforgatva, azaz e két irány itt mindenütt egymásra merőleges.

Az L_1 ág-végre nézve a centrális gyorsulás a pályabeli végtelen nagy vezérsugár mentén, azaz a G_1C végérintőhöz párhuzamosan fek-

szik; a hodograph megfelelő L_1 pontjában e görbéhez húzott érintőnek e szerint a G_1C-re merőlegesnek kell lennie, azaz az érintő a fenti szerkesztés értelmében az OL_1 egyenesbe esik. Épen úgy következik, hogy az L_2-ben a hodographhoz húzott érintő az OL_2 egyenesbe esik.



46. ábra.

zek szerint a mozgás centrumából a végérintőkre bocsátott merőlegesek érintik a hodograph-kört, miből következik, hogy ezen O centrum e körön kívül fekszik.

A hyperbola-pályák hodographja oly kör nagyobbívrésze, melynek középpontja az apsisvonalon fekszik s mely körívet a mozgás centrumából a végérintőkre bocsátott merőlegesek érintik s mely körnek kerületén kívül esik a mozgás centruma.

4. *Az egyenesvonalú pályáknál* a c területi sebesség *zérus* (145. §.), minél fogva a hodograph-körnek ρ görbületi sugara (1) végtelen nagy lesz.

A hodograph ezen esetben egy végtelen egyenes vonal, mely a jelen §. szerkesztését megtartva, az egyenesvonalú pályára merőleges. Az idézett §. három eseteinek megfelelő hodographot nyerjük, ha a jelen §. három rajzában a körök I' középpontjait az $\overrightarrow{OI'}$ irányban a végtelenbe eltoljuk, de e mellett e köröknek az O-hoz közelebben fekvő metszőpontjai helyét változatlanoknak hagyjuk.

3) A bolygók heliocentrikus coordinátáinak az idővel való explicit kifejezése. (Keppler problémája.)

149. §. *A valódi, az excentrikus, a közép anomália.* Keppler *egyenlete. Középponti egyenlet.*

A 143. §. (2_1)—(3_3) egyenletei előtűntetik ugyan a polárcoordináták és az idő közötti kapcsolatot véges alakban, de úgy hogy az idő, mint a polárcoordináták egyikének explicit függvénye lép fel.

A csillagászatban pedig rendesen a coordinátákat keressük az adott időhöz s így az idézett összefüggéseket meg kellene fordítani. A megfordítás azonban az eddig ismert függvényekkel véges alakban nem végezhető, miért is a csillagászok Keppler-től kezdve a legújabb időkig a coordinátákat közelítő egyenletekkel, vagy számbeli leg közelítő eljárásokkal, convergens sorkifejtésekkel fejezték és fejezik ki, mely sorok az idő egyszerű függvényeinek vagy az excentricitásoknak hatványai szerint haladnak.

Legfontosabb az ellipsis-pálya ebbeli problémája, mely a föld s a többi bolygók helyzetének meghatározásánál mindennapi alkalmazást talál.

Legyenek (47. ábra) $PMQNP$ az ellipsis-pálya, O a mozgás centrumával egybeeső egyik gyúpontja, PQ az apsis-vonal, C a pálya geométriai középpontja, a és b a pálya féltengelyei, ε számbeli excentricitása, $p=a(1-\varepsilon^2)$ a góczhúr fele, $r=OA$ a vezérsugár és A a bolygó tetszőleges helyzete.

Ekkor a csillagászok elnevezése szerint :

$$(POA)\measuredangle = v = a \text{ valódi anomália (anomalia vera)} \quad . \quad . \quad (0)$$

Szerkeszszünk a C középpont körül a sugárral segédkört, az u. n. *excentrikus kört* (mert geometriai középpontja nem esik egybe a mozgás O centrumával); bocsássunk az A-ból az apsisra AS merőlegeset és

hoszszabbítsuk ezt fölfelé, míg A'-ben metszi e kört; kapcsoljuk A'-et C-vel összse, akkor

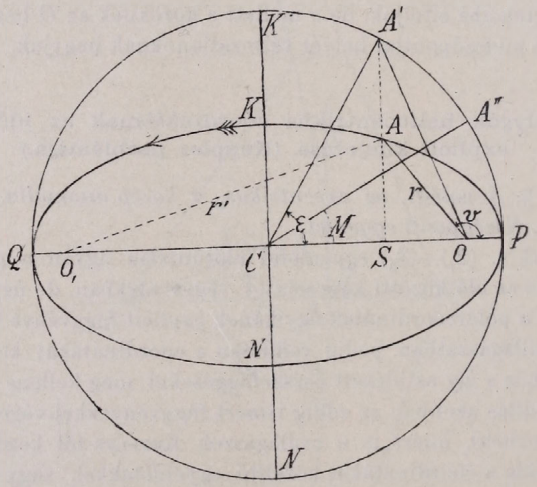
$(PCA')\measuredangle = E =$ *középpontkivüli anomália (anomalia excentrica).*

1. A két anomalia közötti összefüggés előtüntetése czéljából írjuk a 138. §. (2a) egyenletébe a jelen esetben és jelöléssel $p=a(1-\varepsilon^2)$, $\eta=v$, miáltal ez:

$$r=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos v},$$

$$r+r\varepsilon\cos v=a-a\varepsilon^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Továbbá az ábra szerint



47. ábra.

$$\overrightarrow{OS}=r\cos v; \qquad \overrightarrow{CO}=\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{SO},$$

azaz:

$$r\cos v=a\cos E-a\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Szorozva (2)-őt ε-nal és levonva ezt (1)-ből:

$$r=a-a\varepsilon\cos E \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

A (2) és (3) egyenletek összsege és különbsége:

$$r(1+\cos v)=a(1-\varepsilon)(1+\cos E);$$
$$r(1-\cos v)=a(1+\varepsilon)(1-\cos E).$$

Osztva az alsó egyenletet a felsővel, s a fél szögek függvényeit vezetve be, gyökvonás után:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v=\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

A két egyenlet szorzatának második gyöke:

$$r \sin v = a\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

2. Ha f az ellipsis POA sectorának területe, f' pedig a kör POA' sectoráé, akkor a geometria egy elemi tétele szerint * a közös alapú területek úgy aránylanak egymáshoz, mint magasságaik, ezek pedig úgy, mint CK a CK'-hez, azaz:

$$f : f' = b : a = a\sqrt{1-\varepsilon^2} : a = \sqrt{1-\varepsilon^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Továbbá az ábrából:

$$f' = (POA') \text{ terület} = (PCA') \text{ terület} - (OCA') \text{ terület},$$

azaz f' egy körsector s egy háromszög terület-különbségével egyenlő:

$$f' = \tfrac{1}{2} a \,.\, aE - \tfrac{1}{2} a\varepsilon \,.\, a \sin E;$$

mivel pedig (6)-ból $f = f' \,(b : a)$,

$$f = \tfrac{1}{2} ab \{E - \varepsilon \sin E\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

3. A területek elvéből következik, hogy az ellipsisnek $f = (POA)$ területi része, oly viszonyban van az egész ellipsis $F = ab\pi$ területéhez, mint az f leírására szükséges $t - t_0$ idő a bolygó T keringési idejéhez, azaz $f : ab\pi = (t - t_0) : T$, vagy

$$f = \pi \frac{t - t_0}{T} ab \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Rövidség kedvéért jelelje:

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

hol n-et az astronomiában *közép napi mozgás*nak nevezik, vonatkoztatva ezt azon időegységre, melyben T ki van fejezve [v. ö. a 140. §. 3. pontját] és ennek $t - t_0$-val való szorzatát

$$M = n\,(t - t_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

a bolygó *közép anomáliájának (anomalia media)*. Ez ugyanis az a szög, melyet a vezérsugár t időkor képezne az apsisvonallal, ha a bolygó

---

* Ugyanis, az ellipsis egyik sajátsága értelmében $A'S : AS = a : b$; ezért az SP-n lévő $A'PS$ és APS segmentumok minden közös, elemi alapú vertikális, két szalagjának területei szintén az $a : b$ viszonyban állanak egymáshoz és így maguk ezen $A'PS$ és APS segmentumok is; ezenkívül ugyanez a viszony az $A'OS$ és az AOS közös OS alapú háromszögekre is áll. Ezek szerint: $(A'PS)$ terület: (APS) terület $= (A'OS)$ terület: (AOS) terület $= a : b$; miből $\{(A'PS) \text{ terület} + (A'OS) \text{ terület}\} : \{(APS) \text{ terület} + (AOS) \text{ terület}\} = a : b$; és ez a szövegben idézett tétel.

egyenletes szögsebességgel keringene C középpont körül és T idő alatt fejezne be egy ily keringést.

Ily képzeleti bolygót *közép bolygónak* nevezik, s ha erről pl. felveszszük, hogy a $K'QN'P$ kört egyenletes mozgással T idő alatt futja be és P-be és e szerint Q-ba is ugyanazon időpontokban érkezik, mint a valódi bolygó, akkor a közép bolygó A''-ben van abban az időpillanatban, melyben a valódi bolygó A-ban; ekkor a $(PCA'')\sphericalangle$ a közép anomalia.

Egybekapcsolva (8)-at, (9)-et és (10)-et, nyerjük:

$$f=\tfrac{1}{2}ab\,.\,M=\tfrac{1}{2}ab\,.\,n\,(t-t_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

4. A (7)-t és a (11)-t összehasonlítva és a (4)-et odaírva:

$$M=n\,(t-t_0)=E-\varepsilon\sin E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}v\right)=\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}E\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

A (12) az u. n. Keppler-*féle egyenlet*, mely a közép és az excentrikus anomália közötti összefüggést fejezi ki; a (4) pedig az utóbbi és a valódi anomália közöttit.

Az M és a v közötti különbséget, a $v-M$-t *középponti egyenlet*nek nevezik.

A (4) és (12) egyenletek igen alkalmasak arra, hogy a valódi anomáliából az excentrikus- és ebből a közép anomaliát, illetve az időt meg lehessen határozni; épen úgy könnyű az excentrikus anomaliából a valódit és a közép anomaliát, illetve az időt meghatározni.

De megfordítva, a rendesen megfejtendő probléma: az időből, illetve a közép anomáliából a valódi anomáliának a meghatározása már tetemes nehézségekkel jár, mivel a (12) alapján az M az E-vel közvetetlenül van kifejezve, míg megfordítva az E-t az M segélyével nem lehet véges alakban előtüntetni és pedig, miként már Keppler mondotta: «*propter arcuum et sinuum heterogeneitatem*». V. ö. a 151. §-ot.

150. §. Keppler *problémájának közelítő megfejtéseiről.*

A nagy bolygók s a legtöbb kis bolygó pályáinál az ε excentricitás igen kicsiny s azért ezen esetekben a 149. §. (3), (4) és (12) egyenleteire:

$$r=a\,(1-\varepsilon\cos E);\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v=\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E;\quad M=E-\varepsilon\sin E \quad . \quad (0)$$

egyszerű közelítő számítások és kifejtések alkalmazhatók.

1. *Az excentrikus anomáliának folytatólagos helyettezéssel való kiértékesítéséről.*

Ha adott t-re vagy $M=n(t-t_0)$-re az E *számértékét* vagy ilyenek sorozatát keressük: tegyük az

$$E=M+\varepsilon \sin E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

egyenlet jobb oldalába az E helyébe először egy az M-mel egyenlő vagy legalább fokai számával egyenlő E_0 közelítő értéket, miáltal az (1) bal oldala számára pl. E_1 értéket nyerünk, mely már közelebb a helyes E-hez, mint E_0. Folytatólag helyettezve $\sin E_1$-t az (1) jobb oldalába $\sin E$ helyébe, az (1) bal oldala E_2 értéket ád, mely még jobb megközelítés, mint E_1 s í. t. Röviden:

$$M+\varepsilon \sin E_0=E_1\,; \quad M+\varepsilon \sin E_1=E_2\,; \quad M+\varepsilon \sin E_2=E_3 \text{ s í. t.}; \quad . \quad (2)$$

az eljárás addig folytatandó, míg az E_n s E_{n+1} közelítő értékek közötti különbség egyenlő vagy kisebb az elérendő pontosság határával.

Jegyzet: Itt a *regula falsi* alkalmazható; ha pl. $E_,$ és $E_{,,}$ egymáshoz közel fekvő oly két érték, mely az

$$F(E)=M-E+\varepsilon \sin E=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

függvény E gyöke közelében fekszik, akkor Taylor sora első hatványú tagjaiig bezárólag:

$$F(E_,)-F(E)=F'(E)\,(E_,-E)\,; \qquad F(E_{,,})-F(E)=F'(E)\,(E_{,,}-E),$$

melyek mindegyikéből valamint különbségükből az $[F'(E)]^{-1}$-t képezve s megjegyezve, hogy $F(E)=0$,

$$\frac{E_,-E}{F(E_,)}=\frac{E_{,,}-E}{F(E_{,,})}=+\frac{E_{,,}-E_,}{F(E_{,,})-F(E_,)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

A (4) segélyével az $E_,-E$ vagy az $E_{,,}-E$ különbség s belőle az E érték kiszámítható, mely, ha nem teszi zérussá a (3)-at, $E_{,,,}$ közelítő értéknek tekintendő s vele s az $E_,$ s $E_{,,}$ közül a pontosabb értékkel az eljárás ismétlendő.

Rendesen az $E_,$- s $E_{,,}$-t az E gyök két oldalán fekvőnek szokás választani úgy, hogy $F(E_,)$ és $F(E_{,,})$ jelváltozatot mutatnak.

2. *Folytatólagos helyettezésekkel előállított analytikai közelítések.*

Ha az E-nek és vele együtt a v- s r-nek a folyó idővel kifejezett *analytikai közelítő kifejezéseit* keressük, szintén a folytatólagos (successiv) közelítések eljárásával élünk, melyet itt az ε négyzeteit tartalmazó tagokig bezárólag kifejtjük.

α) Az (1) szerint az E írható:

$$E=M+\varepsilon \sin E=M+\varepsilon \sin [M+\varepsilon \sin (M+\varepsilon \sin \ldots)]\,;$$
$$=M+\varepsilon \sin M \cos \{\varepsilon \sin (M+\cdots)\}+\varepsilon \cos M \sin \{\varepsilon \sin (M+\cdots)\}.$$

Az $\varepsilon \sin (M+\varepsilon \ldots)$ argumentum sinusát s cosinusát kifejtve s csak az ε^2-es tagokig menve, nyerjük

$$E=M+\varepsilon \sin M+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \sin 2M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

β) Helyettezve E-t az *α)* első egyenletéből a (0) első egyenletébe:

$$r=a\{1-\varepsilon\cos[M+\varepsilon\sin(M+\cdots)]\},$$
$$=a\{1-\varepsilon\cos M\cos[\varepsilon\sin(M+\cdots)]+\varepsilon\sin M\sin[\varepsilon\sin(M+\cdots)]\},$$

avagy a közelítés említett fokát betartva:

$$r=a\{1-\varepsilon\cos M+\varepsilon^2\sin^2 M\}=a\{1-\varepsilon\cos M+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2(1-\cos 2M)\} \quad . \quad (6)$$

γ) A v kifejtésére a (0) középső egyenlete nem lévén alkalmas, felhasználjuk a területek elvét [140. §. (1) és (2), benne $d\vartheta$ helyébe dv-t téve], a pálya egyenletét [149. §. (1)], és Keppler harmadik törvényét 140. §. (3)] s a középmozgást [149. §. (9)]:

$$r^2\frac{dv}{dt}=\sqrt{\mu}\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}\,;\qquad r=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos v}\,;\qquad \sqrt{\mu}=na^{\frac{3}{2}}.$$

Az elsőből a többi kettő segélyével eliminálva r-t és μ-t:

$$\frac{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\varepsilon\cos v)^2}\frac{dv}{dt}=n.$$

Kifejtve az ε^2-es tagokig bezárólag:

$$ndt=(1-\tfrac{3}{2}\varepsilon^2)(1-2\varepsilon\cos v+\tfrac{2}{1.2}\tfrac{3}{2}\varepsilon^2\cos^2 v)\,dv\,;$$
$$ndt=[1-2\varepsilon\cos v-\tfrac{3}{2}\varepsilon^2(1-2\cos^2 v)\,dv\,;$$
$$n(t-t_0)=M=v-2\varepsilon\sin v+\tfrac{3}{4}\varepsilon^2\sin 2v,$$

hol $v=0$ és $t=t_0$ egymáshoz tartozók.

Az egyenlet írható és folytatólagosan kifejthető:

$$v=M+2\varepsilon\sin v-\tfrac{3}{4}\varepsilon^2\sin 2v=M+2\varepsilon\sin[M+2\varepsilon\sin(M+\cdots)]-\tfrac{3}{4}\varepsilon^2\sin[2M+\cdots];$$
$$v=M+2\varepsilon\sin M+\tfrac{5}{4}\varepsilon^2\sin 2M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

151. §. *Keppler problémájának szigorú sorkifejtéseiről. Kifejtés* Lagrange *megfordító sora segélyével és első fajú* Bessel*-féle függvények szerint.*

A csillagászok oly szigorú sorkifejtéseket szükségelnek, melyek az r, v, E polárcoordinátákat az idő explicit és szigorral használható függvényeiként fejezik ki.

E kifejtések két eljárását szokás alkalmazni, melyeknek itt csak legszükségesebb körvonalait fogjuk jelezni.

1. *Kifejtés* Lagrange *megfordító sora segélyével.*

E sor valamely ki nem fejtett

$$x=y+u\varphi(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

alakú függvény x-ét vagy tetszőleges $f(x)$-ét fejti ki:

$$x=y+\frac{u}{1}[\varphi(y)]+\frac{u^2}{1.2}\frac{d}{dy}[\varphi(y)]^2+\frac{u^3}{1.2.3}\frac{d^2}{dy^2}[\varphi(y)]^3+\,;\quad . \quad . \quad (2)$$

$$f(x)=f(y)+\frac{u}{1}[\varphi(y)]f'(y)+\frac{u^2}{1.2}\frac{d}{dy}\{[\varphi(y)]^2 f'(y)\}+ \\ +\frac{u^3}{1.2.3}\frac{d^2}{dy^2}\{[\varphi(y)]^3 f'(y)\}+\ldots\ldots \quad (3)$$

Úgy látszik, Keppler $E=M+\varepsilon\sin E$ szerkezetű egyenlete megfejtésének eszméje vezette Lagrange-t e tételének felfedezésére.*

Írva (2)-be $x=E$, $y=M$, $u=\varepsilon$; $\varphi(x)=\sin E$, nyerjük:

$$E=M+\frac{\varepsilon}{1}\sin M+\frac{\varepsilon^2}{1.2.2^1}2^1\sin 2M+\frac{\varepsilon^3}{1.2.3.2^2}(3^2\sin 3M- \\ -3\sin M)+\frac{\varepsilon^4}{1.2.3.4.2^3}(4^3\sin 4M-4.2^3\sin 2M)+\ldots \quad (4)$$

Hasonlóképen fejthető ki a v, ugyanis a 150. §. (0) egyenletei középsőjét az ismert

$$\operatorname{tg}\alpha=\sin\alpha:\cos\alpha=(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}):i\,(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})=(e^{+2i\alpha}-1):i\,(e^{+2i\alpha}+1)$$

összefüggés segélyével írva, belőle

$$(e^{iv}-1):(e^{iv}+1)=\sqrt{1+\varepsilon}\,(e^{iE}-1):\sqrt{1-\varepsilon}\,(e^{iE}+1).$$

Ebből, ha rövidség kedveért

$$\varkappa=\varepsilon:(1+\sqrt{1-\varepsilon^2}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (0)$$

$$e^{iv}=e^{iE}(1-\varkappa e^{-iE}):(1-\varkappa e^{+iE}).$$

Logarithmozva, a log-okat kifejtve és i-vel osztva:

$$v=E+\frac{\varkappa}{i}(e^{iE}-e^{-iE})+\frac{\varkappa^2}{2i}(e^{2iE}-e^{-2iE},+\cdots;$$

$$v=E+\frac{2}{1}\varkappa\sin E+\frac{2}{2}\varkappa^2\sin 2E+\frac{2}{3}\varkappa^3\sin 3E+\ldots\ldots \quad (a)$$

A $\varkappa^\nu$ hatványt ε szerint kifejtve [mit pl. Lagrange (3) sorával is végezhetni, lévén ugyanis (0)-ból $(\varkappa\sqrt{1-\varepsilon^2})^2=(\varepsilon-\varkappa)^2$, avagy: $\varkappa=\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon\varkappa^2$ és $\varkappa^\nu=(\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon\varkappa^2)^\nu$; ha (3)-ba írunk: $x=\varkappa$; $y=\frac{1}{2}\varepsilon$; $f(x)=\varkappa^\nu$; $f(y)=(\frac{1}{2}\varepsilon)^\nu$; $u=\frac{1}{2}\varepsilon=y$; $\varphi(y)=(\frac{1}{2}\varepsilon)^2$]:

$$\varkappa^\nu=(\tfrac{1}{2}\varepsilon)^\nu+\nu(\tfrac{1}{2}\varepsilon)^{\nu+2}+\frac{\nu(\nu+3)}{1.2}(\tfrac{1}{2}\varepsilon)^{\nu+4}+\frac{\nu(\nu+4)(\nu+5)}{1.2.3}(\tfrac{1}{2}\varepsilon)^{\nu+6}+\ldots \quad (b)$$

---

* E *kifejtés convergentiájára* nézve a mathematikai eredményt [pl. Serret felsőbb algebrája szerint (német fordítása I. kötete 379 lapján, Leipzig 1868)] a következő tétel alakjában fejezhetni ki: Legyen $\varphi(x)$ egy teljesen meghatározott folytonos függvény és legyen u_0 azon absolut értékek-, imaginarius érték esetében azon modulusok legkisebbike, melyeket u helyébe tenni kell, hogy az $x=y+u\varphi(x)$ egyenlet egyenlő két gyökkel bírjon. Mindaddig, míg u modulusa kisebb az u_0-nál, az idézett egyenlet azon x gyökei közül az, mely a legkisebb modulussal bír, a Lagrange-féle (2) formula szerint convergens sorba fejthető; ugyanaz áll ezen x gyök bármily folytonos függvényére nézve.

Az (*a*)-ban az E-t a szöveg (4) egyenlete adja; az (*a*) kifejtés általános tagjának $\sin \nu E$ tényezője Keppler egyenlete segélyével írható: $\sin(\nu E)=\sin(\nu M+\varepsilon\nu \sin E)$; ez Lagrange (3) sorával kifejthető, ha benne tétetik: $x=E$; $y=M$; $f(x)=\sin(\nu E)$; $f(y)=\sin(\nu M)$; $u=\varepsilon\nu$; $\varphi(y)=\sin M$; nyerjük

$$\sin(\nu E)=\sin(\nu M)+\frac{\varepsilon}{1}\sin M.\nu^2\cos(\nu M)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\frac{d}{dM}\{[\sin^2 M]\,\nu^3\cos(\nu M)\}+$$

Kifejtve ezt s az M ív többszörösei sinusait bevezetve, a (*c*) és (*b*) felhasználásával az (*a*)-ból nyerjük:

$$\left.\begin{aligned} v=M+\varepsilon 2\sin M+\frac{\varepsilon^2}{2^2}5\sin 2M+\frac{\varepsilon^3}{2^2.3}(13\sin 3M-3\sin M)+\\ +\frac{\varepsilon^4}{2^3 3.4}(103\sin 4M-44\sin 2M)+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\end{aligned}\right\}\ .\quad (5)$$

Továbbá, az r kifejtésére a 150. §. (0) egyenletei elseje $r=a(1-\varepsilon\cos E)$, benne Keppler egyenlete szerint $\cos E=\cos(M+\varepsilon\sin E)$; erre a (3) sor alkalmazható, ha benne $x=E$; $y=M$; $f(x)=\cos E$; $f(y)=\cos M$; $u=\varepsilon$; $\varphi(y)=\sin M$,

$$\cos E=\cos M-\frac{\varepsilon}{1}\sin M\sin M-\frac{\varepsilon^2}{1.2}\frac{d}{dM}\{[\sin^2 M]\sin M\}-\cdots,$$

melylyel az M többszörösei cosinusait vezetve be:

$$\left.\begin{aligned}\frac{r}{a}=1-\varepsilon\cos M-\frac{\varepsilon^2}{2}(\cos 2M-1)-\frac{\varepsilon^3}{1.2.2^2}(3\cos 3M-3\cos M)-\\ -\frac{\varepsilon^4}{1.2.3.2^3}(4^2\cos 4M-4.2^2\cos 2M)-\ .\ .\end{aligned}\right\}\ .\quad (6)$$

1*a*. Ezen (4), (5), (6) kifejtések s a rajtuk alapuló sorok *convergentiáját* illetőleg már Laplace vette észre, hogy mindezen sorok csak addig feltétlenül convergensek, míg $\varepsilon<0{\cdot}66274$; pontosabb adatokat az analysis szigorú vizsgálatai nyújtanak.*

---

* Ugyanis a megelőző l. lábjegyzékét tartva szem előtt, az $E=M+\varepsilon\sin E$ egyenlet lévén mind e kifejtések alapja [a v és az r az E függvényeinek tekinthetők], az idézett kritériumot alkalmazva, ezen Keppler-féle $0=M-E+\varepsilon\sin E$ egyenlet akkor mutat egyenlő két gyököt, ha az egyenlet egymáshoz végtelen közel eső két E-re nézve ki van elégítve, azaz, ha E szerinti differentiálquotiense zérus. E feltételből $0=-1+\varepsilon\cos E$ és így $\cos E=\varepsilon^{-1}$; $\sin E=\sqrt{1-\varepsilon^{-2}}$; ezekkel Keppler egyenlete:

$$\operatorname{arc}\cos\varepsilon^{-1}=M+\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^{-2}}=M+\sqrt{\varepsilon^2-1};$$

$$\varepsilon^{-1}=\cos(M+i\sqrt{1-\varepsilon^2})=\cos(i\sqrt{1-\varepsilon^2})\cos M-\sin(i\sqrt{1-\varepsilon^2})\sin M;$$

$$\frac{1}{\varepsilon}=\tfrac{1}{2}(e^{-\sqrt{1-\varepsilon^2}}+e^{+\sqrt{1-\varepsilon^2}})\cos M-\frac{1}{2i}(e^{-\sqrt{1-\varepsilon^2}}-e^{+\sqrt{1-\varepsilon^2}})\sin M.$$

2. *Kifejtés első fajú* Bessel*-*féle függvények segélyével.*

Bessel (1784—1846) a königsbergi csillagász, miután Keppler egyenlete megfejtésével foglalkozott volt*, 1824-ben kimutatta,** hogy valamely bolygó összes polár- és derékszögű coordinátái az ε excentritricitásnak 0 és 1 között fekvő bármely értékére nézve az M középanomália többszöröseinek sinusai s cosinusai szerint haladó oly convergens sorba fejthető ki, melynek együtthatói az ε növekedő hatványai szerint haladó sorok.

Egyébként e §. 1. pontja (4), (5), (6) kifejtései tulajdonképen kettős sorok lévén, ezeket nemcsak az ε hatványai, hanem az M többszörösei sinusai s cosinusai szerint is rendezhetjük, mi a fent jelzett kifejtési mód lehetőségére vall.

Alapul szolgáljon rövidség kedveért Fourier sora, melynek tárgyalását az analysis minden jobb kézikönyve tartalmazza és mely $-\pi$ és $+\pi$ között változó argumentummal biró bármily *egyértékű* (folytonos) függvényt az argumentum sokszorosai sinusai és cosinusai szerint haladó *convergens* sorba engedi fejteni:

$$f(M)=\tfrac{1}{2}a_0+a_1\cos M+a_2\cos 2M+\cdots+a_\nu\cos(\nu M)+b_1\sin M+b_2\sin 2M+\cdots+b_\nu\sin(\nu M)+R_\nu(M) \quad . \quad . \quad (7)$$

hol $R_\nu(M)$ a ν-edik tagok után következő soröszszeg, a maradéktag, míg az a_ν s b_ν együtthatók értékei:

Ezen egyenletnek legkisebb ε gyöke az M értékétől függ; bebizonyítható, de erre itt nem lévén hely, az eredményt csak kimondjuk, hogy e gyök az $M=0$ és az $M=\frac{1}{2}\pi$ értékek melletti legkisebb gyökértékek között fekszik. Amde ezen feltételi egyenletből:

α) $M=0$-nál: $\varepsilon(e^{-\sqrt{1-\varepsilon^2}}+e^{+\sqrt{1-\varepsilon^2}})=+2$, mely egyenlet legkisebb gyöke $\varepsilon=1$.

β) $M=\frac{1}{2}\pi$-nél: $\varepsilon(e^{-\sqrt{1-\varepsilon^2}}-e^{+\sqrt{1-\varepsilon^2}})=-2i$, melynek legkisebb gyöke $\varepsilon=-0{\cdot}66195.i$.

Ezek szerint a nevezett sorok feltétlenül convergensek, míg $\varepsilon<0{\cdot}66195$; az $1>\varepsilon<0{\cdot}66195$ közben az M-nek nem minden értékére s így a pályának csak egy részére convergensek; végre $\varepsilon>1$ esetben feltétlenül divergensek.

A nagy bolygók közül ε a *Mercur*-ra nézve a legnagyobb, ez körülbelül 0·20; az asteroidok közül többen nagy ε-t mutatnak, miáltal a sorok csak igen lassan convergálnak és más kifejtés alkalmasabb; v. ö. e §. következő 2. pontját.

* Über dis analytische Auflösung der Keppler'schen Aufgabe (Abhandlungen d. kgl. Ak. d. Wiss. zu Berlin. Aus den Jahren 1816—17, 49. l., vagy: Gesammelte Abhandlungen Bd. I., 17. l. Leipzig 1875.

** Untersuchungen des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht. Abhdlgen d. math. Klasse d. k. Ak. d. Wiss. zu Berlin. Aus dem Jahre 1824. Berlin 1826, 20. l. vagy: Ges. Abh. Bd. I. 84. l.

$$a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(M)\cos(\nu M)\,dM; \qquad b_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(M)\sin(\nu M)\,dM \quad . \quad . \quad (8)$$

A ν sorszám növekedésével az $R_\nu(M)$ a zérus felé convergál s a sor a fent definiált tulajdonságú $f(M)$-et fejezi ki.

α) Alkalmazva e kifejtést az $E-M=\varepsilon\sin E$ alakban írt Keppler-féle egyenletre, melyben E és M periodusa 2π és az E az M-nek 2π-vel való növekedésével szintén 2π-vel növekedett, s melyben $\sin E$ az M függvényének tekinthető:

$$E-M=\tfrac{1}{2}a_0+a_1\cos M+a_2\cos 2M+\cdots+b_1\sin M+b_2\sin 2M+\cdots \quad . \quad (9)$$

$$a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(E-M)\cos(\nu M)\,dM; \qquad b_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(E-M)\sin(\nu M)\,dM \quad . \quad (10)$$

Az M és az E az apsisvonalon egyszerre 0 illetve π-lévén: ellentetten egyenlő két M-re nézve a hozzátartozó E-k is ellentetten egyenlők, épen így a hozzátartozó $E-M$ különbségek és a két $\sin(\nu M)$ is ellentetten egyenlők, de a két $\cos(\nu M)$ egyenlő. E szerint (10)-ből

$$a_\nu = 0; \quad \nu = 0,\ 1,\ 2\ldots\infty \qquad b_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(E-M)\sin(\nu M)\,dM.$$

Partiális integrálással:

$$b_\nu\,\nu\,\frac{\pi}{2} = -\Big[(E-M)\cos(\nu M)\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}(\cos(\nu M)\,\{dE-dM\},$$

de $M=0$ és $=\pi$-nél az $E-M=0$, továbbá $\int_0^{\pi}\cos(\nu M)\,dM=0$ és így

$$b_\nu\tfrac{1}{2}\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\nu M)\,dE = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos[\nu(E-\varepsilon\sin E)]\,dE. \quad . \quad (11)$$

Rövidség kedveért írva $\varepsilon\nu=z$, a *ν-edrendű* első fajú Bessel-*féle függvény* rendes alakja:

$$\left.\begin{aligned} I_\nu(\nu\varepsilon) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos[\nu E-\nu\varepsilon\sin E]\,dE \\ \text{vagy} \\ I_\nu(z) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos[\nu E-z\sin E]\,dE \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

és így (9)-ből a (11) és (13) segélyével

$$E=M+2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}I_\nu(\nu\varepsilon)\cos(\nu M) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

A (12)-ben és ezentúl is az I_ν határozott integrált jelent, mely a ν-től, a $\nu\varepsilon = z$-től és a 0 és π határoktól függ; de teljesen független az integrál alatt lévő E változó nevétől.

β) Az r-nek ugyanily módon való kifejtésére írjunk [141. §. (0)]

$$\frac{r}{a} = 1-\varepsilon\cos E = \tfrac{1}{2}a_0 + \cdots + a_\nu \cos(\nu M) + \cdots + \cdots + b_\nu \sin(\nu M) + \cdots, \quad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} a_\nu &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(1-\varepsilon\cos E)\cos(\nu M)\,dM; \\ b_\nu &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(1-\varepsilon\cos E)\sin(\nu M)\,dM. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Az α)-ban érintett symmetria folytán ellentetten egyenlő M-eknél az $1-\varepsilon\cos E$ ugyanaz lévén, a b_ν együtthatók zérusok; és az a_ν partiális integrálással:

$$a_\nu \nu\frac{\pi}{2} = \Big[(1-\varepsilon\cos E)\sin(\nu M)\Big]_0^\pi - \varepsilon\int_0^\pi \sin E\sin(\nu M)\,dE.$$

A jobboldali első tag zérus; a másodikban:

$$\sin E\sin(\nu M) = \sin E\sin(\nu E - \nu\varepsilon\sin E) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos[(\nu-1)E - \nu\varepsilon\sin E] - \tfrac{1}{2}\cos[(\nu+1)E - \nu\varepsilon\sin E],$$

melynek, valamint (12) jelölésnek tekintetbe vételével

$$a_\nu = \frac{\varepsilon}{\nu}I_{\nu+1}(\nu\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\nu}I_{\nu-1}(\nu\varepsilon)$$

A $\nu=0$ kivételes esetben (15)-ből marad:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (1-\varepsilon\cos E)\,dM = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (1-\varepsilon\cos E)\,d(E-\varepsilon\sin E) = 2+\varepsilon^2,$$

úgy hogy (14)-ből

$$\frac{r}{a} = 1-\varepsilon\cos E = 1+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 + \varepsilon\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\{I_{\nu+1}(\nu\varepsilon) - I_{\nu-1}(\nu\varepsilon)\}\cos(\nu M). \quad (16)$$

γ) A v valódi anomalia számítása sokkal bonyolódottabb; a felmerülő együtthatók maguk egész sorrendszereket alkotnak s ezért e kifejtéstől itt eltekintünk.*

2*a*. *Az elsőfajú* Bessel-*féle függvényekről általánosságban.*

Az $I_\nu(z)$ függvény (12) alakja írható:

---

* V. ö. Bessel-nek e §-ban idézett értekezései másodikát, 327. l.

$$I_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos \nu E \cos(z \sin E)\, dE + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin \nu E \sin(z \sin E)\, dE, \quad (17a)$$

s ebből egyszerű megfontolással, a szerint, a mint $\nu = 2\mu$ vagy $= 2\mu+1$,

$$\left.\begin{aligned} I_{2\mu}(z) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z \sin E)\cos(2\mu E)\, dE; \\ I_{2\mu+1}(z) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(z \sin E)\sin[(2\mu+1)E]\, dE \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Egyenes differentiálás meggyőz, hogy a (12) vagy a (17a) eleget tesz az ezen függvényt jellemző

$$\frac{d^2}{dz^2}[I_\nu(z)] + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}[I_\nu(z)] + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) I_\nu(z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

ú. n. Bessel-féle differentiálegyenletnek. Továbbá, hely megkimélés czéljából csak a kész eredményeket írva, közvetetlenül meggyőződhetünk, hogy a következő alakok mindegyike

$$I_\nu(z) = \frac{z^\nu}{1.3.5\ldots(2\nu-1)} \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z \cos F) \sin^{2\nu} F\, dF \quad . \quad (19)$$

$$I_\nu(z) = \frac{z^\nu}{1.3.5\ldots(2\nu-1)} \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{iz\cos F} \sin^{2\nu} F\, dF \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

$$I_\nu(z) = \frac{(-1)^\nu}{\pi}\int_0^\pi e^{iz\cos F} \cos(\nu F)\, dF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

$$I_\nu(z) = \frac{z^\nu}{1.3.5\ldots(2\nu-1)} \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{izu}(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\, du \quad . \quad . \quad (22)$$

szintén eleget tesz a Bessel-féle differentiálegyenletnek, melyet végtelen hatványsorral kisértve megfejteni, két megoldást találunk; közülük az itt megfelelő:

$$I_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2.4.6\ldots 2\nu}\left\{1 - \frac{z^2}{2(2\nu+2)} + \frac{z^4}{2.4.(2\nu+2)(2\nu+4)} - \cdots\right\}; \quad (23)$$

ezt egyébként a (17a) alakjának a z növekvő hatványai szerinti kifejtése és integrálása közvetetlenül is megadja.

Végre a (17a)—21), de a (23) alapján is meggyőződünk, hogy egyenlő z argumentumú, $\nu-1$., ν-, $\nu+1$-edrendű függvények összefüggése:

$$\tfrac{1}{2}\{I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z)\} = \frac{\nu}{z} I_\nu(z), \quad \text{vagy} \quad I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} I_\nu(z) - I_{\nu-1}(z); \quad (24)$$

úgy hogy a $\nu+1$-edrendű függvény a ν és $\nu-1$-ed rendű függvényekből nyerhető. E szerint a két legalsóbb rendűnek, $I_0(z)$- és $I_1(z)$-nek kiértékesítése s ezeknek számtáblái valamenynyi magasabbrendű I-k értékeit szolgáltatják.*

4) A bolygók pályaelemeinek és heliocentrikus coordinátáinak összefüggése.

152. §. *Bolygók pályaelemei.*

A 143, 149—151. §§. kifejtései értelmében a bolygó helyét a térben minden időpillanatra nézve kiszámíthatni, ha a bolygónak ú. n. *pálya-elemeit* ismerjük. Ezek a csillagászok elnevezései és jelölései szerint ellipsispályára nézve a következők:

a	*a nagy tengely fele;*
ε	*a számbeli vagy relativ excentricitás;* †
Ω	*a felszálló csomó hoszszúsága;*
i	*a pályasík hajlása.*
Π	*a napközel (perihélium) hoszsza.*†
λ	*a bolygó közép hoszszúsága az epochában.*†

E menynyiségek jelentésére nézve az a és az ε magyarázatra már nem szorulnak, ezek határozzák meg a bolygó pályájának geométriai alakját.

Parabola-pályánál az a és ε helyébe a p parameter lép.

A bolygó $\mathfrak{V}\mathfrak{h}PA$ *pályasíkja*, 48. ábra, köv. l., metszi a rendesen alapsík gyanánt vett EE *ekliptikát* (a földpálya síkját) egy egyenesben, az ú. n. csomóvonalban; ezen egyenesnek a pályán fekvő végpontjai a *csomópontok* vagy röviden *csomók;* ezek közül az $\mathfrak{h}$ *felszálló csomón* át, a bolygó az

---

* E függvényekre nézve igen használható irodalmi összeállítást ád H. Heine: Handbuch der Kugelfunctionen Második kiadás I. kötete 188—189. lapjain; Berlin 1878. E helyen említi, hogy már 1822-ben Fourier (Théorie analytique de La Chaleur 369. l.) használt ily sorkifejtést, de nem adott neki külön nevet.

Továbbá: A. Gray and G. B. Mathews: Treatise on Bessel functions and their application to physics. 289—291. ll. London 1895.

Jó összeállítást ád még: J. Todhunter: An elementary treatise on Laplace's-, Lamé's and Bessel's functions. London 1875.

Számtáblákat e §-ban idézett második Bessel-féle értekezésén és Hansen-nek «Absolute Störungen» című értekezésén (Gotha 1843) kívül tartalmaz: E. Lommel Studien über die Bessel'schen Functionen Leipzig 1868.

Folytatólagos számtáblákat l. Steiner Lajos: A környilás létesítette fényelhajlás jelenségének intenzitási viszonyai, M. T. Akadémia Math. és Termtt. Értesítője XII. kötete 44. l. 1894.

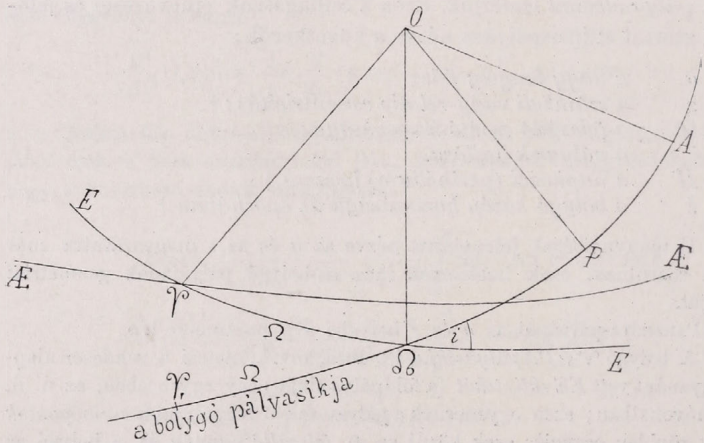
V. ö. még: Karl Strehl: Theorie des Fernrohres 32—45. ll. (Bessel'sche Functionen), Leipzig 1894.

† Az excentricitás, a perihélium hoszsza és a középhoszszuság szokásos csillagászati jelei: e, π, L_0.

ekliptika-síkjának azon oldala felé mozog, melyen a földgömb északi pólusa van; a másik a *leszálló csomó*.

A *felszálló csomó hosszúsága*, Ω, az a szög, melyet a napból az Υ tavaszponthoz* és az $\mathfrak{b}$ felszálló csomóhoz húzott vezérsugarak egymással képeznek; e szög és a pálya *i hajlásszöge a földpályához*, meghatározzák a bolygó pályasíkjának fekvését az ekliptikához képest.

A *pályában való hosszúság* az a szög, melyet a naptól a bolygóhoz húzott vezérsugár a napon átmenő, a pályasíkban fekvő egy szilárd egyenessel képez. Ezt az utóbbit úgy választjuk, hogy azon Υ, $\mathfrak{b}$ PA égi körön, melyben a pályasík az éggömböt metszi, az $\mathfrak{b}$ csomótól ellenkező irányban felviszszük az Ω szög ívét. Ezen ív Υ, végpontja a



48. ábra.

pályabeli hoszszúságok zéruspontja. E szerkesztés szerint az $\mathfrak{b}$ felszálló csomó pályabeli Υ, $\mathfrak{b}$ hoszszúsága egyenlő ugyanezen $\mathfrak{b}$ pontnak az ekliptikában való $\Upsilon\mathfrak{b}=\Omega$ hoszszúságával.

A napközel Π hoszsza az a szög, melyet a bolygónak a naptól való legkisebb OP távolsága képez a pályabeli hoszszúságok Υ, zéruspontjával; ez az adat adja meg a pálya irányítását saját síkjában. E szerint $\mathfrak{b}P$ iv$=\Pi-\Omega$.

---

* A földegyenlítő $ÆÆ$ síkja a földpálya síkját egy oly egyenesben metszi, mely a földtengely változatlan irányánál fogva (eltekintve a præcessiótól és a nutátiótól) a föld forgása és keringése közben önmagához párhuzamos irányú marad. Ezen irányhoz a nap középpontján át húzott párhuzamos egyenes a *napéjegyenek (aequinoctiumok) vonala*, mert ha a föld (középpontja) e vonalon átmegyen, akkor a nap az egyenlítő síkjában van és a nappal s az éjjel tartama egyenlő. A tavaszi æquinoctium helye a végtelen sugarúnak tekintett égen a Υ tavaszpont.

Epocha az az időpillanat, melytől kezdve a t folyó időt számítjuk. *A középanomália* $M=n(t-t_0)$ kifejezésében n az ú. n. *középmozgás*nak nevezett állandó [149. §. (9) és (10)] és t_0 az az időpillanat, melyben a bolygó a P perihéliumban van. Az nt_0 helyébe egy új állandót λ-t úgy vezetünk be, hogy

$$-M_0=nt_0=\Pi-\lambda, \qquad M=nt+\lambda-\Pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Az $nt+\lambda$ szöget *közép hoszszúságnak* nevezik, mert ezt a pályában fekvő azon szögnek (hoszszúságnak) szabad tekintenünk, mely Υ-tól számítódik, s melyből az Υ, P szöget (a perihélium Π hoszszúságát) levonva, a P-től számítandó *közép anomaliát* nyerjük [149. §. (10).], míg M_0 a középanomália az epochában (t. i. $t=0$-kor).

A középhoszszúság értéke az epochában λ, s ez a fent felsorolt elemek hatodika.

A pályának fent említett hat eleme nem más, mint a 136. §. (3) mozgásegyenletei hat független integrátió-állandóinak alkalmasan választott rendszere, mely a 137—144. §§. integrátió-állandóival részben teljesen megegyezik, részben ezekből könynyen képezhető (v. ö. a köv. §-t).

153. §. *Az i, Π, Ω elemek összefüggése a pályasík normálisának és focális tengelyének irányaival.*

Derékszögű coordináta-tengelyeink legyenek (49. ábra, köv. l.): $O\Upsilon$ = a naptól a tavaszpont felé vont napéjegyenvonal, OE = a naptól az előbbi irányra az ekliptika síkjában vont merőleges (az ΥE ívet a föld mozgása mentén számítva), OZ az előbbi két irányra emelt positiv normális.

Jeleljék továbbá ON a bolygó pályasíkja normálisát, OP e pálya apsisvonalát és OH e pályasíkban fekvő, az előbbi két irányra merőlegeset; e három egyenes szintén positiv (jobb sodrású) tengelyrendszert (indarendszert) alkot.

1. A megelőző §. megállapodásai értelmében: $O\mathfrak{H}$ a csomóvonal, $(\Upsilon O\mathfrak{H}\measuredangle=\Omega$; továbbá ON és az OZ az $O\mathfrak{H}$-re merőleges, miért is ON-nek az ekliptikára való ON' vetülete is merőleges $O\mathfrak{H}$-re. Ezek szerint a 49. ábra értelmében közvetetlenül:

$$\gamma_1=+\sin i \sin \Omega\,; \qquad \gamma_2=-\sin i \cos \Omega\,; \qquad \gamma_3=+\cos i \quad . \quad . \quad (1)$$

2. Továbbá: P a perihélium s az $\Upsilon P\mathfrak{H}$ s $\mathfrak{H}PE$ gömbi háromszögekben:

$$\Upsilon\mathfrak{H} \text{ ív}=\Omega; \qquad \mathfrak{H}P \text{ ív}=\Pi-\Omega; \qquad (\Upsilon\mathfrak{H}P)\measuredangle=\pi-i; \qquad \cos(\Upsilon OP)=\alpha_1;$$
$$\mathfrak{H}E \text{ ív}=\tfrac{1}{2}\pi-\Omega; \qquad \mathfrak{H}P \text{ ív}=\Pi-\Omega; \qquad (P\mathfrak{H}E)\measuredangle=i; \qquad \cos(POE)=\alpha_2;$$

$$\alpha_3=\sqrt{1-\alpha_1^2-\alpha_2^2}\,.$$

A gömbháromszögek tételei szerint [Math. Repertórium 12. §.]:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=\cos\Omega\cos(\Pi-\Omega)-\sin\Omega\sin(\Pi-\Omega)\cos i\,;\\ \alpha_2&=\sin\Omega\cos(\Pi-\Omega)+\cos\Omega\sin(\Pi-\Omega)\cos i\,;\\ \alpha_3&=\sin i\ \sin(\Pi-\Omega).\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

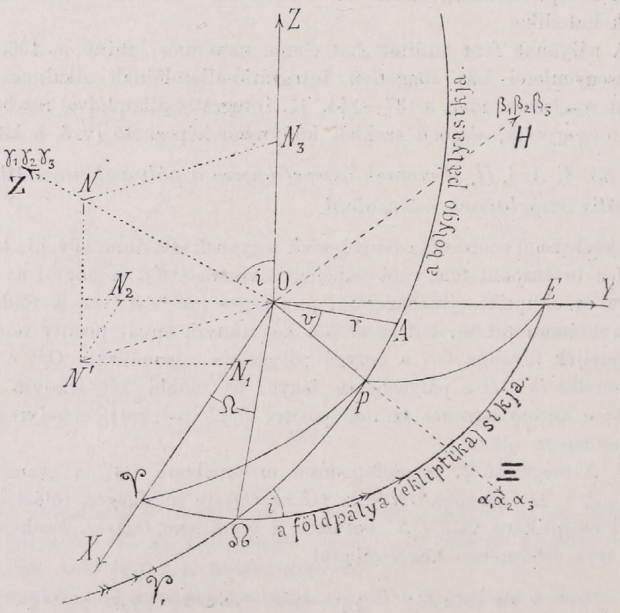
3. Végre, mivel $\beta_1=\gamma_2\alpha_3-\gamma_3\alpha_2$; $\beta_2=\gamma_3\alpha_1-\gamma_1\alpha_3$; $\beta_3=\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1$:

$$\left.\begin{aligned}\beta_1&=-\cos\Omega\sin(\Pi-\Omega)-\sin\Omega\cos(\Pi-\Omega)\cos i;\\ \beta_2&=-\sin\Omega\sin(\Pi-\Omega)+\cos\Omega\cos(\Pi-\Omega)\cos i;\\ \beta_3&=+\sin i\ \cos(\Pi-\Omega).\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(3)$$

Jegyzet. A $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ állandók a $c_1c_2c_3$ s $g_1g_2g_3$-integrálállandókból fejeződnek ki [137. §. 1*ab*) és 146. §. (5)].

A (2) és (3) kissé transformálhatók a $\cos i=1-2\sin^2\frac{1}{2}i$ helyettezés és a

$$\cos\Pi=\cos\Omega\cos(\Pi-\Omega)-\sin\Omega\sin(\Pi-\Omega);$$
$$\sin\Pi=\sin\Omega\cos(\Pi-\Omega)+\cos\Omega\sin(\Pi-\Omega)$$



49. ábra.

identitások segélyével; nyerjük így:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=\cos\Pi+2\sin^2\tfrac{1}{2}i\sin\Omega\sin(\Pi-\Omega)\\ \alpha_2&=\sin\Pi-2\sin^2\tfrac{1}{2}i\cos\Omega\sin(\Pi-\Omega)\\ \alpha_3&=\sin i\sin(\Pi-\Omega)\end{aligned}\right\};$$

$$\left.\begin{aligned}\beta_1&=-\sin\Pi+2\sin^2\tfrac{1}{2}i\sin\Omega\cos(\Pi-\Omega)\\ \beta_2&=+\cos\Pi-2\sin^2\tfrac{1}{2}i\cos\Omega\cos(\Pi-\Omega)\\ \beta_3&=+\sin i\cos(\Pi-\Omega)\end{aligned}\right\}.\quad\ldots\quad(4)$$

154. §. *A bolygók derékszögű coordinátái, kifejezve a pályaelemek segélyével.*

A megelőző §. elején említett két rendszere a derékszögű egyeneseknek most az O-hoz képest mozdulatlan két tengelyrendszer legyen, melyek XYZ irányai az $O\Upsilon$, OE, OZ; ΞHZ irányai az OP, OH, ON irányokba esnek, 49. ábra.

A bolygó tetszőleges A helyének x, y, z, illetve ξ, η, ζ a derékszögű coordinátái e két rendszerre nézve; ezek közönséges transformáló formulái [Math. Repertórium 48. §. (2)]:

$$\xi=x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3; \quad \eta=x\beta_1+y\beta_2+z\beta_3; \quad \zeta=x\gamma_1+y\gamma_2+z\gamma_3. \quad (5a)$$
$$x=\xi\alpha_1+\eta\beta_1+\zeta\gamma_1; \quad y=\xi\alpha_2+\eta\beta_2+\zeta\gamma_2; \quad z=\xi\alpha_3+\eta\beta_3+\zeta\beta_3. \quad (5b)$$

Ezekhez járulnak a pálya síkjának és alakjának egyenletei [137. §. (1a) és (1ab) és 146. §. (13)] s a bolygónak pályájában való derékszögű coordinátái:

$$\zeta=0=x\gamma_1+y\gamma_2+z\gamma_3=0; \quad c^2-\mu r=gr\cos v; \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$
$$\xi=r\cos v; \quad \eta=r\sin v; \quad \zeta=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Rendesen az idő segélyével kívánjuk a helymeghatározókat kifejezni; a 143. és 149. §§-ok az r és t, a $v=\eta$ és t s az r és $v=\eta$ közötti összefüggéseket tartalmazzák s a 151. §. az r, E, v polárcoordinátáknak az $M=n(t-t_0)$ középanomáliával való kifejezéseit adja; e szerint ezek és velük (7) értelmében a ξ és η derékszögű coordináták a t ismert függvényeinek tekintendők, melyekben az a, ε és (az M-ben) az $-M_0=nt_0=\Pi-\lambda$ parameterek lépnek fel [153. §. (1)].

Helyettezve az $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ értékeit (1)-, (2)-, (3)-ból (5b)-be és rövidség kedveért írva $(\Pi-\Omega)=\Psi$, nyerjük:

$$\left.\begin{aligned} x &= (\xi\cos\Psi-\eta\sin\Psi)\cos\Omega-(\xi\sin\Psi+\eta\cos\Psi)\sin\Omega\cos i;\\ y &= (\xi\cos\Psi-\eta\sin\Psi)\sin\Omega+(\xi\sin\Psi+\eta\cos\Psi)\cos\Omega\cos i;\\ z &= (\xi\sin\Psi+\eta\cos\Psi)\sin i \end{aligned}\right\}. \quad (8)$$

A (8)-ban az x, y, z coordináták közvetlenül az i, Π, Ω pályaelemekkel és ξ s η révén az épen említetteknél fogva a t folyó idővel s az a, ε, λ, pályaelemekkel vannak kifejezve.

A *sebességi* componenseket a (8) időszerinti első differentiálquotientsei adják; (8)-ban csak ξ s η függvén t-től, itt ξ' és η' ismeretére van szükségünk.

Ezekre nézve ellipsis-pályánál [149. §. (2) és (5) és (12)]:

$$r\cos v=\xi=a\cos E-a\varepsilon; \quad r\sin v=\eta=a\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin E;$$
$$M=n(t-t_0)=E-\varepsilon\sin E.$$

Ezeket differentiálva:

$$n=E'-\varepsilon\cos E\,.\,E'; \quad E'=n:(1-\varepsilon\cos E);$$

$$\xi' = -a \sin E \,.\, E' ; \qquad \eta' = a\sqrt{1-\varepsilon^2} \cos E \,.\, E'$$

$$\xi' = -\frac{an \sin E}{1-\varepsilon \cos E} ; \qquad \eta' = \frac{an\sqrt{1-\varepsilon^2} \cos E}{1-\varepsilon \cos E} , \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

melyekkel (8)-ból az x', y', z' sebességi összetevők képezhetők.

További fejtegetések az elméleti csillagászat keretébe tartoznak.

b. *Eljárások és problemák meghatározott pályán haladó anyagi pont kényszermozgására.*

1) Anyagi pontmozgás előírt szilárd sima pályán.

155. §. *Anyagi pont mozgása vertikális síkú sima előírt pályán a földnehézség egyedüli hatása alatt. Az egyenletek kétféle alakja. Lejtő.*

A mozgás egyenletei az érintő és a deréklő mentén [48. §. (5), 84. l.]:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} ; \qquad m\frac{v^2}{\varrho} = R - X\frac{dy}{ds} + Y\frac{dx}{ds} . \quad . \quad (1)$$

Független változóul rendesen az y-t szokás választani.

1. Ha az y-ok positiv tengelye függélyesen *lefelé* van irányítva, 50. ábra, akkor esetünkben

$$X=0 ; \qquad Y=+mg ; \qquad dT = d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) = Ydy = mg \,.\, dy = dU, \quad (1a)$$

hol T az m eleven ereje, U az mg erő erőfüggvénye.

Ezek szerint

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = mg\,(y-h), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$

hol $-mgh$ az integrátió állandója és h az y-nak azon értéke, hol v zérus (a hol az m-et elbocsátjuk); positiv h esetében e helyzet az X-tengely alatt van, negativ h-nál e fölött.

Továbbá (2a)-ból:

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{ds}{\sqrt{y-h}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

míg (1)- és (2a)-ből

$$R = mg\left\{2\frac{y-h}{\varrho} - \frac{dx}{ds}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

2. Ha az y-ok positiv tengelye függőlegesen *fölfelé* van irányítva, 51. ábra, akkor

$$X=0, \qquad Y=-mg ; \qquad dT = d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) = Ydy = -mgdy ; \quad . \quad (1b)$$

Ezekből rendre:

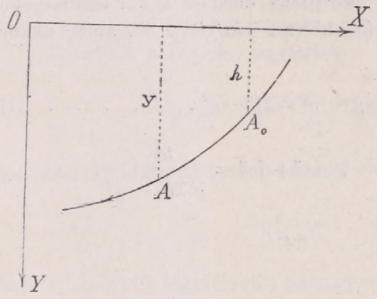
$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = mg\,(h-y), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2b)$$

hol $+mgh$ az integrátió állandója és h ismét az y-nak azon értéke, melynél v zérus, (hol az m-et elbocsátjuk); ha h positiv: e helyzet az X-tengely fölött van; ha h negativ, alatta.

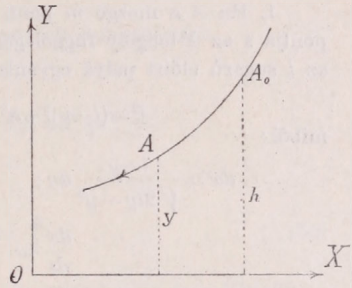
Továbbá (2b)-ből és (1)-ből:

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{ds}{\sqrt{h-y}}; \quad \ldots \ldots \quad (3b)$$

$$R = mg\left\{2\frac{h-y}{\varrho} + \frac{dx}{ds}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4b)$$



50. ábra.

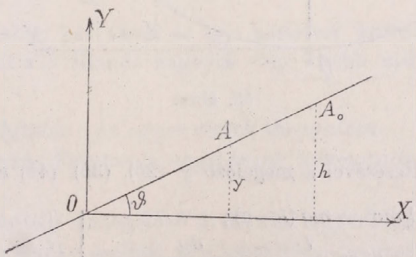


51. ábra.

3. *Jegyzet. Sima* ϑ *hajlású lejtő* esetében, 52. ábra, $\varrho=\infty$ s ha A_0-tól számítjuk a *lefelé* gördülés közben leírt s ívet, akkor:

$$ds = -\frac{dy}{\sin\vartheta}; \qquad \frac{dx}{ds} = -\cos\vartheta;$$

$$R = -mg\cos\vartheta; \qquad dt = -\frac{1}{\sin\vartheta\sqrt{2g}} \frac{dy}{\sqrt{h-y}};$$



52. ábra.

avagy, ha A_0-helyzettől számítjuk a t-ket:

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{\sqrt{h-y}}{\sin\vartheta},$$

mely eredmény az elemekből ismeretes.

156. §. *Folytatás: Ideális inga. A nehéz pont vertikális sima kör homorú oldalán mozog. Derékszögű és polárcoordináták.*

Számos tényleges mozgás vezethető viszsza erre a problémára; így az ideális (ú. n. mathematikai) inga problémája is, mely ingát igen könnyű fonál (vagy rúd) végéhez erősített nehéz gömböcske segélyével érzékíthetni, ha a fonál vagy a rúd másik vége körül mint szilárd pont körűl vertikális síkban lenghet; vagy a gömb mozgása a tekepálya dobjának homorú oldalán s í. t.

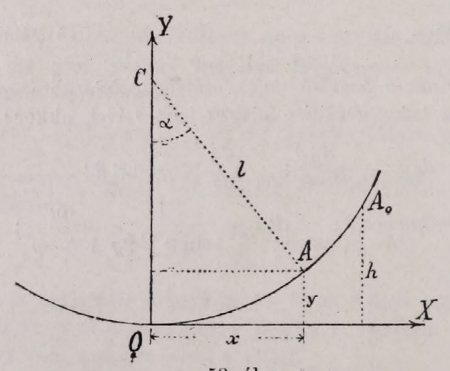
1. Ha A a mozgó m pont, a coordináták kezdete a kör legmélyebb pontja s az Y-tengely függőlegesen felfelé van irányítva 53. ábra, akkor az l sugarú előírt pálya egyenlete:

$$l^2=(l-y)^2+x^2, \quad \text{vagy} \quad x^2=2ly-y^2 \ldots\ldots (1)$$

miből:

$$dx=\frac{l-y}{\sqrt{2ly-y^2}}dy; \qquad ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{l\,dy}{\sqrt{2ly-y^2}};$$

$$\frac{dx}{ds}=\frac{l-y}{l}; \qquad \varrho=l.$$



53. ábra.

Ezek helyettesítésével a megelőző §. (2*b*), (3*b*), (4*b*) egyenleteiből:

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}mv^2=mg\,(h-y);\\ &dt=\frac{l}{\sqrt{2g}}\cdot\frac{dy}{\sqrt{h-y}\sqrt{2ly-y^2}}; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (2)$$

$$R=\frac{mg}{l}\{2\,(h-y)+(l-y)\} \ldots\ldots (3)$$

A h integrátió-állandó tetszőleges lehet; értékétől lényegesen függ a probléma további tárgyalása. Értelmezése: a pálya $y=0$ legmélyebb pontjában O-ban a v_0 sebességre nézve áll:

$$\tfrac{1}{2}v_0^2 = gh\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

azaz, h az a magasság, melyből az m szabadon vagy surlódás nélküli pályán leesve, v_0 sebességgel érkezik O-ba.

2. A további tárgyalást polárcoordinátákban végezzük; jeleljék ezeket l és α; az 53. ábra szerint:

$$y = l - l\cos\alpha = 2l\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = l\frac{d\alpha}{dt} = l\omega\,;$$

ha ω az A-nak a C középpontra vonatkoztatott szögsebessége.

Továbbá, a (2) első egyenlete

$$\tfrac{1}{2}l^2\omega^2 = \tfrac{1}{2}l^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = gh - 2gl\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\,;$$

ha ebbe rövidség kedveért teszünk:

$$\tfrac{1}{2}l^2\omega_0^2 = gh\,; \qquad \varepsilon^2 = \frac{g}{l}\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5a)$$

hol ω_0 az $\alpha=0$ legmélyebb pályapontban a szögsebesség és ε állandó,

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 &= \omega_0^2 - 4\varepsilon^2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\,; \\ dt &= \frac{d\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 - 4\varepsilon^2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Végre az R ellennyomás (a kényszererő) az (5) és (3) egyesítéséből:

$$R = mg\left\{1 + \frac{2h}{l} - 6\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

A továbbiakban két főeset és egy határeset különböztetendő meg, a szerint, a mint a h állandó nagyobb vagy kisebb mint $2l$, vagy vele egyenlő.

157. §. *Folytatás: Az egyes esetek tárgyalása.*

I. *Első főeset. Folytonos egyirányú körmozgás.* $h > 2l$, avagy $\omega_0^2 > 4\varepsilon^2$.

a. Ezen esetben a megelőző §. (6) első egyenletének jobb oldala az α semmiféle értéke mellett sem lehet zérus; e szerint az $\omega = d\alpha : dt$ szögsebesség- s így $v = a\omega$ sebesség maga sem lehet zérus; azaz itt a mozgás (a pálya) fordulóponttal nem bírván, az m mindig csak *egy irányban* haladhat a kör mentén.

A sebesség legnagyobb az $\alpha = 0,\ 2\pi,\ 4\pi\ldots$ helyeken, legkisebb az $\alpha = \pi,\ 3\pi,\ 5\pi\ldots$ helyeken és általában az α-nek szakaszos (periodikus) függvénye.

Irva rövidség kedveért

$$\tfrac{1}{2}\alpha=\varphi; \qquad \frac{4\varepsilon^2}{\omega_0^2}=\frac{2l}{h}=k^2, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

hol $k^2<1$, a megelőző §. (6) egyenlete:

$$\omega=\frac{d\alpha}{dt}=\pm\,\omega_0\sqrt{1-k^2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha}, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

hol a + vagy a — előjel érvényes, a szerint, a mint mozgás közben az α szög folytonosan növekszik vagy fogy; a szögsebesség szélső értékei

$$\omega_{max}=\omega_0; \qquad \omega_{min}=\omega_0\sqrt{1-k^2}.$$

A mozgás e szerint periodikus; egy egész periodus lefoly a mi közben α szög 2π-vel változik.

Az (1) alatti φ szög felhasználásával a (2):

$$dt=\frac{2}{\omega_0}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

s ha még az időt az m legmélyebb helyzetétől, az $\alpha=0$-, avagy $\varphi=0$-tól kezdjük számítani:

$$t=\frac{2}{\omega_0}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{2}{\omega_0}F(k,\,\varphi), \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

hol $F(k,\,\varphi)$, Legendre jelölése szerint az elsőfajú elliptikus integrál k modulussal és φ amplitudóval. [Math. Rep. 125. §. 160. l.]

Megfordítva, ha φ-t (azaz $\frac{1}{2}\alpha$-át) a t segélyével akarjuk kifejezni, akkor ugyancsak Legendre jelölésével:

$$\varphi=am\,(\tfrac{1}{2}\omega_0 t,\ k) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3a)$$

szóval: φ az amplitudója a (3) alatti F integrál $\frac{1}{2}\omega_0 t$ értékének, modulo k; e kifejezés, mely az első fajú elliptikus integrál megfordításából származott: az *első fajú elliptikus függvény*.

Az $F(k,\,\varphi)$ integrál számtáblái ismertek lévén (Math. Repertórium 147. §. 198. lap), az adott k és φ-hez megkereshető a hozzátartozó t és viszont: adott t- és k-ból megkereshető a hozzátartozó $\varphi=\frac{1}{2}\alpha$ szög. Ellenben az $F(k,\,\varphi)$ nem teljes integrál sorkifejtései igen hoszszadalmasak (i. h. 130. §. 169. lap).

b. A *periodus* T tartamának fele múlik el, mialatt α a 0-tól $\alpha=\pi$-ig, azaz φ a 0-tól $\varphi=\frac{1}{2}\pi$-ig változott; a (3)-ból e szerint

$$\tfrac{1}{2}T=\frac{2}{\omega_0}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{2}{\omega_0}K(k), \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

hol $K(k)$ az ú. n. elliptikus elsőfajú *teljes* integrál, melynek táblázatos

számértékei szintén ismertek (i. h. 146. §. 197. lap); de közönséges kifejtését nagy alkalmazhatóságánál fogva itt közöljük:

$$K(k)=\int_{4}^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi\,\{1-k^2\sin^2\varphi\}^{-\frac{1}{2}}=\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi\left\{1+\tfrac{1}{2}k^2\sin^2\varphi+\tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{2}.\tfrac{1}{2}k^4\sin^4\varphi+..\right\}$$

Ámde (Math. Rep. 117. §. 147. l. 7. formula és 121. §. 153. l. 1. formula):

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2n}\varphi d\varphi=\frac{1.3.5\ldots(2n-3)\,(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n-2)\,2n}\,\tfrac{1}{2}\pi;$$

$$K(k)=\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi\,(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}=\left\{1+(\tfrac{1}{2})^2k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^4+\cdots\right\}\tfrac{1}{2}\pi;\quad\ldots\quad(4a)$$

és így (4)-ből:

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^4+\cdots\right\};\quad\ldots\quad(5)$$

hol (1) és a megelőző §. (5*a*) rövidítése szerint

$$\frac{1}{\omega_0}=\frac{l}{\sqrt{2gh}}=\tfrac{1}{2}k\sqrt{\frac{l}{g}},\quad\ldots\quad(5aa)$$

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.\,k\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^4+\cdots\right\}.\quad\ldots\quad(5a)$$

Az (5) vagy (5*a*) kifejezi a *keringési időt*; ez annál nagyobb, minél kisebb az ω_0, azaz, minél nagyobb a k; a $h=2l$, azaz a $k=1$ határesetre nézve a (4*a*) sor összehajlósága megszünik s értéke végtelen nagy; l. alább a III. esetet.

c. A *kényszererő* (a pálya anyaga okozta *ellennyomás*) az (1) s a megelőző §. (7) kifejezése értelmében:

$$R=mg\left\{1+\frac{4}{k^2}-6\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\right\}.\quad\ldots\quad(6)$$

melynek az $\alpha=0$ s $\alpha=\pi$ melletti határértékei:

$$R_{max}=mg\,(1+\frac{4}{k^2});\qquad R_{min}=mg\,(\frac{4}{k^2}-5).$$

Miután $0<k^2\leq 1$, az R_{max} mindig *positiv*; az R_{min} pedig positiv vagy negativ lehet.

Ezen utóbbi esetben az R az α bizonyos α_1 értékénél a zéruson megyen át, melyre nézve a (6)-ból

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha_1=\frac{1}{6}+\frac{2}{3k^2}\quad\ldots\quad(6a)$$

E feltétel csak addig áll, míg k^2 nem kisebb az $\frac{4}{5}$-nél, mert ekkor (6*a*) jobb oldala az egység; s mivel (1) szerint $hk^2=2l$, az R csak akkor lehet zérus, ha

$$2l \leqq h \leqq \tfrac{5}{4}2l; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

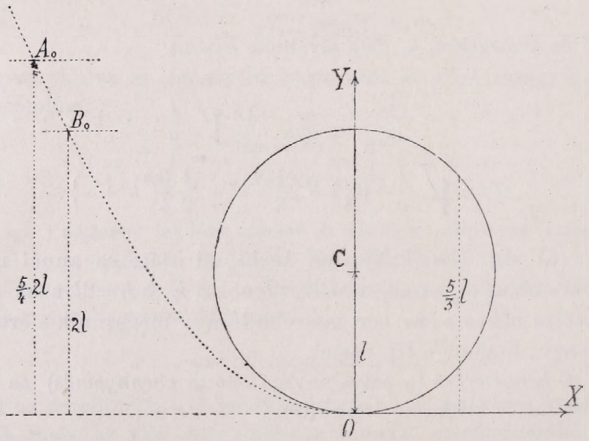
ha h esési magasság $<2l$, akkor a következő II. eset áll elő; ha $h>\frac{5}{4}2l$, akkor R mindig positiv.

Közelebbről: ha $h=2l$, akkor $k^2=1$, $\sin^2\frac{1}{2}\alpha_1=\frac{5}{6}$; $\alpha_1=121°\ 46'$; ellenben ha $h=\frac{5}{4}2l$, akkor $k^2=\frac{4}{5}$, $\alpha_1=\pi$.

Az m-nek az X tengely fölötti y magasságára s sebességére nézve a megelőző §. (5) és (2) egyenletei szerint $y=2l\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ és $v^2=2g(h-y)$ lévén, az $R=0$ említett határeseteire nézve nyerjük:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{ha:} & h=2l, \text{ akkor:} & y_{R=0}=\frac{5}{3}l; & v^2_{R=0}=\frac{2}{3}gl; \quad \alpha_1=121°46'; \\ \text{ha:} & h=\frac{5}{4}2l, \text{ akkor:} & y_{R=0}=2l; & v^2_{R=0}=gl; \quad \alpha_1=\pi. \end{array}\right| \ldots (8)$$

Ezekből az előírt mozgás nehány sajátsága olvasható le.



54. ábra.

Igy ha pl. a nehéz pont hajlítható *fonálon* függ vagy köralakú *vályú* homorú oldalán halad, és a $v_0^2=2gh$ legnagyobb sebesség olyan, hogy h a (7) feltételnek felel meg, akkor az $y=\frac{5}{3}l$ és $y=2l$ határok között mindenesetre van oly y, melyre nézve $R=0$, s melyen túl R negatív volna; e helyen túl tehát nem maradhat az m a körpályán, hanem e helyen tőle *befelé* elválván, ezentúl kizárólagosan a föld nehézségi ereje alatt folytatja most már szabad útját, mely parabola marad, míg C-től való távolsága kisebb, mint a.

A fonálinga esete könnyen megvalósítható, ha pl. a kezdetben nyugodtan lelógó gömböcskének megfelelő vízszintes ütés által alkalmas sebességet tulajdonítunk; a vályúé pedig, ha pl. egy tetszőleges OB_0A_0

görbe lejtő a körvályú O pontjában végződik s ott vele közös érintővel bír és az m pontot a lejtő A_0B_0 részén valahol elbocsátjuk, 54. ábra.

Ha pedig m egy súlytalan, forgható, merev rúd végéhez van erősítve, vagy ha m csőalakú körpályán tartozik mozogni: akkor m mindig tartozik az előírt körpályán maradni s ha h a $2l$ s $\frac{5}{4}2l$ között fekszik: az előírt pálya anyaga okozta R ellennyomás (a kényszererő) a pálya bizonyos felső részében *negativ*, azaz nem a C felé tart, hanem tőle elfordúlt, e pályarészben a rúd az m-től nem szenved húzást, hanem *nyomást* C-felé, illetve az m a cső-pályának a C-hez közelebbi anyagrészeire gyakorol nyomást.

II. *Második főeset. Oscilláló, lengő körmozgás.* $h < 2l$ vagy $\omega_0^2 < 4\varepsilon^2$.

Ezen esetben a sebesség $\omega^2 = \omega_0^2 - 4\varepsilon^2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha$ egyenlete [156. §. (6)] mutatja, hogy mindenesetre léteznek oly $\alpha = a$ értékek, melyekre nézve az ω szögsebesség *zérus*; ezekre nézve a feltétel:

$$0 = \omega_0^2 - 4\varepsilon^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}a\,; \qquad \sin \tfrac{1}{2}a = \pm \frac{\omega_0}{2\varepsilon}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

s így a forduló pontok az $\alpha = 0$, azaz a legmélyebb helyzettől jobbra s balra egyenlő a szögtávolságban fekszenek. A mozgás e szerint a körnek e két pont között fekvő alsó részében mehet csak végbe s ide-s viszsza történő, oscilláló, lengésszerű szakaszos mozgás, melynek a a *szögamplitudója* (legnagyobb kilengése).

a. Rövidség- és egy új φ változó behozása kedveért írjunk itt:

$$\left.\begin{aligned} \sin^2 \tfrac{1}{2}a &= \frac{\omega_0^2}{4\varepsilon^2} = \frac{h}{2l} = k^2\,; \\ \sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sin \tfrac{1}{2}a \sin\varphi &= \frac{\omega_0}{2\varepsilon} \sin\varphi = k \sin\varphi\,{}^*\,; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

hol $k < 1$; ebből

$$\cos \tfrac{1}{2}\alpha \; d\tfrac{1}{2}\alpha = k \cos\varphi d\varphi \quad \text{vagy} \quad \frac{d\alpha}{dt} = 2k \frac{\cos\varphi}{\cos \frac{1}{2}\alpha} \frac{d\varphi}{dt}.$$

Helyettesítve ezeket a szögsebességnek

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \omega_0^2 - 4\varepsilon^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha = 4\varepsilon^2 (\sin^2 \tfrac{1}{2}a - \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

egyenletébe, azonnal nyerjük:

$$4k^2 \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 4\varepsilon^2 k^2 \cos^2\varphi,$$

azaz, a (10) második egyenlete és a 156. §. (5*a*) felhasználásával:

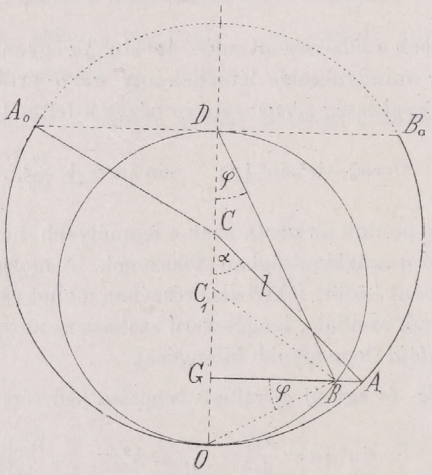
* L. a köv. lap lábjegyzékét.

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \ldots\ldots \quad (11a)$$

s így itt is, mint az I. szakasz a. alatti jelöléssel:

$$\left.\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\, F(k,\varphi); \\ \varphi &= am\left(t\sqrt{\frac{l}{g}}, k\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (12)$$

A φ geometriai jelentését a lábjegyzék adja.*



55. ábra.

E kifejezések az I. eset (3) s (3a)-éivel egyenlő typust mutatnak s így az ott a. alatt a t s a φ, illetve α közötti összefüggésre vonatkozólag tett megjegyzések itt is teljesen érvényesek.

b. A mozgás *teljes periodusa* az a T időtartam, mely alatt az m valamelyik fordulóponttól a másikig s innen az elsőhöz viszszahalad,

---

* Ha A_0DB_0 az m elérte legnagyobb magasság szintje (55. ábra), akkor $(OCA_0) \sphericalangle = \alpha$ s a tetszőleges A magassága O-felett $OG = y = 2l\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ s így $OD = h = 2l\sin^2\frac{1}{2}\alpha$. Szerkesztve OD fölött mint átmérő fölött kört: ezt az A ból az OD-re bocsátott AG merőleges B-ben metszi s miként az ábra mutatja:

$$OG = OB \,.\, \sin\varphi = OD \,.\, \sin\varphi\sin\varphi = h\sin^2\varphi;$$

e szerint a szöveg (10) egyenletei értelmében

$$OG = 2\,l\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\sin^2\varphi = 2l\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = OG,$$

s evvel a φ szög geométriai szerkesztése és értelme jelezve van.

azaz, mely tartam közben az m a 2α középponti szögű ívet kétszer, t. i. oda meg viszsza, írja le. E periodus *felét* T-vel jelöljük; ez a *lengési idő*, ha m inga módra van felfüggesztve.

A *lengési idő fele* múlik el, miközben α a zérustól α-ig- azaz (10) értelmében φ a zérustól $\frac{1}{2}\pi$-ig növekszik; ezért (12)-ből

$$\tfrac{1}{2}T=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\sqrt{\frac{l}{g}}\,.\,K(k)\,;\quad .\quad .\quad . \quad (13)$$

felhasználva a (4α)-kifejtést s megjegyezve, hogy (10) szerint itt $k=\sin\frac{1}{2}\alpha$:

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\tfrac{1}{2}\alpha+\cdots\right\};\quad .\quad .\quad (14)$$

ez az l hoszszaságú ideális (mathematikai) ingának is a lengési ideje.

E tartam az α amplitudóval növekszik s legnagyobb, ha $\alpha=\pi$; ekkor a (14) sor convergentiája megszünik s a T értéke végtelen nagy lesz; ez a III. alatti határeset, l. alább.

Rendkivül (végtelen) kicsiny amplitudó mellett a (11)-ben az α is igen kicsiny és belőle $\alpha'^2=\omega_0^2-\varepsilon^2\alpha^2$, mely szemlátomást az $\alpha''+\varepsilon^2\alpha=0$ egyenlet első integrálja. Ekkor az m *egyszerű harmonikus mozgást végez* O körül, s ha $2T_0$ a periodusa, s így T_0 a lengési ideje, ez:

$$T_0=\frac{\pi}{\varepsilon}=\pi\sqrt{\frac{l}{g}},\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (15)$$

melyet (14) is ád, benne az α hatványait elhanyagolva.

Ez az amplitudótól teljesen független; e tulajdonságot a lengések *isochronismusának* (egyenlő tartamuságának) nevezik.

Jegyzet. Ha α oly kicsiny hogy észrevehető hiba nélkül íve sinusával felcserélhető, akkor az α^2-ig terjedő közelítéssel (14)- és (15)-ből:

$$\left.\begin{aligned}T&=T_0\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right);\\ T_0&=T\left(1-\frac{\alpha^2}{16}\right);\end{aligned}\right\}\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (16)$$

mely öszszefüggések az inga esetében arra szolgálnak, hogy a megfigyelt T- és α-ból a végtelen kis amplitudóra redukált lengési időt kifejezzék.

c. A *kényszererő* a 156. (7) kifejezése szerint, a (10) tekintetbe vételével:

$$R=mg\left\{1+4\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha-6\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\right\},\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (17)$$

hol $y=2l\sin^2\frac{1}{2}\alpha$; az esési magasság $h=2l\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ és a sebesség négyzete

$$v^2=l^2\omega^2=4gl\,(\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha-\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha).$$

Ezen R ellennyomás $\alpha=0$-nál a legnagyobb, $\alpha=\alpha$-nál a legkisebb

$$R_{max}=mg\,(1+4\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha);\qquad R_{min}=mg\,(1-2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha)=mg\cos\alpha\,;\quad (18)$$

e szerint R *positiv*, míg $\alpha < \frac{1}{2}\pi$; nagyobb amplitudónál a pálya egy részében negativ; ilyen amplitudóknál az R egy helyen a zérus értéken megyen át.

Legyen $\alpha = \alpha_2$ ezen hely; erre nézve (17)ből a feltétel:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha_2 = \tfrac{1}{6} + \tfrac{2}{3}\sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha\,; \quad \text{hol} \quad \alpha_2 \leqq \alpha \leqq \pi \quad \text{és} \quad \tfrac{1}{2}\pi < \alpha < \pi.$$

Közelebbről pedig, ha $\alpha = \pi$, akkor

$$h = 2l \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha_2 = \tfrac{5}{6}, \quad \alpha_2 = 121^\circ 46' \quad v^2_{R=0} = \tfrac{2}{3} gl,$$

mint az I. esetnek ugyanezen határértékénél, (8); s ha

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \text{akkor} \quad h = l, \quad \alpha_2 = \tfrac{1}{2}\pi, \quad v_{R=0} = 0, \quad y_{R=0} = l.$$

Ezek értelmében, ha az m súlytalan fonálon függ vagy vályú-alakú körpályán mozog, 54. ábra, s a h az α s 2α között van: akkor az m a körpályának csak azon részén marad meg, melyen R positiv s az $R=0$ helyen e pályától eltér s befelé haladván, csak a föld nehézsége alatt folytatja útját, megfelelőleg az I. esetnek.

Ellenben, ha m merev súlytalan rúdon függ s vele forog vagy csőalakú körpályán halad, akkor m mindig kénytelen e körön maradni, de a pályának az $R=0$-on felül eső két részében az R negativ, minek értelmét az I. eset c. pontja utolsó kikezdése adja.

III. *Határeset:* $\omega_0^2 = 4\varepsilon^2$ vagy $h = 2l$.

Ez az I. és II. közös határesete, melyre nézve az I. és II. kifejezéseiben: $k=1$; $\sin \frac{1}{2}\alpha = 1$, miáltal az $(5a)$ és a (14) sorok széthajlók lesznek.

Ezért a (3) és $(5aa)$, illetve a $(11a)$-ra kell viszszamennünk, melyek itt átmennek a közös

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}}\ \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

egyenletbe, benne $\varphi = \frac{1}{2}\alpha$ lévén, belőle (Math. Repertórium 104. §. 15. formula, 124. l.):

$$t\sqrt{\frac{g}{l}} = lg_n \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\pi), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

ha az időt az $\alpha = 0$, azaz $\varphi = 0$-tól számítjuk.

A kifejezés megfordítása igen könynyű: ugyanis (i. h. 4. §. 5. formulája, 5. l.):

$$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\pi) = \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi + \sin\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi - \sin\frac{1}{2}\varphi}\,; \qquad \operatorname{tg}^2(\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\pi) = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\,;$$

másrészt (19)-ből

$$\operatorname{tg}^2(\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\pi) = e^{2t\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

s az utolsó két egyenlet egyesítéséből, némi egyszerűsítés után

$$\sin\varphi=\sin\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{1-e^{-2t\sqrt{\frac{g}{l}}}}{1+e^{-2t\sqrt{\frac{g}{l}}}} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Ezen esetben az α elongátió s a t idő közötti összefüggés explicite fejezhető ki.

Az α szög a t-vel növekszik, de csak $t=\infty$-kor éri el π értéket, azaz a mozgás $\alpha=\pi$ helyzetben végtelen kis sebességgel bír, az m ott megáll s labilis egyensúlyban marad, ha m súlytalan rúd végéhez erősített ingát képvisel vagy csőalakú pályában mozog. Ez az eredmény megegyezik az I. s a II. esetben említett azon megjegyzéssel, hogy ekkor, t. i. mikor (5a)-ban $k=1$ és (14)-ben $a=\pi$, a keringési, illetve lengési idő végtelen nagy.

158. §. *Vertikális síkú sima görbék domború oldalán végbemenő mozgás a földnehézség egyedüli hatása alatt. Négy eset.*

Czélszerű az Y-ok tengelyét függőlegesen lefelé irányítottnak venni; [155, §. 1. pontja] az R ellennyomás itt a *domború* oldalra emelt normálisba esvén, ellentett előjelű a ρ görbületi sugárral, azaz az ott felírt R-el; e szerint esetünkben (56. ábra, köv. l.) az idézett hely kifejezéseiből:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}v^2=g(y-h), \quad \text{vagy} \quad dt&=\frac{1}{\sqrt{2g}}\,\frac{ds}{\sqrt{y-h}}\,;\\ R&=mg\left\{\frac{dx}{ds}-2\,\frac{y-h}{\rho}\right\};\end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

hol h negativ, ha az $y=0$ helyen a sebesség nem zérus, ellenben h positiv, ha v a positiv y-ok oldalán valahol zérus, azaz, ha az m elbocsátási helyén y positiv.

1. *Parabola.*

Az 56. ábra szerint a pálya egyenlete és belőle folyólag:

$$x^2=2py\,;$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{p}=\frac{\sqrt{2y}}{\sqrt{p}}\,; \qquad ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\left(\frac{p+2y}{p}\right)^{\frac{1}{2}}dx=\left(\frac{p+2y}{2y}\right)^{\frac{1}{2}}dy\,;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{p}\,; \qquad \rho=\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}:\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(p+2y)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}\,;$$

és így (1)-ből:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}v^2=g(y-h)\,; \qquad dt&=\frac{1}{2\sqrt{g}}\cdot\sqrt{\frac{p+2y}{y^2-hy}}\,dy\\ R&=mg\sqrt{p}\,\frac{p+2h}{(p+2y)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}\right| \quad \ldots \quad (2)$$

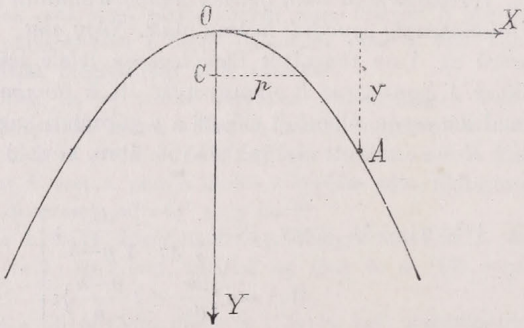
A t s az y közötti összefüggés véges alakban csak elliptikus integrálok segélyével állítható elő; egyébként, benne y helyébe x-t téve:

$$dt = \frac{1}{\sqrt{gp}} \cdot \sqrt{\frac{x^2+p^2}{x^2-2hp}}\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

mely sorkifejtésekre alkalmasabb alak.

Ha $h=0$, azaz a sebesség olyan mintha m az O-ban kezdené a mozgását, azaz hogy $v^2=2gy$, akkor a kifejezés véges alakban integrálható (v. ö. Math. Repertórium 107. §. 23. formulája 130. l.)

Az R előjele minden y értékre nézve ugyanaz marad; ha $p+2h>0$, azaz, ha O-ban a v_0 sebesség akkora, hogy a $v_0^2=-2gh$-ből meghatározott *negativ* értékű h kétszerese legfeljebb a p-vel egyenlő, akkor R mindig positiv, azaz m az előírt vályúszerű pályán marad. Ha $p+2h=0$, akkor $R=0$, akkor m az előírt pályát szőbadon mint hajított test írja



56. ábra.

le. Ha $p+2h<0$, akkor R negativ s az m az előírt pályán csak úgy maradhat, ha az csőalakú vagy ha a parabola homorú oldalán mozoghat.

2. *Ellipsis.*

Az 57. ábrának megfelelőleg az előírt pálya egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ha rövidség kedveért:

$$\left.\begin{aligned} \{a^2b^2-(2by-y^2)\ (a^2-b^2)\} &= \{.\}\ ; \\ [-(a^2-b^2)\,y^3+3\,(a^2-b^2)\ by^2-3a^2b^2y+2hb^4+a^2b^3] &= [.] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (5)$$

akkor egyszerű számítás után nyerjük:

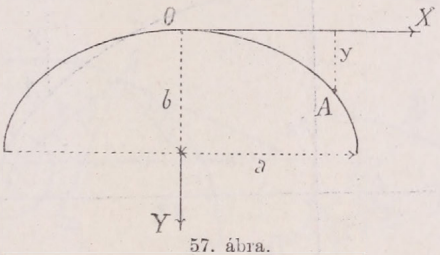
$$ds = \frac{\{.\}^{\frac{1}{2}}}{b}\ \frac{dy}{\sqrt{2by-y^2}}; \qquad \varrho = \frac{\{.\}^{\frac{3}{2}}}{ab^4};$$

$$v^2=2g\,(y-h)\,; \qquad dt=\frac{1}{b\sqrt{2g}}\,\frac{\{\,.\,\}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{y-h}}\,\frac{dy}{\sqrt{2by-y^2}}$$
$$R=mga\,\frac{[\,.\,]}{\{\,.\,\}^{\frac{3}{2}}} \qquad \Bigg\} \quad . \quad . \quad (6)$$

A t s az y között fennálló összefüggés általában véve véges alakban nem fejezhető ki; de ez kevés érdekkel bír; az R ellennyomás pedig, mivel nevezője, miként könnyű belátni, mindig reális is positiv, ha $2hb^4+a^2b^3>0$ az $y=0$ helyen positiv s mivel $a>b$, az y növekedésével fogy s í. t.

Az $R=0$-ra vonatkozólag az (5)-ből a feltétel

$$y_1^3-3by_1^2+3\,\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\,y_1-b^3\,\frac{a^2+2bh}{a^2-b^2}=0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$



57. ábra.

mely egyenlet, mivel harmadfokú, mindenesetre bír *egy* reális gyökkel s ennek felel meg a hely, melyen m a pályát elhagyja.

2*a*. *Kör* esetében $a=b$ s miként azonnal látjuk (5)- és (6)-ból.

$$dt=\frac{a}{\sqrt{2g}}\cdot\frac{dy}{\sqrt{y-h}\,\sqrt{2ay-y^2}}$$
$$R=mg\left\{1+\frac{2h}{a}-\frac{3y}{a}\right\}, \qquad \Bigg\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6a)$$

hol ismét megjegyzendő, hogy $v^2=2g\,(y-h)$ értelmében a h negativ, ha $y=0$ helyen a sebesség nem zérus. E rendszer megegyezik a kör homorú oldalán gördülő m egyenleteivel [156. §. (2) és (3)], csakhogy itt a és $y-h$ áll l és $h-y$ helyett s h lehet positiv, zérus vagy negativ.

A t s az y közötti összefüggés itt is elliptikus integrálok segélyével fejezhető ki; de $h=0$ esetben véges alakban állítható elő [Math. Repert. 107. §. 5. formula 129. l.]; az ellennyomás pedig zérus, ha $y=\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}h$, miből következik, hogy szabad vályúalakú pályán az m egyáltalában csak úgy marad, ha $h>-\frac{1}{2}a$; ha a kezdő sebesség nagyobb, akkor m mint szabadon elhajított test halad.

A további részletezést az olvasónak ajánljuk.

3. *Cyclois.* Az 58. ábra szerint a pálya egyenletei:

$$x=a(\vartheta+\sin\vartheta); \qquad y=a(1-\cos\vartheta);$$

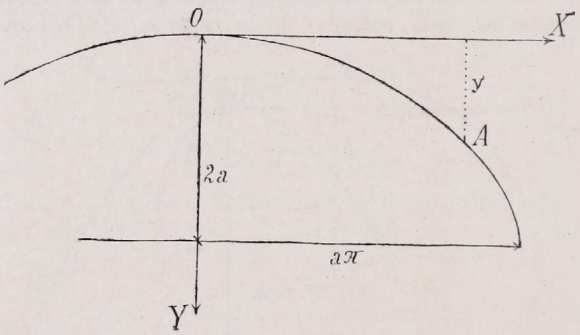
ezekből

$$ds=2a\cos\tfrac{1}{2}\vartheta d\vartheta=\sqrt{\frac{2a}{y}}\,dy=dx\cos^{-1}\tfrac{1}{2}\vartheta;$$

$$\varrho=4a\cos\tfrac{1}{2}\vartheta=2\sqrt{2a(2a-y)}.$$

E szerint (1)-ből

$$\left.\begin{aligned} v^2&=2g(y-h); \quad dt=\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\frac{dy}{\sqrt{y^2-hy}};\\ R&=mg\left\{\frac{\sqrt{2a-y}}{\sqrt{2a}}-\frac{y-h}{\sqrt{2a}\sqrt{2a-y}}\right\}\end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots (8)$$



58. ábra.

A t és y közötti öszszefüggés integrálja. [Math. Repertórium 107. §. 30. formulája], némiképp rövidítve:

$$t+\text{const.}=\sqrt{\frac{a}{g}}\lg\frac{\sqrt{y-h}+\sqrt{y}}{\sqrt{y-h}-\sqrt{y}};$$

vagy:

$$t+\text{Const.}=2\sqrt{\frac{a}{g}}\lg\{\sqrt{y-h}+\sqrt{y}\};$$

továbbá, az m elhagyja a vályúalakú pályát azon a helyen, hol

$$2a-y=y-h, \quad \text{azaz} \quad y=a+\tfrac{1}{2}h.$$

159. §. *Logarithmikus csigagörbén haladó anyagi pont mozgása centrális erő befolyása alatt. Három eset.*

Az előírt pályán való mozgás egyenletei:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}; \qquad m\frac{v^2}{\varrho}=R-X\frac{dy}{ds}+Y\frac{dx}{ds}; \quad \ldots (1)$$

$\Phi(r)$ centrális erő esetében, mely ε szöget képez a pálya mindenkori normálisával:

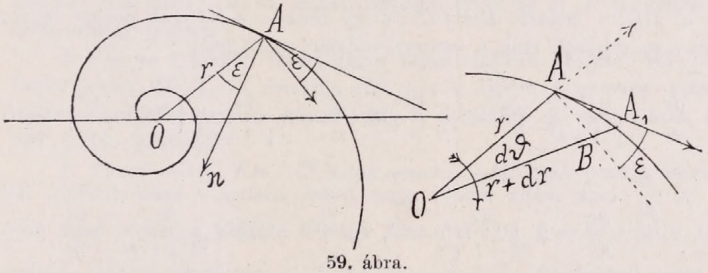
$$m\frac{d^2s}{dt^2} = +\Phi(r)\sin\varepsilon\,; \qquad \pm m\frac{v^2}{\varrho} = \mp\Phi(r)\cos\varepsilon + R\,; \quad . \quad (1a)$$

hol a kettős előjelek közül egyszerre a *felsők* vagy az *alsók* alkalmazandók, a szerint, a mint az m a görbe homorú vagy domború oldalán halad.

Itt a görbe egyenlete, 59. ábra:

$$\left.\begin{aligned} r &= ae^{k\vartheta} \\ ds = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\vartheta)^2} &= r\sqrt{1+k^2}\,d\vartheta = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,dr \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2)$$

s belőle [Math. Rep. 58. §. (3)]:



59. ábra.

$$\varrho^2 = \left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}} : \left\{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\vartheta^2}\right\} = r\sqrt{1+k^2} = \varrho$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{dr}{rd\vartheta} = k, \quad \cos\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\,; \quad \sin\varepsilon = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\,;$$

$$\frac{ds}{dt} = v = \frac{1}{k}\sqrt{1+k^2}\,\frac{dr}{dt}\,; \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{k}\sqrt{1+k^2}\,\frac{d^2r}{dt^2}\,.$$

Ezekkel a mozgás (1a) egyenletei:

$$m\frac{d^2r}{dt^2}\cdot\frac{\sqrt{1+k^2}}{k} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\Phi(r);$$

$$m\frac{1+k^2}{k^2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\cdot\frac{1}{r\sqrt{1+k^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\Phi(r) + R.$$

Az első egyenlet integrálható; ugyanis, ha $\int\Phi(r)\,dr = V(r)$, hol V a Φ erőnek az *erőfüggvénye*, akkor dr-rel való szorzás és integrálás után:

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\cdot\frac{1+k^2}{k^2}=V(r)+m\,.\,\text{constans};\\ &R=\frac{\sqrt{1+k^2}}{k^2}\cdot\frac{m}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{\Phi(r)}{\sqrt{1+k^2}}=\\ &=\frac{1}{r\sqrt{1+k^2}}\{r\Phi(r)+2[V(r)+m\,.\,\text{const.}]\}. \end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(3)$$

A (3) első egyenlete az eleven erő tétele; a második az R ellennyomást fejezi ki. *Taszító* erőknél a $\Phi(r)$ *positiv, vonzóknál negativ.*

I. *A centrális erő a távolság négyzetével fordítva arányos.*

Ekkor:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(r)=m\frac{K}{r^2};\qquad V(r)=-m\frac{K}{r};\\ &\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\frac{2k^2}{1+k^2}\left\{-\frac{K}{r}+\text{const.}\right\};\qquad R=\frac{m}{r\sqrt{1+k^2}}\left\{2\,.\,\text{const.}-\frac{K}{r}\right\}. \end{aligned}\right\}\quad(4)$$

a. Taszító erőnél: $K=+C^2$; s így const.$=+H^2$ csak positiv lehet; az m a spirálisnak csak a *homorú* oldalán mozoghat;

$$\frac{dr}{dt}=\frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{1+k^2}}\sqrt{H^2-\frac{C^2}{r}};\qquad R=\frac{m}{r\sqrt{1+k^2}}\left\{2H^2-\frac{C^2}{r}\right\}.\quad(5a)$$

A $\frac{dr}{dt}$ csak reális lehet; azaz, a-val jelelve r azon értékét, hol $v=0$, s így $\frac{dr}{dt}=0$, áll: $H^2a=C^2$, ezért a mozgás a pálya csak azon részében történhetik, hol $r>a$. Az R a tényleges mozgás közben mindig positiv.

A t s az r közötti (5a) összefüggésből [a Math. Repertórium 107. §-a 33. és 30. formulája szerint 130. l.] véges egyenlet nyerhető. A tovolvasóra bízzuk.

b. Vonzó erőnél $K=-C^2$ s így const.$=\pm H^2$, azaz lehet $=+H_1^2$ (positiv) vagy lehet $-H_2^2$, negatív; ekkor

$$\frac{dr}{dt}=\frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{1+k^2}}\sqrt{\pm H^2+\frac{C^2}{r}};\qquad R=\frac{m}{r\sqrt{1+k^2}}\left\{\pm 2H^2+\frac{C^2}{r}\right\}\quad(5b)$$

A $+H_1^2$ esetében m az egész pálya homorú oldalát befutja s R mindig positiv; a $-H_2^2$ esetében az m a spirálisnak csak $r<a_2$-nek megfelelő részét futhatja be, hol $H_2^2a_2=C^2$; az $R=0$ az $2H_2^2r_0=C^2$ helyen, hol $r_0=\frac{1}{2}a$. A szerint a mint $r\gtrless r_0$, áll $R\lesseqgtr 0$ és így az $r=r_0$ hely választja el a pálya azon két részét, melynek domború, illetve homorú oldalán halad az m.

A t és r közötti összefüggés véges alakban fejezhető ki [a Math. Repertórium 107. §. 33. és 30. vagy 31. formulái segélyével. A továbbit az olvasónak ajánljuk.

II. *A centrális erő a távolsággal egyenesen arányos.*

Ezen esetben:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(r)=mK.r\,; \qquad V(r)=+\frac{1}{2}mKr^2\,; \\ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2=+\frac{2k^2}{1+k^2}\left\{\frac{1}{2}Kr^2+\text{const.}\right\}\,; \quad R=\frac{m}{r\sqrt{1+k^2}}\left\{2.Kr^2+2\,\text{const.}\right\} \end{array}\right\} \quad (6)$$

a. Taszító erőnél: $K=+C^2$; s így const.$=\pm H^2$; a mozgás csak a homorú oldalon történik;

$$\frac{dr}{dt}=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\sqrt{C^2r^2\pm 2H^2}\,; \quad R=\frac{2m}{r\sqrt{1+k^2}}\left\{C^2r^2\pm H^2\right\} \quad . \quad (7a)$$

Ha $H^2=+H_1^2$, akkor $\frac{dr}{dt}$ az r minden értékére nézve reális és így m az egész pályát leírhatja; az R is e közben mindig positiv marad; ha $H=-H_2^2$, a spirálisnak csak az a része lehet pálya, melyre nézve $r>a$, hol áll: $C^2a^2=2H_2^2$; itt is, miként azonnal látni, az R a tényleges pályán mindig positiv.

A t és az r közötti összefüggés véges alakban állítható elő [Math. Repertórium 107. §. 15. formula 129. l.]; s belőle a mozgás második fajának tautochronismusa következik; v. ö. a 166. §. tárgyalását és a 235. §. 19. feladatát.

b. Vonzó erőnél $K=-C^2$ s így const.$=+H^2$ csak positiv lehet;

$$\frac{dr}{dt}=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\sqrt{2H^2-C^2r^2} \qquad R=\frac{2m}{r\sqrt{1+k^2}}\left\{-C^2r^2+H^2\right\} \quad . \quad (7b)$$

E szerint itt a spirálisnak csak azon része lehet pálya, melyre nézve $r<a$, hol $2H^2=C^2a^2$.

A t és r közötti összefüggés alakja véges [Math. Repertórium 107. §. 17. formula 129. lap]; l. a megelőző *a.* pont végén lévő, a mozgás tautochronismusára vonatkozó megjegyzést, mely itt is fennáll.

Az $R=0$ a $C^2r_0^2=H^2$ helyen, hol $r_0^2=\frac{1}{2}a^2$; a szerint, a mint $r\gtrless r_0$, $R\lesseqgtr 0$ és így az $r=r_0$ helyzet itt is, (mint fent az I. szakasz végén) elválasztó pont; $a>r>r_0$ pályarészben m a *domború*, $r_0>r>0$ pályarészben a *homorú* oldalon mozog.

A további részletezést az olvasónak ajánljuk.

III. *A centrális erő a távolság tetszőleges hatványával arányos.*

Ekkor:

$$\Phi(r)=mKr^n\,; \qquad V(r)=\frac{m}{n+1}Kr^{n+1}\,;$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\frac{2k^2}{1+k^2}\left\{\frac{K}{n+1}r^{n+1}+\text{const.}\right\}\,;$$

$$R=\frac{m}{r\sqrt{1+k^2}}\left\{\frac{n+3}{n+1}.Kr^{n+1}+2.\text{const.}\right\}\,;$$

mely egyenletek a Kinematika 124. §. példáiéhoz hasonló szerkezetűek lévén, további tárgyalásukat az olvasónak ajánljuk.

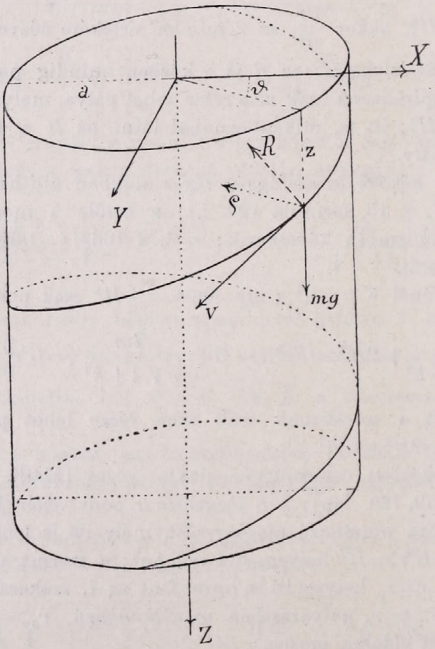
160. §. *Előírt ellipsis-alapú csavargörbén végbemenő mozgás a földnehézség egyedüli hatása alatt.*

A pálya egyenletei, 60. ábra:

$$x = a\cos\vartheta\,; \qquad y = b\sin\vartheta\,; \qquad z = c\vartheta\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

melyek a legegyszerűbb ellipsis-alapú csavarvonalat képviselik.

a. Ha itt ϑ az ideiglenes független változó, az érintő, normális, binormális iránycosinusaira, valamint a többi geometriai jellemzőkre



60. ábra.

nézve a közönséges kifejezések alkalmazhatók; könnyen nyerjük [Math. Rep. 67. §. (3*b*), 72. §. (3), 70. §. (9), 73. §. (9*b*), 74. §. (11)]:

$$\alpha = -\frac{a\sin\vartheta}{\sqrt{a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta + c^2}}\,; \qquad \beta = +\frac{b\cos\vartheta}{\sqrt{\ldots}}\,; \qquad \gamma = \frac{c}{\sqrt{\ldots}}\,;$$

$$\lambda = -\frac{a\,(b^2+c^2)\cos\vartheta}{\sqrt{[a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta + c^2]\,[c^2\,(b^2\sin^2\vartheta + a^2\cos^2\vartheta) + a^2b^2]}}\,;$$

$$\mu = -\frac{b(a^2+c^2)\sin\vartheta}{\sqrt{[\ldots][\ldots]}}; \qquad \nu = -\frac{c(a^2-b^2)\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sqrt{[\ldots][\ldots]}};$$

$$f^* = +\frac{bc\sin\vartheta}{\sqrt{c^2(b^2\sin^2\vartheta+a^2\cos^2\vartheta)+a^2b^2}}; \quad g^* = -\frac{ac\cos\vartheta}{\sqrt{\ldots}}; \quad h^* = +\frac{ab}{\sqrt{\ldots}}.$$

$$\varrho = \{a^2\sin^2\vartheta+b^2\cos^2\vartheta+c^2\}^{\frac{3}{2}} : \{c^2(b^2\sin^2\vartheta+a^2\cos^2\vartheta)+a^2b^2\}^{\frac{1}{2}};$$
$$\tau = \{c^2(b^2\sin^2\vartheta+a^2\cos^2\vartheta)+a^2b^2\}^1 : abc.$$

b. Ha csak a föld nehézsége hat és a Z tengely függőlegesen *lefelé* van irányítva: a 49. §. kifejezéseiben $X=0$; $Y=0$; $Z=mg$, miáltal az idézett §. (8) mozgás-egyenleteiből:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = m\gamma g; \qquad m\frac{v^2}{\varrho} = R_n + m\nu g; \qquad 0 = R_b + mh^* g \ldots (2)$$

Ezenkívül a sebességre nézve áll az eleven erő tétele:

$$v^2 = 2g(z-h) = 2g(c\vartheta-h) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \ldots\ldots (3)$$

Miután:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{a^2\sin^2\vartheta+b^2\cos^2\vartheta+c^2}\,\frac{d\vartheta}{dt},$$

a (3)-ból:

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{a^2\sin^2\vartheta+b^2\cos^2\vartheta+c^2}{c\vartheta-h}}\,d\vartheta \ldots\ldots (4)$$

Az ellennyomás a (2)-ből:

$$R = \sqrt{R_n^2+R_b^2} = m\left\{(h^{*2}+\nu^2)g^2 - 2\frac{v^2}{\varrho}\nu g + \frac{v^4}{\varrho^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

mely a pálya mindenkori normális síkjában feküdvén, a főnormálissal ψ szöget képez, hol $\operatorname{tg}\psi = R_b : R_n$.

Mindezek a fentírtak szerint a ϑ explicit függvényeiként kifejezetteknek tekintendők.

c. Mikor $a=b$, a görbe *közönséges csavarvonal*, melyre nézve:

$$ds = \sqrt{a^2+c^2}\,d\vartheta; \qquad \gamma = c:\sqrt{a^2+c^2};$$
$$\nu = 0, \qquad h^* = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}, \qquad \varrho = \frac{a^2+c^2}{a};$$
$$\frac{d^2s}{dt^2} = \gamma g; \qquad s = \tfrac{1}{2}g\gamma t^2 + pt + q = \vartheta\sqrt{a^2+c^2};$$
$$R_n = 2mg(z-h)\frac{a}{a^2+c^2}; \qquad R_b = -mg\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}};$$
$$R_b : R_n = \operatorname{tg}\psi = -\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{z-h}.$$

Miután itt az érintő iránya a mozgás-éval, a normális-é a görbületi sugárával esik egybe s a binormális ezek síkjának positiv normálisa: az R_b ez utóbbival ellentett és így itt az eredő R ellennyomás a normálissal hegyes, a binormálissal tompa szöget képez.

A további részletezést az olvasóra bízzük.

2) Anyagi pontmozgás a mozgás feltételei által meghatározott sima pályán. (Tautochróna és brachystochróna, az egyenlő érkezés és a legrövidebb érkezés görbéi).

161. §. *Anyagi pont vertikális sima cyclois homorú oldalán csak a földnehézség hatása alatt mozog. Tautochróna. A tautochronismus pontja.*

Az előírt görbe egyenletei a 61. ábra értelmében (épen úgy, mint a 158. §. 58. ábrája szerint):

$$x=a(\vartheta+\sin\vartheta);\quad y=a(1-\cos\vartheta);\quad \sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta=\frac{y}{2a};\quad \cos^2\tfrac{1}{2}\vartheta=\frac{2a-y}{2a}.$$

Ezekből:

$$ds=2a\cos\tfrac{1}{2}\vartheta d\vartheta=\sqrt{\frac{2a}{y}}\,dy=dx\cos^{-1}\tfrac{1}{2}\vartheta;\quad s=4a\sin\tfrac{1}{2}\vartheta=2\sqrt{2ay};$$

$$\varrho=4a\cos\tfrac{1}{2}\vartheta=2\sqrt{2a(2a-y)}.$$

A 155. §. 2. pontjának (2*b*), (3*b*), (4*b*) egyenletei itt:

$$\left.\begin{aligned} v^2=2g(h-y);\qquad dt&=\sqrt{\frac{a}{g}}\,\frac{dy}{\sqrt{hy-y^2}};\\ R&=mg\left\{\frac{\sqrt{2a-y}}{\sqrt{2a}}+\frac{h-y}{\sqrt{2a}\sqrt{2a-y}}\right\}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(1)$$

1. *A mozgás szakaszossága és időbeli egyenközüsége (Periodicitás és tautochronismus).*

Az (1)-ben lévő t és y-közötti összefüggés véges alakja [Math. Repertórium 107. §. 31. formula 130. 1.]:

$$t=\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\arccos\left(1-\frac{2y}{h}\right)+\text{constans};\quad\ldots\quad(2)$$

ha pedig az időt az m-nek pályájában való legmélyebb O helyzetétől számítjuk s így t az OA ív befutására szükséges idő, akkor constans=0 és a (2) megfordításából

$$1-\frac{2y}{h}=\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right);\qquad 2y=h-h\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)\quad\ldots\quad(2a)$$

$$y=h\sin^2\left(t\sqrt{\frac{g}{4a}}\right)\quad\ldots\quad(3)$$

E szerint itt $h-2y$ az időnek egyszerű harmonikus függvénye; maga az y ily egyszerű harmonikus függvény négyzete; végre a sebesség négyzete:

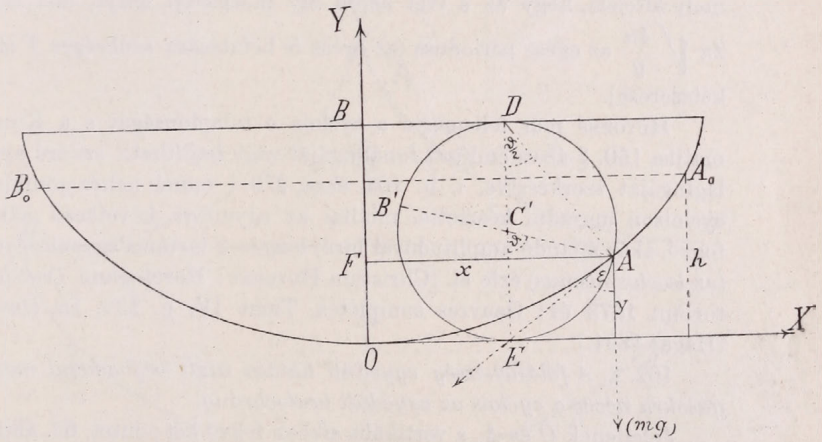
$$v^2=2g\,(h-y)=2gh\cos^2\left(t\sqrt{\frac{g}{4a}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Az m e szerint a cyclois B_0OA_0 ívét, 61. ábra, lengésszerűleg futja be folytonosan; ez ív végpontjainak magassága h; ezek egyszersmind a mozgás forduló pontjai, hol $v=0$.

Jelelje $\frac{1}{2}T$ az OA_0 vagy OB_0 ív befutására szükséges időt; erre nézve (3)-ból

$$h=h\sin^2\left(\tfrac{1}{2}T\sqrt{\frac{g}{4a}}\right); \quad \text{azaz} \quad \tfrac{1}{2}T=\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{4a}{g}},$$

$$T=\pi\sqrt{\frac{4a}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$



61. ábra.

hol T az egész A_0OB_0 ív befutására szükséges idő, mely alatt pl. a B_0-ben elbocsátott m a B_0OA_0 symmetrikus cyclois-ívet írja le.

Ez a T az (5) értelmében az ív h magasságától nem függ s így ugyane cyclois bármily B_0 magasságú pontjából bocsátva el az m-et: ez a cyclois másik ágában ugyanoly magasságig, A_0-ig emelkedik és pedig mindig *ugyanazon* T idő alatt.

A mozgás e tulajdonságát *tautochronismus*nak *(ugyanazon időközűségnek)*, a görbét magát, mely e sajátsággal bír, *tautochron* görbének, végre az O pontot, a melytől kezdve számított valamenynyi $OA_0=s_0$ ívekre nézve ez az eredmény fennáll, a *tautochronismus pontjá*-nak nevezik.

2. *A tangentiális gyorsulás, az isochronismus és* Huygens *cyclois-ingája.*

A pálya tetszőleges A pontja AE érintője, 61. ábra, mindig merőleges az A-ból a D momentán centrumhoz hozott AD egyenesre s így ez érintő az ábra értelmében $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\vartheta$ szöget képez a függőleges mg erővel.

Az érintőmenti erőcomponens értéke

$$mg\cos(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\vartheta) = mg\sin\tfrac{1}{2}\vartheta = \frac{1}{4a}mgs;$$

ez az s-ek kisebbítésére törekszik; s így a tangentiális mozgás egyenlete

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -m\frac{g}{4a}s, \quad \text{azaz} \quad \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{4a}s = 0, \ldots \quad (6)$$

Ez egyszerű harmonikus mozgás egyenlete [Kinematika 92. §.]; mely kifejezi, hogy az s ívet az m oly mozgással leírja, melynek $2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}$ az egész periodusa (az egész ív befutására szükséges T idő kétszerese).

Huygens már felismerte a cyclois e tulajdonságát s a Kinematika 150. §-ában említett fonálingáját vagy hajlítható szilárd szalagingáját szerkesztve, i. h. 104. ábra, 276. l. ennek nehéz gömbjét cycloison maradni késztette, miáltal az egymásra következő (akár fogyó, akár állandó amplitudóval biró) lengések tartama egyenlőségét (az *isochronismus*) érte el. [Christian Huygens: Horologium Oscillatorium 1673 és: Oeuvres complètes, Tome IV, p. 239, La Haye (Hága) 1891.]

162. §. *A földnehézség egyedüli hatása alatt végbemenő mozgásokra nézve a cyclois az egyedüli tautochróna.*

Jeleljenek O és A_0 a vertikális síkban fekvő két pontot, 62. ábra, melyek magasság-különbsége h legyen; keressük azt a görbét, melyen valamely A_0-ban elbocsátott nehéz anyagi pont, az A_0O ívet befutva, oly mozgást mutasson, hogy az A_0O ív befutására szükséges idő az A_0 elbocsátó pontnak a keresett görbén való helyzetétől független legyen; röviden, keressük a földnehézségi erő egyedüli hatásának alávetett mozgások tautochron görbéjét, O-t tekintve, a tautochronismus pontjának.

E czélra vezető megfontolásaink a következők:

a. A sebességnek itt érvényes $v^2 = 2g(h-y)$ egyenletéből:

$$dt = ds : \sqrt{2g}\sqrt{h-y};$$

az $\frac{1}{2}T$-vel jelölendő idő, mely alatt az m az A_0-tól O-ig vagy O-tól A_0-ig jut:

$$\tfrac{1}{2}T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^h \frac{ds}{dy}\cdot\frac{dy}{\sqrt{h-y}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

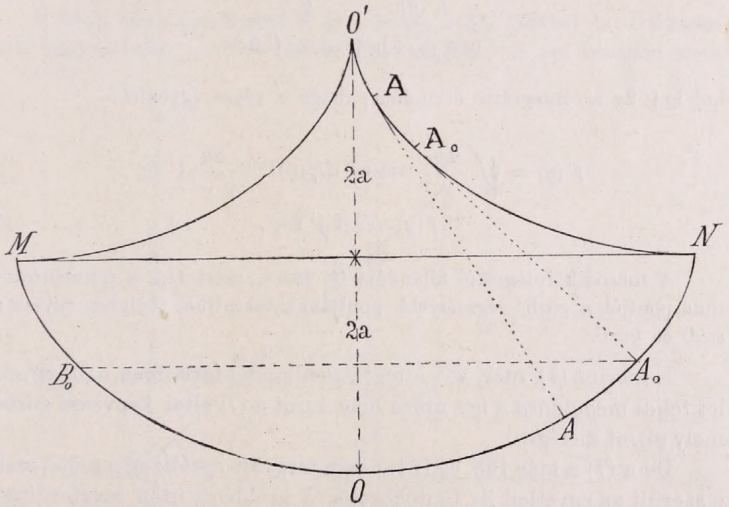
Legyen most $s=f(y)$ a felkeresendő tautochrona ismeretlen egyenlete és:

$$s=f(y); \qquad \frac{ds}{dy}=f'(y); \qquad y=hz; \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

hol z új változó, melynek $y=0$ s $y=h$-hoz tartozó határai: $z=0$ és $z=1$; evvel az (1):

$$\tfrac{1}{2}T=\sqrt{\frac{h}{2g}}\int_0^1 \frac{f'(hz)}{\sqrt{1-z}}\,dz \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

s így h a T-t kifejező határozott integrál parametere.



62. ábra.

b. Ha a keresett görbéről azt kívánjuk, hogy tautochrona legyen: akkor T-nek a h-tól függetlennek kell lennie; azaz ily görbére nézve kell, hogy álljon:

$$\frac{\partial T}{\partial h}=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Alkalmazva (3)-ra a differentiálás közönséges szabályait s megjegyezve, hogy itt

$$\frac{\partial f'(hz)}{\partial h}=\frac{df'(hz)}{d(hz)}\,\frac{\partial(hz)}{\partial h}=f''(hz)\,z \qquad \text{s í. t.,}$$

a (4) a (3)-ból:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-z}} \{f'(hz)+2hz\ f''(hz)\}\, dz=0 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

E feltétel fennállhatására nézve szükséges és elegendő, hogy mindenkor

$$2hzf''(hz)+f'(hz)=0, \quad \text{azaz} \quad 2yf''(y)+f'(y)=0,$$

más alakban:

$$\frac{f''(y)}{f'(y)}+\frac{1}{2y}=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

mely a tautochrona jellemző differentiálegyenlete.

Szorozva dy-nal, ez írható és belőle:

$$\frac{d[f'(y)]}{f'(y)}+\tfrac{1}{2}\frac{dy}{y}=0,$$

$$\lg f'(y)+\lg \sqrt{y}=\lg \sqrt{2a},$$

hol $\lg \sqrt{2a}$ az integrátió állandója; maga a véges egyenlet:

$$f'(y)=\sqrt{\frac{2a}{y}} \quad \text{vagy} \quad d[f(y)]=\frac{dy}{\sqrt{y}}\sqrt{2a},$$

$$f(y)=s=2\sqrt{2ay}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

A második integrátió állandója itt zérus, mert O-t, a tautochronismus pontját a görbe legmélyebb pontjának tekintjük, melyben egyszerre $s=0$ és $y=0$.

E szerint (7), mely két integrátió-állandót tartalmaz, a (6) egyenlet *teljes megoldása* s így nincs más, mint a (7) által képviselt görbe, mely (6)-ot kielégíti.

De a (7) a már 158. és 161. §-ban tárgyalt *cyclois* egyenlete, mely e szerint az egyetlen ily tautochrona. A probléma ezen megfordítása megoldását már Newton ismerte [Principia etc. Liber I. Sectio 10].

Jegyzet. A cyclois a nehéz pontra nézve még akkor is marad tautochrona, mikor a normális nyomással arányos súrlódással mozog [165. §.]

163. §. *A földnehézségi erő tautochróna-problémájának általánosítása.* (Abel *feladata*).

E probléma általánosítását következőleg fogalmazhatjuk:

Mily alakúnak kell lennie az olyan görbének, melyen valamely nehéz pont, egyedül a földnehézség ereje által mozgattatva h magasságon keresztül úgy esik, hogy az esési idő a h-nak tetszés szerinti $\Phi(h)$ függvénye legyen?

Ezen esetben a megelőző §. (1) irandó:

$$\tfrac{1}{2}T=\Phi(h)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^h\frac{ds}{\sqrt{h-y}}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^h\frac{f'(y)\,dy}{\sqrt{h-y}}\quad\ldots\quad(8)$$

és a probléma: $\Phi(h)$ adva lévén, kerestessék s mint y függvénye.

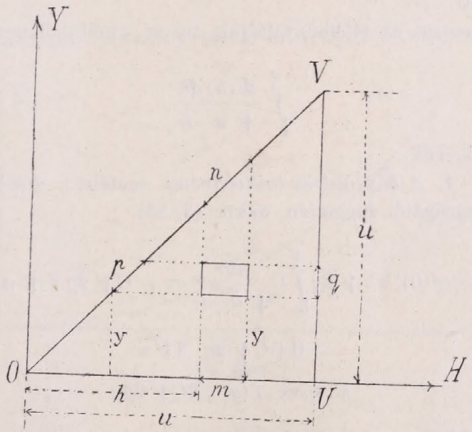
Abel eljárása szerint szorozva a (8) két oldalát $dh:\sqrt{u-h}$-val és 0 s u között integrálva, könnyen nyerjük:

$$\sqrt{2g}\int_0^u\frac{\Phi(h)\,dh}{\sqrt{u-h}}=\int_0^u\frac{dh}{\sqrt{u-h}}\int_0^h\frac{f'(y)\,dy}{\sqrt{h-y}}=\int_{h=0}^{u}\int_{y=0}^{h}\frac{f'(y)\,dhdy}{\sqrt{(u-h)(h-y)}}\quad\ldots\quad(1)$$

Az (1) jobb oldala az integrátiók sorrendje megváltoztatásával teljesen integrálható.

E jobb oldal ugyanis *térfogatot* jelent, melynek alapja a $dhdy$ felületi elemek összsesége, s a $dhdy$-on emelkedő elemi oszlopok magassága $\zeta=f'(y):\sqrt{(u-h)(h-y)}$.

A $dhdy$ elem coordinátái h és y lévén, a 63. ábrából is észrevesszük, hogy a belső, $y=0$ és $=h$ közötti integrátió az mn szalagon emel-



63. ábra.

kedő ily oszlopok térfogati összseségét jelenti, s hogy ezen vertikális alap-szalag hosszúsága $=h$. A külső, $h=0$-tól $=u$-ig terjedő integrátió az ily térfogati részeknek összseségét, az egész térfogatot jelenti, melynek alapja ezek szerint az OUV derékszögű háromszög az u és h befogókkal.

Ha az integrátió sorrendjét *megfordítjuk:* akkor először h szerint integrálva a pq szalagon emelkedő elemi oszlopokat, $h=y$-tól $h=u$-ig kell haladnunk; azután e szalagokon emelkedő térfogati részeket $y=0$-tól $y=u$-ig kell összsegeznünk.

Ezek szerint (9) írható:

$$\sqrt{2g}\int_0^u \frac{\Phi(h)\,dh}{\sqrt{u-h}} = \int_{y=0}^{u} f'(y)\,dy \int_{h=y}^{u} \frac{dh}{\sqrt{-yu+(y+u)\,h-h^2}} \quad . \quad . \quad (2)$$

A belső integrál értéke [Math. Repertórium 107. §. 44. formula 131. l.]:

$$\left.\arccos\frac{-(y+u)+2h}{\sqrt{(y+u)^2-4yu}}\right|_{h=y}^{u} = \arccos\frac{u-y}{\pm(u-y)} - \arccos\frac{-u+y}{\pm(u-y)} = \mp\pi.$$

Miután az érintett térfogat csak positiv lehet, a jobboldali *alsó* előjel érvényes és így a (2) külső integrátiója is azonnal végrehajtható, miáltal

$$\sqrt{2g}\int_0^u \frac{\Phi(h)\,dh}{\sqrt{u-h}} = \pi\,\{f(u)-f(0)\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Itt $s=f(y)$ az y-keresett függvénye, míg $\Phi(h)$ a h-nak *adott, ismert* függvénye; miután O a tautochronismus pontja, melyben $y=0$, ott $f(0)=s_{y=0}=0$.

A (2) szerint az előbbit találjuk, ha az utóbbiból az

$$\int_0^u \frac{\Phi(h)\,dh}{\sqrt{u-h}}$$

integrált képezzük.

Példák 1. *A közönséges tautochróna* esetében $\Phi(h)=\text{constans}=C$ az esés magasságától független, ekkor (3)-ból

$$\pi\,\{f(u)-f(0)\} = \sqrt{2g}\int_0^u C\frac{dh}{\sqrt{u-h}} = -\,C\sqrt{2g}\,2\left|\sqrt{u-h}\right|_0^u =$$

$$=0+C\sqrt{2g}\;2\sqrt{u}$$

$$\pi\,.\,s=\pi\,.\,f(y)=2C\sqrt{2gy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

mely a közönséges cyclois egyenlete [161. §. eleje], ha $C=\pi\sqrt{a}:\sqrt{g}$.

2. Ha a görbe olyan, hogy *egyenlő esési magasságok ívei egyenlő időkben iratnak le,* akkor $\Phi(h)=K\,.\,h$ hol K állandó együttható és (3)-ból:

$$\pi\,\{f(u)-f(0)\}=K\sqrt{2g}\int_0^u \frac{h\,dh}{\sqrt{u-h}} = K\tfrac{2}{3}\sqrt{2g}\left\{(u-h)^{\frac{3}{2}}-3u\,(u-h)^{\frac{1}{2}}\right\}_{h=0}^{u}$$

$$=K\sqrt{2g}\,\tfrac{2}{3}\left\{-u^{\frac{3}{2}}+3uu^{\frac{1}{2}}\right\}=K\sqrt{2g}\,\tfrac{4}{3}u^{\frac{3}{2}};$$

E szerint

$$\pi\,.\,s=\pi\,.\,f(y)=K\sqrt{2g}\,\tfrac{4}{3}\,y^{\frac{3}{2}};$$

avagy irva $2K\sqrt{2g}=k$ $ds=ky^{\frac{1}{2}}dy$, azaz: $(dx)^2+(dy)^2=k^2y\,(dy)^2$;

$$dx=dy\sqrt{k^2y-1},\quad x=\frac{2}{3k^2}(k^2y-1)^{\frac{3}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

mely a félköbös vagy NEIL-féle parabola egyenlete. [Math. Rep. 65. §. 25. formula 76. l.]

Jegyzet. Ezen esetet közvetetlenül és pedig azon feltételből fejthetjük meg, hogy itt a $dy : dt$ sebességi componensnek *állandónak* kell lennie és hogy itt

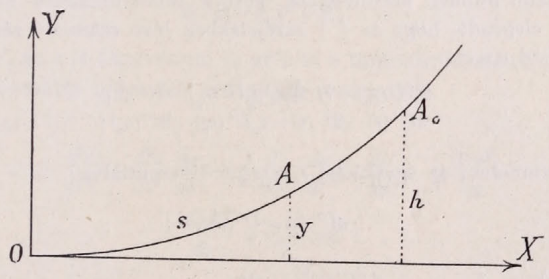
$$v^2=2g\,(h-y)=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\left\{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1\right\}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

melyből, $dy : dt$-t constansnak véve, a nevezett görbe egyenlete azonnal következik; a tényleges számítást az olvasóra bízzuk.

3. Általában véve a nevezett görbék egyenlete véges alakban adódik, míg az $\int\frac{\Phi(h)\,dh}{\sqrt{u-h}}$ integrál véges alakban előállítható.

164. §. *Tetszőleges erők befolyása alatt végbemenő tautochron mozgás tangentiális gyorsulása az egyszerű harmonikus mozgáséval egyenlő.*

A 161. §. 2. pontjának (6) tétele könnyen általánosítható.



64. ábra.

Legyen (64. ábra) A_0 az elbocsátás helye, A az m tetszőleges helye a tautochron görbén, O a tautochronismus pontja és $OA_0=s_0$, $OA=s$; s jelelje $mV(s)$ az m-re az A-ban ható független erőnek tangentiális componensét, mely az s-et kisebbíteni törekszik; ekkor:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-mV(s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Szorozva ds-el, írva $V(s)\,ds=d\,[U(s)]$, hol $U(s)=\int(s)\,ds$; s megjegyezve, hogy A_0 ban $v=0$, az (1)-ből:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=U(s_0)-U(s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Az OA_0 ív befutására szükséges $\frac{1}{2}T$ tartam a (2)-ből

$$\tfrac{1}{2}T = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{U(s_0) - U(s)}}; \quad \ldots\ldots (3)$$

avagy a felső határ állandósítása czéljából $s = s_0 u$-t téve, hol $s=0$, $u=0$; $s=s_0$, $u=1$ az egymáshoz tartozó határértékei az új u változónak:

$$\tfrac{1}{2}T = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{s_0 du}{\sqrt{U(s_0) - U(s_0 u)}} \quad \ldots\ldots (4)$$

A tautochróna feltétele: T az s_0-tól független legyen; ez írható:

$$\frac{\partial T}{\partial s_0} = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s_0} \left\{ \frac{s_0}{\sqrt{U(s_0) - U(s_0 u)}} \right\} du = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial s_0} = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{du}{\{U(s_0) - U(s_0 u)\}^{\frac{3}{2}}} \{U(s_0) - U(s_0 u) - \\ - \tfrac{1}{2} s_0 [U'(s_0) - u U'(s_0 u)]\} = 0 \ldots (5)$$

E feltétel minden körülmények közötti fennállhatására nézve szükséges és elegendő, hogy az { } zárójelekben lévő számláló zérus legyen; azaz, mivel $s_0 u = s$:

$$2[U(s_0) - U(s)] = s_0 U'(s_0) - s U'(s),$$
$$s U'(s) - 2U(s) = s_0 U'(s_0) - 2U(s_0);$$

itt s_0 parameter; az egyenletet s szerint differentiálva:

$$s U''(s) - U'(s) = 0;$$

avagy:

$$\frac{U''(s)}{U'(s)} = \frac{1}{s}; \qquad \frac{d[U'(s)]}{U'(s)} = \frac{ds}{s}; \qquad \lg U'(s) = \lg s + \text{constans},$$

mely utóbbi állandót $\lg \omega^2$ alakban írva s megjegyezve, hogy

$$V(s) = \frac{dU(s)}{ds} = U'(s),$$

az (1) egyenlet:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -V(s) = -\omega^2 s, \quad \ldots\ldots (6)$$

mely e szerint az e §. czímében kimondott sajátságot fejezi ki, azt ugyanis, hogy a tautochron mozgás pályamenti (érintői) componense egyszerű harmonikus mozgás.

Az egész periodus itt $\frac{2\pi}{\omega} = 2T$; ω itt a görbe parameterétől és a független (szabad) erő természetétől függő állandó.

E nevezetes sajátság arra használható fel, hogy adott független erőkhöz a tautochronát vagy adott tautochronához a független erőket lehessen megkeresni, l. a következő két §-ot.

I. *Jegyzet.* A tautochron görbék direkt problémáját HUYGENS tárgyalta és fejtette meg először Horologium Oscillatorium 1673; vagy Oeuvres complètes, Tome IV, p. 28, 1891.; a megfordítását NEWTON (Principia Mathematica etc. Liber I. Sectio 10., vagy német fordítása WOLFERS-től, Berlin 1872, 94. §., 162. l.).

II. *Jegyzet.* A tautochronismus, habár más periodussal, fennáll, ha a pont az első hatványnyal arányos közeg-ellenállással mozog [199. §.].

165. §. *A tautochronismus feltétele, ha a független erő a sebesség négyzetének lineáris függvénye.*

1. Azon esetek közül, melyeknél a független erő nem csak a mozgó pont helyzetének, de sebességének is a függvénye, itt csak azt tárgyaljuk, mely a surlódással járó pontmozgásnál fellép, mikor a surlódás, COULOMB közelítő törvénye szerint, a normális nyomással egyenesen arányos [v. ö. a. 29, 50. és 56. §§-okat]. De ekkor a nyomás egyik tagja a sebesség négyzetével arányos és így a tangentiálsi gyorsulás írható:

$$2s''=-S_1v^2+S, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (0)$$

hol S és S_1 az s ív függvényei és az s-et a tautochronismus O_0 pontjától az elbocsátás helye felé számítjuk positivnek.

Miután

$$s''=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d^2s}{dt^2}\frac{ds}{ds}=\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{dt}{ds}=\tfrac{1}{2}\frac{d(v^2)}{ds},$$

$$\frac{d(v^2)}{ds}+S_1v^2=S\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

az ily mozgás egyenletének typusa; benne $+S$ *negativ*, mert az erőnek ezen, csak a helyzettől függő része az m-t O_0 felé mozgatni és így s-et kisebbíteni törekszik; ellenben a $-S_1v^2$ az O_0 felé való mozgás közben positiv, mert e surlódás az s kisebbítése ellen törekszik s így S_1 is *negativ*.

Az (1) teljes megoldása*

$$v^2=e^{-\int S_1ds}\left\{\int Se^{+\int S_1ds}\,ds+B\right\}; \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

hol B az integrátió állandója.

---

* Ugyanis itt is alkalmazható a parameterek variátiója [Kinematika 125. §. 232. l.]. A nem teljes egyenlet alakja:

$$\frac{du}{ds}+S_1u=0; \quad \text{ebből} \quad \frac{du}{u}+S_1ds=0,$$

2. Rövidség kedveért írjunk

$$\left.\begin{aligned} P&=e^{+\int S_1 ds}; \qquad Q=-\int Se^{+\int S_1 ds}\,ds; \\ dP&=S_1 P ds; \qquad dQ=-SPds; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

itt P és Q szintén az s függvényei, melyek (mivel S és S_1 negativek) *positivek*; és így (2)-ből

$$v^2P=B-Q; \quad \text{és} \quad v_0^2 P_0=B-Q_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

hol P_0, Q_0, v_0 az $s=s_0$-hoz tartozó értékek.

a. Legyen A_0 az elbocsátás helye, 65. ábra, s_0 az O_0A_0 ív, akkor $v_0=0$ és így a (3*a*) második egyenletéből $B=Q_0$, mely *positiv*, mivel v^2, P, Q positivek s így a (3*a*) első egyenlete szerint B is positiv és *nagyobb* mint Q. E szerint (3*a*) egyenleteink különbsége:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 P=v^2P=Q_0-Q=R, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

hol R rövidség kedveért Q_0-Q helyébe lett írva, mely, miként azonnal kimutatjuk, határozott integrál.

Ugyanis a (3) értelmében a Q és megfelelőleg a Q_0 írható

$$Q=-\int_s^S SPds; \qquad Q_0=-\int_s^{s_0} SPds,$$

$$P=e^{+\int_s^S S_1 ds},$$

mely integrálok felső határai a mindenkori s-ek, míg alsó határai tetszőlegesek de Q- és Q_0-éi egymással egyenlők. E szerint

$$R=Q_0-Q=-\int_s^{s_0} SPds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

$$\lg u=-\int S_1 ds+\lg A; \qquad u=Ae^{-\int S_1 ds}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \alpha)$$

A lévén az integrál-állandó.

Hogy u a $\frac{du}{ds}+S_1u=S$ teljes egyenlet integrálja legyen: az α)-ban A variabilisnek veendő és így α)-val ezt az egyenletet képezve:

$$\frac{du}{ds}=-S_1u+\frac{dA}{ds}e^{-\int S_1 ds}=S-S_1u;$$

$$\frac{dA}{ds}=Se^{+\int S_1 ds}; \qquad A=\int Se^{+\int S_1 ds}\,ds+B;$$

hol B integrálállandó, miáltal végre α)-ból

$$u=e^{-\int S_1 ds}\left\{\int Se^{+\int S_1 ds}\,ds+B\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \beta)$$

mely a teljes (1) egyenlet megoldása.

A (4)-ből az $A_0O_0 = -s_0$ ív befutására szükséges $\frac{1}{2}T$ idő:

$$dt = -\sqrt{\frac{P}{R}}\,ds\,; \qquad \tfrac{1}{2}T = -\int_0^{s_0} ds\sqrt{\frac{P}{R}}\,; \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

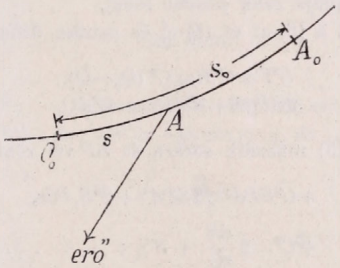
hol a negativ előjel jelenti, hogy az A_0-tól O_0-ig való mozgás közben a t növekedésével az s fogy.

A továbbiakban legyen R az integrátió változója; az (5)-nak ezen R-el való kifejezése czéljából a (3) alsó sorából $ds = -dQ : SP$ és miután (4) szerint $-dQ = dR$, az (5)-nek az integráljel alatti része:

$$dR : S\sqrt{P}\ \sqrt{R}.$$

Ámde, a Q és vele az R az s függvénye lévén: megfordítva, az s és ennek S és P függvényei az R függvényeinek tekinthetők és így írható

$$S\sqrt{P} = \sqrt{\Pi(R)}\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$



65. ábra.

hol az előbbiek értelmében S és $\sqrt{P}$ reális lévén, $\Pi(R)$ csak *positiv* lehet.

Miután (4) vagy (4*a*) szerint $s = s_0$ esetben $R = 0$, és ha $s = 0$-kor $R = R^0$,

$$R^0 = -\int_0^{s_0} SP\,ds\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4b)$$

$$\tfrac{1}{2}T = -\int_0^{s_0} ds\sqrt{\frac{P}{R}} = -\int_0^{s_0} \frac{dR}{S\sqrt{P}\,\sqrt{R}} = -\int_{R^0}^{0} \frac{dR}{\sqrt{\Pi(R)}\,\sqrt{R}} \quad . \quad . \quad (7)$$

A határoknak a variabilistől való függetlenítése czéljából írjunk itt is, új G változó bevezetésével

$$R = R^0 G\,; \qquad dR = R^0 dG,$$

miáltal $R = 0$-nál $G = 0$; $R = R^0$-nál $G = 1$ és így (7)-ből

$$\tfrac{1}{2}T=\int_0^1 \frac{R^0 dG}{\sqrt{\Pi(R^0)G}\sqrt{R^0 G}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

A tautochronismus feltétele az, hogy T az s_0-tól, és így (4*b*) értelmében az R^0-tól független legyen, azaz, hogy:

$$0=\frac{\partial T}{\partial R^0}=2\int_0^1 \frac{dG}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial}{\partial R_0}\left(\sqrt{\frac{R^0}{\Pi(R^0G)}}\right)=0,$$

a mi a $\partial : \partial R_0$ quotiens eltünését követeli, miből, $R^0G=R$ lévén:

$$\frac{1}{\Pi(R^0G)}-\frac{R^0}{\Pi^2(R^0G)}\cdot\frac{d\Pi(R^0G)}{d(R^0G)}\cdot\frac{\partial(R^0G)}{\partial R^0}=0, \qquad \frac{d(R^0G)}{R^0G}=\frac{d\Pi(R^0G)}{\Pi(R^0G)},$$

$$\Pi(R)=+C^2R. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

hol Π a (6), R a (4) és a (3) értelmében mindig positivek lévén, az integrátió $+C^2$ állandója csak *positiv* lehet.

Egyesítve (9)-et a (6)-al és (4)-el és azután differentiálva:

$$S^2P=C^2R=C^2(Q_0-Q),$$
$$2SPdS+S^2dP=-C^2dQ,$$

avagy tekintettel a (3) második sorára és SP-vel rövidítve:

$$+C^2SPds=2SPdS+S^2S_1Pds,$$
$$+C^2=2\frac{dS}{ds}+SS_1; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

mely a tautochronismus egyik feltétele a (0) vagy az (1) kifejezte erőtörvény esetében.

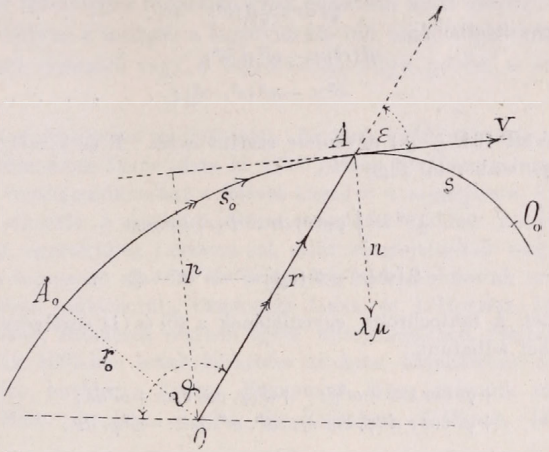
3. Miután a $\frac{1}{2}T$ még a legkisebb s_0 ívekre nézve is ugyanaz: azért a v sebesség is általában véve annál kisebb, minél kisebb az s_0 ívamplitudó, számítva ezt a tautochronismus O_0 pontjától; s ha s_0 végtelen kicsiny, a v^2 másodrendű kicsiny és így az (1) bal oldala elenyészik a mi az S-nek is az elenyésztét vonja maga után, mindig feltéve, hogy az $s=0$ a tautochronismus pontja.

E szerint a tautochronismus másik feltétele a (0) vagy (1) alakú erőtörvény esetében az, hogy a tautochronismusnak $s=0$ pontját az S-nek eltünése határozza meg [v. ö. a 179. §. 3*b*. példáját].

166. §. *A tautochrona egyenlete centrális független erők esetében.*

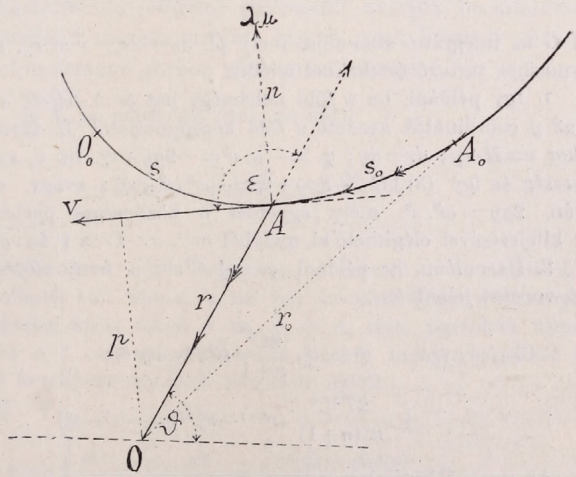
Ezen esetben jeleljék O az erő centrumát, r a tőle számított távolságot, p az O-ból a mindenkori pályaérintőre bocsátott merőleges hosszát, φ_r a centrális gyorsulást, mely vonzasnál negatív, taszításnál positiv. Az első esetre a 65*a*. ábra, a másodikra a 65*b*. ábra vonatkozik; e §. kifejtései mindkét nemű erőkre egyaránt érvényesek.

Az s-et a tautochronismus O_0 pontjától számítva és ε-vel az r és v positiv irányai közötti szöget jelelve, az 65*a* és 65*b* ábrák értelmében:



65*a*. ábra.

$$\left.\begin{aligned} (ds)^2=(rd\vartheta)^2+(dr)^2; \qquad \cos\varepsilon=-dr:ds; \quad \sin\varepsilon=-rd\vartheta:ds;\\ p=r\sin\varepsilon=-r^2d\vartheta:ds; \quad s''=-\varphi_r\cos\varepsilon=\varphi_r dr:ds, \end{aligned}\right\} \quad . \quad (0)$$



65*b*. ábra.

miáltal a 164. §. (6) most a tautochrona alakjára vonatkozó egyenlete:

$$\varphi_r dr=-\omega^2 s ds=-\tfrac{1}{2}\omega^2 d(s^2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Másrészt, mivel φ_r az r és ϑ függvénye és a t-től explite nem függ, áll [Kinematika 75. §. (1), 93. l.]

$$\varphi_r dr = \tfrac{1}{2} d(v^2) \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

melyek egyesítéséből:

$$d(v^2) = -\omega^2 d(s^2),$$

$$v^2 = -\omega^2 (s^2 - s_0^2); \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

hol az idézett 164. §. (6) egyenlete szerint $\omega = \pi : T$ és $s_0 = O_0 A_0$ ív.

Ha φ_r csak r-től függ:

$$\tfrac{1}{2} v^2 = \int \varphi_r(r)\, dr = \Phi(r) + \text{const.}$$

és (1)-ből

$$2[\Phi(r) - \Phi(r_0)] = -\omega^2 (s^2 - s_0^2). \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Jegyzet. A tautochrona egyenletének a (0) és (1) segélyével az (1)-től eltérő alakot adhatunk:

$$+\varphi_r \cos\varepsilon = +\omega^2 s; \quad +d(\varphi_r \cos\varepsilon) = +\omega^2 ds;$$
$$+\varphi_r \cos\varepsilon\, d(\varphi_r \cos\varepsilon) = \omega^2 .\ \omega^2 s ds = -\omega^2 \varphi_r dr;$$

$$(\varphi_r \cos\varepsilon)^2 = -2\omega^2 \int \varphi_r dr + \text{const.};$$

ámde, $\cos^2\varepsilon = 1 - (p : r)^2$ lévén:

$$(r^2 - p^2) = \frac{r^2}{\varphi_r^2} (G - 2\omega^2 \int \varphi_r dr), \quad \ldots\ldots\ldots (4a)$$

hol G az integrátió állandója, mely pl. az $s = s_0$, $r = r_0$, $p = p_0$, $v = 0$ egymáshoz tartozó értékekből adódik.

1. Igy például, ha a föld nehézsége hat és *Y-felfelé* van irányítva, és az y coordináták kezdete a föld középpontjától H távolságban van: akkor $r = H + y$; $dr = dy$; $\varphi_r = -g$, $v^2 = -2gy + v_0^2$, ha v_0 az $y = 0$ melletti sebesség és így (3)-ból $-2gy + v_0^2 = -\omega^2 (s^2 - s_0^2)$; avagy, $s = 0$ $y = 0$-kor lévén, $2gy = \omega^2 . s^2$, mely egyenlet a közönséges cyclois $s = 2\sqrt{2ay}$ íve kifejezésével elégíthető ki, melyből $\omega^{-1} . \pi = T = \pi \sqrt{4a : g}$; [164. §. (5)].

2. Hasonlóan, ha például $\varphi_r = \pm C^2 r^n$, a felső előjel taszítást, az alsó vonzást jelentvén,

$$v^2 = \pm \frac{2C^2}{n+1} (r^{n+1} - r_0^{n+1});$$

$$\pm \frac{2T^2 C^2}{\pi^2 (n+1)} (r^{n+1} - r_0^{n+1}) = -(s^2 - s_0^2) \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Az $n = -1$ kivételes esetben

$$\pm \frac{2T^2 C^2}{\pi^2} \lg\left(\frac{r}{r_0}\right) = -(s^2 - s_0^2) \quad \ldots\ldots\ldots (5a)$$

A további részletezés feladatok tárgya [235. §. 16—26. feladatok].

167. §. *A brachystochrona. Általános differentiálegyenletei.*

Adva lévén két pont, melyek egyikétől valamely anyagi pont a másik felé tetszőleges független erők behatása alatt mozog: akkor az a görbe, melyen e mozgás a legrövidebb idő alatt végbe megyen: a *leggyorsabb érkezésű* vagy a *legrövidebb idejű görbe*, a *brachystochrona*.

A brachystochrona problémáját, ha csak a földnehézség a független erő, Bernoulli János tűzte ki 1696 junius havában, mintegy kihíva az akkori mathematikusokat s félévet engedve a megfejtésre. Csak Leibnitz-nak sikerült a kitűzött időre megoldást találni, minek folytán Bernoulli, egyetértőleg Leibnitz-zel, saját megfejtéseiket még titokban tartván, a terminust az 1697 év husvétjéig hoszszabbították meg.* Ezen időre Newton (névtelenül), Bernoulli Jakab és L'Hopital küldtek be megoldásokat; mindezek részben egész kiterjedésükben, részben csak az eredményük 1697-ben lettek közzétéve az Acta Eruditorum Lipsiæ-ben 1697 május havában; kivéve Bernoulli János második megoldását, mely a Mém. de l'Ac. d. Sc. de Paris-ban 1718-ban látott napvilágot.

A probléma az ú. n. *isoperimetrikus* problemákhoz tartozik, melyekben bizonyos határozott integrálok legnagyobb, illetve legkisebb értékei kerestetnek meg; ezek a variátió-számítás legérdekesebb eseteit szolgáltatják.

A brachystochrona jellemző egyenletét nyerjük, ha kifejezzük, hogy a rajta történő mozgás tartama kisebb, mint bármely más, az adott két ponton átmenő görbén végbemenő mozgásé.

1. Ha A_1 és A_2 az adott két pont, az idő:

$$t = \int_1^2 dt = \int_1^2 ds \frac{dt}{ds} = \int_1^2 \frac{ds}{v};$$

ez a brachystochronára nézve *minimum*, e szerint a t variátiójának zérussal egyenlőnek kell lennie, a mi úgy értendő, hogy a brachystochronához végtelen közel fekvő s az A_1 és A_2 alatt pontokon átmenő görbékre nézve a t csak magasabbrendű kicsiny menynyiségekkel különbözhetik a brachystochronának megfelelő időtől.

E feltétel:

$$\delta t = \delta \int_1^2 \frac{ds}{v} = \int_1^2 \delta\left(\frac{ds}{v}\right) = \int_1^2 \frac{v\delta(ds) - ds\delta(v)}{v^2} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

* Ezen második kihívás lenyomatát l. Walton, Problems in theoretical Mechanics, 664. lap.

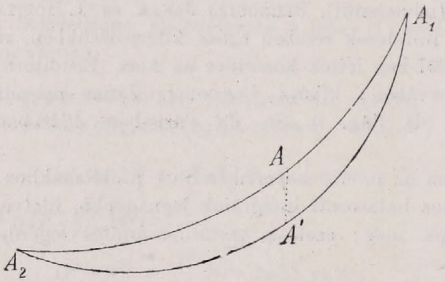
hol a *variátió közben az integrál határai állandók*, mivel a variált $A_1A'A_2$ görbék mind az A_1 és A_2 adott két ponton mennek keresztül és a t csak a közöttük lévő ívre vonatkozik, 66. ábra.

Szorozva és osztva dt-vel az (1)-nek integrál alatti számlálóját, és megjegyezve, hogy $ds=vdt$, az (1)-nek a mozgó m tömeggel való szorozmánya:

$$0=\int_1^2 \frac{1}{v^2}\left\{m\frac{ds\delta(ds)}{dt}-mv\delta v\right\}dt=\int_1^2 \frac{\delta\left[\frac{1}{2}m(ds^2\right]}{v^2dt}-\int_1^2 \frac{\delta\left[\frac{1}{2}mv^2\right]}{v^2}dt=0 \quad (1a)$$

Az (1a) feltétel két részének képzése:

a. A variátióra s a *differentiátióra vonatkozólag* a 73. §. 1. pontjában, 138. l. mondottak szemmeltartásával



66. ábra.

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2; \qquad \delta(ds)^2=\delta(dx)^2+.+.;$$

$$\delta(ds)^2=[d(s+\delta s)]^2-[ds]^2=[d(x+\delta x)]^2-[dx]^2+.+.;$$

$$\delta\left[\tfrac{1}{2}(ds)^2\right]=dsd(\delta s)=dxd(\delta x)+.+.;$$

és mivel:

$$\delta(ds)=d(s+\delta s)-ds=d(\delta s), \text{ s í. t.,}$$

$$\delta\left[\tfrac{1}{2}(ds)^2\right]=ds\delta(ds)=dx\delta(dx)+dy\delta(dy)+dz\delta(dz) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

b. Az *eleven erő tétele*, surlódás nélküli mozgásoknál [51. §. (3) és 53. §. (11)]:

$$\tfrac{1}{2}mv^2=\int(Xdx+Ydy+Zdz)+\text{constans}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

s ez kifejezi az m eleven erejét, ha az X, Y, Z erők hatása alatt a nem variált pálya xyz coordinátájú A helyéig jutott.

Ugyanazon A_1 kezdetből, ugyanazon kezdőfeltételeknél indulva, és az $A_1A'A_2$ variált pályán az $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ coordinátájú A'-helyig jutva, az m eleven ereje $\frac{1}{2}mv^2+\delta(\frac{1}{2}mv^2)$ és így $\delta(\frac{1}{2}mv^2)$ az erők által az A_1A, illetve az AA' ívek leírása közben végezett munkák különbsége.

Másrészt, az m-et A-tól A'-ig virtuálisan elmozdítva, az erők virtuális munkája

$$X\delta x+Y\delta y+Z\delta z.$$

Ha most ezen erőkről felveszszük, hogy ugyanazt a munkát végezik, akár az m az A_1A' ívrészen, akár az A_1A és AA' ívrészeken jutott A'-ig, akkor:

$$\delta\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)=X\delta x+Y\delta y+Z\delta z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

A mondott feltevés kifejezi, hogy a végzett munka csak az A_1 és A' helyzetektől függ, de független a köztük leírt úttól, azaz kimondja, hogy az *erők csak a coordinátáktól függő erőfüggvénynyel bírnak* [v. ö. az eleven erő variátióját 73. §. 2. és 3. pontjait, 139, 140. ll.].

2. Képezve (3)- és (4)-ből (1a)-t, e feltétel

$$\left.\begin{aligned} 0=&\int\frac{m}{v^2}\left\{\frac{dx}{dt}\,d(\delta x)+\frac{dy}{dt}\,d(\delta y)+\frac{dz}{dt}\,d(\delta z)\right\}-\\ &-\int\frac{1}{v^2}\,(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)\,dt. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Az egyenlet partiális integrátió útján a következő séma szerint transformálható:

$$\int_1^2\frac{1}{v^2}\,\frac{dx}{dt}\,d(\delta x)=\left[\frac{1}{v^2}\,\frac{dx}{dt}\,\delta x\right]_1^2-\int_1^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{v^2}\,\frac{dx}{dt}\right)dt\delta x\,; \quad . \quad . \quad (6$$

ámde itt az integrál az A_1 és A_2 adott két változatlan helyzetű pontok közötti görbére vonatkozik, mely görbe variátiója közben ezen végpontok coordinátáinak δx_1, δy_1, δz_1; δx_2, δy_2, δz_2 variátiói zérussal egyenlők, minek folytán a (6) jobboldali első tagjai elesnek és így az (5)-ből, némi rendezés után:

$$\left.\begin{aligned} \int_1^2\Big\{&\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{v^2}\,\frac{dx}{dt}\right)+\frac{X}{v^2}\right]\delta x+\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{v^2}\,\frac{dy}{dt}\right)+\frac{Y}{v^2}\right]\delta y+\\ &+\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{v^2}\,\frac{dz}{dt}\right)+\frac{Z}{v^2}\right]\delta z\Big\}\,dt=0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (7)$$

Miután itt δx, δy, δz variátiók egészen tetszőlegesek, és egymástól teljesen függetlenek, az egyenlet csak úgy állhat fenn, ha az integrál alatt a δx-, δy-, δz-vel szorzott menynyiségek külön-külön zérussal egyenlők, azaz;

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{v^2}\,\frac{dx}{dt}\right)+\frac{X}{v^2}=0\,;\\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{v^2}\,\frac{dy}{dt}\right)+\frac{Y}{v^2}=0\,;\\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{v^2}\,\frac{dz}{dt}\right)+\frac{Z}{v^2}=0\,. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Ezek a brachystochrona jellemző differentiálegyenletei, melyek megfejtése e görbe alakját (két egyenletet) és a sebességet (egy egyenletet) szolgáltatja.

Megjegyzendő, hogy az előírt pályán való mozgás általános egyenletei [47—51. §§.] itt is állanak.

A (8) egyenletei másodrendűek lévén: *hat* integrátió-állandó lép fel, melyek az A_1 és A_2 pontok x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 coordinátáival æquivalensek tartoznak lenni.

168. §. *A brachystochrona egy pont s egy felület, két felület, görbe vonal és felület, s két görbe vonal között.*

1. Legegyszerűbb az eset, mikor *adott* A_1 *pont és adott* $F_2(x_2y_2z_2)=0$ *felület között* keressük *a brachystochronát.* Ekkor az A_2 végpont $\delta x_2 \delta y_2 \delta z_2$ coordináta-variátió nem zérusok, hanem megfelelnek a

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\delta y_2 + \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\delta z_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

feltételnek s közülök kettő független; ezen esetben a megelőző §. (5) egyenlete első részének a (6) typus szerinti transformátiójánál csak az A_1 pont dx_1, dy_1, dz_1 coordináta-változásai zérusok, minélfogva ez az egyenlet:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \frac{1}{v_0}\Big[\frac{dx_2}{dt}\delta x_2 + \frac{dy_2}{dt}\delta y_2 + \frac{dz_2}{dt}\delta z_2\Big] - \\ - \int_1^2 \Big\{\Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{m}{v^2}\frac{dx}{dt}\Big) + \frac{X}{v^2}\Big]\delta x + [\ ]\delta y + [\ ]\delta z\Big\}\, dt. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2)$$

A (2)-t és (1)-et egyesítendő, szorozzuk (1)-et $-\lambda : v_2$-vel, hol λ még tetszőleges együttható, s adjuk (2)-höz; belőle így:

$$0 = \frac{1}{v_2}\Big\{\Big(\frac{dx_2}{dt} - \lambda\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\Big)\delta x_2 + \Big(\frac{dy_2}{dt} - \lambda\frac{\partial F_2}{\partial y_2}\Big)\delta y_2 + \Big(\frac{dz_2}{dt} - \lambda\frac{\partial F_2}{\partial z_2}\Big)\delta z_2\Big\} - \\ - \int_1^2 \{[\ ]\delta x + [\ ]\delta y + [\ ]\delta z\}\, dt. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Itt az (1) értelmében a δx_2, δy_2, δz_2 közül kettő, pl. a δx_2 és δy_2 függetlenek; a λ-t most úgy választjuk, hogy (3)-ban a δz_2 együtthatója zérus legyen, azaz, hogy $\lambda = \frac{dz_2}{dt} : \frac{\partial F_2}{\partial z_2}$; ekkor a (3)-nak harmadik tagja elesik és a fenmaradó első kettő a δx_2, δy_2, független variátiókkal való szorozmányok; az egyenlet csak úgy állhat fenn, ha ezek együtthatói külön-külön zérusok, azaz, λ-értékét is írva, ha:

$$\frac{dx_2}{dt} - \lambda\frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 0; \qquad \frac{dy_2}{dt} - \lambda\frac{\partial F_2}{\partial y_2} = 0; \qquad \frac{dz_2}{dt} - \lambda\frac{\partial F_2}{\partial z} = 0 \ \ldots \ (4)$$

és így a (3) második részének is zérusnak kell lennie

$$\int_1^2 \Big\{\Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{m}{v^2}\frac{dx}{dt}\Big) + \frac{X}{v^2}\Big]\delta x + [\,.\,]\delta y + [\,.\,]\delta z\Big\}\, dt = 0 \quad . \quad . \quad (5)$$

A (4)-ből látjuk, hogy az F_2 felületen:

$$\frac{dx_2}{dt}:\frac{dy_2}{dt}:\frac{dz_2}{dt}=\frac{\partial F_2}{\partial x_2}:\frac{\partial F_2}{\partial y_2}:\frac{\partial F_2}{\partial z_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

azaz: a brachystochrona az F_2-felületet *merőlegesen* találja.

Ezt a sajátságot a (4)-ből még ezen egyenleteknek δx_2, δy_2, δz_2-vel való szorzásából és összegezéséből nyerjük; tekintettel (1)-re marad:

$$\frac{dx_2}{dt}\delta x_2+\frac{dy_2}{dt}\delta y_2+\frac{dz_2}{dt}\delta z_2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4b)$$

Az (5) integrálban a δx, δy, δz variatiók tetszőlegesek, de az A_1-re nézve áll $\delta x_1=\delta y_1=\delta z_1=0$, és az A_2-re nézve az (1) áll; ezért ez az integrál közvetetlenül esik szét a megelőző §. (8) egyenleteire; de most a görbe e három egyenleten kívül még a (4*a*) feltételnek is tartozik megfelelni, mely utóbbi két egyenletet képvisel; e kettő s az $F_2(x_2, y_2, z_2)=0$ egyenértékű a megelőző §-ban az A_2 pont helyzetét megadó x_2, y_2, z_2 coordináták három adatának.

2. Ha az A_1 *pont* is *tartozik egy* $F_1(x_1, y_1, z_1)=0$ *felületen maradni:* akkor reá nézve ugyanoly egyenlet, mint az (4*a*) érvényes s így a keresett görbe mindkét adott felületre merőleges. Az integrátió hat állandója közül itt négy az irányok, s kettő azon feltétel által van adva, hogy az F_2, illetve F_1 felületen fekszik az A_2 és A_1 pont.

3. Ha egy tetszőleges helyű A_1 *pont és egy előírt görbe közötti brachystochronát* keressük, akkor legyenek e görbe egyenletei:

$$f_2(x_2\,y_2\,z_2)=0\,; \qquad g_2(x_2\,y_2\,z_2)=0\,;$$

e szerint az A_2 coordináta-variatiói megfelelnek a feltételeknek

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\delta y_2+\frac{\partial f_2}{\partial z_2}\delta z_2=0\,; \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial g_2}{\partial y_2}\delta y_2+\frac{\partial g_2}{\partial z_2}\delta z_2=0 \quad (6)$$

s így a δx_2, δy_2, δz_2 között csak *egy* független variatió van, pl. a δx_2.

A (2) egyenletet a (6)-tal egyesítendő, elsejét $-\lambda:v_2$-vel, másodikát $-\mu:v_2$-vel szorozva adjuk a (2)-höz; a tetszőleges λ és μ együtthatókat most úgy választjuk, hogy a függő δy_2 és δz_2 variatiók együtthatói zérusok legyenek; akkor a fenmaradó szabad tag a független δx_2-vel lévén szorozva, a (3)-nak megfelelő egyenlet csak úgy állhat, ha δx_2 együtthatója is zérus s így:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_2}{dt}-\lambda\frac{\partial f_2}{\partial x_2}-\mu\frac{\partial g_2}{\partial x_2}&=0\,;\\ \frac{dy_2}{dt}-\lambda\frac{\partial f_2}{\partial y_2}-\mu\frac{\partial g_2}{\partial y_2}&=0\,;\\ \frac{dz_2}{dt}-\lambda\frac{\partial f_2}{\partial z_2}-\mu\frac{\partial g_2}{\partial z_2}&=0\,;\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

s ezekenkívül az (5) és a belőle folyó három egyenlet [167. §. (8)] áll.

A (7) egyenleteit δx_2-, δy_2-, δz_2-vel szorozva, összegük, tekintettel (6)-ra

$$\frac{dx_2}{dt}\delta x_2 + \frac{dy_2}{dt}\delta y_2 + \frac{dz_2}{dt}\delta z_2 = 0 \ldots\ldots (8)$$

azaz, a brachystochrona az előírt görbét *merőlegesen* találja s így végpontjának érintője a görbe ismert (adott) normális síkjában fekszik.

Ez a feltétel *egy* független irányt, adatot szolgáltat, ehhez járul az $f_2=0$ és $g_2=0$ két egyenlet, melyek összesen az A_2 helyét megadó három integrátió-állandót adják meg.

4. Teljesen analog viszonyok állanak, a mikor a *brachystochrona előírt két görbe,* vagy *előírt görbe és előírt felület között* keresendő; az integrátió független állandóira az egyes felület, illetve görbe esetében tett észrevételek itt is állanak.

169. §. *A brachystochrona néhány fontos általános sajátsága. A reflexió tétele.*

1. *A független erők eredője a brachystochrona osculáló síkjába esik.*

Az s ívet vezetve be mint független változót t helyébe:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{v^2}\cdot\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{m}{v^2}\cdot\frac{dx}{ds}\,\frac{ds}{dt}\right)\frac{ds}{dt} = v\frac{d}{ds}\left(\frac{m}{v}\,\frac{dx}{ds}\right) \quad \text{s í. t.}$$

Ezt felhasználva és v^2-tel szorozva, a 167. §. (8) egyenleteiből

$$\left.\begin{aligned} v^2\frac{d^2x}{ds^2} - v\frac{dv}{ds}\frac{dx}{ds} + \frac{X}{m} &= 0;\\ v^2\frac{d^2y}{ds^2} - v\frac{dv}{ds}\frac{dy}{ds} + \frac{Y}{m} &= 0;\\ v^2\frac{d^2z}{ds^2} - v\frac{dv}{ds}\frac{dz}{ds} + \frac{Z}{m} &= 0; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1)$$

Tekintetbe véve a tangens α, β, γ; a normális λ, μ, ν; és a binormális f, g, h iránycosinusai értékét s ezen irányok egymásra való merőlegességét [49. §. (1), 85. l.] s szorozva az (1) egyenletei rendre f, g, h-val, összegük:

$$Xf+Yg+Zh=0; \ldots\ldots (2)$$

azaz a független erők a binormális mentén nem bírnak componenssel s így eredőjük mindig az osculáló síkban fekszik. Ezért a kényszererőnek binormális componense, R_b is zérus (49. §. (8), 86. l.].

2. *A normális erőcomponens; a brachystochrona s a szabad pályák egymással való összefüggése.*

a. Szorozva az (1) egyenleteit rendre a normálisnak

$$\lambda = \varrho\frac{d^2x}{ds^2}, \qquad \mu=.., \qquad \nu=..,$$

iránycosinusaival, összegük:

$$m\frac{v^2}{\varrho} = -(\lambda X+\mu Y+\nu Z), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

azaz a független erők normális componense és a ϱ a pálya ellentett két oldalán fekszik.

Összehasonlítva ezt a 49. §. (8) egyenletei középsőjével, a kényszererőnek a normális menti componense, R_n (itt $R_b = 0$ lévén):

$$R_n = R = 2m\frac{v^2}{\varrho} = -2(\lambda X+\mu Y+\nu Z), \quad \ldots\ldots \quad (3a)$$

mely mutatja, hogy (a $\varrho=\infty$ esetet kivéve), a kényszererő sehol sem lehet zérus.

Ha az m ugyanezen független erők alatt *szabadon mozogna* normális mozgási egyenlete volna [34. §. (2) és (4) egyenletei]

$$mv^2\varrho^{-1} = \lambda X + \mu Y + \nu Z.$$

Összehasonlítva ezt a (3)-mal, kimondjuk a tételt:

A mikor az m a brachystochronán mint előírt pályán mozog, akkor a gyorsító erők normális componense (mely a (3)-ból $= -mv^2\rho^{-1}$) *mindig ellentetten egyenlő avval az erőcomponenssel, melylyel a független erők birnának, ha ezek az m-et mint szabad pontot e brachystochrona görbén ugyavval a sebességgel mozgatják.*

b. Szorozva az (1) egyenleteit rendre $\frac{dx}{ds}$-el s í. t. s megjegyezve, hogy

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{1}{v}\cdot\frac{d^2s}{dt^2},$$

összegük

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = X\alpha+Y\beta+Z\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

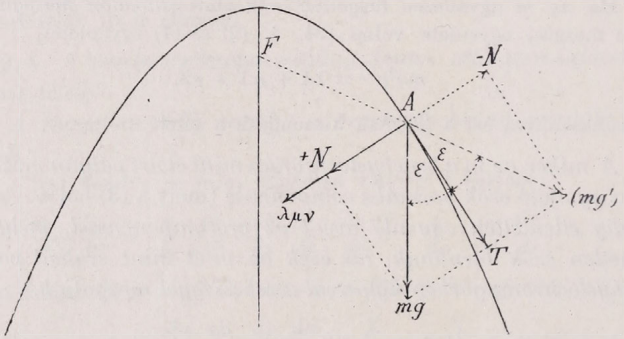
Ez *ugyanaz* a tangentiális gyorsító erő, mely az m szabad mozgásában megnyilatkozik.

c. A reflexió tétele. Az *a.* és *b.* pontok értelmében: *A brachystochrona minden pontjában megfordítván, a tényleg ható független erő* ***normális*** *componensét, azaz az egész független erőt a pálya érintőjén reflectálva* (l. a 67. és 68. ábrát, köv. l.) *a brachystochronát szabad pályává változtattuk;* s megfordítva: *bármely szabad pálya minden pontjában a* ***normális*** *erőcomponenset megfordítva, azaz a független erőt ugyanígy reflectálva, a szabad pályából brachystochróna lesz.*

Példák. 1. A földnehézségi erő hatása alatt a pont *parabolát* ír le, melynek tengelye ezen (mg) erő irányával párhuzamos (67. ábra); ellentett irányba irányítva az mg-nek N normális componensét, a T- és a $-N$-nek eredője az (mg_1), mely szerkezeténél fogva az AT érintő irány-

nyal ugyanakkora szöget képez, mint az (mg) s nagyságra nézve evvel egyenlő és *állandó*. A parabola elemi sajátsága értelmében az (mg_1) iránya megegyezik a góczpontból A felé vont vezérsugár folytatásával. E szerint valamely *állandó nagyságú* $|mg_1| = |mg|$ *taszító centrális erőre* nézve oly parabola a brachystochrona, melynek góczpontja az erő centruma. A mozgás itt csak a pálya *homorú* oldalán történhetik.

2. A távolság négyzetével fordítva arányos *vonzó* centrális erő, $\Phi(r)$ a szabad pontot ellipsis-pályára készteti, melynek egyik góczpontja az erő centruma (68. ábra); ellentett irányúvá téve a $+N$ normális erőcomponenst: a $-N$ és a T eredője a $\{\Phi(r)\}_1$, mely szerkesztése értelmében az AT érintővel ugyanakkora szöget képez, mint $\Phi(r)$,



67. ábra.

s így az ellipsis ismert sajátsága szerint e $\{\Phi(r)\}_1$ a másik góczpontból A-felé húzott vezérsugár folytatásába esik. Ezért: ha a centrális erő taszító, centruma egy fixpont, nagysága pedig egy másik fixponttól való távolság négyzetével fordítva arányos: akkor a brachystochrona oly ellipsis, melynek gyújtó pontjai a nevezett fixpontokkal esnek egybe; a mozgás itt is a görbe homorú oldalán történik. V. ö. a 236. §. 39, 40. feladatát.

I. *Jegyzet.* A (3) más, jellemző alakját nyerjük, ha megjegyezzük, hogy a független P erő $P_n = \lambda X + \mu Y + \nu Z$ normális és $P_t = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$ tangentiális componensei a pálya osculáló síkjában egymásra merőlegesek s hogy, ε-nal jelelve a P és a mozgás iránya közötti szöget, áll

$$P_n = P \sin \varepsilon ; \qquad P_t = P \cos \varepsilon ; \qquad P_n = P_t \operatorname{tg} \varepsilon .$$

Tekintettel a (4)-re, a (3) ezek alapján:

$$m \frac{v^2}{\varrho} = - P_n = - m \frac{dv}{dt} \operatorname{tg} \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

vagy, ha $d\eta$ a pálya contingentia-szöge (egymásra következő két érintő irány különbsége) és $\varrho = \pm ds : d\eta = \pm v dt : d\eta$,

$$mv d\eta = \mp m dv \operatorname{tg} \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5a)$$

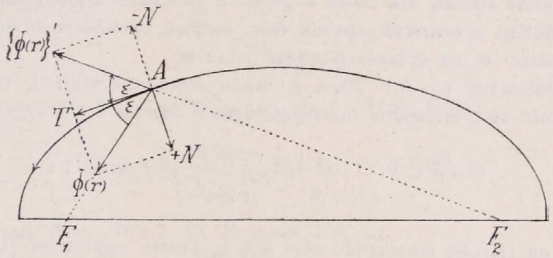
hol a felső vagy az alsó előjel áll, a szerint, a mint $d\eta$ és $dv \,.\, \operatorname{tg} \varepsilon$ előjelei ellentettek vagy egyenlők.

II. *Jegyzet.* Ha a P-erő *iránya állandó*, akkor $d\eta = \mp d\varepsilon$, miáltal (5a)-ból

$$dv : v = (\cos \varepsilon \, d\varepsilon) : \sin \varepsilon,$$

miből, $\varkappa \sqrt{2}$-val állandót jelelve:

$$v = \varkappa \sqrt{2} \,.\, \sin \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$



68. ábra.

azaz, ekkor a sebesség az $\varepsilon = (P, v)$ ∢ hajlásszög sinusával (a niveau-sík és a v közötti szög cosinusával) arányos. Ily eset a 161. §. példája, mikor az m a cyclois legmagasabb pontjában lesz elbocsátva; ekkor az ott írt egyenletek és az 58. ábra szerint, lévén itt $h = 2a$:

$$v^2 = 2g(h - y) = 2g(2a - 2a \sin^2 \tfrac{1}{2}\vartheta); \qquad v = 2ga \cos \tfrac{1}{2}\vartheta$$

és $\frac{1}{2}\vartheta$ a mindenkori érintő és a vízszintes niveau-sík közötti szög. V. ö. még a 171. §. (3) egyenletét.

170. §. *A brachystochróna a földnehézség egyedüli hatása alatt. Analytikai tárgyalás. A görbe cyclois.*

1. Az Y-tengelyt függőlegesen fölfelé irányítva, itt $X = Z = 0$; $Y = -mg$; miáltal a megelőző §. 1. pontja értelmében a brachystochrona osculáló síkja mindig vertikális lett és az idézett pont jelölésében ennek (1) rendszere írható:

$$\lambda \frac{v^2}{\varrho} = \alpha v \frac{dv}{ds}; \qquad \mu \frac{v^2}{\varrho} = \beta v \frac{dv}{ds} + g; \qquad \nu \frac{v^2}{\varrho} = \gamma v \frac{dv}{ds} \,. \quad (1)$$

Ezen egyenletek egyesítéséből rendre:

$$(\mu\gamma-\nu\beta)\frac{v^2}{\varrho}=\gamma g\,; \qquad (\nu\alpha-\lambda\gamma)\frac{v^2}{\varrho}=0\,; \qquad (\lambda\beta-\mu\alpha)\frac{v^2}{\varrho}=-\alpha g\,; \quad (1a)$$

mely rendszer szintén kifejezi, hogy a görbe binormálisa merőleges az Y-tengelyre.

Hogy ebben az esetben a görbe *egy* vertikális síkban fekszik, az osculáló sík általános sajátságaiból következik; mert az osculáló sík irányváltozása, a csavarodás, nem más, mint e síknak a mindenkori érintő körüli elemi elforgása [Math. Rep. 75*a*. §.]. E szerint, ha e sík egy ívelemre nézve egy meghatározott vertikális sík, akkor *nem sík* görbe esetében a következő ívelem osculáló síkja kilépne a nevezett vertikális síkból és csak akkor maradhatna szintén vertikális síknak, ha a görbe előbbi íveleme vertikális volna. Miután a görbe általában véve nem lehet vertikális egyenes, az osculáló síkja csak úgy maradhat mindig vertikális síknak, ha maga a görbe e vertikális síkban fekszik.

E szerint a brachystochrona ezen esetben *vertikális sik görbe*, mely az elbocsátás- és az érkezés pontján halad át.

2. Választva az XY síkot a brachystochrona síkjául, $0=\gamma=\nu=0$ és az érintő és a normális merőlegességénél fogva:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^2+\beta^2=1\,; \qquad \lambda^2+\mu^2=1\,; \qquad \alpha\lambda+\beta\mu=0\,; \\ \lambda=-\beta\,; \qquad \mu=+\alpha\,; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

továbbá az (1)-nek fenmaradó első két egyenlete egyesítése [ugyanis λ-μ-vel szorozva s összegezve és épen így α- és β-val]:

$$\frac{v^2}{\varrho}=\mu g\,; \qquad 0=v\frac{dv}{ds}+g\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

A (3) második egyenlete írható:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d}{ds}(v^2)=-g\beta=-g\frac{dy}{ds},$$
$$v^2=2g(h-y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

mely az eleven erő tétele; benne h az elbocsátás magassága.

Egyesítve (4)-et a (3) első egyenletével:

$$\frac{2g(h-y)}{\varrho}=\mu g=\alpha g=\frac{dx}{ds}\,g, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

avagy, a ϱ közönséges kifejezésével élve s $dy:dx=p$-t, $ds:dx=\sqrt{1+p^2}$-t írva:

$$\sqrt{1+p^2}\cdot\frac{dp}{dx}(1+p^2)^{-\frac{3}{2}}=\tfrac{1}{2}\frac{1}{h-y}\,.$$

Ámde:

$$\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy};$$

s így egyenletünk:

$$\frac{\frac{1}{2}d(p^2)}{1+p^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{dy}{h-y},$$

miből:

$$\lg(1+p^2) = -\lg(h-y)+\lg \text{const.}$$

avagy, $\lg h'$-val jelelve az állandót:

$$\frac{h'}{h-y} = (1+p^2) = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Helyettesítve ebből $dx : ds$-et (5)-be, ebből

$$\varrho = 2\sqrt{h'(h-y)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

mely a közönséges *cyclois* görbületi sugara kifejezésével megegyeztethető [161. §. bekezdése].

A (6) írható:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{h'}{h-y} - 1;$$

ha ebben rövidség kedveért $h-y=z^2$, $dy=-2zdz$, belőle

$$dx = -\frac{2z^2dz}{\sqrt{h'-z^2}} = +2zd\left(\sqrt{h'-z^2}\right),$$

és így [Math. Rep. 107. §. 18. formula 130. 1.]

$$x = 2z\sqrt{h'-z^2} - 2\int\sqrt{h'-z^2}\,dz = 2z\sqrt{h'-z^2} - z\sqrt{h'-z^2} - h'\arcsin\frac{z}{\sqrt{h'}}$$

$$x = z\sqrt{h'-z^2} - h'\arcsin\frac{z}{\sqrt{h'}} + \text{const.}$$

$$x = \sqrt{h-y}\,\sqrt{h'-h+y} - h'\arcsin\sqrt{\frac{h-y}{h'}} + \text{const.} \quad . \quad . \quad (8a)$$

Az XY-coordináta-rendszer kezdete az adott pontok mélyebbikébe esik és a magasabbik pont coordinátái legyenek e és h, 69. ábra; ekkor $y=h$, $x=e$, és $y=0$ $x=0$ egymáshoz tartozók, azaz a (8a) e két pontra nézve

$$e = \text{const.}; \quad 0 = \sqrt{h}\,\sqrt{h'-h} - h'\arcsin\sqrt{\frac{h}{h'}} + e, \quad . \quad . \quad (8b)$$

mely utóbbi egyenlet az e és a h' állandók közötti kapcsolatot fejezi ki; s így a (8a)-ból általában:

$$x = \sqrt{h-y}\,\sqrt{h'-h+y} - h'\arcsin\sqrt{\frac{h-y}{h'}} + e, \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

mely egyenletet a következő pontban a cycloiséval megegyeztetjük.

3. A közönséges cyclois, melynek csúcsa alúl, alapja fent és víz-

szintesen van, vonatkoztatva a 69. ábra coordináta-tengelyeire, a következő egyenletekkel bír [v. ö. a 161. §. bekezdését is]:

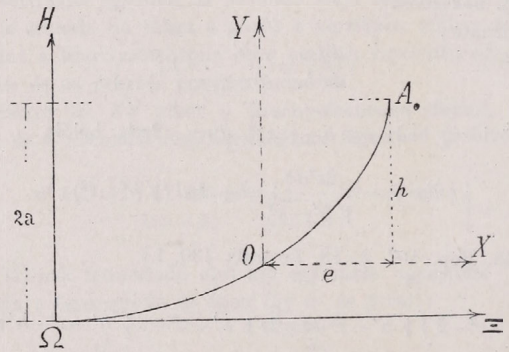
$$\xi = a(\vartheta + \sin\vartheta); \qquad \eta = a(1 - \cos\vartheta);$$

$$\xi = \sqrt{2a\eta - \eta^2} + a \cdot \arcsin \frac{\sqrt{2a\eta - \eta^2}}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Irva (8)-ban: $h - y = 2a - \eta$; $x - e = -a\pi + \xi$, $h' = 2a$, belőle

$$\xi - a\pi = \sqrt{2a - \eta}\sqrt{\eta} - 2a \cdot \arcsin \frac{\sqrt{2a - \eta}}{\sqrt{2a}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9a)$$

Ha pedig rövidség kedveért $\sqrt{2a - \eta} : \sqrt{2a} = \sin\varphi$, hol $\eta = 0$-nál $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, akkor $\sqrt{\eta} : \sqrt{2a} = \cos\varphi$ és



69. ábra.

$$a[\pi - 2\arcsin\{\sqrt{2a - \eta} : \sqrt{2a}\}] = a(\pi - 2\varphi);$$

$$\sin(\pi - 2\varphi) = \sin 2\varphi = 2\sqrt{2a - \eta}\sqrt{\eta} : 2a$$

és

$$\pi - 2\varphi = \arcsin \cdot \frac{\sqrt{2a\eta - \eta^2}}{a},$$

miáltal (9a) teljesen átmegyen (9)-be.

A brachystochrona e szerint itt *cyclois*, melynek csúcsa alúl, alapja fent és vízszintesen van, melynek A_0 legmagasabb pontja az elbocsátás helye, míg legmélyebb pontja az adott pontok másodikával, O-val általában véve nem esik egybe. E görbe $2a = h'$ parameterét az adott pontok e s h coordináta-különbségei a (8b)-ből adják:

$$\sqrt{h(2a - h)} + e = 2a \arcsin \sqrt{\frac{h}{2a}},$$

mely meglehetősen bonyolódott összefüggés.

Könnyű belátni, hogy mindaddig, míg $e < \frac{1}{2}h\pi$, az A_0 és az O a görbének Ω-tól számított *egy* ágán feküsznek; ha $e > \frac{1}{2}h\pi$, ekkor az O a görbének másik (a rajzban Ω-tól *balra* eső) ágában fekszik s így ekkor a brachystochronán gördülő anyagi pont (gömböcske) e görbe egyik ágát teljesen befutja s legmélyebb helyén áthaladva, emelkedik a mélyebbik pont, O-felé.

Ezen $2e \geq h\pi$ esetben brachystochrona az ugyanezen erők melletti tautochronával esik egybe.

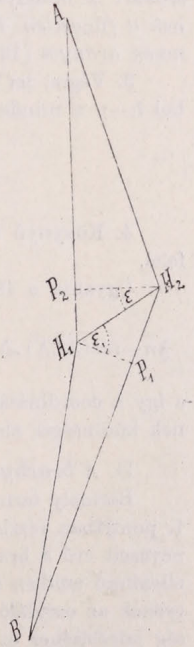
171. §. *Ugyanaz a feladat. Általánosítás.* Bernoulli *geométriai eljárása.*

I. *A független erő iránya állandó; a brachystochrona jellemző egyenlete. A földnehézség a működő erő.*

1. Könnyű elemi megfontolásokkal közvetetlenül kimutatni, hogy a keresett görbe csak *sík*-görbe lehet, mert ellenkezője ellentétben áll a feltételekkel.

Ugyanis feltéve, hogy a görbe nem volna sík, vetítsük ezt az adott két ponton átmenő vertikális síkra és legyen s' a térbeli görbe-, s ezen vetületének ívhoszsza. A legördülő vagy sikló pont sebessége mindkét görbében csak az esési magasságtól függ s így az s' és s görbék egyenmagasságú pontjaiban a sebesség is egyenlő.

Miután pedig az s' térbeli görbe ívhoszsza mindig nagyobb, mint az s sík vetületeé: kétségtelen, hogy az s' befutására mindig több idő kell, mint az s leírására. E szerint: a brachystochrona az adott pontokon átmenő vertikális *sík*ban fekszik.



70. ábra.

2. Legyen AH_1B és AH_2B közös kezdetű és végpontú két oldalpár 70. ábra, melyek H_1 és H_2 csúcsai egy vízszintesben vannak; e párok olyanok legyenek, hogy az A-ból induló, rajtuk sikló anyagi pontok B-be egyidejűleg érkezzenek. Az A és B-n átmenő brachystochronán az esés ideje *minimum* lévén: az esési idő e görbén innen vagy túl lévő bármely más görbére nézve *nagyobb* s így a brachystochronának az AH_1B és AH_2B görbék (polygonrészek) *között* kell feküdnie; ha pedig e kettő szárai végtelen kicsinyek és egymástól a H_1 s H_2 pontok másodrendű kicsiny távolságban fekszenek s az esési idők egyenlősége a másodrendű kicsiny értékekig bezárólag fennáll: akkor az így alakított AH_1B vagy AH_2B ív a brachystochróna egy ívrésze.

Jeleljék v és v_1 a sebességet, melylyel az AH_1 vagy AH_2-, illetve a H_1B vagy H_2B ívrészek le lesznek írva és P_1 és P_2 a H_1- s a H_2-ből

a H_2B s AH_1-re bocsátott merőlegesek talppontjait; akkor az esési idők egyenlősége

$$\frac{AH_1}{v} + \frac{H_1B}{v_,} = \frac{AH_2}{v} + \frac{H_2B}{v_,} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

avagy, mivel harmadrendűek elhanyagolásával $AP_2 = AH_2$, $H_1B = P_1B$, e feltétel

$$\frac{P_2H_1}{v} = \frac{H_2P_1}{v_,}; \qquad P_2H_1 : P_1H_2 = v : v_, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ha pedig ε és $\varepsilon_,$ az AH_1 vagy az AH_2 s a H_1B vagy a H_2B hajlásszöge a H_1H_2-re merőleges vertikálishoz, akkor: $P_2H_1 = H_1H_2 \sin \varepsilon$; $P_1H_2 = H_1H_2 \sin \varepsilon_,$, miáltal (2)-ből

$$v : v_, = \sin \varepsilon : \sin \varepsilon_,,$$

azaz:

$$v = \varkappa \sqrt{2} \sin \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

szóval: a brachystochronán a *sebesség a mindenkori pályaiv érintőjének a független P erő irányával képezett hajlásszöge sinusával egyenesen arányos* [169. §. (6)].

3. Végre, ha a földnehézsége a működő erő, akkor: $v^2 = 2g(h-y)$, hol $h-y$ a mindenkori esési magasság; ezt (3)-mal egyesítve

$$\sin \varepsilon = \frac{\sqrt{g}}{\varkappa} \cdot \sqrt{h-y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

4. Könnyű kimutatni, hogy a *cyclois* ennek az egyenletnek megfelel.

Ugyanis, a 161. §. 61. ábrája és 2. pontja értelmében e görbére nézve:

$$\tfrac{1}{2}\pi - \varepsilon = (AEX)\measuredangle = (ADE)\measuredangle = \tfrac{1}{2}\vartheta; \qquad \sin \varepsilon = \cos \tfrac{1}{2}\vartheta = \frac{1}{2a}\sqrt{2a-y}.$$

s így a coordináták kezdetének kellő választása a (4)-et a cyclois egyenletének közönséges alakjába hozza.

II. *A brachystochrona tetszőleges erők esetében.*

Bármely természetű független (szabad) erő esetében az I. szakasz 1. pontjában részletezetthez teljesen analog az a következtetés, hogy a nevezett erő a brachystochrona mindenkori osculáló síkjában fekszik; ellenkező esetben ugyanis különben egyenlő körülmények között ezen erőnek az osculáló síkra merőleges componense nem járulhat a sebesség növeléséhez és így ugyanezen út leirására hoszszabb idő kellene.

Továbbá, az I. szakasz 2. pontjának megfontolásai és

$$v : v_, = \sin \varepsilon : \sin \varepsilon_,$$

eredménye itt is érvényes, csakhogy a P erő iránya nem lévén állandó: H_1-ben ε és B-ben ε' az erő s a mindenkori AH_1 illetve H_1B pályaérintő közötti szög és a 71. ábra szerint $\varepsilon_, = \varepsilon' + d\vartheta$, hol $d\vartheta$ a P irányváltó-

zása a H_1B mentén; másrészt, ha az AH_1 és a H_1B brachystochrona $AH_1=ds$ íveleme A kezdő és H_1 végpontja érintői iránykülönbsége $d\eta$, áll $\varepsilon_1=\varepsilon+d\eta$ és így:

$$\varepsilon_1=\varepsilon'+d\vartheta=\varepsilon+d\eta=\varepsilon_1; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

végre a $v_1=v+dv$ alakban írható.

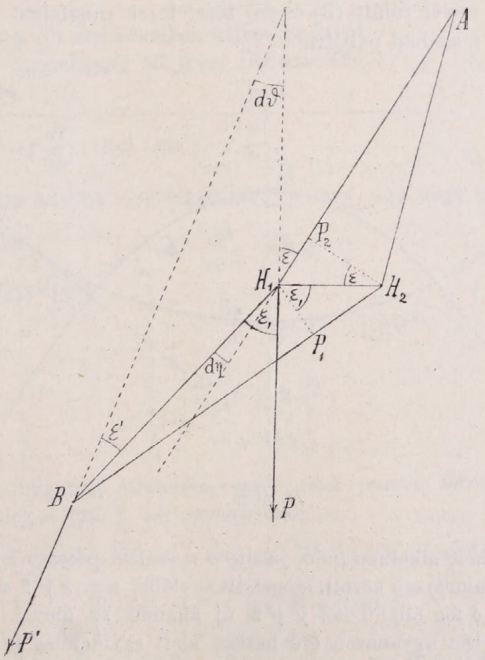
E szerint az előbb írt feltétel:

$$\frac{v}{\sin\varepsilon}=\frac{v_1}{\sin\varepsilon_1}=\frac{v+dv}{\sin(\varepsilon+d\eta)}=\frac{v}{\sin\varepsilon}+\frac{dv}{\sin\varepsilon}-\frac{v\cos\varepsilon}{\sin^2\varepsilon}d\eta;$$

$$dv=\frac{v\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}d\eta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Az eleven erő tétele itt, 71. ábra:

$$d(\tfrac{1}{2}mv^2)=P\,.\,\overline{AH_1}\,.\cos\varepsilon, \qquad mvdv=Pds\cos\varepsilon, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$



71. ábra.

avagy, dv-t (7)-ből (6)-ba helyettezve s megjegyezve, hogy $P\cos\varepsilon$ az érintőmenti gyorsító erő:

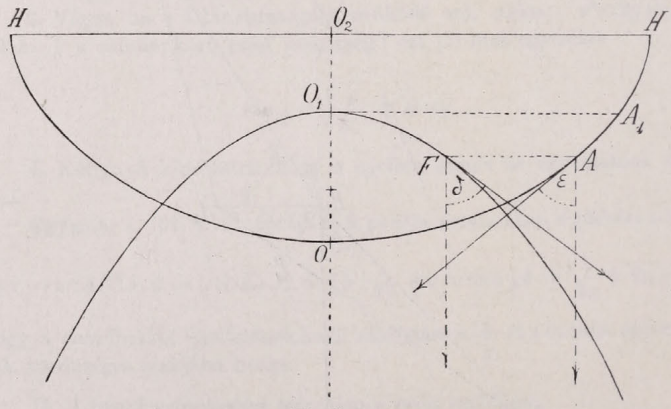
$$mv\,.\,\frac{\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}vd\eta=(P\,.\cos\varepsilon)\,ds=m\frac{dv}{dt}\,.\,ds=mv\,.\,dv; \qquad vd\eta=dv\,\mathrm{tg}\,\varepsilon \quad (8)$$

mely a 169. §. (5) egyenletével egyenlő s a 71. ábra jelölésének felel meg.

Állandó irányú P-nél, a rajz szerint $d\vartheta = 0$, miből $\varepsilon' = \varepsilon$, s így $d\eta = d\varepsilon$, ekkor (8) átmegyen (3)-ba.

172. §. *A brachystochrona feltétele és a legkisebb működés elve között fennálló vonatkozás.*

A brachystochrona feltétele az, hogy a $t = \int \frac{ds}{v}$ idő minimum legyen; a *szabad* pálya esetében ellenben a legkisebb működés elve értelmében [25. §. 5. pontja] $\int vds$-nek kell minimumnak lennie, a határok mindkét esetben ugyanazok lévén; e szerint ugyanazon független erők hatása alatt a szabad pályában a v ugyanoly sajátságokat mutat, mint a brachystochrónában az $\frac{1}{v}$ és így a megelőző §.-ban ezen utóbbira nézve talált (3) és (8) tételeknek megfelelő összefüggések állanak a szabad pályára.



72. ábra.

Az első tételt alkalmazandó, jelelje δ a szabad pályaív s az állandó irányú (párhuzamos) erő közötti szöget, itt az előbbi $v = \varkappa\sqrt{2}\sin\varepsilon$ helyett $1 : v = \gamma\sqrt{2}\sin\delta$ fog állani, hol $\gamma\sqrt{2}$ új állandó, 72. ábra.

A két görbén ugyanazon erő hatása alatt egyidejűleg két pont halad; e két görbét a P erő æquipotentiális síkjainak serege metszi; ha e síkok egyike két A és F metszőpontjában a sebességek egyenlők, akkor az eleven erő tétele szerint a sebességek minden más, a két görbét metsző ily síkban egyenlők maradnak s így e két összefüggés szorzata:

$$\sin\varepsilon\sin\delta = \text{constans},$$

mely új, jellemző egyenlet az egymásnak megfelelő brachystochrona és szabad pálya között.

Példa: A 72. ábra parabolája és cycloisa egymáshoz tartozó két ily görbe; a parabola legmagasabb pontján a sebesség a cycloison az O_1O_2 esési magasságnak felel meg; ebből egyszerű megfontolások adják, hogy a cyclois HH alapja a parabola directrixe [v. ö. a 236. §. 43. feladatát].

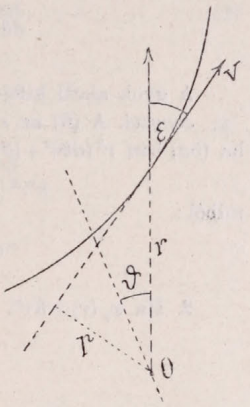
173. §. *A brachystochrona egyenlete centrális erőkre nézve.*

Ezen esetekben, ha az adott két pont és az erő középpontja egy síkban fekszik, a görbe is e síkban fekszik [171. §. II. szakasza] és a centrális erőkre nézve áll:

$$d\left(\tfrac{1}{2}v^2\right) = \varphi_r\, dr; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

másrészt a 169. §. (3) egyenlete itt, 73. ábra

$$\left.\begin{aligned} m\frac{v^2}{\varrho} &= -(\lambda X+\mu Y) = - \\ m\varphi_r \cos(r,\, n) &= -m\varphi_r \sin\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2)$$



73. ábra.

A 166. §. (0) rendszerében felírtakon kívül itt még az összefüggés áll fenn [Kinematika 76. §. (4), 94. l.]:

$$\varrho = -r\frac{dr}{dp}, \quad \text{hol} \quad \sin\varepsilon = \frac{p}{r},$$

és a 73. ábra szerint r növekedésével p fogy, úgy hogy (2)-ből:

$$mv^2\frac{dp}{rdr} = m\varphi_r\frac{p}{r};$$

ezt (1)-el egyesítve:

$$v^2\frac{dp}{p} = \varphi_r dr = d\tfrac{1}{2}(v^2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

avagy:

$$\frac{d(v^2)}{v^2} = 2\frac{dp}{p},$$

$$v^2 = 2k^2p^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

hol $2k^2$ az integrátió állandója, mely csak *positiv* lehet; ez az összefüggés analog a 166. §. (3) egyenletéhez.

Egybekapcsolva (3)-at a (3a)-val, illetve $\sin\varepsilon = p:r$-el:

$$k^2p^2 = \tfrac{1}{2}v^2 = \int \varphi_r\, dr + \text{const.}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$v^2 = 2k^2r^2\sin^2\varepsilon\,^* \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

1. Ha φ_r csak r-től függ, akkor $\int \varphi_r(r)\, dr = \Phi(r)$ és (4)-ből

$$\tfrac{1}{2}v^2 = k^2p^2 = \Phi(r) + \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

* A 169. §. (6) alatti tétele, hogy a brachystochronán mozgó pont sebessége $\sin\varepsilon$-al arányos, csak párhuzamos erőre nézve áll, v. ö. a köv. §-ot.

a pálya egyenlete. Ebben pl. p kifejezhető

$$p=r\sin\varepsilon=r\,.\,r\,d\vartheta:ds=r^2d\vartheta:\sqrt{(rd\vartheta)^2+(dr)^2}$$

segélyével s így (5) a görbének polárcoordinátákban kifejezett differentiálegyenlete:

$$k^2r^4\,(d\vartheta)^2=[\Phi(r)+c]:[r^2\,(d\vartheta)^2+(dr)^2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5a)$$

$$d\vartheta=\frac{\sqrt{\Phi(r)+c}}{r\sqrt{k^2r^2-\Phi(r)-c}}\,dr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

A gyök alatti kifejezésnek *reális*nak kell lennie.

Jegyzet. A (6) az s és az r közötti összefüggéssé transformálható, ha (5a)-ban $r^2(d\vartheta)^2+(dr)^2=(ds)^2$-et írunk:

$$k^2r^2\,[(ds)^2-(dr)^2]=[\Phi(r)+c]\,(ds)^2,$$

miből:

$$ds=\frac{krdr}{\sqrt{k^2r^2-[\Phi(r)+c]}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

2. Ha $\varphi_r(r)=Kr^n$, akkor

$$\Phi(r)=\frac{K}{n+1}\,.\,r^{n+1}.$$

A (6) integrálható, ha $n=1$, $=0$, $=-2$; ezenkívül csak akkor, ha $c=0$, azaz, ha (4) szerint a sebesség négyzetében állandó tag nem fordul elő; az eredő görbe ezeken kívül a c és a K előjelétől (vonzó-e vagy taszító-e a gyorsulás) függ. V. ö. a 236. §. 34—38, 42. feladatait.

174. §. *A brachystochrona egyenlete párhuzamos erőkre nézve.* Legyen $m\varphi(y)$ annak az erőnek törvénye, mely az X-tengelyre merőleges irányban hatva, csak az X-től való y távolság függvénye; a görbe ez XY síkban feküdjék, 74. ábra. s így $X=0$; $Y=m\varphi(y)$.

A 169. §. (3) egyenlete itt, mint a megelőző §. (2):

$$mv^2=-\varrho\,(\lambda X+\mu Y)=+m\varrho\varphi(y)\sin\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Itt ε az Y tengely és a mozgás iránya közötti szög; továbbá a görbe domború oldala az erő positiv iránya felé néz; ekkor

$$-\mu=-\frac{dx}{ds}=\sin\varepsilon.$$

Ámde az eleven erő tétele, az (1) egyenlet s í. t.:

$$d(v^2)=2\varphi(y)\,dy\,; \qquad \tfrac{1}{2}v^2=\int\varphi(y)\,dy+c=\Phi(y)+c.$$

$$v^2=+\varrho\varphi(y)\sin\varepsilon=\left\{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3:\frac{d^2y}{dx^2}\right\}.-\frac{dx}{ds}\,\varphi(y)=v^2\,;$$

$$v^2\,\frac{d^2y}{dx^2}=-\left(\frac{ds}{dx}\right)^3\varphi(y)\,\frac{dx}{ds},$$

vagy dy-al szorozva:

$$\tfrac{1}{2}v^2 d\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = -\,d\left(\tfrac{1}{2}v^2\right)\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\};$$

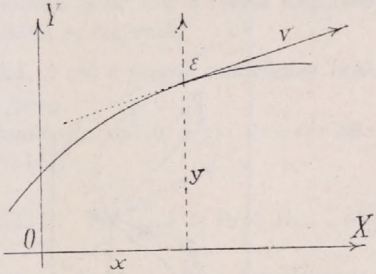
$$d\left(\tfrac{1}{2}v^2\right) : \tfrac{1}{2}v^2 = -d\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] : \left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\};$$

$$\lg \tfrac{1}{2}v^2 = -\lg\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} + \text{const.}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

azaz, tekintettel a $\sin\varepsilon$-ra s ha $lg\, z^2$ a const.,

$$v^2 = 2z^2 \sin^2\varepsilon, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

mely a 171. §. (3) és a 169. §. (6) tételével egyező.



74. ábra.

A v^2-ot y-ban kifejezve, (2)-ből

$$[\Phi(y)+c]\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} = z^2;$$

$$dx = \frac{\sqrt{\Phi(y)+c}}{\sqrt{z^2-[\Phi(y)+c]}}\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

V. ö. a 236. §. 41, 43. feladatait.

3) Anyagi pontmozgás előírt mozgó sima pályákon.

175. §. *Sík, sima belsejű, síkjában lévő tengely körül forgó csőben történő mozgás differentiálegyenletei. Egyszerű esetek.*

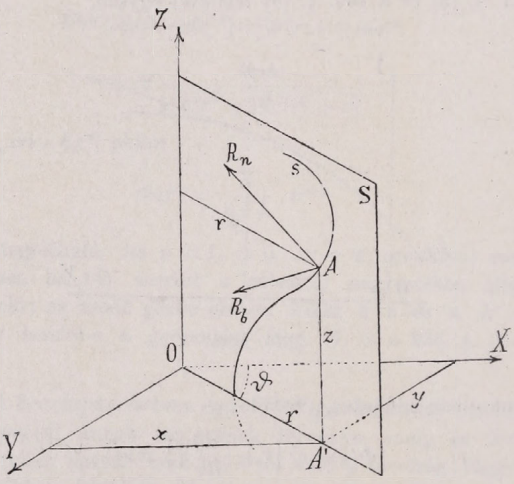
Oly általánosabb esetet tárgyalunk, mely számos érdekes speciális problémát tartalmaz.

A forgás tengelye a coordináták Z tengelye legyen, 75. ábra, köv. l.; ϑ a görbe (cső középvonalának) síkja és a szilárd XOZ sík közötti szög; r a görbe tetszőleges A pontjának a Z-től való távolsága; e szerint, 75. ábra, az r, ϑ hengercoordináták és a z határozzák meg a csőben mozgó gömböcske helyét.

Az 58. §. általános mozgásegyenleteinek alkalmazása semmiféle nehézséggel, de nagy hoszszadalmassággal jár; ezért egy rövidebb [már a Kinematika 371. §-a 46. feladatában, 643. l., körvonalozott eljárást fogunk követni.

a. Az effectív (gyorsító) erő a P független és az R kényszererőből tévődik összse.

Az elsőnek az r, a növekvő ϑ s a z-menti componensei P_r; P_ϑ; P_z. Az utóbbi két részből áll: az egyik a cső forgásától független s már a nyugvó csőre fennálló R_{n_1} kényszerből áll, mely e görbe mindenkori



75. ábra.

[az AOZ síkban fekvő] normálisa mentén fekszik; a másik része a cső *forgása* folytán lép fel; az utóbbinak egyik componense a centrifugális erőnek a cső hoszszelemére merőleges összetevőjének ellenhatása R_{n_2}, mely szintén a görbe mindenkori normálisa mentén fekszik, míg másik összetevője R_b megakadályozza, hogy az m a cső síkjából eltávozzék, s így e síkra mindig merőleges.

E szerint az R kényszererőnek $R_n = R_{n_1} + R_{n_2}$ a normális, R_b a binormális componense; miután a ds az r-rel, illetve a z-vel $dr : ds$, illetve $dz : ds$ irányocosinusokat képez: az R_n, mely ds-re az AOZ síkban merőleges, az r-rel $-dz : ds$, a z-vel $+dr : ds$ irányocosinusokat képez, ezenkívül R_n a növekvő ϑ-k irányára merőleges; végre R_b a cső binormálisába esik és a forgás irányával egyező vagy ellenkező irányú lehet.

b. Az effectiv erő megfelelő componensei dynamikai kifejezéseit 34. §. (0) és (3*a*)] a fent részletezett erők megfelelő összetevői összegével egyenlővé téve, nyerjük e mozgás egyenleteit:

$$m\left\{\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\}=P_r-R_n\frac{dz}{ds}\;;\qquad \frac{m}{r}\;\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right)=P_\vartheta+R_b\;;\qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=P_z+R_n\frac{dr}{ds}\Bigg\}\quad\ldots(1)$$

Ezekhez még a görbe egyenlete $r=F(z)$, és a forgás törvénye, ugyanis $\vartheta=f(t)$ adott függvény járulnak:

$$r=F(z)\;;\qquad \vartheta=f(t)\;\ldots\ldots\ldots

Ezen esetben (76. ábra):

$$P_r=+mg\sin\vartheta\,;\qquad P_\vartheta=+mg\cos\vartheta\,;\qquad P_z=0\,;\qquad \vartheta=\omega t\,;\qquad z=\text{constans},$$

miáltal (3)-ból:

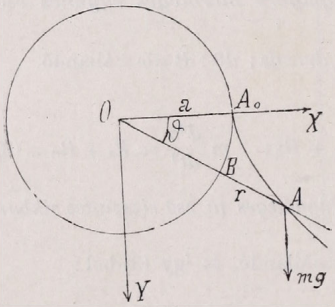
$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\omega^2=g\sin\omega t,\qquad 2m\frac{dr}{dt}\omega=mg\cos\omega t+R_b\,;\qquad 0=0+R_n\,;\quad (7)$$

hol $t=0$-kor $\vartheta=0$, azaz a cső vízszintes.

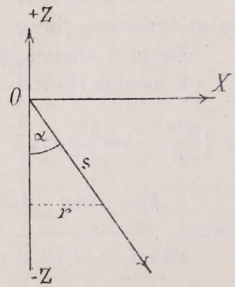
Az első egyenlet teljes megoldása [pl. a parameterek variátiója módszerével, Kinematika 125. §. Jegyzete 232. lap és Math. Rep. 111. §. 16. formula 139. l.]:

$$r=a_1e^{+\omega t}+a_2e^{-\omega t}+\frac{g}{2\omega}\left\{e^{+\omega t}\int e^{-\omega t}\sin\omega t dt-e^{-\omega t}\int e^{+\omega t}\sin\omega t dt\right\};$$

$$r=a_1e^{+\omega t}+a_2e^{-\omega t}-\frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t.$$



76. ábra.



77. ábra.

Ha itt is a kezdő-állapot: $t=0$-kor $r=a$ és $dr:dt=0$, akkor:

$$a=a_1+a_2\,;\qquad 0=\omega(a_1-a_2)-\frac{g}{2\omega},$$

úgy hogy

$$r=\tfrac{1}{2}a\,(e^{+\omega t}+e^{-\omega t})+\frac{g}{4\omega^2}\left\{e^{+\omega t}-2\sin\omega t-e^{-\omega t}\right\}\quad .\quad .\quad .\quad (8)$$

Továbbá (7)-ből és (8)-ból:

$$R_n=0\,;\quad R_b=ma\omega^2\,(e^{+\omega t}-e^{-\omega t})+\tfrac{1}{2}mg\,(e^{+\omega t}+e^{-\omega t}-4\cos\omega t)\,;\quad (9)$$

mely kifejezések további értelmezését az olvasóra bízzuk.

2. *Második főeset: Egyenes cső vertikális tengely körül egyenletesen forogva kúpot ír le.*

Legyen α a csőnek a vertikálishoz való hajlása; itt $dz:ds=-\cos\alpha$; $dr:ds=+\sin\alpha$; $d\vartheta:dt=\omega=$állandó; $P_r=P_\vartheta=0$; $P_z=-mg$, 77. ábra; ezáltal az (1)-ből:

$$\left.\begin{aligned} m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2\right) &= R_n \cos\alpha\,; \qquad 2m\frac{dr}{dt}\omega = R_b\,; \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= -mg + R_n \sin\alpha. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Ha még s-et és z-t a kúp csúcsától számítjuk, $r = s\sin\alpha$; $z = -s\cos\alpha$; szorozva e szerint a (10) első egyenletét $\sin\alpha$-, a harmadikát $\cos\alpha$-val és megjegyezve, hogy α állandó és hogy $r\sin\alpha - z\cos\alpha = s$, a két egyenlet különbsége:

$$m\left(\frac{d^2s}{dt^2} - s\,.\,\omega^2\sin^2\alpha\right) = mg\cos\alpha, \quad \text{avagy írva} \quad s + \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} = u,$$

$$u'' - \omega^2\sin^2\alpha\,.\,u = 0\,; \qquad u = a_1 e^{+\omega t\sin\alpha} + a_2 e^{-\omega t\sin\alpha}.$$

Ha a kezdő állapot $t=0$, $s=a$, $ds:dt=0$, akkor

$$a = -\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} + a_1 + a_2\,; \qquad 0 = a_1 - a_2\,;$$

$$s = \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\right)\left(e^{+\omega t\sin\alpha} + e^{-\omega t\sin\alpha}\right) - \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\mu}\,. \quad . \quad (11)$$

Irva $r = s\sin\alpha$; $z = -s\cos\alpha$, (10)-ből némi számítással:

$$R_n = m\sin\alpha\,(g - \omega^2 s\cos\alpha)\,;$$

$$R_b = 2m\omega s'\sin\alpha = m\,(\omega^2 a\sin^2\alpha + g\cos\alpha)\,\left(e^{+\omega t\sin\alpha} - e^{-\omega t\sin\alpha}\right) \quad (12)$$

176. §. *Folytatás: A cső vertikális kör, mely függélyes átmérője körül egyenletesen forog. Részletezés.*

I. Egyszerűsítés szempontjából válaszszuk a positiv Z-tengelyt függőlegesen *lefelé* irányítottnak; a 78. ábra szerint, köv. l.:

$$a^2 = r^2 + z^2\,; \quad \vartheta = \omega t\,; \quad s = a\eta\,; \quad r = a\sin\eta\,; \quad z = a\cos\eta\,; \quad \omega = \text{constans}.$$

A 175. §. (1) egyenletei itt:

$$\left.\begin{aligned} m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2\right) &= P_r - R_n\sin\eta\,; \qquad 2m\frac{dr}{dt}\omega = P_\vartheta + R_b\,; \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= P_z - R_n\cos\eta. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (1)$$

Szorozva az első egyenletet $\cos\eta$-, a másodikat $\sin\eta$-val, különbségük:

$$m\left\{\cos\eta\,\frac{d^2a\sin\eta}{dt^2} - a\omega^2\sin\eta\cos\eta - \sin\eta\,\frac{d^2a\cos\eta}{dt^2}\right\} = P_r\cos\eta - P_z\sin\eta.$$

Ámde:

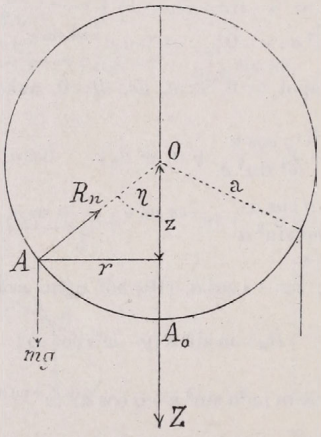
$$\frac{d^2 \sin\eta}{dt^2} = + \frac{d}{dt}\left(\cos\eta \frac{d\eta}{dt}\right) = - \sin\eta \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \cos\eta \frac{d^2\eta}{dt^2};$$

$$\frac{d^2 \cos\eta}{dt^2} = - \frac{d}{dt}\left(\sin\eta \frac{d\eta}{dt}\right) = - \cos\eta \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - \sin\eta \frac{d^2\eta}{dt^2};$$

ezek felhasználásával:

$$ma\left\{\frac{d^2\eta}{dt^2} - \omega^2 \sin\eta \cos\eta\right\} = P_r \cos\eta - P_z \sin\eta, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

mely az η és t között fennálló differentiálegyenlet.



78. ábra.

Legyen csak a földnehézség a független erő:
Akkor $P_r=0$; $P_\vartheta=0$, $P_z=mg$ és így (2)-ből

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} - \omega^2 \sin\eta \cos\eta + \frac{g}{a} \sin\eta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

A (3) első integrálja $2d\eta$-val való szorzás útján:

$$\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \omega^2 \cos^2\eta - \frac{2g}{a} \cos\eta = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

hol c az integrátió állandója.

A (4) itt az eleven erő elvének kifejezése; ez maga, valamint további tárgyalása, nagy analokiát mutat a nyugvó előírt körpályán történő mozgáséihoz, 156. §.

Szorozva (4)-et a^2-tel és $v=a\,(d\eta : dt)$-tel jelelve az m sebességét a csőben:

$$v^2 = -a^2\omega^2 \cos^2\eta + 2ag \cos\eta + a^2 c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

II. A mozgás további tanulmányozására írjuk a (4)-et:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 &= \frac{c}{\omega^2}+\frac{2g}{a\omega^2}\cos\eta-\cos^2\eta=(\varrho_1-\cos\eta)\ (\cos\eta-\varrho_2)\,; \\ \varrho_1\varrho_2 &= -\frac{c}{\omega^2}\,; \qquad \varrho_1+\varrho_2=\frac{2g}{a\omega^2}\,; \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

és ϱ_2 s ϱ_1 azok a gyökértékek, melyeket, ha $\cos\eta$ felvesz, az (5) jobb oldalát zérussá teszik; a bal oldal, s így a jobb oldal is, negativ nem lehet. Az (5) reductióját elliptikus integrálokra lásd alább III. alatt. A ϱ_1 és ϱ_2 értékeitől függ a mozgás természete; ugyanis, az (5) első egyenletének bal oldala csak úgy maradhat mindig positiv,

$$\left.\begin{aligned} &\text{ha:} \\ 1)\quad &\varrho_1 \geqq +1\,; \qquad \varrho_2 \leqq -1\,; \quad \text{ekkor} \quad +\infty > \eta > -\infty\,; \\ &\text{vagy, ha:} \\ 2)\quad &\varrho_1 \geqq +1\,; \quad +1 > \varrho_2 > -1\,; \quad \text{ekkor} \quad 1 \geqq \cos\eta \geqq \varrho_2\,; \\ &\text{vagy, ha:} \\ 3)\quad &+1 > \varrho_1 > -1\,; \quad +1 > \varrho_2 > -1\,; \quad \text{ekkor} \quad \varrho_1 \geqq \cos\eta \geqq \varrho_2\,. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

1. Az *első alesetben* a v sebesség sehol sem zérus, e szerint *az m egy irányban folytonosan futja be a kör-csövet;* ha v_0 az $\eta=0$ *legmélyebb-*, és v_π az $\eta=\pi$ *legmagasabb* helyzetben a sebesség, a (4*a*)-ból:

$$v_0^2 = -a^2\omega^2+2ag+a^2c\,; \qquad v_\pi^2 = -a^2\omega^2-2ag+a^2c\,;$$

illetve:

$$v_\pi^2 = v_0^2-4ag\,;$$

e szerint itt $v_0^2 > 4ag$, azaz nagyobb mint a $2a$ átmérőnek megfelelő esési sebesség.

Eliminálva c-t v_0-lal, a (4*a*) írható:

$$v^2 = v_0^2-4a\sin^2\tfrac{1}{2}\eta\,(g-a\omega^2\cos^2\tfrac{1}{2}\eta)\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

A v^2 maximumát s minimumát a (4*a*)-ból

$$\frac{d\,(v^2)}{d\eta} = -\,2a\sin\eta\,(g-a\omega^2\cos\eta)=0$$

egyenlet nyújtja, mely kielégíthető az

$$1)\quad \sin\eta=0 \qquad \text{és a} \qquad 2)\quad a\omega^2\cos\eta=g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

feltételekkel. Az első $\eta=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots$ -t azaz a $v_0,\ v_\pi,\ v_0,\ v_\pi$ sebességeket szolgáltatja. A második feltétel csak addig szolgáltat reális η-át, míg $a\omega^2 \geqq g$; e feltételből képezve az

$$a\omega^2\sin^2\tfrac{1}{2}\eta = \tfrac{1}{2}(a\omega^2-g) \quad \text{és} \quad a\omega^2\cos^2\tfrac{1}{2}\eta = \tfrac{1}{2}(a\omega^2+g)$$

értékeket és ezeket (7)-be helyettezve, némi rövidítéssel:

$$v_{max}^2 = v_0^2 + \frac{(a\omega^2 - g)^2}{\omega^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

s így az $\eta = \arccos [g : a\omega^2]$ helyzetben fellépő e sebesség *maximum*, mely a vertikális két oldalán symmetrikusan fellép; e kettő között a v_0 a *nagyobb*, v_π a *kisebb minimum*. Ha $a\omega^2 = g$, akkor e maximum a legmélyebb helybeli v_0-lal esik egybe; ha $a\omega^2 < g$, e maximum megszünik és v_0 a maximum, v_π a minimum.

2. *A második alesetben* a (6) egyenlőtlenségek 2) viszonyai értelmében az $d\eta : dt$ sebesség forduló pontja $\eta = \pm e$ helyen van, hol (5) s (6) szerint $\cos e = \varrho_2$, míg $\eta = 0$-helyen $v = v_0$. Itt az m a *legmélyebb hely körül e amplitudóval oscillál*. Irva (7)-be $v = 0$, $\eta = e$, belőle:

$$v_0^2 = 4a \sin^2 \tfrac{1}{2} e \, (g - a\omega^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} e),$$

hol $v_0^2 \leqq 4ag$. Az egyenletet $\sin^2 \frac{1}{2} e$-re megfejtve:

$$2a\omega^2 . \sin^2 \tfrac{1}{2} e = (a\omega^2 - g) \pm \sqrt{v_0^2\omega^2 + (a\omega^2 - g)^2}, \quad (10)$$

hol a két előjel közül, a *felső* érvényes és $\sin^2 \frac{1}{2} e$ csak addig reális, míg

$$2a\omega^2 \geqq a\omega^2 - g + \sqrt{v_0^2\omega^2 + (a\omega^2 - g)^2}.$$

Másrészt, a (4*a*)-t alkalmazva $\eta = e$ s $v = 0$-ra, belőle:

$$v^2 = 2ag \, (\cos \eta - \cos e) - a^2\omega^2 \, (\cos^2 \eta - \cos^2 e);$$
$$v^2 = a \, (\cos \eta - \cos e) \, \{2g - a\omega^2 \, (\cos \eta + \cos e)\}. \quad \ldots \quad (11)$$

Miután e az η legnagyobb értéke, a $\cos \eta - \cos e$ *positiv* s így (11-ből

$$2g - a\omega^2 \, (\cos \eta + \cos e) > 0,$$

és pedig, mivel itt még $\eta = 0$ is lép fel, ez az egyenlőtlenség:

$$2g - a\omega^2 \, (1 + \cos e) > 0,$$
$$2g - 2a\omega^2 + 2a\omega^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} e > 0, \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

avagy a (10) segélyével

$$g - a\omega^2 + \sqrt{v_0^2\omega^2 + (a\omega^2 - g)^2} > 0, \quad \ldots \ldots \quad (12a)$$

melyből $v_0^2 > 0$ következik.

A v maximumát a (4*a*)-ből vagy a (11)-ből itt is a (9) adja meg.

3. *A harmadik alesetben* a (6) egyenlőtlenségek 3) feltételei szerint az η nem lehet zérus vagy π, hanem a $\cos e_1 = \varrho_1$ és $\cos e_2 = \varrho_2$ meghatározta e_1 és e_2 határok között ingadozik, hol $\varrho_1 > \varrho_2$, $e_1 < e_2$ és így az m a *vertikálisnak egy oldalán fekvő félkörben oscillál föl és alá*. Ezen esetben v_0-nak nincs értelme, és az (5) az $\eta = e_1$ és $\eta = e_2$-re nézve zérust ád s így (4*a*)-ból az ac^2-t az e_1-val eliminálva:

$$v^2 = a \, (\cos \eta - \cos e_1) \, \{2g - a\omega^2 \, (\cos \eta + \cos e_1)\} \quad \ldots \quad (13)$$

Az $\eta=e_1$ az első tényezőt enyészteti el, a másodikat a

$$2g-a\omega^2(\cos e_2+\cos e_1)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

feltétel, melyben $\varrho_2=\cos e_2<+1$ lévén:

$$2g-a\omega^2(1+\cos e_1)<0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14a)$$

A sebesség maximumát a (4*a*)-ból vagy a (13)-ból is a (8)-nak $a\omega^2\cos\eta=g$ feltétele adja; segélyével nyerjük

$$v^2_{max}=\frac{(g-a\omega^2\cos e_1)^2}{\omega^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

III. *A mozgás-egyenlet transformátiója elliptikus integrálok segélyével.*

1. Irva az *első alesetben* (5)-ben

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\eta=\sqrt{\frac{\varrho_1-1}{\varrho_1+1}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16_1)$$

a helyettezés végrehajtása után:

$$\tfrac{1}{2}\omega dt\sqrt{(\varrho_1+1)(1-\varrho_2)}=\frac{\frac{1}{2}d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{1}{2}\xi}}; \qquad k^2=\frac{2(\varrho_1-\varrho_2)}{(\varrho_1+1)(1-\varrho_2)} \quad (17_1)$$

első fajú elliptikus integrál adódik.

Az $\frac{1}{2}T$ időre nézve, mely alatt m az $\eta=0$-tól $\eta=\pi$-ig a félkört befutja, áll:

$$\tfrac{1}{2}T=\frac{2K(k,\,\frac{1}{2}\pi)}{\omega\sqrt{(\varrho_1+1)(1-\varrho_2)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18_1)$$

2. Irva *a második alesetben* (5)-ben:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\eta=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}e\,.\cos\tfrac{1}{2}\xi; \qquad \varrho_2=\cos e, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16_2)$$

a helyettezés végrehajtása adja:

$$\tfrac{1}{2}\omega dt\sqrt{2(\varrho_1-\varrho_2)}=\frac{\frac{1}{2}d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{1}{2}\xi}}; \qquad k^2=\frac{(\varrho_1+1)(1-\varrho_2)}{2(\varrho_1-\varrho_2)}, \quad . \quad . \quad (17_2)$$

ha t-t az $\eta=e$-től, azaz $\xi=0$-tól számítjuk. Ha $\frac{1}{2}T$ az $\eta=0$ és $\eta=e$ helyzetek között lefolyt idő, erre nézve:

$$\tfrac{1}{2}T=\frac{2K(k,\,\frac{1}{2}\pi)}{\omega\sqrt{2(\varrho_1-\varrho_2)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18_2)$$

3. Irva a *harmadik alesetben* $\varrho_1=\cos e_1$, $\varrho_2=\cos e_2$; $\varrho_1>\varrho_2$,

$$\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\eta=\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}e_2-(\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}e_2-\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}e_1)\sin^2\tfrac{1}{2}\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16_3)$$

Ennek alapján (5)-ből:

$$\tfrac{1}{2}\omega dt\sqrt{(\varrho_1+1)(1-\varrho_2)}=\frac{\frac{1}{2}d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{1}{2}\xi}};\qquad k^2=\frac{2(\varrho_1-\varrho_2)}{(\varrho_1+1)(1-\varrho_2)},\quad (17_3)$$

hol t-t az $\eta=e_2$-től, azaz $\xi=0$-től számítjuk. Az $\eta=e_1$ és $\eta=e_2$ határok között fekvő pálya befutására szükséges $\frac{1}{2}T$-időre nézve áll:

$$\tfrac{1}{2}T=\frac{2K(k,\frac{1}{2}\pi)}{\omega\sqrt{(\varrho_1+1)(1-\varrho_2)}}\quad\ldots\ldots\quad(18_3)$$

IV. Az *ellennyomások (kényszererők)* az (1) rendszer értelmében [$P_r=0$, $P_\vartheta=0$, $P_z=mg$ lévén]:

$$\left.\begin{aligned} &ma\left(\frac{d^2(\sin\eta)}{dt^2}-\omega^2\sin\eta\right)=-R_n\,.\sin\eta\,;\\ &2ma\omega\frac{d(\sin\eta)}{dt}=R_b;\qquad ma\frac{d^2(\cos\eta)}{dt^2}=mg-R_n\,.\cos\eta\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

Szorozva az elsőt $\sin\eta$-, a harmadikat $\cos\eta$-val, összegük, tekintetbe véve az I. pont kifejtéseit:

$$\left.\begin{aligned} &ma\left\{\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\omega^2\sin^2\eta\right\}+mg\cos\eta=R_n=m\left[ac+3g\cos\eta-a\omega^2\cos 2\eta\right]\\ &R_b=2ma^{\frac{1}{2}}\omega\cos\eta\left\{ac+2g\cos\eta-a\omega^2\cos^2\eta\right\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

Evvel e példa lényeges sajátságai elő vannak tüntetve.

177. §. *Egyenletesen forgó sima csőben a földnehézség egyedüli hatása alatt állandó sebességgel mozog az m; mily alakú a cső? Kétféle eljárás.*

I. A 175. §. (1) rendszerébe téve: $P_r=0$; $P_\vartheta=0$; $P_z=-mg$; $d\vartheta:dt=\omega=$ constans, és a Z tengelyt függőlegesen *felfelé* irányítva, az idézett egyenletrendszerből:

$$\left.\begin{aligned} &m\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\omega^2\right)=-R_n\,.\frac{dz}{ds};\\ &2m\frac{dr}{dt}\omega=R_b;\\ &m\frac{d^2z}{dt^2}=-mg+R_n\frac{dr}{ds}\,.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

A *cső síkjában* csak r *és* z a derékszögű két coordináta; ezek mentén *(a forgó síkban)* $\frac{d^2r}{dt^2}$ és $\frac{d^2z}{dt^2}$ a relativ gyorsulás componensei, melyekből, mivel $dr:ds$ és $dz:ds$ a ds-nek a forgó r és z irányokkal képezett szögek cosinusai: a s menti (tangentiális) gyorsulás:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d^2r}{dt^2}\cdot\frac{dr}{ds}+\frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{dz}{ds},$$

avagy, az (1) első és harmadik egyenlete felhasználásával:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \omega^2 r \frac{dr}{ds} - g\frac{dz}{ds}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

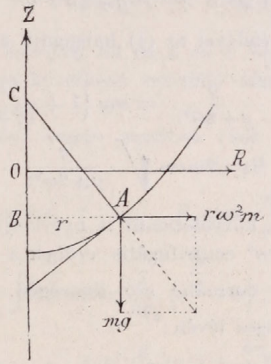
miből

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \omega^2 r^2 - 2gz + \text{constans}.$$

A feltétel pedig $ds : dt = állandó$, s így egyenletünk fellép az

$$r^2\omega^2 = 2gz + c, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

alakban, hol c állandó. A (3) tengelyével felfelé irányított oly *parabolát* jelent, melynek csúcsa $z_0 = -c : 2g$ távolságban van a z-k kezdete alatt



79. ábra.

II. Egyszerűen s közvetetlenül is nyerhetjük ezt az eredményt.

Ugyanis, 79. ábra, a $ds : dt$ sebesség állandó volta a $d^2s : dt^2$ tangentiális gyorsulás zérus értékét követeli és így a forgó RZ síkban a gyorsulásnak és ezért az e síkban ható összes erőknek is csak e síkban a csőre *normális* componense marad meg. Ez erők itt az $mr\omega^2$ centrifugális erő s az mg.

Az említett feltétel szerint ezek eredője a keresett pályára merőleges:

$$mr\omega^2 : mg = AB : BC = \text{ordináta} : \text{subnormális}.$$

De, itt $AB = r$ az ordináta,

$$\text{subnormális} = \frac{g}{\omega^2} = \text{constans}, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

a parabola jól ismert sajátsága. [Ugyanis, Math. Rep. 53, 54. §§., *subnormális* $= y \operatorname{tg} \alpha = y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d(y^2)}{dx}$; de $y^2 = 2px$, s evvel e tulajdonság be van bizonyítva].

III. Az *ellennyomások (kényszererők)* könnyen adódnak. Téve a z-k kezdetét a parabola csúcsába, s így (3)-ban $c=0$-át akkor rendre:

$$r^2\omega^2=2gz\,; \qquad dr=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{g}{2z}}\,dz\,;$$

$$ds=\sqrt{(dr)^2+(dz)^2}=\frac{dz}{\omega\sqrt{2z}}\sqrt{g+2\omega^2z}\,; \qquad \frac{dr}{ds}=\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g+2\omega^2z}}\,;$$

$$v=\frac{ds}{dt}\,; \quad \frac{dz}{dt}=\frac{v\omega\sqrt{2z}}{\sqrt{g+2\omega^2z}}\,;$$

Ebből, mivel itt v állandó:

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{v^2\omega^2}{g+2\omega^2z}\left\{1-\frac{2\omega^2z}{g+2\omega^2z}\right\}=\frac{v^2\omega^2g}{(g+2\omega^2z)^2}\,.$$

Ezek tekintetbe vételével az (1) harmadik és második egyenletéből:

$$\left.\begin{aligned} R_n\cdot\sqrt{\frac{g}{g+2\omega^2z}}&=mg\left\{1+\frac{v^2\omega^2}{(g+2\omega^2z)^2}\right\};\\ R_b&=2mv\omega\sqrt{\frac{g}{g+2\omega^2z}}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

Jegyzet. Az R_n-et közvetetlenül is nyerhetjük mint az mg-nek, a forgásból származó $mr\omega^2$ centrifugális erőnek a normális menti componenseik meg az $m\frac{v^2}{\varrho}$ normális erő összegét, melyek közül az első kettő egymásra merőleges lévén:

$$R_n=mg\,.\,\frac{dr}{ds}+mr\omega^2\,.\,\frac{dz}{ds}+m\frac{v^2}{\varrho}=[(mg)^2+(mr\omega^2)^2]^{\frac{1}{2}}+m\frac{v^2}{\varrho} \quad . \quad (6)$$

hol ϱ a parabola görbületi sugara, mely itt [Math. Rep, 64. §. (15)]. $\varrho=\pm p^{-2}(p+r^2)^{\frac{3}{2}}$, hol $p=g:\omega^2$. Az eredmény megegyezik (5)-tel.

4) Surlódó pontmozgás előírt szilárd pályán.

178. §. *Surlódó pontmozgás. I. Külső erők nem hatnak. Egyszerű esetek: sik görbék, állandó görbületi görbék, logarithmikus csigagörbe.*

I. Irva $X=Y=Z=0$, az 50. §. (2) egyenletrendszere:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-k\sqrt{R_n^2+R_b^2}\,; \qquad m\frac{v^2}{\varrho}=R_n\,; \qquad 0=R_b \quad \ldots \quad (1)$$

A kényszererő itt $R_n\sqrt{1+k^2}$, mely az osculáló síkban fekszik, i. h. Az első két egyenlet egyesítése:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-k\frac{v^2}{\varrho} \quad \ldots \quad (2)$$

Ámde:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} = -k\frac{v^2}{\varrho}, \quad \frac{dv}{ds} = -k\frac{v}{\varrho};$$

$$\lg v = -k\int\frac{ds}{\varrho} - \text{const.}, \quad v = v_0 e^{-k\int\frac{ds}{\varrho}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

A ϱ ismert lévén: a v és s közötti összefüggés quadraturára van viszszavezetve, mely (1) szerint az R_n kényszererőt is adja.

Ia. *Sík* görbék esetében $ds = \varrho d\vartheta$, hol ϑ az érintő s valamely a síkban fekvő szilárd egyenes közötti szög; a (3)-ból:

$$v = v_0 e^{-k\vartheta}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

itt v_0 a $\vartheta = 0$ helyen (hol a pályaérintő a fix egyenessel párhuzamos) fellépő sebesség.

Térbeli görbéknél $ds = \varrho d\eta$, de itt a $d\eta$-k nem feküsznek egy síkban, hanem az egymásra következő osculáló síkokban, a mi az integrátiónál tekintetbe veendő.

II. *Állandó görbületi sugár* esetében (*kör* és *közönséges csavargörbe*):

$$\frac{ds}{dt} = v = v_0 e^{-\frac{ks}{\varrho}}; \qquad R_n = m\frac{v_0^2}{\varrho}e^{-\frac{2ks}{\varrho}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{1}{v_0}\int e^{\frac{ks}{\varrho}}\,ds = \frac{\varrho}{kv_0}\left\{e^{\frac{ks}{\varrho}} - 1\right\}; \\ s &= \frac{\varrho}{k}\lg\left(1 + \frac{kv_0}{\varrho}t\right); \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

ha $t = 0$ és $s = 0$ egymáshoz tartozók.

A *körnél* $\varrho = a =$ a sugár; v. ö. a 244. §. 102. feladatát. A *csavargörbénél*, ha $x = a\cos\vartheta$; $y = a\sin\vartheta$; $z = c\vartheta$ [160. §. (1); és *c.* pontja]: $\varrho = a + \frac{c^2}{a}$.

III. *Logarithmikus csigagörbe* egyenlete $r = ae^{\lambda\vartheta}$; itt az érintő és az r közötti szög állandóan $\frac{1}{2}\pi - \varepsilon$, úgy hogy, 59. ábra, a 159. §. bekezdése szerint: $ds = \varrho d\vartheta$; $ds = r\sqrt{1+\lambda^2}d\vartheta$, miáltal (3)-ból és folytatólagosan:

$$\frac{ds}{dt} = v = v_0 e^{-k\vartheta} = a\sqrt{1+\lambda^2}\cdot e^{\lambda\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dt}; \qquad s = \frac{a}{\lambda}\sqrt{1+\lambda^2}\,(e^{\lambda\vartheta} - 1);$$

$$t = \frac{a}{v_0}\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda+k}\,(e^{(\lambda+k)\vartheta} - 1);$$

$$s = a\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda}\left\{\left[\frac{v_0}{a}\cdot\frac{\lambda+k}{\sqrt{1+\lambda^2}}t + 1\right]^{\frac{\lambda}{\lambda+k}} - 1\right\}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

hol mindenütt $s = 0$, $\vartheta = 0$, $t = 0$ egymáshoz tartozók.

179 §. *Surlódó pontmozgás II. Nehéz pont surlódó mozgása előírt egyenesen, körön, tautochron cycloison, verticális csavargörbén.*

A positiv Z tengelyt *lefelé* irányítva, a 50. §. (2) és (4) egyenletei:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=\gamma mg-k(R_n^2+R_b^2)^{\frac{1}{2}};\quad m\frac{v^2}{\varrho}=\nu mg+R_n;\quad O=hmg+R_b \quad . \quad (1)$$

A másodikat és harmadikat az elsővel egyesítve:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2s}{dt^2}&=g\left\{\gamma-k\left[\left(\frac{v^2}{g\varrho}-\nu\right)^2+h^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\};\\ \tfrac{1}{2}mv^2&=mgz-k\int\sqrt{R_n^2+R_b^2}\,ds+\text{constans.}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Itt a γ, a ν, a h a pálya érintője, normálisa és binormálisa s a Z tengely közötti szögek iránycosinusai, mely három irány egymásra merőleges lévén: $\gamma^2+\nu^2+h^2=1$.

Sík pálya esetében az egyenletek egyszerűsödnek; a h állandó s a pálya-síknak a vízszintessel való hajlásának sinus-négyzete:

$$\gamma^2+\nu^2=1-h^2=\text{állandó}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Sík vertikális pálya esetében

$$h=0;\quad \nu^2=1-\gamma^2;\quad \frac{d^2s}{dt^2}=g\left\{\gamma-k\left(\frac{v^2}{g\varrho}-\sqrt{1-\gamma^2}\right)\right\} \quad . \quad . \quad (4)$$

Sík vízszintes pálya esetében

$$h=\pm 1;\quad \gamma=\nu=0;\quad \frac{d^2s}{dt^2}=-gk\sqrt{\frac{v^4}{g^2\varrho^2}+1} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

1. *A pálya vízszintes egyenes.* Az (5) és (1)-ből marad:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-kg;\quad R_n=0;\quad R_b=-mg;$$

$$v=p-kgt;\quad s=q+pt-\tfrac{1}{2}kgt^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

p és q az integrátió állandói lévén. A mozgás egész tartama T s a befutott egész l úthoszsz a $v=0$, $t=T$, $s=l$ feltételből ered:

$$T=\frac{p}{kg};\quad l=q+\tfrac{1}{2}\frac{p^2}{kg}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

A mozgás a függélyesen felfelé hajított test szabad mozgásával egyezik meg, ha a gyorsulás nem g, hanem kg volna.

2. *A pálya a vízszinteshez α hajlású egyenes.*

Az s ívet O-tól felfelé s a v-t is ezen irányban számítva positivnek, az (1) rendszerből marad (80*a* és 80*b* ábrák):

$$\gamma=-\sin\alpha;\quad \nu=-\cos\alpha;\quad h=0;\quad R_n=mg\cos\alpha;\quad R_b=0;$$

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-mg\{\sin\alpha\mp k\cos\alpha\}=\text{constans},$$

hol a *felső* vagy az *alsó* előjel érvényes a szerint, a mint az m *lefelé* vagy *felfelé* halad.

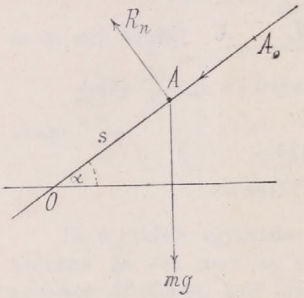
a) Elbocsátva m-et $t=0$-kor $s=q$ helyen:

$$v=-g(\sin\alpha-k\cos\alpha)t\,;\quad s=q-\tfrac{1}{2}g(\sin\alpha-k\cos\alpha)t^2\ .\ .\quad (8a)$$

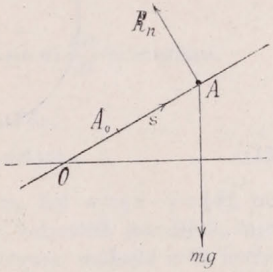
b) Felfelé indítva az m-et $t=0$-kor $s=q$ helyről v_0 sebességgel

$$v=v_0-(g\sin\alpha+k\cos\alpha)t\,;\quad s=q+v_0t-\tfrac{1}{2}g(\sin\alpha+k\cos\alpha)t^2\ .\quad (8b)$$

A pont a lejtős egyenesen nyugalomban marad, vagy egyenletes sebességgel halad lefelé, ha α hajlásszög értéke olyan, hogy $\operatorname{tg}\alpha_0=k$;



80*a*. ábra.



80*b*. ábra.

e szög a k kisérleti meghatározására szolgál, mert ez a lejtő hajlásszögének azon legnagyobb értéke, melynél a reá helyezett pont, illetve gömböcske a föld nehézségi ereje és a sikló, illetve gördülő surlódás befolyása alatt még nyugalomban marad, míg e szögnek már csekély növelésénél a pont lefelé siklik, illetve a gömböcske lefelé gördül; v. ö. a 29. §-t.

3. *A pont vertikális síkú, felfelé homorú pálya homorú oldalán mozog.*

Írva, mint a 165. §. elején $s''=\frac{1}{2}d(v^2):ds$; legyen mint a 2. pontban α a görbe érintője és a vízszintes közötti szög, s a felfelé haladásnál növekvő ív; akkor a mozgás egyenlete:

$$ms''=-mg\sin\alpha\pm kR_n=-mg\sin\alpha\pm mk\left(\frac{v^2}{\varrho}+g\cos\alpha\right),$$

hol $\pm k$ helyébe a *lefelé* mozgásnál $+k$, a *felfelé* mozgásnál $-k$ teendő, míg ϱ a positiv görbületi sugár, mely itt $\varrho=ds:d\alpha$. E szerint

$$\frac{d(v^2)}{ds}\mp 2k\frac{d\alpha}{ds}v^2=-2g(\sin\alpha\mp k\cos\alpha),\quad .\ .\ .\ .\ .\ (9)$$

avagy:

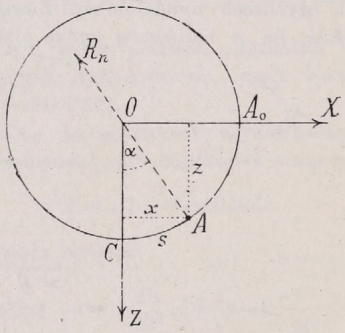
$$\frac{d(v^2)}{ds}+S_1 v^2=S; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

hol S_1 és S az s függvényei, mely egyenlet teljes megoldása [165. §. (2)]:

$$v^2=e^{-\int S_1 ds}\{\int S e^{+\int S_1 ds} ds+B\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

3*a*. *A pálya vertikális kör, m homorú oldalán mozog.* Ekkor, 81. ábra, rendre:

$$s=\overset{\frown}{CA} \text{ ív}; \quad \varrho=ds:d\alpha=a; \quad \alpha=s:a; \quad v=\cos(\pi-\alpha);$$



81. ábra.

$$R_b=0; \quad R_n=m\frac{v^2}{a}+mg\cos\frac{s}{a};$$

$$\frac{d(v^2)}{ds}\mp 2\frac{k}{a}v^2=-2g\left(\sin\frac{s}{a}\mp k\cos\frac{s}{a}\right);$$

$$v^2=e^{\pm 2\frac{k}{a}s}\left\{-2g\int e^{\mp 2\frac{k}{a}s}\left(\sin\frac{s}{a}\mp k\cos\frac{s}{a}\right)ds+B\right\}.$$

Az integrátiót elvégezve és A_0 kezdőhelyzetre nézve $CA_0=s_0$; $v=v_0$-t írva [Math. Rep. 111. §. 15. és 16. formulái] némi összevonással:

$$v^2-v_0^2=\left\{e^{\pm 2\frac{k}{a}s}\left[-2g\left\{\left(\mp\frac{2k}{a}\sin\frac{s}{a}-\frac{1}{a}\cos\frac{s}{a}\right)\mp\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\mp k\left(\mp\frac{2k}{a}\cos\frac{s}{a}+\frac{1}{a}\sin\frac{s}{a}\right)\right\}\frac{e^{\mp\frac{2k}{a}s}}{\frac{4k^2}{a^2}+\frac{1}{a^2}}+B\right]\right\}_{s_0}^{s};$$

$$v^2-v_0^2=\left\{Be^{\pm 2\frac{k}{a}s}-\frac{2a^2g}{1+4k^2}\left(\mp\frac{k}{a}(2+1)\sin\frac{s}{a}-\frac{1-2k^2}{a}\cos\frac{s}{a}\right)\right\}_{s_0}^{s};$$

$$v^2-v_0^2=\left\{Be^{\pm 2\frac{k}{a}s}-\frac{2ag}{1+4k^2}\left(\mp 3k\sin\frac{s}{a}-(1-2k^2)\cos\frac{s}{a}\right)\right\}_{s_0}^{s}.$$

A további számítás bonyolódott; de kicsiny k-kra nézve az s és t közötti összefüggés közelítőleg meghatározható; v. ö. a 244. §. 101. feladatát.

3*b*. Coulomb *törvénye szerinti surlódással mozgó nehéz pont tautochronája cyclois.*

A (10) mozgásegyenlet tautochronája feltételei a 165. §. (10) egyenlete értelmében, ha $s=0$ a tautochronismus pontja:

$$SS_1+2\frac{dS}{ds}=\text{constans};$$

továbbá [i. h. 3. pontja]: S az s-sel együtt tűnik el.

Jelen esetünkben a (9)-ből:

$$S_1=\mp 2k\frac{d\alpha}{ds}; \qquad S=-2g(\sin\alpha\mp k\cos\alpha),$$

és az első feltétel

$$\pm 4kg\frac{d\alpha}{ds}(\sin\alpha\mp k\cos\alpha)-4g(\cos\alpha\pm k\sin\alpha)\frac{d\alpha}{ds}=\text{constans},$$

avagy

$$-4g(1+k^2)\cos\alpha d\alpha=C^2ds;$$

$$s=4gC^{-2}(1+k^2)\sin\alpha+\text{constans} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Ez a cyclois egyenlete [161. §. 61. ábra, hol $\alpha=\frac{1}{2}\pi-\varepsilon=\frac{1}{2}\vartheta$], hol azonban az s-et nem az $\alpha=0$ legmélyebb helyzettől számítjuk, mert $s=0$-kor $S=O$-nak kell lennie és ez az összes működő erők hatása alatti egyensúlyi helyzet. Jelelje α^0 az $s=0$-hoz tartozó α szöget, akkor e feltétel szerint

lefelé mozgásnál $\operatorname{tg}\alpha^0=+k$; felfelé mozgásnál $\operatorname{tg}\alpha^0=-k$,

mely szerint (12)-ben

$$(1+k^2)\sin\alpha^0=\pm k\sqrt{1+k^2}$$

és így

$$s=\frac{4g}{C^2}(1+k^2)(\sin\alpha-\sin\alpha^0)=\frac{4g}{C^2}(1+k^2)\left(\sin\alpha\mp\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right) \quad . \quad (13)$$

Az $s=0$ egyensúlyi helyzettől számítva a legmélyebb pont s^0 ívtávolságát, melyhez $\alpha=0$ tartozik, (13)-ból:

$$s^0=\mp 4gC^{-2}k\sqrt{1+k^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

azaz: a tautochronismus pontja a lefelé való esésnél az elbocsátás helye és a görbe legmélyebb pontja között fekszik, míg a felfelé való mozgásnál az indítás s a legmélyebb hely között; ezen utóbbi esetben az indításnak mindig a legmélyebb pont felé kell irányulnia, v. ö, a 244. §. 103. feladatát.

4. *A pálya vertikális tengelyű csavargörbe,* melynek egyenletei:

$$x=a\cos\vartheta; \quad y=a\sin\vartheta; \quad z=ct$$

erre nézve [160. §. 3. pontja és Math. Repertórium 75. §. (4)]

$$\gamma=\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}; \quad \nu=0; \quad h=\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}; \quad \varrho=\frac{a^2+c^2}{a};$$

ezekkel a (2)

$$R_n=m\frac{av^2}{a^2+c^2}; \quad R_b=-mg\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{g}{\sqrt{a^2+c^2}}\left\{c-\frac{ka}{g\sqrt{a^2+c^2}}\left[g^2(a^2+c^2)+v^4\right]^{\frac{1}{2}}\right\}, \quad . \quad . \quad (15)$$

mely egyenlet elliptikus integrálokra vezet.

E görbe *vízszintes körré* fajúl, ha $c=0$; ekkor:

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{k}{a}\sqrt{g^2a^2+v^4}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

De ez is ily integrálokat szolgáltat.

c) *Eljárások és problémák meghatározott felületen haladó anyagi pont kényszermozgására.*

1) Anyagi pontmozgás előírt szilárd sima felületen.

180. §. *Anyagi pont a földnehézségi erő hatása alatt gömbfelület homorú oldalán mozog. Ideális gömbi inga mozgásának részletezése.*

Súlytalannak tekintett rúdon vagy kifeszíthetetlen fonálon függő pontszerű tömeg, melyre ható külső erő csak a földnehézség: gömbfelületen tartozik maradni s (mathematikai vagy ideális) *gömbi ingát alkot* [a megfelelő sík-inga mozgását l. a 156. és 157. §. példájában], t. i. azt, melynél az anyagi pont szabadon mozoghat szilárd pont körül.

[A következő kifejtések érvényesek oly physikai ingára nézve is, mely felfüggesztő fonala vagy sodronya körül symmetrikus szerkezetű (pl. forgási test), t. i. hogy a felfüggesztés helye körül bármily irányban lengve, tehetetlenségi nyomatéka egyenlő legyen].

A felület egyenlete [53. §. (17)]:

$$2F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-l^2=0=x^2+y^2-2\psi(z), \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$\frac{l}{a}$-gömb sugara lévén, 82. ábra.

Az n normálisa mindig a *középpont* felé lévén irányítva, irány-cosinusai:

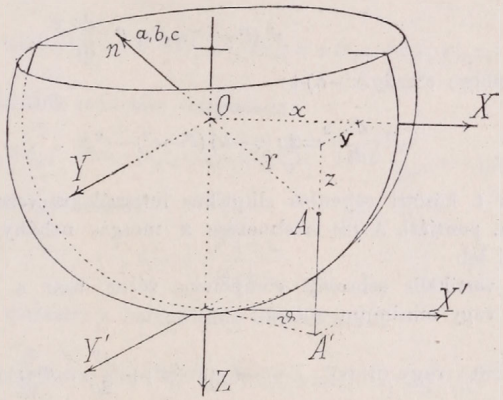
$$\cos(n, x)=-\frac{x}{l}; \quad \cos(n, y)=-\frac{y}{l}; \quad \cos(n, z)=-\frac{z}{l}.$$

A független erő componensei $X=0$, $Y=0$, $Z=mg$; az 53. §. (7) és (8) egyenletei:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-R\frac{x}{l}\ ;\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-R\frac{y}{l}\ ;\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=-R\frac{z}{l}+mg\ . \tag{2}$$

Az R kényszererőnek s az eleven erőnek kifejezése [u. o. (10) és (11)]

$$\left.\begin{aligned} R&=m\frac{v^2}{l}+mg\frac{z}{l}\ ;\\ v^2&=2g(z-h)\ ; \end{aligned}\right\},\quad \ldots\ldots\ldots \tag{3}$$



82. ábra.

hol $2gh$ az integrátió állandója; ezek egyesítéséből:

$$R=mg\frac{3z-2h}{l}, \quad \ldots\ldots\ldots \tag{4}$$

mely R a h állandó s a z variabilis különböző értéke szerint lehet positiv, negativ vagy zérus.

A h ugyanis lehet positiv, de lehet (különösen nagy sebességeknél) negativ is; legnagyobb lehetséges értékek $h=l$, legkisebb $h=-\infty$; továbbá $-l<z<l$, $z\geqq h$ az általános lehetséges közök, l. a $(9a)$-t.

A további eljárást vagy az 53. §. (19) rendszerére, vagy közvetetlenül a (2)-re alapíthatjuk. Az utóbbiból azonnal

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0;$$

azaz, a vízszintes síkra való vetületi mozgás kétszeres, itt állandó területi sebességét c-vel jelelve:

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=c. \quad \ldots\ldots\ldots \tag{5}$$

Másrészt az (1) differentiálja

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=-z\frac{dz}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

I. A *mozgás vertikális componense* meghatározására összegezzük az (5) és (6) négyzeteit és írjunk az összegben $x^2+y^2=l^2-z^2$, miáltal

$$(x^2+y^2)\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}=c^2+z^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

$$(l^2-z^2)\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}=c^2-(l^2-z^2)\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

$$v^2(l^2-z^2)=c^2+l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Téve ebbe: $v^2=2g(z-h)$-t:

$$l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=2g(z-h)(l^2-z^2)-c^2,* \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

mely z és t közötti egyenlet elliptikus integrálokra vezethető viszsza (l. e §. III. pontját). A (8) értelmezése a mozgás néhány fontos sajátságát deríti fel.

a) A vertikális sebességi componens zérus, azaz a z coordináta maximum vagy minimum, mikor:

$$\frac{dz}{dt}=0, \quad \text{vagy (8)-ból} \quad -(z-h)(l^2-z^2)+\frac{c^2}{2g}=\Phi(z)=0, \quad \ldots \quad (9)$$

mely egyenlet három gyökéről azonnal kimutatjuk, hogy reálisak.

Ugyanis helyettezve (9)-be z helyébe rendre $-\infty$, $-l$, z_0, $+l$ értéket, a Φ-ből rendre $-\infty$, $+\frac{c^2}{2g}$, $\Phi(z_0)$, $+\frac{c^2}{2g}$, hol z_0 oly érték, mely a (8) jobb-, s ezért bal oldalát is positivvá s így Φ-t *negativvá* teszi, mely e szerint a *tényleges* mozgás közben mindig felmerül.

Az érintett jelváltozások mutatják, hogy a $\Phi(z)=0$-nak három gyöke, z_1, z_2, z_3 a következő közökben fekszik:

$$-\infty<z_1<-l; \quad -l<z_2<z_0; \quad z_0<z_3<+l \quad \ldots \quad (9a)$$

Itt legyen még $z_1<z_2<z_3$ és z_1 mindenesetre negativ; a (8) írható:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=-\frac{2g}{l^2}\Phi(z)=-\frac{2g}{l^2}(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) \quad \ldots \quad (10)$$

A z a tényleges mozgás esetében csak oly értékeket vehet fel, melyek a bal s így a jobb oldalt is *positivvá* vagy zérussá teszik és a

* A (8)-at a (4)-nek a (2) harmadik egyenletével való egyesítése közvetetlenül is adja.

gömbben fekszenek. Így, ha z a z_1 és z_2 közötti közben fekszik, $z-z_1>0$ $z-z_2<0$, $z-z_3<0$; ekkor a (10) jobb oldala *negativ* s nem adhat positiv sebességnégyzetet hanem imaginárius sebességet. Ellenben, ha $z_2<z<z_3$, akkor $z-z_1>0$; $z-z_2>0$; $z-z_3<0$ s a jobb oldal *positiv;* ellenben a $z<z_1$ tér a (9a) első egyenlőtlensége értelmében a gömbön kívül fekszik.

E szerint *tényleges* mozgás csak a $z=z_2$ és $z=z_3$ közötti közben történhetik.

b) A z_1 gyökérték könnyen fejezhető ki z_2 és z_3 és az l vagy a $(c^2:2g)$ állandók segélyével. Kiszorozva ugyanis a (8) és (10) jobb oldalait és az $\frac{a^2}{2g}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$, e két értékeit egymással egyenlítve:

$$z^3-hz^2-l^2z+\left(hl^2+\frac{c^2}{2g}\right)=z^3-(z_1+z_2+z_3)\,z^2+(z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2)\,z-z_1z_2z_3.$$

Az együtthatók módszere értelmében:

$$h=z_1+z_2+z_3\,;\quad l^2=-(z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2)\,;\quad hl^2+\frac{c^2}{2g}=-z_1z_2z_3\,. \qquad (11a)$$

A középső egyenletből

$$z_1=-\frac{l^2+z_2z_3}{z_2+z_3}\,; \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (12a)$$

az első kettő szorzatát a harmadikba helyettesítve:

$$\frac{c^2}{2g}=(z_1+z_2+z_3)\,(z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2)-z_1z_2z_3\,. \qquad \ldots \qquad (12b)$$

c) A $v^2=2g\,(z-h)$ értelmében a sebesség a z_2 *legmagasabb* helyen a *legkisebb,* s a z_3 *legmélyebb* helyen a *legnagyobb;* ezen értékek, a (11a) első egyenlete tekintetbe vételével

$$v_2^2=2g\,(z_2-h)=-2g\,(z_1+z_3)\,;\quad v_3^2=2g\,(z_3-h)=-2g\,(z_1+z_2)\,;$$

e helyeken a v_z componens zérus lévén, a (7) egyenletből:

$$v_2^2\,(l^2-z_2^2)=c^2\,;\quad v_3^2\,(l^2-z_3^2)=c^2 \qquad \ldots\ldots \qquad (7a)$$

Továbbá, miután (9a) értelmében a z_2z_3 szorzat absolut értéke mindig kisebb az l^2-nél: a (12a)-nak számlálója mindig positiv; s miután még a z_1 mindig negativ, a (12a) követeli, hogy a z_2+z_3 mindig positiv legyen. E szerint a z_2 és z_3 közül csak az egyik és pedig mivel $z_2<z_3$, csak az első lehet negativ; de azért positiv is lehet, míg z_3 *okvetetlenül positiv;* azaz, bármilyen is legyen a gömbi inga mozgása: a *legmélyebb helye mindig a gömb alsó felében van;* de legmagasabb helye negativ z_2-nél a gömb felső-, positiv z_2-nél az alsó felében van.

II. *A mozgás vízszintes vetülete* meghatározására jeleljék, 82. ábra, r, ϑ e vetület polárcoordinátáit: $x=r\cos\vartheta$; $y=r\sin\vartheta$; miáltal (1)- és (5)-ből

$$r^2=l^2-z^2\,;\quad x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=r^2\frac{d\vartheta}{dt}=c\,;$$

$$d\vartheta=\frac{c\,dt}{l^2-z^2}\,;\quad\ldots\ldots\ldots\quad(18)$$

azaz, az r vetületi sugár *egy* irányban állandó $\frac{1}{2}c$ területi sebességgel forog a vertikális körül; ezekkel

$$x=\sqrt{l^2-z^2}\cos\left\{\int\frac{c\,dt}{l^2-z^2}+\vartheta_0\right\};\quad y=\sqrt{l^2-z^2}\sin\left\{\int\frac{c\,dt}{l^2-z^2}+\vartheta_0\right\}.\quad(14)$$

szóval: ha z mint a t függvénye ismeretes: az r és ϑ vagy x és y vízszintes coordináták quadraturákra vannak viszszavezetve.

III. *Az egyenletek kifejezése és értelmezése elliptikus integrálokkal.*

1. Miután a tényleges mozgásnál $z_2<z<z_3$, a (10) egyenletnek elsőfajú elliptikus integrálokra való transformálására itt a következő helyettezéssel élünk [V. ö. pl. Math. Repertórium 128. §-a első $2a$) kikezdését 165. lap]:

$$z=z_2\sin^2\varphi+z_3\cos^2\varphi=z_3-(z_3-z_2)\sin^2\varphi,\quad\ldots\ldots\quad(15)$$

melyhez $-z_2=-z_2$-t, illetve $-z_3=-z_3$-at adva, rendre nyerjük:

$$z-z_2=+(z_3-z_2)\cos^2\varphi\,;\quad z-z_3=-(z_3-z_2)\sin^2\varphi\,;\quad\ldots\quad(16a)$$

ezekből:

$$\frac{dz}{dt}=-2\,(z_3-z_2)\sin\varphi\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}\quad\ldots\ldots\quad(16b)$$

Helyettesítve a (10)-nek első, $z-z_1$ tényezőjébe a (15) jobb oldalát, második és harmadik tényezője helyébe a (16a)-kat és bal oldala helyébe (16b)-t, a (10)-ből:

$$4\,(z_3-z_2)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=$$

$$=+\frac{2g}{l^2}\,[-z_1+z_3-(z_3-z_2)\sin^2\varphi]\,(z_3-z_2)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi,$$

avagy

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{g}{2l^2}\cdot\{(z_3-z_1)-(z_3-z_2)\sin^2\varphi\}.$$

Rövidség kedveért írva

$$k^2=\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1},\quad\ldots\ldots\ldots\quad(17a)$$

hol a $z_1<z_2<z_3$ sorrendnél fogva k^2 mindig positiv,

$$dt=\frac{l}{\sqrt{g}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{z_3-z_1}}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\quad\ldots\ldots\quad(18)$$

Ha az időt a pálya legmélyebb, $z=z_3$ helyzetétől számítjuk (mely utóbbi általában véve nem a gömb legmélyebb pontja), akkor (18)-ból

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\sqrt{\frac{2l}{z_3-z_1}}\cdot F(k,\varphi);\quad \varphi=am\left(\frac{\sqrt{g(z_3-z_2)}}{l\sqrt{2}}t,k\right). \tag{19}$$

Jelelve $\frac{1}{2}T$-vel az időtartamot, mely alatt az m a $z=z_3$ legmélyebb helyzetből a $z=z_2$ legmagasabba érkezik, ez:

$$\tfrac{1}{2}T=\frac{l\sqrt{2}}{\sqrt{g(z_3-z_1)}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\sqrt{\frac{2l}{z_3-z_1}}K(k,\tfrac{1}{2}\pi)\ . \tag{20}$$

Összehasonlítva a (19) és (20) kifejezést a 157. §. (13) formulájával, kiderül, hogy (mathematikai) gömbi ingánál a t és φ közötti összefüggés és a lengés ideje (félperiodusa) egyenlő a síkban mozgó oly ideális ingáéval, melynek nem l, hanem $l.\frac{2l}{z_3-z_1}$ a hoszsza.

A (19) értelmében φ, s így (15) szerint a z is az *időnek periodikus függvénye.*

Jegyzet: Ha az m valamely időpillanatban vertikális legnagyobb kör mentén mozog, akkor (5) értelmében $c=0$ és így m e kört soha sem hagyhatja el; a mozgás a 156 és 157. §§. problémájára redukálódik.

2. A (13)-ban dt-t és z-t φ-vel helyettezve nyerjük a ϑ és φ közötti összefüggést, melyet harmadfajú elliptikus integrálokkal fejezhetjük ki.

E czélból (13) c-jét (12b)-vel állítjuk elő, ebbe (11a)-ből l^2-et, (12a)-ból z_1-et helyettezve:

$$\frac{c^2}{2g}=-\left(-\frac{l^2+z_2z_3}{z_2+z_3}+z_2+z_3\right)l^2+\frac{l^2+z_2z_3}{z_2+z_3}z_2z_3=\frac{(l^2-z_2^2)(l^2-z_3^2)}{z_2+z_3}\ . \tag{21}$$

Továbbá áll:

$$\frac{1}{l^2-z^2}=\frac{1}{2l}\left(\frac{1}{l+z}+\frac{1}{l-z}\right)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \tag{22}$$

Helyettezve (15)-ből z-t (13)-ba a (18), (22), (23) segélyével a (13)-ból nyerjük

$$d\vartheta=\frac{\sqrt{(l^2-z_2^2)(l^2-z_3^2)}}{\sqrt{(z_2+z_3)(z_3-z_1)}}\left\{\frac{1}{l+z_3-(z_3-z_2)\sin^2\varphi}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{l-z_3+(z_3-z_2)\sin^2\varphi}\right\}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}; \tag{23}$$

azaz, a ϑ s φ közötti összefüggés *harmadfajú* elliptikus két integrál összegére van viszszavezetve, melyek normál-alakja [Math. Rep. 125. §. 160. l.]:

$$\Pi(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+\lambda\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

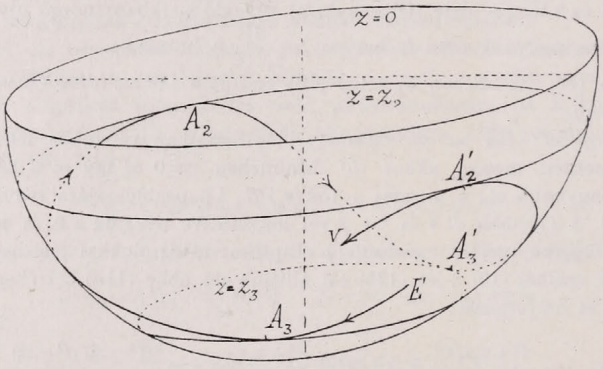
Miután a φ a t-nek, úgy ϑ a φ-nek és így a t-nek is *periodikus függvénye,* melynek periodusa a mozgás természete szerint ugyanaz, mint φ-é, illetve z-é.

I. *Jegyzet.* A *pálya vízszintes vetületének egy jellemző sajátsága* ugyanis, hogy az általában véve nem önmagába viszszatérő görbe.

E vetületi görbe r vezérsugarának maximuma- és minimumára nézve áll, 83*a*. és 83*b*. ábrák:

$$r_{max}^2 = r_2^2 = l^2 - z_2^2 ; \quad r_{min}^2 = r_3^2 = l^2 - z_3^2 ;$$

Az ezek közötti Θ szöget a (23)-ból az $\int_{z_3}^{z_2} d\vartheta$ vagy (15) szerint $\int_{\varphi=0}^{\frac{1}{2}\pi} d\vartheta$ határozott integrál adja; ez véges alakban nem állítható elő, de bizonyos



83*a*. ábra.

határok közé szorítható, mivel, tekintettel a (17*a*)-ra a (23) gyökmenynyiségének $\varphi=0$ és $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ melletti határai értelmében áll:

$$1 > \sqrt{1 - \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \sin^2\varphi} > \sqrt{\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

A Θ e szerint azon két határozott integrál értéke között fekszik, mely (23)-ból keletkezik, ha a gyökmenynyisége helyébe az egyik, illetve a másik határértéket helyettesítünk; ha rövidség kedveért

$$\Theta_0 = \sqrt{\frac{(l^2 - z_2^2)(l^2 - z_3^2)}{(z_2 + z_3)(z_3 - z_1)}} \left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{l + z_3 - (z_3 - z_2)\sin^2\varphi} + \right. \\ \left. + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{l - z_3 + (z_3 - z_2)\sin^2\varphi} \right] ; \quad . \quad (25)$$

a $\Theta = \int_{\varphi=0}^{\frac{1}{2}\pi} d\vartheta$ szögre nézve fennálló egyenlőtlenség:

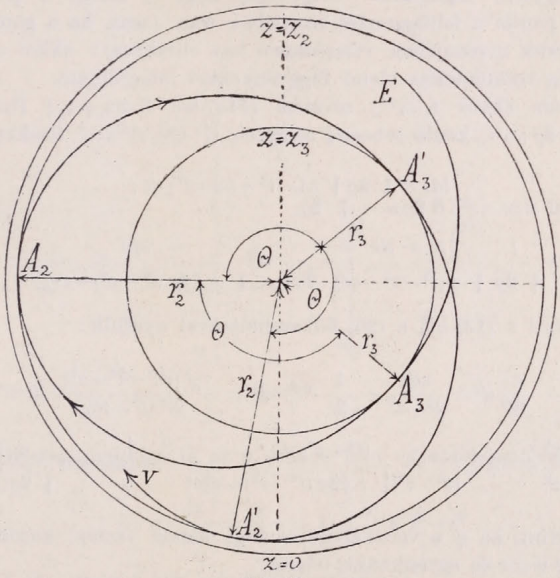
$$\Theta_0 < \Theta < \Theta_0 \sqrt{\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Ámde a (25) integráljai írhatók [Math. Rep. 110. §. 40. formula, 138. l.]

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{(l+z_3)\cos^2\varphi+(l+z_3)\sin^2\varphi} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{(l+z_3)(l+z_2)}};$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{(l-z_3)\cos^2\varphi+(l-z_2)\sin^2\varphi} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{(l-z_3)(l-z_2)}};$$

melynek a (25)-be való helyettezésével a (26)-ból:



83*b*. ábra.

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\pi\frac{\sqrt{(l+z_2)(l+z_3)}+\sqrt{(l-z_2)(l-z_3)}}{\sqrt{(z_2+z_3)(z_3-z_1)}} &< \Theta; \\ \Theta &< \tfrac{1}{2}\pi\frac{\sqrt{(l+z_2)(l+z_3)}+\sqrt{(l-z_2)(l-z_3)}}{\sqrt{(z_2+z_3)(z_2-z_1)}}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (26a)$$

Itt a (9*a*) értelmében a számlálók gyökmenynyiségei reálisak; továbbá, mivel az I. *c)* pontja szerint z_2+z_3 positiv és (9*a*) alapján $z_1<-l$, a nevezők is reálisak; ez utóbbiakba, a (12*a*) szerint $-z_1(z_2+z_3)=l^2+z_2z_3$-t írva,

a nevezők: $\{l^2+z_2(z_2+z_3)+z_2z_3\}^{\frac{1}{2}}$; $\{l^2+z_2(z_2+z_3)+z_2z_3\}^{\frac{1}{2}}$;

a számlálók: $\{l^2+l(z_2+z_3)+z_2z_3\}^{\frac{1}{2}}+\{l^2-l(z_2+z_3)+z_2z_3\}^{\frac{1}{2}}$;

hol (9*a*) szerint $-l<z_2<z_3<+l$ lévén, a (26*a*) közös számlálójának első tagja nagyobb mindegyik nevezőnél, második tagja pedig kisebb ezeknél, de mind a két tag positiv; e szerint a (26*a*)-ban a Θ-tól jobbra és balra eső értékek az $\frac{1}{2}\pi$-nél *nagyobbak*.

Következik, hogy Θ *mindenesetre nagyobb mint* $\frac{1}{2}\pi$, s mivel a pálya egymásra következő szakaszai symmetrikusak: a vízszintes vetület némikép forgó ellipsisre emlékeztet s általában nem önmagában viszszatérő görbe, 83*b*. ábra.

További általános fejtegetések inkább az elliptikus integrálok és függvények tanába, mint a dynamikába tartoznak.

II. *Jegyzet:* Greenhill * észrevette, hogy a mikor a pálya legmagasabb pontja a felfüggesztés szintjében van (azaz. ha a gömbi inga a felfüggesztés niveaujában *vízszintesen* lesz elindítva): akkor a ϑ és t egy lineáris combinátiója elemi függvényekkel integrálható.

Ugyanis ekkor $z_2=0$; továbbá (11*a*)-ból $h=z_1+z_3$; $l^2=-z_1z_3$; $hl^2=-c^2:2g$; a v_0 kezdő sebesség négyzete (7)-ből $v_0^2/^2=c^2$. Ezekkel a (8):

$$ldz=\sqrt{2g}\sqrt{z(-z^2+hz+l^2)}\,dt;$$

azaz, mivel $h=-c^2:l^2\,2g=-v_0^2:2g$,

$$dt=\frac{l}{\sqrt{2g}}\frac{dz}{\sqrt{z\,(l^2-z^2-zv_0^2:2g)}}=\frac{ldz}{\sqrt{z\,\{2g\,(l^2-z^2)-zv_0^2\}}}\quad\ldots\quad(26)$$

Másrészt a (13)-ból a (26) felhasználásával nyerjük:

$$d\vartheta-\frac{c}{2l^2}dt=\frac{cdt}{l^2-z^2}-\frac{1}{2l}\cdot\frac{c}{l}\,dt=\frac{v_0l\,(2l^2-l^2+z^2)}{2l^2\,(l^2-z^2)}\,dt=$$

$$=\frac{v_0}{2l}\frac{l^2+z^2}{l^2-z^2}dt=\tfrac{1}{2}v_0\frac{(l^2+z^2)\,dz}{(l^2-z^2)\sqrt{z\,\{2g\,(l^2-z^2)-v_0^2z\}}}=d\left\{\text{arc sin}\frac{v_0\sqrt{z}}{\sqrt{2g(l^2-z^2)}}\right\}$$

E szerint, ha ψ a vertikális s az inga fonala (szára) közötti szög, akkor $l\cos\psi=z$ és egyenletünk írható:

$$\left.\begin{aligned}&\vartheta-\frac{v_0}{2l}\,t=\text{arc sin}\frac{v_0}{\sqrt{2gl}}\frac{\sqrt{\cos\psi}}{\sin\psi};\\ \text{vagy:}\quad&\sin\psi\sin\left(\vartheta-\frac{v_0}{2l}\,t+\gamma\right)=\frac{v_0}{\sqrt{2gl}}\sqrt{\cos\psi},\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(27)$$

hol γ az integrátió állandója. A (19) szerint a t a φ-nek elliptikus integrálja, s így φ a t elliptikus függvénye által lévén kifejezve a (15) és a most bevezetett ψ szerint $z=z\sin^2\varphi+z_3\cos^2\varphi=l\cos\psi$ alapján ψ-, és (27)-tel ϑ és így x és y is fejezhetők ki a t elliptikus függvényeivel.

---

* Greenhill, A. G. Fonctions elliptiques (traduit par J. Griess) 226. §. (*D*) pontja 374. lap. Paris 1895.

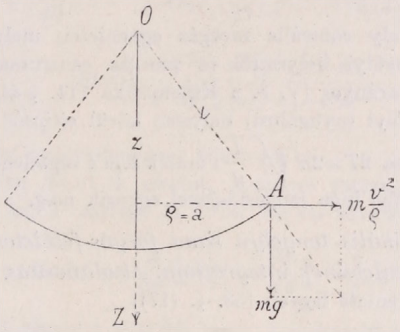
181. §. *Folytatás: A kúp- (konikus) inga.*

Érdekes speciális esete a gömbi inga mozgásának, mikor a mozgó m pont mindig ugyanabban a vízszintes síkban marad s így az inga fonala (rúdja) *körkúpot* ír le.

1. Ekkor $z=\text{constans}$ és $z_2=z_3=z$; $r^2=l^2-z^2=x^2+y^2=\text{constans}=a^2$. A megelőző §. (13) és (21) egyenletei itt

$$d\vartheta=\frac{c}{a^2}\,dt,\quad \vartheta=\frac{c}{a^2}\,t\,; \qquad \ldots\ldots\ (1)$$

$$c^2=\frac{2g}{2z}(l^2-z^2)^2\,;\quad c=\sqrt{\frac{g}{z}}\,(l^2-z^2)=a^2\sqrt{\frac{g}{z}} \qquad \ldots\ (2)$$



84. ábra.

A sebesség, melylyel m az a sugarú kört egyenletesen leírja:

$$v=a\cdot\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{g}{z}}\sqrt{l^2-z^2} \qquad \ldots\ldots\ (3)$$

A $2T$ idő, mely e kör befutására szükséges:

$$2T=\frac{2\pi a}{v}=\frac{2\pi a^2}{c}=2\pi\sqrt{\frac{z}{g}}$$

és így T egyenlő a z hoszszaságú végtelen kis amplitudójú ideális inga lengésidejével [157. §. (15)].

2. Közvetetlenül is nyerjük ezt az eredményt. Ugyanis itt a mozgás állandó s egyenletes volta (a mozgó egyensúly) követeli, hogy az m-re ható mg súly-erő és $mv^2:a$ centrifugális erő eredője az OA irányú fonál folytatásába essék; azaz áll 84. ábra:

$$mg:m\frac{v^2}{a}=z:a\,;\quad v^2=\frac{g}{z}\,a^2=\frac{g}{z}\,(l^2-z^2),$$

mint fent; ebből mind a többi jellemző adatok folynak.

182. §. *Folytatás. A gömbi inga igen kicsiny lengései.*

A függélyes egyensúlyi helyzettől számított igen kicsiny kitéréseknél az $x:l$ és $y:l$ quotiensek igen csekélyek, míg a

$$z:l=\sqrt{1-(x:l)^2-(y:l)^2}$$

quotiens, másodrendűek elhagyásával az egységnek veendő, azaz $z=l$.

A 180. §. (2) egyenleteinek harmadika, elseje és második itt:

$$0=-R\frac{l}{l}+mg\,;\quad R=mg\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{g}{l}x\,;\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{g}{l}y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ezek pedig oly centrális mozgás egyenletei, melynél a gyorsulás *vonzó* és az egyensúlyi helyzettől (a mozgás centrumától) való távolsággal egyenesen arányos [V. ö. a Kinematika 114. §-át, 208. l.]. E szerint az m egyensúlyi (nyugalmi) helyzete körül *ellipsist* ír le, s a mozgás egész periodusa $2T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; ennek fele a végtelen kis amplitudójú l hoszszaságú ideális inga lengésidejével egyezik meg.

183. §. *Vertikális tengelyű sima forgás-felületen haladó nehéz pont mozgásegyenleteinek integrátiója. Általánosítás.*

A felület egyenlete legyen [53. §. (17)]

$$O=2F(x,y,z)=x^2+y^2-2\psi(z)=0 \quad \text{vagy:} \quad z=f(\sqrt{x^2+y^2})=f(r) \quad . \quad (00)$$

A független erő componensei $X=0$, $Y=0$, $Z=mg$ lévén, az $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$ összefüggések és a $\psi'=d\psi(z):dz$ rövidítés segélyével az 53. §. (19) egyenletei:

$$\frac{R}{m\sqrt{x^2+y^2+\psi'^2}}=\frac{1}{x}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{1}{\psi'}\left(\frac{d^2z}{dt^2}-g\right); \quad . \quad (0)$$

Az 53. §. (11) egyenlete szerint az eleven erő tétele itt

$$d(\tfrac{1}{2}v^2)=gdz\,;\quad v^2=2g(z-h), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

hol $z=h$ a $v=0$-nak felel meg.

1. *A mozgás vízszintes vetülete; analogia a centrális mozgáshoz.*

A (0) középső részéből:

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0\,;\quad x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=r^2\frac{d\vartheta}{dt}=c\,; \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

azaz, a vízszintes vetületre nézve a területek elve érvényes s így e mozgásrész centrális jellegű.

Írjuk a (00)-ba $r=u^{-1}$-t és legyen:

$$z=f(r)=f(u^{-1})=\chi(u)=z\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

A vízszintes sebességre nézve a centrális mozgás eredménye érvényes [Kinematika 74. §. (5)]:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=c^2\left\{u^2+\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Másrészt a (3)-ből, ϑ lévén a független coordináta, a (2) segélyével:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d\chi(u)}{dt}=\frac{d\chi}{du}\frac{du}{dt}=\chi'(u)\frac{du}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}=cu^2\chi'(u)\left(\frac{du}{d\vartheta}\right) \quad . \quad (5)$$

A (4) és (5)-ből a v^2 az (1) és (3) segélyével:

$$c^2\left\{u^2+\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2+u^4[\chi'(u)]^2\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2\right\}=v^2=2g[\chi(u)-h], \quad . \quad . \quad (6)$$

melyből

$$d\vartheta=\pm\frac{c\sqrt{1+u^4[\chi'(u)]^2}\,du}{\sqrt{2g[\chi(u)-h]-c^2u^2}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6a)$$

s így ϑ az u egy quadraturájával fejezhető ki.

Differentiálva (6)-ot ϑ szerint, szemmel tartva, hogy bal oldala tiszta négyzetes tagok összege és $2c^2du:d\vartheta$-val rövidítve:

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2}+u+u^2\chi'(u)\frac{d}{d\vartheta}\left[u^2\chi'(u)\frac{du}{d\vartheta}\right]-\frac{g}{c^2}\chi'(u)=0, \quad . \quad . \quad (6b)$$

mely differentiál egyenlet első két tagja megegyezik a centrális mozgás ebbeli egyenletével [Kinematika 74. §. (7)].

Jegyzet: Ha a föld nehézségi erején kívül az m-re még a Z symmetria-tengelyre merőleges $p(r,\vartheta)$ gyorsulás hat, akkor $X=mpx:r$; $Y=mpy:r$, melyek tekintetbe vételével a (2) érvényessége megmarad s miután $xdx+ydy=rdr$, az eleven erő tételéből

$$\tfrac{1}{2}v^2=g(z-h)+\int p(r,\vartheta)\,dr; \quad d(\tfrac{1}{2}v^2)=gdz+p(r,\vartheta)\,dr,$$

melynek segélyével a (6*b*)-nek megfelelő egyenlet szerkeszthető. Ha a p csak r függvénye és $\int p(r)\,dr=P(r)=\Pi(u)$, akkor a (6) jobb oldalához a $\Pi(u)$ járul és ϑ ismét az egy u szerinti quadraturával fejezhető ki.

2. *Összefüggések a coordináták és az idő között.*

Differentiálva a $x^2+y^2=2\psi(z)$ t az idő szerint:

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=\frac{d\psi(z)}{dz}\frac{dz}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

A (7) négyzetét a (2) négyzetéhez adva:

$$(x^2+y^2)\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}=c^2+\left[\psi'(z)\frac{dz}{dt}\right]^2. \quad . \quad . \quad . \quad (8a)$$

Miután (1)-ből:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=2g\,(z-h)-\left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8b)$$

az $x^2+y^2=2\psi\,(z)$ helyettezéssel, némi rövidítés után (8a)-ból:

$$\left.\begin{aligned}\{2\psi\,(z)+[\psi'\,(z)]^2\}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2&=4g\psi\,(z)\,(z-h)-c^2,\\ t=\pm\int\left\{\frac{2\psi\,(z)+[\psi'(z)]^2}{4\psi\,(z)\,g\,(z-h)-c^2}\right\}^{\frac{1}{2}}dz&+\text{const.}\end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad (8)$$

és ez a z és t között fennálló összefüggés, mely quadraturára van viszszavezetve.

Továbbá, a (2)-be helyettezve $r^2=x^2+y^2=2\psi\,(z)$-t, a (8)-al:

$$\vartheta=\tfrac{1}{2}c\int\frac{dt}{\psi\,(z)}+\vartheta_0=\tfrac{1}{2}c\int\left\{\frac{2\psi\,(z)+[\psi'(z)]^2}{4\psi\,(z)\,g\,(z-h)-c^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{\psi\,(z)}+\vartheta_0 \quad . \quad (9)$$

hol ϑ_0 az integrátió állandója és $\vartheta=\vartheta\,(z)$ a z függvényének tekintendő miáltal

$$x=r\cos\vartheta=\sqrt{2\psi\,(z)}\cos[\vartheta\,(z)]\,; \quad y=r\sin\vartheta=\sqrt{2\psi\,(z)}\sin[\vartheta\,(z)] \quad . \quad (10)$$

A (0) három egyenlete elsejét x-el, másodikát y-al, harmadikát $-\psi'$-vel szorozva, ezek négyzetösszegéből az R^2:

$$R^2=m^2\left\{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left[\frac{d^2z}{dt^2}-g\right]^2\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

hol (10) és (8) szerint x és y a z-ben, z a t-ben lévén kifejezve, a (11)-ben az R a t vagy a z függvényének tekintendő. Ugyanezen R, a (0) egyenleteit rendre x^2, y^2, $+[\psi'(z)]^2$-el szorozva, összegükből

$$R=\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+[\psi'(z)]^2}}\left\{x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}-\psi'(z)\left[\frac{d^2z}{dt^2}-g\right]\right\}; \quad (10a)$$

melyben a (7) differentiálásából és a (8b) és (1) tekintetbe vételével:

$$\begin{aligned}x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{d^2\psi\,(z)}{dt^2}-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\\ &=\psi''(z)\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+\psi'\,(z)\,\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2-v^2,\end{aligned}$$

$$R=\frac{\pm m}{\sqrt{x^2+y^2+[\psi'(z)]^2}}\left\{[\psi''\,(z)+1]\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+g\psi'(z)-v^2\right\} \quad . \quad (10b)$$

3. Tissot *megfejtése complex változók függvényei segélyével.*

a) Adva legyenek a következő simultán differentiálegyenletek:

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=dX\,; \quad \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=dY\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

hol dX és dY *adott, ismert* differentiálok [pl. a (7) és a (2) esetében $dX=d\psi(z):2\psi(z)$; $dY=cdt:2\psi(z)$, dt a (8)-ból z-ben lévén kifejezve].

Áll:

$$d\,[\lg(x+iy)]=\frac{dx+idy}{x+iy}=\frac{(dx+idy)(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}+i\,\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}.$$

A (12) tekintetbe vételével e kifejezés integrálja:

$$\lg(x+iy)=\int dX+i\int dY+i\vartheta_0\,;\quad\text{vagy}\quad x+iy=e^{\int dX+i(\vartheta_0+\int dY)}$$

ϑ_0 lévén az integrátió állandója. Az egyenlet szétesik egy reális és egy i-vel szorzott részre, miáltal:

$$x=e^{\int dX}\cos(\vartheta_0+\int dY)\,;\quad y=e^{\int dX}\sin(\vartheta_0+\int dY),\quad\ldots\quad(13)$$

mely alakról azonnal kiderül, hogy a (10)-el megegyezik [Tissot, Journal de Liouville 1852].

Ugyanis itt $dX=\frac{1}{2}d\psi(z):\psi(z)$: $X=\frac{1}{2}\lg\psi(z)=\frac{1}{2}\lg(x^2+y^2)=\lg r$, $r=e^{\int dX}$, és (9) szerint $\vartheta=\int dY+\vartheta_0$, miáltal e derékszögű coordináták z szerinti quadraturákra vannak viszszavezetve.

4. *Általánosítás: A forgástengelylyel párhuzamos erő tetszőleges.* Ezen esetben $Z=m\varphi(z)$, φ tetszőleges; továbbá az eleven erő tételéből:

$$d\left(\tfrac{1}{2}v^2\right)=\varphi(z)\,dz\,;\quad v^2=2\int\varphi(z)\,dz+\text{const.}=2\,[\Phi(z)+\gamma],$$

mely (1)-ben a $2g(z-h)$ helyébe lép, miáltal a (6*b*) és a (11)-ben g helyébe $\varphi(z)$, (8) és (9)-ben $g(z-h)$ helyébe $\Phi(z)+\gamma$ lép.

184. §. *Pontmozgás sima forgás-felület geodätikus görbéin.* Clairaut *tétele. Egyszerű példák.*

Az m-re független erő nem hatván az eleven erő tételéből: $\frac{1}{2}v^2=\text{constans}=\frac{1}{2}v_0^2$ és így az m a felületen geodätikus görbét ír le [55. §. 2. pontja].

Ekkor a megelőző §. egyenleteiben a $2g(z-h)$ és $2g\,[\chi(u)-h]$ helyébe v_0^2 teendő; ezenkívül a megelőző §. (3) egyenletéből:

$$\chi'(u)=d\chi(u):du=df(r):du=$$
$$=[df(r):dr]\,[dr:du]=-f'(r).u^{-2}=-f'(r)\,r^2,$$

miáltal a megelőző §. (6*a*), (8), (9) egyenletei:

$$d\vartheta=\pm\frac{c\sqrt{1+u^4\,[\chi'(u)]^2}}{\sqrt{v_0^2-c^2u^2}}\,du=\mp\frac{c}{r}\cdot\frac{\sqrt{1+[f'(r)]^2}}{\sqrt{v_0^2r^2-c^2}}\,dr\,;\quad\ldots\quad(1)$$

$$dt=+\left\{\frac{2\psi(z)+[\psi'(z)]^2}{2\psi(z)\,v_0^2-c^2}\right\}^{\frac{1}{2}}dz=\pm\frac{r^2}{c}\,d\vartheta\quad\ldots\quad(2)$$

Az (1), és vele kapcsolatban a $z=f(r)$ összefüggés, kifejezik a geodätikus görbék egyenleteit, melyek véges alakja quadratura.

Miután $\{(dr)^2+(dz)^2\}^{\frac{1}{2}}=\{1+[f'(r)]^2\}^{\frac{1}{2}}dr$ nem más, mint a meridiánív $d\sigma$ eleme, az (1):

$$d\vartheta=\mp\frac{c}{r}\frac{d\sigma}{\sqrt{v_0^2r^2-c^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1a)$$

Az $r^2d\vartheta=cdt$ kifejezte területek elve a $dt=ds:v=ds:v_0$ helyettezéssel és a $c:v_0=a_0=állandó$ rövidítéssel még írható $r^2d\vartheta=a_0ds$; avagy, ha i a szög, mely alatt a geodätikus görbe a felület tetszőleges pontjában az ugyane ponton áthaladó r sugarú párhuzamos kört metszi:

$$\cos i=rd\vartheta:ds=a_0:r, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

azaz, ezen i metszőszög cosinusa a mindenkori párhuzamos kör sugarával fordítva arányos. Miután $\cos i\leqq 1$, áll: $r\geqq a_0$, továbbá a görbe általában véve az $r=a_0$ sugarú párhuzamos kört érinti s ha a forgási felület a végtelenbe terjed: $r=\infty$-ben e körökre merőlegesen halad. Ez Clairaut tétele (Mém. de l'Ac. d. Sc. d. Paris 1733).

Jegyzet: Ha $c=0$ s így ha $a_0=0$, (1) és (3) szerint $d\vartheta=0$, $\cos i=0$; ekkor e görbe a párhuzamos köröket derékszög alatt metszi és így maga a generatrix görbe (a meridián) ezen esetben a geodätikus görbe. Speciális eset a körhenger [l. alább az 1. pontot], hol r és így i is állandó és a geodätikus görbék közül csak az $i=0$ parameterű érinti a párhuzamos kört, és egybe is esik vele.

A megelőző §. (2) és (9) egyenletében és a jelen §-ban is felmerülő c és ϑ_0 integrálállandók a görbének a felületétől független két parametere, melyet pl. adott két felületi pont helyzete határoz meg, melyen a görbének áthaladnia kell, vagy egy adott pont helyzete s a rajta átmenő görbe iránya adja meg.

A $-R$ nyomás kifejezésébe [megelőző §. (10*b*)] g és v helyébe zérus, illetve v_0 teendő; továbbá, a $(dz:dt)$-t kipuhatolandó, a σ meridián mentén a sebesség: $v_0\sin i$; ennek a Z menti componense $v_0\sin i.(dz:d\sigma)$,

négyzete $\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=v_0^2\sin^2 i\frac{(dz)^2}{(dz)^2+(dr)^2}$. Ámde (3)-ból $\sin^2 i=(r^2-a_0^2):r^2$,

és $r^2=2\psi(z)$-ből $dr=dz\psi'(z):\sqrt{2\psi(z)}$, melyekkel

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=v_0^2\cdot\frac{r^2-a_0^2}{r^2+[\psi'(z)]^2}.$$

Ennek, valamint a $c=a_0v_0$ felhasználásával (2)-ből

$$d\vartheta=\pm a_0\frac{dz}{r^2}\cdot\left\{\frac{r^2+[\psi'(z)]^2}{r^2-a_0^2}\right\}^{\frac{1}{2}};$$

végre mindezek tekintetbe vételével a megelőző §. (10*b*) egyenlete:

$$R=\pm mv_0^2\frac{(r^2-a_0^2)\,\psi''(z)-[\psi'(z)]^2-a_0^2}{\{r^2+[\psi'(z)]^2\}^{\frac{3}{2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

1. *Körhenger.* Az $r=\text{const.}=a$, miáltal $\psi(z)=\frac{1}{2}a^2$ és (2)-ből, ha $\frac{c}{v_0}=a_0$:

$$dz=\frac{a^2}{c}\cdot\frac{\sqrt{a^2v_0^2-c^2}}{a}\,d\vartheta$$

$$dz=a\left\{\frac{a^2}{a_0^2}-1\right\}^{\frac{1}{2}}d\vartheta;$$

másrészt itt

$$c=r\,.\,r\frac{d\vartheta}{dt}=a\,.\,v_0\cos i,\qquad a_0=c:v_0=a\cos i;$$

s így

$$z=(a\,\text{tg}\,i)\,\vartheta+\text{const.}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

mely a *közönséges csavarvonal* egyenlete. Ez e henger geodätikus görbéje; a rajta történő mozgás egyenletes (és mindenben megegyezik a Kinematika 110. §. 2. pontjában tárgyaltéval). Itt r *állandó* s így a_0 nem jelenthet párhuzamos körsugarat.

A megelőző §. (10) vagy a jelen §. (4) egyenlete szerint az ellennyomás:

$$R=\pm\frac{m}{a}\left\{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2-v_0^2\right\}=\pm\frac{m}{a}\left\{(v_0\sin i)^2-v_0^2\right\};$$

$$R=-m\frac{v_0^2\cos^2 i}{a}=\text{constans}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

mely épen úgy, mint a ϱ görbületi sugár [i. h.] a tengely felé, arra merőlegesen van irányítva.

2. *Egyenes körkup* esetében $z=r\,.\,\text{cotg}\,\alpha=f(r)$, ha α a nyilásszög fele; ekkor az (1) integrálható és itt is $c:v_0=a_0$-t írva [Math. Rep. 107. §. 22. formula]:

$$\vartheta=\mp\frac{c}{\sin\alpha}\int\frac{dr}{r\sqrt{v_0^2r^2-c^2}}=\pm\frac{c}{\sin\alpha}\frac{1}{c}\arccos\left(\frac{a_0}{r}\right)+\vartheta_0;$$

$$\frac{a_0}{r}=\cos\left[(\vartheta-\vartheta_0)\sin\alpha\right];$$

$$z\,\text{tg}\,\alpha=r=a_0:\cos\left[(\vartheta-\vartheta_0)\sin\alpha\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

mely kettős egyenlet a geodätikus görbék sajátságait előtünteti, s miután (3) szerint $\cos i=a_0:r$, a (7)-ből:

$$i=(\vartheta-\vartheta_0)\sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

A geodätikus görbe e szerint $\vartheta=\vartheta_0$-nál érinti az $r=a_0$ párhuzamos kört; az r a ϑ-val növekszik és $(\vartheta-\vartheta_0)\sin\alpha=\frac{1}{2}\pi$-nél végtelen nagy lesz; e

közben a görbe vízszintes vetületében $\vartheta=\vartheta_0$-tól $\vartheta=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin\alpha}+\vartheta_0$-ig változott, azaz az r vízszintes vezérsugár $\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{1}{\sin\alpha}$-szöggel fordult el.

Végre, miután itt $2\psi(z)=r^2=z^2\operatorname{tg}^2\alpha$, $\psi'(z)=z\operatorname{tg}^2\alpha=r\operatorname{tg}\alpha$; $\psi''(z)=\operatorname{tg}^2\alpha$, a (4)-ből, némi összevonás után:

$$R=-mv_0^2\frac{a_0^2}{r^3}\cos\alpha=-\frac{mv_0^2}{r}\cos\alpha\cos^2 i, \quad \ldots\ldots (9)$$

mely ellennyomás mindig negativ (a kúp tengelye felé tart), mert m csak a kúp belső oldalán maradhat meg.

185. §. *Pontmozgás három tengelyű ellipsoid geodätikus görbéin.* Az anyagi pont egyenlőtlen tengelyű ellipsoid sima felületén mozog; független (szabad) erők nem hatnak.

Az ellipsoid féltengelyei $a>b>c$; egyenlete:

$$F=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0; \quad \ldots\ldots (1)$$

miből az 53. §. (2), (7), (8) egyenletei értelmében:

$$mx''=R\cdot\frac{1}{\Phi}\cdot\frac{2x}{a^2} \quad \text{s í. t.}$$

Itt R a felületnek a belső tér felé irányított reactiója, írjuk rövidség kedveért:

$$2R:\Phi=R:\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}=-m\sigma, \quad \ldots\ldots (1a)$$

$$x''=-\sigma x a^{-2}; \qquad y''=-\sigma y b^{-2}; \qquad z''=-\sigma z c^{-2} \quad \ldots (2)$$

1. Az (2)-ből az 53. §. (11) eredménye folyik, ugyanis itt:

$$x'^2+y'^2+z'^2=v^2=\text{constans}=v_0^2, \quad \ldots\ldots (3)$$

mely a (2) egyik integrálegyenlete.

A (2) egy másik integrálegyenletét következőleg nyerjük:

Szorozva a (2) egyenleteit rendre $x'a^{-2}$; $y'b^{-2}$, $z'c^{-2}$-tel, összegük:

$$x''x'a^{-2}+y''y'b^{-2}+z''z'c^{-2}=-\sigma\{xx'a^{-4}+yy'b^{-4}+zz'c^{-4}\} \quad \ldots (4)$$

Továbbá (1)-et t szerint egymásután kétszer differentiálva:

$$xx''a^{-2}+yy''b^{-2}+zz''c^{-2}=-\{x'^2a^{-2}+y'^2b^{-2}+z'^2c^{-2}\};$$

ellenben a (2) egyenleteit rendre xa^{-2}-, yb^{-2}, zc^{-2}-vel szorozva, összegük:

$$x''xa^{-2}+y''yb^{-2}+z''zc^{-2}=-\sigma\{x^2a^{-4}+y^2b^{-4}+z^2c^{-4}\},$$

melyet a megelőző egyenlettel egyesítve:

$$x'^2a^{-2}+y'^2b^{-2}+z'^2c^{-2}=+\sigma\{x^2a^{-4}+y^2b^{-4}+z^2c^{-4}\}\,; \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

osztva (4)-et (5)-tel, hányadosuk írható:

$$\frac{\frac{1}{2}\{x'^2a^{-2}+y'^2b^{-2}+z'^2c^{-2}\}'}{x'^2a^{-2}+y'^2b^{-2}+z'^2c^{-2}}=-\frac{\frac{1}{2}\{x^2a^{-4}+y^2b^{-4}+z^2c^{-4}\}'}{x^2a^{-4}+y^2b^{-4}+z^2c^{-4}},$$

melyet közvetetlenül integrálva s h^2-val integratió-állandót jelelve:

$$\{x^2a^{-4}+y^2b^{-4}+z^2c^{-4}\}\{x'^2a^{-2}+y'^2b^{-2}+z'^2c^{-2}\}=h^2 \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Osztva (6)-ot $v=\frac{ds}{dt}$-vel és írva benne $x'=\frac{dx}{dt}$ s í. t.; dt eliminálódik s marad

$$\left.\begin{aligned}\left\{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right\}\cdot\left\{\frac{1}{a^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\right.\\ \left.+\left(\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right\}=\frac{h^2}{v_0^2}=\text{const.}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

mint a keresett geodätikus görbék differentiálegyenlete [v. ö. a 229. §. 2. pontját].

2. Már a (7)-ből adódik Joachimsthal egy ismeretes tétele: ha p a geodätikus görbe tetszőleges A pontjában az ellipsoidhoz húzott érintősíkra bocsátott merőleges hoszsza, l pedig e görbéhez ugyanezen A pontjában húzott érintőhöz párhuzamos ellipsoid-átmérő fele, akkor a pl szorzat állandó.

Ugyanis: az érintő iránycosinusai $dx:ds$, $dy:ds$, $dz:ds$; a nevezett félátmérő végpontjának coordinátái $ldx:ds$, $ldy:ds$, $ldz:ds$; miután ez is az ellipsoid-felület egy pontja:

$$\left(\frac{l}{a}\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{l}{b}\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{l}{c}\frac{dz}{ds}\right)^2=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Másrészt az A-hoz tartozó érintősík normálisának irányeosinusai $(x:a^2):\sqrt{(x:a^2)^2+.+.}$ s í. t. lévén, e sík egyenlete

$$x_1xa^{-2}+y_1yb^{-2}+z_1zc^{-2}=p\{x^2a^{-4}+y^2b^{-4}+z^2c^{-4}\}^{\frac{1}{2}},$$

hol x_1,y_1,z_1 e sík folyó coordinátái és p a nevezett távolság, melyet nyerjük, ha ezt az egyenletet az $A(xyz)$ érintési pontra alkalmazzuk és (1)-et tekintetbe veszszük:

$$\frac{1}{p^2}=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

A (8) és (9) szorzata, a (7) értelmében:

$$pl=\text{constans} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

2) Anyagi pontmozgás előírt mozgó sima felületen.

186. §. *Az ideális gömbi inga mozgása a forgó földön.* FOUCAULT *ingakísérletének elmélete.*

Az inga felfüggesztési pontja a földdel együtt forogván: az a gömbfelület, melyen az m maradni tartozik, a földdel mozog tovább.

Az m-nek a felfüggesztés helyéhez való relativ mozgása egyenleteit az 57. vagy a 123. és 124. §§. értelmében könnyen nyerhetnők; de helykimélés szempontjából ez eljárás alkalmazását az olvasónak ajánljuk, s itt inkább a Kinematika 353. §. (7) egyenletrendszeréből, 608. l., akarunk kiindulni.

Ez ugyanis a forgó földhöz viszonyított relativ, *szabad* pontmozgásra vonatkozik, ha csak a földnehézség a független erő. Ugyanilyen relativ, de még *kényszer*nek alávetett mozgásnál a szabad mozgás eredő (gyorsító) $m\varphi_{rx}$, $m\varphi_{ry}$, $m\varphi_{rz}$ erőihez a kényszererő R_x, R_y, R_z componensei csatolandók, miáltal e mozgás egyenletei adódnak.

1. A felfüggesztő pontba a relativ coordináták kezdetét téve, a Z-tengelyt függélyesen *fölfelé*, az X-et a meridián mentén *délfelé*, Y-t *keletfelé* irányítva [mint a Kinematika 272. ábráján, a 606. lapon], s megjegyezve, hogy az R kényszererő itt is az O-felé van irányítva, az-az iránycosinusai (82. ábra, 407. lap) $-x : l$, $-y : l$, $-z : l$, a relativ mozgás differentiálegyenletei:

$$\left.\begin{aligned} mx'' = m\varphi_{rx} + R_x &= + m\omega^2 (x \sin^2\lambda + z \sin\lambda \cos\lambda) + \\ &\quad + 2m\omega y' \sin\lambda - R \,.\, (x : l) ; \\ my'' = m\varphi_{ry} + R_y &= + m\omega^2 y - 2m\omega (x' \sin\lambda + z' \cos\lambda) - \\ &\quad - R \,.\, (y : l) ; \\ mz'' = m\varphi_{rz} + R_z &= + m\omega^2 (x \sin\lambda \cos\lambda + z \cos^2\lambda) + \\ &\quad + 2m\omega y' \cos\lambda - mg - R \,.\, (z : l) ; \\ l^2 = x^2 + y^2 + z^2 &= \text{constans.} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (1)$$

A g az m mozgása terében itt állandónak tekintendő.

Az R és az eleven erő az 53. §. (10) és (11) eljárásai szerint az (1)-ből:

$$R = m\frac{v^2}{l} + m\varphi_{rx} \,.\, \frac{x}{l} + m\varphi_{ry} \,.\, \frac{y}{l} + m\varphi_{rz} \,.\, \frac{z}{l} ;$$

$$d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) = m\{\varphi_{rx}dx + \varphi_{ry}dy + \varphi_{rz}dz\} ;$$

avagy,

$$R = m\frac{v^2}{l} - mg\frac{z}{l} + \frac{m\omega^2}{l}\{(x\sin\lambda + z\cos\lambda)^2 + y^2\} + \\ + \frac{2m\omega}{l}\{(y'x - x'y)\sin\lambda + (y'z - z'y)\cos\lambda\} ;$$

$$d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) = m\,\{\omega^2\,[x dx \sin^2\lambda + (z dx + x dz)\sin\lambda\cos\lambda + y dy + z dz\cos^2\lambda] + \\ + 2\omega\,[y' dx - x' dy)\sin\lambda + (y' dz - z' dy)\cos\lambda] - g dz\}\ ;$$

de identitások: $0=(y'x'-x'y')dt=y'dx-x'dy=0$; épen így $y'dz-z'dy=0$.

$$R = ml^{-1}(v^2-gz)+2ml^{-1}\omega\,\{\tfrac{1}{2}\omega\,[(x\sin\lambda+z\cos\lambda)^2+y^2]+ \\ + (y'x-x'y)\sin\lambda+(y'z-z'y)\cos\lambda\}\ . \quad (2)$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = -mgz+\tfrac{1}{2}m\omega^2\,\{(x\sin\lambda+z\cos\lambda)^2+y^2\}+\text{constans} \quad . \quad (3)$$

2. Az (1) rendszer további, általános integrátiója a legnagyobb nehézségekbe ütközik; ezért a gyakorlat igényeinek megfelelőleg járunk el, ha először is az ω^2-tal szorzott tagokat elhanyagoljuk (lévén a földre nézve $\omega^2=0{\cdot}0000000052$), miáltal az (1), (2), (3)-ból marad:

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= +2m\omega y'\sin\lambda - R\,.\,(x:l)\ ; \\ my'' &= -2m\omega\,(x'\sin\lambda+z'\cos\lambda) - R\,.\,(y:l)\ ; \\ mz'' &= +2m\omega y'\cos\lambda - mg - R\,.\,(z:l)\ ; \\ l^2 &= x^2+y^2+z^2\ ; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$R = ml^{-1}(v^2-gz)+2ml^{-1}\omega\,\{(xy'-yx')\sin\lambda+(zy'-yz')\cos\lambda\}\ ; \quad . \quad (5)$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = -mgz+\text{constans} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

De még így is tetemesen bonyolódott a probléma, ugyanis az R-et (5)-ből (4)-be helyettezve, másodrendű simultán egyenletrendszert nyerünk, melynek tárgyalása nagyon hoszszadalmas.

3. A Foucault-*féle inga kicsiny amplitudójú lengései.*

Legyenek az m-nek a nyugalmi helyzettől való x és y eltávolódásai igen kicsinyek az l-hez képest.

A $z=-\sqrt{l^2-x^2-y^2}$ és így ekkor másodrendű csekély menynyiségek elhagyásával z állandónak és pedig $z=-l$-nek vehető és $z'=z''=0$; míg x', y' és a v is elsőrendű kicsiny sebességek.

E szerint a (4)-ből

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= +2m\omega y'\sin\lambda - R\,.\,(x:l)\ ; \quad my'' = -2m\omega x'\sin\lambda - R\,.\,(y:l)\ ; \\ 0 &= +2m\omega y'\cos\lambda - mg + R. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

A (7) harmadik egyenletéből

$$R = mg - 2m\omega y'\cos\lambda, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

mely az (5) egyenlettel — ebbe $z'=0$-át téve — úgy egyeztetendő, hogy a v^2, az $\omega\,(xy'-yx')$ és a z' másodrendű kicsiny sebességek elhanyagolandók.

Helyettesítve R-et (8)-ból a (7) első és második egyenleteibe és elhanyagolva az $xy':l$ és $yy':l$ másodrendű kicsiny értékeket:

$$x''-2\omega\sin\lambda\,y'+gl^{-1}x=0\ ; \qquad y''+2\omega\sin\lambda\,x'+gl^{-1}y=0\ . \ . \ . \quad (9)$$

a. E másodrendű differentiálegyenletek simultán rendszere a végtelen kis lengésű gömbi inga mozgását állítja elő, a föld forgásának

tekintetbe vételével, ha e forgástól származó legalacsonyabb rendű tagokat tartjuk csak meg.

A (9) rendszert (a Kinematika 354. §-a II. része 2. pontjában a (10)-re alkalmazott) elemi eljárás szerint tárgyalva és azután $x = r\cos\vartheta$-t, $y = r\sin\vartheta$-t írva, e rendszerből:

$$x''x' + y''y' + gl^{-1}(xx' + yy') = 0;$$
$$xy'' - yx'' + 2\omega(xx' + yy')\sin\lambda = 0;$$

s ezekből integrátióval:

$$\left.\begin{aligned} x'^2 + y'^2 = v^2 = r'^2 + (r\vartheta')^2 &= +gl^{-1}(r_0^2 - r^2); \\ xy' - yx' = r^2\vartheta' &= -\omega\sin\lambda r^2 + \varkappa; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

hol $gl^{-1}r_0$ és $\varkappa$ az integrátió állandói.

A (10) két egyenletéből az r s a ϑ meghatározható:

α) A másodikból $\vartheta' = -\omega\sin\lambda + \varkappa r^{-2}$, melyet az elsőbe helyettezve és ezt rendezve:

$$r^2 r'^2 + r^4(\omega^2\sin^2\lambda + gl^{-1}) - r^2(2\varkappa\omega\sin\lambda + gl^{-1}r_0^2) + \varkappa^2 = 0;$$

vagy, mivel $rr' = \frac{1}{2}(r^2)'$, és az r hatványainak állandó együtthatóit $+\frac{1}{4}c$, $-\frac{1}{4}b$, $+\frac{1}{4}a$-val jelelve

$$\left\{\frac{d(r^2)}{dt}\right\}^2 = -a + br^2 - cr^4.$$

Ebből [Math. Rep. 107. §. 44. formula]

$$dt = \frac{d(r^2)}{\sqrt{-a + br^2 - cr^4}}; \qquad t = \frac{1}{\sqrt{c}}\arccos\frac{-b + 2cr^2}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + t_0$$

$$r^2 = \frac{b}{2c} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}\cos\left[(t - t_0)\sqrt{c}\right] = A + B\cos(t\sqrt{c} - \beta); \quad . \quad . \quad (10a)$$

hol A, B, c, β az ω, λ, g, l, $\varkappa$, r_0-ból szerkesztett állandók.

Evvel a (10) második egyenlete:

$$\vartheta' = -\omega\sin\lambda + \frac{\varkappa}{r^2}; \qquad \vartheta = -\omega t\sin\lambda + \varkappa\int\frac{dt}{A + B\cos(t\sqrt{c} - \beta)} + \vartheta_0; \quad (10b)$$

mely véges alak [Math. Rep. 110. §. 27. formulája].

A (10a) és (10b) nem adják a pályának áttekinthető képét.

b. Ezért transformáljuk a (9) rendszert, vonatkoztatva ezt az XY-síkban *állandó* α' szögsebességgel forgó, közös kezdetű ΞH-coordinátatengelyekre, α lévén a forgásszög:

$$x = \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha; \qquad y = +\xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha; \quad . \quad . \quad (11a)$$
$$\xi = x\cos\alpha + y\sin\alpha; \qquad \eta = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \quad . \quad . \quad (11b)$$

Ezekből, kétszeri differentiálással, némi rendezés után:

$$\xi'' = + x'' \cos\alpha + y'' \sin\alpha + 2\,(-x' \sin\alpha + y' \cos\alpha)\,\alpha' - \xi\alpha'^2;$$
$$\eta'' = - x'' \sin\alpha + y'' \cos\alpha - 2\,(+x' \cos\alpha + y' \sin\alpha)\,\alpha' - \eta\alpha'^2.$$

Helyettezve ezekbe (9)-ből

$$x'' = +2\omega y' \sin\lambda - gl^{-1}x; \qquad y'' = -2\omega x' \sin\lambda - gl^{-1}y,$$

továbbá a ΞH rendszer szögsebességét úgy választva, hogy $\alpha' = -\omega \sin\lambda$ és elhanyagolva az α'^2-tel, azaz ω^2-tel szorzott tagokat, némi rövidítéssel nyerjük:

$$\xi'' + gl^{-1}\xi = 0; \qquad \eta'' + gl^{-1}\eta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Az inga végpontja (12) szerint [v. ö. a 182. §-t] a ΞH síkban ugyanoly ellipsist ír le, mint az absolut nyugvó felfüggesztő pont esetében a kis amplitudójú gömbi inga; de itt ez az ellipsis-pálya saját síkjában, középpontja körül

$$\alpha' = -\omega \sin\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

szögsebességgel, tehát a föld forgásával ellentett irányban forog, λ lévén a felfüggesztés helyének geographiai szélessége.

Ez Foucault híres inga-kisérletének elmélete; de ez csak addig alkalmazható, míg az inga hoszsza a kitéréseihez képest igen nagy és az inga maga felfüggesztő fonala vagy sodronya körül symmetrikus (t. i. hogy az inga, bármily irányban lengve, egyenlő tehetetlenségi nyomatékot és egyenlő levegő-ellenállást mutasson).

Ha az ingát fonál segélyével normális függélyes helyzetétől állandóan kimozdítva tartjuk s azután a fonalat elégetjük: az inga vertikális síkban mozog, mely sík a vertikális körül $-\omega \sin\lambda$ szögsebességgel forog. Az északi pólusban e sebesség $-\omega$, az egyenlítő alatt zérus.

A problémának pontosabb közelítésig való számítása terjedelmes míveleteket igényel.

187. §. *Valamely pont egy másik, mozgó ponttól változatlan távolságban tartozik maradni. Tractoria és directrix. Egyszerű példák.*

Ha két anyagi pont fonállal vagy rúddal van egymással kapcsolatban s az egyik pont megadott pályán bizonyos sebességgel tartozik mozogni, akkor a másik (a húzott) pont mozgása evvel teljesen meg van határozva. A húzó pont előírt pályagörbéjét *directrix*-nek, a húzottét *tractrix*-nek vagy *tractoriá*-nak nevezik.

Az összekötő fonál vagy rúd rendesen változatlan hoszszaságúnak és tömege a végeihez erősített anyagi pontokéhoz képest elhanyagolhatónak vehető.

Tömegének tehetetlenségénél fogva a húzott pont sebessége általában véve nem esik az egybekapcsoló fonál mindenkori irányába; ez csak akkor következik be, ha e pont oly nagy surlódással vagy

közegellenállással mozogna, mely a magára hagyatott pont mozgását azonnal megsemmisíti; ekkor csak a húzás menti mozgás marad meg s ekkor a tractoria érintője az összekapcsoló fonál mindenkori irányába esik.

Ily értelemben az üldöző görbe azon faja is tekinthető tractoriának, melynél az üldöző s az üldözött pont sebessége (és így egymástól való távolsága is) egy s ugyanaz [Kinematika 104. §. 3. pontja, 169. l.]

Jelelje x_1, y_1, z_1 a meghatározott mozgásban lévő pont absolut coordinátáit, x, y, z a tőle állandó l távolságban levő m pontéit, X, Y, Z az utóbbira ható független (szabad) erőket, R az erre ható kényszererőt (a fonál vagy rúd feszültségét), mely ha positiv, az $(x_1y_1z_1)$ felé tart. Az absolut mozgás egyenletei, hol

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X - R\frac{x-x_1}{l} \text{ s í. t.}; \quad \ldots\ldots (1)$$

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=l^2 \quad \ldots\ldots (2)$$

Az absolutakhoz párhuzamos relativ coordinátákat behozva:

$$x-x_1=\xi, \quad y-y_1=\eta; \quad z-z_1=\xi;$$

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = X - R\frac{\xi}{l} - m\frac{d^2x_1}{dt} \text{ s í. t.} \quad \ldots\ldots (3)$$

Ez az egyenletrendszer pl. a gömbi inga mozgására is volna alkalmazható; ekkor X, Y, Z csak tisztán a föld vonzása (attractiója) componensei, eltekintve a középfutó erőtől és $(x_1y_1z_1)$ a földdel merev kapcsolatban lévő, vele forgó pont, melynek $x_1y_1z_1$ coordinátái a föld nyugvónak vett középpontján átmenő szilárd tengelyekre vonatkoznak, [melyek pl. a Kinematika 353. §-a 272. ábrájában 606. l. *CM*, *CN*, *CP*.]

A kezdőnek ajánljuk, hogy a gömbi ingának a 186. §-ban írt (1) mozgásegyenleteit ezen az úton származtassa. Itt egyszerűbb esetekkel akarunk foglalkozni.

A (2) egyenlet és differentiálquotiensei mindig írhatók:

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=l^2; \quad \ldots\ldots (4)$$

$$\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta'=0; \quad \ldots\ldots (4a)$$

$$\xi\xi''+\eta\eta''+\zeta\zeta''+\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2=0; \quad \ldots\ldots (4b)$$

ezenkívül áll az identitás:

$$\xi'\xi''+\eta'\eta''+\zeta'\zeta''=\tfrac{1}{2}(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)'=(\tfrac{1}{2}v^2)', \quad \ldots\ldots (4c)$$

hol v az m-nek az $(x_1y_1z_1)$-hez viszonyított relativ sebessége.

1. *Az $(x_1y_1z_1)$ pont egyenletesen halad egyenesben; külső erők nem hatnak.*

A (3)-ból ezen esetben

$$ml\xi''=-R\xi; \qquad ml\eta''=-R\eta; \qquad ml\zeta''=-R\zeta, \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Szorozva (5) egyenleteit rendre ξ'-, η'-, ζ'-val, a (4a) és (4c) értelmében

$$\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2=v^2=\text{const.}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

szorozva ugyanezeket ξ-, η-, ζ-val, (4), (4b) és (6) értelmében:

$$R=+m\frac{v^2}{l}=\text{állandó} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Az R feszültség a relativ centrifugális erővel ellentetten egyenlő. E szerint az (5) egyenletei

$$\xi''+v^2l^{-2}\xi=0; \qquad \beta''+v^2l^{-2}\eta=0; \qquad \zeta''+v^2l^{-2}\zeta=0; \quad . \quad . \quad (8a)$$

ezek a relativ távolsággal egyenesen arányos s az $(x_1y_1z_1)$ felé mint mozgó centrum felé tartó relativ gyorsulást jelentenek, a pálya mindenesetre sík; [Kinematika 73. és 114. §§.] belőlük a relativ coordináták:

$$\xi=a\cos\left(\frac{vt}{l}+\alpha\right), \quad \eta=b\cos\left(\frac{vt}{l}+\beta\right), \quad \zeta=c\cos\left(\frac{vt}{l}+\gamma\right) \quad . \quad . \quad (8)$$

A hat integrál-állandó közül csak három a független, mert a (4), (4a), (6) feltételeknek mindig kell állaniok, l és v állandók lévén. Képezve e feltételeket (8)-ból, ezek minden időpillanatra nézve csak úgy érvényesek (az időtől függetlenek), ha a hat állandó az:

$$\left.\begin{aligned} a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma&=l^2;\\ a^2\sin^2\alpha+b^2\sin^2\beta+c^2\sin^2\gamma&=l^2;\\ a^2\sin 2\alpha+b^2\sin 2\beta+c^2\sin 2\gamma&=0; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

független feltételeket elégíti ki. Ez utóbbiakból még $a^2+b^2+c^2=2l^2$; és $a^2\cos 2\alpha+.+.=0$ függő összefüggések is folynak. A relativ pálya ívhoszszát σ-val jelelve, ezt az m állandó v sebességgel írja le s így folytatólagosan:

$$\sigma=vt+\sigma_0; \qquad d\xi:d\sigma=d\xi:vdt; \qquad d^2\xi:d\sigma^2=d^2\xi:v^2dt^2=v^{-2}\xi'' \text{ s í. t.}$$

s ezen pálya ϱ görbületi sugara iránycosinusainak egymáshoz való viszonya és értéke, tekintettel (8a)-ra:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\sigma^2}:\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}:\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}&=\xi'':\eta'':\zeta''=\xi:\eta:\zeta;\\ \frac{1}{\varrho^2}=\frac{1}{v^4}(\xi''^2+\eta''^2+\zeta''^2)&=\frac{1}{l^2}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

A relativ pálya e szerint egy $(x_1y_1z_1)$ középpontú l sugarú kör, mely pálya ezen $(x_1y_1z_1)$ ponttal együtt, ennek haladása irányában, egyenletes sebességgel mozog tovább.

Ha e legnagyobb kör e haladásra merőleges: az absolut pálya *henger-csavarvonal;* ha síkja ezt az irányt tartalmazza: a *trochois*-ok családjához tartozó görbe.

2. Az $(x_1 y_1 z_1)$ *pont egyenletes gyorsulással halad egyenesben, külső erők nem hatnak.*

Jelelje g ezen állandó gyorsulást és fektessük a Z-, illetve ζ-ák tengelyét ezen irányba. Ekkor (3)-ból:

$$ml\xi''=-R\xi\,; \qquad ml\eta''=-R\eta\,; \qquad ml\zeta''=-R\zeta+mg\,. \quad . \quad (11)$$

Ezek pedig megegyeznek a nyugvó, szilárd felfüggesztésű gömbi inga mozgás-egyenleteivel [180. §. (2)], úgy, hogy az m relativ mozgásának tárgyalása a gömbi ingáéval egyezik meg; ezért a kifejtést az olvasóra bízhatjuk.

A kúpinga- s a síkingamozgásnak itt is meg vannak a megfelelő esetei.

3. Az $(x_1 y_1 z_1)$ *pont egyenletesen mozog állandó síkú körben, külső erők nem hatnak.*

Az l_1 sugarú kör az XY (ΞH) síkban feküdjék; ekkor rendre a (3)-ból:

$$x_1=+\,l_1\cos\omega_1 t\,; \qquad y_1=+\,l_1\sin\omega_1 t\,;$$
$$x_1''=-\,\omega_1^2 x_1\,; \qquad y_1''=-\,\omega_1^2 y_1\,;$$
$$ml\xi''=-R\xi+m\omega_1^2 x_1\,; \qquad ml\eta''=-R\eta+m\omega_1^2 y_1\,; \qquad ml\zeta''=-R\zeta\ldots \quad (12)$$

A három egyenletnek ξ-, η-, ζ-vel, illetve ζ'-, η'-, ζ'-vel való szorzása s összegezéséből a (4)—(4c) tekintetbe vételével:

$$Rl^2=ml v^2+m\omega_1^2 l_1\,(\xi\cos\omega_1 t+\eta\sin\omega_1 t)\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$
$$l\,(\tfrac{1}{2}v^2)'=\omega_1^2 l_1\,(\xi'\cos\omega_1 t+\eta'\sin\omega_1 t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Végre, a kör síkjára való vetületi mozgásra vonatkozólag (12)-ből

$$l\,(\xi''\eta-\eta''\xi)=\omega_1^2 l_1\,(\eta\cos\omega_1 t-\xi\sin\omega_1 t),$$

avagy $\xi=r\cos\vartheta$-, $\eta=r\sin\vartheta$-t téve

$$-l\,(r^2\vartheta')'=+\omega_1^2 r l_1\sin(\vartheta-\omega_1 t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Jegyzet: Ha az m az XY síkban tartozik maradni, akkor $r=l=$ állandó és (15) írható:

$$l^2(\vartheta-\omega_1 t)''=-\omega^2 l_1\sin(\vartheta-\omega_1 t). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Itt $\vartheta-\omega t$ a forgó l_1 sugár és az l fonál (rúd) között lévő szög; ennek mozgás egyenlete ugyanaz, mint az ideális ingánál a fonál és a vertikális közötti szögé. A (13)-ból kitetszik, hogy az R feszültségre (avagy a nyomásra) nézve szintén áll e megegyezés.

A további részletezést az olvasóra bízzuk.

3) Anyagi pontmozgás a mozgás feltételei által meghatározott sima felületen.

188. §. *Mozgás legnagyobb esésű görbék mentén.* JOACHIMSTHAL *tétele. Párkányzat-felület. (Surface moulure).*

Az m anyagi pont a földnehézségnek mint független erőnek hatása alatt mozog *sima* felületen, melynek az a sajátsága legyen, hogy a kezdetben rajta nyugvó m-pont, elbocsátása után e felületen legnagyobb esésű görbét írjon le, ugyanis olyat, melynek mindenkori érintője a felülethez ugyane pontban fektetett érintősík valamenynyi érintői között a vízszintes síkkal a legnagyobb hajlásszöget képez. Milyennek kell a felületnek lennie?

1. JOACHIMSTHAL *tétele.*

a. A görbületi vonalak egyenleteinek egy alakja.

Jeleljék a, b, c, valamely felület x, y, z pontjára emelt normálisa-, α, β, γ e ponton áthaladó, a felület menti görbe érintője-, φ, χ, ψ e normálison s ezen érintőn átmenő sík normálisa irányacosinusait, akkor:

$$\alpha\varphi+\beta\chi+\gamma\psi=0\,; \qquad \varphi a+\chi b+\psi c=0\,; \qquad a\alpha+b\beta+c\gamma=0\,. \quad . \quad (1)$$

A görbületi vonalak jellemző feltétele, hogy ds ívelemük kezdő- és végpontján a felületre emelt két normális egy síkba-, a ds-et tartalmazó normális metszősíkba essék; e szerint, ha $a+da$, $b+db$, $c+dc$ a ds végpontjából a felületre emelt normális irányacosinusai, akkor e normális a (φ, χ, ψ) irányra szintén merőleges:

$$\varphi\,(a+da)+\chi\,(b+db)+\psi\,(c+dc)=0,$$

vagy az (1) középsője szerint

$$\varphi da+\chi db+\psi dc=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

melyhez még az $a^2+b^2+c^2=1$-ből

$$ada+bdb+cdc=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

járul. A (3) értelmében a (2) és az (1) középsőjének összehasonlítása nem adhatja a $da:db:dc=a:b:c$ eredményt, mert ebből:

$$\lg a=\lg \varepsilon_1^{-1}b=\lg \varepsilon_2^{-1}c,$$

ε_1 és ε_2 állandók lévén; és így az

$$1=a^2+b^2+c^2=a^2\,(1+\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)$$

egyenletből $a=$const. folyna, a mi absurdum. A (2)-nek az (1) elsejével való összehasonlításból

$$da:db:dc=\alpha:\beta:\gamma\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

és ez a görbületi görbe egyenleteinek egyik alakja, melyek egyesítése az (1) harmadik egyenletével (3)-at adja.

b. Közös görbületi görbe mentén egymást metsző két felület metszőszöge állandó.

Legyenek $F_1=0$ és $F_2=0$ egymást metsző felületek, s a metszővonaluk, α, β, γ ennek érintője iránycosinusai és a_1, b_1, c_1 az F_1-re, a_2, b_2, c_2 az F_2-re e vonal xyz pontjában emelt normálisakéi; áll:

$$a_1\alpha+b_1\beta+c_1\gamma=0; \qquad a_2\alpha+b_2\beta+c_2\gamma=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Ha az s mind a két felületre nézve görbületi vonal, akkor (4) szerint:

$$\alpha:\beta:\gamma=da_1:db_1:dc_1; \qquad \alpha:\beta:\gamma=da_2:db_2:dc_2, \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

melyekkel az (5) egyenletek, eltekintve a (3)-nak az $a_1b_1c_1$-re és az $a_2b_2c_2$-re is érvényes alakjától:

$$a_1da_2+b_1db_2+c_1dc_2=0; \qquad a_2da_1+b_2db_1+c_2dc_1=0; \quad . \quad . \quad (6a)$$

ezek összegének integrálja

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=\text{constans}=\cos\varepsilon \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

és ez a *b.* alczímben kimondott Joachimsthal-féle tétel.

bα) A tétel közvetetlenül meg is fordítható.

Ugyanis, ha (5) és (7), továbbá a (6) egyike áll, akkor a (6*a*)-nak is egyike áll, mely a (7)-tel a (6*a*) másikát és így a (6) másikát is vonja maga után. E szerint:

Ha két felület egymást állandó szög alatt metszi, és a metsző vonal az egyik felület görbületi vonala, akkor a másik felületnek is görbületi vonala.

bβ) Végre, miután egy síkban fekvő bármily görbe e sík görbületi vonala, következik:

Ha valamely felületnek egy görbületi vonala sík, akkor e vonal síkja a felületet állandó szög alatt metszi.

2. *Párkányzat-felület.*

a. Geométriai eljárás. E §. elején adott feltételek értelmében az s pálya érintője merőleges az m mindenkori helyzetében a felülethez fektetett érintő-síknak azon egyenesére, mely az m-en átmenve, vízszintesen fekszik. E szerint az m mindenkori helyén a felület normálisa, a pálya érintője és az mg súlyerő iránya merőlegesek az m-en át a felülethez vízszintesen húzott érintőre, s így a nevezett három irány mindig egy vertikális síkban fekszik.

Továbbá a $-mv^2\varrho_n^{-1}$ centrifugális erő mindig a felület normálisában fekszik [53. §. 3. pontja], ugyane normálisban fekszik az mg erő normális componense és a felület R reactiója, mely utóbbi az előbbi kettő összegével ellentetten egyenlő; végre az mg tangentiális componense az s

mentén van és így az m-re ható *összes* erők a mindenkori vertikális síkban fekszenek, mely sík e szerint a pálya osculáló síkja [46. §. első kikezdése és 34. §. Jegyzete, 60. l.]

Ez minden ds ívelemre nézve áll s így a pálya osculáló síkjai mind vertikálisak; másrészt az osculáló síkok irányváltozása (megcsavarodása) mindig a mindenkori érintő körüli forgásnak tekintendő [Math. Rep. 75*a*, 26. ábra 90. l.]; e szerint, ha az s érintői mind vertikálisak volnának és így az s vertikális egyenes volna, akkor az osculáló síkok is mind vertikálisak és különböző síkokban fekvők volnának, de miután az s érintői általában véve nem vertikálisak, osculáló síkjai pedig mind vertikálisak: e síkok az s mindenkori érintője körül nem lehetnek elcsavarodva, mert ez által a vertikális síkból kijutnának és a vízszintes-hez ferde helyzetet vennének fel. Ezért ezen osculáló síkok nem bírnak elcsavarodással, hanem mind egyetlen egy vertikális síkban fekszenek, azaz, *a legnagyobb esésű görbe vertikális sík görbe,* melynek *főnormálisa (görbületi sugara) mindenütt egybeesik a felületnek e görbe menti pontjaiban emelt normálisai mindenkori irányával.*

E görbe e szerint *egyszerre görbületi görbe* (mivel ds ívelemei kezdő- és végpontjában a felületre emelt normálisak egy síkba esnek) és *geodätikus görbe* (mivel e görbe görbületi sugara mindenütt a felület normálisába esik).

Másrészt a földnehézség egyensúlyi felületei vízszintes síkok, melyek a keresett felületet vízszintes sík görbékben metszik s e görbék *vízszintes* érintői a felület mindenkori érintő síkjában feküdvén, merőlegesen metszik az érintő ponton átmenő legnagyobb esésű görbét, szóval a nevezett vízszintes niveaugörbék serege a legnagyobb esésű görbék (a görbületi vonalak egyik) seregének merőleges trajectoriái.

Ámde, ha valamely felületen vont görbék rendszere a görbületi görbék egyik serege, akkor ezek merőleges trajectoriái a görbületi görbék másik seregét képezik [Math. Rep. 95. §.]; e szerint a jelen felületünkön elterülő vízszintes niveaugörbék e felület görbületi görbéinek másik seregét alkotják s így Joachimsthal tétele értelmében [e §. 1. pontjának $b\beta$) szakasza] minden vízszintes sík a keresett felületet egy-egy meghatározott állandó ε szög alatt metszi. E szög pedig a mindenkori legnagyobb esésű görbe érintője s a vízszintes sík közötti szög és csak a z=const. metszősík z magasságától függhet, azaz:

$$\operatorname{tg} \alpha = dz : ds = G(z).$$

Miután e görbék mind vertikális sík görbék és mindegyiknek hajlása a vízszinteshez ugyanazon z-nél ugyanaz: *e görbék mind egyenlők tartoznak lenni és síkjaik egy vertikális hengert burkolnak be.*

A keresett felületet e szerint kinematikailag előállíthatjuk, ha tetszőleges sík görbét tartalmazó síkot tetszőleges keresztmetszetű vertikális henger palást felületén síklás nélkül gördítjük vagy a hengert így lefejtjük: az ez alatt a generatrix görbe által leírt felület a keresett ú. n. *pár-*

kányzat-felület (surface moulure) alakja általánosságban a nevezett két független görbe alakjától függ (ugyanis a vertikális síkban lévő generatrixtől és a használt henger keresztmetszetétől) és e felületen a legnagyobb esésű görbe a generatrix görbe minden egyes helyzete. Egyszerűesetei a forgás-felületek, az egyenletes keresztmetszetű vízszintes és vertikális csatornák vagy hengerek. Kő-, fa- és agyagból készített párkányzat-dísz sokszor mutat így szerkesztett felületeket.

b. Analytikai eljárás. Legyenek a $z=f(x, y)$ egyenletű felületre nézve p, q, r, s, t az Euler jelölte differentiálquotiensek [Math. Repertorium 81. §. (2)], R a normális reactió (az ellennyomás), akkor

$$a=p:\sqrt{1+p^2+q^2}, \qquad b=q:\sqrt{\ldots}, \qquad c=1:\sqrt{\ldots}$$

a felület n normálisának-, $\alpha=x':v$, $\beta=y':v$, $\gamma=z':v$ a pálya érintőjének (a v sebességnek is) iránycosinusai; a mozgás egyenletei:

$$mx''=Ra, \qquad my''=Rb; \qquad mz''=Rc+mg \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (0)$$

A feltétel, hogy n és v mindig egy vertikális síkban legyenek az, hogy a vízszintes síkra való vetületeik egybeesnek, azaz folytatólagosan:

$$a:b=\alpha:\beta \qquad \text{avagy:} \qquad p:q=x':y', \qquad py'-qx'=0, \quad . \quad . \quad (1)$$

míg a (0) első két egyenletéből, az a és b felhasználásával: $py''-qx''=0$, melyet az (1)-nek t szerinti differentiálquotiensével egyesítve $x'q'-y'p'=0$.

Ezenkívül az x és y lévén a független két coordináta:

$$p'=\frac{dp}{dt}=\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dt}, \qquad q'=\frac{dq}{dt}=\frac{\partial q}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial q}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

s így $(dt)^2$-tal szorozva, utolsó egyenletünk Euler jelölésével

$$(sdx+tdy)\,dx=(rdx+sdy)\,dy, \quad \text{vagy} \quad s\frac{dx}{dy}+t=r+s\frac{dy}{dx};$$

Ámde itt az (1) szerint $dx:dy=x':y'=p:q$, miáltal

$$p:q=(rp+sq):(sp+tq), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

mint a keresett felület jellemző differentiálegyenlete. Ámde:

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y};$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(1+p^2+q^2)=pr+qs; \qquad \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(1+p^2+q^2)=ps+qt,$$

s így az $(1+p^2+q^2)$-nak és a z-nek x szerinti quotiensei egymáshoz úgy aránylanak mint az y szerintiek, a mi csak úgy lehetséges, ha

$$1+p^2+q^2=\psi(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ez a (2) első integrálja, mely szerint a felület n normálisa ugyanazon z-mellett, állandó szöget képez a vertikálissal, azaz, a $z=$const. niveaugörbék síkja a keresett felületet állandó szög alatt metszi.

De ekkor, JOACHIMSTHAL tétele szerint, e niveaugörbék a felület görbületi görbéi, és a legnagyobb esésű görbék, definitiójuk értelmében ezeket mindenütt derékszög alatt metszik; e szerint ezek a görbületi vonalak második rendszerét képezik, ezen utóbbi vonalak pedig az a alatti megfontolások értelmében vertikális sík görbék lévén: evvel a párkányzat-felületek minden szükséges jellemzője analytikailag elő van tüntetve.

4) Surlódó pontmozgás előírt szilárd felületen.

189. §. *Súlytalan és súlyos pont mozog érdes gömbfelület homorú oldalán.*

A felület egyenlete itt:

$$F(x, y, z)=l^2-(x^2+y^2+z^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

1. Ha m-re *külső erő nem hat*, az 56. §. (3) és (4) egyenletei:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-kR; \qquad R=m\frac{v^2}{l}; \qquad 0=d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)+k\frac{m}{l}v^2dt, \quad . \quad (2)$$

hol a harmadik az első s második egyesítésével egyenlő; a k legyen állandó.

Ezenkívül itt az m a gömbön geodäsiai görbét (legnagyobb kört) ír le [56. §. 5. pontjának *b)* kikezdése], melynek síkja a gömb középpontján s a kezdősebességen megyen át.

Nyerjük:

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{l}v^2=0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{v}\right)=\frac{k}{l};$$

$$v=\frac{l}{l+kv_0t}v_0; \qquad s=\frac{l}{k}\lg\left(1+\frac{k}{l}v_0t\right), \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

hol $t=0$-kor $v=v_0$ és $s=0$.

2. Ha m-re *csak a földnehézségi erő hat*, az 56. §. (1), (3) és (4) egyenletei:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=-\frac{R}{m}\left(\frac{x}{l}+k\frac{dx}{ds}\right);\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=-\frac{R}{m}\left(\frac{y}{l}+k\frac{dy}{ds}\right);\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=-\frac{R}{m}\left(\frac{z}{l}+k\frac{dz}{ds}\right)+g\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2s}{dt^2}&=g\frac{dz}{ds}-k\frac{R}{m}; \qquad \frac{R}{m}=\frac{v^2}{l}+g\frac{z}{l};\\ gdz&=d\left(\tfrac{1}{2}v^2\right)+k\frac{R}{m}vdt.\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4b)$$

E feladat általános tárgyalása már csak azért sem lehet egyszerű, mert a $k=0$ egyszerűsítés esetében a gömbi inga problémája adódik [180. §. (2)].

2*a*. Ha x és y igen kicsiny l-hez képest akkor [megfelelőleg a kis amplitudójú gömbi ingának [182. §.] első közelítésben $z=l=\text{const.}$, $z''=0$; $dz:ds=0$, miáltal v^2 másodrendű kicsiny sebesség-négyzet és:

$$r^2=x^2+y^2; \qquad R=mg; \qquad ds^2=dx^2+dy^2;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-g\left(\frac{x}{l}+k\frac{dx}{ds}\right); \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-g\left(\frac{y}{l}+k\frac{dy}{ds}\right). \quad . \quad (5)$$

Ez pedig oly centrális mozgás egyenletrendszere, hol a centrális erő a középpont felé van irányítva és a tőle való távolsággal egyenesen arányos s a pont vízszintes érdes síkon mozog; (5) írható:

$$lx''=-gx-gklx':v; \qquad ly''=-gy-gkly':v \quad . \quad . \quad . \quad (5a)$$

Ebből az r és ϑ sík polárcoordináták felhasználásával:

$$l(x'x''+y'y'')=-g(xx'+yy')-gkl(x'^2+y'^2):v;$$
$$\tfrac{1}{2}l(v^2)'=-\tfrac{1}{2}g(r^2)'-gklv,$$

vagy, ha $t=0$-kor $s=0$, $r=0$, $v=v_0$:

$$v^2=v_0^2+\frac{g}{l}(a^2-r^2)-2gks \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Hasonlóképen (5*a*)-ból:

$$l(xy''-yx'')=-gkl(xy'-yx'):v,$$

$$\frac{(xy'-yx')'}{xy'-yx'}=-\frac{gk}{v} \quad \text{vagy} \quad \lg\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right)=-gk\int\frac{dt}{v}=-gk\int\frac{ds}{v^2},$$

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt}=ce^{-gk\int\frac{ds}{v^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Ehhez járul még az általános

$$r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=v^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

összefüggés, melyhez az (5*a*)-ból még az

$$l(xx''+yy'')=-g(x^2+y^2)-gkl(xx'+yy'):v$$

$$\tfrac{1}{2}(r^2)''-v^2=-\frac{g}{l}r^2-gkr\frac{r'}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

egyenlet csatlakozik.

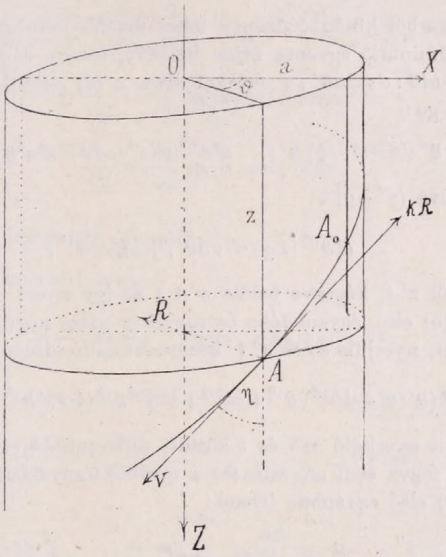
A további számítás bonyolódott; de a (6), (7), (8), (9) egyenletek, (melyek közül három a független) mutatják, hogy mind a lineáris, mind a felületi sebesség s így az r is az idő folytával fogy.

V. ö. az ellenálló közegben mozgó ily inga problémáját [200 és 201. §§.].

190. §. *Nehéz pont vertikális tengelyű körhenger belső érdes felületen mozog. Ugyanaz súlytalan pontra nézve.*

Jeleljék a, ϑ, z az m henger-coordinátáit (85. ábra), η a szöget, melyet az s pálya mindenkori érintője képez a vertikálissal, úgy, hogy a v sebesség vízszintes és függélyes componense

$$v_\vartheta = a\frac{d\vartheta}{dt} = v\sin\eta, \qquad v_z = \frac{dz}{dt} = v\cos\eta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$



85. ábra.

Az R kényszererő itt mindig a henger tengelye felé tart; a kR surlódás a v-vel ellentett irányú és $-kR\sin\eta$, $-kR\cos\eta$ a vízszintes és vertikális vetületei.

I. *Nehéz pont mozgása.*

A fentiek szerint a növekvő ϑ-k (az A_1A ív)-, az a- s a z-menti mozgás-egyenletek [56. §.]:

$$m\frac{d^2(a\vartheta)}{dt^2} = -kR\sin\eta; \quad 0 = -R + m\frac{v^2}{\varrho_n}; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = -kR\cos\eta + mg. \quad (2)$$

A ϱ_n a pálya ds elemén áthaladó a felületre normális metszetnek görbületi sugara, melyre nézve $(ds, z)\measuredangle = \eta$ lévén, Euler tétele

$$\frac{1}{\varrho_n} = \frac{\cos^2\eta}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\eta}{\varrho_2}, \text{ melyből, mivel itt } \varrho_1 = \infty;\ \varrho_2 = a,\ \varrho_n\sin^2\eta = a.$$

E szerint a (2) középső egyenlete az (1) elseje tekintetbe vételével:

$$R=m\frac{v^2}{a}\sin^2\eta=ma\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

és így a (2) első és harmadik egyenlete:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv_\vartheta}{dt}&=a\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=-ka\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\sin\eta\,;\\ \frac{dv_z}{dt}&=\frac{d^2z}{dt^2}=-ka\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\cos\eta+g\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

E rendszerből különbözőképen lehet tovább indulni:

a Az eliminátió egyenes útján haladva, átvéve a g-t a bal oldalra, (1)-ből $\operatorname{tg}\eta=ad\vartheta:dz=a\vartheta':z'$ értéket írva, a (4) egyenleteinek osztata s négyzet-összege:

$$\vartheta''z'=(z''-g)\,\vartheta'\,; \qquad a^2\vartheta''^2+(z''-g)^2=k^2a^2\vartheta'^4\,; \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Eliminálva $(z''-g)$-t:

$$a^2\vartheta''^2\left[1+(z':a\vartheta')^2\right]=k^2a^2\vartheta'^4\,;$$

kifejezve ebből z'-t, képezve belőle z''-t s az így nyert z'-t és z''-t helyettezve az (5) első egyenletébe és rövidítés után négyzeteléssel eltávolítva a gyököt, nyerjük a ϑ s t között fennálló differentiálegyenletet:

$$a^2k^4\vartheta'''(\vartheta'''\vartheta'-4\vartheta''^2)\,\vartheta'^9+g\vartheta''^6+k^2\vartheta''^4\vartheta'^4(4a^2k^2\vartheta'^4-g^2)=0. \quad . \quad (6)$$

Analog módon nyerhető a z és t közötti differentiálegyenlet; de bonyolódottságánál fogva sem ez, sem (5) a további tárgyalásra nem alkalmas.

b. Az (5) első egyenlete írható:

$$\frac{\vartheta''}{\vartheta'}=\frac{z''}{z'}-\frac{g}{z'}\,; \quad \text{ebből} \quad \lg\vartheta'=\lg z'-g\int\frac{dt}{z'}+\lg c,$$

avagy:

$$\vartheta'=z'ce^{-g\int\frac{dt}{z'}}\,; \qquad \vartheta''=(z''-g)\,.\,\frac{\vartheta'}{z'}=(z''-g)\,ce^{-g\int\frac{dt}{z'}}\,;$$

helyettezve ezeket az (5) második egyenletébe:

$$k^2c^4z'^4e^{-4g\int\frac{dt}{z'}}-(z''-g)^2\left\{\frac{1}{a^2}+c^2e^{-2g\int\frac{dt}{z'}}\right\}=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

mely a z egyenletének rövidebb, de nem egyszerűbb alakja.

c. Más alakot ád az η és t közötti összefüggés:

A (4)-ből az (1) tekintetbe vételével azonnal nyerjük:

$$v_\vartheta\frac{dv_z}{dt}-v_z\frac{dv_\vartheta}{dt}=gv\sin\eta,$$

mely írható:

$$v_\vartheta^2\frac{d}{dt}\left(\frac{v_z}{v_\vartheta}\right)=v_\vartheta^2\frac{d}{dt}\left(\operatorname{cotg}\eta\right)=gv_\vartheta\,.$$

Ebből:

$$-\frac{1}{\sin\eta}\frac{d\eta}{dt}=\frac{g}{v}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

egyesítve ezt a (4) első egyenletének

$$\frac{dv_\vartheta}{dt}=-k\frac{v^2\sin^2\eta}{a}\sin\eta=-k\frac{v_\vartheta^3}{av}$$

alakjával

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{d\eta}{dt}\frac{1}{\sin\eta}=\frac{a}{k}\cdot\frac{dv_\vartheta}{dt}\frac{1}{v_\vartheta^3} \quad \text{vagy:} \quad -\tfrac{1}{2}d\left(\frac{1}{v_\vartheta^2}\right)=\frac{k}{ag}\cdot\frac{d\eta}{\sin\eta},$$

$$-\frac{1}{v_\vartheta^2}=\frac{2k}{ag}\lg\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\eta\right)+\text{const.}$$

$$\frac{1}{v_\vartheta^2}=\frac{2k}{ag}\lg\left[c\,.\operatorname{cotg}\left(\tfrac{1}{2}\eta\right)\right], \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

hol $\frac{2k}{ag}\lg c$ az integrátió állandója.

Rövidség kedveért írva:

$$\frac{2k}{ag}=\varepsilon^2; \qquad \lg\left[c\,.\operatorname{cotg}\left(\tfrac{1}{2}\eta\right)\right]=H, \quad \ldots\ldots \quad (9a)$$

s téve ebbe $v_\vartheta=v\sin\eta$-át, végre kifejezve v-t a (8)-al, a (9)-ből

$$\frac{1}{v_\vartheta}=\frac{1}{v\sin\eta}=-\frac{1}{g\sin^2\eta}\frac{d\eta}{dt}=\varepsilon\sqrt{H}; \quad \ldots\ldots \quad (9b)$$

$$g\varepsilon t=\int_{\eta}^{\eta_0}\frac{d\eta}{\sin^2\eta\sqrt{H}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9c)$$

Egyesítve végre (9b)-t az (1) két egyenletével:

$$\frac{1}{v\sin\eta}\cdot\frac{1}{v\sin\eta}=-\frac{1}{g\sin^2\eta}\cdot\frac{d\eta}{dt}\cdot\frac{dt}{ad\vartheta}=\varepsilon^2H;$$

$$\frac{1}{v\sin\eta}\cdot\frac{1}{v\cos\eta}=-\frac{1}{g\sin^2\eta}\frac{d\eta}{dt}\cdot\frac{dt}{dz}=\varepsilon^2H\operatorname{tg}\eta;$$

$$\vartheta=\frac{1}{ag\varepsilon^2}\int_{\eta}^{\eta_0}\frac{d\eta}{H\sin^2\eta}; \qquad z=\frac{1}{g\varepsilon^2}\int_{\eta}^{\eta_0}\frac{\cos\eta d\eta}{H\sin^3\eta} \quad \ldots \quad (10)$$

A (9c) és (10) szerint a t és η; ϑ és η; z és η közötti összefüggések quadraturákra vannak redukálva, mely utóbbiak azonban, a H complicált szerkezeténél fogva (9a), véges alakban nem állíthatók elő.

A pálya néhány általános tulajdonsága (9)- és (10)-ből olvasható le; ezt az olvasóra bízzuk [v. ö. Rethy Mór: Math. és Phys. Lapok, II. kötet, 269—272. ll., 1893.].

d. Közelítő eljárások. Rendesen *kicsiny* a k *együttható az egységhez képest*; akkor a feladat mint háborgási probléma tárgyalható.

1) *Első közelítésben* a (2)-nek k-val szorzott tagjait elhanyagolva és $_1$ indexxel e közelítés értékeit jelelve;

$$a\frac{d^2\vartheta_1}{dt^2}=0; \qquad \frac{d^2z_1}{dt^2}-g=0; \qquad \sin\eta_1=a\frac{d\vartheta_1}{ds_1}; \qquad \cos\eta_1=\frac{dz_1}{ds_1} \tag{11}$$

Ezekből:

$$\vartheta_1=\omega_1 t+\vartheta_0; \qquad z_1=\tfrac{1}{2}gt^2+ht+z_0; \qquad ds_1=[a^2\omega_1^2+(gt+h)^2]^{\frac{1}{2}}dt \tag{12}$$

és (3)-ból:

$$R_1=ma\omega_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{13}$$

2) *A második közelítés* egyenleteit nyerjük, ha (12)-ből ϑ_1 és z_1-t, illetve η_1- és R_1-et helyettesítünk a (2)-nek k-val szorzott tagjaiba; $_2$ indexxel jelelve e közelítés értékeit:

$$ma\frac{d^2\vartheta_2}{dt^2}=-kR_1\sin\eta_1; \qquad m\frac{d^2z_2}{dt^2}=-kR_1\cos\eta_1+mg,$$

avagy a (11), (12), (13) tekintetbe vételével

$$\frac{d^2(\vartheta_2-\vartheta_1)}{dt^2}=-\frac{ka\omega_1^2}{\sqrt{a^2\omega_1^2+(gt+h)^2}}; \qquad \frac{d^2(z_2-z_1)}{dt}=-\frac{ka\omega_1^2(gt+h)}{\sqrt{a^2\omega_1^2+(gt+h)^2}}.$$

Rövidség kedveért írva

$$gt+h=aw; \qquad dt=adwg^{-1}, \qquad ka^2\omega_1^2g^{-2}=e^2;$$

$$\frac{d^2(\vartheta_2-\vartheta_1)}{dw^2}=-\frac{e^2\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2+w^2}}; \qquad \frac{d^2(z_2-z_1)}{dw^2}=-\frac{e^2aw}{\sqrt{\omega_1^2+w^2}}.$$

Ezekből

$$\frac{d(\vartheta_2-\vartheta_1)}{dw}=-e^2\omega_1\lg c\,[w+\sqrt{\omega_1^2+w^2}];$$

$$\frac{d(z_2-z_1)}{dw}=-e^2a\,(\sqrt{\omega_1^2+w^2}+\tfrac{1}{2}\gamma);$$

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_2-\vartheta_1&=-e^2\omega_1\{w\lg c\,[w+\sqrt{\omega_1^2+w^2}]-\sqrt{\omega_1^2+w^2}+C\};\\ z_2-z_1&=-e^2a\{\tfrac{1}{2}w(\sqrt{\omega_1^2+w^2}+\gamma)+\tfrac{1}{2}\omega_1^2\lg\Gamma[w+\sqrt{\omega_1^2+w^2}]\};\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

hol c, C; γ, Γ az integrátió állandói, melyek azonban a (12)-nek ω_1, ϑ_0; h, z_0 állandóival azon feltételek alapján fejezendők ki, hogy $t=0$-kor $\vartheta_1=\vartheta_2=\vartheta_0$; $z_1=z_2=z_0$; $\vartheta_1'=\vartheta_2'=\omega_1$; $z_1'=z_2'=h$.

A (14) egyenletek rendes körülmények között elég pontosak, legalább egyes pályarészeknek az előállítására.

II. *Súlytalan pont mozgása.*

A megelőző I. pontban g-helyébe zérus teendő; az (5) rendszer írható:

$$\vartheta'':\vartheta'=z'':z'; \qquad a^2\vartheta''^2+z''^2-k^2a^2\vartheta'^4=0 \quad . \quad . \quad . \tag{15}$$

Az elsőből

$$\lg \vartheta' = \lg z' - \lg ac\,; \qquad z' = ac\vartheta'\,; \qquad z = ac\vartheta + z_0\,, \quad . \quad . \quad (16)$$

azaz, a *pálya közönséges csavarvonal*, c állandó lévén.

Helyettezve (16)-ból $z'' = ac\vartheta''$-t a (15) második egyenletébe, belőle:

$$\vartheta'' \sqrt{1+c^2} = \pm k\vartheta'^2 \quad \text{vagy:} \quad \frac{\vartheta''}{\vartheta'^2} = -\left(\frac{1}{\vartheta'}\right)' = -\frac{k}{\sqrt{1+c^2}},$$

mert ϑ'' szöggyorsulás a surlódásból származván, csak *negativ* lehet Lesz:

$$\vartheta' = \left\{\frac{kt}{\sqrt{1+c^2}} + \frac{1}{\omega_0}\right\}^{-1} = \frac{\omega_0\sqrt{1+c^2}}{\sqrt{1+c^2}+\omega_0 kt}\,;$$

$$\vartheta - \vartheta_0 = \frac{\sqrt{1+c^2}}{k} \lg\left(1 + \frac{\omega_0 kt}{\sqrt{1+c^2}}\right); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

hol ω_0 és ϑ_0 az integrátió állandói; z-t a (17)-tel a (16) adja.

A (3)-ból a nyomás értéke:

$$R = ma\vartheta'^2 = \frac{ma\omega_0^2(1+c^2)}{[\sqrt{1+c^2}+\omega_0 kt]^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

A sebesség csak $t=\infty$-kor zérus, mikor ϑ s így a pálya hoszsza végtelen nagy.

d) Eljárások és példák ellenálló közegben végbemenő pontmozgásokra.

1) Állandó erő. A ballistika egyszerű és általános problémája pontra nézve.

191. §. *Az ellenállás a sebesség tetszőleges hatványával arányos; szabad (független) erők nincsenek.*

I. Az ellenállás a sebességgel ellentett irányú; a pálya egyenes vonalú; a mozgás egyenlete

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\varkappa v^n \quad \text{vagy:} \quad \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = v\frac{dv}{ds} = -\varkappa v^n\,. \quad (1)$$

$$\frac{dv}{v^n} = -\varkappa dt, \qquad \text{vagy:} \quad \frac{dv}{v^{n-1}} = -\varkappa ds\,;$$

$$\frac{1}{v^{n-1}} - \frac{1}{v_0^{n-1}} = \varkappa(n-1)\,(t-t_0), \quad \text{vagy:} \quad \frac{1}{v^{n-2}} = \varkappa(n-2)\,(s-s_0)\,. \quad (2)$$

Kiküszöbölve a (2) két egyenletéből a v-t, nyerjük az s és t közötti összefüggést.

Az n csak *positiv* lehet, mert a dolog természete szerint, ha $t > t_0$, akkor mindig $v < v_0$-nak kell lennie.

Kivételes esetek: $n=1$ és $n=2$.

1. Ha $n=1$,

$$\frac{dv}{v} = -\varkappa dt, \quad -\lg v = \varkappa t + \text{const.}$$

ha még $t=0$-kor $s=0$, $v=v_0$, akkor

$$v = v_0 e^{-\varkappa t}; \qquad s = \frac{v_0}{\varkappa}(1-e^{-\varkappa t}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

A sebesség $t=\infty$-kor zérus, az s ív pedig $v_0 : \varkappa$.

2. Ha $n=2$,

$$\frac{dv}{v^2} = -\varkappa dt,$$

$$v = \frac{v_0}{1+\varkappa v_0 t}; \qquad s = \frac{1}{\varkappa}\lg(1+\varkappa v_0 t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

ha $t=0$-kor $s=0$, $v=v_0$.

II. Az *ellenállásbeli munka*

$$L = \int Sds = \int m\varkappa v^n . ds = m\varkappa \int v^n . v . dt;$$

az (1) felhasználásával:

$$L = -m\varkappa \int v^{n+1} . \frac{dv}{\varkappa v^n} = \tfrac{1}{2} m (v_0^2 - v^2); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

azaz, a surlódás legyőzésére szükséges munka az eleven erő fogyásával egyenlő, miként ez itt várható volt.

192. §. *Az ellenállás a sebesség négyzetével arányos, a független erő nagysága és iránya állandó s a mozgás irányába esik. (A levegőben függélyesen felfelé hajított vagy lefelé eső test vagy lövedék mozgása.)*

A surlódás $mS = m\varkappa v^2$ kifejezésében írjunk $\varkappa = g : \nu^2$; a független erőt pedig $-mg$-nek, a positiv s-eket ezen utóbbi erővel ellentett irányban (azaz fölfelé) számítva; e szerint ν az a sebesség, melynél a surlódás értéke egyenlő mg-vel.

I. *Hajitás függélyesen fölfelé.* A mozgás egyenlete:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg - mg\frac{v^2}{\nu^2}, \quad \text{vagy:} \quad -\frac{1}{g}\frac{dv}{dt} = 1 + \frac{v^2}{\nu^2} \quad . \quad . \quad (1)$$

Az (1)-ből

$$-\frac{g}{\nu}dt = \frac{dv}{\nu} : \left(1 + \frac{v^2}{\nu^2}\right); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\frac{g}{\nu}t = \operatorname{arc\,tg}\frac{v_1}{\nu} - \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{\nu}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

hol $t=0$-kor $v=v_1$; továbbá, rövidítésül írva

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{v_1}{\nu} = \eta_1, \quad \text{vagy:} \quad \operatorname{tg}\eta_1 = \frac{v_1}{\nu}; \qquad \frac{g}{\nu} = \varepsilon, \quad . \quad . \quad (4)$$

$$v = \nu \operatorname{tg}(\eta_1 - \varepsilon t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Az s és t *közötti összefüggés* az (5)-ből a (4) szerint:

$$\frac{ds}{dt} = v = v\,\frac{\operatorname{tg}\eta_1 - \operatorname{tg}\varepsilon t}{1+\operatorname{tg}\eta_1 \operatorname{tg}\varepsilon t} = v\,\frac{v_1\cos\varepsilon t - v\sin\varepsilon t}{v_1\sin\varepsilon t + v\cos\varepsilon t} =$$

$$= \frac{v}{\varepsilon}\,\frac{d}{dt}\{\lg[v_1\sin\varepsilon t + v\cos\varepsilon t]\};$$

$$s = \frac{v^2}{g}\lg\left[\cos\left(\frac{g}{v}t\right) + \frac{v_1}{v}\sin\left(\frac{g}{v}t\right)\right], \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

ha $t=0$-kor $s=0$.

Az s és v közötti összefüggés az (1) második egyenletéből:

$$ds = vdt = -\frac{v^2}{g}\,\frac{vdv}{v^2+v^2},$$

$$s = \frac{v^2}{2g}\lg\frac{v^2+v_1^2}{v^2+v^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Az *emelkedés ideje (tartama)*, T_1 az (5)-ből következik, lévén T_1-kor $v=0$, s így (2) és (4) tekintetbe vételével:

$$\eta_1 = \varepsilon T_1, \qquad T_1 = \frac{v}{g}\operatorname{arc\,tg}\frac{v_1}{v}; \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

az *emelkedés H magassága* a (7)-ből $v=0$ mellett adódik:

$$H = \frac{v^2}{2g}\lg\left(1+\frac{v_1^2}{v^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

II. *Esés függőlegesen lefelé.* A mozgás egyenlete:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - mg\frac{v^2}{v^2}, \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{g}\cdot\frac{dv}{dt} = 1 - \frac{v^2}{v^2} \quad \ldots \quad (10)$$

Ebből

$$t = \frac{v}{2g}\lg\frac{v+v}{v-v}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

ha $t=0$-kor $v=0$.

Ebből viszont, a $g : v = \varepsilon$ jelöléssel

$$v = v\,\frac{e^{\varepsilon t} - e^{-\varepsilon t}}{e^{\varepsilon t} + e^{-\varepsilon t}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

A (12) még írható:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{v}{\varepsilon}\,\frac{d}{dt}\{\lg[e^{\varepsilon t} + e^{-\varepsilon t}]\};$$

$$s = \frac{v^2}{g}\lg\tfrac{1}{2}\{e^{\frac{g}{v}t} + e^{-\frac{g}{v}t}\}, \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

ha $t=0$-kor $s=0$.

A (10)-ből még:

$$ds = vdt = \frac{v^2}{g}\,\frac{vdv}{v^2 - v^2};$$

$$s = \frac{v^2}{2g}\lg\frac{v^2}{v^2 - v^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

A (12) értelmében az eső test sebessége zérustól kezdve folytonosan növekszik és asymptotice közeledik a v értékhez.

III. *Függélyesen felfelé hajított és viszszaeső test mozgása.*

Jeleljék v_2 a H magasságban elbocsátott [illetve v_1 kezdősebességgel felfelé hajított, T_1 idő alatt H emelkedést elért s onnan viszszaeső] test sebességét a H magasság alsó végén; T_2 a hozzátartozó *esési tartamot* akkor (9) és (14) értelmében:

$$H = \frac{v^2}{2g} \lg\left(1 + \frac{v_1^2}{v^2}\right) = \frac{v^2}{2g} \lg \frac{v^2}{v^2 - v_2^2} = H, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

melyből a v_2^2 értéke:

$$\frac{v^2 + v_1^2}{v^2} = \frac{v^2}{v^2 - v_2^2}; \qquad v_2^2 = \frac{v^2}{v^2 + v_1^2} v_1^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15a)$$

úgy hogy miként várható volt, a leérkezés v_2 sebessége mindig kisebb a v_1 kezdősebességnél.

A T_2-t a (11) adja $v = v_2$ értékre; a (15a) segélyével

$$T_2 = \frac{v}{2g} \lg \frac{v + v_2}{v - v_2} = \frac{v}{2g} \lg \frac{\sqrt{v^2 + v_1^2} + v_1}{\sqrt{v^2 + v_1^2} - v_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Ellenben a (8):

$$T_1 = \frac{v}{g} \operatorname{arc\,tg} \frac{v_1}{v}.$$

Miután a pálya minden pontjára nézve (15a) sémája szerint a felfelé mozgás sebessége nagyobb, mint a felfelé mozgás sebessége nagyobb, mint a lefelé mozgásnak ugyane pontban való sebessége: mindig áll $T_2 > T_1$, a viszszaesés tartama nagyobb, mint az emelkedés tartama.

IV. *Az ellenállásbeli munka s az eleven erő viszonyai.*

A 45. §. (4.) tétele szerint s surlódás legyőzésére szükséges munka:

$$\mathrm{L} = \int S ds = \int (X dx + Y dy + Z dz) - \tfrac{1}{2} m v^2 + \text{const.};$$

e szerint ennek értéke az emelkedés és a viszszaesés közben

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{L}_1 &= \int_0^H - mg ds - \left[\tfrac{1}{2} m v^2\right]_{v_1}^0 = \tfrac{1}{2} m v_1^2 - mgH; \\ \mathrm{L}_2 &= \int_0^H + mg ds - \left[\tfrac{1}{2} m v^2\right]_0^{v_2} = mgH - \tfrac{1}{2} m v_2^2, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

melyekbe a H-nak a (15)-ben írt megfelelő értékei tehetők.

Ebből, tekintettel (15a)-ra

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 = \tfrac{1}{2} m (v_1^2 - v_2^2) = \tfrac{1}{2} m v_1^2 \cdot \frac{v_1^2}{v^2 + v_1^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

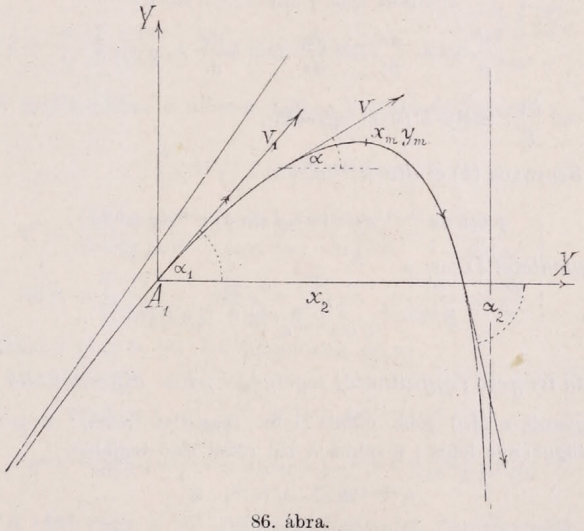
E szerint az indulástól a viszszaérkezésig az eredeti mozgási erélynek $\frac{v_1^2}{v^2+v_1^2}$-ed része szolgál az ellenállás legyőzésére s alakul át meleggé.

193. §. *A pont ballistikus problémájának.* Jacobi-*féle* * *általános tárgyalása.* ($mS=m[a+bv^n]$). *A probléma viszszavezetése quadraturákra.*

A test a föld nehézsége és az S surlódás hatása alatt mozog; az Y-tengely függélyesen fölfelé van irányítva, 86. ábra az XY síkban fekszik a v_1 kezdősebesség; ezért

$$mx''=-m(a+bv^n)\frac{dx}{ds}; \qquad my''=-m(a+bv^n)\frac{dy}{ds}-mg \quad . \quad (1)$$

a mozgás egyenletei és m mindig az XY-síkban marad.



86. ábra.

1. Az (1) írható:

$$x''=-(a+bv^n)\frac{x'}{v}; \qquad y''=-(a+bv^n)\frac{y'}{v}-g \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

Jelelje α az X és a pálya érintője közötti szöget, akkor a gyorsulásnak tangentiális és normális componense

$$s''=-g\sin\alpha-(a+bv^n); \qquad v^2:\varrho=+g\cos\alpha; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

* Jacobi: Crelle's Journal XXIV. köt., 5—27. ll. (De motu punctis singularis).

hol $x'=v\cos\alpha$; $y'=v\sin\alpha$, $\varrho=-ds:d\alpha$; a negativ jel áll, mert az s homorú oldalát fordítja az X tengely felé és α az s növekedésével fogy.

Az (1a) két egyenletéből és még elsejéből:

$$x'y''-y'x''=-gx'=+gvx'':(a+bv^n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ámde folytatólagosan:

$$x'=v\cos\alpha; \qquad x''=v'\cos\alpha-v\alpha'\sin\alpha;$$

$$y'=v\sin\alpha; \qquad y''=v'\sin\alpha+v\alpha'\cos\alpha,$$

miáltal (3)-ból:

$$(a+bv^n)\,v^2\alpha'=+gv\,(v'\cos\alpha-v\sin\alpha\alpha'),$$

avagy:

$$g\cos\alpha v'=v\,(a+bv^n+g\sin\alpha)\,\alpha' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

[Ugyanezt az egyenletet (1a)-ból és (2)-ből is nyertük volna:

$$(v\cos\alpha)'=(x')'=x''=-S\cos\alpha;$$

$$\frac{v^2}{\varrho}=v\cdot\frac{ds}{dt}\cdot-\frac{d\alpha}{ds}=-v\frac{d\alpha}{dt}=g\cos\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4_1)$$

$\frac{(v\cos\alpha)'}{\alpha'}=\frac{Sv}{g}$, mely a (4)-el egyenlő].

2. *Szorozva* (4)*-et* $dtv^{-(n+1)}$*-el:*

$$g\cos\alpha v^{-(n+1)}dv-(a+g\sin\alpha)\,v^{-n}d\alpha=bd\alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

mely egyenletet Jacobi a

$$\mu=-A\frac{n}{g\cos^{n+1}\alpha}\,\mathrm{tg}^{\frac{na}{g}}\left(\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{4}\pi\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

integráló tényező (együttható) segélyével teljes differentiállá alakit.

[Ugyanis a (4a) jobb oldala v-től független lévén: a μ tényező csak α függvénye lehet; továbbá a bal oldal első tagjában

$$v^{-(n+1)}dv=-d\,(v^{-n}):n\text{-},$$

másodikában v^{-n} lépvén fel, kitetszik, hogy μ-vel való szorzás után ez az oldal $d\,(\lambda\,.\,v^{-n})$ alakú teljes differentiállá lesz, hol λ az α-nak meghatározandó függvénye, melyre nézve kell, hogy álljon:

$$v^{-n}d\lambda-n\lambda v^{-(n+1)}dv=d\,(\lambda v^{-n})=\mu\,\{g\cos\alpha v^{-(n+1)}dv-(a+g\sin\alpha)\,v^{-n}d\alpha\}. \quad (6)$$

A v^{-n} és $v^{-(n+1)}$ szorzói szükségszerű egyenlítéséből a λ és μ meghatározására szolgáló egyenletek adódnak:

$$d\lambda=-\mu\,(a+g\sin\alpha)\,d\alpha; \qquad n\lambda=-\mu g\cos\alpha, \quad . \quad . \quad . \quad (6a)$$

melyekből folytatólagosan:

$$\frac{d\lambda}{\lambda}=+n\frac{a+g\sin\alpha}{g\cos\alpha}d\alpha=\frac{na}{g}\,\frac{d\alpha}{\cos\alpha}-n\frac{d\,(\cos\alpha)}{\cos\alpha}; \quad . \quad (7)$$

$$\lg \lambda = \lg A + \frac{n\alpha}{g} \lg tg\,(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\alpha) - n \lg \cos\alpha\,;$$

$$\lambda = A \cdot \frac{tg^{\frac{n\alpha}{g}}\,(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\alpha)}{\cos^n \alpha}\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7a)$$

hol A az integrátió állandója.

A (7a)-val a (6a) második egyenlete adja μ-nek (5) értékét].

A (4a) jobb oldalát μ-vel szorozva, (6)- és (6a) értelmében

$$d(\lambda v^{-n}) = b\mu d\alpha = -\frac{n}{g}\frac{b\lambda d\alpha}{\cos\alpha}\,; \qquad \lambda v^{-n} = -\frac{n}{g}\int \frac{b\lambda d\alpha}{\cos\alpha} \quad \ldots \quad (8)$$

Jegyzet: A (8) alakjából azonnal következik, hogy az még akkor is érvényes, ha b az α-tól függ; de még ha a is α-nak függvénye, a λ és μ értéke könnyen adódik; ezen esetben ugyanis (7)-ből

$$\lg \lambda = \frac{n}{g}\int \frac{a d\alpha}{\cos\alpha} - n \lg \cos\alpha + \text{const.}, \qquad \lambda = A\,\frac{e^{\frac{n}{g}\int \frac{a d\alpha}{\cos\alpha}}}{\cos^n \alpha} \quad . \quad (9)$$

3. A továbbiakban *a állandó* legyen s rövidség kedveért:

$$\frac{a}{g} = c\,; \qquad tg\,(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\alpha) = \eta\,; \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} \eta^2 &= \frac{(1+tg\,\frac{1}{2}\alpha)^2}{(1-tg\,\frac{1}{2}\alpha)^2} = \frac{(\cos\frac{1}{2}\alpha + \sin\frac{1}{2}\alpha)^2}{(\cos^2\frac{1}{2}\alpha - \sin\frac{1}{2}\alpha)^2} = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\,; \\ \sin\alpha &= \frac{\eta^2-1}{\eta^2+1}\,; \qquad \cos\alpha = \frac{2\eta}{\eta^2+1}\,; \qquad \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \frac{d\eta}{\eta} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (10a)$$

Ezekkel a (7a) és (8), b-t állandónak véve:

$$\lambda = A \cdot \eta^c \cdot \frac{(\eta^2+1)^n}{2^n \eta^n} = (\tfrac{1}{2})^n A \eta^{n(c-1)} (\eta^2+1)^n \quad \ldots \quad (11)$$

$$\eta^{n(c-1)} (\eta^2+1)^n v^{-n} = -nbg^{-1} \int \eta^{n(c-1)-1} (\eta^2+1)^n d\eta \quad \ldots \quad (12)$$

Ez a (4a) vagy a (6) differentiálegyenlet transformált alakja, melyben, ha n *positiv, egész szám*, az $(\eta^2+1)^n$ véges számú hatványok összege, e szerint a jelzett integrátió tényleg végrehajtható és a v sebesség az η (azaz az α) ismert függvényének tekintendő.

Jegyzet. Különösen egyszerű az az eset, mikor

$$\frac{a}{g} = c = \frac{n+2}{n}\,; \quad \text{azaz} \quad n(c-1) = 2\,;$$

ekkor (12)-ből azonnal

$$v^n = -\frac{2(n+1)g}{nb} \cdot \frac{\eta^2}{\eta^2+1} + \text{constans.} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Szorozva végre a (4_1) alatti, ($10a$) utolsó egyenletével kifejezett

$$-\frac{v}{g}\cdot\frac{d\alpha}{\cos\alpha}=dt=-\frac{v}{g}\frac{d\eta}{\eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

egyenletet $x'=v\cos\alpha$-, illetve $y'=v\sin\alpha$-val, a ($10a$) szerint:

$$\left.\begin{aligned} x'dt&=-\frac{v^2}{g}\cdot\quad d\alpha\quad=dx=-\frac{2}{g}\cdot\frac{v^2\eta^2 d\eta}{\eta^2+1}\\ y'dt&=-\frac{v^2}{g}\cdot\frac{\sin\alpha d\alpha}{\cos\alpha}=dy=-\frac{1}{g}\cdot\frac{v^2(\eta^2-1)}{\eta^2+1}\cdot\frac{d\eta}{\eta}\end{aligned}\right\} \quad . \quad (15)$$

A v a (12)-ből, mint η [s így (10) szerint mint az α] függvénye ismeretes lévén, a (14) és (15) alapján *a probléma quadraturákra van visszavezetve.*

Jegyzet. Jacobi (i. h.) bebizonyította, hogy még az $S=a+b\lg v$ esetben vezethetők viszsza quadraturákra a t-, x-, y-nek α-val előállított kifejezései; de ezen S-nek physikai esetek nem igen felelnek meg.

194. §. *Folytatás: Egyszerüsités, az ellenállásnak nincs állandó tagja* ($mS=mbv^n$).

A megelőző §. kifejezéseibe a helyébe zérust téve, $a:g=c$ is zérus, minélfogva az idézett §. (5), ($7a$) és (8) egyenleteiből

$$\left.\begin{aligned} \mu&=-\frac{nA}{g\cos^{n+1}\alpha}\,; \qquad \lambda=\frac{A}{\cos^n\alpha},\\ \frac{v^{-n}}{\cos^n\alpha}&=-\frac{n}{g}b\int_{\alpha}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\cos^{n+1}\alpha}+\text{const.};\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

hol az integrál felső, α határa csak azt jelenti, hogy az integrátió végrehajtása után α helyébe csak α teendő.

Ha itt is $_1$ indexxel jelöljük a kezdő értékeket s röviden írjuk:

$$n\frac{b}{g}(v_1\cos\alpha_1)^n=\beta_1\,; \qquad \int_{\alpha}^{\alpha_1}\frac{d\alpha}{\cos^{n+1}\alpha}=F_1(\alpha), \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

az (1) harmadik egyenletéből, vonatkoztatva ezt α és α_1 határokra, és a különbséget képezve:

$$v\cos\alpha=\frac{v_1\cos\alpha_1}{(1+\beta_1F_1)^{\frac{1}{n}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

[*Jegyzet.* Ha az (1) constansa meghatározására a pálya *legmagasabb* pontja $\alpha=0$, $v=v_0$ adatait használjuk és megfelelőleg írjuk:

$$n\frac{b}{g}v_0^n=\beta_0\,; \qquad \int_{\alpha}^{0}\frac{d\alpha}{\cos^{n+1}\alpha}=F_0(\alpha),$$

akkor (3)-ból

$$v\cos\alpha = \frac{v_0}{(1+\beta_0 F_0)^{\frac{1}{n}}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3a)$$

hol $\beta_0 = n$. ellenállás a csúcsban : lövedéksúlya].

Ha rövidítés czéljából a (3)-ban :

$$(1+\beta_1 F_1)^{\frac{1}{n}} = \Phi_1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

a megelőző §. (14) és (15) egyenleteiből :

$$\left.\begin{aligned} t &= +\frac{v_1\cos\alpha_1}{g}\int_{\alpha}^{\alpha_1}\frac{d\alpha}{\Phi_1\cos^2\alpha}; \\ x &= \frac{v_1^2\cos^2\alpha_1}{g}\int_{\alpha}^{\alpha_1}\frac{d\alpha}{\Phi_1^2\cos^2\alpha}; \qquad y = \frac{v_1^2\cos^2\alpha_1}{g}\int_{\alpha}^{\alpha_1}\frac{\sin\alpha d\alpha}{\Phi_1^2\cos^3\alpha}; \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

A (2)-ben írt F_1 a közönséges redukáló kifejezés:

$$\int\frac{d\alpha}{\cos^{n+1}\alpha} = \frac{\sin\alpha}{n\cos^n\alpha} + \frac{n-1}{n}\int\frac{d\alpha}{\cos^{n-1}\alpha}$$

segélyével nyerhető, mely páratlan n esetében közvetetlenül adja F_1-et, ellenben páros n esetében $\int\cos^{-1}\alpha d\alpha = \lg\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\alpha)$ az utolsó tag.

1. *Az ellenállás a sebesség első hatványával arányos:* $n=1$; ekkor :

$$F_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha; \qquad \beta_1 = \frac{bv_1}{g}\cos\alpha_1;$$
$$\Phi_1 = 1+\beta_1 F_1.$$

Az (5) integrátiói elvégezhetők ; e számítást az olvasóra bízzuk, mert a következő, 195. §-ban ezt az esetet külön és közvetetlenül fogjuk tárgyalni.

2. *Az ellenállás a sebesség második hatványával arányos:* $n=2$; ekkor :

$$F_1 = \left\{\frac{\sin\alpha}{2\cos^2\alpha} + \tfrac{1}{2}\lg\operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}\alpha)\right\}_{\alpha}^{\alpha_1}; \qquad \beta_1 = 2\frac{b}{g}v_1^2\cos^2\alpha_1;$$
$$\Phi_1 = \sqrt{1+\beta_1 F_1}.$$

Az (5) integrátiói véges alakban nem végezhetők el, v. ö. a 196. §-ot, hol e problémát közvetetlenül tárgyaljuk.

3. *Az ellenállás a sebesség harmadik hatványával arányos:* $n=3$; ekkor :

$$F_1 = \frac{1}{3}\left\{\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}+2\right)\right\}_{\alpha}^{\alpha_1}; \qquad \beta_1 = 3\frac{b}{g}v_1^3\cos^3\alpha_1;$$
$$\Phi_1 = \{1+\beta_1 F_1\}^{\frac{1}{3}},$$

hol az (5) integráljait nem lehet véges alakban előállítani.

195. §. *Az ellenállás a sebesség első hatványával arányos. Közvetetlen eljárás.*

A levegőben vagy más gázokban végbemenő kis sebességű mozgásoknál a czímben jelelt feltevés közelítőleg érvényes.

E szerint a 193. §. (1*a*) egyenletei írhatók [$a=0$, $n=1$ lévén]:

$$x''=-bx'\,; \qquad y''=-by'-g\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Legyenek $t=0$-kor: $x=0$, $y=0$, $v=v_1$; $\alpha=\alpha_1$; ezenkívül $x'=v\cos\alpha$; $y'=v\sin\alpha$; az (1)-ből:

$$d(x') : x'=-bdt\,; \qquad d(y'+gb^{-1}) : (y'+gb^{-1})=-bdt\,;$$
$$x'=v_1\cos\alpha_1 e^{-bt}\,; \qquad y'+gb^{-1}=(v_1\sin\alpha_1+gb^{-1})\,e^{-bt}\,;$$

$$x=\frac{v_1\cos\alpha_1}{b}(1-e^{-bt})\,; \qquad y+\frac{g}{b}t=\left(\frac{v_1\sin\alpha_1}{b}+\frac{g}{b^2}\right)(1-e^{-bt})\,. \quad (2)$$

A (2)-ből t-t kiküszöbölve:

$$1-e^{-bt}=\frac{bx}{v_1\cos\alpha_1}\,; \qquad t=\frac{1}{b}\lg\frac{v_1\cos\alpha_1}{v_1\cos\alpha_1-bx}\,;$$

$$y+\frac{g}{b^2}\lg\frac{v_1\cos\alpha_1}{v_1\cos\alpha_1-bx}=\frac{bv_1\sin\alpha_1+g}{bv_1\cos\alpha_1}x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

a pálya keresett egyenlete.

196. §. *Az ellenállás a sebesség második hatványával arányos. Közvetetlen eljárás. A mozgás részletezése.*

Középsebességű lövedék ellenállása levegőben a czímben jelelt törvénynek elég közelítőleg hódol; a probléma a 192. §-nál azért általánosabb, mivel a független erő nem esik a mozgás irányába.

Irva itt is mint a 192. §-ban $mS=mgv^{-2}v^2$, a mozgás egyenletei:

$$x''=-\frac{g}{v^2}v^2\frac{dx}{ds}\,; \qquad y''=-\frac{g}{v^2}v^2\frac{dy}{ds}-g, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

vagy a $dx : ds=x' : v$; $dy : ds=y' : v$ felhasználásával:

$$x''v^2=-gvx'\,; \qquad y''v^2=-gvy'-gv^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

Ezenkívül, α-val jelelve a pálya érintője és a vízszintes X-irány közötti szöget, ennek p tangensével az y az (1*a*)-ból kiküszöbölhető:

$$p=\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}\,; \qquad y'=\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=px'\,; \qquad y''=\frac{dp}{dt}x'+px''\,;$$

miáltal az (1*a*) második egyenlete, kis rendezés után:

$$p'x'+p(x''+gv^{-2}vx')+g=0$$

hol a ( ) zárójeles tag az (1a) első egyenlete értelmében zérus s így a két egyenlet írható:

$$x''+gv^{-2}vx'=0\,; \qquad p'x'+g=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

1. Legyen t=0-kor s=0, $v=v_1$, $\alpha=\alpha_1$; ezenkívül az $x'=v\cos\alpha$; $y'=v\sin\alpha$ és $vdt=ds$; e szerint a (2) első egyenletéből

$$d(x'):x'=-gv^{-2}ds\,; \qquad \lg x'=\lg(v_1\cos\alpha_1)-gv^{-2}s\,;$$

$$x'=\frac{dx}{dt}=v_1\cos\alpha_1 e^{-\frac{g}{v^2}s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

A (3) szerint a sebesség vízszintes componense folytonosan fogy és így a pálya (trajectória) vég nélkül közeledik vertikális asymptotához (86. ábra), avagy, a hajított test mozgása, pályája lehajló ágában mindinkább közeledik a függélyesen eső testnek az ellenálló közegben való mozgásához [192. §. II. szakasza].

A második egyenletben

$$p'=\frac{dp}{dt}=\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \quad \text{és így ez} \quad \frac{dp}{dx}x'^2+g=0,$$

avagy szorozva $dx\sqrt{1+p^2}=ds$-el, a (3) tekintetbe vételével

$$\sqrt{1+p^2}\,dp=-\frac{g}{v_1^2\cos^2\alpha_1}e^{+\frac{2g}{v^2}s}ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

Integrálva és p=tg α-t helyettesítve [Math. Rep. 107. §. 16.]:

$$\tfrac{1}{2}\left\{\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\lg(\operatorname{tg}\alpha+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha})\right\}_{\alpha}^{\alpha_1}=+\frac{v^2}{2v_1^2\cos^2\alpha_1}(e^{\frac{2g}{v^2}s}-1) \ldots (4)$$

Rövidség kedveért írva [v. ö. a 194. §. 2. pontját]:

$$\beta_1=2\frac{v_1^2}{v^2}\cos^2\alpha_1, \qquad 2F_1=\frac{\sin\alpha_1}{\cos^2\alpha_1}-\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}+\lg\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1}\cdot\frac{1+\sin\alpha_1}{1+\sin\alpha}\right), \quad (4a)$$

miáltal a (4)-ből:

$$e^{\frac{2g}{v^2}s}=\frac{2v_1^2\cos^2\alpha_1}{v^2}F_1+1=1+\beta_1F_1=\Phi_1^2\,; \quad . \quad . \quad , \quad (4b)$$

hol β_1 és F_1 az idézett helyével teljesen megegyezik.

2. Könynyű a megelőzők alapján t-t, x-t, y-t az α quadraturáival kifejezni.

Ugyanis a (2) másodikából és a (3)- és (4b)-ből

$$\frac{dp}{dt}=\frac{d(\operatorname{tg}\alpha)}{dt}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\frac{d\alpha}{dt}=-g\frac{dt}{dx}=-\frac{g}{v_1\cos\alpha_1}e^{+\frac{g}{v^2}s}=-\frac{g\Phi_1}{v_1\cos\alpha_1};$$

továbbá:

$$dy = pdx = \operatorname{tg}\alpha dx$$

e szerint ezen egyenletekből (teljesen egyezőleg a 194. §. (5) rendszerével):

$$\left.\begin{aligned} t &= -\frac{v_1 \cos\alpha_1}{g}\int_{\alpha_1}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\Phi_1\cos^2\alpha}\,; \\ x &= -\frac{v_1^2\cos^2\alpha_1}{g}\int_{\alpha_1}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\Phi_1^2\cos^2\alpha}\,; \qquad y = -\frac{v_1^2\cos^2\alpha_1}{g}\int_{\alpha_1}^{\alpha}\frac{\sin\alpha d\alpha}{\Phi_1^2\cos^3\alpha} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Ezek numerusos számítására nézve v. ö. Nell értekezéseit és számtábláit, Grunerts Archiv für Math. u. Phys. 46. köt. 361—419. ll. és 47. köt. 338—354. és 449—456. ll.

3. Az (5) rendszer a pálya néhány általános tulajdonsága megállapítására alkalmas.

Legyenek v_m, x_m, y_m, t_m a pálya legmagasabb (csúcs-) pontja jellemzői; itt $\alpha=0$ és $y_m=H$ az elért legnagyobb magasság; ezek:

$$\left.\begin{aligned} t_m &= +\frac{v_1\cos\alpha_1}{g}\int_0^{\alpha_1}\frac{d\alpha}{\Phi_1\cos^2\alpha}\,; \\ x_m &= +\frac{v_1^2\cos^2\alpha_1}{g}\int_0^{\alpha_1}\frac{d\alpha}{\Phi_1^2\cos^2\alpha}\,; \\ y_m &= +\frac{v_1^2\cos^2\alpha_1}{g}\int_0^{\alpha_1}\frac{\sin\alpha d\alpha}{\Phi_1^2\cos^3\alpha}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

A *hajítási távolság* az x azon x_2 értéke, melynél az $y=0$, de x nem zérus; α_2 az α hozzátartozó értéke; ezen α_2 az (5) szerint kielégíti az

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\sin\alpha d\alpha}{\Phi_1^2\cos^3\alpha} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (7a)$$

feltételt, melyből a 86. ábra szerint is mindig negativ α_2 kiszámítható és az x-nek (5) alatti kifejezésébe helyettezendő, miáltal

$$x_2 = \frac{v_1^2\cos^2\alpha_1}{g}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\frac{d\alpha}{\Phi_1^2\cos^2\alpha} \quad \ldots\ldots (7b)$$

Az elérhető legnagyobb vízszintes távolság x_∞ egyszersmind a vertikális asymptotus távolsága a kezdettől, 86. ábra, ekkor $\alpha=-\frac{1}{2}\pi$ és így

$$x_\infty = \frac{v_1^2\cos^2\alpha_1}{g}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\alpha_1}\frac{d\alpha}{\Phi_1^2\cos^2\alpha} \quad \ldots\ldots (8)$$

A *pálya felszálló ágának is van asymptotusa*, ha azt viszszafelé folytatjuk.

Ugyanis, a pálya (4*a*) és (4*b*) alatti egyenleteit tekintve: ha s bennök *negativ* lesz, akkor $e^{\frac{2g}{v^2}s}$ kisebb az egységnél, ezért $\beta_1 F_1$-nek, s így F_1-nek szintén negativnak kelt lennie, a mi (4*a*) szerint csak úgy lehetséges, hogy az ezen negativ s-khez tartozó α-k nagyobbak, mint α_1. Ha most s a $-\infty$-felé fogy, akkor (4*b*) szerint Φ_1^2-nek zérus felé kell fogynia, azaz α egy α_3 határérték felé convergál, melyre nézve a feltétel:

$$1+\frac{v_1^2\cos^2\alpha_1}{v^2}\left\{\frac{\sin\alpha_1}{\cos^2\alpha_1}-\frac{\sin\alpha_3}{\cos^2\alpha_3}+\lg\left(\frac{\cos\alpha_3}{\cos\alpha_1}\cdot\frac{1+\sin\alpha_1}{1+\sin\alpha_3}\right)\right\}=0,\ldots\ (9)$$

hol α_3 ezen ág-folytatás asymptotusa és az X tengely közötti szög, 86. ábra.

Végre a sebesség és componensei a (3)-, (4*b*)-ből:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{v_1\cos\alpha_1}{\Phi_1};\qquad \frac{dy}{dt}=\frac{v_1\cos\alpha_1}{\Phi_1}\operatorname{tg}\alpha;\qquad v=v_1\frac{\cos\alpha_1}{\Phi_1\cos\alpha}\ .\ .\ (10)$$

4. A *légüres térben* ugyanazon kezdő feltételek mellett elhajított test mozgását a jelenlegivel könnyen összehasonlíthatjuk.

A (3*a*) egyenletben $\sqrt{1+p^2}=\cos^{-1}\alpha$-t írva és $p_,$-, $s_,$-, $\alpha_,$-el jelelve a légüres térre vonatkozó adatokat, melyek ezen §. kifejezéseiből a $v^2=\infty$ esetben adódnak, akkor a (3*a*) alapján:

$$dp=-\frac{g\cos\alpha}{v_1^2\cos^2\alpha_1}e^{\frac{2g}{v^2}s}ds;\qquad dp_,=-\frac{g\cos\alpha_,}{v_1^2\cos^2\alpha_1}ds,\ .\ .\ (11)$$

az egymásnak megfelelő két egyenlet. Ha most a két pálya oly megfelelő pontjait tekintjük, melyekben mindig $\alpha=\alpha_,$ és ha a különböző hoszszúságú ds s $ds_,$ ívelemeket úgy választjuk, hogy $d\alpha=d\alpha_,$, avagy $d(\operatorname{tg}\alpha)=d(\operatorname{tg}\alpha_,)$ t. i. $dp=dp_,$, akkor (11)-ből

$$\frac{ds_,}{ds}=e^{\frac{2g}{v^2}s};\qquad s_,=\frac{v^2}{2g}(e^{\frac{2g}{v^2}s}-1),\ .\ .\ .\ .\ .\ (12)$$

ha s-t és $s_,$-t a hajítás pontjától számítjuk.

5. *Csekély hajlású* (ú. n. *rasans*) *pályák* a gyakorlatban használatos lövedékeknél leggyakrabban fordúlnak elő, ezekkel vízszintes hatásokat kivánunk elérni; ide nem tartoznak a meredek mozsárdobások; melyek boltozatok stb. betörését czélozzák.

Efféle *lapos pályák* esetében első közelítésben $\operatorname{tg}\alpha$- és $\operatorname{tg}\alpha_1$-t kicsinynek veszszük; az s és az x közötti különbséget elhanyagoljuk, $s=x$-t és $ds:dx=1$-et írunk. Evvel a (3*a*), benne $ds=dx\sqrt{1+p^2}$-t téve:

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right)=dp=-\frac{g}{v_1^2\cos^2\alpha_1}e^{\frac{2g}{v^2}x}dx,\ .\ .\ .\ .\ .\ (13)$$

melyből, mivel $x=0$ helyen $y=0$, $\alpha=\alpha_1$, folytatólag:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha_1-\frac{v^2}{2v_1^2\cos^2\alpha_1}\left(e^{\frac{2g}{v^2}x}-1\right);\quad\ldots\quad(13a)$$

$$y=x\left\{\operatorname{tg}\alpha_1+\frac{v^2}{2v_1^2\cos^2\alpha_1}\right\}-\frac{v^4}{4gv_1^2\cos^2\alpha_1}\left(e^{\frac{2g}{v^2}x}-1\right)\ldots\quad(13b)$$

A pálya ezen egyenlete adott x-ekhez keresendő y magasságok számítására igen alkalmas.

Jegyzet. Rendesen a v^2 állandó a levegőre nézve tetemes és $\frac{2g}{v^2}x$ kicsiny, úgy hogy a (13b) exponenses tagja kifejthető; így a következő közelítő alakot nyerjük:

$$y=x\operatorname{tg}\alpha_1-\frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_1^2\cos^2\alpha}\left\{1+\frac{2}{3}\frac{gx}{v^2}+\frac{1}{3}\frac{g^2x^2}{v^4}+\frac{2}{3.5}\frac{g^3x^3}{v^6}+\ldots\right\},\quad(14)]$$

A pálya csúcspontjának x_m, y_m coordinátáit a (13a) és (13b) adják meg, beléjük $\alpha=0$-t téve:

$$\left.\begin{aligned}e^{\frac{2g}{v^2}x_m}&=\frac{v_1^2}{v^2}\sin 2\alpha_1+1;\\ y_m&=x_m\left\{\operatorname{tg}\alpha_1+\frac{v^2}{2v_1^2\cos^2\alpha_1}\right\}-\frac{v^2}{2g}\operatorname{tg}\alpha_1\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(15)$$

Végre az idő és a coordináták közötti összefüggést a (3a)-t megelőző $x'^2dp=-gdx$ egyenletnek a (13)-al való egyesítése szolgáltatja

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=x'^2=v_1^2\cos^2\alpha_1 e^{-\frac{2g}{v^2}x},$$

miből, $t=0$-kor $x=0$ lévén, könnyen nyerjük:

$$t=\frac{v^2}{gv_1\cos\alpha_1}\left(e^{\frac{g}{v^2}x}-1\right);\qquad x=\frac{v^2}{g}\lg\left(1+\frac{gv_1\cos\alpha_1}{v^2}t\right)\quad.\quad(16)$$

melyet a (13b)-be helyettezve, az y is t-ben fejeződik ki.

Jegyzet. A sebesség négyzetével arányos ellenállásra vonatkozó ballistikus problémát Keill János oxfordi physika és astronomia tanára 1718-ban tűzte ki., hogy I. Bernoulli János baseli mathematika-tanárnak ügyességét próbára tegye; ez e kihivást ez év február havában kapta meg s a problémát $S=xv^n$ általánosabb esetre is megoldotta. Ugyanezen év végén Bernoulli Miklós, az előbbinek unokaöcscse, ekkor paduai mathematikatanár közölt egy megoldást az előbbivel s végre ugyanez az 1718. év nov. 17-én vett tudomást, hogy Taylor Brook vagyonos magántudós (a róla elnevezett sorkifejtés felfedezője) is talált megoldást. Miután addig Keill

nem tudta megfejteni a problémát, BERNOULLI János a saját valamint B. Miklós megoldását közzétette [Acta Erudit. Lips. 1719 május]; hasonlóképen TAYLOR [Philos. Transactions 1719]. LEGENDRE [Mém. de l'Académie d. Berlin 1782] az $S = a + bv^n$ esetre vonatkozólag közölt megoldást.

E *Jegyzetre* nézve v. ö. WALTON: Problems in Theor. Mechanics, 291. l. s annak hiányaival való szószerinti fordítását KRAFT-ban, I. köt. 185. l.

197. §. *A pont általános ballistikus problémájának megfordítása: Az ellenállás kifejezve az állandó irányú erő és a pálya alakja segélyével.*

Az Y független erő az y-coordináták tengelyéhez, párhuzamosan működik; X a reá merőleges tengely, S a közegellenállás, s, ϱ, x, y a pálya íve, görbületi sugara, és derékszögű coordinátái.

A mozgás tangentiális és normális componensének egyenletei:

$$s'' = \tfrac{1}{2}\frac{d(v^2)}{ds} = Y\frac{dy}{ds} - S; \qquad \frac{v^2}{\varrho} = Y\frac{dx}{ds} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Itt

$$\varrho = \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}} : \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 : \frac{d^2y}{dx^2},$$

s így (1) második egyenletéből folytatólagosan, mivel itt csak az s vagy az x a független változó:

$$v^2 = Y\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 : \frac{d^2y}{dx^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d(v^2)}{ds} = \tfrac{1}{2}\frac{d}{ds}\left\{\left(Y : \frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{ds}{dx}\right)^2\right\} = \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\left\{\left(Y : \frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{ds}{dx}\right)^2\right\}\frac{dx}{ds}$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(Y : \frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{ds}{dx} + \tfrac{1}{2}\left(Y : \frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{d}{dx}\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\frac{dx}{ds}$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(Y : \frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{ds}{dx} + \tfrac{1}{2}\left(Y : \frac{d^2y}{dx^2}\right) . 2\frac{dy}{dx} . \frac{d^2y}{dx^2} . \frac{dx}{ds}$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d(v^2)}{ds} = \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(Y : \frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{ds}{dx} + Y\frac{dy}{ds},$$

melyet az (1) első egyenletével összehasonlítva:

$$S = -\tfrac{1}{2}\frac{ds}{dx}\frac{d}{dx}\left(Y : \frac{d^2y}{dx^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

és ez a nevezetes egyenlet az adott Y erőből s a pálya alakjából határozza meg az S ellenállást vagy megfordítva.

Jegyzet. Bizonyos határok között a tapasztalással elég közelítőleg egyező az a feltevés, hogy az ellenállás a közeg σ sűrűségével és a v sebesség négyzetével arányos, azaz $S = \varkappa\sigma v^2$. Felhasználva (1*a*)-t és (2)-őt,

$$\varkappa\sigma = S : v^2 = -\tfrac{1}{2}\frac{ds}{dx}\,\frac{d}{dx}\left(Y : \frac{d^2y}{dx^2}\right) : \left(Y : \frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{ds}{dx}\right)^2,$$

$$\varkappa\sigma = -\tfrac{1}{2}\frac{dx}{ds}\,\frac{d}{dx}\lg\left(Y : \frac{d^2y}{dx^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

V. ö. Newton: Principia, Lib. II. Propositio 10; és a 246. §. 128. feladatát.

2) Egyszerű harmonikus mozgások megzavarása ellenálló közegben.

198. §. *A kényszerített rezgés és a resonantia egyszerű esetei.*

I. *Kényszerített rezgés.* Igen gyakran fordul elő, hogy valamely test, mely az egyensúlyi helyzetétől számított távolsággal arányos vonzásnak s a környező közeg surlódásának és ellenállásának lévén alávetve, csillapított egyszerű harmonikus mozgást végezne: még más, külső, változó erőnek van kitéve, mely reá bizonyos kényszert gyakorolva, az idő folytával mozgása jellegét teljesen megváltoztathatja.

Így mikor pl. valamely hangvilla a levegőben rezgéseket végez és közelébe más *állandó* hangforrást hozunk, melynek rezgés-ideje (hangmagassága) általában véve különböző a villáétól, de egyenlő is lehet vele, akkor e forrás a környező levegőt szakaszos mozgásba hozza, és ez ismét a hangvillára fejt ki szakaszosan változó erőt. Ugyanígy, ha bármely lengő test, vagy akár függélyesen vagy vízszintesen rugalmasan rezgő test, vagy akár galvanometer-tű vagy electrodynamometer lengő része s í. t. külső, az időnek tetszőleges függvényű erőnek van alávetve.

E mozgások e szerint physikai szempontból fontosak lévén: ezek egyszerűbb esetével, az *egyenes vonalú kényszerített rezgés* typusával akarunk foglalkozni.

Ily mozgás jellemző egyenlete:

$$s'' + 2\varkappa s' + \omega^2 s = F(t), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

mely a csillapított egyszerű harmonikus mozgásétól abban különbözik, hogy a jobboldali zérus helyébe itt a külső erőnek $mF(t)$ adott kifejezése lép [Kinematika 96. §. (1)]. Az egyenlet nem teljes alakjának: $s'' + 2\varkappa s' + \omega^2 s = 0$-nak két partikuláris megoldása

$$s_1 = e^{k_1 t}; \quad s_2 = e^{k_2 t}, \quad \text{hol} \quad k_1 = -\varkappa + \sqrt{\varkappa^2 - \omega^2}; \quad k_2 = -\varkappa - \sqrt{\varkappa^2 - \omega^2}, \quad . \quad (2)$$

[i. h. 96. §. (3), 134. l.]; ezért maga az (1) egyenlet a parameterek variátiója eljárása szerint mindig megfejthető [i. h. 125. §. (7), 233. l.] és az s_1 és s_2 felhasználásával egyszerű számítás után a teljes megoldás:

$$s = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t} + \frac{1}{k_2 - k_1}\left\{e^{k_2 t}\int F(t)\, e^{-k_2 t}\, dt - e^{k_1 t}\int F(t)\, e^{-k_1 t}\, dt\right\}. \quad (3)$$

A k_1- és k_2-nek (2) alatti szerkezeténél fogva a (3) első két tagja, mely a külső behatástól független, az idő folytával elenyészik; a többi a külső erő hatása folytán járul a mozgáshoz.

II. A leggyakoribb eset az, mikor *a külső erő létesitette $F(t)$ gyorsulás az időnek egyszerű harmonikus függvénye:*

$$F(t)=B\cos(\Omega t+2\pi\Delta), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

hol $T=2\pi:\Omega$ a külső erő állandó periodusa és B állandó amplitudója, melyet pl. váltakozó electromágnessel állandóan rezgésben tartott hangvilla mozgása mutat.

A (3) zárójelében fellépő integrálok typusa, a (4) cosinusának kifejtésével és elemi integrálformulák felhasználásával [Math. Repertorium 111. §. 15. és 16. 139. lap].

$$\int F(t)\,e^{-kt}dt=B\cos(2\pi\Delta)\int e^{-kt}\cos(\Omega t)\,dt-B\sin(2\pi\Delta)\int e^{-kt}\sin(\Omega t)\,dt=$$

$$=\frac{Be^{-kt}}{k^2+\Omega^2}\{\cos(2\pi\Delta)\,[-k\cos(\Omega t)+\Omega\sin(\Omega t)]+$$
$$+\sin(2\pi\Delta)\,[\Omega\cos(\Omega t)+k\sin(\Omega t)]\}=$$
$$=\frac{Be^{-kt}}{\Omega^2+k^2}\{[\Omega\sin(2\pi\Delta)-k\cos(2\pi\Delta)]\cos(\Omega t)+$$
$$+[\Omega\cos(2\pi\Delta)+k\sin(2\pi\Delta)]\sin(\Omega t)\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

melynek felhasználásával a (3) zárójeles kifejezéséből a hatvány menynyiségek eltünnek.

Rövidség kedveért irva:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Omega\sin 2\pi\Delta-k_2\cos 2\pi\Delta}{\Omega^2+k_2^2}-\frac{\Omega\sin 2\pi\Delta-k_1\cos 2\pi\Delta}{\Omega^2+k_1^2}&=+K_0\cos(2\pi H_0);\\ \frac{\Omega\cos 2\pi\Delta+k_2\sin 2\pi\Delta}{\Omega^2+k_2^2}-\frac{\Omega\cos 2\pi\Delta+k_1\sin 2\pi\Delta}{\Omega^2+k_1^2}&=-K_0\sin(2\pi H_0);\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

a (3)-ból

$$s=A_1e^{k_1t}+A_2e^{k_2t}+\frac{BK_0}{k_2-k_1}\cos(\Omega t+2\pi H_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Közös nevezőre hozva a (6) baloldalait, ezek számlálói:

$$\Omega^2(k_1-k_2)\cos 2\pi\Delta+\Omega(k_1^2-k_2^2)\sin 2\pi\Delta+k_1k_2(k_2-k_1)\cos 2\pi\Delta;$$
$$\Omega^2(k_2-k_1)\sin 2\pi\Delta+\Omega(k_1^2-k_2^2)\cos 2\pi\Delta+k_1k_2(k_1-k_2)\sin 2\pi\Delta;$$

s így maguk a (6) egyenletek irhatók:

$$\left.\begin{aligned}(k_1-k_2)\{(\Omega^2-k_1k_2)\cos 2\pi\Delta+\Omega(k_1+k_2)\sin 2\pi\Delta\}&=\\ =(\Omega^2+k_1^2)(\Omega^2+k_2^2)K_0\cos 2\pi H_0;&\\ (k_1-k_2)\{(\Omega^2-k_1k_2)\sin 2\pi\Delta-\Omega(k_1+k_2)\cos 2\pi\Delta\}&=\\ =(\Omega^2+k_1^2)(\Omega^2+k_2^2)K_0\sin 2\pi H_0.&\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Ámde, (2)-ből:

$$k_1+k_2=-2\varkappa\,; \qquad k_1k_2=\omega^2\,; \qquad k_1^2+k_2^2=4\varkappa^2-2\omega^2\,;$$
$$(\Omega^2+k_1^2)\,(\Omega^2+k_2^2)=\Omega^4+\Omega^2\,(k_1^2+k_2^2)+k_1^2k_2^2=(\Omega^2-\omega^2)^2+4\Omega^2\varkappa^2,$$

úgy, hogy a (8) rendszer írható:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{(\Omega^2-\omega^2)\cos 2\pi\Delta-2\Omega\varkappa\sin 2\pi\Delta}{(\Omega^2-\omega^2)^2+4\Omega^2\varkappa^2} &= \frac{K_0}{k_2-k_1}\cos 2\pi H_0=K\cos 2\pi H\,;\\ -\frac{(\Omega^2-\omega^2)\sin 2\pi\Delta+2\Omega\varkappa\cos 2\pi\Delta}{(\Omega^2-\omega^2)^2+4\Omega^2\varkappa^2} &= \frac{K_0}{k_2-k_1}\sin 2\pi H_0=K\sin 2\pi H\,; \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

hol a (9) egyenletei négyzet-összegéből és viszonyából:

$$\left.\begin{aligned} K^2 &= +\frac{1}{(\Omega^2-\omega^2)^2+4\Omega^2\varkappa^2}\,;\\ \operatorname{tg} 2\pi H &= +\frac{(\Omega^2-\omega^2)\sin 2\pi\Delta+2\Omega\varkappa\cos 2\pi\Delta}{(\Omega^2-\omega^2)\cos 2\pi\Delta-2\Omega\varkappa\sin 2\pi\Delta}\,. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (9a)$$

Képezve a (9)-el a (7) utolsó részét, maga a (7), a szerint, a mint a zavartalan mozgás α) sza asznélküli vagy β) szakaszos [Kinematika 96. §. (7) és (8)]:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha) \quad s=\tfrac{1}{2}e^{-\varkappa t}\{a_1e^{t\sqrt{\varkappa^2-\omega^2}}+a_2e^{-t\sqrt{\varkappa^2-\omega^2}}\}+BK\cos(\Omega t+2\pi H)\,;\\ &\beta) \quad s=Ae^{-kt}\cos(t\sqrt{\omega^2-\varkappa^2}+2\pi\delta)+BK\cos(\Omega t+2\pi H). \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

A (10)-ben az A-val szorzott rész a test *saját mozgását* fejezi ki, azt ugyanis, melyet ez végezne, ha magára hagyatnék s csak a kitéréssel arányos erőnek s az ellenállásnak volna alávetve; *a mozgásnak ezen része az idő folytával elenyészik;* a második része a külső, kényszer-erő létesítette *kényszerített-*, vagy *kényszer-rezgés*, melynek *állandó amplitudója* BK; ez a *mozgás fenmaradó, permanens része.*

Ez az utóbbi e szerint az az egyszerű harmonikus rezgés, melyet a külső erő a rezgő vagy mozgó testre *reá kényszerít, reáerőszakol*, és pedig magának ezen erőnek periodusával.

E kényszer-rezgés erőssége (intensitása) különben egyenlő körülmények között a K együtthatótól függ (ennek négyzetével arányos); ez pedig a (9*a*) szerint legnagyobb, ha $\Omega=\omega$, azaz ha a test saját mozgásának erő-állandója a külső erővel egyenlő; ekkor $K^2=(2\Omega\varkappa)^{-2}=$ $=1:4\varkappa^2\omega^2$; s ez annál nagyobb, minél kisebb a $\varkappa$ surlódásbeli (ellenállásbeli) együttható. Végtelen nagy soha sem lehet a K, mert reális mozgásoknál $\varkappa$ mindig nagyobb a zérusnál.

a. Leggyakoribbak az e §. elején említett esetek, *mikor a test saját rezgéssel bír;* ha τ ennek periodusa és T a külső erőé, ezek a (10) szerint:

$$\tau=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2-\varkappa^2}}\,; \qquad T=\frac{2\pi}{\Omega}\,;$$

a legnagyobb resonantia (velehangzás, együttrezgés) bekövetkezik, mikor $\Omega^2=\omega^2$, azaz, mikor

$$\frac{1}{T^2}-\frac{1}{\tau^2}=\left(\frac{\varkappa}{2\pi}\right)^2;\quad \text{ekkor}\quad K^2=\frac{1}{4\Omega^2\varkappa^2};\quad .\ .\ .\quad (11a)$$

a periodusok e szerint ekkor nem egészen egyenlők, azonban a $\varkappa$ rendesen kicsiny lévén, különbségük csak igen csekély.

b. Ellenben, ha a két periodus egyenlő, akkor $T=\tau$ és

$$\Omega^2-\omega^2=-\varkappa^2\quad \text{és}\quad K^2=\frac{1}{4\Omega^2\varkappa^2+\varkappa^4}\ .\ .\ .\ .\quad (11b)$$

mely valamivel kisebb, mint a (11*a*).

Ez a kifejtés alapját képezi a hangtanban oly fontos velehangzás jelensége mechanikai tárgyalásának.

199. §. *A légüres térben tautochron görbe ilyen marad, ha az ellenállás a sebesség első hatványával arányos.*

A tautochrónán való mozgás tangentiális gyorsulására nézve a 161 és 164. §. (6)-formájában az egyszerű harmonikus mozgás egyenletét találtuk:

$$s''+\omega^2 s=0,\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad (1)$$

[hol a cycloison való mozgásnál [161. §.] $\omega^2=g:4a$], mely bármily ható erők esetében érvényes. A görbe *egyszeri* befutására szükséges idő $T=\pi:\omega$.

Ha az ellenállás a sebesség első hatványával arányos az (1)-hez még egy $2\varkappa s'$ tag járul, miáltal (1)-ből

$$s''+2\varkappa s'+\omega^2 s=0,\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad (2)$$

mely a csillapított egyszerű harmonikus mozgás egyenlete, míg $\varkappa^2<\omega^2$. azaz, a míg a mozgás szakaszos és nem periodusnélküli [Kinematika 96. §., 134. l.].

Tautochronismus csak szakaszos mozgásnál lehetséges; a (2) ily jellegű, míg $\varkappa^2<\omega^2$; félperiodusa $\frac{1}{2}T=\pi:\sqrt{\omega^2-\varkappa^2}$, [i. h. 97. §. (3)], mely *nagyobb*, mint a légüres téré; e periodus *állandó* és független a kezdő amplitudótól.

E szerint a görbe tautochronismusa most is fennáll.

200. §. *Kis lengésű ingamozgás ellenálló közegben. Egyszerű eset.*

Légüres térben végtelen kis amplitudóval történő ingalengés egyenlete szintén egyező az egyszerű harmonikus mozgásával [157 §. (15) és 156. §. (5*a*)]:

$$l\alpha''+g\alpha=0,\quad \text{vagy:}\quad s''+(g:l)s=0,$$

hol g a földnehézségi gyorsulás, l az ideális inga hoszsza (vagy a physikai inga redukált hoszsza).

Levegőben való lengésnél a surlódás és ellenállás a sebesség első hatványával arányos lévén, $2\varkappa s'$ alakú tag járul az egyenlet bal oldalához, miáltal a mozgás egyenlete:

$$s''+2\varkappa s'+(g:l)\,s=0$$

miből [Kinematika 97. §. (2)]:

$$s=Ae^{-\varkappa t}\cos(t\sqrt{\frac{g}{l}-\varkappa^2}+2\pi\delta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

és a lengési idő (a *periodus fele*):

$$T=\frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}-\varkappa^2}}=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1-\varkappa^2\frac{l}{g}\right\}^{-\frac{1}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ha T_0 a légüres térre vonatkozó lengési idő, miután $\varkappa^2$ rendesen csekély, első közelítésben (2)-ből:

$$T_0=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,; \qquad T=T_0\left(1+\tfrac{1}{2}\varkappa^2\frac{l}{g}\right)=T_0\left(1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\varkappa^2}{\pi^2}T_0^2\right).$$

A lengések logarithmikus decrementuma [i. h. 97. §. (15)] itt $\lambda=\varkappa T_0$, úgy hogy közelítésben

$$T_0=T\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\pi^2}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

201. §. *Folytatás: Kis lengésü ingamozgás tetszőleges ellenálló közegben.*

$S(v)$-el jelölve a közeg surlódása s ellenállása létesítette gyorsulást, ω^2-el a $g:l$ viszonyt, az inga mozgás-egyenlete:

$$s''+\omega^2 s=\mp S(v) \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

hol mindig szem előtt tartandó, hogy $S(v)$ *positiv* és $\mp S(v)$-nek a *mindenkori sebességgel ellentettnek* kell lennie, úgy, hogy *positiv* sebességeknél (növekvő s-nél) a *felső*, *negativ* sebességeknél az *alsó* előjel alkalmazandó.

I. Kiindulva az $s''+\omega^2 s=0$ nem teljes egyenlet $s_1=\cos\omega t$ és $s_2=\sin\omega t$ partikuláris megoldásaiból [Kinematika 125. §. 234. l. *Jegyzete*] és megjegyezve, hogy itt $s_1 s_2'-s_1' s_2=\omega$, az (1) teljes megoldása [i. h. 233. l. (7)]:

$$s=A_1\cos\omega t+A_2\sin\omega t\pm\frac{1}{\omega}\left\{\cos\omega t\int S\sin(\omega t)\,dt-\sin(\omega t)\int S\cos(\omega t)\,dt\right\} \quad (2)$$

Összevonva az első két tagot, képezve még (2)-ből a $v=ds:dt$ sebességet és jelelve a $t=0$-kor érvényes értékeket s_0- és v_0-lal:

$$\left.\begin{aligned} s&=+\ A\cos(\omega t+2\pi\delta)\pm\frac{\cos\omega t}{\omega}\int_0^t S\sin(\omega t)\,dt\mp\frac{\sin\omega t}{\omega}\int_0^t S\cos(\omega t)\,dt;\\ v&=-A\omega\sin(\omega t+2\pi\delta)\mp\sin\omega t\int_0^t S\sin(\omega t)\,dt\mp\cos\omega t\int_0^t S\cos(\omega t)\,dt; \end{aligned}\right\}\quad(3)$$

hol még

$$s_0=A\cos 2\pi\delta;\qquad v_0=-A\omega\sin 2\pi\delta.$$

E kifejezésekből nem következtethető a mozgás szakaszos volta; de azért közelítő számításra felhasználhatók, mert $S(v)$-be *első közelítésben* a v-nek a légüres térre vonatkozó értékét helyettezhetni, mely (3) szerint $-A\omega\sin(\omega t+2\pi\delta)$; ezen így képezett S felhasználásával az s ezen közelítésbeli értéke a (3) értelmében quadraturákra van viszszavezetve. A második közelítést nyerjük. ha S-nek első közelítésbeli értékével képezzük a (3) szerint a v-t, ezen v értékét behelyettezzük az $S(v)$ kifejezésbe és evvel képezzük a (3)-szerint az s-et, mely most már a második közelítés. Ez az eljárás, mely tetszőlegesen folytatható, csak *kicsiny* S ellenállásoknál alkalmazható.

II. Legyen, mint a 193. §-ban $S=a+bv^n$ és válaszszuk az időszámítás kezdetét úgy, hogy $t=0$-kor $s=A$; $v=0$; légüres térre nézve volna a kitérés és a sebesség: $s=A\cos(\omega t)$; $v=-A\omega\sin(\omega t)$.

Ekkor az I pont szerint *első közelítésben*:

$$S(v)=a+(-1)^n bA^n\omega^n\sin^n(\omega t)\quad\ldots\ldots\quad(4)$$

és (3) szerint a keresendő integrálok:

$$\int_0^t S(v)\cos(\omega t)\,dt=\frac{a}{\omega}\sin(\omega t)+(-1)^n bA^n\omega^n\int_0^t\sin^n(\omega t)\cos(\omega t)\,dt;$$

$$\int_0^t S(v)\sin(\omega t)\,dt=\frac{a}{\omega}[1-\cos(\omega t)]+(-1)^n bA^n\omega^n\int_0^t\sin^{n+1}(\omega t)\,dt,$$

melyek elemi formulákkal fejezhetők ki és röviden jelelhetők:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\omega}\Gamma&=\int_0^t\sin^n(\omega t)\cos(\omega t)\,dt=+\frac{\sin^{n+1}(\omega t)}{\omega(n+1)};\\ \frac{1}{\omega}\Sigma&=\int_0^t\sin^{n+1}(\omega t)\,dt=-\left\{\frac{\cos(\omega t)}{\omega(n+1)}\left[\sin^n(\omega t)+\frac{n}{n-1}\sin^{n-2}(\omega t)+\cdots+\right.\right.\\ &\left.\left.+\frac{n.n-2.n-4\ldots3}{n-1.n-3\ldots4.2}\sin(\omega t)\right]+\frac{n.n-2.n-4\ldots3.1}{n+1.n-1.n-3\ldots4.2}(\omega t)\right\}_0^t, \end{aligned}\right\}\quad(5)$$

ha $n+1$ páros;

$$=-\left\{\frac{\cos(\omega t)}{\omega(n+1)}\left[\sin^n(\omega t)+\frac{n}{n-1}\sin^{n-2}(\omega t)+\cdots+\frac{n.n-2.n-4\ldots4.2}{n-1.n-3\ldots3.1}\right]\right\}_0^t,$$

ha $n+1$ páratlan;

ezek segélyével jelen esetben a (3)-ból:

$$\left.\begin{aligned} s &= +A\cos(\omega t) \mp \frac{a}{\omega^2}[1-\cos(\omega t)] \pm \\ &\quad \pm (-1)^n bA^n\omega^{n-2}\{\Sigma.\cos(\omega t) - \Gamma.\sin(\omega t)\}; \\ v &= -A\omega\sin(\omega t) \mp \frac{a}{\omega}\sin(\omega t) \mp \\ &\quad \mp (-1)^n bA^n\omega^{n-1}\{\Gamma.\cos(\omega t) + \Sigma.\sin(\omega t)\}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6)$$

A további közelítések hasonló módon számíthatók.

III. A megelőző §-ban tárgyalt $S=2\varkappa v$ eseten kívül az $S=bv^2$ eset az, mely igen gyors lengéseknél (rezgéseknél) közelítőleg érvényes. Ekkor $a=0$, $n=2$ értékekkel az (5) és (6)-ból némi számítás után:

$$\Gamma=\tfrac{1}{3}\sin^3(\omega t); \qquad \Sigma=-\tfrac{1}{3}[\sin^2(\omega t)+2]\cos(\omega t)+\tfrac{2}{3}.$$

$$\left.\begin{aligned} s &= +A\cos(\omega t) \mp \tfrac{1}{3}bA^2\,.\,[1-\cos(\omega t)]^2 \\ v &= -A\omega\sin(\omega t) \mp \tfrac{1}{3}bA^2\omega\,[1-\cos(\omega t)]\;2\sin(\omega t). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (7)$$

Jeleljék most T az egymásra következő két forduló pont közötti időközt (a lengési időt) és A_0, A_1, A_2, . . . e forduló pontoknak megfelelő kilengéseket (amplitudókat).

A (7) szerint a $v=0$ forduló pont feltétele: $\omega t=n\pi$, n tetszőleges *egész* szám lévén, úgy hogy $T=\pi:\omega$, azaz, e *közelítésben a lengési idő ugyanaz, mint légüres térben.*

A (7)-ben $t=0$-kor, $s=A_0=A$; a t növekedésével az s fogy, a sebesség *negativ*, és így az (1)-nél említett észrevételnél fogva a $t=0$-tól $t=T$-ig terjedő időközre nézve a (7)-ben az *alsó* előjel veendő. Ekkor $t=T$-kor: $s_1=-A_0+\frac{4}{3}bA_0^2=A_1$, mely érték *negativ*. A következő T-től $2T$-ig terjedő lengésre nézve a (7) kifejezéseit úgy alkalmazzuk, hogy t-t e második lengés kezdetétől számítjuk, mely pillanatban A_1 az amplitudója; továbbá, mivel e lengés közben a sebesség *positiv*, a (7)-ben a *felső* előjel veendő s így ebben a közben [A_1 értéke negativ!]:

$$s=A_1\cos(\omega t)-\tfrac{1}{3}bA_1^2\,[(1-\cos\omega t)]^2$$

a kitérés kifejezése, melyből a lengés végén, $t=T$-kor az A_2 amplitudó: $s_2=A_2=-A_1-\frac{4}{3}bA_1^2$, hol A_2 értéke *positiv*.

A harmadik lengés ugyanoly lefolyású mint az első, csakhogy A_2 lép A_0 helyébe, miáltal $A_3=-A_2+\frac{4}{3}bA_2^2$ az ennek végén fellépő amplitudó; a negyedik lengés analog a másodikhoz, de A_3 lép A_1 helyébe és így $A_4=-A_3-\frac{4}{3}bA_3$ a végkilengése s í. t. Rövidség kedveért írva $\frac{4}{3}b=\varepsilon$-t, ezen amplitudók rendre:

$$A_0=A_0; \quad A_1=-A_0(1-\varepsilon A_0); \quad A_2=-A_1(1+\varepsilon A_1); \quad A_3=-A_2(1-\varepsilon A_2);$$
$$A_4=-A_3(1+\varepsilon A_3) \quad \text{s í. t.}$$

Ha ε oly kicsiny, hogy εA_0 magasabb hatványai az egységhez képest elhanyagolhatók, akkor első közelítésben:

$$A_0=A_0;\quad A_1=-A_0(1-\varepsilon A_0);\quad A_2=+A_0(1-2\varepsilon A_0);\quad A_3=-A_0(1-3\varepsilon A_0);$$
$$A_4=+A_0(1-4\varepsilon A_0)\quad \text{s í. t.};$$

ezek absolut értéke számtani haladvány szerint fogy.

3) Centrális mozgás ellenálló közegben.

202. §. *Ellenálló közegben végbemenő centrális mozgás differentiál-egyenletei.*

Legyen mR a centrális erő és mS az ellenállás; a pálya sík, mivel az ellenállás a sebességgel ellentetten hatván, nem késztetheti a pontot azon sík elhagyására, melyet a mozgás centruma (a centrális erő székhelye), a pont kezdő-helyzete és-sebessége határoznak meg.

1. *Derékszögű coordinátákban* a mozgás egyenletei:

$$x''=R\frac{x}{r}-S\frac{x'}{v};\quad y''=R\frac{y}{r}-S\frac{y'}{v}\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

Az R itt r- és ϑ-tól is függhet, de mindig áll

$$X=R(r,\vartheta)\frac{x}{r};\qquad Y=R(r,\vartheta)\frac{y}{r};\qquad r^2=x^2+y^2;$$

$$Xdx+Ydy=R(r,\vartheta)\frac{xdx+ydy}{r};$$

továbbá az eleven erő tétele itt a 45. §. (4) egyenlete szerint:

$$\tfrac{1}{2}v^2=\int Rdr-\int Sds+\text{constans}\quad\ldots\ldots\quad(2)$$

Jacobi* kimutatta, hogy a Newton-féle centrális erő esetében az (1) rendszer integrálható, ha $S=\varkappa v^{-2}$; de ily ellenállás minden tapasztalattal ellenkezvén, az (1) általános tárgyalásától eltekintünk.

2. *Polárcoordinátákban*, ha φ_r a vezérsugári, φ_ϑ a forgató componense a gyorsulásnak, és $r=u^{-1}$, $c=r^2\vartheta'$ a Kinematika 77. §. (6) egyenlete érvényes, [melyben azonban az i. h. (1) egyenlete szerint φ_r-et R-el, φ_ϑ-t Θ-val jeleltük]:

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2}+u+\frac{\varphi_r}{c^2u^2}+\frac{\varphi_\vartheta}{c^2u^3}\cdot\frac{du}{d\vartheta}=0\quad\ldots\ldots\quad(3)$$

Jelen esetünkben R a centrális erőnek r menti gyorsulása és S a v menti ellenállásbeli gyorsulás; ezen utóbbi és az r, illetve az r-re merőleges irány közötti szögek iránycosinusai:

---

* Vorlesungen über Dynamik 127. lap.

$$\cos(v,r)=\frac{dr}{ds}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{ds};\quad \cos(v,\vartheta)=r\frac{d\vartheta}{ds}=\frac{1}{u}\frac{d\vartheta}{ds},$$

miáltal a φ_r és φ_ϑ és velük a (3):

$$\varphi_r=R-S\frac{dr}{ds}=R+\frac{S}{u^2}\frac{du}{ds};\quad \varphi_\vartheta=-Sr\frac{d\vartheta}{ds}=-\frac{S}{u}\frac{d\vartheta}{ds};\ . \qquad (3a)$$

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2}+u+\frac{R}{c^2u^2}=0,\ .\ .\ .

A második egyenletből

$$v^2=-Rp\frac{dr}{dp},\quad \frac{d(v^2)}{ds}=-\frac{d}{ds}\left(Rp\frac{dr}{dp}\right);\qquad \ldots\quad (6a)$$

helyettesítve ezt az első egyenlet jobb oldalába, rendre:

$$-S=-\tfrac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(Rp\frac{dr}{dp}\right)-R\frac{dr}{ds}=$$

$$=-\frac{1}{2p^2}p^2\frac{d}{ds}\left(Rp\frac{dr}{dp}\right)-\frac{1}{2p^2}Rp\frac{dr}{dp}\cdot\frac{d(p^2)}{ds};$$

$$S=\frac{1}{2p^2}\frac{d}{ds}\left(Rp^3\frac{dr}{dp}\right),\qquad \ldots\ldots\ldots\quad (6)$$

mely egyenlet az S ellenállás törvényét fejezi ki az R centrális gyorsulás és a pálya alakjából, vagy megfordítva.

Jegyzet: Bizonyos határok között az ellenállást elég közelítőleg fejezhetjük ki, ha azt a közeg σ sűrűsége és a v sebesség négyzete szorzatával arányosnak veszszük, azaz, ha írjuk: $S=\varkappa\sigma v^2$; a v^2-t a $(6a)$ első egyenletéből (6)-ba helyettesítve

$$S=-\varkappa\sigma Rp\frac{dr}{dp};\quad \varkappa\sigma=S:v^2=\tfrac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(Rp^3\frac{dr}{dp}\right):-p^2\left(Rp\frac{dr}{dp}\right),$$

$$\varkappa\sigma=-\tfrac{1}{2}\frac{d}{ds}\lg\left(Rp^3\frac{dr}{dp}\right),\qquad \ldots\ldots\ldots\quad (7)$$

egy nagyon hasznavehető formula. V. ö. Newton, Principia, Lib. II. Propositio 17. és 18. és a 246. §. 126, 127, 129, 130. feladatait.

203. §. *Az ellenálláson kivül vezérsugári és forgató gyorsulással biró mozgás differentiálegyenletei.*

Legyen Θ az ellenállástól független forgató gyorsulás, mely az előbbi §. R centrális és S ellenállásbeli gyorsuláshoz lép; ekkor a megelőző §. $(3a)$ egyenleteiből:

$$\varphi_r=R+\frac{S}{u^2}\frac{du}{ds};\qquad \varphi_\vartheta=\Theta-\frac{S}{u}\frac{d\vartheta}{ds},$$

melyeket a megelőző §. (3) egyenletébe helyettezve, belőle:

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2}+u+\frac{R}{c^2u^2}+\frac{\Theta}{c^2u^3}\cdot\frac{du}{d\vartheta}=0,\qquad \ldots\ldots\quad (1)$$

melynek alakja a Kinematika 77. §.-a (6)-éval egyező [csakhogy ott R az egész vezérsugári, Θ az egész forgató gyorsulás].

A változó c-re nézve a megelőző §. 2. pontja sémájára:

$$\frac{dc}{dt}=\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right)=r\varphi_\vartheta=r\Theta-Sr^2\frac{d\vartheta}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=r\Theta-S\frac{c}{v}=\frac{dc}{dt};$$

$$\frac{dc}{dt}+\frac{S}{v}c=\Theta r \quad \text{vagy:} \quad \frac{dc}{ds}+\frac{S}{v^2}c=\frac{\Theta}{v}r, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

mely egyenletek általános integrátiója bonyolódott; de ez végrehajtható 1), ha $\Theta=\varkappa\lambda : r$ és $S=\varkappa v$, vagy 2) $\Theta=\varkappa\lambda v : r$ és $S=\varkappa v^2$ esetekben, $\varkappa$ és λ állandók lévén, a mikor is:

$$1) \quad \frac{dc}{dt}+\varkappa(c-\lambda)=0 \quad \text{vagy:} \quad c=\lambda+c_0e^{-\varkappa t}; \quad . \quad . \quad . \quad (2_1)$$

$$2) \quad \frac{dc}{ds}+\varkappa(c-\lambda)=0 \quad \text{vagy:} \quad c=\lambda+c_0e^{-\varkappa s}, \quad . \quad . \quad . \quad (2_2)$$

mely esetekben a c a $\lambda+c_0$ kezdőértéktől a λ végértékig fogy; ez az utóbbi a Θ jelenlétének folyománya.

204. §. *A centrális vonzó erő a távolsággal, az ellenállás a sebességgel arányos. Rezgő pálczák és kis lengésű gömbi ingák tényleges pályái.*

Kör- vagy négyzet-keresztmetszetű, egyik végen megerősített pálcza szabad végének, vagy forgási testalakú, symmetria tengelye egy pontja körül lengő kis amplitudójú gömbi ingának a levegőben való mozgása e §. czímében említett erők alatt megyen végbe, ha e testeket a megindítás után magukra hagyjuk.*

Ezen erők kifejezése:

$$mR=-m\omega^2r; \quad mS=2m\varkappa v; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ω^2 és $\varkappa$ positiv állandók, $\varkappa^2 : \omega^2$ viszony rendesen kicsiny.

I. *Fogyó ellipsis-pályák.*

A mozgás egyenletei itt:

$$x''+2\varkappa x'+\omega^2x=0; \quad y''+2\varkappa y'+\omega^2y=0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

de ezek a csillapított egyszerű harmonikus mozgás egyenletei [Kinematika 96. és 97. §§.]; e szerint a megvizsgálandó mozgás derékszögű vetületei a nevezett mozgásokat adják.

A (2)-ből [az i. h. 97. §. (3) és (4) sémai szerint:

$$x=Ae^{-\varkappa t}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\delta_1\right); \quad y=Be^{-\varkappa t}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\delta_2\right), \quad . \quad (3)$$

hol A, B, δ_1, δ_2 a kezdő helyzet és - sebesség meghatározta integrálállandók, és ha $\omega^2-\varkappa^2=\omega_0^2$-t írunk a periodus, T:

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2-\varkappa^2}}=\frac{2\pi}{\omega_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

* Kinematika 177. lapja első kikezdése.

Vetítve a pontmozgást a centrumon átmenő, a szilárd X tengelylyel α szöget képező egyenesre, ezen vetületi mozgásnak

$$x_\alpha = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

kifejezése a (3)-ból csillapított egyszerű harmonikus magaséra redukálható.

A (3) rendszer csak az $e^{-\varkappa t}$ együtthatóval különbözik az ellenállás nélküli ily mozgástól [Kinematika 114. §. II. pontja] s így az ezen utóbbi számára nyert eredmények, ezen együtthatónak az A-hoz és a B-hez való hozzácsatolásával jelen esetünkre azonnal érvényesíthetők. Az idézett hely (10)—(12a) egyenleteiben $2\pi(\delta_2-\delta_1)=\gamma$-t írva:

$$\frac{x^2}{A^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\gamma + \frac{y^2}{B^2} = e^{-2\varkappa t}\sin^2\gamma\,; \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = e^{-2\varkappa t}\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4a)$$

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg} 2\alpha = 2\frac{AB}{A^2-B^2}\cos\gamma\,; \quad D^4=(A^2+B^2)^2-4A^2B^2\sin^2\gamma\,; \\ &\frac{1}{a^2} = \frac{A^2+B^2-D^2}{2A^2B^2\sin^2\gamma}\,; \quad \frac{1}{b^2} = \frac{A^2+B^2+D^2}{2A^2B^2\sin^2\gamma}\,; \end{aligned}\right\} \quad (4b)$$

azaz: a pálya oly *változó ellipsis*, melynek mindenkori féltengelyei $ae^{-\varkappa t}$ és $be^{-\varkappa t}$, hol az első az X tengelylyel α szöget képez.

Az *ellipsis-pálya féltengelyei idővel fogynak a zérusig, de irányukat változatlanul megtartják.*

I. *Jegyzet:* Képezve (3)-ból az $x:y$-et és benne kifejtve a cosinusokat, könynyen nyerjük

$$\frac{2\pi}{T}t = +\operatorname{arc\,tg}\frac{xB\cos 2\pi\delta_2 - yA\cos 2\pi\delta_1}{xB\sin 2\pi\delta_2 - yA\sin 2\pi\delta_1}\,, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

melyből t-t a (4)-be helyettezve, a tisztán x és y-ben kifejezett pályaegyenlet adódik; de ez igen bonyolódott.

II. *Fogyó és deformálódó ellipsis-pályák.*

Sem a gömbi inga, sem a pálczák szerkezetével lehet a különböző irányban végbemenő lengések periodusainak teljes egyenlőségét elérni [Kinematika 106. §. Ia. pontja, 176. l.]. Ezért a tényleges viszonyoknak megfelelőleg legyenek ω és $\omega+\Delta\omega$ az X s az Y irányokra vonatkozó arányossági állandók, illetve T és $T+\Delta T$ a periodusok, miáltal a (3)-ban csak az y phásisa megváltozott, melyben rövidség kedveért:

$$\delta_2 - \frac{\Delta T\,.\,t}{T(T+\Delta T)} = \delta_2 - \frac{t}{\tau} = \delta_2'\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$x = Ae^{-\varkappa t}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\delta_1\right)\,; \quad y = Be^{-\varkappa t}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\delta_2'\right) \quad \ldots \quad (7)$$

E szerint az előbbi I. pontban felírt és idézett kifejezések itt is érvényesek, de avval a különbséggel, hogy az ottani δ_2 helyébe a δ_2' lép, mely az *időnek lineáris függvénye*, ugyanez áll a $2\pi(\delta_2'-\delta_1)=\gamma$-ra nézve; a (4) és (4*b*) szerint *a pálya fogyó nagyságú és változó irányú (forgó) féltengelyekkel biró ellipsis*, melynek mindenkori (osculáló) elemei a nevezett kifejezésekből adódnak. Evvel a LISSAJOUS-féle alakoknak valósággal igen közelítőleg egyező leírását nyertük, [Kinematika 106. §. I*a*. pontja]; a surlódás befolyását az $e^{-\varkappa t}$ együttható, a szakaszok különböző voltáét a $\tau^{-1}t$ tag fejezi ki. Az *a* és *b* értékei itt szakaszosan változnak; e szakasz egyenlő avval a T időközzel, mely alatt a $\gamma=2\pi(\delta_2'-\delta_1)=2\pi(\delta_2-\delta_1-t\tau^{-1})$ szög 2π-vel változik; ebből:

$$2\pi=2\pi\tau^{-1}\mathrm{T},$$

azaz (6) alapján:

$$\mathrm{T}=\tau=\frac{T(T+\Delta T)}{\Delta T} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Irva $T:\Delta T=\nu$, a T és a $T+\Delta T$ tartamoknak a T-ben foglalt száma a (8) értelmében:

$$\frac{\mathrm{T}}{T}=\frac{T}{\Delta T}+1=\nu+1; \quad \frac{\mathrm{T}}{T+\Delta T}=\frac{T}{\Delta T}=\nu, \quad \ldots \quad (8a)$$

hol a $T:\Delta T=\nu$ viszony nem tartozik egész számnak lenni [s ezért a Kinematika 176. lapja utolsó sorában az «egész» szó elhagyandó].

II. *Jegyzet:* Ha az e §. elején említett egyenlőségek sem az ellenállásra, sem a periodusra vonatkozólag *nem* állanak: a $\varkappa$ és ω állandók különbözők és a (3)

$$x_1=Ae^{-\varkappa_1 t}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T_1}+\delta_1\right); \quad y_1=Be^{-\varkappa_2 t}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T_2}+\delta_2\right) \quad . \quad (9)$$

a mozgás egyenletei, melyek mindenesetre fogyó méretű, deformálódó és forgó pályát jelentenek; további megvizsgálását az olvasónak ajánljuk.

205. §. *Folytatás. Kivételes eset: A pálya logarithmusos spirális. A probléma megfordítása.*

1. Különös figyelmet érdemel a megelőző §. I. pontjában tárgyalt probléma azon esete, mikor az egymásra merőleges és összeteendő csillapított rezgések amplitudói egyenlők és phásiskülönbségük $2\pi(n-\frac{1}{4})$-et teszen ki.

Ekkor az idézett §. (3) rendszerébe teendő:

$$A=B; \quad 2\pi\delta_2=2\pi\delta_1+2\pi(n-\tfrac{1}{4}); \quad \ldots\ldots \quad (0)$$

továbbá írva:

$$r^2=x^2+y^2; \quad \vartheta=2\pi\left(\frac{t}{T}+\delta_1\right) \quad \text{vagy} \quad t=\frac{T}{2\pi}\vartheta-\delta_1 T, \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\omega^2-\varkappa^2}=\omega_0; \quad \varkappa\frac{T}{2\pi}=\frac{\varkappa}{\omega_0}=\varepsilon; \quad a=Ae^{+\varkappa\delta_1 T}; \quad \ldots \quad (2)$$

az idézett egyenletrendszerből:

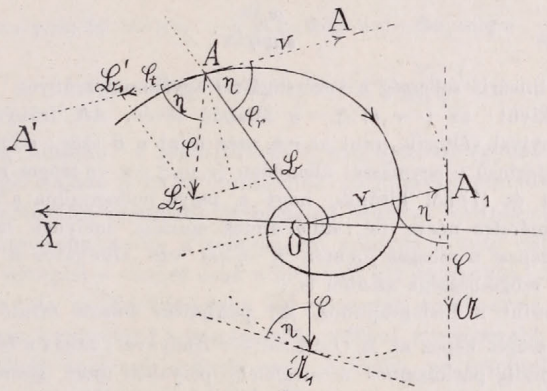
$$\left.\begin{aligned} r=Ae^{-\varkappa t}=ae^{-\varepsilon\vartheta}; \\ x=r\cos\vartheta\,; \quad y=r\sin\vartheta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

A pálya *logarithmusos spirális*, melynek r vezérsugara állandó $\vartheta'=\omega_0$ szögsebességgel forog a centrum körül, 87. ábra.

Továbbá a (3)-ból:

$$x'=r'\cos\vartheta-r\vartheta'\sin\vartheta\,; \quad y'=r'\sin\vartheta+r\vartheta'\cos\vartheta\,;$$
$$v^2=x'^2+y'^2=r'^2+(r\vartheta')^2=\varkappa^2r^2+r^2(\omega^2-\varkappa^2)\,;$$

$$\left.\begin{aligned} v=r\omega=a\omega e^{-\varepsilon\vartheta}; \\ c=r^2\vartheta'=r^2\omega_0=a^2\sqrt{\omega^2-\varkappa^2}\,e^{-2\varepsilon\vartheta} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$


A
A
v
A'
X
O
A1
v
η
φ
φ
φ

Legyen, 87. ábra, OA az egyenoldalú spirális, r és ϑ a rajta mozgó A pont coordinátái, hol ϑ az X tengelytől a mozgás mentén r-ig számított $(XOA)\sphericalangle$ szög; η a $v=\overrightarrow{AA}$ sebesség s az $\overrightarrow{AO}=-r$ közötti hegyes szög. Ekkor:

$$r=ae^{-\varepsilon\vartheta}; \quad \operatorname{tg}\eta=-\frac{rd\vartheta}{dr}=+\frac{1}{\varepsilon}=\text{állandó}; \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

a — jel azért lép fel, mert ϑ növekedésével az r fogy;

$$r=ae^{-\vartheta\operatorname{cotg}\eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6a)$$

a) Szerkesztve O-ból e pálya hodographját: $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{AA}=v$; továbbá legyen ω_0 az állandó szögsebesség, akkor a v-nek az r-re merőleges (forgató) componense $v\sin\eta$ az $r\omega_0$-val egyenlő, miből:

$$v=\frac{\omega_0}{\sin\eta}r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

szóval: a lineáris sebesség a vezérsugárral egyenesen arányos.

Ezenkívül: az $(-r, v)\sphericalangle=\eta$ állandó lévén, AA iránya mindig ugyananynyival változik, mint az r-é, azaz mint a ϑ szög; ezért az OA_1 és a hozzátartozó r egymással állandóan $(r, v)\sphericalangle=\pi-\eta$ szöget képeznek.

Ebből és (7)-ből kitűnik, hogy a pálya hodographja a pályához hasonló-, méretre nézve $(\omega_0:\sin\eta)$-szeres spirális, melynek helyzete a pályához képest a mozgás mentén $\pi-\eta$-val van elforgatva és v vezérsugarának szögsebessége szintén ω_0.

E szerint a hodographhoz, A_1 pontjában húzott érintő szintén állandó η szöget képez az $\overrightarrow{A_1O}=\overrightarrow{AA}=-v$ irányával; ámde a hodograph érintője mindig párhuzamos a megfelelő pályabeli pont gyorsulásával [Kinematika 50. §. 1.]. Legyen $\overrightarrow{A_1\mathfrak{A}}=\varphi$ ezen gyorsulásnak, azaz az A hodographbeli pontsebességének képviselője. E sebességnek az OA_1-re merőleges (forgató) componense $\varphi\sin\eta$, mely a $v\omega_0$-al egyenlőnek tartozik lenni, úgy hogy

$$\varphi=\frac{\omega_0}{\sin\eta}v; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

ezenkívül a $(-v, \varphi)\sphericalangle=\eta=$állandó.

Szerkesztve a hodograph hodographját szintén az O-ból: $\overrightarrow{O\mathfrak{A}_1}=\overrightarrow{A_1\mathfrak{A}}=\varphi$; az $\overline{O\mathfrak{A}_1}$ és a hozzátartozó $\overrightarrow{OA_1}=v$ egymással szintén $(v, \varphi)\sphericalangle=\pi-\eta$ szöget képeznek.

E szerint a másodrendű hodograph méretei és helyzete az elsőrendűhöz képest ugyanolyanok, mint az utóbbiéi az eredeti pályához képest; miután pedig (7)-ből és (8)-ból:

$$\varphi=\left(\frac{\omega_0}{\sin\eta}\right)^2.r; \quad (r, \varphi)=2(\pi-\eta); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

a másodrendű hodograph a pályához hasonló spirális; méretei a pálya

méreteinek $(\omega_0 : \sin\eta)^2$-szeresei és a helyzete az utóbbihoz képest a mozgás mentén $2(\pi-\eta)$-szöggel el van forgatva.

b) A mozgást fentartó erők kipuhatolása czéljából vigyük fel az A pontból irány és nagyság szerint az $\overline{O\mathfrak{A}_1}=\overline{A\mathfrak{B}_1}=\varphi\cdot t$; ez az $\overrightarrow{OA_1}$-el és így $\overrightarrow{AA}$ pályaérintővel $\pi-\eta$ szöget képez.

Levágva A-ból kiindulólag az r mentén az $\overline{A\mathfrak{B}}=\overline{A\mathfrak{B}_1}$ darabot: $\mathfrak{B}A\mathfrak{B}_1$ egyenszárú háromszög, és $\overrightarrow{A\mathfrak{B}_1}$ szétbontható az $\overrightarrow{A\mathfrak{B}_1'}=\varphi_t$ és $\overrightarrow{A\mathfrak{B}}=\varphi_r$ tangentiális és radiális gyorsulási componensekre, melyeknek *értékviszonyai* az ábra szerint:

$$\varphi : \varphi_r : \varphi_t = \sin\eta : \sin\eta : \sin 2(\tfrac{1}{2}\pi-\eta);$$

avagy (7) és a (9) első egyenlete és e gyorsulások előjele tekintetbe vételével:

$$\varphi_t=-\varphi\sin 2\eta : \sin\eta=-\frac{\omega_0^2}{\sin^2\eta}r\,.\,2\cos\eta=-2\omega_0\operatorname{cotg}\eta\,.\,\frac{\omega_0}{\sin\eta}r.$$

$$\varphi_t=-(2\omega_0\operatorname{cotg}\eta)\,v\,;\quad \varphi_r=-\left(\frac{\omega_0}{\sin\eta}\right)^2 r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Ezek alapján: a logarithmusos csigagörbén egyenletes szögsebességgel haladó pont gyorsulásának radiális componense egyenlő a görbe pólusától számított távolsággal arányos vonzással, tangentiális componense pedig a sebességgel arányos és vele ellentett irányú. Ily mozgást e szerint csak a nevezett két gyorsulási componens létesíthet; de megfordítva ezen két gyorsulási componens nem csak ezt, hanem a megelőző §-ban tárgyalt, sokkal általánosabb mozgást is létesítheti, melynek a fenti csak speciális, az integrál-állandók meghatározott értékeinél fellépő esete.

3. Ezen speciális eset, ugyanis a nevezett spirális a kezdő helyzet és sebesség bizonyos feltételei mellett adódik.

A v sebességnek radiális és forgató componense $r'=v\cos(\pi-\eta)=$ $=-v\cos\eta$; $r\vartheta'=+v\sin\eta$, avagy e pálya speciális, (2) és (3) alatti viszonyait felhasználva ezen összetevők képzésére.

$$v\cos\eta=\varkappa r\,;\quad v\sin\eta=r\sqrt{\omega^2-\varkappa^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

mely összefüggések minden pillanatban, a kezdetre is érvényesek; bennük $\varkappa$ és ω az ellenállás és a centrális erő adott állandói.

A kezdő helyzet és- sebesség jellemzői r_0, ϑ_0; v_0, η_0; ezek a szóban forgó spirálist fogják szolgáltatni, ha a fentírt, itt

$$\frac{v_0\cos\eta_0}{r_0}=\varkappa\,;\qquad \frac{v_0\sin\eta_0}{r_0}=\sqrt{\omega^2-\varkappa^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

alakú feltételeknek felelnek meg; ekkor η_0 a pálya alakjára [v. ö. a (6)-ot], ϑ_0 pedig síkjában való helyzetére vonatkozó jellemző állandó.

Jegyzet: Az e §-ban részletezett mozgás lényegesen különbözik a 208. §-ban tárgyalt a bolygóknak ellenálló közegben való mozgására vonatkozó azon közelítéstől, melynél a pálya logarithmusos spirális; mert ott a szögsebesség *nem* állandó.

206. §. *Bolygók relativ mozgása ellenálló közegben.*

Egymásra ható két égi test (pl. a nap és egy bolygó) egymáshoz viszonyított relativ centrális gyorsulása [136. §. (3)] $R=-\mu:r^2$, s így a 202. §. (1) és (2), (4) és (5) egyenletei rendre:

$$x''+\mu\frac{x}{r^3}=-S\frac{x'}{v}\;;\qquad y''+\mu\frac{y}{r^3}=-S\frac{y'}{v}\;;\quad\ldots\quad(1)$$

$$\tfrac{1}{2}v^2=\frac{\mu}{r}-\int Sds+\text{constans}\quad\ldots\ldots\quad(2)$$

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2}+u-\frac{\mu}{c^2}=0,\qquad c=r^2\frac{d\vartheta}{dt}=c_0e^{-\int\frac{S}{v^2}ds}\quad\ldots\quad(3)$$

$$v^2=x'^2+y'^2=r'^2+r^2\vartheta'^2\quad\ldots\ldots\quad(4)$$

Az egyenleteknek további általános tárgyalása igen bonyolódott; ezt itt azon oknál fogva mellőzzük, mivel a tapasztalás a világűrben létezőnek felvett æther ellenállásának a bolygók mozgására való befolyását oly kicsinynek mutatta ki, hogy ez csak a leglazább szerkezetű égi testeknél, az üstökösöknél látszik észrevehető módon jelentkezni. Az $S(v)$ itt e szerint csak igen kicsiny lehet; ezért a 201. §-ban említettekhez analog közelítési eljárások alkalmazhatók.

Így pl. nyerjük az első közelítést, ha a v-nek a légüres térre érvényes értékét helyettezzük a felírt egyenletek $S(v)$ függvényébe és valamenynyi azon tagjába, melyben v tetszőleges hatványa S-sel szorozva fordul elő; ugyanezt teszszük az x' és y' componensekkel és a ds-el. Ekkor a parameterek variatiójának módszere következőleg alkalmazható:

Kifejtve a (3) hatványmenynyiségét, mely az előbbiek szerint az egységtől csak igen kevéssé térhet el, s csak az elsőrendű tagokat tartva meg, az (1)—(4)-ből marad:

$$c=c_0\left\{1-\int\frac{S}{v^2}ds\right\};\quad\frac{d^2u}{d\vartheta^2}+u-\frac{\mu}{c_0}=2\frac{\mu}{c_0^2}\int\frac{S}{v^2}ds\;;\quad(5)$$

$$v^2=\frac{2\mu}{r}-2\int Sds+\text{constans}_1=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{c_2^2}{r^2}-2\frac{c_0^2}{r^2}\int\frac{S}{v^2}ds+\text{const.}_2\quad(6)$$

A pálya (5) egyenletére a nevezett módszer [mint a Kinematika 125—127. §-ában] alkalmazható, ha jobb oldala a légüres térre vonatkozó értékekkel ϑ-ban fejezhető ki.

207. §. *Folytatás: Az ellenállás a sebesség négyzetével arányos. Közelítések.*

1. Legvalószínűbb az $S=\varkappa v^2$ föltevés [202. §. (5*a*); 196. §.], mely esetben a megelőző §. (3) és (4) egyenleteiből:

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt}=c=c_0e^{-\varkappa s};\quad \frac{d^2u}{d\vartheta^2}+u-\frac{\mu}{c_0^2}e^{+2\varkappa s}=0;\quad \ldots\quad (1)$$

$$v^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{c_0^2}{r^2}e^{-2\varkappa s}.\quad \ldots\ldots\ldots\quad (2)$$

A rendszer integrátiója általában véve nagy complicátiókhoz vezet; de az (1)-ből közvetlenül kiderül, hogy az az $u=1:r=$const. feltétellel nem elégíthető ki, azaz, hogy a *pálya kör nem lehet.*

2. A megelőző §. közelítése alkalmazása czéljából jeleljék u_0, r_0 a légüres térre vonatkozó értékeket és írjunk $u_0-(\mu:c_0^2)=z_0$, miáltal az (1)-ből, ezt $\varkappa=0$-ra vonatkoztatva:

$$\frac{d^2z}{d\vartheta^2}+z_0=0;\quad \text{két partikuláris megoldása: } z_1=\cos\vartheta;\ z_2=\sin\vartheta;$$

e szerint teljes megoldása [Kinematika 126. §. 1. pontja]

$$z_0=\frac{1}{r_0}-\frac{\mu}{c_0^2}=A_1\cos\vartheta+A_2\sin\vartheta,\quad \ldots\ldots\quad (3)$$

mely a kúpszeletek egyenlete közönséges alakjába hozható:

$$r_0=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\eta};\quad \eta=\vartheta+\text{const.}\quad \ldots\ldots\quad (3a)$$

Használva $u-(\mu:c_0^2)=z$ jelölést, az (1) írható

$$c=c_0e^{-\varkappa s};\quad \frac{d^2z}{d\vartheta^2}+z=\frac{\mu}{c_0^2}(e^{2\varkappa s}-1),\quad \ldots\ldots\quad (4)$$

melynek jobb oldalaiba első közelítésben s-nek a légüres térre vonatkozó, ϑ-val kifejezett értéke helyettezendő. A kúpszeleteknél a kör kivételével s a ϑ-nak bonyolódott függvénye [v. ö. a Math. Repertórium 64. §. (12), (5) és (7); (19) és (14); (31), (32) és (26) formuláit] s így a (4) jobb oldalát, melyet Θ-val jelölhetünk, ismertnek tekinthetjük, úgy hogy [Kinematika 126. §. (3)] a (4) teljes megoldása e közelítésben:

$$\left.\begin{aligned} z=\frac{1}{r}-\frac{\mu}{c_0^2}&=A_1\cos\vartheta+A_2\sin\vartheta-\\ &-\left[\cos\vartheta\int\Theta\sin\vartheta d\vartheta-\sin\vartheta\int\Theta\cos\vartheta d\vartheta\right]\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots\quad (5)$$

3. A (4) rendszer oly kúpszeleti mozgásnak tekinthető, melynek kúpszeleti pályaelemei az idővel lassan, de folytonosan változnak s hol a símuló (osculáló) pálya az, mely az ellenállás zavarta bolygó mindenkori mozgásállapotának megfelel, ugyanis az, melynek elemeit [a 139, 141, 142. §§. mintájára] a mindenkori helyzete és sebessége adják meg, ha felvennők, hogy a mozgás a tekintetbe vett időpillanaton túl ellenállás nélküli volna.

Ezt a vizsgálatot más formában Lagrange* végezte.

208. §. *Folytatás: A bolygó eredeti körmozgásának igen kis ellenállású közeg létesítette megzavarása. A pálya, a keringési idő s a sebesség megváltozása.*

Jelöljék $r_0=u_0^{-1}$, ϑ_0, T_0, c_0, v_0 az ellenállás nélküli mozgás polárcoordinátáit, keringési idejét, felületi és lineáris sebességét, $r=u^{-1}$, ϑ, T, c, v, ugyanezeket az ellenálló közegben történő mozgásra nézve; ezek különbsége, az $S=\varkappa v^2$-ben $\varkappa$ kicsiny lévén, csak igen csekély lehet.

Ha az ellenállás nélküli mozgás, a mi lehetséges, körmozgás, akkor az ezen esetben érvényes $r=a=\text{const.}$ és $\varkappa=0$ feltételekkel a megelőző §. (1), (2) és (3) rendszeréből:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{a}=\frac{\mu}{c_0^2}; \quad v_0^2=\frac{c_0^2}{a^2}; \quad T_0=\frac{2\pi a}{v_0}=\frac{2\pi a^2}{c_0}; \\ &\frac{d\vartheta_0}{dt}=\frac{c_0}{a^2}=\frac{2\pi}{T_0}; \quad s_0=a\vartheta_0; \quad z_0=0; \quad A_1=A_2=0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (1)$$

A megelőző §. (4) egyenletét első közelítésben megfejtendő, jobb oldalát a zavartalan körmozgás $s=a\vartheta$ összszefüggésével képezve, itt $\Theta=\mu c_0^{-2}(e^{2\varkappa a\vartheta}-1)$, melylyel könnyű számítással [Math. Repertórium 111. §. 15. és 16. formulái 139. lap] az idézett §. (5) sémájából a (4) keresett megoldását az első közelítésben nyerjük

$$\frac{1}{r}=\frac{\mu}{c_0^2}\cdot\frac{e^{2\varkappa a\vartheta}}{1+4\varkappa^2a^2}$$

$$c=c_0e^{-\varkappa a\vartheta}; \quad r=a\,(1+4\varkappa^2a^2)\,c^{-2\varkappa a\vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

mely a *logarithmusos spirális* egyenlete.

A kétszeres területi sebesség:

$$r^2\vartheta'=a^2\,(1+4\varkappa^2a^2)^2\,e^{-4\varkappa a\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dt}=c=c_0e^{-\varkappa a\vartheta};$$

melyből, ha $t=0$-kor $\vartheta=0$, s így ekkor $c=c_0$,

$$a^2\frac{(1+4\varkappa^2a^2)^2}{3\varkappa a}\{1-e^{-3\varkappa a\vartheta}\}=c_0t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Végre, a sebesség négyzete $v^2=r'^2+r^2\vartheta'^2$, a (2) és (3) alapján:

$$v^2=\frac{c_0^2}{a^2}\cdot\frac{e+2\varkappa a\vartheta}{1+4\varkappa^2a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Végre, ha T a ϑ és $\vartheta+2\pi$ értékek közötti időköz, (3)-ból

$$T=\frac{a^2}{c_0}\cdot\frac{(1+4\varkappa^2a^2)^2}{3\varkappa a}\{e^{-3\varkappa a\vartheta}-e^{-3\varkappa a(\vartheta+2\pi)}\} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

---

* Mécanique analytique II. kötet 155—160. ll.

Jegyzet: A $\varkappa$ kicsinységénél fogva elegendő, ha a $\varkappa a$-nak csak első hatványú tagjait tartjuk meg, még a kifejtendő hatványmenynyiségeknél is, úgy hogy az (1) értékek tekintetbe vételével a (2)—(5) egyenletekből rendre:

$$\left.\begin{aligned} r&=ae^{-2\varkappa a\vartheta}=ae^{-2\varkappa v_0 t};\\ t&=\frac{a^2}{c_0}\,\vartheta\left\{1-\frac{3}{2}\,\varkappa a\vartheta\right\};\quad \vartheta=\vartheta_0\left\{1+\frac{3}{2}\,\frac{\varkappa c_0}{a}\,t\right\};\\ v&=v_0e^{+\varkappa a\vartheta}=v_0e^{+\varkappa v_0 t};\quad c=c_0e^{-\varkappa v_0 t};\\ T&=T_0e^{-3\varkappa a\vartheta}\{1-3\varkappa a\pi\}=T_0e^{-3\varkappa v_0 t}\{1-3\varkappa a\pi\}. \end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(6)$$

Az eredeti körpályából az ellenállás folytán logarithmusos spirális lesz, melynek vezérsugara, felületi sebessége és keringési ideje folytonosan fogy, ellenben szögsebessége és haladó sebessége szakadatlanúl növekszik, úgy hogy ha a viszonyok hoszszú időre fennállanának, a bolygó végre igen nagy sebességgel rohanna a napba.

2. A dynamika módszertani elveinek alkalmazása mozgásproblémák megfejtésére.

a) D'Alembert elvének alkalmazása változó pályájú, mozgó pályájú és relativ pontmozgásokra.

209. §. *Előírt, törvényszerűen változó pályán végbemenő anyagi pontmozgás. Egyszerű példák.*

Egy vagy két pont esetében az e §. czimében jelzett elv alkalmazása rendesen csak akkor nyújt lényeges egyszerűsítést, mikor a feltételek az időt explicite tartalmazzák; ellenben mindig igen előnyös egész testek (rendszerek) mozgása megvizsgálásánál, különösen Lagrange alakjait használva [68. és 69. §§.], ezért megelégszünk itt néhány egyszerű oly példa felsorolásával, melynél a pont az időtől is függő kényszernek van alávetve. Beérjük azonban a mozgás egyenleteinek a d'Alembert-féle elv alapján való felállításával, a részletes számításukat az olvasóra bizván.

1. *Nehéz pont vizszintes, az időben változó sugarú sima körön mozog.*

Jeleljék x, y; l, α a mozgó pont derékszögű, illetve polárcoordinátáit számítva őket a változó kör *szilárd* középpontjától, mint kezdettől; ezek itt eleget tesznek az

$$x^2+y^2=l^2(t);\quad x=l\cos\alpha,\ y=l\sin\alpha\quad\ldots\quad(1)$$

egyenleteknek, $z=$constans és $l(t)$ adott függvény lévén.

A virtuális elmozdulások az időtől függetlenek lévén [68. §.], az (1) alapján megfelelnek az

$$x\delta x+y\delta y=0;\quad \delta z=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

feltételeknek.

A független (szabad) erők itt $X=Y=0$; $Z=-mg$; e szerint d'Alembert elve itt [68. §. 1. pontja]:

$$-mx''\delta x-my''\delta y-m(g+z'')\,\delta z=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Szorozva (2) egyenleteit λ_1, illetve λ_2-vel, (3)-hoz csatolva őket és δx, δy, δz együtthatóit külön-külön zérussal egyenlővé téve, nyerjük

$$mx''=\lambda_1 x;\quad my''=\lambda_1 y;\quad mz''=-mg+\lambda_2, \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

melyek a pont mozgásegyenletei; bennük a λ_1- és λ_2-őt tartalmazó tagok a feltételek folytán felmerülő kényszererők.

A *pálya* egyenletét a (4)-ből a területi gyorsulás [Kinematika 55. §. (2) 61. l.] képzése felhasználásával nyerjük, lévén:

$$(l^2\alpha')'=xy''-yx''=0;\quad \alpha'=c\,.\,l^{-2}(t);\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\alpha=c\int l^{-2}(t)\,dt+\text{const.}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5a)$$

mely e szerint quadraturára van viszszavezetve; az $\alpha(t)$ és az $l(t)$ egyenletekből t kiküszöbölésével ered a pályának α és l közötti egyenlete.

A λ együtthatókra nézve $z''=0$ lévén, a (4)-ből $\lambda_2=mg$; ez az m súlyával ellentetten egyenlő kényszererő, melyet a pálya vízszintes lapja mint reactió-erőt fejt ki. Továbbá az eleven erő kifejezéséből a (4)-el:

$$d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)=m(x''dx+y''dy)=\lambda_1(xdx+ydy)=\lambda_1 d\left(\tfrac{1}{2}l^2\right)^*;\,. \quad . \quad (6)$$

másrészt (1)-ből a sebesség négyzete, tekintettel (5)-re

$$v^2=x'^2+y'^2=l'^2+l^2\alpha'^2=l'^2+c^2l^{-2},$$

miáltal a (6)-ból:

$$md\left\{l'^2+c^2l^{-2}\right\}=\lambda_1 d(l^2);$$

avagy, mivel $\frac{1}{2}d(l'^2)=l'dl'=l''.l'.dt=l''dl$,

$$m\left\{l''dl-c^2l^{-3}dl\right\}=\lambda_1 ldl;$$

$$\lambda_1=\left(\frac{l''}{l}-\frac{c^2}{l^4}\right)m=\frac{m}{l}(l''-l\alpha'^2)=-\frac{m}{l}\varphi_r;\,. \quad . \quad . \quad (7)$$

s evvel λ_1 mint az időnek ismert függvénye adódik; a φ_r e mozgás radiális gyorsulása. A (4)-ben kifejezett mx'' és my'' gyorsító erők viszonya $x:y$, eredőjük $\lambda_1 l$; ez utóbbi e szerint a coordináták kezdetén megyen mindenkor keresztül és taszító, ha λ_1 positiv, vonzó, ha λ_1 negativ. Ezen $\lambda_1 l$ itt a kényszererő, melyet a pálya anyaga mint reactió-erőt fejt ki s mely a mindenkori l mentén fekszik; de iránya nem esik a tényleges pálya normálisába, mert ez utóbbi görbületi sugara irány- és nagyságra nézve eltér az l-től és csak állandó l esetében esik vele

* V. ö. e pont utolsó kikezdését és a következő lábjegyzékét.

egybe. Ez az erő a (6) szerint az m mozgási erélyét megváltoztatja, azaz *munkát végez;* e feltünőnek látszó körülmény az előírt pálya *mozgásában, alakváltozásában* találja magyarázatát, mivel e kényszererő keletkező helye mozgásban van, s így munkát végez. Másrészt, az előírt pályának s a mindig rajta lévő m-nek vele együtt való jelzett mozgatására *külső munka szükséges,* mely az m eleven ereje változásának ezen $\lambda_1 ldl$ részét létesíti.

2. *Nehéz pont vertikális, az időben változó sugarú sima körön mozog.*

A 156. §. 53. ábráját és jelöléseit megtartva, legyenek x és y az m pontnak a *szilárd* O kezdettől számított derékszögü, l és α a változó helyü C-től számított polár-coordinátái, hol l az időnek tetszőleges függvénye. Itt $X=0$; $Y=-mg$, $z=$const., és d'Alembert elve:

$$-mx''\delta x+(-mg-my'')\,\delta y=0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

hol a feltétel s ennek az időtől független variátiója:

$$2F(x,y,t)=x^2+(l-y)^2-l^2=0; \quad x\delta x+(y-l)\,\delta y=0 \; . \; . \; . \; (9)$$

Szorozva (9)-et λ-val, hozzáadva ezt (8)-hoz, zérussal egyenlítve a δx és δy együtthatóit, a mozgás egyenletei

$$mx''=\lambda x; \quad my''=-mg+\lambda(y-l), \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

hol a λ-val szorzott tagok a feltétel folytán fellépő kényszererő componensei. Ezek $\lambda l\,.\,(x:l)$ és $\lambda l\,.\,[(y-l):l]$ alakban írhatók, miből kitetszik, hogy a λl nagyságú kényszererő az l mentén fekszik és C felé hat.

A *pálya* meghatározására a (10)-ből a polárcoordináták segélyével képezzük a változó helyü C-re mint centrumra vonatkozó felületi gyorsulsát, lévén az 53. ábra és a (10) szerint: $x=l\sin\alpha$; $l-y=l\cos\alpha$;

$$(l^2\alpha')'=(l-y)\,x''-x\,(l-y)''=-x\,(l''+g)=-(g+l'')\,l\sin\alpha$$

$$2l'\alpha'+l\alpha''=-(g+l'')\sin\alpha, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

mely az α s l, illetve az α és t közötti összefüggés differentiálegyenlete.

Az eleven erő kifejezése (10)-ből

$$\begin{aligned} d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)=m\,(x''dx+y''dy)&=-mgdy+\lambda\,[xdx+(y-l)\,dy] \\ &=-mgdy+\lambda\,[xdx+(y-l)\,d\,(y-l)]+\lambda\,(y-l)\,dl \\ &=-mgdy+\lambda d\left(\tfrac{1}{2}l^2\right)+\lambda\,(y-l)\,dl \\ &=-mgdy+\lambda ydl.* \end{aligned}$$

Polárcoordinátákban ezen utolsó egyenlet:

$$v^2=x'^2+y'^2=(l\sin\alpha)'^2+(l-l\cos\alpha)'^2,$$

---

* Itt is hozzájárul λl kényszererő az eleven erő megváltoztatásához, a munka-végzéshez.

$$\tfrac{1}{2}md\{(l'^2+l^2\alpha'^2)+l'^2(1-2\cos\alpha)+2ll'\alpha'\sin\alpha\}=-mgd(l-l\cos\alpha)+$$
$$+\lambda(l-l\cos\alpha)\,dl,$$

miből:

$$\lambda=m\frac{d\{4l'^2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha+l^2\alpha'^2+2ll'\alpha'\sin\alpha\}+gd\{2l\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\}}{ldl2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha} \quad . \quad (12)$$

Az α és l közötti összefüggést a (11) szolgáltatta és így (12) is képezhető, miáltal az $l.\lambda$ kényszererő is teljesen ismert lesz; ennek iránya általában véve nem esik a pálya normálisába; csak állandó l esetében történik ez s ekkor a gyorsító erőnek a (10) két egyenletéből képezett l menti componense egyenlő az $mv^2:l$ dynamikai értékkel [155. §. (1), (4a) és a 156. §.], mely λ-t adja.

210. §. *Folytatás.* D'Alembert *elvének alkalmazása mozgó pályák és mozgó felületek problémáira. Egyszerű példák.*

1. *Nehéz pont forgó, tetszőleges alakú sima cső belsejében mozog.* Felhasználva a 175. §. 74. ábráját és jelöléseit, a megszorítást azonban, hogy a cső sík elhagyva, $m\varphi_r$, $m\varphi_\vartheta$, $m\varphi_z$ a gyorsító erő dynamikai kifejezései és P_r, P_ϑ, P_z a szabad (független) erő-éi, mindezeket *mozdulatlan* coordináta-tengelyekre vonatkoztatva; d'Alembert elve itt:

$$[m(r''-r\vartheta'^2)-P_r]\,\delta r+[mr^{-1}(r^2\vartheta')'-P_\vartheta]\,r\delta\vartheta+[mz''-P_z]\,\delta z=0 \quad . \quad (1)$$

A görbének (a cső tengelyének) itt két egyenlete van; legegyszerűbb ezeket a z forgástengelyt s a mindenkori r-et tartalmazó, e szerint *forgó* síkra és a Z-re merőleges síkra vonatkoztatni:

$$f_1(r,z,t)=0\,;\quad f_2(r,\vartheta,t)=0\,;* \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

minélfogva a virtuális elmozdulás az

$$\frac{\partial f_1}{\partial r}\delta r+\frac{\partial f_1}{\partial z}\delta z=0\,;\quad \frac{\partial f_2}{\partial r}\delta r+\frac{\partial f_2}{r\partial\vartheta}r\delta\vartheta=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$

feltételeknek felel meg; ezeket λ_1, illetve λ_2-vel szorozva, az (1)-ből levonva, és a δr, δz, $\delta\vartheta$ együtthatóit zérusoknak véve:

$$\left.\begin{aligned} m\left\{\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\}&=P_r+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial r}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial r}\,;\\ m\,\frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\left(r^2\,\frac{d\vartheta}{dt}\right)&=P_\vartheta+\frac{\lambda_2}{r}\,\frac{\partial f_2}{\partial\vartheta}\,;\\ m\,\frac{d^2z}{dt^2}&=P_z+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}\,; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

melyek az m *absolut* mozgásának egyenletei.

---

* A (2) két henger egyenlete, melynek elseje a mindenkori zr síkra merőleges, másodika a z-kkel párhuzamos; metszőgörbéjük a cső tengelye, azaz, az előírt *mozgó* pálya.

A (3) rendszerből λ_1 és λ_2 kiküszöbölhető, nyerünk egy r, ϑ, z, t közötti differentiálegyenletet, melyet a (2) két egyenletével egyesítve, végre csak két változó közötti differentiálegyenlet adódik, melynek megfejtése s a (2) egyenleteivel való egyesítése az m tényleg leírta pályáját s a mozgást szolgáltatja. Ez ismert lévén a (3)-ból λ_1 és λ_2 együtthatók és a kényszererő componensei:

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial r}; \quad \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta} \cdot \frac{1}{r}; \quad \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z};$$

meghatározhatók; ezeknek eredője általában véve nem fekszik a tényleges pálya normális síkjában.

Szorozva a (3) egyenleteit rendre dr, $rd\vartheta$, dz-vel, összegük az eleven erő tételének megfelelő egyenletet szolgáltatja:

$$\left.\begin{aligned} d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) = {} & P_r\,dr + P_\vartheta r\,d\vartheta + P_z\,dz + \\ & + \lambda_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial r}\,dr + \frac{\partial f_1}{\partial z}\,dz\right) + \lambda_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial \vartheta}\,d\vartheta + \frac{\partial f_2}{\partial r}\,dr\right)^* \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

vagy

$$\left.\begin{aligned} & d\left[\tfrac{1}{2}m\left(r'^2 + r^2\vartheta'^2 + z'^2\right)\right] = \\ & = P_r\,dr + P_\vartheta r\,d\vartheta + P_z - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial t}\,dt - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial t}\,dt; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4a)$$

hol a $\dfrac{\partial f_1}{\partial t}$ és $\dfrac{\partial f_2}{\partial t}$ a (2) egyenleteknek az explicit idő szerinti quotienssei, t ezen egyenlet paramétereiben fordulván elő.

a) Ha a cső alakja változatlan, akkor (2)-ből

$$f_1(r, z) = 0; \quad f_2(r, \vartheta - \alpha(t)) = 0 \quad \ldots \quad (5)$$

hol $\vartheta = \alpha(t) + \eta$ és $\alpha(t)$ a forgásból származó része a ϑ-nak, míg η a ϑ-k síkjában a tetszőleges r s egy meghatározott r_0 közötti vízszintes szög, úgy, hogy $f_2(r, \eta) = 0$ a görbe ezen, z-ra merőleges vetületének invariabilis egyenlete.

Ekkor

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial f_2}{\partial \vartheta} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial f_2}{\partial \eta} \cdot \omega,$$

ha ω a csőnek a Z tengely körüli szögsebessége és így (4*a*) szerint az eleven erőt az f_1 összefüggés nem változtatja.

aa) Ha a cső ezenkívül *sík* és a Z-n átmenő *síkban tartozik maradni*, akkor az η=const. és r-től független; ekkor az f_2 redukálódik $f_2 = \vartheta - \alpha(t) = 0$ egyenletre és így a (4)-ben csak $\lambda_2 d\vartheta = \lambda_2 \omega dt$ rész az, mely a kényszererőből származik. A (3) rendszer redukálódik a 175. §. (1) rendszerére, csakhogy az ottani

---

* A kényszererőknek ezen egyenletben való viselkedésére nézve a megelőző §. 1. pontjának utolsó kikezdése és lábjegyzékei érvényesek.

$$-R_n\frac{dz}{ds};\quad R_b;\quad +R_n\frac{dr}{ds}$$

helyébe itt rendre

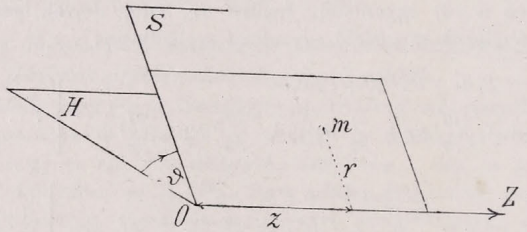
$$\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial r};\quad \lambda_2\frac{1}{r}\frac{\partial f_2}{\partial\vartheta};\quad \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}$$

lép és így

$$\lambda_1\left\{\left(\frac{\partial f_1}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=R_n;$$

továbbá, mivel itt

$$\frac{\partial f_2}{\partial\vartheta}=1,\quad \lambda_2=rR_b.$$



88. ábra.

2. A pont sima síkon tartozik maradni, mely síkjában levő tengely körül forog.

A mozgásra itt is hengercoordinátákat alkalmazhatni, legyenek, 88. ábra, Z a forgás tengelye, r az m-nek Z-től való távolsága, ϑ a forgó síknak a Z-n átmenő HOZ szilárd síkkal való szöge, számítva attól a helyzettől, melyben r a vízszintes *fölé* emelkedik. A független (szabad) erőnek megfelelő componensei P_r, P_ϑ, P_z; a feltétel egyenlete $F=\vartheta-f(t)=0$. D'Alembert elve itt:

$$(m\varphi_r-P_r)\,\delta r+(m\varphi_\vartheta-P_\vartheta)\,\delta\vartheta+(m\varphi_z-P_z)\,\delta z=0\ .\ .\ .\quad(1)$$

A δz és δr tetszőlegesek, de $\delta\vartheta=0$, az idő itt nem jövén tekintetbe [68. §.]. Szorozva $\delta\vartheta$-át λ-val s (1)-hez adva, az egyenlet szétbomlik:

$$m\varphi_r=P_r;\quad m\varphi_\vartheta=P_\vartheta-\lambda;\quad m\varphi_z=P_z\ .\ .\ .\ .\ .\quad(2)$$

rendszerre.

Példa: A föld nehézsége a független erő s a forgás tengelye vízszintes: $P_r=-mg\sin\vartheta$; $P_\vartheta=-mg\cos\vartheta$; $P_z=0$; miáltal (2)-ből:

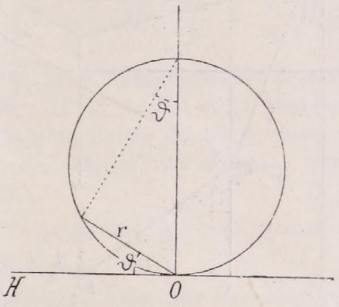
$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2=-g\sin\vartheta;\\ &\frac{m}{r}\cdot\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right)=-mg\cos\vartheta-\lambda;\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=0.\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\quad(3)$$

Legyen még a *sík forgása egyenletes*, akkor $\vartheta=\omega t$, $\omega=$állandó s az első egyenletből [v. ö. a 175. §. 1. pontja II. szakaszát]:

$$\frac{d^2r}{dt^2}-\omega^2 r=-g\sin\omega t;\quad r=a_1e^{+\omega t}+a_2e^{-\omega t}+\frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t \quad . \quad . \quad (4)$$

A pályának a Z-kre való vetülete a $z''=0$-ból $z=at+b$, azaz e nyom egyenletesen halad; a forgás tengelyére merőleges síkra való vetülete (4)-ből, benne $\omega t=\vartheta$-át téve

$$r=a_1e^{\vartheta}+a_2e^{-\vartheta}+\frac{g}{2\omega^2}\sin\vartheta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$



89. ábra.

Az egyedüli kényszererő itt λ, mely a (3) középső egyenletéből

$$\lambda=-m\left(2\omega\frac{dr}{dt}+g\cos(\omega t)\right); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

mely a sík mindenkori normálisába esik és változó előjelű lehet.

Jegyzet: Ha a kezdetben, $t=0$-kor $r=0$ és $r'=g:2\omega$, azaz, ha $t=0$-kor az m a forgás tengelyéből úgy leszen az ekkor vízszintes S síkra hajítva, hogy a Z-re merőleges sebességi componens $g:2\omega$-val egyenlő, akkor (4) szerint $a_1=a_2=0$ és a pálya egyenletei:

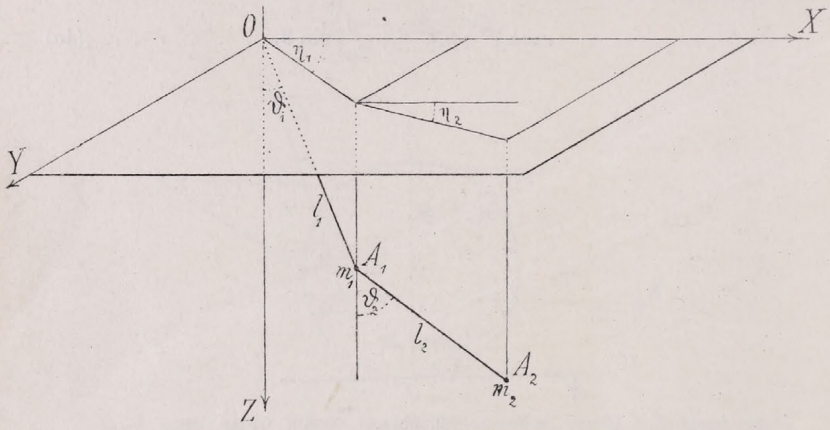
$$r=\frac{g}{2\omega^2}\sin\vartheta;\quad z=\frac{a}{\omega}\vartheta+b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Az első a Z-re merőleges s az OH vízszintest O-ban érintő $g:2\omega^2$ átmérőjű kört jelent, 89. ábra, mely miként könnyű átlátni, a ϑ-nak minden π-vel való változásával ismétlődik, csakhogy az m ekkor mindig átmegyen a Z tengelyen az S sík egyik feléről a másikra. A (6) értelmében a pálya kör-csavarvonal, melyen az m állandó sebessége:

$$v^2=r'^2+(r\vartheta')^2+z'^2=\frac{1}{2\omega}\sqrt{g^2+4a^2\omega^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

211. §. *Súlytalan fonálon függő két súly (egymással kapcsolt ingák) lengése. Igen kicsiny lengések részletezése.**

I. Legyen, 90. ábra, O a felfüggesztési pont, m_1 a tőle l_1-, m_2 az m_1-től l_2 változatlan távolságban felfüggesztett pontszerű tömeg, melyek derékszögű coordinátái $x_1y_1z_1$ és $x_2y_2z_2$; ezekre csak a földnehézségi erő mint független erő és az l_1 és l_2 fonáldarabok R_1 és



90. ábra.

R_2 feszültségei működnek, az utóbbiak az l_1, illetve az l_2 mentén. E szerint

1. *A közönséges módon képezett, a derékszögű mozgás-egyenletek:*

$$\left.\begin{aligned} m_1x_1'' &= -R_1\frac{x_1}{l_1} + R_2\frac{x_2-x_1}{l_2}; & m_2x_2'' &= -R_2\frac{x_2-x_1}{l_2};\\ m_1y_1'' &= -R_1\frac{y_1}{l_1} + R_2\frac{y_2-y_1}{l_2}; & m_2y_2'' &= -R_2\frac{y_2-y_1}{l_2};\\ m_1z_1'' &= -R_1\frac{z_1}{l_1} + R_2\frac{z_2-z_1}{l_2} + m_1g; & m_2z_2'' &= -R_2\frac{z_2-z_1}{l_2} + m_2g. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Az l_1 és l_2 állandó voltát kifejező egyenletek és időbeli második differentiálquotienseik:

$$\left.\begin{aligned} 2F_1 &= l_1^2 - \{x_1^2+y_1^2+z_1^2\} = 0;\\ 2F_2 &= l_2^2 - \{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\} = 0; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

* A 221. §-ban ugyane problémát az általános coordináták alkalmazásával tárgyaljuk.

$$\left.\begin{aligned} x_1''x_1+y_1''y_1+z_1''z_1&=-(x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2)=-v_1^2;\\ (x_2''-x_1'')(x_2-x_1)+\cdot+\cdot&=-\{(x_2'-x_1')^2+\cdot+\cdot\}=-v^2;\end{aligned}\right\}\ .\quad(2a)$$

hol v az m_2-nek az m_1-hez viszonyított relativ sebessége.

Szorozva az (1) első rendszere egyenleteit rendre $x_1 : m_1 l_1$-el s í. t. s képezve (2*a*) első egyenlete szerint összegüket; szorozva az első és második rendszeréit rendre $(x_2-x_1) : m_1 l_2$-vel, illetve $(x_2-x_1) : m_2 l_2$-lel s képezve (2*a*) második egyenlete szerint különbségüket, végre az l_1 és l_2 közötti szöget (l_1, l_2)-lel jelölve, nyerjük:

$$\left.\begin{aligned} \frac{v_1^2}{l_1}-\frac{R_1}{m_1}+\frac{R_2}{m_1}\cos(l_2, l_1)+g\frac{z_1}{l_1}&=0;\\ \frac{v^2}{l_2}+\frac{R_1}{m_1}\cos(l_1, l_2)-\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)R_2&=0;\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\quad(3)$$

mely egyenletek az R_1 és R_2 kényszererőket a sebességekkel és a coordinatákkal fejezik ki; az R_1 és R_2 az (1) rendszerbe behelyezhetők.

Ezekhez járul még az eleven erő tétele, mely az (1) egyenleteinek dx_1, dy_1, dz_1; dx_2, dy_2, dz_2-vel való szorzatai összegezéséből és integrátiójából származik:

$$\tfrac{1}{2}m_1v_1^2+\tfrac{1}{2}m_2v_2^2=m_1gz_1+m_2gz_2+\text{constans};\quad .\quad .\quad .\quad(4)$$

ebből a kényszererők kiestek.

2. *A mozgásegyenlet* d'Alembert *elve alapján.*

Itt az m_1-re s az m_2-re ható független erők componensei: $X_1=Y_1=0$, $Z_1=m_1g$; $X_2=Y_2=0$, $Z_2=m_2g$, miáltal ezen elv [68. §.]

$$\left.\begin{aligned} -\{m_1x_1''\delta x_1+m_1y_1''\delta y_1+(m_1z_1''-m_1g)\delta z_1+\\ +\ m_2x_2''\delta x_2+m_2y_2''\delta y_2+(m_2z_2''-m_2g)\delta z_2\}=0.\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\quad(5)$$

Másrészt a (2) feltételekből

$$\delta F_1=-(x_1\delta x_1+y_1\delta y_1+z_1\delta z_1)=0;\quad \delta F_2=-\{(x_2-x_1)(\delta x_2-\delta x_1)+\cdot+\cdot\}=0,$$

mely egyenleteket λ_1-, illetve λ_2-vel szorozva, (5)-höz adva és a δx_1, . . . δz_1 együtthatóit külön-külön zérussal egyenlőkké téve:

$$\left.\begin{aligned} m_1x_1''&=-\lambda_1x_1+\lambda_2(x_2-x_1); & m_2x_2''&=-\lambda_2(x_2-x_1);\\ m\,y_1''&=-\lambda_1y_1+\lambda_2(y_2-y_1); & m_2y_2''&=-\lambda_2(y_2-y_1);\\ m\,z_1''&=-\lambda_1z_1+\lambda_2(z_2-z_1)+m_1g; & m_2z_2''&=-\lambda_2(z_2-z_1)+m_2g.\end{aligned}\right\}\ .\quad(6)$$

Ezeknek az (1)-el való összehasonlításából:

$$\lambda_1l_1=R_1;\quad \lambda_2l_2=R_2,\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad(7)$$

a mit egyébként a 67. §. (7) eljárása is közvetetlenül szolgáltatna.

II. Az egyenletek további általános tárgyalása a legnagyobb mathematikai nehézségekbe ütközik, miért is itt az *egy sikban* történő, *végtelen kis lengések* megvizsgálására szorítkozunk.

Ily mozgás a 90. ábrában előtüntetten kívül pl. az oly inga mozgása, melynek felfüggesztési helye nem egészen szilárd, hanem az inga változó húzása (nyomása) alatt [v. ö. a 157. §-ban tárgyalt esetekben az R kényszererő taglalását] maga is végez szakaszos kis mozgást; e felfüggesztési helynek meg van a maga saját rezgése, melynek szakasza a rajta függő ingától független s mely önmozgás mindig bizonyos l_1 hoszszaságú és m_1 tömegű egyszerű inga mozgásával egyenlőnek vehető.

Ezen esetben x_1, y_1 és x_2, y_2 elsőrendű kicsinyek az l_1- s az l_2-höz képest és z_1 s z_2 csak magasabbrendűekben térhetnek el az l_1 és l_2-től, úgy, hogy $z_1=l_1$ és $z_2-z_1=l_2$ teendő, miáltal az (1) rendszer harmadik egyenletei redukálódnak

$$0=-R_1+R_2+m_1g \quad \text{és} \quad 0=-R_2+m_2g;$$
$$R_1=(m_1+m_2)\,g=\lambda_1 l_1; \quad R_2=m_2g=\lambda_2 l_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

egyenletekre, míg az (1) második egyenletei akkor esnek el egészen, ha a mozgás síkjául az XZ síkot választjuk, mert ekkor $y_2=y_1=0$. Az első egyenletekből a (6) szerint:

$$m_1x_1''+(\lambda_1+\lambda_2)\,x_1-\lambda_2x_2=0; \quad m_2x_2''-\lambda_2x_1+\lambda_2x_2=0; \quad . \quad . \quad (9)$$

mely simultán rendszer megfejtése nehézséget nem okozhat.

1. A (9) másodikát egyelőre határozatlan $\varkappa$ együtthatóval szorozva s az elsőhöz adva, az összeg az egyszerű harmonikus mozgás differentiálegyenlete typusává egyesíthető; ugyanis így:

$$m_1x_1''+m_2\varkappa x_2''+[\lambda_1+\lambda_2\,(1-\varkappa)]\,x_1-\lambda_2\,(1-\varkappa)\,x_2=0,$$

vagy:

$$(x_1+\varkappa\,\frac{m_2}{m_1}\,x_2)''+\frac{\lambda_1+\lambda_2\,(1-\varkappa)}{m_1}\left\{x_1-\frac{\lambda_2\,(1-\varkappa)}{\lambda_1+\lambda_2\,(1-\varkappa)}\,x_2\right\}=0. \quad . \quad (10)$$

A $\varkappa$ felett most akként rendelkezünk, hogy az x_2-nek a zárójelekben lévő együtthatói egyenlők legyenek, azaz, hogy álljon:

$$\varkappa\,\frac{m_2}{m_1}=-\frac{\lambda_2\,(1-\varkappa)}{\lambda_1+\lambda_2\,(1-\varkappa)} \quad \text{vagy} \quad \varkappa^2+\left(\frac{m_1}{m_2}-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1\right)\varkappa-\frac{m_1}{m_2}=0. \quad (11)$$

Ezen egyenlet $\varkappa_1$ és $\varkappa_2$ gyökeinek szorzata $-m_1:m_2$ lévén, egyikük positiv, másikuk negativ; a (11) első alakjából látni, hogy miután (8) szerint λ_1 és λ_2 *positivek*, a

$$\lambda_1+\lambda_2\,(1-\varkappa)=-\lambda_2\,\frac{m_1}{m_2}\left(\frac{1}{\varkappa}-1\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11a)$$

baloldali összege a *negativ* $\varkappa$-ra nézve *positiv;* a positiv $\varkappa$ pedig nem lehetvén <1, [mert ekkor a baloldal positiv, a jobb oldal negativ volna, a mi lehetetlen] kell hogy az egységnél nagyobb legyen; de ekkor (11a) jobb oldala *positiv*, e szerint bal oldalának is ilyennek kell lennie és

ezen $\varkappa$ gyök nem lehet nagyobb azon határértéknél, melynél $\lambda_1+\lambda_2(1-\varkappa)$ zérus. A (11a) bal oldala mindkét gyökre nézve positivnek találtatván, írjunk:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1+\lambda_2(1-\varkappa_1)=m_1\Omega_1^2; \quad \lambda_1+\lambda_2(1-\varkappa_2)=m_1\Omega_2^2;\\ &x_1+\varkappa_1\frac{m_2}{m_1}x_2=\xi_1; \qquad x_1+\varkappa_2\frac{m_2}{m_1}x_2=\xi_2, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (11b)$$

miáltal a (10)-ből, a $\varkappa_1$ és $\varkappa_2$ gyökre nézve:

$$\xi_1''+\Omega_1^2\xi_1=0; \quad \xi_2''+\Omega_2^2\xi_2=0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

azaz, az egyszerű harmonikus mozgás differentiálegyenletei, melyek teljes megoldásai tekintettel a (11b)-re:

$$\left.\begin{aligned} &\xi_1=a_1\cos(\Omega_1 t+\alpha_1); \quad \xi_2=a_2\cos(\Omega_2 t+\alpha_2);\\ &x_1=\frac{\varkappa_2\xi_1-\varkappa_1\xi_2}{\varkappa_2-\varkappa_1}=\frac{1}{\varkappa_2-\varkappa_1}\{\varkappa_2 a_1\cos(\Omega_1 t+\alpha_1)-\varkappa_1 a_2\cos(\Omega_2 t+\alpha_2)\};\\ &x_2=\frac{m_1}{m_2}\frac{\xi_2-\xi_1}{\varkappa_2-\varkappa_1}=\frac{m_1}{m_2}\frac{1}{\varkappa_2-\varkappa_1}\{a_1\cos(\Omega_1 t+\alpha_1)-a_2\cos(\Omega_2 t+\alpha_2)\}; \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

hol a_1, a_2, α_1, α_2 az integrátió állandói.

Az A_1 s A_2 pontok mozgása, 90. ábra, különböző periodussal biró két harmonikus mozgás összege; a szakaszok a (13) és (11b) értelmében:

$$\mathrm{T}_1=\frac{2\pi}{\Omega_1}=\frac{2\pi\sqrt{m_1}}{\sqrt{\lambda_1+\lambda_2(1-\varkappa_1)}}; \quad \mathrm{T}_2=\frac{2\pi}{\Omega_2}=\frac{2\pi\sqrt{m_1}}{\sqrt{\lambda_1+\lambda_2(1-\varkappa_2)}}; \quad . \quad (14)$$

ha ezek commensurabilisek, akkor létezik oly legkisebb $\mathfrak{T}$ időköz, mely alatt az egyik mozgás n_1-, a másik n_2 szakasza folyik le: $n_1\mathbf{T}_1=\mathfrak{T}=n_2\mathbf{T}_2$; akkor az x_1 és x_2 mozgása e $\mathfrak{T}$ köz után ismétlődik.

Ezen periodusoknak az m_1, m_2, l_1, l_2 és g-vel való kifejezésére nézve a (11)-ből a (8) segélyével fejezendők ki a $\varkappa_1$ és $\varkappa_2$ gyökök és velük a (14) nevezői; a (11) és (8) egyesítéséből folytatólag nyerjük:

$$\varkappa^2+\left\{\frac{m_1}{m_2}-\frac{l_2}{l_1}\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)-1\right\}\varkappa-\frac{m_1}{m_2}=0;$$

$$1-\varkappa=\tfrac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\left(1-\frac{l_2}{l_1}\right)\mp\sqrt{\frac{m_1}{m_2}+\frac{1}{4}\left\{1+\frac{l_2}{l_1}-\frac{m_1}{m_2}\left(1-\frac{l_2}{l_1}\right)\right\}^2}\right\};$$

$$\lambda_1+\lambda_2(1-\varkappa)=\tfrac{1}{2}g(m_1+m_2)\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)\mp$$

$$\mp\frac{m_2 g}{l_2}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}+\frac{1}{4}\left\{1+\frac{l_2}{l_1}-\frac{m_1}{m_2}\left(1-\frac{l_2}{l_1}\right)\right\}^2},$$

mely egyenlet a (11b) és (14) értelmében a periodusokat adja:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 &= \left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\tfrac{1}{2}g\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)\mp \\ &\mp\frac{g}{l_2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}+\frac{1}{4}\left\{\frac{m_2}{m_1}\left(1+\frac{l_2}{l_1}\right)-\left(1-\frac{l_2}{l_1}\right)\right\}^2}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (15)$$

1*a*. *Ha az* l_1 *és* l_2 *hoszszúságú ingák külön-külön,* mint *ideális ingák* lengenének, mozgás-egyenleteik és periodusaik volnának [157. §. (15)]:

$$\left.\begin{aligned} m_1x_1'' &= -m_1g\frac{x_1}{l_1}; \quad \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 = \frac{g}{l_1}; \\ m_2x_2'' &= -m_2g\frac{x_2}{l_2}; \quad \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 = \frac{g}{l_2}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (15a)$$

A (15)-ben az $\frac{1}{2}T_1$ és $\frac{1}{2}T_2$ eredeti lengési időknek bekövetkezett módosítása világosan ki van fejezve.

1*b*. *A kezdő állapot* kellő megválasztása egyszerűsítést nyújt; így ha a kezdő sebességek zérussal egyenlők (azaz, ha van egy időpillanat, melyben e sebességek egyszerre zérussal egyenlők, s az időt ettől számítva) akkor a (13) szerint kell, hogy $\alpha_1=\alpha_2=0$ legyen és a kezdő helyzetek coordinátái

$$x_{1_0}=\frac{\varkappa_2a_1-\varkappa_1a_2}{\varkappa_2-\varkappa_1}; \quad x_{2_0}=\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{a_1-a_2}{\varkappa_2-\varkappa_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

Ha e helyzetek úgy választvák, hogy legyen $x_{1_0}:x_{2_0}=m_2\varkappa_2:m_1$, vagy $=m_2\varkappa_1:m_1$, akkor (16) szerint az első esetben $a_2=0$, a másodikban $a_1=0$ s így a (13)-ból csak egy-egy tag maradván fenn: a két m_1 s m_2 tömeg egyenlő T_1, illetve T_2 periodussal leng.

Azon speciális esetek kidolgozása, mikor az l hoszszak vagy az m tömegek viszonya vagy mindkét viszony igen kicsiny, a kezdőnek nagyon ajánlható.

Jegyzet. Ha ϑ_1 és ϑ_2 az l_1 s az l_2 hoszszak s a vertikális közötti kicsiny szögek, akkor első közelítésben:

$$x_1=l_1\vartheta_1; \quad x_2=l_1\vartheta_1+l_2\vartheta_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17a)$$

$$\vartheta_1=\frac{x_1}{l_1}; \quad \vartheta_2=\frac{x_2-x_1}{l_2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17b)$$

melyek a vertikálistól számított szögelongatiókat a (13) segélyével az időben engedik kifejezni; saját periodusaik a (15) két értéke.

2. A (9) rendszer egyenes eliminatióval is fejthető meg: az első egyenletet t szerint kétszer differentiálva s azután beléje az x_2'' értékét a második egyenletből, végre az x_2-ét az eredeti elsőből helyettezve: az x_1 differentiálegyenletét nyerjük; s épen így az x_2-ét:

$$\left.\begin{aligned} m_1m_2x_1'''' + \{m_1\lambda_2+m_2(\lambda_1+\lambda_2)\}x_1''+\lambda_1\lambda_2x_1=0; \\ m_1m_2x_2'''' + \{m_2(\lambda_1+\lambda_2)+m_1\lambda_2\}x_2''+\lambda_1\lambda_2x_2=0; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (18)$$

mely egyenletek teljes integráljainak typusa [v. ö. Kinematika 354. §. *Jegyzetét*, 611. l.]

$$x=a_1e^{\varrho_1 t}+a_2e^{\varrho_2 t}+a_3e^{\varrho_3 t}+a_4e^{\varrho_4 t}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18a)$$

hol a_1, a_2, a_3, a_4 az x_1 s x_2-re nézve különbözők és ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 a

$$\varrho^4+\frac{m_1\lambda_2+m_2(\lambda_1+\lambda_2)}{m_1m_2}\varrho^2+\frac{\lambda_1\lambda_2}{m_1m_2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

jellemző egyenlet gyökei, mely egyenlet, a (8) értelmében:

$$\varrho^4+g\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)\varrho^2+\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g^2}{l_1l_2}=0 \quad . \quad . \quad (20)$$

A (20)-ból a ϱ^2-ot kiszámítva: ez *negativ*nek és a (15) kifejezéssel ellentetten egyenlőnek adódik; e szerint a (18*a*) hatványkitevői imagináriusak és az x-ek oly egyszerű harmonikus mozgások összegével egyenlők, melyek periodusai a (15)-ben advák.

A szám szerint *nyolcz* integrál állandó $a_1 \ldots a_4$, $b_1 \ldots b_4$ egymástól nem független: ugyanis képezve a (18*a*) typus segélyével a (9) két egyenletét: bennük a rendezés után az egyes partikuláris megoldásokkal, az $e^{\varrho_1 t}$, . . . , $e^{\varrho_4 t}$-vel szorzott együtthatók zérussal egyenlők tartoznak lenni és ez *nyolcz* egyenletet ád az $a_1 \ldots b_4$ között, de ezek közül csak *négy* független, míg a többi négy a (19)-et fejezi ki külön a ϱ_1, a ϱ_2, a ϱ_3, a ϱ_4-re s így csak *négy* független integrál állandó marad, épen úgy mint a (13)-ban. E példa részletes kidolgozását, mint az állandó együtthatójú lineáris differentiálegyenletek tanulságos esetét a kezdőnek ajánljuk.

212. §. D'Alembert *elve relativ centrális mozgás esetében: a relativ coordináta-rendszer a centrum körül saját síkjában egyenletesen forog. Részletezés: a relativ pálya logarithmusi spirális kényszer- és szabad mozgásnál.*

1. Az m pont coordinátái a *relativ (forgó) coordináta-rendszerben* x_r és y_r illetve $x_r=r\cos\vartheta$, $y_r=r\sin\vartheta$; ω e forgás szögsebessége s így a 123. §. egyenleteiben $\omega_{x_r}=\omega_{y_r}=0$, $\omega_{z_r}=\omega$; végre $mf(r)$ a centrális erő; e szerint *szabad mozgásnál*:

$$x_r''=f(r)\cos\vartheta+\omega^2x_r+2\omega y_r'; \quad y_r''=f(r)\sin\vartheta+\omega^2y_r-2\omega x_r'.$$

A gyorsulás φ_r radiális és φ_ϑ rotatiós componensének iránycosinusai [Kinematika 21. ábra, 44. lap] $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$ és $-\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$ s az ω iránya a növekvő ϑ-éval s így a φ_ϑ-éval is megegyezik:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_r&=\ \ x_r''\cos\vartheta+y_r''\sin\vartheta=f(r)+\omega^2r+2\omega r^{-1}(x_ry_r'-y_rx_r');\\ \varphi_\vartheta&=-x_r''\sin\vartheta+y_r''\cos\vartheta=-2\omega r^{-1}(x_rx_r'+y_ry_r'),\end{aligned}\right\} \quad . \quad (1)$$

avagy az r és ϑ segélyével [Kinematika 37. §. (1) és (2) és 44. §. (7)]

$$r''-r\vartheta'^2=f(r)+\omega^2 r+2\omega r\vartheta' ;\quad (r^2\vartheta')'=-2\omega r r' , \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

mely e centrális relativ mozgás két jellemző differentiálegyenlete.

A másodikból

$$r^2\vartheta'=c-r^2\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$

és ez a területek elvének itt érvényes alakja, hol ϑ' az r szögsebessége a forgó síkban, ω ezen utóbbi sík absolut szögsebessége, c az a területi sebesség, mely $\omega=0$-kor fennállana.

2*a*. Ha az m a forgó síkban fekvő, vele mereven egybekapcsolt sima logarithmusi spirálison tartozik maradni, melynek [205. §. (6*a*)] $F(r,\vartheta)=r-a^{-\vartheta\operatorname{cotg}\eta}=0$ az egyenlete, akkor r és $r\vartheta$ az a két lineáris coordináta, melyek menti gyorsulások φ_r és φ_ϑ s így az (1)-et a 210. §. (3) egyenlete szerint még a

$$\lambda\frac{\partial F}{\partial r}=\lambda ;\quad \lambda\frac{\partial F}{r\partial\vartheta}=+\lambda\operatorname{cotg}\eta$$

tagokkal kell kiegészíteni; az idézett §. értelmében $m\lambda$ és $m\lambda\operatorname{cotg}\eta$ a relativ mozgás kényszererejének radiális és rotátiós componense; a 87. ábra szerint ezek elseje $\pi-\eta$, másodika $\frac{1}{2}\pi-\eta$ szöget képez a relativ pálya érintőjével s így vetületeik ezen érintőre $-m\lambda\cos\eta$ és $+m\lambda\cos\eta$, azaz ellentetten egyenlők s így az egész kényszererő vetülete ezen érintőre zérus. Maga az eredő kényszererő $m\lambda\{1+\operatorname{cotg}^2\eta\}^{\frac{1}{2}}=m\lambda\sin^{-1}\eta$ és merőleges a relativ pályára. A (2)-ből most:

$$r''-r\vartheta'^2=f(r)+\omega^2 r+2\omega r\vartheta'+\lambda ;\quad (r^2\vartheta')'=-\omega\,(r^2)'+\lambda r\operatorname{cotg}\eta ; \quad . \quad (3)$$

az $F=0$-ból még

$$r'=-r\vartheta'\operatorname{cotg}\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

járúl, melylyel:

$$r\vartheta'=-r'\operatorname{tg}\eta ;\quad r^2\vartheta'=-rr'\operatorname{tg}\eta ;\quad r\vartheta'^2=r'^2r^{-1}\operatorname{tg}^2\eta ;$$

e szerint a polárcoordináták bármelyike kiküszöbölhető, pl. a ϑ, miáltal

$$\left.\begin{aligned} r''-r^{-1}r'^2\operatorname{tg}^2\eta&=f(r)+\omega^2 r-2\omega r'\operatorname{tg}\eta+\lambda ;\\ -(rr')'\operatorname{tg}\eta&=-\omega\,(r^2)'+\lambda r\operatorname{cotg}\eta. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

A λ-át eliminálva, némi rövidítések után:

$$r''\cos^{-2}\eta-\omega^2 r-f(r)=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

mely egyenlet adott $f(r)$-nél a parameterek variatiója módszerével [Kinematika 125. §. lábjegyzéke] mindig megfejthető. Mihelyt ezen az alapon r mint az idő függvénye ismeretes, az (5)-ből a λ s vele relativ a kényszererő adódik. V. ö. a 248. §. 152. feladatát.

2*b*. Ha az m *szabadon* mozogva a forgó síkban leírja az $F=0$ spirálist, akkor a (2) rendszer és a (4) áll fenn, avagy a mi ezekkel æquivalens: az (5)-be $\lambda=0$ teendő, minélfogva második egyenletéből és folytatólag:

$$rr' \operatorname{tg} \eta = +\omega r^2 - c\,; \quad r' = \left(\omega r - \frac{c}{r}\right) \operatorname{cotg} \eta\,;$$

$$r'' = \left(\omega + \frac{c}{r^2}\right) r' \operatorname{cotg} \eta = \frac{\omega^2 r^4 - c^2}{r^3} \operatorname{cotg}^2 \eta,$$

$$f(r) = -\frac{c^2}{r^3 \sin^2 \eta} + \omega^2 r \operatorname{cotg}^2 \eta\,;$$

ez kifejezi azon centrális gyorsulás törvényét, mely ezen alesetben fennáll s mely vonzás vagy taszítás a szerint, a mint $f(r)$ értéke negativ vagy positiv.

b) A legkisebb vagy a stationarius működés elvének alkalmazása.

213. §. *A mozgó részecske különböző két közegben fekvő két pont közötti utat futja be a két közegben különböző, de állandó sebességgel. (A fénytörés az emanátió-elmélet alapján.)*

Jeleljék, 91. ábra, (köv. l.) A_1 s A_2 az adott helyzetű két pontot v_1 és v_2 a mozgó rész sebességét a két közegben, A a helyet, melyen a mozgó rész az egyik közegből a másikba halad; a pálya itt az A_1AA_2 tört egyenes. A működés [actió, 72. §. (2)] itt:

$$\mathrm{A} = m \int_1^2 v ds = m \{v_1 r_1 + v_2 r_2\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Az A_1 és A_2 pálya-végpontok változatlan megtartásával a pálya csak az A pontnak a két közeg közös válaszfelülete mentén való eltolódás (variátió) folytán változhatik; e szerint a legkisebb működés elve [74. §. (11)] követeli, hogy itt:

$$\delta \mathrm{A} = m \{v_1 \delta r_1 + v_2 \delta r_2\} = 0\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

avagy:

$$-\delta r_1 : \delta r_2 = v_2 : v_1\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$

1. *Analytikailag tárgyalva* a geométriailag is könnyű példát, fektessük az XY síkot a közegek válaszsíkjába s az XZ síkot erre merőlegesen és az A_1 és A_2 pontokon át, 91. ábra. Az A_1, A, A_2 coordinátái rendre x_1, 0, z_1; x, y, 0; x_2, 0, z_2;

$$r_1^2 = (x - x_1)^2 + y^2 + z_1^2\,; \quad r_2^2 = (x_2 - x)^2 + y^2 + z_2^2\,;$$

az A coordinátáinak variátiói δx és δy és így:

$$r_1 \delta r_1 = (x - x_1)\, \delta x + y \delta y\,; \quad r_2 \delta r_2 = -(x_2 - x)\, \delta x + y \delta y,$$

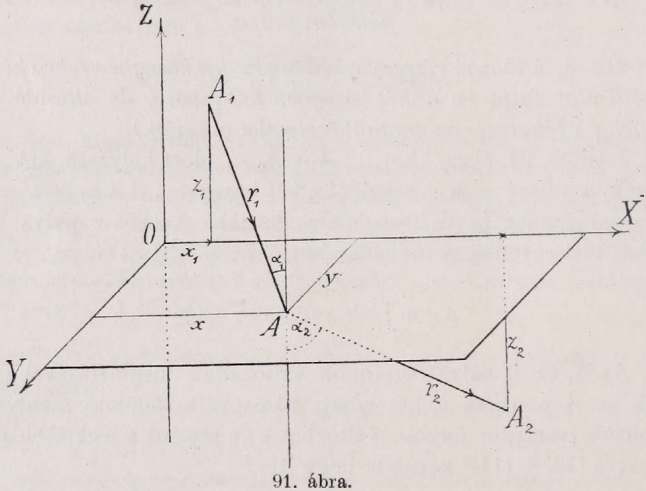
melyekkel a (2) feltétel:

$$\left\{\frac{x - x_1}{r_1} v_1 - \frac{x_2 - x}{r_2} v_2\right\} \delta x + \left\{\frac{v_1}{r_1} + \frac{v_2}{r_2}\right\} y \delta y = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

A δx és δy egymástól függetlenek lévén, a (3) csak úgy állhat fenn, ha együtthatóik zérussal egyenlők; ámde a második rész $v_1 r_1^{-1} + v_2 r_2^{-1}$ szorzója mindig positiv lévén, csak y szorzója lehet zérus; továbbá az első szorzó zérus értékét az ábra szerint α_1 s α_2-vel kifejezve, nyerjük:

$$y=0; \quad \sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 = v_1 : v_2 = \text{állandó} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

E szerint az r_1 és r_2 az A_1, A_2 pontokon átmenő, a válaszsíkra merőleges síkban fekszik s e felület normálisával képezett szögeik sinusai a megfelelő sebességekhez fordítva arányosak. Ez az az út, melyet az A_1-ből induló s a nevezett feltételek alatt haladó testecske



91. ábra.

A_2-ig leír, s melylyel a fény emanatió (kilövellési) elmélete a *fénytörés törvényeit* magyarázni törekedett; l. a következő 2. pontot.

2. *A leggyorsabb érkezés.* Ha nem a dynamikai mozgásokra nézve érvényes legkisebb működés fenállása, hanem a «*leggyorsabb érkezés*» elve vétetnek alapúl, akkor az $A_1 A A_2$ út leírására szükséges t időnek *minimumát* keressük:

$$t = \frac{r_1}{v_1} + \frac{r_2}{v_2}, \quad \delta t = \frac{\delta r_1}{v_1} + \frac{\delta r_2}{v_2} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

mely feltétel a (2)-től csak abban különbözik, hogy itt v_1 és v_2 nem a positiv, hanem a negativ első hatványon fordúl elő. E szerint az eredményre nézve is ugyanez áll, minélfogva (4) helyett

$$y=0; \quad \sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 = v_1 : v_2 = \text{állandó} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

A geométriai optika tapasztalatai és FOUCAULTnak a fény terjedési sebességére vonatkozó kisérleti eredményei szerint a (6) egyenlet megfelel a tényeknek.

214. §. *A centrális mozgás differentiálegyenletei a stationárius működés elvéből, ha a sebesség csak a távolságtól függ.*

A sebesség az r távolság tetszőleges függvénye; keressük az ismeretlen mozgás differentiálegyenleteit.

Legyen $v=v(r)$ és $v'=dv:dr$; a mozgó pont tömege a tömegegység; a stationárius működés elve itt:

$$\delta\mathbf{A}=\delta\int_1^2 v\,ds=\int_1^2 \delta\,[v\,ds]=\int_1^2 v'\,\delta r\,ds+v\,\delta\,(ds)=0\,; \quad \ldots \quad (2)$$

$$r^2=x^2+y^2+z^2\,; \quad ds^2=dx^2+dy^2+dz^2\,;$$

$$r\,\delta r=x\,\delta x+y\,\delta y+z\,\delta z\,; \quad ds\,\delta\,(ds)=dx\,\delta\,(dx)+dy\,\delta\,(dy)+dz\,\delta\,(dz)\,;$$

a 73. §. (2) szerint a δdx stb.-ben a δ s a d jelek sorrendjét megfordítva, (2)-ből,

$$\left.\begin{aligned}\delta\mathbf{A}=\int_1^2\Big\{&\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}\,(x\,\delta x+y\,\delta y+z\,\delta z)\,ds+\\&+v\Big(\frac{dx}{ds}\,d\,(\delta x)+\frac{dy}{ds}\,d\,(\delta y)+\frac{dz}{ds}\,d\,(\delta z)\Big)\Big\}=0.\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

A második rész tagjait partiálisan integrálva:

$$\int_1^2 v\frac{dx}{ds}\,d\,(\delta x)=\Big\{v\frac{dx}{ds}\,\delta x\Big\}_1^2-\int_1^2 \delta x\,d\Big(v\frac{dx}{ds}\Big) \text{ s í. t.};$$

megjegyezve, hogy a stationárius működésnél $\delta x_1=\delta x_2=\delta y_1=\delta y_2=\delta z_1=\delta z_2=0$ [74. §. (8)], a $\delta\mathbf{A}$ kis rendezés után három integrál összegeként adódik, melyeknek csak elsejét írva ki explicite:

$$\delta\mathbf{A}=\int_1^2\Big\{\Big[\frac{x}{r}\frac{dv}{dr}\,ds-d\Big(v\frac{dx}{ds}\Big)\Big]\,\delta x+[\ldots]\,\delta y+[\ldots]\,\delta z=0 \quad \ldots \quad (4)$$

A δx, δy, δz variátiók az 1 és 2 helyzetek között tetszőlegesek lévén, a (4) csak úgy állhat fenn, ha az integrál jele alatt ezekkel szorzott együtthatók külön-külön zérussal egyenlők.

Miután ezekben

$$d\Big(v\frac{dx}{ds}\Big)=d\Big(\frac{ds}{dt}\,\frac{dx}{ds}\Big)=d\Big(\frac{dx}{dt}\Big)=\frac{d^2x}{dt^2}\,dt \text{ s í. t.}$$

és $ds=v\,dt$, az együtthatóknak zérussal egyenlített rendszeréből:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=x\frac{v\,dv}{r\,dr}\,; \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=y\frac{v\,dv}{r\,dr}\,; \qquad \frac{d^2z}{dt^2}=z\frac{v\,dv}{r\,dr}\,. \quad \ldots \quad (5)$$

Ezek pedig a $v\,\frac{dv}{dr}=\frac{d\,(\frac{1}{2}v^2)}{dr}$ nagyságú $R(r)$ centrális gyorsulás létesítette középponti mozgás differentiálegyenletei, melyek *sík* pályát, a *felületek elvét* s a *pálya* differentiálegyenletét szolgáltatják [Kinematika 72—74. §§.]

215. §. *Folytatás: A pálya differentiálegyenlete közvetetlenül a stacionárius működés elvéből.*

A pálya sík voltát a megelőző §. adván meg, s a sebességet mint r ismert függvényét tekintve, polárcoordinátákban $ds=\sqrt{(dr)^2+r^2(d\vartheta)^2}$; a ϑ-át véve függetlennek:

$$\delta\mathbf{A}=\delta\int_1^2 v\sqrt{(dr)^2+r^2(d\vartheta)^2}=\int_1^2\delta\left[v\sqrt{(dr)^2+r^2(d\vartheta)^2}\right]=$$

$$=\int_1^2 v'\delta r\sqrt{(dr)^2+r^2(d\vartheta)^2}+\int_1^2 v\,\frac{r\delta r\,(d\vartheta)^2+dr\delta\,(dr)+r^2d\vartheta\delta\,(d\vartheta)}{\sqrt{(dr)^2+(r^2d\vartheta)^2}}\quad\ldots\quad(1)$$

Az (1)-et $d\vartheta$-val osztva és szorozva s δdr s $\delta d\vartheta$ helyébe a 73. §. (2) értelmében $d\,(\delta r)$-t és $d\,(\delta\vartheta)$-át írva s rövidség kedveért téve

$$\varrho=\frac{ds}{d\vartheta}=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}=\varrho,\qquad v'=\frac{dv}{dr},\qquad\ldots\quad(2)$$

$$\delta\mathbf{A}=\int_1^2(v'\varrho+rv\varrho^{-1})\,d\vartheta\delta r+\int_1^2\frac{v}{\varrho}\,\frac{dr}{d\vartheta}\,d\,(\delta r)+\int_1^2\frac{r^2v}{\varrho}\,d\,(\delta\vartheta)\quad.\quad(1a)$$

Az utolsó két tag partiális integrátió segélyével transformálható:

$$\left.\begin{aligned}\int_1^2\frac{v}{\varrho}\,\frac{dr}{d\vartheta}\,\frac{d\,(\delta r)}{d\vartheta}\,d\vartheta&=\left\{\frac{v}{\varrho}\,\frac{dr}{d\vartheta}\,\delta r\right\}_1^2-\int_1^2\delta r\,\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{v}{\varrho}\,\frac{dr}{d\vartheta}\right)d\vartheta\,;\\ \int_1^2\frac{r^2v}{\varrho}\,\frac{d\,(\delta\vartheta)}{d\vartheta}\,d\vartheta&=\left\{\frac{r^2v}{\varrho}\,\delta\vartheta\right\}_1^2-\int_1^2\delta\vartheta\,\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{r^2v}{\varrho}\right)d\vartheta.\end{aligned}\right\}\quad.\quad(3)$$

De a stacionárius működésnél $(\delta r)_1=(\delta r)_2=0$; $(\delta\vartheta)_1=(\delta\vartheta)_2=0$; ezért a (3) jobboldali első tagjai zérusok; helyettesítve fenmaradó integráljait (1*a*)-ba, rendezve ezt és megjegyezve, hogy δr s $\delta\vartheta$ tetszőlegesek: a $\delta\mathbf{A}=0$ egyenlet csak úgy állhat fenn, ha δr-nek és $\delta\vartheta$-nak az integráljel alatt álló együtthatói zérussal egyenlők, azaz, ha áll:

$$\frac{dv}{dr}\varrho+\frac{rv}{\varrho}-\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{v}{\varrho}\,\frac{dr}{d\vartheta}\right)=0;\qquad\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{r^2v}{\varrho}\right)=0\quad\ldots\quad(4)$$

A (4) második egyenlete, tekintettel (2)-re:

$$\text{const.}=c=\frac{r^2v}{\varrho}=r^2\,\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\vartheta}{ds}=r^2\,\frac{d\vartheta}{dt};\qquad\ldots\quad(5)$$

mely a területek tétele; egyesítve a (4) két egyenletét egymással s téve $r^{-1}=u$, a centrális mozgás közönséges alakú differentiálegyenletét nyerjük.

E czélra felhasználjuk a megelőző §. azon végeredményét, mely szerint a centrális gyorsulás itt $R(r)=\frac{d(\frac{1}{2}v^2)}{dr}$; egyesítve ezt az (5) négyzetének differentiáljával és mindjárt $r^{-1}=u$-t téve, folytatólagosan

$$v^2=\frac{c^2}{r^4}\varrho^2=c^2u^4\left(\frac{1}{u^2}+\left(\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\vartheta}\right)^2\right)=c^2\left\{u^2+\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2\right\};$$

$$R(r)\,dr=R\frac{d(u^{-1})}{d\vartheta}\,d\vartheta=d(\tfrac{1}{2}v^2)=\tfrac{1}{2}c^2\frac{d}{d\vartheta}\left\{u^2+\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2\right\}d\vartheta,$$

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2}+u+\frac{R}{c^2u^2}=0.$$

Ez pedig a centrális mozgás pályájának közönséges egyenlete.

216. §. *A sebesség csak egy coordináta függvénye; a mozgás egyenletei a stationárius működés elve alapján.*

Legyen $v=v(y)$; az $m=1$; továbbá általában $\overline{ds}^2=\overline{dx}^2+\overline{dy}^2+\overline{dz}^2$, miből $ds\delta(ds)=dx\delta(dx)+dy\delta(dy)+dz\delta(dz)$, d és δ felcserélhetők. A működés variátiója:

$$\delta\mathrm{A}=\int_1^2\delta(vds)=\int_1^2\frac{dv}{dy}\,\delta y ds+\int_1^2 v\left\{\frac{dx}{ds}\,\delta(dx)+\frac{dy}{ds}\,\delta(dy)+\frac{dz}{ds}\,\delta(dz)\right\};\quad(1)$$

ámde

$$\int_1^2 v\frac{dx}{ds}\,\delta(dx)=\int_1^2 v\frac{dx}{ds}\,d(\delta x)=\left\{v\frac{dx}{ds}\,\delta x\right\}_1^2-\int_1^2\delta x\,d\left(v\frac{dx}{ds}\right)\text{ s í. t.,}\quad.\quad(2)$$

hol a stationárius működés élvénél fogva ismét $\delta x_1=\delta x_2=\delta y_1=\delta y_2=\delta z_1=\delta z_2=0$ lévén, a (2) jobboldali első tagja zérus és ha még tekintetbe veszszük, hogy $v\frac{dx}{ds}=\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{ds}=\frac{dx}{dt}$ s í. t., nyerjük

$$\delta\mathrm{A}=-\int_1^2\left[d\left(\frac{dx}{dt}\right)\delta x+\left\{d\left(\frac{dy}{dt}\right)-v\frac{dv}{dy}\,dt\right\}\delta y+d\left(\frac{dz}{dt}\right)\delta z\right]=0.$$

Az egyenlet csak úgy állhat fenn, ha a δx, δy, δz független variátiók együtthatói külön-külön zérussal egyenlők, és így t-t véve függetlennek:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0;\quad\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d(\frac{1}{2}v^2)}{dy};\quad\frac{d^2z}{dt^2}=0,\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(3)$$

melyek a mozgás közönséges egyenletei. A sebesség x és z menti componensei állandók lévén: a sebességnek az XZ síkra való vetülete, $(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}$ irány és nagyságra nézve állandó s így a pálya az XZ-re merőleges síkban fekszik.

a) Ha $v^2=2(ky+h)$, azaz az y lineáris függvénye: a föld nehézségi erő egyedüli hatása alatt haladó pont mozgását nyerjük [Kinematika 108. §.]

b) Ha $v^2=(k^2y^2+h)$, azaz, az y négyzetes függvénye: lánczgörbén végbemenő mozgást nyerünk [Kinematika 102. §. 4. pontja].

c) A variáló működés elvének alkalmazása: a pontmozgás problémáinak megfejtése Hamilton characteristikus egyenletének Jacobi-féle teljes megoldása segélyével.

217. §. *A földnehézség okozta szabad mozgás* Hamilton *elve alapján.*

1. *A characteristikus egyenlet megoldása.*

Jeleljék x és y az m coordinátáit a vertikális síkban végbe menő mozgás esetére; a positiv X tengely vízszintesen, a positiv Y tengely függélyesen fölfelé van irányítva; akkor itt az eleven erő, az erőfüggvény s a characteristikus egyenlet [80. §. (8) és (9)]:

$$\mathrm{T}=\tfrac{1}{2}m(x'^2+y'^2); \quad V=-mgy \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{1}{m}\left\{\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}\right)^2\right\}=2(H-mgy) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$H=\mathrm{T}-V=\tfrac{1}{2}m(x'^2+y'^2)+mgy=mgh, \quad \ldots\ldots \quad (2a)$$

hol $2gh=2gy_0+mv_0^2$, y_0 és v_0 kezdőértékek.

A 82. §. 4. pontja próbálgató eljárását alkalmazva, írjunk:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_x+\mathbf{A}_y; \quad V_x=0; \quad V_y=-mgy=V; \quad C_x+C_y=mgh;$$

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dx}\right)^2=2C_x; \quad \left(\frac{d\mathbf{A}_y}{dy}\right)^2=2(mgh-C_x)-2mgy, \quad \ldots \quad (3)$$

mely egyenletek integrátiója:

$$\mathbf{A}_x=x\sqrt{2C_x}; \quad \mathbf{A}_y=-\frac{1}{3}\frac{1}{mg}\{2mgh-2C_x-2mgy\}^{\frac{3}{2}}.$$

Irva $C_x=mgl$, l más állandó lévén

$$\mathbf{A}=x\sqrt{l}.\sqrt{2mg}-\frac{2}{3}\{h-l-y\}^{\frac{3}{2}}\sqrt{2mg};$$

$$\mathbf{A}=\left\{x\sqrt{l}-\frac{2}{3}(h-l-y)^{\frac{3}{2}}\right\}\sqrt{2mg}+\text{constans} \quad \ldots \quad (4)$$

Ez az alak, itt *két* változó, x, y lépvén fel, a 82. §-nak (1) alatti, síkra vonatkoztatott, Jacobi-féle $\mathbf{A}=\mathbf{A}(x, y, c, H)+\mathbf{A}_0$, alakjával, a *teljes integrál typusával* megegyezvén, a (4) a (2) teljes megoldása, melyben $c=l$, $H=mgh$.

2. *A mozgás kész integrálegyenletei (kánonegyenletei).* Képezve a 82. §. (2), illetve (5) rendszerét, itt

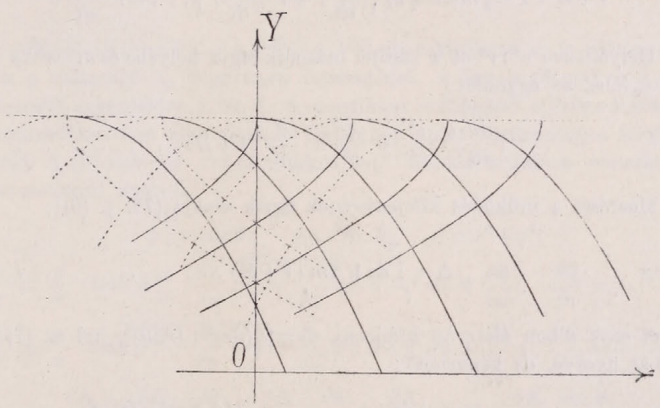
$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial c} = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial l} = \sqrt{2mg}\left\{\tfrac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{l}} + \sqrt{h-l-y}\right\} = \gamma = \text{constans}; \quad . \quad (5a)$$

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial H} = \frac{1}{mg}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial h} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{mg}}\sqrt{h-l-y} = t+\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5b)$$

Az (5*a*) egyenlet szemlátomást a parabola-pálya egyenlete; az (5*b*) az y coordináta s az idő közötti kapcsolatot fejezi ki; a probléma e szerint teljesen meg van fejtve.

3. *Az egyenműködésű görbék és a tényleges pályák orthogonalitása.*

A 83. §. első tételét alkalmazandó, a (4) és az (5*a*) értelmében az æquiactionális görbék és a pályák egyenletei írhatók:



91*a*. ábra.

$$\left.\begin{aligned} F(x,y) &= xl^{\frac{1}{2}} - \tfrac{2}{3}(h-l-y)^{\frac{3}{2}} - \text{constans} = 0; \\ f(x,y) &= xl^{-\frac{1}{2}} + 2(h-l-y)^{\frac{1}{2}} - \text{constans} = 0; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

melyekről azonnal belátni, hogy az orthogonalitás

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

feltételét közvetetlenül kielégítik.

A (6) első rendszere félköbös vagy Neil-féle parabolákat jelent [Math. Rep. 65. §. *A*, 25. formula 76. lap], melyek forduló (viszszatérő) pontja $y=h-l$ magasságban van a vízszintes X tengely felett; ugyan-

ezen magasságban van a (6) második rendszere által képviselt tényleges parabola-pályák csúcspontja.

Az idézett §. értelmében a (6)-ban a (4) és az (5a)-ben felmerülő A és a γ parametereket, azaz (6)-nak addendus állandóit változtatva: a nevezett görbék oly seregét nyerjük, melyek egyesei csak a vízszintes mentén vannak eltolva, 91a. ábra, megelőző. l.

A példa további részletezését az olvasóra bizzuk.

218. §. *A centrális mozgás teljes megfejtése* Hamilton *elve alapján polárcoordinátákban.*

Oly középponti mozgást tekintünk, melynek gyorsulása csak a távolság függvénye. Jeleljék $V=V(r)$ az erőfüggvényt, r és ϑ az m pont polárcoordinátáit, H az összes energiáját.

1. *A működés egyenes számítása.*

Az eleven erő s a felületek tétele itt [80. §. (8)]:

$$V+H=\mathrm{T}=\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\};\quad c=r^2\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Helyettezve $c^2:r^2$-ot a zárójel második tagja helyébe és $dt=r^2d\vartheta:c$-t első tagjába, az egyenlet:

$$\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2\cdot\frac{c^2}{r^4}+\frac{c^2}{r^2}=\frac{2}{m}(V+H)\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

Másrészt a működés kifejezéseinek egyik alakja [72. §. (6)]:

$$\mathrm{A}=\int_1^2 ds\sqrt{2m(V+H)}.\quad\ldots\ldots\quad(2)$$

melyet csak r-ben akarván kifejezni, $ds=\sqrt{(dr)^2+(rd\vartheta)^2}$, hol az (1)-ből $(rd\vartheta)$-át nyerve, ds képezhető:

$$(rd\vartheta)^2=\frac{m(cdr)^2}{2r^2(V+H)-mc^2};\quad ds=\frac{\sqrt{2r^2(V+H)}\,dr}{\sqrt{2r^2(V+H)-mc^2}}\quad\ldots\quad(3)$$

Ennek felhasználásával a (2):

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{A}&=\sqrt{m}\int_1^2\frac{2r(V+H)\,dr}{\sqrt{2r^2(V+H)-mc^2}}=\\&=\sqrt{m}\int_1^2\frac{2r(V+H)-mc^2r^{-1}+mc^2r^{-1}}{\sqrt{2r^2(V+H)-mc^2}}dr,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(4a)$$

hol a számlálóhoz a zérussal egyenlő különbséget az A kiértékesítésének egyszerűsítése czéljából kapcsoltuk: a számláló első két tagja ugyanis a nevező négyzetének r-ed része, a harmadik tagjának a nevezővel való osztata pedig a (3) első egyenlete szerint $cd\vartheta\sqrt{m}$.

Ha végre az alsó határt az r_0, ϑ_0 kezdetre, a felsőt az r, ϑ tetszőleges értékekre vonatkoztatjuk, a működés kifejezése:

$$A=\sqrt{m}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r}\sqrt{2r^2(V+H)-mc^2}+mc\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}d\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

[Ennek *első része*, benne $m=1$-et téve s V alatt a gyorsulás potentiálját értve, egyenlő a Kinematika 76. §-a 2. pontja (9) alatti A függvényével.]

2. *A characteristikus egyenlet megoldása.*

A mozgás síkbeli lévén, a közönséges jelölésekkel az eleven erő tétele és a jellemző egyenlet [80. §. (9)]:

$$H=\mathrm{T}-V=\tfrac{1}{2}mv^2-V=\tfrac{1}{2}v_0^2-V_0=\text{constans}; \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\frac{1}{m}\left\{\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2\right\}=2(H+V) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Itt $V=V(r)=V[(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}]$, a V nem tekinthető az x valamely V_x s az y valamely V_y függvénye összegének s így a (6)-nak x s y-ban kifejezett egyenletére a 82. §. 4. pontjának próbálgató eljárása derékszögű coordinátákra nem alkalmazható; ellenben *polárcoordinátákra* megkisértendő. A (6)-nak ily coordinátákra való transformálására vonatkozólag közvetetlenül nyerjük

$$x=r\cos\vartheta; \quad y=r\sin\vartheta; \quad r^2=x^2+y^2;$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\cos\vartheta; \quad \frac{\partial x}{\partial x}=1=\frac{\partial r}{\partial x}\cos\vartheta-r\sin\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial x}; \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial x}=-\frac{\sin\vartheta}{r};$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}=\sin\vartheta; \quad \frac{\partial y}{\partial y}=1=\frac{\partial r}{\partial y}\sin\vartheta+r\cos\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial y}; \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial y}=+\frac{\cos\vartheta}{r};$$

$$\frac{\partial A}{\partial x}=\frac{\partial A}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial x}=\frac{\partial A}{\partial r}\cos\vartheta-\frac{\partial A}{\partial\vartheta}\frac{\sin\vartheta}{r};$$

$$\frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial A}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}=\frac{\partial A}{\partial r}\sin\vartheta+\frac{\partial A}{\partial\vartheta}\frac{\cos\vartheta}{r},$$

melyek négyzetei összegével a (6)-ból

$$\frac{1}{m}\left\{\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial\vartheta}\right)^2\right\}=2\{H+V\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Az idézett 82. §. 4. pontja próbálgatását alkalmazva, legyen $A=A_r+A_\vartheta$; s r^2-tel szorozva (7)-et, ez írható:

$$r^2\left(\frac{dA_r}{dr}\right)^2+\left(\frac{dA_\vartheta}{d\vartheta}\right)^2=2mr^2(H+V)-m^2c^2+m^2c^2,$$

az mc^2 alatt tetszőleges, később meghatározható állandót értve.

A nevezett kisérletező eljárás szerint ez egyenlet szétbontandó

$$\left(\frac{dA_\vartheta}{d\vartheta}\right)^2=m^2c^2; \qquad r^2\left(\frac{dA_r}{dr}\right)^2=2mr^2(H+V)-m^2c^2$$

egyenletekre, melyek integráljainak összege a (7) egy megoldását adják:

$$A=A_\vartheta+A_r=mc\vartheta+\sqrt{m}\int\frac{dr}{r}\sqrt{2r^2(H+V)-mc^2}+A_0; \quad . \quad (8)$$

hol az A_0 az integrátió egy állandója.

Ez egyszersmind a teljes megoldás, mert látjuk, hogy a (8) alakja megegyezik a 82. §. (1) Jacobi-féle $\mathbf{A}=\mathbf{A}(r, \vartheta, c, H)+\mathbf{A}_0$ typussal, csakhogy itt, a (8)-ban mc az integrátiónak azon állandója, mely e typusban c-vel van jelelve.

A (8) a (4)-el minden tekintetben egyenlő.

3. *A kánon-egyenleteknek a characteristikus függvényből képzése.*

Jelen esetünkben [82. §. (2) és (5)], γ és τ állandók lévén:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial(mc)}&=\vartheta-c\sqrt{m}\int\frac{dr}{r\sqrt{2r^2(H+V)-mc^2}}=\gamma;\\ \frac{\partial A}{\partial H}&=\sqrt{m}\int\frac{rdr}{\sqrt{2r^2(H+V)-mc^2}}=t+\tau;\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (9)$$

Az első egyenlet nyilván a pályának r és ϑ közötti egyenlete, a második az r és t közötti összefüggés, melyről könnyű kimutatni, hogy a területek tételének egy alakja. Ugyanis a (9) első egyenletét differentiálva, nyerjük

$$d\vartheta=\frac{c\sqrt{m}\,dr}{r\sqrt{2r^2(H+V)-mc^2}},$$

melynek $(r^2:c)$-szeresével a második egyenlet integrálja alatti kifejezés egyenlő, miáltal ez:

$$\frac{\partial A}{\partial H}=\frac{1}{c}\int r^2d\vartheta=t+\tau, \quad \text{vagy} \quad 2df=r^2d\vartheta=cdt \; . \quad . \quad . \quad (9a)$$

218a. §. *Folytatás: A characteristikus függvény bolygók relativ mozgására nézve ellipsis-, parabola-, hyperbola-pálya esetében.*

Jeleljék, megegyezőleg a 135. §-al, m_1, m_2; $x_1y_1z_1$; $x_2y_2z_2$ a két bolygó tömegeit és absolut coordinátáit; $x=x_2-x_1$, $y=y_2-y_1$, $z=z_2-z_1$ az m_2-nek az m_1-hez viszonyított, $-x=x_1-x_2$, $-y=y_1-y_2$. $-z=z_1-z_2$ az m_1-nek az m_2-höz viszonyított relativ coordinátáit; legyen továbbá $r^2=x^2+y^2+z^2$ és $\mu=C^2(m_1+m_2)$, akkor a relativ mozgás gyorsulási componensei [136. §. (3)]:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2(x_2-x_1)}{dt^2}=-C^2\frac{m_1+m_2}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{r}\right)=-\frac{d^2(x_1-x_2)}{dt^2} \text{ stb.}$$

Az m_2-re, illetve az m_1-re ható relativ mozgás gyorsító erőcomponensei m_2x'' stb., illetve $-m_1x''$ stb.; e mozgás erőfüggvénye az első esetben $m_2\frac{\mu}{r}$, a másodikban $m_1\frac{\mu}{r}$. A két pálya egymással ellentetten egyenlő lévén [Kinematika 82. §.] elegendő egyikükkel, pl. az m_2-évél foglalkozni s rövidség kedveért $m_2=m$-et írni, miáltal e relativ mozgás erőfüggvénye

$$V=m\frac{\mu}{r}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

és a megelőző §. (8) vagy (4) kifejezése,

$$A=\sqrt{m}\int\frac{dr}{r}\sqrt{2r^2H+2m\mu r-mc^2}+mc\vartheta+A_0, \quad . \quad . \quad (2)$$

mely véges alakban állítható elő [Math. Repert. 107. §. 50. formula]:

Ámde az integrátiónál a H-nak positiv vagy negativ volta lévén a döntő: először a H-nak e sajátosságát a pálya egyenletén értelmezzük, mely itt [218. §. (9) egyenletei elseje]:

$$\vartheta-c\sqrt{m}\int\frac{dr}{r\sqrt{2r^2H+2m\mu r-mc^2}}=\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

ennek integrálja [i. h. 107. §. 49. formula]:

$$\vartheta-\arcsin\frac{\mu r-c^2}{r\sqrt{\mu^2+(2Hc^2:m)}}=\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

Ez az egyenlet a

$$\frac{c^2}{\mu}=p; \quad 1+\frac{2Hc^2}{m\mu^2}=\varepsilon^2; \quad \vartheta-\gamma=-\tfrac{1}{2}\pi+\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

rövidítések behozatalával átmegyen a kúpszeletek

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3b)$$

egyenletébe, mely *ellipsist, parabolát, hyperbolát* jelent a szerint, a mint $\varepsilon<1$, $\varepsilon=1$, $\varepsilon>1$, azaz, a mint a (4) középsője értelmében H *negativ, zérus, positiv.*

a) Ellipsis esetében a (4) első két egyenlete és egyesítésük:

$$\left.\begin{array}{l} c^2=\mu a(1-\varepsilon^2); \quad (1-\varepsilon^2)=-\dfrac{2Hc^2}{m\mu^2}; \quad H=-\dfrac{m\mu}{2a}; \quad \varepsilon<1. \\ b)\ Parabola\ \text{esetében} \\ c^2=\mu p; \quad H=0; \quad \varepsilon=1. \\ c)\ Hyperbola\ \text{esetében} \\ c^2=-\mu a(1-\varepsilon^2); \quad (1-\varepsilon^2)=-\dfrac{2Hc^2}{m\mu^2}; \quad H=+\dfrac{m\mu}{2a}; \quad \varepsilon>1. \end{array}\right\} \quad . \quad (5)$$

2. Az **A** függvény tényleges kiértékesítésére a 218. §. (4a) első kifejezése alkalmas, mely itt:

$$A = \sqrt{m} \int \frac{(2Hr+2m\mu)\,dr}{\sqrt{2r^2H+2m\mu r-mc^2}} + A_0; \quad \ldots \quad (6)$$

ez egyébként itt is közvetetlenül ered, ha (3)-ból a ϑ-át (2)-be helyettesítjük.

Hasonlóképen nyerjük az idő egyenletét itt [218. §. (9)] a (2)-ből:

$$t+\tau = \sqrt{m} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{2Hr^2+2m\mu r-mc^2}} \quad \ldots \quad (7)$$

A (6) és a (7) egyenesen meg is integrálható [Math. Repertórium 107. §. 43., 44., 46.], de tanulságosabb a következő eljárás:

α) Összefoglalva az ellipsis- és hyperbola-pályát, $c^2 = \pm\mu a\,(1-\varepsilon^2)$ és $H = \mp m\mu : 2a$ helyettesítendő (6)-ba és (7)-be, a felső előjel az első, az alsó előjel a második pályára vonatkozván, ez által csekély összevonások után:

$$A = m\sqrt{\frac{\mu}{a}} \int \frac{(2a \mp r)\,dr}{\sqrt{2ar \mp r^2 \mp a^2(1-\varepsilon^2)}} + A_0, \quad \ldots \quad (6a)$$

$$t = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{2ar \mp r^2 \mp a^2(1-\varepsilon^2)}} - \tau \quad \ldots \quad (7a)$$

β) A parabolánál $c^2 = \mu p$, $H = 0$ lévén, (6)-ból és (7)-ből:

$$A = 2m\sqrt{\mu} \int \frac{dr}{\sqrt{2r-p}} + A_0 \quad \ldots \quad (6b)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{2r-p}} \quad \ldots \quad (7b)$$

a) Ellipsis esetében, 92. ábra, vezessük be az *excentrikus anomáliát*, E-t, melylyel az η valódi anomália és a vezérsugár kifejezése [149. §. (3) és (4)]:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\eta = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}E; \qquad r = a\,(1-\varepsilon \cos E) \quad \ldots \quad (8)$$

s a (6a) és (7a) felső előjelét használva kis számítás után:

$$\left.\begin{aligned} A &= m\sqrt{a\mu} \int (1+\varepsilon \cos E)\,dE + A_0; \\ t\sqrt{\mu} &= a\sqrt{a} \int (1-\varepsilon \cos E)\,dE + \tau. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (9a)$$

Ha az integrál alsó határa $E=0$, azaz a működést és az időt a periheliumtól számítjuk, akkor ennek értéke (8)-ból:

AKADÉMIAI KÖNYVTÁR

$$\left.\begin{aligned} A &= m\sqrt{a\mu}\,(E+\varepsilon\sin E) \\ t &= \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}\,(E-\varepsilon\sin E) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

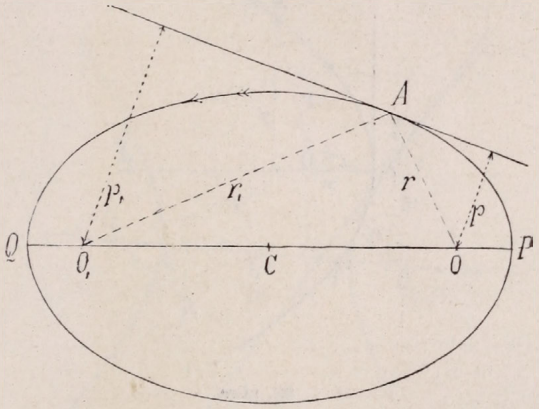
A perihéliumtól számított-, az r vezérsugár leirta f terület:

$$f=\tfrac{1}{2}c\,.\,t=\tfrac{1}{2}\sqrt{\mu\,.\,a\,(1-\varepsilon^2)}\,t=\tfrac{1}{2}a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}\,(E-\varepsilon\sin E). \quad \ldots \quad (10)$$

Másrészt a másik 0, gyúpontból vont r, vezérsugár hoszsza, 92. ábra, a (7) szerint

$$r,=2a-r=a\,(1+\varepsilon\cos E)\,; \quad \ldots\ldots \quad (7a)$$

és az r, által a P periheliumtól számítva leírt $PO,A=f'$ terület egyenlő az ellipsis fél területével, levonva belőle az O,QA területet; ez az utóbbi



92. ábra.

pedig egyenlő az r leirta területtel akkor, a mikor r hoszsza az O,A-éval lett egyenlő, szóval, mikor (8) r-jében az E átment $\pi-E$-be s így a (7a)-nak $r,$-je keletkezett, azaz (10) segélyével nyerjük:

$$f'=\tfrac{1}{2}ab\pi-\tfrac{1}{2}aa\sqrt{1-\varepsilon^2}\,(\pi-E-\varepsilon\sin(\pi-E))=\tfrac{1}{2}ab\,(\pi-\pi+[E+\varepsilon\sin E])$$

$$\tfrac{1}{2}ab\,(E+\varepsilon\sin E)=f'=\tfrac{1}{2}A\,\frac{b}{m}\cdot\sqrt{\frac{a}{\mu}}\,;$$

$$A=2\,\frac{m}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a(1-\varepsilon^2)}}\,f'\,; \quad \ldots\ldots \quad (10a)$$

hol $\frac{1}{2}ab\pi$ az ellipsis fél területe.

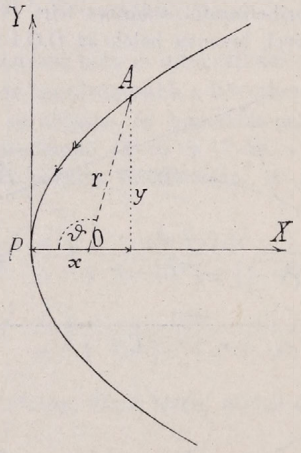
A működés e szerint a másik gyúpontból vont vezérsugár leirtá területtel arányos.

b) A parabolára nézve, ha a működést és az időt szintén a perihelіumtól számítjuk, a (6*b*) és (7*b*)-ből a (3*b*) és az $\varepsilon=1$ felhasználásával:

$$\left.\begin{aligned} A&=2m\sqrt{\mu}\,\sqrt{2r-p}=2m\sqrt{p\mu}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\eta\,;\\ t&=\frac{1}{6\sqrt{\mu}}(2r-p)^{\frac{3}{2}}+\frac{p}{2\sqrt{\mu}}\sqrt{2r-p}=\frac{p^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\mu}}\{\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\eta+\tfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3\tfrac{1}{2}\eta\}\,;\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(11)$$

míg, 93. ábra,

$$f_{\text{sector}}=f=\tfrac{1}{2}ct=\tfrac{1}{2}\sqrt{\mu p}\,t=\tfrac{1}{4}p^2\{\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\eta+\tfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3\tfrac{1}{2}\eta\}.\quad\ldots\quad(12)$$



93. ábra.

Miután itt az x abscissa fölötti segmentum területe:

$$f_{\text{segm.}}=\tfrac{2}{3}xy=\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{2p}\quad\text{és}\quad x=\tfrac{1}{2}p-r\cos\eta=\tfrac{1}{2}p\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\eta,$$

miáltal $f_{\text{segm.}}=\tfrac{1}{3}p^2\,\mathrm{tg}^3\tfrac{1}{2}\eta$, úgy hogy a (12)-ben

$$\tfrac{1}{4}p^2\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\eta=f_{\text{sector}}-\tfrac{1}{4}f_{\text{segm.}}\,;$$

$$A=\frac{8m}{p}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\{f_{\text{sector}}-\tfrac{1}{4}f_{\text{segmentum}}\}\quad\ldots\quad(12a)$$

c) Hyperbola esetében a $p=r(1+\varepsilon\cos\eta)$ összefüggésbe η helyébe teszünk E-t, 94. ábra, hol

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\eta=\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}E;\quad\text{miáltal}\quad r=a\left(\frac{\varepsilon}{\cos E}-1\right)\quad\ldots\quad(13)$$

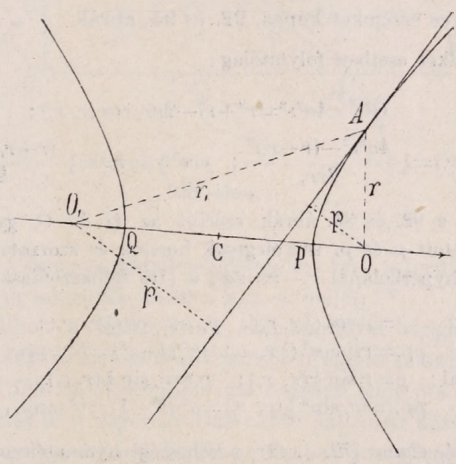
Csekély számítással nyerjük, a (6a) és (7a) *alsó* előjeleit használva:

$$\left.\begin{aligned} A&=m\sqrt{a\mu}\int\frac{\varepsilon+\cos E}{\cos^2 E}\,dE+A_0;\\ t\sqrt{\mu}&=a\sqrt{a}\int\frac{\varepsilon-\cos E}{\cos^2 E}\,dE+\tau.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(14a)$$

Számítva A-t és t-t és az r leirta f területet a perihéliumtól, a (14a)-ból azonnal:

$$\left.\begin{aligned} A&=m\sqrt{a\mu}\,\{\varepsilon\,\mathrm{tg}\,E+\lg_n\mathrm{tg}\,(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}E)\};\\ t&=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}\,\{\varepsilon\,\mathrm{tg}\,E-\lg_n\mathrm{tg}\,(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}E)\}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(14)$$

$$f=\tfrac{1}{2}ct=\tfrac{1}{2}\sqrt{\mu a\,(\varepsilon^2-1)}\,t=\tfrac{1}{2}a^2\sqrt{\varepsilon^2-1}\,\{\varepsilon\,\mathrm{tg}\,E-\lg_n\mathrm{tg}\,(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}E)\}\quad.\quad(15)$$



94. ábra.

Másrészt 94. ábra, a hyperbola másik O, gyúpontjából húzott r, vezérsugár hoszsza a (13) szerint

$$r,=2a+r=a\left(\frac{\varepsilon}{\cos E}+1\right);$$

ez a P periheliumtól kezdve az $f'=O,PA$ sectort írja le, melyhez az r leirta $f=OPA$ sectort adva, az OO,A háromszög területét nyerjük; ez pedig, $(POA)\measuredangle=\eta$ lévén,

$$f'+f=(OO,A)\triangle=\tfrac{1}{2}\overline{O,O}\,.\,r\,.\sin\eta=a\varepsilon r\,.\,\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\eta}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{1}{2}\eta};$$

avagy a (13) felhasználásával

$$f'+f=a\varepsilon \,.\, a\left(\frac{\varepsilon}{\cos E}-1\right)\cdot\sqrt{\varepsilon^2-1}\,\frac{\sin E}{\varepsilon-\cos E}=a^2\sqrt{\varepsilon^2-1}\,.\,\varepsilon\,\mathrm{tg}\,E,$$

miből a (15) és (14) segélyével

$$f'=\tfrac{1}{2}a^2\sqrt{\varepsilon^2-1}\,\{\varepsilon\,\mathrm{tg}\,E+]g_n\,\mathrm{tg}\,(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}E)\};$$

$$\mathrm{A}=2\frac{m}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a(\varepsilon^2-1)}}\cdot f' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15a)$$

A működés e szerint itt is a másik gyúpontból vont vezérsugár által a mozgás közben leírt területtel arányos, megfelelőleg az ellipsis-pályánál (10*a*) alatt talált eredménynyel.

3. Könnyű a (10*a*) és (15*a*)-ban előtüntetett eredmény differentiálját közvetetlenül is az ellipsis s hyperbola azon jellemző sajátságából származtatni, hogy az érintő az r s r' vezérsugarakkal egyenlő hegyes szögeket képez, 92. és 94. ábrák.

Áll mindkét esetben folytatólag:

$$\overline{OO_,}^2=4a^2\varepsilon^2=r^2+r_,^2-2rr_,\cos(r,r_,);$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}(r,r_,)=\tfrac{1}{2}\frac{4a^2\varepsilon^2-(r-r_,)^2}{2rr_,};\quad \cos^2\tfrac{1}{2}(r,r_,)=\tfrac{1}{2}\frac{(r+r_,)^2-4a^2\varepsilon^2}{2rr'}\,.\,(16)$$

Másrészt a 92. és 94. ábrák szerint az O és $O_,$ gyúpontokból az érintőre bocsátott p és $p_,$ merőlegesek hoszsza és szorzata- az ellipsisnél $r+r_,=2a$, a hyperbolánál $r_,-r=2a$-, a (16) felhasználásával:

az ellipsisnél: $p=r\cos(\frac{1}{2}r,r_,)$; $p_,=r_,\cos(\frac{1}{2}r,r_,)$;
$pp_,=rr_,\cos^2(\frac{1}{2}r,r_,)=a^2(1-\varepsilon^2)=b^2=pp_,$;
a hyperbolánál: $p=r\sin\frac{1}{2}(r,r_,)$; $p_,=r_,\sin\frac{1}{2}(r,r_,)$;
$pp_,=rr_,\sin^2\frac{1}{2}(r,r_,)=a^2(\varepsilon^2-1)=b^2=pp_,$.

A működés eleme [72. §. (2)] a sebességi nyomaték $pv=c$ kifejezése [Kinematika 54. §. (1), 73. §. (5)] felhasználásával

$$d\mathrm{A}=mvds=m\frac{c}{p}ds=mc\frac{p_,}{b^2}vdt=\frac{mc}{b^2}(p,v)\,dt;$$

ámde $\frac{1}{2}(pv)\,dt=\frac{1}{2}cdt=df$ az r leirta elemi terület és $\frac{1}{2}(p,v)\,dt=df_,$ az $r_,$ leirta ily terület, a területek növekedését a mozgás mentén számítva;

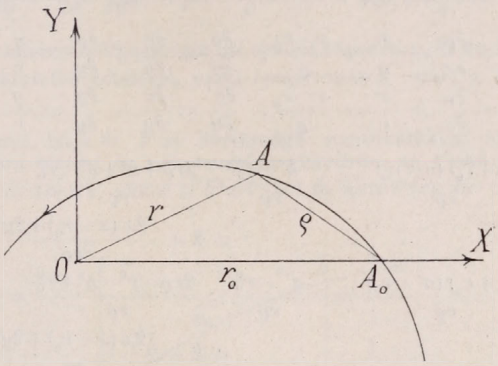
$$d\mathrm{A}=2\frac{mc}{b^2}df', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

mely a (10*a*) és (15*a*)-val teljesen egyező.

218*b*. §. *A bolygók relativ mozgásának* Jacobi-*féle tárgyalása.* Euler *és* Lambert *tétele két vezérsugár- és összekötő pályahúrjukról.*

Eltérőleg a megelőző két §-étől, Jacobi* a bolygók mozgása problemájának megfejtését a bolygónak két szilárd ponttól való távolsága segélyével végezte, kiinduló pontúl ismét a mozgás jellemző egyenletét véve [megelőző §. (1) és 218. §. (6)]:

$$\frac{1}{m}\left\{\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2\right\}=2\frac{m\mu}{r}+2H, \quad \ldots\ldots \quad (0)$$



94*a*. ábra.

mely implicite a mozgás síkbeliségét tételezi fel; a területek elvét is megállapítottnak tekintjük, mint a 218. §. elején.**

A csillagászok a bolygóknak ellipsis-pályái meghatározására szolgáló Gauss-féle és az üstökösök parabola-pályái számítására használt Olbers***-féle módszereiben már e század eleje óta alkalmazták a két radiusvector és a végeiket összekötő pályahúr között fennálló, Euler-től és Lambert-től felfedezett nevezetes összefüggéseket. Ezen kapcsolatok a mozgás rendes differentiálegyenleteiből csak nagyon bonyolódott módon állíthatók elő, ellenben a (0)-ből a Jacobi szerint képezendő jellemző függvény segélyével a legnagyobb könnyűséggel nyerhetők.

1. *A characteristikus függvény* Jacobi-*féle alakja.*

Legyen a 94*a*. ábrában O a nap helyzete, A_0 a bolygónak meghatározott, A tetszőleges helyzete, r_0 és r ezek vezérsugarai, ϱ a közöt-

* Vorlesungen über Dynamik; 25. előadás. 189—198. ll., Berlin 1866.

** Jacobi az i. h. térbeli ily mozgásból indúl ki, jelen kifejtésünk az ő tárgyalása lényegével megegyezik, de valamivel rövidebb.

*** V. ö. pl. Oppolzer, Th., Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten, I. k. 2. kiadás; 283. és 290. ll., Leipzig 1882 és Tisserand, F., Traité de Mécanique céleste, I. k. 114. l. Páris 1889.

tük lévő húr; az A_0 egyszerűség kedveért az X tengelyen legyen és az A coordinátái legyenek x és y.

Ekkor:

$$r^2=x^2+y^2; \quad \varrho^2=(r_0-x)^2+y^2; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

legyen továbbá Jacobi jelölésével

$$\sigma=r+\varrho: \qquad \sigma'=r-\varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

a) Ezekből folyólag a következő összefüggések állanak:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial\varrho}{\partial x}=\frac{x}{r}+\frac{x-r_0}{\varrho}; \quad \frac{\partial\sigma}{\partial y}=\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial\varrho}{\partial y}=\frac{y}{r}+\frac{y}{\varrho};\\ \frac{\partial\sigma'}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial x}-\frac{\partial\varrho}{\partial x}=\frac{x}{r}-\frac{x-r_0}{\varrho}; \quad \frac{\partial\sigma'}{\partial y}=\frac{\partial r}{\partial y}-\frac{\partial\varrho}{\partial y}=\frac{y}{r}-\frac{y}{\varrho}; \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} +\frac{(\sigma+r_0)(\sigma-r_0)}{r\varrho}=+\frac{\sigma^2-r_0^2}{r\varrho}=\frac{2r\varrho+r^2+\varrho^2-r_0^2}{r\varrho}=\\ =2+\frac{2x(x-r_0)+2y^2}{r\varrho};\\ -\frac{(\sigma'+r_0)(\sigma'-r_0)}{r\varrho}=-\frac{\sigma'^2-r_0^2}{r\varrho}=\frac{2r\varrho-r^2-\varrho^2+r_0^2}{r\varrho}=\\ =2-\frac{2x(x-r_0)+2y^2}{r\varrho}; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$r^2-\varrho^2=2xr_0-r_0^2; \quad x-r_0=\frac{r^2-r_0^2-\varrho^2}{2r_0};$$

$$\left.\begin{aligned} +\frac{(\sigma-r_0)(\sigma'+r_0)}{2r_0\varrho}=\frac{\sigma\sigma'+(\sigma-\sigma')r_0-r_0^2}{2r_0\varrho}=\\ =\frac{2r_0\varrho+r^2-r_0^2-\varrho^2}{2r_0\varrho}=1+\frac{x-r_0}{\varrho};\\ -\frac{(\sigma+r_0)(\sigma'-r_0)}{2r_0\varrho}=\frac{-\sigma\sigma'+(\sigma-\sigma')r_0+r_0^2}{2r_0\varrho}=\\ =\frac{2r_0\varrho-r^2+r_0^2+\varrho^2}{2r_0\varrho}=1-\frac{x-r_0}{\varrho}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

b) Bebizonyítjuk Jacobi-val, hogy az

$$\mathrm{A}=\sqrt{m}\int_{\sigma'}^{\sigma} ds\sqrt{\frac{m\mu}{s+r_0}+\tfrac{1}{2}H} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

függvény a (0) egyenletnek teljes integrálja; rövidség kedveért írva:

$$\sqrt{m}\sqrt{\frac{m\mu}{s+r_0}+\tfrac{1}{2}H}=F(s), \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

$$\mathrm{A}=\int_{\sigma'}^{\sigma} F(s)\,ds \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Állításunk igazolására jegyezzük meg, hogy (8)-ból *

$$\frac{\partial A}{\partial \sigma} = F(\sigma); \quad \frac{\partial A}{\partial \sigma'} = -F(\sigma'); \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

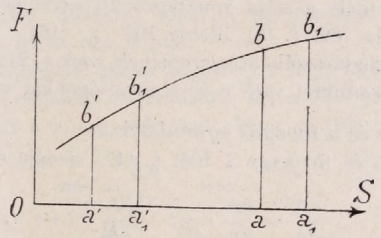
továbbá, hogy

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} &= \frac{\partial A}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial \sigma'}\frac{\partial \sigma'}{\partial x} = \left(\frac{x}{r} + \frac{x-r_0}{\varrho}\right) F(\sigma) - \left(\frac{x}{r} - \frac{x-r_0}{\varrho}\right) F(\sigma'); \\ \frac{\partial A}{\partial y} &= \frac{\partial A}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial \sigma'}\frac{\partial \sigma'}{\partial y} = \left(\frac{y}{r} + \frac{y}{\varrho}\right) F(\sigma) - \left(\frac{y}{r} - \frac{y}{\varrho}\right) F(\sigma'); \end{aligned}\right|$$

melyek négyzeteivel a (0) egyenlet bal oldalát képezve, a (2) és folytatólag a (4) és (7) tekintetbe vételével, némi összevonások után, a $2F(\sigma)\ F(\sigma')$

---

* Ugyanis, ha s és $F(s)$ derékszögű coordinátákkal ábrázoltatnak és a 94*b*. ábra szerint az s-ek tengelye vízszintes, az F-eké vertikális és ha $\overline{Oa'} = \sigma'$ és $\overline{Oa} = \sigma$, akkor $\overline{a'b'} = F(\sigma')$ és $\overline{ab} = F(\sigma)$, és



94*b*. ábra.

$$A = \int_{\sigma'}^{\sigma} F(s)\, ds = (a'b'ba) \text{ terület.}$$

Ebből

$$\frac{\partial A}{\partial \sigma}\, d\sigma = \int_{\sigma'}^{\sigma+d\sigma} F(s)\, ds - \int_{\sigma'}^{\sigma} F(s)\, ds.$$

Ha most $\overline{aa_1} = d\sigma$, akkor a keresett különbség

$$\frac{\partial A}{\partial \sigma} = (a'b'b_1a_1) \text{ terület} - (a'b'ba) \text{ terület}$$

$$= (abb_1a_1) \text{ terület} = \overline{ab} \,.\, \overline{aa_1} = +F(\sigma)\, d\sigma,$$

miből a (9) kifejezések elseje folyik.

Hasonlóan, ha $\overline{a'a_1'} = d\sigma'$, akkor épen így

$$\frac{\partial A}{\partial \sigma'}\, \partial\sigma = \int_{\sigma'+d\sigma'}^{\sigma} - \int_{\sigma'}^{\sigma} = -\overline{a'b'} \,.\, \overline{a'a_1'} = -F(\sigma')\, d\sigma'$$

miáltal a (9) második kifejezése is igazolva van.

szorozmány együtthatója zérus lévén

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2=\left\{2+\frac{2x\,(x-r_0)+2y^2}{r\varrho}\right\}\left\{F(\sigma)\right\}^2+$$

$$+\left\{2-\frac{2x\,(x_0-r_0)+2y^2}{r\varrho}\right\}\left\{F(\sigma')\right\}^2=$$

$$=\left\{\frac{(\sigma+r_0)\,(\sigma-r_0)}{r\varrho}\left(\frac{m\mu}{\sigma+r_0}+\tfrac{1}{2}H\right)-\frac{(\sigma'+r_0)\,(\sigma'-r_0)}{r\varrho}\left(\frac{m\mu}{\sigma'+r_0}+\tfrac{1}{2}H\right)\right\}m=$$

$$=\frac{m^2\mu}{r\varrho}\left\{(\sigma-r_0)-(\sigma'-r_0)\right\}+\tfrac{1}{2}\frac{Hm}{r\varrho}\left\{\sigma^2-r_0^2)-(\sigma'^2-r_0^2)\right\}=2m\left\{\frac{m\mu}{r}+H\right\}.$$

Ez pedig a (0) egyenlet jobb oldalának m-szerese; e szerint az A-nak (6) alatti kifejezése a (0) egyenletet kielégíti és miután benne az r_0 egy független integrál-állandó, egy másik, tetszőleges A_0 állandó hozzáadásával a (6) az

$$A=A\,(\sigma,\,\sigma',\,r_0,\,H)+A_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

alakba hozható, mely a *sík*ra vonatkozó (0) egyenlet teljes integráljának Jacobi-féle alakja [82. §. (1), illetve 104. §. (16)]. Benne σ és σ' az m pont helymeghatározóiként szerepelnek, ezek a (2) segélyével az m-nek az O és az A_0 pontoktól való r és ϱ távolságokkal vannak adva.

2. *A pálya és a mozgás egyenletei.*

A 82. §. (2) és (5) vagy a 104. §. (17) sémája értelmében a

$$\frac{\partial A}{\partial c}=\frac{\partial A}{\partial r_0}=\gamma\,;\qquad \frac{\partial A}{\partial H}=t+\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

egyenletek elseje a pályát, második a coordináták és az idő közötti összefüggést képviseli.

Miután az r_0 az (1) és (2) közvetítésével a σ- és a σ'-ban is előfordúl, a (8) szerint:

$$\frac{\partial A}{\partial r_0}=\frac{\partial A}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial r_0}+\frac{\partial A}{\partial \sigma'}\frac{\partial \sigma'}{\partial r_0}+\int_{\sigma'}^{\sigma}\frac{\partial F}{\partial r_0}\,ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Ámde, a (2) és (1) szerint itt:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r_0}=+\frac{\partial \varrho}{\partial r_0}=+\frac{r_0-x}{\varrho}\,;\qquad \frac{\partial \sigma'}{\partial r_0}=-\frac{\partial \varrho}{\partial r_0}=-\frac{r_0-x}{\varrho}\,; \quad . \quad . \quad (14)$$

továbbá, a (7)-ben az $s+r_0$ összeg-argumentum lépvén fel, közvetetlenül áll:

$$\frac{\partial F}{\partial r_0}=\frac{\partial F}{\partial s}\,,$$

miáltal a (13) utolsó tagjából

$$\int_{\sigma'}^{\sigma}\frac{\partial F}{\partial r_0}\,ds=\int_{\sigma'}^{\sigma}\frac{\partial F}{\partial s}\,ds=F(\sigma)-F(\sigma')\,;$$

ennek, valamint (14) és (9)-nek tekintetbe vételével a (13)-ból és (12)-ből:

$$\frac{\partial A}{\partial r_0} = \left(1 + \frac{r_0 - x}{\varrho}\right) F(\sigma) - \left(1 - \frac{r_0 - x}{\varrho}\right) F(\sigma') = \gamma \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Felhasználva az (5) összefüggéseket, a (7) alakot és szorozva $2r_0$-lal, a (15)-ből:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma = {} & \frac{(\sigma + r_0)(\sigma' - r_0)}{\varrho} \sqrt{\frac{m\mu}{\sigma + r_0} + \tfrac{1}{2}H} + \\ & + \frac{(\sigma - r_0)(\sigma' + r_0)}{\varrho} \sqrt{\frac{m\mu}{\sigma' + r_0} + \tfrac{1}{2}H} = \Gamma; \end{aligned}\right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

hol $\Gamma = -2r_0\gamma : \sqrt{m}$.

Ez a pálya egyenlete a σ és σ', illetve r és ϱ bipolár coordinátákban, mely utóbbiak pólusai az O és A_0 pontok. Hogy az A_0 pont a pályán fekszik, abból következtethető, hogy a (16)-ot ϱ-val szorozva és a ϱ-t zérus felé convergáltatva: $\varrho = 0$-nál $r = r_0$, $\sigma = \sigma' = r_0$, mely értékrendszer a (16)-ot szintén kielégíti, azaz r_0 egy tényleges radiusvector és így A_0 végpontja a pálya egy pontja.

Hogy a (16) képviselte pálya kúpszelet s hogy miképen függ ennek jellege a H állandó előjelétől és értékétől, azt a 138. §. alapján azonnal kimutathatjuk, mert a (0) egyenlet bal oldala az [80. §. (7)]

$$mx' = \frac{\partial A}{\partial x}, \quad my' = \frac{\partial A}{\partial y}$$

összefüggések értelmében mv^2 lévén, e (0) egyenletnek a 137. §. (2) egyenletével való összehasonlításából

$$H = \tfrac{1}{2}mk, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16a)$$

és így 138. §-ban mondottak itt közvetetlenül állanak.

Végre a (12) második egyenlete a (7)-ből itt:

$$\frac{\sqrt{m}}{4} \int_{\sigma'}^{\sigma} \frac{ds}{\sqrt{\frac{m\mu}{s + r_0} + \tfrac{1}{2}H}} = t - \tau, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

melyből $r = r_0$ esetben $\varrho = 0$ és $\sigma = \sigma'$ lévén, ekkor a $t_{r_0} - \tau = 0$, azaz, $t - \tau$ jelenti azt az időközt, mely alatt a bolygó az A_0A ívet leírja.

Téve $s + r_0 = u^{-1}$, $ds = -duu^{-2}$, $\sigma + r_0 = u_1^{-1}$; $\sigma' + r_0 = u_2^{-2}$, a (17)-ből

$$(t - \tau)\frac{4}{\sqrt{m}} = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u^2\sqrt{m\mu u + \tfrac{1}{2}H}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

mely mindig véges alakban előállítható [Math. Rep. 108. §. 21., 17. és 18. formulák 133. lap].

Ellipsis-pálya esetében a H negativ, [jelen §. (16*a*) és 138. §. (4)], írva helyébe $-2h^2$-et, az idézett integrálformulák alkalmazásával

$$\frac{4}{\sqrt{m}}(t-\tau)=\left\{\frac{\sqrt{m\mu u-h^2}}{uh^2}+\frac{m\mu}{2h^2}\int\frac{du}{u\sqrt{m\mu u-h^2}}\right\}_{u_1}^{u_2};$$

$$\frac{4h^2}{\sqrt{m}}(t-\tau)=\left\{\frac{\sqrt{m\mu u-h^2}}{u}+\frac{m\mu}{h}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{m\mu u-h^2}}{h}\right\}_{u_1}^{u_2}. \quad (19)$$

melynek kellő átalakításával a GAUSS-féle Theoria motus corporum cœlestium [139. §. 3. pontja] megfelelő, a bolygók ellipsis-pályái meghatározására szolgáló formulái keletkeznek.

Parabola-pályánál $H=0$ [jelen §. (16*a*) és 138. §. (4)], ekkor (17)-ből

$$\frac{4}{\sqrt{m}}(t-\tau)=\frac{1}{\sqrt{m\mu}}\int_{\sigma'}^{\sigma}ds\sqrt{s+r_0}=\frac{1}{\sqrt{m\mu}}\frac{2}{3}\{(\sigma+r_0)^{\frac{3}{2}}-(\sigma'+r_0)^{\frac{3}{2}}\};$$

$$6\sqrt{\mu}(t-\tau)=(r+\varrho+r_0)^{\frac{3}{2}}-(r-\varrho+r_0)^{\frac{3}{2}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

mely a rendesen LAMBERT-félének nevezett, de tényleg már EULER-től felfedezett összefüggés. Ez az üstökösök parabola-pályái meghatározására szolgáló OLBERS féle módszernek egyik alapformulája.

219. §. *Előírt sima felületen mozgó pont characteristikus egyenlete.*

Legyen $z=f(x,y)$ az előírt felület egyenlete és EULER jelölésével:

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}; \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}; \quad N^2=1+p^2+q^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ekkor

$$2\mathrm{T}=m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=m\frac{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}{dt^2}=m\{x'^2+y'^2+(px'+qy')^2\}, \quad . \quad (2)$$

mely kifejezésben a z eliminálódott s a 82. §. 1. és 2. szakasza *b)* pontjai értelmében a további eljárás ugyanaz, mint az x és y változójú szabad mozgásra nézve.

Ugyanis a mozgási nyomatékok [104. §. 3. szakaszának *d)* pontja] és belőlük folytatólagosan:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial x}=\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial x'}=m\{x'+p(px'+qy')\};\\ \eta&=\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial y}=\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial y'}=m\{y'+q(px'+qy')\};\\ p\xi+q\eta&=m(1+p^2+q^2)(px'+qy'),\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

melynek helyettezésével (3)-ból az (1) jelöléssel:

$$mx'=\xi-\frac{p}{N}(p\xi+q\eta); \quad my'=\eta-\frac{q}{N}(p\xi+q\eta). \quad . \quad . \quad (4)$$

Másrészt, T az x' és y' homogén quadrátos függvénye lévén, (3) és (4) segélyével:

$$2\mathrm{T}=\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'}x'+\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y'}y'=\frac{1}{m}\left\{\xi\left[\xi-\frac{p}{N}(p\xi+q\eta)\right]+\eta\left[\eta-\frac{q}{N}(p\xi+q\eta)\right]\right\};$$

$$N2m\mathrm{T}=(N-p^2)\,\xi^2-pq\xi\eta+(N-q^2)\,\eta^2-qp\eta\xi.$$

Tekintettel az (1)-re és a (3)-ra, a $2\mathrm{T}=2(H+V)$ egyenlet itt:

$$\left.\begin{aligned}&-2m(1+p^2+q^2)(H+V)+\\&+(1+q^2)\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}\right)^2+(1+p^2)\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\right)^2-2pq\,\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}\,\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}=0;\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(5)$$

és ez a characteristikus egyenlet ezen esetben.

Ha $V=0$: akkor az m-re független erő nem hat s az (5) az m által a $z=f(x,y)$ felületen leírt *geodätikus* görbe [55. §.]

Az egyenlet ezen alakjában bonyolódott és már másodrendű felületek esetében közvetetlenül nem fejthető meg; de elliptikus coordináták segélyével igen könnyen [229, 231. §§.].

d) Lagrange általános erőcomponenseinek és általános mozgás-egyenletei második alakjának alkalmazása.

220. §. *Példák* Lagrange *mozgás-egyenleteire általános coordinátákban: Az erő szétbontása térbeli polárcoordináták-, orthogonális felületek normálisai-, tetszőleges görbevonalú orthogonális coordináták szerint.*

1. *Az erő szétbontása térbeli polárcoordináták szerint.*

A Kinematika 347. §-ának 268. ábráját, 594. l., és jelöléseit megtartva, itt az általános coordináták $q_1=r$, $q_2=\eta$, $q_3=\vartheta$; továbbá legyenek R, H, Θ az r-menti, az η növekedése menti és a ϑ növekedése menti erőcomponensek, míg Q_1, Q_2, Q_3 az általános erők. A ds elemi elmozdulás vetületei az R, H, Θ irányaira rendre, dr, $rd\eta$, $r\sin\eta d\vartheta$, [Kinematika 23. §., 23. l.] miáltal az elemi munka:

$$dL=Rdr+Hrd\eta+\Theta r\sin\eta d\vartheta=Q_1dq_1+Q_2dq_2+Q_3dq_3=dL;$$

ámde itt $dq_1=dr$, $dq_2=d\eta$, $dq_3=d\vartheta$ lévén, melyek egymastól függetlenek, azonnal nyerjük:

$$Q_1=R;\quad Q_2=Hr;\quad Q_3=\Theta r\sin\eta\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

Továbbá az eleven erő itt:

$$\mathrm{T}=\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}m\{r'^2+r^2\eta'^2+r^2\sin^2\eta\vartheta'^2\},$$

melyből Lagrange mintájára [95. §. (8)] az erőcomponensek:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= m\left\{\frac{d}{dt}(r') - r(\eta'^2 + \sin^2\eta\vartheta'^2)\right\};\\ Q_2 &= m\left\{\frac{d}{dt}(r^2\eta') - r^2\sin\eta\cos\eta\vartheta'^2\right\};\\ Q_3 &= m\,\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\eta\vartheta'); \end{aligned}\right\} \quad \ldots : (2)$$

ezek pedig, tekintve az (1)-et, az m factor kivételével teljesen megegyeznek a Kinematika 347. §. (4) rendszerével, illetve a Kinematika 45. §. (6) gyorsulásainak 1. r, $r\sin\eta$-val való szorozmányaival, 46. 1.

2. *Az erő szétbontása orthogonális felületek normálisai szerint.*

Jeleljék x, y, z az m derékszögű coordinátáit, F_1, F_2, F_3 az egymást orthogonálisan metsző három felületet, melyek közös metszőpontja az m helye; λ_1, λ_2, λ_3 e felületek paramétereit és s_1, s_2, s_3 közös metsző vonalait [V. ö. Kinematika 343. §-a I. pontját és 265. ábráját], melyek egymásra s a megfelelő felületekre merőlegesek.

Legyenek s_1, s_2, s_3 a görbevonalú coordináták, melyekkel az x, y, z-t kifejezetteknek tekintjük; ekkor ezek növekedései:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial s_1}ds_1 + \frac{\partial x}{\partial s_2}ds_2 + \frac{\partial x}{\partial s_3}ds_3;\\ dy &= \frac{\partial y}{\partial s_1}ds_1 + \frac{\partial y}{\partial s_2}ds_2 + \frac{\partial y}{\partial s_3}ds_3;\\ dz &= \frac{\partial z}{\partial s_1}ds_1 + \frac{\partial z}{\partial s_2}ds_2 + \frac{\partial z}{\partial s_3}ds_3; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

hol $\frac{\partial x}{\partial s_1}, \frac{\partial y}{\partial s_1}, \frac{\partial z}{\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial s_3}$ a ds_1, ds_2, ds_3 irányoknak az X, Y, Z tengelyekre vonatkozó iránycosinusai.

A ds_2 és ds_3 orthogonalitásának feltétele:

$$\frac{\partial x}{\partial s_2}\frac{\partial x}{\partial s_3} + \frac{\partial y}{\partial s_2}\frac{\partial y}{\partial s_3} + \frac{\partial z}{\partial s_2}\frac{\partial z}{\partial s_3} = 0, \quad \ldots\ldots (4a)$$

s épen így a ds_3 és ds_1 s a ds_1 és ds_2 merőleges voltáé; továbbá, mivel $(\frac{\partial x}{\partial s_1})^2 + (\frac{\partial y}{\partial s_1})^2 + (\frac{\partial z}{\partial s_1})^2 = 1$ s í. t., az (1)-ből az ívelem és az eleven erő

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (ds_1)^2 + (ds_2)^2 + (ds_3)^2 = (ds)^2; \quad \ldots (4)$$

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m(s_1'^2 + s_2'^2 + s_3'^2); \quad \ldots\ldots (5)$$

melyből a 95. §. (8) mintájára nyerhetők az S_1, S_2, S_3 erőcomponensek:

$$S_i = m\frac{d}{dt}(s_i'); \quad i = 1, 2, 3 \quad \ldots\ldots (6)$$

3. *Az erő szétbontása tetszőleges görbevonalú orthogonális coordináták szerint.*

Válaszszuk a megelőző 2. pont λ_1, λ_2, λ_3 paramétereit általános görbevonalú coordinátáknak; akkor $s_1(\lambda_1)$, $s_2(\lambda_2)$, $s_3(\lambda_3)$ a metszővonalak ívei; ezek az ívek, a tér valamely O pontjából indulnak ki és rendre az F_1, az F_2 az F_3 felületek seregeit merőlegesen találják és ezért ezek hoszsza, eltekintve állandóktól, rendre csak e felületcsaládok λ_1, illetve λ_2, illetve λ_3 paramétereitől függhet. Miután itt x, y, z az s_1, s_2, s_3- és így a λ_1, λ_2, λ_3 függvényei és áll:

$$dx=\frac{\partial x}{\partial\lambda_1}d\lambda_1+\frac{\partial x}{\partial\lambda_2}\partial\lambda_2+\frac{\partial x}{\partial\lambda_3}d\lambda_3 \text{ s í. t.}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7a)$$

hol

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda_1}=\frac{\partial x}{\partial s_1}\frac{ds_1}{d\lambda_1}; \quad \frac{\partial x}{\partial\lambda_2}=\frac{\partial x}{\partial s_2}\frac{ds_2}{d\lambda_2}; \quad \frac{\partial x}{\partial\lambda_3}=\frac{\partial x}{\partial s_3}\frac{ds_3}{d\lambda_3} \text{ s í. t.} \quad . \quad (7b)$$

A (7*a*) négyzetöszszegét a (7*b*) és (4)-re való tekintettel képezve:

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2=L_1^2(d\lambda_1)^2+L_2^2(d\lambda_2)^2+L_3^2(d\lambda_3)^2=(ds)^2. \quad (8)$$

hol

$$L_1^2=\left(\frac{\partial x}{\partial s_1}\frac{ds_1}{d\lambda_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial s_1}\frac{ds}{d\lambda_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial s_1}\frac{ds_1}{d\lambda_1}\right)^2=\left(\frac{ds_1}{d\lambda_1}\right)^2; \text{ s í. t. . . } (9)$$

Az s_1 görbe a λ_2=const. és λ_3=const. felületek metszőgörbéje lévén, ennek ds_1 elemét a (8) adja, ha benne $d\lambda_2=d\lambda_3=0$ tétetik; analog módon nyerjük a ds_2 és ds_3 ívelemeket:

$$ds_1=L_1d\lambda_1; \quad ds_2=L_2d\lambda_2; \quad ds_3=L_3d\lambda_3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8a)$$

megegyezésben a (9)-el [v. ö. a 93. §. (5) és (5) egyenleteit].

Az eleven erő

$$T=\tfrac{1}{2}m\{L_1^2\lambda_1'^2+L_2^2\lambda_2'^2+L_3^2\lambda_3'^2\}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

és ebből a Q_1, Q_2, Q_3 általános erőcomponensek:

$$Q_1=m\left\{\frac{d}{dt}(L_1^2\lambda_1')-(\lambda_1'^2L_1\frac{\partial L_1}{\partial\lambda_1}+\lambda_1'^2L_2\frac{\partial L_2}{\partial\lambda_1}+\lambda_3'^2L_3\frac{\partial L_3}{\partial\lambda_1})\right\} \text{ s í. t. . } (11)$$

Ha S_1, S_2, S_3 az erő közönséges componensei a ds_1, ds_2, ds_3 elemek mentén, akkor a munkaelem kétféle kifejezése:

$$dL=S_1ds_1+S_2ds_2+S_3ds_3=Q_1d\lambda_1+Q_2d\lambda_2+Q_3d\lambda_3=dL;$$

miből, a $d\lambda_1$, $d\lambda_2$, $d\lambda_3$ egymástól függetlenek lévén: a (8*a*)-ra való tekintettel

$$Q_1=S_1L_1; \quad Q_2=S_2L_2; \quad Q_3=S_3L_3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

melyek (11) rendszerébe helyettezendők, miáltal az S_1, S_3, S_3 általános coordinátákban előállíthatók.

221. §. *Egymással kapcsolt egyszerű két inga* Lagrange*-féle mozgásegyenletei, általános erőcomponensei. Mozgásuk részletezése.*

A 211. §-ban tárgyalt, a 90. ábrában előtüntetett problémában jeleljék ϑ_1 és ϑ_2 az l_1 s l_2 és vertikális közötti, η_1 s η_2 az l_1 és l_2-en átmenő vertikális síkok és az XZ közötti szögeket; áll, 90. ábra:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin\vartheta_1 \cos\eta_1\,; & y_1 &= l_1 \sin\vartheta_1 \sin\eta_1\,; & z_1 &= l_1\cos\vartheta_1\,; \\ x_2 - x_1 &= l_2 \sin\vartheta_2 \cos\eta_2\,; & y_2 - y_1 &= l_2 \sin\vartheta_2 \sin\eta_2\,; & z_2 - z_1 &= l_2\cos\vartheta_2\,. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

a) Jeleljék P_1, Q_1, S_1, illetve P_2, Q_2, S_2 az l_1. ϑ_1, η_1, illetve l_2, ϑ_2, η_2 coordinátákhoz tartozó *általános* erőcomponenseket [94. §.]; hogy ezen utóbbiakat az eleven erőnek most megszerkesztendő kifejezéséből lehessen képezni: az l_1 és az l_2 hoszszakat (vezérsugarakat) is változóknak tekintjük és később az erőcomponensek képzése után, ha a fonalat nyújthatatlannak kívánjuk tekinteni: a hoszszaknak időszerinti differentiálquotienseit zérussal egyenlővé teszszük.

A sebességi componensek (1)-ből

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= l_1' \sin\vartheta_1 \cos\eta_1 + l_1 \cos\vartheta_1 \cos\eta_1\vartheta_1' - l_1 \sin\vartheta_1 \sin\eta_1\eta_1'\,; \\ y_1' &= l_1' \sin\vartheta_1 \sin\eta_1 + l_1 \cos\vartheta_1 \sin\eta_1\vartheta_1' + l_1 \sin\vartheta_1 \cos\eta_1\eta_1'\,; \\ z_1' &= l_1' \cos\vartheta_1 - l_1 \sin\vartheta_1\vartheta_1'\,. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (2_1)$$

$$\left.\begin{aligned} x_2' &= x_1' + l_2' \sin\vartheta_2 \cos\eta_2 + l_2 \cos\vartheta_2 \cos\eta_2\vartheta_2' - l_2 \sin\vartheta_2 \sin\eta_2\eta_2'\,; \\ y_2' &= y_1' + l_2' \sin\vartheta_2 \sin\eta_2 + l_2 \cos\vartheta_2 \sin\eta_2\vartheta_2' + l_2 \sin\vartheta_2 \cos\eta_2\eta_2'\,; \\ z_2' &= z_1' + l_2' \cos\vartheta_2 - l_2 \sin\vartheta_2\vartheta_2'\,. \end{aligned}\right\} \quad . \; (2_2)$$

Ezekből az eleven erő:

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2} m_1 (x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) + \tfrac{1}{2} m_2 (x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2) \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

és belőle rendre [95. §. (8.)]

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial l_1'}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial l_1}\,; & P_2 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial l_2'}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial l_2}\,; \\ Q_1 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \vartheta_1'}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \vartheta_1}\,; & Q_2 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \vartheta_2'}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \vartheta_2}\,; \\ S_1 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \eta_1'}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \eta_1}\,; & S_2 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \eta_2'}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \eta_2}\,; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (4)$$

hol, a 92. §. 3. pontja értelmében

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial l_1} &= \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_1'}\,\frac{\partial x_1'}{\partial l_1} + \text{.+.+.+.+.+}\,\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z_2'}\,\frac{\partial z_2'}{\partial l_1}\,; \text{ s í. t.} \\ \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial l_1'} &= \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_1'}\,\frac{\partial x_1'}{\partial l_1'} + \text{.+.+.+.+.+}\,\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z_2'}\,\frac{\partial z_2'}{\partial l_2'}\,; \text{ s í. t.} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (4a)$$

és így ezen általános erőcomponensek könynyen képezhetők. Ezekbe a míveletek végrehajtása után $l_1' = 0$ és $l_2' = 0$-át téve, nyerjük a kinyújthatatlan fonál esetében az erőcomponenseket.

b. Legyenek L_1, Θ_1, H_1, illetve L_2, Θ_2, H_2 az m_1-, illetve m_2-re ható *összes* erőknek a növekvő l_1, ϑ_1, η_1, illetve a növekvő l_2, ϑ_2, η_2-menti componensei (l. a *c.* pontot); az L, Θ, H és a I, Q, S erők egymással való összefüggésének kipuhatolására képezzük úgy az első mint a második erőcsoport segélyével az elemi munkát, melyet ezek az erők végeznek az m_1-nek ds_1 s az m_2-nek ds_2 elmozdulása közben; a munka e két kifejezése összehasonlítása az erőcomponensek keresett összefüggését fogja adni.

a) Az elsőket tekintve, az $L_1 \ldots H_2$ componensek rendre szorzandók a ds_1-nek, illetve ds_2-nek megfelelő componenseivel, melyeket ds_{l_1}-, ds_{ϑ_1}-, ds_{η_1}-; ds_{l_2}-, ds_{ϑ_2}-, ds_{η_2}-el jeleljük; ámde ezen erők irány-cosinusai, miként könnyen észrevenni [v. ö. pl. a Kinematika 23. §-át] a következők:

$$\left.\begin{array}{lll} L_1\text{-éi} & \Theta_1\text{-éi} & H_1\text{-éi} \\ \sin\vartheta_1\cos\eta_1; & \cos\vartheta_1\cos\eta_1; & -\sin\eta_1; \\ \sin\vartheta_1\sin\eta_1; & \cos\vartheta_1\sin\eta_1; & +\cos\eta_1; \\ \cos\vartheta_1; & -\sin\vartheta_1; & 0. \end{array}\right| \quad \ldots \quad (5$$

$$\left.\begin{array}{lll} L_2\text{-éi} & \Theta_2\text{-éi} & H_2\text{-éi} \\ \sin\vartheta_2\cos\eta_2; & \cos\vartheta_2\cos\eta_2; & -\sin\eta_2; \\ \sin\vartheta_2\sin\eta_2; & \cos\vartheta_2\sin\eta_2; & +\cos\eta_2; \\ \cos\vartheta_2; & -\sin\vartheta_2; & 0. \end{array}\right|$$

Másrészt a $ds_1 = v_1 dt$ és $ds_2 = v_2 dt$ elmozdulások irány-cosinusai egybeesnek a v_1 és v_2 irány-cosinusaival, ugyanis $x_1' : v_1'$-el s í. t. és $x_2' : v_2'$-el s í. t., melyek a (2_1)- és (2_2))-ből adódnak; e szerint a $ds_{l_1} \ldots ds_{\eta_2}$ vetületek:

$$ds_{l_1} = ds_1 \cos(v_1, L_1) = v_1 dt \left\{\frac{x_1'}{v_1}\cos(L_1, X) + .+.\right\} =$$
$$= \{x_1' \cos(L_1, X) + .+.\}\, dt; \text{ s í. t.;}$$

azaz

$$ds_{l_1} = \{x_1' \cos(L_1, X) + y_1' \cos(L_1, Y) + z_1' \cos(L_1, Z)\}\, dt;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$ds_{\eta_2} = \{x_2' \cos(H_2, X) + y_2' \cos(H_2, Y) + z_2' \cos(H_2, Z)\}\, dt.$$

A (2_1), (2_2) és (5) rendszerek felhasználásával rendre nyerjük:

$$ds_{l_1} = dl_1; \qquad ds_{\vartheta_1} = l_1 d\vartheta_1; \qquad ds_{\eta_1} = l_1 \sin\vartheta_1 d\eta_1 \quad \ldots \quad (6_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} ds_{l_2} = dl_2 + dl_1[\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos(\eta_2-\eta_1)] + \\ \quad + l_1 d\vartheta_1[-\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \cos\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos(\eta_2-\eta_1) + \\ \quad + l_1 d\eta_1 \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\sin(\eta_2-\eta_1); \\ ds_{\vartheta_2} = l_2 d\vartheta_2 + dl_1[\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2\cos(\eta_2-\eta_1) - \cos\vartheta_1\sin\vartheta_2] + \\ \quad + l_1 d\vartheta_1[\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2\cos(\eta_2-\eta_1) + \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2] + \\ \quad + l_1 d\eta_1 \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2\sin(\eta_2-\eta_1); \\ ds_{\eta_2} = l_2\sin\vartheta_2\, d\eta_2 + dl_1\sin\vartheta_1\sin(\eta_1-\eta_2) + \\ \quad + l_1 d\vartheta_1\cos\vartheta_1\sin(\eta_1-\eta_2) + l_1 d\eta_1 \sin\vartheta_1\cos(\eta_2-\eta_1). \end{array}\right| \quad \ldots \quad (6_2)$$

Az elemi munka e szerint

$$d\mathfrak{L}=L_1 ds_{l_1}+\Theta_1 ds_{\vartheta_1}+H_1 ds_{\eta_1}+L_2 ds_{l_2}+\Theta_2 ds_{\vartheta_2}+H_2 ds_{\eta_2}=d\mathfrak{L}\,; \quad . \quad (7)$$

β) Másrészt ugyane munka általános coordinátákban:

$$d\mathfrak{L}=P_1 dl_1+Q_1 d\vartheta_1+S_1 d\eta_1+P_2 dl_2+Q_2 d\vartheta_2+S_2 d\eta_2=d\mathfrak{L}. \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

γ) Felhasználva a (6_1) és (6_2) rendszereket a (7) kifejezésére és megjegyezve, hogy a $dl_1 \ldots d\eta_2$ coordináta-változások tetszőlegesek: ezeknek a (7) és (8) egyenleteiben fellépő coefficiensei egymással egyenlők tartoznak lenni, miáltal közvetetlenül nyerjük:

$$\left.\begin{aligned}
P_1 &= L_1+L_2\,[\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2+\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos(\eta_2-\eta_1)]+\\
&+\Theta_2\,[\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2\cos(\eta_2-\eta_1)-\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2]+\\
&+H_2\sin\vartheta_1\sin(\eta_1-\eta_2)\,;\\
Q_1 &= \Theta_1 l_1+L_2 l_1\,[-\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2+\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos(\eta_2-\eta_1)]+\\
&+\Theta_2 l_1\,[\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2\cos(\eta_2-\eta_1)+\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2]+\\
&+H_2 l_1\cos\vartheta_1\sin(\eta_1-\eta_2)\,;\\
S_1 &= H_1 l_1\sin\vartheta_1+L_2 l_1\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\sin(\eta_2-\eta_1)+\\
&+\Theta_2 l_1\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2\sin(\eta_2-\eta_1)+H_2 l_1\sin\vartheta_1\cos(\eta_1-\eta_2)\,;
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (9_1)$$

$$P_2=L_2\,; \qquad Q_2=\Theta_2 l_2\,; \qquad S_2=H_2 l_2\sin\vartheta_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9_2)$$

c. Végre X_1, Y_1, Z_1 és X_2, Y_2, Z_2 az m_1- s az m_2-re ható független (szabad) erők componensei és R_1 és R_2 az l_1 s l_2 fonálrészek feszültségei, melyek elseje m_1-et O-felé, másodika az m_1-et A_2-felé, m_2-et A_1-felé húzni törekszik. Ezek az *összes* erők; belőlük a *b.* pontban behozott $L_1 \ldots . H_2$ componensek közvetetlenül képezhetők; a mennyiben:

$$\left.\begin{aligned}
L_1 &= X_1\cos(L_1,\ X)+Y_1\cos(L_1,\ Y)+Z_1\cos(L_1,\ Z)+\\
&+R_1\cos(R_1,\ L_1)+R_2\cos(R_2,\ L_1)\,;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
H_2 &= X_2\cos(H_2,\ X)+Y_2\cos(H_2,\ Y)+Z_2\cos(H_2,\ Z)+\\
&+R_2\cos(R_2,\ H_2)\,;
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (9)$$

hol az iránycosinusokat az (5) séma adja meg.

c_a. Csak a földnehézsége a független erő.

Ekkor $X_1=Y_1=X_2=Y_2=0$; $Z_1=m_1 g$, $Z_2=m_2 g$ és ekkor egyszerű számítások után (9)-ből:

$$\left.\begin{aligned}
L_1 &= +m_1 g\cos\vartheta_1-R_1+R_2\cos(l_1,\ l_2)\,;\\
\Theta_1 &= -m_1 g\sin\vartheta_1+R_2\cos(R_2,\ \Theta_1)\,;\\
H_1 &= \quad 0 \quad +R_2\cos(R_2,\ H_1)\,;
\end{aligned}\right| \qquad \left|\begin{aligned}
L_2 &= +\,m_2 g\cos\vartheta_2-R_2\,;\\
\Theta_2 &= -\,m_2 g\sin\vartheta_2\\
H_2 &= \quad 0\,;
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (10)$$

hol

$$\begin{aligned}
&\cos(l_1,\ l_2)=\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos(\eta_2-\eta_1)+\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2\,;\\
&\cos(R_2,\ \Theta_1)=-\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2+\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos(\eta_2-\eta_1)\,;\\
&\cos(R_2,\ H_1)=\sin\vartheta_2\sin(\eta_2-\eta_1).
\end{aligned}$$

d. A mozgás *kicsiy* ϑ_1 és ϑ_2 *szögekkel az XZ síkban történjék* (v. ö. a 211. §. II. szakaszát).

Ekkor, mivel $\eta_1 = \eta_2 = 0$, *első közelitésben* a (2_1), (2_2) és a $(4a)$ egyenletekből:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1'=l_1'\vartheta_1+l_1\vartheta_1'; & & y_1'=0; & z_1'=l_1'; \\ x_2'=l_1'\vartheta_1+l_2'\vartheta_2+l_1\vartheta_1'+l_2\vartheta_2'; & & y_2'=0; & z_2'=l_1'+l_2'. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (11)$$

$$\begin{array}{llll} \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial l_1} = m_1\ x_1'.\vartheta_1' + m_2\ x_2'\vartheta_1' & ; & \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \vartheta_1} = m_1x_1'l_1'+m_2x_2'l_1'; \\ \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial l_1'} = m_1(x_1'\ \vartheta_1+z_1')+m_2(x_2'\vartheta_1+z_2'); & & \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \vartheta_1'} = m_1x_1'l_1+m_2x_2'l_1; \\ \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial l_2'} = m_2\ x_2'\vartheta_2'; & & \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \vartheta_2} = m_2x_2'l_2'; \\ \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial l_2'} = m_2(x_2'\vartheta_2+z_2'); & & \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \vartheta_2'} = m_2x_2'l_2. \end{array}$$

Ha most az l_1 és l_2 fonalakat kinyújthatatlanoknak tekintjük, $l_1'=0$, $l_2'=0$; $z_1'=0$, $z_2'=0$; miáltal:

$$\left.\begin{array}{llll} \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial l_1} = m_1l_1\vartheta_1'^2\ +m_2(l_1\vartheta_1'+l_2\vartheta_2')\vartheta_1'; & & \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \vartheta_1} = 0; \\ \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial l_1'} = m_1l_1\vartheta_1\vartheta_1'+m_2(l_1\vartheta_1'+l_2\vartheta_2')\vartheta_1; & & \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \vartheta_1'} = m_1l_1^2\vartheta_1'+m_2(l_1\vartheta_1'+l_2\vartheta_2')\,l_1; \\ \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial l_2} = m_2(l_1\vartheta_1'+l_2\vartheta_2')\,\vartheta_2'; & & \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \vartheta_2} = 0; \\ \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial l_2'} = m_2(l_1\vartheta_1'+l_2\vartheta_2')\,\vartheta_2; & & \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \vartheta_2'} = m_2(l_1\vartheta_1'+l_2\vartheta_2')\,l_2. \end{array}\right\} \quad . \quad (12)$$

A $\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial l_1}$, $\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial l_1'}$; $\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial l_2}$, $\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial l_2'}$ quotiensek a tett megállapodás értelmében másodrendű kicsinyek lévén, elhanyagolhatók, és így a (12) segélyével a (4):

$$\left.\begin{array}{llll} P_1=0; & Q_1=\{m_1\ l_1^2\vartheta_1''+m_2(l_1\vartheta_1''+l_2\vartheta_2'')\}\,l_1; & & S_1=0; \\ P_2=0; & Q_2=\{m_2(l_1\vartheta_1''+l_2\vartheta_2'')\}\,l_2; & & S_2=0. \end{array}\right\} \quad . \quad (13)$$

a. Csak a föld nehézsége a független erő.

Ekkor a (10)-ből és első közelitésben a (9_1)- és (9_2)-ből:

$$\left.\begin{array}{lll} L_1=m_1g-R_1+R_2; & \Theta_1=-m_1g\vartheta_1+R_2(\vartheta_2-\vartheta_1); & H_1=0 \\ L_2=m_2g-R_2; & \Theta_2=-m_2g\vartheta_2; & H_2=0 \end{array}\right\} \quad (14)$$

$$\left.\begin{array}{lll} P_1=L_1+L_2+\Theta_2\,(\vartheta_1-\vartheta_2); & Q_1=\Theta_1l_1+L_2l_1\,(\vartheta_2-\vartheta_1)+\Theta_2l_1; & S_1=0 \\ P_2=L_2; & Q_2=\Theta_2l_2; & S_2=0 \end{array}\right\} \quad (15)$$

Elhagyva a másodrendűeket, egyesítve a (13)- és (15)-rendszert és ezen utóbbiba a (14) értékeit behelyettezve, nyerjük:

$$P_1=0=m_1g-R_1+m_2g; \qquad P_2=0=m_2g-R_2; \quad \text{és így} \quad L_1=L_2=0,$$

melyekből

$$R_1=(m_1+m_2)\,g\,; \qquad R_1=m_2g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Továbbá:

$$Q_1 : l_1=m_1l_1\vartheta_1''+m_2(l_1\vartheta_1''+l_2\vartheta_2'')=-m_1g\vartheta_1+R_2(\vartheta_2-\vartheta_1)-m_2g\vartheta_2\,;$$
$$Q_2 : l_2=m_2(l_1\vartheta_1''+l_2\vartheta_2'')=-m_2g\vartheta_2;$$

avagy (16)-ból $R_2=m_2g$-t helyettezve:

$$\left.\begin{aligned} m_1l_1\vartheta_1''+m_2(l_1\vartheta_1''+l_2\vartheta_2'')&=-(m_1+m_2)\,g\vartheta_1\,; \\ m_2(l_1\vartheta_1''+l_2\vartheta_2'')&=-\,m_2g\vartheta_2\,. \end{aligned}\right| \quad , \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Tekintettel a 211. §. *Jegyzetére*, (17*a*), (17*b*) és (8) egyenleteire, észreveszszük, hogy jelen rendszerünk első egyenlete egyenlő az idézett 211. §. (9) egyenleteinek összegével, míg második egyenlete e (9) rendszer második egyenletével egyenlő.

e) *Elliptikus coordináták rendszerei és alkalmazásaik a pontmozgás problémáinak a Hamilton-Jacobi-féle eljárás segélyével való megoldására.*

222. §. *Az elliptikus coordinátákról általánosságban; fajaik.**

A görbevonalú coordináták közül különösen alkalmazhatóságuknál fogva fontosak azok, melyek rendszerei egymást metsző *másodrendű görbék* vagy *felületek* seregein alapúlnak.

Azok az általános coordináták [92. §.] speciális esetei és igen különbözőképen használhatók. Itt a gyakrabban alkalmazott ily coordináta-rendszerekre szorítkozunk, melyek említett metszése orthogonális és melyek megfelelő főtengelyei ugyanazon egyenesekbe esnek. Közelebbről pedig

I. *Síkbeli* vonatkozásoknál a pont helyzetét megadja:

α) Ugyanazon gyúpontokkal biró (s így közös középpontú) ellipsis és hyperbola metszőpontja; v. ö. a 223. §-ot; vagy

β) Közös egyenesen fekvő, ellentett irányú tengelyekkel biró, közös gyúpontú két parabola metszőpontja; v. ö. a 226. §-ot.

II. *Térbeli* vonatkozásoknál a pont helyzetét megadja:

α) Egy két-héjú (-köpenyű) hyperboloid, egy egy-héjú (-köpenyű) hyperboloid s egy ellipsoid metszőpontja; e felületek középpontja közös; főmetszeteik síkjai egybeesnek s az egy-egy síkba eső főmetszetek gyúpontjai közösek; v. ö. a 228. §-ot; vagy:

---

* A görbevonalú coordinátákra nézve l. pl. G. Lamé: Leçons sur les coordonnés curvilignes stb. Paris 1859; G. Holzmüller: Theorie der isogonalan Verwandtschaften stb. Leipzig 1882; G. Darboux: Leçons sur la Théorie générale des Surfaces stb. t. I, Livre II, 111—266 ll. Paris 1887.

β) Egy első elliptikus paraboloid, egy hyperbolás paraboloid és egy másik elliptikus paraboloid metszőpontja; e felületek tengelyei közös egyenesen fekszenek, a két elliptikus paraboloid tengelyei ellentett irányúak; főmetszeteik síkjai egybeesnek s az egy-egy síkban lévő főmetszetek közös gyúponttal bírnak: v. ö. a 230. §-ot.

223. §. *Elliptikus coordináták a síkban.* I. *Confocális ellipsisek és hyperbolák.*

Legyenek x, y valamely sík folyó derékszögű coordinátái s legyen e síkban az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a>b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ellipsis, melynek vonalas középpontkívüliségének négyzete: $a^2-b^2=e^2$.

Ezen ellipsissel közös középpontú és közös gyúpontú *(homofocális* vagy *confocális)* másodrendű görbék egyenlet-typusa:

$$\frac{x^2}{a^2-q^2}+\frac{y^2}{b^2-q^2}-1=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

mely görbék középpontja úgy mint az (1)-nél a coordináták kezdete és vonalas excentricitása $\sqrt{a^2-q^2-(b^2-q^2)}=e$, szintén ugyanaz mint az (1)-é.

A (2) *reális ellipsist* képvisel, ha $q^2<b^2$; *reális hyperbolát*, ha $a^2>q^2>b^2$; végre *imaginárius ellipsist*, ha $q^2>a^2$.

a. *Elliptikus coordináták a síkban*, 95. ábra (köv. l.).

Az x, y a sík tetszőleges pontja coordinataiként advák lévén, a (2) a q^2-ra nézve másodfokú egyenlet, mely miként azonnal kimutatjuk, két reális gyökkel bír.

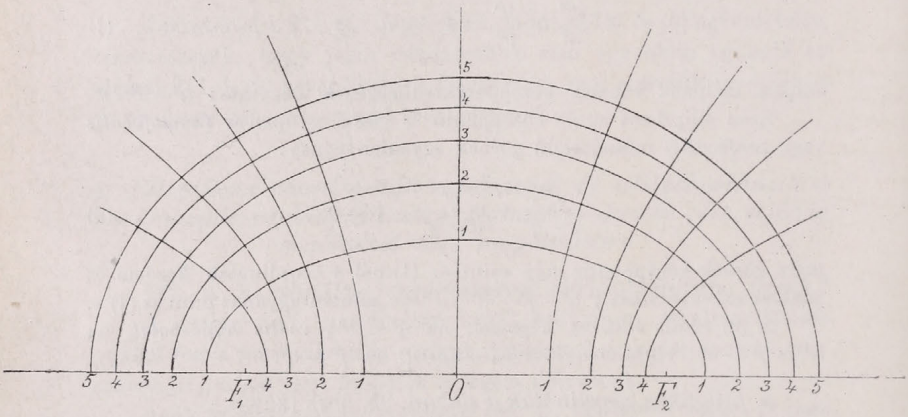
Ugyanis: *α*) ha $-\infty>q^2<b^2$, akkor e $-\infty$-től $+b^2$ terjedő közben szemlátomást van a (2) bal oldalának jelváltozata, e szerint mindenesetre van egy oly q_2^2 érték, mely a (2)-őt kielégíti, melynél az x^2- és y^2-es tagok positivek, s melynél e szerint a (2) *ellipsist* jelent; *β*) ha $b^2<q^2<a^2$, akkor ezen b^2-től a^2-ig terjedő közben mindenesetre van a (2) bal oldalának jelváltozata és így e közben van egy oly q_1 érték, mely a (2)-őt kielégíti, s melynél az x^2-es tag positiv, az y^2-es ellenben negativ, a (2) ekkor *hyberbolát* jelent; végre $a^2<q^2<+\infty$ közben a (2) bal oldalának valamenynyi tagja negativ, e közben nincs jelváltozat s így nincs gyök.

Jelölésünk szerint:

$$a>b; \qquad q_1>q_2; \qquad a^2>q_1^2>b^2; \qquad b^2>q_2^2>-\infty; \quad . \quad (3a)$$

$$\left.\begin{aligned} f_1&=\frac{x^2}{a^2-q_1^2}+\frac{y^2}{b^2-q_1^2}-1=0;\\ f_2&=\frac{x^2}{a^2-q_2^2}+\frac{y^2}{b^2-q_2^2}-1=0; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

hol f_1 az (1) ellipsissel *confocális hyperbolát*, f_2 az (1)-el *confocális ellipsist* jelent, melyek jellemző q_1^2 és q_2^2 parameterei az x és y helymeghatározók segélyével mint a (2) gyökértékei adódnak. E q_1^2 és q_2^2 parameterek viszont az x és y coordinátákat határozzák meg, és pedig analytikailag a (3) két egyenlete segélyével; geometriailag, a menynyiben a (3) görbék, melyek az (xy) ponton haladnak keresztül, ott egyszersmind egymást metszik és így az (xy) pont a q_1 és q_2 jellemzővel biró e két görbe metszőpontja. Ezen pont helyzete a síkban e szerint, eltekintve az a és b állandóktól, csak a q_1- és q_2-től függ, melyek minden (xy) sik-



95. ábra.

beli pontra nézve meghatározott értékűek; ezeket a q_1 és q_2 helymeghatározókat e szerint jogosan nevezik az (xy) pont *síkbeli elliptikus coordinátái*nak.*

Jegyzet: A (3) felületek egymást *négy* különböző coordináta-quadransban fekvő pontban metszik; de a metszőpont helyének ebből származó bizonytalansága eltünik, ha csak egy negyedre szorítkozunk. Így pl. a *positiv* negyedben az x és az y változhatik 0-tól $+\infty$-ig; ellenben (3*a*) szerint a q_1^2 csak a^2-tól b^2-ig, és q_2^2 csak b^2-től $-\infty$-ig, 95. ábra.**

Változóknak tekintve az említett közökben a q_1-et és q_2-őt, észreveszszük, hogy az f_1 hyperbola-sereg mindegyik görbéjének négy ága a két gyúpont közötti tengelyrésztől a végtelenbe halad; ellenben az f_2 ellipsisek közül azok, melyekre nézve a q_2^2 positiv, azaz $b^2 > q_2^2 > 0$, az (1) alatti (a, b) ellipsisen *belül*-, azok, melyekre nézve $q_2^2 < 0$, ezen ellipsisen *kívül* fekszenek és $q_2^2 = -\infty$ esetben végtelen sugarú körökbe mennek át.

---

* Más síkbeli elliptikus coordinátákat l. a 226. §-ban.

** Az ábra úgy van szerkesztve, hogy benne az 1, 2, 3, 4 hyperbolákhoz tartozó q_1^2 értékek és az 1, 2, 3, 4, 5 ellipsisekhez tartozó q_2^2 értékek [(3) rendszer] *fogyó* arithmetikai sorokat képeznek.

b. *A metszés merőleges volta.*

A görbék normálisainak iránycosinusai a (3)-ból nyerhetők a

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} : \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2}$$

séma szerint [Math. Repertórium 79. §. (8a) 97. l.]; ezért az

$$\frac{1}{4}\left\{\frac{\partial f_1}{\partial x}\,\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\,\frac{\partial f_2}{\partial y}\right\} = \frac{x^2}{(a^2-q_1^2)\,(a^2-q_2^2)} + \frac{y^2}{(b^2-q_1^2)\,(b^2-q_2^2)} \quad . \quad (4)$$

összeg mindenesetre arányos az egymást az (xy) pontban metsző (3) görbék normálisai közötti szög cosinusával.

Másrészt képezve (3)-ból az f_2-f_1 különbséget: észreveszszük, hogy a (4) jobboldala $(f_2-f_1) : (q_2^2-q_1^2)$-el egyenlő; ez pedig [(3) szerint $f_1=0$, $f_2=0$ és (3a) szerint $q_1^2 > q_2^2$ lévén] mindig zérus. Ezért a (4) is zérus, azaz a két görbe normálisa egymásra merőleges lévén, a (3) *confocális görbéi egymást orthogonálisan metszik.*

c. *A derékszögű coordináták, a távolság és az ívelem elliptikus síkcoordinátákban.*

Közös nevezőre hozva a (3) két egyenletét, ezek írhatók:

$$x^2\,(b^2-q_1^2)+y^2\,(a^2-q_1^2)=(a^2-q_1^2)\,(b^2-q_1^2);$$
$$x^2\,(b^2-q_2^2)+y^2\,(a^2-q_2^2)=(a^2-q_2^2)\,(b^2-q_2^2);$$

melyekből közönséges kiküszöböléssel, csekély számítás után:

$$x^2 = \frac{(a^2-q_1^2)\,(a^2-q_2^2)}{a^2-b^2}\,; \qquad y^2 = \frac{(b^2-q_1^2)\,(b^2-q_2^2)}{b^2-a^2} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Ezekből

$$r^2=x^2+y^2=\{a^4-a^2\,(q_1^2+q_2^2)+q_1^2\,q_2^2-b^4+b^2\,(q_1^2+q_2^2)-q_1^2\,q_2^2\} : (a^2-b^2);$$
$$r^2=a^2+b^2-(q_1^2+q_2^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Az (5) értelmében az $x=0$ és $y=0$ kezdetnek megfelel a $q_2^2=b^2$ és $q_1^2=a^2$ két érték; az első az X-tengelyben fekvő egészen lapos ellipsis; a második az Y-tengelyben fekvő egészen egyenes hyperbolának felel meg, 95. ábra; metszésük a kezdet.

[Ha csak $q_1^2=a^2$, ez az Y tengelyt, ha csak $q_1^2=b^2$, ez a középső $2\sqrt{a^2-b^2}$ darab kivételével az X tengelyt jelenti; ha $q_2^2=b^2$, ez az X-tengelynek említett középső részét, ha $q_2^2=0$ ez az (ab) ellipsist jelenti; ha q_2^2 negativ: ez az (ab)-t körülzáró confocális ellipsist jelent, mely $q_2^2=-\infty$ esetben végtelen sugarú körbe megyen át.]

Továbbá, ha a közös gyúpontokból (xy)-hoz vont vezérsugarak (bipolárcoordináták) r_1 és r_2, ezek a (3) ellipsise és hyperbolája nagytengelyeiből:

$$r_2-r_1=2\sqrt{a^2-q_1^2}\,; \qquad r_2+r_1=2\sqrt{a^2-q_2^2}\,;$$
$$r_1=\sqrt{a^2-q_2^2}-\sqrt{a^2-q_1^2}\,; \qquad r_2=\sqrt{a^2-q_2^2}+\sqrt{a^2-q_1^2}\,. \quad . \quad . \quad (7)$$

Végre, az ívelemet az (5) differentiálásából nyerjük:

$$x\,dx=-\frac{a^2-q_2^2}{a^2-b^2}\,q_1\,dq_1-\frac{a^2-q_1^2}{a^2-b^2}\,q_2\,dq_2\,;$$
$$y\,dy=+\frac{b^2-q_2^2}{a^2-b^2}\,q_1\,dq_1+\frac{b^2-q_1^2}{a^2-b^2}\,q_2\,dq_2\,,$$

azaz, az (5) szerint x-el, illetve y-nal osztva:

$$\left.\begin{aligned} dx&=\frac{-1}{\sqrt{a^2-b^2}}\left\{\sqrt{\frac{a^2-q_2^2}{a^2-q_1^2}}\,q_1\,dq_1+\sqrt{\frac{a^2-q_1^2}{a^2-q_2^2}}\,q_2\,dq_2\right\};\\ dy&=\frac{-1}{\sqrt{b^2-a^2}}\left\{\sqrt{\frac{b^2-q_2^2}{b^2-q_1^2}}\,q_1\,dq_1+\sqrt{\frac{b^2-q_1^2}{b^2-q_2^2}}\,q_2\,dq_2\right\};\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (8)$$

mely kifejezések mindegyike a (3a) értelmében reális.

Ezek négyzet-összege képzésénél a kettős szorozmányok összege zérus és

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2=$$
$$=\frac{1}{a^2-b^2}\left\{\left(\frac{a^2-q_2^2}{a^2-q_1^2}-\frac{b^2-q_2^2}{b^2-q_1^2}\right)q_1^2dq_1^2+\left(\frac{a^2-q_1^2}{a^2-q_2^2}-\frac{b^2-q_1^2}{b^2-q_2^2}\right)q_2^2dq_2^2\right\};$$

avagy, egyszerű rövidítések végrehajtásával:

$$(ds)^2=\frac{(q_2^2-q_1^2)\;q_1^2dq_1^2}{(a^2-q_1^2)\;(b^2-q_1^2)}+\frac{(q_1^2-q_2^2)\;q_2^2dq_2^2}{(a^2-q_2^2)\;(b^2-q_2^2)}\,; \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

végre, írva:

$$L_1^2=q_1^2\frac{q_2^2-q_1^2}{(a^2-q_1^2)\;(b^2-q_1^2)}\,; \qquad L_2^2=q_2^2\frac{q_1^2-q_2^2}{(a^2-q_2^2)\;(b^2-q_2^2)}\,; \quad . \quad . \quad (9a)$$

$$(ds)^2=L_1^2\,(dq_1)^2+L_2^2\,(dq_2)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

224. §. *Sík elliptikus coordináták alkalmazása szilárd két vonzó centrum körüli szabad sikbeli mozgásra* (Euler *problémája*).

1. Két test, mely szilárd helyzetű volna s mely egy harmadik, szabad testre a Newton-féle törvény szerint gyakorolna vonzást: a természetben nem fordul ugyan elő, mert a vonzás mindenütt kölcsönös és az égi testek mind szabadok, úgy hogy a kettős csillagok bolygóinak mozgása csak bizonyos közlitéssel felel meg ezen esetnek. Mindazonáltal e probléma csillagászati szempontból és módszertani tekintetben igen fontos.

Ugyanis a jelzett esetben a szabad pont mozgásának differentiálegyenletei derékszögű coordinátákban általában véve azt a nehéz-

séget mutatják, hogy bennük az x és y változók egymástól könnyen el nem választhatók [v. ö. pl. a Kinematika 128. §-a 1. pontját, hol általában véve csak egyszeri integrátió lehetséges]; de elliptikus coordináták segélyével ez az elválasztás könnyen lehetséges s a probléma quadraturára vezethető viszsza.

L. Euler e problémát először azon esetre nézve fejtette meg, mikor a mozgó test a két szilárd centrum körül ellipsist ír le [v. ö. Kinematika 129. §. 46., 47. és 48. feladatait, 250. lap és a Dynamika 234. §. 17. feladatát; az erre vonatkozó általánosabb feladatot l. Euler Mechanikája (német fordítása) I. kötete 760. §-ában, 267. l. és 452/53. ll.]; azután általánosabban, mikor a pont mozgása *sík* [Mém. d. l'Ac. d. Berlin 1760. és Nov. Comm. Petrop. X. 1766], végre általánosan, mikor a mozgás térbeli [Nov. Comm. Petrop. XI. 1767].

Lagrange [Solution de différentes problèmes de mécanique, Miscellanea Taurinensia II. k. 1760/61 és Oeuvres, I. k. 366 s í. t. 1868] ugyanily, de tetszőleges számú vonzó szilárd centrumok körüli mozgás egyenleteivel foglalkozott, de coordináta-változóit nem bírta egymástól elválasztani [i. h. 369. l.]; később [i. h. Misc. T. IV. k. 1766/69 és Oeuvres II. k. 67—121. ll.] e problémát a változók elválasztásával általánosan sikerült megoldania, illetve új változók behozatala segélyével elliptikus integrálokra hozni, i. h. 72.; e helyen ugyancsak Lagrange találta [i. h. 105. l.], hogy a Newton-féle két centrális erőhöz még egy harmadikat, a két centrum felező pontja felé tartó, a távolsággal arányos centrális erőt lehet adni, melylyel a megfejtés még mindig lehetséges.

Jacobi [Dynamik, 221. l.] e problémát elliptikus coordináták és Hamilton eljárása segélyével fejti meg; végre Königsberger: «De motu puncti versus duo fixa centri attracti» című tudori értekezésében 1860. az egyenletek általános integrálját thetafüggvényekkel állította elő.

A további irodalomra nézve v. ö. Perlewitz értekezését, Schlömilch's Zeitschrift f. Math. u. Phys. XVIII. köt. 58—92. ll.

2. Legyen A_1 és A_2 a két centrum helye, $\frac{m\mu_1}{r_1^2}$ és $\frac{m\mu_2}{r_2^2}$ az általuk az m-re kifejtett erők; az m kezdő sebessége feküdjék az $\overline{A_1A_2}=2e$ egyenesen átmenő valamely XY síkban; akkor az m-re ható erők is ugyane síkban feküdvén az m sebesség-változása is e síkban történik és az m e síkban végzi szabad mozgását.

A characteristikus egyenletet megszerkesztendő, ez derékszögű coordinátákban [80. §. (8) és (9).]:

$$2m\mathrm{T} = \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\right)^2 = 2m\,(H+V)\,; \quad \ldots\ldots \quad (0)$$

$$V = \frac{m\mu_1}{r_1} + \frac{m\mu_2}{r_2} = \frac{m\mu_1}{\sqrt{(x-e)^2+y^2}} + \frac{m\mu_2}{\sqrt{(x+e)^2+y^2}},$$

s így (0)-ban x és y egymástól közvetetlenül el nem választható.

Elliptikus coordinátákban, a 223. §. (10) és (9*a*) egyenletei alapján a $q_1'=dq_1:dt$ s í. t. jelzéssel élve, az eleven erő:

$$T=\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}m\{L_1^2q_1'^2+L_2^2q_2'^2\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

melyből a 95. §. (8) mintájára a Q_1 és Q_2 általános erők képezhetők, ezt az olvasónak gyakorlatképen ajánljuk.

Az erőfüggvény, a 223. §. (7) egyenlete tekintetbe vételével:

$$V=\frac{m\mu_1}{r_1}+\frac{m\mu_2}{r_2}=\frac{m}{r_1r_2}(\mu_1r_2+\mu_2r_1)=\frac{m}{q_1^2-q_2^2}(\mu_1r_2+\mu_2r_1) \quad . \quad (2)$$

Továbbá a 104. §. (7) egyenletei és a 100. §. (2) rendszere szerint a nyomatékok az (1)-ből a jellemző függvény segélyével

$$\frac{\partial A}{\partial q_1}=p_1=\frac{\partial T}{\partial q_1'}=mL_1^2q_1'; \qquad \frac{\partial A}{\partial q_2}=p_2=\frac{\partial T}{\partial q_2'}=mL_2^2q_2';$$

kifejezve ezekből q_1'-t és q_2'-t, az (1) és (2) segélyével $2T=2(H+V)$ characteristikus egyenlet [104. §. (6)]:

$$\frac{1}{m}\left\{\frac{1}{L_1^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_1}\right)^2+\frac{1}{L_2^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_2}\right)^2\right\}-2H-\frac{2m}{q_1^2-q_2^2}(\mu_1r_2+\mu_2r_1)=0 \quad (3_0)$$

Tekintettel az L_1^2 és L_2^2 [223. §. (9*a*)] értékeire, $m(q_1^2-q_2^2)$-el szorozva, végre az r_1 és r_2 értékeit [223. §. (7)] felhasználva, némi rendezés után ezen egyenlet:

$$-\frac{(a^2-q_1^2)(b^2-q_1^2)}{q_1^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_1}\right)^2-2m^2(\mu_1-\mu_2)\sqrt{a^2-q_1^2}-2mHq_1^2+$$
$$+\frac{(a^2-q_2^2)(b^2-q_2^2)}{q_2^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_2}\right)^2-2m^2(\mu_1+\mu_2)\sqrt{a^2-q_2^2}+2mHq_2^2=0 \quad (3)$$

Ezen egyenlet integrálja felkeresésére a 104. §. (19) eljárása szerint legyen $A=-A_1+A_2^*$; írjunk rövidség kedveért

$$\left.\begin{aligned}-c_0-m^2(\mu_1-\mu_2)\sqrt{a^2-q_1^2}-mHq_1^2&=G_1;\\ -c_0+m^2(\mu_1+\mu_2)\sqrt{a^2-q_2^2}-mHq_2^2&=G_2;\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

s így az A_1 és A_2 megfelelnek a *közönséges* (nem partiális):

$$\frac{(a^2-q_1^2)(b^2-q_1^2)}{q_1^2}\left(\frac{dA_1}{dq_1}\right)^2=2G_1; \qquad \frac{(a^2-q_2^2)(b^2-q_2^2)}{q_2^2}\left(\frac{dA_2}{dq_2}\right)=2G_2 \quad . \quad (3a)$$

differentiálegyenleteknek, melyek különbsége totális quotiensekkel adja a (3)-at; bennük a 223. §. (3*a*) szerint G_1 *negativ*, G_2 *positiv*; ezekből

---

* Ha A_1 és A_2 a (3*a*) egyenletek integráljainak absolut értéke: az A mindig írható $A=\pm A_1\pm A_2$, hol mindegyike a négy előjelnek alkalmazható az (5)-ben előforduló gyökök $\pm$ előjelénél fogva.

A (3)-at az (5) bármily előjel-combinatiója elégíti ki; a döntést a mindenkori probléma speciális feltételei adják meg.

$$\left.\begin{aligned} A=-A_1+A_2=&-\int\frac{\sqrt{2G_1}}{\sqrt{(a^2-q_1^2)\ (b^2-q_1^2)}}q_1dq_1+\\ &+\int\frac{\sqrt{2G_2}}{\sqrt{(a^2-q_2^2)\ (b^2-q_2^2)}}q_2dq_2\,; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

az A-ban a c_0 integrátió-állandó és még egy addendus ily állandó lép fel; e szerint e kifejezés a teljes integrál typusával bír [104. §. (16) és 3. pontjának *c)* szakasza] és két quadratura összegével egyenlő.

A (4)- és (5)-ből a 104. §. (17) mintájára a pálya és az idő egyenlete:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial c_0}=&+\int\frac{q_1dq_1}{\sqrt{2G_1\,(a^2-q_1^2)\ (b^2-q_1^2)}}-\\ &-\int\frac{q_2dq_2}{\sqrt{2G_2\,(a^2-q_2^2)\ (b^2-q_2^2)}}=\gamma\,;\\ \frac{\partial A}{\partial H}=&+\int\frac{mq_1^2q_1dq_1}{\sqrt{2G_1\,(a^2-q_1^2)\ (b^2-q_1^2)}}-\\ &-\int\frac{mq_2^2q_2dq_2}{\sqrt{2G_2\,(a^2-q_2^2)\ (b^2-q_2^2)}}=t+\tau. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Mind ezek az integrálok a legnagyobb könnyűséggel redukálhatók elliptikusokra az $a^2-q_1^2=u_1^2$ és $a^2-q_2^2=u_2^2$ helyettezések által, hol u_1 és u_2 az egymást metsző hyperbolák és ellipsisek fél nagy tengelyei és $q_1dq_1=-u_1du_1$; $q_2dq_2=-u_2du_2$.

Ezáltal (4)-ből a gyökjelek eltünnek és a G-k az u-k négyzetes függvényei s mivel (5)-ben általában $\sqrt{G}=G:\sqrt{G}$ és

$$b^2-q^2=u^2-a^2+b^2=u^2-e^2$$

írható, e a vonalas excentricitás lévén:

$$A=+\int\frac{G_1\sqrt{2}\,du_1}{\sqrt{G_1(u_1^2-e^2)}}-\int\frac{G_2\sqrt{2}\,du_2}{\sqrt{G_2(u_2^2-e^2)}}\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5a)$$

hol a nevezők az u-k quadrinomjai s így ezen integrálok elliptikusok [Math. Rep. 125., 126. §§. 160. l.]; ugyanez áll a (6) kifejezéseire is, melyek nevezői az (5*a*) nevezőinek $\sqrt{2}$-szeresei. A tényleges reductiót az olvasónak ajánljuk.

Jegyzet. Ha *a két centrális erő megszűnik:* ekkor e szabad pálya csak *egyenes* lehet, melynek egyenlete, P alatt merőleges állandó távolságot értve $P=Ax+By$, alakú avagy a 223. §. (5) egyenlete szerint:

$$\left.\begin{aligned} Pe&=A\sqrt{(a^2-q_1^2)\ (a^2-q_2^2)}+B\sqrt{(q_1^2-b^2)\ (b^2-q_2^2)}\,;\\ Pe&=A\,u_1u_2+B\sqrt{(e^2-u_1^2)\ (u_2^2-e^2)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Másrészt (3)-ba téve $\mu_1=\mu_2=0$-t, a (6) első egyenletéből

$$\int\frac{du_1}{\sqrt{[mH\,(u_1^2-a^2)-c_0]\ (u_1^2-e^2)}}=\gamma\sqrt{2}+\int\frac{du_2}{\sqrt{[mH(u_2^2-a^2)-c_0]\,(u_2^2-e^2)}} \quad (8)$$

egy már Eulertől talált nevezetes eredmény, melyben a (7) a (8)-nak egy algebrai integrálját fejezi ki; ez az utóbbi e szerint mindenesetre pseudo-elliptikus integrál.

E probléma további részletezését l. a 250. §. 167. feladatában.

225. §. *Folytatás. Vonzás két centrum felé. A pálya nem sík.*

Ha a kezdősebesség nem esik az m és az O_1 s O_2 centrumokon átmenő síkban, az m térbeli görbét ír le, melyet Jacobi-val (Dynamik 223. l.) úgy keletkezettnek tekintjük, hogy m az O_1-, O_2- s m-en átmenő síkban mozog, e sík pedig az O_1O_2 egyenes körül forog. A mozgás e két része egymástól elválasztható és kimutatható, hogy ha e nevezett síkban a mozgás ismeretes, e sík forgása a területek elve alapján meghatározható, mely elv a forgás síkjára érvényes. De a végleges integrátio nehézséggel jár, miért is előnyösebb a problémát szintén a Hamilton-féle partiális differentiálegyenletre visszavezetni.*

Legyenek mint előbb is, O_1O_2 az X-tengely s az O_1O_2 felező pontja a kezdet; az m derékszögű coordinátái x, y, z s így a characteristikus egyenlet [80. §. (9)]

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2=2m(H+V) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

* Ugyanis a Kinematika 87. ábrája 241. l. szemmel tartásával, [csak avval a különbséggel, hogy a 223. §. (7) egyenletei szerint az idézett ábrában O_1 és O_2 helyei itt felcserélendők], 128. §-a (1α) rendszere értelmében az m mozgás-egyenletei itt (az O_1O_2 távolság $=2e$ lévén):

$$x''=-\mu_1\frac{x-e}{r_1^3}-\mu_2\frac{x+e}{r_2^3};$$

$$y''=-\frac{\mu_1 y}{r_1^3}-\frac{\mu_2 y}{r_2^3}; \qquad z''=-\frac{\mu_1 z}{r_1^3}-\frac{\mu_2 z}{r_2^3};$$

mely utóbbi két egyenletből

$$y''z-z''y=0; \qquad z'y-zy'=c'=\text{állandó};$$

vagy, $y=\varrho\cos\eta$-, $z=\varrho\sin\eta$-t írva

$$\varrho^2\eta'=c' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

hol η az OX körül forgó $(x\varrho)$ sík és az álló XY sík közötti szög.

E szerint, ha (ϱx) síkban az m mozgása ismeretes, akkor ϱ mint az idő ismert függvénye tekintendő és (α)-ból

$$\eta=c'\int\frac{dt}{\varrho^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Jacobi, Dynamik 223—229 és 229—231.

Ezt az egyenletet az előbbi értelemben transformálandó legyenek x, ϱ, η az m henger-coordinátái, úgy hogy x ugyanaz a coordináta, mint (1)-ben, míg ϱ az m távolsága az X tengelytől, és η a szilárd XY-sík és a forgó XP [azaz $(x\varrho)$] sík közötti szög; ekkor rendre:

$$x=x\,;\quad y=\varrho\cos\eta\,;\quad z=\varrho\sin\eta\,;\quad \varrho=\sqrt{y^2+z^2}\,;\quad \eta=\operatorname{arc\,tg}(z:y).$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial y}=\frac{y}{\varrho}\,;\qquad \frac{\partial\varrho}{\partial z}=\frac{z}{\varrho}\,;$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y}=-\frac{z}{y^2+z^2}=-\frac{z}{\varrho^2}\,;\qquad \frac{\partial\eta}{\partial z}=+\frac{y}{y^2+z^2}=+\frac{y}{\varrho^2}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x}=\frac{\partial A}{\partial x}\,;$$

$$\frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial A}{\partial\varrho}\cdot\frac{y}{\varrho}-\frac{\partial A}{\partial\eta}\cdot\frac{z}{\varrho^2}\,;\qquad \frac{\partial A}{\partial z}=\frac{\partial A}{\partial\varrho}\cdot\frac{z}{\varrho}+\frac{\partial A}{\partial\eta}\cdot\frac{y}{\varrho^2}\,,$$

melyek segélyével az (1)-ből némi rövidítés után:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial\varrho}\right)^2+\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial A}{\partial\eta}\right)^2=2m(H+V)\,*\quad\ldots\quad(2)$$

Ámde a V csak az r_1 és r_2-nek, avagy mivel $r_1^2=(x-e)^2+\varrho^2$; $r_2^2=(x+e)^2+\varrho^2$, csak az x- és ϱ-nak a függvénye s így η-tól nem függhet; ezért a (2) bal oldala is független az η-tól és a 104. §. (19) megfontolása, valamint a 218. §. példája 2. pontja értelmében írhatjuk

$$A(x,\ \varrho,\ \eta)=A'(x,\ \varrho)+mc'\eta,\quad\ldots\quad(3)$$

hol A' csak x és ϱ függvénye és mc' állandó s így a (2)-ből:

* Ugyanez az egyenlet közvetetlenül adódik, ha x, ϱ, η segélyével képezzük a ds ívelemet és x- és ϱ-t a 223. §-ban q_1- és q_2-vel kifejezett x és y-nal teszszük egyenlőnek [i. h. (5), (9a), (10)]:

$$(ds)^2=(dx)^2+(d\varrho)^2+(\varrho d\eta)^2\,;\quad\ldots\quad(a)$$

$$T=\tfrac{1}{2}m\{x'^2+\varrho'^2+(\varrho\eta')^2\}=\tfrac{1}{2}m\{L_1^2q_1'^2+L_2q_1'^2+\varrho^2\eta'^2\}.\quad\ldots\quad(b)$$

Ebből p_1 és p_2 a 224. §. (3_0) mintájára és

$$\partial A:\partial\eta=p_\eta=\partial T:\partial\eta'=m\varrho^2\eta'\quad\ldots\quad(c)$$

alakban adódik és igy a $2T=2(H+V)$ egyenlet itt

$$\frac{1}{m}\left\{\frac{1}{L_1^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_1}\right)^2+\frac{1}{L_2^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_2}\right)^2+\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial A}{\partial\eta}\right)^2\right\}=2H+2m\frac{\mu_1r_2+\mu_2r_1}{q_1^2-q_2^2}\,,$$

mely a szövegben említett módon tárgyalható tovább. A (c)-nek és a szöveg $(4a)$ egyenletének összehasonlítása adja: $\varrho^2\eta'=c'$ azaz, a c' állandó itt is az m pályájának az O_1O_2 egyenesre merőleges síkra való vetületének a területi sebessége, mint a megelőző lábjegyzék (α) egyenletében.

$$\frac{\partial A}{\partial x}=\frac{\partial A'}{\partial x};\qquad \frac{\partial A}{\partial \varrho}=\frac{\partial A'}{\partial \varrho};\qquad \frac{\partial A}{\partial \eta}=mc', \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

$$\left(\frac{\partial A'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial A'}{\partial \varrho}\right)^2=2m(H+V)-\frac{m^2c'^2}{\varrho^2}\ast, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

mely most a forgó síkban fekvő x és ϱ derékszögű coordinátákra vonatkozik. E síkban x és ϱ teljesen ugyanaz a két coordináta, mint a megelőző §. (0) egyenletében az x és y és így a (4) az idézett egyenlettől csak a jobboldali $-m^2c'^2\varrho^{-2}$ taggal különbözik, a mi az idézett §. (3) alatti transformált alakjára is áll. E szerint itt ϱ^2 helyébe a 223. §. (5) alatti y^2 értéket téve, írhatjuk:

$$\frac{m^2c'^2}{\varrho^2}=\frac{m^2c'^2(b^2-a^2)}{(b^2-q_1^2)(b^2-q_2^2)}=m^2c'^2\,\frac{b^2-a^2}{q_1^2-q_2^2}\left\{\frac{1}{b^2-q_1^2}-\frac{1}{b^2-q_2^2}\right\};$$

hozzácsatolva ennek $q_1^2-q_2^2$-szorosát az idézett §. (3) egyenlete jobb oldalához, nyerjük a jelen §. (4) egyenletét elliptikus coordinátákban:

$$\begin{aligned}-\frac{(a^2-q_1^2)(b^2-q_1^2)}{q_1^2}\left(\frac{\partial A'}{\partial q_1}\right)^2-2m^2(\mu_1-\mu_2)\sqrt{a^2-q_1^2}-\\ -m^2c'^2\frac{a^2-b^2}{b^2-q_1^2}-2mHq_1^2+\\ +\frac{(a^2-q_2^2)(b^2-q_2^2)}{q_2^2}\left(\frac{\partial A'}{\partial q_2}\right)^2-2m^2(\mu_1+\mu_2)\sqrt{a^2-q_2^2}+\\ +m^2c'^2\frac{a^2-b^2}{b^2-q_2^2}+2mHq_2^2=0 \quad . \quad . \quad (5)\end{aligned}$$

Írva a megelőző §. (4) sémája szerint:

$$\left.\begin{aligned}-c_0-m^2(\mu_1-\mu_2)\sqrt{a^2-q_1^2}-\tfrac{1}{2}m^2c'^2\frac{a^2-b^2}{b^2-q_1^2}-2mHq_1^2=G_1';\\ -c_0+m^2(\mu_1+\mu_2)\sqrt{a^2-q_2^2}-\tfrac{1}{2}m^2c'^2\frac{a^2-b^2}{b^2-q_2^2}-2mHq_2^2=G_2';\end{aligned}\right\} \quad . \quad (6)$$

nyerjük az idézett §. eljárása szerint:

$$\left.\begin{aligned}A'=-A_1'+A_2'=-\int\frac{\sqrt{2G_1'}}{\sqrt{(a^2-q_1^2)(b^2-q_1^2)}}q_1dq_1+\\ +\int\frac{\sqrt{2G_2'}}{\sqrt{(a^2-q_2^2)(b^2-q_2^2)}}q_2dq_2;\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

mely kifejezés a 124. §. (6) rendszere után alkalmazott $a^2-q_1^2=u_1^2$, $a^2-q_2^2=u_2^2$ helyettesítés segélyével szintén hasonló módon azonnal redukálható elliptikus integrálokra.

Ezek alapján (3)-ból és (7)-ből

---

* Jegyzetét lásd a megelőző lapon.

$$A(q_1, q_2, \eta) = -A_1'(q_1) + A_2'(q_2) + mc'\eta = A'(q_1, q_2) + mc'\eta, \quad . \quad (8)$$

avagy a 104. §. (16) alatti JACOBI-féle alakját használva:

$$A = A(q_1, q_2, \eta; c_0, mc', H),$$

mely a teljes integrál typusa; benne c_0, mc', H a G_1'- és G_2'-ben és az mc' még a (8) utolsó tagjában is lép fel. Belőle a 104. §. (17) mintájára és (8) segélyével

$$\frac{\partial A}{\partial c_0} = \gamma_0; \qquad \frac{\partial A}{\partial (mc')} = \gamma'; \qquad \frac{\partial A}{\partial H} = t + \tau;$$

$$\frac{\partial A'}{\partial c_0} = \gamma_0; \qquad \frac{\partial A'}{\partial (mc')} + \eta = \gamma'; \qquad \frac{\partial A'}{\partial H} = t + \tau; \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

hol γ_0, γ' és τ állandók és az A' jelelt quotiensei (7)-ből könnyen képezhetők. A (9) első két egyenlete az m pályája egyenletei: az első a forgó $(x\varrho)$ síkban való pályát (t. i. a q_1 és q_2 közötti összefüggést), a második az η forgásszöget adja meg a q_1 és q_2 elliptikus integráljai segélyével; a harmadik a q_1- s a q_2-nak a t-vel való explicit összefüggését állítja elő.

Az egész probléma e szerint tényleg quadraturákra van visszavezetve és ezért megfejtettnek tekinthető.

226. §. *Elliptikus (parabolikus) coordináták a síkban. II. Confocális ellentett irányú parabolák.*

Legyenek x és z valamely sík folyó coordinátái és benne

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2z}{p} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

egy parabola, melynek tengelye a $+Z$ tengely, csúcsa a coordináták kezdete és góczhúrjának fele (parametere) $a^2 : p$; e szerint gyúpontja $a^2 : 2p$ távolságban van a coordináták kezdetétől.

E parabolával közös gyúpontú az

$$\frac{x^2}{a^2 - q^2} - \frac{2zp - q^2}{p^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

parabola, melynek csúcsa $z = q^2 : 2p$ helyzetű, tengelye pedig a $+Z$-vel egyirányú, ha $q^2 < a^2$; ellenben ellentett irányú, ha $q^2 > a^2$; továbbá parametere $\pm \frac{a^2 - q^2}{p}$, a szerint a mint $q^2 \lesseqgtr a^2$, s így gyúpontja szintén $a^2 : 2p$ távolságban van a coordináták kezdetétől, 96. ábra, köv. l.

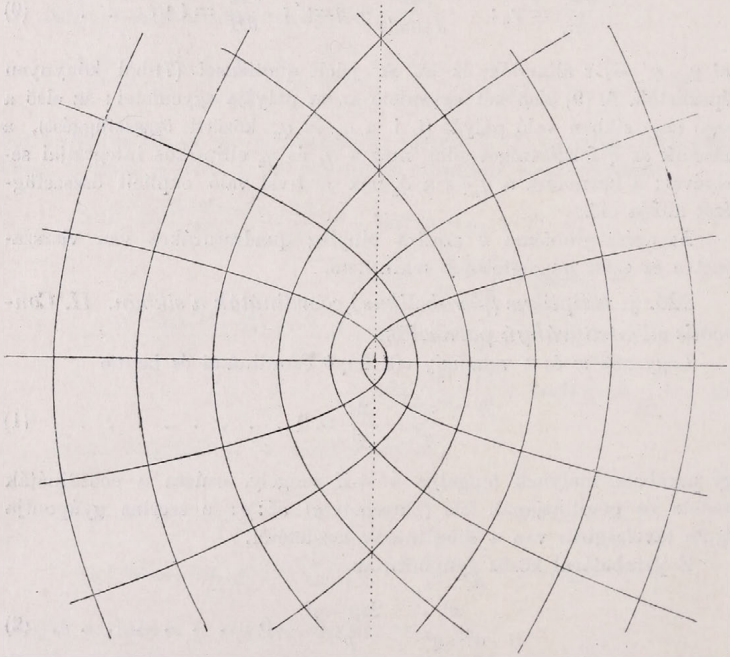
A (2)-nek q_1^2 és q_2^2 gyökei közül az egyik, pl. q_1^2 a $+\infty$ és a^2 közötti közben fekszik, mert a (2) bal oldala e közben jelváltozatot mutat; ekkor a (2) első tagja negativ és a második tag positiv, míg $q_1^2 - 2zp > 0$, azaz, mig $z < q_1^2 : 2p$; a másik gyök, a q_2^2 az a^2 és $-\infty$ közötti közben fekszik, mert a (2) bal oldala e közben is bír jelváltozattal; ekkor a (2) első tagja positiv és a második tag negativ, míg $2zp - q_2^2 > 0$, azaz, míg $z > q_2^2 : 2p$.

a. Elliptikus (parabolikus) coordináták.

E szerint az

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \frac{x^2}{a^2-q_1^2} - \frac{2zp-q_1^2}{p^2} = 0 \\ f_2 &= \frac{x^2}{a^2-q_2^2} - \frac{2zp-q_2^2}{p^2} = 0 \end{aligned}\right\};\ q_1^2 > a^2 > q_2^2. \quad (3)$$

egyenletek eleje az (1)-el közös gyúpontú és vele ellentett tengelyű, második ellenben ugyancsak az (1) közös gyúpontú, de vele egyirányú parabolát jelent, 96. ábra.*



96. ábra.

Az x és y a (3)-ből a q_1^2 és q_2^2 segélyével fejezhető ki; ezért q_1^2 és q_2^2 itt is az (x, y) pont *elliptikus* (vagy itt talán helyesebben *parabolikus*) *coordinátái*nak neveztetnek.

b. Az orthogonalitás.

A 223. §. *b.* pontja bekezdése értelmében az f_1 és az f_2 parabolaseregek metszőszöge cosinusával arányos szorzat-összeg itt is zérus:

---

* Az ábrában felmerülő, egyenlő parameterű parabolákhoz tartozó q^2 értékek a (3) értalmében a $q_1^2-a^2=c^2-q_2^2$, azaz $q_1^2+q_2^2=2a^2$ összefüggésnek felelnek meg.

$$\frac{1}{4}\left\{\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial f_2}{\partial z}\right\}=\frac{x^2}{(a^2-q_1^2)\ (a^2-q_2^2)}+\frac{1}{p^2}=\frac{f_1-f_2}{q_1^2-q_2^2}=0\,; \quad . \quad (4)$$

s így e trajectoriák orthogonalitása szintén be van bizonyítva.

c. Derékszögű coordináták; távolság és ivelem.

A (4) egyenlet középső részéből az x^2-t, evvel és a (3) bármelyike segélyével a $2pz$-t nyerjük:

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= -\frac{(a^2-q_1^2)\ (a^2-q_2^2)}{p^2}\,; \\ 2pz &= q_1^2+q_2^2-a^2\,; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$4p^2r^2=4p^2\,(x^2+z^2)=\{a^2+q_1^2+q_2^2\}^2-4\,\{a^4+q_1^2q_2^2\}\,; \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

mely utóbbi kifejezés már nem egyszerűsíthető.

Az (5) egyenleteit differentiálva s az elsőt x-el osztva:

$$\left.\begin{aligned} x\,dx &= q_1\frac{a^2-q_2^2}{p^2}\,dq_1+q_2\frac{a^2-q_1^2}{p^2}\,dq_2\,; \\ dx &= \frac{q_1}{p}\sqrt{\frac{a^2-q_2^2}{q_1^2-a^2}}\,dq_1-\frac{q_2}{p}\sqrt{\frac{q_1^2-a^2}{a^2-q_2^2}}\,dq\,; \\ dz &= \frac{q_1}{p}\,dq_1+\frac{q_2}{p}\,dq_2\,. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Képezve ebből $(ds)^2=(dx)^2+(dz)^2$-t, észreveszszük, hogy a kettős szorozmányok összege zérus; s ha rövidség kedveért:

$$\left.\begin{aligned} \frac{q_1^2}{p^2}\left\{1-\frac{a^2-q_2^2}{a^2-q_1^2}\right\} &= q_1^2\cdot\frac{q_2^2-q_1^2}{p^2\,(a^2-q_1^2)}=L_1^2\,; \\ \frac{q_2^2}{p^2}\left\{1-\frac{a^2-q_1^2}{a^2-q_2^2}\right\} &= q_2^2\cdot\frac{q_1^2-q_2^2}{p^2\,(a^2-q_2^2)}=L_2^2\,; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (8a)$$

$$(ds)^2=L_1^2\,(dq_1)^2+L_2^2\,(dq)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

227. §. *Mozgás-példák parabolikus coordinátákra. Az integrálhatóság esetei.*

Az m pontra ható erő erőfüggvénye legyen $V(q_1, q_2)$; a characteristikus egyenlet az m síkbeli mozgására nézve [223. §. (3_0)]:

$$\frac{1}{L_1^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_1}\right)^2+\frac{1}{L_2^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_2}\right)^2-2m\,(H+V)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Helyettesítve a megelőző §. $(8a)$-ból az L_1^2 és L_2^2 értékeit s szorozva $(q_1^2-q_2^2)$-el:

$$-\frac{p^2\,(a^2-q_1^2)}{q_1^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_1}\right)^2+\frac{p^2\,(a^2-q_2^2)}{q_2^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_2}\right)^2-2m\,(q_1^2-q_2^2)\ (H+V)=0 \quad . \quad (2)$$

Ez az egyenlet a 104. §. (19) eljárása szerint csak akkor megfejthető, ha

$$V(q_1^2-q_2^2)=\psi_1(q_1)-\psi_2(q_2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

azaz, ha a baloldali szorzat a q_1 s a q_2 tetszőleges függvényei összegével vagy különbségével állítható elő.

Irva ekkor rövidítés czéljából, a 224. §. (4) rendszerével egyezően:

$$-c_0-mHq_1^2-m\psi_1(q_1)=G_1; \qquad -c_0-mHq_2^2-m\psi_1(q_2)=G_2 \quad . \quad (4)$$

$$\frac{p^2(a^2-q_1^2)}{q_1^2}\left(\frac{dA_1}{dq_1}\right)^2=2G_1; \qquad \frac{p^2(a^2-q_2^2)}{q_2^2}\left(\frac{dA_2}{dq_2}\right)^2=2G_2 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

hol a megelőző §. (3) szerint $q_1^2>a^2>q_2^2$ lévén, G_1 *negativ*, G_2 *positiv*.

A 104. §. idézett eljárásával a (2) értelmében $A=A_2-A_1$:

$$A=A_2-A_1=\int\frac{q_2}{p}\sqrt{\frac{2G_2}{a^2-q_2^2}}\,dq_2-\int\frac{q_1}{p}\sqrt{\frac{2G_1}{a^2-q_1^2}}\,dq_1 \quad . \quad (6)$$

E quadraturák több esetben egyenesen végre is hajthatók; ugyanis [megelőző §. (5)]

1) ha

$$\left.\begin{array}{l} V(q_1^2-q_2^2)=\mu(q_1^4-q_2^4), \text{ azaz: } \psi_1(q_1)=\mu q_1^4; \quad \psi_2(q_2)=\mu q_2^4; \\ V=\mu(q_1^2+q_2^2)=\mu(2pz+a^2); \end{array}\right\} \ldots . (7_1)$$

ekkor az erőfüggvény változó része a z-vel arányos; ez a *szabadon mozgó nehéz pont esete;*

2) ha

$$\left.\begin{array}{l} V(q_1^2-q_2^2)=\mu\left(\dfrac{1}{a^2-q_1^2}-\dfrac{1}{a^2-q_2^2}\right); \quad \psi_1=\dfrac{\mu}{a^2-q_1^2}; \quad \psi_2=\dfrac{\mu}{a^2-q_2^2}; \\ V=\dfrac{\mu}{(a^2-q_1^2)\ (a^2-q_2^2)}=-\dfrac{\mu}{p^2x^2}, \end{array}\right\} . (7_2)$$

ekkor az erőfüggvény x^2-tel fordítva arányos; ez a *Z tengelytől való távolság harmadik hatványával fordítva arányos taszító erő hatása alatti mozgást jelent* [v. ö. Kinematika 111. §. 13. feladatát *, 194. lap], ennek pályája mindig másodrendű görbe.

A továbbira nézve v. ö. a 250. §. 167. és 168. feladatait.

228. §. *Elliptikus coordináták a térben. I. Confocális középponti másodrendű felületek.*

a. Egymást metsző confocális középponti másodrendű felületek parameterei mint coordináták.

Adva legyen az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0; \qquad a>b>c \quad . \quad . \quad (1)$$

---

* Az idézett 13. feladat 3 sorába a *positiv* szó teendő a negativ helyébe és $y''=+C^2:y^2$ irandó!

egyenletű ellipsoid, melynek főmetszetei az

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,; \qquad \frac{z^2}{c^2}+\frac{x^2}{a^2}=1\,; \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad . \quad . \quad (1a)$$

ellipsisek; ezek vonalas középpontkívüliségeinek négyzetei rendre:

$$b^2-c^2\,; \qquad a^2-c^2\,; \qquad a^2-b^2.$$

Ezen ellipsoiddal közös középpontú és közös gyúpontú (homofocális vagy confocális) másodrendű felületek egyenlet-typusa:

$$\frac{x^2}{a^2-q^2}+\frac{y^2}{b^2-q^2}+\frac{z^2}{c^2-q^2}-1=0\,; \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

mely felületek főmetszeteinek vonalas excentricitásai s így gyúpontjai is, miként tüstént látni, ugyanazok, mint az ellipsoidéi.

A (2) *reális ellipsoidot* képvisel, ha $q^2<c^2$, ellenben *egyhéjú hyperboloidot*, ha $b^2>q^2>c^2$; végre *kéthéjú hyperboloidot*, ha $a^2>q^2>b^2$; ha pedig $q^2>a^2$, akkor *imaginárius ellipsoidot*.

Ha (2)-ben az x, y, z mint a tér valamely pontjának coordinátái advák: a (2) a q^2-ra nézve *harmadfokú* egyenlet, melyről könnyű kimutatni, hogy három reális gyöke van; ugyanis α) ha $-\infty<q^2<c^2$, akkor e közben jelváltozat van és így mindig létezik egy q_3 érték, mely a (2)-őt kielégíti; β) ha $c<q^2<b^2$, akkor a z^2-os tag negativ, míg az x^2- és y^2-os tagok positivek s nagyobbak mint előbb; e közben szintén jelváltozat van és kell egy q_2 értéknek lennie, mely a (2)-őt kielégíti; γ) ha $b^2<q^2<a^2$, akkor ugyanoly oknál fogva e közben kell egy q_1 gyök értéknek lennie; végre az $a^2<q^2<+\infty$ közre nézve a (2) valamenynyi tagja negativ; e közben nem lehet gyök.

Jelölésünk értelmében

$$\left.\begin{array}{l} a>b>c\,; \qquad q_1>q_2>q_3\,; \\ a^2>q_1^2>b^2\,; \quad b^2>q_2^2>c^2\,; \quad c^2>q_3^2>-\infty\,; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (3a)$$

és miután a q_1^2, q_2^2, q_3^2 a (2)-őt kielégítik, ebből rendre:

$$\left.\begin{array}{l} F_1=\dfrac{x^2}{a^2-q_1^2}+\dfrac{y^2}{b^2-q_1^2}+\dfrac{z^2}{c^2-q_1^2}-1=0\,; \\ F_2=\dfrac{x^2}{a^2-q_2^2}+\dfrac{y^2}{b^2-q_2^2}+\dfrac{z^2}{c^2-q_2^2}-1=0\,; \\ F_3=\dfrac{x^2}{a^2-q_3^2}+\dfrac{y^2}{b^2-q_3^2}+\dfrac{z^2}{c^2-q_3^2}-1=0\,. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ezen egyenletek elseje az (1) ellipsoiddal confocális kéthéjú hyperboloidot, második confocális egyhéjú hyperboloidot, harmadika confocális ellipsoidot képvisel, melyeknek q_1, q_2, q_3 jellemző parameterei az x, y, z segélyével mint a (2) egyenlet gyökei adódnak. E parameterek az (xyz) pont térbeli *elliptikus coordinátái* s ma-

guk a (3) felületek, melyek mindegyike az (xyz) ponton megyen keresztül, egymást e pontban kölcsönösen metszik.*

b. Az orthogonalitás.

A (3) felületeknek egymásra való merőlegességük bizonyítására képezzük pl. a

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}\,\frac{\partial F_3}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\,\frac{\partial F_3}{\partial y}+\frac{\partial F_2}{\partial z}\,\frac{\partial F_3}{\partial z}$$

összeget, mely az F_2 és F_3 felületek normálisai közötti szög cosinusával arányos, s melynek negyedrésze a (3)-ból adódik:

$$\frac{x^2}{(a^2-q_2^2)\ (a^2-q_3^2)}+\frac{y^2}{(b^2-q_2^2)\ (b^2-q_3^2)}+\frac{z^2}{(c^2-q_2^2)\ (c^2-q_3^2)}\ ; \quad .(4a)$$

ez pedig nem más, mint a (3) második és harmadik egyenlete különbségének q_2-q_3-ad része, azaz $(F_2-F_3):(q_2-q_3)$; mely, mivel, $F_2=0$, $F_3=0$ és q_2-q_3 véges, csak zérus lehet. Ugyanez áll az F_3 és F_1 és az F_1 és F_2 normálisaira nézve. Evvel az egymásra való merőlegesség ki van mutatva.**

c. A derékszögű coordináták, és a távolság kifejezése.

Jacobi a (2)-őt a következő identitás alakjában írja:

$$\frac{x^2}{a^2-q^2}+\frac{y^2}{b^2-q^2}+\frac{z^2}{c^2-q^2}-1=\frac{(q^2-q_1^2)\ (q^2-q_2^2)\ (q^2-q_3^2)}{(a^2-q^2)\ (b^2-q^2)\ (c^2-q^2)}\ . \quad (4)$$

hol q_1, q_2, q_3 az

$$f(q)=(a^2-q^2)\ (b^2-q^2)\ (c^2-q^2)\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (5)$$

factorral szorzott (2) egyenletnek-, azaz a (4) baloldala közös nevezőre hozott számlálójának gyökei, szóval, ugyanazok a fent az a-pontban megállapított q_1, q_2, q_3 értékek, melyek a (2) egyenletet kielégítik.

Az (5)-be q_1-t, q_2-t, q_3-t téve, a (3a) jelölései szerint:

$$f(q_1)>0\ ; \qquad f(q_2)<0\ ; \qquad f(q_3)>0 \quad . \ . \ . \ . \quad (5a)$$

Szorozva (4) mindkét oldalát a^2-q^2-al és téve azután $q=a$, nyerjük az x^2-et, épen így az y^2-t és a z^2-t úgy, hogy Binet alakjai:

$$\left.\begin{aligned} x^2&=\frac{(a^2-q_1^2)\ (a^2-q_2^2)\ (a^2-q_3^2)}{(b^2-a^2)\ (c^2-a^2)}\ ;\\ y^2&=\frac{(b^2-q_1^2)\ (b^2-q_2^2)\ (b^2-q_3^2)}{(c^2-b^2)\ (a^2-b^2)}\ ;\\ z^2&=\frac{(c^2-q_1^2)\ (c^2-q_2^2)\ (c^2-q_3^2)}{(a^2-c^2)\ (b^2-c^2)}\ ; \end{aligned}\right\} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (6)$$

---

* Más térbeli elliptikus coordinátákat l. a 230. §-ban.

** Hogy e másodrendű felületek metszőgörbéi egyszersmind e felületek görbületi görbéi, ezt Binet (1813) mutatta ki először; Charles Dupin (Dévelopment de géometrie etc, Paris 1813) kiterjesztette e tételt valamenynyi, egymást merőlegesen metsző felületekre [v. ö. Kinematika 343, §. I. szakasza, 587—589. ll.]

A *távolság* négyzetét a (6) három egyenleteinek összege adja; szorozva őket a $(b^2-c^2)\ (c^2-a^2)\ (a^2-b^2)$ közös szorzóval s rövidség kedveért írva

$$q_1^2+q_2^2+q_3^2=G_1^2\,;\qquad q_2^2q_3^2+q_3^2q_1^2+q_1^2q_2^2=G_2^4\,;\qquad q_1^2q_2^2q_3^2=G_3^6\,,$$

nyerjük:

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2)\ (b^2-c^2)\ (c^2-a^2)\ (a^2-b^2)=&(a^6-a^4G_1^2+a^2G_2^4-G_3^6)\ (c^2-b^2)+\\&+(b^6-b^4G_1^2+b^2G_2^4-G_3^6)\ (a^2-c^2)+\\&+(c^6-c^4G_1^2+c^2G_2^4-G_3^6)\ (b^2-a^2).\end{aligned}$$

Másrészt egyszerű kiszámítással meggyőződhetünk, hogy folytatólagosan áll:

$$\begin{aligned}+A=+(b^2-c^2)\ (c^2-a^2)\ (a^2-b^2)=&-b^4c^2+c^4b^2-c^4a^2+a^4c^2-a^4b^2+b^4a^2\\&(c^2-b^2)+(a^2-c^2)+(b^2-a^2)=0\,;\\&a^2(c^2-b^2)+b^2(a^2-c^2)+c^2(b^2-a^2)=0\,;\\&a^4(c^2-b^2)+b^4(a^2-c^2)+c^4(b^2-a^2)=+A\,;\\+A\,(a^2+b^2+c^2)=&a^6(c^2-b^2)+b^6(a^2-c^2)+c^6(b^2-a^2)\,;\\+(x^2+y^2+z^2)\ A=&(a^2+b^2+c^2)\ A-(q_1^2+q_2^2+q_3^2)\,A\,;\end{aligned}$$

miáltal egyenletünk

$$r^2=(a^2+b^2+c^2)-(q_1^2+q_2^2+q_3^2)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (6a)$$

d. Az ívelem megszerkesztése. Az eleven erő.

Differentiáljuk a (6) logarithmusait, ezáltal rendre:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{x}&=\frac{q_1dq_1}{q_1^2-a^2}+\frac{q_2dq_2}{q_2^2-a^2}+\frac{q_3dq_3}{q_3^2-a^2}\,;\\ \frac{dy}{y}&=\frac{q_1dq_1}{q_1^2-b^2}+\frac{q_2dq_2}{q_2^2-b^2}+\frac{q_3dq_3}{q_3^2-b^2}\,;\\ \frac{dz}{z}&=\frac{q_1dq_1}{q_1^2-c^2}+\frac{q_2dq_2}{q_2^2-c^2}+\frac{q_3dq_3}{q_3^2-c^2}\,.\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (7)$$

Képezve ezekből a $(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$ négyzetösszeget s tekintetbe véve az orthogonalitást kifejező $(4a)=0$ egyenleteket, nyerjük

$$(ds^2)=(dx)^2+(dy)^2)+(dz)^2=L_1^2\,(dq_1)^2+L_2^2\,(dq_2)^2+L_3^2\,(dq_3)^2,\ .\ .\ (8)$$

hol rendre:

$$L_1^2=q_1^2\left\{\frac{x^2}{(q_1^2-a^2)^2}+\frac{y^2}{(q_1^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(q_1^2-c^2)^2}\right\}\ \text{s í. t.}\ .\ .\ .\ (9a)$$

Helyettesítve ide az x^2, y^2, z^2 számára a (6) értékeit, némi számítással [vagy az alább, d_a alatt körvonalozott eljárással] nyerjük, az (5) rövidítés felhasználásával:

$$\left.\begin{aligned} L_1^2 &= q_1^2 \frac{(q_1^2-q_2^2)\,(q_1^2-q_3^2)}{f(q_1)}; \\ L_2^2 &= q_2^2 \frac{(q_2^2-q_3^2)\,(q_2^2-q_1^2)}{f(q_2)}; \\ L_3^2 &= q_3^2 \frac{(q_3^2-q_1^2)\,(q_3^2-q_2^2)}{f(q_3)}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

d_a. A direct számítás hoszszadalmas voltát kikerülendő, képezzük JACOBI-val a (4)-nek q^2 szerinti differentiálquotiensét és írjunk azután benne $q=q_1$, miáltal bal oldala az L_1^2-nek ($9a$) alatti zárójeles kifejezésével lesz egyenlő míg jobb oldala két részből áll: az első, mely a $(q^2-q_1^2)$ tényező q^2 szerinti quotiensének, t. i. az egységnek a többi öt factorral való szorzatából áll, a második ezen utóbbi öt factor q^2 szerinti quotiensének a $(q^2-q_1^2)$ tényezővel való szorzatából áll. Ha most e két részbe q helyébe q_1-t írunk, akkor a második, a $(q^2-q_1^2)$-val szorzott rész elenyészik s így e tag számítása fölösleges, míg az első rész q_1^2-el való szorzata közvetetlenül szolgáltatja az L_1^2-nek (9)-ben írt kifejezését.

Ugyanígy nyerjük L_2^2-et és L_3^2-et.

Az *elevcn erö* e szerint:

$$\mathrm{T}=\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}m\,\{L_1^2q_1'^2+L_2^2q_2'^2+L_3^2q_3'^2\} \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

melyből a Q_1, Q_2, Q_3 általános erőcomponensek, továbbá a (3) alatti felületek s_1, s_2, s_3 metszővonalai menti S_1, S_2, S_3 erőösszetevők a 220. §. (11) és (12) kifejezései szerint adódnak.

Jegyzet. E §. (6) rendszere kifejezéseibe $q_3^2=c^2$-t téve, ezek a 223. §. (5) kifejezéseibe mennek át; ugyanaz áll a többi megfelelő egyenletekre nézve; de didactikai szempontból az idézett §. egyszerű eljárása nem fölösleges.

229. §. *Elliptikus felületen való kényszermozgás a távolsággal arányos centrális erő esetében. Geodätikus vonalak az ellipsoidon.*

Ha az m pont a megelőző §. (3) felületei valamelyikén surlódás nélkül tartozik mozogni, akkor ennek a feltétele az, hogy az illető felület parametere állandó maradjon; ez által az idézett §. (10) egyenletében a **T** két tagra redukálódik.

Legyen a mozgás a q_3=constans-, azaz az F_3 *ellipsoid felületen* való *kényszermozgás*, ekkor a 104. §. (7) egyenletei s a 100. §. (2) rendszere szerint a nyomatékok a megelőző §. idézett (10) egyenletéből

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial q_1}=p_1=\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_1'}=mL_1^2q_1';$$

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial q_2}=p_2=\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_2'}=mL_2^2q_2',$$

melyekkel a $q_1'^2$-et és $q_2'^2$-et kifejezve és az idézett (10)-be téve:

$$T = \frac{1}{2m}\left\{L_1^{-2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_1}\right)^2 + L_2^{-2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_2}\right)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

1. *A centrális erő a távolsággal egyenes arányos, surlódás nincs.* Az m-re ható független erő az ellipsoid centruma felé tartó s az r távolsággal arányos vonzás legyen. [A következő tárgyalás egyébként a centrális erő bármily törvényére terjeszthető ki].

E hatás erőfüggvénye tekintettel a megelőző §. (6a) egyenletére:

$$V = -\tfrac{1}{2}m\omega^2 r^2 = -\tfrac{1}{2}m\omega^2(a^2+b^2+c^2-q_1^2-q_2^2-q_3^2), \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

mert ennek r szerinti quotiense adja az $-m\omega^2 r$ vonzást a kezdet felé, a q_3 itt állandó lévén. Rövidség kedveért írva $a^2+b^2+c^2-q_3^2=l_3^2$, e jeljemző egyenlet [104. §. (18)]:

$$\frac{1}{L_1^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{L_2^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_2}\right)^2 = 2mH - m^2\omega^2(l_3^2-q_1^2-q_2^2) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

A 104. §. 3. pontja *d)* szakaszában érintett elválasztási eljárás alkalmazása czéljából szorozzuk meg az egyenletet, tekintettel a megelőző §. (9) értékeire, $q_1^2-q_2^2$ különbséggel, miáltal ez

$$\left.\begin{aligned}&\frac{f(q_1)}{q_1^2(q_1^2-q_3^2)}\cdot\left(\frac{\partial A}{\partial q_1}\right)^2 - \frac{f(q_2)}{q_2^2(q_2^2-q_3^2)}\left(\frac{\partial A}{\partial q_2}\right)^2 - \\ &- 2mH(q_1^2-q_2^2) - m^2\omega^2[q_1^4-q_2^4-l_3^2(q_1^2-q_2^2)] = 0.\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

Irva $A_1-A_2=A$, az említett eljárás szerint (3a)-ból

$$\frac{f(q_1)}{q_1^2(q_1^2-q_3^2)}\left(\frac{dA_1}{dq_1}\right)^2 - mq_1^2[2H - m\omega^2(l_3^2-q_1^2)] = c_0,$$
$$\frac{f(q_2)}{q_2^2(q_2^2-q_3^2)}\left(\frac{dA_2}{dq_2}\right)^2 - mq_2^2[2H - m\omega^2(l_3^2-q_2^2)] = c_0.$$

Egyszerűség kedvéért téve $q_3=0$, t. i., hogy az m az (abc) ellipsoidon maradjon [228. §. (3) és (1) utolsó egyenlete] és röviden írva:

$$\left.\begin{aligned}c_0 + mq_1^2[2H - m\omega^2(l_3^2-q_1^2)] &= \varphi(q_1);\\ c_0 + mq_2^2[2H - m\omega^2(l_3^2-q_2^2)] &= \varphi(q_2);\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3b)$$

$$A = A_1 \mp A_2 = \int\sqrt{\varphi(q_1):f(q_1)}\,q_1^2 dq_1 \mp \int\sqrt{\varphi(q_2):f(q_2)}\,q_2^2 dq_2 \quad (4)$$

$$\frac{\partial A}{\partial c_0} = \tfrac{1}{2}\int\frac{q_1^2 dq_1}{\sqrt{f(q_1)\,\varphi(q_1)}} \mp \tfrac{1}{2}\int\frac{q_2^2 dq_2}{\sqrt{f(q_2)\,\varphi(q_2)}} = \gamma; \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\frac{\partial A}{\partial H} = m\int\frac{q_1^4 dq_1}{\sqrt{f(q_1)\,\varphi(q_1)}} \mp m\int\frac{q_2^4 dq_2}{\sqrt{f(q_2)\,\varphi(q_2)}} = t+\tau; \quad . \quad (6)$$

az (5) a q_1 és q_2 közötti összefüggés (a pálya egyenlete), melynek további vizsgálata a geometria feladata; a (6) a coordináták és az idő közötti kapcsolat.

2. *A pontra független erő nem hat. Geodätikus görbék az ellipsoidon.*

a. Az (*abc*) ellipsoid felületen most magára hagyatott m mozgásegyenleteit a (2)-, (3*b*)-, (6)-ból nyerjük, bennük $\omega^2=0$-t téve; e szerint:

$$A_1=\int\sqrt{c_0+2mHq_1^2}\,\frac{q_1^2dq_1}{\sqrt{f(q_1)}}; \qquad A_2=\int\sqrt{c_0+2mHq_2^2}\,\frac{q_2^2dq_2}{\sqrt{f(q_2)}} \quad . \quad (7)$$

s így, itt (3*a*) szerint $A=A_1-A_2$ lévén, a pálya és az idő (5) és (6) egyenletei

$$\frac{\partial A}{\partial c_0}=\tfrac{1}{2}\int\frac{q_1^2dq_1}{\sqrt{[c_0+2mHq_1^2]\,f(q_1)}}-\tfrac{1}{2}\int\frac{q_2^2dq_2}{\sqrt{[c_0+2mHq_2^2]\,f(q_2)}}=\gamma; \quad . \quad (8)$$

$$\frac{\partial A}{\partial H}=\int\frac{mq_1^4dq_1}{\sqrt{[c_0+2mHq_1^2]\,f(q_1)}}-\int\frac{mq_2^4dq_2}{\sqrt{[c_0+2mHq_2^2]\,f(q_2)}}=t+\tau \quad . \quad (9)$$

Az első egyenlet a pálya-, azaz itt a geodätikus vonalak egyenlete; a második, nemcsak a t időt adja meg, hanem az s ívet is, mivel itt $T=\frac{1}{2}mv^2=H=$állandó,

$$v=ds:dt=\sqrt{2H}:\sqrt{m}$$

is állandó és így

$$t=s\sqrt{\frac{m}{2H}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

b. Ugyane problemát derékszögű coordinátákban megfejtettük a 185. §-ban a kényszermozgás közönséges eljárásai szerint; érdekes az ott talált eredményeknek elliptikus coordinátákba való átformálása s a most nyert (8) és (9) egyenleteknek ezen úton való igazolása.

Ki fog derülni, hogy az itt használt Hamilton-Jacobi-féle eljárás sokkal rövidebb és átlátszóbb.

A 228. §. (9*a*) és (9) *harmadik* egyenleteit egyesítve s *azután* bennük $q_3=0$ téve, épen úgy az idézett (8) egyenletéből:

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{q_1^2q_2^2}{a^2b^2c^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$(ds)^2=\frac{q_1^4\,(q_1^2-q_2^2)\,(dq_1)^2}{f(q_1)}+\frac{q_2^4\,(q_2^2-q_1^2)\,(dq_2)^2}{f(q_2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Továbbá, a $q_3=0$ és $dq_3=0$ mellett szorozva az idézett §. (6) egyenletei négyzetgyökeit rendre ugyane §. (7) egyenleteivel:

$$dx=\frac{a\,\{(q_2^2-a^2)\,q_1dq_1+(q_1^2-a^2)\,q_2dq_2\}}{\sqrt{(b^2-a^2)\,(c^2-a^2)}\;\sqrt{(q_1^2-a^2)\,(q_2^2-a^2)}} \quad \text{s í. t.}$$

Szorozva ezek négyzeteit rendre az $A=(b^2-c^2)\ (c^2-a^2)\ (a^2-b^2)$ jelű szorzattal, [228. §. *c.* pontja], nyerjük rendre:

$$A\left(\frac{dx}{a}\right)^2=-\frac{(b^2-c^2)\ (q_2^2-a^2)\ (q_1dq_1)^2}{q_1^2-a^2}-2\,(b^2-c^2)\,q_1q_2dq_1dq_2-$$
$$-\frac{(b^2-c^2)\ (q_1^2-a^2)\ (q_2dq_2)^2}{q_2^2-a^2}\quad \text{s í. t.}$$

Képezve az $A\left\{\left(\frac{dx}{a}\right)^2+\left(\frac{dy}{b}\right)^2+\left(\frac{dz}{c}\right)^2\right\}$ összszeget: a jobboldali középső tagok összsege azonnal eltünik, $(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)$ zérus lévén; az első és a harmadik tagok csak abban különböznek egymástól, hogy bennük a q_1 és q_2 kölcsönösen felcserélendő.

Igy

$$-\left\{\frac{(b^2-c^2)\ (q_2^2-a^2)}{q_1^2-a^2}+\frac{(c^2-a^2)\ (q_2^2-b^2)}{q_1^2-b^2}+\frac{(a^2-b^2)\ (q_2^2-c^2)}{q_1^2-c^2}\right\}(q_1dq_1)^2$$

az első három tag összsege, mely közös nevezőre hozva, a következő számlálóval bír

$$-\{(b^2-c^2)\ (q_1^2-b^2)\ (q_1^2-c^2)\ (q_2^2-a^2)+(c^2-a^2)\ (q_1^2-c^2)\ (q_1^2-a^2)\ (q_2^2-b^2)\ +$$
$$+(a^2-b^2)\ (q_1^2-a^2)\ (q_1^2-b^2)\ (q_2^2-c^2)\}=$$
$$=-(b^2-c^2)\ \{q_1^4q_2^2-q_1^4a^2-q_1^2q_2^2\ (b^2+c^2)+q_1^2\ (b^2a^2+c^2a^2)+q_2^2b^2c^2-a^2b^2c^2\}-$$
$$-(c^2-a^2)\ \{\ .\ .\ -\ .\ b^2-\ .\ .\ (c^2+a^2)+\ .\ (c^2b^2+a^2b^2)+\ .\ c^2a^2-\ .\ .\ .\}-$$
$$-(a^2-b^2)\ \{\ .\ .\ -\ .\ c^2-\ .\ .\ (a^2+b^2)+\ .\ (a^2c^2+b^2c^2)+\ .\ a^2b^2-\ .\ .\ .\},$$

hol a pontokkal jelelt helyeken ugyanazon betük állanak mint a megfelelő, fölöttük lévő betük. Szem előtt tartva a, b, c között fennálló egyenleteit a 228. §. *c* pontjának: a számláló értéke $-q_1^2A+q_2^2A$. Ugyanígy az utolsó három tag összegének számlálója $-q_2^2A+q_1^2A$, úgy, hogy a 228. §. (5) alatti $f(q)$ jelölésével élve:

$$\left.\begin{aligned}A\left\{\left(\frac{dx}{a}\right)^2+\left(\frac{dy}{b}\right)^2+\left(\frac{dz}{c}\right)^2\right\}=\\ =A\,\frac{-q_1^2+q_2^2}{-f(q_1)}(q_1dq_1)^2+A\,\frac{-q_2^2+q_1^2}{-f(q_2)}(q_2dq_2)^2\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\quad(13)$$

Képezve (11), (12), (13) segélyével az idézett 185. §. (7) egyenletét, némi rövidítés usán:

$$\frac{q_1^2q_2^2(q_1^2-q_2^2)}{a^2b^2c^2}\left\{\frac{(q_1dq_1)^2}{f(q_1)}-\frac{(q_2dq_2)^2}{f(q_2)}\right\}=$$
$$=\frac{h^2\,(q_1^2-q_2^2)}{v_0^2}\left\{q_1^2\,\frac{(q_1dq_1)^2}{f(q_1)}-q_2^2\,\frac{(q_2dq_2)^2}{f(q_2)}\right\}.$$

Itt $q_1^2-q_2^2$-tel rövidíthetünk [kivéve, ha $q_1=q_2$, de ekkor a 228. §. (3*a*) egyenletei szerint a $q_1=q_2=b$, mely b érték rendesen a q_1- s q_2-őt egymástól elválasztja; ekkor a geodätikus görbe az abc ellipsoidon fekvő

ac ellipsis, mely külön megvizsgálásra nem szorul]; ha benne még $h^2a^2b^2c^2=v_0^2\varkappa^2$-t teszünk, azt a $(\varkappa^2-q_1^2)$ $(\varkappa^2-q_2^2)$ szorozmánnyal osztjuk s rövidség kedveért írunk:

$$\left.\begin{aligned}-(\varkappa^2-q_1^2)\,f(q_1)&=-(a^2-q_1^2)\,(b^2-q_1^2)\,(c^2-q_1^2)\,(\varkappa^2-q_1^2)=g(q_1);\\ -(\varkappa^2-q_2^2)\,f(q_2)&=-(a^2-q_2^2)\,(b^2-q_2^2)\,(c^2-q_2^2)\,(\varkappa^2-q_2^2)=g(q_2);\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

egyenletünket rendezzük:

$$\frac{q_1^4\,(dq_1)^2}{g(q_1)}=\frac{q_2^4\,(dq_2)^2}{g(q_2)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

mely egyenlet négyzetgyöke a (8) egyenlet differentiáljával egybeesik, ha benne írunk $c_0=-2mH\,.\,\varkappa^2$.

Itt a q_1 és q_2 változók egymástól el vannak választva s az egyenlet véges alakja ultra-elliptikus (az elliptikusokon túli) integrálokra van viszszavezetve.

Miután a (15) két oldala előjelének egyenlőnek tartozik lenni, a 228. §. (5*a*) szerint pedig $q_1>q_2$ és $f(q_1)>0$, $f(q_2)<0$, ezért a $\varkappa^2-q_1^2$ és $\varkappa^2-q_2^2$ előjelei is ellentettek, miből ha $g(q_1)$- és $g(q_2)$-t positiveknek veszszük: $q_1^2>\varkappa^2>q_2^2$ következik és (15) írható

$$\frac{q_1^4\,(dq_1)^2}{g(q_1)}=\frac{q_1^2dq_1}{\sqrt{g(q_1)}}\cdot\frac{q_2^2dq_2}{\sqrt{g(q_2)}}=\frac{q_2^4\,(dq_2)^2}{g(q_2)}. \quad . \quad . \quad . \quad (15a)$$

A geodätikus görbe *ds* ívhoszsza kifejezése czéljából szorozzuk a (12) első tagja számlálóját s nevezőjét $q_1^2-\varkappa^2$-tal; második tagjáéit $q_2^2-\varkappa^2$-tal, a (14) jelölésével a (12)-ből:

$$(ds)^2=\frac{q_1^4\,(q_1^2-q_2^2)\,(q_1^2-\varkappa^2)}{g(q_1)}(dq_1)^2+\frac{q_2^4\,(q_2^2-q_1^2)\,(q_2^2-\varkappa^2)}{g(q_2)}(dq_2)^2. \quad (16a)$$

Itt a $\varkappa^2$-val szorzott tagok összege (15) alapján *zérus*; a fenmaradt négy tag közül a tisztán q_1-t vagy q_2-t tartalmazók:

$$\left\{\frac{q_1^4dq_1}{\sqrt{g(q_1)}}\right\}^2 \quad \text{és} \quad \left\{\frac{q_2^4dq_2}{\sqrt{g(q_2)}}\right\}^2,$$

míg a többi kettő a (15*a*) jobb-, illetve baloldalának $-q_1^2q_2^2$-szeresei, melyek írhatók:

$$-\frac{q_1^6q_2^2\,(dq_1)^2}{g(q_1)}=-\frac{q_1^4\,dq_1}{\sqrt{g(q_1)}}\cdot\frac{q_2^4dq_2}{\sqrt{g(q_2)}}=-\frac{q_2^6q_1^2\,(dq_2)^2}{g(q_2)},$$

melyek tekintetbe vételével a (16*a*) négyzetgyöke:

$$\pm ds=\frac{q_1^4}{\sqrt{g(q_1)}}dq_1-\frac{q_2^4}{\sqrt{g(q_2)}}dq_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

azaz, az *s* két ultra-elliptikus integrál különbsége.

Miután itt $ds:dt$=állandó, (16) az időt is fejezi ki és a (9) egyenlet differentiáljával arányos és így evvel egyértékű összefüggés. V. ö: a 242. §. 87, 88, 89. feladatait.

230. §. *Térbeli elliptikus (parabolikus) coordináták. II. Confocális paraboloidok.*

a. Egymást metsző confocális nem középponti másodrendű felületek parameterei mint helymeghatározók [222. §. II. szakasza].

Legyen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

egy ellipsises paraboloid;* ennek főmetszetei az

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{2z}{p} \quad \text{és} \quad \frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{p}$$

parabolák, melyek csúcsai a coordináták kezdetén-, gyúpontjai a $z=\frac{a^2}{2p}$, illetve $z=\frac{b^2}{2p}$ helyeken feküsznek a Z tengelyen.

Analog módon haladva, mint a 228. §-ban, észreveszszük, hogy a

$$\frac{x^2}{a^2-q^2}+\frac{y^2}{b^2-q^2}-\frac{2zp-q^2}{p^2}=0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

egyenlet-typus Z-tengelyű paraboloidokat jelent, melyek főmetszetei az

$$\frac{x^2}{a^2-q^2}=\frac{2z}{p}-\frac{q^2}{p^2} \quad \text{vagy} \quad x^2=\left(2z-\frac{q^2}{p}\right)\frac{a^2-q^2}{p}$$

és az

$$\frac{y^2}{b^2-q^2}=\frac{2z}{p}-\frac{q^2}{p^2} \quad \text{vagy} \quad y^2=\left(2z-\frac{q^2}{p}\right)\frac{b^2-q^2}{p}$$

egyenletű parabolák; ezek parametere $\pm\frac{a^2-q^2}{p}$, illetve $\pm\frac{b^2-q^2}{p}$, míg gyúpontjaik helyzeteit a $2zp-q^2=a^2-q^2$, illetve $2zp-q^2=b^2-q^2$, azaz a $z=a^2:2p$ és a $z=b^2:2p$ összefüggések adják meg; e gyúpontok e szerint az (1) főmetszetei-éivel egybeesnek.

Legyen most q_1^2, q_2^2, q_3^2 oly három érték, hogy

$$q_1^2>a^2>q_2^2>b^2>q_3^2; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

akkor ezekkel a (2):

$$\left.\begin{aligned} F_1&=\frac{x^2}{a^2-q_1^2}+\frac{y^2}{b^2-q_1^2}-\frac{2zp-q_1^2}{p^2}=0;\\ F_2&=\frac{x^2}{a^2-q_2^2}+\frac{y^2}{b^2-q_2^2}-\frac{2zp-q_2^2}{p^2}=0;\\ F_3&=\frac{x^2}{a^2-q_3^2}+\frac{y^2}{b^2-q_3^2}-\frac{2zp-q_3^2}{p^2}=0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

* Egy hyperbolás paraboloidra nézve az alábbi tárgyalások mind érvényesek, csak b^2 helyettezendő $-b^2$-tel.

E (4) rendszer elseje az (1)-el confocális elliptikus paraboloidot jelent, csúcsától számított tengelye a $-Z$-mentén terjed a végtelenbe; másodika hyperbolikus paraboloid, mely a $-Z$ és a $+Z$ tengely mentén terjed a végtelenbe; harmadika szintén elliptikus paraboloid, mely a $+Z$ tengely mentén terjed a végtelenbe.

A (4) három egyenlete meghatározza x^2, y^2, z^2 segélyével q_1^2-, q_2^2-, q_3^2-t vagy megfordítva; ezen utóbbiak itt szintén térbeli *elliptikus* (talán helyesebben *paraboloidos*) *coordinátáknak* mondatnak.

A továbbira nézve a 228. §. eljárásait itt is alkalmazva, csak a talált eredményeket adjuk.

b. Az orthogonalitás.

A 228. §. *b.* pontja értelmében a (4)-ből:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{4}\left\{\frac{\partial F_2}{\partial x}\,\frac{\partial F_3}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\,\frac{\partial F_3}{\partial y}+\frac{\partial F_2}{\partial z}\,\frac{\partial F_3}{\partial z}\right\} &= \\ \frac{x^2}{(a^2-q_2^2)\ (a^2-q_3^2)}+\frac{y^2}{(b^2-q_2^2)\ (b^2-q_3^2)}+\frac{1}{p^2} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (4aa)$$

mivel ez a (4) második és harmadik egyenletei különbségének, F_2-F_3-nak a $q_2^2-q_3^2$-ad része. Ugyanígy zérus a többi két ily kifejezés: evvel a felületek orthogonalitása be van bizonyítva.

c. A derékszögű coordináták és a távolság meghatározása.

Jacobi módszerét [i. h. *c.* pontja] alkalmazva írjuk (2)-őt:

$$\frac{x^2}{a^2-q^2}+\frac{y^2}{b^2-q^2}-\frac{2zp-q^2}{p^2}=0=\frac{(q^2-q_1^2)\ (q^2-q_2^2)\ (q^2-q_3^2)}{p^2\,(a^2-q^2)\ (b^2-q^2)}, \quad (4a)$$

hol q_1^2, q_2^2, q_3^2 a $p^2\,(a^2-q^2)\ (b^2-q^2)$-tel szorzott (2) egyenletnek, azaz a (4*a*) közös nevezőre hozott bal oldala számlálójának gyökei. Szorozva (4*a*) mindkét oldalát (a^2-q)-tel, s téve azután $q^2=a^2$, azonnal nyerjük az x^2-et; épen így az y^2-t, végre az x^2 és y^2 ezen értékeit bele helyettezve a (4) bármely egyenletébe, könnyű számítással nyerjük a z-t is; az eredmény:

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2-q_1^2)\ (a^2-q_2^2)\ (a^2-q_3^2)}{p^2\,(b^2-a^2)}\,; \\ y^2 &= \frac{(b^2-q_1^2)\ (b^2-q_2^2)\ (b^2-q_3^2)}{p^2\,(a^2-b^2)}\,; \\ 2zp &= q_1^2+q_2^2+q_3^2-a^2-b^2, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

mely utóbbinak képzésére nézve az (5) x^2 és y^2 értékeivel, pl. a (4) első egyenletéből:

$$2zp-q_1^2=\frac{x^2p^2}{a^2-q_1^2}+\frac{y^2p^2}{b^2-q_1^2}=$$

$$=\frac{-(a^2-q_2^2)\ (a^2-q_3^2)+(b^2-q_2^2)\ (b^2-q_3^2)}{(a^2-b^2)}=-\,a^2-b^2+q_2^2+q_3^2.$$

A távolság szerkesztésére nézve képezzük az (5)-ből a

$$4p^2r^2=4p^2(x^2+y^2+z^2)$$

összegzet; némi számítással:

$$4p^2r^2=\{a^2+b^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2\}^2-4\{a^4+a^2b^2+b^4+q_2^2q_3^2+q_3^2q_1^2+q_1^2q_2^2\}, \quad (6)$$

mely már nem oly egyszerű, mint az elliptikus coordináták megfelelő kifejezése [228. §. (6*a*)].

d. Az ívelem és az eleven erő képzése.

Az (5) első két egyenlete logarithmusainak és utolsó egyenletének közvetetlen differentiálásából:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{x}&=\frac{q_1dq_1}{q_1^2-a^2}+\frac{q_2dq_2}{q_2^2-a^2}+\frac{q_3dq_3}{q_3^2-a^2};\\ \frac{dy}{y}&=\frac{q_1dq_1}{q_1^2-b^2}+\frac{q_2dq_2}{q_2^2-b^2}+\frac{q_3dq_3}{q_3^2-b^2};\\ pdz&=q_1dq_1+q_2dq_2+q_3dq_3.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

Képezve ezekből a $(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$ összegzet s tekintetbe véve az orthogonalitás (4*aa*) egyenleteit, nyerjük itt is

$$(ds)^2=L_1^2(dq_1)^2+L_2^2(dq_2)^2+L_3^2(dq_3), \quad \ldots\ldots (8)$$

hol

$$L_1^2=q_1^2\left\{\frac{x^2}{(q_1^2-a^2)^2}+\frac{y^2}{(q_1^2-a^2)^2}+\frac{1}{p^2}\right\} \text{ s í. t.} \quad \ldots\ldots (8a)$$

A 228. §. d_a. pontja egyszerűsítő megjegyzését követve: az L_1^2 jobboldali zárójeles kifejezése nem más, mint a (4*a*) bal oldalának q^2 szerint képezett differentiálquotiense, ha benne a művelet után $q=q_1$ tétetik; ha a (4*a*) jobb oldala q^2 szerinti quotiensét képezzük és benne azután $q=q_1$-et teszünk: e quotiensnek csak az a része marad meg, mely a számláló $(q^2-q_1^2)$ tényezőjének változásából származik; ugyanígy nyerjük L_2^2-őt és L_3^2-et.

Rövidség kedveért írva

$$p^2(a^2-q^2)(b^2-q^2)=f(q), \quad \ldots\ldots (9)$$

$$\left.\begin{aligned}L_1^2&=q_1^2\cdot\frac{(q_1^2-q_2^2)(q_1^2-q_3^2)}{f(q_1)};\\ L_2^2&=q_2^2\cdot\frac{(q_2^2-q_3^2)(q_2^2-q_1^2)}{f(q_2)};\\ L_3^2&=q_3^2\cdot\frac{(q_3^2-q_1^2)(q_3^2-q_2^2)}{f(q_3)};\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (10)$$

ezek külső alakja a 228. §. (9) egyenleteiével egyező.

Az eleven erő:

$$T=\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}m\{L_1^2q_1'^2+L_2^2q_2'^2+L_3^2q_3'^2\} \quad \ldots\ldots (11)$$

231. §. *Nehéz pont mozgása vertikális tengelyű elliptikus paraboloidon.*

Az m a megelőző §. (4) rendszerében adott $F_3=0$ felületen t. i. vertikálisan fölfelé irányított tengelyű elliptikus paraboloid homorú oldalán maradjon; e szerint a megelőző §. kifejezéseibe q_3=constans teendő s így a 229. §. (1) értelmében az eleven erő:

$$T = \frac{1}{2m}\left\{L_1^{-2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_1}\right)^2 + L_2^{-2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_2}\right)^2\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

1. Az *m-re ható szabad (független) erő a földnehézség.*

Ennek erőfüggvénye, a megelőző §. (5) harmadik egyenlete tekintetbe vételével:

$$V=-mgz=-\frac{mg}{2p}\{q_1^2+q_2^2+q_3^2-a^2-b^2\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Rövidség kedveért téve $a^2+b^2-q_3^2=l_3^2$ és $g:p=\omega^2$, a jellemző egyenlet:

$$\frac{1}{L_1^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_1}\right)^2+\frac{1}{L_2^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_2}\right)^2=2mH+m^2\omega^2(l_3^2-q_1^2-q_2^2), \quad . \quad . \quad (3)$$

melyben csak a jobboldali második tag előjele különbözik a 229. §. (3)-étől.

A további tárgyalás az ellipsoidon való mozgáséval teljesen egyező [229. §.]; rövidség kedveért itt is legyen $q_3=0$ és:

$$\left.\begin{aligned} c_0+mq_1^2[2H+m\omega^2(l_3^2-q_1^2)]&=\varphi(q_1);\\ c_0+mq_2^2[2H+m\omega^2(l_3^2-q_2^2)]&=\varphi(q_2). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (3b)$$

Ekkor az **A** characteristikus függvény, a pálya alakja s a coordináták s az idő közötti összefüggés teljesen egyező az idézett §. (4), (5), (6) kifejezéseivel, csakhogy itt az $f(q)$ és $\varphi(q)$ függvények a megelőző §. (9) és ezen §. (3b) formulái jelentésével bírnak.

2. Az m-re *szabad* (független) *erő nem hat.* Ekkor a 229. §. (7), (8), (9) alakjai érvényesek, bennük az $f(q)=p^2(a^2-q^2)(b^2-q^2)$-t jelentvén. Ezen alakok mind még hyperelliptikusak; de valamenynyien quadraturákra vezetik viszsza a problémát.

f) Jacobi utolsó multiplicátora elvének alkalmazása.

232. §. *Példák a Jacobi-féle multiplicátorok meghatározására. Szabad mozgás: 1) az erők az időtől függetlenek, 2) a centrális erők csak a távolságtól függenek.*

A 108—115. §§-okban kifejtett eljárás főleg a differentiálegyenletek elméletére és a mozgás-egyenletek általános tulajdonságaira

nézve bír fontossággal; gyakorlati alkalmazásuk kevésbbé termékeny, mert a multiplicátor segélyével való integrátió mindig csak oly esetekben volt tényleg foganatosítható, melyekben az integrátiónak közönséges, közvetetlen módszerekkel való végrehajtása és eredménye ismeretes volt.

Mindazonáltal a dynamika egyenletei integrátiója módszereinek tárgyalásánál ezt az eljárást nem mellőzhettük s kiegészítésképen egy-két példát is adunk.

1. *Szabad pontra ható erők az időt explicite nem tartalmazzák.*

A rendszer multiplicátora itt állandó [110. §. I. Jegyzete, 227. l. és 115. §.]; a 108. §. (2) rendszeréből a dt és az 1. elhagyható, úgy, hogy belőle:

$$dx : dy : dz : dx' : dy' : dz' = x' : y' : z' : X' : Y' : Z' ; \quad . \quad . \quad (1)$$

ez *öt* differentiálegyenletet képvisel.

Ha ezek közül négynek az integrálját megtaláltuk: az ötödik az utolsó multiplicátor segélyével nyerhető. Ezeket mind *egy* coordinátával, pl. x-el kifejezve, az idővel való összefüggést az

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad \text{illetve} \quad t = \int \frac{dx}{x'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

egyenlet quadratura alakjában szolgáltatja.

E szerint ezen esetben tulajdonképen az utolsó két integrátió, t. i. az ötödik integrál felkeresése és az idővel való összefüggés megállapitása végezhető.

2. *Szabad pontmozgás csak a távolságtól függő centralis erők hatása alatt.*

Ezen esetben az erőcomponensek typusa

$$X' = f(r)\frac{x}{r}; \qquad Y' = f(r)\frac{y}{r}; \qquad Z' = f(r)\frac{z}{r};$$

melyeknek az (1)-be helyettezése a Kinematika 73. §-ában, 89. l. írt (2) rendszert adja; ebből [i. h.] azonnal nyerjük, hogy a pálya sík. E szerint két coordináta elég és így (1)-ből marad:

$$dx : dy : dx' : dy' = x' : y' : f(r)\frac{x}{r} : f(r)\frac{y}{r} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

a. Ez *három* differentiálegyenletet képviselő rendszer; erre alkalmazva a 109. §. általános megfontalásait: az ott lévő x, x_1, x_2, x_3 helyébe itt rendre irandó x, y; x', y'. A rendszer három integrálja $\varphi_1 = \gamma_1$, $\varphi_2 = \gamma_2$, $\varphi_3 = \gamma_3$; ezek közül kettőt az eleven erő tétele és a területek elve szolgáltat, mely írható [Kinematika 76. §. (3*a*) 93. l. és 73. §. (2), 89. l.]:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2 &= \tfrac{1}{2}(x'^2+y'^2)-V(r)=H=\gamma_2; \\ \varphi_3 &= xy'-yx'=c=\gamma_3; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

hol $V(r)=\int f(r)\,dr$ az erőfüggvény, H és c állandók.

b. Ha a (3) harmadik, φ_1 integrálját az utolsó multiplicátor elve segélyével akarjuk nyerni: itt először is a 110. §. I. Jegyzete, 227. l. értelmében az állandó M multiplicátort az egységgel egyenlőnek választjuk továbbá a 114. §. (8) képzésére nézve a $D_{(1)}$-be [114. §. (1)] φ_2 és φ_3 a (4)-ből és x_2 és x_3 helyébe x' és y' helyettezendő; miáltal ez:

$$D_{(1)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_2}{\partial x'} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y'} \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial x'} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial y'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x' & y' \\ -y & x \end{vmatrix} = xx'+yy'.$$

Továbbá, az idézett §. (8) egyenletében, tekintettel a 113. §. (1)- és a jelen (3) egyenletére, irandó X és X_1 helyébe x' és y', x és x_1 helyébe x és y, és M, helyébe az egység, miáltal belőle végre:

$$\varphi_1=\int \frac{x'dy-y'dx}{xx'+yy'}=\gamma_1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

mely a keresett utolsó integrál, hol a 113. §. I. pontja értelmében az integrál jele alatt álló kifejezésének teljes differentiálnak kell lennie.

c. Ezt bebizonyítjuk, ha a (4) két egyenlete segélyével az x'- és y'-t kiküszöböljük, úgy hogy (5)-ben csak az x és y (illetve az r és ϑ) coordináták és differentiáljai között fennálló összefüggés marad meg.

A jelzett míveletet végrehajtandó, a (4) második egyenlete írható

$$x'=\frac{xy'-c}{y}; \quad \text{vagy} \quad y'=\frac{yx'+c}{x};$$

ezekkel a (4) első egyenlete:

$$x'^2+\frac{1}{x^2}(yx'+c)^2=2(V+H),$$

vagy

$$\frac{1}{y^2}(xy'-c)+y'^2=2(V+H);$$

avagy az elsőből x'-et, a másodikból y'-t kifejezve és $r^2=x^2+y^2$-et bevezetve, rövid számítás után:

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\frac{cy}{r^2} \pm \frac{x}{r^2}\sqrt{2r^2(V+H)-c^2}; \\ y' &= +\frac{cx}{r^2} \pm \frac{y}{r^2}\sqrt{2r^2(V+H)-c^2}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

ezekkel:

$$xx'+yy'=\pm\sqrt{2r^2(V+H)-c^2} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Továbbá, az (5) számlálóját (6) segélyével képezve és megjegyezve, hogy az $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$ alapján $xdx+ydy=rdr$; $xdy-ydx=r^2d\vartheta$,

$$x'dy-y'dx=-c\frac{dr}{r}\pm d\vartheta\sqrt{2r^2(V+H)-c^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Képezve (7)-ből és (8)-ból (5)-öt:

$$\varphi_1=\int\left\{\mp\frac{cdr}{r\sqrt{2r^2(V+H)-c^2}}+d\vartheta\right\}=\gamma_1, \quad . \quad . \quad (9)$$

hol γ_1 csak egy állandó szög lehet.

A (9)-et differentiálva: az integráljel alatt álló kifejezés tényleg teljes differentiál és így:

$$d\vartheta=\pm\frac{cdr}{r\sqrt{2r^2(V+H)-c^2}}; \qquad \vartheta-\vartheta_0=\pm\int_{r_0}^{r}\frac{cdr}{r\sqrt{2r^2(V+H)-c^2}} \quad (10)$$

Az idő és a coordináták közötti összefüggés meghatározására a (2) szerint képezzük a $t=\int\frac{d\vartheta}{\vartheta'}$ kifejezést, benne a $d\vartheta$ számára a (10) első alakja, a ϑ' számára a (4)-nek második, $r^2\vartheta'=c$ egyenlete vétessék nyerjük:

$$dt=\pm\frac{rdr}{\sqrt{2r^2(V+H)-c^2}}; \qquad t-t_0=\pm\int_{r_0}^{r}\frac{rdr}{\sqrt{2r^2(V+H)-c^2}}. \quad (11)$$

A (10) és (11) az 1. pontban jelzett két integrátió; e két kifejezést egyébként közvetetlen eljárással már más helyen találtuk [Kinematika 76. §. (8), 94. lap].

További ily példákat l. pl. Jacobi, Dynamik 125—132. ll.

g) Lagrange integráló eljárásának alkalmazása.

233. §. *Példák a Lagrange-féle integráló eljárásnak a characteristikus egyenlet megfejtését czélzó alkalmazására:* 1) *Szabad sík mozgás.* 2) *Mozgás előírt felületen.*

1. *Példa. Szabad pontmozgás síkban. Derékszögű, polár, elliptikus coordináták.*

a. Derékszögű coordinátákban [122. §. (1)—(4).]:

$$\mathrm{T}=\tfrac{1}{2}m(x'^2+y'^2);$$

$$p_1=\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial x'}=mx'=\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial x};$$

$$p_2=\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial y'}=my'=\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial y};$$

$$q_1=x\,; \qquad q_2=y\,;$$

$$H=\mathrm{T}-V=\frac{1}{2m}\{p_1^2+p_2^2\}-V(x,\,y)=H, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}=\frac{p_1}{m}\,; \qquad \frac{\partial H}{\partial p_1}=\frac{p_2}{m}\,; \qquad \frac{\partial H}{\partial q_1}=-\frac{\partial V}{\partial x}\,;$$

és így a ψ_1 differentiálegyenlete [122. §. (5)]:

$$p_1\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+p_2\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+m\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial\psi_1}{\partial p_1}=0,$$

melyben a p_2 az (1)-ből p_1, x és y segélyével fejezhető ki és így

$$p_1\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\sqrt{2m\,(H+V)-p_1^2}\,\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+m\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial\psi_1}{\partial p_1}=0\,. \quad . \quad (2)$$

Ennek $\psi_1(x,\,y,\,p_1)=0$ megoldása a V erőfüggvény természetétől függ; a $\psi_1=0$- és az (1)-ből p_1 és p_2 az x- és y-ban fejezendő ki, s ezekkel a 122. §. (8), (9) és (10) alapján az A és a kész mozgásegyenletek folynak.

Ha V pl. csak y függvénye: a 227. §. példájának általánosabb esete áll elő, de a (2) megoldása akkor sem egyszerű, habár p_1 ekkor állandó.

b. Polárcoordinátákban [218. §.]

$$\mathrm{T}=\tfrac{1}{2}m\,(r'^2+r^2\vartheta'^2)\,;$$

$$p_r=\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial r'}=mr'=\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial r}\,;$$

$$p_\vartheta=\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial\vartheta'}=mr^2\vartheta'=\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial\vartheta}\,;$$

$$H=\mathrm{T}-V=\frac{1}{2m}\{p_r^2+r^{-2}p_\vartheta^2\}-V(r,\,\vartheta)=H\,; \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

és ebből a 122. §. (5) egyenlete a szerint, a mint az $_1$ és $_2$ indexeket az r és ϑ indexeknek veszszük, vagy megfordítva:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha)\quad p_r\frac{\partial\psi_1}{\partial r}+\frac{p_\vartheta}{r^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial\vartheta}+\Big(m\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{p_\vartheta^2}{r^3}\Big)\frac{\partial\psi_1}{\partial p_r}=0\,;\\ &\text{vagy}\\ &\beta)\quad \frac{p_\vartheta}{r^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial\vartheta}+p_r\frac{\partial\psi_1}{\partial r}+m\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\frac{\partial\psi_1}{\partial p_\vartheta}=0\,;\end{aligned}\right\}\ .\ (4)$$

az első esetben a p_ϑ-, a másodikban a p_r fejezendő ki (3)-ból és helyettezendő a (4) első, illetve második egyenletébe, melynek megoldása $\psi_1(r,\,\vartheta,\,p_r)=a_\alpha$, illetve $\psi_1(r,\,\vartheta,\,p_\vartheta)=a_\beta$.

c. Elliptikus coordinátákban [223 és 226. §§.]:

$$\mathrm{T}=\tfrac{1}{2}m\,\{L_1^2\,q_1'^2+L_2^2\,q_2'^2\}\ *$$

---

* Az L_1^2-t és L_2^2-t a 223. §. (9*a*), illetve az 226. §. (8*a*) formulája adja elliptikus, illetve parabolás coordinátákra nézve.

$$\frac{\partial T}{\partial q_2'} = p_1 = mL_1^2 q_1' = \frac{\partial A}{\partial q_1}; \qquad \frac{\partial T}{\partial q_2'} = p_2 = mL_2^2 q_2' = \frac{\partial A}{\partial q_2};$$

$$H = T - V = \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{p_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{L_2}\right)^2\right\} - V(q_1, q_2) = 0; \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{p_1}{L_1^2}\frac{\partial \psi_1}{\partial q_1} + \frac{p_2}{L_2^2}\frac{\partial \psi_2}{\partial q_2} + \\ &+ \left\{m\frac{\partial V}{\partial q_1} + \frac{p_1^2}{L_1^3}\frac{\partial L_1}{\partial q_1} + \frac{p_2^2}{L_2^3}\frac{\partial L_2}{\partial q_1}\right\}\frac{\partial \psi}{\partial p_1} = 0; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6)$$

mely egyenletben p_2 az (5)-ből a q_1, q_2, p_1 segélyével kifejezettnek tekintendő.

Ezen (2), (4), (6) egyenletek megoldása általában véve nagyobb nehézséggel jár, mint közvetetlenül a megfelelő jellemző egyenletek-é az idézett 218, 224, 225, 228. §§-okban sikerrel használt próbálgató eljárással.

2. *Példa. Előírt sima görbe felületen való pontmozgás.*

Itt a 122. §. (3) alatti

$$H = \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{p}_{11} p_1^2 + 2\mathfrak{p}_{12} p_1 p_2 + \mathfrak{p}_{22} p_2^2\} - V(q_1, q_2) = H \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

egyenlet specziális szerkezete a döntő.

a. Derékszögű coordinátákban, a 219. §. jelöléseivel

$$H = \frac{1}{2m}\left\{\left(1 - \frac{p^2}{N}\right)\xi^2 - \frac{2pq}{N}\xi\eta + \left(1 - \frac{q^2}{N}\right)\eta^2\right\} - V(x, y) = H; \quad (8)$$

hol ξ, η a mozgás-nyomatékok és p, q, N az adott felület $z = f(x, y)$ egyenleletéből képezhetők és az x, y függvényeinek tekintendők.

Ebből a 122. §. (5*a*) egyenlete képzésénél ezen egyenlet minden tagja megmarad.

b. Ha *másodrendű* felületen tartozik maradni a pont, a H egyenletének térbeli elliptikus coordinátákban kifejezett alakja [229, 231. §§.]

$$H = \frac{1}{2m}\left\{\frac{p_1^2}{L_1^2} + \frac{p_2^2}{L_2^2}\right\} - V(q_1, q_2) = H; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

hol q_1 és q_2 annak a két másodrendű felületnek a parameterei, melyek az adott, $q_3 = 0$ meghatározta másodrendű felületet a mozgó pont mindenkori helyén merőlegesen metszik.

A többire nézve e feladat egyenlete *formálisan* megegyezik a megfelelő síkbeli probléma (megelőző példa *c.* esetének (6) egyenleiével, de az L_1^2 és L_2^2 is mások itt [228. §, (9) és 230. §. (10)].

3. Feladatok anyagi pontmozgásra.*

A következő feladatokhoz majdnem kivétel nélkül megfejtésük vázlata vagy eredménye van csatolva.

a) Előírt, vagy a mozgás feltételei által meghatározott sima pályájú mozgások.

234. §. *Feladatok meghatározott szilárd, sima pályán végbemenő pontmozgásra.*

1. Nehéz pont a földnehézségi erő alatt gördül valamely vertikális kör legmagasabb D pontjából a kör tetszőleges B pontjához húzott húron (55. ábra).

Bizonyíttassék be a már GALILEI által felismert azon eredmény, hogy a húr befutására szükséges idő független a húrtól s egyenlő az l sugarú kör vertikális átmérőjén szabadon eső pontnak $T=2\sqrt{l}:\sqrt{g}$ esési idejével, és hogy a normális nyomás $mg\cos\alpha$, ha α a húr hajlásszög vízszinteshez. V.

2. Valamely pont előírt l sugarú körön oly centrális, csak az r távolságtól függő erő hatása alatt mozog, melynek centruma e kör kerületének valamely szilárd pontja; milyennek kell ezen erő törvényeinek lennie, hogy a körre gyakorolt nyomás állandó legyen, s milyen a mozgás? S. G. és Ap.

[A 159. §. (1*a*) egyenlete

$$R = m\frac{v^2}{\varrho} + \Phi(r)\cos\eta,$$

hol η az r és a mindenkori pályanormális (itt l) közötti hegyes szög, továbbá az eleven erő változása:

$$d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)=\Phi(r)\,dr.$$

Itt $\varrho=l$; $r=2l\cos\eta$, miáltal az első egyenlet

$$\tfrac{1}{2}R=\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)\frac{1}{l}+\frac{1}{4l}r\Phi(r),$$

mely a feltétel szerint állandó; ennek differentiálját az eleven erő egyenletével egyesítve

$$d\Phi : \Phi = -5dr : r,$$

miből az erő

$$\Phi(r) = m\frac{K}{r^5},$$

---

* A feladatok végeihez illesztett betűk jelentésére nézve v. ö. a 129. §. lábjegyzékét, 268. l.

mely vonzó vagy taszító is lehet, K állandó lévén. Továbbá

$$R=m\frac{v^2}{l}+m\frac{K}{2r^4l}=\frac{m}{l}\left\{v_0^2+\frac{K}{2r_0^4}\right\},$$

r_0 és v_0 kezdeti adatok lévén. Másrészt, az erőcentrum s a kör középpontját egybekapcsoló szilárd egyenes s a mindenkori pályanormális közötti szög 2η lévén, a sebesség $v=l2d\eta:dt$, miáltal R előbb írt egyenletéből:

$$4l^2\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2=v_0^2+\frac{K}{2r_0^4}-\frac{K}{2(2l\cos\eta)^4}.$$

Az ideális inga-mozgásnak megfelelőleg [157. §.], miután a baloldal csak positiv vagy zérus lehet, a jobb oldalnak is ilyennek kell lennie; ezért *vonzó* Φ erő esetében, $K=-C^2$ és az m mozgása egyirányú vagy az erőcentrum körül oscillatórius, a szerint, a mint

$$\tfrac{1}{2}C^2\lessgtr v_0^2\frac{(2lr_0)^4}{(2l)^4-r_0^4};$$

ellenben *taszító* Φ erő esetében csak oscillatórius mozgás lehetséges.

Az integrátió elemi függvények segélyével csak akkor végezhető, ha $K=0$ azaz, állandó sebességnél; vagy akkor is, ha $K=-v_0^2r_0^4$, mikor a normális nyomás állandóan zérus. A.]

3. Valamely pont vertikális síkú, négy csúcsú astrois egy ágán tartozik maradni [v. ö. a Kinematika 110*b*. ábráját 283. l.], melynek alsó forduló pontján az érintő vertikális. E helyen a felfelé mozgó pont sebesssége $\sqrt{2ga}$ lévén, bizonyíttassék be, hogy az idő, mely alatt a nehéz pont a földnehézségi erő hatása alatt a vízszintes érintőjű forduló ponthoz érkezik, $T=3\{2a:g\}^{\frac{1}{2}}$; a lévén a szilárd, $\frac{1}{4}a$ a gördülő kör sugara. Határoztassék meg a normális nyomás. S. G.; V.

[A nevezett astrois (hypocyclois) egyenlete, Kinematika i. h. 284. l., egyszerű goniometriai transformátiók után]:

$$\gamma)\quad x=a\cos^3\eta,\qquad y=a\sin^3\eta;\qquad x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}};$$

íveleme $dy\,(a:y)^{\frac{1}{3}}$, az Y-tengely függélyesen lefelé lévén irányítva továbbá

$$v^2=\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{y}\right)^{\frac{2}{3}}=2gy;$$

ezekből azonnal nyerhető T. és St. A.]

4. Határoztassék meg valamely vertikális síkú görbe alakja, mely görbén az anyagi pont, a föld nehézségi ereje behatása alatt úgy mozog, hogy normális nyomása és a pont súlya normális componensének ε viszonya *állandó* legyen. S. G.

[Ha az Y-tengely függélyesen felfelé van irányítva és $2gh$ a vízszintes kezdősebesség négyzete, akkor $v^2=2g\,(h-y)$ és a kimondott feltétel egyenlete:

$$\frac{m2g\,(h-y)}{\varrho} + mg\,\frac{dx}{ds} = \varepsilon \,.\, mg\,\frac{dx}{ds},$$

melyben $\varepsilon - 1 = 2k$-t téve, ez $\frac{h-y}{\varrho} = k\,\frac{dx}{ds}$-re redukálódik. Ebben

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2y}{dx^2} : \left(\frac{ds}{dx}\right)^3;$$

továbbá

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{ds}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} : \frac{ds}{dx},$$

miáltal

$$\frac{1}{\varrho} = \left(\frac{dx}{ds}\right)^3 \frac{d}{dx}\left(\frac{ds}{dx}\right)\frac{dx}{dy}\cdot\frac{ds}{dx},$$

melylyel a feltétel:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{ds}{dx}\right)dx : \frac{ds}{dx} = k\,\frac{dy}{h-y};$$

belőle:

$$\lg\left\{\left(\frac{ds}{dx}\right).(h-y)^k\right\} = \lg a^k,$$

a állandó lévén. Ez a görbe egyenlete, mely írható:

$$dx\,\sqrt{a^{2k} - (h-y)^{2k}} = \pm\,(h-y)^k\,dy;$$

és véges alakban integrálható a

$$2k+1 = \varepsilon = 0, \quad = -1, \quad = +3, \quad = +2$$

esetekben, a mikor is ez az egyenlet rendre jelent:

1) vertikális tengelyű, $p = 2h$ paraméterű, csúcsával fölfelé néző *parabolát* [158. §. 1. pontja]; 2) domború oldalával felfelé néző, vízszintes directrixű *láncgörbét*; 3) homorúságával felfele néző h átmérőjű vertikális *kört*; 4) homorúságával felfelé néző vertikális *cycloist*, melynek nemző köre h átmérőjű. A sebesség

$$\sqrt{2g\,(h-y)} = \frac{ds}{dt} = \frac{dy}{dt}\left\{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

egyenletét a görbe fentírt egyenletével egybekapcsolva, az y és t közötti összefüggést nyerjük. A.]

5. Nehéz pont előírt vertikális sima görbén csak a földnehézség hatása alatt esik; milyen a görbe alakja, ha a nehéz pont, melynek kezdeti sebessége zérus, ugyanazon idő alatt futja be a kiinduló helyétől számított ívet, a milyen idő alatt az ezen ívhez tartozó húron siklott volna ugyanezen erő hatása alatt? V.

Ha az Y tengely függőlegesen *lefelé* van irányítva s az indulás helye a coordináták kezdete, akkor:

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2gy}\,; \qquad t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^s \frac{ds}{dy} \frac{dy}{\sqrt{y}}\,;$$

mely idő a húron való siklás esetében:

$$\frac{1}{\cos\vartheta} \cdot \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^s \frac{dy}{\sqrt{y}}\,;$$

hol $y = r \cdot \cos\vartheta$, r a mindenkori húr hoszsza és $\vartheta = (r, y) \measuredangle$. E szerint a feltétel

$$\frac{1}{\cos\vartheta} \sqrt{\frac{2y}{g}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{y}}\,.$$

Differentiálva két oldalt, y-t és ds-et r és ϑ-val fejezve ki, nyerjük a közönséges Bernoulli-féle lemniscáta egyenletét, (Kinematika 230. l., 85. ábra), melynek tengelye a vízszintessel 45°-nyi szöget képez s középpontja (csomópontja) az indulás helye.

[Fejeztessék ki a normális nyomás. Az eredményt már Euler (mechanikája II. kötetében) 1736-ban és *Saladini* (Memorie dell' Istituto Nationale Italiano, I. köt. 2. részében) 1804-ben találta].

6. Bonnet (*Liouville*, Journal d. Math. 1844) azt találta, hogy a megelőző feladat lemniscátáján való mozgás jellemző feltétele (az idők egyenlő volta) még akkor is fennáll, ha e mozgás a távolsággal egyenesen arányos centrális erő befolyása alatt megyen végbe, melynek centruma a lemniscáta középpontja. Megfordítva: a görbe, melyen a mozgás ily tulajdonságú, csak a Bernoulli-féle lemniscáta. S. G., Ap.

7. Nehéz pont előírt vertikális síkú görbén csak a földnehézség hatása alatt oly formán mozog, hogy sebességének vertikális componense állandó. Bizonyíttassék be, hogy a görbe a félköbös (Neil-féle) parabola: $x^2 = \frac{8}{9} \frac{g}{u^2} y^3$, hol u az állandó vertikális sebesség, s az Y-tengely függélyesen lefelé van irányítva.

[A

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v^2 = 2gy$$

egyenletben

$$\frac{dy}{dt} = u = \text{const.}\,; \quad dt = \frac{dy}{u}$$

s így

$$u^2 \left\{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1\right\} = 2gy\,; \quad \text{ebből} \quad x^2 = \frac{8}{9} \frac{g}{u^2} \left(y - \frac{u^2}{2g}\right)^3. \qquad \text{A.}].$$

8. Valamely vízszintes alapú, csúcsával lefelé néző cyclois, homorú oldalán halad a pont vertikális irányú oly erő hatása alatt, hogy a pályára gyakorolt nyomás állandó legyen. Bizonyíttassék be, hogy a taszító

erő törvénye $Y = \frac{k}{3}\left(\frac{2a}{y}\right)^{\frac{1}{2}}$, hol k állandó, a a nemző kör sugara és y a pont távolsága (magassága) a vízszintes alap alatt. V.

9. Valamely pont vertikális tengelyű parabola homorú oldalán a föld nehézségi ereje és oly taszító centrális erő behatása alatt tartozik mozogni, melynek centruma a parabola góczpontja, s mely $\frac{3}{2}mg\sqrt{2r:p}$ törvény szerint hat, r lé»én a mozgó pont vezérsugara, p a parabola parametere; a csúcsban $\frac{3}{2}mg$ ez erő és a sebesség négyzete legyen $2pg$. Bizonyíttassék be, hogy az öszszefüggés az r és a folyó idő között, ha

$$\{\sqrt{2r} - \sqrt{p}\} : \sqrt{p} = z,$$

$$t\sqrt{g} = \sqrt{2p}\ \{\sqrt{2z} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\tfrac{1}{2}z}\};$$

míg a normális nyomás állandóan $\frac{5}{2}mg$. S. G.

10. Nehéz m pont vertikális görbén csak a földnehézség hatása alatt állandó R normális nyomás alatt mozog; bizonyíttassék be, hogy a pálya a következő egyenletnek felel meg.

$$\frac{R}{mg} + \frac{dx}{ds} = \frac{v_0}{mg}\,\frac{R + mg\sin\alpha_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gy}},$$

hol v_0 az $y=0$ melletti sebesség, X a vízszintes Y a függélyesen lefelé irányított coordináta-tengely és α_0 az $y=0$ melletti pályaérintőnek a vertikálishoz való hajla. W., K. (Leibnitz és Bernoulli).

[E feladatban követelt mozgás csak úgy lehetséges, ha az m egy homorúságával *lefelé* néző görbe homorú oldalán elegendő nagy sebességgel gördül; ekkor $v^2 = v_0^2 + 2gy$ és a nyomás állandóságát kifejező feltétel:

$$\frac{mv^2}{\varrho} - mg\frac{dx}{ds} = R + \text{constans}.$$

Téve ebbe a 4. feladatból:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d}{dx}\left(\frac{ds}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{dy} : \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = -\frac{1}{dy}\,d\left(\frac{ds}{dx}\right)^{-1} = -\frac{1}{dy}\,d\left(\frac{dx}{ds}\right);$$

a feltétel:

$$+\frac{m(v_0^2 + 2gy)}{dy}\cdot d\left(\frac{dx}{ds}\right) : mg\left(\frac{dx}{ds} + \frac{R}{mg}\right) = -1;$$

melynek azonnal képezhető első integrálja az igazolandó egyenlet.

Az egyenlet még egyszeri integratiója az x és y közötti öszszefüggést szolgáltatja, mely bonyolódott voltánál fogva csekély becscsel bír. Kidolgozta A.]

10*a*. A megelőző feladat avval a módosítással, hogy az R az y-négyzetével arányos legyen és $v_0 = 0$. A feltétel:

$$\frac{1}{m}R = C^2y^2 = g\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{2gy}{\varrho},$$

ezt kielégíti $\sqrt{a^4-y^4}dx=y^2dy$, mely Bernoulli Jakab rugalmas görbéjének egyenlete. W., K.

11. Leibnitz-től ered a következő feladat; Mily alakú az a görbe, melyen valamely pont, a földnehézségi erő behatása alatt olyképen mozog, hogy bizonyos szilárd ponttól való r távolsága ez idővel egyenesen arányos legyen? V.

[Az $r=ut$ feltételt (u állandó) $dr:dt=u$ alakban a

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2=v^2=2gy+c$$

egyenletbe vezetve, ez

$$r^2\left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)^2u^2=2gy+c-u^2,$$

téve $r\cos\vartheta=y$, a görbe egyenlete:

$$urd\vartheta=dr\sqrt{2gr\cos\vartheta+c-u^2}.$$

Ha az $r=0$ szilárd pont a pályában fekszik, akkor ott $y=0$ és $c=u^2$. A.]

12. Nehéz pont a vízszintes asymptotussal biró vertikális logarithmikus görbe domború oldalán gördül a földnehézségi erő hatása alatt. Ha az Y-tengely a földnehézség irányába esik, $x=\varkappa\lg y$ a görbe egyenlete és $v^2=2g(y-h)$, akkor a hely, melyen az m az előírt pályát elhagyja $y=h+\sqrt{\varkappa^2+h^2}$. V.

13. Az m pontra $ma^2\varkappa:r^2$ nagyságú centrális vonzó erő hat; keressessék az a sík görbe, a melyre gyakorolt normális nyomás a mindenkori vonzás normális componensével ellentetten egyenlő; $r=a$ távolságban $v^2=2\varkappa a$ lévén. V.

[Ugyanis itt

$$\frac{mv^2}{\varrho}-\frac{m\varkappa a^2}{r^2}\cos\varepsilon=R=+\frac{m\varkappa a^2}{r^2}\cos\varepsilon$$

a feltétel, hol ε az r és a pályanormális közötti hegyes szög; ebből

$$\frac{v^2}{\varrho}=2\frac{\varkappa a^2\cos\varepsilon}{r^2}.$$

Továbbá

$$d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)=-\frac{m\varkappa a^2}{r^2}dr,\quad\text{vagy}\quad v^2=2\frac{\varkappa a^2}{r};$$

a két egyenlet egyesítéséből $r=\varrho\cos\varepsilon$, mely a logarithmikus spirális görbéje; v. ö. a 159. §. levezetését. A.]

14. Előírt vertikális síkú görbén a földnehézség ereje alatt mozgó pont a görbére $\varkappa y^n$ nagyságú normális nyomást gyakoroljon; a kezdeti sebesség $v_0^2=2gy_0$ s az Y-tengely függélyesen *lefelé* legyen irányítva. Már Varignon kimutatta, hogy az ily görbék egyenlete.

$$dx=\pm\varkappa y^n dy\left\{(2n+1)^2g^2+\varkappa^2y^{2n}\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$ V.

15. Valamely m pont egy $r^2=a^2\cos 2\vartheta$ egyenletű lemniscátán a távolság hetedik hatványával fordítva arányos centrális erő befolyása alatt tartozik mozogni, a centrum a görbe csomópontja; bizonyíttassék be, hogy e görbére gyakorolt normális nyomás a csomótól való távolsággal egyenesen arányos. A nyomás zérus is lehet és ekkor a görbe szabad pálya [Kinematika 124. §. 1. példája 229. l., A.]. W.

16. Vertikális ellipsis nagy tengelye függőleges; mekkora sebességgel kell a kisebb tengely végpontjából az m pontot függélyesen felfelé hajítani, hogy ez, a görbe homorú oldalán haladva, s azután a görbét elhagyva, szabad mozgásában az ellipsis centrumán haladjon keresztül? W.

[A keresett sebesség $\sqrt{(8a^2+b^2)\,g}:3\sqrt[3]{a}$, a levén a nagyobb, b a kisebb féltengely].

17. Lagrange *általánosította* Euler-*féle probléma.* Valamely pont előírt *ellipsisen* tartozik maradni; két fócusából a távolság négyzetével fordítva arányos vonzásnak, a középpontjából a távolsággal egyenesen arányos vonzásnak lévén alávetve. Mekkora a normális nyomás? és mikor szabad pálya az ellipsis? [V. ö. a 224. §. 1. pontját].

Jeleljék r_1, r_2, r az $m=1$-nek a két fócustól s a középponttól való távolságát, $\frac{C_1^2}{r_1^2}$, $\frac{C_2^2}{r_2^2}$, C^2r az említett erőket, $2a$ a nagy tengelyt; r_{1_0}, r_{2_0}, r_0 és v_0 a kezdő adatokat, ϱ az m helyéhez tartozó a görbületi sugarat és R a normális nyomást. Az $R\varrho$ szorzat állandó, értéke a számítás szerint

$$R\varrho=\frac{C_1^2r_{2_0}}{ar_{1_0}}+\frac{C_2^2r_{1_0}}{ar_{2_0}}+C^2r_{1_0}r_{2_0}-v_0^2,$$

hol $r_1+r_2=r_{1_0}+r_{2_0}=2a$.

[Ha a nevezett három erő egyenként, külön hatna a pontra és ez mindegyiknek hatása alatt külön-külön leírná ezt az ellipsist, és u_1, u_2, u volnának az ezekhez tartozó kezdősebességek, ezekre nézve állana

$$u_1^2=\frac{2C_1^2}{r_{1_0}}-\frac{C_1^2}{a}=\frac{C_1^2r_{2_0}}{ar_{1_0}}\ *;\qquad u_2^2=\frac{2C_2^2}{r_{2_0}}-\frac{C_2^2}{a}=\frac{C_2^2r_{1_0}}{ar_{2_0}}\ ;*$$

$$u^2=C^2r_{1_0}r_{2_0}=C^2(a^2+b^2)-C^2r_0^2\ ;**$$

---

* V. ö. a (139. §. (1) formuláját.

** Az r_1r_2 szorzat (a Math. Rep. 64. §. (8) formulája szerint, 73 l.)

$$r_1r_2=a^2-\varepsilon^2x^2=a^2-x^2+\frac{b^2x^2}{a^2}=a^2+b^2-(x^2+y^2).$$

Másrészt a $-C^2r$ centrális vonzó erőre nézve a sebesség négyzete [Kinematika 112. §. (5)] $u^2=c^2k-C^2r^2$; továbbá az ezen erő hatása alatt leírta ellipsis számára [i. h. 112. §. (18) 203. l.]:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=k;\qquad \frac{1}{a^2b^2}=\frac{C^2}{c^2},$$

miből $c^2k=C^2(a^2+b^2)$ s a szöveg formulájának helyessége adódik.

Ennek értelmében, ha mind a három erő egyszerre hat, a pont akkor írja le szabadon az ellipsist e három centrum körül (azaz az R nyomás akkor zérus), ha a v_0 kezdő sebesség megfelel a $v_0^2=u_1^2+u_2^2+u^2$ feltételnek. A.]

Az ellipsis centruma felé tartó a távolsággal arányos vonzó erőt LAGRANGE találta azon ellipsis-mozgással megegyeztethetőnek, melyet EULER szerint egy pont az ellipsis két gyúpontjában székelő $C_1^2r_1^{-2}$, $C_2^2r_2^{-2}$ centrális gyorsulások alatt leírhat [Kinematika 129. §. 46. feladat 250/51. ll.] V.

18. A megelőző feladat akként módosíttassék, hogy az m pont *hyperbolán* tartozik maradni, melynek két gyúpontja a távolság négyzetével fordított vonzást gyakorol a mozgó pontra; más erő nincs.

Ekkor a megelőző feladat jelölésével az $R\varrho$ szintén állandó; értéke:

$$R\varrho=\frac{C_1^2r_{2_0}}{ar_{1_0}}-\frac{C_2^2r_{1_0}}{ar_{2_0}}-v_0^2;$$

hol $r_2-r_1=r_{2_0}-r_{1_0}=2a$.

Ha a kezdőhelyzetben a vonzások nagysága egyenlő, ugyanis, ha

$$(C_1^2:r_{1_0}^2)=(C_2^2:r_{2_0}^2)$$

és ezenkivül ott $v_0=0$, akkor az R nyomás zérus s a pont ezen erők hatása alatt szabadon írja le a hyperbolát. A megelőző feladat [ ] zárójeleiben részletezett megfontolás itt nem alkalmazható, mert a centrális vonzó erőknek egyenkénti hatása alatt a pont nem írhatja le ugyanazt a hyperbolát. V.

235. §. *Feladatok tautochron és synchron görbékre.*

19. Valamely pont a logarithmikus spirálison a távolsággal egyenesen arányos oly centrális vonzó erő hatása alatt mozog, melynek centruma a spirális pólusa; bizonyíttassék be, hogy e görbe ezen körülmények között tautochrona. A.

[Erre nézve a 166. §. (5) egyenletébe $n=1$ tétessék s a 159. (2) kifejezései használandók, miáltal az eredmény adódik. Egyébként a 159. §. II. példáját a t és r illetve t és s közötti összefüggés véges alakban való kifejtésével kiegészítve s ezt a 164. §. szerint tárgyalva e görbe tautochronismusa $s''+\omega^2s=0$ alakban kiderül; ω^2 positiv állandó lévén, feltéve, hogy $(TC:\pi)>1$. A.]

20. Szilárd kör középpontja a távolsággal egyenesen arányos centrális erő centruma; bizonyíttassék be, hogy vonzó gyorsulásnál a szilárd kör bármely hypocycloisa-, ellenben taszítónál bármely epicycloisa tautochron görbe; fejeztessék ki a mozgás periodusa. Igen nagy sugarú szilárd kör esetében a földnehézségi erő tautochronáját nyerjük.

21. Valamely pontra az X-tengelytől való y távolság harmadik gyökével arányos s az X-re merőleges vonzás hat; bizonyíttassék be, hogy a tautochrona itt az $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ astrois (hypocyclois) egy ága. [V. ö. a 234. §. 4. feladatát.] V.

22. Valamely pontra a távolság négyzetével fordítva arányos vonzó centrális erő hat: bizonyíttassék be, hogy a tautochrona egyenlete

$$p^2 - r^2 = \frac{2\pi^2 r^5}{C^2 a T^2}(a - r).$$

hol a a centrumból a pályára magára-, p a centrumból a pálya mindenkori érintőjére bocsátott merőleges és így $r = a = p_a$; s a többi betük is a 166. §. (4a) jelölésével bírnak, mely összefüggés az eredmény. V.

23. A pontra ható centrális vonzó erő állandó; bizonyíttassék be, hogy a tautochrona egyenlete

$$p^2 - r^2 = \frac{2\pi^2 r^2}{C^2 T^2}(a - r),$$

mely szintén a 166. kifejtéseiből közvetetlenül adódik, lévén itt is $p_a = a$. V.

24. Nehéz pont homorúságával fölfelé néző, alapjával vízszintes vertikális cyclois homorú oldalán gördül a földnehézség egyedüli hatása alatt. A mozgás a görbe legmagasabb (vertikális érintőjű) pontjában kezdődik. Bizonyíttassék be, hogy a gördülő pont mozgása az a sugarú nemző kör kerületi pontjának mozgásával egybeeső, ha e kör állandó $\sqrt{g : a}$ a szögsebességgel gördül a vízszintes alapon. V.

[A coordináták kezdetét a legmagasabb pontba, az Y-tengelyt ennek függélyesen lefelé irányított érintőjébe fektetve, {Kinematika 150. §. (1)}

$$x = a\vartheta - a \sin \vartheta\,; \qquad y = a - a \cos \vartheta$$

a cyclois egyenletei, melyekből

$$ds = dy \sqrt{2a} : \sqrt{2a - y}\,;$$

ezenkívül itt

$$v = ds : dt = \sqrt{2gy}\,,$$

melyek egyesítése:

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \arccos \frac{a - y}{a}\,;$$

azaz:

$$\cos\left(t \sqrt{\frac{g}{a}}\right) = \frac{a - y}{a} = \cos \vartheta\,;$$

s így a gördülés szögsebessége $\vartheta' = \sqrt{g : a}$. A.]

25. Az m egy $m\varphi_r$ centrális erő hatása alatt ír le tautochronát, bizonyíttassék be, hogy a pályára gyakorolt normális nyomás

$$-R = m\varphi_r \left\{\pm \sin \varepsilon - \frac{s^2 - s_0^2}{s\varrho} \cos \varepsilon\right\},$$

hol ε a vezérsugár positiv iránya és a sebesség közötti szög, ϱ a görbületi sugár, s és s_0 a tautochronismus pontjától az m tetszőleges, illetve elbocsátási helyéig számított pályaív s a felső előjel *taszító*, az alsó *vonzó* erőnél érvenyes. A.

[Ugyanis a 166. §. egyenleteiből

$$\omega^2 = -\varphi_r dr : sds = \varphi_r \cos\varepsilon : s\,; \qquad v^2 = -\omega^2 (s^2 - s_0^2),$$

melyekkel a

$$\pm m\varphi_r \sin\varepsilon + \frac{mv^2}{\varrho}$$

nyomást képezve, a jelzett eredményt nyerjük; benne φ_r taszító erőknél positiv vonzóknál negativ, az első esetben a felső, a másodikban az alsó előjel érvényes és így a 166. §. 65*a*- és 65*b*. ábrái értelmében e nyomás mindkét tagja mind a két esetben positiv. A.]

26. Bizonyíttassék be, hogy a megelőző feladat eredményei nem csak az iránytól is függő centrális erőkre, hanem bármily erőfüggvényes mP erőre is érvényesek mP lépvén az $m\varphi_r$ helyébe és $\varepsilon = (P, v)$ $\measuredangle$. A bizonyítás a 166. §. alapján közvetetlenül történhetik. A.]

27. *Synchron görbék.* Valamely pontból egy családhoz tartozó végtelen számú görbék indulnak ki. Az a görbe, mely e görbe sereget olyformán metszi, hogy a közös kiinduló pont s az egyes metszőpontok közötti íveket a valamely erő hatása alatt mozgó pont egyenlő idő közben futja be: e sereg *synchron görbéje* [Bernoulli János 1697.]

Végtelen számú vertikális síkban fekvő egyenes vonal indul közös pontból a földnehézség az egyedüli erő; bizonyíttassék be, hogy ezen esetben a synchron görbe az $x^2 + y^2 = \frac{1}{2} g\tau^2 y$ egyenletű *kör*, ha az Y-tengely függőlegesen lefelé van irányítva, az X vízszintes és τ a leérkezés közös tartama. V. a 234. §. 1. feladatát.

28. Végtelen számú vertikális síkban fekvő kör indul közös pontból s e helyen közös érintőjük vízszintes; a földnehézség az egyedüli erő. Bizonyíttassék be, hogy a synchron görbe egyenlete (mely a 158. §. (6*a*) egyenlete alapján is képezhető) már csak azért sem lehet egyszerű, mivel a körön mozgó pontnál a t és az y közötti összefüggést elliptikus integrálok adják meg (i. h.) A görbe csak mechanikai quadratura segélyével szerkeszthető.

29. Valamely pontból végtelen számú vertikális síkú cyclois indul ki, közös tangensük e helyen függélyesen lefelé van irányítva s az Y tengelylyel esik egybe; alapjaik mind a vízszintes X tengelybe esnek s a mozgás e közös pontban veszi kezdetét. Bizonyíttassék be, hogy a synchron görbe egyenletei:

$$\frac{a-y}{a} = \cos\left(\tau \sqrt{\frac{g}{a}}\right); \qquad x = a \arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$

melyekből az a variabilis parameter eliminálásával a keresett görbe egyenlete adódik, τ lévén a közös leérkezés ideje. E görbe egyébként a cycloisokat derékszög alatt metszi. [A 161. §. (2*a*) egyenletébe teendő $h = 2a$ és $t = \tau$ állandónak veendő; ez adja az első egyenletet; a második a cyclois egyenlete jelen helyzetében, mint a 24. feladatban. A.]. V.

236. §. *Feladatok brachystochon görbékre.*

30. Adva van egy szilárd pont A_0 és egy rajta át nem haladó EE egyenes, melyek által meghatározott A_0EE sík vertikálishelyzetű legyen. Miféle egyenes vonalon kell az m pontnak surlódás nélkül esnie, hogy az adott egyeneset a legrövidebb idő alatt elérje?

[Az A_0-on át az A_0EEsikban fektetett vízszintes egyenes az EE-t metszi, e két egyenes közötti szög felező vonala C-ben metszi az A_0-ból függelyesen lefelé vont perpendikulárist; a C körül CA_0 sugárral kört szerkesztve: ez a vízszintest A_0-ban, EE-t pl. B-ben érinti s AB húr a keresett egyenes. A bizonyítás, hogy ez a legrövidebb esésű görbe, a 161. §. 1. feladata tételéből folyik. A.]. V.

31. Ha a megelőző feladatban az EE egyenes helyébe egy az A_0 szintje alatt oldalvást fekvő KK kör lép, akkor oly kör szerkesztendő, mely a vízszintest A_0-ban érinti, melynek középpontja az A_0 alatt vertikalisan fekszik és a mely kör a KK-t is, pl. B-ben érinti. Ekkor ismét az A_0B a legrövidebb esésű egyenes és az igazolás szintén a megelőző feladatban idézett tételből következik. V.

32. Vertikális tengelyű parabola domborúsága fölfelé néz; valamely nehéz pont a góczpontból kiindulólag vezérsugár mentén surlódás nélkül siklik a görbe felé; bizonyíttassék be, hogy az m e görbét legrövidebb idő alatt éri el, ha a vezérsugár a góczhúr $2p$ hoszszával egyenlő. V.

[Ugyanis, α az r vezérsugár és a vízszintes közötti szög,

$$r=p:\{1+\cos(\tfrac{1}{2}\pi+\alpha)\};$$

másrészt, az r befutására szükséges idő

$$t=\sqrt{2r}:\sqrt{g\sin\alpha}=\sqrt{2pg^{-1}}:\sqrt{\sin\alpha-\sin^2\alpha},$$

mely a t minimumára nézve $\sin\alpha=0{\cdot}5$-öt ád. A.]

33. Ha az előbbi feladatban a parabolát vertikális nagy tengelyű ellipsis helyettesiti s az m a felsőbb gyúpontból esik a vezérsugár mentén, akkor két eshetőség forog fenn: 1) ha a számbéli excentricitás $\varepsilon<0{\cdot}5$, akkor a legrövidebb esésű egyenes a nagy tengelynek a felső gyúponttól az alsó csúcsig terjedő része; 2) ha $\varepsilon>0{\cdot}5$, akkor a legrövidebb esésű egyenes az a vezérsugár, mely a verticálissal arc $[\cos(2\varepsilon)^{-1}]$ szöget képez. V.

34. Valamely m pont két pont közötti görbén mozog a távolság négyzetével fordítva arányos vonzó centrális erő hatása alatt. Bizonyíttassék be, hogy a brachystochrona itt a centrum felé domború oly görbe, melynek egyenlete $p^2r=A^2(a-r)$, A^2 az integrál-állandó, és $r=a$-nál $v=0$. [Ez a 173. §. (4) vagy (5) egyenletéből azonnal következik. A.]

35. Valamely pontra a távolsággal egyenesen arányos centrális vonzás hat; bizonyíttassék be, hogy a brachystrochrona itt egy $p^2=A^2(a^2-r^2)$ egyenletű hypocyclois, mely domború oldalát fordítja a centrumnak;

A^2 az integral-állandó, és $r=a$-nál $v=0$. [A megelőző feladatnál idézett egyenletből. A.] V.

36. Valamely pont a távolság tetszőleges, positiv vagy negativ hatványával arányos $\varphi_r=Kr^n=\mp C^2r^n$ centrális erő hatása alatt olyképen mozog, hogy sebessége szintén a távolság valamely hatványával *arányos* legyen; bizonyíttassék be, hogy a brachystochróna egyenlete ekkor

$$r^{\frac{1}{2}(n-1)}=aC^{-1}\cos\left[\tfrac{1}{2}(n-1)\ (\vartheta-\gamma_1)\right],$$

hol a és γ_1 integrálállandók, C^2 a centrális erő együtthatója. Ellenben vonzó $\varphi_r=-C^2r^{-n}$ gyorsulásnál a szabad mozgás pályája [Kinematika 129. §. 15. feladat 245. l.[:

$$r^{\frac{1}{2}(n-3)}=a^{\frac{1}{2}(n-3)}\cos\left[\tfrac{1}{2}(n-3)\ (\vartheta-\gamma)\right].$$ T. a. St.

[Ugyanis a sebesség négyzete:

$$v^2=2\int\varphi_r dr+v_0^2=\frac{2K}{n+1}r^{n+1}+v_0^2;$$

ez csak úgy függhet kizárólagosan az r-től, ha

1) *vonzás* esetére a

$$v^2=v_0^2-\frac{2C^2}{n+1}r^{n+1}$$

kifejezésben $n<-1$ és $v_0=0$, azaz ha $\varphi_r=-C^2r^{-\nu}$; $\nu=-n>1$; ekkor

$$v^2=2\Phi(r)=\frac{2C^2}{\nu-1}\cdot\frac{1}{r^{\nu-1}};$$

s így v a sebesség, melylyel a pont a végtetenből érkezik r távolságra;

2) *taszítás* esetére a

$$v^2=v_0^2+\frac{2C^2}{n+1}r^{n+1}$$

kifejezésben $n>-1$ és $v_0=0$ azaz, ha $\varphi_r=+C^2r^n$, $n>-1$; ekkor

$$v^2=2\Phi(r)=\frac{2C^2}{n+1}r^{n+1};$$

s így v a sebesség, melylyel az $r=0$ centrumból induló pont az r távolságig jutott.

Összefoglalva e két főesetet, rövidség kedveért írjunk $\Phi=E^2r^{2\omega}$, hol az első esetben $E^2(\nu-1)=C^2$, $-2\omega=\nu-1>0$; $\nu=-n$; a másodikban $E^2(n+1)=C^2$; $+2\omega=n+1>0$; ezt a 173. §. (6) egyenletébe helyettesítvén, $c=0$ lévén, nyerjük:

$$d\vartheta=\frac{dr}{r}\frac{Er^{\omega}}{\sqrt{k^2r^2-E^2r^{2\omega}}}=\frac{E}{k}\frac{r^{\omega-2}dr}{\sqrt{1-E^2k^{-2}r^{2\omega-2}}}=$$
$$=\frac{1}{\omega-1}\frac{d\left(Ek^{-1}r^{\omega-1}\right)}{\sqrt{1-\left(Ek^{-1}r^{\omega-1}\right)^2}};$$

$$(\vartheta - \gamma_1) = \frac{1}{1-\omega} \arccos\left(Ek^{-1}r^{\omega-1}\right); \qquad r^{\omega-1} = E^{-1}k \cos\left[(1-\omega)(\vartheta-\gamma_1)\right],$$

mely a fentírt eredménynyel egyező. A.]

37. A megelőző feladat *eredménye* (a pálya véges egyenlete) az $n=+1$ esetre nem alkalmazható; de ekkor a 173. §. (6) vagy (7) kifejezése [$c=0$ lévén] azonnal vezet czélhoz s a brachystochróna számára, a távolsággal egyenesen arányos centrális erő esetében a logarithmikus spirálist szolgáltatja: v. ö. a 235. §. 19. számú megfelelő tautochróna-feladatot. V.

38. A 36. feladat *eredménye* (a $\Phi(r)$ és a v^2 kifejezése) az $n=-1$ esetre sem alkalmazható; bizonyíttassék be, hogy ezen esetben a 173. §. (6) és (7) egyenletei, bennük $c=0$-t téve:

$$d\vartheta = \tfrac{2}{3}\frac{\sqrt{K}\, d(\lg r)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{k^2r^2 - K\lg r}}; \qquad ds = \tfrac{1}{2}\frac{kd(\frac{1}{2}r^2)}{\sqrt{k^2r^2 - K\lg r}}.$$

Szerkesztessék e görbe mechanikai (graphikai) úton. V.

39. A 169. §. *c.* pontjának reflexió-tétele alapján bizonyíttassék be, hogy e pont 2. példája a 233. §. 17. és 18 feladata (az Euler-féle problémák) értelmében általánosítható. Ugyanis az idézett feladatokban említett bizonyos körülmények között, mikor a normális nyomás zérus: mind az ellipsis, mind a hyperbola szabad pálya, melyet a mozgó pont a két gyúpontból induló, a távolság négyzetével forditva arányos erők hatása alatt leír; az idézett tétel értelmében és tekintetbe véve, hogy az ellipsis és a hyperbola normálisa a két vezérsugár közötti szöget felezi (v. ö. a 139. és 142. §§-okat és a 41. és 43. ábrákat, vagy a 169. §-ot és az 58. ábrát), azonnal kiderül, hogy ugyanezen görbék brachystochrónák és pedig oly erők hatása alatt, melyek a szabad pályáéival ellentett előjelűek s a megfelelő másik gyúpontokból indulnak ki, de a felcserélt gyúpontoktól a távolság négyzetével fordítva arányosak. V.

40. Ugyancsak a reflexió tétele alapján a közönséges cyclois, mint a földnehézség egyedüli hatása alatt érvényes brachystochróna [170. §.] sajátsága alapján bizonyíttassék be, hogy a cyclois oly állandó nagyságú erő alatt leírt szabad pálya, mely erő a görbe homorú oldala felé vont mindenkori normálissal ugyanakkora hegyes szöget képez, mint e normális a görbe symmetria-tengelyével. V.

41. Szabad pont egy egyenes vonaltól való távolsággal arányos s ezen egyenesre merőleges taszítás hatása alatt lánczgörbét ír le [Kinematika 102. §. 4 pontja 161. l.]; a reflexió tétele alapján [169. §. 2., *c.*] bizonyíttassék be, hogy e lánczgörbe az oly erő hatása alatt leírt brachystrochrona, mely erő értéke az előbbivel egyenlő s a görbe domború oldalára emelt normalissal ugyanakkora hegyes szöget képez, mint e normális a symmetria tengelylyel. V.

42. A centrális erőkre vonatkozó brachystochrónákat illetőleg, *R. Townsend*, alkalmazva a reflexió tételét, [169. §. 2., *c.*], a Quarterly

Journal of Mathematics XIII. kötetében a 173. §. $\Phi(r)$ függvényére nézve a következő eseteket állította összse:

$$\Phi(r)=ar\,;\quad r^2\sin^2\alpha\,;\quad \frac{r^n}{a^{n-2}}\,;\quad \pm c^2(r^2-a^2)\,;\quad \frac{a^2r^2}{a^2+r^2}\,;\quad \frac{a^4}{r^2}\,;\quad \frac{a^5r}{(a^2+r^2)}\,*$$

$$\frac{(r^2-b^2)^2}{a^2}\,;\quad \frac{a^2b^2}{a^2+b^2-r^2}\,;\quad \frac{b^2r}{2a\pm r}\,;\quad \frac{r^2(a^n-r^n)}{a^n}\,,$$

hol a, α, b állandók, melyekkel a 173. §. (6) egyenlete, benne $c=0$-át téve, integrálható s a $\varphi_r=\Phi'(r)$ centrális erők brachystochronáinak egyszerűbb esetei nyerhetők. T. a. St.

43. Párhuzamos erők brachystochronái számítására nézve ugyanazon szerző nyomán a $\Phi(y)$ a 174. (4) egyenletébe következőleg választható:

$$\Phi(y)=\frac{y}{a}\,,\quad \frac{y^2}{a^2}\,,\quad \frac{a}{y}\,;\quad \frac{a^2}{y^2}\,;$$

$$1-\frac{y}{a}\,;\qquad 1-\frac{y^2}{a^2}\,;\qquad 1-\frac{a}{y}\,;\qquad 1-\frac{a^2}{y^2}\,;$$

$$1-\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\,;\quad \left(\frac{y}{a}\right)^n\,;\qquad 1-\left(\frac{y}{a}\right)^n\,;\quad \frac{y^2}{a^2+y^2}\,;\quad \frac{a^4}{a^4+y^4}\,;\quad \frac{a^2y^2}{b^4+(a^2-b^2)y^2}\,;$$

hol a, b állandók. Ezen függvényekkel a 174. §. (4) egyenlete, $c=0$-át téve, integrálható s a $\varphi(y)=\Phi'(y)$ erőknek megfelelő brachystochrónák nyerhetők. T. a. St.

44. Bizonyíttassék be, hogy a 172. §. végén említett cyclois és parabola tényleg egymáshoz tartozó két görbe és hogy a parabola oly tautochrona, melyet az m állandó nagyságú centrális erő hatása alatt ír le, az erő centruma a parabola gyúpontja lévén. (Ez a 42a. feladatban felsorolt esetek elseje.)

45. A 172. alapján bizonyíttassék be, hogy miután a cyclois a földnehézség esetére brachystochróna, melyben $v^2=2gx$, ugyanaz a görbe szabad pálya lesz, ha benne $v^2=1:2gy$ a sebesség. [Ebből

$$d(v^2)=2(x''dx+y''dy)=-\tfrac{1}{2}yy^{-2}dy\,;$$

és így

$$x''=0\,;\qquad y''=-1:4gy^2\,;$$

azaz a cyclois a básistól való távolság négyzetével fordítva arányos s e básisra merőleges vonzás alatt szabadon leírt pálya. A.] V.

237. §. *Feladatok előírt mozgó sima görbéken (sima csövekben) történő pontmozgásra.*

46. A 175. §. általános esetében, mikor ugyanis vertikális síkú cső forog állandó ω szögsebességgel vertikális tengely körül: az m pont a

* Ezen esetben a brachystochróna hyperbola, melynek középpontja a mozgás centruma.

görbének bizonyos helyén állandó egyensúlyban marad, melyben η a görbe normálisa és a vertikális közötti szög, ϱ a görbe görbületi sugara, r az m-nek a forgástengelyétől való távolsága. [V. ö. az 59. §-ot]. Bizonyíttassék be, hogy az m-et e helyéből kissé kimozdítva, ezen helyzet körüli kis lengések (oscillátiók) periodusa

$$\left\{\frac{\omega}{2\pi}\sqrt{\frac{r}{\varrho\sin\eta}-\cos^2\eta}\right\}^{-1}.$$

Alkalmaztassék ez az eredmény vertikális körre. T. a. St.

47. Sima belsejű cső alakja vertikális tengelyű cardidois [Kinematika 283. l. 110c. ábra], melynek forduló csúcspontja felül van, s mely e tengelye körül állandó $\sqrt{g:a}$ szögsebességgel mozog, $2a$ lévén tengelyének hoszsza (a nemző kör kétszeres átmérője). A csőben a földnehézség hatása alatt mozgó m pont a legalsó helyből $\sqrt{3ag}$ nagyságú vízszintes sebességgel lesz elindítva; bizonyíttassék be, hogy elért legnagyobb magasságában a felső csúcsponttal egy vízszintesben van. W.

48. Valamely sima egyenes cső geométriai tengelyének egy szilárd pontja körül egyenletes ω szögsebességgel forog síkban; a csőben mozgó m pontra a szilárd pontból induló, a távolsággal arányos mC^2r vonzó centrális erő hat. Bizonyíttassék be, hogy r, ϑ lévén az m polárcoordinátái és $\varepsilon^2=C^2:\omega^2$,

$$r=\tfrac{1}{2}a\{e^{\vartheta\sqrt{1-\varepsilon^2}}+e^{-\vartheta\sqrt{1-\varepsilon^2}}\};\quad \text{vagy}\quad r=a\cos(\vartheta\sqrt{\varepsilon^2-1}),$$

a szerint a mint $\varepsilon^2<1$ vagy $\varepsilon^2>1$. Az $\varepsilon=1$ eset kört szolgáltat. W.

49. Sima belsejű sík görbe cső saját síkjában állandó ω szögsebességgel forog síkjában fekvő szilárd O pont körül; a csőben mozgó m pontra független (szabad) erő nem hat; bizonyíttassék be, hogy az m-nek a mozgó csőhöz viszonyított relativ u sebességére és a cső R reactiójára nézve áll:

$$u^2=u_0^2+\omega^2r^2;\qquad R=m(u^2\varrho^{-1}+2\omega u+\omega^2p),$$

hol r az m távolsága az O-tól, ϱ a cső-pálya görbületi sugara és p az O-ból a cső-pálya érintőjére bocsátott merőleges hoszsza. [Az 58. §. (11) formulájába k=0-t téve, ez az eredmény adódik. A.] T. a. St.

50. Anyagi pont sima köralakú csőben mozog, mely cső saját síkjában, kerületének egy szilárd pontja körül állandó szögsebességgel forog. A pontra független (szabad) erők nem hatnak; milyen a mozgása? W.; T. a. St.

[Jeleljék x, y; r, ϑ a pont coordinátáit a kör síkjában fekvő *szilárd* tengelyekre vonatkozólag; η az r és a kör szilárd pontján és mindenkori középpontján átmenő átmérője közötti szöget; ω a kör forgása szögsebességét úgy, hogy $\omega t=\vartheta+\eta$, ha t=0-kor $\eta=0$; R a kör reactióját; a mozgás egyenletei az 97. ábra értelmében:

$$mx''=-R\cos(\vartheta-\eta);\qquad my''=-R\sin(\vartheta-\eta).$$

E két egyenletből;

$$x'' \sin(\vartheta - \eta) - y'' \cos(\vartheta - \eta) = 0;$$

és

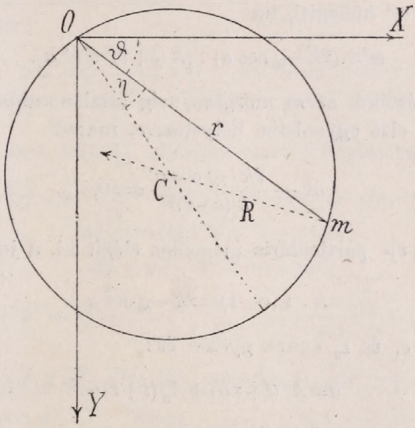
$$m[x'' \cos(\vartheta - \eta) + y'' \sin(\vartheta - \eta)] = -R.$$

Képezve ezekben $x = r\cos\vartheta$; $y = r\sin\vartheta$; $r = 2a\cos\eta$ segélyével x''-t és y''-t és téve még $\vartheta = \omega t - \eta$-ből $\vartheta' = \omega - \eta'$, $\vartheta'' = -\eta''$, a két egyenlet, egyszerű reductiók után:

$$2\eta'' + \omega^2 \sin 2\eta = 0; \qquad R = 4a\eta'^2 - 4a\omega\eta' + 2a\omega^2 \cos^2\eta.$$

Az elsőnek integrálja:

$$2\eta'^2 = \omega^2 \cos 2\eta + \text{const.}$$



97. ábra.

A továbbiak egyszerűsítésére legyen $t = 0$-kor az m sebessége zérus és m a kör azon átmérője másik végen, melynek első végpontja a forgás középpontja, ez által $t = 0$-kor $\eta = 0$, $\eta' = \omega$, és const. $= \omega^2$, úgy hogy $\eta' = \omega\cos\eta$, és rendre:

$$\lg\frac{1+\sin\eta}{1-\sin\eta} = \lg \operatorname{tg}^2(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\eta) = 2\omega t; \qquad \sin\eta = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}$$

$$r = \frac{4a}{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}; \qquad R = 2a\omega^2 \cos\eta\,(3\cos\eta - 2). \qquad \text{A.}]$$

51, Egyenes sima cső hoszszának egy szilárd pontja körül állandó ω_1 szögsebességgel forog egy síkban; maga e sík egy benne fekvő, a szilárd ponton átmenő vízszintes vonal mint tengely körül állandó ω_2 szögsebességgel forog. A csőben a földnehézség hatása alatt mozog m

tömegpont; $t=0$-kor a forgó sík vízszintes legyen és a cső a vízszintes tengelyre merőleges legyen; bizonyíttassék be, hogy ekkor az m mozgásegyenlete:

$$r''-r[\omega_1^2+\omega_2^2\cos^2(\omega_1 t)]=g\cos(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t).$$

T. a. St.

52. Egyenes, sima belsejű cső egy pontján (a kezdeten) átmenő vertikális tengely körül ω szögsebességgel forog s e tengelylyel állandó α szöget képez. A csőben súlyos m pont úgy mozogjon, hogy a kezdettől való s távolsága $k(t+\tau)^2$ legyen, k és τ állandók, t a folyó idő lévén. Milyennek kell a szögsebességnek lennie? Milyen az m általános mozgása e szögsebességnél? A.

[A 175. §. 2. alatti Második főeset mozgásegyenletei itt érvényesek, és pedig {i. h.}:

$$s''-(\omega^2\sin^2\alpha)s-g\cos\alpha=0;$$

ezt az $s_1=k(t+\tau)^2$ kielégíti, ha

$$\omega^2=(2k-g\cos\alpha):[k(t+\tau)^2\sin^2\alpha].$$

De, ha ω ezen értékű, az m mozgása még általánosabb is lehet; írjunk $s=s_1+\sigma$, ezt az első egyenletbe helyettezve, marad

$$\sigma''-\frac{2k-g\cos\alpha}{k(t+\tau)^2}\sigma=0,$$

melyet $\sigma=A(t+\tau)^\varepsilon$ particuláris megoldás elégít ki, a jellemző (feltételi) egyenlet

$$k\,.\,\varepsilon(\varepsilon-1)=2k-g\cos\alpha$$

lévén, e szerint ε_1 és ε_2 ennek gyökei és:

$$\sigma=A_1(t+\tau)^{\varepsilon_1}+A_2(t+\tau)^{\varepsilon_2}.$$

A kényszererők itt is (i. h.):

$$R_n=m(g-\omega^2 s\cos\alpha)\sin\alpha;\qquad R_b=2m\omega s'\sin\alpha.\qquad \text{A.}]$$

b) Feladatok előírt, vagy a mozgás feltételei által meghatározott sima felületeken végbemenő pontmozgásokra.

238. §. *Feladatok szilárd sima gömbfelületen haladó pont mozgására.*

53. Valamely a sugarú g gömb belső sima felületén mozog az m pont a távolsággal arányos mC^2r *vonzó* középponti erő hatása alatt, melynek centruma a gömb egy szilárd O felületi pontja. Az m azon legnagyobb kör valamely pontján legyen, mely kör OO' tengelye az erőcentrumon megyen keresztül és e helyről a belső felület mentén tetszőleges irányban $Ca\sqrt{2}$ sebességgel el leszen indítva. Bizonyíttassék be, hogy addig, a míg az m a felülettel érintkezésben marad, az m se-

bessége $2Ca \sin\vartheta$ és normális nyomása $mC^2a\,(3\sin^2\vartheta - 1)$, hol ϑ az $Om = r$ és az OO' egyenesek közötti szög. T. a. St.

54. Valamely m pont sima gömbfelületen tartozik maradni oly vonzó erő hatása alatt, mely bizonyos szilárd síktól való távolság köbével fordítva arányos. Ha az m a gömbfelületen oly sebességgel leszen elhajítva, melynek nagysága egyenlő a végtelenből az elhajítás helyéig való esés sebességével, akkor bizonyíttassék be, hogy az eredő gyorsulás iránya (s így az eredő effectiv erő is) mindig átmegyen a tér egy szilárd pontján. T. a. St.

55. Valamely pont sima a sugarú gömbfelületen oly $+ mC^2 : z^3$ *taszító* erő hatása alatt mozog, mely erő egy meghatározott legnagyobb kör síkjára merőleges és az ettől való távolság köbével fordítva arányos; a v_0 kezdősebesség e síkhoz párhuzamos legyen. Bizonyíttassék be, hogy a pálya gömbi ellipsis, t. i. elliptikus kúpnak a csúcsa körül szerkesztett gömbbel való metszővonala. S. G.

[Ugyanis itt:

$$x^2+y^2+z^2=a^2;\quad xx'+yy'+zz'=0;\quad xx''+yy''+zz''=-(x'^2+y'^2+z'^2);$$
$$mx''=-Rx:a;\qquad my''=-Ry:a;\qquad mz''=-Rz:a+mC^2:z^3.$$

Ezekből az 53. és a 180. §§. eljárásai szerint folytatólagosan

$$mv^2-mv_0^2=mC^2(z_0^{-2}-z^{-2});\qquad -mv^2=-Ra+mC^2z^{-2};$$
$$aR=m\,(v_0^2+C^2z_0^{-2})=\text{const.}$$
$$xy'-yx'=r^2\vartheta'=c=v_0r_0;$$
$$v^2=r^2\vartheta'^2+r'^2+z'^2=c^2\left\{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2\right\}+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2;$$

de

$$dz:dt=\{d(\sqrt{a^2-r^2}):d\vartheta\}.(d\vartheta:dt)=-cdr:r\sqrt{a^2-r^2}\,d\vartheta;$$
$$\frac{c^2}{r^2}\left\{1+\frac{a^2}{r^2(a^2-r^2)}\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2\right\}=v^2=v_0^2+C^2\left\{\frac{1}{a^2-r_0^2}-\frac{1}{a^2-r^2}\right\},$$
$$d\vartheta=\frac{adr}{r\sqrt{r_0^2-r^2}}\,\frac{\sqrt{a^2-r_0^2}\,.\,cr_0}{\sqrt{r^2[C^2r_0^2+c^2(a^2-r_0^2)]-c^2a^2(a^2-r_0^2)}},$$

vagy ha

$$\frac{1}{r_1^2}=\frac{1}{a^2}\left\{\frac{C^2r_0^2}{c^2(a^2-r_0^2)}+1\right\};\qquad d\vartheta=\frac{r_0r_1dr}{r\sqrt{(r_0^2-r^2)\;(r^2-r_1^2)}};$$

Ebből és az $r^2d\vartheta=cdt$-ből (a Math. Rep. 107. §. 49. és a 110. §. 40. formulájával), α integrátió-állandó lévén:

$$\frac{1}{r^2}=\frac{\cos^2(\vartheta-\alpha)}{r_0^2}+\frac{\sin^2(\vartheta-\alpha)}{r_1^2};\qquad \operatorname{tg}(\vartheta-\alpha)=\frac{r_1}{r_0}\operatorname{tg}\left(\frac{ct}{r_0r_1}\right);$$

az első az elliptikus kúp egyenlete, a második a ϑ és t közötti összefüggés. A.]

56. A megelőző feladatban az erő törvénye legyen $\pm mC^2 : z^n$; bizonyíttassék be, hogy az R=constans feltétel általában véve csak az $\pm mC^2 : z^3$ vonzó vagy taszító erőnél áll fenn, s hogy e *vonzó* erőnél csak az előbbi eredményekben a C^2-tos tagok előjele megfordítandó. V.

57. Az m tömegű nehéz pont a távolsággal egyenesen arányos centrális $-mC^2r$ vonzó s a földnehézségi erő hatása alatt tartozik sima a sugarú gömbfelületen mozogni; az erő centruma a gömb középpontja fölött b távolságnyira legyen s a v_0 kezdősebesség vízszintes. Bizonyíttassék be, hogy a z vertikális coordináta differentiálegyenlete (az eleven erő tételének egyik alakja):

$$a^2z'^2=2(bC^2-g)\ (z-z_0)\ (a^2-z^2)-v_0^2(z^2-z_0^2).$$

$C^2b=g$ esetben az m legnagyobb kört ír le. S. G.

58. Sima gömbfelület meghatározott pontja geometriai pólusként szerepel a gömbön mozgó m-nek helyzete meghatározására nézve; e póluson átmenő átmérő legyen a Z tengely és η az m-nek gömbi pólustávolsága. Az m-re ható független erő az m mindenkori meridiánja érintője mentén $mC^2 : \sin^2\eta$ nagyságú; v_0 merőleges legyen az η_0 szögű kezdethelyzet meridiánjára. Bizonyíttassék be, hogy az m pályája egy másodrendű gömbi görbe, azaz a gömbnek egy középpontjával egybeeső csúcsú másodrendű kúppal való metszőgörbe, melynek a Z tengely egyik focális vonala, egyenlete pedig

$$\{(aC^2-v_0^2\sin\eta_0\cos\eta_0)\,x+v_0^2z\sin^2\eta_0\}^2-a^2C^4(x^2+y^2)=0.\quad \text{S. G.}$$

V. ö. a következő 59. feladatot.

59. Az m pont sima gömbfelületen oly P erő hatása alatt mozog, mely a mindenkori meridián síkjában működik. Jeleljék ϑ és η az m gömbi coordinátáit számítva egy szilárd meridiántól és a polártengelytől s legyen H a független P erőnek a gömb érintősíkjában (s így a mindenkori meridián érintője mentén) fekvő componense, mely a növekvő η szögek mentén positiv és megfordítva, a gömb sugara az egység lévén. Továbbá az m mindenkori helyzetében pályáját érintő legnagyobb körre a pólusból bocsátott merőleges körív szöge legyen p. Igazoltassanak a következő P. Serret-től felállított kifejezések:

$$\sin^2\eta\,d\vartheta=c\,dt;\qquad d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)=H\,d\eta;$$

$$H=-\frac{mc^2}{\sin^2\eta}\left\{\operatorname{cotg}\eta+\frac{d^2(\operatorname{cotg}\eta)}{d\vartheta^2}\right\};\quad v\sin p=c_1;$$

melyek a centrális mozgáséihoz nagy analogiát mutatnak.

Így, ha pl. mint a megelőző 58. feladatban:

$$H=\frac{mC^2}{\sin^2\eta},\quad \text{akkor}\quad \frac{d^2}{d\vartheta^2}(\operatorname{cotg}\eta)+\operatorname{cotg}\eta=\text{const.},$$

s a pálya egy gömbi kúpmetszet, melynek gyúpontja a gömb pólusa, s mely a bolygók mozgásának gömbi analogonja.

P. Serret: Théorie nouvelle géométrique et mécanique de lignes à double courbure, p. 195, Paris 1860.

60. Valamely pont sima gömbfelületen gömbi ellipsist ír le (l. a megelőző 55, 56, 58, 59. feladatokat) oly független erő hatása alatt, mely e görbe egyik fokális egyenesére merőleges irányú s csak az ettől való r távolság függvénye. Bizonyíttassék be, hogy az erőtörvény alakja:

$$mC^2\left(\frac{\sqrt{r}}{a^2-r^2}\right)^2. \qquad \text{S. G.}$$

239. §. *Feladatok szilárd sima hengeren és körkúpon történő pontmozgásra.*

61. Vízszintes tengelyű körhenger sima homorú felületén a földnehézség hatása alatt mozog egy tömegpont. Bizonyíttassék be, hogy a tengelymenti sebesség állandó, ellenben, hogy a tengelyre merőleges mozgás és a nyomás is teljesen megfelel az előírt sima vertikális körön való mozgásnak, 156, 157. §§. V.

62. A vízszinteshez ε hajlású tengelylyel biró körhenger belső sima felületének a legmélyebb generatrixvonal közelében lévő valamely pontjából elbocsátjuk az m anyagi pontot, mely csak a földnehézség hatása alatt haladva, mindig hoszszabb közű kigyóvonalat ír le; vizsgáltassék meg e mozgás. V.

[Ha a positiv Z tengely az a sugarú hengernek lefelé menő tengelye, az Y a vízszintes és X az ezekre merőleges, lefelé menő tengely, akkor $x^2+y^2=a^2$ és a mozgás egyenletei

$$mx''=mg\cos\varepsilon-R\frac{x}{a}; \qquad my''=-R\frac{y}{a}; \qquad mz''=mg\sin\varepsilon,$$

az R a felületnek mindenkori, a Z tengely felé fordított normálisában feküdvén.

Az eleven erő elve, a felület $xdx+ydy=0$ egyenletével adja:

$$\tfrac{1}{2}mv^2=mg\,(x\cos\varepsilon+z\sin\varepsilon)+\text{constans}.$$

Az ellennyomás itt az $mv^2.\varrho_n^{-1}$ centrifugális nyomás- és az mg-nek $(mg\cos\varepsilon)$ xa^{-1} nagyságú componense öszszegével egyenlő; itt $\varrho_1=a$, $\varrho_2=\infty$ a két főgörbületi sugár s így Euler tétele $\varrho_n\sin^2\alpha=a$, hol α a Z irány s a ds pályaelem közötti szög és $\cos\alpha=dz:ds$; e szerint

$$R=m\frac{v^2}{a}\left\{1-\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right\}+mg\frac{x}{a}\cos\varepsilon.$$

Végre a mozgás harmadik egyenletéből:

$$z=\tfrac{1}{2}t^2g\sin\varepsilon+tz_0'+z_0;$$

ezek a további számításra elegendők. Ha az m a legmélyebb directrix közelében lesz elbocsátva, akkor eleinte v elsőrendű kicsiny, később a

$dz : ds$ quotiens közeledik az egységhez; a másodrendűek elhagyásával $x = a$; $R = mg \cos \varepsilon$,

$$my'' = -mg \frac{y}{a} \cos \varepsilon,$$

azaz az m mozgása egy ε hajlású lejtőn való esés (gördülés) és egy reá merőleges vízszintes egyszerű harmonikus mozgás összege. A.]

63. Valamely pont egyenes, vertikális $x^2+y^2=a^2$ egyenletű körhengeren mozog a földnehézségi erő és egy a távolsággal arányos centrális *vonzó* erő hatása alatt, mely utóbbi erő O_1 centruma a henger tengelyétől b távolságban van. A mozgás egyenletei, ha a Z tengely függőlegesen fölfelé, az X vízszintesen és O_1-en át van irányítva:

$$mx'' = -C^2 m(x-b) + Rx : a; \qquad my'' = -C^2 my + Ry : a;$$
$$mz'' = -C^2 mz - mg.$$

Bizonyíttassék be, hogy az m-nek a Z tengelyre való vetülete $2\pi : C$ tartamú lengéseket végez az O kezdet alatt e tengelyen $-g : C^2$ távolságban lévő pont körül, továbbá, hogy a vízszintes vetületben, hol $\vartheta = (r, OO_1)\sphericalangle$, az $r=a$ sugár az OO_1 egyeneshez képest analog módon mozog mint az egyszerű inga $\frac{ag}{bC^2}$ hoszszaságú szára a vertikálishoz képest, e mozgás ugyanis egyirányú vagy lengésszerű, a szerint, a mint

$$a\omega_0^2 - 2C^2 b\,[1+\cos\vartheta_0) \gtrless 0,$$

ω_0 s ϑ_0 a $d\vartheta : dt$ és a ϑ-nak kezdőértékei. A nyomás:

$$R = C^2(a+2b\cos\vartheta_0 - 3b\cos\vartheta) - a\omega_0^2.$$

Ha $b=0$, azaz az O_1 erőcentrum a Z tengelyen van, akkor

$$[z+(g:C^2)] = [z_0+(g:C^2)]\cos Ct. \qquad \text{S. G.}$$

64. Valamely m pont vertikális tengelyű, csúcsával lefelé néző körkúp belső sima felületén mozog a földnehézség egyedüli hatása alatt. A kezdősebesség vízszintes irányú és oly nagy legyen, mint e helyből a csúcsba való esés folytán nyert sebesség. Jeleljék $r = z\,\mathrm{tg}\,\alpha$ a kúp egyenletét, a Z tengely függélyesen fölfelé lévén iranyítva α csúcsa nyilásszöge felét, r_0 a kezdő távolságot; bizonyíttassék be, hogy ekkor *a)* a mozgás szakaszos (periodikus) és hogy az m legmélyebb helyzetei a kezdő helyzettel egy víz-szintben vannak; *b)* hogy a pálya-görbe egyenlete a síkra lefejtett oldal- (palást-) felületen:

$$r_{1_0}^3 (dr_1)^2 = [r_1^2 (r_1 - r_{1_0})\ (r_{1_0}^2 + r_{1_0} r_1 - r_1^2)]\ (d\vartheta_1)^2,$$

ha r_1 és ϑ_1 a csúcstól számított sík polárcoordináták e lefejtett felületben és $r_1 = r : \sin\alpha$; $r_{1_0} = r_0 : \sin\alpha$.

c) hogy a normális nyomás

$$R=mg\,[1+2\,\mathrm{cotg}^2\,\alpha\,(r_0:r)^3]\sin\alpha.$$ T. a. St.

65. Valamely m pont egyenes, vertikális tengelyű, O csúcsával lefelé néző körkúp belső sima felületén a földnehézség és egy az O csúcs felé tartó $-m\varphi(r_1)$ centrális vonzás hatása alatt tartozik mozogni.

Jeleljék 2α a kúp nyilásszögét, $r=u^{-1}$ és ϑ az m vízszintes vetülete coordinátáit, c ebben a területi sebességet; úgy hogy m-nek az O csúcsától kezdettől való távolsága $r_1=r:\sin\alpha$. Igazoltassanak a következő eredmények:

$$x=r\cos\vartheta;\qquad y=r\sin\vartheta;\qquad r=r_1\sin\alpha;\qquad z=r_1\cos\alpha=r\,\mathrm{cotg}\,\alpha.$$

$$d\left(\tfrac{1}{2}v^2\right)=2c^2\left\{\frac{1}{\sin^2\alpha}\,\frac{d^2u}{d\vartheta^2}+u\right\}du=-2\,[g\cos\alpha-\varphi(r_1)]\,dr_1=d\left(\tfrac{1}{2}v^2\right)\quad(0)$$

1) Milyen a $\varphi(r_1)$ alakja, ha az m pályája sík? Ekkor e pálya csak kúpmetszet lehet; de ekkor ennek a vízszintes síkra való vetülete szintén csak kúpmetszet lehet, legyen
$r^{-1}=u=p^{-1}(1+\varepsilon\cos\vartheta)$ ezen utóbbinak közönséges egyenlete, melyet az eleven erő fentírt (0) egyenletébe helyettesítve, ezt a

$$\varphi(r_1)=\varphi\left(\frac{r}{\sin\alpha}\right)=\varphi\left(\frac{1}{u\sin\alpha}\right)=-\frac{c^2}{p\sin^3\alpha}\,\frac{1}{r_1^2}+\frac{c^2\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha}\,\frac{1}{r_1^3}+g\cos\alpha\quad(1)$$

törvény által elégíthetni ki, s ekkor a vetületi mozgás ez O körül mint fókus körül ugyanolyan kúpszelet, mint a

$$-\frac{c^2}{p}\cdot\frac{1}{r^2}=-\frac{c^2u^2}{p}$$

Newton-féle gyorsulással leírt mozgás pályája [Kinematika 123. §. I.].

2) A felület reactiója

$$R=\frac{mc^2}{r_1^3}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}-\frac{mc^2}{pr^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\alpha\cos\alpha}+mg\sin\alpha,$$

mely positiv lévén, a reactió a kúp belseje felé van fordítva s m mindig a felületen marad.

3) Ha az erő (1) törvénye ugyanaz, ellenben a sebesség s így a c^2 a (0) bal oldalán más pl. c_1^2, akkor a (0)-nak bal oldali $2c^2\{\ldots\}$ kifejezése e két esetben egyenlő értékű; felhasználva az első esetben a kúpszelet $up=1+\varepsilon\cos\vartheta$ egyenletét, a két kifejezés egyenlitéséből:

$$c_1^2\,\frac{d^2u}{d\vartheta^2}+(c_1^2\sin^2\alpha+c^2\cos^2\alpha)\,u-\frac{c^2}{p}=0,$$

azaz: a vízszintes vetület oly kúpszelet, melynek szintén O a gyúpontja, de geometriai jellemzői nem egyezők az előbbivel s a pálya maga térbeli görbe. S. G., kieg. A.

66. Valamely pont sima körkúpon oly vonzó erő behatása alatt tartozik mozogni, mely erő a kúp csúcsán át, tengelyére merőlegesen menő síktól való távolság n-ik hatványával arányos és a tengelyhez párhuzamosan hat, azaz $m\varphi(z)=-mC^2z^n$. Legyen α a kúpnyilás félszöge, r, ϑ, z a henger-coordináták, hol $z=r\operatorname{cotg}\alpha$, v_0 a kezdősebesség, mely itt a Z-re merőleges legyen; a területek elve és az eleven erő tétele alapján bizonyíttassék be, hogy ekkor:

$$\frac{r_0^2v_0^2}{r^4\sin^2\alpha}\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2=v_0^2\frac{r^2-r_0^2}{r^2}+2C^2\operatorname{cotg}^{n+1}\alpha\frac{r_0^{n+1}-r^{n+1}}{n+1};$$

$$R=m\left\{\frac{r_0^2v_0^2}{r^3}\cos\alpha+C^2r^n\operatorname{cotg}^n\alpha\sin\alpha\right\}.$$

S. G.

240. §. *Feladatok szilárd sima másodrendű- és általános forgásfelületeken fellépő pontmozgásra.*

67. Az m tömegű pont vertikális Z tengelyű forgás-felületnek felfelé néző homorú oldala mentén vízszintes v_0 sebességgel leszen elhajítva; az m e felület egy r sugarú párhuzamos körén marad, ha a centrifugális erő s a földnehézségi erő eredője a felület felé irányított normálisba esik. Bizonyíttassék be, hogy ekkor

$$v_0^2=r\,.\,g\operatorname{cotg}i,\qquad T=2\pi r:v_0=2\pi\sqrt{r\operatorname{tg}i:g},$$

ha i a normálisnak a vízszinteshez való hajlásszöge, T a keringés ideje.

Miután $\operatorname{tg}i=dr:dz$, a T minden párhuzamos körre nézve ugyanaz, ha $rdr:dz=$const., azaz, a meridiángörbe parabola. V.

68. Nehéz pont sima forgási paraboloid homorú oldalán mozog a földnehézség hatása alatt; a paraboloid tengelye vertikális, csúcsa lefelé néz, egyenlete

$$r^2=2pz,\quad\text{vagy}\quad x^2+y^2-2pz=0,$$

p parameter állandó lévén és a Z tengely függélyesen *felfelé* néz, miáltal a g a *negativ* z-kkel egyirányú. Milyen a mozgás? S. G.

[Legyen v_0 az m sebessége z_0 magasságban a csúcs felett, $a^2=x_0^2+y_0^2=2pz_0$, i_0 a v_0 s a vízszintes közötti szög $v_0^2=2gh$, és végre $b^2=2ph$; ekkor a 183. §. (1), (2), (8) egyenletei rendre

$$v^2=v_0^2+2g(z_0-z)=2g(h+z_0-z);$$

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt}=c=av_0\cos i_0=2\sqrt{pz_0gh}\cos i_0.$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=\frac{4g}{2z+p}[-z^2+(z_0+h)z-hz_0\cos^2i_0],$$

miből következik, hogy miután $z\geqq0$, a [ ] zárójeles együttható mindig positiv s így z a

$$z^2-(z_0+h)z+hz_0\cos^2i_0=0$$

egyenlet z_1 és z_2 reális gyökértékei között fekszik, $z_1<z_2$-t téve.

A kezdő állapotot az általánosság csorbitása nélkül a $z=z_1=z_0$ *minimum-magasság* helyén választva, hol $dz:dt=0$ és v vízszintes: áll $i_0=0$, míg a legnagyobb magasság $z_2=h$, miáltal a 183. §. (10*b*) és (8)

$$R=-\frac{m}{\sqrt{p}\,(2z+p)^{\frac{3}{2}}}\,[p^2+2p\,(z_0+h)+4hz_0]$$

$$dt=\pm\tfrac{1}{2}dz\sqrt{\frac{2z+p}{g\,(z-z_0)\,(h-z)}}=\pm\frac{rdr}{\sqrt{pg}}\sqrt{\frac{r^2+p^2}{(r^2-a^2)\,(b^2-r^2)}},$$

mert most $a^2=2pz_0=2pz_1$ a legkisebb és $b^2=2ph=2pz_2$ a legnagyobb r^2 érték. A pálya vízszintes vetülete egyenletét az $r^2d\vartheta=c^2dt$ s a most irt dt kifejezése adja.

Irva $r^2=a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi$,

$$dt=\pm\sqrt{\frac{b^2+p^2}{pg}}\sqrt{1-\frac{b^2-a^2}{b^2+p}\sin^2\varphi}\,.\,d\varphi,$$

mely másodfajú elliptikus integrál. A.]

69. Ha a megelőző feladatban a és b kicsinyek a p-hez képest, dt felső kifejezésében r^2+p^2 helyébe p^2 teendő, miáltal ez közvetetlenül integrálható és

$$t=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{g}}\arccos\frac{a^2+b^2-2r^2}{b^2-a^2}$$

A vízszintes vetület differentiálegyenletét [183. §. (6)] képezve és az $r^2:p^2$-rendű tagokig bezárólag kifejtve s successiv közelítéssel integrálva, találjuk, hogy e vetület

$$1=a^{-2}r^2\cos^2(\vartheta-\Omega t)+b^{-2}r^2\sin^2(\vartheta-\Omega t)$$

egyenletű ellipsis, melynek a és b féltengelyei

$$\Omega=ab\sqrt{g}:4p^{\frac{5}{2}}$$

szögsebességgel forognak a középpont körül. S. G., A.

70. Valamely m pont forgási felületen oly erő hatása alatt kényszerül mozogni, mely a Z forgás tengelyére merőleges, Z-felé tart és a tőle való távolság harmadik hatványával fordítva arányos. Bizonyíttassék be, hogy a normális nyomás állandó lévén a meridiángörbe görbületének is állandónak kell lennie, az az, hogy a felület gömb vagy pedig kör-keresztmetszetű gyűrű (ú. n. *kör-torus*; l. a 74. feladatot). S. G.

71. Valamely m pont vertikális tengelyű sima forgási felületen a földnehézségi erő hatása alatt olyformán mozog, hogy a felület párhuzamos köreit (s így meridiánjait is) állandó ε szög alatt metszi; a 183. §. alapján bizonyíttassék be, hogy a meridián s a mozgás egyenlete:

$$r^2\,(z+h)=ha^2;\qquad \left(\frac{dz}{dt}\right)^2=\frac{8g\,(h+z)^4\sin^2\varepsilon}{a^2h+4\,(h+z)^3},$$

hol a Z tengely függélyesen lefelé van irányítva, r, ϑ, z az m hengercoordinátái; a, o, o ezeknek, s $v=\sqrt{2gh}$ a sebességnek kezdő értékei.

S. G., T. a. St.

72. Lánczgörbe básisa körüli forgatása létesítette felületen mozgó pontra a symmetria Z tengelyére merőleges, s csak az $r=\sqrt{x^2+y^2}$ távolságtól függő $m\varphi(r)$ független erő hat, alkalmaztassanak a 183. §. eredményei a pályát és a nyomást illetőleg.

A felület egyenlete

$$x^2+y^2=\tfrac{1}{2}\{e^{+z}+e^{-z}\}^2$$

egyszerű alak legyen, $a=1$ lévén.

Felhasználandók a 241. §. 80. feladatában írt differentiálquotiensek és az itt is érvényes területek elve. V.

73. Az m pont az

$$x^2+y^2-z^2=a^2$$

egyhéjú, egyenoldalú sima forgási hyperboloidon tartozik maradni, a felületnek középpontja felé irányított mC^2r centrális vonzás hatása alatt vizsgáltassék meg a mozgás. S. G.

[A mozgás egyenletei:

$$x''=-C^2x+Rx:m\sqrt{x^2+y^2+z^2};$$
$$y''=-C^2y+Ry:m\sqrt{\ldots};\qquad z''=-C^2z-Rz:m\sqrt{\ldots};$$

a területek elve és az eleven erő tétele:

$$(x^2+y^2)\,d\vartheta=c\,dt;\qquad v^2=v_0^2-C^2(x^2+y^2+z^2)=v_0^2-C^2(a^2+2z^2);$$

az $x^2+y^2-z^2=a^2$ kétszeri differentiálásából:

$$x'^2+y'^2-z'^2+xx''+yy''-zz''=0,$$

ez utóbbiból a mozgásegyenletek segélyével

$$R\sqrt{a^2+2z^2}=(C^2a^2+2z'^2-v^2)\,m.$$

A sebességet a z és z'-vel kifejezve:

$$v^2=x'^2+y'^2+z'^2=r^2\vartheta'^2+r'^2+z'^2=c^2r^{-2}+(zr^{-1}z')^2+z'^2$$
$$v^2=(c^2+z^2z'^2):(a^2+z^2)+z'^2,$$

melylyel az R:

$$R\sqrt{a^2+2z^2}=m\left\{C^2a^2-\frac{c^2-a^2z'^2}{a^2+z^2}\right\}.$$

Jegyzet. Az $R=0$-nak megfelelő pálya feltétele

$$a^2z'^2=c^2-C^2a^2(a^2+z^2),\quad\text{azaz}\quad z''=-C^2z;$$

s a mozgás többi két egyenlete:

$$x''=-C^2x; \qquad y''=-C^2y,$$

azaz itt tiszta centrális mozgással van dolgunk; ezért a pálya az erő centrumán (itt a hyperboloid középpontján) átmenő sík [Kinematika 73. §.] s alakja ellipsis [i. h. 112. §. 203. l.], mely a $z=0$ síkú, $r=a$ sugarú torok-kört mindig metszi.

Egyébként megfordítva, a felület középpontján átmenő valamenynyi sík, melynek az XY síkhoz való i hajlása $\leqq \frac{1}{4}\pi$, metszi e felületet ellipsisben, miként azt az

$$x^2+y^2-z^2=a^2 \quad \text{s az} \quad \alpha x+\beta y+\gamma z=0$$

egyenletek egyesítéséből nyerhető metszővonal-vetületek elemi vizsgálata azonnal mutatja.

Ha az m-et e torokkörben az XY sikhoz i_0 hajlású v_0 sebességgel indítjuk meg, akkor a c sebességi nyomaték [Kinematika 73. §. (4)] és a z' kezdő értéke:

$$c=a \,.\, v_0 \cos i_0; \qquad z'=v_0 \sin i_0, \qquad z=0,$$

miáltal az $R=0$ feltételéből:

$$a^2v_0^2 \sin^2 i_0=a^2v_0^2 \cos^2 i_0-C^2a^4, \quad \text{vagy} \quad v_0^2 \cos 2i_0=C^2a^2,$$

mely feltételt a sík pálya elnyerhetésére ki kell elégíteni. A.]

74. Valamely körnek kívüle, de síkjában fekvő vertikális tengely körüli forgatása által keletkezett gyűrű sima felületén, ú. n. *torus*-felületen vagy *toroidon* az m pont a földnehézségi erő alatt tartozik mozogni. A v_0 kezdősebesség a torokkör érintője mentén legyen, milyen a mozgás? V.

[Legyen a a nemző kör sugara, b középpontjának a forgás-tengelyétől való távolsága ϑ, r a vízszintes vetület coordinátái. A felület egyenlete

$$(b-\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2=a^2,$$

melyből pl. a 180. §. eljárásai szerint rendre:

$$mx''=+R\,(b-r)\,x : ar; \quad my''=+R\,(b-r)\,y : ar; \quad mz''=-Rz : a+mg;$$
$$d\,(\tfrac{1}{2}mv^2)=+gdz; \qquad mv^2=mv_0^2-2mgz_0+2mgz; \qquad z_0=0.$$

Továbbá:

$$m\left\{x''\,\frac{b-r}{ar}\,x+y''\,\frac{b-r}{ar}\,y-z''\,\frac{z}{a}\right\}=R-mg\,\frac{z}{a},$$

vagy, az eredeti $(b-r)^2+z^2=a^2$ egyenlet kétszeri differentiálásából:

$$\left(\frac{b}{r}-1\right)(xx''+yy'')-zz''=-\left(\frac{b}{r}-1\right)(x'^2+y'^2)+z'^2-\frac{b}{r^3}(xx'+yy')^2,$$

s így ha még $x'^2+y'^2=r'^2+r^2\vartheta'^2$-et, $rr'=xx'+yy'$-et írunk:

$$R=mg\frac{z}{a}-\frac{m}{a}\left\{\left(\frac{b}{r}-1\right)(r'^2+r^2\vartheta'^2)+z'^2-\frac{b}{r}r'^2\right\}.$$

Ezenkívül, a kezdet feltétele szerint

$$r^2\vartheta'=c=(b-a)v_0;$$

továbbá

$$(b-r)r'-zz'=0,$$

$z'=(b-r)r':z=(b-r)r':\{a^2-(b-r)^2\}^{\frac{1}{2}}$; $r'=dr:dt=(dr:d\vartheta).(d\vartheta:dt)$ s így:

$$v^2=r'^2+r^2\vartheta'^2+z'^2=r'^2+\frac{c^2}{r^2}+\frac{(b-r)^2}{a^2-(b-r)^2}r'^2=\frac{a^2r'^2}{a^2-(b-r)^2}+\frac{c^2}{r^2};$$

e szerint a pálya vízszintes vetületének egyenlete:

$$\frac{c^2}{r^2}\left\{1+\frac{1}{r^2}\frac{a^2}{a^2-(b-r)^2}\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2\right\}=v^2=v_0^2+2g\sqrt{a^2-(b-r)^2}.\quad \text{A.}]$$

74*a*. A megelőző feladat, azon módosítással, hogy az m nem a föld nehézségi ereje, hanem a Z symmetria-tengely-féle irányított, arra merőleges $-mC^2r^n$ törvényű vonzás hatása alatt mozog, a v_0 itt is a legkisebb párhuzamos kör (a kisebbik egyenlítő) érintője mentén legyen. Az m ekkor ezen egyenlítőn marad. Ha az m-et e mozgásában kissé zavarjuk, pl. sebessége irányának kis változtatása által, akkor, miként bebizonyítandó, az m ezen eredeti pályáját egyenlő, egymástól ε szögű közökben lévő pontokban metszi, mely szögre nézve

$$a\pi^2v_0^2=\varepsilon^2[(b-a)^{n+1}.\ C^2b-av_0^2].\qquad \text{T. a. St.}$$

241. §. *Feladatok forgás-felületek geodätikus görbéire.*

75. *Forgási ellipsoid geodätikus görbéi.* A felület egyenlete legyen

$$(x^2+y^2)a^{-2}=1-z^2b^{-2};$$

igazoltassanak a 184. §. alapján (s az ott használt $c=a_0v_0$ rövidítéssel) a következő a geodätikus görbékre s a nyomásra vonatkozó eredmények:

$$d\vartheta=\pm a_0\frac{dr}{r}\left\{\frac{a^4+r^2(b^2-a^2)}{a^4(a^2-r^2)(r^2-a_0^2)}\right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$R=-mv_0^2b.\frac{a^4+a_0^2(b^2-a^2)}{\{a^4+r^2(b^2-a^2)\}^{\frac{3}{2}}}$$

a) Ha $b<a$, akkor a *lelapúlt forgási ellipsoidra (sphaeroidra)* nézve $a^2-b^2=a^2\varepsilon^2$ és:

$$d\vartheta=\pm a_0\frac{dr}{r}\left\{\frac{a^2-r^2\varepsilon^2}{(a^2-r^2)(r^2-a_0^2)}\right\}^{\frac{1}{2}};\qquad R=-mv_0^2\frac{b}{a}.\frac{a^2-a_0^2\varepsilon^2}{(a^2-r^2\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Jegyzet. Ha l és λ a lelapúlt sphæroidon a földrajzi hoszszúság és szélesség, akkor a jelen jelöléssel [s a Kinematika 352. §. (1) formulája

szerint, 604. l.] $d\vartheta = dl$;

$$r = a\cos\lambda\,(1-\varepsilon^2\sin^2\lambda)^{-\frac{1}{2}};$$

ha még λ_0 az a_0-hoz tartozó érték:

$$a_0 = a\cos\lambda_0\,(1-\varepsilon^2\sin^2\lambda_0)^{-\frac{1}{2}},$$

akkor

$$(d\vartheta)^2 = (dl)^2 = \frac{(1-\varepsilon^2)^2\cos^2\lambda_0\,(d\lambda)^2}{\cos^2\lambda\,\{(1-\varepsilon^2\sin^2\lambda_0)\cos^2\lambda-(1-\varepsilon^2\sin^2\lambda)\cos^2\lambda_0\}\,(1-\varepsilon^2\sin^2\lambda)}$$

[De *Saint Germain* ezt az egyenletet téves alakban tünteti elő: Récueil, d'Exercises s í. t. 351. lapján; helyreigazította A.]

β) Ha $b > a$, akkor a *meghoszszabbodott forgási ellipsoidra (ovoidra)* nézve $b^2-a^2=b^2\varepsilon^2$ és

$$d\vartheta = \pm a_0\frac{dr}{r}\left\{\frac{a^4+b^2r^2\varepsilon^2}{a^2(a^2-r^2)(r^2-a_0^2)}\right\}^{\frac{1}{2}}; \qquad R = -mv_0^2 b\,\frac{a^4+a_0^2b^2\varepsilon^2}{(a^4+b^2r^2\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$$

V., kieg. A.

76. A 240. §. 68. feladatában, a *forgási paraboloidon* való mozgás problémája kifejezéseibe tétessék $v^2=\text{constans}=v_0^2$ és egyeztessék az ott írt általános eredmény az $x^2+y^2=2pz$ egyenletből a 184. §-ból folyó itt érvényes kifejezésekkel:

$$d\vartheta = \pm\frac{a_0}{p}\frac{dr}{r}\sqrt{\frac{r^2+p^2}{r^2-a_0^2}}; \qquad R = +mv_0^2\frac{a_0^2+p^2}{(r^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

V., kieg. A.

77. *Geodätikus görbék egyhéjú forgási hyperboloidon.* Legyen

$$(x^2+y^2)\,a^{-2}-z^2b^{-2}=1$$

a hyperboloid egyenlete. A 184. §. alapján bizonyíttassék be, hogy a geodätikus görbék vetülete az XY-síkra:

$$d\vartheta = \pm a_0\frac{dr}{r}\left\{\frac{r^2\varepsilon^2-a^2}{(r^2-a^2)(r^2-a_0^2)}\right\}^{\frac{1}{2}}; \qquad R = \pm mv_0^2\frac{b}{a}\,\frac{a^2-a_0^2\varepsilon^2}{(r^2\varepsilon^2-a^2)^{\frac{3}{2}}};$$

hol $a_0=r\cos i$, $a^2\varepsilon^2=a^2+b^2$; ε a hyperbola excentricitása. Redukáltassék e kifejezés elliptikus integrálokra. Ha $a_0=a$: a geodätikus görbe érinti a torok-kört [derékkört, Kinematika 307. §. I, 526. lap]; ha $a_0=a:\varepsilon$, akkor az egyenlet véges alakban integrálható s a 184. §. 2. pontjában tárgyalt egyenes körkúp geodätikus görbéihez analog eredményt ád. Végre $a_0=0$-nál a nemző hyperbola egyenlete adódik. S. G., Ap., kieg. A.

78. A forgási hyperboloid geodätikus görbéinek bizonyos serege nevezetes sajátságot mutat; ugyanis görbületi sugarak mindenütt ellentetten egyenlő a mindenkori párhuzamos kör görbületi sugarával. S. G.

[Ennek bizonyítására keressük azt a forgási felületet, melynek geodätikus görbéi az említett sajátsággal bírnak. A főgörbületeknek nyilván ellentetteknek kell lenniök, továbbá forgási felületnél a meridiánok s a

párhuzamos körök alkotják a görbületi vonalak két seregét, [Math. Repert. 95. §.]; legyen r e körök egyikének sugara, ϱ_1 a meridiánnak görbületi sugara és $d\sigma$ az íveleme. Az első főmetszet síkja maga a meridián-é; a második főmetszet síkja szintén a felület normálisát tartalmazza, a mindenkori párhuzamos kört érinti és síkjával η szöget képez, (mely egyszersmind az e pontban a meridiánhoz húzott érintő és a Z szimmetriatengely közötti szög). E szerint, MEUSNIER tétele tekintetbe vételével

$$\varrho_1 \quad \text{és} \quad \varrho_2 = r : \cos\eta$$

a két görbületi sugár. Az első:

$$\varrho_1 = d\sigma : d\eta = \sqrt{(dr)^2 + (dr)^2 \operatorname{cotg}^2\eta} : d\eta = dr : \sin\eta d\eta ;$$

avagy:

$$1 : \varrho_1 = -d(\cos\eta) : dr.$$

Másrészt, ha i a geodätikus görbe s a párhuzamos kör közötti metsző-szög és ϱ az előbbinek görbületi sugara, akkor, miután e görbe minden eleme normál-metszet, EULER tétele:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sin^2 i}{\varrho_1} + \frac{\cos^2 i}{\varrho_2} = -\sin^2 i \frac{d(\cos\eta)}{dr} - \cos^2 i \frac{\cos\eta}{r},$$

hol a ϱ_1-positiv lévén, a ϱ_2-őt a felület antiklastikus voltánál fogva negativ előjellel kell venni.

A feladat feltétele pedig:

$$\varrho^{-1} = -\varrho_1^{-1} = +d(\cos\eta) : dr,$$

azaz:

$$(1 + \sin^2 i) \frac{d(\cos\eta)}{dr} = -\cos^2 i \frac{\cos\eta}{r}.$$

A *geodätikus* vonal feltétele [184. §. (3)] $\cos^2 i = a_0^2 : r^2$ és így könnyen nyerjük:

$$\frac{d(\cos\eta)}{\cos\eta} + \frac{dr}{r} \cdot \frac{a_0^2}{2r^2 - a_0^2} = 0,$$

miből [Math. Repert. 106. §. 16. formula]

$$\lg\cos\eta = -\frac{a_0^2}{2a_0^2} \lg\left(\frac{r^2}{2r^2 - a_0^2}\right) + \text{const.},$$

vagy, $\cos\eta_0$ és $r = a_0$ egymáshoz tartozván, rendre:

$$\frac{\cos^2\eta_0}{\cos^2\eta} = \frac{2r^2 - a_0^2}{r^2};$$

de:

$$\frac{1}{\cos^2\eta} = 1 + \operatorname{tg}^2\eta = 1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2,$$

ennek helyettesítésével

$$dz = \frac{r dr \cos\eta_0}{\sqrt{r^2(2 - \cos^2\eta_0) - a_0^2}}; \qquad z = \frac{\cos\eta_0}{2 - \cos^2\eta_0} \sqrt{r^2(2 - \cos^2\eta_0) - a_0^2};$$

mely egyenlet hyperbolát jelent; ennek két parameterét (féltengelyét) az a_0 és η_0 határozzák meg. E görbe Z tengelye körüli forgatás által létesített egyhéjú hyperboloid nem valamenynyi geodätikus görbéje felel meg a $\varrho=-\varrho_1$ feltételnek, hanem $r^2=a_0^2:\cos^2 i$-t helyettezve az utolsó egyenletbe, belőle

$$z^2\left\{\frac{2-\cos^2\eta_0}{\cos\eta_0}\right\}^2=a_0^2\left\{\frac{2-\cos^2\eta_0}{\cos^2 i}-1\right\},$$

mely minden egyes, meghatározott a_0 s η_0 parameterű generatrixre nézve az egyes z-khez (illetve r-khez) tartozó i-t határozza meg; ez utóbbi e szerint már nem választható szabadon. Végre a fentirtakból:

$$\frac{1}{\varrho}=-\frac{1}{\varrho_1}=\frac{d\cos\eta)}{dr}=-\frac{\cos^2 i}{1+\sin^2 i}\,\frac{\cos\eta}{r}=-\frac{a_0^2\cos\eta_0}{(2r^2-a_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

A görbék egyenletét l. a megelőző 77. feladatban. Kifejtette A.]

79. Geodätikus görbék egyenoldalú hyperbola egyik asymptotusa körüli forgatása által keletkezett hyperboloidon. A hyperboloid egyenlete az asymptotusokra mint tengelyekre vonatkozólag

$$z\sqrt{x^2+y^2}=a^2.$$

Bizonyíttassék be, hogy itt, a megelőző feladat és a 184. §. jelölésével:

$$d\vartheta=\mp a_0\frac{dr}{r}\sqrt{\frac{1+a^4r^{-4}}{r^2-a_0^2}}\,;\qquad R=\pm mv_0^2\frac{a^2}{r^3}\cdot\frac{2r^6-(r^4+a^4)\,a_0^2}{(r^4+a^4)^{\frac{3}{2}}}\,;$$

Értelmeztessék ez az eredmény. S. G., Ap., kieg. A.

80. A lánczgörbe básisa körüli forgatásából keletkezett forgási felület egyenlete

$$r=\tfrac{1}{2}a\,(e^{-\frac{z}{a}}+e^{+\frac{z}{a}})\,;$$

kerestessék e felület geodätikus görbéinek és a nyomásnak egyenlete. V. [Áll:

$$4r^2=a^2\{e^{-\frac{2z}{a}}+e^{+\frac{2z}{a}}+2\}\,;\qquad e^{-\frac{2z}{a}}+e^{+\frac{2z}{a}}=\frac{4r^2}{a^2}-2\,;$$

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)^2=\frac{1}{4}\left\{+e^{-\frac{2z}{a}}+e^{+\frac{2z}{a}}-2\right\}=\frac{r^2-a^2}{a^2}\,;\quad\{f'(z)\}^2=\left(\frac{dz}{dr}\right)^2=\frac{a^2}{r^2-a^2}$$

$$2\psi(z)=r^2\,;\qquad\psi'(z)=r\frac{dr}{dz}\,;\qquad[\psi'(z)]^2=r^2\left(\frac{r^2}{a^2}-1\right);$$

$$\psi''(z)=\frac{1}{2}\left\{e^{-\frac{2z}{a}}+e^{+\frac{2z}{a}}\right\}=\frac{2r^2}{a^2}-1\,;$$

melyek tekintetbe vételével a 184. §. (4) egyenletei:

$$d\vartheta = \pm \frac{a_0 dr}{\sqrt{(r^2 - a^2)(r^2 - a_0^2)}}; \qquad R = \pm mv_0^2 \cdot \frac{a(r^2 - 2a_0^2)}{r^4},$$

melyek elseje elsőfajú elliptikus integrál. A.]

81. Forgási felület tetszőleges pontjában legyenek ϱ_1 és ϱ_2 a főgörbületi sugarak [Math. Rep. 95. §.], ϱ az e ponton áthaladó, a párhuzamos kört i szög alatt metsző geodätikus görbe görbületi sugara, r e kör sugara, melyre nézve [184. §. (3)] $a_0 = r \cos i$; ha ϱ_1 a meridián-, ϱ_2 a reá merőleges (a párhuzamos kört érintő) főmetszet görbületi sugara, akkor Euler tétele és Clairaut tétele:

$$\frac{\sin^2 i}{\varrho_1} + \frac{\cos^2 i}{\varrho_2} = \frac{1}{\varrho}; \qquad \cos^2 i = \frac{a_0^2}{r^2}, \qquad \sin^2 i = \frac{r^2 - a_0^2}{r^2};$$

egyesítésük:

$$a_0^2 \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right) = r^2 \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right),$$

mely Résal tétele.

Meusnier tétele szerint itt $\varrho_2 \cos \eta = r$, ha η az r sugarú párhuzamos kör síkjának a felület normálisához való hajlása és így ϱ_2 e normálisnak a forgástengelyig terjedő hoszsza. Résal, Traité de Mécanique générale. VII. k. 82. l. Paris 1889.; Théorie des Surfaces, 79. l., Paris 1891.

82. Valamely forgási felület egyenlete

$$16a^2 (x^2 + y^2) = z^2 (2a^2 - z^2),$$

melyben az $r^2 = x^2 + y^2$ és a z egy φ független változóval következőleg fejezhetők ki:

$$r = \tfrac{1}{4} a \cos \varphi; \qquad z = a (\sin \tfrac{1}{2}\varphi - \cos \tfrac{1}{2}\varphi);$$

e helyettesések az egyenletet kielégítik. Bizonyíttassék be, hogy e felület geodätikus görbéi valamenynyien térbeli ∞ (nyolczas) alakúak, hogy zártak s hogy hoszszúságuk ugyanaz. Ap.

242. §. *Feladatok szilárd sima felületeken végbemenő vegyes pontmozgásokra.*

83. Anyagi pont az $x^2 + y^2 - 2pz = 0$ egyenletű, csúcsával lefelé néző forgási paraboloid belső sima felületén a föld nehézségi erő hatása alatt mozog; a Z tengely függélyesen felfelé van irányítva. Bizonyíttassék be, hogy a tautochrona oly görbe, melynek a vízszintes síkra való vetülete:

$$[p^2 r^2 (r^2 - a^2)] (d\vartheta)^2 = [a^2 p^2 + (pc - p^2 + a^2) r^2 - r^4] (dr)^2;$$

hol $r^2 = x^2 + y^2$ és a és c állandók. S. G.

84. Nehéz pont vertikális tengelyű, csúcsával felfelé néző $x^2 + y^2 = 2pz$ egyenletű paraboloid domború oldalán mozog a földnehézség egyedüli hatása alatt; kerestessék az a görbe, a melyen a pont haladva, egyenlő időközökben, egyenlő magasságokat fut át. E pálya vízszintes vetületének egyenlete polárcoordinátákban, ha a, b, c állandók:

$$c^4 r^2 (d\vartheta)^2 = (r^2 - a^2)(r^2 + b^2)(dr)^2. \qquad \text{S. G.}$$

85. Nehéz pont sima gömbfelületen tartozik mozogni a földnehézség egyedüli hatása alatt. Bizonyíttassék be, hogy az m pályája brachystochróna, ha megfelel az

$$(d\vartheta)^2 \sin^2\eta\,(a^2\sin^2\eta - \cos\eta - \cos\eta_0) = (d\eta)^2(\cos\eta - \cos\eta_0)$$

egyenletnek, melyben a a gömb sugara, η az Om sugár s a lefelé vont vertikális közötti szög, η_0 ennek $v=0$ melletti értéke és ϑ a sugár vízszintes vetülete s egy szilárd vízszintes egyenes közötti szög. S. G.

86. Az m tömegű pont sima $F=0$ egyenletű forgási felületen mozog a Z symmetria-tengely felé fordított, arra merőleges,

$$\varphi(r) = -m(C^2 r + D^2)$$

nagyságú vonzás hatása alatt, hol C^2 es D^2 positiv állandók, r az m távolsága a Z-től. Az m pályája itt [55. §. 1. pontja] geodätikus görbe, mert e független erőnek a felület érintősíkjába eső componense belé csik az m mindenkori mozgása irányába. Legyen O, a felület oly pontja, melyre nézve az m pont azon pályája, mely O,-ban a felület P_0 párhuzamos körét érinti, egyszersmind tautochrona és O, a tautochronismus pontja. Határoztassék meg a felület meridiánjának az alakja. S. G.

[Jeleljék s az mO, ívet, T a periodus tartamát, továbbá legyen:

$$\Gamma^2 = C^2 T^2 \pi^{-2}; \qquad \Delta^2 = D^2 T^2 \pi^{-2},$$

r_0 a P_0 kör sugarát, i a szöget, mely alatt a geodätikus vonal m-ben metszi az m-en átmenő r sugarú párhuzamos kört, akkor a tautochronismus és a geodätikus görbe egyenletei [164. §. (6) és 184. §. (3)]:

$$-m(C^2 r + D^2)\frac{dr}{ds} = -\frac{\pi^2}{T^2} ms; \qquad \sin i = \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r};$$

Másrészt $\{(dr)^2 + (dz)^2\}^{\frac{1}{2}} = ds \cdot \sin i$ a meridián íveleme, mely a felírt két összefüggés alapján (az első integrálját véve), nyerjük

$$\{(dr)^2 + (dz)^2\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r} \cdot \frac{(\Gamma^2 r + \Delta^2)\,dr}{\{\Gamma^2(r^2 - r_0^2) + 2\Delta^2(r - r_0)\}^{\frac{1}{2}}}$$

alakban adja meridián keresett egyenletét, melyből a z az r elliptikus integráljaiban fejezhető ki; a feladatnak megfelelő meridiánrész alakja a cissoisra emlékeztet, melynek $y^2(a-x) = x^3$ az egyenlete. [Math. Rep. 65. §. 1.]

Speciális esetek: 1) ha $D^2=0$, a $\varphi(r)$ az r-el arányos, a meridián egyenes s az F egyenes körkúp;

2) ha $C^2=0$, a $\varphi(r)$ állandó és

$$dz = +\frac{dr}{r}\sqrt{\tfrac{1}{2}\Delta^2(r + r_0) - r^2},$$

mely véges alakban integrálható és még mindig a cissoisra emlékeztet;

3) ha $\Gamma^2=1$, akkor

$$dz = + \Delta . \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{2rr_0+\Delta^2(r+r_0)}{r+r_0+2\Delta^2}};$$

a meridián érvényes részének egyik vége a Z tengely asymptotusa, másik vége parabola-ív, melynek érintője a Z-re merőleges irányúvá válni törekszik. Kifejtette A.]

87. Az ellipsoid geodätikus görbéivel bizonyíttassék be [185. és 229. §§. (8) és (15)], ha $\varkappa^2 < b^2$, hogy akkor

$$c^2 < q_2^2 < \varkappa^2 \quad \text{és} \quad b^2 < q_1^2 < a^2$$

és a geodätikus görbe azon két görbületi görbe [Math. Repertórium 95. §.] között terül el, melyet a $q_2^2=\varkappa^2$ egyhéjú hyperboloidnak az ellipsoiddal való metszése * szolgáltat. Ha pedig $\varkappa^2 > b^2$, akkor

$$c^2 < q_2^2 < b^2 \quad \text{és} \quad \varkappa^2 < q_1^2 < a^2$$

és a geodätikus görbe azon két görbületi görbe között terül el, mely a $\varkappa^2=q_1^2$ kéthéjú hyperboloidnak az ellipsoiddal való metszéséből keletkezik. V.

88. A megelőző feladat kiegészítésére bizonyíttassék be, hogy a $\varkappa^2=a^2$ és a $\varkappa^2=c^2$ határesetekben a geodätikus görbe, az YZ-, illetve az XY síkban fekvő ellipsis. Továbbá, hogy a $\varkappa^2=b^2$ kivételes esetben a 229. §. (8) vagy (15) integráljai elliptikusokra redukálódnak; ezenkívül, mivel $q_2^2 < \varkappa^2 < q_1^2$ és $q_2^2 < b^2$, itt a q_2^2 vég nélkül közeledik a b^2 felé s a geodätikus görbe áthalad az ellipsoid egy körpontján (ombilikon, Math. Rep. 92. §.), melytől eltávozva a diametrálisan ellenkező körponton halad át és innen viszsza. V.

89. Ha a megelőző feladat folytatásaképen O_1 és O_2 az ellipsoid két, *nem* diátmetrálisan egymással szemben fekvő körpontja, s ha AO_1 és AO_2 az m-nek A helyzetét az O_1, illetve az O_2-vel egybekapcsoló két geodätikus görbe: akkor bizonyíttassék be, hogy e két görbe az A-n átmenő görbületi görbéket ezen A-ban egyenlő szög alatt metszi.

Továbbá: ha az A görbületi görbén halad, a fent nevezett geodätikus ívek $AO_1 + AO_2$ összege vagy különbsége állandó. Ap.

90. Ha az m pont bármi sima felületen oly nagy sebességgel indíttatik meg, hogy az indítás utáni első időben a földnehézség létesítette sebességváltozás a kezdő sebességhez képest igen kicsiny, akkor az m pályája egy geodätikus görbétől csak kevéssé különbözik. Fejeztessék ki e különbség első közelítésben legalább a forgási felületekre [183. §. (9) és 184. §. (2)] nézve. A.

91. Vizsgáltassanak meg nehéz pont apró lengési homorú sima felület legmélyebb pontja körül. V.

---

* Az egymást orthogonálisan metsző felületek metszőgörbéi mind görbületi görbék [Kinematika 343. §. I., 589. l.].

[Magasabb rendűek elhanyagolásával a felületnek e legmélyebb O pontja körül fekvő része az e ponthoz tartozó osculáló felülettel egybeesőnek tekinthető [Math. Repertórium 81. §. (3a)]. Az ott írt Δz, Δx, Δy helyébe az itt másodrendű kicsiny z-t, és az elsőrendű kicsiny x-t s y-t írva, s az XY síkot a felület érintő síkjába fektetve s a coordinátákat az O érintési ponttól számítva, az osculáló felület egyenlete:

$$z=\tfrac{1}{2}rx^2+sxy+\tfrac{1}{2}ty^2.$$

Ezt egyszerűsíthetjük, ha az X s az Y tengelyt az O főérintőibe helyezzük: ekkor [Math. Rep. 89. §. (1) és (9) és 90. §. (2) egyenletei értelmében] ezen O pontra nézve nem csak $p=0$, $q=0$, hanem $s=0$, miáltal a főgörbületi sugarakra nézve [Math. Rep. 90. §. (8)]:

$$\varrho_1+\varrho_2=\frac{t+r}{rt}=\frac{1}{r}+\frac{1}{t}; \qquad \varrho_1\varrho_2=\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{t};$$

miből

$$r=\frac{1}{\varrho_1}; \qquad t=\frac{1}{\varrho_1},$$

és az osculáló felület egyenlete:

$$z=\frac{x^2}{2\varrho_1}+\frac{y^2}{2\varrho_2},$$

hol x és y igen kicsinyek az itt parameterekként szereplő ϱ_1 és ϱ_2-höz képest.

Elhanyagolva az $x:\varrho_1$ és $y:\varrho_2$ viszonyok négyzeteit az egységhez képest, e felület normálisának iránycosinusai $x:\varrho_1$; $y:\varrho_1$; 1; és a mozgás egyenletei, a Z tengely fölfelé lévén irányítva:

$$mx''=-R\frac{x}{\varrho_1}; \qquad my''=-R\frac{y}{\varrho_2}; \qquad mz''=R-mg.$$

Mivel z'' itt a másodrendű kicsiny z-nek elhanyagolható gyorsulása, az utolsó egyenlet $R=mg$ és

$$x=A\cos(t\sqrt{g:\varrho_1}+\alpha); \qquad y=B\cos(t\sqrt{g:\varrho_2}+\beta).$$

Az m mozgása egymásra merőleges két egyszerű harmonikus mozgásból tévődik összse [Kinematika 106. §.]; pályája az

$$x=+A, \quad x=-A; \qquad y=+B, \quad y=-B$$

négy görbe határolta derékszögű négyszögben fekszik. A.].

92. Általánosíttassék a párkányzat-felület problémája [188. §. 2. pontja] azon esetre, mikor az m-re ható P erő V erőfüggvénynyel bír: ugyanis a V niveau-felületei metszik a keresendő F-felületet a niveaugörbék egy seregében s az F annak a feltételnek feleljen meg, hogy a rajta sebesség nélkül elbocsátott, a P hatása alatt mozgó m pályája e niveaugörbéket mindenütt merőlegesen messe.

Bizonyíttassék be, hogy azon szög sinusa, mely alatt egy niveaufelület metszi az F-et egy és ugyanazon niveaugörbe mentén, a P erővel fordítva arányos. S. G.; Ap.

93. Valamely m pont jobbsodrású sima csavarfelületen tartozik mozogni, melynek Z tengelye a távolság harmadik hatványával fordítva arányos, a tengelyre merőleges vonzást fejt ki. Legyenek

$$x=r\cos\vartheta\,;\qquad y=r\sin\vartheta\,;\qquad z=\varkappa\vartheta$$

e felület egyenletei, C^2 a vonzás állandója; a mozgás egyenletei a vezérsugár, a növekvő ϑ-ák és a növekvő z-k mentén rendre:

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2=-\frac{C^2}{r^3}\,;\qquad \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right)=-\frac{R\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2+r^2}}\,;$$

$$\varkappa\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=+\frac{Rr}{\sqrt{\varkappa^2+r^2}}\,.$$

Ezekből a másodikat r-el, a harmadikat $\varkappa$-val szorozva és összegezve s eredményüket az elsővel egyesítve:

$$(\varkappa^2+r^2)\frac{d\vartheta}{dt}=c\,;\qquad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\frac{C^2}{r^2}-\frac{c^2}{\varkappa^2+r^2}+h,$$

c és h integrál-állandók lévén; továbbá

$$dt=\pm\frac{rdr}{\sqrt{F(r^2)}}\sqrt{\varkappa^2+r^2}\,;\qquad d\vartheta=\pm\frac{crdr}{\sqrt{(\varkappa^2+r^2)\,F(r^2)}}\,;$$

végre a harmadik mozgás-egyenletből, a ϑ' és r' nyert értékei felhasználásával:

$$R=\pm\frac{\varkappa}{r}\,.\,\vartheta''\sqrt{\varkappa^2+r^2}=\frac{2\varkappa c\sqrt{F(r^2)}}{r\,(\varkappa^2+r^2)^2}\,;$$

hol

$$F(r^2)=hr^4+(C^2+h\varkappa^2-c^2)\,r^2+C^2\varkappa^2.$$

Ezen eredményből a pálya s a mozgás sajátságai származtathatók.

Ha $F(r^2)=0$, akkor r^2 két gyökértéke közül a positiv veendő s ez állandóságánál fogva egyszerű csavargörbét jelent; itt még $R=0$ s így e görbét az m a nevezett feltételek alatt szabadon írja le.

Terjesztessék ki ez az utóbbi eredmény a tengelytől való távolság bármily függvényű vonzására. S. G., kifejtette A.

94. A megelőző feladat csavarfelületére nézve fejeztessenek ki a geodätikus görbék egyenletei, az idézett feladat egyenleteibe csak $C=0$ teendő s e görbék egyenletei elliptikus integrálokra redukálódnak, melyek a $c=0$ speciális esetben a csavarfelület generatrix-egyenesét szolgáltatják. V.

95. Valamely felület egy vízszintes OX vonalon halad át; mily alakúnak kell lennie e sima felületnek, hogy valamely nehéz pont, mely e felületen tartozik maradni, ezen egyenes bármily helyéből sebesség

nélkül elbocsátva, a földnehézség hatása alatt vertikális (OZ) tengelyű csavargörbét írja le? CATALAN (Liouville, Journal d. Math. XI. k. 1846).

[α. A keresett felület egy-egy csavargörbéjének egyenletei:

$$x=r\cos\vartheta\,;\qquad y=r\sin\vartheta\,;\qquad z=f(r)\,\vartheta\quad .\ .\ .\ .\ (00)$$

hol $f(r)$ egy ismeretlen, meghatározandó függvény; e szerint a felület egyenlete, ennek quotiensei és a mozgás egyenletei írhatók:

$$F=z-f(r)\,\vartheta=z-f\{\sqrt{(x^2+y^2)}\}\ \text{arc tg}\ (\frac{y}{x})=0.$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}&=-\frac{df}{dr}\,\frac{x}{r}\,\vartheta+\frac{yf(r)}{x^2+y^2}\,;\\ \frac{\partial F}{\partial y}&=-\frac{df}{dr}\,\frac{y}{r}\,\vartheta-\frac{xf(r)}{x^2+y^2}\,;\qquad \frac{\partial F}{\partial z}=1.\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ (0)$$

$$\sqrt{(\frac{\partial F}{\partial x})^2+(\frac{\partial F}{\partial y})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^2}=\{(\frac{df}{dr}\,\vartheta)^2+\frac{(f(r))^2}{r^2}+1\}^{\frac{1}{2}}.$$

$$\left.\begin{aligned}mx''&=-R\,.\,\frac{\partial F}{\partial x}:\sqrt{(\frac{\partial F}{\partial x})^2+(\frac{\partial F}{\partial y})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^2}\,;\\ my''&=-R\,\frac{\partial F}{\partial y}:\sqrt{\ldots}\,;\qquad mz''=-R:\sqrt{\ldots}+mg.\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ (1)$$

β. Ha m közönséges csavargörbén mozog, melynek érintője a vízszintessel i szöget képez, akkor:

$$x=a\cos\vartheta\,;\qquad y=a\sin\vartheta\,;\qquad z=(a\,\text{tg}\,i)\,\vartheta\,;\qquad ds=ad\vartheta:\cos i\,;$$

$$x''=-a\cos\vartheta\vartheta'^2-a\sin\vartheta\vartheta''\,;\quad y''=-a\sin\vartheta\vartheta'^2+a\cos\vartheta\vartheta''\,;\quad z''=(a\,\text{tg}\,i)\,\vartheta'',$$

az érintő menti erőcomponens:

$$ms''=mg\sin i,\quad \text{azaz}\quad a\vartheta''=s''\cos i=g\sin i\cos i=\text{constans}\,;$$

$$x'':y''=(x\vartheta'^2+y\vartheta'')\,:\,(y\vartheta'^2-x\vartheta'')\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

γ. Ha m az F felületen $a=r$ sugarú csavargörbén mozog, akkor (1) és (2) egyszerre áll, miből

$$\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial y}=(x\vartheta'^2+y\vartheta'')\,:\,(y\vartheta'^2-x\vartheta''),$$

mely feltétel, tekintettel (0)-ra, kielégíthető az

$$\vartheta'^2=-G\,\frac{df}{dr}\,\frac{\vartheta}{r}\,;\qquad \vartheta''=+G\,\frac{f(r)}{r^2}\quad .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

egyenletekkel, hol G egy arányossági tényező és ϑ'' a β. pont szerint állandó, és így ezen $r=a$ esetben G is csak állandó lehet, azaz, általában véve, a G csak az r függvénye vagy állandó lehet.

Differentiálva a (3) elsejét t szerint, $r=a$-t itt állandónak tekintve, osztva ϑ'-el s a másodikkal:

$$\frac{2dr}{r} = -\frac{df}{f}; \qquad -\lg r^2 = \lg f + \text{const.},$$

mely $f(r)=r_0^3 : r^2$ alakban írható; a (00) értelmében az $r=r_0$ azon csavarvonal hengersugara, mely vonal érintője a vízszintessel $\frac{1}{4}\pi$ szöget képez.

Tetszőleges r sugarú ily vonal hajlásszöge i, reá nézve $z=(r \,.\, \operatorname{tg} i)\,.\,\vartheta$, s így (00) szerint $f(r)=r \operatorname{tg} i = r_0^2 : r^2$, miből $\operatorname{tg} i = r_0^3 : r^3$ és

$$z = \frac{r_0^3}{r^2}\,\vartheta \qquad \text{vagy} \qquad z=(r \operatorname{tg} i)\,\vartheta$$

a keresett felület egyenlete. A.]

243. §. *Feladatok előírt mozgó, sima felületeken történő pontmozgásra.*

Megjegyzés: Ide tartozóknak tekinthetők a D'Alembert elve alapján megfejtendő, a 248. §-ban felsorolt feladatok közül a 153, 154. számúak.

96. Nehéz m pont sima síkon tartozik maradni, mely saját síkjában fekvő, a vízszintessel i szöget képező Z tengely körül állandó szögsebességgel forog. A.

[A 210. §. 2. példája (1) egyenleteibe teendő, miként azonnal észrevenni:

$$P_r = -mg \sin\vartheta \cos i; \qquad P_\vartheta = -mg \cos\vartheta \cos i; \qquad P_z = -mg \sin i,$$

hol ϑ az a szög, melyet a mozgó sík a Z tengelyt tartalmazó, a vízszinteshez i hajlású szilárd síkkal képez; e szög továbbá $\vartheta=\omega t$, ω *állandó* lévén; ez által a mozgás egyenletei, $-\lambda$ lévén a kényszererő:

$$r''-\omega^2 r = -g \cos i \sin(\omega t); \qquad 2\omega r' = -g \cos i \cos(\omega t) - \lambda; \qquad z'' = -g \sin i,$$

melyek az idézett hely eljárása szerint teljesen megfejthetők. A.]

97. Az m pont sima körhengerfelületen tartozik maradni, mely geometriai tengelyére merőleges tengely körül állandó szögsebességgel forog. A.

[Legyen Z, a forgás tengelye, X, a hengeré, Y, az e kettőre merőleges coordináta-tengely; ez a hengerrel együtt forgó rendszer, melyre vonatkozólag a henger egyenlete:

$$2F = y_1^2 + z_1^2 - a^2 = 0,$$

ha a sugara és x_1, y_1, z_1 az m relativ coordinátái e rendszerben. Ekkor a 124. §. (2) egyenletei:

$$mx_1'' = (X)_1 + m\omega^2 x_1 + 2m\omega y_1';$$

$$my_1'' = (Y)_1 + m\omega^2 y_1 - 2m\omega x_1' + \lambda y_1; \qquad mz_1'' = (Z)_1 + \lambda z_1.$$

Ezekben a független (szabad) erőknek a forgó tengelyek menti $(X)_r$, $(Y)_r$, $(Z)_r$ componensei advák és

$$\lambda\sqrt{y_r^2+z_r^2}=a\lambda$$

a relativ mozgás kényszerereje.

A harmadik egyenletben z_r-t és z_r''-t az $z_r^2=a^2-y_r^2$ alapján y_r, y_r'- s y_r''-el kifejezve és ezen s a középső egyenletből, λ-át eliminálva: nyerjük az x, y és l közötti két differentiálegyenletet, melyet az olvasó vizsgáljon meg tovább. A.]

98. Az előbbi feladat, de az előírt felület körkúp legyen, melynek fél nyilásszöge α, geometriai tengelye az X, s forgástengelye az ezt merőlegesen metsző Z_r, melytől a csúcs b távolnyira legyen. A.

[A felület egyenlete relativ coordinátákban

$$2F=(x_r+b)^2\operatorname{tg}^2\alpha-y_r^2-z_r^2=0,$$

miáltal a relativ kényszererő componensei

$$\lambda(x_r+b)\operatorname{tg}^2\alpha,\qquad -\lambda y_r,\qquad -\lambda z_r,$$

s így a relativ mozgás egyenletei a 124. §. (2) sémája alapján felirhatók és a megelőző feladat megjegyzése értelmében tárgyalhatók.

A kényszererő itt

$$\lambda\{(x_r+b)^2\operatorname{tg}^4\alpha+y_r^2+z_r^2\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\lambda(x_r+b)\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1+tg^2\alpha}=\lambda(x_r+b)\sin\alpha:\cos^2\alpha.\quad\text{A.]}$$

99. Az általános másodrendű felületek ilynemű megvizsgálása bonyolódott lévén, állíttassanak fel a relativ mozgás egyenletei csak a másodrendű sima forgási felületeken maradó m-re nézve, ha a forgási Z_r tengely a felület geometriai tengelyére merőleges. Továbbá fejtessék meg a megelőző két és a jelen feladat, *a)* ha semmiféle független erő nem hat, *b)* ha csak a föld nehézsége hat. Ha az általános megfejtés bonyolodott: kisértessék meg a differentiálegyenleteknek sorba fejtés segélyével való megoldása, vagy azon eset taglalása, mikor a forgás igen lassú és az ω^2-es tagok elhanyagolhatók az első hatványú tagokhoz képest. A.

100. Excentrikus tengely körül állandó szögsebességgel forgó sima gömbön végbemenő pontmozgás differentiálegyenletei. Speciális esetek: *a)* A pontra a forgás tengelyétől való távolsággal arányos, e távolságba eső erő hat. *b)* A pontra csak a földnehézségi erő hat. A.

[Czélszerű a gömbbel együtt mozgó oly tengelyrendszert bevezetni, melynek pl. Z_r tengelye a forgás tengelye, X_r tengelye erre merőleges s a gömb középpontján megyen keresztül; ezekre merőleges az Y_r tengely.

A relativ coordinátái a mozgó m-nek

$$x_r=r\cos\vartheta;\qquad y_r=r\sin\vartheta;\qquad z_r=z.$$

A gömb sugara a, középpontjának Z-től való távolsága b; egyenlete:

$$a^2=(b-r\cos\vartheta)^2+r\sin\vartheta+z^2=z^2+r^2+b^2-2rb\cos\vartheta=2F(r,\vartheta,z)+a^2.$$

A 124. §. (2) sémája értelmében, ha P_r, P_ϑ, P_z a független erőnek a mozgó, relativ coordináták r, $r\vartheta$, z irányai menti componenseinek m-el való osztataik, e relativ mozgás egyenleteit nyerjük, ha az idézett rendszer első két egyenletét rendre $x_r:r$, $y_r:r$-rel, illetve $-y_r:r$, $x_r:r$-rel szorozva összszegezzük s így ezeket az r és az $r\vartheta$ irányaira vonatkoztatjuk:

$$r''-r\vartheta'^2=P_r+\omega^2 r+2\omega r\vartheta'+\lambda\frac{\partial F}{\partial r};$$

$$r^{-1}(r^2\vartheta')'=P_\vartheta-2\omega r'+\lambda\cdot\frac{\partial F}{r\partial\vartheta};$$

$$z''=P_z+\lambda\frac{\partial F}{\partial z};$$

hol az utolsó tagok itt

$$\lambda(r-b\cos\vartheta),\qquad \lambda b\sin\vartheta,\qquad \lambda z.$$

a) Az *a)* alatti esetben

$$cr=P_r;\qquad P_\vartheta=P_z=0;$$

s az egyenletek jobb oldalai:

$$(c+\omega^2)r+2\omega r\vartheta'+\lambda(r-b\cos\vartheta);\qquad -2\omega r'+\lambda b\sin\vartheta;\qquad \lambda z.$$

b) A *b)* alatti esetben

$$P_r=P_\vartheta=0,\qquad P_z=-g$$

és e jobb oldalak

$$\omega^2 r+2\omega r\vartheta'+\lambda(r-b\cos\vartheta);\qquad -2\omega r'+\lambda b\sin\vartheta;\qquad -g+\lambda z.$$

A három mozgási egyenlet s az $F(r,\vartheta,z)=0$ feltétel elegendő a λ, r, ϑ és z-nek t-ben való kifejezésére és a pálya előállítására. A.]

c) Feladatok surlódással és közeg-ellenállással történő pontmozgásokra.

244. §. *Feladatok előírt szilárd vagy mozgó érdes pályán végbemenő pontmozgásra.*

101. Az m nehéz pont a földnehézség hatása alatt vertikális síkú kör vízszintes átmérője végéről esik e kör érdes homorú oldalan lefelé; k a surlódás állandó együtthatója. Ha m a kör legmélyebb pontján megáll, akkor

$$3ke^{-k\pi}+2k^2=1.$$ T. a. St., W.

[A 179. §. 3*a*. példája utolsó formulájába $s=0$ és $s=\frac{1}{2}a\pi$ esetekre nézve $v^2-v_0^2=0$-t téve, az eredmény adódik. A.]

102. Az m egy a sugarú kör homorú érdes oldala mentén v_0 sebességgel lesz elhajítva, reá független (szabad) erő nem hat; bebizonyítandó, hogy az m az elhajítás helyére

$$a\,(e^{2k\pi}-1)\,k^{-1}\,v_0^{-1}$$

idő mulva tér viszsza. T. a. St.

[A 178. §. (6) egyenlete az $s=2a\pi$ esetre azonnal adja az eredményt. A.]

103. Valamely m nehéz pont a föld nehézségi erő hatása alatt esik vertikális síku és tengelyű, csúcsával lefelé néző cyclois érdes homorú oldalán. Ha a $v=0$-nál a kezdőhelyzet érintője a vízszintessel α_0 szöget képez és az m a cyclois legmélyebb pontjában jő nyugalomra, akkor, miként bebizonyítandó:

$$ke^{k\alpha_0}=\sin\alpha_0-k\cos\alpha_0,$$

mely egyenlet, ha m a cyclois legmagasabb, $\alpha_0=\frac{1}{2}\pi$ adatú pontból esik, $k^2e^{k\pi}=1$ alakú. T. a. St., W.

[Ugyanis itt, a 179. §. (11), (12) egyenletei, a 161. §. eleje és a 61. ábra tekintetbe vételével, *lefelé* mozgással lévén dolgunk:

$$S_1=-2k\,d\alpha:ds;\quad S=-2g\,(\sin\alpha-k\cos\alpha);$$
$$S_1\,ds=-2k\,d\alpha;\qquad ds=+4gC^{-2}(1+k^2)\cos\alpha\,d\alpha;$$

e szerint az idézett (11) egyenlet:

$$v^2=e^{2k\alpha}\left\{-8gC^{-2}(1+k^2)\int e^{-2k\alpha}\left(\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha-k\cos^2\alpha\right)d\alpha+B\right\};$$

melynek kiértékesítése [Math. Rep. III. §. 16. és 17. formulái] és összevonása után:

$$v^2=-4gC^{-2}(\sin\alpha-k\cos\alpha)^2+Be^{2k\alpha}.$$

A feladat feltételei: $v=0$ az $\alpha=9$- és $\alpha=\alpha_0$-nál, melyek a kiírt eredményt adják. A.]

104. Nehéz pont vertikális síkú, domborúságával felfelé néző érdes cycloison gördül. S. G.

[A görbe csúcsának vízszintes érintője s a görbe lefelé irányított tengelye legyenek az X, Y tengelyek; ekkor [v. ö. a 158. §. 3. pontját] az érintő és az OX közötti szög $\frac{1}{2}\vartheta$ és

$$x=a(\vartheta+\sin\vartheta);\quad y=a\,(1-\cos\vartheta);\quad ds=2a\cos\tfrac{1}{2}\vartheta\,d\vartheta;\quad \varrho=4a\cos\tfrac{1}{2}\vartheta.$$

Az 50. §. (4) és (3) egyenletei itt, míg m a görbe homorú oldalán halad:

$$d\,(\tfrac{1}{2}mv^2)+kR\,ds=mg\sin\tfrac{1}{2}\vartheta\,ds;\qquad mv^2:\varrho=mg\cos\tfrac{1}{2}\vartheta-R.$$

Eliminálva a két egyenletből R-et, ds-et és ϱ-t ϑ és $d\vartheta$-val fejezve ki:

$$\frac{d}{d\vartheta}(v^2) - kv^2 = 4ag\cos\tfrac{1}{2}\vartheta\{\sin\tfrac{1}{2}\vartheta - k\cos\tfrac{1}{2}\vartheta\} = 2ag\{\sin\vartheta - k(1+\cos\vartheta)\}.$$

A 165. §. lábjegyzéke β) egyenlete alapján:

$$v^2 = e^{k\vartheta}\{2ag\int e^{-k\vartheta}[\sin\vartheta - k(1+\cos\vartheta)]\,d\vartheta + \text{const.}\}$$

Az integrátió elvégezhető [Math. Rep. 111. §. 16. és 15. formulái], s ha még írunk $k = \operatorname{tg}\varepsilon_0$, és $\vartheta = 0$-kor $v = v_0$, a

$$(\sin^2\varepsilon_0 + \cos^2\varepsilon_0)\,(\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta + \cos^2\tfrac{1}{2}\vartheta) = 1$$

identitás felhasználásával nyerjük:

$$v^2 = 4ag\sin^2(\varepsilon_0 - \tfrac{1}{2}\vartheta) + (v_0^2 - 4ag\sin^2\varepsilon_0)\,e^{\vartheta\operatorname{tg}\varepsilon_0},$$

melylyel az R is kifejezhető. Az s és t, vagy a ϑ és t közötti összefüggés általában igen bonyolodott. Ha

$$v_0^2 = 4ag\sin^2\varepsilon_0,$$

akkor v^2-egyenletéből

$$4a^2\cos^2\tfrac{1}{2}\vartheta\,(d\vartheta)^2 = 4ag\sin^2(\varepsilon_0 - \tfrac{1}{2}\vartheta)\,(dt)^2;$$

$$dt\sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{\cos[\varepsilon_0 - (\varepsilon_0 - \tfrac{1}{2}\vartheta)]}{\sin(\varepsilon_0 - \tfrac{1}{2}\vartheta)}\,d\vartheta.$$

Kifejtve és integrálva $t = 0$, $\vartheta = 0$-tól kezdve [Math. Rep. 110. §. 18.]

$$t\sqrt{\frac{g}{a}} = \vartheta\sin\varepsilon_0 + 2\cos\varepsilon_0\lg\frac{\sin\varepsilon_0}{\sin(\varepsilon_0 - \tfrac{1}{2}\vartheta)}.$$

Részleteztessék és értelmeztessék az eredmény. A.]

105. Az m tetszőleges sík érdes görbén P_t tangentiális, P_n normális erő hatása alatt mozog.

Bebizonyítandó, hogy az eleven ereje:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = e^{-2k\vartheta}\int e^{+2k\vartheta}(P_t + kP_n)\,ds,$$

hol a 49. §. (6) jelölései állanak és $\varrho = ds : d\vartheta$. T. a. St., K., W.

[Az eredmény adódik, ha az 50. §. (2) rendszere első két egyenletét úgy egyesítjük, mint a megelőző feladat két mozgásegyenletét s a származott egyenletet a 165. §. lábjegyzéke β) sémája szerint integráljuk. A.]

106. Vertikális tengelyű érdes körkúp csúcsa felfelé néz; egy m tömegű nehéz pont a csúcshoz erősített, súlytalannak veendő kiterjeszthetetlen fonál alsó végén függ s a kúpon marad. Ha α a kúpszögnyilásának fele, Ω_0 a vertikális tengely körüli azon legkisebb szögsebesség, mely m-et a kúp elhagyására készteti, ω_0 az ennél kisebb kezdő

szögsebesség, melylyel a pont el leszen indítva, k a surlódás együtthatója; bizonyíttassék be, hogy m a

$$\frac{1}{2k\Omega\cos\alpha}\lg\frac{\Omega_0+\omega_0}{\Omega_0-\omega_0}$$

idő múlva jő nyugalomba. Fejeztessék ki a normális nyomás, a fonál feszültsége és a változó ω szögsebesség. T. a. St.

[Az m a kupon *kört* ír le; saját súlya a kúpra merőleges componensével e felületre nyomja, sebességéből származó röpítő ereje ettől vízszintesen eltávolítani törekszik; a mozgás egyenletei azonnal felállíthatok. A.]

107. Súlytalan m pont egyenes, érdes belsejű csőben mozoghat; a cső egy reá merőleges, azt metsző tengely körül állandó ω szögsebességgel forog; kerestessék a mozgás és a cső falára gyakorolt nyomás. V.

[A megfejtésre pl. a Kinematika 41. ábrája 107. l. és 85. §-a (4*a*) egyenletei szolgálhatnak, ha m-el szorozzuk, s ha X_1 a csövet jelenti, az

$$m(x''\cos\alpha+y''\sin\alpha) \quad \text{és} \quad m(-x''\sin\alpha+y''\cos\alpha)$$

itt az absolut, szabad erőknek a mozgó X_1 és Y_1 tengelyek menti componensei, melyek zérusok, mivel m-re szabad erők nem hatnak, továbbá, az m az X_1 mentén haladhatván csak: $y_1=0$, y_1' és $y_1''=0$; végre az Y_1-hez párhuzamosan, a mindenkori forgás iránya mentén vagy avval ellentetten (a szerint a mint x_1' positiv vagy negativ) az m-re hat a cső reactiója (kényszerereje) R, s így surlódásnélküli mozgásnál ezen egyenletek

$$mx_1''=m\omega^2x_1; \qquad -R=-2m\omega x_1';$$

a surlódás az R nyomás k szorosa legyen, mely x_1''-et csökkenti; a mozgás egyenlete, a közös m elhagyásával

$$x_1''=\omega^2x_1-2k\omega x_1',$$

melynek integrálja, [v. ö. Kinematika 96. §. a 133. lapja lábjegyzékét]

$$x_1=e^{-k\omega t}\left\{Ae^{+\omega t\sqrt{1+k^2}}+Be^{-\omega t\sqrt{1+k^2}}\right\};$$

hol az A és B integrátió-állandók a $t=0$ érvényes $x_1=a$ és $x_1'=u$ kezdő értékekből határozódnak meg.

Részleteztessék a mozgás és a reactió. Fejtessék meg e probléma a relativ mozgás 124. §. (2) egyenletei alapján. A.]

108. Egyenes érdes cső vertikális síkban forog egy pontja körül; benne nehéz pont mozog surlódás és közegellenállás alatt; bizonyíttassék be (a megelőző feladat alapján), hogy mozgásának egyenlete,

$$x_1''=g\cos\vartheta+\omega^2x_1-2k\omega x_1'-2\varkappa x_1',$$

hol ϑ a cső s a lefelé húzott vertikális közötti szög, $\omega=\frac{d\vartheta}{dt}$ és $2\varkappa$ a

közegellenállás együtthatója. A $\vartheta = f(t)$ adva lévén az egyenlet a parameterek variátiója módszere szerint fejthető meg. A.

245. §. *Feladatok előírt szilárd vagy mozgó érdes felületen történő pontmozgásokra.*

109. A 190. §. példájában, a vertikális körhenger belső falán való mozgásnál a surlódást kR-nak vettük, k ott állandó lévén; bizonyíttassék be, hogy e probléma teljesen integrálható, ha $k = hv$, azaz ha a surlódást a normális nyomás és a relativ sebesség szorzatával arányosnak veszszük, k most változó, h állandó lévén. Közelebbről pedig, ha az m pont $t=0$-kor az XZ síkban z_0 magasságban v_0 sebességgel a lefelé irányított Z tengelylyel η_0 szöget képezve indúl el, s ha rövidség kedveért

$$v_0^2 h \sin^2 \eta_0 : a = \varkappa,$$

akkor

$$x = a \cos\left(\frac{\sqrt{1+2\varkappa t}-1}{v_0 h \sin \eta_0}\right); \qquad y = a \sin\left(\frac{\sqrt{1+2\varkappa t}-1}{v_0 h \sin \eta_0}\right);$$

$$z = z_0 + \frac{g - 3 v_0 \varkappa \cos \eta_0}{3\varkappa^2}\left[\sqrt{1+2\varkappa t}-1\right] - \frac{gt}{3\varkappa}(1+\varkappa t).$$

Maksay Zs., Math. és Phys. Lapok II. kötete 201—205. ll. 1893.

110. Forgási paraboloid csúcsával lefelé néz és vertikális tengelye körül állandó szögsebességgel forog. Belső érdes felületén m tömegű nehéz pont van elhelyezve; bebizonyítandó, ha a szögsebesség nagyobb mint $k\sqrt{g:h}$, vagy kisebb, mint $k^{-1}\sqrt{g:h}$, hogy akkor m, bizonyos zóna kivételével e felületen egyensúlyban maradhat, k lévén a surlódás állandó együtthatója, h a felület parameterétől függő állandó; ellenben, ha a szögsebesség e két érték között fekszik, hogy akkor az m a felület minden pontjában lehet egyensúlyban. T. a. St.

[A 29. §. megfontolásai a centrifugális erő figyelembe vételével e feladat elegendők. A.]

111. Állíttassanak fel a surlódó pontmozgás egyenletei vertikális tengelyű csúcsával lefelé néző körkúp homorú felületére nézve és kerestessék a surlódás azon törvénye, melyre nézve az egyenletek integráljai véges alakban előállíthatók. A.

112. Az 56. §. 5. pontjának *a)* tétele értelmében előírt felületen haladó pont, melyre ható független erőnek az érintősíkra való vetülete a mindenkori mozgás mentébe esik, még akkor is ír le geodätikus görbét, mikor az surlódással vagy közegellenállással történik. Fejeztessék ki a sebesség, mint az idő függvénye ily esetekben. Kiinduló pontúl az 56. §-nak (3)

$$T = ms'' = P_t - kR \quad \text{és} \quad N = m\varrho_n^{-1}v^2 = P_n + R$$

egyenletei szolgálhatnak, miután már előzetesen ugyane §. (5) egyenletei segélyével a geodätikus görbék egyenletét nyertük. Ekkor P_t és P_n az s-nek már ismert s adott függvényei, míg $R = m\varrho_n^{-1}v^2 - P_n$-et az első egyenletbe helyettesítve és $s'' = \frac{1}{2}d(v^2) : ds$-et írva, belőle:

$$\tfrac{1}{2}m\frac{d(v^2)}{ds} + k(m\varrho_n^{-1}v^2 - P_n) - P_t;$$

$$\frac{d(v^2)}{ds} + 2km\frac{v^2}{\varrho_n} = P_t + kP_n,$$

mely egyenlet, miután a v^2 kivételével a benne előforduló menyniyiségek az s függvényei, a k pedig egyszerűség kedvéért állandónak veendő, a parameterek variatiója szerint megfejthető [165. §. lábjegyzékének *β)* egyenlete] s így a $v=ds:dt$-ből az időtől való függés is adódik.

Fejtessék ki ez az eredmény a körhengerre nézve, melynek geodätikus görbéi csavarvonalak [184. §. (5)], P_t és P_n tetszőlegesek lévén. A.

113. Vizsgáltassék meg a másodrendű forgás-felületekre nézve a megelőző feladat problémája, benne egyszerűség kedvéért P_t és P_n-et zérusnak véve s a 241 §. 75—80. feladataiban írt egyenleteit a geodätikus görbéknek felhasználva. A.

114. Kisértessék meg ugyanez a probléma a háromtengelyű ellipsoidra nézve, melynek geodätikus görbéin [185. §. példája] való mozgásnál P_t és P_n szintén zérussal legyenek egyenlők. A.

115. *Mozgó érdes* felületeken való anyagi pontmozgás kipuhatolására az 57. §. egyenletei alkalmasak; a mozgás egyenletei a nem sima mozgó felületekre nézve a sima mozgó felületekre nézve érvényes egyenletekből adódnak, ha ezekhez a surlódási erő három componenseit adjuk. A legegyszerűbb feltevés, Coulomb szabálya szerint ez az erő a relativ normális kényszererővel egyenesen arányos és a felülethez való relativ mozgás mindenkori érintője menten fekszik. E normális kényszerert a sima felületen való mozgás egyenletei szolgáltatják és így ezeknek formális hozzákapcsolása önként addik. A további vizsgálatok pl. az 57. §. általáuos eljárása szerint történik; de csak kivételes esetekben várhatunk egyszerű eredményt.

246. §. *Feladatok ellenálló közegben történő szabad pontmozgásra.*

116. Mozgó pont egyenesvonalú pályaíve az idő négyzetes függvénye; (a 191. §. I. szakasza alapján) bebizonyítandó, hogy ekkor a közeg ellenállása állandó. V.

117. A közeg-ellenállás a távolsággal arányos és mxv nagyságú; egy vertikális, l hoszszaságú egyenes felső végpontjáról kezd esni egy m_1 tömegpont, míg alsó végpontjából ugyanezen pillanatban egy m_2 tömegpont v_0 sebességgel kezdi mozgását felfelé. Bebizonyítandó, hogy a két pont

$$\frac{1}{x}\lg\frac{v_0}{v_0 - kl}$$

idő múlva találkozik. V.

[Ugyanis, a két pont mozgásegyenletei:

$$s_1'' = g - xs_1' \quad \text{és} \quad s_2'' = -g - xs_2',$$

melyekből, a nevezett kezdő-állapot szerint:

$$s_1 = \frac{g}{\varkappa}\left(t + \frac{1}{\varkappa}e^{-\varkappa t}\right) - \frac{g}{\varkappa^2};$$

$$s_2 = -\frac{g}{\varkappa}\left(t + \frac{1}{\varkappa}e^{-\varkappa t}\right) + \frac{g}{\varkappa^2} + \frac{v_0}{\varkappa}(1 - e^{-\varkappa t}).$$

Ezekkel az $s_1 + s_2 = l$ feltétel a jelzett eredményt szolgáltatja. A.]

118. Vertikális kör vertikális átmérője két végpontját a kerület tetszőleges pontjával kapcsolva összse: ha ezen egymáshoz tartozó két húron egy nehéz pont a sebességgel arányos közegellenállás alatt esik, akkor, miként bebizonyítandó, a két húrt mindig egyenlő idő alatt futja be. V.

[Ily húron a mozgás egyenlete, ha i a húr hajlása a vízszinteshez, $s'' = g \sin s - \varkappa s'$, mely a megelőző feladat eljárásával megfejthető. A.]

119. A 195. §-ban a ballistikus probléma a sebességgel arányos közegellenállás hatása alatt van megfejtve. Ugyanezen v_1 és α_1 kezdőadatokkal legyen egy pont a légüres térben elhajítva. Legyen az ellenálló közegben mozgó pont pályája α_1 és α érintő-hajlásszögek közötti s, ívrész befutására szükséges idő t,; ellenben az üres térben haladó pont pályájának ugyanezen α_1 és α hajlásszögek közötti s,, ívrész befutására szükséges idő t,,. A két mozgásban a $\operatorname{tg}\alpha = dy : dx$ értékeit egyenlítve, nyerjük:

$$\varkappa t_{,,} = e^{\varkappa t_{,}} - 1, \quad \text{hol} \quad \varkappa = b.$$

Végre kimutatandó, hogy az ellenálló közegben az m pont

$$\frac{1}{\varkappa}\lg\left(1 + \frac{\varkappa v_1}{g}\sin\alpha_1\right)$$

idő múlva éri el legnagyobb magasságát, mely a 195. §. szerint kiszámítandó. V.

120. Bebizonyítandó a 195. §. alapján, hogy a megelőző feladatban az a t idő, mely alatt az érintö hajlásszöge az α_1 kezdőértéktől a tetszőleges α-ig változott, a

$$g\cos\alpha\,(e^{\varkappa t} - 1) = \varkappa v_1 \sin(\alpha_1 - \alpha)$$

egyenlet által van adva; a kiinduló pont itt is a $\operatorname{tg}\alpha = y' : x'$ viszony értéke. V.

121. Jeleljék a légüres térben v_1 kezdő sebességgel α_1 hajlásszög alatt elhajított test pályája legmagasabb M pontjának derékszögű coordinátáit $\frac{1}{2}L$ és H és legyen $\frac{1}{2}T$ az emelkedés tartama; [Kinematika 108. §. (10), 185. l.]; legyenek $\frac{1}{2}\Delta L$ és ΔH e coordinátáknak (t. i. a legmagasabb pályapont helyzetének) és $\frac{1}{2}\Delta T$ e tartam azon változása, mely ugyanezen kezdőviszonyok mellett bekövetkezik, ha a test csekély s a sebességgel egyenesen arányos ellenállású közegen halad keresztül. A 195. §. alapján a $\varkappa$ első hatványú tagjaiig folytatott közelítő kifejtésekkel bebizonyítandó, hogy

$$\tfrac{1}{2}\Delta T=\tfrac{1}{2}T(1-\tfrac{1}{4}\varkappa T);$$

$$\tfrac{1}{2}\Delta L=-\varkappa(\tfrac{1}{2}L)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{g}}\,;\qquad \Delta H=-\frac{2\sqrt{2}}{3}H^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{g}}.\qquad \text{A.}$$

122. Az m pont a földnehézség hatása alatt az űrben parabolát ír le. A pálya tetszőleges helyén v a sebessége; hasson reá e pillanatban $-m\delta v$ nagyságú érintőmenti impulsus; bebizonyítandó, hogy az ez által jellemzőiben megváltoztatott parabola góczpontja a test felé

$$(2v-\delta v)\frac{\delta v}{2g}$$

távolságnyira elmozdúlt. A közegellenállás ily momentán impulsusok egymásutánjából állónak és így a pálya az ily osculáló parabolák rendszer beburkolójának tekintendő. Megvizsgálandó a gyúpont helye és sebessége. V.

[Ugyanis, minden impulsusnak az a közvetetlen eredménye, hogy az illető helyen $v-\delta v$ a sebesség, melylyel az m, mozgását folytatva, más (t. i. az ezen kezdet-állapothoz tartozó, simuló-) parabolát írna le, melynek jellemzői a Kinematika 108. §. 2. pontja szerint meghatározhatók. Ezután δv végtelen kicsinynek veendő és $\delta v=Sdt$ teendő, hol S a közeg-ellenállás. A.]

123. A P sulyú m pont a földnehézség és egy tetszőleges törvényű de mindig *kicsiny* S ellenállás hatása alatt mozog v változó sebességgel. Bebizonyítandó, hogy a mindenkori momentán parabola (l. a megelőző példát) gyúpontjának sebessége $Sv:P$. T. a. St.

124. A nehéz pont $S=m\varkappa v^n$ ellenállás alatt mozog; legyen v_m pályája legmagasabb pontján a sebesség; v, és $v_{,,}$ e ponton innen és túl lévő azon helyeken a sebesség, mely helyeken az érintő a vízszintessel ugyanazt az α szöget képezi; a 194. §. (3a) alapján bebizonyítandó; hogy áll

$$v_{,}^{-n}+v_{,,}^{-n}=2v_m^{-n}\cos^n\alpha.$$

[Ugyanis, idézett egyenletünk e két helyre nézve:

$$1+\beta_0F_0=\left(\frac{v_0}{v_{,}\cos\alpha}\right)^n,\qquad 1-\beta_0F_0=\left(\frac{v_0}{v_{,,}\cos\alpha}\right)^n,$$

melyek egyesítése az eredmény. A.]

125. Az m pont a távolsággal arányos $2\varkappa^2r$ centrális vonzás és a sebességgel arányos $3\varkappa v$ közegellenállás alatt mozog. A 204. §. (2) egyenletei alapján bebizonyítandó, hogy az m parabolát ír le és az $r=0$ kezdet felé mint nyugalmi helyzet felé törekszik. T. a. St.

126. Az m pont az $S=m\varkappa v^4$ ellenállás és az $mC^2:r^2$ centrális vonzás alatt mozog; a 202. §. alapján bebizonyítandó, ha a megindítás sebessége ugyanaz, mint az ugyanoly sugarú kör-mozgásé az űrben és e sebesség a sugárral arc $\cos 2C^2\varkappa$ szöget képez, hogy ekkor az m egyenlő szögű (logarithmikus) spirálist ír le. T. a. St.

127. Az m tömegpont *állandó* S közegellenallással szabad körpályán mozog oly mR centrális erő hatása alatt, melynek székhelye a kör középpontja; meghatározandó a mozgás s a megnyugvás ideje és helye. [Legyen a a kör sugara, t=0-kor v_0 a kezdősebesség és s_0=0 a kezdő ív; t-kor ezek v és s; a 202. §. 3. pontja alapján nyerjük, $r=a$ lévén

$$v^2=v_0^2-2Ss\,; \qquad R=a^{-1}v^2=a^{-1}(v_0^2-2Ss)\,;$$

és ha t, és s, a v=0 nyugalmi helyzetnek megfelelnek:

$$s_1=v_0^2:2S\,; \qquad t_1=v_6:S.]$$ V.

128. Nehéz pont ellenálló közegben csúcsával felfelé néző félkör-alakú szabad pályát ír le; milyen az mS ellenállás és a σ sűrűség, ha $S=\varkappa\sigma v^2$? Ha Y-a vízszintes coordináta-tengely, akkor a 197. alapján

$$S=\frac{3x}{2a}g\,; \qquad v^2=g\sqrt{a^2-x^2}\,; \qquad \sigma\varkappa=\frac{3x}{2a}:\sqrt{a^2-x^2},$$

hol a a kör sugara. [Newton, a 197. §-ban i. h. 1. példája].

129. Az m szabad pályája kör, melynek kerületén van a távolság n-edik hatványával arányos $mR=-mC^2r^n$ centrális *vonzó* erő székhelye; kerestessék az ellenállás törvénye. Nyerjük polárcoordinátákban a 202. §. alapján:

$S=\frac{1}{4}C^2(n+5)\,r^n\sin\vartheta$; s ha $S=\varkappa\sigma v^2$, belőle $\varkappa\sigma=\frac{1}{2}(n+5)\,r^{-1}\sin\vartheta$. W.

130. Az m szabad pályája egyenlőszögű (logarithmikus) spirális, melynek pólusa a $-C^2r^n$ centrális *vonzó* gyorsulás középpontja; a 202. §. alapján bebizonyítandó, hogy az S ellenállás törvénye, ha m az O felé közeledik és η a spirális állandó szöge, 205. §., 87. ábra,

$S=\frac{1}{2}C^2(n+3)\,r^n\cos\eta$; s ha $S=\varkappa\sigma v^2$, $\varkappa\sigma=\frac{1}{2}(n+3)\,r^{-1}\cos\eta$. W.

131. A megelőző feladat megfordítottja, ha m szabad pályája logarithmikus spirális, a közegellenállás $m\varkappa r^n$ s kerestetik a spirális pólusában székelő azon centrális erő törvénye, melynek hozzájárulásával m e pályát leírja. A 202. §. segélyével nyerjük, ha a és v_0 a kezdő-távolság és -sebesség:

$$R=\frac{(n+3)\,a^2v_0^2\cos\eta+2\varkappa\,(r^{n+3}-a^{n+3})}{(n+3)\,r^3\cos\eta}.$$

Euler Mechanikájának német fordítása I. k. 379, 381. ll.; W.

132. Az m tömegpont szabad ellipsist ír le ellenálló közegben két centrális erő hatása alatt, melyek székhelyei e görbe góczpontjai. Határoztassék meg a közeg S ellenállása és σ sűrűsége, feltéve, hogy $S=\varkappa\sigma v^2$ szerkezetű és fejeztessék ki a sebesség mint az idő függvénye. A.

[A megfejtésnél a Kinematika 129. §. 46. feladatának, 251. l., eljárása nyomán az ellenállás tekintetbe vételével fejeztessék ki a két gyúpontra vonatkozó két radiális gyorsulás; ez, ugyanezen jelöléssel itt

$R_1+R_2\cos\varepsilon—S\sin\frac{1}{2}\varepsilon=r_1''—r_1\vartheta_1'^2$; $\quad R_2+R_1\cos\varepsilon+S\sin\frac{1}{2}\varepsilon=r_2''—r_2\vartheta_2'^2$;

képezve összegüket, az S kiesik s az idézett hely (1) egyenlete adódik; $r_1+r_2=2a$-t téve:

$$v^2=—\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}(R_1+R_2)*=—\frac{r_1r_2}{a}(R_1+R_2). \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Másrészt tekintettel az érintő s az r_1 s r_2 közötti, az i. h. említett szögekre, a gyorsulás tangentiális componense itt

$$s''=R_1\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon—R_2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon—S,$$

azaz

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{ds}=(R_1—R_2)\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon—S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Itt a gyúpontok egymástól való $2e$ távolságára nézve

$$4e^2=r_1^2+r_2^2—2r_1r_2\cos\varepsilon,$$

belőle

$$4r_1r_2\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon=4e^2—(r_2—r_2)^2;$$

az (1) és (2) egyesítése:

$$S=\frac{1}{2a}\frac{d}{ds}(r_1r_2[R_1+R_1])+\frac{1}{2\sqrt{r_1r_2}}(R_1—R_2)\sqrt{4e^2—(r_1—r_2)^2} \quad . \quad (3)$$

mely az S-et adja; benne

$$dr_1:ds=—dr_2:ds=\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Az S közönséges *(lassító)* ellenállást jelent, ha a (3) jobb oldala *positiv;* ellenkező esetben (melynek nem felel meg e valóság) gyorsító ellenállást; az adott feltételekkel megegyező mozgás csak az első esetben lehetséges.

A többi már egyszerű számítás. A.]

133. A megelőző feladatban legyen

$$R_2=—C_1^2r_1^{n_1}; \quad R_2=—C_2^2r_2^{n_2},$$

---

* Ezen egyenlet tulajdonképen a normális gyorsulás egy kifejezése; ugyanis itt

$$v^2\varrho^{-1}=R_1\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon+R_2\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon$$

az eredő normális gyorsulás; benne [Math. Rep. 64. §. (1). (8). (9) segélyével]

$$\varrho=(r_1r_2)^{\frac{3}{2}}:ab;$$

ezenkívül a (2) utáni szöveg szerint,

$$r_1r_2\cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon=b^2,$$

melyek helyettezésével (1) ered.

az n-ek alatt positiv vagy negativ reális számot értve. Tárgyaltassék az általános eset, továbbá azok a speciális esetek, mikor $n_1=n_2$, $C_1=C_2$; és különösen, mikor még $n_1=n_2=-1$, miáltal (1) szerint v^2 állandó lesz és a (3) jobboldali első tagja eltünik és (2) szerint az S ellentetten egyenlő a centrális erők tangentiális gyorsulásával. A.

247. §. *Feladatok előírt pályán és felületen közegellenállással történő mozgásokra. Synchrónák, tautochrónák és geodätikus görbék ellenálló közegben.*

134. Valamely m tömegü pont a földnehézségi erő hatása alatt mozog egy a vízszinteshez α hajlású egyenesen *lefelé* oly közegben, melynek $\varkappa v$ ellenállása a sebesség első hatványával arányos. Jelelje s_0 a $t=0$-kor bekövetkezett elbocsátás O_0 helyének távolságát a vonal meghatározott O pontjától, mely magasabb mint O_0, s az m tetszőleges pontjának ívtávolságát az O-tól; a mozgás egyenlete itt $s''=g\sin\alpha-\varkappa s'$; bebizonyítandó, hogy belőle:

$$s-s_0=\frac{g\sin\alpha}{\varkappa^2}(e^{-\varkappa t}-1+\varkappa t).$$

Euler, Mechanik, II. k. 218. l. V.

135. Valamely m tömeg vertikális síkú előírt pálya homorú oldalán mozog *lefelé* a földnehézségi erő és egy *állandó* S ellenállás hatása alatt. Az eleven erő egyenlete

$$\tfrac{1}{2}(mv^2)=mgz+Ss+\text{constans},$$

hol az s-eket alulról felfelé számítjuk és az elbocsátás helyén $s=s_0$, $v=0$, $z=z_0$. A legnagyobb sebesség a $d(v^2):ds=0$ feltétel adta

$$mg\frac{dz}{ds}=-S$$

helyen van, mely csak $S=0$-kor adja a legmélyebb helyzetet. V.

136. Ha az m az előbbi feladatban vertikális tengelyű, csúcsával lefelé fordított lánczgörbe, melynek

$$z=-\tfrac{1}{2}a\,(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$$

és $s^2=z^2-a^2$ az egyenletei, akkor

$$\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}mv_0^2+mg\,(z-z_0)-S\,[(z_0^2-a^2)^{\frac{1}{2}}-(z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]$$

és a sebesség maximuma a

$$z=-mga:\sqrt{(mg)^2-S^2}$$

helyen van. F.

137. Ha a megelőző feladatokban a pont *felfelé* mozog, akkor

$$\tfrac{1}{2}mv^2=mgz-Ss+\text{const.},$$

az s-eket itt is fölfelé számítva; a lánczgörbe legmélyebb $z=-a$, $s=0$ pontjában v_0 sebességgel indítva el m-et. nyerjük

$$\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}mv_0^2+mg\,(a+z)-S\sqrt{z^2-a^2}. \qquad \text{V.}$$

138. Az előírt görbe egyenlete $s=a\lg(z:b)$ legyen; a z tengely *lefelé* van irányítva és m a görbén a föld nehézség és a sebesség négyzetével arányos $\tfrac{1}{2}\varkappa v^2$ nagyságú ellenállás alatt halad *lefelé*. Az s-et felülről lefelé számítva, itt $ds=adz:z$ és a mozgás egyenlete

$$ms''=-mg\frac{dz}{ds}-\tfrac{1}{2}m\varkappa v^2, \quad \text{avagy} \quad \frac{d(v^2)}{ds}+\varkappa v^2=-g\frac{z}{a}=-g\frac{b}{a}e^{-\frac{s}{a}},$$

mely a 165. §. lábjegyzéke $\beta)$ formulája értelmében integrálható. V.

139. Vertikális síkú a sugarú kör legmélyebb pontján v_0 sebességgel indítjuk meg az m-et, melyre a földnehézség, az R nyomással arányos kR surlódás és a sebesség négyzetével arányos $m\varkappa v^2$ közegellenállás hat. Az s-et a legmélyebb pontból számítva a mozgás egyenlete:

$$ms''=-mg\sin\frac{s}{a}-mk\left(\frac{v^2}{a}+g\cos\frac{s}{a}\right)-m\varkappa v^2,$$

azaz

$$\frac{d(v^2)}{ds}+2\left(\frac{k}{a}+\varkappa\right)v^2=-g\left(\sin\frac{s}{a}+k\cos\frac{s}{a}\right),$$

mely ugyancsak a 165. §. lábjegyzéke $\beta)$ formulája szerint integrálható. V., A.

140. Ugyanezen eljárás szerint fejthető meg a sebesség egyenlete bármely homorú görbén mozgó nehéz pontra nézve, ha az ellenállás egy állandó és egy a sebesség négyzetével arányos tagból áll. V.

141. Valamely m tömegpont a föld nehézsége és a sebesség négyzetével arányos $\dfrac{mv^2}{2s_0}$ közeg-ellenállás hatása alatt egy vertikális tengelyű, csúcsával felfelé néző sima cyclois domború oldalán tartozik maradni, hol s_0 a csúcstól számított ívtávolsága az elbocsátás helyének és a a nemzőkör sugara. Bebizonyítandó, hogy az idő, mely alatt az m az elbocsátás helyétől a cycloison a básisig esik:

$$\tau=2\sqrt{\frac{2a}{s_0g}}\sqrt{4a-s_0}. \qquad \text{W.}$$

142. Valamely m tömegpont a föld nehézség és a sebességgel arányos $m\varkappa v$ közegellenállás hatása alatt mozog vertikális tengelyű, csúcsával lefelé néző cyclois homorú oldalán és fogyó amplitudóju oscillátiókat végez. Legyen a a nemző kör sugara, s_0 a legmélyebb helytől számított ívtávolsága az elbocsátási helynek, akkor, miként bebizonyítandó, az egész ívhoszsz, melyet m befut míg megnyugszik:

$$\sum_{i=0}^{\infty}s_i=s_0\frac{e^{\eta}+1}{e^{\eta}-1}, \quad \text{hol} \quad \eta=\frac{\pi\varkappa\sqrt{a}}{\sqrt{g-\varkappa^2a}}. \quad \text{W.}$$

143. Vizsgáltassék meg független erő nélkül, de surlódással és a sebesség tetszőleges hatványával arányos közegellenállással körhengerfelületen mozgó pont sebessége. A pálya geodätikus görbe (itt közönséges csavargörbe) lévén, a mozgás egyenlete a 245. §. 112. feladata mintájára szerkeszthető és a sebességre nézve teljesen megfejthető. Végeztessék ugyanez körkúp esetében is. A.

144. A másodrendű felületeken független erő hatása nélkül, csak surlódással és közegellenállással mozgó pont geodätikus görbét ír le, melynek egyenleteit a 241. §. 75—79. feladatai tartalmazzák; fejeztessék ki a sebesség egyenlete és vizsgáltassék meg ennek megoldása a 245. §. 112. feladata eljárása értelmében. A.

145. Adva van egy határozott O pont, melyből különböző irányban, de *egy* vertikális síkban lefelé húzott egyenesek egy vertikális síkú görbét különböző A metszőpontokban találják.

Az egyeneseken nehéz pontok mozognak $\varkappa v^n$ törvényű ellenállás alatt, mily alakú a görbe, ha bármely egyenesen haladó pontnak a görbéhez való érkezésének sebessége ugyanaz?

Euler, Mech. II. k. 221. l. W., K.

[Legyen a keresett görbe tetszőleges A pontjához húzott $OA=r$ hoszszaságú egyenesnek a vízszinteshez való hajlásszöge α, az O és A közötti magasság-különbség z és v_0 a synchronához való megérkezés állandó sebessége. Az egyenesen a mozgás egyenlete

$$r''=\tfrac{1}{2}d(r'^2) : dr=g\sin\alpha-\varkappa v^n,$$

hol $r'=v$ lévén,

$$r=\int_0^{v_0}\frac{\frac{1}{2}d(v^2)}{g\sin\alpha-\varkappa v^n}, \quad \text{vagy} \quad z=r\sin\alpha=\int_0^{v_0}\frac{\frac{1}{2}d(v^2)}{g-\varkappa v^n\operatorname{cosec}\alpha} \quad . \quad (1)$$

A keresett görbe egyik parametere a v_0 és így e görbe z és α coordinátái úgy változnak, hogy v_0 állandó, azaz (1)-ből:

$$dz=\varkappa d(\operatorname{cosec}\alpha)\int_0^{v_0}\frac{\frac{1}{2}d(v^2)\,v^n}{(g-\varkappa v^n\operatorname{cosec}\alpha)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

A (2) integrálja az (1) patriális integratiójából adódik:

$$z=\frac{\frac{1}{2}v_0^2}{g-\varkappa v_0^n\operatorname{cosec}\alpha}-\varkappa n\operatorname{cosec}\alpha\int_0^{v_0}\frac{\frac{1}{2}v^2.\,v^{n-1}dv}{(g-\varkappa v^n\operatorname{cosec}\alpha)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Eliminálva a (2) és (3)-ból az integrált, nyerjük a görbe differentiál egyenletét:

$$[(n-2)\,rdz+2zdr]\,[gz-\varkappa v_0^n r]=v_0^2\,(zdr-rdz); \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

mely görbe az O-n átmenő vertikális körül symmetrikus és lefelé homorú. Kifejtette A.]

146. Bebizonyitandó, hogy a megelőző feladatban, az $n=2$ esetben a keresett görbe egyenlete

AKADÉMIAI KÖNYVTÁR

$$ze^{2\varkappa a}(e^{2\varkappa r}-1)=re^{2\varkappa r}(e^{2\varkappa a}-1),$$

ha a az O magassága a görbe csúcsa felett.

Euler i. h. 225. l.; W.

[Ugyanis a megelőző feladat (1) egyenlete ezen esetben közvetetlenül integrálható; belőle, mivel $\operatorname{cosec}\alpha=r:z$,

$$z=-\frac{1}{2\varkappa}\lg\left(1-\frac{\varkappa v_0^2}{g}\frac{r}{z}\right);$$

továbbá, az a magasságon át e közegben eső m pont v_0 sebességére nézve a 192. §. (14) egyenletéből, $r^2=g:\varkappa$ lévén,

$$\frac{\varkappa v_0^2}{g}=1-e^{-2\varkappa a},$$

melyet a fentírt z-vel egyesítve, az eredményt nyerjük.

Ugyanily eljárással állítható elő véges alakban a görbe egyenlete az $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$ esetekben, Math. Rep. 106. §. 3, 15, 44, 48. formulái. A.]

147. *Feladat synchronára.* A megelőző két feladat akként módosítandó, hogy az egyeneseken való leérkezés *ideje* (az esés *tartama*) legyen ugyanaz. Bebizonyítandó, hogy $n=3$ esetben a keresett görbe egyenlete

$$\sqrt{\cos\vartheta}\lg\{e^{\varkappa a}+(e^{2\varkappa a}-1)^{\frac{1}{2}}\}=\lg\{e^{\varkappa r}+(e^{2\varkappa r}-1)^{\frac{1}{2}}\},$$

hol r és ϑ a görbe tetszőleges pontjának az O kezdetre s a rajta átmenő vertikális tengelyre vonatkoztatott polárcoordinátái. A görbe e vertikálishoz homorú és symmetrikus és az O-n vízszintesen halad át.

148. Az n pont vertikális tengelyű csucsával lefelé néző cyclois homorú oldalán mozog a föld nehézségi erő alatt és T legyen a légüres térben való mozgás félperiodusa (u. i. az időtartam forduló ponttól forduló pontig). Ha e mozgás a sebességgel arányos $2m\varkappa v$ ellenállást kifejtő közegben történik, akkor [199. §.] a mozgás még tautochronikus, de periodusa más és amplitudója fogyó; ha e mozgást állandó s_0 amplitudójúvá akarjuk tenni, akkor az m-nek legmélyebb pályahelyén mindig

$$m\tau s_0 e^{-\eta\operatorname{tg}\eta}(e^{\frac{1}{2}\pi\operatorname{tg}\eta}-e^{-\frac{1}{2}\pi\operatorname{tg}\eta}),$$

nagyságú impulsust kell adnunk, hol

$$\tau=\frac{\pi}{T};\qquad \sin\eta=\frac{\varkappa T}{\pi}\qquad \text{V.}$$

149. A megelőző feladatban az m pont a legmélyebb helytől számított s_0 ív végpontján kezdi mozgását lefelé, de $m\varkappa v^2$ közegellenállással, mely azonban igen kicsiny legyen. Bebizonyítandó, hogy a következő forduló helyig a szétszórt (elveszett, ellenállási meleggé átváltozott) energia az eredeti energiának $\frac{8}{3}\varkappa s_0$-ad része, hol az eredeti energia pl.

az az eleven erő, melylyel a légüres térben m a legmélyebb helyen áthalad. T. a. St.

150. Az m pont a föld nehézsége és a sebesség négyzetével arányos $m\varkappa v^2$ nagyságú közegellenállás hatása alatt mozog; kerestessék a tautochróna alakja. V.

[Legyen az ismeretlen, csúcsával lefelé néző görbe legmélyebb pontja az s ívnek és a függélyesen felfelé irányított Z s a vízszintes X tengely kezdete; akkor a sebesség a fölfelé növekvő s ív mentén positiv, a mozgás egyenlete, miután

$$2s'' = d(v^2) : ds,$$

itt

$$\tfrac{1}{2}\frac{d(v^2)}{ds} = -g\frac{dz}{ds} + \varkappa v^2, \quad \text{melyben} \quad \frac{dz}{ds} = \sin\alpha,$$

α lévén az érintő és a vízszint közötti hajlásszög és $\sin\alpha$ az s ismeretlen függvénye.

A további eljárás a 165. §-éhoz teljesen analog, a számítás pedig egyszerűbb [165. §. (10)]; integrálható eredménye

$$T^2 g\varkappa dz = \pi^2 (e^{\varkappa s} - 1)\, ds,$$

hol $\frac{1}{2}T$ az elbocsátástól a legmélyebb helyzetbe való érkezés ideje és e legmélyebb hely egyszersmind a tautochronismus pontja, 161. §. A.].

d) Feladatok a dynamika módszertani elveire.

248. §. *Feladatok d'Alembert elvére (mozgó előírt pályákon és felületeken végbemenő relativ pontmozgásokra).*

151. Sima egyenes cső egyik pontja körül oly szögsebességgel forog síkban, hogy álljon $\operatorname{tg}\vartheta = \omega t$, hol ϑ a cső iránya s forgása síkjában fekvő valamely szilárd egyenes közötti szög, ω állandó és t a folyó idő; kerestessék a mozgás. V.

[A csőben mozgó súlytalan pont coordinátái x és $y = x \operatorname{tg}\vartheta$; továbbá a szabad (független) erők zérusok:

$$X = 0, \quad Y = 0 \quad \text{és} \quad \delta y = \delta x \operatorname{tg}\vartheta = \omega \,.\, t \,.\, \delta x,$$

miáltal a nevezett elv [66. §. (6)]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} : \omega t = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Másrészt $y = \omega t x$-ből

$$\frac{dy}{dt} = \omega x + \omega t \frac{dx}{dt}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega \frac{dx}{dt} + \omega t \frac{d^2x}{dt^2},$$

s így (1)-ből

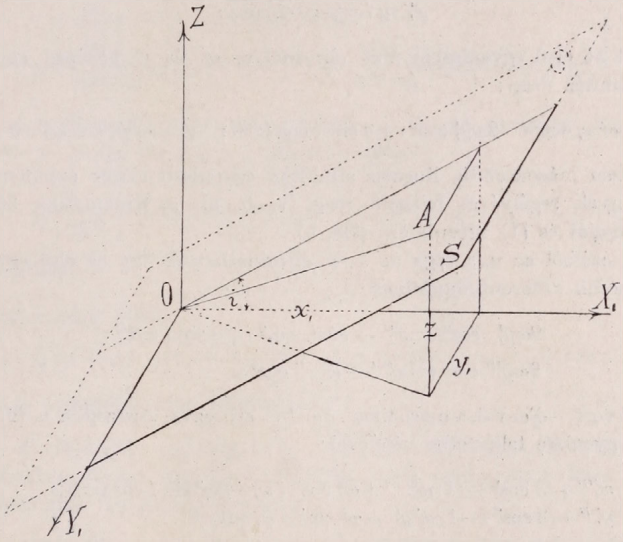
$$(1 + \omega^2 t^2)\frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega^2 t \frac{dx}{dt} = 0,$$

melynek első és második integrálja, és belőle folytatólag:

$$(1+\omega^2 t^2)\frac{dx}{dt} = b\,; \qquad x = a + b\omega^{-1}\operatorname{arc\,tg}(\omega t)$$

$$y = x\,.\,\omega t = a\omega t + bt\operatorname{arc\,tg}(\omega t)\,;$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = x\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\vartheta} = \frac{a\omega + b\vartheta}{\omega\cos\vartheta}\,. \qquad \text{A.}]$$



98. ábra.

152. A 212. §. 2*a.* példájában a síkjában forgó logarithmusi spirálison mozgó pontra ható $f(r)$ centrális gyorsulás a távolság tetszőleges (részletesen pedig első) hatványával arányosnak vétessék; fejeztessék ki a pontmozgás és a kényszererő. A.

153. Nehéz pont mozgása sima, vertikális tengely körül állandó ω szögsebességgel forgó lejtőn d'Alembert elve alapján. V.

[Legyenek, 98. ábra Z, a forgás tengelye, O a Z,-nek az SS lejtővel való metszőpontja, X,, Y, lejtővel merev kapcsolatban lévő, vele forgó vízszintes tengelyek, Z,OX, a lejtőnek a vízszinthez való i hajlásszögét tartalmazza, OY, a lejtőben fekvő vízszintes; a mozgó m pont tetszőleges A helyének coordinátái a mozgó X, Y, Z, rendszerben x,, y,, z,; végre z,—x, tg i=0 a lejtő egyenlete e coordinátákban.

A 124. §. (2) és a 123. §. (3) egyenleteit alkalmazva, a φ_0, componensei zérusok, mivel a coordináták kezdete nyugalomban van és az ω, = ω_z, = ω = állandó, míg ω_x, = ω_y, = 0; a szabad (független) erők

$(X)_r=(Y)_r=0$; $(Z)_r=-mg$; végre

$$F\equiv x_r \sin i - z_r \cos i = 0.$$

Ezekkel a 124. §. (2) egyenletei, az m elhagyásával:

$$x_r''=+\omega^2 x_r+2\omega y_r'+\lambda \sin i\,; \quad y_r''=+\omega^2 y_r-2\omega x'\,; \quad z_r''=-g-\lambda\cos i\,. \quad (1)$$

Az utolsó egyenlet, $z_r=x_r \operatorname{tg} i$ alapján:

$$x_r'' \operatorname{tg} i=-g-\lambda\cos i\,;$$

ebből s az első egyenletből λ-át eliminálva, ez és a középső egyenlet kis számítás után:

$$x_r''-\omega^2 x_r \cos^2 i-2\omega y_r' \cos^2 i+g \sin i\cos i=0\,; \quad y_r''-\omega^2 y_r+2\omega x_r'=0\,. \quad (2)$$

Ezen másodrendű, lineáris simultán egyenletrendszer exponentiális függvények segélyével fejthető meg [v. ö. pl. a Kinematika 354. §. problémáját és (1) egyenleteit, 608. l.].

E czélból az y_r-t vagy az x_r-et eliminálhatjuk; így az első egyenlet és második differentiálquotiense

$$\begin{aligned} 2\omega y_r' \cos^2 i &= x_r'' - \omega^2 x_r \cos^2 i + g \sin i \cos i\,; \\ 2\omega y_r''' \cos^2 i &= x_r'''' - \omega^2 x_r'' \cos^2 i\,; \end{aligned}$$

az első sort $-\frac{1}{2}\omega$-val, a másodikat $\frac{1}{2}\omega^{-1}$-el szorozva, összegük a (2) második egyenlete tekintetbe vételével:

$$\left.\begin{aligned} x_r''''+(3\cos^2 i-1)\,\omega^2 x_r''+\omega^4\cos^2 i\; x_r - g\omega^2 \sin i\cos i=0\,; \\ y_r''''+(3\cos^2 i-1)\,\omega^2 y_r''+\omega^4\cos^2 i\; y_r+0=0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (4)$$

A két egyenlet az

$$x_r=x+(g\omega^2 \sin i\cos i : \omega^4\cos^2 i)=x+g\omega^{-2}\operatorname{tg}$$

és $y_r=y$ helyettesítés által egy typusra van hozva, melyet az

$$x=Ae^{\varepsilon t}\,; \quad y=Be^{\varepsilon t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

partikuláris megoldás elégít ki; ezt helyettezve (4)-be, az ε jellemző egyenlete:

$$\varepsilon^4+(3\cos^2 i-1)\,\omega^2\varepsilon^2+\omega^4\cos^2 i=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6a)$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon^2=-\tfrac{1}{2}\omega^2\{3\cos^2 i-1\mp\sqrt{(3\cos^2 i-1)^2-4\cos^2 i}\}= \\ =-\tfrac{1}{2}\omega^2\{3\cos^2 i-1\mp\sin i\sqrt{1-9\cos^2 i}\}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6)$$

Az ε négy gyökértéke közül kettő-kettő ellentetten egyenlő, az ε^2 reális, míg $9\cos^2 i \leqq 1$, ugyanez áll az ε-ra nézve; a $9\cos^2 i>1$ esetben az ε^2 és mind a négy ε-gyök complex.

Az (2) egyenletekbe az (5) partikuláris megoldásokat téve az A és B coefficiensek kapcsolatára nézve nyerjük

$$B\varepsilon^2-\omega^2 B+2\omega\varepsilon A=0 \quad \text{vagy} \quad A\varepsilon^2-\omega^2 A\cos^2 i-2\omega\varepsilon B\cos^2 i=0;$$

$$B=\frac{2A\omega\varepsilon}{\omega^2-\varepsilon^2}, \qquad B=A\frac{\varepsilon^2-\omega^2\cos^2 i}{2\omega\varepsilon\cos^2 i};$$

ezek egyesítése, mint várható az ε jellemző egyenletét (6*a*)-t szolgáltatja.

a) Legyen $\varepsilon_1, -\varepsilon_1; \varepsilon_2, -\varepsilon_2$ a (6*a*) négy gyöke és A_1', A_1'', A_2', A_2'' az x négy integrátió-állandója; a teljes megoldás [v. ö. a Kinematika 92 és 95. §§-ai 2. pontjaiban mondottakat]

$$\left.\begin{aligned} x &= A_1'e^{\varepsilon_1 t}+A_1''e^{-\varepsilon_1 t}+A_2'e^{\varepsilon_1 t}+A_2''e^{-\varepsilon_2 t};\\ y &= \frac{2\omega\varepsilon_1}{\omega^2-\varepsilon_1^2}(A_1e^{\varepsilon_1 t}-A_1''e^{-\varepsilon_1 t})+\frac{2\omega\varepsilon_2}{\omega^2-\varepsilon_2^2}(A_2'e^{\varepsilon_2 t}-A_2''e^{-\varepsilon_2 t}); \end{aligned}\right\} \quad . \quad (7)$$

b) A (7) reális ε-okra nézve reális x- és y-t szolgáltat és ekkor $9\cos^2 i<1$; de ha $9\cos^2 i>1$, akkor ε typusa:

$$\varepsilon=\pm\frac{\omega}{\sqrt{2}}\sqrt{a\pm ib}=\pm\tfrac{1}{2}\omega\,[\{\sqrt{a^2+b^2}+a\}^{\frac{1}{2}}\pm i\,\{\sqrt{a^2+b^2}-a\}^{\frac{1}{2}}],$$

mely írható:

$$\varepsilon=\pm(\gamma\pm i\delta),$$

miáltal a négy gyök

$$\varepsilon_1=\gamma+i\delta; \quad -\varepsilon_1=-\gamma-i\delta \qquad \varepsilon_2=\gamma-i\delta; \quad -\varepsilon_2=-\gamma+i\delta;$$

végre az integrátió négy állandója itt:

$$A_1'=\mathfrak{A}_1'+i\mathfrak{A}_2'; \quad A_1''=\mathfrak{A}_1''+i\mathfrak{A}_2''; \quad A_2'=\mathfrak{A}_1'-i\mathfrak{A}_2'; \quad A_2''=\mathfrak{A}_1''-i\mathfrak{A}_2'';$$

mindezeket (7)-be helyettezve, ennek csak reális része felel meg a problemának, így pl. x-ből marad

$$x=2e^{\gamma t}\{\mathfrak{A}_1'\cos(\delta t)-\mathfrak{A}_2'\sin(\delta t)\}+2e^{-\gamma t}\{\mathfrak{A}_1''\cos(\delta t)+\mathfrak{A}_2''\sin(\delta t)\}; \quad (8)$$

míg az y rendkívül bonyolódott; képzését az olvasóra bízzuk.

c) Kivételes a $9\cos^2 i=1$ eset, mikor $\varepsilon_1^2=\varepsilon_2^2=\frac{1}{3}\omega^2$; de ez a közönséges úton is tárgyalható [Kinematika 96. §. III. pontja 136. lap] s akkor pl.

$$x=(B'+C't)e^{\gamma t}+(B''+C''t)e^{-\gamma t}; \quad \text{s í. t.}$$

d) Végre, mikor a lejtő *vertikális sík*: ez az ábra szerint a forgó Y,Z, síkkal esik egybe; itt

$$i=\tfrac{1}{2}\pi; \quad x_1=0; \quad x_1'=0, \quad x_1''=0;$$

s így az (1)-ből marad:

$$\lambda=-2\omega y_1'; \qquad y_1''=\omega^2 y; \qquad z_1''=-g,$$

azaz, mivel $y_1=y$; $z_1=z$:

$$y=A_1e^{\omega t}+A_2e^{-\omega t}; \qquad z=a+bt-\tfrac{1}{2}gt^2; \qquad \lambda=-2\omega^2(A_1e^{\omega t}-A_2e^{-\omega t}).$$

A feladat részleteinek kidolgozását s λ meghatározását az olvasóra bízzuk. Kidolgozta A.]

154. A megelőző feladat, avval a módosítással, hogy m-re az O-ban székelő $mf(r)$ centrális erő hat. Részletezés, ha $f(r)=-\omega^2 r$, az $\overline{OA}$-val arányos vonzás. V.

[Ekkor az (1) egyenletekhez $-\omega^2 x_1$, $-\omega^2 y_1$, $-\omega^2 z$, lép, miáltal ezek

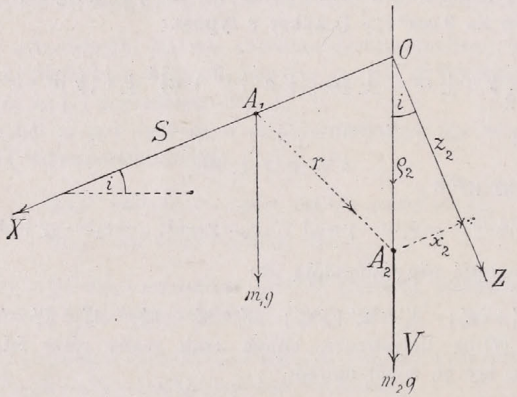
$$x_1''=2\omega y_1'+\lambda \sin i\,; \qquad y_1''=-2\omega x_1'\,; \qquad z_1''=x_1'' \operatorname{tg} i=-g-\omega^2 z,-\lambda \cos i.$$

A középső egyenletből:

$$y_1'=-2\omega (x_1+a)\,;$$

a többi kettő egyesítéséből λ-t eliminálva:

$$x''-2\omega y_1' \cos^2 i+\omega^2 x_1 \sin^2 i+g \sin i \cos i=0.$$



99. ábra.

A megelőzőből y_1'-t x_1-el kifejezve s ezen utolsó egyenletbe helyettesítve: ez azonnal integrálható. A.]

155. D'Alembert elve több anyagi pontból álló rendszerre nézve érvényes lévén, állíttassék fel ezen elve két, m_1 és m_2 nehéz tömegpontra nézve, melyek elseje a vízszinteshez i hajlású S lejtőn, másodika egy V vertikális egyenesen surlódás nélkül tartozik mozogni. A pontok egymásra csak a távolságtól függő $m_1 m_2 f(r)$ hatást fejtenek ki. S. G.

[A coordináták kezdete a lejtőnek a függélyes egyenessel való O metszőpontja legyen, 99. ábra, az X tengely e lejtő esésének iránya, az Y tengely az O-átmenő, a lejtőn fekvő vízszintes egyenes és a Z tengely a lejtőnek lefelé húzott normálisa; ekkor az A_1 s A_2 helyzetű m_1 és m_2 pontok coordinátái x_1, y_1, 0 és x_2, 0, z_2, hol x_1 és y_1 tetszőlegesek, míg $x_2=z_2 \operatorname{tg} i$. Továbbá

$$\overline{A_1A_2}^2=r^2=(x_2-x_1)^2+y_1^2+z_2^2\,; \qquad \overline{OA_2}=\varrho_2,$$

hol

$$x_2=\varrho_2 \sin i, \qquad z_2=\varrho_2 \cos i\,; \qquad r^2=(\varrho_2 \sin i-x_1)^2+y_1^2+\varrho_2^2 \cos^2 i.$$

1. Az m_1 virtuális elmozdulásának componensei δx_1 és δy_1; az m_2-é $\delta\varrho_2$; a többiek zérusok.

Az ezen irányok menti független erőcomponensek a földnehézségtől és az $f(r)$ erőtől származnak; az $m_1 g$ iránycosinusai $\sin i$, 0, $\cos i$; az $m_2 g$ a ϱ_2-be esik, az $A_1A_2 = r$-éi: $(x_2 - x_1) : r$; $-y_1 : r$; $+z_2 : r$, a ϱ_2-éi szintén $\sin i$, 0, $\cos i$ s így

$$\cos(r, \varrho_2) = \{(x_2 - x_1)\sin i + z_2 \cos i\} : r = -(x_1 \sin i - \varrho_2) : r.$$

Az $m_1 g$ és $m_2 g$ erők lefelé vannak irányítva; az $m_1 m_2 f(r)$ centrális erő, ha taszító az A_1-ra hatva az $A_2A_1 = -r$ mentén, az A_2-ra hatva az $A_1A_2 = +r$ mentén van irányítva, ha vonzó, megfordítva; ezekkel képezve d'Alembert elvét [66. §. (6)].

$$\left.\begin{aligned} &\left\{m_1 g \sin i + \frac{x_1 - \varrho_2 \sin i}{r} m_1 m_2 f(r) - m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}\right\} \delta x_1 + \\ &+ \left\{\frac{y_1}{r} m_1 m_2 f(r) - m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}\right\} \delta y_1 + \\ &+ \left\{m_2 g + \cos(r, \varrho_2)\, m_1 m_2 f(r) - m_2 \frac{d^2 \varrho_2}{dt^2}\right\} \delta\varrho_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (1)$$

A δx_1, δy_1, $\delta\varrho_2$ egymástól teljesen függetlenek lévén, következik:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 x_1}{dt^2} = g \sin i + m_2 f(r) \frac{x_1 - \varrho_2 \sin i}{r}; \qquad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = m_2 f(r) \frac{y_1}{r}; \\ &\frac{d^2 \varrho_2}{dt^2} = g - m_1 f(r) \frac{x_1 \sin i - \varrho_2}{r}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (2)$$

2. A továbbiakban legyen

$$f(r) = K \cdot r; \qquad m_1 = m_2 = m;$$

legyenek x_0, y_0, ϱ_0 az egyensúlynak megfelelő coordinátái (mikor a gyorsulások zérusok) úgy hogy:

$$0 = g \sin i + mK(x_0 - \varrho_0 \sin i); \quad 0 = m \cdot Ky_0; \quad 0 = g - mK(x_0 \sin i - \varrho_0); \quad (3)$$

írva:

$$x_1 = x_0 + x; \qquad y_1 = y_0 + y; \qquad \varrho_2 = \varrho_0 + \varrho;$$

képezve a most írt egyszerűsítések mellett a (2) s (3) egyenletek különbségét:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = mK(x - \varrho \sin i); \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = mKy; \quad \frac{d^2 \varrho}{dt^2} = -mK(x \sin i - \varrho); \quad (4)$$

s ezek első s harmadik egyenletei összege és különbsége:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2(x+\varrho)}{dt^2} = mK(1 - \sin i)\,(x + \varrho); \\ &\frac{d^2(x-\varrho)}{dt^2} = mK(1 + \sin i)\,(x - \varrho), \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

melyekben az $mK(1 \mp \sin i)$ állandók és így az y, az $x+\varrho$, $x-\varrho$ egyenletei közvetetlenül, mint a t időnek egyszerű harmonikus vagy exponens-függvényei adódnak: a t eliminálásával az A_1 pályája is adódik Kidolgozta A.].

156. A megelőző feladatban legyen

$$mf(r)=mK.r=-C^2r \quad \text{és} \quad \sin i=\tfrac{1}{2};$$

továbbá legyen a (3) adta egyensúlyi helyzet a mozgás kezdő helyzete, melyben $t=0$-kor $x=y=\varrho=0$; végre az A_1 kezdősebességének a vízszintes menti és a lejtő esése menti componense egyenlő legyen az A_2-nek v_0 kezdősebességével; az előbbi feladat (3)—(5) egyenletei alapján bizonyíttassék be, hogy esetünkben

$$y=\frac{v_0}{C}\sin Ct; \qquad x+\varrho=\frac{4v_0}{C}\sin\tfrac{1}{2}Ct; \quad x-\varrho=0, \quad x=\varrho;$$

$$C^2x^4=4v_0^2(x^2-y^2) \quad \text{vagy} \quad C^2q^2\cos^4\vartheta=4v_0^2\cos 2\vartheta,$$

mely utóbbiban $x=q\cos\vartheta$, $y=q\sin\vartheta$; ez a Bernoulli-féle lemniscátához hasonló pálya egyenlete. S. G.

249. §. *Feladatok a legkisebb, a stationárius és a variáló működés elvére.*

157. A tömegegységnyi pontműködés Jacobi-féle alakjának [72. §. (6)]:

$$A=\int_1^2 \sqrt{2(V+H)}\,ds$$

nek állandó H melletti változása vizsgáltassék meg, ha ez egymáshoz végtelen közel eső két szomszédos ab és $a'b'$ véges pályarészekre vonatkozik (78. §. és 29. ábra). Jeleljék az aa' elemi vonal-variátió és az a-ban az ab-hez a b felé haladás mentén vont érintő közötti szöget ε_a; ellenben a bb' és a b-ben az a-felé vont érintő közöttit ε_b, továbbá V_a és V_b a V értéket a-ban és b-ben; bizonyíttassék be, hogy ekkor

$$\delta A=-\sqrt{2(V_a+H)}\,.\,\overline{aa'}\cos\varepsilon_a-\sqrt{2(V_b+H)}\,.\,\overline{bb'}\cos\varepsilon_b,$$

mely nem más, mint a 80. §. (5) δA értékének a

$$v=\sqrt{2(V+H)}$$

segélyével való kifejezése. V.

158. Adva van egy MN görbe, mely M-ben egy P görbére *normális*, de N-ben egy másik Q görbéhez érintő legyen. Jeleljék $M'N'$, $M''N''$, ... ezen MN görbe-typus egyeseit, melyek e szerint a P görbére merőleges trajectoriák, s melyeknek beburkolója a Q görbe. Bizonyíttassék be, hogy az $M''N''$ görbe menti működés egyenlő az $M'N'$ görbe menti, meg a Q görbének $N'N''$ menti működése összegével.

Ugyanez a tétel érvényes, ha a pont felületen mozog, P és Q felü-

leti szilárd görbék és MN a felületen a P görbe normális trajectóriái és Q beburkolójuk.

Ha a működés kifejezésében V zérus vagy állandó: az enveloppe-ok geométriai tételei adódnak. Appell.

159. Az æquiactionális felületek sajátságaiból következik (83. §. 1. és 2. pontja), hogy ha valamely tetszőleges $F_0=0$ felület minden eleméből egyenlő normális sebességgal indulnának ki mozgó pontok, akkor ezeknek az a helye, a melyen az F_0-tól számított működés egyenlő, a pályákat mind normálisan metszi, ez szintén egyenműködésű felület.

Ha a pontokra erők nem hatnak, a pályák állandó sebességgel leírt egyenlő hoszszú egyenesek s az egyenműködésű felületek ú. n. párhuzamos felületek lesznek. V.

160. Legyen $\varphi(x, y, z)$ a coordináták positiv függvénye, a és b két szilárd pont; ha G e két pontot egybekapcsoló azon görbék, a melyek mentén az $\int \varphi(x, y, z)\, ds$ integrál minimum: akkor bebizonyítandó, hogy e görbék:

1) az egységnyi tömegű pont brachystochróna $(\varphi(x, y, z))^{-2}$ erőfüggvény alatt, mikor az x_0, y_0, z_0 helyen

$$\sqrt{2}\,(\varphi(x_0, y_0, z_0)^{-1}$$

a kezdősebesség;

2) ugyanily tömegű szabad pont pályái $(\varphi(x, y, z))^2$ erőfüggvény alatt és $\sqrt{2}\cdot\varphi(x_0, y_0, z_0)$ kezdeti sebesség mellett.

Ugyanily tételek érvényesek egy szilárd felületen fekvő oly görbékre, melyek ezen $\int \varphi(x, y, z)\, ds$ integrált minimummá teszik. Appell.

[Mindezen összefüggések a brachystochrónák feltételi egyenlete és a legkisebb működés elve közötti kapcsolatból folynak, 172. §. A.]

161. A földnehézség hatása alatt mozgó szabad tömegegységnyi pont működése

$$A = \int v\,ds = \int \sqrt{2H - 2gy}\; ds;$$

ha a szilárd O és a tetszőleges A_1 pont közötti pályát keressük (v. ö. a Kinematika 73. ábráját, 187. lap), ez parabola, melynek sebessége az O-ban $v_0 = \sqrt{2H}$.

Ha A_1 a *biztossági parabolán** vagy azon belül fekszik, akkor általában két parabolapályával találhatni A_1-et.

Bizonyíttassék be, hogy e két pálya közül az, mely az A_1-t eléri mielőtt a biztossági parabolát érinti, az A-t relativ minimummá teszi (ez Jacobi szabálya); ez az alsó (laposabb) parabola. Ha A_1 az O-hoz elég közel van, e pályára nézve A absolut minimum; ha A_1 a biztossági parabola közelében van, ez csak relativ minimum; ugyanez áll, ha

* Biztossági parabola az O-ból állandó v_0 nagyságú, de különböző irányú sebességekkel elhajított nehéz pont parabola-pályáinak enveloppe-parabolája, v. ö. Kinematika 111. §. 19. feladata 195. lap.

A_1 magán a biztossági parabolán van. Ez mind a 158. feladat megfontolásai és az æquiactionális felületek sajátságai alapján bizonyítható be, mert a biztossági parabola az O-ból induló parabola-pályák beburkolója s e pályák az O körül végtelen kis sugárral írt körre merőleges trajectoriák. Appell.

162. Ha a megelőző feladatban az A_1 a biztossági parabolán kívül fekszik: reális OA_1 pálya nem létezik ugyan, de van egy görbe, mely az A-t O-tól A_1-ig minimummá teszi. Bebizonyítandó, hogy e vonalat alkotja az O-ból és az A_1-ből a $2H—2gy=0$ egyenesre bocsátott merőleges és ez egyenesnek e két merőleges közötti darabja. Appell.

163. A bolygók relativ (heliocentrikus) mozgására nézve a 218a. §. 2. része a. pontja értelmében

$$A=m\sqrt{a\mu}\,(E+\varepsilon\sin E),\quad \text{hol}\quad r=a\,(1—\varepsilon\cos E);$$

állíttassanak elő a működés e függvényéből a 80. §. (7) szerint a bolygó mozgás-egyenletei, mikor a pályának adott két ponton kell áthaladnia; lévén

$$v^2=2\,(H+V)=2H+2m\mu r^{-1}. \qquad \text{V.}$$

164. Fejeztessék ki az A működés egy szabad pontra nézve q_1, q_1, q_3 általános coordinátákban, úgy, hogy V és ds ezek függvényei. (95. és 99. §§.).

$$(ds)^2=L_{11}^2\,(dq_1)^2+.+.+2L_{23}dq_2dq_3+.+.$$

A q coordináták a független t_2 coordinátának függvényeiként tekintendők olyaténképen, hogy az

$$\int_2^1\sqrt{2\,(H+V)}\,\frac{ds}{dq}\,dq.$$

minimum legyen.

Fejtessék ki ezen az alapon Jacobi eljárásával (76. §.) a Lagrange-féle mozgásegyenletek második alakja. V.

165. Kerestessék az a pálya, melyet az m oly feltétel alatt ir le, hogy $\int v^n ds$ integrál minimum legyen, hol $v\sqrt{m}=\sqrt{2\,(H+V)}$. Bizonyíttassék be, hogy e pálya görbületi sugara, mindig ugyanazon egyenesben fekszik, mint azon pálya görbületi sugara, melyet m, ha szabad volna, ugyanezen ponttól kezdve leírna s az előbbi görbületi sugár egyenlő ezen utóbbinak n-ed részével. Ha n negativ: a két sugár iránya ellentett.

Az $n=—1$ esetben a görbe brachystochróna (v. ö. a. 172. §-ot); ekkor a szabad pályák s a brachystochronák között fennálló, a 172. §-ban és a 236. §. 39. és 40 feladatiban felsorolt összefüggések fennállanak. V.

250. §. *Feladatok a Hamilton-féle characteristikus egyenlet megoldására derékszögű és általános coordinátákban.*

166. Egymást a távolság harmadik hatványával fordítva arányosan vonzó taszító szabad két tömegpont relativ mozgása (Cotes spirálisai; v. ö. Kinematika 117—119. §§.)

A 135. és 136. §§. jelölésével a relatív mozgás gyorsulási componensei és erőfüggvénye

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2(x_2-x_1)}{dt^2}=\mp\frac{m_1+m_2}{r^3}\,\frac{x}{r}=\pm\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{r^2}\right)=-\frac{d^2(x_1-x_2)}{dt^2};$$

s í. t.

$$V=\pm m\,\frac{\mu}{r^2};$$

e szerint a 218. §. (8) és (9) egyenletei itt:

$$A=mc\vartheta+\sqrt{m}\int\frac{dr}{r}\sqrt{2r^2H\pm2m\mu-mc^2}+A_0;$$

$$\vartheta-\gamma=c\sqrt{m}\int\frac{dr}{r\sqrt{2r^2H\pm2m\mu-mc^2}};$$

$$t+\tau=\sqrt{m}\int\frac{rdr}{2r^2H\pm2m\mu-mc^2}.$$

E kifejezések közvetetlenül integrálhatók (Math. Rep. 107. §. 23, 21, 22, 19. formulái) és az idézett helyen más eljárással nyert eredményekkel egyezők; ezért további számításukat az olvasóra bízzuk. A.

167. *Az elliptikus síkbeli coordinátákban* a 224. §. jelöléseivel *kifejezhető characteristikus egyenlet* írható:

$$-\frac{(a^2-q_1^2)(b^2-q_1^2)}{q_1^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_1}\right)^2+\frac{(a^2-q_2^2)(b^2-q_2^2)}{q_2^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_2}\right)^2-$$
$$-2m(q_1^2-q_2^2)(V+H)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

A H állandó lévén, ez az egyenlet a 104. §. (19) egyenlete értelmében quadraturákra vezethető vissza, ha V eleget tesz a feltételnek:

$$(q_1^2-q_2^2)\,V=\psi_1(q_1)-\psi_2(q_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

A 224. §. (2) alakján kívül még pl. a következő V is megfelel:

$$V=\mu\left(\frac{r_1}{r_2}+\frac{r_2}{r_1}\right)=\mu\,\frac{r_1^2+r_2^2}{r_1r_2}=2\mu\,\frac{2a^2-q_1^2-q_2^2}{q_1^2-q_2^2},$$

azaz, a két gyúpontban székelő centrális erők:

$$\frac{\partial V}{\partial r_1}=\frac{\mu}{r_2}-\frac{\mu r_2}{r_1^2};\qquad\frac{\partial V}{\partial r_2}=\frac{\mu}{r_1}-\frac{\mu r_1}{r_2^2};$$

melyek e szerint nem tisztán egy-egy távolság függvényei.

Ezen probléma a 224. §. mintájára elliptikus integrálok segélyével teljesen megfejtendő.

Hasonlóképen, felhasználva [a 227. §. parabolás coordinátái példájában (7_1) és (7_2) alatt használt,] a jelenlegi (2)-őt kielégítő:

1) $V=\mu(q_1^2+q_2^2)$ és 2) $V=\dfrac{\mu}{(a^2-q_1^2)(a^2-q_2^2)}$

eseteket; ezek itt [a 222. §. (6) és (5) szerint] megfelelnek az

1) $V=\mu(a^2+b^2-r^2)$; 2) $V=+\dfrac{\mu}{(a^2-b^2)x^2}$

erőfüggvényeknek: az első a coordináták kezdetétől számított r távolsággal arányos vonzást vagy taszítást, a második a Z tengelytől való távolság harmadik hatványával fordítva arányos vonzást vagy taszítást jelent. Képeztessék a jellemző egyenlet és belőle a pálya és az idő egyenlete. A.

168. A 226. §. *parabolikus coordinátái* (5) egyenleteiből bizonyíttassék be, hogy

$$q_1^2-q_2^2=\sqrt{4x^2p^2+(2zp-a^2)^2},$$

míg

$$q_1^2+q_2^2=2zp+a^2;$$

e szerint a 227. §. (3) alatt írt feltétele itt:

$$V=\frac{\psi_1\{\frac{1}{2}(2zp+a^2)+\sqrt{\ldots\ldots}\}}{\sqrt{\ldots\ldots}}-\frac{\psi_2\{\frac{1}{2}(2zp+a^2)-\sqrt{\ldots\ldots}\}}{\sqrt{\ldots\ldots}},$$

mely mellett a probléma quadraturákra vezethető viszsza. A.

169. *Mozgás hyperboloid felületeken* a távolsággal egyenesen arányos vonzás hatása alatt; *geodätikus görbék.*

1) A 228. §. (3) kifejezésébe írva $q_1=$constans, ez jelenti, hogy az m az $F_1=0$ kéthéjú hyperboloidon marad; ha itt $a^2+b^2+c^2-q_1^2=l_1$, a 229. §. (3) alakjának megfelelőleg a characteristikus egyenlet itt:

$$\frac{1}{L_2^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_2}\right)^2+\frac{1}{L_3^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_3}\right)^2=2mH-m^2\omega^2(l_1^2-q_2^2-q_3^2).$$

2) Hasonlóképen írva az idézett két §. kifejezéseibe $q_2=$constans, $dq_2=0$-t, továbbá $a^2+b^2+c^2-q_2^2=l_2^2$-t írva, az $F_2=0$ egyköpenyű hyperboloid-felületen való mozgását nyerjük az m-nek és a jellemző egyenlet itt:

$$\frac{1}{L_3^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_3}\right)^2+\frac{1}{L_1^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_1}\right)^2=2mH-m\omega^2(l_2^2-q_3^2-q_1^2).$$

Ezen egyenletek megfejtése a 229. §. eljárása szerint történvén, az ugyanott írt eredmények is érvényesek azon változtatással, hogy az ott írt q_1, q_2, q_3, l_3 helyébe az első esetben q_2, q_3, q_1, l_1, a második esetben q_3, q_1, q_2, l_2 teendő.

Mind ezen felületek geodäsiai vonalaira nézve $\omega^2=0$ teendő. V.

170. *Nehéz pont mozgása vertikális tengelyű elliptikus paraboloid domború oldalán: hyperbolikus paraboloidon. Geodätikus görbék.*

1) A 230. §. (4) egyenleteibe s í. t. téve $q_1=$const., ez jelenti,

hogy az m az $F_1=0$ vertikalisan lefelé irányított tengelyű elliptikus paraboloid domború oldalán tartozik maradni, a föld vonzása lévén a független erő; ha itt a 231. §. mintájára $a^2+b^2-q_1^2=l_1^2$, a jellemző egyenlet:

$$\frac{1}{L_2^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_2}\right)^2+\frac{1}{L_3^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_3}\right)^2=2mH+m^2\omega^2\,(l_1^2-q_2^2-q_3^2).$$

2) Hasonlóképen az idézett egyenletekben írva $q_2=\text{const.}$: az m az $F_2=0$ vertikális tengelyű hyperbolikus paraboloidon tartozik maradni; írva itt $a^2+b^2-q_2^2=l_2^2$:

$$\frac{1}{L_3^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_3}\right)^2+\frac{1}{L_1^2}\left(\frac{\partial A}{\partial q_1}\right)^2=2mH+m\omega^2\,(l_2^2-q_3^2-q_1^2).$$

Az egyenletek megfejtése a 231. §. eljárása szerint történik; eredményei is érvényesek; az ott írt q_1, q_2, q_3, l_3 helyébe rendre q_2, q_3, q_1, l_1, illetve q_3, q_1, q_2, l_2 teendők.

E felületek geodätikus vonalaira nézve e kifejezésekben $\omega^2=0$ teendő.