ÉRTEKEZÉSEK
EMLÉKEZÉSEK

LEINDLER LÁSZLÓ

ORTOGONÁLIS SOROK SZUMMÁLHATÓSÁGA

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

ÉRTEKEZÉSEK
EMLÉKEZÉSEK

ÉRTEKEZÉSEK
EMLÉKEZÉSEK

SZERKESZTI
TOLNAI MÁRTON

LEINDLER LÁSZLÓ

ORTOGONÁLIS SOROK SZUMMÁLHATÓSÁGA

AKADÉMIAI SZÉKFOGLALÓ

1983. ÁPRILIS 13.

1828

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

A kiadványsorozatban a Magyar Tudományos Akadémia 1982. évi CXLII. Közgyűlése időpontjától megválasztott rendes és levelező tagok székfoglalói — önálló kötetben — látnak napvilágot.

A sorozat indításáról az Akadémia főtitkárának 22/1/1982. számú állásfoglalása rendelkezett.

ISBN 963 05 3979 9

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó és Nyomda főigazgatója
Felelős szerkesztő: Szente László
A tipográfia és a kötésterv Löblin Judit munkája
Műszaki szerkesztő: Érdi Júlia
Terjedelem: 2,17 (A/5) ív — AK 1752 k 8587
HU ISSN 0236-6258
13729 Akadémiai Kiadó és Nyomda
Felelős vezető: Hazai György

Printed in Hungary

1. Az ortogonális sorok szummálhatósága azon témakörök egyike, amelyekkel eddigi tudományos munkásságom 25 éve alatt legtöbbet foglalkoztam. Már első dolgozatomban ([14]) megjelenik egy általános approximációs tétel alkalmazásaként, s a negyedik dolgozatom ([15]) témája kizárólag az erős szummáció, amelyet pár évvel korábban Alexits György [2], [3] és Tandori Károly [56], [58] vizsgáltak intenzíven és eredményesen. Ettől kezdve több éven át kutatásaim fő részét az ortogonális sorok szummálhatóságának és a vele rendkívül szoros kapcsolatban levő approximációs kérdések vizsgálata képezte. Később érdeklődésem különböző témákkal bővült, például több dolgozatomban foglalkoztam együttható és strukturális feltételek ekvivalenciájának és egyéb relációjának tisztázásával, speciális Fourier-sorok és hatványsorok vizsgálatával, függvényosztályok kapcsolataival, különböző egyenlőtlenségek általánosításaival, s különösen sok dolgozatomban vizsgáltam az ugyancsak Alexits professzor ([4]) által kezdeményezett erős approximációt. Azonban az ortogonális sor, mégha speciálisan is, mint Fourier-sor vagy Haar-sor, szinte minden dolgozatomban megjelenik legalább mint mo-

tiváló tényező. Például a Hardy—Littlewood-típusú egyenlőtlenségek általánosításaira is ilyen célból volt szükségem, bár e dolgozatomban ([26]) kizárólag numerikus sorokkal foglalkozom; sőt ilyen célból kértem Németh Józsefet azok további általánosítására ([48]).

Mindezek alapján úgy érzem, hogy ezen eredményeimről szóló előadás fejezi ki leghűebben a véleményemet arról, hogy mely tudományos eredményeimet, pontosabban mely témakörben kifejtett tudományos kutatásaimat, méginkább azok együttes hatását tekintem legdöntőbb tényezőnek akadémiai rendes taggá történő megtisztelő megválasztásomban. Természetesen nem tudom és nem is akarom minden eredményemet még e témáról sem megemlíteni, pl. olyan nagy problémakört, mint az abszolút szummálhatóság, amiről szintén több cikket írtam, teljes egészében mellőzöm.

Legyen $\{\varphi_n\}$ négyzetesen integrálható függvények ortonormált rendszere. A következő tételekben az alábbi alakú ortogonális sor és annak részletösszegei lesznek az alapfogalmak:

$$(1)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x) \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty\right), \qquad s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x).$$

A klasszikus Riesz—Fischer-tétel szerint az (1) sor részletösszegei integrálközépben egy négyzetesen integrálható függvényhez konvergálnak, de a pontonkénti konvergenciát már csak az ugyancsak klasszikus

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n^2 \log^2 n < \infty \tag{2}$$

Mensov—Rademacher-féle feltétel biztosítja, de természetesen az is csak majdnem mindenütt. Mensov azt is megmutatta, hogy a (2) feltétel nem gyengíthető. Ezt a szép eredményt Tandori Károly [55] lényegesen továbbfejlesztette, ugyanis ő azt is megmutatta, hogy monoton $\{c_n\}$ együtthatókra a (2) feltétel szükséges is ahhoz, hogy az (1) sor majdnem minden pontban konvergáljon bármely ortonormált $\{\varphi_n\}$ függvényrendszerre. Tandori Károly ezen eredményét úgy tudtam élesíteni, hogy megmutattam, hogy ha (2) monoton $\{c_n\}$-re nem teljesül, akkor ortonormált polinomrendszert is lehet konstruálni úgy, hogy az azzal képzett (1) sor már pozitív mértékű halmazon divergált ([14]). Szalay István [52] analóg eredményt bizonyított trigonometrikus polinomokra. Csernyák Lászlóval közös dolgozatunkban pedig egyenletesen korlátos divergencia-rendszer létezését bizonyítottuk „ritkított" részletösszegekre ([9]).

Ezen eredmények mutatják, hogy a (2) feltételt gyengítve már csak bizonyos szummálhatósági eredményt várhatunk. Az egyik legegyszerűbb és legfontosabb szummációs módszerre, a

$$\sigma_n(x) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k(x)$$

ún. (C,1)-közepekre. Mensov és Kaczmarz egymástól függetlenül megmutatták, hogy a

$$(3) \qquad \sum_{n=4}^{\infty} c_n^2 (\log\log n)^2 < \infty$$

feltétel biztosítja a konvergenciát. Természetesen itt is csak egy zéró mértékű halmaztól eltekintve tudjuk a $\sigma_n(x)$ közepek konvergenciáját, s a további tételekben is mindig ez lesz a helyzet, ezért az egyszerűség kedvéért mostantól konvergencián mindig majdnem mindenütt való konvergenciát értünk. Megemlítjük, hogy a (3) feltétel élesíthetetlenségével kapcsolatban a konvergenciánál elmondott eredmények analogonjai is ismertek, s ugyanazon matematikusok mutatták ezeket meg, mint akiket a konvergenciánál említettünk.

A Mensov—Kaczmarz-féle eredményt az alábbi ekvivalens formákban is megfogalmazhatjuk:

$$(4) \qquad \sigma_n(x) \to s(x) \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (s_k(x) - s(x)) \to 0.$$

A második állítás szinte felkínálja a kérdést, hogy az összeg azért tart-e nullához, mert az összegben fellépő tagok különböző előjelűek, és így azok összege ezért lesz kicsi; vagy azért tart az összeg nullához, mert tagjai előjeltől függetlenül kicsik. Ezt a kérdést Hardy és Littlewood már 1913-ban Fejér Lipót világhírű alaptételével, a folytonos függvények (C,1)-szummálhatóságával kapcsolatban fel is tette, s válaszként megmutatta, hogy a második eset áll fenn. Pontosabban ők azt az erősebb állítást mutatták meg, hogy ha $s(x)$ egy integrálható függvény és a $\{\varphi_n\}$ rendszer a trigonometrikus rendszer, akkor

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|s_k(x)-s(x)|\to 0, \tag{5}$$

s az (5) állítás minden folytonossági pontban teljesül.

Ezzel az eredménnyel el is jutottunk az ún. *erős szummálhatóság* fogalmához, ugyanis, ha (5) teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az (1) sor erős értelemben is $s(x)$-hez szummálható, azaz az eltérések abszolút értékeinek számtani közepe is nullához tart, nemcsak a tagoké, ami nyilvánvalóan egy „erősebb" állítás. E kérdéskört sokan vizsgálták, többek között Fejér Lipót maga is, de vizsgálta Fekete Mihály, Carleman, Sutton, Marcinkiewicz és Zygmund is.

Az (5) állításnak többféle általánosítása is lehetséges.

1. Különböző *kitevőkkel* vizsgálhatjuk az alábbi konvergenciát:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|s_k(x)-s(x)|^p\to 0. \tag{6}$$

Marcinkiewicz (1936) $p=2$-re, Zygmund (1941) minden pozitív p-re igazolta a konvergenciát.

2. Lehet a kitevőket az n index függvényeként is változtatni. Ilyen kérdést Fourier-sorok esetén Grünwald Géza vetett fel az alábbi módon: Legyen $\{\lambda_n\}$ egy végtelenbe tartó monoton számsorozat. Igaz-e ekkor, hogy minden folytonossági pontban

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|s_k(x)-s(x)|^{\lambda_n}\to 0$$

teljesül? E kérdésre Turán Pál [63] negatív választ adott. Ugyanis ő megmutatta, hogy minden végtelenbe tartó $\{\lambda_n\}$ számsorozathoz megadható egy olyan folytonos $s_0^*(x)=$ $=s_0^*(\{\lambda_n\};x)$ függvény, amelyre alkalmas x_0 pontban

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|s_k(x_0)-s_0^*(x_0)|^{\lambda_n}=\infty$$

fennáll.

Ezzel az eredménnyel kapcsolatban Alexits azt a kérdést vetette fel, hogy milyen módon lehet jellemezni azokat a folytonos függvényeket, amelyek egy adott $\{\lambda_n\}$ sorozat esetén hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek, mint konstans kitevő esetén a folytonos függvények, azaz, hogy melyek azok a függvények, amelyeknek az ilyen általánosított erős közepük is nullához tart. Pontosabban olyan feltételt kért, hogy az biztosítsa az alábbi állítás teljesülését:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|s_k(x)-s(x)|^{\lambda_n}\right\}^{1/\lambda_n}=0.$$

Ilyen feltételt először Králik [11] adott, amelyet azonban hamarosan sikerült lényegesen élesítenem és általános trianguláris összegző mátrixokra is kiterjesztenem ([22]). Ugyancsak sikerült eredményemet a trigonometrikus rendszerről nemnegatív súlyfüggvényekkel generált polinomrendszerekre is bizonyítanom.

3. A (6) alatti (C,1)-közép helyett vizsgálhatunk *általánosabb közepeket*. Ilyen vizsgálatokat végeztem a [22] dolgozatomban, s az itteni eredmény egyik speciális esete azt állítja, hogy bármely pozitív p-re és pozitív α-ra az ún. erős $(C,\alpha)_p$-közepek szintén nullához tartanak, azaz

$$\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}|s_k(x)-s(x)|^p\to 0\qquad\left(A_n=\binom{n+\alpha}{n}\right)$$

teljesül a Hardy—Littlewood-féle feltételek mellett.

E pontban említem meg, hogy az általam 1967-ben ([21]) bevezetett általánosított de la

Vallée Poussin-közepekre hasonló állításokat sikerült bizonyítani. E közepeknek az az érdekessége, hogy a definíciójukban szereplő $\{\lambda_n\}$ sorozat alkalmas választásával, e közepek tartalmazzák mind a klasszikus Cesàro-közepeket, mind az eredeti de la Vallée Poussin-közepeket, sőt még a közönséges részletösszegeket is. A definícióban szereplő $\{\lambda_n\}$ sorozat elemei csak olyan pozitív egész számok lehetnek, amelyek tagonkénti növekedése maximum egy, azaz egy olyan pozitív egész számokból álló sorozat, amelyben $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_{n+1} - \lambda_n \leqq 1$. A közép általános alakja a következő:

$$V_n(\{\lambda_n\}) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=n-\lambda_n}^{n-1} s_k \quad (n \geqq 1).$$

Könnyű látni, hogy ha $\lambda_n \equiv 1$, akkor $V_{n+1}(\{\lambda_n\}) = s_n$; ha $\lambda_n = n$, akkor $V_{n+1}(\{\lambda_n\}) = \sigma_n$, és a klasszikus de la Vallée Poussin-közepeket a $\lambda_n = \left[\frac{n}{2}\right]$ sorozat generálja páros n-ekre; itt $[\alpha]$ az α szám egész részét jelöli.

4. Érdekes általánosítása (5)-nek az is, amikor csak bizonyos részletösszegeket, mondjuk a legrosszabbul approximálókat „átlagoljuk", s kérdezzük, ezek közepei tartanak-e nullához. Ezt a problémát is Alexits György vetette fel ortogonális sorokra ilyen általános formában, s e kérdéskör elvezet a *nagyon erős szummál-*

hatóság problémájához. Pontosabban itt az a kérdés, hogy igaz-e tetszés szerinti monoton növekedő $\{\nu_n\}$ indexsorozatra a következő állítás:

$$(7) \qquad \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|s_{\nu_k}(x)-s(x)|^p\to 0.$$

Tandori Károly [57] megmutatta, hogy a (3) feltétel $p=2$-re ezt a nagyon erős szummálhatóságot is biztosítja. Totik Vilmos [62] viszont azt mutatta meg, hogy Fourier-sorok esetén az $s(x)$ függvény integrálhatóságából csak akkor következik (7), ha a $\{\nu_k\}$ sorozat nem ugrik nagyot, azaz, ha a $\nu_{k+1}-\nu_k$ különbségek egy közös korlát alatt maradnak. Tandori professzor vetette fel azt a kérdést, hogy ha a vizsgált indexsorozat monotonságától is eltekintünk, azaz a természetes számok valamilyen részsorozatának egy tetszés szerinti $\{\mu_n\}$ permutációjára vizsgáljuk az

$$(8) \qquad \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|s_{\mu_k}(x)-s(x)|^p\to 0$$

konvergenciát, akkor a (3) feltétel elegendő-e ehhez is. Első pillanatra úgy tűnik, hogy ez triviális következménye az előző állításnak. Valójában azonban ez nem így van, mert itt előfordulhatna, hogy a nagyon rosszul approximáló tagok „előrekerülnek”, s így azok összegét relatíve kisebb faktorral osztjuk. A (8) állítás bizonyítása is teljesen más módszert igényel, mint a (7) állításé, de [15]-ben sikerült megmutatnom, hogy a (3) feltétel $p=2$-re, és ebből következőleg minden $0<p\leqq 2$-re is, biztosítja a (8) állítás teljesülését. Sajnos a $p>2$ esetre a kérdés mind a mai napig nyitott probléma.

5. Egy következő általánosítási lehetőség maguknak *az $s_k(x)$ részletösszegeknek a cseréje* olyan közepekkel, amelyek a részletösszegeknél is rosszabbul approximálnak. Ilyen vizsgálatokat Sunouchi 1967-ben kezdeményezett, aki negatív γ-rendű $\sigma_k^{(\gamma)}(x)$ közepekkel vizsgálta az

$$(9)\qquad \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|\sigma_k^{(\gamma)}(x)-s(x)|^p\to 0$$

konvergenciát.

Ezen különböző irányú általánosítások egyesítése elvezet *az általános erős szummációhoz*, azaz, hogy a

$$(10)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{nk}|\sigma_{\mu_k}^*(x)-s(x)|^p\to 0$$

állítás milyen általános (α_{nk}) szummációs módszer esetén, milyen $\sigma^*(x)$ közepekre, milyen $\{\mu_k\}$ indexsorozat esetén és milyen p kitevőkre teljesül. Ilyen jellegű kérdésekkel, ha nem is minden esetben a legáltalánosabb formában, több dolgozatomban foglalkoztam, pl. említhetem a következőket [18], [19], [31]. Ugyancsak foglalkoztak hasonló kérdésekkel, részben az eredményeimhez kapcsolódva Nakata (1968), Endl (1981), Schwinn (1981) és Szalay István [53].

Amennyiben arra is kíváncsiak vagyunk, hogy a (10) alatti sorok milyen gyorsan tartanak nullához, azaz, ha azt a kérdést vizsgáljuk, hogy egy monoton nullához tartó $\{\varepsilon_n\}$ sorozatra a

$$\Sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} |\sigma^*_{\mu_k}(x) - s(x)|^p = \mathcal{O}_x(\varepsilon_n) \tag{11}$$

vagy

$$\Sigma_n = o_x(\varepsilon_n)$$

állítások milyen feltételek mellett teljesülnek, akkor már el is jutottunk az *erős approximáció kérdéséhez*. E rendkívül szoros kapcsolat ellenére, ami az erős szummáció és az erős approximáció között fennáll, az erős approximációs vizsgálatok mégis 50 évet várattak magukra, ugyanis ezt a kérdéskört Fourier-sorokra ugyancsak Alexits professzor kezdte el vizsgálni, de csak 1963-ban, s később Králik Dezsővel közös dolgozataikban jelentős eredményeket bizonyítottak. Például [4]-ben megmutatták, hogy a Lipschitz alfa-osztályba tartozó függvényeket az erős (C,1)-közepek is ugyanolyan jól approximálják, mint a közönséges (C,1)-közepek. A konjugált függvényekkel kapcsolatos eltérésre az Alexits—Leindler [8] dolgozat mutat rá.

Ezt követően, 1965-től kezdve magam is intenzíven vizsgáltam a témát, s az elmúlt 17 év alatt közel 30 dolgozatot publikáltam e kérdéskörrel kapcsolatban. Ugyancsak vizsgálták e témát Freud Géza [10], Szabados József [51], és az utóbbi öt évben különösen eredményes kutatást végzett e területen Totik Vilmos, aki több mint 10 cikket közölt e témáról. Első dolgozatában ([59]) azonnal olyan eredményt közölt, amellyel kapcsolatban előtte többünk, külföldi matematikusokat is beleértve, csak részeredményeket tudtunk bizonyítani. Az erős approximációval foglalkozó külföldi matematikusok közül feltétlen meg kell említenünk Sunouchi, Nikisin, Krotov, Oskolkov, Gogoladze, Łenski és Taberski nevét, akik jelentősen hozzájárultak ahhoz, hogy az Alexits professzor által kezdeményezett, s elsősorban magyar matematikusok munkássága révén a témával kapcsolatos eredmények olyan mértékűvé növekedtek, hogy az elmúlt évben — többek javaslatára, közülük örömmel említem Szőkefalvi-Nagy Béla akadémikus bátorítását — megírhattam a témáról első monográfiámat, amelynek címe „On strong approximation by Fourier series" lesz, és amely az Akadémiai Kiadó gondozásában remélhetőleg jövőre megjelenik.

E téma irodalma napjainkban is tovább bővült, a közeli napokban jelent meg pl. két kínai matematikus egy-egy cikke ilyen problémákat kutatva.

E gazdag témakörből a következőkben, csupán illusztrációként, említünk néhány eredményt.

2. *Fourier-sorok erős approximációja.* E pontban f egy 2π szerint periodikus Lebesgue-integrálható függvényt fog jelölni, amelynek a Fourier-kifejtése

$$(2.1)\qquad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

E sor n-edik részletösszegét, illetve (C,α)-közepét a szokott módon jelöljék:

$$s_n = s_n(x) = s_n(f;\, x)$$

és

$$\sigma_n^\alpha = \sigma_n^\alpha(x) = \sigma_n^\alpha(f;\, x).$$

Bernstein klasszikus eredménye szerint, ha $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, akkor

$$(2.2)\qquad \|\sigma_n^1 - f\| = \mathcal{O}(n^{-\alpha}),\ \text{ha } 0<\alpha<1,$$

és

$$(2.3)\qquad \|\sigma_n^1 - f\| = \mathcal{O}(n^{-1}\log n),\ \text{ha } \alpha=1;$$

a $\|\ldots\|$ normajel a folytonos függvények terében szokásos maximumnormát jelenti.

Mivel az $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(\alpha<1)$ feltételből következik, hogy a konjugált függvény is ugyanebbe az osztályba tartozik, azaz $\tilde{f} \in \mathrm{Lip}\ \alpha$, (2.2)-ből adódik, hogy

$$\|\tilde{\sigma}_n^1 - \tilde{f}\| = \mathcal{O}(n^{-\alpha}) \quad (0<\alpha<1). \tag{2.4}$$

Azonban ha $f \in \mathrm{Lip}\ 1$, akkor általában $\tilde{f} \notin \mathrm{Lip}\ 1$, mégis Alexits [1] egy nagyon szép eredménye szerint a

$$\|\tilde{\sigma}_n^1 - \tilde{f}\| = \mathcal{O}(n^{-1}) \tag{2.5}$$

becslés teljesül, sőt ez a feltétel szükséges és elegendő ahhoz, hogy f a Lip 1 osztályba tartozzon.

Az első erős approximációval kapcsolatos eredmények ezekkel a becslésekkel kapcsolatosak. Alexits—Králik [6] bebizonyították, hogy az előzőekben adott approximációs rend erős approximáció esetén is elérhető, azaz akkor, ha a

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}(s_\nu(x) - f(x))$$

különbség helyett az

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}|s_\nu(x) - f(x)|$$

nemnegatív tagú összegeket becsüljük.

A (2.5) alatti eredménnyel kapcsolatban Alexits professzor azt vetette fel, hogy igaz marad-e a $\mathcal{O}(n^{-1})$ becslés, ha itt is az erős approximációt vizsgáljuk. A negatív választ erre a kérdésre Alexits—Leindler [8] munkájában találjuk, s ez azt mutatja, hogy a Lip 1 osztály az erős approximáció szempontjából másként viselkedik, mint a közönséges approximáció esetén. Ennek mélyebb okát tárja fel következő tételünk ([17]):

Ha f r-edik deriváltja létezik, és $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha \leqq 1$, akkor bármely pozitív p-re

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} |s_k - f|^p\right\}^{1/p} = \mathcal{O}(n^{-r-\alpha}),$$

és ha $\beta > (r+\alpha)p$, akkor

$$h_n = h_n(f, \beta, p) = \tag{2.6}$$

$$= \left\| \left\{ \frac{1}{(n+1)^\beta} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{\beta-1} |s_k - f|^p \right\}^{1/p} \right\| = \mathcal{O}(n^{-r-\alpha}).$$

Ugyanilyen becsléseket lehet adni a konjugált függvényre is a tétel feltételei mellett.

A kapott eredményeket — összehasonlítva a klasszikus Jackson-féle eredményekkel —, úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a $\beta > (r+\alpha)p$ feltétel mellett az erős approximáció esetén is az elérhető legjobb becsléseket sikerült elérnünk.

Ha csak a $\beta = (r+\alpha)p$ feltétel teljesülését kívánjuk meg, akkor az elérhető legjobb erős approximációs rend $\mathcal{O}((\log n)^{1/p} n^{-r-\alpha})$; azaz, ha $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, akkor

$$h_n(f, \beta, p) = \mathcal{O}((\log n)^{1/p} n^{-r-\alpha}) \tag{2.7}$$

és

$$h_n(\tilde{f}, \beta, p) = \mathcal{O}((\log n)^{1/p} n^{1/p} n^{-r-\alpha});$$

és e becslések általában nem javíthatók.

Ezen egyenlőtlenséggel kapcsolatban megemlítjük, hogy még az $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}\ 1$ és $\tilde{f}^{(r)} \in \mathrm{Lip}\ 1$ feltételek együtt se biztosítanak jobb approximációs becslést, mint ami (2.7)-ben szerepel $\alpha = 1$ esetén ([29]).

Ezen eredmények világossá teszik, hogy a Lip 1 osztálynak fentebb említett extrém viselkedése az erős approximációval kapcsolatban onnan ered, hogy a vizsgált esetben $\beta = p = 1$ és $r = 0$ volt, így a $\beta = (r+\alpha)p$ egyenlőség $\alpha = 1$-re lép fel. Viszont, ha (2.6) alatti általánosabb erős approximációs közepeket vizsgálunk, akkor kiderül, hogy bármely Lip α osztály extrém viselkedésű lesz, ha a $\beta = (r+\alpha)p$ egyenlőség bekövetkezik. Tehát a $\beta > (r+\alpha)p$ feltétel a döntő ahhoz, hogy a legjobb approximáció rendjét elérjük.

Még számos, lényegileg a fenti eredményekhez annyiban hasonló eredmény született az erős approximáció terén, hogy ezek a tételek is olyan állításokat mondanak ki, hogy bizonyos erős típusú középpel egy egész függvényosztályra az elérhető legjobb approximációs rend milyen nagyságrendű lehet, s legtöbb esetben a kapott becslések élesíthetetlensége is bizonyított.

A már említett dolgozatunkban ([17]) igen általános Toeplitz-mátrixokra vonatkozó eredmények is találhatók a W^rH^α($f \in W^rH^\alpha$, ha $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}\ \alpha$) osztályokkal kapcsolatban. Ezen eredményünk felhasználásával még általánosabb erős Riesz-közepekre is kaptunk tételeket ([20]). A következő

$$\left\{\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=n-\lambda_n}^{n}|s_\nu-f|^p\right\}^{1/p}$$

alakú, az előző pontban már említett, ún. erős általánosított de la Vallée Poussin-féle közepekre vonatkozó eredmények találhatók a [23] és a [32] számú cikkeimben. R. Taberski [54] az erős Abel-approximációt vizsgálta az $L^p(1 \leqq p \leqq \infty)$ térben.

G. Sunouchi [50] pedig olyan tételeket bizonyított, amelyekben az s_k részletösszegeket negatív rendű (C, α)-közepekkel pótolja. Ilyen típusú, a Sunouchi-féle eredményeket élesítő tételek találhatók a [28]-as dolgozatunkban is.

Totik Vilmos munkatársam dolgozataiban ([59], [60]) számos eddig említett eredményt általánosít a W^rH^ω osztályra [$f \in W^rH^\omega$, ha $\omega(f^{(r)}, \delta) \leqq K\omega(\delta)$], s azt is megmutatja, hogy eredményei pontosak. Ilyen típusú eredményeket korábban W. Łenski [47] lengyel matematikus is bizonyított, aki az utóbbi időben szintén intenzív kutatója lett az erős approximációnak.

A következő részben néhány ún. inverz típusú erős approximációval kapcsolatos eredményt említünk. Ha a (2.7) becslésekkel kapcsolatos eredményeinket pl. $r = 0$ és $\alpha = 1/p$ ($p \geqq 1$) esetén más alakban fogalmazzuk, akkor azt állíthatjuk, hogy az $f \in \mathrm{Lip}\ 1/p$ feltétel általában nem biztosítja, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n(x) - f(x)|^p \tag{2.8}$$

mindenütt konvergens legyen.

Freud G. [10] vetette fel azt a kérdést, hogy ha a (2.8) sor konvergenciáját $p > 1$ esetén megköveteljük, pontosabban azt, hogy a (2.8) sor részletösszegei egyenletesen korlátosak legyenek, egyébként a függvényről csak az integrálhatóságot tételezzük fel, akkor mit állíthatunk az f függvényről. Ő bebizonyította idézett dolgozatában, hogy ekkor $f \in \mathrm{Lip}\ 1/p$ és majdnem minden x pontban

$$\lim_{h \to 0} h^{-1/p}(f(x+h) - f(x)) = 0. \tag{2.9}$$

Felvetette azt a problémát is, hogy (2.9) teljesül-e minden pontban. E kérdésre a negatív választ [24]-es dolgozatomban adtam meg.

Az analóg kérdést $p = 1$ esetén Nikisinnel közös dolgozatunkban [43] tisztáztuk. Ezen eredményt általánosítva [29]-ben többek között megmutattam, hogy a

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} n^r |s_n - f| \right\| < \infty$$

feltétel majdnem minden x pontban biztosítja az

$$f^{(r)}(x+h)-f^{(r)}(x) = o_x(h)$$

becslést, míg az összes pontra csak az

$$|f^{(r)}(x+h)-f^{(r)}(x)| \leqq Kh\log\frac{1}{h}$$

érhető el, s ezek az állítások nem javíthatók.

A fentiekkel kapcsolatban természetszerűleg vetődött fel a sejtés, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n-f|^p \text{ és } 0<p<1 \tag{2.10}$$

feltételek implikálják, hogy $f \in \mathrm{Lip}\ 1$. E problémát többször felvetettem, pl. [30]-ban, s csak 1976-ban sikerült bebizonyítani a sejtés helyességét. Ekkor azonban ketten is, egymástól függetlenül, lényegileg azonos élesítettebb formában adták meg az igenlő választ. K. I. Oszkolkov [49] szovjet matematikus és Szabados József [51] bebizonyították, hogy ha $\Omega(x)$ olyan folytonossági modulus függvény, hogy

$$\int_0^1 \frac{1}{\Omega(x)}\,\mathrm{d}x < \infty,$$

akkor a

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \Omega(|s_n-f|)\right\| < \infty$$

feltétel biztosítja, hogy f a Lip 1 osztályba tartozik. Világos, hogy $\Omega(x) = x^p\,(0<p<1)$

választás esetén ez az eredmény választ ad a fenti kérdésre. Mindketten azt is megmutatták, hogy bizonyos pótfeltételek mellett (pótfeltételeik különböztek egymástól) az adott feltételek szükségesek is ahhoz, hogy f a Lip 1 osztályba tartozzon. Totik V. [59] megmutatta, hogy minden további pótfeltétel nélkül is szükséges e feltételek együttes teljesülése.

Szabados idézett cikkében a (2.10) feltételből erősebb következtetéseket is levont, pl. hogy az f függvény bizonyos rendben differenciálható, és annak folytonossági modulusára adott becsléseket. Szabados ezen eredményeit javítva [34]-ben megmutattam, hogy ha $0<p\leqq 1$ és $1/p=$ $=p+\alpha$, $0<\alpha\leqq 1$, akkor (2.10)-ből következik, hogy $f^{(r)}$ folytonos, és folytonossági modulusára a következő pontos becslések adhatók:

$$(2.11)\quad \omega(f^{(r)};\delta)=\begin{cases}\mathcal{O}(\delta\log\frac{1}{\delta}), & \text{ha } \alpha=1,\\ \mathcal{O}(\delta^{\alpha}), & \text{ha } 0<\alpha<1.\end{cases}$$

Alexits György születésnapjának 80. évfordulójára írt [38] cikkemben a (2.10) feltételt úgy általánosítottam tetszés szerinti pozitív p-re, hogy abból is pontosan a (2.11) alatti becsléseket kapjuk, s a feltétel $0<p<1$ és $1/p = r+\alpha$ esetén redukálódik (2.10)-re. Ez a feltétel a következő:

$$(2.12)\quad \left\|\sum_{n=1}^{\infty} n^{(r+\alpha)p-1}|s_n-f|^p\right\|<\infty.$$

V. G. Krotovval közös cikkünkben ([13]) monoton $\{\lambda_n\}$ sorozattal képezett

$$(2.13)\qquad \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n |s_n - f|^p \right\| < \infty, \; 0<p<\infty$$

feltételből dedukáltunk strukturális állításokat. Például azt, hogy ha

$$\sum_{k=1}^{n} (k\lambda_k)^{-1/p} = \mathcal{O}\left(n\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

akkor (2.13)-ból következik $f \in \mathrm{H}^{\omega}$. Könnyű látni, hogy ahhoz, hogy (2.13)-ból következhessen $f \in \mathrm{Lip}\ 1$, elegendő a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k\lambda_k)^{-1/p}$$

sor konvergenciáját megkívánni; s ha $\lambda_k \equiv 1$, akkor ez $0<p<1$ esetén teljesül. Így ebből az eredményből is adódik, hogy (2.10)-ből következik $f \in \mathrm{Lip}\ 1$.

A $\{\lambda_n\}$ sorozat monotonitását elvetve, de természetszerűleg más, kevésbé szigorú szabályosságot megkövetelve, [25], [38] dolgozataimban a (2.13) feltételből $\omega(f^{(r)}, \delta)$-ra sikerült tovább nem finomítható becsléseket adni, sőt azt is megmutatni, hogy a modulus becslésére adott $\rho(\delta)$ függvénnyel majdnem minden x pontban a

$$(2.14)\qquad \lim_{\delta\to 0} \rho^{-1}(\delta)\left(f^{(r)}(x+\delta) - f^{(r)}(x)\right) = 0$$

reláció is fennáll.

A [38] dolgozatban azt is sikerült megmutatni, hogy ha (2.13) helyett a kissé erősebb

$$\left\| \sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n |s_n - f|^p \right\| \to 0 \quad (m \to \infty)$$

feltételt kívánjuk meg, akkor (2.14) mindenütt teljesül.

Krotov [12] legújabb dolgozatában a még általánosabb

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(\lambda_n |s_n - f|) \right\| < \infty$$

feltételből következtet, s ad pl. szükséges és elegendő feltételt arra, hogy $f^{(r)}$ folytonos vagy korlátos legyen, illetve a szokásos H^{ω} osztályba tartozzon. Ezen eredmények bizonyításánál nélkülözhetetlenek a klasszikus Hardy—Littlewood-egyenlőtlenség azon általánosításai, amelyeket Németh József [48] bizonyított be, általánosítva a [33]-ban bizonyított, ugyancsak gyakran alkalmazott egyenlőtlenségeimet.

Xian Liang [64] kínai matematikus ezen inverz jellegű problémákat olyan módon bővítette, hogy azt vizsgálta, hogy ha a (2.13) feltételben nem minden n-re összegzünk, hanem csak bizonyos m_n részletösszegek eltéréseinek összegére kívánjuk meg a norma végességet, azaz a

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n |s_{m_n} - f|^p \right\| < \infty$$

végességét, akkor milyen $\{m_n\}$ részletösszegek biztosítják ugyanazokat a következményeket, amelyek (2.13)-ból következtek.

A fenti eredmények, vagy azok analogonjai a konjugált függvényekre is ismertek.

Az ismert, hogy a (2.12) feltétel $\alpha=1$ esetén általában nem biztosítja, hogy $f^{(r)}$ vagy $\tilde{f}^{(r)}$, r paritásától függően, a Lip 1 osztályba tartozik. Ha azonban ezt a feltételt a következő formában kissé élesítjük ([26]), azaz ha $0<\alpha \leqq 1$, $p>0$ és

$$\left\| \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} n^{(r+\alpha)p-1} |s_n - f|^p \right\}^{p^*} \right\| < \infty,$$

(2.15)

$$p^* = \min\left(p, \frac{1}{p}\right),$$

akkor $\alpha=1$ esetén majdnem minden x pontban

$$|f^{(r)}(x+h)-f^{(r)}(x)| + |\tilde{f}^{(r)}(x+h)- - \tilde{f}^{(r)}(x)| = \mathcal{O}_x(h)$$

teljesül; sőt

$$f^{(r)} \in \mathrm{Lip}\ 1, \text{ ha } r = 2k+1;$$

és

$$\tilde{f}^{(r)} \in \mathrm{Lip}\ 1, \text{ ha } r = 2k.$$

Az utóbbi időben lassan kikristályosodott, hogy az ún. inverz típusú eredmények bizonyításánál a következő két eredménynek van döntő szerepe, amelyek közül az elsőt [34]-ben, a másodikat [37]-ben bizonyítottam.

1. Bármilyen $0<p\leqq 1$-re teljesül az

$$E_n(f)\left(\frac{E_{2n}(f)}{E_n(f)}\right)^{1/p^2}\leqq$$

$$\leqq M^*\left\|\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}|s_k-f|^p\right\}^{1/p}\right\|(M^*\geqq 1)$$

egyenlőtlenség, ahol $E_n(f)$ a szokásos, C-térbeli legjobb approximációt jelöli.

2. Ha valamely pozitív p-re és pozitív tagú $\{\gamma_n\}$ számsorozatra $\gamma_{2^n}\leqq C\gamma_{2^n+i}(C\geqq 1)(n=1, 2, \ldots; 1\leqq i\leqq 2^n)$ és

$$\left\|\left\{\frac{2}{n}\sum_{k=[n/2]+1}^{n}|s_k-f|^p\right\}^{1/p}\right\|\leqq M\gamma_n$$

teljesül, akkor

$$E_n(f)\leqq M^*MC^{1-1/p^2}\gamma_n.$$

Ezen utóbbi állításból könnyen adódik az is, hogy bármilyen a $(0<)\beta\leqq(r+\alpha)p$ egyenlőtlenségnek eleget tevő paraméterek esetén

$$E_n(f)=\mathcal{O}(h_n(f,\beta,p)),$$

ami $0<p<1$ esetén egyáltalán nem magától értetődő állítás.

Tekintettel arra, hogy a fenti eredmények pontosak, ezért pl. páros r-re még a (2.15) feltétel $\alpha=1$ választás mellett sem biztosítja, hogy $f^{(r)}\in$ Lip 1. Ha azonban a

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left\|\left\{\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}n^{(r+1)p-1}|s_n-f|^p\right\}^{1/p}\right\|<\infty\,(p>0)$$

(2.16)

feltétel teljesülését kívánjuk meg, akkor r paritásától függetlenül $f^{(r)}$ a Lip 1 osztályba tartozik ([37]). Ekkor azonban a feltétel jellege eltér a szokásos erős approximációs feltételekétől; hiszen itt blokkonként is képezünk egy maximumnormát. Ha pontosak akarunk lenni, akkor itt pl. ún. „extra erős approximációról" beszélhetnénk, hiszen nemcsak a tagok egy pontban való előjeles kiegyenlítődését zárjuk ki az abszolút érték használatával, hanem az ún. „rossz helyek" közül is blokkonként a legrosszabbat vesszük, s az így keletkezett összeg végességét kívánjuk meg.

Annak mélyebb oka, hogy a (2.16) feltétel már biztosítja, hogy $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}\ 1$, abban van, hogy a (2.16) alakú feltételek már ekvivalensek bizonyos, az n-edrendű trigonometrikus polinomokkal való C-térbeli legjobb approximációra, azaz $E_n(f)$-re vonatkozó feltételekkel. Ugyanis, [37]-ben, többek között bebizonyítottuk, hogy bármely pozitív p-re és p^*-ra, és olyan monoton $\{\mu_n\}$-re, amelyre $0 < k \leqq \mu_{2^{n+1}}/\mu_{2^n} \leqq K < \infty$ teljesül, a

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\| \left\{ \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \mu_n |s_n - f|^p \right\}^{p^*} \right\| < \infty$$

és a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n\mu_n)^p n^{-1} E_n^{pp^*} < \infty$$

feltételek ekvivalensek.

E témakörben Xie Tingfan [65] kínai matematikus végzett további finomabb összefüggéseket feltáró vizsgálatokat.

E pontban végül az erős approximációval kapcsolatos beágyazási eredményeket tekintjük át nagyon röviden. Könnyű látni, hogy az eredmények nagy részét meg lehet fogalmazni bizonyos alkalmasan definiált függvényosztályok egymással kapcsolatos beágyazási viszonyát kifejező formában. Az első ilyen nyelven megfogalmazott eredmény [13]-ban található. Ennek megfogalmazásához definiáljuk az alábbi függvényosztályt adott p és $\{\lambda_n\}$ sorozat esetén:

$$S_p(\{\lambda_n\}) = \left\{ f : \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n |s_n - f|^p \right\| < \infty \right\}.$$

Eredményünk a következő: Ha $\{\lambda_n\}$ pozitív, monoton sorozat, $0 < p < \infty$ és ω folytonossági modulus, akkor

$$\text{(2.17)} \qquad \sum_{n=1}^{m} (n\lambda_n)^{-1/p} = \mathcal{O}(m\omega(m^{-1}))$$

implikálja, hogy

$$\text{(2.18)} \qquad S_p(\{\lambda_n\}) \subset \mathrm{H}^{\omega}.$$

Ha van olyan $0 \leqq \beta < 1$, hogy $n^{\beta}\lambda_n \uparrow$, akkor (2.18)-ból következik (2.17) is.

A [36], [39] dolgozatokban az alábbi függvényosztályok közötti tartalmazási relációkat vizsgáltam:

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(\beta, p, r, \omega) &:= \{f: h_n(f, \beta, p) = \mathcal{O}(n^{-r}\omega(n^{-1}))\},\\
\mathrm{W}^r\mathrm{H}^\omega &:= \{f: \omega(f^{(r)}, \delta) = (\omega(\delta))\},\\
\mathrm{W}^r\mathrm{H}^* &:= \{f: f^{(r)} \in \Lambda_*;\ \Lambda_* \text{ a Zygmund-osztály}\},\\
\mathrm{W}^r\mathrm{E}^\omega &:= \{f: E_n f^{(r)}) = \mathcal{O}(\omega(n^{-1}))\},\\
\mathrm{E}_r^\omega &:= \{f: E_n(f) = \mathcal{O}(n^{-r}\omega(n^{-1}))\}.
\end{aligned}$$

Természetesen az itteni első függvényosztálynak a többivel való kapcsolata az, ami az erős approximációval kapcsolatos probléma. Mintaként idézzük a következő eredményt:

Ha

$$\int_0^\delta \frac{\omega(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \mathcal{O}(\omega(\delta)),$$

és létezik olyan μ természetes szám, hogy

$$2^\mu \omega(2^{-n-\mu}) > 2\omega(2^{-n})$$

és

$$2^{\mu(\beta/p-r)}\omega(2^{-n-\mu}) > 2^{1/p}\omega(2^{-n})$$

teljesül, akkor

$$\mathrm{H}(\beta, p, \omega) \equiv \mathrm{W}^r\mathrm{H}^\omega.$$

Krotov [12] dolgozatában a $\mathrm{W}^r\mathrm{C}$ és $\mathrm{W}^r\mathrm{L}^\infty$ osztályokat is bevonta vizsgálataiba, sőt ezek konjugált osztályaira, $\tilde{\mathrm{W}}^r\mathrm{C}$-re és $\tilde{\mathrm{W}}\mathrm{L}^\infty$-re is kiterjesztette vizsgálatait, ahol pl. $\tilde{\mathrm{W}}^{(r)}\mathrm{C} := \{f: \tilde{f} \in \mathrm{W}^r\mathrm{C}\}$.

Újabban továbbfejlesztettem ezeket a függvényosztályok kapcsolatait feltáró vizsgálatokat, bevezetve az általánosított Lipschitz-és Zygmund-függvényosztályok fogalmát is (lásd [41], [42] és [46]).

E rövid áttekintés is mutatja, hogy ez a témakör, amely egyike azon kutatásoknak, amelyek Alexits György professzor problémafelvetései nyomán bontakoztak ki, milyen méretben szélesedett nemzetközi kutatási témává, mélyítve a magyar klasszikus analízis, szűkebben a Fourier-analízis jó hírét.

3. *Általános ortogonális sorok erős szummációjával* kapcsolatban az első eredményt még 1936-ban Zalcwasser érte el, de az intenzív vizsgálatok itt is közel húsz évet várattak magukra; ugyanis ezt szintén Alexits György 1955-ben közölt eredményei vezették be, majd 1959-től különösen Tandori Károly kutatásai szélesítették ki. Tandori Károly [57] többek között megmutatta, hogy a (3) alatti feltétel biztosítja az (1) sor nagyon erős (C,1)-szummálhatóságát, annak ellenére, hogy a közönséges (C,1)-szummálhatóságból ez nem következik.

Mint már említettük, ugyancsak Tandoritól származik a „kevert" indexekkel kapcsolatos erős szummáció problémája is, amelyre a (3)$\Rightarrow$(8) állítással kapcsolatban az igenlő választ $p=2$-re nekem sikerült megadni. Ezt az eredményemet 1966-ban erős (C,α)-közepekre is sikerült kiterjesztenem, azaz a következő tételt bizonyítani: A (3) alatti feltétel minden pozitív

α-ra, $0 < p \leqq 2$-re és bármilyen $\{\mu_n\}$ indexsorozatra biztosítja, hogy

$$\frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} |s_{\mu_k}(x) - s(x)|^p \to 0$$

teljesül.

Az általános ortogonális sorok erős szummációjával kapcsolatban itt csak azt említjük még meg, hogy a magyar eredményeket, amelyek elsősorban a klasszikus (C,1)- és (C, α)-szummációra vonatkoztak, több külföldi matematikus átvitte Abel-, Riesz-, Nörlund-, Euler- és még speciálisabb szummációs eljárásokra is.

4. A következőkben néhány, az *általános ortogonális sorokkal kapcsolatos approximációs eredményemet* említem. Már láttuk, hogy a (3)-as feltételből következnek a (4) alatti állítások. Az is aránylag könnyen megmutatható, hogy ha $\{\lambda_n\}$ egy elég szabályosan növekedő pozitív számokból álló sorozat, akkor a

$$\sum_{n=4}^{\infty} c_n^2 (\log \log n)^2 \lambda_n^2 < \infty$$

feltételből a

$$\sigma_n(x) - s(x) = \mathcal{O}_x(1/\lambda_n) \tag{4.1}$$

approximációs állítás is következik. Azonban a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \lambda_n^2 < \infty$ feltétel általában nem biztosítja, hogy (4.1) teljesül. 1963-ban ([16]) azonban sikerült azt bizonyítanom, hogy ha $\lambda_n = n^\gamma$ és $0<\gamma<1$, akkor a $\sigma_n(x)$ közepek az $s(x)$ összegfüggvényt $\mathcal{O}_x(n^{-\gamma})$ nagyságrendben approximálják, azaz ha $0<\gamma<1$ és

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 n^{2\gamma} < \infty, \tag{4.2}$$

akkor

$$\sigma_n(x) - s(x) = \mathcal{O}_x(n^{-\gamma})$$

teljesül. Ezen eredményemet Sunouchi (1967) erős (C, α)-approximációra is kiterjesztette, azaz a következő eredményt bizonyította.

Ha $0<\gamma<1$ és (4.2) teljesül, akkor minden pozitív α-ra és $0<p<1/\gamma$-ra teljesül a következő approximációs állítás:

$$\begin{gathered} C_n(x) = C_n^\alpha(x) := \\ := \left\{ \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} |s_k(x) - s(x)|^p \right\}^{1/p} = \mathcal{O}_x(n^{-\gamma}). \end{gathered} \tag{4.3}$$

Ezt az eredményt viszont én fejlesztettem, s végül élesítettem tovább. 1971-ben megmutattam, hogy Sunouchi feltételei mellett a nagyon erős (C, α)-közepek is a fenti rendben approximálnak, azaz (4.3)-ban az $s_k(x)$ részletösszegeket $s_{\nu_k}(x)$ részletösszegekkel is kicserélhetjük, bármilyen növekedő indexsorozatot is jelöl $\{\nu_k\}$. Ugyancsak megmutattam, hogy az $s_k(x)$

részletösszegek bizonyos negatív β rendű $\sigma_n^\beta(x)$ Cesàro-közepekkel is pótolhatók az approximációs rend romlása nélkül. Kevert $\{\mu_k\}$ sorozatra viszont csak a $\sum_{n=4}^{\infty} c_n^2 n^{2\gamma}(\log\log n)^2 < < \infty$ feltétel mellett tudtam igazolni (4.3)-ban az $s_k(x)$ összegek cseréjét $s_{\mu_k}(x)$-szel.

A problémához visszatérve 1980-ban sikerült megmutatnom ([40]), hogy az $\alpha = 1$ speciális esetben a $0<\gamma<1$ megszorítás nélkül is teljesül (4.3). A következő évben még egy lépéssel sikerült továbbmenni, azaz azt bizonyítani, hogy minden olyan pozitív γ-ra és p-re, amelyre a $0<p\gamma<\alpha \leqq 1$ teljesül, a (4.2) feltétel garantálja a (4.3)-as approximációt, viszont ha $\alpha > 1$, akkor a $p\gamma<\alpha$ feltétel már nem elegendő (4.3) teljesüléséhez. Ez az eredmény, mint az a feltételekből jól látható, az α paraméterre ad mellékfeltételt, ami az eredmény értékét csökkenti.

Más módszerrel viszont azt tudtam igazolni, hogy ha a p paraméterre a $0<p \leqq 2$ mellékfeltételt feltesszük, akkor minden pozitív α-ra állíthatjuk (4.3)-at, természetesen a $0<p\gamma<1$ és a (4.2) feltételek teljesülése mellett.

E két irányból való előrehaladás már szinte biztossá tette, hogy minden további megszorítás nélkül a $0<\gamma<1$ feltétel a Sunouchi-féle tételből elhagyható. Ezt azonban nem tudtam bizonyítani, így sejtésként, problémaként fel is vetettem.

Végül egy olyan ötlet felhasználásával sikerült a fenti sejtést igazolni, amelyet H. Schwinn német matematikus használt Euler-szummációval kapcsolatban, s így született közös dolgozatunkban ([44]) igazoltuk, hogy a (4.2) feltétel minden pozitív α-ra és γ-ra, valamint a $0<p<1/\gamma$ feltételnek elegettevő p-re biztosítja (4.3)-at.

Ezzel lényegileg a lehető legjobb ilyen jellegű eredményt sikerült bizonyítanunk; hiszen az ma már következmény jellegű állítás, hogy ugyanezen feltételek mellett a nagyon erős közepekre is fennáll ugyanez az approximációs rend. Ez egy igen általános formában megfogalmazott eredményemből azonnal következik. Ezen lemmát talán érdemes itt is idézni annak „szokatlan formája és mondanivalója" miatt.

Legyen κ tetszés szerinti pozitív szám, és legyen $\{\lambda_n\}$ pozitív számoknak egy tetszés szerinti sorozata. Ha a

$$(4.4)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2 \right\}^{\kappa} < \infty$$

feltétel biztosítja, hogy az (1) sor $s_n(x)$ részletöszszegei egy „bizonyos $\mathrm{T} = \mathrm{T}(\{s_n(x)\})$ tulajdonsággal" rendelkeznek bármilyen ortonormált rendszer legyen is $\{\varphi_n(x)\}$, akkor a (4.4) feltétel azt is biztosítja, hogy az (1) sor növekvő indexekkel képzett bármely $\{s_{m_n}(y)\}$ részletöszszegei is rendelkeznek ugyanazzal a T tulajdonsággal; azaz ha

(4.4) $\Rightarrow$T($\{s_n(x)\}$), akkor (4.4) $\Rightarrow$T($\{s_{m_n}(x)\}$)

bármely növekedő $\{m_n\}$ indexsorozatra.

Kevert $\{\mu_n\}$ indexsorozatra azonban a $0<p\gamma<$ $<\min(\alpha, 1)$ feltétel szükséges, azaz ekkor nem minden pozitív α-ra állíthatunk (4.3)-as approximációhoz hasonló állítást. E kiegészítő feltétel szükségessége kevert $\{\mu_n\}$ sorozatok esetén könnyen igazolható, tehát ez nem a bizonyítás hiányossága, hanem valóban szükséges feltétel.

Hasonló eredmények bizonyíthatók az alábbi típusú erős, nagyon erős és kevert indexű közepekre is:

$$h_n^{\beta}(x) :=$$

$$:= \{(n+1)^{-\beta} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{\beta-1} |s_{\mu_k}(x) - s(x)|^p\}^{1/p}.$$

Az eredmények összehasonlításából az a meglepő tény derül ki, hogy a fenti közepek esetén a $\beta=1$ speciális közép ugyanazokat az eredményeket adja, mint az előző erős (C,α)-közepek bármilyen pozitív α-ra.

Kanadai utamon 1983-ban megvizsgáltam azt a kérdést is, hogy milyen változások lépnek fel, ha a paraméterfeltételek határeseteiben nézzük az approximációs rendet. Nagyon tömören fogalmazva azt mondhatjuk, hogy általában $(\log n)^{1/p}$ faktorral romlik az approximációs rend; de például a $p = 2$ eset bizonyos szingularitást mutat. Kicsit precízebben, többek között az alábbiakat sikerült bizonyítani ([45]):

Minden pozitív α-ra és p-re a

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 n^{2/p} < \infty \quad (\gamma = 1/p)$$

feltétel a

$$C_n^\alpha(x) = \mathcal{O}_x(n^{-1/p} (\log n)^{1/p})$$

approximációt biztosítja; de ha $p = 2$, akkor

$$C_n^\alpha(x) = \mathcal{O}_x(n^{-1/p}) \tag{4.5}$$

is teljesül.

Ha $p \neq 2$, de a (4.5)-ös approximációt el akarjuk érni, akkor ehhez a következő feltételek elegendőségét tudtam igazolni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2 \right\}^{p/2} < \infty, \text{ ha } 0 < p \leqq 2;$$

és

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 n < \infty, \text{ ha } p \geqq 2.$$

5. A matematikai részletek után is érdeklődő olvasó számára a továbbiakban megadunk néhány, a fontosabb eredményeket tartalmazó, többnyire magyar szerző által publikált cikket, ahol az említett külföldi szerzőkre vonatkozó referenciák, s további magyar vonatkozású cikkek is megtalálhatók.

[1] G. ALEXITS, Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les moyennes de sa série de Fourier, Mat. Fiz. Lapok, 38 (1941), 410–422.

[2] G. ALEXITS, Eine Bemerkung zur starken Summierbarkeit der Orthogonalreihen, Acta Sci. Math. Szeged, 16 (1955), 127–129.

[3] G. ALEXITS, Une contribution à la théorie constructive des fonctions, Acta Sci. Math. Szeged, 19 (1958), 149–157.

[4] G. ALEXITS, Sur les bornes de la théorie de l'approximation des fonctions continues par polynomes, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl., 8 (1963), 329–340.

[5] G. ALEXITS, Problem 3, in: New and unsolved problems. On approximation theory, Birkhauser Verlag, Basel, 1964, 179–180.

[6] G. ALEXITS und D. KRÁLIK, Über den Annäherungsgrad der Approximation im starken Sinne von stetigen Funktionen, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl., 8 (1963), 317–327.

[7] G. ALEXITS und D. KRÁLIK, Über die Approximation im starken Sinne, Acta Sci. Math., 26 (1965), 93–101.

[8] G. ALEXITS und L. LEINDLER, Über die Approximation im starken sinne, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 16 (1965), 27–32.

[9] L. CSERNYÁK und L. LEINDLER, Über die Divergenz der Partialsummen von Orthogonalreihen, Acta Sci. Math., 27 (1966), 55–61.

[10] G. FREUD, Über die Süttigungsklasse der starken Approximation durch Teilsummen der Fourierschen Reihe, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 20 (1969), 275–279.

[11] D. KRÁLIK, Über ein Problem der starken

Summierbarkeit von Fourierreihen, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 17 (1966), 303–312.

[12] V. G. KROTOV, Strong approximation by Fourier series and differentiability properties of functions, Analysis Math., 4 (1978), 199–214.

[13] V. G. KROTOV and L. LEINDLER, On the strong summability of Fourier series and the classes H^{ω}, Acta Sci. Math., 40 (1978), 93–98.

[14] L. LEINDLER, Über die orthogonalen Polynomsysteme, Acta Sci. Math., 21 (1960), 19–46.

[15] L. LEINDLER, Über die starke Summierbarkeit der Orthogonalreihen, Acta Sci. Math., 23 (1962), 82–89.

[16] L. LEINDLER, Über die Rieszschen Mittel allgemeiner Orthogonalreihen, Acta Sci. Math., 24 (1963), 129–238.

[17] L. LEINDLER, Über die Approximation im starken Sinne, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 16 (1965), 255–262.

[18] L. LEINDLER, On the strong summability of orthogonal series, Acta Sci. Math., 27 (1966), 217–228.

[19] L. LEINDLER, On the strong summability of orthogonal series, Acta Sci. Math., 28 (1967), 337–338.

[20] L. LEINDLER, Bemerkungen zur Approximation im starken Sinne, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 18 (1967), 273–277.

[21] L. LEINDLER, On the absolute summability factors of Fourier series, Acta Sci. Math., 28 (1967), 323–336.

[22] L. LEINDLER, On a problem of strong summability of Fourier series, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 19 (1968), 87–94.

[23] L. LEINDLER, On summability of Fourier series, Acta Sci. Math., 29 (1968), 147–162.

[24] L. LEINDLER, On strong summability of Fourier

series, Abstract spaces and approximation (Proceeding of Conference in Oberwolfach, 1968), 242–247.

[25] L. LEINDLER, On strong summability of Fourier series, II. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 20 (1969), 347–355.

[26] L. LEINDLER, Generalization of inequalities of Hardy and Littlewood, Acta Sci. Math., 31 (1970), 279–285.

[27] L. LEINDLER, On the strong approximation of orthogonal series, Acta Sci. Math., 32 (1971), 41–50.

[28] L. LEINDLER, On strong approximation of Fourier series, Periodica Math. Hungar., 1 (1971), 157–162.

[29] L. LEINDLER, On strong approximation of Fourier series, Approximation theory (Proceeding of Conference in Poznan, 1972), 129–140.

[30] L. LEINDLER, Problem 9, in: Linear operators and approximation, II. (Proceedings of Conference in Oberwolfach, 1974), 582.

[31] L. LEINDLER, On the strong approximation of orthogonal series, Acta Sci. Math., 37 (1975), 87–94.

[32] L. LEINDLER, On the strong approximation of Fourier series, Acta Sci. Math., 38 (1976), 317–324.

[33] L. LEINDLER, Generalization of inequalities of Hardy and Littlewood, Acta Sci. Math., 31 (1970), 279–285.

[34] L. LEINDLER, On structural properties of functions arising from strong approximation of Fourier series, Analysis Math., 3 (1977), 207–212.

[35] L. LEINDLER, On the strong summability and approximation of orthogonal series (Proceeding of Conference in Kaluga, 1975), 257–260.

[36] L. LEINDLER, Strong approximation and classes of functions, Mitteilungen Math. Seminar Giessen, 132 (1978), 29–38.

[37] L. LEINDLER, Strong and best approximation of Fourier series and the Lipschitz classes, Analysis Math., 4 (1978), 101–116.
[38] L. LEINDLER, Strong approximation of Fourier series and structural properties of functions, Math. Acad. Sci. Hung., 33 (1979), 105–125.
[39] L. LEINDLER, New sequels of a problem of Alexits, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 35 (1980), 117–121.
[40] L. LEINDLER, On the extra strong approximation of orthogonal series, Analysis Math., 8 (1982), 125–133.
[41] L. LEINDLER, Strong approximation and generalized Lipschitz classes (Proceedings of conference in Oberwolfach, 1980), 343–350.
[42] L. LEINDLER, Strong approximation and generalized Zygmund class, Acta Sci. Math., 43 (1981), 301–309.
[43] L. LEINDLER and E. M. NIKISIN, Note on strong approximation by Fourier series, 24 (1973), 223–227.
[44] L. LEINDLER and H. SCHWINN, On the strong and extra strong approximation of orthogonal series, Acta Sci. Math., 45 (1983), 293–304.
[45] L. LEINDLER, Limit cases in the strong approximation of orthogonal series, Acta Sci. Math., 47 (1984).
[46] L. LEINDLER, Additional results on the strong approximation of Fourier series, Analysis Math., 10 (1984), 111–116.
[47] W. ŁENSKI, Generalizations of two Leindler's theorems, Functiones et Approximatio, 3 (1976), 149–155.
[48] J. NÉMETH, Generalization of the Hardy—Littlewood inequality. II, Acta Sci. Math., 35 (1973), 127–134.

[49] K. I. OSKOLOV, On strong summability of Fourier series and differentiability of functions, Analysis Math., 2 (1976), 41–47.

[50] G. SUNOUCHI, Strong approximation by Fourier series and orthogonal series, Indian J. Math., 9 (1967), 237–246.

[51] J. SZABADOS, On a problem of L. Leindler concerning strong approximation by Fourier series, Analysis Math., 2 (1976), 155–161.

[52] I. SZALAY, On orthogonal trigonometric polynomials, Acta Sci. Math., 37 (1975), 287–292.

[53] I. SZALAY, On the strong approximation of orthogonal series, Constructive function theory (Proceedings of Conference in Sofia, 1980), 505–510.

[54] R. TABERSKI, A theorem of the Steckin and Leindler type connected with Abel summability of Fourier series, Demonstratio Mathematica, 8 (1975), 215–225.

[55] K. TANDORI, Über die orthogonalen Funktionen. I., Acta Sci. Math., 18 (1957), 57–130.

[56] K. TANDORI, Über die orthogonalen Funktionen. IV. (Starke Summation), Acta Sci. Math., 19 (1958), 18–25.

[57] K. TANDORI, Über die orthogonalen Funktionen. VI. (Eine genaue Bedingung für die starke Summation), Acta Sci. Math., 21 (1960), 12–14.

[58] K. TANDORI, Bemerkung zu einem Satz von G. Alexits, Acta Sci. Math., 21 (1960), 12–14.

[59] V. TOTIK, On the modulus of continuity in connection with a problem of J. Szabados concerning strong approximation, Analysis Math., 4 (1978), 145–152.

[60] V. TOTIK, On structural properties of functions arising from strong approximation of Fourier series, Acta Sci. Math., 41 (1979), 227–251.

[61] V. TOTIK, On the strong summation of Fourier series, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 35 (1980), 151–172.

[62] V. TOTIK, On the strong summation with variable exponents, Analysis Math., 5 (1979), 287–299.

[63] V. TOTIK, On the divergence of Fourier series, Publicationes Math. Debrecen, 29 (1982), 251–264.

[64] P. TURÁN, On the strong summability of Fourier series, J. Indian Math. Soc., 12 (1948), 8–12.

[65] XIAN LIANG, Some notes on a problem of L. Leindler, Scientia Sinica, 26 (1983), 575–584.

[66] XIE TINGFAN, On two problems of Leindler, Kexue Tongbao, 29 (1984), 437–442.

Ára: 17,– F