th. O.
24.
8.

Digitalizálta

a Magyar Tudományos Akadémia Könyvtár

és Információs Központ

MTAK 1826

ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI
SZABÓ JÓZSEF
OSZTÁLYTITKÁR.

VIII. KÖTET. X. SZÁM. 1881.

A HAMILTON-FÉLE RENDSZEREK ÉS AZ ELSŐRENDŰ PARCZIÁLIS DIFFERENCZIÁLEGYENLETEK ÁLTALÁNOS ELMÉLETE.

SZÉKFOGLALÓ ÉRTEKEZÉS

KŐNIG GYULA
L. TAGTÓL.

Ára 50 kr.

HIVATAL M. T. AKADÉMIA ELDAN

BUDAPEST, 1881.
A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.
(Az akadémia épületében.)

A

HAMILTON-FÉLE RENDSZEREK

ÉS AZ

ELSŐRENDŰ PARCZIÁLIS DIFFERENCZIÁLEGYENLETEK

ÁLTALÁNOS ELMÉLETE.

SZÉKFOGLALÓ ÉRTEKEZÉS

KŐNIG GYULA

L. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén 1880. decz. 13-án.)

BUDAPEST, 1881.

A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

(Az Akadémia épületében.)

Budapest, 1881. Az „Athenaeum" r. t. könyvnyomdája.

A Hamilton-féle rendszerek és az elsőrendű parcziális differencziál-egyenletek általános elmélete.

A magyar tud. akadémia utolsó nagygyülése alkalmával, elnézéssel birálva eddigi működésemet, fölvett levelező tagjai sorába. Engedje meg a t. akadémia, hogy midőn e kitüntetésért hálás köszönetet mondok, egyszersmind élve a reám ruházott joggal, egy szaktárgyam körébe vágó dolgozatomat e helyen előterjeszszem.

E dolgozat a Hamilton-féle rendszerek és az általános elsőrendű parcziális differencziál-egyenlet integráczióját tárgyalja, még pedig az integráczió folyamatára vonatkozó részek rendszeres áttekintését adja. Az ilyen — az előzményeket is magában foglaló — monographia alakját választottam, a helyett, hogy csupán saját vizsgálataimat, az eddigi szakirodalom teljes ismerete nélkül meg nem érthető töredékekben foglalnám össze. Mentsen ki ama körülmény, hogy az általam bevezetett módszerek alapján a tárgyalásnak lényeges egyszerűsítése történik, és így csak nehány oldal hozzátoldására volt szükségem, midőn az elméletet olyan fogalmazásban kivántam kifejteni, mely a differencziál és integrálszámítási kézikönyvekben foglaltatni szokott anyagon kivül más előzményeket nem követel. Szemben az eddig szükségelt terjedelmes segédelméletekkel, az ily egyszerüsítés — mellőzve az új eredményeket — magában is nem csekély jelentőségű, midőn az analysis oly fontos fejezetéről van szó, mely — hogy példát említsek — magában foglalja mindazon dynamikai problémákat, melyekre nézve érvényes a Hamilton-féle elv, valamint minden egyszerű integrál variácziójára vonatkozó föladatot, melyben a variálandó függvények száma tetszőleges, de az elsőnél magasabb differencziálhányadosaik nem foglaltatnak.

Bevezetésül az *első fejezetben* a *quadraturák* föladatát, vagy más szóval az ú. n. teljes differencziálok integráczióját tárgyalom, nem annyira azért, mert e rég ismeretes dolgok a tárgyalandó általános feladatok legegyszerűbb speciális esetét adják, hanem leginkább, hogy a később folyton alkalmazandó módszereket lehető egyszerű példán bemutathassam. Amaz új elv, melynek alkalmazása az értekezésben folyton ismétlődik, általános fogalmazásban a következő:

Ha egy és ugyanazon függvény meghatározására több parcziális differencziál-egyenletünk van, és ezek az egyenletek egyáltalában lehetségesek együtt, akkor az összes egyenletek — az első kivételével — csak a függvény kezdőértékét szoritják meg; és az első egyenlet minden integrálja, melyben a kezdőértéket e megszoritásnak megfelelőleg választottuk, integrálja egyszersmind az egész rendszernek.

Ugyanez az elv a *második fejezetben* a Mayer által először bevezetett ú. n. *föltétlenül integrálható rendszereknek* megoldására szolgáltat új és egyszerű eljárást. E rendszerek tulajdonképen az elsőrendű totál differencziálegyenlet rendszereknek egy egész sorozatából állanak, melyekben a meghatározandó függvények több független változót tartalmaznak, még pedig úgy, hogy minden egyes differencziálegyenlet-rendszerben csak egy-egy szerint történik differencziálás, míg a többiek csak mint parameterek szerepelnek.

A *harmadik fejezet* most már a *Hamilton-féle rendszerek teljes integráczióját* adja. Ismeretes, hogy e probléma megoldására direkt módszer eddig nem volt, hanem a Hamilton-féle rendszer megoldása egy parcziális differencziál-egyenletétől tétetett függővé. Az itt elért eredmények részletes elemzésére vonatkozólag az értekezés szövegére utalva, itt csak anynyit jegyzek még meg, hogy evvel együtt az általános elsőrendű parcziális differencziál-egyenlet integráczlójára is új módszert nyertünk, mely a legegyszerűbb Mayer és Lie-félékkel egyenlő számú alapoperácziót követel.

A *negyedik fejezetben* mindenekelőtt a Jacobi-Hamilton-féle elméletet adom elő, Mayer módosításaitól csak néhány alárendelt pontban eltérve. Ez elmélet tudvalevőleg a Hamilton-féle rendszer és az általános elsőrendű parcziális differencziál-egyenlet ama kapcsolatát adja, mely szerint az egyik probléma megoldásából teljesen végezhető műveletek segítségével a másikat nyerhetni. — Ebből az elméletből azután új következtetéseket vonok, melyek szerint az adott egyenletek alakjából láthatni, hogy mikor redukálható a Hamilton-féle rendszer integrácziója alsóbb rendű problémára, vagy a mi — csak más fogalmazásban — ugyanaz a kérdés, mikor nyerhető egy parcziális differencziál-egyenlet integrácziója egy másikéból, melynek az eredetinél egyszerűbb alkata van.

Az *ötödik fejezet* végre az *elsőrendű parcziális differencziál-egyenletek simultán rendszerét* tárgyalja.

Ily módon e dolgozat az ide tartozó alakok integrácziójára vonatkozólag a teljes eredményeket adja; más alkalommal a tárgyalást azonban még más szempontból folytatni szándékozom. A megfejtendő kérdés itt a Hamilton-féle rendszer első integráljainak kapcsolata lesz, a minőnek egy esete p. a dynamikában szereplő Jacobi-Poissonféle tétel. Az ide vonatkozó módszerek alapgondolatát a harmadik fejezet végén már jellemeztem.

I.

TISZTA QUADRATURÁK.

I. — A legegyszerübb probléma a differencziál-egyenletek elméletében valamely n változót tartalmazó függvény meghatározását követeli, midőn e függvény differencziálhányadosai a különböző változók szerint adva vannak. E probléma megoldása rég ismeretes és tudvalevőleg csak közönséges integrácziók kivitelét kivánja, ellentétben az általánosabb differencziálegyenletekkel, melyeknek megoldása csak ujonnan értelmezendő operácziók segitségével eszközölhető. Ha itt ezt az ismeretes problémát újból tárgyalom, ez csak azért történik, hogy a következőkben folyton használandó új módszert először egyszerűbb példán lehető világosan bemutassam.

Legyen tehát z az ismeretlen függvény, $x_1, x_2, \ldots x_n$ az n független változó, végre $X_1, X_2, \ldots, X_n$ az $x_1 \ldots x_n$ bizonyos adott függvényei; akkor problémánk abból áll, hogy a

$$\begin{gathered} \frac{\partial z}{\partial x_1} = X_1, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = X_2, \ldots \\ \ldots \frac{\partial z}{\partial x_i} = X_i, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_k} = X_k, \ldots \\ \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n} = X_n \end{gathered} \tag{1.}$$

adatokból a z függvényt meghatározzuk. A probléma, mint ismeretes, nem mindig lehetséges, hanem csak, ha — a mint ezt kifejezni szokásos — az $X_1, \ldots X_n$ az *integrabilitás föltételeit* kielégítik. Ha ugyanis p. a második sorban álló egyenletek közül az elsőt x_k, a másodikat x_i szerint differencziáljuk, a $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}$ két különböző kifejezését nyerjük, mely egyenlő tartozik lenni. Minthogy i és k két tetszőleges számot jelenthetnek az 1, 2, ... n sorozatból, ez mindössze $\frac{n(n-1)}{2}$ föltételt ád. E föltételek közös alakja:

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}; \qquad (2.)$$
$$(i, k = 1, 2, 3, \ldots n).$$

E föltételek a probléma lehetőségére *szükségesek*; de egyszersmind *elegendők* is, azaz, ha e föltételek ki vannak elégítve, mindig lehet oly z függvényt találni, minőt a föladat követel. Ennek bebizonyitása egyszerűen az által történik, hogy ekkor a z-t valóban kiszámitjuk.

Áttérünk e kiszámításra, még pedig először a legegyszerűbb esetben, ha a változók száma kettő.

Két független változó esete.

2. — Legyen most adva a következő két egyenlet:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = X_1, \frac{\partial z}{\partial x_2} = X_2;$$

ekkor csak egy integrabilitási föltételhez van kötve a föladat lehetősége és ez:

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2} = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}.$$

Ha csak az első egyenlet volna kielégitendő, akkor a megfelelő z-értéket tüstént fölirhatnók és ez lenne:

$$z = \int_{x_1^0}^{x_1} X_1 \, \partial x_1 + \varphi(x_2)$$

hol $\varphi(x_2)$ nem egyéb, mint a z-nek szabadon választható, ú. n. kezdő értéke, azaz a melyet nyer, ha benne x_1 helyébe a kiinduló pontúl választott, különben tetszőleges x_1^0 számértéket teszszük. A második egyenlet miatt azonban a $\varphi(x_2)$ többé nem választható szabadon; a megszoritás módja meghatározható az által, hogy ebben x_1 helyébe a kezdő értéket x_1^0-ot teszszük, és e helyettesitést X_2-ben az által jelöljük, hogy ehhez az x_1 mutatóját, az 1-et fölül hozzá illesztjük. Lesz ez által:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=X_2^{(1)}$$

vagyis

$$\varphi=\int_{x_2^0}^{x_2} X_2^{(1)}\,\partial x_2+C$$

A φ e meghatározása azonban még nem volna elégséges, mert hiszen a második egyenlet csak akkor volna kielégítve, ha x_1 helyébe a kezdőérték x_1^0 jön; de teljes lesz, hogyha kimutatjuk, hogy

$$\frac{\partial z}{\partial x_2}-X_2$$

az x_1 változása mellett nem is változtatja értékét; ha tehát $x_1=x_1^0$-nál eltünik, mindig 0 marad. Ezt bebizonyítjuk, ha x_1 szerint differencziálunk, és a differencziálhányadosról kimutatjuk, hogy zérus. Ez pedig valóban:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2}-\frac{\partial X_2}{\partial x_1}=o$$

ha csak z az első differencziál-egyenletnek tesz eleget és az integrabilitási föltétel ki van elégítve.

E szerint a probléma megoldását a következő alakban nyerjük:

$$z=\int_{x_1^0}^{x_1} X_1\,\partial x_1+\int_{x_2^0}^{x_2'} X_2^{(1}\,\partial x_2+C$$

3. — A z-re nyert alak itt még két egyszerű integrácziót követel. — Nem találom sehol föltüntetve, hogy ebből egyszerűen a változók transformácziója által *oly alakra térhetünk, melyben csak egy integráczió kivántatik.*

Ha X_2 oly speczialis alakú, hogy az $x_1=x_1^0$ helyettesités $X_2^{(1)}=0$-t adna, a második integrál elesik, és z egy integrál által van adva.

Más szóval, ez akkor történik, ha a z kezdő értékének $x_1=x_1^0$ mellett az x_2-től is független állandót választhatok.

Ezt mindig el lehet érni, ha az x_2 helyett a következő egyenlet segítségével:

$$x_2 - x_2^0 = (x_1 - x_1^0)\, y_2$$

uj változót vezetünk be, hol x_1^0 és x_2^0 tetszőleges számértékek. A transformácziónál szem előtt kell tartani, hogy y_2 az x_1-et és x_2-őt is tartalmazza.

Legyen z-nek a transformáczió által nyert alakja u, akkor:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}.$$

Minthogy pedig: $$\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = -\frac{x_2 - x_2^0}{(x_1 - x_1^0)^2},$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \frac{1}{x_1 - x_1^0},$$

továbbá lesz, ha még $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ és $\frac{\partial z}{\partial x_2}$ értékeit is behelyettesítjük, ezekben a transformácziót bevégzettnek tekintve:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial y_2}\frac{x_2 - x_2^0}{(x_1 - x_1^0)^2} = X_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_2} = (x_1 - x_1^0)\, X_2;$$

azaz végre az u parcziális differencziálhányadosai:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = X_1 + y_2 X_2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = (x_1 - x_1^0)\, X_2,$$

és ebből valóban u-t *egy integrál* segitségével lehet kifejezni:

$$u = \int_{x_1^0}^{x_1} (X_1 + y_2 X_2)\, \partial x_1 + C;$$

mert $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ eltünik, ha benne az $x_1 = x_1^0$ helyettesítést végezzük.

4. — Az x_1^0 és x_2^0 szabadon választható számértékek; ezeket egyes problémában valóban adott számoknak, hacsak lehet 0-nak fogjuk venni. »Ha csak lehet« — ugy mondom, mert a szabad választást egy körülmény mégis megszorítja, melyet csak teljesség kedveért említek még, ámbár a dolog mint mindenütt, hol függvény határozott integrál alakjában lesz fölirva, magától értendő.

Nem vehetők ugyanis azok az x_1^0 és x_2^0 értékek, melyek X_1 vagy X_2-be helyettesítve, végtelent adnak: mert akkor oly értékek ezek, melyekre nézve z is végtelen lesz. — Természetes, hogy midőn z-t határozott egészlet által akarjuk kifejezni, ezektől nem szabad kiindúlni, mert ezek az egyetlen pontok, melyekben z különben tetszőleges kezdőértéke korlátozva van.

Három és több változó esete.

5. — Ha a meghatározandó függvény több, mint két változót tartalmaz, az előadott módszer e számot n-ről n—1-re redukálja s igy most is a függvény végalakját szolgáltatja.

A probléma most egész általánosságban az 1.) alatti egyenletrendszer által van jellemezve. Ismét szükséges, hogy z mindenekelőtt eleget tegyen az első egyenletnek.

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = X_1,$$

és ebből z számára a következő alakot nyerjük:

$$z = \int_{x_1^0}^{x_1} X_1 \, \partial x_1 + \varphi \, (x_2. \, x_3, \ldots, x_n)$$

Ha *csak* az első egyenlet volna kielégítendő, akkor a φ alakja egész tetszőleges maradhatna; de igy a következő egyenletek erre vonatkozólag új megszorításokat adnak. Mindenek előtt szükséges, hogy ezek az egyenletek fönnálljanak, ha x_1 helyébe x_1^0-ot teszünk. Ismét ki fog tünni, hogy a φ-nek ily módon történt megszorítása elégséges is. Ha x_1 helyébe x_1^0 jő, a z-ből ismét elesik az első tag, mely az integrál jelét tartalmazza, és a φ meghatározására a következő egyenleteket nyerjük:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = X_2^{(1)}$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = X_3^{(1)} \qquad (3.)$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = X_n^{(1)}$$

ha az X mellé rakott felső index, az 1 megint jelenti, hogy x_1 helyébe x_1^0, a kezdő érték teendő.

Más oldalról, *a φ e meghatározása elégséges is,* ha ugyanis p.

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = X_i$$

az x_1 egy értékénél eltünik, akkor az x_1 minden értékénél 0 lesz; föltéve ugyanis, hogy az X-ek az integrabilitás föltételeinek eleget tesznek. Akkor ugyanis e kifejezés differencziálhányadosa x_1 szerint

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \, \partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_1}$$

mindig zérus lesz, mert z az első egyenlet szerint

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \, \partial x_i} = \frac{\partial X_1}{\partial x_i}$$

és ez az integrabilitási föltétel értelmében egyenlő a levonandó $\frac{\partial X_i}{\partial x_1}$-el.

Most már csak a φ-t kell a 3. alatti rendszerből meghatározni; ez ép olyan természetű probléma, mint az eredeti, (1.), csakhogy benne a független változók száma egygyel alábbszállt. Lesz tehát ismét az első egyenletből:

$$\varphi = \int_{x_2^0}^{x_2} X_2^{(1)} \, \partial x_2 + \psi(x_3, \ldots, x_n).$$

A többi egyenlet a már is bebizonyított és alkalmazott elv alapján csak a ψ, a φ *kezdő értékének* meghatározására szolgálnak és szabad bennük x_2 helyébe az előbb említett korlátok közt tetszőleges x_2^0 számértéket tenni. De ez által φ-ből ψ lesz és igy ezek az egyenletek

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_3} = X_3^{(2)},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_4} = X_4^{(2)},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_n} = X_n^{(2)}$$

hol az X-ek mellé tett fölső index, a 2 azt jelenti, hogy az első két változó x_1 és x_2 helyébe a tetszőleges x_1^0 és x_2^0 kezdő értékek jutottak. Igy most megint

$$\psi = \int_{x_3^0}^{x_3} X_3^{(2)}\,\partial x_3 + X(x_4 \ldots x_n).$$

Igy lejutunk végre oly integráczióig, melyben az integrálás változóján kivül más változó elem már nincsen, a függvény tetszőleges kezdőértéke egyszerűen tetszőleges állandó. De evvel a keresett z függvényre nézve a kész végképletet nyertük és ez:

$$z = \int_{x_1^0}^{x_1} X_1\,\partial x_1 + \int_{x_2^0}^{x_2} X_2^{(1)}\partial x_2 + \int_{x_3^0}^{x_3} X_3^{(2)}\,\partial x_3 + \ldots\ldots \tag{4.}$$

$$\ldots + \int_{x_{n-1}^0}^{x_{n-1}} X_{n-1}^{(n-2)}\,\partial x_{n-1} + \int_{x_n^0}^{x_n} X_n^{(n-1)}\,\partial x_n + C.$$

hol $X_k^{(k-1)}$ általánosságban azt az értéket jelenti, mely X_k-ból keletkezik, ha benne az $x_1, \ldots . x_{k-1}$-t fölcseréljük e változók kezdőértékeivel az $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0$ számértékekkel.

6. — Ezen az ismeretes alakon azonban ismét lényeges egyszerüsítést végezhetünk. T. i. épen úgy, mint az előbb tárgyalt egyszerűbb esetben a változók transformácziója által elérhetjük, hogy *az itt követelt, számra nézve n integráczió helyett csak egyet kell végezni.*

Ez megtörténik, ha $X_2, X_3, \ldots X_n$ mind olyan függvény, hogy az $x_1 = x_1^0$ helyettesítés mellett eltünik; ebben a speciális esetben minden integrál az első kivételével 0 és egyszerűen:

$$z = \int_{x_1^0}^{x_1} X_1 \,\partial x_1 + C.$$

Ez ismét annyit jelent, hogy a z függvény kezdőértékét ($x_1 = x_1^0$ mellett), melyet a 2-ik ... n-edik egyenlet tetszőleges voltában megszorít, szabad az $x_2, \ldots, x_n$-től független állandónak venni.

Ezt mindig el lehet érni, ha a következő transformáczió segítségével

$$\begin{aligned}
x_2 - x_2^0 &= (x_1 - x_1^0)\, y_2,\\
x_3 - x_3^0 &= (x_1 - x_1^0)\, y_3,\\
&\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\\
x_n - x_n^0 &= (x_1 - x_1^0)\, y_n,
\end{aligned}$$

az $x_2 \ldots x_n$ változókat $y_2 \ldots y_n$-nel fölcseréljük.

Legyen z-nek e transformáczió által nyert alakja u, akkor tekintetbe véve, hogy $y_2, y_3, \ldots$ mostan x_2 és x_1-et, x_3 és x_1-et s u. t. tartalmazza, lesz:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = \frac{\partial u}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_n}$$

Minthogy pedig:

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = -\frac{x_2 - x_2^0}{(x_1 - x_1^0)^2}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \frac{1}{x_1 - x_1^0},$$

$$\frac{\partial y_3}{\partial x_1} = -\frac{x_3 - x_3^0}{(x_1 - x_1^0)^2}, \quad \frac{\partial y_3}{\partial x_3} = \frac{1}{x_1 - x_1^0},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

végre, ha a $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots$ értékeit is helyettesítjük, ezekben a transformácziót elvégzettnek tekintve, az u parcziális differencziálhányadosai számára a következőket nyerjük:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = X_1 + y_2 X_2 + y_3 X_3 + \ldots + y_n X_n,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_2} = (x_1 - x_1^0) X_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_n} = (x_1 - x_1^0) X_n,$$

és ebből most már *egy egyetlen integrál segítségével fejezhető ki* az u függvény:

$$u = \int_{x_1^0}^{x_1} (X_1 + y_2 X_2 + \ldots + y_n X_n)\, \partial x_1 + C,$$

a kiszámított u-ból pedig, visszafelé végezve a transformácziót, ismét visszatérünk z-hez.

II.

FÖLTÉTLENÜL INTEGRÁLHATÓ DIFFERENCZIÁLEGYENLET-RENDSZEREK.

I. — A megelőző fejezetben tárgyalt probléma általánosításával van dolgunk, ha föltételezzük, hogy az ismeretlen függvény parcziális differencziálhányadosainak kifejezésében nemcsak a független változók sora, hanem maga az ismeretlen függvény is föllép. E föladat csak a fogalmazásban különbözik az ú. n. több változót tartalmazó totál differencziálegyenletek integrácziójának kérdésétől.*) A megoldás pontosan az előbbi fejezetben kifejtett gondolatmenet alapján történhetik, csakhogy a szorosabb értelemben vett integráczió (quadratura) helyébe mindenkor elsőrendű közönséges differencziálegyenlet integrácziója lép. Hogy itt is bizonyos transformácziók kivitele után mindenkor csak egy integráczió végzendő, azt *Du Bois-Reymond* mutatta ki először. (Crelle-féle Journal, 70. köt. p. 312.)

A helyett, hogy azonban e rendszereket külön tárgyalnók, mindjárt egy lépéssel tovább mehetünk az általánositásban az által, hogy az ismeretlen függvények számát is tetszőlegesen nagyobbítjuk. Ekkor az ú. n. föltétlenűl integrálható differencziálegyenlet-rendszereket nyerjük, melyeknek első tárgyalása *A. Mayer*-től való. (Math. Annalen, V. köt. p. 446.)

---

*) E »totál differencziálegyenlet« :

$$dz = Pdx + Qdy$$

csak rövidített kifejezése annak, hogy :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P, \frac{\partial z}{\partial y} = Q.$$

Ugyanazon elv, melyet az előbbi fejezetben követtünk, e rendszereknél is fölötte rövid és átnézetes úton vezet a végeredményekhez.

Legyenek tehát:

$$z_1, z_2, \ldots z_m$$

az ismeretlen függvények; továbbá

$$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$$

a független változók, végre:

$$X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{m1}; X_{12}, \ldots X_{m2}; \ldots . X_{mn}$$

a z-k és x-ek bizonyos adott függvényei, akkor a tárgyalandó rendszerek általános alakja:

$$\begin{array}{l}
\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = X_{11}, \frac{\partial z_2}{\partial x_1} = X_{21}, \ldots, \frac{\partial z_m}{\partial x_1} = X_{m1}, \\
\frac{\partial z_1}{\partial x_2} = X_{12}, \frac{\partial z_2}{\partial x_2} = X_{22}, \ldots, \frac{\partial z_m}{\partial x_2} = X_{m2}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial z_1}{\partial x_n} = X_{1n}, \frac{\partial z_2}{\partial x_n} = X_{2n}, \ldots, \frac{\partial z_m}{\partial x_n} = X_{mn},
\end{array} \qquad (1.)$$

vagyis összevont alakban:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = X_{ik}; \begin{pmatrix} i = 1, 2, .., m-1, m \\ k = 1, 2, \ldots, n-1, n \end{pmatrix}$$

Itt is közvetetlenül látni, hogy a probléma nem mindig lehetséges, hanem csak akkor, midőn az X-ek bizonyos *integrabilitási föltételeket* kielégítenek. Ha t. i. két ugyanazon z-re vonatkozó egyenletet veszünk, p.

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = X_{ik}, \frac{\partial z_i}{\partial x_l} = X_{il},$$

akkor, minthogy X_{ik} és X_{il} ugyanegy függvénynek két különböző független változó szerint vett differencziálhányadosai, kell, hogy legyen: *)

$$\frac{dX_{ik}}{dx_l} = \frac{dX_{il}}{dx_k}, \qquad (2.)$$

A föltételek száma, állandó i mellett, minthogy k és l minden értéket fölvehet 1-től $+n$-ig, $\frac{n(n-1)}{2}$; és így, minthogy i

*) Egyenes d-t irunk e föltételekben, emlékeztetőül arra, hogy az X-ekben előforduló z-k is az x-ek függvényei, és igy a differencziálás ebben a tekintetben teljesnek tekintendő.

maga 1-től m-ig mehet, az ily módon nyert *integrabilitási föltételek száma :*

$$\frac{mn\,(n-1)}{2}.$$

E föltételek levezetése eddig csak azt mutatja, hogy *szükségesek*; hogy e föltételek egyszersmind a probléma megfejtésére *elégségesek*, azt a számítás menete, mely a z függvényeket valóban megadja, maga mutatja.

Ha tekintetbe veszszük, hogy az X-ek a független változókat nemcsak explicite tartalmazzák, hanem implicite a z-kben is, akkor a 2.) alatti föltételek részletesebben igy irhatók:

$$\frac{\partial X_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial X_{ik}}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_l} + \frac{\partial X_{ik}}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial x_l} + \ldots + \frac{\partial X_{ik}}{\partial z_m}\frac{\partial z_m}{\partial x_l} =$$

$$= \frac{\partial X_{il}}{\partial x_k} + \frac{\partial X_{il}}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_k} + \frac{\partial X_{il}}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial X_{il}}{\partial z_m}\frac{\partial z_m}{\partial x_k},$$

vagy, ha a z-k differencziálhányadosainak értékeit ismét az eredeti rendszerből veszszük és rövidség kedveért összegezési jelt használunk:

$$\frac{\partial X_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial X_{il}}{\partial x_k} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=m}\left(\frac{\partial X_{ik}}{\partial z_\varrho} X_{\varrho l} - \frac{\partial X_{il}}{\partial z_\varrho} X_{\varrho k}\right) = 0. \qquad (3.)$$

2. — A legegyszerűbb eset és egyszersmind az, melyre az általános problémát mindig vissza lehet vezetni az, melyben csak egy független változó fordul elő. — Ekkor az 1.) alatti általános alakból csak az első sor marad meg és a föladat közönséges elsőrendű differencziálegyenlet-rendszer integráczióját kivánja, melynek elméletét e tárgyalásnál már befejezettnek kell tekintenünk.

E föladat csak az által lesz teljesen meghatározottá, hogy a meghatározandó függvényeknek *kezdőértékeit* — különben egészen tetszőleges módon — megállapitjuk, azaz meghatározzuk, hogy midőn

$$x_1 = x_1^0,$$

a z-k értékei:

$$z_1 = z_1^0,\ z_2 = z_2^0, \ldots, z_m = z_m^0$$

legyenek.

Az 1.) által adott általános esetekben is a megoldást azzal kezdhetjük, hogy az első sorban álló egyenleteknek megfelelő z-függvényeket keresünk; ekkor azonban $x_2, \ldots x_n$ tetszőleges parameterek, és a kezdőértékek legáltalánosabb választása az lesz, hogy $z_1^0, \ldots z_m^0$ alatt az $x_2 \ldots x_n$ tetszőleges függvényeit értjük.

Ha azonban azt akarjuk, hogy a nyert függvények a második sorban és utána álló egyenleteket is kielégítsék, akkor a $z_1^0 \ldots z_m^0$ e szabad választása korlátozva lesz. Nagyon könnyű lesz, a $z_1^0 \ldots z_m^0$ választásánál tekintetbe veendő szükséges föltételeket nyerni, és e föltételekről utólagosan kimutatni, hogy elégségesek is, azaz olyanok, melyeknek megállapitása után a legáltalánosabb függvényeket nyerjük, melyek az egész rendszernek eleget tesznek.

A második sorban és később az x_1 ugyanis csak mint parameter fordúl elő; ezek az egyenletek tehát helyesek maradnak, ha mindenütt x_1 helyébe x_1^0-ot, és megfelelőleg z_1 helyébe z_1^0-ot teszünk s u. t. E helyettesités után a második sorban és ezután álló egyenletek a következő alakba mennek át:

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial z_1^0}{\partial x_2} = X_{12}^0, \ \dfrac{\partial z_2^0}{\partial x_2} = X_{22}^0, \ldots, \dfrac{\partial z_m^0}{\partial x_2} = X_{m2}^0; \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \dfrac{dz_1^0}{\partial x_n} = X_{1n}^0, \ \dfrac{\partial z_2^0}{\partial x_n} = X_{2n}^0, \ldots, \dfrac{\partial z_m^0}{\partial x_n} = X_{mn}^0, \end{array} \qquad (4.)$$

ha t. i. az x-ek és z-k kezdőértékeinek helyettesítését az X-eknél is egy zérus, mint mutató hozzácsatolása által jelöljük. Az egyenletekben az x_1^0 helyettesítését és az $x_2, x_3 \ldots$ szerinti differencziálást megfordított sorrendben végzendőnek irtuk; de könnyű belátni, hogy a sorrend e változtatása nincs befolyással a nyerendő eredményre, mert hiszen x_1-et a differencziálás alatt állandónak tekintjük.

E szerint a teljes rendszer megoldásai csak az első sor által adott differencziálegyenletrendszer oly megoldásai lehetnek, melyekben a kezdő értékek a 4.) alatti egyenleteket kielégítik. *Megfordítva, minden ily módon nyert csoportja a* *z-értékeknek valóban kielégíti az egész 1.) alatti rendszert.* Ez az első sorban álló egyenletekre nézve magától világos. Legyen valamely más egyenlet

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} - X_{ik} = 0\,;$$

akkor — követve az előbbi fejezetben alkalmazott gondolatmenetet — az itt a baloldalon álló kifejezésről kimutatjuk, hogy x_1 szerint vett differencziálhányadosa zérus, hogy tehát értéke x_1-től egyáltalában független. Ha tehát e kifejezés zérus, midőn $x_1 = x_1^0$, akkor mindig egyenlő zérussal. Az $x_1 = x_1^0$ helyettesítés pedig átviszi az egyenletet a 4.) alatti rendszer megfelelő egyenletébe, mely, minthogy a z-k kezdő értékét épen ezekből találtuk, valóban ki van elégítve.

Ha most már a kérdéses kifejezést x_1 szerint differencziáljuk, lesz:

$$\frac{\partial^2 z_i}{\partial x_1\, \partial x_k} - \frac{d\, X_{ik}}{dx_1}$$

mely, minthogy

$$\frac{\partial^2 z_i}{\partial x_1\, \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial z_i}{\partial x_1}\right) = \frac{dX_{i1}}{dx_k}$$

átmegy ebbe:

$$\frac{dX_{i1}}{dx_k} - \frac{dX_{ik}}{dx_1},$$

és ez a 2.) alatti integrabilitási föltétel értelmében valóban eltünik.

E szerint az 1.) alatti rendszer megoldásánál követendő ljárás egyelőre a következő: *Meghatározzuk először a (4.) alatti rendszerből a z-k megfelelö kezdö értékeit, mint az* $x_2 \ldots x_n$ *függvényeit; megoldjuk azután az eredeti rendszer első sora által adott közönséges differencziálegyenletrendszert és végül meghatározzuk az ebben nyert tetszőleges állandókat az előbb nyert kezdőértékek által kifejezett föltételek szerint.*

A (4.) alatti rendszer, melynek tárgyalására tulajdonképen visszavezettük a föladatot, az eredeti rendszerhez teljesen hasonló differencziálegyenletcsoport, melyben azonban *a független változók száma egygyel kisebb.* Kérdezni lehetne még, vajjon e rendszer kielégíti-e az integrabilitási föltételeket? De könnyű látni, hogy ezek bármelyike p.

$$\frac{dX_{ik}^0}{dx_l} = \frac{dX_{il}^0}{dx_k}$$

az eredeti rendszernek megfelelő egyik föltételből nyerhető, ha x_1 helyébe x_1^0-ot teszünk és ismét tekintetbe veszszük, hogy az x_2, x_3 s u. t. szerint történő differencziálás és a helyettesítés sorrendje fölcserélhető.

A számitás menete ezután világos. A 4.) alatti rendszer tárgyalása rávezet ismét egy új, föltétlenűl integrálható rendszerre, melyben azonban a független változók száma már csak n—2. Ez megadja ismét a z_1^0, z_2^0, ... z_m^0-nak, melyek mindegyike hiszen az x_2, x_3, ... x_n függvénye, kezdőértékeit valamely szabadon választott $x_2 = x_2^0$ számára. E kezdő értékek meghatározása után a z_2^0, ... z_m^0 függvények értékei a 4.) alatti rendszer első sorában foglalt közönséges differencziálegyenletrendszerből lesznek kiszámítandók.

Ily módon világos, hogy az egész probléma n közönséges elsőrendü differencziálegyenletrendszer integráczióját követeli. Egyszersmind látni, hogy a tetszőleges kezdő értékek lépésenként történő megszorítása végűl ezekben csak annyi, az összes változóktól független tetszőleges állandót hagy meg, a mennyi az utoljára föllépő közönséges differencziálegyenlet-rendszernek megfelel. E szám, mint tudjuk, megegyezik az ismeretlen függvények számával. És igy az eredeti föladat általános megoldásában is *az ismeretlen* z_1, z_2, ... z_m *kifejezésében* m *tetszőleges állandó lép föl,* vagy más fogalmazásban *a független változók valamely* x_1^0, x_2^0, ... x_n^0 *értékcsoportjára nézve szabadon választhatjuk a* z_1 ... z_m *függvények kezdő értékét.*

3. — Az előbbi czikkben előadott megoldási módszer azonban még lényegesen egyszerűsíthető. Valamint az előbbi problémánál, mely ennek csak egy speciális esete, bizonyos transformáczió kivitele után az n integráczió helyett csak egyet kellett végezni, úgy most is *az* n *differencziálegyenletrendszer helyett csak egyet kell valóban integrálni.*

Ez megtörténik mindenkor, midőn a 4.) alatti rendszernek megoldásait számítás nélkül közvetetlenül az egyenletek alakjából föl lehet irni. Ekkor csakis az eredeti rendszer első sorából álló rendszert kell integrálni, és a tetszőleges állandókat megfelelőleg meghatározni.

Legegyszerűbb ily esettel van dolgunk, midőn az összes

$$
\begin{array}{l}
X_{12}, X_{22}, \ldots, X_{m2}, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
X_{1n}, X_{2n}, \ldots, X_{mn}
\end{array}
$$

kifejezések az $x_1 = x_1^0$ helyettesítés után zérussá lesznek. Ekkor $z_1^0, z_2^0 \ldots z_m^0$ egyszerűen az $x_2, \ldots x_n$-től is független tetszőleges állandónak vehető, és az 1.) alatt álló egyenletek első sorából álló rendszer mindjárt az egész rendszer megoldásait szolgáltatja, ha a benne föllépő tetszőleges állandókat a többi független változótól is függetleneknek veszszük. Az igy nyert megoldások egyszersmind a legáltalánosabbak, mert a kellő számú tetszőleges állandó megvan benne.

Rendszerünknek mindig ezt az egyszerű alakot adhatjuk, ha az $x_2\ x_3 \ldots x_n$ változók helyébe a következő *A. Mayer* által adott átalakitási képletek segítségével uj $y_2\ y_3\ y_n$ változókat hozunk be:

$$
\begin{array}{l}
x_2 - x_2^0 = (x_1 - x_1^0)\, y_2, \\
x_3 - x_3^0 = (x_1 - x_1^0)\, y_3, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
x_n - x_n^0 = (x_1 - x_1^0)\, y_n.
\end{array}
\qquad (5.)
$$

Legyen $z_1, z_2, \ldots z_m$-nek e transformáczió által nyert alakja $u_1, u_2 \ldots u_m$, akkor:

$$
\begin{array}{l}
\frac{\partial z_i}{\partial x_1} = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \frac{\partial u_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_i}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial u_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\
\frac{\partial z_i}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\frac{\partial z_i}{\partial x_n} = \frac{\partial u}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_n}.
\end{array}
$$

Minthogy pedig:

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = -\frac{x_2 - x_2^0}{(x_1 - x_1^0)^2}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \frac{1}{x_1 - x_1^0}$$

$$\frac{\partial y_3}{\partial x_1} = -\frac{x_3 - x_3^0}{(x_1 - x_1^0)_2}, \quad \frac{\partial y_3}{\partial x_3} = \frac{1}{x_1 - x_1^0},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial y_n}{\partial x_1} = -\frac{x_n - x_n^0}{(x_1 - x_1^0)^2}, \quad \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = \frac{1}{x_1 - x_1^0},$$

ha most z_i differencziálhányadosainak értékeit behelyettesítjük, ezekben a transformácziót elvégzettnek tekintve, nyerjük hogy:

$$X_{i1} = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - \frac{\partial u_i}{\partial y_2}\frac{x_2 - x_2^0}{(x_1 - x_1^0)^2} - \frac{\partial u_i}{\partial y_3}\frac{x_3 - x_3^0}{(x_1 - x_1^0)^2} \cdots - \frac{\partial u_i}{\partial y_n}\frac{x_n - x_n^0}{(x_1 - x_1^0)^2},$$

$$X_{i2} = \frac{\partial u_i}{\partial y_2}\frac{1}{x_1 - x_1^0},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$X_{in} = \frac{\partial u_i}{\partial y_n}\frac{1}{x_1 - x_1^0}$$

És ezekből, ha még $\frac{\partial u_i}{\partial y_2}, \frac{\partial u_i}{\partial y_3} \ldots$ értékeit az első egyenletbe bevezetjük, végre az u_i differencziálhányadosai lesznek:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_i}{\partial x_1} &= X_{i1} + y_2 X_{i2} + y_3 X_{i3} + \ldots y_n X_{in}, \\
\frac{\partial u_i}{\partial y_2} &= (x_1 - x_1^0) X_{i2}, \qquad\qquad (6.) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial u_i}{\partial y_n} &= (x_1 - x_1^0) X_{in}.
\end{aligned}$$

$$(i = 1, 2, \ldots m - 1, m)$$

De ez nem más, mint egyenletrendszer az u-k számára, melyek megoldása után a z-k is ismeretesek, mert ezek az u-kból keletkeznek, ha az y-ok helyébe ismét bevezetjük az x-eket. Igy tehát az (5) alatt adott átalakítási képletek átviszik az eredeti rendszert az uj alakba, melynél minden $x_2 \ldots x_n$ szerinti differencziálhányados értéke eltünik, ha x_1 helyébe x_1^0-ot, a kezdőértéket teszszük, mert — mint mindig — a különben tetszőleges állandók $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ úgy választandók, hogy az X-ek ne legyenek végtelenek vagy határozatlanok.

Igy tehát *az (1.) alatti rendszer teljes megoldása vissza van vezetve a*

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} = X_{i1} + y_2 X_{i2} + \ldots y_n X_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{7.}$$

közönséges differencziálegyenlet-rendszerére. Mert ha ebben a tetszőleges állandókat az $x_2 \ldots x_n$ parameterektől függetleneknek vesszük, a nyert megoldások megfelelnek az egész (6.)-ban álló rendszernek, és igy az elsőnek is, ha t. i. az y-okat ismét fölcseréljük az x-ekkel.

A (7.) alatti differencziálegyenlet-rendszer megoldása után a tárgyalás menetét követve, a tetszőleges állandókat az u-k vagy z-k*) ama értékei által fejezzük ki, melyek $x_1 = x_1^0$-nak megfelelnek. Ez által ugyanis — a mint kell, ezeknek kifejezésébe ismét belépnek az $y_2 \ldots y_n$, illetőleg az $x_2 \ldots x_n$ parameterek.

Kérdezni lehetne még, vajjon a transformált rendszer (6.) kielégíti-e a szükséges integrabilitási föltételeket, amit eddigi fejtegetéseinkben külön indokolás nélkül föltételeztünk. De világos, hogy ha az eredeti probléma lehetséges volt, akkor a transformáczió után is ilyennek kell maradnia és azért mellőzzük az integrabilitási föltételek direct igazolását, mely különben egyszerű számítás utján végezhető.

---

*) Az u-k és z-k értéke ugyanaz, csak más változókban kifejezve.

III.

A HAMILTON-FÉLE RENDSZEREK INTEGRÁCZIÓJA.

1. — E fejezetben a következő alakú totál-differencziál-egyenlet-rendszerrel foglalkozunk:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{\partial H}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dx_1} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} \\
\frac{dx_3}{dx_1} &= \frac{\partial H}{\partial p_3}, & \frac{dp_3}{dx_1} &= -\frac{\partial H}{\partial x_3} \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
\frac{dx_n}{dx_1} &= \frac{\partial H}{\partial p_n}, & \frac{dp_n}{dx_1} &= -\frac{\partial H}{\partial x_n},
\end{aligned} \tag{1.}$$

melyben x_1 a független változó, $x_2, p_2, x_3, p_3, \ldots$ a meghatározandó függvények, vagyis függő változók, melyeknek száma tehát $2(n-1)$, végre H tetszőlegesen adott függvény, melynek formálisan képezett parcziális differencziálhányadosai az egyenletek jobb oldalán álló kifejezéseket adják. Az ily rendszert Hamilton-féle rendszernek nevezzük, mert Hamilton volt az első, ki a dynamika problémáinak egy fontos osztályát ily egyenletrendszer tárgyalására vezette vissza. Különben a váriácziószámítási föladatok egy nagy része, valamint az elsőrendű parcziális differencziálegyenletek elmélete is ily rendszerekre vezet.

Az ily rendszer általános megoldása — mint ismeretes — a függő változókat előállítja, mint a független változó és tetszőleges állandók függvényeit. Az utóbbiak száma megegyezik a függő változók számával és legjobban mint a meghatározandó függvények szabadon választható kezdőértékei értelmezhetők. Ha az ily módon nyert $2\,(n-1)$ egyenletet megoldjuk a tetszőleges állandók szerint, akkor

$$\Phi\,(x_1\,;\, x_2, p_2, \ldots x_n, p_n) = a \qquad (2.)$$

alakú egyenleteket, az u. n. *első integrálokat* nyerjük. Ha $2\,(n-1)$ egymástól független ily első integrál adva van, ezek együttesen az általános megoldást az előbbitől csak alakban különböző módon adják. Egy-egy ily első integrál meghatározása — úgy szólván — az elemi, általánosságban tovább nem egyszerűsíthető operáczió, melyet a föladatnál végeznünk kell, és melyet $2\,(n-1)$-ed rendű operácziónak mondunk, a rendszer rendszámának vagyis a függő változók számának megfelelőleg.

Az ilyen, a tetszőleges állandó szerint megoldott első integrálnak jellemző tulajdonsága, hogy teljes differencziálhányadosa, ha $\frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dp_2}{dx_1}, \ldots$ helyett az adott rendszerből értékeit veszszük, azonosan eltűnik, azaz

$$\left[\frac{d\Phi}{dx_1}\right] = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\frac{\partial H}{\partial p_3} + \ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial\Phi}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{\partial\Phi}{\partial p_3}\frac{\partial H}{\partial x_3} - \ldots - \frac{\partial\Phi}{\partial p_n}\frac{\partial H}{\partial x_n} = 0 \qquad (3.)$$

identitás.

Ezt a tételt, mely a differencziálegyenlet-rendszer elméletében alapvető jelentőségü, következőkép bizonyíthatjuk. Minthogy (2.) az x_1 minden értékénél helyes, szabad x_1 szerint differencziálni, és igy a (3)-at nyerjük; de ezért még nem látni, hogy az ebben baloldalon álló kifejezés már tekintet nélkül az $x_2, p_2 \ldots$ függvények értékére, identice eltünjék. — Tegyük föl, hogy ez nem történik, akkor a benne föllépő x_2, $p_2, \ldots$ függvények egyikét meg lehetne határozni a többiből. Ha az ilymódon meghatározott függvény értékét az eredeti rendszerbe beviszszük, elhagyhatni azt az egyenletet, mely épen e függvény differencziálhányadosát adja. Akkor a többi függvény meghatározására egy $2n-3$-ad rendű rendszerünk volna, mig az utolsót a (3.)-ból nyerjük. De ekkor e függvények legáltalánosabb meghatározása csak $2n-3$ és nem $2n-2$ tetszőleges állandót tartalmazna, a mi nem lehetséges, és igy kell, hogy a 3.) identitás legyen.

Ha azonban az első integrál nem a tetszőleges állandó szerint megoldott alakban, hanem általánosabban ily módon van adva:

$$\Psi(x_1\,;\, x_2,\, p_2\,;\, \ldots\,;\, x_n,\, p_n\,;\, a) = 0, \qquad (4.)$$

akkor a megfelelőleg képezett differencziálhányados ismét 0 ugyan, de nem többé identice az; az erre vonatkozó következtetésekben ugyanis lényeges különbséget tesz az, hogy most a differencziálás által nyert relláczióból az a állandó ki nem esik, és igy az állandók megszámlálása nem vezet többé a lehetetlen $2n-3$, hanem a helyes $2n-2$ számhoz. A röviden

$$\left[\frac{d\Psi}{dx_2}\right] = 0 \qquad (5.)$$

által jellemzett egyenlet tehát most is helyes, de nem identitás. Ebben az esetben azonban bebizonyíthatjuk, hogy (4.) és (5.) két aequivalens egyenlet, vagy más szóval, hogy *ha a két egyenletből a bennük előforduló mennyiségek bármelyikét kiküszöböljük, az eredmény nem resultáns egyenlet, hanem identice eltünik.*

Ez mindenek előtt világos, ha a kiküszöbölendő mennyiség a tetszőleges állandó, a; mert különben a kiküszöbölés eredménye ismét reláczió volna a változók között, tetszőleges állandó nélkül és igy ekkor az előbbi következtetéseket szóról szóra ismételhetjük.

Ha a kiküszöbölendő mennyiség nem a, tegyük föl, hogy a kiküszöbölés valóban resultáns egyenlethez vezet. Ha ez az egyenlet nem tartalmazná az a-t, akkor erre az előbbi következtetéseket ujból alkalmazhatjuk, tehát identitásnak kell lennie. Ha ellenben föltételezzük, hogy tartalmazza az a-t, akkor állítsuk össze a (4.) vagy (5.) alatti egyenletek egyikével, mely a kiküszöbölt mennyiséget tartalmazza. Ha ebből a kettőből most a-t kiküszöböljük, az eredmény ismét reláczió volna a p-k és x-ek közt, mely, mint láttuk, ellentmondáshoz vezet. De az eredmény másrészt nem tűnhetik el identikus módon. Ha ugyanis a két összeállított egyenletből az a-t kiszámítjuk, az egyiknél az eredetileg kiküszöbölendő mennyiségtől függő értéket nyerünk, a másiknál ellenben ettől függetlent, mert az egyenlet nem is tartalmazza e mennyiséget. Ha most az a-nak két ily módon nyert értékét egyenlővé teszszük, az eredmény nem lehet identitás. Igy ellenmondáshoz jutunk, mihelyt az első kiküszöbölés által nyert egyenletet nem veszszük identitásnak, mig természetesen ez utóbbi esetben nem juthatunk többé ama lehetetlenséget tartalmazó relációhoz.

Az, hogy a $\Psi = 0$-ból ily módon identitáshoz jussunk, e szerint szükséges föltétele annak, hogy $\Psi = 0$ első integrál legyen; könnyü továbbá bebizonyitani, hogy e föltétel egyszersmind elégséges, a mire azonban itt nem térünk át.

2. — A következőkben szükségünk lesz ez identitás részletes alakjára, midőn az első integrál

$$p_2 - F(x_1, x_2 \ldots, x_n, p_3, \ldots, p_n, a) = 0. \qquad (6.)$$

az egyik változó, példáúl p_2 szerint megoldott alakban van adva. Akkor mindenekelőtt az x_1 szerinti teljes differencziálhányadost képezve, és a többi változók differencziálhányadosainak értékét az eredetileg adott rendszerből véve lesz:

$$-\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial F}{\partial x_3}\frac{\partial H}{\partial p_3} - \ldots - \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial H}{\partial p_n}$$
$$-\frac{\partial H}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial p_3}\frac{\partial H}{\partial x_3} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial x_n} = 0.$$

Ha most ebből az egyenletből és az adott első integrálból például a p_2-t kiküszöböljük, a keresett identitást nyerjük. E kiküszöbölés egyszerüen úgy történik, hogy p_2-nek az első egyenletből adott értékét a másodikba behelyettesítjük. Azt, hogy p_2 helyébe ily módon az F függvényt tettük, jelöljük az által, hogy az illető kifejezést szögletes zárjelbe teszszük. Az identitás tehát

$$\begin{aligned}-\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{\partial F}{\partial x_2}\left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right] - \frac{\partial F}{\partial x_3}\left[\frac{\partial H}{\partial p_3}\right] - \ldots - \frac{\partial F}{\partial x_n}\left[\frac{\partial H}{\partial p_n}\right]& \\ -\left[\frac{\partial H}{\partial x_2}\right] + \frac{\partial F}{\partial p_3}\left[\frac{\partial H}{\partial p_3}\right] + \ldots + \frac{\partial F}{\partial p_n}\left[\frac{\partial H}{\partial x_n}\right] = 0.&\end{aligned} \qquad (7.)$$

Most még átalakítjuk ezt az alakot az által, hogy a H differencziálhányadosainak helyettesitési értékeit fölcseréljük a H helyettesitési értékének, $[H]$-nak differencziálhányadosaival. E két művelet sorrendje azonban föl nem cserélhető, hanem a két érték közt a következő kapcsolat áll fönn: Ha ugyanis v az $x_2 \ldots x_n, p_3 \ldots p_n$ változók bármelyikét jelenti, lesz:

$$\frac{\partial[H]}{\partial v} = \left[\frac{\partial H}{\partial v}\right] + \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right]\frac{\partial F}{\partial v},$$

mert ha $[H]$-t v szerint differencziáljuk, p_2-t, mely helyébe az F függvény jő, szintén a v-tól függőnek kell tekintenünk. És ebből:

$$\left[\frac{\partial H}{\partial v}\right] = \frac{\partial[H]}{\partial v} - \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right]\frac{\partial F}{\partial v} \qquad (8.)$$

$$(v = x_2, \ldots, x_n ; p_3 \ldots p_n)$$

Ha ezeket az értékeket most a (7.)-ben behelyettesítjük, lesz:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{\partial F}{\partial x_2}\left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right] - \frac{\partial F}{\partial x_3}\left(\frac{\partial[H]}{\partial p_3} - \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right]\frac{\partial F}{\partial p_3}\right) - \ldots -$$
$$- \frac{\partial F}{\partial x_n}\left(\frac{\partial[H]}{\partial p_n} - \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right]\frac{\partial F}{\partial p_n}\right) -$$
$$- \frac{\partial[H]}{\partial x_2} + \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right]\frac{\partial F}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial p_3}\left(\frac{\partial[H]}{\partial x_3} - \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right]\frac{\partial F}{\partial x_3}\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial p_n}\left(\frac{\partial[H]}{\partial x_n} - \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right]\frac{\partial F}{\partial x_n}\right) = 0.$$

vagy ha az elenyésző tagokat kihagyjuk, végre

$$- \frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{\partial F}{\partial x_3}\frac{\partial[H]}{\partial p_3} - \ldots - \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial[H]}{\partial p_n} -$$
$$- \frac{\partial[H]}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial p_3}\frac{\partial[H]}{\partial x_3} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial[H]}{\partial x_n} = 0. \qquad (9.)$$

A tulajdonképen alkalmazandó identitást a (9.)-ből az által nyerjük, hogy a benne előforduló változók bármelyike szerint differencziálunk. Épen mivel a (9.) identitás, azaz helyes teljesen függetlenül a benne előforduló változók értékétől, világos, hogy a nyerendő alak is ilyen lesz. Jelöljük ismét a változót, mely szerint differencziálunk, v-vel, akkor lesz:

$$- \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial x_1} - \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial x_3}\frac{\partial[H]}{\partial p_3} - \ldots - \frac{\partial F}{\partial x_3}\frac{\partial^2[H]}{\partial v \partial p_3} - \ldots$$
$$- \frac{\partial^2[H]}{\partial v \partial x_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial p_3}\frac{\partial[H]}{\partial x_3} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial p_3}\frac{\partial^2[H]}{\partial v \partial x_3} + \ldots = 0. \qquad (10.)$$

hol minden sorban csak az első tag nem követi a symmetriát, míg az azután fölirt 4 tagból a többit mind nyerjük, ha az x_3, p_3 változó-párt egymásután fölcseréljük x_4, p_4; ... x_n, p_n-nel.

3. — Ha most már az adott Hamilton-féle rendszert integrálni akarjuk, az első lépés erre egy első integrál meghatározása. — Ez, mint ismeretes, általánosságban formális úton nem is eszközölhető, mert magát a rendszert, mint a megoldásnál föllépő függvények definiczióját kell tekintenünk, mely csak kivételesen a legegyszerűbb esetekben vezet már egyéb vizsgálatokból ismert függvényalakokra. A kérdés, mely az integráczió általános vizsgálatánál tárgyalandó (és a melynek megoldása különösen a dynamikai és variácziószámitási alkalmazásokban igen fontos), a következő:

Az adott Hamilton-féle rendszer integrácziójának problémájában minő egyszerüsités történik egy első integrál ismerete által?

Ismeretes, hogy egy első integrál ismerete minden differencziálegyenlet-rendszer megoldását visszavezeti oly rendszerére, melynek rendszáma egygyel kisebb, mint az eredetileg adott rendszeré. A Hamilton-féle rendszer esetében azonban a problémának az egy első integrál ismerete után végezhető egyszerűsítése az egyenletek speciális alkatánál fogva sokkal jelentékenyebb, a probléma ugyanis *két* egységgel alacsonyabb rendű rendszer integrácziójára lesz visszavezethető, melynek azonkivül ismét megvan a Hamilton-féle rendszer alakja.

Lássuk azonban először azt az egyszerüsítést, mely a Hamilton-féle rendszer alakjától függetlenül, itt épen úgy végezhető, mint minden más differencziálegyenlet-rendszernél. Legyen az ismert első integrál:

$$p_2 - F = 0. \tag{6.}$$

(Az, hogy itt az első integrált p_2 szerint megoldott alakban irjuk föl, nem szorítja meg a tárgyalás általánosságát, mert ha az adott integrál nem tartalmazná a p_2-t, hanem más p-t, akkor, minthogy a sorrend közönyös, egyszerűen más x, p változópárt láthatni el a 2-es mutatóval. Ha pedig az első integrál egy p-t sem tartalmaz, hanem csak x változókat, akkor az eredeti rendszerben fölcserélhetjük az x_2-t a p_2-vel, s u. t. ha csak egy időben H helyet $-H$-t irunk. Ez által a rendszer maga nem változott, mig az x-ek és p-k jelentésükre nézve szerepet cseréltek.)

Ha a p_2-nek a többi változók és a tetszőleges állandó által való meghatározását, amint azt az első integrál szolgáltatja, az adott Hamilton-féle rendszerbe bevezetjük, amaz egyenletet, mely p_2 differencziálhányadosát adja, mint fölöslegest kihagyhatjuk, minthogy hiszen a többi függvény meghatározása után p_2 is ismeretes. Ha még a p_2 értékének helyettesitését ismét szögletes zárjel által jelöljük, lesz:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right]$$

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \left[\frac{\partial H}{\partial p_i}\right], \quad \frac{dp_i}{dx_1} = -\left[\frac{\partial H}{\partial x_i}\right],$$

$$(i = 3, 4, \ldots . n)$$

és igy e csak $2n-3$ egyenletből álló és ugyanannyi ismeretlen függvényt tartalmazó rendszer lesz megoldandó. Ha e rendszerben most ismét a

$$\left[\frac{\partial H}{\partial p_i}\right], \left[\frac{\partial H}{\partial x_i}\right]$$

helyébe bevezetjük a (8.)-ban adott képlet segitségével a $[H]$ differencziálhányadosait, ez a következő alakot nyeri:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right],$$

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{\partial [H]}{\partial p_i} - \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right] \frac{\partial F}{\partial p_i},$$

$$\frac{dp_i}{dx_1} = \frac{\partial [H]}{\partial x_i} - \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right] \frac{\partial F}{\partial x_i},$$

$$(i = 3, 4, \ldots n)$$

4. — Vegyük föl most az $x_2, p_3, \ldots$ változókat, mint az x_1 és x_2 függvényeit. Ily alakokat nyernénk valóban, ha az eredeti rendszernek $2n-3$ egymástól független első integrálját vennők és ezekből az $x_3 \ldots x_n$, $p_2 \ldots p_n$ változókat egynek kivételével, tehát összesen $2n-4$ mennyiséget kiküszöbölünk. De ekkor sem szabad mellőzni, hogy x_2 tulajdonképen az x_1 függvénye és igy:

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{\partial x_i}{\partial x_1} + \frac{\partial x_i}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1},$$
$$\frac{dp_i}{dx_1} = \frac{\partial p_i}{\partial x_1} + \frac{\partial p_i}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}.$$

Ha ezen értékeket átviszszük rendszerünkbe, és egyszersmind $\left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right]$ helyébe az első egyenlet szerint vele egyenlő $\frac{dx_2}{dx_1}$-et teszszük, a rendszernek alakja lesz:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right],$$
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial x_1} + \frac{\partial x_i}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{\partial [H]}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{dx_2}{dx_1}, \\ \frac{\partial p_i}{\partial x_1} + \frac{\partial p_i}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} &= -\frac{\partial [H]}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{dx_2}{dx_1}, \end{aligned}\right\} \quad (11.)$$
$$(i = 3, \ldots n).$$

Ha most az $x_3, \ldots p_3, \ldots$ változókat úgy tudjuk meghatározni, mint az x_1 és x_2 függvényeit, hogy e változók kapcsolatától függetlenül ki legyenek elégítve az

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial x_1} &= \frac{\partial [H]}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_2} = -\frac{\partial F}{\partial p_i}, \\ \frac{\partial p_i}{\partial x_1} &= -\frac{\partial [H]}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \end{aligned}\right\} \quad (12.)$$
$$(i = 3, \ldots. n)$$

egyenletek, akkor a (11.)-ben foglalt egyenletek az első kivételével ki lesznek elégítve, bárminő függvénye az x_1-nek legyen is x_2. Ha most az $x_3, \ldots, p_3, \ldots$ ily módon nyert értékeit a

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right] \quad (13.)$$

egyenletbe helyettesítem és ebből a csak x_1 és x_2-t tartalmazó elsőrendű differencziálegyenletből meghatározom x_2-t, mint az x_1 függvényét, ily módon az összes változók $x_2 \ldots x_n, p_3 \ldots p_n$ mint az x_1 függvényei, meg lesznek határozva, és e meghatározásokat a

$$p_2 - F_1 = 0$$

egyenletben helyettesítve, ezt az utolsó változót is mint x_1 függvényét nyerem.

De hogy a megoldás e menete valóban lehetséges legyen, arra szükséges, hogy a (12) alatt álló rendszer az $x_3 \ldots x_n$, $p_3 \ldots p_n$ változókat mint az egymástól függetleneknek tekintett x_1 és x_2 függvényeit határozza meg, más szóval tehát, hogy e rendszer a megelőző fejezet értelmében föltétlenül integrálható rendszer legyen, mely az ott kifejtett integrabilitási föltételeket kielégíti.

E föltétel teljesítve lévén, könnyű látni, hogy a nyert megoldás egészen általános is. A p_2 értékének helyettesítése behoz egy első tetszőleges állandót, a (12.) alatt álló rendszer integrácziója az $x_3, \ldots, p_3, \ldots$ változók számának megfelelőleg $2n-4$-et, a (13)-ban adott differencziálegyenlet végre még egyet, úgy hogy végül az $x_2, \ldots, p_2, \ldots$, mint az x_1 függvényei kifejezve, $2n-2$ tetszőleges állandót tartalmaznak, mely szám egyszersmind az eredeti rendszer rendszáma. A nyert megoldás tehát a legáltalánosabb.

Hogy a (12)-ben fölirt rendszer valóban kielégíti az integrabilitás föltételeit, azt részletes fölirásuk által nehézség nélkül kimutathatjuk. E föltételek mind

$$-\frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)-\frac{d}{dx_2}\left(\frac{\partial [H]}{\partial v}\right)=0 \qquad (14.)$$

alakban irhatók, hol v az $x_3, \ldots\ldots p_3, \ldots$ változók bármelyikét jelentheti. Az előbbi fejezet értelmében most:

$$\frac{df}{dx_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial [H]}{\partial p_3}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial [H]}{\partial p_n}- \\ +\frac{\partial f}{\partial p_3}\frac{\partial [H]}{\partial x_3}-\ldots-\frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial [H]}{\partial x_n},$$

$$\frac{df}{dx_2}=\frac{\partial f}{\partial x_2}-\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial F}{\partial p_3}-\ldots-\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n}+ \\ +\frac{\partial f}{\partial p_3}\frac{\partial F}{\partial x_3}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

Ha e képletet a (14.) alatt álló egyenletre alkalmazzuk, lesz

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial v}-\frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial v}\frac{\partial [H]}{\partial p_3}-\ldots+\frac{\partial^2 F}{\partial p_3 \partial v}\frac{\partial [H]}{\partial x_3}+\ldots \\ -\frac{\partial^2 [H]}{\partial x_2 \partial v}+\frac{\partial^2 [H]}{\partial x_3 \partial v}\frac{\partial F}{\partial p_3}+\ldots-\frac{\partial^2 [H]}{\partial p_3 \partial v}\frac{\partial F}{\partial x_3}-\ldots=0$$

mely valamivel más sorrendben a (10.) alatt álló identitás, mert a két parcziális differencziálás sorrendje fölcserélhető.

A (14.) által adott integrabilitási föltételek tehát identitások és igy a (12)-es rendszer valóban föltétlenül integrálható. Hogy most e rendszer megoldását közönséges differencziálegyenletére vezessük vissza, az x_2 helyébe a következő képlet segítségével

$$x_2 - x_2^0 = (x_1 - x_1^0)\, y_2$$

bevezetünk egy új y_2 változót; a mi által a megelőző fejezet fejtegetései értelmében a következő rendszerhez jutunk:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial x_1} &= \frac{\partial [H]}{\partial p_i} - y_2 \frac{\partial F}{\partial p_i}, \\ \frac{\partial p_i}{\partial x_1} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} + y_2 \frac{\partial F}{\partial x_i}, \end{aligned}\right\} \qquad (15.)$$

hol a jobb oldalon szintén x_2 helyébe y_2-t gondolunk bevezetve.

Az így nyert közönséges differencziálegyenlet-rendszer, melyre a föladatot egy első integrál ismerete után redukáltuk, már csak 2n—4-ed rendű, és — a mi ép oly fontos — alakjára nézve ismét Hamilton-féle rendszer. A jobb oldalon álló kifejezések ugyanis mindannyian egy függvénynek $[H]-y_2F$-nek az x-ek és p-k szerint vett parczialis differencziálhányadosai, az elsők positiv, az utóbbiak negativ előjellel.

A megoldás után ismét visszateszszük x_2-t y_2 helyébe, és kifejezzük a tetszőleges állandókat az $x_3, \ldots p_3, \ldots$ tetszőlegesen megállapított kezdő értékei által; a nyert alakok — mint tudjuk — általános megoldását adják a (12.)-vel jelölt rendszernek is. — A legelőször nyert első integrálból még, ha ott minden változó helyébe kezdő értéket teszünk, még az a tetszőleges állandót is kifejezhetjük e kezdő értékek által és az összes eddigi eredmény tehát az, hogy

$$x_3, x_4, \ldots x_n, p_2, \ldots p_n$$

mind az x_1 és x_2 és a tetszőleges kezdő értékek által lesz kifejezve. Ezek közül az x_1^0 szabadon választható kezdő érték a szó szorosabb értelmében, azaz olyan, melynek specializálása még nem szorítja meg a megoldás általánosságát, míg a többiek tetszőleges állandóknak tekintendők. Ennél azonban még tekintetbe veendő, hogy ámbár számuk $2(n-1)$, mégis most csak $2n-3$ tetszőleges állandót képviselnek. Ha t. i. a (15.) alatti rendszer integrácziójánál directe föllépő állandókat $\alpha_3 \ldots \alpha_n, \beta_3, \ldots, \beta_n$ jelöljük, akkor ezek, valamint a kifejezhetők, mint a kezdőértékek függvényei és igy ezek csak az α_i, β_j és a által jelölt $2n-3$ kombinánczióban lépnek föl, és igy ugyanannyi független tetszőleges állandóval egyértékűek. Ha végre még a nyert integrálegyenleteket az α_i, β_i és a szerint megoldjuk, látni, hogy ez által az eredeti rendszernek $2n-3$ első integrálját nyertük.

A még hiányzó első integrált most a

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \left[\frac{\partial H}{\partial p_1}\right]$$

szolgáltatja, melyben minden változót már x_1 és x_2 által kifejezve gondolunk. Azonban ezen *elsőrendű differencziálegyenlet integrácziója direkt operácziókra, azaz tiszta quadraturára vezethető vissza.* Minden Hamilton-féle rendszerre nézve érvényes ugyanis az utolsó multiplikátor elve. E szerint, ha az llető rendszer teljes integrácziójára már csak egy első integrá hiányzik, annak az elsőrendű differencziálegyenletnek, mely ezt szolgáltatja, Euler-féle multiplikátorát direkt operácziók által lehet meghatározni, úgy, hogy ez által p. a mostani esetben

$$M\left(dx_2 - \left[\frac{\partial H}{\partial p_1}\right] dx_1\right)$$

teljes differencziál lesz és igy a hiányzó első integrált ennek integrácziója által nyerjük.

A nyert eredmény összefoglalása a következő:

Legyen az adott Hamilton-féle rendszer:

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$
$$(i = 2, 3, \ldots n)$$

és e rendszer egy első integrálja:

$$p_2 - F = o;$$

akkor további $2n-4$ integrált a következő rendszer integrácziójából nyerhetni, melynek ismét megvan a Hamilton-féle alakja és melynek rendszáma két egységgel kisebb:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_1} = \frac{\partial([H]-y_2F)}{\partial p_i},$$
$$\frac{\partial p_i}{\partial x_1} = -\frac{\partial([H]-y_2F)}{\partial x_i},$$
$$(i = 3, \ldots, n),$$

hol a jobboldalon álló kifejezésben x_2 helyébe y_2-t vezettük be a következő transformáczióképlet segitségével:

$$x_2 - x_2^0 = (x_1 - x_1^0)\, y_2,$$

míg $[H]$ a H-ból úgy keletkezik, hogy p_2 helyébe F-et teszszük. E rendszer integrációjánál y_2 csak parameternek tekintendő és a tetszőleges állandók ettől függetleneknek veendők. Az integráczió után ismét bevezetjük x_2-t y_2 helyébe. A még hiányzó utolsó integrált végre egyszerü integráczió által nyerjük.

Minthogy a redukált rendszer ismét Hamilton-féle rendszer, a most kifejtett elméletet erre ismét alkalmazhatjuk, azaz egy első integrál ismerete által a problémát ismét visszavezethetjük egy $2n-6$-odrendű Hamilton-féle rendszer integrácziójára s u. t.

A $2(n-1)$-rendü Hamilton-féle rendszer teljes integrácziója e szerint, mellőzve a közvetetlenül végezhető formális operácziókat, egy-egy első integrál meghatározását követeli oly Hamilton-féle rendszerekből, melyeknek rendszáma egymásután

$$2n-2,\ 2n-4,\ 2n-6, \ldots, 4,\ 2,$$

míg, ha a rendszer alakjában rejlő egyszerűsítést nem használjuk, az általános differencziálegyenlet-rendszer mintájára, még közben mindenütt egy-egy első integrál meghatározását kellene végeznünk, mely a föntebbi sorozatban megfelel a föl nem lépő páratlan rendszámoknak.

Minden Hamilton-féle rendszer egy-egy variácziószámitási probléma kifejezése és erre vonatkozólag az eredmény úgy értelmezhető, hogy egy első integrál ismerete után az illető problémát föl lehet cserélni egy másikkal, melyben a független koordináták száma egygyel kisebb lett.

Az előadott módszer a Hamilton-féle rendszerek integrácziójában eszközölhető egyszerűsítéseket teljesen direkt úton adja, ellentétben az ismeretes módszerrel, mely azt követeli, hogy a $2(n-1)$-edrendü rendszernek megfelelőleg mindenekelőtt egy n független változót tartalmazó általános elsőrendű parcziális differencziálegyenletet képezzünk és ennek azután egy teljes integrálját nyerjük. Ebből azután közvetetlenűl végezhető operácziók segítségével megkapjuk végre a Hamilton-féle rendszer integráczióját.

A tárgyalt eljárás jelentőségét azonban még növeli az a körülmény, hogy segítségével még sokkal általánosabb kérdésre is nyerhetünk feleletet. Ez a következő:

Adva lévén a Hamilton-féle rendszernek k első integrálja, minő egyszerüsítéseket nyerünk ez által a rendszer integrácziójának föladatában?

Ez rávezet — mint látni — az első integrálok kapcsolatának általános elméletére, mely különösen a dynamikai differencziálegyenleteknél igen fontos. E vizsgálat előadását azonban más alkalomra halasztva, most az e fejezetben használt módszerre nézve még egy általános megjegyzést akarok tenni.

---

5. Ugyanazon módszer, melyet itt a Hamilton-féle rendszerek redukcziójára használtunk, a differencziálegyenlet-rendszerek egy nagy osztályára alkalmazható. Segítségével t. i. *egy n-ed rendü rendszer egy n—k-ad és egy k-ad rendü rendszer egymásutáni integrácziójára vezethető vissza.* Az ily rendszerek alakja:

$$\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dx} &= P_1, \\
&\;\; \cdots\cdots \\
\frac{dz_k}{dx} &= P_k, \\
\frac{dz_{k+1}}{dx} &= Q_{k+1} + Q_{k+1,1} P_1 + Q_{k+1,2} P_1 = \ldots + Q_{k+1,k} P_k, \\
\frac{dz_{k+2}}{dx} &= Q_{k+2} + Q_{k+2,1} P_1 + Q_{k+2,2} P_2 + \ldots + Q_{k+2,k} P_k, \\
&\;\; \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dz_n}{dx} &= Q_n + Q_{n1} P_1 + Q_{n,2} P_n + \ldots + Q_{n,k} P_n,
\end{aligned} \tag{A}$$

hol a Q-val jelölt mennyiségek bizonyos még kifejtendő föltételi egyenleteket tartoznak kielégíteni, mig a P-k az összes változók tetszőleges függvényei.

Tekintsük ugyanis a

$$z_{k+1},\ z_{k+2}, \ldots z_n,$$

változókat; mint az

$$x_1\ z_1,\ z_2, \ldots z_k$$

függvényeit. (Világos ismét az integrálok elméletéből, hogy ily előállítás valóban létezik.)

Ekkor azonban, minthogy $z_1 \ldots z_k$ tulajdonképen az x függvényei:

$$\frac{dz_{k+1}}{dx} = \frac{\partial z_{k+1}}{\partial x} + \frac{\partial z_{k+1}}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial z_{k+1}}{\partial z_k}\frac{dz_k}{dx},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dz_n}{dx} = \frac{\partial z_n}{\partial x} + \frac{\partial z_n}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial z_n}{\partial z_k}\frac{dz_k}{dx}$$

Ha ezeket az értékeket átviszszük az (A) rendszerbe, és az első egyenletekből még a $\frac{dz_1}{dx} \ldots \frac{dz_k}{dx}$ értékeit bevisszük, az a következő alakba megy át:

$$\frac{dz_1}{dx} = P_1,$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$\frac{dz_k}{dx} = P_k,$$

$$\frac{\partial z_{k+1}}{\partial x} + P_1\frac{\partial z_{k+1}}{\partial z_1} + P_2\frac{\partial z_{k+1}}{\partial z_2} + \ldots + P_k\frac{\partial z_{k+1}}{\partial z_k} =$$
$$= Q_{k+1} + Q_{k+1,1}\,P_1 + Q_{k+1,2}\,P_2 + \ldots + Q_{k+1,k}\,P_k,$$

$$\frac{\partial z_{k+2}}{\partial x} + P_1\frac{\partial z_{k+1}}{\partial z_1} + P_2\frac{\partial z_{k+2}}{\partial z_2} + \ldots + P_k\frac{\partial z_{k+2}}{\partial z_k} =$$
$$= Q_{k+2} + Q_{k+2,1}\,P_1 + Q_{k+2,2}\,P_2 + \ldots + Q_{k+2,k}\,P_k,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial z_n}{\partial x} + P_1\frac{\partial z_n}{\partial z_1} + P_2\frac{\partial z_n}{\partial z_2} + \ldots + P_k\frac{\partial z_n}{\partial z_k} =$$
$$= Q_n + Q_{n,1}\,P_1 + Q_{n,2}\,P_2 + \ldots + Q_{n,k}\,P_n.$$

Ha most a $z_{k+1}, \ldots z_n$ változókat úgy tudjuk meghatározni, mint az $x_1\, z_1, \ldots z_k$ függvényeit, hogy e változók kapcsolatától függetlenül ki legyenek elégítve a következő egyenletek:

$$\begin{array}{l}
\frac{\partial z_{k+1}}{\partial x} = Q_{k+1}, \; \frac{\partial z_{k+2}}{\partial x} = Q_{k+2}, \ldots\ldots, \frac{\partial z_n}{\partial x} = Q_n, \\
\frac{\partial z_{k+1}}{\partial z_1} = Q_{k+1,\,1}, \; \frac{\partial z_{k+2}}{\partial z_1} = Q_{k+2,\,1}, \ldots, \frac{\partial z_n}{\partial z_1} = Q_{n,\,1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial z_{k+1}}{\partial z_k} = Q_{k+1,k}, \; \frac{\partial z_{k+2}}{\partial z_k} = Q_{k+2,\,k}, \ldots, \frac{\partial z_n}{\partial z_k} = Q_{n,\,k}
\end{array} \qquad (B)$$

akkor rendszerünk egyenletei, a k_{k+1}-iktől kezdve, ki lesznek elégítve, bárminő függvényei az x_1-nek legyenek is $z_1 \ldots z_k$. Ha most a $z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots z_n$ ily módon nyert értékeit az első k egyenletbe helyettesítem, ezek:

$$\frac{dz_1}{dx} = P_1, \ldots, \frac{dz_k}{dx} = P_k, \qquad (C)$$

egy k-adrendű rendszert adnak a $z_1 \ldots z_k$ meghatározására.

De, hogy a megoldás e menete valóban kivihető legyen, szükséges hogy a (B)-vel jelölt rendszer a $z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots z_n$ változókat, mint az egymástól függetleneknek tekintett x_1 $z_1 \ldots z_n$ függvényeit adja, azaz hogy e rendszer föltétlenűl integrálható rendszer legyen.

E föltétel teljesítve lévén, a nyert megoldás, mint könnyű látni, általános is. A (B) rendszer integrácziója $n-k$ tetszőleges állandót ád, a (C) rendszeré még k-t, úgy hogy tehát a végeredményben az összes tetszőleges állandók száma n lévén, a tárgyalás valóban az általános integrált adja.

A módszer alkalmazhatósága tehát csak attól függ, vajjon a (B) rendszer kielégíti-e az integrabilitás föltételeit és ekkor végre integráczióját egy közönséges $n-k$-adrendű differencziálegyenletrendszerére lehet visszavezetni. Ezen integrabilitási föltételek most föltételi egyenleteket adnak a Q_k számára. Alakjuk a következő:

$$\frac{dQ_{k+i}}{dz_j} = \frac{dQ_{k+i,j}}{dx} \tag{D}$$

$$\frac{dQ_{k+i,j}}{dz_l} = \frac{dQ_{k+i,l}}{dz_j}$$

$$(i = 1, \ldots n - k),$$
$$(j = 1, \ldots k),$$
$$(l = 1, \ldots k),$$

míg e teljes differencziálhányadosok értelme:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z_{k+1}} Q_{k+1} + \frac{\partial f}{\partial z_{k+2}} Q_{k+2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z_n} Q_n,$$

$$\frac{df}{dz_j} = \frac{\partial f}{\partial z_j} + \frac{\partial f}{\partial z_{k+1}} Q_{k+1,j} + \frac{\partial f}{\partial z_{k+2}} Q_{k+2,j} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z_n} Q_{n,j}.$$

Módszerünk tehát alkalmazható, ha a Q-k a (D) által jellemzett reláczióknak eleget tesznek. A legegyszerűbb ide tartozó egyenletrendszereket akkor nyerjük, ha a Q-kat állandóknak veszszük.

A Hamilton-féle rendszer redukcziója k első integrál ismerete után szintén a most vázolt eljárás szerint történik, mely elméletileg is igen érdekes, mert első általános mintáját adja a *reduktibilis* differencziálegyenletrendszernek és ez által egyszersmind ráutal arra, hogy az *irreduktibilitás* fogalmának itt is alapvető jelentősége van.

IV.

AZ ELSŐRENDŰ PARCZIÁLIS DIFFERENCZIÁLEGYENLETEK ÉS A HAMILTON-FÉLE RENDSZEREK KAPCSOLATA.

1. — Cauchy és — tőle függetlenül — Jacobi voltak az elsők, kik kimutatták, hogy a legáltalánosabb elsőrendű parcziális differencziálegyenlet integráczióját egy egyetlen közönséges differencziálegyenlet-rendszer megoldására lehet visszavezetni, az utóbbi általánosítva Hamiltonnak egy speciális esetben, a dynamikai problémák esetében nyert eredményeit. A föllépő rendszernek az előbbi fejezetben tárgyalt alakja van és integrálegyenletei adva lévén, belőlük közvetlenül végezhető operácziók által a parcziális differencziálegyenlet egy teljes integrálját nyerhetjük. Hogy ebből azután minden más integrál mikép nyerhető, azt már Lagrange mutatta. — E régibb tárgyalás azonban még hézagos volt, a mennyiben a módszer bizonyos kivételes esetekben nem vezetett a kivánt eredményhez. E hézag betöltését találjuk végre A. Mayer egy dolgozatában, mely a »Math. Annalen« 3-ik kötetében jelent meg.

Mindenekelőtt e módszert tárgyalom, mely az elsőrendű parcziális differencziálegyenlet megoldásának kérdését egy Hamilton-féle rendszer integrácziójára vezeti vissza, a lényegben Mayer gondolatmenetét követve, de némi módositással, mely rövidebbé és átnézetesebbé teszi az egész eljárást.

Legyen ismét egy Hamilton-féle rendszer, melynek rendszáma $2\,(n-1)$:

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (1.)$$
$$\frac{dp_i}{dx_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_1},$$
$$(i = 2, 3, \ldots n)$$

melyben ismét x_1 a független változó, $x_2, p_2, \ldots$ az ismeretlen függvények. Az általános integrálegyenletekben a tetszőleges állandók

$$x_2^0, \ldots x_n^0, p_2^0, \ldots p_n^0$$

jelentsék a kezdőértékeket, melyeket a függvények fölvesznek, ha $x_1 = x_1^0$. Ha most még az $x_2 \ldots p_2 \ldots$ betűket még függvényjelek gyanánt is használjuk, a rendszer megoldását a következő alakban irhatjuk:

$$x_i = x_i\,(x_1\,;\, x_2^0, \ldots x_n^0;\, p_2^0, \ldots p_n^0), \quad (2.)$$
$$p_i = p_i\,(x_1\,;\, x_2^0, \ldots x_n^0;\, p_2^0, \ldots p_n^0),$$
$$(i = 2, 3, \ldots n).$$

Az x_i, p_i-knek e jelentést adva, vizsgáljuk meg a következő kifejezés variáczióját:

$$V = \int\limits_{x_1^0}^{x_1} \left(\sum_{i=2}^{i=n} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H \right) dx_1$$

hol a variálandó függvények természetesen $x_2, \ldots p_2 \ldots$ Jegyezzük meg mindjárt, hogy, miután e függvények az előbb fölirtak, alakjuk változása csak a bennük föllépő tetszőleges állandók változása által történhetik és igy tehát e variáczió ∂V nem egyéb, mint V teljes differencziálja az $x_2^0 \ldots, p_2^0, \ldots$ szerint.

Ha a variálást az integrál jele alatt valóban végezzük, lesz:

$$\delta V = \int\limits_{x_1^0}^{x_1} \left[\sum_{i=2}^{i=n} \left(p_i \delta \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) - \partial H \right] dx_1,$$

vagy, miután:

$$\delta H = \sum_{i=2}^{i=n} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right),$$

lesz:

$$\delta V = \int\limits_{x_1^0}^{x_1} \sum_{i=2}^{i=n} \left(p_i \delta \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \delta x_i\right) dx_1.$$

Ha most a H parcziális differencziálhányadosait az adott Hamilton-féle rendszer értelmében fölcseréljük, az x_i, p_i-nek x_1 szerint volt differencziálhányadosaival, e variáczió továbbá

$$\delta V = \int\limits_{x_1^0}^{x_1} \left(\sum_{i=2}^{i=n} p_i \delta \frac{dx_i}{dx_1} + \frac{dp_i}{dx_1} \delta x_i\right) dx_1.$$

Ebben a kifejezésben:

$$\delta \frac{dx_i}{dx_1} = \frac{d\delta x_i}{dx_1},$$

és azért:

$$p_i \delta \frac{dx_i}{dx_1} + \frac{dp_i}{dx_1} \delta x_i = \frac{d(p_i \delta x_i)}{dx_1},$$

tehát:

$$\delta V = \int\limits_{x_1^0}^{x_1} \sum_{i=2}^{i=n} \frac{d(p_i \delta x_i)}{dx_1} \, dx_1.$$

Itt most már az integrál jele alatt differencziálhányados áll és igy az integrácziót közvetlenül elvégezhetjük. Lesz:

$$\delta V = \left[\sum_{i=2}^{i=n} p_i \, \delta x_i\right]_{x_1^0}^{x_1}$$

és részletesebben kiirva:

$$\delta V = p_2 \delta x_2 + \ldots + p_n \, \delta x_n + p_2^0 \, \delta x_2^0 - \ldots - p_n^0 \, \delta x_n^0. \quad (4.)$$

Ha még a δV-t a valóban független változó elemek variácziói által akarnók kifejezni, akkor még a

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_2^0} \delta x_2^0 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial x_n^0} \delta x_2^0 + \frac{\partial x_i}{\partial p_2^0} \delta p_2^0 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial p_n^0} \delta p_n^0$$

értékek volnának a (4.)-be helyettesítendők. De ezt nem teszszük. Czélunk ugyanis más, a δV-t kifejezni

$$x_2, \ldots x_n, p_2^0, \ldots p_n^0$$

variácziói által. Erre csak az szükséges, hogy az

$$x_i = x_i\,(x_{1i}\,x_2^0, \ldots x_n^0\,;\,p_2^0, \ldots p_n^0)$$
$$(i = 2, \ldots, n)$$

számra nézve $n-1$ egyenletet megoldjuk $x_2^0, \ldots x_n^0$ szerint. Ha azután p.

$$x_i^0 = f_i\,(x_1\,;\,x_2, \ldots x_n\,;\,p_2^0, \ldots p_n^0),$$

és ebből:

$$\delta x_i^0 = \frac{\partial f_i}{\partial x_2}\,\delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\delta x_n + \frac{\partial f_i}{\partial p_2^0}\,\delta p_2^0 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial p_n^0}\,\partial p_n^0,$$

csak δx_1^0 értékeit kell δV-be helyettesíteni, hogy a czélba vett alakot nyerjük. — A δV alakját azonban még sem tudjuk igy fölirni, mert amaz egyenletrendszer megoldását nem lehet explicite elvégezni. Ép ezért fölcseréljük a V-t a következő kifejezéssel

$$W = \sum_{i=2}^{i=n} p_i^0 x_i^0 + V; \tag{5.}$$

akkor

$$\delta W = \sum_{i=2}^{i=n} \delta(p_i^0 x_i^0) + \delta V,$$

és minthogy

$$\delta\,(p_i^0 x_i^0) = p_i^0 \delta x_i^0 + x_i^0 \delta p_i^0,$$

ha még a δV föntebb kifejtett értékét tekintetbe veszszük:

$$\delta W = p_2\,\delta x_2 + \ldots p_n \delta x_n + x_2^0 \delta p_2^0 + \ldots + x_n^0\,\delta p_n^0 \tag{6.}$$

A W-ben a változó elemek eredetileg a tetszőleges állandók, $x_2^0 \ldots x_n^0, p_2^0 \ldots p_n^0$. Az $x_2^0 \ldots x_n^0$ független elemek helyett bevezetjük az $x_2 \ldots x_n$-t és ekkor δW alakja épen e transformácziónak megfelelő, ha t. i. még a $p_2 \ldots p_n$-t, $x_2^0 \ldots x_n^0$-okat a (2.) alatti egyenletek segítségével kiszámitottaknak gondoljuk. De ily fölfogásban a δW még igy is irható:

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial x_2}\,\delta x_2 + \ldots + \frac{\partial W}{\partial x_n}\,\delta x_n + \frac{\partial W}{\partial p_2^0}\,\delta p_2^0 + \ldots + \frac{\partial W}{\partial p_n^0}\,\delta p_n^0, \tag{7.}$$

a miből végre következtetjük, hogy:

$$\frac{\partial W}{\partial x_2} = p_2, \quad \frac{\partial W}{\partial p_2^0} = x_2^0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial W}{\partial x_n} = p_n, \quad \frac{\partial W}{\partial p_n^0} = x_n^0. \tag{8.}$$

E képletekben most természetesen föl van tételezve, hogy W kifejezésében, mely az x és p változókkal együtt a kezdőértékek függvénye, az x_i^0-okat az x_i és p_i^0-ból összerakott alakok által pótolták, és igy *W-t, mint az* $x_1, x_2, \dots x_n, p_2^0, \dots p_n^0$ *függvényét állitottuk elő.*

2. — A (8.) alatt álló egyenletek minden további következtetésnek alapját teszik; de levezetésük, mielőtt azt elfogadhatjuk, még néhány pontban kiegészítendő. Az egyenleteket úgy nyerjük, hogy a δV két különböző kifejezését egymásból kivonjuk. Ily módon:

$$0=\left(\frac{\partial W}{\partial x_2}-p_2\right)\delta x_2+\dots+\left(\frac{\partial W}{\partial x_n}-p_n\right)\delta x_n+\left(\frac{\partial W}{\partial p_2^0}-x_2^0\right)\delta p_2^0+\dots$$
$$\dots+\left(\frac{\partial W}{\partial p_n^0}-x_n^0\right)\delta p_n^0.$$

Ha az itt föllépő variácziók egymástól teljesen függetlenek, ez csak úgy lehetséges, hogy minden variáczió együtthatója zérus, és ekkor épen a föntebbi egyenleteket nyerjük. De ez egyenletek megfordítva csak is akkor helyesek, ha a variácziók egymástól függetlenek. A $\delta p_2^0 \dots \delta p_n^0$-ra nézve ez közvetetlenül világos; de nem az x-ekre nézve, ha ezek között van valami reláczió, akkor ebből egy másik következik a variácziók között. Ki kell tehát még mutatni, hogy ily reláczió nincsen. *) Arra, hogy az

$$x_i = x_i\,(x_1\,, x_2^0, \dots x_n^0, p_2^0 \dots p_n^0), \qquad (2.)$$
$$(i = 2, \dots n)$$

által adott függvények egymástól függetlenek legyenek, vagyis hogy az x_i-kat ne kapcsolja össze az x_i^0-októl független egyenlet (más kifejezésmódban, hogy a (2.) alatti egyenleteket az

*) E következtetések nem tisztán elméleti jelentőségüek, melyek tárgyalásunk szigorú voltát biztosítják. A régibb Jacobi-féle tárgyalás lényegben ettől az által különbözik, hogy nem az x_i^0, hanem a p_i^0-ek helyébe vezetjük be az x_i-iket. Ez azonban valóban lehetetlen lesz a H függvény bizonyos értékeinél és így megfordítva a parcziális differencziálegyenletek bizonyos osztályánál szintén nem lehetséges a Hamilton-féle rendszerre való visszavezetést elvégezni. E kivételes eset jelentőségére még visszatérek.

x_i^0-ok szerint meg lehessen oldani), a szükséges és elégséges föltétel, hogy a:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial x_2^0}, & \frac{\partial x_2}{\partial x_3^0}, & \dots, & \frac{\partial x_2}{\partial x_n^0} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_2^0}, & \frac{\partial x_3}{\partial x_3^0}, & \dots, & \frac{\partial x_3}{\partial x_n^0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial x_2^0}, & \frac{\partial x_n}{\partial x_3^0}, & \dots, & \frac{\partial x_n}{\partial x_n^0} \end{vmatrix}$$

determináns ne legyen identice zérus. Erre elég kimutatni, hogy D értéke a 0-tól különböző, ha x_1 helyébe x_1^0-ot teszünk. Az x_i-ről tudjuk, hogy átmennek x_i^0-ba, ha $x_1 = x_1^0$, és igy tehát, miután az $x_1 = x_1^0$ közelében véges, egyértékű és folytonos függvények: *)

$$x_i = x_i^0 + (x_1 - x_1^0)\, K_i,$$

hol K_1-nek az $x_1 - x_1^0$ positiv egész hatványai szerint haladó sor alakja van. Ebből

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_i^0} = 1 + (x_1 - x_1^0)\frac{\partial K_i}{\partial x_i^0},$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} = (x_1 - x_1^0)\frac{\partial K_i}{\partial x_j^0}, \quad (j \gtrless i),$$

hol K-val együtt az x_i^0 parameterek szerint vett differencziálhányadosai is végesek, ha $x_1 = x_1^0$. Igy tehát:

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_i^0}\right)_{x_1 = x_1^0} = 1,$$

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j^0}\right)_{x_1 = x_1^0} = 0,$$

a D elemei tehát, ha x_1 helyébe x_1^0-ot teszünk, mindannyian eltünnek, a diagonálisban állók kivételével, melyek az egységgel egyenlők és igy tehát:

$$(D)_{x_1 = x_1^0} = 1.$$

---

*) Épen e föltétel szorítja meg egyedül a kezdőértékek választását.

D tehát nem tűnhetik el identikus módon, és igy most már a (8.) alatt álló egyenletek teljesen igazolva vannak.

3. — E kitérés után összeállitom az első pontban nyert eredményeket:

Ha $x_2, .. x_n. p_2, ... p_n$ a következő Hamilton-féle rendszernek megoldásai:

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dx_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad (1.)$$

$$i = (2, ... n)$$

ha továbbá $x_2^0, ..., x_n^0, p_2^0, ... p_n^0$ e függvények kezdőértékeit jelentik, ha $x_1 = x_1^0$, akkor helyettesítsük a

$$W = p_2^0 x_2^0 + .. + p_n^0 x_n^0 + \int_{x_1^0}^{x_1} \left(\sum_{i=2}^{i=n} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H \right) dx_1$$

kifejezésben, mely tulajdonképen (x_1 mellett) a kezdőértékek függvénye, az $x_2^0 ... x_n^0$ helyébe az

$$x_i = x_i (x_1, x_2^0 ... x_n^0, p_2^0 ... p_n^0)$$

egyenletekből vett értékeiket. Ez által W az $x_1\ x_2 ... x_n, p_2^0 .. p_n^0$ függvénye lesz és a W ily alakjára nézve:

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = p_i, \frac{\partial W}{\partial p_i^0} = x_i^0 \qquad (8.)$$

$$i = (2, ... n),$$

Közvetetlenűl látni, hogy *az utolsó egyenletek (8.) az adott Hamilton-féle rendszer általános integrálegyenleteit képviselik.* Ezek ugyanis $2(n-1)$ relácziót adnak az x_1, x_i, p_i és a kezdőértékek között, és e relácziók függetlenek is egymástól, mert bármelyik egyenlet egy mennyiséget, egy p_i-t vagy egy x_i^0-t tartalmaz, mely a többiekben nem fordúl elő, tehát nem is hozható le a többiek összeállitásából. E tétel azonban semmikép sem adja a Hamilton-féle rendszer integráczióját. Erre ugyanis szükséges volna, hogy a W függvényt ismerjük, ez pedig csak a rendszer integrácziója után ismeretes. A nyert eredmény azonban más irányban igen fontos. Kimutatja ugyanis, hogy *épen úgy, a mint a Hamilton-féle rendszer differencziálegyenleteit egy egyetlen H függvény parcziális differencziál-*

hányadosai jellemzik, úgy az integrálegyenleteknek is oly alak adható, melyben egy egyetlen W függvény parcziális differencziálhányadosai által adva vannak.

H-t a *charakteristikus függvény*nek, W-t *alapfüggvény*nek szokás nevezni.

Az alapfüggvény, W számára egy n független változót tartalmazó elsőrendű parcziális differencziálegyenletet képezhetünk.

Ha ugyanis a W-t mint az $x_1, x_2 \ldots x_n$ függvényét veszszük és tekintetbe veszszük, hogy $x_2 \ldots x_n$ ismét az x_1 függvényei, akkor:

$$\frac{dW}{dx_1} = \frac{\partial W}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dx_1},$$

vagy, ha az itt előforduló teljes differencziálhányadosok értékeit a Hamilton-féle rendszerből veszszük:

$$\frac{dW}{dx_1} = \frac{\partial W}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Más oldalról a W-nek integrál alakjából közvetlenűl nyerni:

$$\frac{dW}{dx_1} = \sum_{i=2}^{i=n} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H.$$

És a két alak összehasonlításából:

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} + H(x_1, x_2 \ldots x_n, p_2, \ldots p_n) = 0,$$

hol a viszonyok jobb föltüntetésére a H-ba, mint függvényjelbe beirtuk ama mennyiségeket, melyek a H-ban előfordulnak. Ez, ha az x_i, p_i-k a Hamilton-féle rendszer megoldásai, identitás és az marad, ha az integrálegyenleteknek (8.) alatt álló alakjából a p_i-k értékeit helyettesítjük. Igy lesz:

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} + H\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial W}{\partial x_2} \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (9.)$$

Ez egyenlet nemcsak hogy helyes, de *identikus* egyenletnek kell lennie. Benne ugyanis mindenütt a W mint az $x_1, x_2, \ldots x_n, p_2^0\ p_n^0$ függvénye szerepel; és miután a levezetés minden esetre helyes, érvényesnek kell maradnia, ha az x-ek helyébe a kezdőértékeket teszszük. Ha ekkor nem kapunk identitást, ez kapcsolatot adna a tetszőleges kezdőértékek között, a mi lehetetlenség. Az x_2^0-ok pedig ép úgy tetszőleges mennyiségek, mint az x_i-k maguk; tehát a (9.) egyenlet identitás. Ha most ebben a W-t ismeretlen függvénynek veszszük, akkor a (9.) parcziális differencziálegyenlet a W számára és igy a nyert eredmény ugy is fogalmazható, hogy *az előbb értelmezett W függvény a (9.)-czel jelölt parcziális differencziálegyenlet megoldása.*

E megoldás, mely természetesen egy additiv állandó hozzáadása után is ilyen marad:

$$W = W(x_1, x_2, \ldots x_n, p_2^0 \ldots p_n^0) + C,$$

ú. n. *teljes integrál.* Ez ugyanis ebben az esetben, hol a differencziálegyenlet az ismeretlen függvényének csakis differencziálhányadosait tartalmazza, annyit jelent, hogy ha a W-nek parcziális differencziálhányadosait képezzük:

$$\frac{\partial W}{\partial x_j} = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots x_n, p_2^0 \ldots p_n^0), \; (j = 1, 2, \ldots n)$$

az itt előforduló összes számra nézve $n-1$ állandó, $p_2^0, \ldots p_n^0$ kiküszöbölése kevesebből, mint az összes n egyenletből nem lehetséges. — Ha ugyanis e kiküszöbölés lehetséges volna, akkor relácziót nyernénk a

$$\frac{\partial W}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n}$$

között, melyben azonban ezek közül az egyik hiányzik és ép azért a (9.) alatt állóval nem lehet aequivalens. Hiányzónak mindig a $\frac{\partial W}{\partial x_1}$-et vehetjük, mert ha ez benne előfordúl, helyette a (9.)-ből vett értéket vehetjük. Igy tehát egy egyenletet nyernénk:

$$\Phi\left((x_1\; x_2, \ldots x_n, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n}\right) = 0,$$

mely a W adott értékénél identitás volna. Ha a (8.)-ból a differencziálhányadosok értékeit veszszük, volna ismét identice

$$\Phi(x_1\; x_2, \ldots x_n, p_2, \ldots p_n) = 0;$$

ez az egyenlet fönnállana még akkor is, ha ismét a változók helyébe kezdőértékeiket teszszük. Föltevésünk tehát e kezdőértékek között kapcsolatot adna, és igy e következményével együtt lehetetlen.

A H függvény kezdettől fogva egészen tetszőleges volt, és igy eredményeink könnyen úgy fogalmazhatók, hogy a (9.)-czel jelölt *parcziális differencziálegyenlet integrácziójára* vonatkozzanak:

A következő parcziális differencziálegyenletnek megfelelőleg:

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} + H\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n}\right) = 0$$

integráljuk e Hamilton-féle rendszert:

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dx_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

$$(i = 2, \ldots . n)$$

hol a H függvényben $\frac{\partial W}{\partial x_i}$ helyébe mindenütt p_i-t gondolunk betéve. Ha e rendszerből:

$$x_i = x_i\,(x_1, x_2^0, \ldots x_n^0, p_2^0, \ldots p_n^0),$$

$$p_i = p_i\,(x_1, x_2^0, \ldots x_n^0, p_2^0, \ldots p_n^0),$$

$$(i = 2, \ldots n);$$

akkor számítsuk ki a következő kifejezést:

$$W = \sum_{i=2}^{i=n} p_i^0 x_i^0 + \int_{x_1^0}^{x_1} \left(\sum_{i=2}^{i=k} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H\right) dx_1,$$

és helyettesítsük benne az $x_2^0, \ldots x_n^0$ helyébe az

$$x_i = x_i\,(x_1, x_2^0 \ldots x_n^0, p_2^0 \ldots p_n^0)$$

egyenletek megoldásából nyerhető értékeket. Az ily módon előálló kifejezés tetszőleges állandó hozzáadásával:

$$W = W\,(x_1\, x_2 \ldots x_n, p_2^0, \ldots p_n^0) + C,$$

a parcziális differencziálegyenlet teljes integrálja.

Az előadott tétel, mely a parcziális differencziálegyenlet integráczióját a Hamilton-féle rendszerére vezeti vissza, nem más, mint a Cauchy-féle vagy más néven Jacobi-Hamilton-féle módszer az általános elsőrendű parcziális differencziálegyenletek megoldására.

Mindenekelőtt könnyű kímutatni, hogy a módszer minden elsőrendű parcziális differencziálegyenletre alkalmazható. A tárgyalt alak speczіális jellegű az által, hogy az ismeretlen függvény maga nem fordúl elő, hanem csak a differencziálhányadosokban lép föl. De ismeretes transformáczió által minden differencziálegyenlet ilyenbe vezethető át. Ez azután föut a $\frac{\partial W}{\partial x_1}$ szerint megoldott alakban lép föl, a mi ismét nem megszorítás, mert a H függvény tetszőleges. Különben a követelt számitások keresztűlvihetők úgy is, hogy a differencziálegyenletet oldatlan alakban hagyjuk.

Ha a most nyert eredményt a Hamilton-féle rendszerek integrácziójára szolgáló, az előbbi fejezetben tárgyalt módszerrel öszszekötjük, *az általános elsőrendű parcziális differencziálegyenlet megoldására szolgáló módszert nyerünk,* mely a most ismeretes eljárások közt legegyszerűbb Mayer és Lie-félékkel egyenlő számú alapoperácziót követel, de levezetésében sokkal egyszerűbb, a mennyiben a Jacobi terjedelmes ujabb elméleteiből nem tételez föl semmit.

Az e fejezetben kifejtett elmélet továbbá még azt is mutatja, hogy az n független változót tartalmazó parcziális differencziálegyenlet és a megfelelő $2(n-1)$-edrendű Hamilton-féle rendszer két aequivalens problémát képvisel. T. i. nemcsak hogy a differencziálegyenlet teljes integrálja levezethető a Hamilton-féle rendszer integráljaiból, hanem megfordítva a Hamilton-féle rendszer integráljai teljesen ismeretesek, ha a parcziális differencziál-egyenletnek csak egy teljes integrálja ismeretes. E megfordított tétel közvetetlenűl világos volna, ha a parcziális differencziálegyenletnek csak egy teljes integrálja volna. Azonban ilyen végtelen sok van; és így még fönnmarad ama nehézség, hogy e végtelen sok alak közt miképen találjuk meg azt a W értéket, mely fejtegetéseinkben föllépett. E nehézség azonban megszünik, ha bebizonyítjuk, hogy *tételeink érvényesek maradnak, a parcziális differencziálegyenletnek bármely teljes integrálját jelentse is W.*

E tétel bebizonyítását itt mellőzöm, annál inkább, miután a mi tárgyalásunkban fontos szerepe úgy sincsen. Ez t. i.

arra szolgált, hogy a Hamilton-féle rendszer integráczióját parcziális differencziálegyenletére vezesse vissza; míg az integráczió ama módszere, melyet az előbbi fejezetben adtam, a problémának tárgyalásában az ily idegen elem behozását fölöslegessé teszi.

4. — A Mayer által módositott Jacobi-Hamilton-féle elmélet előterjesztése után talán jó lesz, ezt egy általánosabb, de mégis egyszerűbb példán fölvilágosítani, mely egyszersmind más e tárgygyal kapcsolatos kérdésre utal. E példa a homogén lineár parcziális differencziálegyenlet tárgyalása, melyre különben ismeretes módon speciális módszerek is vezetnek.

Az ily differencziálegyenlet általános alakja:

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial W}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial W}{\partial x_3} + \ldots X_n \frac{\partial W}{\partial x_n} = 0$$

hol $X_2, \ldots X_n$ az $x_1, x_2 \ldots x_n$ tetszőleges függvényeit jelentik. Az ennek megfelelő H függvény, ha benne mindjárt $\frac{\partial W}{\partial x_i}$ helyett p_i-t irunk:

$$H = X_2 p_2 + X_3 p_3 + \ldots + X_n p_n,$$

és igy a megfelelő Hamilton-féle rendszer:

$$\frac{dx_i}{dx_1} = X_i,$$

$$\frac{dp_i}{dx_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

$$(i = 2, 3, \ldots n)$$

míg a megfelelő kifejezésben:

$$\sum_{i=2}^{i=n} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_{i=2}^{i=n} p_i X_i = H,$$

és ebből:

$$W = p_2^0 x_2^0 + \ldots + p_n^0 x_n^0.$$

Most a Hamilton-féle rendszer integrálegyenleteiből ki kell fejezni az x_i^0-okat az x_i-k által; ebben azonban a H függvény speciális jellege lényeges egyszerűsítést ád. T. i. a Hamilton-féle rendszerben foglalt egyenletek első csoportja

$$\frac{dx_i}{dx_1} = X_i$$

a p-ket nem is tartalmazza, és egymagában mint $n-1$-edrendű rendszer integrálható. Ebből:

$$x_i = x_i\,(x_1\,,\, x_2^0\,, \ldots\, x_n^0),$$

és ha most a Hamilton-féle rendszert teljesen akarjuk integrálni, az így nyert értékeket az egyenletek második csoportjába behelyettesítjük és így még egy második n—1-edrendű rendszer integrálandó. De e második rendszer integrácziója egészen elmaradhat. Az előbb fölirt integrálegyenletek épen azok, melyek a W transformácziójára szükségesek, és így ha ezeknek az x_i^0 szerint megoldott alakja:

$$x_i^0 = f_i\,(x_1\,, x_2\,, \ldots\, x_n)$$

a megfelelő parcziális differencziálegyenlet teljes integrálja

$$W = p_2^0 f_2 + \ldots p_n^0 f_n\,,$$

melyből azután az általános integrál $\varphi\,(f_2\,, \ldots f_n)$, — hol φ tetszőleges függvényt jelent — tüstént fölirható. Világos egyszersmind, hogy az $x_1^0 = f_i$ alakok nem mások, mint a

$$\frac{dx_i}{dx_1} = X_i$$

totál differencziálegyenletrendszer független első integráljai.

A tárgyalt példa elméletileg érdekes az által, hogy mutatja, miképen redukálható a probléma a H bizonyos speciális alakjainál. A $2\,(n-1)$-edrendű Hamilton-féle rendszer két $(n-1)$-edrendű rendszerre esik szét, melyek egymás után integrálhatók. A parcziális differencziálegyenlet megoldására egyáltalában csak az első rendszer integrácziója végzendő; és így a Hamilton-féle rendszer integrácziója is már teljesen ismeretes az első rendszer megoldása után.

5. — A tárgyalt példa csak szélső esete *a probléma ama* — eddig nem ismert — *redukcziójának, mely mindenkor eszközölhető, ha a H-nak a p_i-k szerint vett függvénydeterminánsa eltünik.* (A föntebbi példában a determináns minden eleme 0 lesz.)

E redukczió lehetősége azon alapszik, hogy a W-ben az integrál jele alatt előforduló

$$\varphi = \sum_{i=2}^{i=n} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H \qquad (10.)$$

kifejezés mint az

$$x_1, x_2, \ldots x_n, x'_2, \ldots x'_n$$

függvénye irható, hol rövidség kedvéért $\frac{dx_i}{dx_1}$ helyett x'_i-et irunk.

Általánosságban ez magában világos, mert a Hamilton-féle rendszerben foglalt egyenletek első csoportja:

$$x'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

akkor $p_2 \ldots p_n$ szerint megoldható, és az így nyert értékek φ-ben helyettesíthetők. Azonban épen ebben az esetben a φ e transformáczиója nem vezet új eredményekhez. Ez csak akkor történik, mikor az utolsó egyenletrendszer nem oldható meg a p-k szerint, vagyis midőn más szóval a $\frac{\partial H}{\partial p_i}$-k, és így az x'_i-k között a p-ktől független relácziók léteznek. Ez akkor történik, ha H függvényterminánsa

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^2}, & \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_3}, & \ldots, & \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_n} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_3}, & \frac{\partial^2 H}{\partial p_3^2}, & \ldots, & \frac{\partial^2 H}{\partial p_3 \partial p_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_n}, & \frac{\partial^2 H}{\partial p_3 \partial p_n}, & \ldots, & \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^2} \end{vmatrix}$$

eltűnik és erre az esetre egyszersmind a φ-nek fönt kijelentett sajátsága külön bebizonyítást igényel. A (11.) alatt álló egyenletrendszer most olyan, hogy az n—1 egyenletből most az n—1 mennyiség $p_2 \ldots p_n$ mind eliminálható, és az ezáltal keletkező független egyenletek, melyeknek száma természetesen n—1-nél kisebb, legyenek:

$$F_r\ (x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_2, \ldots x'_n) = 0,$$
$$(r = 1, 2, \ldots, k—1)$$

A relácziók számát k—1-nek véve, e relácziók mutatják, hogy az $x_2 \ldots x_n$, $x'_2 \ldots x'_n$ variácziói sem függetlenek egymástól, hanem közöttük is k-egyenlet áll fönn, t. i.

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\delta x_n + \frac{\partial F}{\delta x'_2}\delta x'_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x'_n}\delta x'_n = 0.$$
$$(r = 1, 2, \ldots, k—1)$$

Ebből a $k-1$ relációból p.

$$\delta x'_2, \delta x'_3, .. \delta x'_k$$

kifejezhető mind a többinek lineáris függvénye.

A $\delta\varphi$ maga, épen úgy, mint előbb, lesz:

$$\delta\varphi = p_2 \delta x'_2 + .. + p_n \delta x'_n - \frac{\partial H}{\partial x_2}\delta x_2 - ... - \frac{\partial H}{\partial x_n}\delta x_n,$$

vagy ha a $\delta x'_2, .. \delta x'_k$ variácziókat kifejezzük a többiek által:

$$\delta\varphi = \lambda_2 \delta x_2 + .. + \lambda_n \delta x_n + \mu_{k+1}\delta x'_{k+1} + ... + \mu_n \delta x'_n. \quad (12.)$$

Ha — mint most épen föltételezzük — az $x'_2 ... x'_n$ közt k—1 reláczió áll fönn, ezek nem vezethetők be független változóknak a p-k helyébe, de igen még:

$$x'_{k+1}, x'_{k+2}, ... x'_n,$$

melyek közt, miután a mutatók sorrendjét már fönt igy megállapítottuk, nincs összefüggés. Ezek mellett tehát még meghagyandó k—1 a p-k közül, melyek kiszemelése az által történik, hogy a (11.)-gyel jelölt rendszer a többiek szerint megoldható. Ezek legyenek:

$$p_{i_1}, p_{i_2}, ... p_{i_{k-1}}.$$

Akkor a φ-be belépő független függvények mindössze:

$$x_2, x_3, ..., x_n; x'_{k+1}, ... x'_n; p_{i_1}, ... p_{i_{k-1}}.$$

és e szerint a $\delta\varphi$ egy második kifejezése lesz:

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\delta x_2 + ... + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\delta x_n + \frac{\partial\varphi}{\partial x'_{k+1}}\delta x'_{k+1} ... + \frac{\partial\varphi}{\partial x'_n}\delta x'_n +$$
$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial p_{i_1}}\delta p_{i_1}, + .. + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{i_{k-1}}}\delta p_{i_{k-1}}. \quad (13.)$$

De a $\delta\varphi$ (12) és (13.) alatt álló két kifejezésben csupa független variácziók állanak és igy kell, hogy a két kifejezésben az egyes variácziók együtthatói egyenlők legyenek, tehát:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{i_1}} = 0,$$
$$. \quad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad (14.)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{i_{k-1}}} = 0.$$

Ez az egyenletrendszer azonban már azt mondja, hogy ha a φ ben a

$$p_2, p_3, ..., p_n$$

helyébe bevezetjük a

$$p_{i_1}, \ldots p_{i_{k-1}}, x'_{k+1}, \ldots x'_n$$

függvénycsoportot, mely az előbbiből még k—1-et tartalmaz, akkor a transformáczió kivitelénél ezek is elesnek. Evvel tehát bebizonyítottuk a kezdetben kimondott tételt.

A parcziális differencziálegyenlet integrácziójára e szerint elégséges, ha a Hamilton-féle rendszerből az

$$x_2, \ldots x_n, x'_{k+1} \ldots x'_n$$

függvények általános kifejezését nyerjük. Csak ezek szükségesek a W első kiszámítására, míg az azután történő átalakításra már csak az x-ek szükségesek.

A H függvény föltételezett speciális alkatánál, e függvények kiszámítása alacsonyabb rendű rendszerből történhetik. Ha ugyanis az

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dx_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_1},$$

egyenletek első csoportját, ujból x_1 szerint differencziáljuk, és tekintetbe veszszük, hogy:

$$\frac{d^2x_i}{dx_1^2} = \frac{dx'_i}{dx_1},$$

továbbá a jobboldalon helyt foglaló $\frac{dx_i}{dx_1}, \frac{dp_i}{dx_1}$ helyébe ismét a Hamilton-féle rendszerből értékeiket teszszük, a következő alakú egyenleteket nyerjük:

$$\frac{dx'_2}{dx_1} = G_i\,(x_1, x_2 \ldots x_n, p_2 \ldots p_n)$$

A Hamilton-féle rendszer első csoportja és a most nyert alakok mindössze 2 (n—1) egyenletet adnak, melyből a $p_2 \ldots p_n$-t mindössze n—1 mennyiséget ki lehet küszöbölni és ez által a következő alakú rendszert nyerjük:

$$f_i\left(x_1, \ldots x_i, \ldots, \frac{dx_i}{dx_1}, \ldots \frac{dx'_i}{dx_1}\right) = 0 \qquad (15.)$$

hol mindenik egyenlet tulajdonképen másodrendű, de elsőrendűnek is tekinthető, ha az x_i és x'_i kapcsolatát külön kijelentjük:

$$\frac{dx_i}{dx_1} = x'_i \qquad (15.)$$

A (15.) és (16.) együttesen most ismét $2(n-1)$-ed rendű rendszer az x_i, x'_i függvények meghatározására. A most végzett átalakításban még nem vettük tekintetbe a H speciális tulajdonságát. Ebből, mint láttuk, $k-1$ *független* reláczió folyt az x_i, x'_i között:

$$F_r(x_1, \ldots x_i, \ldots x'_i, \ldots) = 0 \qquad (17.)$$
$$(r = 1, \ldots, k-1),$$

tehát — a mutatók sorrendjének előbb történt megállapítása szerint — ezekből x'_2, x'_3, ... x'_k értéke meghatározandó, és ebből következik, hogy ezen egyenletek teljes differencziácziója által ismét $k-1$ egyenletet nyerni, melyben $\frac{dx'_2}{dx_1}, \ldots \frac{dx'_k}{dx_1}$ elő-fordúl:

$$F'_r\left(x_1, \ldots x_i, \ldots x'_i, \ldots \frac{dx'_i}{dx_1}\right) = 0 \qquad (18.)$$

A (15), (16), (17) és (18)-ban összesen $2(n-1)+2(k-1)$ egyenlet áll, melyből az

$$x'_2, \ldots x'_k, \frac{dx'_2}{dx_1}, \ldots \frac{dx'_k}{dx_1}$$

számra $2(k-1)$ mennyiség kiküszöbölése által egy $2(n-1)$ egyenletből álló rendszert nyerünk, melyben csak $2(n-1)-(k-1)$ függvény: $x_2 \ldots x_n$, $x'_{k+1} \ldots x'_n$ foglal helyet. Ezeknek tehát ki lehetne küszöbölni összes differencziálhányadosait és igy tehát újból relácziót nyernérk az x_i, x'_i között, mely független volna az előbb fölirtaktól, (17), mert azok $x'_2, \ldots x'_k$-t meghatározzák a többi függvények által, a most nyert egyenlet ezeket nem is tartalmazza, tehát egy *uj* x'_i-et határozza meg a többiek által. De ez lehetetlen, mert (17)-ben már az összes létező relácziókat fölirtuk és igy tehát a most nyert relácziónak identikusnak kell lennie. Igy tehát a $2(n-1)$ egyenletből csak

$$2(n-1)-k-1$$

lehet független; a többi egyenlet már *algebrailag* következik ezekből és igy kihagyható.

Igy tehát *csupán teljesen végezhető differencziácziók és eliminácziók által az*

$$x_2 \ldots x_n, x'_{k+1}, \ldots x'_n$$

meghatározására egy $2(n-1)-k-1$-edrendü differencziálegyenletrendszert nyertünk.

Ez teljesen megadja már a parcziális differencziálegyenlet integrráczióját és ha még tekintetbe veszszük a determinánsok elméletéből, hogy $k-1$ reláczió akkor van, midőn a $k-2$ sor és oszlop elhagyása által keletkező (a $k-2$-dik) aldeterminánsok az utolsók, melyek mindannyian eltűnnek, akkor a végeredményt még igy is fogalmazhatjuk:

A parcziális differencziálegyenlet integrácziója egy $2(n-1)-k-1$-edrendü totál differencziálegyenletére vezethetö vissza, ha H függvény determinánsa eltünik, még pedig oly módon, hogy a $k-2$-ik aldeterminánsok az utolsók, melyek még mind eltünnek.

Az előbb tárgyalt példában a H függvény determinánsának minden eleme külön 0, azaz, minthogy a determináns $n-1$-edrendű, az utolsó eltünő aldeterminánsok az $(n-2)$-ikiek; tehát $k = n$, és igy a differencziálegyenletrendszer $n-1$-edrendű.

E redukált rendszer látszólag még nem oldja meg teljesen a Hamílton-féle rendszert; de meghatározza, mint tüstént látni, ennek ugyancsak $2(n-1-k-1)$ függvényét és igy még egy $k-1$-edrendű rendszer marad megoldandó. *A Hamilton-féle rendszer megoldásában tehát a föllépö egyszerüsités annyiból áll, hogy a $2(n-1)$-edrendü rendszer helyett egy $2(n-1)-k-1$ és egy $k-1$-edrendü integrálandó egymásután; hol azonban a második rendszer integráljainak kiszámítására csak quadraturák kellenek.*

---

6. — Miután ilymódon az integráczió folyamában föllépő egyszerűsítéseket is tárgyaltuk, ámbár ezeknek elméletére még más alkalommal viszszatérni szándékozom, még a következők miatt, szükséges lesz, az előadott eljárás alapján nyert teljes integrált pontosabban jellemezni.

A parcziális differencziálegyenlet megoldásánál általánosságban még jogunkban áll, szabadon választani azt a kezdőértéket, melyet a megoldás nyerjen, midőn az egyik független változó, p. x_1 értéke adva van: x_1^0. Ha ennek a többi változó tetszőleges függvényét veszem, az *általános integrált* nyerem, ha pedig ilyennek egy megszabott függvényalakot veszek, mely kellő számú, és egymástól független tetszőleges állandót tartalmaz, akkor *teljes integrál* lesz az eredmény.

Az előadott módszer egy bizonyos teljes integrálhoz vezet és igy ennek jellemzésére tudnunk kell, hogy *mi e teljes integrál kezdőértéke, ha* $x_1 = x_1^0$?

Ekkor, mint tüstént látni, a W-ben az integrálrész mindenesetre eltünik, mert a felső határ egyenlő lesz az alsó határral, és igy a megvizsgálandó kifejezés

$$p_2^0 x_2^0 + \ldots p_n^0 x_n^0 + C$$

hol még az $x_2^0, \ldots x_n^0$ az

$$x_i = x_i\,(x_1, x_2^0 \ldots x_n^0, p_2^0 \ldots p_n^0)$$

egyenletekből meghatározandók és azután x_1 helyébe x_1^0 teendő. Világos azonban, hogy az eredmény nem változik, ha először végezzük az x_1 helyettesítését, és azután az egyenletek megoldását. Ez akkor nagyon egyszerü, mert ekkor a jobboldalon csakis kezdőértékek állanak és így az egyenletek egyszerűen:

$$x_i = x_i^0,$$

az egyenleteket máris a kivánt oldott alakban nyerjük és igy:

$$(W)_{x_1 = x_1^0} = p_2^0\, x_2 + \ldots p_n^0\, x_n + C.$$

Az összes együtthatók tetszőleges állandók és igy tehát *a módositott Jacobi-Hamilton-féle módszer a differencziálegyenlet ama teljes integrálját adja, melyben az $x_1 = x_1^0$-nak megfelelö kezdöérték a többi változók legáltalánosabb lineáris függvénye.*

V.

SIMULTÁN PARCZIÁLIS DIFFERENCZIÁL-EGYENLET-RENDSZEREK INTEGRÁCZIÓJA.

1. — Az egyes parcziális differencziálegyenletek tárgyalása után áttérünk az oly rendszerek elméletére, melyben egy függvény több egyidejűleg fönnálló parcziális differencziálegyenlet által van adva. Itt is az általunk bevezetett módszerek a problémának uj és igen egyszerű megoldásához vezetnek, mely impliczite tulajdonképen már bennfoglaltatik a II. és III. fejezet tárgyalásaiban. — Mindenekelőtt azonban ismét összeállítom a probléma pontos fogalmazására vonatkozó dolgokat. A differencziálegyenleteket ismét már amaz egyszerűsített alakban gondoljuk irva, hol az ismeretlen függvény csak a differencziálhányadosokban fordúl elő. E szerint, ha z az ismeretlen függvény, $x_1, x_2 \ldots x_n$ a független változók, ha továbbá $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ helyett röviden p_i-t irunk, a tárgyalt egyenletek általános alakja

$$\Phi\ (x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0$$

melyet néha a függvényjelben előforduló betűk kihagyásával $\Phi = 0$-nak irunk.

Ha most a z függvény meghatározandó a következő rendszerből:

$$\Phi_1 = 0, \Phi_2 = 0, \ldots . \Phi_m = 0,$$

akkor ismét mindenekelőtt *a probléma lehetőségének föltételeit* kell megállapítanunk; mert közvetetlenül világos, hogy az adott egyenletek esetleg nem is lehetségesek együtt, a mint az már kitűnik a quadraturák föladatából, mely hiszen a most tárgyaltnak legegyszerűbb esete. Ha t. i. $m = n$, akkor az n egyenletből a p-ket mint az x függvényeit nyerjük, és akkor szükséges, hogy e kifejezések eleget tegyenek az integrabilitás föltételeinek. Sőt az is lehetséges, hogy az egyenletek nem oldhatók meg a p-k szerint, tehát az x-ek közt relácziót adnak, a mikor a föladat természetesen lehetetlen.

Kérdezzük tehát általánosságban, hogy kettő ama differencziálegyenletek közül, p.

$$\Phi_r = 0, \Phi_s = 0$$

mikor állhat fönn együtt?

Hogy erre föltételt nyerjünk, vegyük tekintetbe, hogy a p_i-k ugyanazon függvény differencziálhányadosai, hogy tehát ezek, melyek végelemzésben az $x_1, \ldots x_n$ függvényei, következő egyenleteknek tartoznak eleget tenni.

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}.$$

Ha ezután a két fölvett egyenletet x_i szerint differencziáljuk, tekintetbe véve, hogy a p-k is x_i függvényei, lesz:

$$\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \Phi_r}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial x_j} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \Phi_s}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0.$$

Ha most az első egyenletet megszorozzuk $\frac{\partial \Phi_s}{\partial p_i}$-vel, azután az i helyébe minden értéket teszünk 1-től n-ig és végre összeadunk, lesz:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_s}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \Phi_r}{\partial p_k} \frac{\partial \Phi_s}{\partial p_i} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0.$$

Hasonlókép szorozzuk a második egyenletben $\frac{\partial \Phi_r}{\partial p_i}$-vel és adunk össze az i-k szerint: lesz:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \Phi_s}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_r}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \Phi_s}{\partial p_k} \frac{\partial \Phi_r}{\partial p_i} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0.$$

Ha e két egyenletet egymásból levonjuk, a kettős összegek két-két tagja:

$$\frac{\partial \Phi_r}{\partial p_k} \frac{\partial \Phi_s}{\partial p_i} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} \text{ és } \frac{\partial \Phi_s}{\partial p_i} \frac{\partial \Phi_r}{\partial p_k} \frac{\partial p_i}{\partial x_k}$$

a p-k közt fönnálló relácziók miatt mindig egyenlő és igy az eredmény:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_s}{\partial p_i} - \frac{\partial \Phi_s}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_r}{\partial p_i} \right) = 0.$$

A baloldalon álló összeg számára a Jacobi által bevezetett jelt (Φ_r, Φ_s)-t használva, e szerint *annak, hogy a $\Phi_r = 0$ és $\Phi_s = 0$ parcziális differencziálegyenletek egyidejüleg fönnállhassanak, szükséges föltétele:*

$$(\Phi_r, \Phi_s) = 0.$$

2. — Ha most az igy nyert szükséges föltétel segítségével a

$$\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_m = 0$$

rendszer integrácziójának lehetőségét akarjuk vizsgálni, az eljárás következő lesz:

Mindenekelőtt világos, hogy az egyenletek száma, n nem lehet nagyobb a független változók számánál n-nél; mert különben a $p_1, p_2, \ldots p_n$ kiküszöbölésével relácziót nyernénk a független változók között, a mi lehetetlenség. (Ha e kiküszöbölés nem vezetne relácziához az x-ek között, hanem identitáshoz, ez annyit jelentene, hogy egy vagy több egyenlet a többinek algebrai következménye; de ezeket, melyek uj adatot nem adnak, egyszerűen kihagyjuk, azaz a fölvett egyenleteket algebrai értelemben már egymástól függetleneknek veszszük.)

Az adott egyenletek, ha a $p_1, p_2 \ldots p_n$ közül m-et kellően kiválasztunk, ezek szerint megoldhatók. A mutatók sorrendjét úgy választhatjuk, hogy ezek $p_1, p_2 \ldots p_m$ legyenek. A Φ_1-ben ugyanis mindenesetre előfordúl egy p; ez legyen p_1; így tehát a $\Psi_1 = 0$ egyenlet segitségével a többi egyenletből kiküszöbölhetni p_1-et; és igy a

$$\Phi_2 = 0, \ldots, \Phi_m = 0$$

uj alakokban ekkor p_1 nem fordúl elő; de Φ_2 tartalmaz legalább egy p-t, mert különben vagy reláczió az x-ek közt és ekkor ez mutatná, hogy a rendszer integrácziója lehetetlen, vagy pedig identitás, és ekkor az egyenlet az elsőnek algebrai következménye, tehát kihagyandó volna. Most ismét a második egyenlet segítségével kiküszöbölhetjük a többiből p_2-t s u. t., úgy hogy az m egyenlet helyébe vele aequivalens rendszert nyerünk, melyben a k-adik egyenlet csak $p_k, p_{k+1}, \dots p_n$-t tartalmazza. Az ily egyenletrendszernél pedig közvetetlenül világos, hogy $p_1, p_2 \dots p_m$ valóban kifejezhető $p_{m+1}, \dots p_n$ által. Ebben a rendszerben még az i-edik egyenlet után következőket használjuk, hogy ebből $p_{i+1}, p_{i+2}, \dots p_m$-et kiküszöböljük és ez által végre az adott egyenleteket a következő alakba viszszük át:

$$\psi_i (x_1, \dots, x_n, p_i, p_{m+1}, p_n) = 0$$
$$(i = 1, \dots m)$$

Az elmélet egyszerűsítése végett irjuk még az egyenleteket a bennük előforduló egy-egy p_i szerint megoldott alakban:

$$\begin{aligned} p_1 - F_1 (x_1, \dots, x_n, p_{m+1}, \dots, p_n) &= 0 \\ p_2 - F_2 (x_1, \dots, x_n, p_{m+1}, \dots, p_n) &= 0 \qquad (1.) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ p_m - F_m (x_1, \dots, x_n, p_{m+1}, \dots, p_n) &= 0. \end{aligned}$$

Erre vonatkoztatjuk a további tárgyalást, ámbár ez maga majd mutatja, hogy a megoldás alakjának ismerete a rendszer megoldására nem szükséges, hacsak tekintetbe veszszük, hogy a kiküszöbölés raczionális művelet, mely az egyenletek megoldása nélkül végezhető. Ha most meg akarjuk vizsgálni, vajjon ez a rendszer lehetséges-e, mindenekelőtt az összes

$$(p_r - F_r, p_s - F_s)$$

kifejezéseket kell képeznünk. Az ennél követelt műveletek áttekintése tüstént mutatja, hogy e kifejezésekben $p_1, p_2 \dots p_m$ egyáltalában nem fordúl elő.

A legegyszerűbb eset az, hogy e kifejezések valóban mind identikus módon eltünnek; akkor a rendszert *Jacobi*-féle vagy *involutorikus rendszer*nek nevezzük. Hogy ennél az integráczió lehetséges, azt maga a számítás kifejtése mutatja majd és egyszersmind kimutatjuk, hogy minden lehetséges rendszer ilyenre vezethető vissza.

Ha $(p_r - F_r, p_s - F_s) = 0$ nem identitás, akkor vagy relácziót ád az x-ek közt és a rendszer lehetetlen, vagy pedig a reláczió egy p-t is tartalmaz. Az utolsó esetben legyen ez, ha az előforduló p-t p_{m+1}-nek mondjuk:

$$\Psi_{m+1}(x_1, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0.$$

E szerint, hogy a rendszer integrácziója lehetséges legyen, szükséges a $\Psi_{m+1} = 0$ föltétel kielégitése. De ez azt mondja, hogy oly függvény, mely az adott m differencziálegyenletet kielégíti, szükségkép kielégiti a most nyert $m+1$-dik differencziálegyenletet is. Ez pedig az előbbiektől független alak. Hiszen kapcsolat $p_{m+1} \ldots p_n$ közt, mely az (1.)-es rendszer alapján még algebrailag egymástól független. Ekkor tehát a most nyert egyenletet a rendszerhez csatoljuk, és miután segitségével a megelőző egyenletekből a p_{m+1}-et kiküszöböltük, az új rendszeren a vizsgálatot ismételjük.

Az új rendszer vagy Jacobi-féle rendszer, vagy lehetetlen, vagy végre ismét egy új differencziálegyenletet ád, melyet ismét a rendszerhez csatolunk.

Az eljárás ily ismétlése végre Jacobi-féle rendszerhez vezet vagy kimutatja, hogy a rendszer lehetetlen. Mert ha az egyenletek száma n-re növekedett, akkor az F függvények csak az x-eket tartalmazzák és igy az integrabilitás föltételei vagy identikusok, vagy a független változók közt fönnállandó relácziókat követelnek.

E szerint *az adott simultán parcziális differencziálegyenlet-rendszer integrácziója — ha egyáltalában a probléma nem vezet lehetetlenséghez — mindenkor Jacobi-féle rendszerére vezethető vissza.*

(Ha az egyenletek nem a p-k szerint megoldott alakban vannak adva, az egész különbség csak az, hogy a $(\Psi_i, \Psi_j) = 0$ vizsgálatában tekintetbe kell venni, hogy a p-k közt fönnáll az eredeti egyenletek által jelzett kapcsolat; és igy az előbbi következtetéseket szórul szóra ismételhetjük, ha csak előbb a $p_1\, p_2 \,.\,, p_m$-et az adott rendszer segítségével a $(\Psi_i, \Psi_j) = 0$ föltételekből kiküszöböltük.)

3. — Áttérünk most már a *Jacobi-féle rendszerek integrácziójára.* Ugyanazon alapgondolat, melyet a föltétlenűl integrálható rendszereknél (a II. fejezetben) használtunk, erre is eljárást szolgáltat, mely sokkal természetesebb és egyszerűbb, mint a bonyolódottabb elméleten alapuló Lie-féle módszer, és végeredményben majd ugyanazon szabályhoz vezet, mint az.

Ha a Jacobi-féle rendszer:

$$p_r - F_r\,(x_1, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n), \qquad (1)$$
$$(r = 1, 2, \ldots m),$$

mindenekelőtt irjuk ki részletesebben a

$$(p_r - F_r, p_s - F_s) = 0$$

identitások alakját. Ez, tekintetbe véve, hogy F_i és F_k nem tartalmazzák a $p_1, p_2, \ldots p_m$-et, a következő:

$$\frac{\partial F_s}{\partial x_r} - \frac{\partial F_r}{\partial x_s} + \sum_{i=m+1}^{i=n} \left(\frac{\partial F_r}{\partial x_i} \frac{\partial F_s}{\partial p_i} - \frac{\partial F_s}{\partial x_i} \frac{\partial F_r}{\partial p_i} \right) = 0. \quad (2)$$

Mindenesetre kell, hogy a meghatározandó z függvény kielégítse már az első egyenletet:

$$p_1 - F_1 = 0.$$

Ha ez az egyenlet magában állana, akkor szabadon választhatnók még a z kezdőértékét, azaz az $x_2, \ldots x_n$ ama függvényét, melybe z átmenjen, ha p. $x_1 = x_1^0$. De most a többi egyenletek megszorítják e kezdőérték szabad választását. Ha ugyanis ezekben x_1 helyébe x_1^0-ot teszünk, lesznek:

$$p_2^0 = F_2^0 = F_2\,(x_1^0, x_2 \ldots x_n, p_{m+1}^0, \ldots p_n^0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_r^0 = F_r^0 = F_r\,(x_1^0, x_2, \ldots x_n, p_{m+1}^0, \ldots p_n^0), \qquad (3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

hol ismét az $x_2 \ldots x_n$ szerinti differencziálás és az $x_1 = x_1^0$ helyettesítés sorrendje fölcserélhető; és igy, ha ismét egyszerűen:

$$z_1^0 = (z)_{x_1 = x_1^0},$$

akkor p_r^0 jelenti a z^0-nak x_r szerint vett differencziálhányadosát.

Ha megfordítva a z^0 kezdőértéket a (3) alatti rendszerből vettük, az első egyenlet megfelelő integrálja kielégíti az egész rendszert. Ezt következőképen mutatjuk ki:

Képezzük mindenekelőtt $p_r - F_r$-nek x_1 szerinti differencziálhányadosát.*) Lesz:

$$\overline{\frac{\partial(p_r-F_r)}{\partial x_1}} = \overline{\frac{\partial p_r}{\partial x_1}} - \frac{\partial F_r}{\partial x_2} - \frac{\partial F_r}{\partial p_{m+1}}\overline{\frac{\partial p_{m+1}}{\partial x_1}} - \dots - \frac{\partial F_r}{\partial p_n}\overline{\frac{\partial p_n}{\partial x_1}},$$

és a p-k jelentésénél fogva továbbá:

$$\overline{\frac{\partial(p_r-F_r)}{\partial x_1}} = \overline{\frac{\partial p_1}{\partial x_r}} - \frac{\partial F_r}{\partial x_1} - \frac{\partial F_r}{\partial p_{m+1}}\overline{\frac{\partial p_1}{\partial x_{m+1}}} - \dots - \frac{\partial F_r}{\partial p_n}\overline{\frac{\partial p_1}{\partial x_n}}$$

Most a p_1 helyébe, miután a föltevés szerint z kielégíti az első egyenletet, F_1-et irhatni, és ekkor:

$$\overline{\frac{\partial p_1}{\partial x_r}} = \frac{\partial F_1}{\partial x_r} + \frac{\partial F_1}{\partial p_{m+1}}\overline{\frac{\partial p_{m+1}}{\partial x_r}} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial p_n}\overline{\frac{\partial p_n}{\partial x_r}},$$

vagy pedig még:

$$\overline{\frac{\partial p_1}{\partial x_r}} = \frac{\partial F_1}{\partial x_r} + \frac{\partial F_1}{\partial p_{m+1}}\overline{\frac{\partial p_r}{\partial x_{m+1}}} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial p_n}\overline{\frac{\partial p_r}{\partial x_n}},$$

Ezen értékek fölhasználásával a kérdéses kifejezés:

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial(p_r-F_r)}{\partial x_1}} = {} & \frac{\partial F_1}{\partial x_r} + \frac{\partial F_1}{\partial p_{m+1}}\overline{\frac{\partial p_r}{\partial x_{m+1}}} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial p_n}\overline{\frac{\partial p_r}{\partial x_n}} \\ & - \frac{\partial F_r}{\partial x_1} - \frac{\partial F_r}{\partial p_{m+1}}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_{m+1}} + \frac{\partial F_1}{\partial p_{m+1}}\overline{\frac{\partial p_{m+1}}{\partial x_{m+1}}} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial p_r}\overline{\frac{\partial p_{m+1}}{\partial x_n}}\right) - \dots \\ & \dots - \frac{\partial F_r}{\partial p_n}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_n} + \frac{\partial F_1}{\partial p_{m+1}}\overline{\frac{\partial p_n}{\partial x_{m+1}}} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial p}\overline{\frac{\partial p_n}{\partial x_n}}\right),\end{aligned}$$

mely még igy is irható:

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial(p_r-F_r)}{\partial x_1}} = {} & \frac{\partial F_1}{\partial x_r} - \frac{\partial F_r}{\partial x_1} - \sum_{i=m+1}^{i=n}\frac{\partial F_r}{\partial p_i}\frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \\ & + \sum_{i=m+1}^{i=n}\frac{\partial F_1}{\partial p_i}\left(\overline{\frac{\partial p_r}{\partial x_i}} - \frac{\partial F_r}{\partial p_{m+1}}\overline{\frac{\partial p_{m+1}}{\partial x_i}} - \dots - \frac{\partial F_r}{\partial p_n}\overline{\frac{\partial p_n}{\partial x_i}}\right),\end{aligned}$$

*) A $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ jelt itt kettős értelemben kell használnunk, néha formális differencziácziót jelent a valóban kiirt x_i szerint, mig a másik értelemben parcziális differencziálást jelent ugyan, a mennyiben más független változók is vannak, de más oldalról teljesnek is mondható, mert tekintetbe veendő, hogy a p-k is x_i függvényei. Ebben az utolsó értelemben az illető differencziálhányados fölé vonást teszünk: $\overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}$.

vagy végre, minthogy:

$$\frac{\overline{\partial(p_r-F_r)}}{\partial x_i} = \frac{\overline{\partial p_r}}{\partial x_i} - \frac{\partial F_r}{\partial x_i} - \frac{\partial F_r}{\partial p_{m+1}} \frac{\overline{\partial p_{m+1}}}{\partial x_i} - \dots - \frac{\partial F_r}{\partial p_n} \frac{\overline{\partial p_n}}{\partial x_i}$$

még lesz:

$$\frac{\overline{\partial(p_r-F_r)}}{\partial x_i} = \frac{\partial F_1}{\partial x_r} - \frac{\partial F_r}{\partial x_1} - \sum_{i=m+1}^{i=n} \frac{\partial F_r}{\partial p_i} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} +$$

$$+ \sum_{i=m+1}^{i=n} \frac{\partial F_1}{\partial p_i} \frac{\partial F_r}{\partial x_i} + \sum_{i=m+1}^{i=n} \frac{\partial F_1}{\partial p_i} \frac{\overline{\partial(p_r-F_r)}}{\partial x_i}.$$

de itt a jobb oldalon álló kifejezés, az utolsó tag kivételével, a (2)-ben foglalt integrabilitási, föltétel ($s=1$) alapján eltünik és igy:

$$\frac{\overline{\partial(p_r-F_r)}}{\partial x_1} = \sum_{i=m+1}^{i=n} \frac{\partial F_1}{\partial p_i} \frac{\overline{\partial(p_r-F_r)}}{\partial x_i}.$$

Ez nem más, mint parcziális differencziálegyenlet a p_r-F_r számára. De oly érték, mely e differencziálegyenletet kielégíti és mely továbbá, mint azt a p_r-F_r-ről tudjuk, 0 lesz, ha $x_1 = x_1^0$, csak egy van. (A kezdőérték teljes meghatározása egy egyéni integrált ád.) Más oldalról látni, hogy a 0 oly érték, mely mindkét föltételnek eleget tesz, és igy tehát valóban

$$p_r-F_r = 0,$$

hol a levezetés föltétele csak az, hogy z a Jacobi-féle rendszer első egyenletének oly integrálja, melynek kedzőértéke z^0 kielégíti a 3. alatt kiirt rendszert.

Közvetetlenűl látni, hogy az uj rendszer, (3) ismét Jacobi-féle rendszer, melyben az egyenletek és a független változók száma egygyel kisebbedett. Mert az új rendszer integrabilitási föltételeit a régiekből nyerjük, ha mindazokban, hol r vagy s nem $=1$, x_1 helyébe x_1^0-ot teszünk; tehát az eredetiekkel együtt az új föltételek is teljesülnek.

Ezen az alapon most már a probléma megoldásáról általános képet alkothatunk magunknak. A $z^0 = (z)_{x_1=x_1^0}$ számára Jacobi-féle rendszerünk van; de akkor ismét az első egyenlet integrácziójára vezetjük vissza a föladatot ha a z^0 kezdőértékét, midőn $x_2 = x_2^0$, egy uj rendszerből határozzuk meg, melyben az egyenletek száma $m-2$, a független változók száma $n-2$. — Igy végre lejutunk egy utolsó egyes differencziálegyenlethez.

$$p_m - F_m = 0$$

melyben $x_1 \ldots x_{m-1}$ helyén még a kezdőértékek teendők. Ennek megoldását *ugy választhatjuk, hogy*

$$(z)x_1 = x_1^0, \ldots, x_m = x_m^0$$

az $x_{m+1}, \ldots x_n$ *egy tetszőleges függvénye legyen.* Ez tehát azon megállapitás alakja, melynek segítségével a Jacobi-féle rendszer integráljainak sokaságából egy és csak egy meghatározott egyént nyerünk.

3. — Az előadott eljárás azonban még lényegesen egyszerüsíthető. Ismét van egy eset, melyben az egyszerüsítés tüstént az egyenletek alakjából leolvasható. Ha t. i. a

$$p_1 = F_1, p_2 = F_2, \ldots, p_m = F_m$$

rendszerben az $F_2, \ldots F_m$ függvények oly tulajdonságúak, hogy az $x_1 = x_1^0$ helyettesítésnél eltünnek. Akkor az első egyenlet integrácziójánál megengedhető kezdőértékek a

$$p_2^0 = 0, \ldots p_m^0 = 0$$

rendszerből veendők, hol $p_2^0 = \frac{\partial z^0}{\partial x_i}$.

De e rendszernek integráljai tüstént fölismerhetők. Ezt kielégíti minden tetszőleges függvénye az $x_{m+1}, \ldots x_n$ változóknak, és igy az egész Jacobi-féle rendszer integrálját nyerem, ha az első egyenletet úgy integrálom, hogy

$$(z)_{x_1=x_1^0} = \text{Tetsz. függv. } (x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

Ha tehát az előbbiek szerint az első egyenletnek a megfelelő Hamilton-féle rendszerből képezhető teljes integrálját képezem, ez az egész rendszernek is megfelel, mert ebben az első egyenletben mint változó csak $x_1, x_{m+1}, \ldots x_n$ szerepel, míg $x_2 \ldots x_m$ csak mint parameter tekintendő. Ama teljes integrál kezdőértéke pedig az $x_{m+1}, \ldots x_n$ tetszőleges lineáris függvénye, tehát a föltételnek megfelel. Azonban egy megszorítás mégis teendő. Ha t. i. az első egyenlet egymagában volna integrálandó, akkor a lineáris függvénybe belépő tetszőleges állandókat az $x_2 \ldots x_m$ parameterektől függő tetszőleges függvényeknek lehetne tekinteni; míg most a kezdőérték számára nyert föltétel azt kivánja, hogy e tetszőleges állandók az $x_2, \dots x_m$-től is függetlenek, tehát tiszta állandók legyenek.

Ebben a speciális esetben tehát az első $n-m+1$ független változót tartalmazó differencziálegyenletnek a Jacobi-Hamilton-féle módszer által nyert teljes integrálja egyszersmind az egész m egyenletből álló rendszer megoldását adja.

De igen egyszerű transformáczió által minden Jacobi-féle rendszer az ily alakra hozható. Legyen ez ugyanis, kiirva ismét a p-ket differencziálhányadosoknak:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = F_1,$$
$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = F_2,$$
$$\dots\dots$$
$$\frac{\partial z}{\partial x_m} = F_m,$$

akkor vezessünk be az $x_2, x_3, \dots x_m$ helyébe új változókat a következő képletek segítségével: *)

$$x_2 = x_2^0 + (x_1 - x_0)\, y_2,$$
$$x_3 = x_3^0 + (x_1 - x_0)\, y_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_m = x_m^0 + (x_1 - x_0)\, y_m.$$

Ha most föltételezzük, hogy a z függvény e transformáczió által u-ba megy át, akkor

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} + \dots \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_1},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y_2} = \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y_3} = \frac{\partial z}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial y_3},$$
$$\dots\dots$$
$$\frac{\partial u}{\partial y_m} = \frac{\partial z}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial y_m}.$$

*) Az $x_1^0, \dots x_m^0$ e képletekben szabadon választható számértékek, melyet úgy lehet értelmezni, hogy az $x_1 \dots x_m$ változók amaz értékcsoportját képviselik, melyre nézve a keresett függvény kezdőértékét még tetszőlegesen lehet megállapítani.

Ha helyettesitjük a $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ értékeit és a $\frac{\partial x_i}{\partial x_1}, \frac{\partial x_i}{\partial y_i}$ értékeit az átalakitási képletekből veszszük, végre az u-k számára a következő differencziálegyenletrendszert nyerjük, hol természetesen az F-ekbe is bevezettük az új változókat.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = F_1 + y_2 F_2 + y_3 F_3 + \ldots + y_m F_m,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_2} = (x_1 - x_1^0)\, F_2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_3} = (x_1 - x_1^0)\, F_3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_m} = (x_1 - x_1^0)\, F_m,$$

oly rendszer, mely valóban az előbb tárgyalt speczialis alakot mutatja. Ha tehát az u-nak az első egyenletből a Jacobi-Hamilton-féle módszer segítségével nyerhető teljes integrálját veszem, az egész rendszer megoldását nyerem, és természetesen, ha az $x_2 \ldots x_m$-et ismét bevezetjük az $y_2 \ldots y_m$ helyébe, u megint átmegy z-be és ez az eredetileg adott rendszer megoldása.

A nyert megoldás ismét a rendszer teljes integrálja, a melyből minden más, a kezdőérték által jellemzett integrál közvetetlenül végezhető operácziók által levezethető.

---

4. — A Jacobi-féle rendszerek elmélete nemcsak mint önálló probléma kifejtése fontos; nagy értéket ad neki továbbá az a körülmény, hogy az eddig *egy* parcziális differencziálegyenlet integrácziójára adott módszerek a föladatot ily rendszer tárgyalására vezetik vissza. Az e dolgozatban kifejtett elvek adják ugyanis az első módszert, melynél, miután a parcziális differencziálegyenletnek megfelelő Hamilton-féle rendszert képeztünk, a parcziális differencziálegyenlet integrácziója a Hamilton-féle rendszer teljes megoldása által történik, és minden lehetséges egyszerűsítést e rendszer integrácziójánál eszközlünk. Ezzel ellentétben az összes eddigi módszerek Jacobi nyomán a Hamilton-féle rendszernek csak egy első integrálját keresik és azután elhagyva ennek integráczióját, mely végül

megforditva a parcziális differencziálegyenletnek következménye lesz, visszatérnek a parcziális differencziálegyenlethez, keresve az egyszerűsitést, melyet amaz első integrál ismerete ennek integráczióján eszközöl. Az egyszerűsitést a következő Jacobi-féle tétel adja:

Ha a

$$p_1 + H(x_1, x_2, \ldots x_n, p_2, \ldots p_n) = 0$$

elsörendü parcziális differencziálegyenletnek megfelelő Hamilton-féle rendszer egy első integrálja:

$$\Phi\,(x_1, x_2, \ldots x_n, p_2, \ldots p_n) - a = 0$$

akkor ez utóbbi egyenlet, ha a p-ket mint differencziálhányadosokat értelmezzük, az eredeti differencziálegyenlettel együtt Jacobi-féle rendszert képez.

A tétel bebizonyítása igen egyszerű. Ha t. i. $\Phi - a = 0$ a Hamilton-féle rendszernek első integrálja, akkor (l. a 25. lapot) fönnáll a következő ideutitás:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{i=n}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x_i}\right) = 0$$

Más oldalról, hogy a két egyenlet Jacobi-féle rendszert adjon, kell, hogy legyen:

$$(\Phi - a_1, p_1 + H) = 0$$

de ha a 61. lapon adott értelmezés szerint e kifejezést részletesen kiirjuk, pontosan az előbb fölirt alakot nyerjük, a két föltétel tehát ugyanazt mondja.

Ez által tehát az eredetileg adott parcziális differencziálegyenlethez egy másodikat csatoltunk, melynek vele közös megoldása van.

A Lie-féle módszernél most egyenesen fölcseréljük az adott problémát a Jacobi-féle rendszer integrácziójával. De ez az előbbi fejtegetések szerint ismét visszavezethető egy egyetlen parcziális differencziálegyenlet tárgyalására, mely már csak $n-1$ független változót tartalmaz. (A megoldásban szereplő tetszőleges elem korlátozva látszik a változók számának fogyásával, de ezt kárpótolja ama körülmény, hogy a $\Phi = a$ alakból az a tetszőleges állandó a differencziálegyenletbe jut. Ha most ezen az új differencziálegyenleten a tárgyalást ujból kezdjük, egy n—2 független változót tartalmazó differencziálegyenletre jutunk és ugy tovább. Látni, hogy a szükséges alapoperácziók itt is, épen úgy, mint a mi módszerünknél a Hamilton-féle rendszerek teljes integrácziójára egy-egy

$$2(n-1),\ 2(n-2), \ldots, 4,\ 2$$

egyenletből álló Hamilton-féle rendszer *egy* első integráljának meghatározását követelik. Sőt szorosabb vizsgálatnál láthatni, hogy ha a parcziális differencziálegyenlet és a Hamilton-féle rendszer egymásnak megfelel, a föllépő rendszerek sorozata is ugyanaz.

A többi módszereknél, miután a két egyenletből álló Jacobi-féle rendszert nyertük, ehhez még egy harmadik egyenletet keresünk, úgy hogy mind a három egyenlet megint ily rendszert alkosson; a háromhoz megint egy negyediket s u. t., mig végre n egyenletünk van. Akkor már a problémát quadratura által végkép megoldjuk; mert az összes p-k szerint megoldva a differencziálegyenletet, ezeket mint az x függvényeit nyerjük és egyszerű integráczió megadja a keresett függvényt. Ezen új egyenletek hozzátoldása ismét Jacobi-féle rendszerek megoldását kivánja, de a melyekben a föllépő differencziálegyenletek lineárisak. A probléma ezen átalakítása még Jacobitól való. A Jacobi, Weiler és Mayer-féle módszerek csak a simultán rendszerek megoldásában különböznek. A Mayer-féle ezek közt a legtovább menő egyszerűsítést adja, mely ismét teljesen egyértékű avval, melyet az előbb összehasonlított két eljárás eszközöl.

TARTALOM.

Eddig külön megjelent

ÉRTEKEZÉSEK

a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet.

Második kötet.

Harmadik kötet.

Negyedik kötet.

V. Konkoly Miklós. Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagdában 40 kr.
VI. Hunyadi Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól . . . . 20 kr.
VII. Réthy Mór. A három méretü homogén tér (u. n. nem euklidikus) siktan. trigonometriája. . . . . 20 kr.
VIII. Réthy Mór. A propeller és peripeller felületek elméletéhez. . 30 kr.
IX. Fest Vilmos. Temesi Reitter Ferencz emléke . . . . . 10 kr.

Ötödik kötet.

I. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Nagy Károly r. tag felett . . 10 kr.
II. Kenessey Albert. Adatok folyóink vizrajzi ismeretéhez . . 20 kr.
III. Dr. Hoitsy Pál. Csillag-észlelés a kelet-nyugot vonalban (egy számtáblával.) . . . . 30 kr.
IV. Hunyady Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól. (Folytatás a IV. kötetben ugyane czim alatt megjelent értekezésnek.) . . . . 10 kr.
V. Hunyady Jenő. Apollonius feladata a gömbfelületen . . . 10 kr.
VI. Dr. Gruber Lajos. 24 η Cassiopeiae kettős csillag mozgásáról . 10 kr.
VII. Martin Lajos. A változtatási hánylat alkalmazása a propeller-fölület egyenletének lefejtésére. . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. A teljes holdfogyatkozás 1877. február 27-én és az 1877. (Borelli) I. számu üstökös szinképének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
IX. Konkoly Miklós. A napfoltok s a nap felületének kinézése 1876-ban (három képtáblával.) . . . . 40 kr.
X. Konkoly Miklós. 160 álló csillag szinképe. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1876-ban . . . . 20 kr.

Hatodik kötet.

I. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. I. rész. 1871—1873. Ára . . . . 20 kr.
II. Konkoly Miklós. Hullo csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára . . . . 20 kr.
III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámitása. Közlik dr. Gruber Lajos és Kurländer Ignácz kir. observatorok. 10 kr.
IV. Schenzl Guido. Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. . . . . 20 kr.
V. Gruber Lajos. A november-havi hullócsillagokról . . . . 20 kr.
VI. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára . . . . 20 kr.
VII. Konkoly Miklós. A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. Mercur átvonulása a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án . . . . 10 kr.

Hetedik kötet.

I. Konkoly Miklós. Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositió után. Egy táblával. . . . . . . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr.
III. Konkoly Miklós. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban. IV. rész. Ára . . . . 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. A nap felületének megfigyelése 1878-ban az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
VI. Hunyady Jenő. A Möbius-féle kritériumokról a kúpszeletek elméletében . . . . 10 kr.
VII. Konkoly Miklós. Spectroscopicus megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón . . . . 10 kr.
VIII. Dr. Weinek László. Az instrumentális fényhajlás szerepe egy Vénus-átvonulás photographiai felvételénél . . . . . . 20 kr.

Budapest, 1881. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.