tanulmányok 181/1986

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

KÖR APPROXIMÁCIÓJA A SZÁMITÓGÉPES GEOMETRIAI TERVEZÉSBEN

Renner Gábor

Tanulmányok 181/1986

A kiadásért felelős:

Dr. KEVICZKY LÁSZLÓ

Főosztályvezető:

Dr. NEMES LÁSZLÓ

ISBN 963 311 210 9

ISSN 0237-0131

TARTALOMJEGYZÉK

oldal

1. BEVEZETÉS 5

2. Körközelités köriven elhelyezkedő pontokkal . . 8

2.1 Bèzier-módszer 8

2.2 B-spline módszer 13

2.3 R-P módszer 18

3. Optimális körközelitések 24

3.1 A tipusu körközelités 24

3.2 B tipusu körközelités 31

3.3 C tipusu körközelités 34

4. Optimális körközelitések reprezentációi 40

4.1 Bèzier reprezentáció 40

4.2 B-spline reprezentáció 42

4.3 R-P reprezentáció 43

5. Körközelitő módszerek összehasonlitása 46

Irodalomjegyzék 51

Táblázatok 53

1. BEVEZETÉS

A számitástechnika alkalmazásának kezdeti időszakára elsősorban a nagymennyiségü információ tárolását, feldolgozását, visszakeresését igénylő adatfeldolgozás volt jellemző. Anélkül, hogy e terület veszitett volna jelentőségéből, az utóbbi időben kifejlődött és egyre nagyobb jelentőségre tesz szert egy másik terület is; számitástechnikai eszközök és módszerek igénybevétele müszaki tervezési feladatok megoldására. Létrejött egy viszonylag önálló és körülhatárolt diszciplina: CAD = Computer Aided Design, amely a számitógépes tervezés elméleti, müszaki, számitástechnikai problémáival, számitógépes tervező rendszerek felépitésével, tervezésével és létrehozásával foglalkozik. A fejlődés eredményeképpen a magas számitástechnikai kulturáju országokban hatékony számitógépes tervező rendszerek állnak a mindennapi tervezői gyakorlat szolgálatában. Élen járnak e tekintetben azok az iparágak, ahol nagymennyiségü tervezői munka gyors elvégzését követelik meg piaci, eszközkihasználási, stb. szempontok, mint pl. a jármükarosszéria-tervezés, NC megmunkálás tervezése esetében.

A számitógépes tervezés összetett témakörén belül elhatárolható a számitógépes geometriai tervezés kérdésköre, amely a tervezendő müszaki objektum geometriai viszonyainak reprezentálására szolgáló matematikai módszerekkel és azok számitógépes megvalósitásával foglalkozik. Egyszerü és bonyolult tervezőrendszereknek egyaránt szerves része a geometriai leirás, amely többek között geometriai leiró nyelvben, geometriai adatbázisban, geometriai modellben, geometriai modulokban ölt testet. Az elsőként kidolgozott rendszereket és a bennük realizált nyelveket - APT, EXAPT, FORTAP - az egyszerübb, de a mérnöki gyakorlatban igen sokszor előforduló felületek (sik, henger, kup, gömb) leirására dolgozták ki. E felületek természetesen egyszerü sikgörbékből: egyenes szakasz, köriv hozhatók létre.

Az utóbbi években felmerült az igény olyan rendszerek megvalósitására, amelyekkel a hagyományostól eltérő, változatos geometriáju, bonyolult felületeket lehet tervezni és megmunkálni. E "szoborszerü" vagy "szabadformáju" felületek (sculptured surfaces, free-form surfaces) és a megfelelő, bonyolult térbeli görbék leirására uj matematikai módszereket dolgoztak ki, és fejlesztenek manapság is. A cél olyan eljárásokat adni a tervező kezébe amelyekkel a kivánt felületalakot-pl. jármükarosszéria, hajótest, turbinalapát, présszerszám felületei- egyszerüen tudja előállitani, módositani, transzformálni, stb.

Ugyanakkor mivel az összes geometriai jellegü müveletet számitógép végzi, e módszereknek számitógépen jól reprezentálhatóknak kell lenniük. A görbéket és a felületeket definiáló geometriai információkat egyszerüen és reális keretek között kell tárolni, ugyanakkor rugalmas lehetőséget kell biztositani az interaktiv tervezést lehetővé tevő változtatásokra. Szükség van különféle felületjellemzők (érintők, normálisok, metszetek, vetületek) gyors számitására, valamint felületek és felületelemek grafikus eszközökön való megjelenitésére.

A fejlődés eredményeként sajátos helyzet állt elő. Léteznek módszerek és rendszerek, amelyekkel az igen gyakori hagyományos és egyszerü felületek kezelhetők, és léteznek egyre hatékonyabb módszerek és rendszerek bonyolult szoborszerü felületek leirására. Ez utóbbiakkal azonban az egyszerü görbék és felületek előállitása nehézséget jelent. Különösen is jelentkezik a nehézség a köriv és az abból generált felületek vonatkozásában, mivel a szabadformáju görbék és felületek leirására szolgáló általánosan elterjedt módszerekkel a kör nem állitható elő egzakt módon.

Ugyanakkor kiderült, hogy az általában szoborszerünek minősülő alkatrész-felületek is tartalmaznak - ha sokszor jelentéktelen mértékben is - egyszerü felületeket, amelyek a szoborfelületekkel együtt egységes egészt alkotnak (pl. csatlakozófelületek, peremek, lekerekitések, stb.). Kivánatos ezért, hogy az egész alkatrész tervezése egységes koncepció szerint, egy rendszeren belül történjék, és a szabadformáju geometriai elemek leirására szolgáló módszereket alkalmassá tegyük egyszerü geometriai formák előállitására vagy közelitésére.

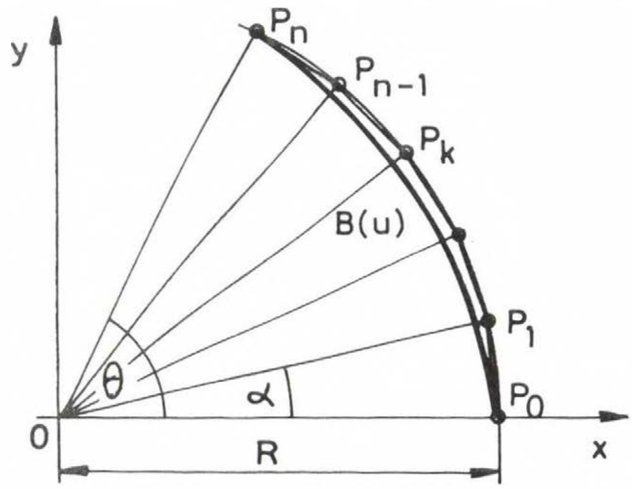
Tanulmányunkban a kör szabadformáju görbékkel való közelitésének különböző lehetőségeit vizsgáljuk meg. Először köriven elhelyezkedő kiinduló pontokat veszünk alapul és kiszámitjuk a különböző interpolációs módszerekkel adódó görbe körtől való maximális eltérését. Ezután tárgyaljuk az optimális körközelitést ami azonban csak a középponttól különböző távolságban levő pontok felhasználásával hozható létre. Végül összehasonlitjuk a különböző kör-közelitési módokat.

2. KÖRKÖZELITÉS KÖRIVEN ELHELYEZKEDŐ PONTOKKAL

Tervezési szempontból a teljes kör vagy köriv-darab létrehozásának egyszerü módja, ha megadjuk a köriv néhány pontját, és ezeket a tervező-rendszerben rendelkezésre álló és görbék előállitására szolgáló módszerek (interpoláció, approximáció) bemenő adataként tekintjük. A számitógépes görbetervezésre javasolt módszerek közül a racionális törtfüggvények használata lehetőséget ad a kör egzakt előállitására az előbbi bemenő adatok mellett. E módszer azonban nem tudott széleskörüen elterjedni a többi módszerhez viszonyitott bonyolultsága miatt. A használatban levő módszerek esetében viszont a kapott görbe eltér a körtől. A következőkben megadjuk ezen eltérés maximumát a legfontosabb módszerekre. Látni fogjuk, hogy a köriv jobb közelitését érhetjük el, ha a kiinduló pontokat az eredetitől eltérő sugaru köriven helyezzük el.

2.1. BÈZIER-MÓDSZER

Az 1. ábrán látható R sugaru körivet a P_o és P_n pontok között - melynek nyilásszöge Θ - közelitsük n-edfoku Bèzier görbével. Vegyük fel ehhez a P_1, P_2 ... P_{n-1} pontokat egyenletes osztásban az $r=R$ sugaru köriv menetén. Két szomszédos pont szögtávolsága (α) és a k-adik pont koordinátái (1. ábra):



$$\alpha = \frac{\Theta}{n}$$

P_k: $(r\cos k\alpha;\ r\sin k\alpha)$
$0 \le k \le n$

1. ábra

Tekintsük az x-y sikot a komplex számsiknak, és irjuk fel a $P_o, P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontokhoz tartozó (az ezen pontokon átmenő hurpoligont approximáló) Bézier görbét [1].

$$(1) \qquad B(u) = \sum_{k=0}^{n} \phi_k(u) P_k = \sum_{k=0}^{n} \phi_k(u)(r\cos k\alpha + jr\sin k\alpha) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \phi_k(u) r e^{jk\alpha}$$

ahol a

$$(2) \qquad \phi_k(u) = \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k}$$

Bézier sulyfüggvények az u görbementi paraméternek n-edfoku függvényei és $0 \leq u \leq 1$. A Bézier-görbék tulajdonságaiból következik [1], hogy a közelitő görbe átmegy a hurpoligon kezdő és végpontján (P_o, ill. P_n) és itt érintője az első, ill. utolsó hur irányába esik ($P_o P_1$ ill. $P_{n-1} P_n$). A pontok számának ($n+1$) növelésével a görbe egyre jobban megközeliti az n oldalu poligont, és igy magát a körivet is.

A továbbiakban kiszámitjuk a Bézier-görbe és a kör eltérésének maximumát. E maximum helyét, tehát ahol az

$$(3) \qquad R - |B(u)| = r - |B(u)|$$

kifejezésnek szélsőértéke van, olyan u paraméter-értéknél kapjuk, amelyre:

$$(4) \qquad \frac{\partial |B(u)|}{\partial u} = 0$$

Másrészt viszont mivel $B(u) = |B(u)| e^{j\varphi(u)}$, mindig fennáll a következő összefüggés:

$$\frac{\partial B(u)}{\partial u} = \frac{\partial |B(u)|}{\partial u} e^{j\varphi(u)} + |B(u)| j e^{j\varphi(u)} \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u}$$

Figyelembevéve itt a (4) feltételt, a szélsőérték helyére fennáll:

$$\frac{\partial B(u)}{\partial u} = jB(u)\,\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u} \tag{5}$$

A $\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u}$ mennyiség bármely u-ra valós szám. Az (5) egyenlet tehát azt mondja ki, hogy a szélsőérték helyén a görbeponthoz mutató komplex vektor és a paraméter szerinti derivált vektor (a görbe érintője) merőleges egymásra.

A közelitő Bézier-görbe (1) egyenletébe való helyettesitéssel belátható, hogy a $B(u)$ és $B(1-u)$ pontok szimmetrikus helyzetüek a Θ szög szögfelezőjére, és ennek a görbével való metszéspontja a $B(^1/_2)$ pont. Mivel itt a görbe $(n-1)$-ed rendben folytonosan megy át, a szimmetria miatt fennáll e pontban a szélsőérték helyét jelentő merőlegességi reláció. Valóban az $u=\frac{1}{2}$ paraméterértéknél:

$$B(u) = r\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n e^{jn\frac{\alpha}{2}} \tag{6}$$

$$\frac{\partial B}{\partial u} = 2rnj\ tg\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n e^{jn\frac{\alpha}{2}}$$

vagyis e helyen

$$\frac{\partial B}{\partial u} = j2n\ tg\frac{\alpha}{2}\,B(u)$$

ami a sugárirányu és az érintőirányu vektorok merőlegességét jelenti. Behelyettesitéssel meggyőződhetünk róla, hogy a (3) kifejezés u paraméter szerinti második deriváltja az $u = \frac{1}{2}$ helyen negativ, tehát a szélsőérték valóban maximum.

Ezek után felirhatjuk a Bézier-görbe és a kör maximális (sugárirányu) eltérésének kifejezését

$$H = R - \left|B\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| \tag{7}$$

és a (6) egyenletet felhasználva ($r=R$)

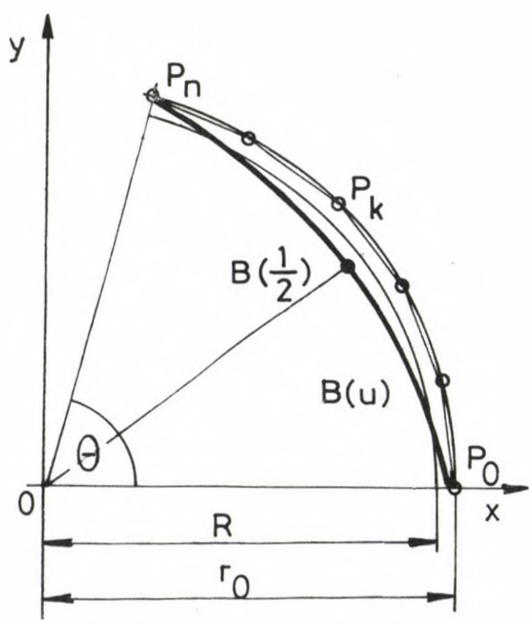
$$H = R\,[1-(\cos\frac{\alpha}{2})^n] \tag{8}$$

vagy a közeliteni kivánt köriv θ nyilásszögével kifejezve:

$$H = R\,[1-(\cos\frac{\theta}{2n})^n] \tag{9}$$

A közelités hibája láthatóan n növelésével (a P_i pontok számának növelésével) egyre csökken és $n\to\infty$ esetén zérushoz tart.

Az eddig vizsgált és az 1. ábrán bemutatott helyzetben a közelitő Bézier-görbe első és utolsó pontja a köriven helyezkedik el, de egyébként a görbe mindenütt a körön belül halad. Egyenletesebb hibaeloszlást és kisebb abszolut hibát kaphatunk, ha a közeliteni kivánt kör R sugaránál nagyobb sugáron (r) helyezzük el a P_i Bézier-pontokat (2. ábra)..



2. ábra

Ilymódon az eredetileg zérus értékü hiba az $u=0$ és $u=1$ pontokban nőni fog, az eredetileg maximális hiba az $u=\frac{1}{2}$ pontban pedig csökken. E hibák az r sugártól lineárisan függenek, és az optimális helyzetet $(r=r_o)$ ott kapjuk ahol

(10) $$|B(0)|-R = R-|B(\tfrac{1}{2})|$$

A $|B(0)|=r_o$ értéket, valamint a $|B(\frac{1}{2})|=r_o(\cos\frac{\alpha}{2})^n$ értéket felhasználva (10)-ből kapjuk:

(11) $$r_o = \frac{2R}{1+(\cos\frac{\alpha}{2})^n}$$

illetve a Θ középponti szöggel kifejezve:

(12) $$r_o = \frac{2R}{1+(\cos\frac{\Theta}{2n})^n}$$

E képletek tehát megadják azt az r_o sugarat, amelyen el kell helyezni az $n+1$ Bézier pontot egy Θ középponti-szögü, R sugaru köriv optimális közelitéséhez. A közelités hibája ez esetben

(13) $$H_o = r_o-R = \frac{1-\cos(\frac{\Theta}{2n})^n}{1+\cos(\frac{\Theta}{2n})^n}\,R$$

lesz, vagyis a maximális hiba

(14) $$\frac{H_o}{H} = \frac{1}{1+(\cos\frac{\Theta}{2n})^n}$$

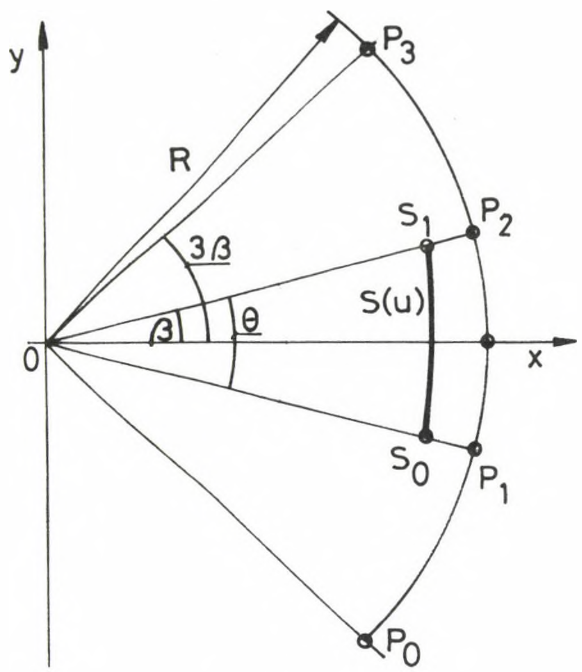
arányban csökkenthető.

A körközelités Bézier-görbékkel elérhető pontosságának numerikus értékeit az 1. és 2. táblázatban foglaltuk össze. Az 1. táblázat (55. oldal) egység sugaru körön elhelyezkedő Bézier-pontokkal számolt görbe ugyanezen körtől való maximális eltéréseit (a H/R értékeket) adja meg, mig a 2. táblázatban (56-58. odalak) a (11) képlettel korrigált esetre vonatkozó eltéréseket tüntettük fel. Mindkét táblázatban a polinomok fokszáma $n=1$ és $n=10$ között változik.

2.2. B-SPLINE MÓDSZER

A görbetervezésben igen elterjedt spline módszer esetében egymáshoz előirt folytonossági rendben csatlakozó görbeszakaszokból állitjuk elő a kivánt görbealakot. E görbeszakaszokat a legtöbbször a görbeparaméter polinomjaiként állitjuk elő. A müszaki gyakorlatban és a számitógépes geometriai tervezésben majdnem kizárólagosan harmadfoku polinomokat használnak; tanulmányunkban mi is ezt az esetet vizsgáljuk. Harmadfoku polinomokból álló spline görbe másodrendben (és igy görbületben is) folytonos a görbeszakaszok találkozási pontjában, és harmadrendben a görbeszakaszokon belül. Mig ez általában messzemenően kielégiti a müszaki-esztétikai követelményeket, a magasabbrendü polinomok oszcillációra hajlamosak.

Lokális görbeleirást valósit meg a B-spline reprezentáció [2]. Egy harmadfoku B-spline görbeivet négy támpont határoz meg: kör közelitéséhez helyezzük el ezeket egy r sugaru kör mentén egymástól egyenletes távolságban és szimmetrikusan az x tengelyre, (3. ábra). Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor a támpontokat a közeliteni kivánt köriven helyezzük el és ennek megfelelően $r=R$ (3. ábra). A B-spline görbe nem megy át a támpontokon, de belül halad a támpontok által meghatározott konvex poligonon.



3. ábra

Az ábra jelöléseivel a P_o P_1 P_2 P_3 pontok koordinátái:

$$
\begin{array}{llll}
 & & x & y \\
 & P_o: & (r\cos 3\beta; & -r\sin 3\beta) \\
(15) & P_1: & (r\cos\beta\,; & -r\sin\beta) \\
 & P_2: & (r\cos\beta\,; & r\sin\beta) \\
 & P_3: & (r\cos 3\beta; & r\sin 3\beta)
\end{array}
$$

A közelitő görbe mentén az u görbeparaméter a $0\leq u\leq 1$ tartományban változik, és az $u=0$ paraméterü pont ($S_o=S(0)$) rajta van az OP_1 sugáron, az $u=1$ paraméterü pont ($S_1=S(1)$) pedig az OP_2 sugáron [2]. Tekintsük tehát a B-spline görbét a $\Theta=2\beta$ középponti szögü és R sugaru körív közelitésének (3. ábra). Ha ujabb körívet akarunk a meglévőhöz csatlakoztatni, elegendő egyetlen ujabb támpontot (P_4) felvenni, és a P_1 P_2 P_3 P_4 pontok által generált körív a meglévőhöz érintő-és görbületfolytonosan fog csatlakozni.

A P_o,P_1,P_2,P_3 pontok által definiált harmadfoku B-spline görbe paraméteres egyenlete [3]:

(16) $$S(u)=\frac{1}{6}\,[u^3 u^2 u 1]\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_0\\ P_1\\ P_2\\ P_3\end{bmatrix}$$

Felhasználva itt a (15) alatti pontkoordinátákat, valamint elvégezve a mátrixmüveleteket, az $S(u)= s_x(u)\bar{i}+s_y(u)\bar{j}$ koordinátafüggvényekre a következőket kapjuk:

(17) $$s_x(u) = r[(\cos 3\beta-\cos\beta)\frac{u^2}{2}+(\cos\beta-\cos 3\beta)\frac{u}{2}+\frac{1}{6}(\cos 3\beta+5\cos\beta)]$$

(18) $$s_y(u) = r[(\frac{1}{3}\sin 3\beta-\sin\beta)u^3 + (3\sin\beta-\sin 3\beta)\frac{u^2}{2} + $$
$$+ (\sin 3\beta+\sin\beta)\frac{u}{2} - \frac{1}{6}(\sin 3\beta+3\sin\beta)]$$

Egyszerü helyettesitéssel meggyőződhetünk róla, hogy

$$s_x(1-u) = s_x(u) \qquad \text{és}$$
$$s_y(1-u) = -s_y(u)$$

vagyis a B-spline görbeiv szimmetrikus az $u=\frac{1}{2}$ pontra és az x tengelyre miként a kör is. Továbbá a kör és a B-spline görbe maximális eltéréseit ott kapjuk, ahol a

(19) $$\sqrt{s_x^2(u) + s_y^2(u)} - R$$

kifejezésnek maximuma van, azaz u szerinti deriváltja zérussal egyenlő. Elvégezve a deriválást kapjuk:

(20) $$F(u) = s_x(u)\frac{\partial s_x(u)}{\partial u} + s_y(u)\frac{\partial s_y(u)}{\partial u} = 0$$

Mivel azonban a (20) kifejezés éppen az $s_x\bar{i}+s_y\bar{j}$ sugárirányu vektor és a $\frac{\partial s_x(u)}{\partial(u)}\,\bar{i} + \frac{\partial s_y(u)}{\partial(u)}\,\bar{j}$ érintőirányu vektor skaláris szorzata, az eltérések szélső értéke ott van, ahol e két vektor merőleges egymásra. Figyelembe véve a fenti szimmetriarelációkat, valamint azt, hogy további görbeivek egymáshoz illesztése esetén a teljes B-spline görbe a rajzon látható görbedarab periódikus ismétléseiből áll, miközben a csatlakozásoknál a második deriváltig folytonos átmenet van, a fenti merőlegességi reláció fennáll az $u=0$, $u=\frac{1}{2}$ és $u=1$ pontokban. (Erről behelyettesitéssel is könnyen meggyőződhetünk). Másrészt a (20) feltételi egyenletben $F(u)$ láthatóan u-ban ötödfoku, ezért legfeljebb öt különböző valós gyöke lehet. A második fejezetben közlünk egy módszert, amely $F(u)$ $0\leq u\leq 1$ intervallumba eső esetleges további gyökeinek kimutatására szolgál. E módszerrel végzett vizsgálatunk (amit terjedelmi okokból itt nem részletezünk) negativ eredménnyel zárul, tehát a B-spline görbe és a kör közötti eltérés szélsőértékeit a görbe végpontjaiban és a középpontban kapjuk ($u=0$, $u=\frac{1}{2}$, $u=1$).

Behelyettesitéssel és trigonometriai azonosságok felhasználásával igazolhatjuk, hogy $|S(0)|=|S(1)|$, valamint

(21) $$|S(0)| = \frac{r}{3}(2+\cos 2\beta)$$

(22) $$|S(\tfrac{1}{2})| = \frac{r}{6}[\cos\beta\ (5+\cos^2\beta)]$$

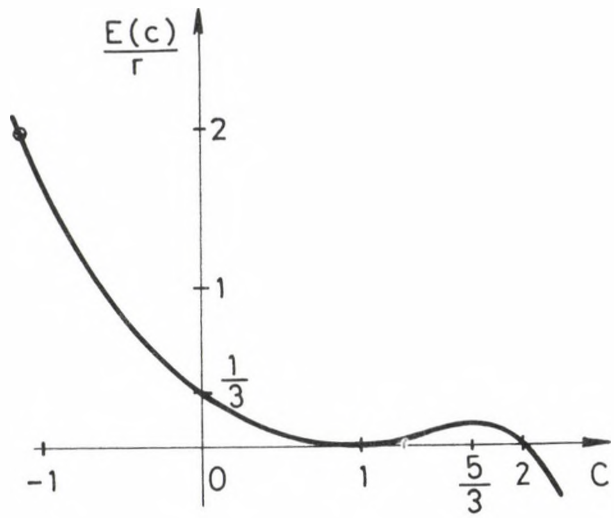
Ha e képletekbe esetünknek megfelelően $r=R$-et irunk, láthatjuk, hogy mindkét érték kisebb R-nél vagyis a közelitő görbe az R sugaru körön belül halad. Képezzük továbbá az

$$E(\beta) = |S(0)| - |S(\tfrac{1}{2})|$$

függvényt. A (21) és (22) képletek felhasználásával, valamint $\cos\beta=c$-t helyettesitve:

$$E(c) = \frac{r}{6}(-c^3+4c^2-5c+2).$$

Függvényanalizissel meggyőződhetünk róla, hogy $E(c)$ alakja a 4. ábrán rajzoltnak megfelelő (zérushelyek a $c=1$, $c=2$ helyeken, szélsőértékek a $c=1$, $c=\frac{5}{3}$ helyeken).



4. ábra

Mivel $c=\cos\beta$-ra $-1\leq c\leq 1$ és e tartományban $E(c)\geq 0$, tehát levonhatjuk a következtetést, hogy $|S(0)|\geq|S(\frac{1}{2})|$ bármilyen β szögre. Ez egyuttal azt is jelenti, hogy a spline görbe körtől való legnagyobb eltérését az $u=\frac{1}{2}$ pontban kapjuk:

$$(23)\qquad H = R-|S(\tfrac{1}{2})| = R\,\frac{6-5\cos\beta-\cos^3\beta}{6}$$

vagy pedig a köriv Θ középponti szögével kifejezve:

$$(24)\qquad H = R\,[1-\cos\tfrac{\Theta}{2}\,(\frac{\cos\Theta+11}{12})]$$

A (23), (24) képletek megadják a hibafüggvény maximumát. Szélsőértéke van a hibafüggvénynek az $u=0$ és $u=1$ helyen is, az előzőek alapján ez minimumpont. A spline görbe eltérése a körtől ez utóbbi pontokban azonos értékü, és az $u=\frac{1}{2}$ pontbeli maximális eltéréssel azonos értelmü (előjelü). Ha tehát elvetjük azt a (legegyszerübb) kiinduló feltételt, hogy a görbét definiáló támpontok a közeliteni kivánt R sugaru köriven legyenek, jobb közelitést kaphatunk. Ennek feltétele:

$$|S(0)|-R = R-|S(\tfrac{1}{2})|$$

Felhasználva itt a (21), (22) képleteket, megkapjuk azt az optimális sugarat, amelyen el kell helyezni a B-spline görbét definiáló pontokat az R sugaru körív jobb közelitéséhez:

(25) $$r_o = \frac{12R}{\cos^3\beta+4\cos^2\beta+5\cos\beta+2}$$

illetve a többszörös szögekkel kifejezve.

(26) $$r_o = \frac{48R}{\cos 3\beta+8\cos 2\beta+23\cos\beta+16}$$

és itt $\beta=\frac{\Theta}{2}$, a körivhez tartozó középponti szög fele. A körközelités hibájára ez esetben

(27) $$H_o = R\,\frac{2-5\cos\beta+4\cos^2\beta-\cos^3\beta}{2+5\cos\beta+4\cos^2\beta+\cos^3\beta}$$

adódik. A 3. táblázatban (59. oldal) megadjuk a Θ középponti szögü, $R=1$ sugaru körív B-spline görbével való közelitésének numerikus értékeit; a maximális hibát az eredeti R sugaru köríven elhelyezkedő támpontok esetére, a jobb közelitéshez tartozó sugarat (25) ill. (26) szerint, valamint az ez esetben adódó hibát (27) szerint, és végül a H_o/H hányadost.

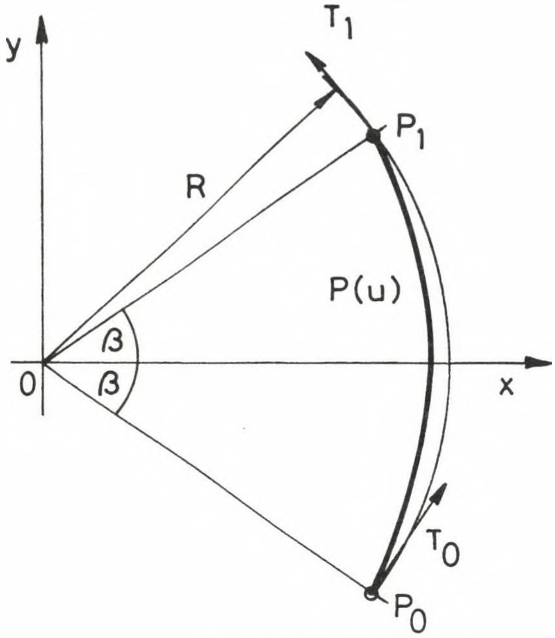
2.3. RP MÓDSZER

Az RP módszer elsősorban a gépészmérnöki tervezői gyakorlatban előforduló görbék interpolációjára lett kidolgozva. E görbék jellemzője, hogy váltakozva tartalmazhatnak egyszerü görbealakokat (egyenes, kör) és változatos geometriáju un. szabadformáju görbeszakaszokat. E görbeszakaszok folytonos érintővel csatlakoznak egymáshoz, a görbületbeli folytonosságot azonban általában nem követeljük meg (már pl. egy egyenes és egy körív csatlakozása sem elégiti ki). Ilyen jellegü görbék interpolációjára előnyösen használható az RP módszer [4].

A módszer kiinduló adatként térbeli pontokat használ és az interpolált görbe átmegy e pontokon. Két adat-pont között harmadfoku polinomfüggvény irja le a görbét, és e görbeszakaszok folytonos érintővel csatlakoznak egymáshoz. Az interpoláció lokális abban az értelemben, hogy a görbe alakja egy kiválasztott pontban csak az ezen pont definiált környezetében levő adatpontok helyzetétől függ. Ilymódon egy adat-pont helyzetének változtatása a görbének csak egy jól definiált részére van befolyással. A görbe jó közelitéssel természetes paraméterezésü; a definiáló pontokban az érintővektorok egységvektorok, és a paraméter változása a görbe mentén közelitőleg az ivhosszal egyezik meg.

Az RP módszer automatikusan biztositja, hogy ha három szomszédos adatpont egy egyenesre esik, a köztük levő görbeszakaszok egyenessé redukálódnak, amelyek érintőben folytonos átmenettel csatlakoznak környezetükhöz. Az egyenes szakaszok paraméterezése lineáris [5]. Mig tehát egyenesszakaszokat egzakt módon előállithatunk az RP módszerrel, ez körre (körivre) nem mondható el; a harmadfoku, paraméteres görbe csak közeliti a körivet. A közelités pontossága attól függ, hogy a módszer milyen értékeket szolgáltat a görbeszakaszt meghatározó geometriai mennyiségekre (kezdeti és végpontbeli érintők). A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy az RP módszerrel interpolált görbe és a kör maximális eltérése hogyan függ a közeliteni kivánt köriv középponti szögétől.

Közelitsük tehát az 5. ábrán látható R sugaru és $\Theta=2\beta$ középponti szögü körivet RP görbével (5. ábra), és vegyük fel az interpoláció alap-pontjait először az R sugaru körön ($r=R$).



5. ábra

Az *RP* görbedarabot a P_o, P_1 végpontok, e pontokban az érintővektorok (T_o, T_1) valamint az U paraméterintervallum egyértelmüen meghatározza [4] (a P_o pontban $u=0$; P_1 pontban $u=U$). Figyelembe véve, hogy az RP módszer esetén az érintővektorok a görbét definiáló pontokban egységvektorok, a kezdő és végpontban a pontkoordináták és az érintővektor komponensei;

$$
\begin{aligned}
&P_o: (r\cos\beta;\ -r\sin\beta)\\
&P_1: (r\cos\beta;\ r\sin\beta)\\
&T_o: (\sin\beta;\ \cos\beta)\\
&T_1: (-\sin\beta;\ \cos\beta)
\end{aligned}
\tag{28}
$$

A (28) feltételeket kielégitő harmadfoku paraméteres görbe egyenlete (figyelembe véve hogy $0 \leq u \leq U$):

$$P(u) = p_x(u)\bar{i} + p_y(u)\bar{j}$$

ahol

$$p_x(u) = -\frac{\sin\beta}{U}u^2 + \sin\beta\, u + r\cos\beta \tag{29}$$

$$p_y(u) = [\frac{2U\cos\beta - 4r\sin\beta}{U^3}u^3 + \frac{6r\sin\beta - 3U\cos\beta}{U^2}u^2 +$$

$$+ u\cos\beta - r\sin\beta]$$

A kvázi-természetes paraméterezést biztositó U paraméterintervallum az RP módszer szerint a következő összefüggésekből határozható meg [4]:

$$U = \frac{3}{A}(\sqrt{B^2+2AC}-B) \tag{30}$$

ahol

$$A = 7 - T_o T_1$$

$$B = \Delta P(T_o+T_1)$$

$$C = (\Delta P)^2$$

és $\Delta P = P_1 - P_o$.

Ha most a (29) összefüggésbe behelyettesitjük (28)-ból a görbeivet definiáló adatokat, a paraméter-intervallum hosszára a következő összefüggést kapjuk:

$$U = \frac{6\sin\beta}{2+\cos\beta} r \tag{31}$$

Ezzel tehát az összes adat, amely a kört közelitő RP görbeivet meghatározza, β függvényében ismert.

A továbbiakban az RP görbe és a köriv maximális eltérésének a kiszámitásával foglalkozunk. E maximum helyén az

$$R - |P(u)| = R - \sqrt{p_x^2(u) + p_y^2(u)}$$

kifejezésnek szélsőértéke van, aminek szükséges feltétele az

$$F(u) = p_x(u)\frac{\partial p_x(u)}{\partial u} + p_y(u)\frac{\partial p_y(u)}{\partial u}$$

függvény zérus volta. A jobboldalon azonban az u paraméterü görbeponthoz mutató sugárirányu vektor: $P(u)=p_x\bar{i}+p_y\bar{j}$ és az ezen pontbeli érintővektor skaláris szorzata szerepel. Az említett szélsőérték tehát ott lép fel, ahol e két vektor merőleges egymásra. Nyilvánvalóan fennáll e merőlegességi reláció a görbeiv kezdő és végpontjában ($u=0$; $u=U$). Fennáll továbbá még az $u=\frac{U}{2}$ paraméterü pontban, a görbeiv és az x tengely metszéspontjában is. Erről részint behelyettesitéssel, részint közvetlen szemlélet utján a görbe szimmetriáját tekintve is meggyőződhetünk. Ugyanakkor a második fejezetben közölt módszert a jelen esetre alkalmazva könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az $F(u)$ függvénynek nincs további gyökhelye a $0\leq u\leq U$ tartományban. Az RP görbe és a köriv eltéréseinek szélsőértékét tehát az $u=0$, $u=\frac{U}{2}$, $u=U$ paraméterü pontokban kapjuk.

A kezdő és végpontban ($u=0$, $u=U$) az eltérések értéke $r=R$ esetén nyilvánvalóan zérus (egyuttal az eltérésfüggvénynek minimuma van). A két görbe eltérésének maximuma tehát az $u=\frac{U}{2}$ pontban adódik.

$$H = R-\left|P\left(\frac{U}{2}\right)\right|$$

Felhasználva a (29) alatti koordináta-függvényeket valamint (31)-et, az RP görbékkel való körközelités hibájára a következő képletet kapjuk:

$$H = \frac{(1-\cos\beta)^2}{4+2\cos\beta}R \tag{32}$$

és itt $\beta=\frac{\Theta}{2}$, a köriv fél középponti szöge.

Az R sugaru körivet közelitő RP görbe zérus hibával adja vissza a köriv kezdő és végpontját, illetve itt az érintőket, a körtől való maximális eltérést pedig az $u=\frac{U}{2}$ pontban (a görbe szimmetriapontjában) (32) szerint számithatjuk. A képletből láthatóan a hiba bármely középponti szögre pozitiv, tehát az RP

görbe mindig a köriven belül halad.

Ha eltekintünk a végpontokbeli egzakt körinterpolációtól és megnöveljük az interpoláció alappontjainak sugarát (r_o), kisebb hibát is kaphatunk. Ennek feltétele:

(33) $$|P(o)|-R = R-|P(\tfrac{U}{2})|$$

Használjuk fel itt a (29),(30),(31) egyenleteket, és vegyük figyelembe, hogy az alappontok sugara most r_o (e képletekben r helyébe r_o kerül). Ilymódon egy egyenletet kapunk r_o-ra, melynek megoldása:

(34) $$r_o = \frac{8+4\cos\beta}{6+6\cos\beta+\sin^2\beta} R$$

Ezen $r_o>R$ esetén tehát a kezdő és végpontban fellépő hiba egyenlő abszolut étékü lesz a görbe középpontjában fellépő hibával. E hibára

(35) $$H_o = r_o-R = \frac{(1-\cos\beta)^2}{6(1+\cos\beta)+\sin^2\beta} R$$

vagyis az eredeti helyzethez képest

(36) $$\frac{H_o}{H} = \frac{4+2\cos\beta}{6+6\cos\beta+\sin^2\beta}$$

mértékben csökkent a körközelités hibája. Mivel azonban az *RP* módszerrel való körközelités a korrekcióval elvesztette interpoláló jellegét a köriv végpontjaiban, a tervezés szempontjából itt kisebb jelentősége van e korrekciónak mint az egyéb görbetervező módszereknél.

A 4. táblázatban (60. oldal) megadjuk az *RP* módszerrel való körközelités numerikus értékeit; a maximális hibát (H) az alapesetre vonatkozóan (32) szerint, az r_o korrekciós sugarat (34), valamint a H_o hibát (35) szerint, végül pedig H_o és H arányát (36) szerint. A táblázatban szereplő értékek egység sugaru körre vonatkoznak.

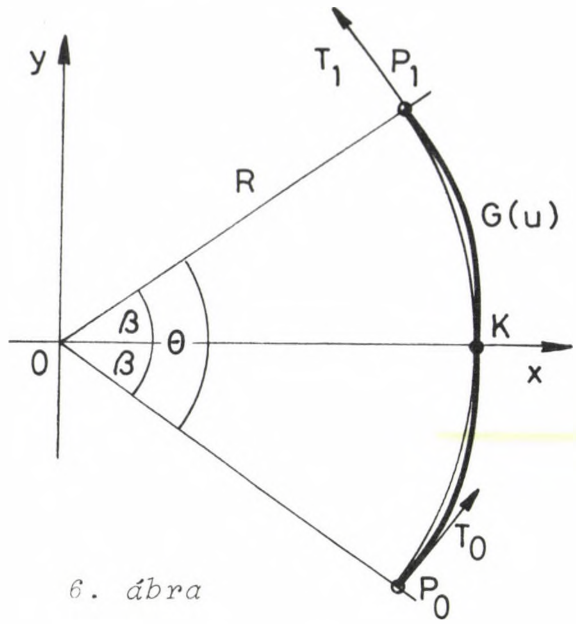
3. OPTIMÁLIS KÖRKÖZELITÉSEK

Az előző fejezetben azt a görbetervezés szempontjából legegyszerübb esetet vizsgáltuk, amikor a körivet közelitő görbét definiáló - és valamely interpolációs vagy approximációs módszer kiinduló adataként szolgáló - pontok maguk is köriven helyezkednek el. Pontosabb körközelitést kaphatunk azonban, ha e feltételtől eltekintünk, és megengedjük, hogy ezen pontok, vagy ezek némelyike különböző távolságban legyen a kör középpontjától. A 3. fejezetben ezt az esetet tesszük vizsgálat tárgyává.

Vizsgálatainkat harmadfoku paraméteres görbére végezzük. Egy ilyen görbét egyértelmüen difinálhatunk négy geometriai adattal - a két végponttal és itt az érintővektorokkal - valamint a görbeparaméter változásának intervallumával. Ez utóbbira az egyszerüség kedvéért az $u[0,1]$ intervallumot választjuk. E fejezetben megadjuk az optimális görbealakot definiáló geometriai adatokat, majd az igy adódó görbe Bézier és B-spline reprezentációjához tartozó geometriai adatokat.

3.1. A TIPUSU KÖRKÖZELITÉS

E fejezetben a körközelités következő módját vizsgáljuk: Közelitsük az R sugaru $\Theta=2\beta$ nyilásszögü körivet egy olyan harmadfoku paraméteres görbével ($G(u)$; $0\leq u\leq 1$); amely átmegy a körív kezdő és végpontján: a P_0, ill. P_1 pontokon. Határozzuk meg továbbá e pontokban az érintővektorok hosszát (t) oly módon, hogy a közelitő görbe átmenjen a köriv K szimmetriapontján is (lásd 6. ábra) [6].



6. ábra

A P_o és P_1 pontban a koordináták és az érintővektorok komponensei:

$$(37)\qquad \begin{aligned} &P_o\colon\ (R\ \cos\beta;\ -R\ \sin\beta)\\ &P_1\colon\ (R\ \cos\beta;\ \ R\ \sin\beta)\\ &T_o\colon\ (t\ \sin\beta;\ \ t\ \cos\beta)\\ &T_1\colon\ (-t\ \sin\beta\ ;\ t\ \cos\beta)\end{aligned}$$

és feladatunk a t értékének (az érintővektorok abszolut értékének) meghatározása.

Belátható, hogy a (37) feltételeket az $u=0$, ill. $u=1$ pontban kielégitő harmadfoku paraméteres görbe egyenlete:

$$G(u) = g_x(u)\bar{i} + g_y(u)\bar{j}$$

$$(38)\qquad g_x(u) = -u^2 t\ \sin\beta + ut\sin\beta + R\ \cos\beta$$

$$(39)\qquad g_y(u) = u^3(2t\cos\beta - 4R\ \sin\beta) + u^2(6R\ \sin\beta - 3t\ \cos\beta) + ut\ \cos\beta - R\ \sin\beta$$

Kiinduló feltételünk szerint a $G(u)$ közelitő görbe átmegy a kör K szimmetriapontján (6. ábra), vagyis

$$g_x(\tfrac{1}{2}) = R$$

Figyelembe véve (38)-at, e feltételből a végpontokbeli tangens-vektorok t abszolut értékére (hosszára)

$$t = \frac{4(1-\cos\beta)}{\sin\beta} R \tag{40}$$

adódik. Könnyen beláthatjuk azt is, hogy a K pontban a görbe érintőjének x-irányu komponense eltünik, tehát e közös pontban a körnek és görbének közös érintője van.

A következőkben a $G(u)$ görbe és a kör maximális eltérésének a kiszámitásával foglalkozunk. Keressük tehát a

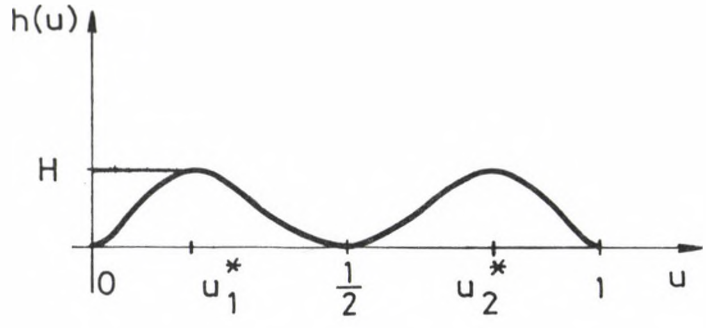
$$h(u) = |G(u)|-R = \sqrt{g_x^2(u)+g_y^2(u)} -R \tag{41}$$

függvény szélsőértékeit. A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a (41) hibafüggvény u szerinti deriváltja eltünjön, azaz

$$F(u) = \frac{dh(u)}{du} = g_x(u)\frac{\partial g_x(u)}{\partial u} + g_y(u)\frac{\partial g_y(u)}{\partial u} = 0 \tag{42}$$

legyen. Itt azonban felismerhetjük a $g(u)=g_x(u)\bar{i}+g_y(u)\bar{j}$ sugárirányu vektor és a $\frac{\partial g_x(u)}{\partial u}\bar{i} + \frac{\partial g_y(u)}{\partial u}\bar{j}$ érintővektor skaláris szorzatát. Ennek zérus volta a két vektor egymásra merőleges helyzetét jelenti.

Szélsőérték feltételünk nyilvánvalóan teljesül az $u=0$, $u=\frac{1}{2}$, $u=1$ pontokban; itt a hiba értéke egyuttal zérus. Másrészt az $F(u)$ függvény u-ban ötödfoku függvény, igy öt különböző zérushelye lehet. (A $h(u)$ hibafüggvény alakját a 7. ábrán láthatjuk.) A továbbiakban a még hiányzó két zérushely meghatározásával foglalkozunk.



7. ábra

Közvetlen geometriai szemlélettel és behelyettesitéssel is beláthatjuk, hogy a $G(u)$ görbe a $0\leq u\leq 1$ intervallumban szimmetrikus az x-tengelyre, és mivel az x tengellyel való metszéspontban (K) $u_k = \frac{1}{2}$; következésképpen:

$$g_x(u) = g_x(1-u)$$

$$g_y(u) = -g_y(1-u)$$

Mivel a kör is ugyanilyen szimmetriatulajdonságot mutat, a kettő különbségeként előálló $h(u)$ hibafüggvény is szimmetrikus $u=\frac{1}{2}$-re. Ebből következik, hogy a két hiányzó szélsőértékponthoz tartozó u érték $\frac{1}{2}$-től való eltérése azonos abszolut értékü.

Másrészt azonban az $F(u)$ ötödfoku függvény az előzőek alapján felbontható a következő gyöktényezős alakra:

(43) $$F(u) = u(u-1)(u-\tfrac{1}{2})M(u) = N(u)M(u)$$

ahol $M(u)$ másodfoku függvény és gyöke a két hiányzó szélsőértékponthoz tartozó u érték. ($u^*_{1,2}$). Vegyük fel $M(u)$-t az

(44) $$M(u) = m_2u^2 + m_1u + m_o$$

alakban. Mivel gyökei szimmetrikus helyzetüek $u=\frac{1}{2}$-re, maga az $M(u)$ függvény is hasonló szimmetriát mutat:

$$M(1-u) = M(u)$$

E feltételből

$$m_1 = -m_2$$

adódik, vagyis (44) egyszerübben is irható

$$M(u) = m_2u^2 \mp m_2u + m_o$$

A keresett gyökök tehát:

$$u^*_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1-4\frac{m_o}{m_2}} \tag{45}$$

A szimmetria miatt a továbbiakban csak u^*_1-al foglalkozunk, és ezt u^*-al jelöljük.

Tételezzük fel továbbá, hogy ismerjük $M(u)$ értékét az $u=0$ helyen: $M(o) = M_o$ és az $u=\frac{1}{2}$ helyen: $M(^1/_2)=M_{1/2}$.

Ezekkel a (45)-ben szereplő $\frac{m_o}{m_2}$ hányados kifejezhető.

$$\frac{m_o}{m_2} = \frac{M_o}{4(M_o-M_{1/2})}$$

és ezt u^* képletébe irva:

$$u^* = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M_{1/2}}{M_{1/2}-M_o}} \tag{46}$$

Az $M(u)$ függvény értékei általában megkaphatók az

$$M(u) = \frac{F(u)}{N(u)}$$

alakban. Speciálisan az $u=0$, és $u=\frac{1}{2}$ az $F(u)$ és $N(u)$ függvények gyökhelyei, igy itt a l'Hopital szabályt kell alkalmazni. Az $u=0$ helyen:

(47) $$M(u) = \lim_{u\to 0} \frac{F(u)}{N(u)} = \lim_{u\to 0} \frac{\frac{\partial F(u)}{\partial u}}{\frac{\partial N(u)}{\partial u}} = \lim_{u\to 0} \frac{F'(u)}{N'(u)}$$

és hasonlóképpen $u=\frac{1}{2}$-re is. (Az u-szerinti deriváltat itt és a továbbiakban '-vel jelöljük). Figyelembe véve, hogy

$$N(u) = u(u-1)(u-\frac{1}{2}) = u^3 - \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}u$$

$$N'(u) = 3u^2 - 3u + \frac{1}{2}$$

a keresett derivált-értékek:

$$N'(0) = \frac{1}{2} ; \qquad N'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$$

Ezek felhasználásával (47) szerint

$$M(0) = 2F'(0) ; \quad M(\frac{1}{2}) = -4F'(\frac{1}{2})$$

majd ezt u^* (46) alatti képletébe helyettesitve:

(48) $$u^* = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2F'(1/2)}{2F'(1/2)+F'(0)}}$$

A (48) képletben szereplő $F'(u)$ értékeket $F(u)$ (42)-ben felirt alakjának u-szerinti deriválásával kapjuk:

(49) $$F'(u) = \frac{dF}{du} = \frac{d}{du}\left(g_x \frac{\partial g_x}{\partial u} + g_y \frac{\partial g_y}{\partial u}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial g_x}{\partial u}\right)^2 + g_x \frac{\partial^2 g_x}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial g_y}{\partial u}\right)^2 + g_y \frac{\partial^2 g_y}{\partial u^2}$$

A (48),(49) képletek igen általánosak. Segitségükkel megitélhetjük a harmadfoku, végpontokban érintőleges körközelitések hibafüggvényeinek alakját; eldönthetjük, hogy felvesz-e a hibafüggvény szélsőértéket a végpontokon és a felezőponton kivül és hol? Ehhez mindössze a közelitő módszerre jellemző $g_x(u)$, $g_y(u)$ függvények ill. deriváltjaik helyettesitési értékeire van szükség az $u=0$ és $u=\frac{1}{2}$ pontokban.

Alkalmazzuk eredményeinket a fejezet elején vázolt A tipusu körközelitésre. A (48) képlet kiértékeléséhez szükséges derivált értékeket (38) és (39)-ből számithatjuk:

$$\frac{\partial g_x}{\partial u} = -2tu\sin\beta + t\sin\beta \tag{50}$$

$$\frac{\partial^2 g_x}{\partial u^2} = -2t\sin\beta$$

$$\frac{\partial g_y}{\partial u} = 6(t\cos\beta - 2R\sin\beta)(u^2-u) + t\cos\beta$$

$$\frac{\partial^2 g_y}{\partial u^2} = 6(t\cos\beta - 2R\sin\beta)(2u-1)$$

E deriváltak helyettesitési értékeit az $u=0$, $u=\frac{1}{2}$ helyeken (figyelembe véve t (40) alatti kifejezését) az 5. táblázatban foglaltuk össze.

	g_x		g_y	
	$u=0$	$u=1/2$	$u=0$	$u=1/2$
g	$R\cos\beta$	R	$-R\sin\beta$	0
$\frac{\partial g}{\partial u}$	$4R(1-\cos\beta)$	0	$\frac{4R(1-\cos\beta)}{tg\beta}$	$\frac{3-2\cos\beta-\cos^2\beta}{\sin\beta}R$
$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$	$-8R(1-\cos\beta)$	$-8R(1-\cos\beta)$	$\frac{12R(1-\cos\beta)^2}{\sin\beta}$	0

5. táblázat

Mindezek felhasználásával a görbe és a kör maximális eltérésének helyére u^*-ra a következő összefüggést nyerjük.

$$u^* = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{2(1-\cos\beta)-\sin^2\beta}{\sqrt{12(1-\cos\beta)^2+4\sin\beta(1-\cos\beta)(\sin2\beta-\sin\beta)-5\sin^4\beta}} \tag{51}$$

A közelitő görbe és a kör eltérésének maximumát ezek után könnyen kiszámithatjuk a

$$H = |G(u^*)|-R = \sqrt{g_x^2(u^*)+g_y^2(u^*)} -R \tag{52}$$

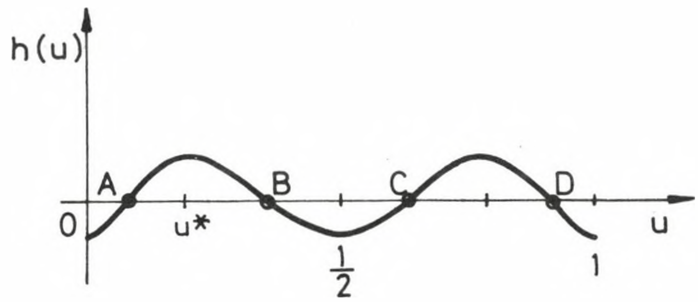
kifejezés kiértékelésével, ahol u^*-ot (51)-ből vesszük.

A 6. táblázatban (ld. 61.oldalon) megadjuk a tárgyalt körközelités numerikus értékeit; a végpontokbeli érintővektor hosszát (40) szerint, a maximális eltérés helyére jellemző u^* értéket (51) szerint, valamint a számitott maximális eltéréseket a köriv középponti szögének $\Theta=2\beta$-nak függvényében és egység sugaru körre vonatkoztatva.

3.2. B TIPUSU KÖRKÖZELITÉS

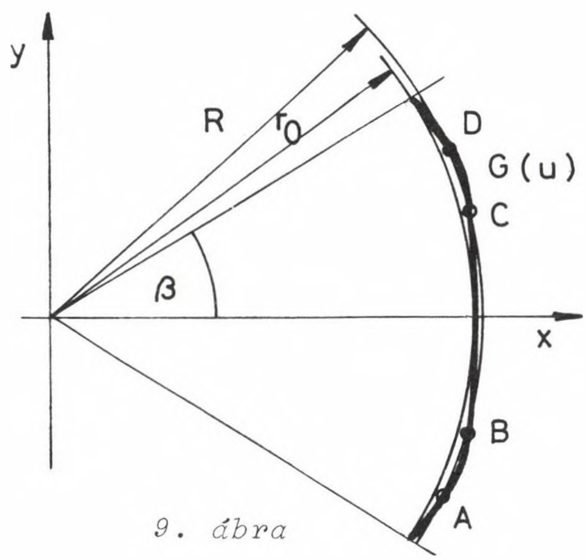
Az előző fejezetben tárgyalt körközelités esetén (A-tipusu közelités) a harmadfoku paraméteres közelitő görbe ($G(u)$) kezdő, középső és végpontja egybeesik a köriv ugyanilyen helyzetü pontjaival, és ennek megfelelően a hibafüggvény a 7. ábrán látható két maximummal és három minimumponttal biró függvény. A görbe mindenütt a körön kivül halad, a $|G(u)|-R$ képlettel definiált hiba mindenütt pozitiv.

Egyenletesebbé tehetjük a hibák eloszlását, ha a hibafüggvényt eltoljuk olymódon, hogy a maximális és a minimális hibák azonos abszolut értéküek és ellenkező előjelüek legyenek (8. ábra).



8. ábra

Ez természetesen azzal a következménnyel jár, hogy a köriv jellegzetes pontjai (kezdőpont, végpont, szimmetriapont) nem lesznek rajta a görbén, hanem a görbe "körülfonja" a körivet (9. ábra) és négy pontban metsződik vele.



9. ábra

A hibafüggvény 8. ábrán bemutatott eltolását természetesen ugy érhetjük el, hogy a $G(u)$ görbe generálásához egy, a közeliteni kivánt kör R sugarától eltérő r_o sugarat választunk, amelyre nyilván $r_o<R$. Ezen r_o sugáron helyezzük el $\pm\beta$ nyilásszöggel a görbe kezdő illetve végpontját, az érintőket pedig e pontokban a (40) képlettel határozzuk meg $R=r_o$ helyettesités figyelembevételével. A görbe egyenlete ezek után (38) és (39) szerint adódik.

Feladatunk tehát a módositott sugár (r_o) meghatározása. A fejezet elején tárgyalt egyenletes hibaeloszlást akkor kapjuk, ha (ld. a 8. és 9. ábrát)

(53) $$R - |G(0)| = |G(u^*)| - R$$

ahol u^* a maximumpont helye, és az (51) képletből számitható.

A (40) képlet értelmében a végpontbeli érintővektorok hossza (t) arányos a görbe "generálási sugarával" ami jelen esetben r_o - ez egyuttal a kezdő és végpont középponttól való távolsága is. Következésképpen nyilvánvaló, (lásd a (38) (39) egyenleteket), hogy a $G(u)$ görbe bármely pontjának origótól mért távolsága arányos r_o-lal. A maximumpontra vonatkoztatva ezt:

(54) $$|G(u^*)| = C\, r_o$$

és az előző fejezet analizise alapján $C>1$ és C már nem függ r_o-tól, hanem csak a középponti szögtől: $C=C(\beta)$. Mivel továbbá $G(0)=r_o$, az (53) feltételi egyenlet igy irható:

$$Cr_o - R = R - r_o$$

Ebből a keresett sugár:

(55) $$r_o = \frac{2}{C+1} R$$

és ez láthatóan kisebb R-nél.
A köriv és a közelitő görbe maximális eltérése ezek után

(56) $$H_o = R - r_o = \frac{C-1}{C+1} R$$

ami az előzőek alapján a következő pontokban lép fel: $u=0$, $u=1/2$, $u=1$. Ugyanilyen abszolut értékü, de ellenkező előjelü eltérés adódik az $u=u_1^*$, $u=u_2^*$ paraméterü pontokban (ld. a 8. ábrát). A sugárkorrekció nélküli harmadfoku körközelités (A tipusu közelités) esetére (52) szerint:

$$H = |G(u^*)| - R = CR - R = (C-1)R$$

Ezt összevetve (56)-tal, a hiba csökkenésének mértékére a következőt kapjuk:

$$\frac{H_o}{H} = \frac{1}{C+1} \tag{57}$$

Mivel reális középponti szögek ($\beta<90^o$) esetén C egység körüli érték, (57) szerint a hibák durván feleződésére számithatunk.

Megkaphatjuk a korrigált sugár r_o és a hibák H_o kifejezését a fél középponti szög (β) függvényében is. Mindössze a C együtthatót kell a β-val kifejezni, felhasználva az (54), (55), (38), (39), (40) összefüggéseket. Az igen terjedelmes képletek felirásától azonban eltekintünk. Megadjuk viszont r_o, H_o valamint H_o/H numerikus értékeit a középponti szög (Θ) függvényében és egységsugaru körre ($R=1$) vonatkoztatva (7. táblázat, 62. oldalon).

3.3. C TIPUSU KÖRKÖZELITÉS

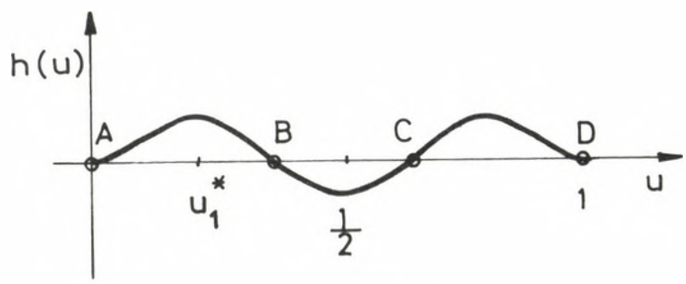
Az előző fejezetekben bemutattunk két körközelitést; az egyik (A tipusu körközelités) olyan görbét ad, hogy a köriv jellegzetes pontjai egyuttal görbepontok is (kezdőpont, végpont, középső pont), a másik (B tipusu körközelités) esetében ez nem áll fenn, azonban a körivtől való eltérések kisebbek. Mindkét esetben a görbét meghatározó érintővektor hossza, a maximális eltérés helye, a hiba nagysága a köriv adataiból (R,β) egyszerü, - vagy nem tul bonyolult képletek segitségével meghatározható.

A jelen fejezetben tárgyalt C tipusu körközelitésnél az A és B tipusu körközelitések előnyei egyesitésére törekszünk. Megtartjuk az A módszer jellegzetes pontokat visszaadó tulajdonságát a köriv kezdő és végpontjában, de növelni kivánjuk az A-nál elért pontosságot. Látni fogjuk, hogy a végpontokbeli érintővektorok hosszának meghatározása nemlineáris egyenletre vezet, ami zárt alakban nem oldható meg. Számitógépes numerikus megoldással azonban kaphatunk egy táblázatot, amely a kör középponti-szög értékeihez hozzárendeli a választandó érintővektor abszolut értékeket.

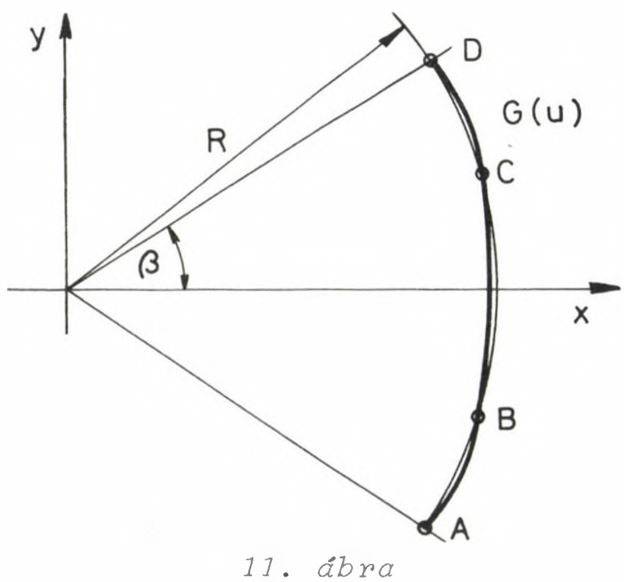
A 3.1. fejezetben a körív végpontjain átmenő harmadfoku közelitő görbe végpontokbeli érintővektorának hosszát (t) azzal a feltétellel határoztuk meg, hogy a görbe menjen át a körív felezőpontján (a K ponton), és igy kaptuk a (40) képletet. E fejezet elején tett kikötéseket pedig kielégithetjük, ha a C tipusu körközelitéshez az érintővektorok hosszát a végpontokban a

$$|G(u^*)|-R = R-|G(1/2)| \tag{58}$$

feltételből határozzuk meg. A C tipusu körközelités hibafüggvényét a 10. ábrán láthatjuk, a közelitő görbe és a kör helyzetét pedig a 11. ábrán.



10. ábra



11. ábra

A görbének tehát négy közös pontja van a körivvel, miként a B-esetben, azonban B-vel ellentétben ezek közül két pont jellegzetes pont (A, D). Az A esethez viszonyitva hiányzik a középső pont mint összeeső jellegzetes pont, de van helyette két közös belső pont (B, C).

Irjuk fel az (58) feltételi egyenletet $|G(1/2)|$ részletesebb kifejtésével, amit az általános (38) egyenletbe $u=\frac{1}{2}$-et helyettesitve nyerhetünk:

$$|G(u^*)|-R = R - \frac{t}{4}\sin\beta - R\cos\beta \tag{59}$$

Itt $|G(u^*)|$ bonyolult módon függ t-től. Ez rögtön látható, ha figyelembe vesszük, hogy az abszolut érték a koordináták négyzetösszegével fejezhető ki, ezek pedig a t értéke mellett a paraméterérték - jelen esetben a maximumponthoz tartozó paraméterérték u^* - köbétől függenek. Az u_1^* paraméter maga is függ az érintővektorok hosszától t-től, ugyhogy mindezt figyelembe véve (59)-re bonyolult nemlineáris összefüggést kapunk. Nem törődve egyelőre $|G(u^*)|$ t-től való függésével, fejezzük ki az (59) egyenletből t-t:

$$t = \frac{4(1-\cos\beta)}{\sin\beta} R - \frac{4(|G(u^*)|-R)}{\sin\beta}$$

A jobboldalon az első tagban felismerhetjük az A tipusu körközelitést adó t vektort: t_A-t a (40) képlet szerint.
Jelen közelitésünk végpontokbeli érintővektora tehát az A eset hasonló vektorából egy korrekcióval nyerhető, amit a második tag fejez ki. Ennek számlálójában viszont jelen közelitésünk hibáját ismerhetjük fel. Irhatjuk tehát, hogy

$$t = t_A - \frac{4H_c(t)}{\sin\beta} \tag{60}$$

ahol H_c természetesen függ a maximumpont helyéről u^*-tól, illetve ezen keresztül magától t-től. Ha a maximumpont helye a t érintővektor illetve a kiinduló adatként tekintett β fél-középponti szög függvényében ismert, t_A-ból kiindulva a (60) öszszefüggés ismételt alkalmazásával az érintővektorok egyre pontosabb értékéhez juthatunk a következő iterációs séma szerint:

$$u_i^* = u_i^*(\beta, t_i) \qquad (61)$$
$$t_{i+1} = t_A - \frac{4H_{c_i}(u_i^*)}{\sin\beta}.$$

A maximumponthoz tartozó paraméterérték u^* meghatározásához a 3.1. fejezetben kidolgozott általános érvényü módszert használjuk.

A (38), (39), (50) egyenleteket figyelembe véve a $g_x(u)$ $g_y(u)$ függvények, valamint deriváltjaik helyettesitési értékeit az $u=0$ és $u=\frac{1}{2}$ helyeken az alábbi táblázatban foglaltuk össze.

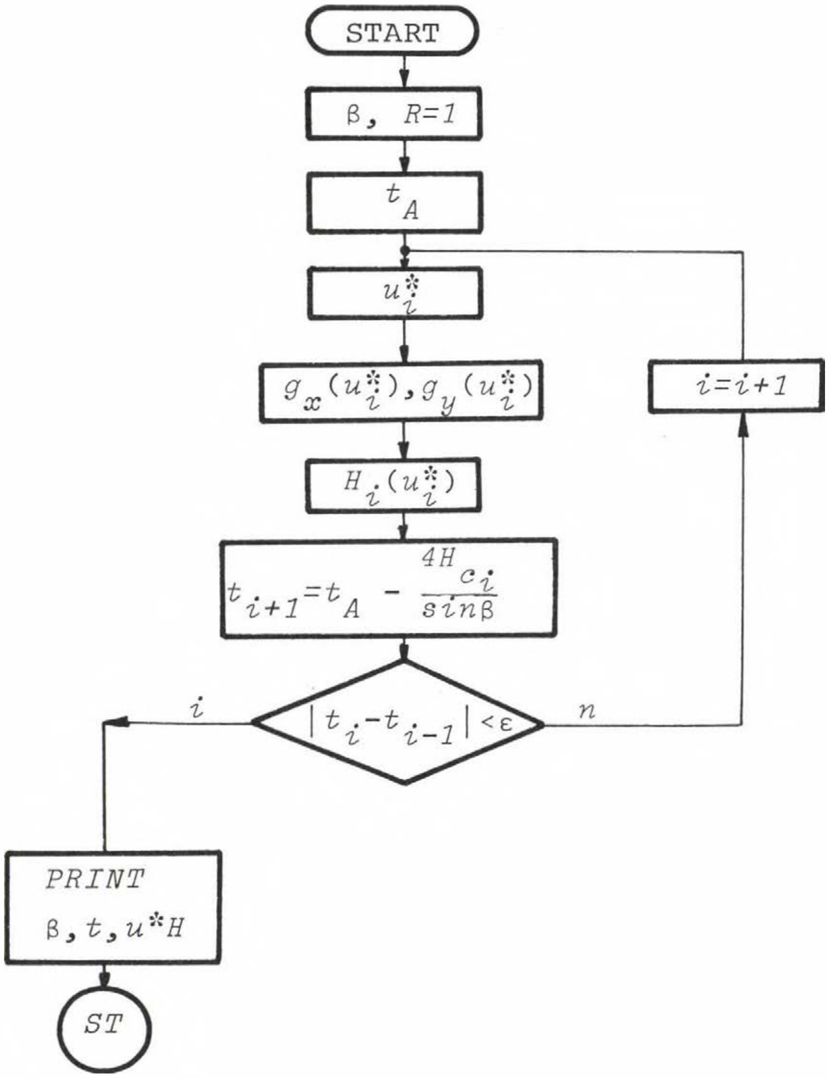
	x		y	
	$u=0$	$u=1/2$	$u=0$	$u=1/2$
g	$R\cos\beta$	$\frac{t}{4}\sin\beta+R\cos\beta$	$-R\sin\beta$	0
$\frac{\partial g}{\partial u}$	$t\sin\beta$	0	$t\cos\beta$	$3R\sin\beta-\frac{t}{2}\cos\beta$
$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$	$-2t\sin\beta$	$-2t\sin\beta$	$6(2R\sin\beta-t\cos\beta)$	0

8. táblázat

A 3.1. fejezetben közölt módszer szerint tovább haladva, a (48) és (49) összefüggések felhasználásával megkapjuk most már az eltérések szélsőértékéhez tartozó paraméterértéket:

$$u^* = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\frac{t^2}{2}\cos^2\beta - t^2\sin^2\beta - 5tR\sin2\beta + 18R^2\sin^2\beta}{\frac{t^2}{2}\cos^2\beta - t^2\sin^2\beta + t^2 - 3tR\sin2\beta + 6R^2\sin^2\beta}} \qquad (62)$$

Ez tehát a (61) iterációs sémában szereplő $u^*(\beta,t)$ függvény konkrét alakja. Felhasználásával megszerkeszthetjük a (60) egyenlet iterációs megoldását. Az iteráció végrehajtására számitógépi programot irtunk, amelynek blokk-diagramját a 12. ábrán közöljük.



12. ábra

A számitások eredményeit a 9. táblázatban tüntettük fel. (ld. a 63. oldalon) Itt megtaláljuk a C tipusu körközelitést definiáló végponti érintővektorok abszolut értékének, a maximális eltérés paraméterértékének, a maximális hibának és a H_c/H hányadosnak a numerikus értékeit a köriv $\Theta=2\beta$ középponti szögének függvényében egység sugaru körre vonatkoztatva.

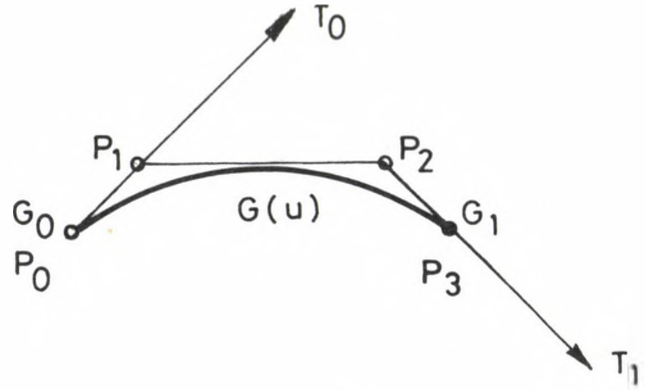
4. OPTIMÁLIS KÖRKÖZELÍTÉSEK BÉZIER, B-SPLINE, RP REPREZENTÁCIÓI

Az előző fejezetek körközelitésének (A,B,C tipusu körközelitések) tárgyalásánál láttuk, hogy a közelitő harmadfoku görbeivet mindig a kezdő és végpontok helyzete, valamint e pontokban az érintővektorok iránya és nagysága határozza meg. Tekinthetjük azonban az optimálisan közelitő görbeivet harmadfoku Bézier, B-spline vagy RP görbének is, és meghatározhatjuk az ezen reprezentációknak megfelelő görbeadatokat, amelyek az optimális görbét állitják elő. Erre annál is inkább szükség van, mivel megvalósitott rendszerekben gyakran használják a fenti reprezentációkat.

Tekintsük tehát a G_o, G_1 végpontok és a T_o, T_1 végpontokbeli érintők által egyértelmüen meghatározott harmadfoku paraméteres görbeivet. Ezen geometriai adatokat a 3.1, 3.2. vagy 3.3. fejezetben közölt összefüggések szerint határozzuk meg a közeliteni kivánt köriv adataiból (R,Θ). Feladatunk az igy definiált görbe különböző reprezentációinak meghatározása.

4.1. BÉZIER REPREZENTÁCIÓ

Egy görbe Bézier-reprezentációját a megfelelő Bézier-poligon pontjaiból állithatjuk elő. Ismeretes [1], hogy harmadfoku görbe esetén e poligon négy pontból áll (P_o,P_1,P_2,P_3 a 13. ábrán) és a poligon első és utolsó pontja a görbe kezdő és végpontjával esik egybe.



13. ábra

A Bézier-görbe érintőit a következő összefüggések adják:

$$T_0 = 3(P_1 - P_0)$$
$$T_1 = 3(P_3 - P_2)$$

Mindezek figyelembevételével tehát a Bézier-poligon pontjai:

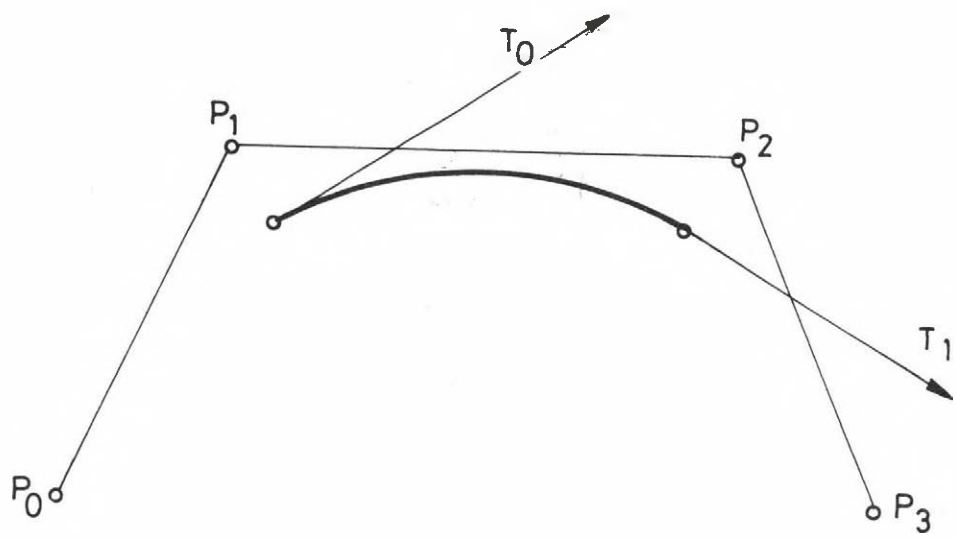
$$\begin{aligned} P_0 &= G_0 \\ P_1 &= G_0 + \frac{T_0}{3} \\ P_2 &= G_1 - \frac{T_1}{3} \\ P_3 &= G_1 \end{aligned} \tag{63}$$

és ezek felhasználásával a Bézier-görbe egyenlete:

$$G_B(u) = \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} u^i (1-u)^{3-i} P_i$$

4.2. B-SPLINE REPREZENTÁCIÓ

A B-spline görbe nem megy át a definiáló poligon-pontokon (P_o, P_1, P_2, P_3 a 14. ábrán), de belül halad a pontok által kijelölt konvex pligonon.



14. ábra

Haramdfoku B-spline görbe esetén fennállnak a következő összefüggések [3]:

$$G_o = \frac{P_o+4P_1+P_2}{6}$$

$$T_o = \frac{P_2-P_o}{2}$$

$$G_1 = \frac{P_1+4P_2+P_3}{6}$$

$$T_1 = \frac{P_3-P_1}{2}$$

E négy összefüggés négy lineáris egyenletet jelent $P_1, P_2, P_3,$ P_4 meghatározására. Az egyenletrendszer megoldása a poligonpontokat szolgáltatja:

$$
(64) \qquad
\begin{aligned}
P_0 &= -G_0+2G_1 - \frac{7}{3}T_0 + \frac{2}{3}T_1 \\
P_1 &= 2G_0 - G_1 + \frac{2}{3}T_0 - \frac{1}{3}T_1 \\
P_2 &= -G_0 + 2G_1 - \frac{1}{3}T_0 - \frac{2}{3}T_1 \\
P_3 &= 2G_0 - G_1 + \frac{2}{3}T_0 + \frac{7}{3}T_1
\end{aligned}
$$

Megjegyezzük, hogy a (64) kifejezések vizsgálatával bebizonyitható, hogy a P_1 és P_2 pontoknak közös szimmetria egyenesük van a P_0, P_3 pontokkal, amely egyenes egyuttal a görbe szimmetriaegyenese is.

A poligonpontok ismeretében a spline görbe a következőképpen adódik [3]:

$$
G_S(u) = \frac{1}{6}[u^3 u^2 u \; 1] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}
$$

4.3. R-P REPREZENTÁCIÓ

Az 1.3. fejezetben ismertetett R-P módszer optimális körközelitésre való alkalmazása esetén némiképp más helyzettel állunk szemben mint a Bézier- vagy B-spline módszer esetén. Itt ugyanis az érintővektorok abszolut értéke a végpontokban (T_0 és T_1) mindig egységnyi, és ez, e vektorok irányával valamint a végpontok helyzetével együtt, már egyértelmüen meghatározza a görbe paraméterintervallumát a (30) összefüggés szerint. Ennek ismeretében már a teljes görbe is egyértelmüen adódik, ami természetesen az 1.3. fejezetben vizsgált görbe, az ott megadott kör-közelitési pontossággal. Ilyen értelemben tehát az optimális körközelitést adó görbék nem képezhetők le az R-P módszerrel.

Lehetőség van azonban az optimális körközelitő görbék R-P módszernek megfelelő adatokkal való előállitására. Ehhez az optimális görbék olyan paraméter-transzformációjára van szükség, amely a végpontokban egységnyi abszolut értékü érintővektorokat ad.

Az optimális körközelitő módszerek - A,B,C módszer, 3.1., 3.2., 3.3. fejezet - meghatároznak egy-egy t értéket a végpontokbeli érintővektor hosszára vonatkozóan, amellyel a görbe az $u=[0,1]$ paraméterintervallum figyelembevételével egyértelmüen adódik, és az $u=0$, és $u=1$ pontokban:

$$\left|\frac{\partial G_{opt}}{\partial u}\right| = t.$$

Ha tehát most az $u'=tu$ összefüggéssel uj paramétert vezetünk be az optimális görbe R-P reprezentációjára:

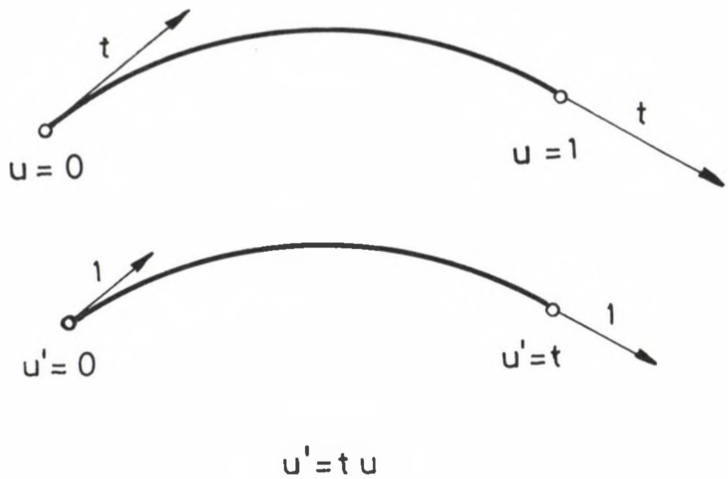
$G_{RP}(u') = G_{opt}(u=\frac{u'}{t})$, az uj paraméter szerinti deriváltra:

$$\frac{\partial G_{RP}}{\partial u'} = \frac{\partial G_{opt}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial u'}$$

Vagyis az RP görbe érintővektora a végpontokban:

$$\left|\frac{\partial G_{RP}}{\partial u'}\right| = t \cdot \frac{1}{t} = 1$$

azaz egységnyi lesz, a görbe paraméterintervalluma pedig u' $[0,t]$ lesz. A görbe alakját az átparaméterezés természetesen nem érinti, igy tehát az optimális körközelitő görbét az R-P görbék generálásához használt adatokkal állitottuk elő. Az átparaméterezést szemléletesen mutatja a 15. ábra.



15. ábra

5. KÖRKÖZELITŐ MÓDSZEREK ÖSSZEHASONLITÁSA

A különböző görbetervező módszereken alapuló körközelitéseket, valamint a különböző tipusu optimális körközelitéseket a 61.-63.oldalon lévő táblázatok numerikus értékei alapján hasonlitjuk össze. A könnyebb áttekinthetőség kedvéért kiirtuk e táblázatokból a körközelitéseknél adódó maximális hiba néhány jellegzetes középponti szöghöz tartozó értékeit (10, 11, 12. táblázatok).

A tervezés szempontjából a legkézenfekvőbb és legegyszerübb eset az, amikor a görbetervező módszer kiinduló adatai a körön fekvő pontok. A közelitő görbe hibáit erre az esetre vonatkozóan a 10. táblázat tartalmazza. Itt az összehasonlitás kedvéért a harmadfoku Bézier-görbére vonatkozó értékeket tüntettük fel, mivel a másik két módszer is harmadfoku görbével dolgozik.

$\Theta[^\circ]$	Bézier	B-spline	R-P
10	$1,27.10^{-3}$	$5,06.10^{-3}$	$2,4.10^{-6}$
20	$5,07.10^{-3}$	0,0201	$3,87.10^{-5}$
30	0,0113	0,0448	$1,95.10^{-4}$
45	0,0254	0,0986	$9,9.10^{-4}$
60	0,0448	0,1700	$3,13.10^{-3}$
90	0,0987	0,3518	0,0158
120	0,1702	0,5625	0,0500
150	0,2555	0,7814	0,1216
180	0,3504	1,0000	0,2500

10. táblázat

A 10. táblázat alapján megállapithatjuk, hogy a legjobb közelitést az RP módszer adja; kis szögeknél két nagyságrenddel kisebb, nagy szögeknél pedig azonos nagyságrendbe eső de kisebb hibát eredményez mint a Bézier módszer. Ezen felül a Bézier-görbe érintői a végpontokban nem esnek egybe a kör érintőivel, mig az érintők azonos iránya az RP görbénél fennáll. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy Bézier-görbénél igen egyszerü lehetőség van a görbe fokszámának növelésére; mindössze a Bézier-pontok számát kell megfelelő módon növelni a kör kerületén szimmetrikusan elhelyezkedő további pontok hozzávételével. Ekkor a görbe pontossága nő, és a végpontok-beli érintő egyre jobban megközeliti a kör érintőjét. Az 1. táblázatból láthatjuk, hogy a 8-adfoku Bézier-görbe még mindenütt nagyobb eltéréseket ad mint az RP görbe, de pl. a 10-edfoku Bézier-görbe $\Theta>120^{o}$ esetén már pontosabb mint az RP görbe.

A B-spline módszer adja jelen esetben a legkisebb pontosságot, továbbá a körnek és görbének nincs közös pontja, de a görbe végpontjaiban az érintők iránya megegyezik a körérintő irányával.

A körközelitések pontossága javitható a 2. fejezetben tárgyalt módon; az egyes görbetervező módszerek kiinduló adataként szolgáló pontokat nem a közeliteni kivánt körön, hanem azzal koncentrikus de eltérő sugaru körön helyezzük el. A megfelelő korrekciós sugarakat megtaláljuk a 2-4 táblázatokban, a közelitések maximális hibáit pedig a 11. táblázatban gyüjtöttük össze néhány jellegzetes Θ értékre.

Ha összehasonlitjuk a 10. és 11. táblázatok megfelelő oszlopait, láthatjuk, hogy a hiba mindegyik módszer esetében valóban csökken. A legnagyobb mértékü a csökkenés a B-spline módszer esetében, amely a sugárkorrekcióval $\Theta\approx 30^{o}$-ig egyenértékü lesz az RP módszerrel, és ilyen kis szögekre mindkettő jobb mint a harmadfoku Bézier görbe. Növekvő középponti szögekre a B-spline módszer javulása egyre csökkenő mértékü, és $\Theta>130^{o}$ esetén már a harmadfoku Bézier-görbe jobb mint az ugyancsak harmadfoku B-spline görbe. Az RP- és a Bézier-görbe maxi-

$\Theta[^\circ]$	Bézier	B-spline	R-P
10	$6{,}30.10^{-4}$	$1{,}22.10^{-6}$	$1{,}20.10^{-6}$
20	$2{,}54.10^{-3}$	$1{,}99.10^{-5}$	$1{,}93.10^{-5}$
30	$5{,}72.10^{-3}$	$1{,}04.10^{-4}$	$9{,}79.10^{-5}$
45	0,0129	$5{,}76.10^{-4}$	$4{,}96.10^{-4}$
60	0,0229	$2{,}03.10^{-3}$	$1{,}57.10^{-3}$
90	0,0520	0,0140	$7{,}98.10^{-3}$
120	0,0930	0,0666	0,0256
150	0,1465	0,2672	0,0647
180	0,2124	1,0000	0,1428

11. táblázat

mális eltérése a körtől a sugárkorrekció hatására megközelitőleg a felére csökken.

A sugárkorrekció alkalmazása tehát mindhárom módszer esetében csökkenti a körközelités hibáját, hátrányos tulajdonsága viszont az, hogy a közelitő görbe és a kör kezdő és végpontjai nem esnek egybe.

Legbonyolultabb a 3. fejezetben tárgyalt optimális körközelitések alkalmazása, viszont a legnagyobb körközelitési pontosságot is ezek a módszerek adják. A 12. táblázatban összefoglaltuk a 3. fejezetben tárgyalt A,B és C tipusu körközelitések néhány jellegzetes Θ értékhez tartozó hibáit.

$\Theta[°]$	A	B	C
10	5.10^{-10}	3.10^{-10}	4.10^{-10}
20	$3,27.10^{-8}$	$1,63.10^{-8}$	$2,33.10^{-8}$
30	$3,73.10^{-7}$	$1,86.10^{-7}$	$2,66.10^{-7}$
45	$4,24.10^{-6}$	$2,12.10^{-6}$	$3,03.10^{-6}$
60	$2,39.10^{-5}$	$1,19.10^{-5}$	$1,70.10^{-5}$
90	$2,73.10^{-4}$	$1,36.10^{-4}$	$1,95.10^{-4}$
120	$1,54.10^{-3}$	$7,70.10^{-4}$	$1,11.10^{-3}$
150	$5,97.10^{-3}$	$2,98.10^{-3}$	$4,3.10^{-3}$
180	0,0183	0,0090	0,0131

12. táblázat

A táblázat bármely oszlopát alapul véve megállapithatjuk, hogy az optimális harmadfoku körközelitő görbék nagyságrendekkel jobb közelitést adnak, mint a 10. táblázat alapjául szolgáló egyszerü, vagy a 11. táblázat alapjául szolgáló sugárkorrekciós görbék. Az optimális módszereken belül az A módszert a legegyszerübb alkalmazni és olyan görbét ad, amelynek három közös pontja van a körrel, és ott az érintők is azonos irányuak a kör érintőjével. A közös pontok jellegzetes pontok: kezdőpont, végpont és a felezőpont. A legpontosabb körközelitést a B módszer nyujtja, amely az A módszer sugárkorrekciós változata. Itt bár négy közös pont van a körrel, de ezek nem jellegzetes pontok, és e pontokban a görbe és a kör érintőjének iránya különbözik egymástól.

A C módszerrel előállitott görbe pontossága jobb mint az A módszeré és megtartja annak előnyös tulajdonságait. A C görbének négy közös pontja van a körrel és ezek közül kettő jellegzetes pont; a kezdő és a végpont. Ez utóbbiakban a görbe érintője is azonos irányu a körérintővel. Bár a C módszer alkalmazása valamivel nagyobb hibát okoz a körközelitésben mint a B módszer, de a felsorolt geometriai tulajdonságok miatt használata előnyösebb a görbetervezésben (pl. folytonos csatlakozások biztositása). Másrészt az elérhető pontosság önmagában véve is olyan nagy, hogy messze kielégiti a szokásos müszaki-esztétikai követelményeket.

A 12. táblázatból láthatóan az optimális körközelitő görbékkel igen nagy pontosságot lehet elérni. E görbék alakját meghatározó elsődleges adatok (a görbék végpontjai és az érintővektorok iránya és nagysága e pontokban) azonban nem illeszkednek a szokásos görbetervező módszerek által megkövetelt adatokhoz. Szükség van tehát egy transzformációra, amely ezen optimális görbéket meghatározó geometriai adatokat leképezi a görbetervező módszerek kiindulási adataira, és ilymódon lehetővé teszi az optimális görbék közvetlen előállitását a már használatban levő görbetervező rendszerekben. Ezeket a transzformációkat tartalmazza a 4. fejezet, amelyben megmutattuk, hogy elő lehet állitani az optimális körközelitő görbéket. Bézier, B-spline ill. RP görbeként is. A görbét definiáló pontok azonban most már nem köriven helyezkednek el.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] Bézier,P.: Numerical Control, Mathematics and Applications,John Wiley and Sons, (1972)

[2] Riesenfeld,R: Applications of B-spline Approximation to Geometric Problems of Computer-Aided Design, Dissertation, University of Utah, (1973)

[3] Coons,S.A.: Surface Patches and B-spline Curves in Computer Aided Geometric Design, ed. by R.E.Barnhill, R.F. Riesenfeld, Academic Press, (1974)

[4] Renner,G; Pochop,V.: A New Method for Local Smooth Interpolation, Proc. of EUROGRAPHICS'81, ed. by J. Encarnacao, North-Holland Publ. Comp. (1981)

[5] Renner,G.: A Method of Shape Description for Mechanical Engineering Practice, Computers in Industry, 3, (1982) pp. 137-142.

[6] Peters, G.J., Interactive Graphics Application of the Parametric Bi-cubic Surface to Engineering Design Problems, in Computer Aided Geometric Design, ed. by R.E. Barnhill, R.F. Riesenfeld, Academic Press, (1974) pp 259-302.

T Á B L Á Z A T O K

Θ	H									
	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
5	0.00095	0.00048	0.00032	0.00024	0.00019	0.00016	0.00014	0.00012	0.00011	0.00010
10	0.00381	0.00190	0.00127	0.00095	0.00076	0.00063	0.00054	0.00048	0.00042	0.00038
15	0.00856	0.00428	0.00285	0.00214	0.00171	0.00143	0.00122	0.00107	0.00095	0.00086
20	0.01519	0.00760	0.00507	0.00380	0.00304	0.00254	0.00217	0.00190	0.00169	0.00152
25	0.02370	0.01185	0.00791	0.00593	0.00475	0.00396	0.00339	0.00297	0.00264	0.00238
30	0.03407	0.01704	0.01137	0.00854	0.00683	0.00570	0.00488	0.00428	0.00380	0.00342
35	0.04628	0.02314	0.01545	0.01160	0.00929	0.00775	0.00664	0.00582	0.00517	0.00465
40	0.06031	0.03015	0.02015	0.01513	0.01212	0.01011	0.00867	0.00759	0.00675	0.00608
45	0.07612	0.03806	0.02545	0.01912	0.01532	0.01278	0.01096	0.00960	0.00853	0.00768
50	0.09369	0.04685	0.03134	0.02356	0.01888	0.01575	0.01352	0.01183	0.01053	0.00948
55	0.11299	0.05649	0.03783	0.02845	0.02281	0.01903	0.01633	0.01430	0.01272	0.01146
60	0.13397	0.06699	0.04489	0.03378	0.02709	0.02262	0.01941	0.01700	0.01512	0.01362
65	0.15561	0.07830	0.05252	0.03955	0.03173	0.02650	0.02274	0.01993	0.01773	0.01597
70	0.13085	0.09042	0.06071	0.04575	0.03672	0.03067	0.02633	0.02307	0.02053	0.01850
75	0.20665	0.10332	0.06944	0.05237	0.04205	0.03514	0.03018	0.02645	0.02354	0.02121
80	0.23396	0.11698	0.07871	0.05940	0.04772	0.03989	0.03427	0.03004	0.02674	0.02409
85	0.26272	0.13136	0.08849	0.06684	0.05373	0.04493	0.03861	0.03385	0.03014	0.02716
90	0.29289	0.14645	0.09878	0.07467	0.06006	0.05025	0.04319	0.03788	0.03373	0.03040
95	0.32441	0.16220	0.10956	0.08290	0.06672	0.05584	0.04802	0.04212	0.03752	0.03382
100	0.35721	0.17861	0.12081	0.09150	0.07369	0.06170	0.05308	0.04657	0.04149	0.03741
105	0.39124	0.19562	0.13252	0.10047	0.08097	0.06783	0.05837	0.05123	0.04565	0.04117
110	0.42642	0.21321	0.14467	0.10980	0.08855	0.07422	0.06389	0.05610	0.05000	0.04510
115	0.46270	0.23135	0.15725	0.11947	0.09643	0.08087	0.06964	0.06116	0.05453	0.04919
120	0.50000	0.25000	0.17023	0.12949	0.10459	0.08776	0.07561	0.06643	0.05923	0.05345
125	0.53825	0.26913	0.18360	0.13983	0.11303	0.09490	0.08180	0.07189	0.06412	0.05787
130	0.57738	0.28869	0.19733	0.15048	0.12175	0.10228	0.08820	0.07754	0.06918	0.06245
135	0.61732	0.30866	0.21142	0.16143	0.13072	0.10989	0.09481	0.08339	0.07441	0.06719
140	0.65798	0.32899	0.22583	0.17267	0.13996	0.11773	0.10152	0.08940	0.07981	0.07209
145	0.69929	0.34965	0.24055	0.18419	0.14943	0.12579	0.10863	0.09561	0.08538	0.07713
150	0.74118	0.37059	0.25556	0.19597	0.15915	0.13405	0.11583	0.10199	0.09111	0.08233
155	0.78356	0.39178	0.27084	0.20800	0.16909	0.14254	0.12323	0.10854	0.09700	0.08768
160	0.82635	0.41318	0.28636	0.22027	0.17926	0.15122	0.13080	0.11527	0.10304	0.09317
165	0.86947	0.43474	0.30211	0.23276	0.18963	0.16009	0.13856	0.12216	0.10924	0.09880
170	0.91284	0.45642	0.31806	0.24547	0.20020	0.16915	0.14649	0.12921	0.11558	0.10457
175	0.95638	0.47819	0.33419	0.25837	0.21095	0.17839	0.15458	0.13641	0.12208	0.11047
180	1.00000	0.50000	0.35048	0.27145	0.22191	0.18780	0.16284	0.14377	0.12871	0.11651

1. táblázat

BÉZIER-MÓDSZER KORRIGÁLT SUGÁRRAL

Θ	n=1			n=2			n=3		
	r_o	H_o	H_o/H	r_o	H_o	H_o/H	r_o	H_o	H_o/H
5	1.00048	0.00048	0.50024	1.00024	0.00024	0.50012	1.00016	0.00016	0.50008
10	1.00191	0.00191	0.50095	1.00095	0.00095	0.50048	1.00063	0.00063	0.50032
15	1.00430	0.00430	0.50215	1.00214	0.00214	0.50107	1.00143	0.00143	0.50071
20	1.00765	0.00765	0.50383	1.00381	0.00381	0.50191	1.00254	0.00254	0.50127
25	1.01199	0.01199	0.50600	1.00596	0.00596	0.50298	1.00397	0.00397	0.50198
30	1.01733	0.01733	0.50867	1.00859	0.00859	0.50430	1.00572	0.00572	0.50286
35	1.02369	0.02369	0.51184	1.01171	0.01171	0.50585	1.00779	0.00779	0.50389
40	1.03109	0.03109	0.51555	1.01531	0.01531	0.50765	1.01018	0.01018	0.50509
45	1.03957	0.03957	0.51978	1.01940	0.01940	0.50970	1.01289	0.01289	0.50644
50	1.04915	0.04915	0.52457	1.02398	0.02398	0.51199	1.01592	0.01592	0.50796
55	1.05988	0.05988	0.52994	1.02907	0.02907	0.51453	1.01928	0.01928	0.50964
60	1.07180	0.07180	0.53590	1.03465	0.03465	0.51733	1.02296	0.02296	0.51148
65	1.08496	0.08496	0.54248	1.04075	0.04075	0.52037	1.02697	0.02697	0.51348
70	1.09941	0.09941	0.54971	1.04735	0.04735	0.52368	1.03130	0.03130	0.51565
75	1.11523	0.11523	0.55761	1.05448	0.05448	0.52724	1.03597	0.03597	0.51798
80	1.13247	0.13247	0.56624	1.06212	0.06212	0.53106	1.04096	0.04096	0.52048
85	1.15123	0.15123	0.57561	1.07030	0.07030	0.53515	1.04629	0.04629	0.52315
90	1.17157	0.17157	0.58579	1.07901	0.07901	0.53950	1.05196	0.05196	0.52598
95	1.19361	0.19361	0.59680	1.08826	0.08826	0.54413	1.05795	0.05795	0.52898
100	1.21744	0.21744	0.60872	1.09806	0.09806	0.54903	1.06429	0.06429	0.53214
105	1.24319	0.24319	0.62160	1.10841	0.10841	0.55421	1.07096	0.07096	0.53548
110	1.27099	0.27099	0.63550	1.11933	0.11933	0.55966	1.07798	0.07798	0.53899
115	1.30098	0.30098	0.65049	1.13081	0.13081	0.56540	1.08533	0.08533	0.54267
120	1.33333	0.33333	0.66667	1.14286	0.14286	0.57143	1.09303	0.09303	0.54652
125	1.36822	0.36822	0.68411	1.15549	0.15549	0.57774	1.10108	0.10108	0.55054
130	1.40586	0.40586	0.70293	1.16870	0.16870	0.58435	1.10947	0.10947	0.55473
135	1.44646	0.44646	0.72323	1.18249	0.18249	0.59125	1.11821	0.11821	0.55910
140	1.49029	0.49029	0.74515	1.19688	0.19688	0.59844	1.12729	0.12729	0.56364
145	1.53763	0.53763	0.76881	1.21186	0.21186	0.60593	1.13672	0.13672	0.56836
150	1.58879	0.58879	0.79440	1.22744	0.22744	0.61372	1.14650	0.14650	0.57325
155	1.64414	0.64414	0.82207	1.24361	0.24361	0.62181	1.15663	0.15663	0.57832
160	1.70409	0.70409	0.85204	1.26038	0.26038	0.63019	1.16711	0.16711	0.58355
165	1.76909	0.76909	0.88454	1.27774	0.27774	0.63887	1.17793	0.17793	0.58897
170	1.83966	0.83966	0.91983	1.29569	0.29569	0.64785	1.18910	0.18910	0.59455
175	1.91641	0.91641	0.95820	1.31422	0.31422	0.65711	1.20062	0.20062	0.60031
180	2.00000	1.00000	1.00000	1.33333	0.33333	0.66667	1.21247	0.21247	0.60624

2. táblázat

BÉZIER-MÓDSZER KORRIGÁLT SUGÁRRAL

Θ	n=4			n=5			n=6		
	r_o	H_o	H_o/H	r_o	H_o	H_o/H	r_o	H_o	H_o/H
5	1.00012	0.00012	0.50005	1.00010	0.00010	0.50005	1.00008	0.00008	0.50004
10	1.00043	0.00043	0.50024	1.00038	0.00038	0.50019	1.00032	0.00032	0.50016
15	1.00107	0.00107	0.50054	1.00086	0.00086	0.50043	1.00071	0.00071	0.50036
20	1.00190	0.00190	0.50095	1.00152	0.00152	0.50076	1.00127	0.00127	0.50063
25	1.00293	0.00293	0.50149	1.00238	0.00238	0.50119	1.00198	0.00198	0.50099
30	1.00429	0.00429	0.50214	1.00343	0.00343	0.50171	1.00286	0.00286	0.50143
35	1.00584	0.00584	0.50292	1.00467	0.00467	0.50233	1.00389	0.00389	0.50194
40	1.00762	0.00762	0.50381	1.00610	0.00610	0.50305	1.00508	0.00508	0.50254
45	1.00965	0.00965	0.50483	1.00772	0.00772	0.50386	1.00643	0.00643	0.50322
50	1.01192	0.01192	0.50595	1.00953	0.00953	0.50477	1.00794	0.00794	0.50397
55	1.01443	0.01443	0.50722	1.01154	0.01154	0.50577	1.00961	0.00961	0.50480
60	1.01718	0.01718	0.50859	1.01373	0.01373	0.50687	1.01144	0.01144	0.50572
65	1.02017	0.02017	0.51009	1.01612	0.01612	0.50806	1.01343	0.01343	0.50671
70	1.02341	0.02341	0.51170	1.01870	0.01870	0.50935	1.01557	0.01557	0.50779
75	1.02689	0.02689	0.51344	1.02148	0.02148	0.51074	1.01788	0.01788	0.50894
80	1.03061	0.03061	0.51530	1.02444	0.02444	0.51222	1.02035	0.02035	0.51018
85	1.03457	0.03457	0.51729	1.02761	0.02761	0.51380	1.02298	0.02298	0.51149
90	1.03878	0.03878	0.51939	1.03096	0.03096	0.51548	1.02577	0.02577	0.51289
95	1.04324	0.04324	0.52162	1.03451	0.03451	0.51725	1.02872	0.02872	0.51436
100	1.04794	0.04794	0.52397	1.03825	0.03825	0.51913	1.03183	0.03183	0.51592
105	1.05289	0.05289	0.52645	1.04219	0.04219	0.52110	1.03511	0.03511	0.51755
110	1.05808	0.05808	0.52904	1.04633	0.04633	0.52316	1.03854	0.03854	0.51927
115	1.06353	0.06353	0.53177	1.05066	0.05066	0.52533	1.04214	0.04214	0.52107
120	1.06923	0.06923	0.53461	1.05518	0.05518	0.52759	1.04589	0.04589	0.52295
125	1.07517	0.07517	0.53752	1.05990	0.05990	0.52995	1.04981	0.04981	0.52491
130	1.08136	0.08136	0.54068	1.06482	0.06482	0.53241	1.05390	0.05390	0.52695
135	1.08780	0.08780	0.54390	1.06993	0.06993	0.53497	1.05814	0.05814	0.52907
140	1.09443	0.09443	0.54725	1.07524	0.07524	0.53762	1.06255	0.06255	0.53127
145	1.10144	0.10144	0.55072	1.08075	0.08075	0.54038	1.06711	0.06711	0.53356
150	1.10863	0.10863	0.55431	1.08645	0.08645	0.54323	1.07184	0.07184	0.53592
155	1.11607	0.11607	0.55804	1.09235	0.09235	0.54618	1.07674	0.07674	0.53837
160	1.12377	0.12377	0.56183	1.09845	0.09845	0.54923	1.08179	0.08179	0.54090
165	1.13171	0.13171	0.56586	1.10474	0.10474	0.55237	1.08701	0.08701	0.54350
170	1.13990	0.13990	0.56995	1.11123	0.11123	0.55562	1.09239	0.09239	0.54619
175	1.14835	0.14835	0.57417	1.11792	0.11792	0.55896	1.09793	0.09793	0.54896
180	1.15704	0.15704	0.57852	1.12480	0.12480	0.56240	1.10363	0.10363	0.55182

2. táblázat 1. folytatása

BÉZIER-MÓDSZER KORRIGÁLT SUGÁRRAL

Θ	n=7			n=8			n=9		
	r_o	H_o	H_o/H	r_o	H_o	H_o/H	r_o	H_o	H_o/H
5	1.00007	0.00007	0.50003	1.00016	0.00006	0.50003	1.00005	0.00005	0.50003
10	1.00027	0.00027	0.50014	1.00024	0.00024	0.50012	1.00021	0.00021	0.50011
15	1.00061	0.00061	0.50031	1.00054	0.00054	0.50027	1.00048	0.00048	0.50024
20	1.00109	0.00109	0.50054	1.00095	0.00095	0.50048	1.00085	0.00085	0.50042
25	1.00170	0.00170	0.50085	1.00149	0.00149	0.50074	1.00132	0.00132	0.50066
30	1.00245	0.00245	0.50122	1.00214	0.00214	0.50107	1.00190	0.00190	0.50095
35	1.00333	0.00333	0.50167	1.00292	0.00292	0.50146	1.00259	0.00259	0.50130
40	1.00435	0.00435	0.50218	1.00381	0.00381	0.50190	1.00339	0.00339	0.50159
45	1.00551	0.00551	0.50276	1.00482	0.00482	0.50241	1.00429	0.00429	0.50214
50	1.00680	0.00680	0.50340	1.00595	0.00595	0.50298	1.00529	0.00529	0.50265
55	1.00823	0.00823	0.50412	1.00720	0.00720	0.50360	1.00640	0.00640	0.50320
60	1.00980	0.00981	0.50490	1.00857	0.00857	0.50429	1.00762	0.00762	0.50381
65	1.01150	0.01150	0.50575	1.01006	0.01006	0.50503	1.00894	0.00894	0.50447
70	1.01334	0.01334	0.50667	1.01167	0.01167	0.50584	1.01037	0.01037	0.50519
75	1.01532	0.01532	0.50765	1.01340	0.01340	0.50670	1.01191	0.01191	0.50595
80	1.01743	0.01743	0.50872	1.01525	0.01525	0.50752	1.01355	0.01355	0.50678
85	1.01968	0.01963	0.50984	1.01722	0.01722	0.50861	1.01530	0.01530	0.50765
90	1.02207	0.02207	0.51104	1.01931	0.01931	0.50965	1.01715	0.01715	0.50858
95	1.02460	0.02460	0.51230	1.02151	0.02151	0.51076	1.01912	0.01912	0.50956
100	1.02726	0.02726	0.51363	1.02384	0.02384	0.51192	1.02118	0.02118	0.51059
105	1.03006	0.03006	0.51503	1.02629	0.02629	0.51314	1.02336	0.02336	0.51168
110	1.03300	0.03300	0.51650	1.02886	0.02886	0.51443	1.02564	0.02564	0.51282
115	1.03608	0.03608	0.51804	1.03155	0.03155	0.51577	1.02803	0.02803	0.51401
120	1.03929	0.03929	0.51965	1.03435	0.03435	0.51718	1.03052	0.03052	0.51526
125	1.04264	0.04264	0.52132	1.03728	0.03728	0.51864	1.03312	0.03312	0.51656
130	1.04613	0.04613	0.52307	1.04033	0.04033	0.52017	1.03583	0.03583	0.51791
135	1.04976	0.04976	0.52488	1.04350	0.04350	0.52175	1.03864	0.03864	0.51932
140	1.05353	0.05353	0.52675	1.04679	0.04679	0.52340	1.04157	0.04157	0.52078
145	1.05743	0.05743	0.52872	1.05020	0.05020	0.52510	1.04459	0.04459	0.52230
150	1.06148	0.06148	0.53074	1.05373	0.05373	0.52687	1.04773	0.04773	0.52336
155	1.06566	0.06566	0.53283	1.05739	0.05739	0.52869	1.05097	0.05097	0.52549
160	1.06998	0.06998	0.53499	1.06116	0.06116	0.53058	1.05432	0.05432	0.52716
165	1.07444	0.07444	0.53722	1.06505	0.06505	0.53253	1.05777	0.05777	0.52889
170	1.07903	0.07903	0.53952	1.06906	0.06906	0.53453	1.06134	0.06134	0.53057
175	1.08377	0.08377	0.54188	1.07320	0.07320	0.53660	1.06501	0.06501	0.53250
180	1.08864	0.08864	0.54432	1.07745	0.07745	0.53873	1.06878	0.06878	0.53439

2. táblázat 2. folytatása

B-SPLINE MÓDSZER

Θ	H	r_o	H_o	H_o/H
5	0.00126859	1.00127012	0.00000008	0.00005964
10	0.00506650	1.00509108	0.00000122	0.00024029
15	0.01137036	1.01149484	0.00000622	0.00054722
20	0.02014151	1.02053519	0.00001993	0.00098934
25	0.03132660	1.03228862	0.00004948	0.00157952
30	0.04485830	1.04685542	0.00010474	0.00233488
35	0.06065620	1.06436132	0.00019879	0.00327737
40	0.07862790	1.08495942	0.00034866	0.00443433
45	0.09867030	1.10333269	0.00057617	0.00583932
50	0.12067091	1.13619689	0.00090902	0.00753307
55	0.14450936	1.16730419	0.00138219	0.00956470
60	0.17005899	1.20244745	0.00203954	0.01199316
65	0.19718846	1.24196523	0.00293593	0.01488895
70	0.22576342	1.28624811	0.00413966	0.01833628
75	0.25564819	1.33574525	0.00573561	0.02243554
80	0.28670741	1.39097343	0.00782896	0.02730643
85	0.31880761	1.45252674	0.01054984	0.03309156
90	0.35181878	1.52108850	0.01405900	0.03996092
95	0.38561577	1.59744539	0.01855475	0.04811719
100	0.42007960	1.68250416	0.02428151	0.05780217
105	0.45509861	1.77731166	0.03154041	0.06930455
110	0.49056949	1.88307877	0.04070222	0.08296933
115	0.52639808	2.00120906	0.05222354	0.09920922
120	0.56250000	2.13333333	0.06666667	0.11851852
125	0.59880111	2.28135128	0.08472441	0.14149006
130	0.63523774	2.44743196	0.10725095	0.16883592
135	0.67175669	2.63432517	0.13530039	0.20141278
140	0.70831509	2.84493632	0.17017500	0.24025324
145	0.74488000	3.08291822	0.21348589	0.28660441
150	0.78142786	3.35253402	0.26722947	0.34197587
155	0.81794376	3.65884685	0.33388411	0.40819934
160	0.85442050	4.00789316	0.41653290	0.48750340
165	0.89085754	4.40639913	0.51902019	0.58260740
170	0.92725987	4.86455209	0.64615186	0.69684010
175	0.96363668	5.39134288	0.80395286	0.83429043
180	1.00000000	5.99999997	0.99999999	0.99999999

3. táblázat

RP-MÓDSZER

Θ	H	r_o	H_o	H_o/H
5	0.00000015	1.00000008	0.00000008	0.50000004
10	0.00000242	1.00000121	0.00000121	0.50000060
15	0.00001223	1.00000612	0.00000612	0.50000306
20	0.00003866	1.00001933	0.00001933	0.50000967
25	0.00009439	1.00004720	0.00004720	0.50002360
30	0.00019573	1.00009788	0.00009788	0.50004894
35	0.00036261	1.00018134	0.00018134	0.50009067
40	0.00061860	1.00030940	0.00030940	0.50015470
45	0.00099086	1.00049568	0.00049568	0.50024784
50	0.00151020	1.00075567	0.00075567	0.50037784
55	0.00221103	1.00110674	0.00110674	0.50055337
60	0.00313137	1.00156814	0.00156814	0.50078467
65	0.00431285	1.00215109	0.00215109	0.50108054
70	0.00580068	1.00290878	0.00290878	0.50145439
75	0.00764365	1.00383549	0.00383549	0.50181324
80	0.00993413	1.00497166	0.00497166	0.50248583
85	0.01260300	1.00634399	0.00634399	0.50317200
90	0.01584467	1.00798560	0.00798560	0.50399280
95	0.01966701	1.00993116	0.00993116	0.50496558
100	0.02414131	1.01221813	0.01221813	0.50610927
105	0.02933722	1.01488698	0.01488698	0.50744349
110	0.03532770	1.01798147	0.01798147	0.50899074
115	0.04213888	1.02154900	0.02154900	0.51077450
120	0.05000000	1.02564103	0.02564103	0.51282051
125	0.05884325	1.03031349	0.03031349	0.51515675
130	0.06883359	1.03562744	0.03562744	0.51781372
135	0.07935861	1.04164963	0.04164963	0.52182432
140	0.08242822	1.04345334	0.04345334	0.52422667
145	0.10627443	1.05611923	0.05611923	0.52805962
150	0.12160098	1.06473650	0.06473650	0.53236825
155	0.13850296	1.07440407	0.07440407	0.53720203
160	0.15707632	1.08523214	0.08523214	0.54261607
165	0.17741737	1.09734394	0.09734394	0.54867197
170	0.19962205	1.11087786	0.11087786	0.55543893
175	0.22373528	1.12598999	0.12598999	0.56299500
180	0.25000000	1.14285714	0.14285714	0.57142857

4. táblázat

A TIPUSU KÖRKÖZELITÉS

Θ	t	u^*	H
5	0.087280	0.096735	0.0000000000
10	0.174644	0.210779	0.0000000005
15	0.262174	0.211310	0.0000000058
20	0.349955	0.211331	0.0000000327
25	0.438071	0.211326	0.0000001248
30	0.526610	0.211325	0.0000003726
35	0.615659	0.211325	0.0000009397
40	0.705303	0.211325	0.0000020940
45	0.795649	0.211325	0.0000042455
50	0.886779	0.211325	0.0000079896
55	0.978794	0.211325	0.0000141560
60	1.071797	0.211325	0.0000238644
65	1.165894	0.211325	0.0000385857
70	1.261195	0.211325	0.0000602095
75	1.357817	0.211325	0.0000911183
80	1.455981	0.211325	0.0001342689
85	1.555515	0.211325	0.0001932803
90	1.656854	0.211325	0.0002725300
95	1.760042	0.211325	0.0003772579
100	1.865231	0.211325	0.0005136802
105	1.972582	0.211325	0.0006891122
110	2.082268	0.211325	0.0009121032
115	2.194475	0.211325	0.0011925825
120	2.309401	0.211325	0.0015420209
125	2.427260	0.211325	0.0019736069
130	2.548281	0.211325	0.0025024415
135	2.672715	0.211325	0.0031457537
140	2.800830	0.211325	0.0039231411
145	2.932921	0.211325	0.0048568374
150	3.068308	0.211325	0.0059720139
155	3.210333	0.211325	0.0072971190
160	3.355399	0.211325	0.0088642639
165	3.507906	0.211325	0.0107096616
170	3.665325	0.211325	0.0128741307
175	3.829167	0.211325	0.0154036747
180	4.000000	0.211325	0.0183501542

6. táblázat

B TIPUSU KÖRKÖZELITÉS

Θ	r_o	H_o	H_o/H
5	1.0000000	0.0000000000	0.500000
10	1.0000000	0.0000000003	0.500000
15	1.0000000	0.0000000029	0.500000
20	1.0000000	0.0000000163	0.500000
25	0.9999999	0.0000000624	0.500000
30	0.9999998	0.0000001663	0.500000
35	0.9999995	0.0000004699	0.500000
40	0.9999990	0.0000010470	0.499999
45	0.9999979	0.0000021228	0.499999
50	0.9999960	0.0000039948	0.499998
55	0.9999929	0.0000070779	0.499996
60	0.9999881	0.0000119321	0.499994
65	0.9999807	0.0000192925	0.499990
70	0.9999699	0.0000301038	0.499985
75	0.9999544	0.0000455571	0.499977
80	0.9999329	0.0000671299	0.499966
85	0.9999034	0.0000966308	0.499952
90	0.9998638	0.0001362464	0.499932
95	0.9998114	0.0001885934	0.499906
100	0.9997432	0.0002567741	0.499872
105	0.9996556	0.0003444374	0.499828
110	0.9995442	0.0004558437	0.499772
115	0.9994041	0.0005959359	0.499702
120	0.9992296	0.0007704165	0.499615
125	0.9990142	0.0009858306	0.499507
130	0.9987503	0.0012496571	0.499375
135	0.9984296	0.0015704068	0.499215
140	0.9980423	0.0019577303	0.499021
145	0.9975775	0.0024225358	0.498789
150	0.9970229	0.0029771173	0.498511
155	0.9963647	0.0036352959	0.498182
160	0.9955874	0.0044125748	0.497794
165	0.9946737	0.0053263093	0.497337
170	0.9936041	0.0063958945	0.496802
175	0.9923570	0.0076429724	0.496179
180	0.9909083	0.0090915604	0.495454

7. táblázat

C TIPUSU KÖRKÖZELITÉS

Θ	t	u^*	H_c	H_c/H
5	0.0872803	-0.0432450	0.0000000000	0.723002
10	0.1746438	0.1797485	0.0000000004	0.722222
15	0.2621737	0.1823870	0.0000000042	0.710000
20	0.3499541	0.1820956	0.0000000233	0.719501
25	0.4380696	0.1820531	0.0000000891	0.719851
30	0.5266058	0.1820546	0.0000002660	0.719775
35	0.6156499	0.1820562	0.0000006711	0.719936
40	0.7052903	0.1820581	0.0000014959	0.720153
45	0.7956175	0.1820593	0.0000030342	0.720398
50	0.8867242	0.1820606	0.0000057124	0.720675
55	0.9787054	0.1820622	0.0000101262	0.720968
60	1.0716591	0.1820639	0.0000170796	0.721281
65	1.1656864	0.1820658	0.0000276302	0.721607
70	1.2608920	0.1820678	0.0000431383	0.721947
75	1.3573846	0.1820699	0.0000653205	0.722297
80	1.4552771	0.1820723	0.0000963096	0.722653
85	1.5546875	0.1820748	0.0001387181	0.723012
90	1.6557391	0.1820777	0.0001957083	0.723369
95	1.7585608	0.1820809	0.0002710682	0.723720
100	1.8632885	0.1820845	0.0003692926	0.724061
105	1.9700649	0.1820885	0.0004956720	0.724387
110	2.0790405	0.1820932	0.0006563878	0.724692
115	2.1903746	0.1820986	0.0008586157	0.724972
120	2.3042359	0.1821049	0.0011106375	0.725219
125	2.4208032	0.1821123	0.0014219618	0.725429
130	2.5402672	0.1821209	0.0018034559	0.725594
135	2.6628306	0.1821310	0.0022674880	0.725707
140	2.7887102	0.1821428	0.0028280831	0.725761
145	2.9181377	0.1821566	0.0035010928	0.725748
150	3.0513618	0.1821728	0.0043043815	0.725660
155	3.1886494	0.1821917	0.0052580310	0.725487
160	3.3302877	0.1822138	0.0063845651	0.725220
165	3.4765863	0.1822395	0.0077091993	0.724849
170	3.6278800	0.1822693	0.0092601159	0.724364
175	3.7845307	0.1823038	0.0110687714	0.723752
180	3.9469312	0.1823436	0.0131702379	0.723002

9. táblázat

1985-BEN MEGJELENTEK:

166/1985 Radó Péter: Információs rendszerek számitógépes tervezése

167/1985 Studies in Applied Stochastic Programming I. Szerkesztette: Prékopa András /utánnyomás/

168/1985 Böszörményi László - Kovács László - Martos Balázs - Szabó Miklós: LILIPUTH

169/1985 Horváth Mátyás: Alkatrészgyártási folyamatok automatizált tervezése

170/1985 Márkus Gábor: Algoritmus mátrix alapu logaritmus kiszámitására kriptográfiai alkalmazásokkal

171/1985 Tamás Várady: Integration of free-form surfaces into a volumetric modeller

172/1985 Reviczky János: A számitógépes grafika terület-kitöltő algoritmusai

173/1985 Kacsukné Bruckner Livia: Mozgáspálya generálás bonyolult geometriáju felületek 2 1/2D-s NC megmunkálásához

174/1985 Bolla Marianna: Mátrixok spektrálfelbontásának és szinguláris felbontásának módszerei

175/1985 Hannák László, Radó Péter: Adatmodellek, adatbázis-filozófiák

176/1985 Számitógépes képfeldolgozási és alakfelismerési kutatók találkozója.
Szerkesztette: Csetverikov Dmitirj,
Főglein János és Solt Péter

177/1985 Gyárfás András: Problems from the world surrounding perfect graphs

178/1985 PUBLIKÁCIÓK'84
Szerkesztette: Petróczy Judit