ÉRTEKEZÉSEK

A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF

OSZTÁLYTITKÁR.

XIV. KÖTET. 5. SZÁM.

EGYÜTTESEN LENGŐ ELEMI MÁGNESEK

KÖLCSÖNÖS VONZÁSAI ÉS TASZÍTÁSAI.

FRÖHLICH IZIDOR

L. TAGTÓL.

Ára 40 kr.

BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

1891.

Eddig külön megjelent

ÉRTEKEZÉSEK

a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet. — Második kötet. — Harmadik kötet. — Negyedik kötet. Ötödik kötet.

Hatodik kötet.

I. *Konkoly Miklós.* Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén I. rész. 1871—1873. Ára 20 kr. — II. *Konkoly Miklós.* Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára 20 kr. — III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámitása. Közlik *dr. Gruber Lajos* és *Kurländer Ignácz* kir. observatorok. 10 kr. — IV. *Schenzl Guido.* Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. 20 kr. — V. *Gruber Lajos.* A november-havi hullócsillagokról 20 kr. — VI. *Konkoly Miklós.* Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára 20 kr. — VII. *Konkoly Miklós.* A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára 20 kr. — VIII. *Konkoly Miklós.* Mercur átvonulás a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án 10 kr.

Hetedik kötet.

I. *Konkoly Miklós.* Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositió után. Egy táblával. 10 kr. — *Konkoly Miklós.* Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr. — III. *Konkoly Miklós.* Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban IV. rész. Ára 10 kr. — IV. *Konkoly Miklós.* A nap felületének megfigyelése 1878-ban ó-gyallai csillagdán. 10 kr. — VI. *Hunyady Jenő.* A Möbius-féle kritériumokról a kúpszeletek elméletében 10 kr. — VI. *Konkoly Miklós.* Spectroscopicus megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 10 kr. — VIII. *Dr. Weinek László.* Az instrumentális fényhajlás szerepe és Vénus-átvonulás photographiai felvételénél 20 kr. — IX. *Suppan Vilmos.* Kúp- és hengerfelületek önálló ferde vetitésben. (Két táblával.) 10 kr. — X. *Dr. Konek Sándor.* Emlékbeszéd Weninger Vincze l. t. fölött. 10 kr. — XI. *Konkoly Miklós.* Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1879-ben. 10 kr. — XII. *Konkoly Miklós.* Hullócsillagok radiatio pontjai, levezetve a magyar korona területén tett megfigyelésekből 1871—1878. végéig 20 kr. — XIII. *Konkoly Miklós.* Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagvizsgálón 1879-ben. (Egy tábla rajzzal.) 30 kr. — XIV. *Konkoly Miklós.* Adatok Jupiter és Mars physikájához, 1879. (Három tábla rajzzal.) 30 kr. — XV. *Réthy Mór.* A fény törése és visszaverése homogén isotrop átlátszó testek határán. Neumann módszerének általánositásával és bővitésével. (Székf. ért.) 10 kr. — XVI. *Réthy Mór.* A sarkitott fényrezgés elhajlitó rács által való forgatásának magyarázata, különös tekintettel Fröhlich észleteire. 10 kr. — XVII. *Szily Kálmán.* A telitett gőz nyomásának törvényéről. 10 kr. — XVIII. *Hunyadi Jenő.* Másodfoku görbék és felületek meghatározásáról. 20 kr. — XIX. *Hunyady Jenő.* Tételek azon determinánsokról, melyek elemei adjungált rendszerek elemeiből vannak componálva. 20 kr. — XX. *Dr. Frölich Izor.* Az állandó elektromos áramlások elméletéhez. 20 kr.

ÉRTEKEZÉSEK

A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

KIADJA A MAGYAR TUD. AKADÉMIA.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL.

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF

OSZTÁLYTITKÁR.

EGYÜTTESEN LENGŐ ELEMI MÁGNESEK KÖLCSÖNÖS VONZÁSAI ÉS TASZÍTÁSAI.

FRÖHLICH IZIDOR

l. tagtól

(Előadta az osztályülésen 1891 márczius 16.)

BEVEZETÉS.

1. §. *A probléma eredete. Általános fogalmazása.*

Körülbelül másfél évvel ezelőtt néhai *Dr. Regéczy Nagy Imre* állatorvosintézeti tanár az izom összehúzódása czéljából néhai *Dr. Jendrássik Jenő* az élettannak tud. egyetemi ny. r. tanára és saját maga részéről felállított hypothesist közölt velem (l. alább) és ebből kifolyólag oly kérdést intézett hozzám, mely mágnesek rendszerének valamint electromos áramok átfolyta vezető tekercsek rendszerének együttes lengéseire és e lengések által netán módosított translatórius (az egyes mágneseket vagy tekercseket önmagukhoz párhuzamosan eltolni törekvő) erőire vonatkozott.

a) Ugyanis, ha az egyenlő, mozogható tekercsek oly rendszerét veszszük fel, melyek középpontjai egy egyenesben fekszenek, geometriai tengelyeik pedig egyensúlyi helyzetükben ezen egyenesre merőlegesek, akkor a tekercsek mindaddig maradhatnak egyensúlyban, míg rajtuk stationárus áramok áthaladnak; de mihelyt ezek egyike is, bármily oknál fogva egyensúlyi helyzetéből kimozdúl, az egyensúly megszűnik, a többi tekercsek is mozgásba jönnek s ha felfüggesztésük megengedi, kölcsönös hatásuk befolyása alatt lengéseket létesítenek és az indukált áramok rendszerét gerjesztik.

b) Hasonlóan áll a dolog, ha e tekercseket oly állandó mágnesekkel helyettezzük, melyek mágnesi nyomatékainak irányai az *a)* alatti tekercsek tengelyeivel megegyeznek, s melyek stabilis egyensúlyi helyzete felfüggesztésük módja szerint a középpontjaikat egybekapcsoló egyenesre merőleges. Itt is egyetlen egy mágnesnek egyensúlyi helyzetéből történt kimozdulása a többieket is fogja mozgásba hozni s az egész rendszer, ha felfüggesztésének módja megengedi, lengésbe jő.

c) A tekercsekben haladó stationárius áramok, illetve a permanens mágnesek, rendszerük említett egyensúlyi helyzetében egymásra többek között a középpontjaikat egybekapcsoló egyenes mentén trauslatórius erőket fejtenek ki, melyek (miután e helyzetben a rendszert alkotó egyes elemek [mágnesek vagy tekercsek] geometriai tengelyei egymáshoz párhuzamosak s a középpontjaikat egybekapcsoló egyenesre merőlegesek) *taszítók*, azaz ezen erők törekvése az elemek középpontjait egymástól eltávolítani.

d) Ezeket előre bocsátva, illetve felvéve, a fent nevezett physiologiai buvárok kérdése a következő volt:

Megváltoznak-e a *c.* alatt említett trauslatórius erők, ha a rendszer elemei lengésben vannak ezen lengés következtében? s ha változnak, *vonzó*-e az erők ezen változása? Ha a kérdés mindkét részére igenlő volna a válasz, akkor a nevezett élettani kutatók nézete szerint az izmok összehuzódása ily alapon volna magyarázható vagy legalább értelmezhető.

e. Még általánosabb ily rendszer is vehető fel, ugyanis olyan, melynek elemei sorokban és oszlopokban vannak elhelyezve; így példáúl egy nm számú elemből álló rendszer, melynek az *a.* vagy *b.* pont szerint szerkesztett egyes oszlopait n számú elem, ellenben ezen oszlopokra merőleges egyes sorait (melyek elemeinek geometriai tengelyei a középpontjaikat egybekapcsoló egyenesen fekszenek) m számú elem alkotja.

E sorok egyébként még köröket is alkothatnak, úgy, hogy az elemek egy hengerfelületen lehetnek eloszolva, középpontjaik pedig a hengernek tengelyekörüli symmetrikus generatrix vonalai mentén és egymástól egyenlő távolságban lévő párhuzamos körök mentén (e vonalak és körök metszőpontjaiban) fekszenek, felfüggesztésük vagy alátámasztásuk pedig olyan legyen, hogy stabilis egyensúlyi helyzetben minden elem geometriai tengelye merőleges a henger tengelyére és érinti a párhuzamos kört, melyen középpontja fekszik.

Itt a kérdés analog, mint a *d.* alatti egyszerűbb esetben, ugyanis, vajjon a rendszer egyes elemei által egymásra a henger tengelye mentén kifejtett translatórius erő a rendszer elemeinek lengései folytán más értékű-e, mint állandó egyensúly alkalmával és hogy e változás vonzó-e?

2. §. *A jelen értekezésben felkarolt feladat. Az ezt jellemző korlátozó feltevések. Az elért eredmények.*

1. Jelen dolgozatban e kérdéssel mint kizárólagosan physikai problemával foglalkozom és itt egyelőre ennek csak egyszerű *b.* és *d.* alatt részletezett, de bizonyos módosításokkal megváltoztatott esetét karolom föl.

a. Felveszem ugyanis, hogy a permanens mágnesek méretei középpontjaiknak egymástól való távolságaihoz képest kicsinyek, azaz, hogy őket elemi mágneseknek (vagy mágneselemeknek) lehet tekinteni.

E felvétel azért szükséges, mivel véges méretű permanens mágnesek egymásra hatását csak akkor határozhatjuk meg, ha a mágnesség eloszlását e testekben ismernők; de ezt nem ismerjük és így erre nézve hypothesishez kellene folyamodnunk. Ellenben elemi mágneseknek tőlük véges távolságban lévő mágnességekre való hatása teljesen független a mágnességnek az egyes elemi mágnesekben való eloszlásától, és csak ezeknek mágnesi nyomatékaitól és ezek irányaitól függ.

b. Felveszem továbbá, hogy az elemi mágnesek, melyek középpontjai egy egyenesben fekszenek, ha kettőnél több elem van jelen, olyformán legyenek felfüggesztve, hogy állandó egyensulyi helyzetükben párhuzamosak legyenek és így ekkor valamennyien a középpontjaikat egybekapcsoló egyenessel egy és ugyanazt a δ_0 szöget képezzenek.

E felvételt egyszerűség kedveért és azon oknál fogva is hozom be, mivel akkor a rendszernek mind az az elrendezése, melynél stabilis egyensúly alkalmával az elemek tengelyei a középpontokat egybekapcsoló egyenesre merőlegesek ($\delta = \frac{1}{2}\pi$), mind pedig az az elrendezés, melynél állandó egyensúly alkalmával e tengelyek a nevezett egyenesbe esnek ($\delta_0 = 0$) ezen általánosabb elrendezésnek csak specális esetei.

c. Felveszem továbbá, hogy az elemi mágnesek lengéseinek amplitúdói igen kicsinyek. Ezt a suppositiót azon analytikai complicátiók elkerülése czéljából teszszük, melyekkel a véges nagyságú amplitudókkal történő ily lengések mathematikai tárgyalása jár.

d. Felveszem végre, hogy az egyes elemek lengő mozgásának periodusai igen kicsinyek a közönséges időegységekhez képest és hogy e szerint az egyes lengések igen sok periodusa múlik el a közben, a mi alatt középpontjaik távolsága (a translatórius erők változása folytán) észrevehető változást szenved.

Ezt a feltevést a következő körülmény követeli: Ha a translatórius erő a lengések folytán változnék (a mi általánosságban tényleg bekövetkezik), akkor ez minden pillanatban a rendszer elemei mindenkori helyzetének függvénye, azaz az időben változó menynyiség és így az erő e változó részének előjele is változhatik az idővel. Ha most e lengések periodusai oly nagyok volnának, hogy egy ily periodus tartama alatt az elemek középpontjainak helyzete észrevehetőleg változnék, akkor a középpontok helyzetének ezen változhatását a lengések egyenleteinek felállításánál okvetetlenül tekintetbe kellene venni. De ez által a mathematikai tárgyalást anynyira complicáljuk, hogy a felmerülő analytikai nehézségek a vizsgálatot majdnem lehetetlenné teszik. Ellenben, ha a lengések periodusai igen kicsinyek, akkor véges (de nagy) számú ily periodus lefolyása közben az elemek középpontjainak helyeit változatlanoknak lehet tekinteni és a lengések egyenleteit ezen az alapon felállítani.

2. Miután a physikusra nézve a speciális, az egyszerűbb esetek részletes megvizsgálása rendszerint már csak azon oknál fogva nagyon érdekes, mivel számos viszony és kapcsolat sokszor átlátszóbban és jellemzőbben domborodik ki, mint az általános eset vizsgálatánál és mivel az előbbiek a legtöbb esetben az utóbbinak igen jó előiskoláját képezik: azért jelen dolgozatomban a két és a három elemi mágnesből álló rendszer lengéseinek és translatórius erőinek részletes tárgyalása megelőzi a tetszőle-

ges számú elemből álló rendszer ide tartozó viszonyainak általános tárgyalását.

Az értekezésben nyert eredmények közül e helyen felemlíthetjük azokat, melyek az 1. §. *d.* pontjában felvetett kérdésre megadják a feleletet.

a. Kitűnik ugyanis, hogy a 2. §. 1. *a, b, c, d,* pontjaiban meghatározott bárhány, n számú elemből álló rendszerre nézve az egyes elemek lengései n számú egyszerű harmonikus (ingaszerű) lengések öszszegeiből állanak, hogy a rendszer középpontjától egyenlő távolságban levő (e középponthoz symmetrikusan fekvő) elemek lengései nem egyenlők ugyan, hanem symmetrikus szerkezetűek; hogy az n^2 számú lengési amplitúdók közül csak n független egymástól; végre, hogy a rendszer minden oly két elemére nézve, mely a rendszer középpontjától egyenlő távolságban van, az ezen lengő elemekre a középpontjaikat egybekapcsoló egyenes mentén működő translatórius erők középértékei értékre nézve egyenlők, de előjelre nézve ellentettek.

b. Ennek értelmében a lengések n számú független amplitúdóit mindenkor úgy választhatjuk, hogy azok azon $\frac{n}{2}$ számú (páratlan n-eknél $\frac{n-1}{2}$ számú) feltételeket kielégítsék, melyek fennállanak, mikor a nevezett translatórius erőknek a lengésektől függő részei a rendszer középpontja felé tartók, azaz *vonzók;* ha e szerint az állandó egyensúly alkalmával fellépő translatórius erők compensálva vannak, akkor ezen esetben a lengések az egész rendszer összehúzódását fogják létesíteni.

c. De megjegyzendő, hogy e független amplitúdókat másként, még pedig úgy is választhatjuk, hogy ezek azon $\frac{n}{2}$ számú (páratlan n-eknél $\frac{n-1}{2}$ számú) feltételeket kielégítsék, melyek fennállanak, mikor a nevezett translatórius erőknek a lengésektől függő részei a rendszer középpontjától el vannak fordulva, azaz *taszítók;* ha itt is a stabilis egyensúlyi helyzetben működő translatórius erők compensálvák, akkor ezen esetben a lengések az egész rendszer kitágulását fogják eredményezni.

I. Két elemi mágnesből álló rendszer lengései és translatórius erői.

3. §. *Jelölések. Az erőfüggvény, a forgató nyomatékok és az r menti translatórius erők általános kifejezései.*

Legyen a következőkben:

$\left.\begin{array}{l} m_1 \text{ az első} \\ m_2 \text{ a második} \end{array}\right\}$ elemi mágnes mágnesi nyomatéka.

$\left.\begin{array}{l} s_1 \text{ az első} \\ s_2 \text{ a második} \end{array}\right\}$ mágnesi nyomatéknak positív iránya mentén számított hoszszak.

r a két mágnes középpontjainak egymástól való távolsága.

$\left.\begin{array}{l} \vartheta_1 \text{ az } m_1 \\ \vartheta_2 \text{ az } m_2 \end{array}\right\}$ positív iránya és az r positív iránya által bezárt szög.

φ a ϑ_1 és a ϑ_2 szögek síkjai által bezárt szög.

U a két mágnesből álló rendszer (mágnesi erőinek) erőfüggvénye.

R az egyik által a másikra kifejtett erőnek r menti összetevője.

$\left.\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \end{array}\right\}$ a forgató nyomaték, melyet $\left\{\begin{array}{l} \text{a második mágnes az elsőre} \\ \text{az első mágnes a másodikra} \end{array}\right\}$, középpontja körül a $\left\{\begin{array}{l} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{array}\right\}$ síkjában fejt ki.

$\left.\begin{array}{l} K_1 \text{ az első} \\ K_2 \text{ a második} \end{array}\right\}$ mágnes tehetetlenségi nyomatéka.

$\left.\begin{array}{l} K_1\,\theta_1 \text{ az első} \\ K_2\,\theta_2 \text{ a második} \end{array}\right\}$ mágnes felfüggesztő szerkezete (sodronyai) csavarodásának együtthatója.

$\left.\begin{array}{l} \vartheta_1 + \varepsilon_1 \text{ az első} \\ \vartheta_2 + \varepsilon_2 \text{ a második} \end{array}\right\}$ mágnes felfüggesztő szerkezetének torsiószögei; ε_1 és ε_2 az időtől függetlenek.

$\left.\begin{array}{l} \vartheta_{10} \text{ a } \vartheta_1\text{-nek} \\ \vartheta_{20} \text{ a } \vartheta_2\text{-nek} \end{array}\right\}$ értéke állandó egyensúly alkalmával.

$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 \text{ az első} \\ \alpha_2 \text{ a második} \end{array}\right\}$ mágnes szögkitérése a stabilis egyensúlyi helyzetéből; e szerint

$\left.\begin{array}{l} \vartheta_1 = \vartheta_{10} + \alpha_1 \\ \vartheta_2 = \vartheta_{20} + \alpha_2 \end{array}\right\}$; α_1 és α_2 kicsiny szögek.

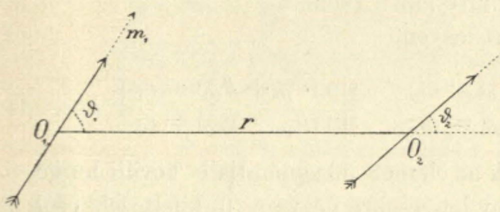
$$\left.\begin{array}{l} L_1 = \dfrac{m_1 m_2}{r^3}\,\dfrac{1}{K_1} \\[2ex] L_2 = \dfrac{m_1 m_2}{r^3}\,\dfrac{1}{K_2} \end{array}\right\} \text{rövidítések.}$$

E jelölésekkel:

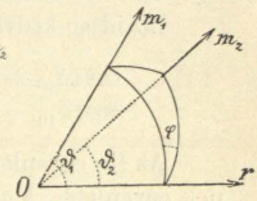
$$U = -m_1 m_2 \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2}\left(\frac{1}{r}\right) = +\frac{m_1 m_2}{r^3}(2\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos\varphi) \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{\partial U}{\partial \vartheta_1} - K_1\theta_1(\vartheta_1+\varepsilon_1) = K_1\frac{d^2\vartheta_1}{dt^2} \\ F_2 &= \frac{\partial U}{\partial \vartheta_2} - K_2\theta_2(\vartheta_2+\varepsilon_2) = K_2\frac{d^2\vartheta_2}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

$$R = \frac{\partial U}{\partial r} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$



1. ábra.



2. ábra.

4. §. *A két mágnes egy síkban fekszik. A mozgás és az egyensúly egyenletei, ha a két mágnes különböző és ha egyenlő.*

Ha a két mágnes egy síkban fekszik, akkor $\varphi = 0$.

Ezen esetben a megelőző §. (1) és (2) egyenletei:

$$U = +\frac{m_1 m_2}{r^3}\left\{\tfrac{3}{2}\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + \tfrac{1}{2}\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)\right\} \quad \dots \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= -\frac{m_1 m_2}{r^3}\left\{\tfrac{3}{2}\sin(\vartheta_1+\vartheta_2) + \tfrac{1}{2}\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)\right\} - \\ &\qquad - K_1\theta_1(\vartheta_1+\varepsilon_1) = K_1\frac{d^2\vartheta_1}{dt^2} \\ F_2 &= -\frac{m_1 m_2}{r^3}\left\{\tfrac{3}{2}\sin(\vartheta_1+\vartheta_2) - \tfrac{1}{2}\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)\right\} - \\ &\qquad - K_2\theta_2(\vartheta_2+\varepsilon_2) = K_2\frac{d^2\vartheta_2}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (5)$$

A továbbiakra nézve a $(\vartheta_1+\vartheta_2)$ és $(\vartheta_1-\vartheta_2)$ szögek sinusait fejtjük ki az (a_1+a_2) és (a_1-a_2) kicsiny menynyiségek növekvő hatványai szerint:

$$\left.\begin{aligned}\cos(\vartheta_1\pm\vartheta_2)&=\cos(\vartheta_{10}\pm\vartheta_{20}+a_1\pm a_2)=\cos(\vartheta_{10}\pm\vartheta_{20})\left[1-\tfrac{1}{2}(a_1\pm a_2)^2+\ldots\right]-\\&\quad-\sin(\vartheta_{10}\pm\vartheta_{20})\left[(a_1\pm a_2)-\frac{1}{2\,.\,3}(a_1\pm a_2)^3+\ldots\right]\\\sin(\vartheta_1\pm\vartheta_2)&=\sin(\vartheta_{10}\pm\vartheta_{20}+a_1\pm a_2)=\sin(\vartheta_{10}\pm\vartheta_{20})\left[1-\tfrac{1}{2}(a_1\pm a_2)^2+\ldots\right]+\\&\quad+\cos(\vartheta_{10}\pm\vartheta_{20})\left[(a_1\pm a_2)-\frac{1}{2\,.\,3}(a_1\pm a_2)^3\pm\ldots\right]\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

hol minden egyenletben egyszerre csak valamenynyi felső vagy egyszerre valamennyi alsó előjel veendő.

Rövidség kedvéért legyen.

$$\left.\begin{aligned}\cos(\vartheta_{10}+\vartheta_{20})&=c_1;\qquad\sin(\vartheta_{10}+\vartheta_{20})=s_1\\\cos(\vartheta_{10}-\vartheta_{20})&=c_2;\qquad\sin(\vartheta_{10}-\vartheta_{20})=s_2\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (7)$$

Az (5) egyenletek az elemek középpontjaik körüli lengéseinek egyenletei; kicsiny lengésekre nézve a (6) kifejtések csak az első rendű tagokig bezárólag alkalmazandók; e szerint az (5)-ből a 3. §. L_1 és L_2 rövidítései tekintetbe vételével:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2a_1}{dt^2}&=-L_1\left\{\tfrac{3}{2}s_1+\tfrac{1}{2}s_2\right\}-\theta_1(\vartheta_{10}+\varepsilon_1)-\left[L_1(\tfrac{3}{2}c_1+\tfrac{1}{2}c_2)+\theta_1\right]a_1-L_1(\tfrac{3}{2}c_1-\tfrac{1}{2}c_2)a_2\\\frac{d^2a_2}{dt^2}&=-L_2\left\{\tfrac{3}{2}s_1-\tfrac{1}{2}s_2\right\}-\theta_2(\vartheta_{20}+\varepsilon_2)-L_2(\tfrac{3}{2}c_1-\tfrac{1}{2}c_2)a_1-\left[L_2(\tfrac{3}{2}c_1+\tfrac{1}{2}c_2)+\theta_2\right]a_2\end{aligned}\right\}(8)$$

a. E két egyenlet azonban tetemesen egyszerűsbödik azon körülmény tekintetbe vétele folytán, hogy $a_1=0$, $a_2=0$ értékeknek a stabilis egyensúlyi helyzet felel meg, melyre nézve az egyes szöggyorsulásoknak zérusoknak kell lenniök.

E szerint:

$$\left.\begin{aligned}L_1(\tfrac{3}{2}s_1+\tfrac{1}{2}s_2)+\theta_1(\vartheta_{10}+\varepsilon_1)&=0\\L_1(\tfrac{3}{2}s_1-\tfrac{1}{2}s_2)+\theta_2(\vartheta_{20}+\varepsilon_2)&=0\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ (9)$$

a stabilis egyensúly feltételi egyenletei.

Írva rövidség kedvéért az állandókat:

$$\left.\begin{aligned}L_1(\tfrac{3}{2}c_1+\tfrac{1}{2}c_2)+\theta_1&=a_{11}\\L_2(\tfrac{3}{2}c_1+\tfrac{1}{2}c_2)+\theta_2&=a_{22}\end{aligned}\right\};\qquad\left.\begin{aligned}L_1(\tfrac{3}{2}c_1-\tfrac{1}{2}c_2)&=a_{12}\\L_2(\tfrac{3}{2}c_1-\tfrac{1}{2}c_2)&=a_{21}\end{aligned}\right\};(10)$$

a mozgás (8) egyenletei irhatók:

$$\left.\begin{aligned}a_1''+a_{11}a_1+a_{12}a_2&=0\\a_2''+a_{21}a_1+a_{22}a_2&=0\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ .\ (11)$$

melyek az állandó együtthatójú lineár másodrendű differentiál-egyenletek simultán rendszerét képezik.

b. Legyen egyszerűség kedvéért a két mágnes felfüggesztési vagy alátámasztási módja minden tekintetben egyenlő; akkor:

$$K_1 = K_2 = K; \ \theta_1 = \theta_2 = \theta; \ L_1 = L_2 = L; \ m_1 = m_2 = m \quad (12)$$

Ekkor a (9)—(11) egyenletek:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2} L(3s_1 + s_2) + \theta(\vartheta_{10} + \varepsilon_1) &= 0 \\ \tfrac{1}{2} L(3s_1 - s_2) + \theta(\vartheta_{20} + \varepsilon_2) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \tfrac{1}{2} L(3c_1 + c_2) + \theta = a_{22} \\ a_{12} &= \tfrac{1}{2} L(3c_1 - c_2) \qquad\ \ = a_{21} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1'' + a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 &= 0 \\ \alpha_2'' + a_{12}\alpha_1 + a_{11}\alpha_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

5. §. *A lengések explicit kifejezései.*

a. A (15) rendszer egyenleteit öszszegezve, illetve egymásból levonva, nyerjük:

$$\left.\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2)'' + (a_{11} + a_{12})(\alpha_1 + \alpha_2) &= 0 \\ (\alpha_1 - \alpha_2)'' + (a_{11} - a_{12})(\alpha_1 - \alpha_2) &= 0 \end{aligned}\right\}; \quad \ldots \quad (16)$$

azaz, az $\alpha_1 + \alpha_2$ és az $\alpha_1 - \alpha_2$ az egyszerű harmonikus mozgás egyenletének felelnek meg.

Jeleljék a (14) szerint:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} + a_{12} &= 3Lc_1 + \theta = \lambda_1^2 \\ a_{11} - a_{12} &= \ Lc_2 + \theta = \lambda_2^2 \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad (17)$$

akkor a (16) teljes megoldásai:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 2A_{11} \cos(\lambda_1 t + \delta_1) \\ \alpha_1 - \alpha_2 &= 2A_{12} \cos(\lambda_2 t + \delta_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

hol A_{11}, δ_1 és A_{12}, δ_2 az integrátiók állandói.

A λ_1^2 és λ_2^2 *positiv* értékeket jelenthetnek csak, ha α_1, α_2 a mágneseknek a *stabilis* egyensúlyi helyzetből való szög-elongátióit jelentik; ezenkívül a θ positiv lévén, értékét mindig úgy választhatjuk, hogy a λ^2-ek e feltételt kielégítsék. [V. ö. a (17)-et]. *Negativ* értékű λ_1^2 és λ_2^2 azt jelzené, hogy a (16) megoldásai reális exponensekkel biró kifejezések és így α_1 és α_2 az időben mindig növekednének, azaz, hogy az egyensúly labilis volna, a mi feltevésünkkel ellenkezik.

A (18) szerint:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= A_{11} \cos(\lambda_1 t + \delta_1) + A_{12} \cos(\lambda_2 t + \delta_2) \\ a_2 &= A_{11} \cos(\lambda_1 t + \delta_1) - A_{12} \cos(\lambda_2 t + \delta_2) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (18a)$$

Az egyes harmonikus mozgások periodusai:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}; \quad T_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

6. §. *A translatórius erő középértéke. Speciális esetek.*

a. Az r menti translatórius erő (mely mindkét mágnesre nézve egyenlő, de ellentett előjelű) a (3)-ból:

$$R = \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{3m^2}{r^4} \left\{ \tfrac{3}{2} \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \tfrac{1}{2} \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \right\} \quad . \quad (20)$$

Kifejtve a $\{\ \}$ jelekben levő kifejezést a (6) séma alapján az az $(a_1 + a_2)$ és az $(a_1 - a_2)$ hatványai szerint és élve a (7) rövidítésekkel, a rendezés után:

$$\left.\begin{aligned} R = -\frac{3m^2}{r^4} \Big\{ & (\tfrac{3}{2} c_1 + \tfrac{1}{2} c_2) - \tfrac{3}{2} s_1 (a_1 + a_2) - \tfrac{1}{2} s_2 (a_1 - a_2) \\ & - \tfrac{3}{4} c_1 (a_1 + a_2)^2 - \tfrac{1}{4} c_2 (a_1 - a_2)^2 + \ldots\ldots \Big\} \end{aligned}\right| , \quad (21)$$

mely kifejezés az R-nek az a_1, a_2 elongátióktól való függését explicite tünteti elő. Ha R *negativ*, akkor a középpontok *vonzását*, ha *positív*, *taszítását* jelenti.

b. A 2. §. *d.* pontjának megfontolásai értelmében ezen erő időbeli középértékét kivánjuk ismerni.

Egy periodusra vonatkozólag a (18) kifejezések vagy négyzeteik középértéke sematikusan:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \delta\right)\right]^{2n} dt &= \frac{1 \,.\, 3 \ldots (2n-1)}{2 \,.\, 4 \ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{T}\int_0^T \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \delta\right)\right]^{2n+1} dt &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (22)$$

E szerint a (21)-nek $\overline{R}$-el jelelendő, akárhány periodusra vonatkozó középértéke a (18) és (22) szerint:

$$\overline{R} = -\frac{3m^2}{r^4}\left\{(\tfrac{3}{2}c_1 + \tfrac{1}{2}c_2) - \tfrac{3}{2}c_1 A_{11}^2 - \tfrac{1}{2}c_2 A_{12}^2\right\}, \quad (23)$$

hol a negyed- és magasabbrendű tagok elhanyagolvák; az A_{11} és A_{12} *tetszőleges* az egységhez képest kicsiny állandók.

Miután cos (7) szerint $c_1 = \cos(\vartheta_{10} + \vartheta_{20})$, $c_2 = \cos(\vartheta_{10} - \vartheta_{20})$, továbbá a ϑ_{10} és ϑ_{20} értéke pedig 0 és $\frac{1}{2}\pi$ között van: c_1 negativ is lehet, míg c_2 mindig positiv.

Ezért a (23)-nak az A_{11} és A_{12} amplitúdóktól függő része úgy értékre, mint előjelre nézve nagyon különböző lehet.

Ha nincs lengés, akkor:

$$R_0 = -\frac{3m^2}{r^4}(\tfrac{3}{2}c_1 + \tfrac{1}{2}c_2), \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

a stabilis egyensúlyban érvényes translatórius erő.

Az esetben, mikor $A_{11} = A_{12} = A$, a (23)-ból:

$$\overline{R} = R_0(1 - A^2) \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

c. A továbbiakra nézve speciális egyensúlyi helyzetekből induljunk ki.

1. Legyen $\vartheta_{10} = \vartheta_{20} = \vartheta_0$, mit a (13) értelmében az ε_1, ε_2 és a θ alkalmas választása által érheti el; ekkor a (23)-ból:

$$\overline{R} = -\frac{3m^2}{r^4}\left\{\tfrac{3}{2}\cos 2\vartheta_0 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}A_{11}^2\cos 2\vartheta_0 - \tfrac{1}{2}A_{12}^2\right\} \quad (23a)$$

2. Legyen $\vartheta_{10} = \vartheta_{20} = 0$, azaz a két mágnes egyensúly alkalmával a középpontjaikat egybekapcsoló egyenesen van és mágnesi nyomatékuk e vonalba esik. (Ekkor a θ a (17) és (13) szerint zérusnak is választható, azaz ez vertikális tűhegyeken forogható két mágnestű stabilis egyensúlyi helyzete, ha pl. a föld mágnességének hatása compensálva van.)

Ezen esetben (23)-ból:

$$\overline{R} = -\frac{3m^2}{r^4}\left\{2 - \tfrac{3}{2}A_{11}^2 - \tfrac{1}{2}A_{12}^2\right\} = R_0\left\{1 - \tfrac{3}{4}A_{11}^2 - \tfrac{1}{4}A_{12}^2\right\}, \quad (23b)$$

hol R_0 a (24) értéke $\vartheta_{10} = \vartheta_{20} = 0$ esetben.

E szerint a translatórius erőnek a lengés amplitudóitól függő része itt mindig *taszító*.

3. Ha $\vartheta_{10} = \vartheta_{20} = \frac{1}{2}\pi$ (és ez az 1. §. b. pontjában említett helyzet) akkor θ nem lehet zérus, míg az erő:

$$R = -\frac{3m^2}{r^4}\left\{-1+\tfrac{3}{2}A_{11}^2-\tfrac{1}{2}A_{12}^2\right\} = R_0\left\{1-\tfrac{3}{2}A_{11}^2+\tfrac{1}{2}A_{12}^2\right\}, \quad . \quad (23c)$$

hol R_0 a (24) erteke a $\vartheta_{10}=\vartheta_{20}=\frac{1}{2}\pi$ esetben.

Ezen 3. esetben az R_0 erő *taszító;* ha azt akarjuk, hogy a lengések folytán fellépő része a translatórius erőnek *vonzás* legyen, akkor az amplitúdók a következő feltételnek tartoznak eleget tenni:

$$3\,A_{11}^2 - A_{12}^2 > 0 \quad \text{vagy} \quad A_{11}\sqrt{3} > A_{12}\,. \quad . \quad . \quad (24)$$

E feltételnek az eddig egészen tetszőlegesnek hagyott A_{11} és A_{12} amplitúdók alkalmas választása által mindenkor megfelelhetünk; a legegyszerűbb feltevés: $A_{11} = A_{12}$ szintén kielégíti e feltételt.

E szerint a bevezetés 1. §. *d.* pontjában felvetett kérdésre azt felelhetjük, hogy *két* elemi mágnes esetében a lengés okozta vonzás tényleg felléphet s ha az amplitudók a (24) feltétel szerint választvák, mindig fel is fog lépni.

II. Három egyenlő elemi mágnesből álló rendszer lengései és translatórius erői.

7. §. *Jelölések; egyszerűsítő feltételek. Az erőfüggvény, a forgató nyomatékok és az r menti translatórius erők.*

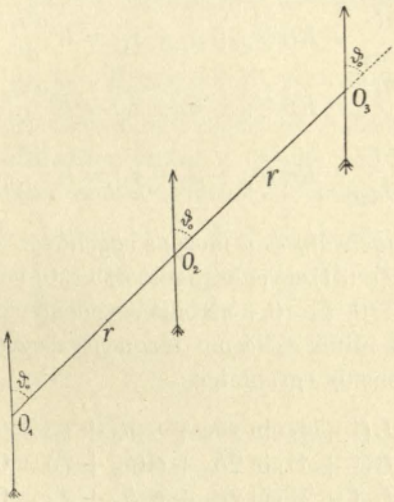
A 3. §-ban megállapított jelölések itt is alkalmazandók, a felmerülő megfelelő menynyiségek száma itt egygyel nagyobb, mint ott, a hozzájárulókat a_3 indexxel jelöljük; ezenkívül megjegyzendő, hogy az erőfüggvény három részből áll s hogy itt a mágnesek középpontjainak távolságai r_{23}, r_{31}, r_{12}, melyek irányai általában különbözők, és hogy végre mindegyik mágnesre általánosságban véve különböző nagyságú és irányú r menti translatórius erők működhetnek.

E szerint itt:

$$\left.\begin{aligned} U = {} & \frac{m_2 m_3}{r_{23}^3}\left\{\tfrac{3}{2}\cos(\vartheta_2+\vartheta_3)+\tfrac{1}{2}\cos(\vartheta_2-\vartheta_3)\right\}+\frac{m_3 m_1}{r_{31}^3}\left\{\tfrac{3}{2}\cos(\vartheta_3+\vartheta_1)+\right. \\ & \left.+\tfrac{1}{2}\cos(\vartheta_3-\vartheta_1)\right\}+\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\left\{\tfrac{3}{2}\cos(\vartheta_1+\vartheta_2)+\tfrac{1}{2}\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)\right\} \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{\partial U}{\partial \vartheta_1} - K_1\,\Theta_1(\vartheta_1+\varepsilon_1) = K_1\frac{d^2\vartheta_1}{dt^2} \\ F_2 &= \frac{\partial U}{\partial \vartheta_2} - K_2\,\Theta_2(\vartheta_2+\varepsilon_2) = K_2\frac{d^2\vartheta_2}{dt^2} \\ F_3 &= \frac{\partial U}{\partial \vartheta_3} - K_3\,\Theta_3(\vartheta_3+\varepsilon_3) = K_3\frac{d^2\vartheta_3}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{\partial U}{\partial r_{31}} + \frac{\partial U}{\partial r_{12}}\text{; ez positiv az } \vec{r}_{21} = \overrightarrow{O_2O_1} \text{ vagy az } \vec{r}_{31} = \overrightarrow{O_3O_1} \text{ mentén} \\ R_2 &= \frac{\partial U}{\partial r_{12}} - \frac{\partial U}{\partial r_{23}}\text{; ez positiv az } \vec{r}_{23} = \overrightarrow{O_2O_3} \text{ vagy az } \vec{r}_{13} = \overrightarrow{O_1O_3} \text{ mentén} \\ R_3 &= \frac{\partial U}{\partial r_{23}} + \frac{\partial U}{\partial r_{31}}\text{; ez positiv az } \vec{r}_{23} = \overrightarrow{O_2O_3} \text{ vagy az } \vec{r}_{13} = \overrightarrow{O_1O_3} \text{ mentén} \end{aligned}\right\} (27)$$



3. ábra.

A továbbiakra nézve a mágnesek teljes egyenlőségén kívül még a 2. §. *b*. pontjában tett azon egyszerűsítést hozzuk be, hogy a három mágnes középpontja egy egyenesen, egymástól r távolságban fekszik és hogy stabilis egyensúly alkalmával a mágnesek tengelyei az r irányával egyenlő ϑ_0 szögeket képeznek (3. ábra).

Ekkor:

$$\left.\begin{array}{c} K_1 = K_2 = K_3 = K; \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta; \\ m_1 = m_2 = m_3 = m; \quad r_{12} = r_{23} = \frac{1}{2} r_{13} = r; \\ L_1 = L_2 = L_3 = \dfrac{m^2}{Kr^3} = L. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (28)$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_0 + a_1; \quad \vartheta_2 = \vartheta_0 + a_2; \quad \vartheta_3 = \vartheta_0 + a_3 \ldots \Big\}; \quad (29)$$

$$\left.\begin{array}{l} U = \dfrac{m^2}{r^3}\left\{\frac{3}{2}\cos(2\vartheta_0 + a_2 + a_3) + \frac{1}{2}\cos(a_2 - a_3)\right\} + \dfrac{m^2}{8r^3}\left\{\frac{3}{2}\cos(2\vartheta_0 + a_3 + a_1)\right. \\ \left. + \frac{1}{2}\cos(a_3 - a_1)\right\} + \dfrac{m^2}{r^3}\left\{\frac{3}{2}\cos(2\vartheta_0 + a_1 + a_2) + \frac{1}{2}\cos(a_1 - a_2)\right\} \end{array}\right\}; \quad (30)$$

hol a_1, a_2, a_3 az egyes mágnesek szög-elongátiói.

A (26) egyenletekből:

$$\left.\begin{array}{l} F_1 = \dfrac{\partial U}{\partial a_1} - K\theta(\vartheta_0 + a_1 + \varepsilon_1) = K\dfrac{d^2 a_1}{dt^2}; \\ F_2 = \dfrac{\partial U}{\partial a_2} - K\theta(\vartheta_0 + a_2 + \varepsilon_2) = K\dfrac{d^2 a_2}{dt^2}; \\ F_3 = \dfrac{\partial U}{\partial a_3} - K\theta(\vartheta_0 + a_3 + \varepsilon_3) = K\dfrac{d^2 a_3}{dt^2}; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (31)$$

8. §. *Az egyensúly és a mozgás egyenletei.*

a. Képezve a (31) egyenletrendszert a (30)-ból, megjegyezve, hogy $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, a stabilis egyensúlynak felelnek meg, és hogy ekkor mind a három mágnes szöggyorsulása zérus, nyerjük az egyensúly egyenleteit:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{2} L(1 + \frac{1}{8})\sin 2\vartheta_0 + \theta(\vartheta_0 + \varepsilon_1) = 0 \\ \frac{3}{2} L(1 + 1)\sin 2\vartheta_0 + \theta(\vartheta_0 + \varepsilon_2) = 0 \\ \frac{3}{2} L(1 + \frac{1}{8})\sin 2\vartheta_0 + \theta(\vartheta_0 + \varepsilon_3) = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (32)$$

melyekből még közvetetlenül folyik:

$$\left.\begin{array}{c} \varepsilon_1 = \varepsilon_3 \\ 16(\vartheta_0 + \varepsilon_1) = 9(\vartheta_0 + \varepsilon_2) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32a)$$

b. Képezve most a (31) egyenleteket (30)-ból tetszőleges a_1, a_2, a_3 értékek mellett, továbbá a (16) séma szerint kifejtve (30) argumentumai sinusait az a_1, a_2, a_3 első hatványaiig bezárólag, végre pedig a következő rövidítéseket vezetve be:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{9}{16} L(+1+3\cos 2\vartheta_0)+\theta &= a_{11} \\ \tfrac{1}{2} L(-1+3\cos 2\vartheta_0) &= a_{12} \\ \tfrac{1}{16} L(-1+3\cos 2\vartheta_0) &= a_{13} \\ \tfrac{1}{1} L(+1+3\cos 2\vartheta_0)+\theta &= a_{22} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

nyerjük a következő rendszerét a mozgásegyenleteknek:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1'' + a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2'' + a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{12}\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_3'' + a_{13}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{11}\alpha_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

9. §. *A rendszer együttes lengéseinek kifejezései.*

Ezen (34) rendszer állandó együtthatójú lineár simultán differentiál egyenletekből állván, megfejtése az ily egyenletek elméletének elemei szerint közvetetlenül történhetik.

Ha

$$\alpha_1 = A_1\cos(\lambda t+\delta),\ \alpha_2 = A_2\cos(\lambda t+\delta),\ \alpha_3 = A_3\cos(\lambda t+\delta_3) \quad (35)$$

a partikuláris megoldások egy rendszere, hol A_1, A_2, A_3, δ az integrátió állandói, akkor ezeket a (34)-be helyettezve, az A_1, A_2, A_3, λ a következő rendszert tartoznak kielégíteni

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda^2)A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3 &= 0 \\ a_{12}A_1 + (a_{22}-\lambda^2)A_2 + a_{12}A_3 &= 0 \\ a_{13}A_1 + a_{12}A_2 + (a_{11}-\lambda^2)A_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

a. E szerint az A_1, A_2, A_3 együtthatóiból képezett determináns eltűnik; azaz:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda^2 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda^2 & a_{12} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11}-\lambda^2 \end{vmatrix} = 0, \quad . \quad . \quad (37)$$

mely az λ^2 meghatározására szolgáló harmadrendű egyenlet.

Azonnal észreveszszük, hogy a D irható *:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda^2+a_{13} & 2a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22}-\lambda^2 & 0 \\ a_{13} & a_{12} & a_{11}-\lambda^2-a_{13} \end{vmatrix} = 0$$

E szerint a (37) egyenlet szétbomlik a következő kettőre:

---

* V. ö. a 27. lap utolsó kikezdését, a 28. és a 30. lapokat.

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}+a_{13}-\lambda^2)(a_{22}-\lambda^2)-2a_{12}^2=0\\ a_{11}-a_{13}-\lambda^2=0\end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad (37a)$$

melyek gyökei rendre:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1^2 &= \tfrac{1}{2}(a_{11}+a_{13}+a_{22})+\tfrac{1}{2}\sqrt{(a_{11}+a_{13}-a_{22})^2+8a_{12}^2}\\ \lambda_2^2 &= \tfrac{1}{2}(a_{11}+a_{13}+a_{22})-\tfrac{1}{2}\sqrt{(a_{11}+a_{13}-a_{22})^2+8a_{12}^2}\\ \lambda_3^2 &= a_{11}-a_{13}\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

b. A (36) egyenlet-rendszerhez értelmében az A_1, A_2, A_3 állandók közül kettő fejezhető ki a harmadik által, mely utóbbi tetszőleges.

Ha rövidség kedvéért

$$\frac{A_2}{A_1}=B_2, \qquad \frac{A_3}{A_1}=B_3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

a (36)-ból:

$$\left.\begin{aligned}a_{11}-\lambda^2+a_{12}B_2+a_{13}B_3=0\\ a_{12}+(a_{22}-\lambda^2)B_2+a_{12}B_3=0\\ a_{13}+a_{12}B_2+(a_{11}-\lambda^2)B_3=0\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Ez az egyenletrendszer érvényes a nevezett A_1, A_2, A_3, állandók-, illetve B_2, B_3 viszonyaik azon három rendszerére nézve, melyek a λ_1^2, λ_2^2, λ_3^2 gyökértékekhez tartoznak; e viszonyokat most meghatározzuk.

c. Legyenek A_{11}, A_{21}, A_{31} illetve B_{21}, B_{31}, a λ_1^2-höz-, A_{12}, A_{22}, A_{32}, illetve B_{22}, B_{32} a λ_2^2-hoz tartozó értékrendszerek; a λ_1^2 és λ_2^2 a (37a) egyenletnek felel meg:

vagy:

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}+a_{13}-\lambda^2)(a_{22}-\lambda^2)=2a_{12}^2,\\ a_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(a_1+a_{13}-\lambda^2)(a_{22}-\lambda^2)}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

E gyököt $\sqrt{(\ldots)(\ldots)}$-al jelelve s ezen öszszefüggéssel az a_{12}-t a (40)-ből eliminálva, ez a rendszer λ_1^2-ra nézve:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}-\lambda_1^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\ldots)(\ldots)}\,B_{21}+a_{13}B_{31}=0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\ldots)(\ldots)}+(a_{22}-\lambda_1^2)B_{21}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\ldots)(\ldots)}\,B_{31}=0 \\ a_{13}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\ldots)(\ldots)}\,B_{21}+(a_{11}-\lambda_1^2)B_{31}=0 \end{aligned}\right\} \quad (40_{12})$$

hol a (41)-nek $\sqrt{(\ldots)(\ldots)}$ gyökében λ_1 teendő λ helyébe.

Ezekből:

$$B_{21}=-\sqrt{2\frac{a_{11}+a_{13}-\lambda_1^2}{a_{22}-\lambda_1^2}}, \quad B_{31}=+1$$

Hasonlóképen nyerjük a λ_2^2-höz tartozó viszonyok értékeit:

$$B_{22}=-\sqrt{2\frac{a_{11}+a_{13}-\lambda_2^2}{a_{22}-\lambda_2^2}}; \quad B_{32}=+1$$

Tekintettel a (41)-re:

$$B_{21}=-\frac{2a_{12}}{a_{22}-\lambda_1^2}=-\frac{a_{11}+a_{13}-\lambda_1^2}{a_{12}};$$

$$B_{22}=-\frac{2a_{12}}{a_{22}-\lambda_2^2}=-\frac{a_{11}+a_{13}-\lambda_2^2}{a_{12}}.$$

A (38) és (39) figyelembe vételével, némi rövidítés után végre:

$$\left.\begin{aligned} &A_{12} \text{ tetszőleges,} \\ &A_{21}=\frac{A_{11}}{2a_{12}}\left\{-(a_{11}+a_{13}-a_{22})+\sqrt{(a_{11}+a_{13}-a_{22})^2+8a_{12}^2}\right\}; \\ &A_{31}=A_{12} \end{aligned}\right\} \quad (42_1)$$

$$\left.\begin{aligned} &A_{13} \text{ tetszőleges;} \\ &A_{22}=\frac{A_{12}}{2a_{12}}\left\{-(a_{11}+a_{13}-a_{22})-\sqrt{(a_{11}+a_{13}-a_{22})^2+8a_{12}^2}\right\}; \\ &A_{32}=A_{12} \end{aligned}\right\} \quad (42_2)$$

d. Ha A_{13}, A_{23}, A_{33}, illetve B_{23}, B_{33} a λ_3^2-hez tartozó értékrendszer, akkor $\lambda_3^2=a_{11}-a_{13}$ értékét (38)-ból (40)-be helyettezve ebből:

$$\left.\begin{array}{l} a_{13}+a_{12}B_{23}+a_{13}B_{33}=0 \\ a_{12}+(a_{22}-a_{11}+a_{13})B_{23}+a_{12}B_{33}=0 \\ a_{13}+a_{12}B_{23}+a_{13}B_{33}=0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (40_3)$$

Ezen egyenletek megoldása:

$$B_{23}=0; \qquad B_{33}=-1$$

azaz (39) szerint:

$$A_{13} \text{ tetszőleges}; \qquad A_{23}=0; \qquad A_{33}=-A_{13}; \quad . \quad (42_3)$$

Ezek szerint a (34) rendszer teljes megoldása:

$$\left.\begin{array}{l} a_1=A_{11}\cos(\lambda_1 t+\delta_1)+A_{12}\cos(\lambda_2 t+\delta_2)+A_{13}\cos(\lambda_3 t+\delta_3) \\ a_2=-\dfrac{2a_{12}}{a_{22}-\lambda_1^2}A_{11}\cos(\lambda_1 t+\delta_1)-\dfrac{2a_{12}}{a_{22}-\lambda_2^2}A_{12}\cos(\lambda_2 t+\delta_2) \\ a_3=A_{11}\cos(\lambda_1 t+\delta_1)+A_{12}\cos(\lambda_2 t+\delta_2)-A_{13}\cos(\lambda_3 t+\delta_3) \end{array}\right\} \quad . \quad (43)$$

hol A_{11}, A_{12}, A_{13}; δ_1, δ_2, δ_3 az integrátió független hat állandója és az $\dfrac{2a_{12}}{a_{22}-\lambda_1^2}$ és $\dfrac{2a_{12}}{a_{22}-\lambda_2^2}$ értékei a (42_1) és (42_2) formuláiban az A_{11} iletve A_{12} együtthatói.

10. §. *Az r menti R_1, R_2, R_3 translatórius erők kifejezései. Középértékük.*

a. A (27) egyenleteket a (25)-ből képezve és bennük a (28) egyszerűsítéseket behozva, nyerjük

$$\left.\begin{array}{l} R_1=-\frac{3}{2}\dfrac{m^2}{r^4}\left\{3\cos(\vartheta_1+\vartheta_2)+\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)+\dfrac{3}{16}\cos(\vartheta_3+\vartheta_1)+\dfrac{1}{16}\cos(\vartheta_3-\vartheta_1)\right\} \\ R_2=-\frac{3}{2}\dfrac{m^2}{r^4}\left\{3\cos(\vartheta_1+\vartheta_2)+\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)-3\cos(\vartheta_2+\vartheta_3)-\cos(\vartheta_2-\vartheta_3)\right\} \\ R_3=-\frac{3}{2}\dfrac{m^2}{r^4}\left\{3\cos(\vartheta_2+\vartheta_3)+\cos(\vartheta_2-\vartheta_3)+\dfrac{3}{16}\cos(\vartheta_3+\vartheta_1)+\dfrac{1}{16}\cos(\vartheta_3-\vartheta_1)\right\} \end{array}\right\} \quad (44)$$

Tekintettel a (29) értékekre, a (44) egyenleteknek a (6) séma szerint végzett kifejtése és rendezése az a_1, a_2, a_3 első-, harmad- és valamenynyi magasabb rendű tagjainak elhagyásával a következő összefüggéseket szolgáltatja:

$$\left.\begin{aligned}
R_1 &= -\tfrac{3}{2}\frac{m^2}{r^4}\left\{\tfrac{17}{16}+\tfrac{51}{16}\cos 2\vartheta_0-\tfrac{1}{2}[(a_1-a_2)^2+\tfrac{1}{16}(a_3-a_1)^2]-\tfrac{3}{2}\cos 2\vartheta_0[(a_1+a_2)^2+\tfrac{1}{16}(a_3+a_1)^2]+\ldots\right\}\\
R_2 &= -\tfrac{3}{2}\frac{m}{r^4}\left\{-\tfrac{1}{2}[(a_1-a_2)^2-(a_2-a_3)^2]-\tfrac{3}{2}\cos 2\vartheta_0[(a_1+a_2)^2-(a_2+a_3)^2]+\ldots\right\}\\
R_3 &= -\tfrac{3}{2}\frac{m}{r^4}\left\{\tfrac{17}{16}+\tfrac{51}{16}\cos 2\vartheta_0-\tfrac{1}{2}[(a_2+a_3)^2+\tfrac{1}{16}[(a_3-a_1)^2]-\tfrac{3}{2}\cos 2\vartheta_0[(a_2+a_3)^2+\tfrac{1}{16}(a_3+a_1)^2]+\ldots\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(45)$$

b. A páratlan hatványú tagokat azért hagytuk el, mert ezek az erők középértéke képzésénél zérust adnak (v. ö. a (22) kifejezéseket).

Megjegyzendő továbbá, hogy az $(a_2+a_3)^2$, $(a_2-a_3)^2$ stb. öszszegeket vagy különbségeket a (43)-ból képezzük; a négyzetre emelésnél tiszta quadrátos, $\cos^2(\lambda_1 t+\delta_1)$, ... jellegű és szorzatos, $\cos(\lambda_2 t+\delta_2)\cos(\lambda_3 t+\delta_3)$, ... jellegű tagok keletkeznek. Az előbbiek a (22) szerint az R középértékekhez véges taggal járulnak; az utóbbiak szétbonthatók $\frac{1}{2}\cos[(\lambda_2+\lambda_3)t+\delta_2+\delta_3]+\frac{1}{2}\cos[(\lambda_2-\lambda_3)t+\delta_2-\delta_3]$ tagokra, melyek a (22) szerint szintén nem képesek a középértéket befolyásolni.

Ezek értelmében a (43)-ból észreveszszük, hogy az $(a_2-a_3)^2$ középértéke az $(a_1-a_2)^2$-ével, az $(a_2+a_3)^2$-é pedig az $(a_1+a_2)^2$-ével egyenlő; s így végre találjuk, hogy az R_1 és az R_3 középértékei egymással egyenlők, míg az R_2-é zérus.

Explicite kifejezve e középértékeket:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{R}_1 &= -\tfrac{3}{2}\frac{m^2}{r^4}\Big\{\tfrac{17}{16}+\tfrac{51}{16}\cos 2\vartheta_0-\tfrac{1}{2}\Big[\Big(1+\frac{2a_{12}}{a_{22}-\lambda_1^2}\Big)^2\tfrac{1}{2}A_{11}^2+\Big(1+\frac{2a_{12}}{a_{22}-\lambda_2^2}\Big)^2\tfrac{1}{2}A_{12}^2+\tfrac{1}{2}A_{13}^2+\tfrac{2}{16}A_{13}^2\Big]-\\
&\quad-\tfrac{3}{2}\cos 2\vartheta_0\Big[\Big(1-\frac{2a_{12}}{a_{22}-\lambda_1^2}\Big)^2\tfrac{1}{2}A_{11}^2+\Big(1-\frac{2a_{12}}{a_{22}-\lambda_2^2}\Big)^2\tfrac{1}{2}A_{12}^2+\tfrac{1}{2}A_{13}^2+\tfrac{2}{16}(A_{11}^2+A_{12}^2)\Big]\Big\}\\
\overline{R}_2 &= 0\\
\overline{R}_3 &= \overline{R}_1
\end{aligned}\right\}\quad(46)$$

Az itt felmerülő $\frac{2a_{12}}{a_{22}-\lambda_1^2}$ és $\frac{2a_{12}}{a_{22}-\lambda_2^2}$ értékek a (42_1) és (42_2)-ben az A_{11} illetve A_{12} együtthatói.

A (46) kifejezésben a [ ] zárójelekben fellépő két öszszeg mindig absolute positiv, de mivel a második öszszeg szorzója $\cos 2\vartheta_0$, ez utóbbinak előjele lényeges.

Stabilis egyensúly alkalmával az A_{11}, A_{12}, A_{13} amplitúdók zérusok és a translatórius erők:

$$\left.\begin{aligned} R_{10} = -\tfrac{3}{2}\frac{m^2}{r^4}\left\{\tfrac{17}{16}+\tfrac{51}{16}\cos 2\vartheta_0\right\} = R_{30} \\ R_{20} = 0 = R_{20} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Mindaddig, míg $1+3\cos 2\vartheta_0>0$, azaz míg $\cos 2\vartheta_0>-\frac{1}{3}$, vagy $\vartheta_0<54°\,44'$, az R_{10} és R_{30} a középső mágnes középpontja felé irányított *vonzást* jelent, ezentúl *taszitást*.

1. Ha $\vartheta_0 \leqq \frac{1}{4}\pi$, (hol ϑ_0 a szög, melyet a mágnesek stabilis egyensúly alkalmával a középpontjaikat öszszekapcsoló egyenessel képeznek 3. ábra, 13. l.), akkor $\cos 2\vartheta_0$ feltétlenül positiv és a (46) kifejezések { } zárójeleiben az A_{11}, A_{12}, A_{13}, amplitúdóktól függő tagok öszszege mindenkor ellentett előjelű, mint az R_{10}, vagy az R_{30}; mivel pedig a $\vartheta_0=\frac{1}{4}\pi$ határig ezen erők a (47) értelmében *vonzók*, a lengések fennállása e vonzás csökkenését fogja maga után vonni.

2. Ha $\frac{1}{2}\pi \geqq \vartheta_0 > \frac{1}{4}\pi$, akkor $\cos 2\vartheta_0$ negativ és az amplitudóktól függő tagok öszszegének előjele a ϑ_0-tól és az A_{11}, A_{12}, A_{13}, értékeitől függ. Ezen utóbbiaknak alkalmas választása által tetszés szerint elérhetjük azt, hogy a translatórius erőknek a lengések folytán bekövetkező változása vonzás vagy pedig taszitás.

11. §. *Speciális esetek: a mágnesek tengelyei a középpontjaikat egybekapcsoló egyenesben fekszenek vagy erre merőlegesek.*

a. Legyen a megelőző 7—10. §§. formuláiban mindenütt $\vartheta_0=0$, azaz a stabilis egyensúly alkalmával a három mágnes mágnesi nyomatékai a középpontjaikat egybekapcsoló egyenesben fekszik.

Ekkor a (33), (38) s a (42_1), (42_2) a középső tényezői rendre:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}&=\frac{36}{16}L+\theta \\ a_{12}&=L \\ a_{13}&=\frac{2}{16}L \\ a_{22}&=4L+\theta \end{aligned}\right\};\qquad \left.\begin{aligned} a_{11}-a_{13}&=\frac{34}{16}L+\theta \\ a_{11}+a_{13}+a_{22}&=\frac{112}{16}L+2\theta \\ a_{11}+a_{13}-a_{22}&=-\frac{26}{16}L \end{aligned}\right\};$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^2&=\frac{51}{16}L+\theta+\frac{1}{16}L\sqrt{(13)^2+2(16)^2} \\ \lambda_2^2&=\frac{51}{16}L+\theta-\frac{1}{16}L\sqrt{(13)^2+2(16)^2} \\ \lambda_3^2&=\frac{34}{16}L+\theta \end{aligned}\right\}$$

[A λ_1^2, λ_2^2, λ_3^2 értékei még akkor is positivek, ha θ-át zérusnak választjuk; e választás (mivel $\vartheta_0=0$), a (32) egyenleteket is kielégíti, ekkor a három mágnest vertikális tűhegyeken szabadon foroghatóknak tekinthetjük (a föld mágnessége compensálva lévén) és stabilis egyensúlyi helyzetük a $\vartheta_0 \doteq 0$-nak felel meg].

Ezekből folyólag, körülbelől $\frac{1}{271}$-résznyi pontossággal nyerjük:

$$-\frac{2a_{12}}{a_{22}-\lambda_1^2}=3\frac{13}{16};\qquad -\frac{2a_{12}}{a_{22}-\lambda_2^2}=-1\frac{13}{16}.$$

Ezek alapján a translatórius erők középértéke a (46)-ból némi rövidítések után

$$\overline{R}_1=-\frac{3}{2}\frac{m^2}{r^4}\left\{\frac{17}{4}-\left[\left(\frac{55}{16}\right)^2-\frac{36}{16}\right]A_{11}^2-\left[\left(\frac{29}{16}\right)^2-\frac{36}{16}\right]A_{12}^2-\frac{17}{16}A_{13}^2\right\}=\overline{R}_3 \quad (48)$$

E szerint a translatórius erőknek a lengés amplitúdóitól függő részei itt mindig taszitók.

b. A mágnesek stabilis egyensúlyi helyzete legyen a középpontjaikat egybekapcsoló egyenesre merőleges, ekkor $\vartheta_0=\frac{1}{2}\pi$.

Ekkor ismét a (33), (38) és (42₁), (42₂) középső tényezői:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}&=-\frac{18}{16}L+\theta \\ a_{12}&=-2L \\ a_{13}&=-\frac{4}{16}L \\ a_{22}&=-2L+\theta \end{aligned}\right\};\qquad \left.\begin{aligned} a_{11}-a_{13}&=-\frac{14}{16}L+\theta \\ a_{11}+a_{13}+a_{22}&=-\frac{54}{16}L+2\theta \\ a_{11}+a_{13}-a_{22}&=+\frac{10}{16}L \end{aligned}\right\};$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1^2&=-\frac{27}{16}L+\theta+\frac{1}{16}L\sqrt{25+8(16)^2}\\ \lambda_2^2&=-\frac{27}{16}L+\theta-\frac{1}{16}L\sqrt{25+8(16)^2}\\ \lambda_3^2&=-\frac{14}{16}L+\theta\end{aligned}\right\}$$

Itt λ_1^2, λ_2^2, λ_3^2 csak akkor positivek, ha

$$16\theta > 14L \quad \text{és} \quad 16\theta > (27+\sqrt{25+8\,.\,256})L),$$

mely utóbbi feltétel az előbbit is magában foglalja.

A felírt értékek egy ezredrésznél nagyobb pontossággal adják:

$$-\frac{2a_{12}}{a_{22}-\lambda_1^2}=-\frac{20\cdot5}{16}; \quad -\frac{2a_{12}}{a_{22}-\lambda_2^2}=\frac{25\cdot5}{116},$$

Ezek szerint a translatórius erők középértéke a (46)-ból némi rövidítés után

$$\overline{R}_1=+\frac{3}{2}\frac{m^2}{r^4}\left\{\frac{34}{16}-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{4\cdot5}{16}\right)^2-\frac{17\cdot5}{16}\right]A_{11}^2-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{41\cdot5}{16}\right)^2+\frac{28\cdot5}{16}\right]A_{12}^2-\frac{7}{16}A_{13}^2\right\}=\overline{R}_2 \quad (49)$$

Itt az A_{12}^2 együtthatója negatív.

Ha azt kívánjuk, hogy az egyensúlyi helyzetben taszító translatórius erőhöz a lengések folytán vonzó rész járuljon, akkor az amplitúdók következő feltételnek tartoznak eleget tenni:

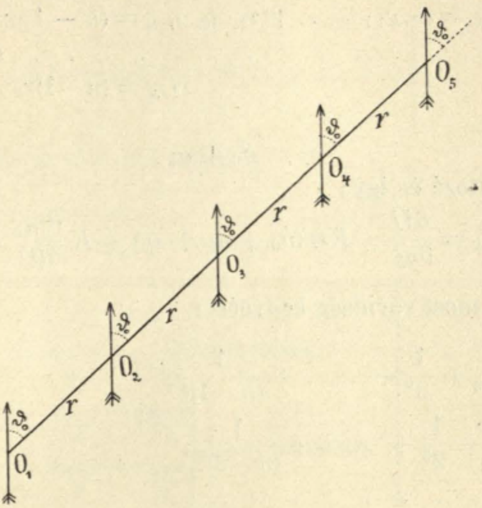
$$78\,A_{12}^2+7\,A_{13}^2>16\,A_{11}^2\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

melyet az A_{11}, A_{12}, A_{13} kellő választása által mindig kielégíthetjük.

III. Általános eset: Tetszőleges számú, középpontjaikkal egyenlő közökben egy egyenesen fekvő, állandó egyensúly alkalmával egymással párhuzamos mágnesek rendszere.

12. §. *Az erőfüggvény, a forgató nyomatékok és a translatórius erők általános kifejezései. Az egyensúly feltételei.*

A következőkben megvizsgálandó rendszerre nézve már eleve azokat az egyszerűsítő felvételeket hozzuk be, hogy a mágnesek minden tekintetben egyenlők, hogy középpontjaik egymástól egyenlő távolságokban egy egyenesen fekszenek és hogy stabilis egyensúly alkalmával tengelyeik mind párhuzamosak és így ugyanazon ϑ_0 szögek képeznek ezen egyenessel. (4. ábra).



4. ábra.

Legyen n a mágneselemek száma, r a szomszédos középpontok egymástól való távolsága; ϑ_k a k-ik elem és a középpontokat egybekapcsoló egyenes közötti szög $\vartheta_k + \varepsilon_k$ pedig a torsió szöge (v. ö. a 3. §-ot), akkor az erőfüggvény, a forgató nyomaték és az r menti translatórius erő sematikus kifejezései:

$$\left.\begin{aligned} U &= \tfrac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{m^2}{r_{kl}^3}\left\{\tfrac{3}{2}\cos(\vartheta_k+\vartheta_l)+\tfrac{1}{2}\cos(\vartheta_k-\vartheta_l)\right\};\ k\lessgtr l;\\ F_k &= \frac{\partial U}{\partial \vartheta_k} - K\Theta(\vartheta_k+\varepsilon_k) = K\frac{d^2\vartheta_k}{dt^2}\\ R_k &= \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial r_{kl}},\quad l\gtrless k; \end{aligned}\right\}\quad(51)$$

Az R_k képzésénél egyes tagjainak előjele veendő figyelembe. Feltevéseink értelmében a távolságok absolut értékei:

$$\begin{aligned}
r_{12} &= r_{23} = \ldots = r_{n-1,n} = r;\\
r_{13} &= r_{24} = \ldots = r_{n-2,n} = 2r;\\
r_{14} &= r_{25} = \ldots = r_{n-3,n} = 3r;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
r_{1k} &= r_{2,k+1} = \ldots = r_{n-(k-1),n} = (k-1)\,r;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad r_{1,n} = (n-1)r.
\end{aligned}$$

Továbbá

$$\vartheta_k = \vartheta_0 + a_k\,,$$

hol a_k a változó és így:

$$F_k = \frac{\partial U}{\partial a_k} - K\theta(\vartheta_0 + a_k + \varepsilon_k) = K\frac{d^2 a_k}{dt^2} \quad . \quad . \quad (51a)$$

Írjunk most rövidség kedveért:

$$\left.\begin{aligned}
h_1 &= 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^3};\\
h_2 &= 1 + 1 + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{(n-2)^3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
h_k &= \frac{1}{(k-1)^3} + \ldots + \frac{1}{2^3} + 1 + 1 + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{(n-k)^3};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
h_n &= \frac{1}{(n-1)^3} + \ldots + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^3} + 1\,.
\end{aligned}\right\} \quad (52)$$

hol, mint azonnal észreveszszük, áll:

$$\left.\begin{array}{ll}
& h_1 = h_n\,,\\
& h_2 = h_{n-1}\,,\\
& \ldots\ldots\\
& \ldots\ldots\\
\text{végre} & \left.h_{\frac{n}{2}} = h_{\frac{n}{2}+1}\right\}\ \text{ha } n \text{ páros,}\\
\text{avagy} & \left.\begin{array}{l} h_{\frac{n-1}{2}} = h_{\frac{n+3}{2}}\\ h_{\frac{n+1}{2}} = h_{\frac{n+1}{2}} \end{array}\right\}\ \text{ha } n \text{ páratlan.}
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (52a)$$

Képezve a (51a)-t s benne az α-kat és az a_k gyorsulását zérussá téve, nyerjük rendre az egyensúly feltételi egyenleteit $\left(L = \frac{m^2}{Kr^3}\text{ lévén}\right)$:

$$\left.\begin{array}{c} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{3}{2} Lh_k \sin 2\vartheta_0 + \Theta(\vartheta_0 + \varepsilon_k) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} ; \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

hol az (52a) és az (53)-ból folyólag:

$$\left.\begin{array}{lll} & \varepsilon_1 = \varepsilon_n & \\ & \varepsilon_2 = \varepsilon_{n-1} & \\ & \cdots & \\ & \cdots & \\ \text{végre} & \varepsilon_{\frac{n}{2}} = \varepsilon_{\frac{n}{2}+1} & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \text{avagy} & \left.\begin{array}{l} \varepsilon_{\frac{n-1}{2}} = \varepsilon_{\frac{n+3}{2}} \\ \varepsilon_{\frac{n+1}{2}} = \varepsilon_{\frac{n+1}{2}} \end{array}\right\} & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{array}\right\} . \quad . \quad . \quad . \quad (53\text{a})$$

13. §. *A mozgás egyenletei.*

Az (50) első egyenletéből és (51a)-ból a lengések egyenletei is közvetlenül következnek, ha a $\cos(\vartheta_k + \vartheta_\lambda) = \cos(2\vartheta_0 + \alpha_k + \alpha_l)$ stb. kifejezéseket a (6) sémákkal az α-k szerint kifejtjük és ezeknek csak első hatványú tagjait megtartjuk.

Az α-k együtthatóit következőleg jeleljük:

$$
\left.\begin{array}{l}
a_{11}=\frac{1}{2}Lh_1(1+3\cos 2\vartheta_0)+\Theta\,;\ a_{12}=\frac{1}{2}L(-1+3\cos 2\vartheta_0)\,;\quad a_{13}=\frac{1}{2}L\frac{1}{2^3}(-1+3\cos 2\vartheta_0)\,;\ \ldots\ a_{1n}=\frac{1}{2}L\frac{1}{(n-1)^3}(-1+3\cos 2\vartheta_0)\,;\\
a_{21}=a_{12}\,;\qquad a_{22}=\frac{1}{2}Lh_2(1+3\cos 2\vartheta_0)+\Theta\,;\ a_{23}=a_{12}\,;\ a_{24}=a_{13}\,;\ \ldots\ldots\ a_{2,n}=a_{1,n-1}\,;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{k1}=a_{1k}\,;\ a_{k2}=a_{1,k-1}\,;\ \ldots\ a_{k,k-1}=a_{1,2}\,;\ a_{kk}=\frac{1}{2}Lh_k(1+3\cos 2\vartheta_0)+\Theta\,;\ a_{k,k+1}=a_{1,2}\,;\ \ldots\ a_{k,n}=a_{1,n-k}\,;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n,1}=a_{1,n},\quad a_{n,2}=a_{1,n-1},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ a_{n,n-1}=a_{12}\,;\quad a_{nn}=\frac{1}{2}Lh_n(1+3\cos 2\vartheta_0)+\Theta.
\end{array}\right\}\quad(54)
$$

Tekintettel az (52a) értékekekre

$$
\left.\begin{array}{ll}
 & a_{11}=a_{n,n}\,;\quad a_{22}=a_{n-1,n-1}\,;\quad a_{33}=a_{n-2,n-2}\,;\ \ldots\,;\\
\text{ezenkívül végre:} & \\
 & a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}=a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+1}\ \text{ha } n \text{ páros,}\\
\text{avagy} & a_{\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}}=a_{\frac{n+3}{2},\frac{n+3}{2}}\,;\ a_{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}}=a_{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}}\ \text{ha } n \text{ páratlan.}
\end{array}\right|\quad(54a)
$$

Ezek szerint az (51a)-ból származó mozgás-egyenletek [az (53) egyensúlyi egyenletek levonásával] a következők:

$$
\left.\begin{array}{l}
(a_1''+a_{11}a_1)+a_{12}a_2+a_{13}a_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{1,n-1}a_{n-1}+a_{1n}a_{1n}=0\\
a_{12}a_1+(a_2''+a_{22}a_2)+a_{12}a_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{1,n-2}a_{n-1}+a_{1,n-1}a_{1n}=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{1k}a_1+a_{1,k-1}a_2+\ldots+a_{1,2}a_{k-1}+(a_k''+a_{kk}a_k)+a_{12}a_{k+1}+\ldots+a_{1,n-k+1}a_{1n}=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{1,n-1}a_1+a_{1,n-2}a_2+\ldots\ldots+a_{12}a_{n-2}+(a_{n-1}''+a_{22}a_{n-1})+a_{12}a_{1n}=0\\
a_{1n}a_1+a_{1,n-1}a_2+\ldots\ldots+a_{12}a_{n-1}+(a_n''+a_{11}a_n)=0
\end{array}\right\}\quad(55)
$$

Ez az állandó együtthatójú másodrendű lineáris differentiál-egyenletek rendszere azonnal megfejthető.

14. §. *A mozgás-egyenleteknek* LAGRANGE-*féle determinánsa. Ennek szétbontása két aldetermináns szorzatára.*

Ha

$$a_k = A_k \cos(\lambda t + \delta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

az (55) rendszer egy partikuláris megoldása, akkor az A_k és a λ a következő összefüggéseknek tartoznak eleget tenni:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11}-\lambda^2)A_1 + a_{12}A_2 + \ldots + a_{1n}A_n = 0 \\ a_{12}A_1 + (a_{22}-\lambda^2)A_2 + \ldots + a_{1,n-1}A_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1k}A_1 + \ldots + (a_{kk}-\lambda^2)A_k + \ldots + a_{1,n-k+1}A_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}A_1 + \ldots + a_{12}A_{n-1} + (a_{11}-\lambda^2)A_n = 0 \end{array}\right\} \quad (57)$$

E szerint a rendszer LAGRANGE-féle determinánsa, mely egyszersmind a λ^2-re nézve n-edrendű meghatározó egyenlet, a a következő *mindkét diagonálisra nézve symmetrikus* szerkezetű:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda^2 & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda^2 & a_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1,n-3} & a_{1,n-2} & a_{1n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1k} & a_{1,k-1} \ldots a_{12} & a_{kk}-\lambda^2 \quad a_{12} \ldots & & a_{1,n-k} & a_{1,n-k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,n-1} & a_{1,n-2} & a_{1,n-3} \ldots\ldots\ldots & a_{12} & a_{22}-\lambda^2 & a_{12} \\ a_{1,n} & a_{1,n-1} & a_{1,n-2} \ldots\ldots\ldots & a_{13} & a_{12} & a_{11}-\lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \; (58)$$

Azon tétel, hogy ezen egyenlet valamenynyi λ^2 gyökértéke reális, többféleképen van bebizonyítva. (V. ö. pl. ROUTH, Dynamics of a system of rigid bodies, II. 36. l. lábjegyzékét.)

Ezen determináns, miként azonnal bebizonyítjuk, kettős symmetriájánál fogva szétbontható két más determináns szorzatára; ha n páros szám, akkor ezek mindegyikének foka $\frac{n}{2}$; ha n páratlan, akkor az egyiknek foka $\frac{n+1}{2}$, a másiké $\frac{n-1}{2}$.

A szétbontás alapjául a determinánsok elméletének azon elemi tétele szolgál, hogy a determináns értéke nem változik, ha egyik oszlopának (vagy sorának) elemeihez egy másik oszlop (vagy sor) megfelelő elemeit tetszőleges, de ugyanazon tényezővel szorozva hozzáadjuk.

E tételt a követendő bizonyításánál sokszor fogjuk alkalmazni; de czélszerű a páros n-ek esetét s a páratlan n-ekét külön-külön tárgyalni.

a. Legyen *n páros* szám.

1. Adjuk az (58) első oszlopa elemeihez az n-ik oszlop megfelelő elemeit, a második oszlop elemeihez az $n-1$-ik oszlop megfelelő elemeit s i. t. végre az $\frac{n}{2}$-ik oszlop elemeihez az $\frac{n}{1}+1$-ik oszlopéit; a többi; $\frac{n}{2}+1$ —, $\frac{n}{2}+2$ —, ... n-ik oszlopok elemeit változatlanúl meghagyva. Ezen új a D-vel egyenértékű determinans első sorának elemeit vonjuk most le az n-ik sor megfelelő elemeiből, továbbá a második sor elemeit az $n-1$-ik sor megfelelő elemeiből s i. t., végre az $\frac{n}{2}$-ik sor elemeit az $\frac{n}{2}+1$-ik soréiből.

A keletkező determináns értéké a D-ével teljesen egyenlő; de a nevezett egyszerű műtétek befejezése után észreveszszük, hogy azok az elemek, melyek az első, második, ... $\frac{n}{2}$-ik oszlop és az $\frac{n}{2}+1$, $\frac{n}{2}+2$, ... n-ik sor metszőhelyein fekszenek, *zérus* értéket mutatnak; ezen elemek száma $\left(\frac{n}{2}\right)^2$.

E szerint ez a determináns egyenlő a két adjungált $\frac{n}{2}$-ed rendű subdetermináns szorzatával.

A két subdetermináns D_1 és D_2 pedig a megelőző észrevétel értelmében a következő szerkezetű:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11}+a_{1n}-\lambda^2 & a_{12}+a_{1,n-1} & a_{13}+a_{1,n-2}\dots\dots\dots\dots & a_{1,\frac{n}{2}}+a_{1,\frac{n}{2}+1} \\ a_{12}+a_{1,n-1} & a_{22}+a_{1,n-2}-\lambda^2 & a_{12}+a_{1,n-3}\dots\dots\dots\dots & a_{1,\frac{n}{2}-1}+a_{1,\frac{n}{2}} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{1,m}+a_{1,n-m+1} & a_{1,m-1}+a_{1,n-m} & \dots a_{mm}+a_{1,n-2m+2}-\lambda^2\dots & a_{1,\frac{n}{2}-m+1}+a_{1,\frac{n}{2}-m+2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{1,\frac{n}{2}-1}+a_{1,\frac{n}{2}} & a_{1,\frac{n}{2}-2}+a_{1,\frac{n}{2}-1} & \dots\dots a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-1}+a_{1,4}-\lambda^2 & a_{12}+a_{13} \\ a_{1,\frac{n}{2}}+a_{1,\frac{n}{2}+1} & a_{1,\frac{n}{2}-1}+a_{1,\frac{n}{2}} & \dots\dots\dots\dots\dots a_{12}+a_{13} & a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}+a_{12}-\lambda^2 \end{vmatrix}; \quad (59_1)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11}-a_{1n}-\lambda^2 & a_{12}-a_{1,n-1} & a_{13}-a_{1,n-2}\dots a_{1,\frac{n}{2}}-a_{1,\frac{n}{2}+1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{1\frac{n}{2}}-a_{1\frac{n}{2}+1} & a_{1,\frac{n}{2}-1}-a_{1,\frac{n}{2}}\dots a_{12}-a_{13} & a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}-a_{12}-\lambda^2 \end{vmatrix} \quad (59_2)$$

A D_2 szerkezete csak anynyiban különbözik a D_1-étől, a menynyiben az előbbi minden elemének második része negatív, míg az utóbbinál positív; az $a-\lambda^2$-ek előjele érintetlenül maradván.

E szerint:

$$D = D_1 D_2 = 0,$$

miből

$$\left.\begin{array}{l} D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

azaz a λ^2 meghatározó egyenlete az (59_1) és (59_2) két $\frac{n}{2}$-ed rendű egyenletre bomlott szét.

b. Legyen *n páratlan* szám.

Ezen esetben az *a.* alatt említett operátiókat csak az elsőtől az $\frac{n-1}{2}$-ik s az utolsótól az $\frac{n+3}{2}$-ik oszlopokra-, illetve ezután csak az elsőtől az $\frac{n-1}{2}$-ik s az utolsótól az $\frac{n+3}{2}$-ik sorokra szabad alkalmazni.

Ezen esetben a származó determináns azon elemei, melyek az első, második ... $\frac{n-1}{2}$ oszlop és az $\frac{n+3}{2}$, $\frac{n+5}{2}$, ... n-ik sor metszőhelyein fekszenek, *zérus* értékkel bírnak; ezen elemek száma $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$.

E determináns egyenlő az $\frac{n+1}{2}$-ed s az $\frac{n-1}{2}$ rendű adjungált D_1 és D_2 determinánsok szorzatával, melyek szerkezete itt a következő:

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11}+a_{1n}-\lambda^2 & a_{12}+a_{1,n-1} & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & a_{1,\frac{n-1}{2}}+a_{1,\frac{n+3}{2}} & a_{1,\frac{n+1}{2}} \\ a_{12}+a_{1,n-1} & a_{22}+a_{1,n-2}-\lambda^2 & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & a_{1,\frac{n-3}{2}}+a_{1,\frac{n+1}{2}} & a_{1,\frac{n-1}{2}} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{1,m}+a_{1,n-m+1}\cdot\;\cdot\;\cdot & a_{mm}+a_{1,n-2m+2}-\lambda^2 & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & a_{1,\frac{n-2m+1}{2}}+a_{1,\frac{n-2m+5}{2}} & a_{1,\frac{n-2m+3}{2}} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{1,\frac{n-1}{2}}+a_{1,\frac{n+3}{2}} & a_{1,\frac{n-3}{2}}+a_{1,\frac{n+1}{2}} & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & a_{\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}}+a_{13}-\lambda^2 & a_{12} \\ 2a_{1,\frac{n+1}{2}} & 2a_{1,\frac{n-1}{2}} & 2a_{1,\frac{n-3}{2}}\cdot\;\cdot\;\cdot & 2a_{12} & a_{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}}-\lambda^2 \end{vmatrix} \tag{61_1}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{1,n}-\lambda^2 & a_{12}-a_{1,n-1}\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & a_{1,\frac{n-1}{2}}-a_{1,\frac{n+3}{2}} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{1,\frac{n-1}{2}}-a_{1,\frac{n+3}{2}} & a_{1,\frac{n-3}{2}}-a_{1,\frac{n+1}{2}}\cdot\;\cdot\;\cdot & a_{\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}}-a_{13}-\lambda^2 \end{vmatrix} \tag{61_2}$$

A D_2 itt csak anynyiban különbözik a D_1-től, a menynyiben az előbbi minden elemének második része negativ, míg az a D_1-nél positiv, az $a - \lambda^2$ előjele érintetlenül maradván; ezenkívül a D_2-ben a D_1-nek utolsó oszlopa és sora hiányzik.

Itt is $D = D_1 D_2 = 0$ lévén:

$$\left.\begin{array}{l} D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \end{array}\right\} ; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (62)$$

e szerint a λ^2-et meghatározó egyenlet a jelen esetben egy $\frac{n+1}{2}$-ed és egy $\frac{n-1}{2}$-ed rendű egyenletre bomlik.

Észreveszszük, hogy az (59_1) és (59_2), valamint a (61_1) és (61_2) determinánsok szintén symmetrikusak, de csak *egy* diagonálisra nézve.

15. §. *A lengések kitéréseinek általános kifejezései. Amplitúdóiknak egymással való öszszefüggése.*

Jeleljék $\lambda_1^2, \lambda_2^2 \ldots \lambda_k^2 \ldots \lambda_n^2$ a $D = 0$ determináns (58) gyökeit; az (56) partikuláris megoldás sémájából az általános megoldás az a_k lengés-szögre nézve:

$$a_k = \sum_{l=1}^{n} A_{kl} \cos(\lambda_l t + \delta_l), \quad \ldots \ldots \quad (63)$$

hol a δ_l és az A_{kl} az integrátió állandói; az előbbiek száma n; az utóbbiaké n^2. Ámde az ily differentiálegyenletek elemi elmélete szerint az (55) rendszer teljes megoldásában csak $2n$ számú független (tetszőleges) állandója az integrátiónak lehet; ha a δ-kat ezekhez számítjuk, akkor csak n számú A_{kl} független amplitúdó létezhetik.

Az amplitúdóknak egymással való öszszefüggését az (57) rendszer fejezi ki, mely az egymáshoz tartozó

$$\lambda_l, \quad A_{1l}, \quad A_{2l} \ldots A_{kl} \ldots A_{nl}$$

értékek minden egyes, $l = 1$-től $l = n$-ig terjedő rendszerére nézve külön-külön fennáll.

Egyike ezen egyenletrendszereknek:

$$\left.\begin{aligned}
&(a_{11}-\lambda_l^2)A_{1l}+a_{12}A_{2l}+\dots+a_{1,n-1}A_{n-1,l}+a_{1,n}A_{nl}=0\\
&a_{12}A_{1l}+(a_{22}-\lambda_l^2)A_{2l}+\dots+a_{1,n-2}A_{n-1,l}+a_{1,n-1}A_{n,l}=0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{1k}A_{1l}+a_{1,k-1}A_{2l}+\dots+(a_{kk}-\lambda_l^2)A_{kl}+\dots+a_{1,n-k+1}A_{n,l}=0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{1,n-1}A_{1l}+a_{1,n-2}A_{2l}+\dots+(a_{22}-\lambda_l^2)A_{n-1,l}+a_{12}A_{n,l}=0\\
&a_{1n}A_{1l}+a_{1,n-1}A_{2l}+\dots\dots+a_{12}A_{n-1,l}+(a_{11}-\lambda_l^2)A_{n,l}=0
\end{aligned}\right\}\quad(64)$$

Ezen egyenletrendszerben az $A_{1l}\dots A_{nl}$ amplitudók együtthatói mindkét diagonálisra nézve symmetrikusak és megfelelnek a megelőző § (59_1) és (59_2), illetve (61_1) és (61_2) egyenleteinek.

Könynyű ezen subdeterminánsoknak az amplitudókra vonatkozó jelentését megállapitani.

a. Öszszegezve a (64) rendszerben az első és az n-ik, a második és az $n-1$-ik egyenletet s í. t., öszszegek rendezése után nyerjük rendre:

$$\left.\begin{aligned}
&(a_{11}+a_{1n}-\lambda_l^2)(A_{1l}+A_{nl})+(a_{12}+a_{1,n-1})(A_{2l}+A_{n-1,l})+\dots\dots=0\\
&(a_{12}+a_{1,n-1})\ (A_{1l}+A_{nl})+(a_{22}+a_{1,n-2}-\lambda_l^2)(A_{2l}+A_{n-1,l})+\dots=0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\},\quad(64_1)$$

mely egyenletekből az (59_1), illetve a (61_1) determináns adódik, a szerint, a mint n páros vagy páratlan. Mivel azonban a nevezett determinánsok a λ^2-et meghatározó $D=0$ (58) egyenletnek $\lambda_1^2, \lambda_2^2\dots\lambda^2_{\frac{n}{2}}$, illetve $\dots\lambda^2_{\frac{n+1}{2}}$ gyökeit határozzák meg; azért a (64_1) egyenletrendszer csak az $l=1$-től $l=\frac{n}{2}$-, illetve $l=\frac{n+1}{2}$-ig terjedő A együtthatókrendszerére szolgáltathatja e determinánsokat.

b. Ellenben levonva a (64) rendszerben az n-ik egyenletet az elsőből, az $(n-1)$-iket a másodikból s í. t., a különbségek rendezése után nyerjük:

$$\left.\begin{aligned}
&(a_{11}-a_{1n}-\lambda_l^2)(A_{1l}-A_{nl})+(a_{12}-a_{1,n-1})(A_{2l}-A_{n-1,l})+\dots\dots=0\\
&(a_{12}-a_{1,n-1})\ (A_{1l}-A_{nl})+(a_{22}-a_{1,n-2}-\lambda_l^2)(A_{2l}-A_{n-1,l})+\dots=0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\}\quad(64_2)$$

melyekből páros n esetében az (59_2), páratlan n esetében a (61_2) adódik. Miután ezek a determinánsok a λ^2et meghatározó $D=0$ (58) egyenletnek $\lambda^2_{\frac{n}{2}+1}$, $\lambda^2_{\frac{n}{2}+2}\dots\lambda^2_n$, illetve $\lambda^2_{\frac{n+3}{2}}$, $\lambda^2_{\frac{n+5}{2}}\dots$

λ_{n-1}^2, λ_n^2 gyökeit tartalmazzák, azért a (64_2) egyenlet ezen determinánsokat az A együtthatóknak is csak azon rendszereire nézve szolgáltathatja, melyeknél az l az $l = \frac{n}{2}+1$-től, illetve $l = \frac{n+3}{2}$-től az $l = n$-ig terjedő értékekkel bír.

De még tovább mehetünk.

1. A (64_2) rendszert még az $l = 1$-től az $l = \frac{n}{2}$-, illetve $l = \frac{n+1}{2}$-ig terjedő indexek számára is szabad a (64)-ből képeznünk; de ekkor nem szabad az (59_2), illetve a (61_2) determinánst szolgáltatnia, mert ezen indexű λ^2-kra nézve az (59_1), illetve (61_1) determináns érvényes. Miután pedig a (64_2)-ben az $A_{1l} - A_{nl}$ s í. t. különbségek együtthatói nem zérusok, azért az l-nek most említett értékeire nézve e különbségek legalább egyikének zérusnak kell lennie, mert csak ez által van elérve, hogy a (64_2) az (59_2)-t, illetve (61_2)-t nem adhatja. De ekkor a (64_2) egyenleteinek most röviden ν-vel jelelendő száma megmaradt, míg az $A_{1l} - A_{nl} \ldots$ meghatározandó különbségek száma egygyel apadt, és így a (64_2) ν számú egyenleteinek minden $\nu - 1$-ed combinatiója a λ^2 számára egy $(\nu - 1)$-ed rendű determinánst ád, mely determinánsok egymástól általánosságban különböznek és az ekkor érvényes (59_1), illetve (61_1) determinánssal általánosságban szintén nem, még rendjükre nézve sem egyezhetnek meg. Ezért kénytelenek vagyunk felvenni, hogy akkor az $A_{1l} - A_{nl} \ldots$ különbségek közül még egy, azután még egy s í. t. végre pedig az utolsó különbség is zérus. Ennek értelmében a (64_2) rendszer egyenletei az $l = 1$-től $l = \frac{n}{2}$-ig, illetve $l = \frac{n+1}{2}$-ig csak identitások, melyekben az $A_{1l} - A_{nl}, \ldots$ különbségek mind zérus értékűek.

2. Teljesen ily módon, mint a megelőző 1. pont alatt bebizonyíthatni, hogy a (64_1) rendszer egyenletei az $l = \frac{n}{2}+1$-től, illetve az $l = \frac{n+3}{2}$-től az $l = n$-ig csak identitásokat jelenthetnek, melyekben az $A_{1l} + A_{nl}, \ldots$ öszszegek mind zérus értékűek.

Szemmel tartva az épen nyert fontos eredményeket, az n^2 számú $A_{11} \ldots A_{nn}$ amplitúdók öszszefüggését következőleg írhatjuk fel:

aa. ha n páros és az l rendre:

$$\left.\begin{array}{llll}
l=1: & A_{11}=A_{n1}, & A_{21}=A_{n-1,1}\,\ldots\ldots\ldots\ldots & A_{\frac{n}{2},1}=A_{\frac{n}{2}+1,1} \\
l=2: & A_{12}=A_{n2}, & A_{22}=A_{n-1,2}\,\ldots\ldots\ldots\ldots & A_{\frac{n}{2},2}=A_{\frac{n}{2}+1,2} \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\vdots & \ldots\ldots \\
l=\frac{n}{2}: & A_{1,\frac{n}{2}}=A_{n,\frac{n}{2}}, & A_{2,\frac{n}{2}}=A_{n-1,\frac{n}{2}}\,\ldots\ldots\ldots\ldots & A_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}=A_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}} \\
l=\frac{n}{2}+1: & A_{1,\frac{n}{2}+1}=-A_{n,\frac{n}{2}+1}, & A_{2,\frac{n}{2}+1}=-A_{n-1,\frac{n}{2}+1}\,\ldots & A_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1}=-A_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+1} \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
l=n-1: & A_{1,n-1}=-A_{n,n-1}, & A_{2,n-2}=-A_{n-1,n-1}\,\ldots\ldots & A_{\frac{n}{2},n-1}=-A_{\frac{n}{2}+1,n-1} \\
l=n: & A_{1n}=-A_{nn}, & A_{2n}=-A_{n-1,n}\,\ldots\ldots\ldots\ldots & A_{\frac{n}{2},n}=-A_{\frac{n}{2}+1,n}
\end{array}\right\} \quad (65_1)$$

Az öszszefüggések száma itt: $n\frac{n}{2}=\frac{1}{2}n^2$; az A amplitúdóké n^2.

bb. ha n páratlan és az l rendre:

$$\left.\begin{array}{ll}
l=1 & : A_{11}=A_{n1},\quad A_{21}=A_{n-1,1}\ldots A_{\frac{n-1}{2},1}=A_{\frac{n+3}{2},1} \\
l=2 & : A_{12}=A_{n,2},\quad A_{22}=A_{n-1,2}\ldots A_{\frac{n-1}{2},2}=A_{\frac{n+3}{2},2} \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
l=\frac{n+1}{2} & : A_{1,\frac{n+1}{2}}=A_{n,\frac{n+1}{2}},\ldots\ldots\ldots A_{\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}}=A_{\frac{n+3}{2},\frac{n+1}{2}} \\
l=\frac{n+3}{2} & : A_{1,\frac{n+3}{2}}=-A_{n,\frac{n+3}{2}},\ldots\ldots A_{\frac{n-1}{2},\frac{n+3}{2}}=-A_{\frac{n+3}{2},\frac{n+3}{2}} \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
l=n-1 & : A_{1,n-1}=-A_{n,n-1},\ldots\ldots\ldots A_{\frac{n-1}{2},n-1}=-A_{\frac{n+3}{2},n-1} \\
l=n & : A_{1n}=-A_{nn},\ldots\ldots\ldots\ldots A_{\frac{n-1}{2},n}=-A_{\frac{n+3}{2},n}
\end{array}\right\}\quad (65_2)$$

az utolsó oszlop az egyenként önmagukkal egyenlő $A_{\frac{n+1}{2},1}$, $A_{\frac{n+1}{2},2}\ldots A_{\frac{n+1}{2},n}$ amplitúdókat tartalmazza, de ezek közül az $A_{\frac{n+1}{2},\frac{n+3}{2}}$, $A_{\frac{n+1}{2},\frac{n+5}{2}}\ldots A_{\frac{n+1}{2},n}$ amplitúdóknak zérusoknak kell lenniök, mert különben a (64) vagy a (64_2) az $l=\frac{n+1}{2}$ esetre nézve nem adhatja a (61_2)-őt. (V. ö. e §. 1. és 2. pontjait.)

Az összefüggések száma itt $n\cdot\frac{n-1}{2}=\frac{1}{2}(n^2-n)$; az amplitúdóké n^2.

16. §. *A kiszámítandó és a független amplitúdók.*

Észreveszszük, hogy a (65_1), illetve (65_2) összefüggések helyettezése a (64) rendszerbe közvetetlenül szolgáltatja az (59_1) és (59_1) és (59_2), illetve a (61_1) és (62_2) determinánsokat.

Evvel azonban az A_{kl} amplitudók egymással való kapcsolatának vizsgálata még nincsen befejezve; ugyanis a fent tett megjegyzések szerint páros n-eknél még $\frac{1}{2}n^2$, páratlan n-eknél meg $\frac{1}{2}n^2+n$ amplitúdó ismeretlen.

De ezek az amplitúdók a (64_1) és (64_2) rendszerből adódnak; ezek a rendszerek ugyanis a (65_1) és (65_2) szemmel tartásával:

1) ha $l \leqq \frac{n}{2}$, vagy $\leqq \frac{n+1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}+a_{1n}-\lambda_l^2)A_{1l}+(a_{12}+a_{1,n-1})A_{2l}+\quad\ldots=0\\(a_{12}+a_{1,n-1})\;A_{1l}+(a_{22}+a_{1,n-2}-\lambda_l^2)A_{2l}+\ldots=0\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\quad(66_1)$$

2) ha $l \gtreqless \frac{n}{2}+1$ vagy $l \geqq \frac{n+3}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}-a_{1n}-\lambda_l^2)A_{1l}+(a_{12}-a_{1,n-1})A_{2l}+\quad\ldots=0\\(a_{12}-a_{1,n-1})\;A_{1l}+(a_{22}-a_{1,n-2}-\lambda_l^2)A_{2l}+\ldots=0\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\quad(66_2)$$

Miután a (66_1) és (66_2) egyenletek minden egyes rendszere *homogén* lineáris egyenletekből áll, melyeknek aldeterminánsai általánosságban véve a zérustól különböznek, azért minden egyes rendszer egyszeresen határozatlan, azaz, minden egyes rendszerben az A_{1l}, A_{2l} ... együtthatók viszonyai meg vannak határozva, de az együtthatók egyike még tetszőlegesen választható.

Legyenek A_{11}, A_{12}, ... $A_{1,n-1}$, $A_{1,n}$ ezen öszszesen n számú tetszőlegesen választható amplitúdók; ezekkel, a (65_1), illetve (65_2) öszszefüggésekkel s a (66_1) illetve (66_2) egyenletekkel a többi amplitúdó mind kifejezhető.

Írjunk most: $A_{kl}=\mu_{kl}A_{1l}$, hol μ_{kl} a szám, melylyel az A_{1l}-et kell szoroznunk, hogy az A_{kl}-et nyerjük, e számot a megelőző kifejtések szerint meghatározottnak kell tekintenünk.

Megjegyzendő, hogy $\mu_{1l}=1$ minden l-re nézve és hogy *páros* számú n-eknél a μ_{kl}-ben $k=1$-től $\frac{n}{2}$-ig, páratlan számúaknál $\frac{n+1}{2}$-ig terjedhet.

17. §. *A lengések explicit kifejezései.*

Öszszefoglalva a megelőző §. eredményeit, a (63) egyenleteket következőképen írhatjuk kifejtett alakban:

$$\left.\begin{aligned}
a_1 \;&= A_{11}\cos(\lambda_1 t+\delta_1)+A_{12}\cos(\lambda_2 t+\delta_2)+\ldots+A_{1,n-1}\cos(\lambda_{n-1}t+\delta_{n-1})+A_{1,n}\cos(\lambda_n t+\delta_n)\\
a_2 \;&= \mu_{21}A_{11}\cos(\lambda_1 t+\delta_1)+\mu_{22}A_{12}\cos(\lambda_2 t+\delta_2)+\ldots+\mu_{2,n-1}A_{1,n-1}\cos(\lambda_{n-1}t+\delta_{n-1})+\mu_{2,n}A_{1,n}\cos(\lambda_n t+\delta_n)\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
a_{n-1} &= +\mu_{21}A_{11}\cos(\lambda_1 t+\delta_1)+\mu_{22}A_{12}\cos(\lambda_2 t+\delta_2)+\ldots-\mu_{2,n-1}A_{1,n-1}\cos(\lambda_{n-1}t+\delta_{n-1})-\mu_{2,n}A_{1,n}\cos(\lambda_n t+\delta_n)\\
a_n \;&= +A_{11}\cos(\lambda_1 t+\delta_1)+A_{12}\cos(\lambda_2 t+\delta_2)+\ldots-A_{1,n-1}\cos(\lambda_{n-1}t+\delta_{n-1})-A_{1,n}\cos(\lambda_n t+\delta_n)
\end{aligned}\right\}\quad(68)$$

Ha n páratlan, akkor a (65_2) után tett megjegyzés értelmében az $a_{\frac{n+1}{2}}$ értéke csak $\frac{n+1}{2}$ számú tagból állhat, azaz:

$$a_{\frac{n+1}{2}}=\mu_{\frac{n+1}{2},1}A_{11}\cos(\lambda_1 t+\delta_1)+\ldots+\mu_{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}}A_{1,\frac{n+1}{2}}\cos\left(\lambda_{\frac{n+1}{2}}t+\delta_{\frac{n+1}{2}}\right)\quad(68_2)$$

E rendszerek az egyes mágneselemek lengéseinek symmetriáját tüntetik elő.

18. §. *Az* $(\alpha_k+\alpha_l)^2$ *középértékeinek sajátságai.*

Miután az r menti R_k translatórius erők számításánál (51) az U-ban felmerülő $\vartheta_k+\vartheta_l=2\vartheta_0+\alpha_k-\alpha_l$ és $\vartheta_k-\vartheta_l=\alpha_k-\alpha_l$ ívek cosinusai az $(\alpha_k+\alpha_l)$ és az $(\alpha_k-\alpha_l)$ menynyiségek hatványai szerint kifejtetnek, mivel továbbá az R_k időbeli középértéke képzésénél a nevezett menynyiségek páratlan hatványkitevőjű tagjai zérust adnak [10. §. *b.* pontjának első része]: elengendőnek látszik az $(\alpha_k\pm\alpha_l)^2$ négyzetek időbeli középértékeit megvizsgálni.

Tekintettel a 10. §. *b.* pontja elején mondottakra, s az időbeli középértéket egy vízszintes vonással jelelve, azonnal észreveszszük, hogy a (68) értelmében a következő öszszefüggések állanak fenn:

$$\left.\begin{aligned}&\overline{(\alpha_1\pm\alpha_2)^2}=\overline{(\alpha_n\pm\alpha_{n-1})^2}\,;\quad \overline{(\alpha_1\pm\alpha_3)^2}=\overline{(\alpha_n\pm\alpha_{n-2})^2}\,;\dots\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \overline{(\alpha_2\pm\alpha_3)^2}=\overline{(\alpha_{n-1}\pm\alpha_{n-2})^2}\,;\dots\end{aligned}\right\}; \quad (69)$$

végre pedig:

1. Ha *n páros*, akkor az utolsó oszlop:

$$\left.\begin{aligned}&\overline{(\alpha_1\pm\alpha_{\frac{n}{2}})^2}=\overline{(\alpha_n\pm\alpha_{\frac{n}{2}+1})^2}\\ &\overline{(\alpha_2\pm\alpha_{\frac{n}{2}})^2}=\overline{(\alpha_{n-1}\pm\alpha_{\frac{n}{2}+1})^2}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\overline{(\alpha_{\frac{n}{2}-1}\pm\alpha_{\frac{n}{2}})^2}=\overline{(\alpha_{\frac{n}{2}+2}\pm\alpha_{\frac{n}{2}+1})}\end{aligned}\right\}\quad .\;.\;.\;.\; (69_1)$$

2. Ha *n páratlan*, (a (68_2) tekintetbe vételével az utolsó oszlop:

$$\left.\begin{aligned}&\overline{(\alpha_1\pm\alpha_{\frac{n+1}{2}})^2}=\overline{(\alpha_n\pm\alpha_{\frac{n+1}{2}})^2}\\ &\overline{(\alpha_2\pm\alpha_{\frac{n+1}{2}})^2}=\overline{(\alpha_{n-1}\pm\alpha_{\frac{n+1}{2}})^2}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\overline{(\alpha_{\frac{n-1}{2}}\pm\alpha_{\frac{n+1}{2}})^2}=\overline{(\alpha_{\frac{n+3}{2}}\pm\alpha_{\frac{n+1}{2}})^2}\end{aligned}\right\}\quad .\;.\;.\; (69_2)$$

Megjegyzendő, hogy ezen egyenletek két oldalán egyszerre csak a felső vagy csak az alsó előjel használható.

Maguk e középértékek a (68) értelmében:

$$\overline{(\alpha_k\pm\alpha_l)^2}=\tfrac{1}{2}(\mu_{k1}\pm\mu_{l1})^2A_{11}^2+\dots+\tfrac{1}{2}(\mu_{kn}\pm\mu_{ln})A_{1n}^2 \quad . \quad (70)$$

19. §. *Az r menti translatórius erők középértékeinek egymással való öszszefüggése.*

Az egyes mágneselemekre az r mentén ható R translatórius erőknek az (51) séma értelmében való képzésekor mindenek előtt a k-ik és az $n-k+1$-ik elemre működő R_k, illetve R_{n-k+1} erőket kivánjuk öszszehasonlítani és bebizonyítani, hogy ezek középértékei egyenlők.

Ugyanis:

$$R_k = -3m^2 \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{r_{kl}^4} \left\{\tfrac{3}{2}\cos(2\vartheta_0 + a_k + a_l) + \tfrac{1}{2}\cos(a_k - a_l)\right\}; \quad k \gtrless l; \quad (71_1)$$

$$R_{n-k+1} = -3m^2 \sum_{l=n}^{1} \frac{1}{r_{n-k+1,n-l+1}^4} \left\{\tfrac{3}{2}\cos(2\vartheta_0 + a_{n-k+1} + a_{n-l+1}) + \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{2}\cos(a_{n-k+1} - a_{n-l+1})\right\}; \quad k \gtrless l; \quad . \; . \; . \quad (71_2)$$

Ámde az (51) után a 24. lapon következő feltevések értelmében:

$$\left.\begin{aligned} r_{kl} &= (l-k)\,r, \\ r_{n-k+1,n-l+1} &= (k-l)\,r = -r_{kl} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (72)$$

és ezért a (71_1) s a (71_2) megfelelő tagjai az $R_k = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial r_{kl}}$ séma értelmében ellentett előjelűek.

Ezenkívül, a (71_1) és (71_2) kifejtéseit a (6) séma értelmében az $(a_k + a_l)$ s i. t. argumentumok szerint végezve, az R-ek középértékeit képezve és a megelőző §. (69), (69_1), $69_2)$ öszszefüggéseit tekintetbe véve, végre pedig e középerőket positiveknek tekintve, ha a rendszer középpontjától el vannak irányítva, negativeknek, ha e középpont felé tartanak (v. ö. a következő §.-ot), rendre nyerjük:

$$\bar{R}_1 = \bar{R}_n; \quad \bar{R}_2 = \bar{R}_{n-1}; \; . \; . \; . \; \bar{R}_k = \bar{R}_{n-k+1}; \; . \; . \; . \quad (73)$$

végre pedig, ha n páros:

$$\bar{R}_{\frac{n}{2}} = \bar{R}_{\frac{n}{2}+1}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (73_1)$$

ha n páratlan:

$$\bar{R}_{\frac{n-1}{2}} = \bar{R}_{\frac{n+3}{2}}; \quad \bar{R}_{\frac{n+1}{2}} = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (73_2)$$

Észreveszszük, hogy páros n-eknél $\frac{n}{2}$ számú, páratlan n-eknél $\frac{n-1}{2}$ számú különböző értékű ily translatórius erő létezik, hogy a translatórius hatás a középponthoz symmetrikusan fekvő mágneselemekre nézve egyenlő értékű, de ellentett irányú.

20. §. *Az $\overline{R}_k$ középértékek explicit kifejezései.*

A középértékek kifejezésére vonatkozólag a megelőző §. eredményei és a (71_1) kifejezés cosinusai kifejtése szerint:

$$\overline{R}_k = -3m^2 \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{r_{kl}^4} \left\{ \tfrac{3}{2}\cos 2\vartheta_0 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}\cos 2\vartheta_0 \, \tfrac{1}{2}\,\overline{(a_k+a_l)^2} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\,\overline{(a_k-a_l)^2} \right\} \quad k \gtrless l \qquad (74)$$

Az öszszegnek az α-tól független része az R_k erőnek azon értéke, mely érvényes, mikor a rendszer stabilis egyensúlyban van; a többi tagok a lengések folytán lépnek az R_k-hoz.

Az $\overline{R}_k$ tényleges számítására nézve megjegyzendő, hogy eltekintve a $\{\ \}$ zárójelekben lévő menynyiség előjelétől, (mely főleg a ϑ_0 értékétől függ) a külső előjel az $l=1$-től az $l=k-1$-ig negatív, mint az a (74)-ben is elő van tüntetve; ellenben $l=k+1$-től $l=n$-ig positiv, úgy hogy ha R_k^0 az erőknek az α-ktől független része, $R_k^0\,\omega_k$ pedig az ezektől függő része, akkor:

$$R_k^0 = -3m^2 \left[\sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{r_{kl}^4} - \sum_{l=k+1}^{n} \frac{1}{r_{kl}^4} \right] \left(\tfrac{3}{2}\cos 2\vartheta_0 + \tfrac{1}{2}\right),$$

avagy, mivel (72) szerint

$$r_{k1}^2 = (k-1)^2 r^2 = r_{k,2k-1}^2; \quad r_{k2}^2 = r_{k,2k-2}^2; \ldots r_{k,k-1}^2 = r_{k,k+1}^2;$$

az öszszevonás eredménye:

$$R_k^0 = +3m^2 \left(\tfrac{3}{2}\cos 2\vartheta_0 + \tfrac{1}{2}\right) \sum_{l=2k}^{n} \frac{1}{r_{kl}^4} = R_{n-k+1}^0 \qquad (75_1)$$

Az öszszeg, páros n-eknél az $\frac{n}{2}$-ik valamint az $\frac{n}{2}+1$-ik mágneselemre nézve az $\frac{1}{r^4_{\frac{n}{2},n}} = \frac{1}{\left(\frac{n}{2}-1\right)^4 r^4}$ tagra redukálódik; páratlan n-eknél, a középső, $\frac{n+1}{2}$-ik elemre nézve az öszszegből egy tag sem marad meg (73_2).

Továbbá ezen erőknek a lengésektől függő, $R_k^0\,\omega_k$-val jelölendő részére nézve:

$$\left.\begin{aligned} R_k^0\,\omega_k = +3m^2\left[\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{r_{kl}^4}\overline{(a_k+a_l)^2}-\sum_{l=k+1}^{n}\frac{1}{r_{kl}^4}\overline{(a_k+a_l)^2}\right]\tfrac{3}{4}\cos 2\vartheta_0 + \\ +3m^2\left[\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{r_{kl}^4}\overline{(a_k-a_l)^2}-\sum_{l=k+1}^{n}\frac{1}{r_{kl}^4}\overline{(a_k-a_l)^2}\right]\tfrac{1}{4} = R_{n-k+1}^0\,\omega_{n-k+1} \end{aligned}\right\} ;\ k \gtrless l \quad (7$$

hol az egész erő:

$$R_k = R_k^0(1+\omega_k) \quad \ldots\ldots \quad (75)$$

A (75_2) általánosságban nem egyszerűsíthető; csak azt jegyezhetni meg, hogy páratlan n-ek esetében az $\omega_{\frac{n+1}{2}} R^0_{\frac{n+1}{2}}$ érték zérusra redukálódik, miként azt a (69_2) és a (75_2) megtekintése azonnal szolgáltatja.

Maguk az $\overline{(a_k \pm a_l)^2}$ középértékek a (70)-ből adódnak.

21. §. *Felelet a feltett s az értekezésben tárgyalt kérdésre.* A talált eredmények nagy könynyűséggel felhasználhatók az ezen értekezés bevezetésében említett kérdés eldöntésére.

Itt e kérdést kissé általánosabb fogalmazásban mint az 1. §. d. alatt, ugyanis a ϑ_0 tetszőleges értékére nézve intézhetjük el.

A lengés folytán a meglévőkhöz lépő translatórius erők:

$$\omega_1 R_1^0,\ \omega_2 R_2^0,\ \ldots\ \omega_2 R_2^0,\ \omega_1 R_1^0;$$

öszszesen $\frac{n}{2}$, illetve $\frac{n-1}{2}$ számú különböző értékek, melyek a (70) és (75_2) értelmében az $A_{11}^2 \ldots A_{1n}^2$ négyzetektől függenek.

Ámde az (55) mozgás-egyenletek integráljainak $2n$ számú független állandója:

$$A_{11},\ A_{12},\ \ldots\ A_{1,n-1},\ A_{1,n};\qquad \delta_1,\ \delta_2,\ \ldots\ \delta_{n-1},\ \delta_n;$$

melyet az adottnak tekintett kezdő állapotból (kezdő helyzetből és kezdő sebességekből) mindig meghatározhatjuk.

Ezek közül az utóbbiak kezdő phásisok lévén, az $\omega_k R_k^0$ középértékek értékére nem folyhatnak be.

Rendelkezésre áll még az n számú A_{1l} amplitúdó.

Ha azt kivánjuk, hogy a lengés folytán a mágneselemek translatórius erőihez *vonzás* lépjen, akkor kell, hogy legyen:

$$\omega_k R_k^0 < 0, \quad k = 1\text{-től } \frac{n}{2}\text{-ig, illetve } \frac{n-1}{2}\text{-ig;}$$

ha *taszitást* kivánunk:

$$\omega_k R_k^0 > 0; \quad k = 1\text{-től } \frac{n}{2}\text{-ig, illetve } \frac{n-1}{2}\text{-ig.}$$

Mindkét esetben a feltételek száma $\frac{n}{2}$, illetve $\frac{n-1}{2}$; mivel pedig n számú tetszőleges A_{1l} amplitúdó áll rendelkezésre, $\frac{n}{2}$-szeresen, illetve $\frac{n+1}{2}$-szeresen végtelen számú oly $A_{11} \ldots A_{1n}$ értékrendszereket választhatunk, melyek az első, vagy a második rendszerét a feltételeknek kielégítik.

E szerint az egyes mágneselemek lengési amplitúdóinak alkalmas választása folytán tetszés szerint a rendszer elemeinek kölcsönös vonzását és így (ha a mágnesek stabilis egyensúlyánál felmerülő R_k^0 translatórius erők compensálva vannak) az egész rendszer öszszehúzódását, vagy pedig az elemek kölcsönös taszítását és így az egész rendszer kitágulását létesíthetjük.

Ennek értelmében, ha adva van egyenlő mágneselemekből álló oly rendszer, melynek elemeinek középpontjai egyenlő közökben egy egyenesben fekszenek, mágnesi nyomatékaik pedig stabilis egyensúly alkalmával ezen egyenessel egy tetszőleges, de ugyanazon ϑ_0 szöget képeznek, akkor az a suppositió, hogy az elemeknek kölcsönhatásuk befolyása alatt végzett lengései folytán az egész rendszer öszszehuzódik, vagy kitágúl, nem áll ellenkezésben a mágnesi távolba hatás törvényeivel.

TARTALOMJEGYZÉK.

BEVEZETÉS.

I. Két elemi mágnesből álló rendszer lengései és translatórius erői.

II. Három egyenlő elemi mágnesből álló rendszer lengései és translatórius erői.

III. Általános eset: Tetszőleges számú, középpontjaikkal egyenlő közökben egy egyenesen fekvő, állandó egyensúly alkalmával egymással párhuzamos mágnesek rendszere.

XXI. *Hunyady Jenő.* Tételek a componalt determinánsoknak egy különös neméről. 10 kr. — XXII. *König Gyula.* A raczionális függvények általános elméletéhez. 10 kr. — XXIII. *Silberstein Salamon.* Vonalgeometriai tanulmányok 20 kr. — XXIV. *Hunyady János.* A Steiner-féle kritériumról a kúpszeletek elméletében. 10 kr. — XXV. *Hunyady Jenő.* A pontokból vagy érintőkből és a conjugált háromszögből meghatározott kúpszelet nemének eldöntésére szolgáló kritériumok. 10 kr.

Nyolczadik kötet.

I. szám. Astrophysikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 1880-ban. *Konkoly Miklóstól.* Egy táblа rajzzal. — II. szám. Adatok Jupiter physikájához az 1880-ik évből. Egy függelékkel. *Konkoly Miklóstól.* — III. szám. A Bólyai-féle algorithmus. *Dr. Farkas Gyulától.* — IV szám. Napfoltok megfigyelése 1880-ban, és 1382 napfolt micrometricus mérése. *Konkoly Miklóstól.* Két tábla rajzzal. — V. szám. Hullócsillagok megfigyelése 1880-ban a magyar korona területén. V-ik rész. *Konkoly Miklóstól.* — VI. szám. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. *Konkoly Miklóstól.* — VII. szám. 102 hullócsillag kisugárzási pont, levezetve 518 megfigyelésből, melyek a magyar korona területén 1879. és 1880-ban tétettek. *Konkoly Miklóstól.* — VIII. szám. Új villámzáró vagy nyitókészülék normálórán, és a Jürgenssen-féle óraszerkezet. *Konkoly Miklóstól.* Egy képtáblával. — IX. szám. Adatok Jupiter forgási elemeihez. *Dr. Kobold Ármintól.* — X. szám. A Hamilton-féle rendszerek és az elsőrendü partialis differentiálegyenletek általános elmélete. Székfoglaló értekezés. *König Gyulától.* — XI. szám. A hadtudomány viszonya a többi tudományokhoz. *Kápolnai Pauer Istvántól.* Székfoglaló értekezés. — XII. szám. Egy negyedrendü felületről. *Hunyady Jenőtől.*

Kilenczedik kötet.

I. szám. Astrophisikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. (Három táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — II. szám. Az ó-gyallai csillagvizsgáló földrajzi szélessége. *Dr. Lakits Ferencztől.* — III. szám. A herényi astrophysikai observatorium leirása, és az abban tett megfigyelések 1881-ben. (Egy táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IV. szám. Napfoltok és a nap felületének megfigyelése 1881-ben. *Konkoly Miklóstól.* — V. szám. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. *Konkoly Miklóstól.* — VI. szám. Hullócsillagok megfigyelése 1881-ben. *Konkoly Miklóstól.* — VII. szám. Adatok Jupiter és Mars physikájához, az 1881. évi megfigyelésekből. (III. rész. Három táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VIII. szám. Az üstökösök vegytani alkotása. *Konkoly Miklóstól.* — IX. szám. Az 1871—1880. években, Magyarországban megfigyelt hullócsillagok pályaelemei. *Kövesligethy Radótól.* — X. szám. Néhány determináns-egyenletről. *Hunyady Jenőtől.* — XI. Perspectiv helyzetű alakzatokról *Dr. Klug Lipóttól* — XII. szám. Az elhajlott fény intenzitásának vizsgálata. (A math. és természettudományi állandó bizottság segélyezésével készült dolgozat. Tizenkét ábrával a szöveg között.) *Dr. Fröhlich Izortól.* — XIII. szám. Az algebrai egyenletek elméletéhez. *König Gyulától.*

Tizedik kötet.

I. A nap felületének megfigyelése 1882-ben. *Konkoly Miklóstól.* — II. Astrophysikai megfigyelések 1882-ben. *a)* A Wells-üstökös szinképe. *b)* A szeptemberi nagy üstökös szinképe. *c)* 9 Meteor szinképe. *d)* 115 állócsillag spectruma. *e)* Coloremetricus megfigyelések. *Konkoly Miklóstól.* — III. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén. 1882. *Konkoly Miklóstól.* —

IV. Egy uj reversio-spectroscop s annak használata. (Egy táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — V. Az ó-gyallai csillagvizsgálón eszközölt csillagászati megfigyelések eredménye. 1882. *Konkoly Miklóstól.* — VI. Néhány szó az üstökösök vegytani alkotásáról, összehasonlitva a meteoritekkel. *Konkoly Miklóstól.* — VII. Egy uj szerkezetü spectroscop. (Egy táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VIII. Astrophysikai megfigyelések a herényi observatoriumon, 1882. (Egy táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IX. Adatok Jupiter és Mars bolygók physikájához. (Három táblával.) *Gothard Sándortól.* — X. Egy uj spectroscop (Egy táblarajzzal.) *Gothard Jenőtől.* — XI. Astrophysikai megfigyelések 1883. (Egy táblával.) I. rész. *a)* γ Cassiopejae spectruma. *b)* α Ursae minoris spectruma. *l)* A Swift üstökös spectruma. *d)* A Brooks üstökös spectruma. *e)* Colorimetricus megfigyelése 65 állócsillagnak. *Konkoly Miklóstól.*

Tizenegyedik kötet.

I. Astrophysikai megfigyelések 1883-ban, az ó-gyallai csillagdán. (II-ik rész, 3 tábla.) *Konkoly Miklóstól.* — II. A nap felületének megfigyelése 1883-ban, az ó-gyallai csillagdán. *Konkoly Miklóstól.* — III. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1883-ban. *Konkoly Miklóstól.* — IV. 615 állócsillag spectruma. A déli öv átkutatásának I. része. *Konkoly Miklóstól.* — V. Megfigyelések a herényi astrophysikai observatoriumon 1883-ban. (Két táblával.) *Gothard Jenőtől.* — VI. A Pons-Brooks üstökös spectroscopicus megfigyelése a herényi astrophysikai observatoriumon. (Két táblával.) *Gothard Jenőtől.* — VII. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagdán 1883-ban *Konkoly Miklóstól.* — VIII. Előleges vizsgálatok néhány szénhydrogén-gáz spectrumán, spectroscoppal és spectralphotometerrel. (3 táblával s 2 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — IX. Adatok Bolyai Farkas életrajzához. *Szily Kálmántól.* — X. A herényi astrophysikai observatorium sarkmagasságának meghatározása. *Gothard Jenőtől.*

Tizenkettedik kötet.

I. A napfoltok és a nap felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagvizsgálón 1884-ben. (1 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — II. Astrophysikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 1884-ben. (4 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — III. Az 1884. évi megfigyelések a herényi astrophysikai observatoriumon. (2 ábra és 3 táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IV. Hulló-csillagok megfigyelése a m. korona területén 1884-ben. 26 radiatio ponttal. *Konkoly Miklóstól.* — V. 615 állócsillag spectruma. *Konkoly Miklóstól.* — VI. A napfoltok gyakoriassága 1872-től 1884 végéig. (2 kőnyomatu táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VII. Adatok Jupiter physikájához. (2 táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VIII. Tanulmányok az égitestek photographálása terén. (1 táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IX. A Haynald-observatoriumban 1880—1884-ben megfigyelt napfoltok. *Hüninger Adolftól.* — X. Az 1873. VII. sz. Coggia-Winnecke-féle üstökös pályaszámitása. *Schulhof Lipóttól.* — XI. A folytonos spectrumok elmélete. *Kövesligethi Radótól.*

Tizenharmadik kötet.

I. A földnehézség meghatározása Budapesten 1885-ben (4 táblával). *Gruber Lajostól.* — II. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1885-ben. *Konkoly Miklóstól.* — III. 855 állócsillag spectruma. *Konkoly Miklóstól.*

Tizennegyedik kötet.

I. A dinamika alapegyenleteinek jelentéséről. *Kőnig Gyulától.* — II. Az orthogonális substitutió együtthatóinak paraméteres értékei. *Hunyady Jenőtől.* — III. Az orthogonális substitutió együtthatóinak paraméteres értékei. (Folytatása az előbbinek.) *Hunyady Jenőtől.* — IV. A lánczhidak merevitő tartóinak grafikai elméletéről. *Kherndl Antaltól.*