ÉRTEKEZÉSEK

A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF

OSZTÁLYTITKÁR.

XIV. KÖTET. 2. SZÁM. 1889.

AZ ORTHOGONÁLIS SUBSTITUTIÓ EGYÜTTHATÓINAK PARAMÉTERES ÉRTÉKEI.

HUNYADY JENŐ

R. TAGTÓL.

(Mint székfoglalót előadta a III. osztály ülésén, 1889. április 15.)

Ára 30 kr.

BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

1889.

Eddig külön megjelent

ÉRTEKEZÉSEK

a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet. — Második kötet. — Harmadik kötet. — Negyedik kötet.
Ötödik kötet.

Hatodik kötet.

I. *Konkoly Miklós.* Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén I. rész. 1871—1873. Ára 20 kr. — II. *Konkoly Miklós.* Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára 20 kr. — III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámitása. Közlik *dr. Gruber Lajos* és *Kurländer Ignácz* kir. observatorok. 10 kr. — IV. *Schenzl Guido.* Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. 20 kr. — V. *Gruber Lajos.* A november-havi hullócsillagokról 20 kr. — VI. *Konkoly Miklós.* Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára 20 kr. — VII. *Konkoly Miklós.* A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára 20 kr. — VIII. *Konkoly Miklós.* Mercur átvonulás a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án 10 kr.

Hetedik kötet.

I. *Konkoly Miklós.* Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositió után. Egy táblával. 10 kr. — *Konkoly Miklós.* Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr. — III. *Konkoly Miklós.* Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban IV. rész. Ára 10 kr. — IV. *Konkoly Miklós.* A nap felületének megfigyelése 1878-ban ó-gyallai csillagdán. 10 kr. — VI. *Hunyady Jenő.* A Möbius-féle kritériumokról a kúpszeletek elméletében 10 kr. — VI. *Konkoly Miklos.* Spectroscopicus megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 10 kr. — VIII. *Dr. Weinek László.* Az instrumentális fényhajlás szerepe és Vénus-átvonulás photographiai felvételénél 20 kr. — IX. *Suppan Vilmos.* Kúp- és hengerfelületek önálló ferde vetitésben. (Két táblával.) 10 kr. — X. *Dr. Konek Sándor.* Emlékbeszéd Weninger Vincze l. t. fölött. 10 kr. — XI. *Konkoly Miklós.* Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1879-ben. 10 kr. — XII. *Konkoly Miklós.* Hullócsillagok radiatio pontjai, levezetve a magyar korona területén tett megfigyelésekből 1871—1878. végéig 20 kr. — XIII. *Konkoly Miklós.* Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagvizsgálón 1879-ben. (Egy tábla rajzzal.) 30 kr. — XIV. *Konkoly Miklós.* Adatok Jupiter és Mars physikájához, 1879. (Három tábla rajzzal.) 30 kr. — XV. *Réthy Mór.* A fény törése és visszaverése homogén isotrop átlátszó testek határán. Neumann módszerének általánositásával és bővitésével. (Székf. ért.) 10 kr. — XVI. *Réthy Mór.* A sarkitott fényrezgés elhajlitó rács által való forgatásának magyarázata, különös tekintettel Fröhlich észleteire. 10 kr. — XVII. *Szily Kálmán.* A telitett gőz nyomásának törvényéről. 10 kr. — XVIII. *Hunyadi Jenő.* Másodfoku görbék és felületek meghatározásáról. 20 kr. — XIX. *Hunyady Jenő.* Tételek azon determinánsokról, melyek elemei adjungált rendszerek elemeiből vannak componálva. 20 kr. — XX. *Dr. Frölich Izor.* Az állandó elektromos áramlások elméletéhez. 20 kr.

ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

KIADJA A MAGYAR TUD. AKADÉMIA.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF

OSZTÁLYTITKÁR.

AZ ORTHOGONÁLIS SUBSTITUTIÓ EGYÜTTHATÓINAK PARAMÉTERES ÉRTÉKEI.

HUNYADY JENŐ

r. tagtól.

(Mint székfoglalót előadta a III. osztály ülésén, 1889. április 15.)

Az átmenet egyik háromtengelyű orthogonál koordináta-rendszerből egy másik szintén orthogonál koordináta-rendszerre, ha mind a kettőnek a kezdőpontja ugyanaz, a következő egyenletek segítségével történik

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 x' + b_1 y' + c_1 z' \\ y &= a_2 x' + b_2 y' + c_2 z' \\ z &= a_3 x' + b_3 y' + c_3 z' \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

melyekben x, y, z és x', y', z' egy és ugyanazon pontnak a koordinátáit a két rendszerben jelentik, az $a_1, b_1, c_1, \dots c_3$ együtthatók pedig állandókat jelentenek.

Ismeretes, hogy az orthogonál helyettesítés kilencz együtthatója nem független egymástól, hanem bizonyos megszorításoknak hódolnak, melyek a következő identitásból:

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad (2)$$

erednek, ha ebben az (1) alatti helyettesítésekre vagyunk tekintettel, mi által az előbbi identitás a következő hat egyenletbe esik szét:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2+a_2^2+a_3^2&=1\\ b_1^2+b_2^2+b_3^2&=1\\ c_1^2+c_2^2+c_3^2&=1 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3&=0\\ a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3&=0\\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3&=0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Az orthogonál helyettesítés együtthatói között a (3) és (4) alatti egyenleteken kívül még egyéb nevezetes egyenletek állanak fenn, melyekről egyelőre csak annyit akarunk megjegyezni, hogy ezek nem mint a (3) és (4) alattiak, hogy egymástól függetlenek, hanem ellenkezőleg mindannyian a (3) és (4) alatti egyenletekből következnek.

Miután az (1) alatti helyettesítés kilencz együtthatója csak annyiban választható szabadon a mennyiben azt a (3) és (4) alatti feltételi egyenletek által szabta megszorítások engedik, azért az (1) alatti helyettesítés kilencz együtthatója közűl csak három választható szabadon, a hátralevő hat pedig a (3) és (4) alatti egyenletekből az adottak függvényeiben kifejezhető, mely viszonyoknak felderítése a mathematikusok figyelmét az orthogonál helyettesítés együtthatóinak meghatározására terelte, így első sorban Eulernek köszönünk ilynemű vizsgálatokat.

Euler az orthogonál helyettesítés együtthatóinak háromféle meghatározását hagyta reánk. Euler*) első meghatározása «Introductio in analysin infinitorum» czímű munkájában, a második pedig a szentpétervári akadémia kommentárjaiban jelent meg. Euler ezen műveiben az orthogonál helyettesítés kilencz együtthatója három paraméter által van kifejezve, de nem racziónálisan.

Euler**) egy másik értekezésében, mely szintén a pétervári akadémia kommentárjaiban jelent meg, a szóban forgó kilencz

*) Introductio in analysin infinitorum T. II. p. 369. Novi Commentarii academiæ scientiarum imperialis petropolitanæ T. XX. «Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi» pp. 208—238.

**) Novi Comm. acad. scient. petrop. T. XV. (pp. 75—106.) «Problema algebraicum etc. etc.» p. 101.

együtthatót, mint a p, q, r, s paraméterek raczionális függvényét fejezte ki deductióinak minden további közlése nélkül.

Euler ezen utóbb említett képleteit, anélkül, hogy azokat Eulerből ismerte volna Rodrigues[1]) vezette le, Eulernek az itt második sorban felemlített vizsgálataiból indulván ki.

Rodrigues után Cayley[2]) fogott az idézett Eulerféle képletek levezetéséhez; a problémát a maga általánosságában n határozatlan számú változóra determinánsok segítségével az ezen nagy mathematikustól megszokott elegancziával oldotta meg s eredményeit a Crelle-féle mathematikai Journal 32. kötetében tette közzé.

Euler vizsgálatainak megjelenése után Monge[3]) fogott a szóban forgó probléma megoldásához s nevezetesen az a_1, b_2, c_3 együtthatók által fejezte ki a hátralevő hatot.

Végre Hesse[4]) fejezte ki az orthogonál helyettesítés együtthatóit hat paraméter által, melyek közül hármat állandónak, hármat pedig változónak kell tekintenünk s eredményeit Crelle-féle Journal 63. kötetében minden levezetés nélkül, azzal együtt pedig a Schlömilch-féle Zeitschriftban tette közzé.

Az ide vonatkozó irodalom tanulmányozása következtében egy módszer után vágyódtam, melyből minden ismeretes paraméter előállítás a még számtalan sok lehetségessel együtt egészen egyöntetű eljárás által adódjék ki.

E sorok tartalma a szem előtt lebegett módszer részletes kifejtése, mielőtt azonban erre áttérnék czélszerünek vélem a felsorolt értekezéseknek ide tartozó lényeges részét rövid vázlatban ecsetelni.

---

[1]) J. Lionville Journ. d. math. p. et appl. T. V. (pp. 389—440.) «Des lois géométriques etc. etc.» p. 405.

[2]) Crelle: Journal f. r. u. a. Math. XXXII. köt. «Sur quelques propriétés des déterminants gauches» pp. 119—123.

[3]) Mémoire de l'academie des sciences de Paris, année 1784, p. 154. (L. e tekintetben Hesse értekezésében Crelle J. f. r. u. a. Math. Bd. LXIII, 247. l. a *) jelölt czitátumot.)

[4]) Crelle-Borchardt: Journal f. r. u. a. Math. LXIII. köt. «Transformationsformeln für rechtwinklige Raumcoordinaten.» 247—251. ll. és Schlömilch Zeitschrift, f. M. u. Ph. Jhrg. XI. «Vier Vorlesungen aus der anal. Geometrie» 387—396. ll.

I.

A) Euler képleteinek I. és II. rendszere.

1. Első sorban. Euler azon képleteit vezetjük le, melyek «Introductio in analysin infinitorum» czímű munkájában jelentek meg.

Legyen $OXYZ$ és $OX'Y'Z'$ két orthogonális koordináta-rendszer, melyeknek közös kezdőpontjuk O-ban van. A két koordináta-rendszer viszonylagos helyzete a következő adatok által van meghatározva: ú. m. azon szögök által, melyet az XY *és* $X'Y'$ síkoknak OX_1 metszésvonala képez az OX, illetőleg OX'-tengelyekkel, valamint az XY és $X'Y'$ síkok hajlás szöge által. Az $XOX_1 = \psi$ szögnek forgási irányát ugyanazon értelemben veszszük, mint a milyenben a pozitiv OX-tengelynek forognia kell, hogy az $90°$ át a pozitiv OY-tengely helyzetébe jusson. Az XOY és $XO'Y'$ koordináta-síkoknak ϑ hajlását pedig ugyanazon értelemben veszszük, mint a milyenben a pozitlv OY-tengely $90°$ át a pozitiv OZ-tengely helyzetébe jut; végre az $X_1OX' = \psi$ szög forgásának iránya a ψ szögével ugyanazon értelemben veendő.

Ezen jelöléseket szem előtt tartva, könnyen belátható, hogy az $OXYZ$ koordináta-rendszer az $OX'Y'Z'$ koordináta-rendszer, helyzetébe a következő három parcziális forgás által jut:

a) Az $OXYZ$ rendszert az OZ-tengely körül úgy forgatjuk, hogy az OX-tengelyt az előbb említett értelemben ψ szöggel forgatjuk, mi által az OX-tengely az OX_1-metszés-vonal helyzetébe jut.

b) Az XY-síkot OX_1, mint forgás-tengely körül forgatva a $X'Y'$-síkkal összeeséshez hozzuk, mely forgás által az OZ-tengely az OZ' tengely helyzetébe jut.

c) Végre az OX_1-tengely az OX'-tengely helyzetébe jut, ha az OX_1-tengelyt OZ' körül az *a)* alatti értelemben φ szöggel forgatjuk.

Ezen egymásután következő transformátiók által a térbeli transformátio-probléma, vissza van vezetve három síkbeli transformátiora; ugyanis az *a)* alatti forgatás következtében az

$OXYZ$ rendszerről átmegyünk az OX_1Y_1 rendszerre s miután az OZ-tengely ugyanaz marad, a transformácziónál csak x és y változik, ez pedig:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 \cos\psi - y_1 \sin\psi \\ y &= x_1 \sin\psi + y_1 \cos\psi \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Továbbá a *b)* alatti forgatásnál az OX_1-tengely ugyanaz marad, de az OZ és OY_1-tengelyek átmennek OZ'-illetőleg, OY_2-tengelyekbe, ha pedig ezen tengelyek síkjában a pont koordinátáit z_1', y_2-vel jelöljük, akkor

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_2 \cos\vartheta - z' \sin\vartheta \\ z &= y_2 \sin\vartheta + z' \cos\vartheta \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

végre a *c)* alatti forgatás által az OZ'- és OY_2-tengelyek átmennek OX'-, illetőleg OY'-tengelyekbe, mely utóbbi tengelypár síkjában a pont koordinátait x', y'-nal jelölve a következő egyenletek állanak:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \\ y_2 &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Az (1), (2) és (3) alatti hat egyenletből az x_1, y_1 és y_2 kiküszöbölése szolgáltatja az Euler-féle transformátió-képletek I. rendszerét, mely a következő:

$$\left.\begin{aligned} x = {} & (\cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi \cos\vartheta)\, x' - \\ & - (\cos\psi \sin\varphi + \sin\psi \cos\varphi \cos\vartheta)\, y' + \\ & + \sin\psi \sin\vartheta \,.\, z' \\ y = {} & (\sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \sin\varphi \cos\vartheta)\, x' - \\ & - (\sin\psi \sin\varphi - \cos\psi \cos\varphi \cos\vartheta)\, y' - \\ & - \cos\psi \sin\vartheta \,.\, z' \\ z = {} & \sin\varphi \sin\vartheta \,.\, x' \\ & + \cos\varphi \sin\vartheta \,.\, y' \\ & + \cos\vartheta \,.\, z' \end{aligned}\right\} \quad (4)\,^{*})$$

*) Itt, valamint a következőkben felteszszük, hogy az $OXYZ$ és $OX'Y'Z'$ koordinátarendszerek ugyanazon értelmüek (gleichstimmig). [Lásd Joachimsthal: Anw. d. Diff. u. Integr.-Rechnung a. d. alg. Theor. d. Fl. u. Curv. dopp. Krmm. Leipzig 1872. §. 30].

2. A koordináta-transformátió, képletek II. rendszere, melyeket Euler a szentpétervári akadémia XX. kötetében állított fel a következők:

Ha ugyanis az $OXYZ$ rendszer OX, OY, OZ tengelyeit az OR rotátió-tengely körüli φ forgatás által hozzuk az $OX'Y'Z'$ rendszer OX', OY', OZ' tengelyeinek helyzetébe, akkor ha azon szögeket, melyeket az OR-forgástengely az OX, OY, OZ tengelyekkel képez α, β, γ-val jelöljük, a következő transformátió képleteink vannak:

$$\left.\begin{aligned}
x = &\{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\varphi\}\, x' + \\
&+ \{\cos\alpha\cos\beta\,(1-\cos\varphi) - \cos\gamma\sin\varphi\}\, y' + \\
&+ \{\cos\alpha\cos\gamma\,(1-\cos\varphi) + \cos\beta\sin\varphi\}\, z'\,. \\
y = &\{\cos\alpha\cos\beta\,(1-\cos\varphi) + \cos\gamma\sin\varphi\}\, x' + \\
&+ \{\cos^2\beta + \sin^2\beta\cos\varphi\}\, y' + \\
&+ \{\cos\beta\cos\gamma\,(1-\cos\varphi) - \cos\alpha\sin\varphi\}\, z' \\
z = &\{\cos\alpha\cos\gamma\,(1-\cos\varphi) - \cos\beta\sin\varphi\}\, x' + \\
&+ \{\cos\beta\cos\gamma\,(1-\cos\varphi) + \cos\alpha\sin\varphi\}\, y' + \\
&+ \{\cos^2\gamma + \sin^2\gamma\cos\varphi\}\, z'
\end{aligned}\right|\qquad (5)^{*)}$$

B) Euler képleteinek III. rendszere. Cayley levezetése.

3. Ha az x, y, z és x', y', z' mennyiségeket a következőképen fejezzük ki az u, v, w mennyiségek által:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w \\
y &= \alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 w \\
z &= \alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3 w
\end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
x' &= \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w \\
y' &= \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w \\
z' &= \gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w
\end{aligned}\right\}\qquad (2)$$

akkor ha az (1) és (2) alatti egyenletrendszerek közös determinánsát, Δ-val és ebben α_i, β_i, γ_i elemek együtthatóit A_i, B_i, C_i-vel ($i = 1, 2, 3$) jelöljük, az (1) és (2) alatti rendszernek megoldása a következő egyenletekre vezet:

---

*) Novi, Comm. acad. scient. Petropolitanæ T. XX p, 220.

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= A_1 x + A_2 y + A_3 z \\ \Delta v &= B_1 x + B_2 y + B_3 z \\ \Delta w &= C_1 x + C_2 y + C_3 z \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= A_1 x' + B_1 y' + C_1 z' \\ \Delta v &= A_2 x' + B_2 y' + C_2 z' \\ \Delta w &= A_3 x' + B_3 y' + C_3 z' \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

melyekből ezen egyenletek következnek:

$$\left.\begin{aligned} A_1 x + A_2 y + A_3 z &= A_1 x' + B_1 y' + C_1 z' \\ B_1 x + B_2 y + B_3 z &= A_2 x' + B_2 y' + C_2 z' \\ C_1 x + C_2 y + C_3 z &= A_3 x' + B_3 y' + C_3 z' \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ha pedig ezen egyenletrendszer egyenleteit rendre sokszorozzuk:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1\text{-gyel} \\ &\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2\text{-vel} \\ &\alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3\text{-mal} \end{aligned}\right\}$$

és mindenkor összeadjuk, akkor találjuk:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x = {} & (\alpha_1 A_1 + \beta_1 A_2 + \gamma_1 A_3)\, x' + \\ & + (\alpha_1 B_1 + \beta_1 B_2 + \gamma_1 B_3)\, y' + \\ & + (\alpha_1 C_1 + \beta_1 C_2 + \gamma_1 C_3)\, z', \\ \Delta y = {} & (\alpha_2 A_1 + \beta_2 A_2 + \gamma_2 A_3)\, x' + \\ & + (\alpha_2 B_1 + \beta_2 B_2 + \gamma_2 B_3)\, y' + \\ & + (\alpha_2 C_1 + \beta_2 C_2 + \gamma_2 C_3)\, z', \\ \Delta z = {} & (\alpha_3 A_1 + \beta_3 A_2 + \gamma_3 A_3)\, x' + \\ & + (\alpha_3 B_1 + \beta_3 B_2 + \gamma_3 B_3)\, y' + \\ & + (\alpha_3 C_1 + \beta_3 C_2 + \gamma_3 C_3)\, z'. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

és ha ugyancsak az (5) alatti rendszer egyenleteit sokszorozzuk

$$\begin{aligned} &\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\text{-mal} \\ &\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3\text{-mal} \\ &\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3\text{-mal} \end{aligned}$$

s összeadjuk, akkor pedig a következő egyenletekre jövünk:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta x' &= (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 B_1 + \alpha_3 C_1)\, x + \\
&+ (\alpha_1 A_2 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 C_2)\, y + \\
&+ (\alpha_1 A_3 + \alpha_2 B_3 + \alpha_3 C_3)\, z, \\
\Delta y' &= (\beta_1 A_1 + \beta_2 B_1 + \beta_3 C_1)\, x + \\
&+ (\beta_1 A_2 + \beta_2 B_2 + \beta_3 C_2)\, y + \\
&+ (\beta_1 A_3 + \beta_2 B_3 + \beta_3 C_3)\, z, \\
\Delta z' &= (\gamma_1 A_1 + \gamma_2 B_1 + \gamma_3 C_1)\, x + \\
&+ (\gamma_1 A_2 + \gamma_2 B_2 + \gamma_3 C_2)\, y + \\
&+ (\gamma_1 A_3 + \gamma_2 B_3 + \gamma_3 C_3)\, z.
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Ha továbbá a (6) és (7) alatti rendszerekben az α_i, β_i, γ_i ($i = 1, 2, 3$) mennyiségekre nézve még a következő feltevéseket teszszük:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \beta_2 = \gamma_3 = 1 \\
\gamma_2 &= -\beta_3 \\
\alpha_3 &= -\gamma_1 \\
\beta_1 &= -\alpha_2
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

akkor, mivel akkor:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 A_1 + \beta_1 A_2 + \gamma_1 A_3 &= A_1 - \alpha_2 A_2 - \alpha_3 A_3 = 2A_1 - \Delta \\
\alpha_1 B_1 + \beta_1 B_2 + \gamma_1 B_3 &= B_1 - \alpha_2 B_2 - \alpha_3 B_3 = 2B_1 \\
\alpha_1 C_1 + \beta_1 C_2 + \gamma_1 C_3 &= C_1 - \alpha_2 C_2 - \alpha_3 C_3 = 2C_1
\end{aligned}$$

stb. stb.

a (6) és (7) alatti rendszerek a következőkbe mennek át:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta x &= (2A_1 - \Delta)\, x' + 2B_1 y' + 2C_1 z' \\
\Delta y &= 2A_2 x' + (2B_2 - \Delta)\, y' + 2C_2 z' \\
\Delta z &= 2A_3 x' + 2B_3 y' + (2C_3 - \Delta)\, x'
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned}
\Delta x' &= (2A_1 - \Delta)\, x + 2A_2\, y + 2A_3 z \\
\Delta y' &= 2B_1 x + (2B_2 - \Delta)\, y + 2B_3 z \\
\Delta z' &= 2C_1 x + 2C_2 y + (2C_3 - \Delta)\, z.
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

s ha végre még

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_2 &= -\beta_3 = \lambda \\
\alpha_3 &= -\gamma_1 = \mu \\
\beta_1 &= -\alpha_2 - \nu
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

akkor az orthogonális substitutió $a_1, b_1, \ldots\, c_3$ együtthatóinak értékei ezek:

$$\left.\begin{array}{ccc} \dfrac{1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2}{N}, & 2\,\dfrac{\lambda\mu+\nu}{N}, & 2\,\dfrac{\lambda\nu-\mu}{N} \\ 2\,\dfrac{\lambda\mu-\nu}{N}, & \dfrac{1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2}{N}, & 2\,\dfrac{\mu\nu+\lambda}{N} \\ 2\,\dfrac{\lambda\nu+\mu}{N}, & 2\,\dfrac{\mu\nu-\lambda}{N}, & \dfrac{1-\lambda^2-\mu^2+\nu^2}{N} \end{array}\right\} \quad (12)^{*}$$

a hol

$$N = 1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2.$$

C) Monge képletei.

4. Monge képleteit levezetés nélkül tette közzé, levezetésük különben semmiféle nehézséggel nem jár. Itt azoknak a szokott levezetéseknél pontosabb levezetését tűztük ki czélul.

A bevezetésnek (1) alatti orthogonál helyettesítés kilencz együtthatói között a (3) és (4) alatti feltételek állanak, e kilencz együttható között azonban még más nevezetes egyenletek is állanak, melyek közül első sorban a következőket említjük fel:

$$\left.\begin{array}{l} a_1^2+b_1^2+c_1^2=1 \\ a_2^2+b_2^2+c_2^2=1 \\ a_3^2+b_3^2+c_3^2=1 \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_2\,a_3+b_2\,b_3+c_2\,c_3=0 \\ a_1\,a_3+b_1\,b_3+c_1\,c_3=0 \\ a_1\,a_2+b_1\,b_2+c_1\,c_2=0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Miután pedig a két orthogonál-rendszerről feltesszük, hogy azok ugyanazon értelműek, az orthogonál helyettesítés determinánsa

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = +1$$

de ekkor

$$a_1 = b_2\,c_3 - b_3\,c_2 \quad (3)$$

stb. stb.

*) Lásd Cayley az i. h. 121. l.

Monge az orthogonál helyettesítés a_1, b_2, c_3 együtthatóiból határozza meg a többieket; A b_3 és c_2 együtthatók meghatározása czéljából még a következő egyenleteket vezetjük le. A (3) alatti egyenletből következik:

$$b_3 c_2 = b_2 c_3 - a_1 \tag{4}$$

és innét még:

$$b_3^2 c_2^2 = (b_2 c_3 - a_1)^2 \tag{5}$$

Továbbá a két utolsó (1) alatti és a bevezetés első (3) alatti egyenletéből a következőt nyerjük:

$$b_3^2 + c_2^2 = 1 + a_1^2 - b_2^2 - c_3^2 \tag{6}$$

Az utolsó két egyenletből b_3 és c_2 meghatározható; amint ezen egyenletek szerkezetéből szembetűnik b_3^2 és c_2^2 a következő másodfokú egyenletnek:

$$z^2 - (1 + a_1^2 - b_2^2 - c_3^2)\, z + (b_2 c_3 - a_1)^2 = 0 \tag{7}$$

a gyökei, melyet z szerint megoldva és a következő jelöléseket:

$$\left.\begin{aligned} 1 + a_1 - b_2 - c_3 &\equiv A \\ 1 - a_1 + b_2 - c_3 &\equiv B \\ 1 - a_1 - b_2 + c_3 &\equiv C \\ 1 + a_1 + b_2 + c_3 &\equiv D \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

bevezetve találjuk, hogy

$$\left.\begin{aligned} b_3^2 &= \frac{1 + a_1^2 - b_2^2 - c_3^2 \pm \sqrt{ABCD}}{2} \\ c_2^2 &= \frac{1 + a_1^2 - b_2^2 - c_3^2 \mp \sqrt{ABCD}}{2} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

a hol a felső és alsó előjelek egy-egy értékrendszert szolgáltatnak.

A (8) alatti identitásokat a következő relátió fűzi össze:

$$A + B + C + D \equiv 4, \tag{10}$$

továbbá könnyen találjuk, hogy:

$$\left.\begin{aligned} BC + AD &\equiv 2\,(1 + a_1^2 - b_2^2 - c_3^2) \\ CA + BD &\equiv 2\,(1 - a_1^2 + b_2^2 - c_3^2) \\ AB + CD &\equiv 2\,(1 - a_1^2 - b_2^2 + c_3^2) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

és

$$\left.\begin{aligned} BC - AD &\equiv 4\,(b_2\,c_3 - a_1) \\ CA - BD &\equiv 4\,(c_3\,a_1 - b_2) \\ AB - CD &\equiv 4\,(a_1\,b_2 - c_3) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

A (9) alatti képleteknek a Monge-féle alakot adhatjuk, ha megjegyezzük, hogy a (11) alatti identitások elsejénél fogva

$$1 + a_1^2 - b_2^2 - c_3^2 = \frac{BC + AD}{2}$$

s ezen értéket a kérdéses képletekben helyettesítjük, mi által azok a következőkbe mennek át:

$$b_3^2 = \frac{(\sqrt{BC} \pm \sqrt{AD})^2}{4}$$

$$c_2^2 = \frac{(\sqrt{BC} \mp \sqrt{AD})^2}{4}$$

a honnét

$$\left.\begin{aligned} b_3 &= \pm \frac{\sqrt{BC} \pm \sqrt{AD}}{2} \\ c_2 &= \pm \frac{\sqrt{BC} \mp \sqrt{AD}}{2} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

itt a külső előjelekre nézve ismét az előbbi szabály jut érvényre, hogy t. i. a felső előjelek és az alsó előjelek öszszetartozók, minek kritériumát a (4) alatti egyenlet szabja meg.

A következő röviditett jelölések:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{BC} &= \alpha & \sqrt{AD} &= \alpha' \\ \sqrt{CA} &= \beta & \sqrt{BD} &= \beta' \\ \sqrt{AB} &= \gamma & \sqrt{CD} &= \gamma' \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

használata mellett a (4) és (6) alatti egyenleteket a következő értékrendszerek elégítik ki:

$$\left.\begin{aligned} b_3 &= \tfrac{1}{2}\,(\alpha + \alpha'),\ \tfrac{1}{2}\,(\alpha - \alpha'),\ -\tfrac{1}{2}\,(\alpha + \alpha'),\ -\tfrac{1}{2}\,(\alpha - \alpha') \\ c_2 &= \tfrac{1}{2}\,(\alpha - \alpha'),\ \tfrac{1}{2}\,(\alpha + \alpha'),\ -\tfrac{1}{2}\,(\alpha - \alpha'),\ -\tfrac{1}{2}\,(\alpha + \alpha') \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

5. Hasonlóképen találjuk a (8) és (14) alatti jelölések figyelembe vétele mellett c_1 és a_3-ra valamint a_2 és b_1-re nézve a következő értékrendszereket:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{2}(\beta+\beta'),\ \frac{1}{2}(\beta-\beta'),\ -\frac{1}{2}(\beta+\beta'),\ -\frac{1}{2}(\beta-\beta') \\ a_3 = \frac{1}{2}(\beta-\beta'),\ \frac{1}{2}(\beta+\beta'),\ -\frac{1}{2}(\beta-\beta'),\ -\frac{1}{2}(\beta+\beta') \end{array}\right\} \quad (16)$$

és

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = \frac{1}{2}(\gamma+\gamma'),\ \frac{1}{2}(\gamma-\gamma'),\ -\frac{1}{2}(\gamma+\gamma'),\ -\frac{1}{2}(\gamma-\gamma') \\ b_1 = \frac{1}{2}(\gamma-\gamma'),\ \frac{1}{2}(\gamma+\gamma'),\ -\frac{1}{2}(\gamma-\gamma'),\ -\frac{1}{2}(\gamma+\gamma') \end{array}\right\} \quad (17)$$

A (15), (16) és (17) alatti rendszerek közül mindegyik négy-négy értékrendszert foglal magában, miből azon következtetésre juthatnánk, hogy a bevezetés (3) és (4) alatti egyenleteknek annyi megoldás felel meg, mint a hány csoportosítást a (15), (16) és (17) alatti rendszerek megengednek, tehát összesen *hatvannégy* megoldás. Hogy ezen a prioristikus következtetés nem felel meg a valóságnak annak a kritériumát a bevezetés (3) és (4) alatti egyenletei szabják meg. A dolgot e tekintetben is egészen behatóan vizsgáltam meg, mely vizsgálat eredménye az, hogy a bevezetés (3) és (4) alatti egyenleteit összesen *nyolcz* rendszer elégíti ki, mely a következő:

$$\left.\begin{array}{ccc} a_1 & \frac{1}{2}(\gamma+\gamma') & \frac{1}{2}(\beta-\beta') \\ \frac{1}{2}(\gamma-\gamma') & b_2 & \frac{1}{2}(\alpha+\alpha') \\ \frac{1}{2}(\beta+\beta') & \frac{1}{2}(\alpha-\alpha') & c_3 \end{array}\right\} \quad \text{I.}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} a_1 & -\frac{1}{2}(\gamma+\gamma') & -\frac{1}{2}(\beta-\beta') \\ -\frac{1}{2}(\gamma-\gamma') & b_2 & \frac{1}{2}(\alpha+\alpha') \\ -\frac{1}{2}(\beta+\beta') & \frac{1}{2}(\alpha-\alpha') & c_3 \end{array}\right\} \quad \text{II.}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} a_1 & -\frac{1}{2}(\gamma+\gamma') & \frac{1}{2}(\beta-\beta') \\ -\frac{1}{2}(\gamma-\gamma') & b_2 & -\frac{1}{2}(\alpha+\alpha') \\ \frac{1}{2}(\beta+\beta') & -\frac{1}{2}(\alpha-\alpha') & c_3 \end{array}\right\} \quad \text{III.}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} a_1 & \frac{1}{2}(\gamma+\gamma') & -\frac{1}{2}(\beta-\beta') \\ \frac{1}{2}(\gamma-\gamma') & b_2 & -\frac{1}{2}(\alpha+\alpha') \\ -\frac{1}{2}(\beta-\beta') & -\frac{1}{2}(\alpha-\alpha') & c_3 \end{array}\right\} \quad \text{IV.}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} a_1 & \frac{1}{2}(\gamma-\gamma') & \frac{1}{2}(\beta+\beta') \\ \frac{1}{2}(\gamma+\gamma') & b_2 & \frac{1}{2}(\alpha-\alpha') \\ \frac{1}{2}(\beta-\beta') & \frac{1}{2}(\alpha+\alpha') & c_3 \end{array}\right\} \quad \text{V.}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} a_1 & -\frac{1}{2}(\gamma-\gamma') & -\frac{1}{2}(\beta+\beta') \\ -\frac{1}{2}(\gamma+\gamma') & b_2 & \frac{1}{2}(\alpha-\alpha') \\ -\frac{1}{2}(\beta-\beta') & \frac{1}{2}(\alpha+\alpha') & c_3 \end{array}\right\} \quad \text{VI.}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} a_1 & -\frac{1}{2}(\gamma-\gamma') & \frac{1}{2}(\beta+\beta') \\ -\frac{1}{2}(\gamma+\gamma') & b_2 & -\frac{1}{2}(\alpha-\alpha') \\ \frac{1}{2}(\beta-\beta') & -\frac{1}{2}(\alpha+\alpha') & c_3 \end{array}\right\} \quad \text{VII.}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} a_1 & \frac{1}{2}(\gamma-\gamma') & -\frac{1}{2}(\beta+\beta') \\ \frac{1}{2}(\gamma+\gamma') & b_2 & -\frac{1}{2}(\alpha-\alpha') \\ -\frac{1}{2}(\beta-\beta') & -\frac{1}{2}(\alpha+\alpha') & c_3 \end{array}\right\} \quad \text{VIII.}$$

Legczélszerűbb volt a hat együttható értékét az a_1, b_2, c_3 együtthatókkal együtt quadratikus sémába elhelyezve felirni, miután így a legjobban tünik ki azon egyszerű szabály, mely szerint a nyolcz séma utolsó hét sémája az (I) alatti fő-sémából, mely a substitutió-együtthatók főértékét tartalmazza, keletkezik.

A (II) (III) és (IV) alatti sémák az (I) alattiból erednek, ha ebben az első sort és oszlopot, illetőleg második sort és oszlopot, vagy harmadik sort és oszlopot a negativ egységgel szorozzuk, az (V), (VI), VII és VIII alatti sémák pedig az (I), (II), (III) és (IV) alattiakból a sorok és oszlopok felcserélése által keletkeznek.

D) Hesse képletei.

6. Ha a sík tetszőleges pontjának homogén koordinátáit x, y, z-vel, a sík tetszőleges egyenesének homogén vonal-koordinátáit pedig u, v, w-vel jelöljük, akkor az x, y, z pont egyenlete a következő:

$$xu + yv + zw = o, \tag{1}$$

vagy a következő symbolum:

$$xu + yv + zw \equiv W \tag{2}$$

használata mellett a kérdéses pont egyenlete:

$$W = o \tag{3}$$

Az x_i, y_i, z_i pont egyenletét a következő jelölés mellett:

$$x_i u + y_i v + z_i w \equiv W_i \tag{4}$$

$$W_i = o \tag{5}$$

egyenlet fejezi ki.

Ha az x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ pontok ugyanazon kúpszeleten fekszenek, akkor azt a következő egyenlet:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1 z_1 & x_1 z_1 & x_1 y_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2 z_2 & x_2 z_2 & x_2 y_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & y_3 z_3 & x_3 z_3 & x_3 y_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & y_4 z_4 & x_4 z_4 & x_4 y_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & y_5 z_5 & x_5 z_5 & x_5 y_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & y_6 z_6 & x_6 z_6 & x_6 y_6 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

fejezi ki, a kérdéses hat pont egyenletei pedig, az (5) alatti jelölést szem előtt tartva, a következő:

$$W_1 = o, \; W_2 = o, \; W_3 = o, \; W_4 = o, \; W_5 = o, \; W_6 = o \qquad (7)$$

7. A (6) alatti egyenlet átalakítása által a kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakokat adhatunk; czélunknak megfelelőleg azt majd többféleképen alakítjuk át:

a) Ha a (6) alatti determinánsban az oszlopokat rendre

$$u^2 \; v^2 \; w^2 \quad 2vw \; 2uw \; 2uv\text{-}$$

vel sokszorozzuk és a második oszlophoz adjuk, akkor a (4) alatti jelölés tekintetbe vételével a (6) alatti egyenlet a következő alakot veszi fel:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & W_1^2 & z_1^2 & y_1 z_1 & x_1 z_1 & x_1 y_1 \\ x_2^2 & W_2^2 & z_2^2 & y_2 z_2 & x_2 z_2 & x_2 y_2 \\ x_3^2 & W_3^2 & z_3^2 & y_3 z_3 & x_3 z_3 & x_3 y_3 \\ x_4^2 & W_4^2 & z_4^2 & y_4 z_4 & x_4 z_4 & x_4 y_4 \\ x_5^2 & W_5^2 & z_5^2 & y_5 z_5 & x_5 z_5 & x_5 y_5 \\ x_6^2 & W_6^2 & z_6^2 & y_6 z_6 & x_6 z_6 & x_6 y_6 \end{vmatrix} = 0 \qquad (A)$$

b) Ha továbbá a (6) alatti determinánst úgy alakítjuk át, hogy annak w-, illetőleg v-val szorzott harmadik és negyedik oszlopát az u-val szorzott ötödik oszlopához adjuk, akkor az a következőbe megy át:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1 z_1 & z_1 W_1 & x_1 y_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2 z_2 & z_2 W_2 & x_2 y_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & y_3 z_3 & z_3 W_3 & x_3 y_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & y_4 z_4 & z_4 W_4 & x_4 y_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & y_5 z_5 & z_5 W_5 & x_5 y_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & y_6 z_6 & z_6 W_6 & x_6 y_6 \end{vmatrix} = 0 \qquad (B)$$

c) Ha pedig a (6) alatti detarminánsban a v-vel szorzott második oszlophoz a w-, illetőleg u-val szorzott negyedik és hatodik oszlopot adjuk, akkor lesz:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 W_1 & z_1^2 & y_1 z_1 & x_1 z_1 & x_1 y_1 \\ x_2^2 & y_2 W_2 & z_2^2 & y_2 z_2 & x_2 z_2 & x_2 y_2 \\ x_3^2 & y_3 W_3 & z_3^2 & y_3 z_3 & x_3 z_3 & x_3 y_3 \\ x_4^2 & y_4 W_4 & z_4^2 & y_4 z_4 & x_4 z_4 & x_4 y_4 \\ x_5^2 & y_5 W_5 & z_5^2 & y_5 z_5 & x_5 z_5 & x_5 y_5 \\ x_6^2 & y_6 W_6 & z_6^2 & y_6 z_6 & x_6 z_6 & x_6 y_6 \end{vmatrix} = 0 \qquad (C)$$

d) És ha végre a kérdéses determináns w-vel szorzott ötödik oszlopához annak u-, illetőleg v-vel szorzott első és hatodik oszlopát adjuk, akkor a (6) alatti egyenletet, a következő alakban nyerjük:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1 z_1 & x_1 W_1 & x_1 y_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2 z_2 & x_2 W_2 & x_2 y_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & y_3 z_3 & x_3 W_3 & x_3 y_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & y_4 z_4 & x_4 W_4 & x_4 y_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & y_5 z_5 & x_5 W_5 & x_5 y_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & y_6 z_6 & x_6 W_6 & y_6 y_6 \end{vmatrix} = 0 \qquad (D)$$

8. Ismeretes, hogy a kúpszelet bármely pontjának homogén koordinátái egy változó paraméter másodfoku függvényei által kifejezhetők, ugy hogy

$$\left.\begin{aligned} x &= r_1 \lambda^2 + s_1 \lambda + t_1 \\ y &= r_2 \lambda^2 + s_2 \lambda + t_2 \\ z &= r_3 \lambda^2 + s_3 \lambda + t_3 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

a hol egy és ugyanazon kúpszeletre nézve r_1, s_1, t_1 sat. állandók, λ pedig változó, úgy hogy λ pontról-pontra változik.

A miként a (8) alatti egyenletekben az állandóknak más és más értékeket adunk, akként nyerjük a sík különböző kúpszeleteit, ha tehát az állandóknak a következő értékeket adjuk:

$$\begin{aligned} r_1 &= 1, & s_1 &= 0, & t_1 &= 0 \\ r_2 &= 0, & s_2 &= 1, & t_2 &= 0 \\ r_3 &= 0, & s_3 &= 0, & t_3 &= 0 \end{aligned}$$

a (8) alatti egyenletek a következőkbe mennek át:

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda^2 \\ y &= \lambda \\ z &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

melyekből a kúpszelet egyenlete:

$$xz - y^2 = 0 \tag{10}$$

Legyen a (9) alatti kúpszelet hat pontja:

$$x_i,\, y_i,\, z_i \ldots (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

az ezeknek megfelelő paraméterértékek pedig λ_i ($i = 1, 2, \ldots 6$), akkor a (9) alatti egyenleteknél fogva:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \lambda_i^2 \\ y_i &= \lambda_i \\ z_i &= 1 \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \tag{11}$$

9. Ha most az (A), (B), (C) és (D) alatti azonos egyenletekben x_i, y_i, z_i (11) alatti értékeit helyettesítjük, akkor azon egyenletek a következőkbe mennek át:

$$\begin{vmatrix} W_1^2 & 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \lambda_1^4 \\ W_2^2 & 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \lambda_2^4 \\ W_3^2 & 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & \lambda_3^4 \\ W_4^2 & 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & \lambda_4^4 \\ W_5^2 & 1 & \lambda_5 & \lambda_5^2 & \lambda_5^3 & \lambda_5^4 \\ W_6^2 & 1 & \lambda_6 & \lambda_6^2 & \lambda_6^3 & \lambda_6^4 \end{vmatrix} = 0 \tag{A'}$$

$$\begin{vmatrix} W_1 & 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \lambda_1^4 \\ W_2 & 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \lambda_2^4 \\ W_3 & 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & \lambda_3^4 \\ W_4 & 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & \lambda_4^4 \\ W_5 & 1 & \lambda_5 & \lambda_5^2 & \lambda_5^3 & \lambda_5^4 \\ W_6 & 1 & \lambda_6 & \lambda_6^2 & \lambda_6^3 & \lambda_6^4 \end{vmatrix} = 0 \qquad (B')$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 W_1 & 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \lambda_1^4 \\ \lambda_2 W_2 & 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \lambda_2^4 \\ \lambda_3 W_3 & 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & \lambda_3^4 \\ \lambda_4 W_4 & 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & \lambda_4^4 \\ \lambda_5 W_5 & 1 & \lambda_5 & \lambda_5^2 & \lambda_5^3 & \lambda_5^4 \\ \lambda_6 W_6 & 1 & \lambda_6 & \lambda_6^2 & \lambda_6^3 & \lambda_6^4 \end{vmatrix} = 0 \qquad (C')$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^2 W_1 & 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \lambda_1^4 \\ \lambda_2^2 W_2 & 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \lambda_2^4 \\ \lambda_3^2 W_3 & 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & \lambda_3^4 \\ \lambda_4^2 W_4 & 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & \lambda_4^4 \\ \lambda_5^2 W_5 & 1 & \lambda_5 & \lambda_5^2 & \lambda_5^3 & \lambda_5^4 \\ \lambda_6^2 W_6 & 1 & \lambda_6 & \lambda_6^2 & \lambda_6^3 & \lambda_6^4 \end{vmatrix} = 0 \qquad (D')$$

Ha továbbá:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \lambda_1^4 & \lambda_1^5 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \lambda_2^4 & \lambda_2^5 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & \lambda_3^4 & \lambda_3^5 \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & \lambda_4^4 & \lambda_4^5 \\ 1 & \lambda_5 & \lambda_5^2 & \lambda_5^3 & \lambda_5^4 & \lambda_5^5 \\ 1 & \lambda_6 & \lambda_6^2 & \lambda_6^3 & \lambda_6^4 & \lambda_6^5 \end{vmatrix} = \Pi \qquad (12)$$

$$\left.\begin{aligned}
(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_5-\lambda_1)(\lambda_6-\lambda_1) &= \pi_1 \\
(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_5-\lambda_2)(\lambda_6-\lambda_2) &= \pi_2 \\
(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_3)(\lambda_5-\lambda_3)(\lambda_6-\lambda_3) &= \pi_3 \\
(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_5-\lambda_4)(\lambda_6-\lambda_4) &= \pi_4 \\
(\lambda_1-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_6-\lambda_5) &= \pi_5 \\
(\lambda_1-\lambda_6)(\lambda_2-\lambda_6)(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_4-\lambda_6)(\lambda_5-\lambda_6) &= \pi_6
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

akkor a (A') alatti egyenlet determinánsát az első oszlop szerint kifejtve az a következőbe megy át:

$$\frac{\Pi}{\pi_1}W_1^2+\frac{\Pi}{\pi_2}W_2^2+\frac{\Pi}{\pi_3}W_3^2+\frac{\Pi}{\pi_4}W_4^2+\frac{\Pi}{\pi_5}W_5^2+\frac{\Pi}{\pi_6}W_6^2=0$$

vagy még ezt Π-vel osztva:

$$\frac{W_1^2}{\pi_1}+\frac{W_2^2}{\pi_2}+\frac{W_3^2}{\pi_3}+\frac{W_4^2}{\pi_4}+\frac{W_5^2}{\pi_5}+\frac{W_6^2}{\pi_6}=0 \tag{14}$$

Hasonló felbontások által a (B'), (C') és (D') alatti egyenletek a következőkbe mennek át:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{W_1}{\pi_1}+\frac{W_2}{\pi_2}+\frac{W_3}{\pi_3}+\frac{W_4}{\pi_4}+\frac{W_5}{\pi_5}+\frac{W_6}{\pi_6}=0\\
&\frac{\lambda_1 W_1}{\pi_1}+\frac{\lambda_2 W_2}{\pi_2}+\frac{\lambda_3 W_3}{\pi_3}+\frac{\lambda_4 W_4}{\pi_4}+\frac{\lambda_5 W_5}{\pi_5}+\frac{\lambda_6 W_6}{\pi_6}=0\\
&\frac{\lambda_1^2 W_1}{\pi_1}+\frac{\lambda_2^2 W_2}{\pi_2}+\frac{\lambda_3^2 W_3}{\pi_3}+\frac{\lambda_4^2 W_4}{\pi_4}+\frac{\lambda_5^2 W_5}{\pi_5}+\frac{\lambda_6^2 W_6}{\pi_6}=0
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

10. Miután a (15) alatti egyenletek a $W_1, \dots W_6$ mennyiségekben lineárisak, a (14) alatti egyenlet pedig ugyanazokban másodfokú, úgy ezen egyenletek a térbeli geométria transformátió problémájára emlékeztetnek, a mely problémát algebrailag a következőképen fogalmazhatjuk:

«Kerestetnek azon lineáris helyettesítések, melyekben három függő változó három független változó által úgy van kifejezve, hogy azok a függő változók négyzeteinek összegét, a független változók négyzeteinek összejébe transformálják.»

Ha

$$\left|\begin{aligned}
W_1&=\sqrt{\pi_1}\,.\,x \qquad & W_4&=i\sqrt{\pi_4}\,.\,x'\\
W_2&=\sqrt{\pi_2}\,.\,y \qquad & W_5&=i\sqrt{\pi_5}\,.\,y'\\
W_3&=\sqrt{\pi_3}\,.\,z \qquad & W_6&=i\sqrt{\pi_6}\,.\,z'
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

tétetik, akkor a (14) és (15) alatti egyenletek a következőkbe mennek át:

$$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2 \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{\pi_1}}+\frac{y}{\sqrt{\pi_2}}+\frac{z}{\sqrt{\pi_3}}&=\frac{x'}{i\sqrt{\pi_4}}+\frac{y'}{i\sqrt{\pi_5}}+\frac{z'}{i\sqrt{\pi_6}}\\
\frac{\lambda_1 x}{\sqrt{\pi_1}}+\frac{\lambda_2 y}{\sqrt{\pi_2}}+\frac{\lambda_3 z}{\sqrt{\pi_3}}&=\frac{\lambda_4 x'}{i\sqrt{\pi_4}}+\frac{\lambda_5 y'}{i\sqrt{\pi_5}}+\frac{\lambda_6 z'}{i\sqrt{\pi_6}}\\
\frac{\lambda_1^2 x}{\sqrt{\pi_1}}+\frac{\lambda_2^2 y}{\sqrt{\pi_2}}+\frac{\lambda_3^2 z}{\sqrt{\pi_3}}&=\frac{\lambda_4^2 x'}{i\sqrt{\pi_4}}+\frac{\lambda_5^2 y'}{i\sqrt{\pi_5}}+\frac{\lambda_6^2 z'}{i\sqrt{\pi_6}}
\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

az utóbbi egyenleteket x, y, z szerint megoldva azok olyan alakúak lesznek mint a bevezetés (1) alatti egyenletei, a hol, ha még a következő jelzést:

$$\lambda_i - \lambda_k = (ik)$$

használjuk:

$$\left.\begin{aligned}
a_1^2&=\frac{(15)(16)}{(45)(46)}\cdot\frac{(42)(43)}{(12)(13)}, & b_1^2&=\frac{(14)(16)}{(54)(56)}\cdot\frac{(52)(53)}{(12)(13)},\\
& & c_1^2&=\frac{(14)(15)}{(64)(65)}\cdot\frac{(62)(63)}{(12)(13)},\\
a_2^2&=\frac{(25)(26)}{(45)(46)}\cdot\frac{(41)(43)}{(21)(23)}, & b_2^2&=\frac{(24)(26)}{(54)(56)}\cdot\frac{(51)(53)}{(21)(23)},\\
& & c_2^2&=\frac{(24)(25)}{(64)(65)}\cdot\frac{(61)(63)}{(21)(23)},\\
a_3^2&=\frac{(35)(36)}{(45)(46)}\cdot\frac{(41)(42)}{(31)(32)}, & b_3^2&=\frac{(34)(36)}{(54)(56)}\cdot\frac{(51)(52)}{(31)(32)},\\
& & c_3^2&=\frac{(34)(35)}{(64)(65)}\cdot\frac{(61)(62)}{(31)(32)},
\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

a mely egyenletekről még utólagosan bebizonyítandó, hogy a bevezetés (3) és (4) alatti egyenletrendszereit kielégítik.

Hesse azon paradoxont, hogy az orthogonális substitutió együtthatói *három* tetszőleges paraméter által előállíthatók, holott itt hat paraméter által vannak kifejezve úgy magyarázza meg, hogy kimutatja, ha a hat paraméter közűl háromnak állandó értéket tulajdonítunk és csak a másik hármat változtatjuk ép úgy nyerünk mindenfele gondolható substitutiót, mintha mind a hatot változtatjuk, mire nézve magára az értekezésre utalunk.

A dolog t. i. úgy áll, ha a két tengelyrendszer hat tengelye közül mindegyiknek egy-egy paraméter felel meg, úgy világos, hogy arra, hogy valamennyi transformátióra jöjjünk nem szükséges, hogy mind a két koordináta-rendszert változtassuk, hanem elégséges, ha csak az egyiket változtatjuk, a másikat pedig állandónak hagyjuk meg.

II.

Azon módszer kifejtése, melyből az előbbiek következnek.

11. Az itten kifejtendő módszer a maga lényegében a következő kérdés eldöntésén alapszik.

Ha a ξ, η, ζ mennyiségek a ξ', η', ζ' mennyiségeknek egészen tetszőleges lineáris függvényei, úgy hogy:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha_1 \xi' + \beta_1 \eta' + \gamma_1 \zeta' \\ \eta &= \alpha_2 \xi' + \beta_2 \eta' + \gamma_2 \zeta' \\ \zeta &= \alpha_3 \xi' + \beta_3 \eta' + \gamma_3 \zeta' \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

α_1, β_1, $\gamma_1, \dots \gamma_3$ alatt tetszőleges*) állandókat értvén képesek vagyunk-e? l, m, n; l', m', n' állandókat úgy meghatározni, ha

$$\left|\begin{aligned} \xi &= lx & \xi' &= l'x' \\ \eta &= my & \eta' &= m'y' \\ \zeta &= nz & \zeta' &= n'z' \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

hogy x, y, z és x', y', z' két összetartozó orthogonális értékrendszert, constituáljon.

Az (1) és (2) alatti kilencz egyenletből a ξ, η, ζ; ξ', η', ζ' mennyiségek kiküszöbölése a következő egyenletekre vezet:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 \frac{l'}{l} x' + \beta_1 \frac{m'}{l} y' + \gamma_1 \frac{n'}{l} z' \\ y &= \alpha_2 \frac{l'}{m} x' + \beta_2 \frac{m'}{m} y' + \gamma_2 \frac{n'}{m} z' \\ z &= \alpha_3 \frac{l'}{n} x' + \beta_3 \frac{m'}{n} y' + \gamma_3 \frac{n'}{n} z' \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

*) A «tetszőleges» szó itt csak azon értelemben veendő, hogy «*meg nem határozott.*»

melyekhez, miután x, y, z és x', y', z' két összetartozó orthogonális értékrendszert képeznek, még a következő azonos egyenlet járul

$$x^2+y^2+z^2 \equiv x'^2+y'^2+z'^2, \tag{4}$$

mely a következő hat egyenletbe esik szét:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^2\frac{l'^2}{l^2}+\alpha_2^2\frac{l'^2}{m^2}+\alpha_3^2\frac{l'^2}{n^2}&=1\\ \beta_1^2\frac{m'^2}{l^2}+\beta_2^2\frac{m'^2}{m^2}+\beta_3^2\frac{m'^2}{n^2}&=1\\ \gamma_1^2\frac{n'^2}{l^2}+\gamma_2^2\frac{n'^2}{m^2}+\gamma_3^2\frac{n'^2}{n^2}&=1 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_1\gamma_1\frac{1}{l^2}+\beta_2\gamma_2\frac{1}{m^2}+\beta_3\gamma_3\frac{1}{n^2}&=0\\ \alpha_1\gamma_1\frac{1}{l^2}+\alpha_2\gamma_2\frac{1}{m^2}+\alpha_3\gamma_3\frac{1}{n^2}&=0\\ \alpha_1\beta_1\frac{1}{l^2}+\alpha_2\beta_2\frac{1}{m^2}+\alpha_3\beta_3\frac{1}{n^2}&=0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

és ezek még a következő hatot vonják maguk után;

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^2\frac{l'^2}{l^2}+\beta_1^2\frac{m'^2}{l^2}+\gamma_1^2\frac{n'^2}{l^2}&=1\\ \alpha_2^2\frac{l'^2}{m^2}+\beta_2^2\frac{m'^2}{m^2}+\gamma_2^2\frac{n'^2}{m^2}&=1\\ \alpha_3^2\frac{l'^2}{n^2}+\beta_3^2\frac{m'^2}{n^2}+\gamma_3^2\frac{n'^2}{n^2}&=1 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2\alpha_3 l'^2+\beta_2\beta_3 m'^2+\gamma_2\gamma_3 n'^2&=0\\ \alpha_1\alpha_3 l'^2+\beta_1\beta_3 m'^2+\gamma_1\gamma_2 n'^2&=0\\ \alpha_1\alpha_2 l'^2+\beta_1\beta_2 m'^2+\gamma_1\gamma_2 n'^2&=0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

12. A (6) alatti egyenletrendszerből világos, hogy $\frac{1}{l^2}$, $\frac{1}{m^2}$, $\frac{1}{n^2}$ csak úgy nyerhetnek zérustól különböző értékeket, ha az egyenletrendszer determinánsa eltünik, azaz ha:

$$\begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1 & \beta_2\gamma_2 & \beta_3\gamma_3 \\ \alpha_1\gamma_1 & \alpha_2\gamma_2 & \alpha_3\gamma_3 \\ \alpha_1\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \alpha_3\beta_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

a (8) alatti rendszerből pedig kitünik, hogy l'^2, m'^2, n'^2 csak akkor nyernek zérustól különböző értékeket, ha a (8) alatti egyenletrendszer determinánsa:

$$\begin{vmatrix} \alpha_2\alpha_3 & \beta_2\beta_3 & \gamma_2\gamma_3 \\ \alpha_1\alpha_3 & \beta_1\beta_3 & \gamma_1\gamma_3 \\ \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

A (9) és (10) alatti feltételek azonosak, azonosságuk a determinánsok azonosságából következik, ez pedig tüstént belátható, ha a (9) alatti determináns oszlopait rendre $\alpha_1\beta_1\gamma_1$-, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$-, $\alpha_3\beta_3\gamma_3$-mal, a (10) alatti determináns oszlopait pedig $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$-, $\beta_1\beta_2\beta_3$-, $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$-mal elosztjuk, miután ekkor a két determináns közös értéke:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & \frac{1}{\beta_1} & \frac{1}{\gamma_1} \\ \frac{1}{\alpha_2} & \frac{1}{\beta_2} & \frac{1}{\gamma_2} \\ \frac{1}{\alpha_3} & \frac{1}{\beta_3} & \frac{1}{\gamma_3} \end{vmatrix} \tag{11}$$

Ezek szerint a következőt mondhatjuk ki:

«*A kérdéses l, m, n; l', m', n' állandókat csak akkor vagyunk képesek meghatározni, ha az (1) alatti helyettesítés együtthatói a (9)- vagy a mi ugyanaz a (10) alatti egyenlet által kifejezett feltételt kielégítik.*»

13. Az l, m, n; l', m', n' meghatározása céljából a következő jelöléseket vezetjük be; az (1) alatti helyettesítés:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \tag{12}$$

determinánsát Δ-val, abban pedig az α_i, β_i, γ_i elemeknek együtthatóit A_i, B_i, C_i-vel ($i = 1, 2, 3$) jelöljük.

Az $\frac{1}{l^2}, \frac{1}{m^2}, \frac{1}{n^2}$ meghatározására a (6) alatti egyenletek szolgálnak, a melyekből, feltéve, hogy a (9) alatti feltétel ki van elégítve, találjuk;

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{l^2} : \frac{1}{m^2} : \frac{1}{n^2} &= \frac{A_1}{\alpha_1} : \frac{A_2}{\alpha_2} : \frac{A_3}{\alpha_3} \\ &= \frac{B_1}{\beta_1} : \frac{B_2}{\beta_2} : \frac{B_3}{\beta_3} \\ &= \frac{C_1}{\gamma_1} : \frac{C_2}{\gamma_2} : \frac{C_3}{\gamma_3} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

vagy ha ρ_1, ρ_2, ρ_3 arányossági tényezőket jelentenek:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{l^2} &= \rho_1 \frac{A_1}{\alpha_1} \\ \frac{1}{m^2} &= \rho_1 \frac{A_2}{\alpha_2} \\ \frac{1}{n^2} &= \rho_1 \frac{A_3}{\alpha_3} \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

vagy

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{l^2} &= \rho_2 \frac{B_1}{\beta_1} \\ \frac{1}{m^2} &= \rho_2 \frac{B_2}{\beta_2} \\ \frac{1}{n^2} &= \rho_2 \frac{B_3}{\beta_3} \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

vagy végre

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{l^2} &= \rho_3 \frac{C_1}{\gamma_1} \\ \frac{1}{m^2} &= \rho_3 \frac{C_2}{\gamma_2} \\ \frac{1}{n^2} &= \rho_3 \frac{C_3}{\gamma_3} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

A l'^2, m'^2, n'^2 meghatározása pedig a (8) alatti egyenletekből történik, feltéve t. i. hogy a 10-alatti feltétel [a mely a (9) alattival azonos] ki van elégítve:

$$\left.\begin{aligned} l'^2 : m'^2 : n'^2 &= \frac{A_1}{\alpha_1} : \frac{B_1}{\beta_1} : \frac{C_1}{\gamma_1} \\ &= \frac{A_2}{\alpha_2} : \frac{B_2}{\beta_2} : \frac{C_2}{\gamma_2} \\ &= \frac{A_3}{\alpha_3} : \frac{B_3}{\beta_3} : \frac{C_3}{\gamma_3} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

vagy ha ρ'_1, ρ'_2, ρ'_3-mal megint arányossági tényezőket jelölünk:

$$\left.\begin{aligned} l'^2 &= \rho'_1 \frac{A_1}{\alpha_1} \\ m'^2 &= \rho'_1 \frac{B_1}{\beta_1} \\ n'^2 &= \rho'_1 \frac{C_1}{\gamma_1} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

vagy

$$\left.\begin{aligned} l'^2 &= \rho'_2 \frac{A_2}{\alpha_2} \\ m'^2 &= \rho'_2 \frac{B_2}{\beta_2} \\ n'^2 &= \rho'_2 \frac{C_2}{\gamma_2} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

vagy végre

$$\left.\begin{aligned} l'^2 &= \rho'_3 \frac{A_3}{\alpha_3} \\ m'^2 &= \rho'_3 \frac{B_3}{\beta_3} \\ n'^2 &= \rho'_3 \frac{C_3}{\gamma_3} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

14. Miután a (3) alatti orthogonál helyettesítés meghatározásánál, tulajdonképen nem az l, m, n; l', m', n' mennyiségekre van szükségünk, hanem azoknak következő függvényeire:

$$\frac{l'}{l}, \quad \frac{m'}{l}, \quad \frac{n'}{l}$$

$$\frac{l'}{m}, \quad \frac{m'}{m}, \quad \frac{n'}{m}$$

$$\frac{l'}{n}, \quad \frac{m'}{n}, \quad \frac{n'}{n}$$

azért tulajdonképeni törekvésünk e kilencz függvény meghatározására irányul.

Ha ugyanis az (5) alatti rendszer első egyenletében l'^2, $\frac{1}{l^2}, \frac{1}{m^2}, \frac{1}{n^2}$ értékét a (18) alatti első egyenletből és a (14) alatti egyenletekből helyettesítjük, akkor ered:

$$\rho_1 \rho_1' \frac{A_1}{a_1}(a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3) = 1$$

és innét

$$\rho_1 \rho_1' = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{a_1}{A_1}, \tag{21}$$

szintén a (18) alatti első és (14) alatti egyenleteknél fogva:

$$\left.\begin{aligned} \frac{l'^2}{l^2} &= \rho_1 \rho_1' \frac{A_1}{a_1} \cdot \frac{A_1}{a_1} \\ \frac{l'^2}{m^2} &= \rho_1 \rho_1' \frac{A_1}{a_1} \cdot \frac{A_2}{a_2} \\ \frac{l'^2}{n^2} &= \rho_1 \rho_1' \frac{A_1}{a_1} \cdot \frac{A_3}{a_3} \end{aligned}\right|$$

vagy ha még $\rho_1 \rho_1'$ (21) alatti értékére vagyunk tekintettel:

$$\left.\begin{aligned} \frac{l'^2}{l^2} &= \frac{1}{\Delta} \frac{A_1}{a_1} \\ \frac{l'^2}{m^2} &= \frac{1}{\Delta} \frac{A_2}{a_2} \\ \frac{l'^2}{n^2} &= \frac{1}{\Delta} \frac{A_3}{a_3} \end{aligned}\right| \tag{22}$$

Ugyanilyen módon határozhatjuk meg $\frac{m'^2}{l^2}, \frac{m'^2}{m^2}, \frac{m'^2}{n^2}$, $\frac{n'^2}{l^2}, \frac{n'^2}{m^2}, \frac{n'^2}{n^2}$ értékeit, melyeket az előbbiekkel együtt a következő táblázatban állítunk össze:

$$\left.\begin{array}{lll}
\dfrac{l'^2}{l^2}=\dfrac{1}{\varDelta}\cdot\dfrac{A_1}{\alpha_1}, & \dfrac{m'^2}{l^2}=\dfrac{1}{\varDelta}\cdot\dfrac{B_1}{\beta_1}, & \dfrac{n'^2}{l^2}=\dfrac{1}{\varDelta}\cdot\dfrac{C_1}{\gamma_1} \\
\dfrac{l'^2}{m^2}=\dfrac{1}{\varDelta}\cdot\dfrac{A_2}{\alpha_2}, & \dfrac{m'^2}{m^2}=\dfrac{1}{\varDelta}\cdot\dfrac{B_2}{\beta_2}, & \dfrac{n'^2}{m^2}=\dfrac{1}{\varDelta}\cdot\dfrac{C_2}{\gamma_2} \\
\dfrac{l'^2}{n^2}=\dfrac{1}{\varDelta}\cdot\dfrac{A_3}{\alpha_3}, & \dfrac{m'^2}{m^2}=\dfrac{1}{\varDelta}\cdot\dfrac{B_3}{\beta_3}, & \dfrac{n'^2}{n^2}=\dfrac{1}{\varDelta}\cdot\dfrac{C_3}{\gamma_3}
\end{array}\right\} \quad (23)$$

Majdnem felesleges felemlíteni, hogy ha kiinduló pontul az (5) alatti egyenletek helyett a (7) alatti egyenleteket választjuk, úgy hasonló módon megint a (23) alatti képletekre jövünk.

Ha végre a (3) alatti orthogonál helyettesítés együtthatóit rövidség kedvéért

$$\left.\begin{array}{ccc}
a_1 & b_1 & c_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 \\
a_3 & b_3 & c_3
\end{array}\right\}$$

jelöljük akkor a (4) alatti orthogonál helyettesítés együtthatóinak értékei ezek:

$$\left.\begin{array}{lll}
a_1^2=\dfrac{\alpha_1 A_1}{\varDelta}, & b_1^2=\dfrac{\beta_1 B_1}{\varDelta}, & c_1^2=\dfrac{\gamma_1 C_2}{\varDelta} \\
a_2^2=\dfrac{\alpha_2 A_2}{\varDelta}, & b_2^2=\dfrac{\beta_2 B_2}{\varDelta}, & c_2^2=\dfrac{\gamma_2 C_2}{\varDelta} \\
a_3^2=\dfrac{\alpha_3 A_3}{\varDelta}, & b_3^2=\dfrac{\beta_3 B_3}{\varDelta}, & c_3^2=\dfrac{\gamma_3 C_1}{\varDelta}
\end{array}\right\}{}^{*)} \quad . \quad (24)$$

15. Vizsgálataink eredményét egybefoglalva látjuk, hogy az (1) alatti helyettesítésből, levezethetjük a (3) alatti orthogonál helyettesítést, ha az (1) alatti substitutió együtthatói a (9)- vagy a mi ugyanaz a (10)-alatti feltételt kielégítik. Ha tehát az

$$\left.\begin{array}{l}
x=a_1x'+b_1y'+c_1z' \\
y=a_2x'+b_2y'+c_2z' \\
z=a_3x'+b_3y'+c_3z'
\end{array}\right\}$$

orthogonális substitutió együtthatóinak paraméteres előállítását akarjuk nyerni, mindenek előtt oly tetszőleges

---

*) Minden félreértés kikerülése miatt kiemeljük, hogy az $\alpha_1 \ldots . \gamma_3$ állandók három független állandóval aequivalensek.

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \alpha_1 \xi' + \beta_1 \eta' + \gamma_1 \delta' \\ \eta &= \alpha_2 \xi' + \beta_2 \eta' + \gamma_2 \delta' \\ \delta &= \alpha_3 \xi' + \beta_3 \eta' + \gamma_3 \delta'\end{aligned}\right\}$$

helyettesítést kell keresnünk, melynek substitutió-együtthatói, a következő feltételt kielégítik:

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 \alpha_3 & \beta_2 \beta_3 & \gamma_2 \gamma_3 \\ \alpha_1 \alpha_3 & \beta_1 \beta_3 & \gamma_1 \gamma_3 \\ \alpha_1 \alpha_2 & \beta_1 \beta_2 & \gamma_1 \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

16. A $\frac{l'^2}{l^2}, \ldots \frac{n'^2}{n^2}$ mennyiségek meghatározását illetőleg még megjegyezzük, hogy értékeiket, a következőképen is találhatjuk. Első sorban ugyanis $\frac{l'^2}{l^2}, \frac{l'^2}{m^2}, \frac{l'^2}{n^2}$ értékeire szorítkozva azokat a következő egyenletekből határozhatjuk meg; az (5) alatti rendszer első és (6) alatti rendszer l'^2-tel szorzott harmadik és második egyenletéből, melyek a következők:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1^2 \frac{l'^2}{l^2} + \alpha_2^2 \frac{l'^2}{m^2} + \alpha_3^2 \frac{l'^2}{n^2} &= 1 \\ \alpha_1 \beta_1 \frac{l'^2}{l^2} + \alpha_2 \beta_2 \frac{l'^2}{m^2} + \alpha_3 \beta_3 \frac{l'^2}{n^2} &= 0 \\ \alpha_1 \gamma_1 \frac{l'^2}{l^2} + \alpha_3 \gamma_3 \frac{l'^2}{m^2} + \alpha_3 \gamma_3 \frac{l'^2}{n^2} &= 0\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

ha ezen egyenletekből a kérdésben forgó mennyiségeket meghatározzuk, akkor ismét a (22) alatti képleteket nyerjük. Hasonló módon nyerjük azután a többieknek az értékeit is, úgy hogy ismét a (23) alatti táblázatra jövünk.

Az itten bővebben fejtegetett kérdés eldöntése által képesek vagyunk a paraméteres előállítások egész végtelen soránál a maga lényegében egy és ugyanazon eljárást követni; e paraméteres előállítások közül néhányat a következő számokban körülményesebben fogunk kifejteni.

A).

17. A megelőző fejtegetéseknél fogva, ha az

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 x' + b_1 y' + c_1 z' \\ y &= a_2 x' + b_2 y' + c_2 z' \\ z &= a_3 x' + b_3 y' + c_3 z' \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

orthogonális helyettesítés együtthatóinak paraméteres előállítását akarjuk megnyerni, úgy oly

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha_1 \xi' + \beta_1 \eta' + \gamma_1 \delta' \\ \eta &= \alpha_2 \xi' + \beta_2 \eta' + \gamma_2 \delta' \\ \delta &= \alpha_3 \xi' + \beta_3 \eta' + \gamma_3 \delta' \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ferde helyettesítésből kell kiindulnunk, melynek együtthatói a következő feltételt elégítik ki:

$$\begin{vmatrix} \alpha_2\alpha_3 & \beta_2\beta_3 & \gamma_2\gamma_3 \\ \alpha_1\alpha_3 & \beta_1\beta_3 & \gamma_1\gamma_3 \\ \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad (3)$$

Ha tehát a következő ferde helyettesítésben:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a'' \xi' + c\ \eta' + b'\ \delta' \\ \eta &= c'\ \xi' + b'' \eta' + a\ \delta' \\ \delta &= b'\ \xi' + a'\ \eta' + c''\ \delta' \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

az a'', b'', c'' együtthatókat úgy határozzuk meg, hogy reá nézve a (3) alatti determinánsnak megfelelő

$$\begin{vmatrix} bc' & a'b'' & ae'' \\ a''b & a'c & b'c'' \\ a''c' & b''c & ab' \end{vmatrix} \qquad (5)$$

determináns azon oknál fogva tünjék el, hogy oszlopainak öszszegét képezve

$$\left.\begin{array}{l} bc' + a'b'' + ac'' = 0 \\ a''b + a'c + b'c'' = 0 \\ a''c' + b''c + ab' = 0 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

akkor ezen három az a'', b'', c'', szerént lineáris egyenletből következik, hogy:

$$\left.\begin{array}{l} a'' = \dfrac{bb'cc' - aa'(b'^2 + c^2)}{abc + a'b'c'} \\[2ex] b'' = \dfrac{cc'aa' - bb'(c'^2 + a^2)}{abc + a'b'c'} \\[2ex] c'' = \dfrac{aa'bb' - cc'(a'^2 + b^2)}{abc + a'b'c'} \end{array}\right\} \qquad (7)$$

mely értékeket a (4) alatti egyenletekben helyettesítve a tulajdonképeni kiindulópontunkat képező ferde helyettesítés a következő lesz:

$$\left.\begin{array}{llll} \xi = & \dfrac{bb'cc' - aa'(b'^2 + c^2)}{abc + a'b'c'}\,\xi' & + c\eta' & + b'\zeta' \\[2ex] \eta = & c'\xi' + & \dfrac{cc'aa' - bb'(c' + a^2)}{abc + a'b'c'}\,\eta' & + a\,\zeta' \\[2ex] \zeta = & b\,\xi' + & a'\eta' + & \dfrac{aa'bb' - cc'(a'^2 + b^2)}{abc + a'b'c'}\,\zeta' \end{array}\right\} \qquad (8)$$

a melyből már most az átmenet a megfelelő orthogonális helyettesítésre az előrebocsátott általános eljárás szerént történik. A kérdésben forgó orthogonális substitutió együtthatóinak meghatározása czéljából, mindenek előtt az A_1, B_1, C_1, ... C_3 azután pedig a Δ determináns értékét kell kiszámítanunk, amint a 14. sz. (24) alatti képleteiből világosan kitünik.

Szem előtt tartva, hogy Δ alatt a (2) alatti ferdehelyettesítésnek determinánsát értjük A_i, B_i, C_i alatt pedig a Δ — determinánsban az α_i, β_i, γ_i elemek együtthatóit ($i = 1, 2, 3$), úgy minden nehézség nélkül találjuk, hogy a (8) alatti ferde helyettesítésnél:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\{bb'cc' - aa'(b'^2 + c^2)\}\{a^2b^2 + b^2c'^2 + c'^2a'^2\}}{(abc + a'b'c')^2} \\
B_1 &= \frac{c\{a^2b^2 + b^2c'^2 + c'^2a'^2\}}{abc + a'b'c'} \\
C_1 &= \frac{b'\{a^2b^2 + b^2c'^2 + c'^2a'^2\}}{abc + a'b'c'} \\
A_2 &= \frac{c'\{b^2c^2 + c^2a'^2 + a'^2b'^2\}}{abc + a'b'c'} \\
B_2 &= \frac{\{cc'aa' - bb'(c'^2 + a^2)\}\{b^2c^2 + c^2a'^2 + a'^2b'^2\}}{(abc + a'b'c')^2} \\
C_2 &= \frac{a\{b^2c^2 + c^2a'^2 + a'^2b'^2\}}{abc + a'b'c'} \\
A_3 &= \frac{b\{c^2a^2 + a^2b'^2 + b'^2c'^2\}}{abc + a'b'c'} \\
B_3 &= \frac{a'\{c^2a^2 + a^2b'^2 + b'^2c'^2\}}{abc + a'b'c'} \\
C_3 &= \frac{\{aa'bb' - cc'(a'^2 + b^2)\}\{c^2a^2 + a^2b'^2 + b'^2c'^2\}}{(abc + a'b'c')^2}
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

A Δ-determináns kiszámításánál legczélszerűbb a következő utat követni:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

vagy ha az $A_1, B_1, C_1, \ldots . C_3$ mennyiségek (9) alatti értékeit helyettesítjük és a sorok közös tényezőire vagyunk figyelemmel:

$$\Delta^2 = \frac{\{a^2 b^2 + b^2 c'^2 + c'^2 a'^2\}\{b^2 c^2 + c^2 a'^2 + a'^2 b'^2\}\{c^2 a^2 + a^2 b'^2 + b'^2 c'^2\}}{(abc + a' b' c')^3} \,.$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{bb' cc' - aa' (b'^2 + c^2)}{abc + a' b' c'} & c & b' \\ c' & \dfrac{cc' aa' - bb' (c'^2 + a^2)}{abc + a' b' c'} & a \\ b & a' & \dfrac{aa' bb' - cc' (a'^2 + b^2)}{abc + a' b' c'} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\{a^2 b^2 + b^2 c'^2 + c'^2 a'^2\}\{b^2 c^2 + c^2 a'^2 + a'^2 b'^2\}\{c^2 a^2 + a^2 b'^2 + b'^2 c'^2\}}{(abc + a' b' c')^3} \,.\, \Delta$$

és innét:

$$\Delta = \frac{\{a^2 b^2 + b^2 c'^2 + c'^2 a'^2\}\{b^2 c^2 + c^2 a'^2 + a'^2 b'^2\}\{c^2 a^2 + a^2 b'^2 + b'^2 c'^2\}}{(abc + a' b' c')^3} \qquad (10)$$

A 14. sz. (24) alatti képleteiben a (9) és (10) alatti értékeket tekintetbe véve, végre találjuk, hogy a (8) alatti ferde helyettesítésnek megfelelő orthogonál helyettesítés együtthatói a következők:

$$\left.\begin{aligned}
a_1^2 &= \frac{\{bb'cc' - aa'(b'^2 + c^2)\}^2}{(b^2c^2 + c^2a'^2 + a'^2b'^2)(c^2a^2 + a^2b'^2 + b'^2c'^2)}\\
b_1^2 &= \frac{c^2(abc + a'b'c')^2}{(b^2c^2 + c^2a'^2 + a'^2b'^2)(c^2a^2 + a^2b'^2 + b'^2c'^2)}\\
c_1^2 &= \frac{b'^2(abc + a'b'c')^2}{(b^2c^2 + c^2a'^2 + a'^2b'^2)(c^2a^2 + a^2b'^2 + b'^2c'^2)}\\
a_2^2 &= \frac{c'^2(abc + a'b'c')^2}{(c^2a^2 + a^2b'^2 + b'^2c'^2)(a^2b^2 + b^2c'^2 + c'^2a'^2)}\\
b_2^2 &= \frac{\{cc'aa' - bb'(c'^2 + a^2)\}^2}{(c^2a^2 + a^2b'^2 + b'^2c'^2)(a^2b^2 + b^2c'^2 + c'^2a'^2)}\\
c_2^2 &= \frac{a^2(abc + a'b'c')^2}{(c^2a^2 + a^2b'^2 + b'^2c'^2)(a^2b^2 + b^2c'^2 + c'^2a'^2)}\\
a_3^2 &= \frac{b^2(abc + a'b'c')^2}{(a^2b^2 + b^2c'^2 + c'^2a'^2)(b^2c^2 + c^2a'^2 + a'^2b'^2)}\\
b_3^2 &= \frac{a'^2(abc + a'b'c')^2}{(a^2b^2 + b^2c'^2 + c'a'^2)(b^2c^2 + c^2a'^2 + a'^2b'^2)}\\
c_3^2 &= \frac{aa'bb' - cc'(a'^2 + b^2)}{(a^2b^2 + b^2c'^2 + c'^2a'^2)(b^2c^2 + c^2a'^2 + a'^2b'^2)}
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Ezen képletekben a a' b' c' paramétereket pusztán a nagyobb symmétria kedvéért hagytuk meg.

B)

18. Ha a 17. sz. képleteiben előforduló hat paramétert a szükséges és elegendő paraméterszámra redukáljuk, úgy azt elérjük, ha a nevezett képletekben

$$a' = b' = c' = 1$$

tesszük, mely helyettesítés által a 17. sz. (8) alatti ferde helyettesítése átmegy a következőbe:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \frac{bc-a(1+c^2)}{1+abc}\,\xi'+c\eta'+\zeta' \\
\eta &= \xi'+\frac{ac-b(1+a^2)}{1+abc}\,\eta'+c\zeta' \\
\zeta &= b\xi'+\eta'+\frac{ab-c(1+b^2)}{1+abc}\,\zeta'
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

az ennek megfelelő orthogonális helyettesítés együtthatóit a (11) alatti képletekből nyerjük:

$$\left.\begin{aligned}
a_1^2 &= \frac{\{bc-a(1+c^2)\}^2}{(1+c^2+b^2c^2)(1+a^2+a^2c^2)} \\
b_1^2 &= \frac{c^2(1+abc)^2}{(1+c^2+b^2c^2)(1+a^2+a^2c^2)} \\
c_1^2 &= \frac{(1+abc)^2}{(1+c^2+b^2c^2)(1+a^2+a^2c_2)} \\
a_2^2 &= \frac{(1+abc)^2}{(1+a^2+a^2c^2)(1+b^2+a^2b^2)} \\
b_2^2 &= \frac{\{ac-b(1+a^2)\}^2}{(1+a^2+a^2c^2)(1+b^2+a^2b^2)} \\
c_2^2 &= \frac{a^2(1+abc)^2}{(1+a^2+a^2c^2)(1+b^2+a^2b^2)} \\
a_3^2 &= \frac{b^2(1+abc)^2}{(1+b^2+a^2b^2)(1+c^2+b^2c^2)} \\
b_3^2 &= \frac{(1+abc)^2}{(1+b^2+a^2b^2)(1+c^2+b^2c^2)} \\
c_3^2 &= \frac{\{ab-c(1+b^2)\}^2}{(1+b^2+a^2b^2)(1+c^2+b^2c^2)}
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

mely képletek az orthogonális substitutió együtthatóit, az a, b, c paraméterekben, a mint látni irrationális alakban fejezik ki.

Ha az a, b, c paramétereknek a következő értékeket adjuk:

$$a=b=c=-1 \qquad (3)$$

akkor

$$\left.\begin{aligned}
a_1&=1\,, & b_1&=0\,, & c_1&=0 \\
a_2&=0\,, & b_2&=1\,, & c_2&=0 \\
a_3&=0\,, & b_3&=0\,, & c_3&=1
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

a mi azt mutatja, hogy ekkor a két orthogonál koordinátarendszer egybeesik. Ha tehát a két orthogonál koordinátarendszer közül az XYZ-t állandónak tekintjük a $X'Y'Z'$ rendszert pedig változtatjuk, akkor a mozgó koordinátarendszer kezdetleges helyzete az XYZ-rendszer lesz az ennek megfelelő paraméterértékek pedig a (3) alatti értékek lesznek; ezen oknál fogva a (3) alatti paraméterértékeket az a, b, c paraméterek kezdetleges értékeinek nevezhetjük.

C) Euler képleteinek III. rendszere.

19. Az I. *B)* alatt levezetett Euler-féle képleteknek III. rendszerét, vagy a megelőző, vagy még kényelmesebben a 17. sz.-ból nyerhetjük.

A 18. sz. (2) alatti képletei az orthogonális helyettesítés együtthatóit, három paraméterben, a 17. sz. (11) alatti képletei pedig hat paraméterben fejezi ki, s pedig mind a két képletcsoport irrationális, holott Euler képleteinek III. rendszere a kérdéses együtthatókat rationálisan fejezi ki; a 17. sz. (11) alatti egyenleteiből áttérhetünk az Euler-féle képletekre, ha azokban a következő helyettesítéseket teszszük:

$$\left.\begin{array}{lll} a=\mu\nu-\lambda, & b=\lambda\nu-\mu, & c=\lambda\mu-\nu \\ a'=\mu\nu+\lambda, & b'=\lambda\nu+\mu, & c'=\lambda\mu+\nu \end{array}\right\} \quad (1)$$

melyek tekintetbe vételével a 17. sz. (11) alatti képleteiben előforduló kifejezések a következő értékeket veszik fel, ha rövidség kedvéért:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda^2\mu^2\nu^2+\mu^2\nu^2+\lambda^2\nu^2+\lambda^2\mu^2=M \\ 1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2=N \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{r} b^2c^2+c^2a'^2+a'^2b'^2= \\ =c^2a^2+a^2b'^2+b'^2c'^2= \\ =a^2b^2+b^2c'^2+c'^2a'^2=MN \\ bb'cc'-aa'(b'^2+c^2)=M(1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2) \\ cc'aa'-bb'(c'^2+a^2)=M(1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2) \\ aa'bb'-cc'(a'^2+b^2)=M(1-\lambda^2-\mu^2+\nu^2) \end{array}\right\} \quad (3)$$

és így

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2}{N}, & b_1 &= \frac{2(\lambda\mu-\nu)}{N}, & c_1 &= \frac{2(\lambda\nu+\mu)}{N}\\
a_2 &= \frac{2(\lambda\mu+\nu)}{N}, & b_2 &= \frac{1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2}{N}, & c_2 &= \frac{(2\mu\nu-\lambda)}{N}\\
a_3 &= \frac{2(\lambda\nu-\mu)}{N}, & b_3 &= \frac{2(\mu\nu+\lambda)}{N}, & c_3 &= \frac{1-\lambda^2-\mu^2+\nu^2}{N}
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Az orthogonális substitutió együtthatóinak e rendszere, megegyezik az I. B)-ben foglalt (12) alatti képletekkel.

D) Euler képleteinek I. és II. rendszere.

20. Ha a megelőző szám (4) alatti képleteiben a következő helyettesítéseket teszszük:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta}{\cos\frac{1}{2}(\psi+\varphi)}\cos\tfrac{1}{2}(\psi-\varphi)\\
\mu &= \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta}{\cos\frac{1}{2}(\psi+\varphi)}\sin\tfrac{1}{2}(\psi+\varphi)\\
\nu &= \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\psi+\varphi)
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

akkor találjuk, hogy:

$$\left.\begin{aligned}
\mu\nu-\lambda &= -\frac{\sin\frac{1}{2}\vartheta\cos\psi}{\cos\frac{1}{2}\vartheta\cos^2\frac{1}{2}(\psi+\varphi)}, \quad \mu\nu+\lambda = \frac{\sin\frac{1}{2}\vartheta\cos\varphi}{\cos\frac{1}{2}\vartheta\cos^2\frac{1}{2}(\psi+\varphi)}\\
\lambda\nu-\mu &= \frac{\sin\frac{1}{2}\vartheta\sin\psi}{\cos\frac{1}{2}\vartheta\cos^2\frac{1}{2}(\psi+\varphi)}, \quad \lambda\nu+\mu = \frac{\sin\frac{1}{2}\vartheta\sin\psi}{\cos\frac{1}{2}\vartheta\cos^2\frac{1}{2}(\psi+\varphi)}\\
\lambda\mu-\nu &= -\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}\vartheta\cos^2\frac{1}{2}(\psi+\varphi)}\{\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta\}\\
\lambda\mu+\nu &= \frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}\vartheta\cos^2\frac{1}{2}(\psi+\varphi)}\{\sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta+\cos\varphi\sin\psi\}\\
1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2 &= \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\vartheta\cos^2\frac{1}{2}(\psi+\varphi)}\\
1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2 &= \frac{\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\sin\varphi\cos\vartheta}{\cos^2\frac{1}{2}\vartheta\cos^2\frac{1}{2}(\psi+\varphi)}\\
1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2 &= \frac{\cos\psi\cos\varphi\cos\vartheta-\sin\psi\sin\varphi}{\cos^2\frac{1}{2}\vartheta\cos^2\frac{1}{2}(\psi+\varphi)}\\
1-\lambda^2-\mu^2+\nu^2 &= \frac{\cos\vartheta}{\cos^2\frac{1}{2}\vartheta\cos^2\frac{1}{2}(\psi+\varphi)}
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

mely értékek tekintetbe vételével a megelőző szám (4) alatti képleteiből Euler képleteinek I. rendszerét nyerjük. (L. I. *A)*-ban a (4) a. e. r.)

Ha pedig a megelőző szám (4) alatti képleteiben a következő helyettesítéseket tesszük:

$$\lambda = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi \cos \alpha,\ \mu = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi \cos \beta,\ \nu = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi \cos \gamma$$

akkor az Euler-féle képleteknek II. rendszerét nyerjük (*L, I, A,* (5) *a, e, r,*) amint azt már Cayley az idézett hely 121. lapján megjegyezte.

Végre még megjegyezzük, hogy az Euler-féle képleteknek I. és II. rendszerét szintén úgy mint azok III. rendszerét a 17. sz. (11) alatti egyenleteiből, vagy a 18. sz. (2) alatti egyenleteiből vezethettük volna le, de a felesleges számítások kikerülése miatt czélszerűbbnek tartottuk az itt követett utat választani.

D) Monge képletei.

21. Monge képleteit is egyenesen a 17. sz. (11) alatti egyenleteiből vezethetnők le, de miután ezekből már az Euler-féle képletek III. rendszerét levezettük czélszerűbbnek tartjuk ezeket is a 19. sz. (4) alatti egyenleteiből levezetni.

A Monge-féle képletekben az orthogonális helyettesítés együtthatói a_1, b_2, c_3 által vannak kifejezve; ha tehát a 18. sz. (4) alatti egyenletei közül egyelőre csak is a diagonális-sorban állókat vesszük tekintetbe, akkor azokból találjuk, hogy

$$\lambda^2 = \frac{A}{D}$$

$$\mu^2 = \frac{B}{D}$$

$$\nu^2 = \frac{C}{D}$$

szem előtt tartva az I. *C)*-ben használt, (8) alatti jelölést. Ha pedig végre a 18. sz. (4) alatti többi egyenleteiben λ, μ, ν értékeit helyettesítjük, úgy ismét a Monge-féle képletekhez jutunk [*L,* az I. *C)*-ben (14) a. jelölést és (I) alatti rendszert] a mint azt már Rodrigues is észrevette [az i. h. 405. lapján].

E) Hesse képletei.

22. Ismét a következő ferde helyettesítésből

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \alpha_1\,\xi' + \beta_1\,\eta' + \gamma_1\,\zeta' \\ \eta &= \alpha_2\,\xi' + \beta_2\,\eta' + \gamma_2\,\zeta' \\ \zeta &= \alpha_3\,\xi' + \beta_3\,\eta' + \gamma_3\,\zeta'\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

kiindulva határozzuk meg a hozzája tartozó orthogonális helyettesítés együtthatóit.

Mindenek előtt az (1) alatti helyettesítés együtthatóit úgy kell választanunk, hogy azok a következő feltételt:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & \frac{1}{\beta_1} & \frac{1}{\gamma_1} \\ \frac{1}{\alpha_2} & \frac{1}{\beta_2} & \frac{1}{\gamma_2} \\ \frac{1}{\alpha_3} & \frac{1}{\beta_3} & \frac{1}{\gamma_3} \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

kielégítsék.

Kiindulópontunkat a következő azonosság képezi:

$$\begin{vmatrix} \lambda_4-\lambda_1 & \lambda_5-\lambda_1 & \lambda_6-\lambda_1 \\ \lambda_4-\lambda_2 & \lambda_5-\lambda_2 & \lambda_6-\lambda_2 \\ \lambda_4-\lambda_3 & \lambda_5-\lambda_3 & \lambda_6-\lambda_3 \end{vmatrix} \equiv 0 \tag{3}$$

melynek helyességét könnyen beláthatjuk; ha itt még a következő jelzést használjuk:

$$\lambda_i - \lambda_k = (ik) \tag{4}$$

akkor azt még így is irhatjuk:

$$\begin{vmatrix} (41) & (51) & (61) \\ (42) & (52) & (62) \\ (43) & (53) & (63) \end{vmatrix} \equiv 0$$

a melyből következik:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{(51)(61)} & \frac{1}{(46)(61)} & \frac{1}{(41)(51)} \\ \frac{1}{(52)(62)} & \frac{1}{(42)(62)} & \frac{1}{(42)(52)} \\ \frac{1}{(53)(63)} & \frac{1}{(43)(63)} & \frac{1}{(43)(53)} \end{vmatrix} \equiv 0 \quad (5)$$

a mely egyenlet első tagját a (2) alatti egyenlet első tagjával összehasonlítva, találjuk, hogy:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= (51)(61), \ \beta_1 = (41)(61), \ \gamma_1 = (41)(51) \\ \alpha_2 &= (52)(62), \ \beta_2 = (42)(62), \ \gamma_2 = (42)(52) \\ \alpha_3 &= (53)(63), \ \beta_3 = (43)(63), \ \gamma_3 = (43)(53) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

és igy a kiinduló pontunkat képező ferdehelyettesítés ez:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (51)(61)\,\xi' + (41)(61)\,\eta' + (41)(51)\,\zeta' \\ \eta &= (52)(62)\,\xi' + (42)(62)\,\eta' + (42)(52)\,\zeta' \\ \zeta &= (53)(63)\,\xi' + (43)(63)\,\eta' + (43)(53)\,\zeta' \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

23. Az ezen helyettesítéshez tartozó orthogonális substitutió együtthatóit a 14. sz. (24) alatti képletei szerént határozzuk meg, mely czélból a (7) alatti rendszer determinánsát és abban az elemeknek az együtthatóit kell kiszámítanunk, a mi pedig ez utóbbiak értékeit illeti, úgy a (6) alatti értékekből könnyen találjuk, hogy

$$A_1 = \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (42)(62) & (42)(52) \\ (43)(63) & (43)(53) \end{vmatrix} = (42)(43) \begin{vmatrix} \lambda_6 - \lambda_2 & \lambda_5 - \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_6 - \lambda_3 & \lambda_5 - \lambda_3 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (42)(43) \begin{vmatrix} \lambda_6 & \lambda_5 & \lambda_2 \\ \lambda_6 & \lambda_5 & \lambda_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (42)(43) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_6 & \lambda_5 & \lambda_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(42)(43)(23)(56),$$

ugyanígy találjuk B_1, C_1, sat. értékeit, úgy hogy:

$$\left.\begin{aligned}
A_1&=-(42)(43)\ (23)(56), & B_1&=-(52)(53)\ (23)(64),\\
& & C_1&=-(62)(63)\ (23)(45)\\
A_2&=-(41)(43)\ (31)(56), & B_2&=-(51)(53)\ (31)(64),\\
& & C_2&=-(61)(63)\ (31)(45)\\
A_3&=-(41)(42)\ (12)(56), & B_3&=-(51)(52)\ (12)(64),\\
& & C_3&=-(61)(62)\ (12)(45)
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

A $\varDelta$ determináns kiszámítása pedig legegyszerűbben így történik:

$$\varDelta^2=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -(42)(43)\,(23)(56) & -(52)(53)\,(23)(64) & -(62)(63)\,(23)(45)\\ -(41)(43)\,(31)(56) & -(51)(53)\,(31)(64) & -(61)(63)\,(31)(45)\\ -(41)(42)\,(12)(56) & -(51)(52)\,(12)(64) & -(61)(62)\,(12)(45)\end{vmatrix}$$

$$=-(23)\,(31)\,(12)\,(56)\,(64)\,(45)\begin{vmatrix} (42)\,(43) & (52)\,(53) & (62)\,(63)\\ (41)\,(43) & (51)\,(53) & (61)\,(63)\\ (41)\,(42) & (51)\,(52) & (61)\,(62)\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\varDelta^2=-(23)\,(31)\,(12)\,(56)\,(64)\,(45)\,.&\\ .\,(41)\,(42)\,(43)\,.&\\ .\,(51)\,(52)\,(53)\,.&\\ .\,(61)\,(62)\,(63)\,.&\end{aligned}\begin{vmatrix} \frac{1}{(41)} & \frac{1}{(51)} & \frac{1}{(61)}\\ \frac{1}{(42)} & \frac{1}{(52)} & \frac{1}{(62)}\\ \frac{1}{(43)} & \frac{1}{(53)} & \frac{1}{(63)}\end{vmatrix}$$

$$=-(23)\,(31)\,(12)\,(56)\,(64)\,(45)\,.\begin{vmatrix} (51)\,(61) & (41)\,(61) & (41)\,(51)\\ (52)\,(62) & (42)\,(62) & (42)\,(52)\\ (53)\,(63) & (43)\,(63) & (43)\,(63)\end{vmatrix}$$

$$=-(23)\,(31)\,(12)\,(56)\,(64)\,(45)\,.\,\varDelta$$

tehát:

$$\varDelta=-(23)\,(31)\,(12)\,(56)\,(64)\,(45)\qquad(9)$$

Ha végre a 14. sz. (24) alatti képleteiben $\alpha_1, \ldots \gamma_3$; $A_1, \ldots C_3$ és $\varDelta$ értékeit a (6), — illetőleg (8) — illetőleg (9)-alatti egyenletekből helyettesítjük, akkor ismét az I. D)-ben kifejtett (19) alatti Hesse-féle képletekre jövünk, a melyekben ha

$$\lambda_4 = \lambda_1 \quad \lambda_5 = \lambda_2 \quad \lambda_6 = \lambda_3 \tag{10}$$

tesszük, találjuk hogy:

$$\begin{array}{lll} a_1 = 1 & b_1 = 0, & c_1 = 0 \\ a_2 = 0 & b_2 = 1, & c_2 = 0 \\ a_3 = 0 & b_3 = 0, & c_3 = 1 \end{array}$$

a mi azt mondja ki, hogy ha a λ-k között a (10) alatti feltételek állanak, akkor a két orthogonális koordinátarendszer teljesen összeesik.

F)

24. Ha a 17. sz. (4) alatti helyettesítés együtthatóiból képezett következő determináns:

$$\begin{vmatrix} bc' & a'b'' & ac'' \\ a''b & a'c & b'c'' \\ a''c' & b''c & ab' \end{vmatrix} \tag{1}$$

azon oknál fogva tűnik el, hogy sorainak összegét képezve:

$$\left.\begin{array}{l} b\,c' + a''\,b \;\; + a''\,c' = 0 \\ a'\,b'' + a'\,c \;\; + b''\,c \;\; = 0 \\ a\,c'' + b'\,c'' + a\;\; b' = 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

mely egyenletekből következik:

$$\left.\begin{array}{l} a'' = -\dfrac{b\,c'}{b+c'} \\ b'' = -\dfrac{c\,a'}{c+a'} \\ c'' = -\dfrac{a\,b'}{a+b'} \end{array}\right\}, \tag{3}$$

akkor az idézett helyettesítés átmegy a következőbe:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= -\frac{bc'}{b+c'}\,\xi' + c\,\eta' + b'\,\zeta' \\
\eta &= \quad c'\,\xi' - \frac{ca'}{c+a'}\,\eta' + a\,\zeta' \\
\zeta &= \quad b\,\xi' + a'\,\eta' - \frac{ab'}{a+b'}\,\zeta'
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ha rövidség kedvéért:

$$\left.\begin{aligned}
aa' + ac + a'b' &= A \\
bb' + ab + b'c' &= B \\
cc' + bc + a'c' &= C
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

akkor az előbbi helyettesítésből a következőket találjuk:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \frac{-aa'A}{(c+a')(a+b')}, & B_1 &= \frac{aB}{a+b'}, & C_1 &= \frac{a'C}{c+a'} \\
A_2 &= \frac{b'A}{a+b'}, & B_2 &= \frac{-bb'B}{(b+c')(a+b')}, & C_2 &= \frac{bC}{b+c'} \\
A_3 &= \frac{cA}{c+a'}, & B_3 &= \frac{c'B}{b+c'}, & C_3 &= \frac{-cc'C}{(b+c')(c+a')}
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

továbbá:

$$\begin{aligned}
\Delta &= a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 \\
&= \frac{bc'}{b+c'} \cdot \frac{aa'A}{(c+a')(a+b')} + c', \frac{b'A}{a+b'} + b, \frac{cA}{c+a'} \\
&= \frac{A}{(b+c')(c+a')(a+b')} \{aa'bc' + b'c(b+c')(c+a') + \\
&\qquad\qquad + bc(b+c')(a+b')\} \\
&= \frac{ABC}{(b+c')(c+a')(a+b')}
\end{aligned}$$

úgy hogy Δ értéke ez:

$$\Delta = \frac{ABC}{(b+c')(c+a')(a+b')} \tag{7}$$

Végre a (6) és (7) alatti értékek tekintetbe vételével a (4) alatti helyettesítéshez tartozó orthogonál helyettesítés együtthatói a következők:

$$\left.\begin{aligned}
&a_1^2=\frac{aa'bc'}{BC}, \quad b_1^2=\frac{ca(b+c')(c+a')}{AC}, \quad c_1^2=\frac{a'b'(b+c')(a+b')}{AB}\\
&a_2^2=\frac{b'c'(b+c')(c+a')}{BC}, \quad b_2^2=\frac{bb'ca'}{AC}, \quad c_2^2=\frac{ab(c+a')(a+b')}{AB}\\
&a_3^2=\frac{bc(b+c')(a+b')}{BC}, \quad b_3^2=\frac{c'a'(c+a')(a+b')}{AC}, \quad c_3^2=\frac{cc'ab'}{AB}
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

G)

25. Ha végre az előbbi szám (4) alatti ferde helyettesítésében előforduló paraméterek számát a szükséges paraméterszámra redukáljuk, mit úgy érhetünk el, hogy a nevezett helyettesítésekben

$$a'=b'=c'=1 \tag{1}$$

tesszük, akkor az utóbbi a következőbe megy át:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= -\frac{b}{1+b}\xi' + c\eta' + \zeta'\\
\eta &= \xi' - \frac{c}{1+c}\eta' + a\zeta'\\
\zeta &= b\xi' + \eta' - \frac{a}{1+a}\zeta'
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

az ezen ferde helyettesítéshez tartozó orthogonális substitutió együtthatói pedig a megelőző szám (8) alatti képleteinél fogva ezek lesznek:

$$\left.\begin{aligned}
a_1^2&=\frac{ab}{BC}, & b_1^2&=\frac{ca(1+b)(1+c)}{AC}, & c_1^2&=\frac{(1+a)(1+b)}{AB}\\
a_2^2&=\frac{(1+b)(1+c)}{BC}, & b_2^2&=\frac{bc}{AC}, & c_2^2&=\frac{ab(1+c)(1+a)}{AB}\\
a_3^2&=\frac{bc(1+a)(1+b)}{BC}, & b_3^2&=\frac{(1+c)(1+a)}{AC}, & c_3^2&=\frac{ca}{AB}
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

a hol:

$$\left.\begin{aligned}
A&=1+a+ac\\
B&=1+b+ab\\
C&=1+c+bc
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

A két orthogonális rendszer összeesik, ha

$$a=b=c=-1, \qquad (5)$$

miután az a, b, c paraméterek ezen értékénél az orthogonális substitutió együtthatói a következő értékeket nyerik:

$$\left.\begin{aligned}
a_1&=0, & b_1&=0, & c_1&=0\\
a_2&=0, & b&=1, & c_2&=0\\
a_3&=0, & b_3&=0, & c_3&=1
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

amint az a (3) alatti képletekből világos.

XXI. *Hunyady Jenő.* Tételek a componalt determinánsoknak egy különös neméről. 10 kr. — XXII. *König Gyula.* A raczionális függvények általános elméletéhez. 10 kr. — XXIII. *Silberstein Salamon.* Vonalgeometriai tanulmányok 20 kr. — XXIV. *Hunyady János.* A Steiner-féle kritériumról a kúpszeletek elméletében. 10 kr. — XXV. *Hunyady Jenő.* A pontokból vagy érintőkből és a conjugált háromszögből meghatározott kúpszelet nemének eldöntésére szolgáló kritériumok. 10 kr.

Nyolczadik kötet.

I. szám. Astrophysikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 1880-ban. *Konkoly Miklóstól.* Egy tábla rajzzal. — II. szám. Adatok Jupiter physikájához az 1880-ik évből. Egy függelékkel. *Konkoly Miklóstól.* — III. szám. A Bólyai-féle algorithmus. *Dr. Farkas Gyulától.* — IV. szám. Napfoltok megfigyelése 1880-ban, és 1382 napfolt micrometricus mérése. *Konkoly Miklóstól.* Két tábla rajzzal. — V. szám. Hullócsillagok megfigyelése 1880-ban a magyar korona területén. V-ik rész. *Konkoly Miklóstól.* — VI. szám. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. *Konkoly Miklóstól.* — VII. szám. 102 hullócsillag kisugárzási pont, levezetve 518 megfigyelésből, melyek a magyar korona területén 1879. és 1880-ban tétettek. *Konkoly Miklóstól.* — VIII. szám. Új villámzáró vagy nyitókészülék normálórán, és a Jürgenssen-féle óraszerkezet. *Konkoly Miklóstól.* Egy képtáblával. — IX. szám. Adatok Jupiter forgási elemeihez. *Dr. Kobold Ármintól.* — X. szám. A Hamilton-féle rendszerek és az elsőrendü partialis differentiálegyenletek általános elmélete. Székfoglaló értekezés. *König Gyulától.* — XI. szám. A hadtudomány viszonya a többi tudományokhoz. *Kápolnai Pauer Istvántól.* Székfoglaló értekezés. — XII. szám. Egy negyedrendü felületről. *Hunyady Jenőtől.*

Kilenczedik kötet.

I. szám. Astrophisikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. (Három táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — II. szám. Az ó-gyallai csillagvizsgáló földrajzi szélessége. *Dr. Lakits Ferencztől.* — III. szám. A herényi astrophysikai observatorium leirása, és az abban tett megfigyelések 1881-ben. (Egy táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IV. szám. Napfoltok és a nap felületének megfigyelése 1881-ben. *Konkoly Miklóstól.* — V. szám. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. *Konkoly Miklóstól.* — VI. szám. Hullócsillagok megfigyelése 1881-ben. *Konkoly Miklóstól.* — VII. szám. Adatok Jupiter és Mars physikájához, az 1881. évi megfigyelésekből. (III. rész. Három táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VIII. szám. Az üstökösök vegytani alkotása. *Konkoly Miklóstól.* — IX. szám. Az 1871—1880. években, Magyarországban megfigyelt hullócsillagok pályaelemei. *Kövesligethy Radótól.* — X. szám. Néhány determináns-egyenletről. *Hunyady Jenőtől.* — XI. Perspectiv helyzetű alakzatokról *Dr. Klug Lipóttól.* — XII. szám. Az elhajlott fény intenzitásának vizsgálata. (A math. és természettudományi állandó bizottság segélyezésével készült dolgozat. Tizenkét ábrával a szöveg között.) *Dr. Fröhlich Izortól.* — XIII. szám. Az algebrai egyenletek elméletéhez. *König Gyulától.*

Tizedik kötet.

I. A nap felületének megfigyelése 1882-ben. *Konkoly Miklóstól.* — II. Astrophysikai megfigyelések 1882-ben. *a)* A Wells-üstökös szinképe. *b)* A szeptemberi nagy üstökös szinképe. *c)* 9 Meteor szinképe. *d)* 115 állócsillag spectruma. *e)* Coloremetricus megfigyelések. *Konkoly Miklóstól.* — III. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén. 1882. *Konkoly Miklóstól.* —

IV. Egy uj reversio-spectroscop s annak használata. (Egy táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — V. Az ó-gyallai csillagvizsgálón eszközölt csillagászati megfigyelések eredménye. 1882. *Konkoly Miklóstól.* — VI. Néhány szó az üstökösök vegytani alkotásáról, összehasonlitva a meteoritekkel. *Konkoly Miklóstól.* — VII. Egy uj szerkezetü spectroscop. (Egy táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VIII. Astrophysikai megfigyelések a herényi observatoriumon, 1882. (Egy táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IX. Adatok Jupiter és Mars bolygók physikájához. (Három táblával.) *Gothard Sándortól.* — X. Egy uj spectroscop. (Egy táblarajzzal.) *Gothard Jenőtől.* — XI. Astrophysikai megfigyelések 1883. (Egy táblával.) I. rész. *a)* γ Cassiopejae spectruma. *b)* α Ursae minoris spectruma. *l)* A Swift üstökös spectruma. *d)* A Brooks üstökös spectruma. *e)* Colorimetricus megfigyelése 65 állócsillagnak. *Konkoly Miklóstól.*

Tizenegyedik kötet.

I. Astrophysikai megfigyelések 1883-ban, az ó-gyallai csillagdán. (II-ik rész, 3 tábla.) *Konkoly Miklóstól.* — II. A nap felületének megfigyelése 1883-ban, az ó-gyallai csillagdán. *Konkoly Miklóstól.* — III. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1883-ban. *Konkoly Miklóstól.* — IV. 615 állócsillag spectruma. A déli öv átkutatásának I. része. *Konkoly Miklóstól.* — V. Megfigyelések a herényi astrophysikai observatoriumon 1883-ban. (Két táblával.) *Gothard Jenőtől.* — VI. A Pons-Brooks üstökös spectroscopicus megfigyelése a herényi astrophysikai observatoriumon. (Két táblával.) *Gothard Jenőtől.* — VII. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagdán 1883-ban. *Konkoly Miklóstól.* — VIII. Előleges vizsgálatok néhány szénhydrogén-gáz spectrumán, spectroscoppal és spectralphotometerrel. (3 táblával s 2 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — IX. Adatok Bolyai Farkas életrajzához. *Szily Kálmántól.* — X. A herényi astrophysikai observatorium sarkmagasságának meghatározása. *Gothard Jenőtől.*

Tizenkettedik kötet.

I. A napfoltok és a nap felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagvizsgálón 1884-ben. (1 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — II. Astrophysikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 1884-ben. (4 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — III. Az 1884. évi megfigyelések a herényi astrophysikai observatoriumon. (2 ábra és 3 táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IV. Hulló-csillagok megfigyelése a m. korona területén 1884-ben. 26 radiatio ponttal. *Konkoly Miklóstól.* — V. 615 állócsillag spectruma. *Konkoly Miklóstól.* — VI. A napfoltok gyakoriassága 1872-től 1884 végéig. (2 kőnyomatu táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VII. Adatok Jupiter physikájához. (2 táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VIII. Tanulmányok az égitestek photographálása terén. (1 táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IX. A Haynald-observatoriumban 1880—1884-ben megfigyelt napfoltok. *Hüninger Adolftól.* — X. Az 1873. VII. sz. Coggia-Winnecke-féle üstökös pályaszámitása. *Schulhof Lipóttól.* — XI. A folytonos spectrumok elmélete. *Kövesligethi Radótól.*

Tizenharmadik kötet.

I. A földnehézség meghatározása Budapesten 1885-ben (4 táblával). *Gruber Lajostól.* — II. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1885-ben. *Konkoly Miklóstól.* — III. 855 állócsillag spectruma. *Konkoly Miklóstól.*

Tizennegyedik kötet.

I. A dinamika alapegyenleteinek jelentéséről. *Kőnig Gyulától.*

FRANKLIN-TARSULAT NYOMDÁJA.