ÉRTEKEZÉSEK
EMLÉKEZÉSEK

ÉRTEKEZÉSEK EMLÉKEZÉSEK

SZERKESZTI
TOLNAI MÁRTON

2114

GYIRES BÉLA

A SZÜLETÉSI ÉS HALÁLOZÁSI FOLYAMATOK TOTÁLIS POZITIVITÁSÁRÓL

AKADÉMIAI SZÉKFOGLALÓ

1990. OKTÓBER 25.

1828

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

A kiadványsorozatban a Magyar Tudományos Akadémia 1982. évi CXLII. Közgyűlése időpontjától megválasztott rendes és levelező tagok székfoglalói — önálló kötetben — látnak napvilágot.

A sorozat indításáról az Akadémia főtitkárának 22/1/1982. számú állásfoglalása rendelkezett.

ISBN 963 05 6325 8

Kiadja az Akadémiai Kiadó, Budapest

Printed in Hungary

TARTALOM

BEVEZETÉS

Amint megállapítható, a totális pozitivitás fogalmát F. R. Gantmacher és M. G. Krein vezették be, még 1935-ben megjelent egyik dolgozatukban [1]. Ebben oszcillációs kérdések megoldására használták fel a totálisan pozitív mátrixok fogalmát és azokat az eredményeket, amelyeket ezzel kapcsolatban kaptak. Ezután több dolgozatban [2, 3] és egy monográfiában is [4] foglalkoztak ezekkel a kérdésekkel. I. J. Schoenberg 1951-ben megjelent nagyobb terjedelmű dolgozatában [5] a pozitív definit függvények általánosításaként értelmezi és a Pólya-féle frekvenciafüggvények segítségével jellemzi a totálisan pozitív függvényeket. Schoenberg tanítványa, S. Karlin számos dolgozatában továbbfejleszti ezt a kérdéskört, és két terjedelmes monográfiát is [6, 7] szentel ennek. Mindkét munka az elért eredmények valószínűségszámítási és matematikai statisztikai vonatkozásait is kifejti.

Előadó az általa bevezetett mátrixértékű, pozitív definit (szemidefinit), exponenciálisan konvex, valamint a mátrixértékű, Hankel-értelemben totálisan pozitív (nem negatív) függvényekre és sorozatokra vonatkozó, nagyobbrészt a totális pozitivitás témakörébe eső eredményeinek egy részét [8] munkájában foglalta össze. Ebben azonban nem tér ki azokra a következményekre, amelyekre, kapott eredményei alapján, valószínűségszámítási vonatkozásban eljutott. Jelen előadás célja az, hogy ezek közül ismertesse azokat, amelyek a születési és halálozási folyamatok elméletével kapcsolatosak.

Az előadás három részből áll. Az első rész azokat a fogalmakat és eredményeket foglalja össze, amelyek segítségével megfogalmazhatók a születési és halálozási folyamatokkal kapcsolatos eredmények. A második rész a születési és halálozási folyamatok analitikus elméletének McGregortól és Karlintól származó ama eredményeit ismerteti, amelyek e folyamatok totálisan pozitív tulajdonságainak ismertetése szempontjából szükségesek. A harmadik rész az előadás tulajdonképpeni céljával, a születési és halálozási folyamatok totálisan pozitív tulajdonságaival foglalkozik.

1. ÉRTELMEZÉSEK, JELÖLÉSEK

A véges vagy végtelen $a \leqq x \leqq b$ intervallumon értelmezett, korlátos változású, valós $\alpha(x)$ függvényt eloszlásfüggvénynek nevezzük, ha nem konstans és nem csökkenő ezen az intervallumon. Véges vagy végtelen típusúnak nevezzük, amint növekedési pontjainak száma véges vagy végtelen.

A véges vagy végtelen $a \leqq x \leqq b$ intervallumon értelmezett $p \times p$-ed rendű, mátrixértékű, valós $F(x)$ függvényt mátrixértékű eloszlásfüggvénynek nevezzük,

(a) ha szimmetrikus,

(b) ha elemei korlátos változású függvények,

(c) ha $F(y)-F(x)$ pozitív definit vagy szemidefinit mátrix, ha $a \leqq x < y \leqq b$, azaz, ha

$$\alpha(x;\, z) = z^* F(x)\, z, \quad a \leqq x \leqq b \tag{1}$$

eloszlásfüggvény minden $z \in \mathbb{R}^p$, $z \neq 0$ esetén.

A $p \times p$-ed rendű, mátrixértékű $F(x)$, $a \leqq x \leqq b$ eloszlásfüggvényt végtelen típusúnak nevezzük, ha (1) végtelen típusú eloszlásfüggvény minden $z \in \mathbb{R}^p$, $z \neq 0$ esetén.

A véges vagy végtelen $A = (a_{jk})$ mátrixot p-ed fokú hipermátrixnak nevezzük, ha elemei $p \times p$-ed rendű mátrixok.

Legyen

$$A=(a_{jk})_{j,\,k=1}^{n},$$

és legyen

$$1 \leqq j_1 < \ldots < j_s \leqq n,$$

$$1 \leqq k_1 < \ldots < k_s \leqq n.$$

Használni fogjuk az

$$(2) \qquad (a_{j_\alpha k_\beta})_{\alpha,\,\beta=1}^{s} = A\begin{pmatrix} j_1 \ldots j_s \\ k_1 \ldots k_s \end{pmatrix}$$

jelölést. Ha A p-ed fokú hipermátrix, akkor természetesen (2) is p-ed fokú hipermátrix.

Ha A p-ed fokú véges vagy végtelen hipermátrix, akkor az

$$A\begin{pmatrix} j_1 \ldots j_s \\ j_1 \ldots j_s \end{pmatrix}, \quad 1 \leqq j_1 < \ldots < j_s \quad (s=1, 2, \ldots)$$

mátrixokat az A mátrix p-ed fokú főminormátrixainak nevezzük.

A végtelen A mátrixot pozitív definitnek (szemidefinitnek) mondjuk, ha minden főminormátrixa pozitív definit (szemidefinit).

Ha adva van függvényeknek egy

$$f_j(x), \quad a \leqq x \leqq b \quad (j=1, \ldots, n)$$

sorozata, és ha $a \leqq x_1 < \ldots < x_n \leqq b$, akkor használni fogjuk az

$$(f_j(x_k))_{j,\,k=1}^{n} = \begin{pmatrix} f_1 \ldots f_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix}$$

jelölést.

Mátrixértékű függvény deriváltján (integrálján) az elemeinek deriváltjaiból (integráljaiból) alkotott mátrixot értjük.

Szükségünk lesz a pozitív definit (szemidefinit) szimmetrikus mátrixok fogalmának következő általánosítására.

1. Értelmezés. ([8], Definition 2.1.) A p-ed fokú szimmetrikus

$$A=(a_{jk})_{j,\ k=1}^{n}$$

hipermátrixot p-ed rendben pozitív definitnek (szemidefinitnek) nevezzük, ha minden

$$z\in\mathbb{R}^p,\quad z_j\in\mathbb{R}\quad (j=1,\dots,n),$$

$$z^*z\sum_{j=1}^{n} z_j^2>0$$

esetén

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(z^*a_{jk}z)\,z_j z_k>0\qquad(\geqq 0).$$

A véges vagy végtelen A mátrixot totálisan pozitívak (nem negatívnak) nevezzük, ha minden rendű aldeterminánsa pozitív (nem negatív).

Ennek a kiterjesztését jelenti a következő értelmezés.

2. Értelmezés. ([8], Definition 4.2.) A p-ed fokú véges vagy végtelen A hipermátrixot p-ed rendben totálisan pozitívnak (nem negatívnak) nevezzük, ha a

$$\operatorname{Det} A\begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_s \\ k_1 & \dots & k_s\end{pmatrix}>0\qquad(\geqq 0)$$

feltételek minden számbajöhető

$$1 \leqq j_1 < \ldots < j_s,\ 1 \leqq k_1 < \ldots < k_s\ (s=1, 2, \ldots)$$

esetén teljesülnek.

A valós és folytonos függvényeknek egy

$$(3) \qquad f_j(x), \quad a \leqq x \leqq b \quad (j=1, \ldots, n)$$

sorozatát ezen az intervallumon értelmezett Csebisev-rendszernek nevezzük, ha tetszés szerinti $a \leqq x_1 < \ldots < x_n \leqq b$ esetén

$$(4) \qquad \operatorname{Det}\begin{pmatrix} f_1 \ldots f_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix}$$

nullától különböző (minden ilyen determinánsnak ugyanaz az előjele).

A (3) Csebisev-rendszert pozitív típusúnak nevezzük, ha a (4)-beli determinánsok pozitívak, ellenkező esetben negatív típusúnak.

3. Értelmezés. ([8], Definition 5.1.) A $p \times p$-ed rendű, mátrixértékű

$$f(x), \quad a < x < b, \quad -\infty \leqq a < b \leqq \infty$$

függvényt p-ed rendben exponenciálisan konvex pozitív definit (szemidefinit) függvénynek nevezzük,

(a) ha $f(x)$ valós szimmetrikus mátrix,

(b) ha minden eleme mérhető függvény,

(c) ha minden eleme majdnem mindenütt véges,

(d) ha a p-ed fokú

$$\left(f(t_j + t_k)\right)_{j,\,k=1}^{n}$$

hipermátrix p-ed rendben pozitív definit (szemidefinit) tetszés szerinti természetes n szám és tetszés szerinti

$$a<t_1<\ldots<t_n<b,$$

$$a<t_j+t_k<b \quad (j,\, k=1,\ldots,n)$$

választás esetén.

Ezt a fogalmat $p=1$ esetre S. N. Bernstein vezette be. Ebben az esetben az $f(x)$ függvényt röviden pozitív definit (szemidifinit) exponenciálisan konvex függvénynek nevezzük.

4. Értelmezés. ([8], Definition 5.2.) A $p\times p$-ed rendű, mátrixértékű

$$f(t),\quad a<t<b,\quad -\infty\leqq a<b\leqq\infty$$

függvényt Hankel-értelemben p-ed rendben totálisan pozitívnak (nem negatívnak) nevezzük,

(a) ha $f(t)$ mérhető függvény minden elemében,

(b) ha $f(t)$ minden eleme majdnem mindenütt véges,

(c) ha a p-ed fokú

$$\left(f(t_j+\tau_k)\right)_{j,\,k=1}^{n}$$

hipermátrix p-ed rendben totálisan pozitív (nem negatív) tetszés szerinti természetes n szám és az

$$a<t_j<b,\quad a<\tau_j<b \quad (j=1,\ldots,n)$$

számok olyan megválasztása esetén,

amelyek kielégítik az

$$a<t_1<\ldots<t_n<b,$$

$$a<\tau_1<\ldots<\tau_n<b,$$

$$a<t_j+\tau_k<b \quad (j,\ k=1,\ldots,n)$$

feltételeket.

S. N. Bernstein az $f(x)$, $a<x<b$ függvényt abszolút monotonnak nevezi, ha minden természetes n szám esetén és minden olyan x és $h>0$ számra, amelyek kielégítik az $a<x<b$, $a<x+nh<b$ feltételt, teljesülnek az

$$f(x)\geqq 0,$$

$$\Delta_h^n(f)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(x+nh)\geqq 0$$

feltételek. Az $f(x)\equiv\infty$ triviális esetet kizárjuk.

5. Értelmezés. ([8], Definition 5.3.) A $p\times p$-ed rendű, valós, szimmetrikus, mátrixértékű $f(x)$, $a<x<b$ függvényt abszolút monotonnak nevezzük ezen az intervallumon, ha minden $z\in\mathbb{R}^p$, $z\neq 0$ estén $z^*f(x)z$, $a<x<b$ abszolút monoton függvény.

2. SZÜLETÉSI ÉS HALÁLOZÁSI FOLYAMATOK

A születési és halálozási folyamatok analitikus elméletével kapcsolatos alábbi eredmények összeállítása [9] felhasználásával készült.

A születési és halálozási folyamat olyan stacionárius $X(t)$, $0 \leqq t < \infty$ Markov-folyamat, amelynek állapottere a nem negatív egész számok halmaza, és amelynek

$$P_{ij}(t) = P\big(X(t+s)=j \mid X(s)=i\big) \tag{5}$$

$$(i, j = 0, 1, 2, \ldots)$$

átmeneti valószínűségei kielégítik a

$$\begin{cases} P_{i\,i+1}(t) = \lambda_i t + o(t) \\ P_{i\,i}(t) = 1 - (\lambda_i + \omega_i)\, t + o(t) \\ P_{i\,i-1}(t) = \omega_i t + o(t) \end{cases} \tag{6}$$

feltételeket, ahol

$$\lambda_i > 0 \;\; (i \geqq 0), \quad \omega_i > 0 \;\; (i \geqq 1), \quad \omega_0 \geqq 0$$

állandók, és

$$\lim_{t \to 0} \frac{o(t)}{t} = 0\,.$$

Pongyolábban megfogalmazva: olyan populációban, amelyben az s időpontban i számú egyed van, annak valószínűsége, hogy kis $t > 0$ esetén az $[s, s+t]$ intervallumban pontosan egy születés, illetve egy halálozás történjék, arányos a t mennyiséggel. Annak valószínűsége, hogy sem születés, sem halálozás ne történjék, közel egy, és hogy egynél több születés, illetve elhalálozás legyen, közel zérus.

A születési és halálozási folyamatok analitikus elméletének alapkérdése az (5) függvények meghatározása a (6) feltételek mellett.

A (6) feltételek teljesülése esetén az (5) függvények differenciálhatók a nem negatív számegyenesen. Ezért ha

$$P(t) = \left(P_{ij}(t)\right)_{i,j=0}^{\infty}, \quad t \geqq 0,$$

és ha az

$$A = \begin{pmatrix} -(\lambda_0+\omega_0) & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \omega_1 & -(\lambda_1+\omega_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \omega_2 & -(\lambda_2+\omega_2) & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots \end{pmatrix}$$

jelöléssel élünk, teljesülnek a

(A) $$P'(t) = P(t)A,$$

(B) $$P'(t) = AP(t),$$

(C) $$P(0) = I$$

egyenlőségek, ahol I az egységmátrix. Az (A) differenciálegyenlet-rendszert „backward”, a (B) differenciál-egyenletrendszert „forward” egyenleteknek is nevezik, és (C) a kezdőfeltételeket adja meg.

A fentiek alapján feladatunk az (A) és (B) differenciálegyenlet-rendszerek megoldása a

(C) kezdőfeltételek mellett. Mivel ennek a feladatnak végtelen sok mátrixértékű $P(t)$ függvény tesz eleget, $P(t)$ meghatározásánál az átmeneti valószínűségek mátrixának további tulajdonságait is számba kell vennünk. Ezek

$$\text{(D)} \qquad P_{ij}(t) \geqq 0 \quad (i, j=0, 1, 2, \ldots),$$

$$\text{(E)} \qquad \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) \leqq 1 \quad (i=0, 1, 2, \ldots),$$

$$\text{(F)} \qquad P(t+s)=P(t)\,P(s).$$

Ez utóbbi az a félcsoport-tulajdonság, amelyet Chapman—Kolmogorov-egyenletnek is neveznek.

Hogy ezeknek a feltételeknek figyelembevételével oldhassuk meg az (A)—(C) differenciálegyenlet-rendszert, McGregor és Karlin nyomán ([10]) a következőképpen járhatunk el. Az A mátrix elemeinek segítségével a

$$\begin{aligned} &Q_0(x) \equiv 1, \\ -&xQ_0(x) = -(\lambda_0+\omega_0)\,Q_0(x) + \lambda_0\,Q_1(x), \\ -&xQ_n(x) = \omega_n\,Q_{n-1}(x) - (\lambda_n+\omega_n)\,Q_n(x) + \\ &\qquad + \lambda_n\,Q_{n+1}(x) \\ &\qquad (n=1, 2, 3,) \end{aligned}$$

rekurzióval értelmezzük a $\{Q_n(x)\}_0^\infty$ polinomsorozatot. Legyen $\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}$ tetszés szerinti eloszlásfüggvény. Ekkor az

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_0(x)\,\mathrm{d}\alpha(x) = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_n(x)\,\mathrm{d}\alpha(x) = 0 \quad (n \geqq 1)$$

feltételekből kiindulva meghatározható az $\alpha(x)$ eloszlásfüggvénytől független, csak a születési és halálozási folyamatot meghatározó A intenzitási mátrix elemeitől függő olyan

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k\,\mathrm{d}\alpha(x) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

számsorozat, amelyről kimutatható, hogy eleget tesz a Stieltjes-momentumprobléma megoldását kielégítő feltételeknek. De akkor létezik olyan végtelen típusú $\Psi(x)$, $0 \leqq x < \infty$ eloszlásfüggvény, amelyre

$$c_n = \int_{0}^{\infty} x^n\,\mathrm{d}\Psi(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

és

$$\int_{0}^{\infty} Q_i(x)\,Q_j(x)\,\mathrm{d}\Psi(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } i \neq j, \\ \dfrac{1}{\pi_i}, \text{ ha } i = j, \end{cases}$$

ahol

$$\pi_0 = 1, \qquad \pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Tehát a

$$\{Q_n(x)\}_0^\infty$$

polinomrendszer a $0 \leqq x < \infty$ intervallumon a Ψ eloszlásfüggvényre nézve ortogonális rendszer. A Ψ eloszlásfüggvényt az adott születési és halálozási folyamathoz tartozó Stieltjes-momentumprobléma megoldásának nevezzük.

A Stieltjes-momentumprobléma Ψ megoldása extremális, ha az

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 \, d\Psi(x) =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \left| \int_0^\infty f(x) Q_n(x) \, d\Psi(x) \right|^2 \pi_n$$

Parseval-egyenlőség minden $f \in L_2(\Psi)$ esetén teljesül.

Ismeretes, ha a Stieltjes-momentumproblémának egyetlen megoldása van, akkor az extremális. Ha több megoldás is létezik, akkor az extremális megoldások száma kontinuum számosságú.

A Stieltjes-momentumprobléma minden Ψ megoldásához olyan $P(t)$ mátrix tartozik, amelynek elemei

$$(7) \quad P_{ij}(t)=\pi_j \int_0^\infty e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) \mathrm{d}\Psi(x)$$

$$(i, j=0, 1, 2, \ldots)$$

alakban állíthatók elő. Ez a $P(t)$ mátrix kielégíti az (A)—(C) differenciálegyenlet-rendszert, és a Stieltjes-momentumprobléma különböző megoldásaihoz más és más $P(t)$ tartozik.

Igazak a következő állítások:

(I) Ha Ψ a Stieltjes-momentumprobléma megoldása és $P(t)$ a hozzá tartozó mátrix (7) elemekkel, akkor $P(t)$ a (D) és (E) feltételeket is kielégíti.

(II) Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy $P(t)$ az (F) feltételt is kielégítse az, hogy Ψ a Stieltjes-momentumprobléma extremális megoldása legyen.

(III) Ha a $P(t)$ mátrix kielégíti az (A)—(F) feltételeket, akkor elemei előállíthatók (7) alakban, ahol Ψ a Stieltjes-momentumprobléma megoldása.

(IV) Ahhoz, hogy egyetlen olyan $P(t)$ mátrix létezzék, amely kielégíti az (A)—(F) feltételeket, szükséges és elegendő az, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\pi_n + \frac{1}{\lambda_n \pi_n} \right)$$

sor divergens legyen.

3. A SZÜLETÉSI ÉS HALÁLOZÁSI FOLYAMATOK TOTÁLIS POZITÍV TULAJDONSÁGAIRÓL

Az előző részek előkészítése után rátérünk az előadás céljaként megfogalmazott problémakörre, a születési és halálozási folyamatok totálisan pozitív tulajdonságainak tárgyalására.

Három ilyen tulajdonságot ismertetünk. Az első a [8] dolgozat 6.2. tételének a következménye. Ugyanis a Stieltjes-momentumprobléma $\Psi(t)$, $t \geqq 0$ megoldása végtelen típusú eloszlásfüggvény, így ennek a tételnek értelmében igaz a következő állítás.

1. Tétel. Legyen $\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}$ tetszés szerinti eloszlásfüggvény. Ekkor az

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_0(x)\mathrm{d}\alpha(x) = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_n(x)\mathrm{d}\alpha(x) = 0 \quad (n \geqq 1)$$

feltételek alapján képzett, csak a születési és halálozási folyamatot meghatározó A intenzitási mátrix elemeitől függő

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \mathrm{d}\alpha(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

számsorozattal megalkotott Hankel-típusú

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots \end{pmatrix}$$

mátrix totálisan pozitív.

A következő totálisan pozitív tulajdonságként McGregor és Karlin következő érdekes tételét említjük meg ([10], Theorem 20.).

Ha Ψ a Stieltjes-momentumprobléma extremális megoldása, akkor a

$$P(t)=\left(\int_0^\infty e^{-tx}Q_i(x)Q_j(x)\mathrm{d}\Psi(x)\right)_{i,j=0}^\infty$$

mátrix minden rögzített $t>0$ esetén totálisan pozitív.

Innen következik, ha Ψ a Stieltjes-momentumprobléma extremális megoldása, akkor

$$P_{ij}(t)>0, \quad t>0 \qquad (i, j=0, 1, 2, \dots),$$

továbbá az is következik, hogy ha $i_1<\dots<i_p$ és $j_1<\dots<j_p$ nem negatív egész számok, akkor

$$P\begin{pmatrix} t; & \begin{matrix} i_1 \dots i_p \\ j_1 \dots j_p \end{matrix} \end{pmatrix}=$$

$$=\mathrm{Det}\begin{pmatrix} P_{i_1 j_1}(t) & \dots & P_{i_1 j_p}(t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ P_{i_p j_1}(t) & \dots & P_{i_p j_p}(t) \end{pmatrix}>0, \quad t>0.$$

Ennek a formulának érdekes valószínűségszámítási jelentése is van.

Legyen adva p számú, az $1, \ldots, p$ számokkal megjelölt részecske. Ezek valamely adott s időpontban, egymástól függetlenül induljanak ki rendre az $i_1, \ldots, i_p$ állapotból. Ekkor

$$P\left(t;\ \begin{matrix} i_1 \ldots i_p \\ j_1 \ldots j_p \end{matrix}\right)$$

annak a valószínűsége, hogy ezek a részecskék t idő múlva rendre a $j_1, \ldots, j_p$ állapotban legyenek, feltéve, hogy a t idő alatt egy időben több részecske nem tartózkodhat ugyanabban az állapotban.

Végül a születési és halálozási folyamatok olyan totálisan pozitív tulajdonságával szeretnék foglalkozni, amelyet teljes egészében csak a közelmúltban sikerült igazolni.

2. Tétel. Legyen Ψ a Stieltjes-momentum-probléma megoldása és

$$P(t) = \left(P_{ij}(t)\right)_{i,j=0}^{\infty}, \quad t \geqq 0$$

a hozzá tartozó átmeneti valószínűségek mátrixa, ahol

$$P_{ij}(t) = \pi_j \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-tx} Q_i(x) Q_j(x) \mathrm{d}\Psi(x).$$

Ekkor minden természetes p szám esetén, a $k_1, \ldots, k_p$ egész számoknak minden $0 \leqq k_1 < < \ldots < k_p$ megválasztása mellett, a $p \times p$ mátrixértékű

$$P\left(t;\ \begin{matrix} k_1 \ldots k_p \\ k_1 \ldots k_p \end{matrix}\right)$$

függvény p-ed rendben Hankel-értelemben totálisan pozitív a $0<t<\infty$ intervallumban.

A tétel megfogalmazásából következik, érvényességéhez nem szükséges feltételezni, hogy Ψ extremális megoldása legyen a Stieltjes-momentumproblémának. Így McGregor és Karlin totálpozitivitási tétele a $P(t)$ mátrix véges rendű főminoraira nézve akkor is igaz, ha nem tételezzük fel, hogy Ψ extremális megoldása a Stieltjes-momentumproblémának. Innen következik pl. az, hogy a $P(t)$ mátrix elemei pozitív számok, akkor is, ha nem tételezzük fel azt, hogy Ψ a Stieltjes-momentumproblémának extremális megoldása.

2. Tétel bizonyítása. Legyenek

$$0<t_1<\ldots<t_n, \quad 0<\tau_1<\ldots<\tau_n$$

tetszés szerinti valós számok. A [8] dolgozat 3.2. tételének felhasználásával

$$D=\operatorname{Det} P\begin{pmatrix} t_j+\tau_k; & \begin{matrix} k_1 \ldots k_p \\ k_1 \ldots k_p \end{matrix} \end{pmatrix}_{j,k=1}^{n} =$$

$$=\int_{\Omega}\ldots\int \prod_{i=1}^{n} \operatorname{Det}^2\begin{pmatrix} Q_{k_1} & \ldots & Q_{k_p} \\ x_{i1} & \ldots & x_{ip} \end{pmatrix} (\pi_{k_1}\ldots\pi_{k_p})^2 \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{p} \operatorname{Det}\begin{pmatrix} e^{-t_1 x} & \ldots & e^{-t_n x} \\ x_{1j} & \ldots & x_{nj} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \operatorname{Det}\begin{pmatrix} e^{-\tau_1 x} & \ldots & e^{-\tau_n x} \\ x_{1j} & \ldots & x_{nj} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \mathrm{d}\Psi(x_{11}) \dots \mathrm{d}\Psi(x_{1p}) \dots \mathrm{d}\Psi(x_{n1}) \dots$$
$$\dots \mathrm{d}\Psi(x_{np}),$$

ahol

$$\Omega = \{0 < x_{11} < \dots < x_{1p} < \dots < x_{n1} < \dots < x_{np}\}.$$

Mivel az

$$\{e^{-t_{n-j+1}x}\}_{j=1}^{n}, \quad \{e^{-\tau_{n-j+1}x}\}_{j=1}^{n}, \quad 0 < x < \infty$$

sorozatok pozitív típusú Markov-sorozatok ezen az intervallumon, minden $0 < x_1 < \dots < < x_n < \infty$ számsorozat esetén

$$(8) \qquad \mathrm{Det}\begin{pmatrix} e^{-t_1 x} & \dots e^{-t_n x} \\ x_1 & \dots x_n \end{pmatrix} \times$$
$$\times \mathrm{Det}\begin{pmatrix} e^{-\tau_1 x} & \dots e^{-\tau_n x} \\ x_1 & \dots x_n \end{pmatrix} > 0.$$

Tehát $D \geqq 0$. (8) miatt azonban $D = 0$ akkor és csak akkor, ha $0 < x_1 < \dots < x_p < \infty$ esetén

$$(9) \qquad \mathrm{Det}\begin{pmatrix} Q_{k_1} & \dots Q_{k_p} \\ x_1 & \dots x_p \end{pmatrix} = 0,$$

a Ψ mértékre nézve nullmértékű halmaz kivételével. Viszont

$$p! \int_{0 < x_1 < \dots < x_p < \infty} \mathrm{Det}^2\begin{pmatrix} Q_{k_1} & \dots Q_{k_p} \\ x_1 & \dots x_p \end{pmatrix} \times$$
$$\times \mathrm{d}\Psi(x_1) \dots \mathrm{d}\Psi(x_p) =$$

$$= \operatorname{Det}\left(\int_0^\infty Q_{k_\alpha}(x) Q_{k_\beta}(x) \, d\Psi(x) \right)_{\alpha, \beta = 1}^{p} =$$

$$= \frac{1}{\pi_{k_1} \ldots \pi_{k_p}} > 0,$$

ami ellentmond a (9) megállapításának. Ezzel a 2. tételt igazoltuk.

Legyen Ψ a Stieltjes-momentumprobléma megoldása. Ennek és az ortogonális polinomok egy $\{Q_n(x)\}_0^\infty$ rendszerének segítségével értelmezzük az

$$F_{ij}(x) = \int_0^x Q_i(x) Q_j(x) \, d\Psi(x) \tag{10}$$

$$(i, j = 0, 1, 2, \ldots)$$

függvényeket. Ha $i=j$, akkor (10) végtelen típusú eloszlásfüggvény. Ha $i \neq j$, akkor (10) korlátos változású függvény, amely kielégíti az

$$F_{ij}(0) = F_{ij}(\infty) = 0 \qquad (i \neq j) \tag{11}$$

feltételt.

1. Lemma. Legyen Ψ a Stieltjes-momentumprobléma megoldása. Legyen

$$F(x) = \left(F_{ij}(x)\right)_{i, j = 0}^{\infty}, \qquad 0 \leqq x < \infty, \tag{12}$$

ahol e végtelen mátrix elemeit (10) értelmezi. Ekkor a (12) mátrix minden rögzített $x > 0$ esetén pozitív definit végtelen mátrix, továbbá minden véges rendű főminormátrixa végtelen típusú, mátrixértékű eloszlásfüggvény.

Bizonyítás. Legyen p természetes szám, és legyenek $0 \leqq i_1 < \ldots < i_p$ egész számok. Legyen $z=(z_j)\in\mathbb{R}^p$, $z \neq 0$. Ekkor (7) alapján

$$z^* F\left(x; \begin{matrix} i_1 \ldots i_p \\ i_1 \ldots i_p \end{matrix}\right) z =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=1}^{p} F_{i_\alpha i_\beta}(x) z_\alpha z_\beta =$$

(13)

$$= \int_0^x \left(\sum_{\alpha=1}^{p} z_\alpha Q_{i_\alpha}(x) \right)^2 \mathrm{d}\Psi(x) > 0, \quad 0 < x < \infty,$$

mivel részben a zárójelben lévő polinom csak véges számú helyen tűnhet el, részben mert Ψ végtelen típusú eloszlásfüggvény. Így a (13) kvadratikus forma az x változónak szigorúan növekvő függvénye.

Az 1. Lemma, továbbá a [8] dolgozat 5.2., 5.5. és 6.2. tételei alapján igaz a

3. Tétel. Legyen Ψ a Stieltjes-momentum-probléma megoldása. Legyen Π az a végtelen diagonális mátrix, amelynek diagonálisában rendre a $\{\pi_k\}_0^\infty$ sorozat elemei vannak. Ekkor a

$$\Pi^{-1} P(t) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tx} \mathrm{d}F(x), \quad 0 < t < \infty$$

végtelen mátrix minden $p \times p$-ed rendű főminormátrixa

(1) p-ed rendben Hankel-értelemben totálisan pozitív,

(2) p-ed rendben pozitív definit exponenciálisan konvex,

(3) $p \times p$-ed rendű mátrixértékű abszolút monoton függvény.

Az 1. Lemma, továbbá a [8] dolgozat 5.1., 5.3. és 5.4. tételei, valamint (11) alapján igaz a

4. Tétel. Legyen Ψ a Stieltjes-momentum-probléma megoldása. Ekkor a

$$P_{ii}(t)=\pi_i \int_0^\infty e^{-tx} dF_{ii}(x), \quad 0<t<\infty$$

$$(i=0, 1, \ldots)$$

függvények

(1) Hankel-értelemben totálisan pozitív függvények,

(2) pozitív definit exponenciálisan konvex függvények,

(3) abszolút monoton függvények.

Viszont a

$$P_{ij}(x)=\pi_j \int_0^\infty e^{-tx} dF_{ij}(x), \quad 0<t<\infty, \quad i \neq j$$

$$(i, j=0, 1, 2, \ldots)$$

függvények nem rendelkezhetnek (1), (2) és (3) tulajdonságok egyikével sem.

Végezetül szeretném megemlíteni, matematikai szempontból van annak érdekessége, ha a $\Psi(x)$, $0 \leqq x < \infty$ mértékre nézve ortogonális polinomok $\{Q_n(x)\}_0^\infty$ rendszerének segítségével felépített Hankel-típusú

$$Q(x)=\begin{pmatrix} Q_0(x) & Q_1(x) & Q_2(x) & \dots \\ Q_1(x) & Q_2(x) & Q_3(x) & \dots \\ Q_2(x) & Q_3(x) & Q_4(x) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots \end{pmatrix}$$

mátrixot is hasonló vizsgálatnak vetnénk alá, mint azt az átmeneti valószínűségek $P(t)$ mátrixával tettük. Ebben a vonatkozásban várható eredmények — a dolog természetéből kifolyólag — erősen függenek a $\Psi(x)$ mértéktől, pl. attól, milyen a spektruma.

Ilyen vizsgálatok a születési és halálozási folyamatoktól függetlenül folytak. Az volt a kérdés, ha a Hankel-típusú végtelen $Q(x)$ mátrix, valamely $a \leqq x \leqq b$ intervallumon értelmezett $\Psi(x)$ mértékre nézve, ortogonális polinomokból épül fel, mit lehet mondani a $Q(x)$ mátrix főminormátrixainak determinánsáról.

Első ilyen eredmény Turán Pál nevéhez fűződik. Kimutatta, ha $\{Q_n(x)\}_0^\infty$ a Legendre-féle ortogonális polinomoknak a rendszere, vagyis ha a

$$\int_{-1}^{1} Q_j(x) Q_k(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j, \\ \dfrac{2}{2j+1}, & \text{ha } i = j \end{cases}$$

feltétel teljesül, akkor

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} Q_n(x) & Q_{n+1}(x) \\ Q_{n+1}(x) & Q_{n+2}(x) \end{pmatrix} \leqq 0, \quad -1 \leqq x \leqq 1,$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor lehet, ha $x = \pm 1$. Ezt az eredményt, a Turánétól különböző négy újabb bizonyítással együtt, Szegő Gábor tette közzé [11]. A cikk megjelenését nagy érdeklődés követte. Általában is, de speciális ortogonális rendszerek esetében is, sokan vizsgálták a $Q(x)$ mátrix elemeiből felépíthető determinánsokat. Sok érdekes eredmény született ebben a témakörben. Csak Karlin és Szegő gazdag anyagot felölelő [12] dolgozatára hivatkozunk, amelyet Turán Pál ötvenedik születésnapjára írtak és amelyet teljesen ennek a tárgykörnek szenteltek.

Ezeknek az általános eredményeknek egy része a születési és halálozási folyamatok vizsgálatával kapcsolatban fellépő, ortogonális polinomrendszerek elemeiből felépített $Q(x)$ mátrixokra is alkalmazható. Így pl. a [12] dolgozatban is több olyan tétel található, amelyekből következtetés vonható erre az esetre is.

IRODALOM

1. *Gantmacher, F. R. — Krein, M. G.*:" Sur les matrices oscillatoires." Compes Rendus de l'Acad. des Sciences, Paris **201,** 577—579 (1935).
2. *Gantmacher, F. R. — Krein, M. G.*: "Sur les matrices oscillatoires et complètement non négatives." Compositio Mathematica **4,** 445—446 (1937).
3. *Gantmacher, F. R. — Krein, M. G.*: "Determinánsok olyan speciális osztályáról, amelyek a Kellog-féle integrálmagokkal kapcsolatosak." Mat. Sbornik **42,** 501—508 (1935). Orosz nyelven.
4. *Gantmacher, F. R. — Krein, M. G.*: Oszillationsmaterizen, Oszillationskerne und kleine Schwingungen mechanischer Systeme. Akademie-Verlag, Berlin, 1960.
5. *Schoenberg, I. J.*: "On Pólya frequency functions". Journal d'Analyse Math. **I** (Deuxième Partie), 331—374 (1951).
6. *Karlin, S.*: Total Positivity. Vol. I. Stanford Univ. Press, Stanford, 1968.
7. *Karlin, S. — Studden, W. J.*: Tchebycheff Systems with Applications in Analysis and Statistics. J. Willey and Sons, New York, 1966.
8. *Gyires, B.*: "On the matrix-valued exponentially convex, totally positive functions and sequences." 1990. Megjelenés alatt.
9. *Karlin, S. — McGregor, I. L.*: "Representation of a class of stochastic processes." Proc. Math. Acad. Sci. USA **41,** 387—391 (1955).
10. *Karlin, S. — McGregor, I. L.*: "The differential equations of birth and death processes, and the Stieltjes moment problem." Trans. of the Amer. Math. Soc. **85,** 489—546 (1957).
11. *Szegő, G.*: "On an inequality of P. Turán concerning Legendre polynomials." Bulletin of the Amer. Math. Soc. **54,** 401—405 (1948).

12. *Karlin, S.* — *Szegő, G.*: "On certain determinants whose elements are orthogonal polynomials." Journal d'Analyse Math. **VIII,** 1—157 (1960/61).
13. *Karlin, S.* — *McGregor, I. L.*: "Coincidence probabilities." Pacific Journal of Mathematics **9,** 1141—1164 (1959).

A kiadásért felelős
az Akadémiai Kiadó és Nyomda Vállalat igazgatója
A nyomdai munkálatokat
az Akadémiai Kiadó és Nyomda Vállalat végezte
Felelős vezető: Zöld Ferenc
Budapest, 1992
Nyomdai táskaszám: 20893
Felelős szerkesztő: Szente László
Műszaki szerkesztő: Kiss Zsuzsa
Kiadványszám: I/59.
Megjelent: 1,58 (A/5) ív terjedelemben
HU ISSN 0236-6258