ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.
A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL
SZERKESZTI
SZABÓ JÓZSEF
OSZTÁLYTITKÁR.
VII. KÖTET. XX. SZÁM. 1880.

AZ ÁLLANDÓ ELEKTROMOS ÁRAMLÁSOK ELMÉLETÉHEZ.

Dr. FRÖHLICH IZOR
L. TAGTÓL.

(Előadta mint székfoglalót a III. osztály ülésén 1880. okt. 18.)

Ára 10 kr.

BUDAPEST, 1880.
A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.
(Az akadémia épületében.)

AZ ÁLLANDÓ

ELEKTROMOS ÁRAMLÁSOK

ELMÉLETÉHEZ.

Dr. FRÖHLICH IZOR

EGYETEMI NY. RK. TANÁRTÓL.

(Előadta mint székfoglalót a III. osztály ülésén 1880. okt. 18.)

BUDAPEST, 1880.

A M. T. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

(Az Akadémia épületében.)

Budapest, 1880. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.

Az állandó elektromos áramlások elméletéhez.

Az elektromosság tüneményeinek magyarázatában legnagyobb szerepet játszanak a közvetetlen távolbahatás fölvételei, az elektrodynamikai alaptörvények.

Ezek értelmében minden egyes mozgó elektromosság más mozgó elektromosságra bizonyos szabály szerint gyakorol hatást, mely azok helyzete és sebességétől függ.

Midőn az elektromosság galván folyamhoz tartozik, arra nemcsak más elektromosságok, hanem a galván elemben föllépő kevéssé ismert erők is hatnak, s az elektromosság mozgása ily behatások alatt történik; ha pedig a galván áramot nagy hosszaságú vezetőkön a galván elemtől nagy távolnyira viszszük, mint pl. a távirda sodronyainál: akkor ily vezető részekben levő elektromosságra az elemben történő folyamatok nagy távolságuknál fogva nem gyakorolhatnak közvetetlen hatást. Az elektromosság mozgása e vezető részekben csakis a többi elektromosságok által kifejtett erők befolyása alatt történhetik s a távolba hatás törvényének következménye gyanánt tekinthető.

Következőkben megvizsgáljuk ama közelebbi föltételeket, melyek az elektromosság mozgását szabályozzák, midőn az szigetelő által határolt vezetőkben szabadon mozoghat s arra csak más, szintén mozgó elekromosságoktól származó erők hatnak, és minden erő egy vele arányos áramlást okoz; megállapítjuk azon általános egyenleteket, melyek ilynemű mozgások számára fennállanak; ezután a közvetetlen távolba hatás egyes törvényeit alkalmazzuk s vizsgáljuk azt, vajjon az ezekből eredő állandó mozgások megegyeznek-e azon galvánfolyamokkal, melyek az említett törvények egyeseihez tartoznak, s nem lehetségesek-e még más állandó áramlások is.

I. Előleges megállapítások.

Valamely egynemű és isotrop vezető i és k pontjainak $x_i y_i z_i$ és $x_k y_k z_k$ a térbeli összrendezői; ezek helyén lévő $d\tau_i = dx_i dy_i dz_i$ és $d\tau_k = dx_k\, dy_k\, dz_k$ térfogati elemekben ε_{+i}, ε_{-i} és ε_{+k}, ε_{-k} positiv és negativ elektromosságok $x'_{+i} y'_{+i} z'_{+i}$, $x'_{-i} y'_{-i} z'_{-i}$ stb. sebességi összetevőkkel mozognak. A kétnemű elektromosság térbeli és felületi sűrűsége σ_{+i}, σ_{-i}; ϱ_{+i}, ϱ_{-i}; a *szabad* elektromosság sűrűsége: $\sigma_i = \sigma_{+i} + \sigma_{-i}$; $\varrho_i = \varrho_{+i} + \varrho_{-i}$. E mennyiségek összefüggése: $\varepsilon_{+i} = \sigma_{+i}\, d\tau_i$, $\varepsilon_{-i} = \sigma_{-i}\, d\tau_i$; $\varepsilon_{+i} = \varrho_{+i} df_i$; $\varepsilon_{-i} = \varrho_{-i} df_i$; stb., hasonlóan $\sum\limits_i \varepsilon_i = \sigma_i d\tau_i$, $\sum\limits_i \varepsilon_i = \varrho_i df_i$; a Σ összegezési jel ezentúl az egy térfogati, vagy felületi elemben foglalt mennyiségekre vonatkozik.

Jelezze $u_i\ v_i\ w_i$ a $d\tau_i$-ben történő áramlás sűrűségi összetevőit; ezek kifejezése:

$$\left.\begin{aligned} u_i d\tau_i &= \sum_i \varepsilon_i x'_i \\ v_i d\tau_i &= \sum_i \varepsilon_i y'_i \\ w_i d\tau &= \sum_i \varepsilon_i z'_i \end{aligned}\right\} ; \quad \left.\begin{aligned} u_k d\tau_k &= \sum_k \varepsilon_k x'_k \\ v_k d\tau_k &= \sum_k \varepsilon_k y'_k \\ w_k d\tau_k &= \sum_k \varepsilon_k z'_k \end{aligned}\right\}.$$

Ez áramlások a mozgás folytonossága elvének felelnek meg; de figyelembe veendő itt azon körülmény, hogy az áramlás összetevői nemcsak a térbeli összrendezők függvényei, hanem ezenkivűl még explicite a sebességeket is tartalmazzák.

A folytonosság egyenletének a vezető belsejére megállapítása céljából vizsgáljuk meg közelebbről az egy $d\tau_i$ elemben történő áramlást. Ez elem $x_i y_i z_i$ csúcsában a sebességek $x'_i y'_i z'_i$ értékkel bírnak; az e csúcsot tartalmazó $dy_i dz_i$ lapon keresztűl dt idő alatt ömlik $u_i\, dx_i\, dy_i\, dt$ mennyiség; a szemközt lévő $dydz$ lapon pedig, mely dx távolnyira van az elsőtől, ömlik:

$$-\left[u_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x'_i}\frac{\partial x'_i}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial y'_i}\frac{\partial y'_i}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial z'_i}\frac{\partial z'_i}{\partial x_i}dx_i\right]dy_i dz_i dt.$$

Itt $\frac{\partial x'_i}{\partial x_i}dx_i$-el dx'_i-t jelezzük, azaz csak a sebesség különbségét, az első és a második $dy_i dz_i$ lapra nézve.

A térbeli folytonosság egyenlete tehát:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial y_i} + \frac{\partial w_i}{\partial z_i}\right) - E; \; \ldots\ldots 1).$$

E alatt értjük:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i'}\frac{\partial x_i'}{\partial x_i} + \ldots + \ldots + \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial y_i} + \ldots + \ldots + \frac{\partial w_i}{\partial x_i'}\frac{\partial x_i'}{\partial z_i}$$

mennyiséget, melyben a sebességek, mint azt a távolba hatás egyes törvényei mutatják, első hatványon fordúlnak elő.

A felületi folytonosság egyenlete pedig:

$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial t} = -\left(u_i\frac{\partial x_i}{\partial n} + v_i\frac{\partial y_i}{\partial n} + w\frac{\partial z_i}{\partial n}\right) \; \ldots\ldots 2).$$

Ez 1) és 2) egyenletek föltevést nem tartalmaznak s az áramlás minden állapotára érvényesek.

2. Ohm törvénye.

Vizsgálatunk folytatására azon összefüggést kell bevezetnünk, mely az elektromosságokra működő erő (elektromotorikus erő) s az általa létesített áramlás intenzitása között fennáll. E kapcsolatot kifejező Ohm törvényét azonban közvetetlenűl nem alkalmazhatjuk, mert nemcsak a sebességnek befolyását ez erőre, hanem még azt is figyelembe kell vennünk, hogy a távolba hatás egyik *(Clausius)* törvénye szerint oly galván-áramok is megegyeznek a tapasztalással, melyekben a két-nemű elektromosság különböző sebességgel mozog. Eme föltétnek csak úgy felelhetünk meg, ha a különnemű elektromosságoknak különböző mozoghatóságot tulajdonítunk, azaz, fölvesszük, hogy azok különböző ellenállással mozognak egyugyanazon vezetőben. Ohm törvényét itt ily alakban mondjuk ki: a $\binom{\text{positiv}}{\text{negativ}}$ mozgó elektromosságra működő elektromotorikus erő egy vele egyenesen arányos $\binom{\text{positiv}}{\text{negativ}}$ áramlást okoz; de ez áramlás arányossági tényezője λ_1 és λ_2 nem egyenlő a két esetben.

Jelezze: X_{+i} a $d\tau_i$-ben x'_{+i}, y'_{+i}, z_{+i} sebességgel mozgó positiv elektromosság egységére működő erőösszetevőt, s hasonló symmetrikus jelek a többi összetevőt, Ohm törvényének alakja leszen:

$$\left.\begin{aligned} u_i &= u_{+i} + u_{-i} = \sigma_{+i}x'_{+i} + \sigma_{-i}x'_{-i} = \lambda_1 X_{+i} + \lambda_2 X_{-i} \\ v_i &= v_{+i} + v_{-i} = \sigma_{+i}y'_{+i} + \sigma_{-i}y'_{-i} = \lambda_1 Y_{+i} + \lambda_2 Y_{-i} \\ w_i &= w_{+i} + w_{-i} = \sigma_{+i}z'_{+i} + \sigma_{-i}z'_{-i} = \lambda_1 Z_{+i} + \lambda_2 Z_{-i} \end{aligned}\right\} \text{ és}$$

$$\left.\begin{aligned} u_k &= u_{+k} + u_{-k} = \sigma_{+k}x'_{+k} + \sigma_{-k}x'_{-k} = \lambda_1 X_{+k} + \lambda_2 X_{-k} \\ v_k &= v_{+k} + v_{-k} = \sigma_{+k}y'_{+k} + \sigma_{-k}y'_{-k} = \lambda_1 Y_{+k} + \lambda_2 Y_{-k} \\ w_k &= w_{+k} + w_{-k} = \sigma_{+k}z'_{+k} + \sigma_{-k}z'_{-k} = \lambda_1 Z_{+k} + \lambda_2 Z_{-k} \end{aligned}\right\}.$$

Ezek figyelembe vételével a folytonosság egyenletei:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial t} = -\left\{\lambda_1\left(\frac{\partial X_{+i}}{\partial x_i} + \frac{\partial Y_{+i}}{\partial y_i} + \frac{\partial Z_{+i}}{\partial z_i}\right) - \lambda_2\left(\frac{\partial X_{-i}}{\partial x_i} + \frac{\partial Y_{-i}}{\partial y_i} + \frac{\partial Z_{-i}}{\partial z_i}\right)\right\} - \mathrm{E} \; \ldots\ldots \; 3).$$

$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial t} = -\left\{\lambda_1\left(X_{+i}\frac{\partial x_i}{\partial n} + Y_{+i}\frac{\partial y_i}{\partial n} + Z_{+i}\frac{\partial z_i}{\partial n}\right) - \lambda_2\left(X_{-i}\frac{\partial x_i}{\partial n} + Y_{-i}\frac{\partial y_i}{\partial n} + Z_{-i}\frac{\partial z_i}{\partial n}\right)\right\} \; \ldots\ldots \; 4).$$

X_{-i} illetőleg X_{-i} az ε_k mozgó elektromosságok által $d\tau_i$-ben mozgó positiv, illetőleg negativ elektromosság egységére ható erők, ezek irhatók:

$$X_{+i} = \iiint \sum_k \mathfrak{X}_{+ik}; \quad X_{-i} = \iiint \sum_k \mathfrak{X}_{-ik},$$

hol $\mathfrak{X}_{+ik}$ és $\mathfrak{X}_{-ik}$ az ε_k által a positiv vagy negativ egységre gyakorolt hatás és $\sum\limits_k$ a $d\tau_k$-ban tartalmazott ε_k—k-ra vonatkozik.

3. A távolba hatás törvényeinek bevezetése.

A 3) és 4) alatti egyenletek közelebbi számítása czéljából a távolba hatás egyes törvényeiből folyó erő-componenseket kell kiszámítanunk. *Clausius, Riemann* és *Weber* ilynemű törvényeiben az elektromosságok potentiálja két részből áll; az első a mind a háromban közös elektrostatikai potential:

$$\mathfrak{U}=\frac{\varepsilon_i\varepsilon_k}{z};$$

a második az elektrodynamikai potential, mely minden egyes törvényre nézve jellemző:

$$\mathfrak{V}^C=k\frac{\varepsilon_i\varepsilon_k}{z}(x_i'x_k'+y_i'y_k'+z_i'z_k'),$$

$$\mathfrak{V}^R=-\frac{k}{2}\frac{\varepsilon_i\varepsilon_k}{z}[(x_i'-x_k')^2+(y_i'-y_k')^2+(z_i'-z_k')^2],$$

$$\mathfrak{V}^W=-\frac{k}{2}\frac{\varepsilon_i\varepsilon_k}{r^3}[(x_i-x_k)(x_i'-x_k')+(y_i-y_k)(y_i'-y_k')+(z_i-z_k)(z'-z_k')]^2.$$

Lagrange mozgás-egyenletei értelmében az ε_i és ε_k között működő erő kifejezése:

$$\mathfrak{X}_{ik}=\frac{\partial(\mathfrak{V}-\mathfrak{U})}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x_i'}\right).$$

A számítás végrehajtása adja:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X}^{C}_{ik} &= \frac{\varepsilon_i\varepsilon_k}{r^3}(x_i-x_k) - k\frac{\varepsilon_i\varepsilon_k}{r^3}(x_i-x_k)(x'_i x'_k + y'_i y'_k + z'_i z'_k) + k\frac{\varepsilon_i\varepsilon_k}{r^3}[(x_i-x_k)(x'_i-x'_k)+(y_i-y_k)(y'_i-y'_k)+ \\
&\qquad + (z_i-z_k)(z'_i-z'_k)]\, x'_k - k\frac{\varepsilon_i\varepsilon_k}{r} x''_k. \\
\mathfrak{X}^{R}_{ik} &= \frac{\varepsilon_i\varepsilon_k}{r^3}(x_i-x_k) + \frac{k}{2}\frac{\varepsilon_i\varepsilon_k}{r^3}(x_i-x_k)[(x'_i-x'_k)^2+(y'_i-y'_k)^2+z'_i-z'_k)^2] - k\frac{\varepsilon_i\varepsilon_k}{r^3}[(x_i-x_k)(x'_i-x'_k)+ \\
&\qquad +(y_i-y_k)(y'_i-y'_k)+(z_i-z_k)(z'_i-z'_k)](x'_i-x'_k) + k\frac{\varepsilon_i\varepsilon_k}{r}(x''_i-x''_k). \\
\mathfrak{X}^{W}_{ik} &= \frac{\varepsilon_i\varepsilon_k}{r^3}(x_i-x_k) - \frac{3k}{2}\frac{\varepsilon_i\varepsilon_k}{r^3}(x_i-x_k)[(x_i-x_k)(x'_i-x'_k)+(y_i-y_k)(y'_i-y'_k)+(z_i-z_k)(z'_i-z'_k)]^2+ \\
&\quad + k\frac{\varepsilon_i\varepsilon_k}{r^3}[(x_i-x_k)(x'_i-x'_k)^2+(y'_i-y'_k)^2+(z'_i-z'_k)^2] + k\frac{\varepsilon_i\varepsilon_k}{r3}(x_i-x_k)[(x_i-x_k)(x''_i-x''_k)+(y_i-y_k)(y''_i-y''_k) \\
&\qquad + (z_i-z_k)(z''_i-z''_k)].
\end{aligned}\right\} \ldots \mathrm{I.}$$

Midőn e kifejezéseket a folytonosság egyenleteibe helyettesíteni akarjuk, ε_{+i} és ε_{-i} helyébe teendő $+1$ és -1 A 3) alatti egyenlet képzésénél az erőkifejezés első tagja mind a három törvényben

$$\iiint \sum_k \Delta^2 \frac{\varepsilon_k}{r} = -4\pi\sigma_i$$

értékhez vezet, a többi tagokat az egyes törvények szerint külön-külön kell megvizsgálni.

Clausius kifejezésének második tagja adja:

$$k\,\varepsilon_{+i}\iiint\sum_{k}(x_i'x_k'+y_i'y_k'+z_i'z_k')\,\Delta^2\frac{\varepsilon_k}{r}.$$

E mennyiség elenyésző oly i és k pontok számára, melyek egymástól *véges* távolban vannak; midőn pedig e pontok egymáshoz végtelen közelek, ez már nem áll.

Messünk ki a vezetőből egy igen kis sugárú gömböt, mely az i pontot tartalmazza, e gömbben minden $\binom{\text{positiv}}{\text{negativ}}$ elektromosság $\begin{pmatrix}x_{+k}'=x_{+i}'\\ x_{-k}'=x_{-i}'\end{pmatrix}$ stb. sebességgel mozog. A fennebbi kifejezés első tagja írható:

$$\iiint\sum_{k}x_{+i}'x_k'\,\Delta^2\frac{\varepsilon_k}{r}=\int\left(x_{+i}'x_{+k}'\,\Delta^2\frac{\varepsilon_{+k}}{r}+x_{+i}'x_{-k}'\,\Delta^2\frac{\varepsilon_{-k}}{r}\right)=$$

$$-4\pi\,(x_{+i}'\sigma_{+i}+x_{-i}'\sigma_{-i})\,x_{+i}'=-4\pi\,x_{+i}'u_i.$$

A többi tag e mintára képezhető. Clausius kifejezésének többi részére a differentiálás átalános szabályai alkalmazandók.

Riemann törvényére számítva az összefüggést, az erő második tagjából leszen:

$$-\frac{k}{2}\varepsilon_i\left[(x_i'-x_k')^2+(y_i'-y_k')^2+(z_i'-z_k')^2\right]\Delta^2\frac{\varepsilon_k}{r},$$

megjegyzendő, hogy *Riemann* és *Weber* kifejezéseiben mindenütt $\lambda_1=\lambda_2$ irandó, mivel ott a kétnemű elektromosság mozoghatósága egyenlő. A keletkező mennyiség első tagja:

$$\sum_{i}\varepsilon_i\iiint\sum_{k}(x_i'-x_k')^2\Delta^2\frac{\varepsilon_k}{r}=+1\Big\{x_{+i}'^2\int\sum_{k}\Delta^2\frac{\varepsilon_k}{r}-2x_{+i}'x_{+k}'\int\sum_{+k}\Delta^2\frac{\varepsilon_{+k}}{r}$$

$$-2x_{+i}'x_{-k}'\int\sum_{-k}\Delta^2\frac{\varepsilon_{-k}}{r}+x_{+k}'^2\int\sum_{+k}\Delta^2\frac{\varepsilon_{+k}}{r}+x_{-k}'^2\int\sum_{-k}\Delta^2\frac{\varepsilon_{-k}}{r}\Big\}$$

$$-(-1)\Big\{x_{-i}'^2\int\sum_{k}\Delta^2\frac{\varepsilon_k}{r}-2x_{-i}'x_{+k}'\int\sum_{+k}\Delta^2\frac{\varepsilon_{+k}}{r}-2x_{-i}'x_{-k}'\int\sum_{-k}\Delta^2\frac{\varepsilon_{-k}}{r}$$

$$+x_{+k}'^2\int\sum_{+k}\Delta^2\frac{\varepsilon_{+k}}{r}+x_{-k}'^2\int\sum_{-k}\Delta^2\frac{\varepsilon_{-k}}{r}\Big\}.$$

$$=-4\pi\sigma_i(x_{+i}'^2-x_{-i}'^2).$$

A $\sum_{i}$ összegezési jel, melyet ezentúl is használunk, jelzi, hogy ε_i helyébe először $+1$, azután -1 teendő, egyszersmind

$+1$-el x'_{+i} stb.; -1-el x'_{-i} stb. sebességek is járnak; erre a két mennyiség különbsége képezendő.

Riemann kifejezésének többi része a közönséges módon számítandó.

Weber erőkifejezésének második tagja írható:

$$+\frac{3}{2}k\varepsilon_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\varepsilon_k}{r}\right).\left(\frac{dr}{dt}\right)^2;$$

ebből leszen:

$$\frac{3k}{2}\varepsilon_i\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\Delta^2\frac{\varepsilon_k}{r}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\varepsilon_k}{r}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\varepsilon_k}{r}\right)\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\frac{\varepsilon_k}{r}\right)\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\frac{dr}{dt}\right)\right\}=\frac{5k}{2}\varepsilon_i\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\Delta^2\frac{\varepsilon_k}{r}.$$

Meghatározandó ez utóbbi kifejezések összege minden ε_k mozgó pontra nézve. A fenn használt kis gömböt véve figyelembe, abban minden $\begin{pmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{pmatrix}$ elektromosság $\begin{pmatrix}x'_{+i}=x'_{+k}\\ x'_{-i}=x'_{-k}\end{pmatrix}$ stb. sebességgel mozog; tehát minden ε_{+i} és ε_{+k}, valamint minden ε_{-i} és ε_{-k} párra nézve: $\frac{dr}{dt}=o$. A fenmaradó összeg írható:

$$\sum_i\varepsilon_i\int\!\!\int\!\!\int\sum_k\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\Delta^2\frac{\varepsilon_k}{r}=(+1)\int\sum_{-k}\left(\frac{dr}{dt}_{+i-k}\right)^2\Delta^2\frac{\varepsilon_{-k}}{r}-$$

$$-(-1)\int\sum_{+k}\left(\frac{dr}{dt}_{-i+k}\right)^2\Delta^2\frac{\varepsilon_{+k}}{r}.$$

Ámde a gömb minden $d\tau_k$ elemére áll: $\left(\frac{dr}{dt}\right)_{+i-k}=-\left(\frac{dr}{dt}\right)_{-i+k}$, mert a két összegben az ε_{+i}, ε_{-k} s az ε_{-i}, ε_{+k} sebességei fölcseréltetnek; ennek értelmében a két összeg értéke:

$$\int\sum_k\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\Delta^2\frac{\varepsilon_k}{r}.$$

A végleges kiszámítás igen bonyolódott, de ezt kerülhetjük és rövidebb uton érhetünk czélt:

Legyen

$$c^2=\left\{\left(x'^2_{+i}+y'^2_{+i}+z'^2_{+i}\right)^{1/2}+\left(x'^2_{-i}+y'^2_{-i}+z'^2_{-i}\right)^{1/2}\right\}^2$$

a $\frac{dr}{dt}$ viszonyos sebesség legnagyobb értéke; fennáll következő egyenlőtlenség:

$$\int \sum_k c^2 \Delta^2 \frac{\varepsilon_k}{r} = -4\pi\sigma_i c^2 > \int \sum_k \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \Delta^2 \frac{\varepsilon_k}{r};$$

mert az egyenlőtlenségi jel jobb oldalán lévő összeg minden tagja $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ positiv együtthatóval van szorozva, mely általán kisebb c^2-nél s csak egyes esetekben egyenlő vele.

Összegünket tehát:

$$-4\pi\sigma_i c^2 \vartheta^2.$$

alakban írhatjuk, hol ϑ^2 egy positiv való tört.

Weber erőkifejezésének harmadik tagja ugyanazt adja, mint Riemann számított kifejezésének második tagja; ellenben a negyedik tagból lészen:

$$-k\,\varepsilon_i\left(\Delta^2\frac{\varepsilon_k}{r}+\frac{1}{r^2}\right)[(x_i-x_k)(x_i''-x_k'')+(y_i-y_k)(y_i''-y_k'')+$$
$$+(z_i-z_k')z_i''-z_k'')].$$

Az összeg képzésénél az első tag:

$$\int \sum_k \Delta^2 \frac{\varepsilon_k''}{r}[(x_i-x_k)(x_i''-x_k'')+\ldots+\ldots]=o;$$

véges távolokra $\Delta^2\frac{\varepsilon_k}{r}=o$ végett, végtelen csekély távolok számára pedig, mivel akkor az összeg minden egyes tagja (x_i-x_k) végtelen kis mennyiséggel van szorozva és $\int\Sigma\Delta^2\frac{\varepsilon_k}{r}$ összeg véges értékü.—

A felületi egyenletek, melyek a 4) alatti összefüggést tartalmazzák, minden akadály nélkül a jelzett műtétek végrehajtása utján nyerhetők; mind a három kifejezésben az első tagból összegezés által

$$\iiint \sum_k \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\varepsilon_k}{r}\right)=\frac{\partial U}{\partial n}=-4\pi\varrho_i'$$

mennyiség keletkezik; U az összes elektromosságok statikai potentiálja, vonatkoztatva azt $x_i y_i z_i$ pontra. Az n szerint veendő hányados *csakis* a felületen *befelé* vont normalisra vonatkozhatik, mert itt csak oly erők vehetők figyelembe, melyek a vezető *belsejében* vagy annak felületén lépnek fel; de *nem* tárgyalhatjuk a *kifelé* vont normalisnak megfelelő hányadost, mert ez a szigetőben működő erőt adná; ϱ_i' pedig a felületi sürüség ama részét jelzi, mely az U-nak a felülettől befelé változásának felel meg.

Összefoglalva az eddigi eredményeket, következő alakot öltenek

4. A folytonosság egyenletei:

a) A térbeli sürüség egyenlete.

1. *Clausius:* $$\frac{\partial\sigma_i}{\partial t} + 4\pi\sigma_i(\lambda_1+\lambda_2) - 4\pi k\,[(\lambda_1 x_{+i}' + \lambda_2 x_{-i}')\,u_i + (\lambda_1 y_{+i}' + \lambda_2 y_{-i}')\,v_i + (\lambda_1 z_{+i}' + \lambda_2 z_{-i}')\,w_i) =$$
$$= -k\sum_i \lambda\varepsilon_i \int \sum_k \varepsilon_k \Big\{ -\frac{3}{r^5}[(x_i-x_k)(x_i'-x_k') + (y_i-y_k)(y_i'-y_k') + (z_i-z_k)(z_i'-z_k')](x_i-x_k)x_k' + (y_i-y_k)y_i' +$$
$$+ (z_i-z_k)z_k') + \frac{1}{r^3}\Big[[(x_i'-x_k')x_k' + (y_i'-y_k')y_k' + (z_i'-z_k')z_k' + [(x_i-x_k)x_k'' + (y_i-y_k)y_k'' + (z_i-z_k)\,z_k'']\Big]\Big\} + E^C.$$

2. *Riemann:* $$\frac{\partial\sigma_i}{\partial t} + 4\pi\sigma_i\lambda\,\Big\{2 + \frac{k}{2}[(x_{+i}'-x_{-i}')^2 + (y_{+i}'-y_{-i}')^2 + (z_{+i}'-z_{-i}')^2]\Big\} = -k\lambda\sum_i \varepsilon_i \int \sum_k \varepsilon_k \Big\{ + \frac{3}{r^5}[(x_i-$$
$$-x_k)(x_i'-x_k') + (y_i-y_k)(y_i'-y_k') + (z_i-z_k)(z_i'-z_k')]^2 - \frac{1}{r^3}\Big[[(x_i'-x_k')^2 + (y_i'-y_k')^2 + (z_i'-z_k')^2) + (x_i-$$
$$-x_k)(x_i''-x_k'') + (y_i-y_k)(y_i''-y_k'') + (z_i-z_k)(z_i''-z_k'')]\Big]\Big\} + E^R.$$

3. *Weber:* $$\frac{\partial\sigma_i}{\partial t} + 4\pi\sigma_i\,\lambda\Big\{2 - -k\Big[\frac{5}{2}\vartheta^2[(x_{+i}'^2 + y_{+i}'^2 + z_{+i}'^2)^{1/2} + (x_{-i}'^2 + y_{-i}'^2 + z_{-i}'^2)^{1/2}]_2 - \frac{1}{2}[(x_{+i}'-x_{-i}')^2 + (y_{+i}'-$$
$$-y_{-i}')^2 + (z_{+i}'-z_{-i}')^2)\Big]\Big\} = -k\lambda\sum_i \varepsilon_i \int \sum_k \varepsilon_k \frac{1}{r^3}[x_i-x_k)(x_i''-x_k'') + (y_i-y_k)(y_i''-y_k'') + (z_i-z_k)(z_i''-z_k'')] + E^W.$$

…… II.

b) a felületi sűrűség egyenlete.

1. *Clausius:*
$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial t} + 4\pi\varrho'_i(\lambda_1+\lambda_2) = -k\sum_i \lambda\varepsilon_i \int \sum_k \varepsilon_k \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}(x'_i x'_k + y'_i y'_k + z'_i z'_k) + \frac{1}{r^3}[x_i - x_k)(x'_i - x'_k) + (y_i - y_k)\right.$$
$$\left.(y'_i - y'_k) + (z_i - z_k)(z'_i - z'_k)]\left(x'_k \frac{\partial x_i}{\partial n} + y'_k \frac{\partial y_i}{\partial n} + z'_k \frac{\partial z_i}{\partial n}\right) + \frac{1}{r}\left(x''_k \frac{\partial x_i}{\partial n} + y''_k \frac{\partial y_i}{\partial n} + z''_k \frac{\partial z_i}{\partial n}\right)\right\}.$$

2. *Riemann:*
$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial t} + 8\pi\varrho'_i\lambda = -k\lambda \sum_i \varepsilon_i \int \sum_k \varepsilon_k \left\{ -\frac{1}{2}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}[(x'_i - x'_k)^2 + (y'_i - y'_k)^2 + (z'_i - z'_k)^2] - \frac{1}{r^3}[(x_i - x_k)(x'_i - \right.$$
$$- x'_k) + (y_i - y_k)(y'_i - y'_k) + (z_i - z_k)(z'_i - z'_k)]\left((x'_i - x'_k)\frac{\partial x_i}{\partial n} + (y'_i - y'_k)\frac{\partial y_i}{\partial n} + (z'_i - z'_k)\frac{\partial z_i}{\partial n}\right) +$$
$$\left. \frac{1}{r}\left((x''_i - x''_k)\frac{\partial x_i}{\partial n} + (y''_i - y''_k)\frac{\partial y_i}{\partial n} + z''_i - z''_k)\frac{\partial z_i}{\partial n}\right)\right\}.$$

3. *Weber:*
$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial t} + 8\pi\varrho'_i\lambda = -k\lambda \sum_i \varepsilon_i \int \sum_k \varepsilon_k \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\left\{ \frac{3}{2}\frac{1}{r^2}\left[(x_i - x_k)(x'_i - x'_k) + (y_i - y_k)(y'_i - {}_k y) + (z_i - z_k)(z'_i - z'_k)\right]^2\right.$$
$$\left. - \left[(x'_i - x'_k)^2 + (y'_i - y'_k)^2 + (z'_i - z'_k)^2\right] - \left[(x_i - x_k)(x''_i - x''_k) + (y_i - y_k)(y''_i - y''_k) + (z_i - z_k)(z''_i - z''_k)\right]\right\}.$$

.. III.

A felirt egyenletek első csoportjában E^C, E^R, E^W oly összegek, melyek egyes tagjai az összrendezőktől, a sebességek *első* hatványától s e sebességek térbeli differentiál hányadosaitól függenek.

Megjegyzendő, hogy a Weber törvénye számára felállított egyenletek a Kirchhoff*) által képezett egyenletekbe mennek át, ha σ_i-nek a sebességgel szorzott tagjait elhagyjuk, hasonlóan az $x_i'' y_i'' z_i''$ gyorsulásokat és E^W-t; a felületi sürűség egyenletének jobb oldalán pedig csak az $x_k'' y_k'' z_k''$ gyorsulásokkal szorzott tagokat tartjuk meg, mert Weber szerint:

$$u_k = \sum_k \varepsilon_k x_k' \text{ és } \frac{du_k}{dt} = \Sigma \varepsilon_k x_k''.$$

A II. és III. rendszer az elektrostatikai egyensúlyhoz vezet, ha bennök a sebességek és gyorsulások zéróknak tétetnek. Lészen ekként $\sigma_i = o$ és $\varrho_i' = o$, azaz $\frac{\partial U}{\partial n} = o$ a befelé húzott normalis szerint a felület mentében.

5. Állandó elektromos áramlások.

A folytonosság ez egyenletei mindazon mozgások számára érvényesek, melyek Ohm törvénye itt bevezetett alakjának felelnek meg; ez pedig mechanikai értelemben véve, ellenálló közegben történő mozgást jelent, midőn az ellenállás a sebesség első hatványával arányos és a mozgás állapota állandó lett. Állandó áramlások beálltakor a gyorsulások a vezető minden pontjában zérók: $x_i'' = .. = .. x_k'' = .. = .. = o$; az áramlások összetevői, $u_i \ldots, u_k \ldots$, *állandók* és a sürűség az időtől független:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial t} = o, \frac{\partial \varrho_i}{\partial t} = o.$$

E föltétek következtében az X_{+i} és X_{-i} erők is minden vezetőpontban állandók.

Bevezetve mind e megszorító feltételeket, fennebbi egyenleteink némileg egyszerűsbödnek; de a szabad elektromosság térbeli sürűsége nem lesz zero, a kétnemü elektromosság sebességére nézve nem vonhatunk semmiféle következtetést, sőt még positiv és negativ áramlás bármely elemben sem történik általán ugyanazon egyenes mentében.

*) Kirchhoff. Pogg. Ann. C és CII. 1857.

Ezek az állandó mozgások tulajdonai; azok sokkal általánosabb jellegű áramlások, mint a galván állandó folyamok; de egyszersmind ez áramlások elektrodynamikai hatása kifelé általában ellenkezésben lesz a tapasztalati tényekkel; a megegyezés csak amaz esetben következik be, midőn ez áramlások az egyes törvényeknek megfelelő galván áramokba mennek át.

6. Összehasonlitás a tapasztalással.

Az állandó mozgás feltételeinek bevezetése még nem elegendő arra nézve, hogy a végtelen számú állandó elektromos áramlások kifelé hatását általában megegyeztesse az észlelés adataival.

Még közelebbi megszorító feltétek szükségesek.

Ezek elseje legyen, hogy a positiv és negativ áramlás az egyes elemekben *egy* egyenes mentiben történjék; ez beáll, midőn $R_{+i} = (X_{+i}{}^2 + Y_{+i}{}^2 + Z_{+i}{}^2)^{1/2}$ és $R_{-i} = (X_{-i}{}^2 + Y_{-i}{}^2 + Z_{-i}{}^2)^{1/2}$ erők egy egyenesben fekszenek. E feltét kifejezése:

$$\frac{u_{+i}}{u_{-i}} = \frac{v_{+i}}{v_{-i}} = \frac{w_{+i}}{w_{-i}} = -\frac{\lambda_1 X_{+i}}{\lambda_2 X_{-i}} = -\frac{\lambda_1 Y_{+i}}{\lambda_2 Y_{-i}} = -\frac{\lambda_1 Z_{+i}}{\lambda_2 Z_{-i}};$$

és érvényes a vezetőnek minden belső pontjára.

Elemezzük közelebbről az X_{+i} stb. erőket állandó mozgásoknál. Az I. rendszerből kitűnik, hogy $X_{+i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$ + a sebességek egynemü, négyzetes függvénye.

A sebességet tartalmazó tagokat csoportokba szedhetjük s írhatjuk:

$$X_{+i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + S\left\{\int\sum_k \varepsilon_k \mathfrak{E} x_k' y_k' + \int\sum_k \varepsilon_k \mathfrak{F} x_{+i}' x_k' + \int\sum_k \varepsilon_k \mathfrak{G} x_{+i}' y_{+i}'\right\} \ldots 5).$$

A teljes egynemü függvényben 21 a sebességtől függő tag foglaltatik, az S jel ily tagok összegét jelzi, a felírt első s harmadik tag sémája hat-hat tagra érvényes, — a második kilenczre; $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ összrendezők függvényei, melyek általán minden egyes tagra különbözők.

Ámde írhatjuk:

$$\int \sum_{k} \varepsilon_k \mathfrak{E} x'_k y'_k = \int \mathfrak{E} (\sigma_{+k} x'_{+k} y'_{+k} + \sigma_{-k} x'_{-k} y'_{-k}) \, d\tau_k +$$
$$+ \int \mathfrak{E}' (\varrho_{+k} x'_{+k} y'_{+k} + \varrho_{-k} x'_{-k} y'_{-k}) \, df_k.$$
$$\int \sum_{k} \varepsilon_k \mathfrak{F} x'_{+i} x'_k = x'_{+i} [\int \mathfrak{F} u_k d\tau_k + \int \mathfrak{F}' u_k \, df_k].$$
$$\int \sum_{k} \varepsilon_k \mathfrak{S} x'_{+i} y'_{+i} = x'_{+i} y'_{+i} [\int \mathfrak{S} \sigma_k d\tau_k + \int \mathfrak{S}' \varrho_k df_k].$$

Az első hat tag ε_{+i} sebességétől független, a második kilencz tag vele arányos, a harmadik hat tag annak négyzetét tartalmazza. Tegyük

$$c_{+i}^2 = x'^2_{+i} + y'^2_{+i} + z'^2_{+i} \text{ és } c_{-i}^2 = x'^2_{-i} + y'^2_{-i} + z'^2_{-i};$$

az erők sematikus jelzése:

$$X_{+i} = H_x + c_{+i} F_x + c_{+i}^2 G_x; \; -X_{-i} = H_x + c_{-i} F_y + c_{-i}^2 G_x \ldots 6).$$

Fennebbi feltétünk tehát leszen:

$$\frac{u_{+i}}{u_{-i}} = \frac{v_{+i}}{v_{-i}} = \frac{w_{+i}}{w_{-i}} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{H_x + c_{+i} F_x + c_{+i}^2 G_x}{H_x + c_{-i} F_x + c_{-i}^2 G_x} = -$$
$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{H_y + c_{+i} F_y + c_{+i}^2 G_y}{H_y + c_{-i} F_y + c_{-i}^2 G_y} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_2} \frac{H_z + c_{+i} F_z + c_{+i}^2 G_z}{H_z + c_{-i} F_z + c_{-i}^2 G_z} \ldots\ldots 7).$$

A) Clausius törvénye értelmében történő áramlások. E törvény erőkifejezése nem tartalmazza a c_{+i}^2-el arányos tagokat s igy a 7) alatti egyenlet még írható:

$$\frac{x'_{+i}}{x'_{-i}} = \frac{y'_{+i}}{y'_{-i}} = \frac{z'_{+i}}{z'_{-i}} = -\frac{\lambda_1 \sigma_{-i}}{\lambda_2 \sigma_{+i}} \cdot \frac{H_x + c_{+i} F_x}{H_x + c_{-i} F_x} = \ldots = \ldots\ldots 7_a).$$

Ebből ered: $\frac{F_x}{H_x} = \frac{F_y}{H_y} = \frac{F_z}{H_z}$; ennek figyelembe vételével azonnal következik:

$$x'_{+i} : y'_{+i} : z'_{+i} = x'_{-i} : y'_{-i} : z'_{-i} = H_x : H_y : H_z = F_x : F_y : F_z.$$

Az áramlás összetevői:

$$u_{+i} = \sigma_{+i} x'_{+i} = \lambda_1 H_x + \lambda_1 c_{+i} F_x,$$
$$u_{-i} = \sigma_{-i} x'_{-i} = \lambda_2 H_x + \lambda_2 c_{-i} F_x;$$

téve rövidítés czéljából: $\frac{x'_{+i}}{c'_{+i}} = \frac{x'_{-i}}{c'_{-i}} = \alpha$, e két egyenlet alkalmas egybekapcsolása adja:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c_{+i}}{c_{-i}} \cdot \frac{\sigma_{+i}\alpha - \lambda_1 F_x}{\sigma_{-i}\alpha - \lambda_2 F_x}.$$

Midőn az áramlás intenzitása folyton fogy, F_x, mely ezzel arányos, a zéró felé közeledik és σ_{+i} igen közel $-\sigma_{-i}$; — tehát csekély intenzitású áramlásoknál közelítőleg áll:

$$\frac{c_{+i}}{c_{-i}}=-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Midőn Clausius szerint *galván*-áramot akarunk, tegyük $\sigma_{+i}=-\sigma_{-i}$ és lészen, mivel $\frac{x'_{+i}}{x'_{-i}}=\frac{c_{+i}}{c_{-i}}$:

$$-\frac{c_{+i}}{c_{-i}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\frac{1+c_{+i}\dfrac{F_x}{H_x}}{1+c_{-i}\dfrac{F_x}{H_x}}\dots\dots 8).$$

Ha e kifejezésben például c_{+i} absolut értéke nagyobb, mint c_{-} absolut értéke és $\frac{F_x}{H_x}$ előjele negativ, akkor $\frac{c_{+i}}{c_{-i}}$ viszony előjele positiv is lehet, szóval olynemü galván-áramlások is állanak megegyezésben Clausius törvényével, melyeknél a positiv és negativ elektromosság egyenlő irányban, de általán nem egyenlő sebességgel mozognak.

Hogy ama mozgásokat lehessen felismerni, melyeknek e lehetséges galván áramlások közül okvetetlenül fellépniök kell, vizsgáljuk meg az elektromos erők által ily mozgás közben végezett munkát. Az X_{+i} és X_{-i} erők $(\varepsilon_{+i}x'_{-i})\,dt$ és $(\varepsilon_{-i}x'_{-i})\,dt$ mennyiségekkel való szorozata a $d\tau_i$ elemben dt idő alatt végezett munka összetevőit jelzi; az egész munka:

$$[X_{+i}(\varepsilon_{+i}x'_{+i})+Y_{+i}(\varepsilon_{+i}y'_{+i})+Z_{+i}(\varepsilon_{+i}z'_{+i})+X_{-i}(\varepsilon_{-i}x'_{-i})+$$
$$+Y_{-i}(\varepsilon_{-i}y'_{-i})+Z_{-i}(\varepsilon_{-i}z'_{-i})]dt.$$

Írjuk rövidség kedvéért:

$$u^2{}_{+i}+v^2{}_{+i}+w^2{}_{+i}=I^2{}_{+i}\,;\ u^2{}_{-i}+v^2{}_{-i}+w^2{}_{-i}=I^2{}_{-i}\,;$$

lészen valamely véges vezető részben e munka

$$\left[\frac{1}{\lambda_1}\int I^2{}_{+i}d\tau_i+\frac{1}{\lambda_2}\int I^2{}_{-i}\,d\tau_i\right]dt.$$

Ellenben *Lenz — Joule* kisérleti törvénye értelmében ugyane vezetőrészben végezett munka:

$$\frac{1}{\lambda}\int(I_{+i}+I_{-i})^2d\tau_i dt.$$

A két kifejezés minden vezetőre nézve egyenlő, ha a Clausius törvénye szerint történő galván-folyam a kisérleti tényekkel megegyező. Ennek feltéte:

$$\lambda_1 R^2_{+i}+\lambda_2 R^2_{-i}=\frac{1}{\lambda}(\lambda_1 R_{-i}-\lambda_2 R_{-i})^2, \text{ avagy:}$$

$$\frac{\lambda_1 R^2_{+i}+\lambda_2 R^2_{-i}}{(\lambda_1 R_{+i}-\lambda_2 R_{-i})^2}=\text{állandó minden intenzitásra nézve.}$$

Az áram irányában lévő erők:

$$R_{+i}=H+c_{+i}F;\ -R_{-i}=H+c_{-i}F;$$

de ezek értéke még:

$$R_{+i}=\frac{\sigma_{+i}c_{+i}}{\lambda_1};\quad -R_{-i}=\frac{\sigma_{-i}c_{-i}}{\lambda_2};$$

továbbá, mivel galván-áramlással van dolgunk $\sigma_{+i}=-\sigma_{-i}$, a fönnebbi viszony még írható:

$$\frac{\lambda_2 c^2_{+i}+\lambda_1 c^2_{-i}}{(\lambda_2 c_{+i}-\lambda_1 c_{-i})^2}=\frac{\lambda_2\gamma^2+\lambda_1}{(\lambda_2\gamma-\lambda_1)^2}=\text{állandó},$$

a hol $\gamma=\frac{c_{+i}}{c_{-i}}$. Ez egyenlet γ-ra nézve *másodfokú;* ennek két gyöke γ_1 és γ_2 állandó. Bármelyikét vegyük is, áll:

$$-\frac{c_{+i}}{c_{-i}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{1+c_{+i}\frac{F}{H}}{1+c_{-i}\frac{F}{H}}=\text{állandó minden intenzitásra nézve.}$$

E kifejezést egyenlet alakjába hozva:

$$\lambda_2\frac{c_{+i}}{c_{-i}}+\lambda_1=-2\,c_{+i}\frac{F}{H}=\text{állandó};$$

nyerjük tehát: $c_{+i}\frac{F}{H}=$ állandó; $c_{-i}\frac{F}{H}=$ állandó minden intenzitásra nézve.

De még tovább mehetünk; a sürűségre nézve érvényes a következő összefüggés:

$$\sigma_{+i}=\lambda_1\frac{H}{c_{+i}}+\lambda_1 F;$$

az intenzitás fogyásával F, mely vele egyenesen arányos, szintén fogy a zero felé, mig σ_{+i} lesz a nyugvás, egyensúly esetében $d\tau_i$ elemben tartalmazott positiv electromosság sürűsége, mely vezetőkben soha sem lehet zero; igy $\sigma_{+i} = \lambda_1 \frac{H}{c_{+i}}$ a határérték, mely felé előbbi kifejezésünk végtelen közel jő, midőn az áramlás intenzitása végtelenűl fogy; mivel pedig találtuk, hogy $c_{+i} \frac{F}{H}$ = állandó minden intenzitásra nézve, ez csak akkor áll fenn, midőn $F = o$ és igy $I_{+i} = \lambda_1 H$; $I_{-i} = \lambda_2 H$; azaz c_{+i} és c_{-i} *előjele ellentett.*

A H erő alakját az 5) a. egyenletből következtethetjük:

$$H = -\frac{\partial U}{\partial s_i} + S\left[\int \mathfrak{E}\sigma_{+k}(c^2_{+k} - c^2_{-k})d\tau_k + \int \mathfrak{E}'(\varrho_{+k}c^2_{+k} + \right.$$
$$\left. + \varrho_{-k}c^2_{-k})\,df_k\right].$$

A $d\tau_i$ elemben dt időközben végzett munka:

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} I^2_{+i} + \frac{1}{\lambda_2} I^2_{-i}\right) d\tau_i\, dt =$$
$$(I_{+i}R_{+i} - I_{-i}R_{-i})d\tau_i dt = (I_{+i}H + I_{-i}H)d\tau_i dt =$$
$$= (I_{+i} + I_{-i})\frac{\partial U}{\partial s_i}dt - (I_{+i} + I_{-i})S\left[\int \mathfrak{E}(I_{+k}c_{+k} + I_{-k}c_{-k})\,d\tau + \right.$$
$$\left. + \int \mathfrak{E}'(I'_{+k}c_{+k} + I'_{-k}c_{-k})df_k\right]dt.$$

Fordítsuk meg az áram irányát, akkor a következő kisérleti tények érvényesek:

a) A vezető felületén levő szabad elektromosság, melynek potentiálja U, *sürüségét* szigorúan *ellenkezövé változtatja;*

b) Az $(I_{+i} + I_{-i})$ összeg, az áram teljes, fajlagos intenzitása csak *előjelét változtatja;*

c) A vezető részben végezett *munka az áram irányától független.*

Fennebbi kifejezésünk második része azonban a folyam megfordításával szintén változtatja előjelét, tehát értéke zéró vagy elenyésző csekély, míg $(I_{+i} + I_{-i})$ véges marad.

Elvégre tehát a Clausius törvénye értelmében történő áramlások csak úgy egyeztethetők a tapasztalati tényekkel, ha az áram két részének kifejezése:

$$\left.\begin{aligned} I_{+i} &= \sigma_{+i}\, c_{+i} = -\lambda_1 \frac{\partial U}{\partial s_i} \\ I_{-i} &= \sigma_{-i}\, c_{-i} = -\lambda_2 \frac{\partial U}{\partial s_i} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 9_a).$$

B) Riemann és Weber törvényei értelmében csak egyetlen *galván* áramlás lehetséges: midőn a szabad elektromosság sürűsége a vezető belsejében zéró s a kétnemű elektromosság egyenlő, de ellentett irányú sebességgel mozog. A 7) *a.* viszonyból nem következtethetők új összefüggések, de midőn $c_{+i}^2 = c_{-i}^2$, ez átmegy a következő kifejezésbe:

$$1 = -\frac{c_{+i}}{c_{-i}} = -\frac{\sigma_{-i} H + c_{+i} F + c^2_{+i} G}{\sigma_{+i} H - c_{+i} F + c^6_{+i} G}.$$

Ha még tesszük $\sigma_{+i} = -\sigma_{-i}$, e viszony fennállására okvetetlen szükséges, hogy $F = o$ legyen minden intenzitásnál. Ez által lészen $I_{+i} = I_{-i}$ és:

$$H + c^2_{+i} G = -\frac{\partial U}{\partial s_i} + S[\int \mathfrak{E}'(\varrho_{+k} c^2_{+k} + \varrho_{-k} c^2_{-k}) df_k + c^2_{+i} \int \mathfrak{G}' \varrho_k df_k].$$

E kifejezés 2-ik tagja számára, mint fennebb, kimutathatjuk hogy értéke igen csekély; marad:

$$I_{+i} = -\lambda \frac{\partial U}{\partial s_i} + \lambda c^2_{+i} G, \text{ avagy: } -\lambda \frac{\partial U}{\partial s_i} = I_{+i}(1 - \lambda \frac{c_{+i}}{\sigma_{+i}} G).$$

Kisérleti tény, hogy I a felületi elektromosság sűrűségével, tehát $\frac{\partial U}{\partial s_i}$-vel is egyenesen arányos, lészen:

$$1 - \lambda \frac{c_{+i}}{\sigma_{+i}} G = \frac{\lambda H}{\sigma_{+i} c_{+i}} = \text{állandó minden intenzitásra nézve.}$$

Az előbbiek figyelembe vétele mellett következik $c_{+i} G = o$; ennélfogva Riemann és Weber törvényei értelmében történő áramlás csak úgy egyeztethető a tapasztalati tényekkel, ha e kétnemü áramlás kifejezése:

$$\left.\begin{aligned} I_{+i} &= \sigma_{+i} c_{+i} = -\lambda \frac{\partial U}{\partial s_i} \\ I_{-i} &= \sigma_{-i} c_{-i} = -\lambda \frac{\partial U}{\partial s_i} \end{aligned}\right\} \ldots . 9_b).$$

Azon nevezetes eredményhez jutottunk, hogy bármily törvény szerint mozgatottnak vesszük az elektromosságot: az arra gyakorolt erő csakis az elektromosság *statikai* hatásából eredhet.

De ha figyelemmel vagyunk az elektromosságok egymásrahatására, a mint azt a távolba hatás különböző törvényei I. a. kifejezései követelik: észrevesszük, hogy a nevezett eredményt minden intenzitásra és bármily alakú vezetőnél csak úgy érhetjük el, ha az erő kifejezéseiben a sebességtől függő minden tag elhanyagoltatik. E körülmény fontos physikai jelentőséggel bir. — A nevezett tagok mindegyike ugyanis három szorzóból áll: az első az összrendezők függvénye, mely általán nem zéró, sőt bizonyos esetekben igen nagy értékű; a második elektromosság szorzata sebességgel és k-val, ez az áramlás intenzitásával arányos vagy egyenlő mennyiség, mely véges áramlás mellett nem lehet zeró; a harmadik pedig az elektromosság sebessége szorozva k-val. Az említett elhanyagolás tehát csak k-hoz viszonyított *csekély sebesség* mellett engedhető meg.

Ha tehát a távolbahatás fennebbi törvényeit érvényeseknek akarjuk tekinteni: akkor a galván állandó folyamban roppant mennyiségű positiv s negativ elektromosság k-hoz észrevehetlen csekély sebességgel mozog; de ily mozgás tényleges fennállása nem valószinű.

E viszonyok közelebbi kimutatására vizsgáljuk az áramlás legegyszerűbb esetét. Valamely egyenes, hengeralakú, csekély keresztmetszetű, végtelen hosszu vezetőben folyam létezzék; ez kevéssel a folyam zárása után állandóvá válik. A vezető felületén lévő szabad elektromosság kisérleti megfigyelése szerint $\frac{\partial U}{\partial s}$ hányados állandó, s a felülethez merőleges elektrostatikai erőösszetevő nem létezik. Az áramlás a henger tengelye körül symmetrikus lesz s e tengelylyel párhuzamosan történik.

Válaszszuk az összrendezői tengelyek fekvését úgy, hogy az X tengely a hengerével együvé essék. Akkor lesz $y'_i = z'_i = y'_k = z'_k = o$ és marad:

$$X_{+i} = -X_{-i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i},$$

mert az I. egyenletek szerint az egyes törvények kifejezéseiből még fenmaradó

$$-k\frac{\varepsilon_i\varepsilon_k}{r^3}(x_i-x_k)x_k'^2,$$

$$-\frac{k}{2}\frac{\varepsilon_i\varepsilon_k}{r^3}(x_i-x_k)(x_i'-x_k')^2,$$

$$-\frac{k}{2}\frac{\varepsilon_i\varepsilon_k}{r^3}\left(3\frac{(x_i-x_k)^2}{r^2}-2\right)(x_i-x_k)(x_i'-x_k')^2$$

tagok összege párokra bontható, melyek egyik tagja számára (x_i-x_k) positiv, másika számára negativ s igy az összeg zero. Nem ugy áll a dolog a tengelyre merőleges Y_{+i} és Y_{-i} erőösszetevőkre nézve. Ezeknek a fennebbiek értelmében elektrostatikai részök nincs, marad az elektromosság egységére vonatkoztatva:

$$Y_{+i}^C=-\int k\varepsilon_{+i}\Sigma\varepsilon_k\frac{y_i-y_k}{r^3}x_{+i}'x_k' \quad =-kx_{+i}'\int\frac{y_i-y_k}{r^3}I_k d\tau_k.$$

$$Y_{+i}^R=+\int\frac{k}{2}\varepsilon_i\Sigma\varepsilon_k\frac{y_i-y_k}{r^3}(x_{+i}'-x_k')^2=-kx_{+i}'\int\frac{y_i-y_k}{r^3}I_k d\tau_k.$$

$$Y_{+i}^W=-\int\frac{k}{2}\varepsilon_{+i}\Sigma\varepsilon_k\frac{y_i-y_k}{r^3}\left(3\frac{(x_i-x_k)^2}{r^2}-2\right)(x_{+i}'-x_k')^2$$

$$=+kx_{+k}'\int\frac{y_i-y_k}{r^3}\left(3\frac{(x_i-x_k)^2}{r^2}-2\right)I_k d\tau_k.$$

Ez értékek meghatározására tegyük $d\tau_k=dx_k\,dq$, hol q a vezető keresztmetszete; továbbá feküdjék az y_kx_k ponton átömlő folyamfonál s az x_iy_i pont az XY síkban; y_i-y_k e pontnak merőleges távola e fonáltól. Az egész, végtelennek tekinthető fonál hatása számítására:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx_k}{[(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2]^{3/2}}=\int_{-\infty}^{+\infty}2\frac{dx_k}{r^3}-$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}3\frac{(x_i-x_k)^2dx_k}{r^5}=\frac{2}{(y_i-y_k)^2}$$

integrálokat figyelembe véve, lesz mind a három törvény számára a positiv és negativ mozgó elektromosság egységére gyakorlott erő:

$$-2kx'_{+i}\frac{I_k dq}{y_i-y_k}; \quad +2kx'_{-i}\frac{I_k dq}{y_i-y_k}.$$

A végtelen hosszaságú fonál hatása úgy tekinthető, mintha annak $(2kI_k dq)$ tömege az (y_i-y_k) merőleges vonal talppontjában lenne központosítva s az általa gyakorolt erő e távollal fordítva arányos. Valamely r sugarú, végtelen vékony csőalakú áramlási réteg hatása az i pontban mozgó elektromosságokra egyenértékű azzal, melyet az i ponton keresztűl menő s az X tengelyre merőleges síknak e csővel átmetszést képező körgyűrű gyakorol, midőn annak minden eleme $(^2kI_k dq)$ tömeggel van beborítva.

E feladat már meg van oldva,*) az eredmény: midőn i pont e rétegen belül fekszik, a hatás zero, kivül fekvő pontokra pedig egyenlő a gyűrű központjában levő összes gyűrű tömegével s a tengely felé van irányítva.

Jelezze r_i az i pont merőleges távolát a tengelytől, r_o a vezető sugarát s a két erő:

$$-2kx'_{+i}\frac{1}{r_i}\int_o^{r_i} I_k dq; \qquad +2kx'_{-i}\frac{1}{r_i}\int_o^{r_i} I_k dq.$$

Az eddig ismert észlelések értelmében a szabad elektromosság felületi megoszlása ily áramot vivő vezetőkön $\frac{\partial U}{\partial s} =$ const. s a felületre vagy a tengelyre merőleges erőösszetevő nem létezik. Ha pedig nincs erő, mely a fennebbit egyensúlyozza: az elektromosságok ez erőknek engedni fognak s keletkezik a tengelyre merőleges áramlási összetevő, melyet írhatjuk (I_k-t az egész keresztmetszetre állandónak véve):

$$\sigma_{+i}r'_{+i} = -2x'_{+i}k\lambda_1\frac{J}{r_o^2}r_i; \qquad \sigma_{-i}r'_{-i} = -2x'_{-i}k\lambda_2\frac{J}{r_o^2}r_i;$$

ámde, nagy megközelítéssel áll:

$$\sigma_{+i}x'_{+i} = -\lambda_1\frac{\partial U}{\partial s_i} = \frac{J_{+i}}{r_o^2}; \quad \sigma_{-i}x'_{-i} = -\lambda_2\frac{\partial U}{\partial s_i} = \frac{J_{-i}}{r_o^2}.$$

---

*) *C. Neumann:* Newton'sche und logarithmische Potential, 53. l.

Itt J_{+i}, J_{-i} a vezető egész keresztmetszetére érvényes kétnemű áramlás és $J = J_{+i} + J_{-i}$. Lészen:

$$r'_{+i} = \frac{\partial r_{+i}}{\partial t} = -2rk(\lambda_1 + \lambda_2)x_{+i}'^2 ; \; r'_{-i} = \frac{\partial r_{-i}}{\partial t} = -2rk(\lambda_1 + \lambda_2)x_{-i}'^2 ;$$

ez egyenletek megoldásai:

$$r_{+i} = r_0 e^{-2k(\lambda_1 + \lambda_2)\, x_{+i}'^2 t} \; ; \; r_{-i} = r_0 e^{-2k(\lambda_1 + \lambda_2) x_{-i}'^2 t} .$$

A fenn számított elektrodynamikai erő hatása abban áll, hogy a mozgó elektromosságokat a vezető tengelye felé mozgatni fogja, mindaddig, mig a mozgás csak magában a tengelyben történik.

Kirchhoff *) és Weber **) közel megegyező mérései szerint $k(\lambda_1 + \lambda_2)$ absolut értéke közelítőleg $1 : 10000$, a cmt-t, grmmot és másodperczet egységűl választva. Legyen x'_{+i} egy centimeter, akkor 5,000 másodpercz, azaz körűlbelől másfél óra mulva ama positiv elektromosság, mely r_0 távolban, a henger felületén mozgott, most a tengelytől csak $(1 : 2{\cdot}7)\ r_0$ távolban lesz, tehát a keresztmetszet, melyen keresztűl még mozgás történhetik, a vezetőnek csak hetedrésze. Miután λ_1 és λ_2 időbeli állandók, a galván folyam intenzitása is csak hetedére apadt. Ámde e következtetés egyenes ellentétben áll a tapasztalással, mert hosszú távirda sodronyokon ömlő folyam intenzitása ily rövid időközben közel állandó, s azt nem tételezhetjük fel, hogy a vezetőkben végtelen mennyiségű elektromosság újra meg újra előállítható. Midőn x'_{+i} és x'_{-i} sebességeket rendkivűl csekélyeknek veszszük, az említett hatás csak igen hosszú idő lefolyta után fog beállani.

Ez egyszerű példa tehát világosan szól a mellett, hogy ha a távolba hatás törvényeiből egyedül akarjuk magyarázni a galván állandó áramlást, ez csak akkor lehetséges, ha ily áramokban igen nagy mennyiségű elektromosságok rendkivűl csekély sebességgel mozognak. ***)

---

*) Pogg. Ann. LXXVII.

**) Elektrod. Maasbestimmungen etc.

***) E következtetés teljesen megegyezik a *Hall* és *Boltzmann* és Ettingshausen által a legujabb időben tett észlelésekkel.

Eddig külön megjelent

ÉRTEKEZÉSEK

a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet.

I. Szily Kálmán. A mechanikai hő-elmélet egyenleteinek általános alakjáról. Székfoglaló . . . . 10 kr.
II. Hunyady Jenő. A pólus és a polárok. A viszonyos polárok elve 20 kr.
III. Vész János A. Biztositási kölcsön (új életbiztositási nem) . . 20 kr.
IV. Kruspér István. A Schwerdt-féle Comparator módositott alkalmazása 10 kr.
V. Vész János A. Legrövidebb távolok a körkúpon. Székfoglaló . 10 kr.
VI. Tóth Ágoston. Az európai nemzetközi fokmérés és a körébe tartozó goedaetai munkálatok . . . . 20 kr.
VII. Kruspér István. A párisi meter-prototyp . . . . 10 kr.
VIII. König Gyula. Az elliptikai függvények alkalmazásáról a magasabb foku egyenletek elméletére . . . . 20 kr.
IX. Murmann Ágost. Európa bólygó elemei, annak tiz első észlelt szembenállása szerint . . . . 20 kr.
X. Szily Kálmán. A Hamilton-féle elv és a mechanikai hő-elmélet második fő tétele . . . . 10 kr.
XI. Tóth Ágoston. A földképkészités jelen állása, a mint az képviselve volt az antwerpeni kiállitáson. Két táblával . . . . 20 kr.

Második kötet.

I. Murmann Ágost. Freia bolygó feletti értekezés . . . . 30 kr.
II. Kruspér István. A comparatorokról . . . . 10 kr.
III. Kruspér István. A vonásos hosszmértékek összehasonlitása folyadékban . . . . 10 kr.
IV. Feszt V. A közlekedési müvek és vonalok . . . . 20 kr.
V. Murman A. Az 1861. nagy üstökös pályájának meghatározása 20 kr.
VI. Kruspér J. A párisi levéltári méter-rúd . . . . 10 kr.

Harmadik kötet.

I. Vész János Ármin. Adalék a visszafutó sorok elméletéhez. . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Az ó-gyallai csillagda leirása s abban történt napfoltok észlelése néhány spectroscopicus észlelés töredékeivel. 1872. és 1873. Három táblával. . . . . 40 kr.
III. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Herschel János k. tag fölött . 10 kr.
IV. B. Eötvös Loránd. A rezgések intenzitása, tekintettel a rezgés forrásnak és az észlelőnek mozgására . . . . 10 kr.
V. Réthy Mór. A Diffractio elméletéhez . . . . . . 12 kr.
VI. Martin Lajos. Az erőműtani csavarfelületek. — A vízszintes szélkerék elmélete. Két értekezés . . . . 1 frt
VII. Réthy Mór. A kerületre redukálható felület-egészletek elméletéhez 15 kr.
VIII. Galgóczy Károly. Emlékbeszéd Vállas Antal k. tag felett. 10 kr.

Negyedik kötet.

I. Schulhof Lipót. Az 1870. IV. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása 10 kr.
II. Schulhof Lipót. Az 1871. II. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása. 10 kr.
III. Szily Kálmán. A hő elmélet második főtétele, levezetve az elsőből 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. Csillagászati megfigyeléseim 1874 és 1875-ben. 50 kr.

V. Konkoly Miklós. Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagdában 40 kr.
VI. Hunyadi Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól . . . . 20 kr.
VII. Réthy Mór. A három méretü homogén tér (u. n. nem euklidikus) siktan. trigonometriája . . . . 20 kr.
VIII. Réthy Mór. A propeller és peripeller felületek elméletéhez. . 30 kr.
IX. Fest Vilmos. Temesi Reitter Ferencz emléke . . . . . 10 kr.

Ötödik kötet.

I. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Nagy Károly r. tag felett . . 10 kr.
II. Kenessey Albert. Adatok folyóink vizrajzi ismeretéhez . . 20 kr.
III. Dr. Hoitsy Pál. Csillag-észlelés a kelet-nyugot vonalban (egy számtáblával.) . . . . 30 kr.
IV. Hunyady Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól. (Folytatás a IV. kötetben ugyane czim alatt megjelent értekezésnek.) . . . . 10 kr.
V. Hunyady Jenő. Apollonius feladata a gömbfelületen . . . 10 kr.
VI. Dr. Gruber Lajos. 24 η Cassiopeiae kettős csillag mozgásáról . 10 kr.
VII. Martin Lajos. A változtatási hánylat alkalmazása a propeller-fölület egyenletének lefejtésére. . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. A teljes holdfogyatkozás 1877. február 27-én és az 1877. (Borelli) I. számu üstökös szinképének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
IX. Konkoly Miklós. A napfoltok s a nap felületének kinézése 1876-ban (három képtáblával.) . . . . 40 kr.
X. Konkoly Miklós. 160 álló csillag szinképe. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1876-ban . . . . 20 kr.

Hatodik kötet.

I. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. I. rész. 1871—1873. Ára . . . . 20 kr.
II. Konkoly Miklós. Hullo csillagok megfigyelése a magyar korona területén, II. rész. 1874—1876. Ára . . . . 20 kr.
III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámitása. Közlik dr. Gruber Lajos és Kurländer Ignácz kir. observatorok. 10 kr.
IV. Schenzl Guido. Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. . . . . 20 kr.
V. Gruber Lajos. A november-havi hullócsillagokról . . . . 20 kr.
VI. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára . . . . 20 kr.
VII. Konkoly Miklós. A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. Mercur átvonulása a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án . . . . 10 kr.

Hetedik kötet.

I. Konkoly Miklós. Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositió után. Egy táblával. . . . . . . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr.
III. Konkoly Miklós. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban. IV. rész. Ára . . . . 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. A nap felületének megfigyelése 1878-ban az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
VI. Hunyady Jenő. A Möbius-féle kritériumokról a kúpszeletek elméletében . . . . 10 kr.
VII. Konkoly Miklós. Spectroscopicus megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón . . . . 10 kr.
VIII. Dr. Weinek László. Az instrumentális fényhajlás szerepe egy Vénus-átvonulás photographiai felvételénél . . . . . . 20 kr.

Budapest, 1881. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.