Math. O. 424. 7

Digitalizálta
a Magyar Tudományos Akadémia Könyvtár
és Információs Központ

MTAK 1826

ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF

OSZTÁLYTITKÁR.

VII. KÖTET. XXIV. SZÁM. 1880.

A STEINER-FÉLE KRITÉRIUMRÓL A KÚPSZELETEK ELMÉLETÉBEN.

HUNYADY JENŐ

LEV. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén 1880. deczember 13-án.)

HIVATALOS PÉLDÁNY
M. T. AKADÉMIA

Ára 10 kr.

BUDAPEST, 1880.

A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

(Az akadémia épületében.)

A STEINER-FÉLE

KRITÉRIUMRÓL

A KÚPSZELETEK ELMÉLETÉBEN.

HUNYADY JENŐ

LEV. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén 1880. deczember 13-án.)

BUDAPEST, 1880.

A M. T. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

(Az Akadémia épületében.)

Budapest, 1880. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.

A Steiner-féle kritériumról a kúpszeletek elméletében.

Steiner a Giornale arcadico di Roma XCIX. kötetének következő czímű értekezésében: »Teoremi relativi alle coniche inscritte e circonscritte«, mely későbben a Crelle-féle »Journal für die reine und angewandte Mathematik« czímű folyóirat 30-dik kötetében (97. l.) is megjelent, meghatározta a három pontból és adott középpontból meghatározott kúpszelet nemét, az általa nyert eredményt a következő be nem bizonyított kritériumban foglalván össze:

»*Ha a kúpszeletnek három A, B, C pontján kívül még annak P középpontja is adva van, úgy az ily módon meghatározott kúpszelet nemét a következőképen döntjük el: Legyenek az A, B, C háromszög oldalainak középpontjai A', B', C' és kössük össze egyenesek által az utóbbi pontokat, úgy ez egyenesek a síkot hét részre osztják, ú. m. A'B'C' véges részre, azután a szögök felett emelkedő három síkrészre, végre pedig az oldalak felett emelkedő három síkrészre, ha a P pont az első négy síkrészben fekszik, akkor az eredő kúpszelet ellipsis, ha, pedig a P pont az utóbb említett három síkrészben fekszik akkor az eredő kúpszelet hyperbola.*«

Steiner, a mint már említettem, e kritériumot be nem bizonyitotta; a jelen sorok czélja annak bebizonyítása analytikai módszerek segítségével.

1. Azon jelöléseket megtartva, melyeket már több értekezésemben használtam, x, y alatt a currens orthogonál-coordinátákat, x_i, y_i alatt pedig az i pont orthogonál-coordinátáit értem. Felveszem továbbá, hogy 1, 2, 3 legyenek a kúpszelet adott pontjai, 4 pedig a kúpszelet középpontja. Az 1, 2, 3 pontokból meghatározott 23, 31, 12 oldalak középpontjai pedig legyenek 1', 2', 3'.

Legyen továbbá:

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} y_i & 1 \\ y_k & 1 \end{vmatrix} = \xi_{ik}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_k \end{vmatrix} = \eta_{ik}, \quad \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix} = \zeta_{ik} \\
&\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = (iko), \quad \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix} = (ikl)
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (a)$$

2. Az 1, 2, 3 pontok és a 4 középpont coordinátái az előbbiek szerint $x_1\, y_1$; $x_2\, y_2$; $x_3\, y_3$; $x_4\, y_4$, úgy az 1 2 3 háromszög oldalai középpontjainak coordinátái a következők lesznek:

$$\left.\begin{aligned}
1' \ldots\ldots & \tfrac{1}{2}(x_2+x_3),\ \tfrac{1}{2}(y_2+y_3). \\
2' \ldots\ldots & \tfrac{1}{2}(x_3+x_1),\ \tfrac{1}{2}(y_3+y_1). \\
3' \ldots\ldots & \tfrac{1}{2}(x_1+x_2),\ \tfrac{1}{2}(y_1+y_2).
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (b)$$

Áttérünk az (1'2'3'), (2'3'4), (3'1'4), (1'2'4) determinánsok értékeinek meghatározására. A (b) alatti jelöléseket tekintetbe véve, találjuk:

$$(1'2'3') = \tfrac{1}{8} \begin{vmatrix} x_2+x_3 & y_2+y_3 & 1+1 \\ x_3+x_1 & y_3+y_1 & 1+1 \\ x_1+x_2 & y_1+y_2 & 1+1 \end{vmatrix} \ldots\ldots (c)$$

és ha ez egyenletet a következő identikus egyenlettel sokszorozzuk:

$$(123)^2 = \begin{vmatrix} \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \\ \xi_{31} & \eta_{31} & \zeta_{31} \\ \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \end{vmatrix} \ldots\ldots (d)$$

találjuk, hogy

$$(1'2'3')\,(123)^2 = \tfrac{1}{8} \begin{vmatrix} 0 & (123) & (123) \\ (123) & 0 & (123) \\ (123) & (123) & 0 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{4}\,(123)^3$$

vagy az egyenlő tényezők elhagyása után:

$$(1'2'3') = \tfrac{1}{4}\,(123) \ldots\ldots (e)$$

Miután pedig a következő azonos egyenletből:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

következik, hogy:

$$(234)+(314)+(124)-(123)=0$$

zért, ha az (123) értékét ez egyenletből az (e) alatti egyenletbe helyettesítjük, találjuk, hogy:

$$(234)+(314)+(124)=4(1'2'3') \ldots\ldots (f)$$

Továbbá találjuk, hogy

$$(2'3'4)=\tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} x_3+x_1 & y_3+y_1 & 1+1 \\ x_1+x_2 & y_1+y_2 & 1+1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \ldots\ldots (g)$$

$$(3'1'4)=\tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 & 1+1 \\ x_3+x_1 & y_3+y_1 & 1+1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \ldots\ldots (h)$$

$$(1'2'4)=\tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} x_2+x_3 & y_2+y_3 & 1+1 \\ x_3+x_1 & y_3+y_1 & 1+1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \ldots\ldots (i)$$

Ha pedig a (g), (h) és (i) alatti egyenleteket a (d) alattival sokszorozzuk, akkor az egyenlő tényezők elhagyása után találjuk, hogy

$$\left.\begin{aligned} -(234)+(314)+(124)&=4(2'3'4) \\ (234)-(314)+(124)&=4(3'1'4) \\ (234)+(314)-(124)&=4(1'2'4) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (k)$$

Ha végre még az (f) és (k) alatti egyenletekben a következő rövidebb jelöléseket vezetjük be:

$$(234)=u_1,\ (314)=u_2,\ (124)=u_3 \ldots\ldots (l)$$

akkor a következő nevezetes egyenletrendszert nyerjük:

$$\left.\begin{aligned} u_1+u_2+u_3&=4(1'2'3') \\ -u_1+u_2+u_3&=4(2'3'4) \\ u_1-u_2+u_3&=-4(1'3'4) \\ u_1+u_2-u_3&=4(1'2'4) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1)$$

3. Az 1, 2, 3 ponton átmenő, vagyis az 123 háromszögnek körülírt kúpszelet egyenlete az (a) alatti jelölések tekintetbe vételével a következő alakban írható:

$$(120)(130)+\lambda_1(120)(230)+\lambda_2(130)(230)=0, \ldots\ldots (2)$$

mely egyenletben a λ_1 λ_2 mennyiségek határozatlan állandókat jelentenek. A (2) alatti egyenletben kifejezett kúpszelet ellipsis vagy hyperbola, a mint annak x, y szerint rendezett

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+vy+f=0 \ldots\ldots (3)$$

egyenletében

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \gtrless 0 \ldots\ldots (4)$$

Ha tehát a (2) alatti kúpszeletre nézve el akarjuk dönteni, hogy mikor ellipsis és mikor hyperbola, akkor először azt x, y szerint rendezzük és ezután a következő determináns értékét meghatározzuk:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$$

E determináns értékét a következőképen határozzuk meg:

$$4\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 0 \\ 2b & 2c & 0 \\ 2d & 2e & 1 \end{vmatrix} \ldots\ldots (5)$$

A (2) és (3) alatti egyenletek összehasonlításából találjuk, hogy

$$\left.\begin{aligned}
2a &= \xi_{12}\xi_{13}+\xi_{13}\xi_{12}+\lambda_1(\xi_{12}\xi_{23}+\xi_{23}\xi_{12})+\lambda_2(\xi_{13}\xi_{23}+\xi_{23}\xi_{13})\\
2b &= \eta_{12}\eta_{13}+\eta_{13}\eta_{12}+\lambda_1(\eta_{12}\eta_{23}+\eta_{23}\eta_{12})+\lambda_2(\eta_{13}\eta_{23}+\eta_{23}\eta_{13})\\
2f &= \zeta_{12}\zeta_{13}+\zeta_{13}\zeta_{12}+ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
2b &= \xi_{12}\eta_{13}+\xi_{13}\eta_{12}+\lambda_1(\xi_{12}\eta_{23}+\xi_{23}\eta_{12})+\lambda_2(\xi_{13}\eta_{23}+\xi_{23}\eta_{12})\\
2d &= \xi_{12}\zeta_{13}+\xi_{13}\zeta_{12}+\lambda_1(\xi_{12}\zeta_{23}+\xi_{23}\zeta_{12})+\lambda_2(\xi_{13}\zeta_{23}+\xi_{23}\zeta_{12})\\
2e &= \eta_{12}\zeta_{13}+\eta_{13}\zeta_{12}+\lambda_1(\eta_{12}\zeta_{23}+\eta_{23}\zeta_{12})+\lambda_2(\eta_{13}\zeta_{23}+\eta_{23}\zeta_{12})
\end{aligned}\right\} (6)$$

Ha pedig ez értékeket az (5) alatti egyenletben helyettesitjük, akkor találjuk, hogy

$$4(ac-b^2)=\begin{vmatrix} \xi_{12}\xi_{13}+\xi_{13}\xi_{12}+\lambda_1(\xi_{12}\xi_{23}+\xi_{23}\xi_{12})+\lambda_2(\xi_{13}\xi_{23}+\xi_{23}\xi_{13}) & \xi_{12}\eta_{13}+\xi_{13}\eta_{12}+\lambda_1(\xi_{12}\eta_{23}+\xi_{23}\eta_{12})+\lambda_2(\xi_{13}\eta_{23}+\xi_{23}\eta_{13}) & 0 \\ \xi_{12}\eta_{13}+\xi_{13}\eta_{12}+\lambda_1(\xi_{12}\eta_{23}+\xi_{23}\eta_{12})+\lambda_2(\xi_{13}\eta_{23}+\xi_{23}\eta_{13}) & \eta_{12}\eta_{13}+\eta_{13}\eta_{12}+\lambda_1(\eta_{12}\eta_{23}+\eta_{23}\eta_{12})+\lambda_2(\eta_{13}\eta_{23}+\eta_{23}\eta_{13}) & 0 \\ \xi_{12}\zeta_{13}+\xi_{13}\zeta_{12}+\lambda_1(\xi_{12}\zeta_{23}+\xi_{23}\zeta_{12})+\lambda_2(\xi_{13}\zeta_{23}+\xi_{23}\zeta_{13}) & \zeta_{12}\eta_{13}+\zeta_{13}\eta_{12}+\lambda_1(\zeta_{12}\eta_{23}+\zeta_{23}\eta_{12})+\lambda_2(\zeta_{13}\eta_{23}+\zeta_{23}\eta_{13}) & 1 \end{vmatrix} \quad (7)$$

Ez egyenletet úgy alakítjuk át, hogy azt a következővel sokszorozzuk:

$$(123)=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots (8)$$

megjegyezvén, hogy a sokszorozás a jobb oldalakon álló determinánsokban oszlopok szerínt történik. A sokszorozás eredménye a következő:

$$4(ac-b^2)(123)=\begin{vmatrix} (123)\{\lambda_1\xi_{12}+\lambda_2\xi_{13}\} & -(123)\{\xi_{12}+\lambda_2\xi_{23}\} & (123)\{\xi_{13}+\lambda_1\xi_{23}\} \\ (123)\{\lambda_1\eta_{12}+\lambda_2\eta_{13}\} & -(123)\{\eta_{12}+\lambda_2\eta_{23}\} & (123)\{\eta_{13})+\lambda_1\eta_{23}\} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(123)^2\begin{vmatrix} \lambda_1\xi_{12}+\lambda_2\xi_{13} & -(\xi_{12}+\lambda_2\xi_{23}) & \xi_{13}+\lambda_1\xi_{23} & 0 \\ \lambda_1\eta_{12}+\lambda_2\eta_{13} & -(\eta_{12}+\lambda_2\eta_{23}) & \eta_{13}+\lambda_1\eta_{23} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1\zeta_{12}+\lambda_2\zeta_{13} & -(\zeta_{12}+\lambda_2\zeta_{23}) & \zeta_{13}+\lambda_1\zeta_{23} & 1 \end{vmatrix}$$

és innét

$$4(ac-b^2) = -(123)\begin{vmatrix} \lambda_1\xi_{12}+\lambda_2\xi_{13} & -(\xi_{12}+\lambda_2\xi_{23}) & \xi_{13}+\lambda_1\xi_{23} & 0 \\ \lambda_1\eta_{12}+\lambda_2\eta_{13} & -(\eta_{12}+\lambda_2\eta_{23}) & \eta_{13}+\lambda_1\eta_{23} & 0 \\ \lambda_1\zeta_{12}+\lambda_2\zeta_{13} & -(\zeta_{12}+\lambda_2\zeta_{23}) & \zeta_{13}+\lambda_1\eta_{23} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (9)$$

s ha még ez egyenletet a következővel sokszorozzuk:

$$(123) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \ldots\ldots (10)$$

akkor, ha a sokszorozás ismét oszlopok szerínt történik, annak eredménye a következő lesz:

$$4(ac-b^2)(123) = -(123)\begin{vmatrix} 0 & -(123)\lambda_2 & (123)\lambda_1 & 1 \\ -(123)\lambda_2 & 0 & -(123) & 1 \\ (123)\lambda_1 & -(123) & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

vagy ha a jobb oldalon álló determinánsban az utolsó oszlopot (123)-mal sokszorozzuk és az első három sort (123)-mal elosztjuk, akkor az egyenlő tényezők elhagyása után a következő egyenletet nyerjük:

$$4(ac-b^2) = -(123)^2\begin{vmatrix} 0 & -\lambda_2 & \lambda_1 & 1 \\ -\lambda_2 & 0 & -1 & 1 \\ \lambda_1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

A (4) alatti feltétel szerínt tehát a (2) alatti kúpszelet ellipsis vagy hyperbola, a mint

$$\begin{vmatrix} 0 & -\lambda_2 & \lambda_1 & 1 \\ -\lambda_2 & 0 & -1 & 1 \\ \lambda_1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \lessgtr 0 \ldots\ldots (11)$$

4. Jelen esetben a (2) alatti kúpszeletsereg egyik kúpszelete úgy van meghatározva, hogy annak középpontja az x_4, y_4 pontban van. A (2) alatti kúpszeletben a középpont a következő egyenletek által van meghatározva:

$$\left.\begin{array}{l}(120)\xi_{13}+(130)\xi_{12}+\lambda_1[(120)\xi_{23}+(230)\xi_{12}] \\ \qquad +\lambda_2[(130)\xi_{23}+(230)\xi_{13}]=0 \\ (120)\eta_{13}+(130)\eta_{12}+\lambda_1[(120)\eta_{23}+(230)\eta_{12}] \\ \qquad +\lambda_2[(130)\eta_{23}+(230)\eta_{13}]=0\end{array}\right\}\ldots\ldots(12)$$

Miután pedig a középpont coordinátái x_4, y_4 azért ez egyenletek akkor is állanak, ha bennök x, y helyett x_4, y_4-et helyettesítünk és így a még határozatlan λ_1, λ_2 állandók meghatározására a következő egyenletek szolgálnak:

$$\left.\begin{array}{l}(124)\xi_{13}+(134)\xi_{12}+\lambda_1[(124)\xi_{23}+(234)\xi_{12}] \\ \qquad +\lambda_2[(134)\xi_{23}+(234)\xi_{13}]=0 \\ (124)\eta_{13}+(134)\eta_{12}+\lambda_1[(124)\eta_{23}+(234)\eta_{12}] \\ \qquad +\lambda_2[(134)\eta_{23}+(234)\eta_{13}]-0\end{array}\right\}\ldots\ldots(13)$$

$$\text{Ha } N=\begin{vmatrix}(124)\xi_{23}+(234)\xi_{12} & (134)\xi_{23}+(234)\xi_{13} \\ (124)\eta_{23}+(234)\eta_{12} & (134)\eta_{23}+(234)\eta_{13}\end{vmatrix},\ldots\ldots(14)$$

akkor ez egyenletek megoldásai a következők:

$$\left.\begin{array}{l}N\lambda_1=-\begin{vmatrix}(124)\xi_{13}+(134)\xi_{12} & (134)\xi_{23}+(234)\xi_{13} \\ (124)\eta_{13}+(134)\eta_{12} & (134)\eta_{23}+(234)\eta_{13}\end{vmatrix} \\ N\lambda_2=\begin{vmatrix}(124)\xi_{23}+(234)\xi_{12} & (124)\xi_{13}+(234)\xi_{12} \\ (124)\eta_{23}+(234)\eta_{12} & (124)\eta_{13}+(134)\eta_{12}\end{vmatrix}\end{array}\right\}\ldots(15)$$

A (14) és (15) alatti egyenletekben meghatározott értékeket még tovább redukálhatjuk, ha az előbbi egyenleteket még így irjuk:

$$N=\begin{vmatrix}(124)\xi_{23}+(234)\xi_{12} & (134)\xi_{23}+(234)\xi_{13} & 0 \\ (124)\eta_{23}+(234)\eta_{12} & (134)\eta_{23}+(234)\eta_{13} & 0 \\ (124)\zeta_{23}+(234)\zeta_{12} & (134)\zeta_{23}+(234)\zeta_{13} & 1\end{vmatrix}$$

$$N\lambda_1 = -\begin{vmatrix} (124)\xi_{13}+(134)\xi_{12} & (134)\xi_{23}+(234)\xi_{13} & 0 \\ (124)\eta_{13}+(134)\eta_{12} & (134)\eta_{23}+(234)\eta_{13} & 0 \\ (124)\zeta_{13}+(134)\zeta_{12} & (134)\zeta_{23}+(234)\zeta_{13} & 1 \end{vmatrix}$$

$$N\lambda_2 = -\begin{vmatrix} (124)\xi_{23}+(234)\xi_{12} & (124)\xi_{13}+(234)\xi_{12} & 0 \\ (124)\eta_{23}+(234)\eta_{12} & (124)\eta_{13}+(234)\eta_{12} & 0 \\ (124)\zeta_{23}+(234)\zeta_{12} & (124)\zeta_{13}+(234)\zeta_{12} & 1 \end{vmatrix}$$

és azután mindegyikét a következővel sokszorozzuk:

$$(123) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots (16)$$

megjegyezvén, hogy a sokszorozást oszlopok szerint hajtjuk végre. A leírt módon találjuk, hogy

$$N(123) = \begin{vmatrix} (124)(134) & 0 & (234)(123) \\ (134)(123) & -(234)(123) & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

vagy az egyenlő tényezők elhagyása után és az (1) alatti jelöléseket tekintve:

$$N = u_4 u_1 (u_1 - u_2 - u_3) \quad \ldots\ldots (17)$$

és ehhez hasonlóan

$$\left.\begin{aligned} N\lambda_1 &= u_4 u_2(u_1 - u_2 + u_3) \\ N\lambda_2 &= u_4 u_3(-u_1 - u_2 + u_3) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (18)$$

5. Ha továbbá a (11) alatti feltételben előfordúló determináns első három sorát N-nel sokszorozzuk és az utolsó oszlopot N-nel elosztjuk, akkor az a feltétel $\frac{1}{N^2}$ tényező elhagyása után a következőbe megy át:

$$\begin{vmatrix} 0 & -N\lambda_2 & N\lambda_1 & 1 \\ -N\lambda_2 & 0 & -N & 1 \\ N\lambda_1 & -N & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \gtrless 0$$

vagy ha N, $N\lambda_1$ és $N\lambda_2$ értékeit a (17) és (18) alatti egyenletekből helyettesítjük még továbbá:

$$\begin{vmatrix} 0 & u_4u_3(u_1+u_2-u_3) & u_4u_2(u_1-u_2+u_3) & 1 \\ u_4u_3(u_1+u_2-u_3) & 0 & u_4u_1(-u_1+u_2+u_3) & 1 \\ u_4u_2(u_1-u_2+u_3) & u_4u_1(-u_1+u_2+u_3) & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \lessgtr 0 \ldots (19)$$

Ha pedig az itten előforduló determinánsban az utolsó oszlopot u_4-gyel sokszorozzuk, akkor az első három sor mindegyikéből u_4, mint tényező kiválik, azért a fennebbi feltétel az u_4^2 tényező elhagyása után még a következőbe megy át:

$$\begin{vmatrix} 0 & u_3(u_1+u_2-u_3) & u_2(u_1-u_2+u_3) & 1 \\ u_3(u_1+u_2-u_3) & 0 & u_1(-u_1+u_2+u_3) & 1 \\ u_2(u_1-u_2+u_3) & u_2(-u_1+u_2+u_3) & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \lessgtr 0$$

és ha még itten az első, második és harmadik sort u_1, u_2, u_3-mal, a negyedik sort pedig $u_1u_2u_3$-mal sokszorozzuk és azután az 1, 2 és 3-dik oszlopot u_2u_3, u_3u_1 és u_1u_2-vel osztjuk még továbbá:

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1+u_2-u_3 & u_1-u_2+u_3 & u_1 \\ u_1+u_2-u_3 & 0 & -u_1+u_2+u_3 & u_2 \\ u_1-u_2+u_3 & -u_1+u_2+u_3 & 0 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} \lessgtr 0$$

ha pedig itt még az első három oszlopból a negyediket kivonjuk, akkor:

$$\begin{vmatrix} -u_1 & u_2-u_3 & -u_2+u_3 & u_1 \\ u_1-u_3 & -u_2 & -u_1+u_3 & u_2 \\ u_1-u_2 & -u_1+u_2 & -u_3 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} \lessgtr 0$$

és ha még a bal oldalon álló determinánst a következővel sokszorozzuk:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 16$$

**

akkor a sokszorozás eredménye ez lesz:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2(u_1+u_2-u_3) & -2(u_1-u_2+u_3) \\ 0 & 2(u_1+u_2-u_3) & 0 & -2(-u_1+u_2+u_3) \\ 0 & 2(u_1-u_2+u_3 & -2(-u_1+u_2+u_3) & 0 \\ (u_1+u_2+u_3) & . & . & . \end{vmatrix}$$

$$= -8(u_1+u_2+u_3) \begin{vmatrix} 0 & u_1+u_2-u_3 & u_1-u_2+u_3 \\ u_1+u_2-u_3 & 0 & -u_1+u_2+u_3 \\ u_1-u_2+u_3 & -u_1+u_2+u_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -16(u_1+u_2+u_3)(-u_1+u_2+u_3)(u_1-u_2+u_3)(u_1+u_2-u_3)$$

Ezeknél fogva a fennebbi feltétel a következőbe megy át:

$$-(u_1+u_2+u_3)(-u_1+u_2+u_3)(u_1-u_2+u_3)(u_1+u_2-u_3) \lessgtr 0$$

és ha ebben még az (1) alatti egyenletekre vagyunk tekintettel, akkor végre azt az eredményt nyertük, hogy a kérdéses kúpszelet ellipsis vagy hyperbola, a mint:

$$(1'2'3')(2'3'4)(1'3'4)(1'2'4) \lessgtr 0 \; \ldots\ldots \; (20)$$

6. A (20) alatti egyenlet fejezi ki az értekezés elején kifejezett kritériumot.

Ha ugyanis a $2'3'4$, $1'3'4$, $1'2'4$ és $1'2'3'$ háromszögök kétszeres területeit t_1, t_2, t_3, t_4-gyel jelöljük, akkor:

$$(2'3'4) = \pm t_1, \; (1'3'4) = \pm t_2, \; (1'2'4) = \pm t_3, \; (1'2'3') = \pm t_4,$$

mely egyenletekben a felső vagy alsó előjelek választandók, a mint a $2'3'42'$, $1'3'41'$, $1'2'41'$, $1'2'3'1'$ körülirások positivok vagy negativok. Ha a kérdésben forgó négy pont közűl a $1'2'3'$ pontokat tekintjük állandóknak, akkor a 4 pont a síknak azon hét részében fekhetik, melyekre az az $1'2'3'$ háromszög oldalai által osztatik. Ha a 4 pont vagy magában a $1'2'3'$ háromszögben fekszik, vagy pedig a csúcsok felett emelkedő végtelen síkrészekben, akkor az idom megtekintéséből látjuk, hogy a fennebbi háromszögö közűl páratlan számúak pozitiv, tehát szintén páratlan számúak negativ körülirásuak, ekkor tehát az 1'2'3'4 pontoknak a helyzete olyan, hogy bizonyos háromból képezett háromszög a negyediket magába zárja; ez esetben tehát a (20) alatti feltételek közűl az első áll és így a kérdéses kúpszelet ellipsis. Ha pedig az előbbi feltevéssel ellentétben, a 4 pont az 1'2'3' háromszög oldalai felett emelkedő végtelen síkrészekben fekszik, akkor szintúgy találjuk, hogy a kérdésben forgó háromszögök közűl a positiv, valamint a negativ körülirásúak is páros számban fordúlnak elő, a mi a fennebbi feltételek közűl a másodikra, vagyis a hyperbolára vezet. Megjegyezhetjük, hogy ez esetben az 1'2'3'4 pontok egymást kizárják, azaz bármely háromból képezett háromszög a negyedik pontot kizárja.

Így tehát az értekezés elején kimondott kritériumot bebizonyítottuk és még a következőképen mondhatjuk ki:

»*A három pontból és a középpontból adott kúpszelet nemét a következőképen döntjük el:*

Mindenekelött meghatározzuk a három pontból képezett háromszög oldalainak középpontjait, ha ezek a kúpszelet középpontjával oly helyzetet foglalnak el, hogy egymást kizárják, akkor a kúpszelet hyperbola, az evvel ellenkezö esetben pedig ellipsis.«

Eddig külön megjelent

ÉRTEKEZÉSEK

a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet.

I. Szily Kálmán. A mechanikai hő-elmélet egyenleteinek általános alakjáról. Székfoglaló . . . . 10 kr.
II. Hunyady Jenő. A pólus és a polárok. A viszonyos polárok elve 20 kr.
III. Vész János A. Biztositási kölcsön (új életbiztositási nem) . . 20 kr.
IV. Kruspér István. A Schwerdt-féle Comparator módositott alkalmazása 10 kr.
V. Vész János A. Legrövidebb távolok a körkúpon. Székfoglaló . 10 kr.
VI. Tóth Ágoston. Az európai nemzetközi fokmérés és a körébe tartozó goedaetai munkálatok . . . . 20 kr.
VII. Kruspér István. A párisi meter-prototyp . . . . . . 10 kr.
VIII. König Gyula. Az elliptikai függvények alkalmazásáról a magasabb foku egyenletek elméletére . . . . 20 kr.
IX. Murmann Ágost. Európa bólygó elemei, annak tiz első észlelt szembenállása szerint . . . . 20 kr.
X. Szily Kálmán. A Hamilton-féle elv és a mechanikai hő-elmélet második fő tétele . . . . 10 kr.
XI. Tóth Ágoston. A földképkészités jelen állása, a mint az képviselve volt az antwerpeni kiállitáson. Két táblával . . . . . . 20 kr.

Második kötet.

I. Murmann Ágost. Freia bolygó feletti értekezés . . . . 30 kr.
II. Kruspér István. A comparatorokról . . . . 10 kr.
III. Kruspér István. A vonásos hosszmértékek összehasonlitása folyadékban . . . . 10 kr.
IV. Feszt V. A közlekedési müvek és vonalok . . . . 20 kr.
V. Murman A. Az 1861. nagy üstökös pályájának meghatározása 20 kr.
VI. Kruspér J. A párisi levéltári méter-rúd . . . . 10 kr.

Harmadik kötet.

I. Vész János Ármin. Adalék a visszafutó sorok elméletéhez. . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Az ó-gyallai csillagda leirása s abban történt napfoltok észlelése néhány spectroscopicus észlelés töredékeivel. 1872. és 1873. Három táblával. . . . . 40 kr.
III. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Herschel János k. tag fölött . 10 kr.
IV. B. Eötvös Loránd. A rezgések intenzitása, tekintettel a rezgés forrásnak és az észlelőnek mozgására . . . . 10 kr.
V. Réthy Mór. A Diffractio elméletéhez . . . . . . 12 kr.
VI. Martin Lajos. Az erőmütani csavarfelületek. — A vízszintes szélkerék elmélete. Két értekezés . . . . 1 frt
VII. Réthy Mór. A kerületre redukálható felület-egészletek elméletéhez 15 kr.
VIII. Galgóczy Károly. Emlékbeszéd Vállas Antal k. tag felett. 10 kr.

Negyedik kötet.

I. Schulhof Lipót. Az 1870. IV. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása 10 kr.
II. Schulhof Lipót. Az 1871. II. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása. 10 kr.
III. Szily Kálmán. A hő elmélet második főtétele, levezetve az elsőből 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. Csillagászati megfigyeléseim 1874 és 1875-ben. 50 kr.

V. Konkoly Miklós. Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagdában . . . 40 kr.
VI. Hunyadi Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól . . . . 20 kr.
VII. Réthy Mór. A három méretü homogén tér (u. n. nem euklidikus) siktan. trigonometriája. . . . . 20 kr.
VIII. Réthy Mór. A propeller és peripeller felületek elméletéhez. . 30 kr.
IX. Fest Vilmos. Temesi Reitter Ferencz emléke . . . . . 10 kr.

Ötödik kötet.

I. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Nagy Károly r. tag felett . . 10 kr.
II. Kenessey Albert. Adatok folyóink vizrajzi ismeretéhez . . 20 kr.
III. Dr. Hoitsy Pál. Csillag-észlelés a kelet-nyugot vonalban (egy számtáblával.) . . . . 30 kr.
IV. Hunyady Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól. (Folytatás a IV. kötetben ugyane czim alatt megjelent értekezésnek.) . . . . 10 kr.
V. Hunyady Jenő. Apollonius feladata a gömbfelületen . . . 10 kr.
VI. Dr. Gruber Lajos. 24η Cassiopeiae kettős csillag mozgásáról . 10 kr.
VII. Martin Lajos. A változtatási hánylat alkalmazása a propeller-fölület egyenletének lefejtésére. . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. A teljes holdfogyatkozás 1877. február 27-én és az 1877. (Borelli) I. számu üstökös szinképének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
IX. Konkoly Miklós. A napfoltok s a nap felületének kinézése 1876-ban (három képtáblával.) . . . . 40 kr.
X. Konkoly Miklós. 160 álló csillag szinképe. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1876-ban . . . . 20 kr.

Hatodik kötet.

I. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. I. rész. 1871—1873. Ára . . . . 20 kr.
II. Konkoly Miklós. Hullo csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára . . . . 20 kr.
III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámitása. Közlik dr. Gruber Lajos és Kurländer Ignácz kir. observatorok. 10 kr.
IV. Schenzl Guido. Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. . . . . 20 kr.
V. Gruber Lajos. A november-havi hullócsillagokról . . . . 20 kr.
VI. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára . . . . 20 kr.
VII. Konkoly Miklós. A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. Mercur átvonulása a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án . . . . 10 kr.

Hetedik kötet.

I. Konkoly Miklós. Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositió után. Egy táblával. . . . . . . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr.
III. Konkoly Miklós. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban. IV. rész. Ára . . . . 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. A nap felületének megfigyelése 1878-ban az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
VI. Hunyady Jenő. A Möbius-féle kritériumokról a kúpszeletek elméletében . . . . 10 kr.
VII. Konkoly Miklós. Spectroscopicus megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón . . . . 10 kr.
VIII. Dr. Weinek László. Az instrumentális fényhajlás szerepe egy Vénus-átvonulás photographiai felvételénél . . . . 20 kr.

Budapest, 1881. Az Athenaeum r. tars. könyvnyomdája.