

ALGEBRA

KÖZÉPISKOLÁK SZÁMÁRA

ÍRTA

DR KÖNIG GYULA

MIN. TANÁCSOS, MŰEGYETEMI TANÁR

ÁTDOLGOZTA

DR BEKE MANÓ

EGYETEMI TANÁR

HATODIK KIADÁS



BUDAPEST

AZ ATHENAEUM IRODALMI ÉS NYOMDAI R.-T. KIADÁSA

1909

Az ATHENAEUM irodalmi és nyomdai r.-t. (Budapest, VII. kerület, Rákóczi-út 54.) kiadásában megjelen-
tek és minden h a z a i könyvkereskedésben kapható:

A MAGYAR KÖLTÉS-ZET

KINCSESHÁZA

A MAGYAR TANULÓ IFJUSÁG
ÉS CSALÁD HASZNÁLATÁRA
SZERKESZTETTE

ENDRŐDI SÁNDOR

Nagy 8-rét alak,
szépen kiállítva,
1508 sűrűn nyo-
mott hasábbal.

A nm. vallás- és
közoktatásügyi
miniszter által
ajánlva.

*Ára a Beöthy-féle Magyar Iro-
dalomtörténethez hasonló félbőr-
kötésben 13 korona.
Erős vászonkötésben 10 korona.*

SZÁZADUNK

— ÍRTA —
ENDRŐDI SÁNDOR

MAGYAR IRODALMA

Ára diszes vászon-
kötésben 6 korona.

KÉPEKBEN

918195

ALGEBRA

KÖZÉPISKOLÁK SZÁMÁRA

ÍRTA

DR KÖNIG GYULA

MIN. TANÁCSOS, MŰEGYETEMI TANÁR

ÁTDOLGOZTA

DR BEKE MANÓ

EGYETEMI TANÁR

HATODIK KIADÁS



BUDAPEST

AZ ATHENAEUM IRODALMI ÉS NYOMDAI R.-T. KIADÁSA

1909

**MTA
KIK**



MAGY. AKADEMIA
KÖNYVTÁRA

Budapest, az Athenaeum r.-t. könyvnyomdája.

I. Az algebra jelei.

1. **Képlet** (formula). A közönséges számtanban kiszámítottuk, hogy meghatározott kamatlábbal valamely tőke adott idő alatt mennyit jövedelmez. A szabály, mely a jövedelmet, vagyis a kamat összegét szolgáltatja, amint ismeretes, a következő: Megszorozzuk a tőkét a kamatlábbal és a kamatozási idő éveinek számával, és elosztjuk az így nyert szorzatot százszal,

Legyen pl. a tőke 600 K, a kamatláb 6%, a kölcsönzési idő 2 év; akkor e szabály értelmében az alkotandó szorzat $600 \times 6 \times 2$, vagyis 7200 K, és ha ezt az összeget elosztjuk százszal, megkapjuk a kamat összegét: 72 koronát.

Akármeckorák legyenek is a föladat *számadatai*, mindig ugyanazt a szabályt követjük az eredmény kiszámításánál.

E számításnál követett eljárást, a kamat kiszámításának *szabályát* a következő alakban írjuk fel:

$$\text{Kamat} = \frac{\text{Tőke} \times \text{Kamatláb} \times \text{Évszám}}{100},$$

$$\frac{600 \times 6 \times 2}{100} \text{korona},$$

vagy pedig az egyes szavak helyett csupán a kezdőbetűket írva, a kiszámítandó kamat kifejezése lesz:

$$\frac{T \times K \times E}{100}.$$

Ezt a kamat kiszámításánál végzendő műveletekre vonatkozó, eleinte szavakba foglalt utasítást vagy szabályt *képletbe foglaltuk*. Azokat a számokat, melyeken a műveleteket végezzük, *betűk jelölik*.

A kamatszámításban azt is megtanultuk, hogy a tőke kiszámításának képlete :

$$T = \frac{100 \times \text{kamat}}{\text{Évekszáma} \times \text{kamatláb}}$$

vagy rövidebben (a kamatlábat P -vel jelölve) :

$$T = \frac{100 \times K}{E \times P}.$$

A kamatláb képlete :

$$P = \frac{100 \times K}{E \times T}.$$

Az évek számát pedig a következő képlet szolgáltatja :

$$E = \frac{100 \times K}{T \times P}.$$

2. **Az algebra jelei.** Midőn az ily módon keletkezett rövidítéseket *rendszeresítjük*, vagyis e rövidítések írására állandó szabályokat alkotunk, melyeknek alapján mindenki egyenlően értelmezi azt, amit fölírtunk, a számtannak *külön nyelve* és *írásmódja* fejlődik, melynek elemei :

1. A *betűk*. Ezek oly számoknak tekintendők, melyek nagyságával egyelőre nem törődünk.

2. A *műveleti jelek*, melyeknek föladata, pontosan kijelölni a művelet (összeadás, szorzás stb.) nemét, melyet két vagy több számmal végrehajtani akarunk.

3. Az *egyenlőség jele* : $=$, a közönséges számtanból szintén ismeretes ; $a=b$ azt fejezi ki, hogy a ugyanazt a számot jelöli, mint b , azaz : a azonos b -vel (identikus).

A legegyszerűbb műveleti jelek, melyek különben már részben a számtanból ismeretesek, a következők :

1. Az *összeadás jele* álló kereszt $+$ (olvasd : *plus*, több), melyet az összeadandó számok közé írunk, pl. $4+3$, vagy ha az összeadandókat a és b -vel jelöljük : $a+b$, hasonlóképp több szám összegénél : $4+3+10$, vagy $x+y+z$.

2. A *kivonás jele* fekvő vonás $-$ (olvasd : *minus*, kevesebb), mely a kisebbítendő és kivonandó számértékek közt foglal helyet ; ily módon $10-3$ jelenti azt az eredményt, melyet nyerünk, ha a 10-ből 3-at kivonunk, ép így : $a-b$, vagy $P-Q$.

3. A *szorzás jele* a közönséges számtanban fekvő kereszt: $\times$, melyet azonban csak ritkán lesz alkalmunk használni; helyette ezentúl egyszerűen pontot teszünk. Így pl. 4. 3 így olvasandó: négyszer három.*) Sőt ahol csak lehet, még a pontot is elhagyjuk, úgy, hogy egyszerűen két egymás mellé írt betű egymással szorzandó lesz, pl. ab (a -szor b), $4M$ (4-szer M), amit azután az írásnak megfelelő rövideggel így mondunk: ab , négy M .

4. Az *osztás jele*, melyet a számtanban rendszeren használunk, a kettős pont ($:$), ezentúl ritkábban fordul elő, mert az osztás jelölésére többnyire a törtvonást használjuk, úgy hogy az osztandót föléje, az osztót alája írjuk. Pl. $\frac{a}{b}$, $\frac{10}{2}$, vagy $a : b$ és $10 : 2$.

3. **Algebrai kifejezés.** Ha két vagy több számot (betűvel jelöltet, vagy közönségeset) az említett műveleti jelekkel összekapcsolunk, akkor keletkezik az *algebrai kifejezés*. Ilyen algebrai kifejezések pl.: ab , $a+b$, $a-b$, $a+b-c$, $\frac{a}{b}+c$, $5a+3$ stb.

4. **Zárójel.** Az algebrai kifejezésekkel szintén végezhetünk műveleteket. Így pl. ha a és b összegét meg kell szoroznunk c -vel, akkor az eddigi jelzést használva, $a+bc$ alakra jutunk; de ugyanilyen alakú kifejezést nyernénk akkor is, ha a -hoz hozzá kellene adnunk bc szorzatot. Már pedig e két műveletsor egymástól különbözik. Így pl. ha $a=10$, $b=5$ és $c=3$, akkor az első (a és b összege $10+5=15$ szorzandó 3-mal) eredménye 45, a másodiké pedig (a -hoz adassék bc szorzat, vagyis 10-hez adassék $3 \cdot 5=15$) 25.

Hogy e félreértést elkerüljük, megállapodunk abban, hogy az első műveletsort így jelöljük: $(a+b)c$, a másodikat pedig zárójel nélkül: $a+bc$.

A zárójeleket rendszerint akkor használjuk, ha valamely algebrai kifejezéssel kell műveletet végeznünk. Ekkor ugyanis azon számokat, melyeket *előbb kell egyesítenünk*, félreértés elkerülése végett zárójelbe tesszük annak jelöléseül, hogy ez a zárójelbe tett kifejezés a műveletek során *egy* számnak tekintendő. Így pl.: az előbbi példánkban $(a+b)c$ azt jelenti, hogy a és b -t előbb össze kell adnunk és a nyert összeget c -vel kell szoroznunk. Ha pedig előbb b és c -t egymással szoroznunk kell

*) 4.3 jól megkülönböztetendő 4·3-tól, a szorzás jele a tizedes ponttól.

és ezt a szorzatot a -hoz kell adnunk, akkor így kellene írunk: $a+(bc)$; de ehelyett egyszerűen $a+bc$ -t írunk.

Általában, ha félreértés nem foroghat fenn, a zárójel elhagyható. Így pl.: nem kell $\frac{(a+b)}{c}$ -t írunk, elég $\frac{a+b}{c}$.

Némelykor több zárójelet kell használnunk. Így pl.: ha $(a+b)c+d$ szorzandó $x+y$ -al, akkor ezt így kell írunk: $[(a+b)c+d](x+y)$.

5. Helyettesítés. A képlet használatánál a képletben előforduló betűk helyett a betűk által jelölt számokat kell tennünk, e számokat kell *helyettesítenünk*. Így pl.: $\frac{ab}{c}$ értéke, ha $a=5$,

$b=9$, $c=3$: $\frac{5 \cdot 9}{3} = 15$; és $\frac{ab+c}{6}$ értéke ugyanekkor

$$\frac{5 \cdot 9 + 3}{6} = \frac{48}{6} = 8.$$

Feladatok.

Képletek felállítása, azok használata. Helyettesítés.

1. A nyereséget hogyan számítjuk ki? (Legyen b a beszerzés ára, e az eladás ára, n a nyereség.)

Megoldás: A nyereség $n = e - b$.

2. 1 kg valamely áruból a K; mennyibe kerül m kg?

3. m kg valamely áruból c K: mennyibe kerül 1 kg? Mennyibe kerül n kg?

4. 1 kg valamely áruból e K; t K-ért hány kg-ot kapunk?

5. Mekkora a -nak $\frac{1}{2}$ -e, $\frac{2}{3}$ -a, $\frac{5}{6}$ -a? Mekkora a 6-szorosa?

6. Vételár a K, nyereség n K. Hány % a nyereség?

Megoldás: a koronán nyerünk n koronát, akkor 1 koronán nyerünk $\frac{n}{a}$ és 100 koronán $\frac{100n}{a}$ koronát. — (Fejezd ki szavakkal ezt az eljárást!)

7. Vételár a K. Nyeresség p %. Mekkora a nyereség? Mekkora az eladás-ár?

8. Vételár a K. Veszteség p %. Mekkora a veszteség? Mekkora az eladás-ár?

9. t K e évre p % évi kamatlábbal mennyi kamatot hajt? h óra mennyit? n napra mennyit?

Megoldás menete: 100 K 1 évre p K-t hajt

$$1 \gg 1 \gg \frac{p}{100} \gg \gg$$

$$t \gg 1 \gg \frac{pt}{100} \gg \gg$$

$$t \gg e \gg \frac{pte}{100} \gg \gg$$

10. Valamely könyv bolti ára a K. Elengednek p % rabattot. Mennyit kell érte fizetnünk?

11. a K-t el kell osztani két részre, melyek olyan arányban legyenek, mint 3 az 5-höz. Mekkora e részek?

12. a koronát el kell osztanunk 3 részre, melyek oly arányban legyenek, mint $x:y:z$. Mekkora e részek?

13. Összekeverünk a kg m filléres és b kg n filléres árut. Mennyi lesz a keverék kg-jának ára?

14. Valamely derékszögű négyszög hossza a m, szélessége b m. Mekkora a területe?

15. Valamely háromszög alapja a m, magassága m m. Mekkora a területe?

16. Egy kör sugara r m. Mekkora a kerülete? Mekkora a területe?

17. Egy trapéz párhuzamos oldalainak hossza a és b m. Magassága c m. Mekkora a területe?

18. Valamely egyenes négyoldalú oszlop hossza a dm, szélessége b dm és magassága c dm. Mekkora a köbtartalma? Mekkora a felszíne?

19. Egy négyoldalú pirámis alapja négyzet, melynek oldala a dm hosszú. A pirámis magassága m dm. Mekkora a köbtartalma?

20. Egyenes henger magassága m méter. Alapkörének sugara r m. Mekkora a palástja és mekkora a köbtartalma?

21. Egy kúp alapkörének sugara r dm, magassága m dm. Mekkora a köbtartalma?

22. Mekkora az r dm sugarú gömb felülete és mekkora a köbtartalma?

23. Valaki óránként c km-nyire megy. Milyen messzire megy t óra alatt?

24. Valaki t óra alatt ment s km-nyire. Milyen messze ment 1 óra alatt?

25. Ha minden óra alatt mentünk c km-nyire, hány óra alatt jutottunk s km-nyire?

26. Egy kétjegyű szám a egyesből és b tizesből áll. Írd fel! $(b \cdot 10 + a)$.
27. Egy szám a egyesből, b tizesből, c százashoz áll. Melyik ez a szám?
28. Melyik az a négyjegyű szám, melynek jegyei sorban: a, b, c, d ?
29. Melyik az az 5 jegyű szám, melynek első, harmadik és 5-ik egye a , második és negyedik jegye b ?

30. Számítsuk ki a képlet szerint, hogy $a)$ 560 K 2 év alatt 4%-kal $b)$ 750 K 5 hó alatt 4½%-kal $c)$ 720 K 45 nap alatt 5½%-kal mekkora kamatot hajt.

31. Számítsuk ki a képlet szerint, hogy mekkora utat ír le 5 ó. 10' alatt az, aki óránként 4·5 km-t tesz meg?

32. Mekkora a 3 m sugarú kör kerülete és mekkora a területe?

33. Mekkora azon derékszögű négyszög területe, melynek hossza 56 m, szélessége 24 m? (Képlet szerint.)

34. Valamely könyv bolti ára 14·5 K, rabatt 30%. Mennyit fizetünk érte? (Képlet szerint.)

35. Vásároltunk m kg árut kg-onként e koronáért. A vételárból leengednek p % skontót. Mennyi e sconto és mennyit kell fizetnünk? (Legyen $e=1\cdot75$ K, $m=125$, $p=3$.)

36. Egy telek hossza a m, szélessége b m. Eladjuk $\frac{2}{5}$ részét m^2 -enkint e K-ért, a többi $\frac{3}{5}$ részt m^2 -enkint f K-ért. Mennyi a bevételünk? (Legyen $a=42$, $b=35$, $e=18$, $f=20$.)

37. A magyar gimnáziumokba járt G tanuló; a reáliskolákba R tanuló. A gimnáziumokban megbukott g , a reáliskolákban r . Hány % bukott a gimnáziumokban, hány a reáliskolákban? Hány % bukott összesen a középiskolákban? (Legyen $G=34802$, $R=7314$, $g=7528$, $r=1736$.)

38. Vásárlunk 2 hordó kávé. Az elsőben a kg, a másodikban b kg van, 1 kg ára c K. Mennyibe kerül az egész? (Legyen $a=72$, $b=3$, $c=3\cdot5$.)

39. Összekeverünk a kg m filléres, b kg n filléres és c kg p filléres kávé. Mennyibe kerül az egész keverék? Mennyibe kerül 1 kg? (Helyettesítendő: $a=62$, $b=228$, $c=35$, $m=332$, $n=340$, $p=345$.)

40. Mi lesz a következő kifejezések értéke?

$$a) 9a+3b+4c, \quad b) 9a+3b+5c, \quad c) 9a+5b+bc,$$

$$d) abc+bcd+cde+def, \quad e) abcd-bcd+cdef-def,$$

ha $a=5$, $b=4$, $c=2$, $d=10$, $e=1$, $f=3$,

41. Mi a következő kifejezések értéke?

- a) $(a+b)(c+d)$ b) $(a+b)c+d$ c) $a+b(c+d)$
 d) $a+b c+d$ e) $(a+b+c)d$ f) $a+b+cd$

ha $a=25$, $b=13$, $c=31$, $d=26$.

42. Kiszámítandó:

- a) $1-\frac{a}{b}$ b) $2+\frac{a+b}{c}$ c) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ d) $\frac{ab}{3}-\frac{2}{5}$
 e) $\frac{4a}{c}+\frac{7b}{d}+\frac{2f}{c}-\frac{2b}{c}$ f) $\frac{4ab}{e}+\frac{5cd}{f}+\frac{7ce}{a}$

ha $a=2$, $b=3$, $c=4$, $d=5$, $e=6$, $f=10$.

43. a) $(a+b)c+(d+e)f$ b) $(a-b)c+(d-e)f$
 c) $(a+b)c-(d-e)f$ d) $2(a+b)c+3(b+c)a-(c+a)b$
 e) $3(a-b)c+(a+b+c)d-f$

ha $a=10$, $b=9$, $c=8$, $d=7$, $e=6$, $f=5$.

44. Kiszámítandó a) $[(a+b)c+(d+e)f]g$, b) $[(a-b)c+d]e$
 c) $[(a+b)(c+d+(a+b)(c+e))](e+f)+(a+b)c$

ha $a=10$, $b=6$, $c=3$, $d=1$, $e=5$, $f=3$.

45. Írd fel a következőket algebrai jelekkel: a) a és b összege szoroztassék c -vel, b) a és b különbsége szoroztassék c -vel, c) a -hoz adassék b és c szorzata, d) a -ból vonassék le b és c szorzata. Mennyit ér mindenik kifejezés, ha $a=395$, $b=17$, $c=5$.

46. a) a és b összege szoroztassék a és b különbségével, b) a -hoz adassék $3b$ és az összeg szoroztassék 9 -cel, c) a szoroztassék 5 -tel és a szorzathoz adassék b , d) a és b összegének 2 -szereséből vonassék le a és b különbségének 3 -szorosa. Mennyit ér mindenik, ha $a=12$, $b=3$.

47. a) a és b összege szoroztassék c és d összegével, b) a és b összege szoroztassék c és d különbségével, c) a és b különbsége szoroztassék c és d összegével, d) a és b különbsége szoroztassék c és d különbségével. Mennyit ér mindenik kifejezés, ha $a=15$, $b=7$, $c=23$, $d=9$.

48. Mondjuk el, minő műveletek végzendők ezen algebrai kifejezések kiszámításánál: a) $(a+b)c+d$. [Igy: a és b összege szoroztassék c -vel és az így nyert szorzathoz adassék: d] b) $(a-b)c+d$, c) $(ab-c)d$, d) $(a+b)(c+d)$, e) $(a-b)(c+d)$, f) $(a-bc)d$, g) $ab-cd$.

49. Olvassuk el ezeket is:

- a) $(a+b+c)d+e$, b) $(a+bc)(d+e)$, c) $(a+b)c-de$
 d) $(a-bc)de$, e) $(ab-c)(d-e)$, f) $(a+b-c)d-e$,
 g) $(a+b-c)(d-e)$

és számítsuk ki mindegyiket; ha $a=12$, $b=2$, $c=3$, $d=7$, $e=4$.

50. Olvassuk el ezeket is :

- a) $[(a+b)c-d]e-f$, b) $[(a-2)b+(c-3)d](e-5)$,
 c) $[(10-a)(10-b)-(10-c)(10-d)][(10-ab)-(10-cd)]$,
 d) $[(5-a)(5-b)-13](a-b)-[(6-a)(6-b)-15](a+b)$.

6. **Kitevő** (*exponens*) és **hatvány** (*potentia*). Sokszor fordul elő, hogy egyenlő számokat kell szoroznunk. Ennek a műveletnek a közönséges számtanban nem adtunk külön nevet, itt az algebrában a szorzásnak ezt a nemét *hatványozásnak* nevezzük és a szorzatot egyszerűbben is jelöljük. Ha a szorzandó a , akkor $a \cdot a$ vagy aa helyett rövidebben a^2 (olvasd: a második hatványa, vagy négyzete), $a \cdot a \cdot a$ helyett a^3 (olvasd: a harmadik hatványa, vagy a köbe), $a \cdot a \cdot a \cdot a$ helyett a^4 (a 4-dik hatványa) mondjuk és írjuk stb. a^n -nel jelöljük (a n -edik hatványa) azon n tényező szorzatát, melyek mind egyenlők a -val.

Az a -t, vagyis azt a számot, mely többször vétetik tényezőül: *alapnak* (basis), n -et, vagyis azt a számot, mely megmutatja, hogy az alap hányszor vétessék tényezőül: *kitevőnek* (exponens) és a nyert szorzatot *hatványnak* (potentia) hívjuk.

Némelykor összeg, különbség, szorzat vagy más algebrai kifejezés hatványát kell előállítanunk és akkor az alapot félreértés elkerülése végett zárójelbe tesszük. Így pl.: $(a+b)^2$ azt jelenti, hogy $(a+b)$ szoroztassék $(a+b)$ -vel; ellenben $a+b^2$ azt jelenti, hogy a -hoz adassék b^2 . E kettő pedig egymástól különböző.

Példák:

2 hatványai: $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32 \dots$

3 » : $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243 \dots$

Feladatok.

A hatványozás fogalmának begyakorlása.

Kiszámítandó a következő kifejezések értéke:

1. $3b^2$. 2. $5a^3$. 3. $10b^4$. 4. $6ab^3d$.

5. $3a^2b^2c^3d$. 6. $d^3+e^2-8ab+f$.

7. $2a^3+3b^2-2c+5d^2-e^2$,

ha $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$, $e=5$, $f=0$.

8. a^b-b^a . 9. $a^b+b^c-c^b$. 10. $a^b b^c-2c^a$.

11. $(a+b)^c$.

12. $(b+c)^a + (c+a)^b$. 13. $(a+b-c)^{a-1}$. 14. a^{b+c} ,
 ha $a=3$, $b=2$, $c=3$.
15. Kiszámítandók: $(a+b)^3$, $a+b^3$, a^3+b , a^3+b^3 , ha
 $a=4$, $b=3$.
16. Kiszámítandók: $2a^3$ és $(2a)^3$; $5a^4$ és $(5a)^4$; $7a^2$ és $(7a)^2$, ha
 $a=3$.
17. Kiszámítandók: $(abc)^2$, abc^2 , ab^2c , a^2bc , ha $a=7$, $b=5$, $c=3$.
18. Kiszámítandók: $(9+a)^2$, $9a^2$, $(9a)^2$ $9+a^2$, ha $a=71$.
19. Állítsuk elő 10 hatványait (7-ikig).
20. Egy négyzet oldala a méter. Mekkora a kerülete, mekkora
 a területe? (Legyen $a=37$.)
21. Egy kocka éle a méter. Mekkora az élei együttvéve? Mek-
 kora a felülete? Mekkora a köbtartalma? (Legyen $a=21$ m.)
22. Egy egyenes hasáb alapja négyzet, melynek oldala a méter
 hosszú. A hasáb magassága b m. Mekkora az éleinek hossza együt-
 téve? Mekkora a felülete és mekkora a köbtartalma? (Legyen $a=7$
 m , $b=13$ m.)
23. A kör területe: $r^2\pi$, ha r a kör sugara és $\pi=3\cdot 14$. Mekkora
 azon kör területe, melynek sugara a) 34 m? b) 74 m?
24. Mekkora a körhenger köbtartalma, ha alapkörének sugara r ,
 magassága: m . (Legyen $r=13$ m, $m=35$ m.)
25. A gömb felülete $4r^2\pi$ (ha r a gömb sugara). Mekkora azon gömb
 felülete, melynek sugara a) 6 m, b) 15 m, c) 23 m.
26. Az r sugarú gömb köbtartalma: $\frac{4r^3\pi}{3}$. Mekkora az előbbi
 feladatban említett gömbök köbtartalmai?
27. a) Mekkora azon 3 négyzet területe együttvéve, melynek oldalai:
 a , b és c m? b) Mekkora azon négyzet területe, melynek oldala $a+b+c$
 méter? (Legyen $a=15$, $b=21$, $c=27$.)
28. a) Mekkora azon két kocka köbtartalma együttvéve, melyek
 közül az első éle a m, a másodiké b m? b) mekkora azon kocka köb-
 tartalma, melyek éle $a+b$ m? (Legyen $a=7$, $b=5$.)
29. Számítsuk ki 2 hatványait (8-ikig).
30. Számítsuk ki 3 hatványait (8-ikig).
31. Számítsuk ki 5 hatványait (6-ikig).
32. Számítsuk ki 7 hatványait (5-ikig).
33. Számítsuk ki az első 100 szám négyzeteit!
34. Számítsuk ki az első 20 szám köbeit!
35. Számítsuk ki az első 10 szám negyedik hatványait!

II. A negatív számok.

7. A negatív szám. Az első fejezet szabályai szerint, ha valamely algebrai kifejezésre vonatkozólag adva vannak a betűk számértékei, kiszámíthatjuk magának a kifejezésnek értékét, ha a követelt műveleteket végre tudjuk hajtani. Így pl. ab , vagy $a^2 + b^2$ mindig meghatározott számbeli értéket fog adni; akármekkora legyen az a és b , mindig kiszámíthatjuk az ab , vagy $a^2 + b^2$ kifejezéseket, mert a szorzást és összeadást mindig elvégezhetjük. Másképp áll azonban a dolog a *kivonással*. Ez a kifejezés: $a - b$, ha pl. $a = 8$ és $b = 10$, egészen újnemű nehézséget okoz. A számtanban azt kellett mondanunk, hogy a 8-ból 10-et *nem lehet* kivonni, és így $a - b$ -nek ily esetben *értéket* tulajdonítani képtelenségnek látszik. Hogy a dolgot jobban megvizsgálhassuk, oly föladatot keresünk, hol ez a képtelenség tartott követelés valósággal előfordul. Ilyen lesz pl. a következő:

1. Példa. *Két fiu közül az elsőnek hat korona ára könyv kell; a másodiknak pedig 10 korona ára. Mindegyik kap a könyvek vásárlására 8 koronát; mennyi pénze marad mindegyiknek a könyvek megvétele után?*

Itt két egyenlő természetű feladatunk van, melyek csak a számadatokban különböznek egymástól. Ha a rendelkezésre álló összeget a -val, a könyvek árát pedig b -vel jelöljük, a megmaradt pénz adva lesz e képlet által: $a - b$. Már most az első fiura nézve $a = 8$, $b = 6$ és így $a - b = 2$. Az első fiunak tehát két koronája marad. A második fiu esetében ismét $a = 8$, de $b = 10$ és így $a - b = 8 - 10$. Ezt nem tudjuk kiszámítani, de még egyelőre értelmet sem tudunk hozzákötni. Ha azonban magát a föladatot még egyszer átgondoljuk, csakhamar rájövünk, hogy a második fiunak nem marad pénze, hanem ellenkezőleg még 2 koronája hiányzik, azaz ha mégis megvette a könyveket, ami marad, nem *vagyon* lesz, hanem 2 korona *adósság*. Vagyis más szóval: marad 2 K *hiány*; azaz 2 K *adósság*.

A $8 - 10$ így is értelmezhető: a 8 koronából csak 8 koronát lehet kiadni, s akkor 0 K-ja marad; e 0 K-ból kellene fődöznie még 2 koronát, ami lehetetlenség; tehát két korona fődözet nélkül marad.

8 koronából 10 koronát elvenni, mint látjuk, ugyanaz a

feladat, mint 0-ból 2 koronát elvenni: $0-2$ K, melyet -2 koronával jelölünk és a korona elnevezés mellett álló számot minus 2-nek olvassuk. Az ilyen számot *negatív számnak* hívjuk, ellentétben azokkal, melyekre a közönséges számlálás vezet és melyeket *pozitív számoknak* hívunk.

2. Példa: *Tiberius római császárt megölték 37-ben Krisztus születése után, uralkodásának 23-ik és életének 79-ik évében; mikor lépett trónra és mikor született Tiberius?*

Ha valamely esemény évszáma: a és egy második esemény b évvel előbb történt, akkor a második eseménynek megfelelő évszám lesz: $a-b$. Most már az első kérdésre vonatkozólag $a=37$, $b=23$ és így

$$a-b=37-23=14$$

azaz Tiberius trónraléptének ideje 14 Kr. sz. u. A második kérdésnél $a=37$, $b=79$. Ha 37-ből elveszek 79-et, marad 0; ebből még 42-t kell kivonnom, vagyis:

$$a-b=37-79=0-42=-42.$$

Mit jelent itt az eredmény? Ha a föladatot minden általános minta nélkül, egyszerű következtetésekkel oldjuk meg, erre könnyen rájövünk. Minthogy Tiberius Kr. sz. u. 37-ben már 79 éves volt, világos, hogy Kr. előtt született, még pedig, minthogy Kr. születésekor 79—37, azaz 42 éves volt, a 42-ik évben Kr. születése előtt.

3. Példa. *Ketten elindulnak egy helyről és együtt mennek 500 méternyire. Onnan A visszafelé megy 360 méterrel, B pedig 920 méterrel; minő távolságban lesznek ekkor attól a ponttól, melyből eredetileg kiindultak?*

Az A távolsága lesz: $500-360$ m. = 140 m.; a B távolságát így okoskodjuk ki: midőn B megfordul, 500 méternyire kell haladnia, hogy arra a pontra érjen, ahonnan kiindult, és miután mindössze 920 métert tesz meg, még 420 méternyire távozik a kezdőponttól. Tehát végül ettől a ponttól 420 méterre lesz, de az első haladási iránnyal *ellenkező* irányban.

Ugyanezt az eredményt nyerjük közvetlenül a számolás által. Lesz $500-920=-420$, hol a 420 is métert jelent, de a kisebbitendővel *ellentétben* a méterek olvasásában itt is *irányváltás* történik.

4. Példa: *Egy téli napon délben a hőmérő 5^o-ot mutat a zéruspont fölött; éjjelig a hőmérsék 9 fokkal alábbszáll; mi lesz ekkor a hőmérsék állása?*

Ha a hőmérsék csak 5 fokkal szállna alá, a hőmérő éppen zéruson állana, de még négy fokkal tovább menve, a hőmérő végül 4 fokot mutat a zérus alatt.

A számítás a következő értékhez vezet: $5 - 9 = -4$. Tehát 4 fok, de az eredeti fokokkal *ellentétben*, tehát nem a 0 fölött, hanem a 0 alatt.

Mind a négy példánál olyan tárgyról volt szó, melynek ellentéte is gondolható: vagyon, adósság; Kr. születése utáni és előtti idő; egy helytől jobbra vagy balra mért távolság; a 0 fölötti és alatti fokok.

Ha az első feladatnál azt kérdezik, mennyi adóssága lesz a második fiúnak, azt kell mondanunk: 2 K. Ha pedig itt is azt kérdezik, mennyi vagyona lesz a könyvvásárlás után, azt kell mondanunk: -2 K vagyona lesz (azaz 2 K adóssága). Ha a második feladatnál azt kérdezik, hogy Tiberius császár hány évvel született Krisztus előtt, azt mondjuk: 42-vel; ha azonban azt kérdezik, hány évvel született Kr. után, azt mondhatjuk, hogy -42 -vel, s i. t.

Látjuk tehát, hogy *csupán a kérdés fogalmazásától függ, vajjon az eredmény közönséges, azaz pozitív vagy pedig negatív számokban lesz-e kifejezendő.*

E példáinkban előforduló pozitív és negatív számok eddig mindig megnevezett számok voltak. A tárgyban lehetséges ellentét adja a pozitív és negatív számok ellentétét. (Vagyon, adósság; Kr. előtti és Kr. utáni idő; járás előre és visszafelé, fokok 0 fölött és 0 alatt.)

8. **A számsor tágitása.** A közönséges (pozitív) egész számok az egység többszörös ismétlése által keletkeznek. Így pl. »egy meg egy meg egy« határozott számfogalom, melynek azután csak könnyebb érthetőség, kényelmesebb kimondás végett adjuk ezt az új nevet: három. Így tehát mondhatjuk, hogy a közönséges (pozitív) egész számok azáltal keletkeznek, hogy a zérus hoz, a semmihez ismételve hozzágondoltuk az egységet. Ezáltal nyerjük a közönséges számsort:

0, 1, 2, 3,, a , $a+1$, $a+2$,

E számsor még nem szolgáltatja a negatív számokat. Eddig csak egy átmenetet állapítottunk meg, az egység hozzákapcsolását. A számsorban ennek segítségével *fölfelé* járunk. Az 1-től ezáltal eljutunk a 2-hez, az a -tól az $a+1$ -hez. De visszamenni a 2-től az 1-hez, az $a+1$ -től az a -hoz ily módon nem lehet. Erre az egység hozzákapcsolásának az ellenkezője, az egység elvétele kívántatik, melynek segítségével a számsorban *lefelé* járunk.

Az egységet ily módon elvenni, a számsorban lefelé járni, semmi nehézséget nem okoz, míg a 0-hoz jövünk, de ez alatt nincs többé szám, s így ha ezt az új műveletet határtalanul végezhetővé akarjuk tenni, magát a számsort kell *tágítani*.

S most azt mondjuk, hogy azt a számot, mely a 0-ból az egység elvétele által származik, nevezzük -1 -nek, a 2 elvétele által keletkezik a -2 , s i. t. Ezáltal a számsor az ellenkező irányban is határtalan kiterjedésű lesz és alakja:

. $-a$, -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , a ,

Az a és $-a$ egészen hasonlóan keletkezik azáltal, hogy a 0-tól kezdve a lépésnyire megyünk a számsorban, de *ellenkező* irányokban. Ez az egyöntetűség még jobban szembetűnik, hogyha tekintetbe vesszük, hogy a $-a$ -t eredetileg mint a $0-a$ rövidítését vezettük be, és hogy az a -t ép úgy lehet írni: $0+a$, vagy a 0 kihagyása után: $+a$ alakban. Az a -hoz hozzácsatolt $+$ vagy $-$ *előjel* most tehát az *irányt jelöli, melyben a szám soron áthaladunk*.

A $+a$ vagy $-a$ -ban a $+$ vagy $-$ jel kétféleképp fogható tehát föl, vagy mint *műveleti jel*, mely előtt ki van hagyva a 0, *melyen* a művelet végzendő, vagy pedig mint az a -tól elválaszthatatlan jel, úgynevezett *előjel*, mely vele együtt mutatja a szám helyét a számsorban. Megállapodunk abban, hogy $+a$ helyett egyszerűen a -t írunk, s általában:

Előjel nélkül írt számhoz mindig $a+$ (plus) előjelt gondoljunk hozzá.

A negatív számok bevezetése után az algebrai kifejezések értelmezésében új feladat lép föl. Így pl. ha $a=8$, $b=10$, $c=5$, e képletek $(a-b)+c$ vagy $(a-b)c$ negatív számokon végzendő műveleteket tartalmaznak. Azért tehát a tágított számsorra vonatkozó műveletszabályokat kell mindenekelőtt megállapítanunk. Fölhasználjuk egyszersmind az alkalmat arra, hogy a számtanban tanult műveleteket újból áttekintsük.

Feladatok.

A negatív szám értelmének begyakorlása.

1. Vételár 674 K, eladás-ár 598 K. Mennyi a nyereség?
2. Bevétel 1096 K, kiadás 1234 K. Mennyi a felesleg?
3. *A*-nak 276 K-ja van, *B*-nek 320 K-ja. Mennyivel több *A* pénze, mint *B*-é?
4. Délben 5° C. volt a hőmérsék. Estig 8° -kal süllyedt a thermometer. Mennyi volt este a hőmérsék?
5. Számítsuk ki 52—73, 69—85, 5—27, 78—1056, 5—98, 105—223, 139—245, 578—817-et.
6. Valakinek 1035 K tartozása és 1376 K követelése van. Mennyi a tiszta vagyona?
7. Valakinek 275 K tartozása és 321 K követelése van. Mennyi a vagyona?
8. Mennyivel több 781 mint 596? Mennyivel több 596 mint 781?
9. Valaki vásárolt 75 hl bort hektoliterenkint 46·5 K-ért. Eladott belőle 42 hl—t, hl-enként 45·2 K-ért; a többi thl-enként 41·3 K-ért. Mennyit nyert?
10. Valakinek havi (30 nap) bevétele 254 K. Napi kiadása volt 6 K, házbérre kiadott 140 K-t, egyéb kiadása volt 57 K. Mennyit takarított meg e hónapban?
11. Egy kereskedő vásárolt 675 kg kávé 2·8 K-jával. Eladta $\frac{2}{3}$ -ét kg-onként 3·2 K-ért, a többi, mivel egy kissé megromlott, kg-onként 2·4 K-ért. Mennyi a nyeresége?
12. Egy kereskedő vásárolt 400 *q* búzát 16 K-val. Beszáradt a búza 3%-a. Eladja a maradéknak $\frac{1}{4}$ -ét métermázsánként 15 K-val, $\frac{2}{3}$ -ét 15·6 K-val, a többi vételáron. Mennyi a nyeresége?
13. 23° Fahrenheit hány Celsius-féle fok? Hány Réaumur-féle? 14° F. hány C° , hány R° ; 5° F. hány C° , hány R° ? (1° F = $-\frac{5}{9}^{\circ}$ C = $-\frac{4}{9}^{\circ}$ R. de a C. és R. 0 pontján 32° F. jelzés áll.)
14. A terpentinolaj -10° -nál megfagy. Hány fokkal kell 25° -u olajat lehűteni, hogy megfagyjon?
15. Egy téli napon reggel 7 órakor $-12^{\circ}5'$ C. volt a hőmérséklet. 2 órakor $-6^{\circ}8'$ és este 9 órakor $-15^{\circ}6'$. Mekkora volt a középhőmérséklet?
16. Reggel -15° volt, délig 6° -kal emelkedett a hőmérséklet és déltől estig megint 8° -kal süllyedt. Mennyi volt délben és mennyi este?

17. A Duna vízállása (magassága a megállapított 0 pont felett) valamely napon 2 m. Egy hét alatt 5 méterrel süllyedt a Duna felszíne. Mekkora lett a vízállás?

18. Egy fadarab súlya 4 kg. Leszorítjuk a víz alá, ahol 5 kg-ot veszít a súlyából (vagyis a víz felhajtó ereje akkora, mint 5 kg súlya). Mit kell mondanunk, mennyi e fadarab súlya a vízben?

III. Algebrai egész kifejezések összevonása.

9. Algebrai egész és tört kifejezés. A műveletek első áttekintésénél arra az esetre szorítkozunk, hol az összekapcsolandó számértékek mindannyian (pozitív vagy negatív) egész számok. A számok jelzésére használt betűk tehát a legközelebbi fejezetekben egész számokat jelentenek, — mindaddig, míg az egész számokon végrehajtandó műveletek teljes ismerete után külön tárgyalásban át nem térünk a törtekre.

Ha valmely algebrai kifejezésben a benne előforduló számok és betűk csak összeadás és szorzás által vannak összekötve, akkor az a betűk minden egész számú értékénél egész számú értéket ad, mert egész számok összeadása és szorzása megint csak egész számú értékhez vezet. Az ily alakot *algebrai egész kifejezésnek* nevezzük, s az ilyenre vonatkoznak mostani vizsgálataink. Efféle kifejezések pl.:

$$a^2 + b^2, \quad 3ab + 9a^2b + 3e - 5, \quad (a + b - c)(a^2 + b^2 - c^2) + d - 2e, \text{ stb.}$$

Ha valamely algebrai kifejezésben osztás is fordul elő, akkor ezt *tört kifejezésnek* nevezzük, ilyen pl.:

$$\frac{a + 71b}{a + 8b}$$

10. Pozitív számok összeadása. Két közönséges szám, pl. a és b összege (*summa*) alatt azt a számot értjük, mely ugyanannyi egységet foglal magában, mint amennyit a és b együtvéve magukban foglalnak. A megadott számok (a és b) az *összeadandók*. Az összeg képezése nem más, mint az *összeadás* (*additio*) művelete. Az összeadást úgy hajtjuk végre, hogy az a -hoz hozzákapcsoljuk, hozzászámláljuk a b egységeit, vagy pedig megfordítva a b -hez az a egységeit. Az első módon végzett összeadás eredménye: $a + b$, a másodiké $b + a$. A számtanból

tudjuk, hogy a két mód ugyanegy eredményhez vezet, s így az összeadás első törvényét következőleg írhatjuk algebrai jelzésben:

$$a+b=b+a.$$

Az összeadandók sorrendje tetszés szerinti, az összeadandók felcserélhetők. Ez a tétel oly egyszerű és világos s a közönséges számtanból annyira ismeretes, hogy egyszerűbb tételre visszavezetni, azaz bebizonyítani, épen egyszerűsége miatt, nem is szükséges.

11. Összeg összeadása. Ha 23-hoz kell 4-et adnunk, akkor tulajdonképen összeghez (20+3-hoz) adunk egy számot. Mind-egy, akár a 3 egyeshez csatoljuk a 4-et és azután a 20-hoz a 7-et, akár a 20-hoz a 4-et és a 24-hez a 3-at. — Látjuk már ezen a példán is, hogy mikor összeghez kell egy számot adnunk, azt a számot *akármelyik összeadandóhoz* csatolhatjuk. Képletben:

$$(a+b)+c=(a+c)+b=a+(b+c).$$

Az első esetben az a -hoz csatoltuk a c összeadandót és az így nyert összeghez adtuk a b -t, a második esetben pedig a b -hez kapcsoltuk a c -t és az így nyert összeget adtuk az a -hoz. Látjuk, hogy a zárójelbe akármelyik két tagot foglalhatjuk, tehát nem támad félreértés, ha a zárójelet egészen elhagyjuk; ezért az $(a+b)+c$, vagy a vele egyenlő értékű $a+(b+c)$ összeget így írjuk:

$$a+b+c.$$

Az összeadandókat ezentúl röviden *tagoknak* hívjuk és így $a+b$ -t *kétagú*, $a+b+c$ -t *háromtagú*, $a+b+c+d$ -t *négypolgú* algebrai kifejezésnek mondjuk.

12. Összevonás. Szorzás. Ha az összeg tagjait az összeadás jele, a $+$ által összekapcsoljuk, az összeadás műveletét tulajdonképen elvégeztük, s az így nyert összeggel az algebra már tovább számolhat. Számos esetben ez az eredmény még rövidíthető, egyszerűbb alakra hozható, vagyis *összevonható*.

Gyakran az összeadandók, vagy tagok összevonása azáltal történik, hogy a szorzásnak megfelelő jelzést használunk. *A sokszorozás ugyanis nem egyéb, mint egyenlők összeadása, ahol az*

előre írt sokszorozó mutatja, hogy a második szám, a sokszorozandó hányszor veendő mint összeadandó. Így pl.:

$$a+a=2a, \quad ab+ab+ab=3ab \\ c^2+c^2+c^2+c^2=4c^2 \text{ stb.}$$

Az ilyen kifejezéseknél, mint $2a$, $3ab$, $4c^2$ stb. sokszor a szorzóul fellépő számot (itt a 2, 3, 4) a betűkkel jelölt számoktól megkülönböztetésül *együtthatónak* (coefficiens) nevezzük. A mellette levő szorzót (a , ab , c^2) pedig *betűkifejezésnek* hívjuk. — Az olyan kifejezéseket, melyekben a betűkifejezések megegyeznek, *hasonló kifejezéseknek* nevezzük és ezeket összevonhatjuk. Így pl.:

$$2a+3a=a+a+a+a+a=5a, \quad 3ab+5ab=8ab, \quad 4c^2+7c^2=11c^2.$$

Hasonló kifejezések összevonása úgy történik, hogy a közös betűkifejezéshez együtthatóul az együtthatók összegét tesszük. Így pl.:

$$3ab+4ab=7ab.$$

Feladatok.

1. Egy q búza a K. Vásárlunk: $54q$, $72q$ és $65q$ búzát. Mennyibe kerül mindenik? Mennyibe kerül a búza összesen?

2. Vásárlunk 3 négyzet alakú telket. Mindeniknek oldala a m hosszú. Az első m^2 -je 15 K, a másodiké 18 K és a harmadiké 23 K. Mennyibe kerül összesen a 3 telek? (Legyen $a=27$ m.)

$$3. \text{ a) } 6ab+7ab+15ab= \quad \text{ b) } 15a^2b+27a^2b+19a^2b=$$

$$\text{ c) } 6a^3b^2+12a^3b^2+10a^3b^2= \quad \text{ d) } 27a^4b+33a^4b+9a^4b=$$

(Helyettesítendő mind az összeadandókba, mind az összegbe: $a=3$, $b=2$.)

$$4. \text{ a) } 3ab+2a^2+ab+6a^2+9ab=$$

$$\text{ b) } 5a^2+9a^2b+4a^2b+10a^2=$$

$$\text{ c) } 6ab^2+4a^3+9ab^2+17ab^2+5a^3=$$

$$\text{ d) } 3a^2+2ab+5ab+7a^2+9b^2=$$

(Helyettesítendő mind az összeadandókba, mind az összegbe: $a=2$, $b=1$.)

$$5. \text{ a) } 9xy+17y^2+6xy+5x^2+8y^2+3xy=$$

$$\text{ b) } 8xy+3x^2y+4xy^2+6xy=$$

$$\text{ c) } 7x+8x^2+2x^3+9x+4x^2+4x^3=$$

(Helyettesítendő mind az összeadandókba, mind az összegbe $x=4$ $y=3$.)

$$6. a) (7u^2+6u+5)+(9u^2+4u+3)+(5u^2+3u+2)=$$

$$b) (6u^2+9)+(5u^2+8)=$$

$$c) (3u^2+9uv+12v^2)+(4u^2+5uv+3v^2)+(9u^2+6uv+3v^2) \cdot$$

(Helyettesítendő mind az összeadandókba, mind az összegbe $u=3$, $v=5$.)

13. Kivonás. Ha ismeretes a két összeadandó, kiszámíthatjuk az összeget összeadás műveletével; de ha az összeget ismerjük, még nem mondhatjuk meg, melyek az összeadandók? Így pl.: ha tudjuk, hogy 2 szám összege 27, még nem tudhatjuk, hogy melyek az összeadandók; de ha azt is tudjuk, hogy az egyik összeadandó 12, akkor már következtethetjük, hogy a másik összeadandó: 15. *Az összegből és egyik összeadandójából a másik összeadandót meghatározhatjuk.* E meghatározás művelete a *kivonás*. A kivonás az összeadás fordított művelete (operatio inversa). Ha a az összeg és b az egyik összeadandó, akkor a másik összeadandót megkapjuk, ha a -ból levonjuk b -t, vagyis az a -tól visszafelé számlálunk b egységgel. Az így nyert összeadandót $a-b$ (a minus b)-vel jelöljük. $a-b$ tehát azon szám, melyhez ha b -t adunk, összegül a -t kapunk. Az a neve *kisebbitendő*, b neve *kivonandó* és $a-b$ neve *különbség*, vagy *maradék*.

A különbség meghatározása szerint tehát:

$$(a-b)+b=a$$

Vagyis: ha a különbséghez a kivonandót hozzáadjuk, összegül a kisebbítendőt kapjuk. Ez a kivonás próbája.

Példák: Mit jelent $x-y$? $(x+y)-u$? $x-(y+u)$? $3-x$, $a-5$? $27-12$? $15-39$?

14. Különbség összeadása. I. A közönséges számtanban gyakran kell különbséget adnunk valamely számhoz. Így pl.: mikor fejben ilyen összeadást végezzünk: $132+97$, akkor rendszerint a 97-et kikerekítjük 100-ra és a 132-hez 100-at adunk, ered: 232; de 3-mal többet adtunk hozzá, mint kellett volna, ezt a 3-at tehát le kell vonni: $232-3=229$.

Itt nem tettünk mást, mint hogy 132-hez $(100-3)$ különbséget adtuk. Éppen így járunk el minden ilyen esetben. Ha a -hoz $b-c$ különbséget kell adnunk, akkor a -hoz b -t adjuk; de mivel

c -vel többet adtunk hozzá, mint kellett volna, ezt a c -t levonjuk az összegből; azaz:

$$a + (b - c) = (a + b) - c \dots\dots\dots \alpha)$$

Különbséget $(b - c)$ úgy adhatunk egy számhoz (a) , hogy a kisebbitendőt hozzáadjuk és a nyert összegből $(a + b)$ a kivonandót (c) levonjuk.

Ha a föntebbi egyenlőség jobb oldalát olvassuk először (visszafelé olvassuk), akkor azt látjuk, hogy:

Összegből $(a + b)$ úgy vonunk le egy számot (c) , hogy ezt az összeg egyik tagjából (pl. a másodikból) levonjuk és a nyert különbséghez $(b - c)$ az összeg másik tagját (a) hozzáadjuk.

Ez utóbbi tételből azt tanuljuk, hogy az összegnek *akármelyik* tagjából vonhatjuk le a kivonandót, mert hiszen $a + b = -b + a$, tehát bármelyik tagot tekinthetjük másodiknak; tehát, ha $a + b$ -ből c -t ki kell vonnunk, akkor felesleges $(a + b)$ -t zárójelbe tennünk, mert félreértés nem támadhat. *A kisebbitendőt tehát akkor sem kell zárójelbe tennünk, ha az többtagú.*

II. Az $\alpha)$ alatti képlet arra tanít, hogyan kell egy számhoz különbséget adni; de sokszor maga az előbb a -val jelölt szám is különbség. Ha pl. 198-hoz 247-et kell adnunk, akkor így számítunk fejben: $(200 - 2) + (250 - 3)$. A 200-hoz adunk 250-et, kapunk 450-et; de mivel $2 + 3 = 5$ -tel többet vettünk, ez 5-öt ki kell vonnunk. Így származik: 445. Általában, ha

$$(p - q) + (r - s)$$

kiszámítandó, akkor összeadjuk p -t és r -t, nyerünk $p + r$ -et; de mivel $q + s$ -el többet vettünk, ezt le kell vonnunk; tehát:

$$(p - q) + (r - s) = (p + r) - (q + s).$$

Különbségek összegét úgy állíthatjuk elő, hogy a kisebbitendők összegéből a kivonandók összegét levonjuk.

Ebből a képletből még a következőt is leolvashatjuk: Ha van egy különbségünk: $p - q$ és a kisebbitendőjét megnöveljük r -rel, a kivonandóját pedig s -sel, úgy hogy $(p + r) - (q + s)$ -et alkotunk belőle (ez van a jobboldalon), akkor ezáltal az eredeti $p - q$ különbség $(r - s)$ -sel növekszik, vagyis $(p - q) + (r - s)$ lesz belőle (ez van a baloldalon). Így pl., ha a kisebbitendőhöz 10-et, a kivonandóhoz 4-et adunk, a különbség 6-tal nő.

Ha mind a kisebbítendőhöz, mind a kivonandóhoz egyenlő számokat adunk, akkor a különbség nem változik; mert ha pl. mind a kisebbítendőhöz, mind a kivonandóhoz r -et adunk, akkor a különbséghez $r-r=0$ -t adunk. Képletben:

$$p-q=(p+r)-(q+r).$$

Ha ezt az egyenlőséget fordítva olvassuk, akkor arra jutunk, hogy a különbség értéke akkor sem változik meg, ha mind a kisebbítendőből, mind a kivonandóból egyenlő számokat elveszünk.

Ezt az eljárást alkalmazzuk mindig a különbség olyan átalakítására, hogy a kisebbítendő 0 legyen, ha a kivonandó nagyobb a kisebbítendőnél. Így pl.: $8-13$ különbséget úgy alakítjuk át, hogy mind a kisebbítendőből, mind a kivonandóból 8-at elveszünk; tehát $8-13=0-5=-5$.

Általában:

$$\begin{aligned} a-b &= (a-a)-(b-a)=0-(b-a)=- (b-a) \\ a-b &= -(b-a), \end{aligned}$$

ha tehát a kivonandó nagyobb mint a kisebbítendő, akkor a kivonandóból vonjuk le a kisebbítendőt és a különbség elé — jelet teszünk.

Példák: 1. Számítsuk ki fejben a következő összegeket: $534+98$, $675+99$, $893+97$, $2348+999$, $5621+998$, $3217+995$, $78+49$, $89+75$, $543+59$, $672+499$, $538+298$, $376+499$, $398+199$, $597+298$, $349+248$, $497+296$, $399+248$.

2. Alakítsuk át 0 kisebbítendővel bíró különbségekké a következőket: $5-7$, $12-23$, $x-y$, $106-384$, $u-v$, $3x-5y$, $191-733$.

15. Különbség kivonása. I. A különbség kivonása is gyakran fordul elő a közönséges számtanban. Ha egy kerek számhoz közel álló számot, pl. 97-et kell kivonnunk 758-ból, akkor így szoktunk fejben számolni: 758-ból kivonunk 100-at, marad 658; de 3-mal többet vontunk ki mint kellett volna, ezt a 3-at tehát hozzá kell adnunk a különbséghez, 658-hoz. Így kapjuk a kívánt különbséget, 661-et.

Éppen így járhatunk el minden más esetben is. Ha pl. a -ból ki kell vonni $b-c$ különbséget, akkor kivonjuk az a -ból a b -t, ered: $(a-b)$; de mivel c -vel többet vontunk ki, mint

kellett volna, e c -t a nyert különbséghez még hozzá kell adnunk, vagyis :

$$a - (b - c) = (a - b) + c.$$

Különbséget $(b - c)$ úgy vonhatunk le egy számból (a) , hogy a kisebbítendőjét levonjuk és a nyert különbséghez a kivonandóját hozzáadjuk.

Példák : Számítsuk ki fejben a következő különbségeket : 578—96, 785—99, 863—95, 1274—999, 138—49, 276—39, 1685—298, 3256—1998, 6735—2498, 753—89, 837—149, 576—198.

II. Megeshetik, hogy maga az a szám, melyet előbb a -val jelöltünk, szintén különbség és ilyen feladatunk van :

$$(p - q) - (r - s).$$

E különbséget átalakítjuk úgy, hogy a kisebbítendő és kivonandó ne legyen különbség. E végből mind a kisebbítendő-hez, mind a kivonandóhoz $q + s$ -et adunk. Ha $p - q$ -hoz adunk q -t, lesz belőle p , ehhez s -et, lesz : $p + s$. Az $r - s$ -hez adunk s -t, lesz belőle r ; ehhez q -t, lesz belőle $r + q$; tehát :

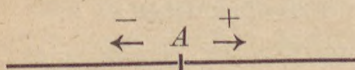
$$(p - q) - (r - s) = p + s - (r + q).$$

Feladat. Fejezd ki szavakkal ezt az eljárást !

16. Negatív számok összeadása, kivonása. Választunk olyan tárgyi kört, amelyben már a legegyszerűbb feladatok megoldása rávezet bennünket a negatív számokkal való műveletekre. Ilyen feladatok a mozgás körében lépten-nyomon felmerülnek.

Gondoljuk, hogy egy tárgy (pl. a vonat) A pontból kiindul és egyenes irányban mozog. Az A -t nevezzük *kezdőpontnak*,

kiinduló pontnak. — Ha csak annyit mondunk, hogy valamely B pont A -tól b méter távolságra van, még a B pont helyzete



az egyenesen nem ismeretes. Azt is meg kell mondanunk, hogy A -nak melyik oldalán van. Nevezzük a rajzbeli jobb oldalát az egyenesnek pozitív oldalnak, a másikat pedig negatív oldalnak. Ezenkívül még a mozgás *irányára* nézve is megállapodunk abban, hogy ha a mozgás a $+$ -al jelölt nyíl irányában történik, akkor azt mondjuk, hogy a mozgás iránya pozitív ; az ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a mozgás iránya, vagy a mozgás sebessége negatív. A B pont helyzete pontosan meg lesz hatá-

rozva, ha nemcsak azt tudjuk, hogy minő messze van A -tól, hanem azt is, hogy ez a távolság pozitív-e vagy negatív. A B pont helyzetének meghatározásához tehát (ha a mértékegység ismeretes), egy pozitív vagy negatív szám szükséges.

Példák: Ha A kiinduló pont pl. *Budapest állomás* és a Bpest—Bécs irányt pozitívnek, a Bpest—Orsova irányt negatívnak tekintjük, mondjuk meg, hol van ezen a vonalon Párkány-Nána, mely 78 km.-re van Bécs felé? Ezt így mondjuk: P.-Nána távolsága $+78$ km.

Éppen így e vonalon Szeged -190 km.-nyire van. Mit jelent ez?

Feladat. 1. Fejezd ki e vonal következő állomásainak távolságát Budapesttől: Cegléd (73 km), Temesvár (307 km), Karánsebes (401 km), Pozsony (213 km), Érsekújvár (122 km).

2. Mit jelent az, ha azt mondjuk, egy személyvonat e vonalon $+40$ km sebességgel halad? Egy gyorsvonat -60 km sebességgel halad?

Ha már most egy pont A -tól a km. távolságra jutott, ezután még tovább megy ugyanilyen irányban b km. távolságra, vajjon milyen messze lesz A -tól? Ugyebár $a+b$ távolságra? E számításnál azt az igen egyszerű eljárást alkalmaztuk, hogy a végpont helyzetét úgy kapjuk meg, ha a két, egymásután megtett utat összeadjuk. Ezt az eljárást követjük akkor is, ha nemcsak két, hanem több egymásután megtett út összetételéről van szó,

Akárminők legyenek a feladat számadatai, mindig ezt az eljárást akarjuk követni.

Ez a követelés rávezet bennünket a negatív számokkal való műveletekre.

Az utak összetételénél ugyanis 4 esetünk lehet:

1. Ha a vonat megtesz 150 km utat Bécs felé, azután tovább ugyanilyen irányban 60 km utat, távolsága Budapesttől 210 km lesz Bécs felé.
2. Ha a vonat 150 km utat tesz meg Bécs felé, azután ellenkező irányban (visszafelé) 60 km-t, akkor Budapesttől 90 kilométer-nyire lesz.
3. Ha a vonat 150 km-t tesz meg Orsova felé és ugyanilyen irányban tovább 60 km-t, akkor Orsova felé lesz 210 km-re.
4. Ha pedig 150 km-t tesz meg Orsova felé és azután visszafelé 60 km-t, akkor 90 km-re lesz Budapesttől Orsova felé.

E feladatokat megoldhattuk tisztán a szemléletünk segítségével. Nézzük, hogy alakúlnak a számításaink, ha a kimondott eljárást akarjuk alkalmazni a végső helyzet meghatározására, és ha a távolságaink pontos megjelölésére a megállapított előjeleket használjuk. A négy feladat a következő számításra vezet:

1. $+150 + (+60) = +210$.
2. $+150 + (-60) = 150 - 60 = 90$.
3. $(-150) + (-60) = -(150 + 60) = -210$.
4. $(-150) + (+60) = 60 - 150 = -90$.

Ha tehát azt akarjuk, hogy a számításnál követett eljárástunkat minden esetben alkalmazhassuk, akkor a következő számítási szabályokat kell megállapítanunk:

1. $a + b = +(a + b)$.
2. $a + (-b) = a - b$.
3. $-a + (-b) = -(a + b)$.
4. $-a + b = b - a$.

Ugyanebben a körben állapíthatjuk meg a kivonásnál követendő eljárást is.

Ha ugyanis valamely C pont távolsága a kezdőponttól c és egy másik (közelebbi) B pont távolsága: b , akkor BC

távolság: $c - b$. E számításnál azt az eljárást alkalmaztuk, hogy két pont között úgy határozzuk meg, hogy a köz végpontjának (C -nek) a kiinduló ponttól való távolságából a köz kezdőpontjának (B -nek) a kiinduló ponttól való távolságát levonjuk.

Ezt az eljárást alkalmazzuk minden esetben és pedig nem csak a köz abszolút nagyságának a meghatározása végett, hanem azt is fel akarjuk tüntetni, hogy a köz (a kezdőpontjától a végpontjáig tekintve) pozitív, vagy negatív irányú-e?

Itt megint 4-féle eset lehetséges:

1. Ha az egyik (C) vonat Budapesttől Bécs felé haladt 150 km-re; a másik (B) Budapesttől Bécs felé 60 km-re, akkor a második az elsőől 90 km-re lesz azaz BC köz = 90 km.
2. Ha a C vonat Bécs felé 150 km-re haladt, a B vonat pedig Orsova felé 60 km-re, akkor BC köz Orsova—Bécs irányban 210 km-re terjed.

3. Ha a C vonat Orsova felé haladt 150 km-re és a B vonat szintén Orsova felé 60 km-re, akkor a BC köz Budapest—Orsova irányban terjed 90 km-re.
4. Ha a C vonat Orsova felé haladt 150 km-re és a B vonat Bécs felé 60 km-re, akkor BC köz Bécs—Orsova irányban terjed 210 km-re.

E feladatokat tisztán szemléletünk alapján oldhattuk meg, (Jó is lesz, ha a tanuló megfelelő rajzokat készít.) Nézzük, hogyan alakulnak a számításaink, ha a kimondott eljárást akarjuk alkalmazni a két pont közének meghatározására.

1. $150 - 60 = 90$.
2. $150 - (-60) = 150 + 60 = 210$.
3. $-150 - (-60) = -150 + 60 = -90$.
4. $-150 - 60 = -210$.

Ha tehát azt akarjuk, hogy a számításunknál követett eljárást minden esetben alkalmazhassuk, akkor a következő szabályokat kell megállapítanunk:

1. $a - (+b) = a - b$.
2. $a - (-b) = a + b$.
3. $-a - (-b) = -a + b$.
4. $-a - (+b) = -(a + b)$.

17. A különbségekre vonatkozó műveletek kiterjesztése.
A különbségek összeadásánál és kivonásánál követett eljárást alkalmazzuk oly esetekben is, amidőn a kisebbitendő kisebb mint a kivonandó, miáltal a negatív számokkal való műveletek értelmezésére jutunk és ezzel meggyőződünk arról, hogy az előbbi tárgykörben nyert számítási eljárásunk minden olyan tárgykörben érvényes, ahol a tárgyak nevében lehetséges ellentét folytán negatív számok szerepelhetnek. A különbségek összeadására vonatkozó eljárást ez a képlet tartalmazza: (L. 14. pont.)

$$(p - q) + (r - s) = (p + r) - (q + s).$$

Ha ebben a képletben:

1. $q=0$, $s=0$, 2. $q=0$, $r=0$, 3. $p=0$, $s=0$, 4. $p=0$, $r=0$: helyettesítjük, akkor a következő képletsorozatot nyerjük:

1. $p + r = p + r$.
2. $p + (-s) = p - s$.
3. $(-q) + r = r - q$.
4. $(-q) + (-s) = -(q + s)$.

Ez a 4 képlet, minthogy p , q , r , s tetszőleges pozitív számok, az összeadás összes lehető eseteit ábrázolja. A bennük ábrázolt eredményeket a következőkben lehet összefoglalni:

Egyenlő előjelű számokat úgy adunk össze, hogy tekintet nélkül az előjelre összeadunk, és az előjelt az összeghez hozzácsatoljuk. (1. és 4. eset.)

Különböző előjelű számokat összeadunk, ha a negatív előjelűt pozitívnak, de levonandónak vesszük. (2. és 3. eset.)

Példák: Minő évszámot írtak 1000 évvel Róma alapítása után?

Felelet: $1000 + (-753) = 247$ Kr. u.

Két negatív szám összeadását kívánja pl. a következő feladat:

Valaki játékban előbb 8, s azután 5 koronát veszített; mennyi az összes veszteség? *Felelet:* $(-5) + (-3) = -13$.

Számítsuk ki ez összegeket: $5 + (-8)$; $9 + (-3)$; $(-5) + 12$; $(-13) + 8$; $(-6) + (-7)$; $(-2a) + (-3a)$; $(-163) + (-272)$; $(-63) + 12$; $56 + (-83)$; $79 + (-101)$; $(-58) + (-75)$.

A különbség kivonására vonatkozó eljárást ez a képlet tartalmazza: (L. 15. pont.)

$$(p - q) - (r - s) = p + s - (r + q).$$

Ha ebben a képletben:

1. $q=0$, $s=0$, 2. $q=0$, $r=0$, 3. $p=0$, $s=0$, 4. $p=0$, $r=0$: helyettesítjük, akkor a kivonásnak 4 esete áll előttünk:

$$1. \quad p - r = p - r.$$

$$3. \quad (-q) - r = -(q + r).$$

$$2. \quad p - (-s) = p + s.$$

$$4. \quad (-q) - (-s) = -q + s.$$

Az imént levezetett képletek jelentőségükre nézve mindannyian egy egyetlen közös szabályban egyesíthetők, mely következőkép hangzik:

A kivonás helyett összeadás végzendő, ha a kivonandó előjelét ellenkezőre változtatjuk.

<i>Példák:</i> 1. Kisebbitendő:	+21	+21	-21	-21
Levonandó:	+ 5	- 5	+ 5	- 5
Különbség:	16	26	-26	-16

2. Hány év mult el 57-től Kr. előtt 113-ig Kr. sz. után? *Felelet:* $113 - (-57) = 113 + 57 = 170$ év.

3. A hőmérő 23°-on állott a 0 fölött; azután 8°-on a 0 alatt, mennyivel süllyedt időközben? *Felelet:* $23 - (-8) = 23 + 8 = 31^\circ$.

4. Valakinek 200 korona $\frac{\text{pénze}}{\text{adóssága}}$ volt; bizonyos kiadás után $\frac{100 \text{ K pénze}}{300 \text{ K adóssága}}$ van. Mennyit költött? *Felelet*: a) $200 - 100 = 100 \text{ K}$,
b) $-200 - (-300) = -200 + 300 = 100 \text{ K}$.

Számítsuk ki a következő különbségeket: $15 - (-26)$; $8 - (-6)$;
 $-13 - (-9)$; $-25 - (-38)$; $-19 - 21$; $-28 - 72$; $45 - (-27)$; $56 - (-18)$;
 $-(-8) = 0 - (-8) = 8$; $-(-9)$; $-(-25)$; $-2 - (-8)$;
 $-8 - (-2)$; $6 - (-19)$; $19 - (-6)$.

18. **Algebrai összeg.** A negatív számok bevezetésének egyik legfőbb előnye abban van, hogy az összeadás és kivonás műveletei, melyek a közönséges számtanban egymástól lényegesen különbözők voltak: a negatív számok bevezetése folytán összeolvadnak. Minden különbség tekinthető összegnek és minden összeg, ha tetszik, különbségnek. Így pl.: $15 - 8$ különbség tekinthető 15 és -8 összegének, azaz:

$$15 - 8 = 15 + (-8)$$

vagy $25 + 12$ összeg tekinthető $25 - (-12)$ különbségnek stb.

Ezentúl tehát nem kell különbségekről szólnunk, hanem oly összegekről, melyekben negatív tagok is vannak. Az ilyen összeget *algebrai összegnek* hívjuk. Ilyen algebrai összeg pl.:

$$15a - 2b + 3c - 6d - 9,$$

$$\text{tagjai: } 15a, -2b, 3c, -6d, -9.$$

Algebrai összegeket éppen úgy kell összeadnunk és kivonnunk, mint közönséges számok összegeit. Tekintsük át, hogyan történik ez az összeadás, vagy kivonás. Ha valamely számhoz, például 856-hoz 473-at kell adnunk, azaz $400 + 70 + 3$ összeget, akkor a 856-hoz egyenkint adjuk a 400-at, azután a 70-et, végül a 3-at; ha valamely számhoz az $a + b + c$ összeget kell adnunk, akkor egymásután adjuk hozzá az a -t, azután a b -t, végül a c -t.

Éppen így, ha 856-ból 473-at, azaz $400 + 70 + 3$ összeget kell kivonnunk, akkor egymásután vonjuk ki a 400-at, azután a 70-et és végül a 3-at. Ha $a + b + c$ összeget kell kivonnunk, akkor is egymásután vonjuk ki az a , b és c tagokat; ugyanígy járunk el az algebrai összeggel is, vagyis: *összeadni úgy kell az algebrai összeget, hogy tagjait egymásután összeadandóul*

tesszük, és kivonni úgy kell, hogy tagjait egymásután kivonandóul tesszük, *vagyis ellenkező jellel összeadandóul tesszük*. Pl.:

$$1. \quad 3a-2b+5+(7a-5b-9)=3a-2b+5+7a-5b-9=10a-7b-4.$$

$$2. \quad 5a-3b-2-(2a-9b+8)=5a-3b-2-2a+9b-8=3a+6b-10.$$

$$3. \quad 3a^2+4bc-e^2+10+(5a^2+6bc+2e^2-15)+ \\ + (4a^2-9bc-10e^2+21)=12a^2+bc-9e^2+16.$$

$$4. \quad 5a^3-4a^2b+2b^2c-(3a^2b-2a^3-8b^2c)=5a^3-4a^2b+ \\ + 2b^2c-3a^2b+2a^3+8b^2c=7a^3-7a^2b+11b^2c.$$

Feladatok.

A/ Összeadás.

$$1.*) \quad 3a+4b-10c-8d$$

$$2. \quad 3a^3-5a^2+10a-9$$

$$2a+6b-6c-3d$$

$$-a^3+5a^2+6a-2$$

$$10a-3b-9c+24d$$

$$2a^3-6a^2+17a+1$$

$$15a+7b-25c+13d$$

$$4a^3-6a^2+33a-10$$

$$3. \quad \begin{array}{r} x^2y+y^2x+xy+x+y \\ 5x^2y \quad +3xy \quad -4y \\ -y^2x-xy+10x+17y \\ \hline 6x^2y \quad +3xy+11x+14y \end{array}$$

$$4. \quad (10a^4+5a^3-6a^2+8a) + (8a^4-7a^3+5a^2+6a) + (-a^4+5a^2-6a^2+a) \text{ és helyettesítsük mind az összeadandókba, mind az összegbe: } a=3.$$

$$5. \quad (144x^2+233y^2-z^2) + (253x^2-u^2) + (132x^2-y^2-5z^2+3u^2) + \\ + (-10x^2+z^2) \text{ és helyettesítsük mind az összeadandókba, mind az összegbe: } x=3, y=2, z=1, u=4.$$

$$6. \quad (xy+yz+zx) + (5xy+3yz+2zx) + (10xy-yz-zx) + \\ + (28xy+5yz-100zx) \text{ és helyettesítsük az összeadandókba és az összegbe: } x=5, y=4, z=3.$$

B/ Levonás.

$$7.** \quad 23x-5y$$

$$23x-5y$$

$$-23x+5y$$

$$-23x+5y$$

$$2x+3y$$

$$-2x-3y$$

$$2x+3y$$

$$-2x+5y$$

*) Sokszor a hasonló tagokat egymás alá írjuk.

**) E példánál mindenütt az első sor a kisebbítendő, a második a levonandó tartalmazza.

8. $\frac{12a+5b}{-3b}$ 9. $\frac{13a-2b+8c}{a-9c}$ 10. $\frac{100a+2b-3c-4d}{-2a+b-6c+10d}$
11. $(28a^4+5a^3-4a^2+15a-6)-(38a^4-6a^3+5a^2+a-10)$ és helyettesítsük a kisebbítendőbe, a kivonandóba és a maradékba $a=5$.
12. $(9M+10N-27N^2+8N^3)-(-M+5N-36N^2+9N^3)$.
13. $(2x^2-500y^2+38z^2-27u^2)-(x^2+432y^2-22z^2-16u^2)$.
14. $(14xy-6yz-5zx-(28xy-7yz+5zx))$ és helyettesítsük $x=7$, $y=5$, $z=4$.
15. $(28l-5m+10n-8q+53r)-(-l-m+200n+38q-16r)$.

C) Összeadás és kivonás együtt: Összevonás.

16. $(a+b)+(7a-2b)-(8a-b)+25a$
17. $(8a-2b+5c)-(a+6b)+(38a-10c)-(25b-c)$
18. $(2x-3y-3z)+(25x-6y-10z)+(x-3y+10z)-(8x+2y-100z)$
19. $(a+b-c)-(a-b+c)+(-a+b+c)-(a+b+c)$
20. $a-[b-c-(d-e)]^*)$ 21. $2a-d-[26-d-(5a-6b+d)]$
22. $(2x-y)-(x-y-z)+(6x-5y)-[8y-2y-(2x+10)]$.
23. $(8a^3-3a^2b+16ab^2)-[(2a^2b-3ab^2-b^3)-(a^3+a^2b+ab^2+b^3)]$.

Ha A, B, C, D, E, F alatt a következő kifejezéseket értjük:

$$\begin{aligned} A &= 3abc-6ab+8bc+9b & D &= 28ab-3bc+3ac-8ac+3b \\ B &= 9abc-6ac+9bc-8a & E &= abc-ab-ac-a \\ C &= 19abc-9bc+8ab+6c & F &= -6abc+5bc+a+b+c \end{aligned}$$

mivel egyenlők a következő alakok:

$$24. A+B-C+D-E$$

$$25. A+C-E-F$$

$$26. A-B+C-D-E.$$

27. a és b összegéből vonjuk le a és b különbségét.
28. Az a és b számjelekkel alkotott kétjegyű szám $(10a+b)$ jegyeit cseréljük fel. Az így nyert számot vonjuk le az eredetiből.
29. Az a, b, c jelekből alkotott 3 jegyű számból vonjuk le azt, melynek jegyei sorban: b, c, a . Azután pedig azt, melynek jegyei sorban: c, b, a .
30. Az a, b, c számok összegéből vonjuk le $\alpha)$ a és b különbségét, $\beta)$ b és c különbségét, $\gamma)$ c és a különbségét.

*) Előbb a szögletes zárójelben álló kifejezést alakítjuk át: $b-c-d+e$ és azután $a-(b-c-d+e)=a-b+c+d-e$. Ugy szoktuk mondani, hogy a zárójeleket felbontjuk és pedig először a legbelsőbb zárójeleket tüntetjük el.

31. Adjuk össze a számsor 5 egymásutáni számát (az első legyen a) és vonjunk ki az összegből $3a$ -t.
32. Adjuk össze a számsor 7 egymásutáni számát (a középső legyen a) és vonjuk le az összeget $9a+5b$ -ből!
33. Számláljunk a -tól kezdve először 2-esével $a+10$ -ig és adjuk össze e számokat; azután számláljunk visszafelé a -tól kezdve 3-asával $a-21$ -ig és adjuk össze ezeket is. A második összeget vonjuk ki az elsőből!
34. Számláljunk 5-től kezdve x -enkint (így: $5, 5+x, 5+2x, \dots$) egészen $5+7x$ -ig és adjuk össze az így nyert számokat. Azután számláljunk 7-től kezdve visszafelé x -enkint, egészen $7-5x$ -ig, adjuk össze ezeket a számokat is, és a második összeget vonjuk ki az elsőből!

IV. Algebrai egész kifejezések sokszorozása.

19. **Pozitív számok szorzata. A tényezők fölcserélése.** 5-ször 6 csak rövidebb kifejezésmódja e műveletnek: $6+6+6+6+6$. A *szorzat* (*productum*) nem egyéb, mint egyenlő tagok összege, melynek kiírásában megkülönböztetjük a *sokszorozandót* (*multiplicandus*), mely nem egyéb, mint a többször veendő összeadandó és a *sokszorozót* (*multiplicator*), mely mutatja, hogy amaz első számérték *hányszor* veendő összeadandónak. Eszerint ab , azaz a -szor b értelmezése:

$$b+b+b+\dots+b \text{ (} a\text{-szor) ;}$$

a ba -é (b -szer a) pedig:

$$a+a+a+\dots+a \text{ (} b\text{-szer).}$$

A számtanból tudjuk, hogy e két érték: ab és ba egymással egyenlő. Képletben:

$$ab=ba,$$

mely a *sokszorozandó* és *sokszorozó* fölcserélhetőségét állítja.

E tételt a szemlélet igazolja. Ez itt legegyszerűbben az által történik, hogy az ab -ben foglalt egységeket valósággal föl-

c -vel szorozzuk, akár az a -t (vagy b -t) szorozzuk előbb c -vel és az így nyert szorzatot b -vel (a -val). Félreértés tehát nem támadhat, ha ezentúl az $(ab)c$ által jelzett műveletet, illetőleg az $(ab)c$ szorzatot bármelyik $abc = acb = bca = bac = cab = cba$ alakban írjuk.

Akárhány szorzást végzünk egymásután, a szorzások sorrendje nem változtat az eredményen.

A szorzó és szorzandó megkülönböztetése külön név által tehát több szorzandó szám esetében is fölösleges, s így ezentúl majd egyszerűen a *szorzat tényezőiről* (*factor*), vagy *szorzókról* beszélünk. E tényezők száma lehet 2, 3 vagy több. Világos továbbá, hogy minden számhoz még hozzágondolhatjuk tényező gyanánt az 1-et, még pedig akárhányszor.

20. **Összeg szorzása.** I. Ha 27-et kell szoroznunk 5-tel, akkor fejben így számolunk : $5 \times 20 = 100$; $5 \times 7 = 35$; $100 + 35 = 135$. Itt összeget $(20 + 7)$ kellett egy számmal szoroznunk és ezt úgy tettük, hogy az *összeg minden tagját e számmal megszoroztuk és a nyert szorzatokat (a résztszorzatokat) összeadtuk*. Ha $a + b$ összeg szorzandó c -vel, akkor a is, b is szorzandó c -vel és a nyert szorzatok összeadandók ; mert hiszen : $(a + b)c$ azt jelenti, hogy c vétessék a -szor és b -szer összeadandóul ; tehát :

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Nemcsak kéttagú összegekre vonatkozik ez az eljárás, hanem általában :

Többtagú kifejezés úgy szorzandó egytagúval, hogy a többtagú minden tagját az egytagúval megszorozzuk és a nyert szorzatokat összeadjuk.

II. Ha az előbbi feladatban előforduló c maga is többtagú, pl. : $d + e$, akkor e szorzási tétel szerint :

$$(a + b)(d + e) = a(d + e) + b(d + e) = ad + ae + bd + be,$$

miből azt látjuk, hogy *összeget összeggel úgy szorzunk, hogy az egyik tényező minden tagját a másik tényező minden tagjával megszorozzuk és a nyert szorzatokat összeadjuk.*

21. **Különbség szorzása.** I. Ha fejben kell szoroznunk egy kerek számhoz közel álló számot, igen sokszor rövidebben számítunk. Így pl. : 98×7 -et így végezzük : $100 \times 7 = 700$; de a 7-et 2-vel többször vettük mint kellett volna, tehát $2 \times 7 = 14$ -et le kell vonnunk : $700 - 14 = 686$. Nagyobb számoknál még jelen-
tekenyebb a rövidítés.

Itt a $98=100-2$ különbség volt. Általában ha $(a-b)$ szorzandó c -vel, akkor a c -t vesszük a -szor, kapunk ac -t; de akkor b -vel többször vettük mint kellett volna; tehát bc -t le kell vonnunk; azaz:

$$(a-b)c = ac - bc.$$

Feladat. Fejezd ki szavakkal ezt az eljárást!

II. Ha a másik tényező, a c is különbség, pl.: $d-e$, akkor c helyett e képletbe $d-e$ téve, nyerjük:

$$(a-b)(d-e) = a(d-e) - b(d-e) = ad - ae - (bd - be)$$

azaz:

$$(a-b)(d-e) = ad - ae - bd + be.$$

Fejezd ki szavakkal ezt az eljárást!

22. Negatív szám szorzása. I. Ha valamely mozgó pont t óráig egyenletesen mozog és óránként c km-nyi utat tesz meg (mondjuk rövidesen: sebessége c km), akkor a megtett út tc km; vagyis az A kiindulóponttól a haladás idejének végén tc km-nyi távolságra lesz. Ezt az ismeretes eljárást akarjuk alkalmazni *minden esetben* a mozgó pont végső helyzetének a meghatározására.

De előbb meg kell állapodnunk az idő számítására is. Az időmérésnek is kell kiinduló pontjának lennie. Legyen ez pl. déli 12 óra és nevezzük a délelőtti időt negatívnak, a délutánt pozitívnak. Így pl.: ha azt mondjuk, hogy -2 órákor a vonat Érsekújvárott van, ez azt jelenti, hogy délelőtt 10 órákor Érsekújvárott van.

Déli 12 óra az idő kezdőpontja, és Budapest legyen az út kiinduló pontja.

Itt megint 4-féle feladatunk lehet, melyeket egyszerű okoskodással megoldhatunk.

1. A vonat déli 12 órákor Budapestről elindul $+40$ km sebességgel (Bécs felé tartó sebesség). Hol lesz d. u. 2 órákor? Bécs felé $2 \cdot 40 = 80$ km-re Budapesttől.
2. A vonat déli 12 órákor indul Budapestről -40 km sebességgel (Orsova felé tartó sebesség). Hol lesz d. u. 2 órákor? Orsova felé 80 km-re Budapesttől.
3. A vonat déli 12 órákor indul Budapestről $+40$ km sebességgel. Hol volt d. e. 10 órákor? (Természetesen egyenletes haladásra gondolunk.) Minthogy ez a vonat Orsovától Bécs felé halad, d. e. 10 órákor 80 km-re volt Orsova felé.

4. Ha -40 km sebességgel halad, hol volt d. e. 10 órákor? Mint-hogy Orsova felé halad (mert a sebessége negatív) és csak déli 12 órákor lesz Budapesten, tehát délelőtt 10 órákor még Budapest előtt volt 80 km-el, azaz: Bécs felé 80 km-re Budapesttől.

Ha a számítás megállapított szabályát alkalmazzuk és úgy az időre, mint a sebességre nézve megállapított jeleket tekintetbe vesszük, akkor e négy feladat a következő eredményekre vezet:

$$1. (+2)(+40) = +80.$$

$$2. (+2)(-40) = -80.$$

$$3. (-2)(+40) = -80.$$

$$4. (-2)(-40) = +80.$$

Vagyis e körben szereplő számítások képletben:

$$1. (+a) \cdot (+b) = +ab.$$

$$3. (-a) \cdot (+b) = -ab.$$

$$2. (+a) \cdot (-b) = -ab.$$

$$4. (-a) \cdot (-b) = +ab.$$

II. Ennél az eljárásnál az út meghatározására szolgáló képletet alkalmaztuk a lehetséges feladatokra; most a különbségekkel való műveleteket akarjuk tágítani oly esetekre is, midőn a különbség 0-t vagy negatív számot jelent. Láttuk ugyanis, hogy: (21. pont.)

$$(a-b)c = ac - bc.$$

Ha $b=a$, akkor

$$(a-a)c = ac - ac$$

-re jutunk, vagyis:

$$0 \cdot c = 0.$$

Ha az egyik tényező 0, a szorzat is 0.

Ha az $(a-b)(d-e) = ad - ae - bd + be$ képletben (21. pont II.) tesszük:

1. $b=0, e=0$; 2. $b=0, d=0$; 3. $a=0, e=0$; 4. $a=0, d=0$, akkor a szorzásnak négy esetét nyerjük:

$$1. (+a)(+d) = +ad.$$

$$2. (+a)(-e) = -ae.$$

$$3. (-b)(+d) = -bd.$$

$$4. (-b)(-e) = +be.$$

E négy tétel összefoglalva, megadja az algebrai számok szorzására vonatkozó jelszabályt, melyek az előbbi feladatkörben nyert eredményekkel megegyeznek:

Elvégezzük a sokszorozást, tekintet nélkül az előjelre ; a szorzat pozitív, ha a két tényező előjele egyenlő, negatív, ha a két tényező előjele különböző.

Minden negatív szám eszerint mint szorzat értelmezhető, melyben az egyik tényező a pozitív előjellel vett szám, a másik pedig -1 , azaz :

$$-q = (-1)q.$$

Eszerint $-q$ -val szorozhatók azáltal, hogy előbb q -val szorozzuk -1 -gyel szorozzuk (vagy megfordítva). És így legvilágosabban kitűnik, hogy a sokszorozás új általánosítása, midőn negatív számmal dolgozunk, tulajdonképp két műveletet foglal magában : a közönséges szorzást, és az előjel megváltoztatását, mert az előbbi képletek mutatják, hogy a -1 -gyel való szorzás csak az előjel megváltoztatását követeli.

23. Egytagúak szorzása. Egyenlő alapú hatványok szorzása. Lássuk, hogy mikép kell eljárni, midőn a sokszorozandó számok összetett algebrai alakok által vannak adva. Először azt az esetet vizsgáljuk, midőn az alakok, melyekkel foglalkozunk, *egytagú* kifejezések, azaz tiszta szorzatok, pl. $5a^2$, abc vagy $3xy$ stb.

Ha pl. $7a$ szorzandó $5b$ -vel, akkor, mivel a tényezők sorrendje tetszés szerinti, így írhatjuk : $7a \cdot 5b = 7 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 35ab$. Éppen így : $5ab \cdot -3c = -15abc$ stb.

Ezekon a példákön látjuk, hogy a tényezőket oly sorrendben írjuk, hogy a sokszorozandó kifejezések együtthatói egymásután, a betűk pedig abc sorba kerüljenek. Ezt csak azért tesszük, hogy a kifejezéseink áttekinthetőbbek és egyszerűbbek legyenek.

Ha a szorzandó algebrai kifejezésekben egyenlő betűk fordulnak elő, akkor is rövidebben írható a szorzat. Így például : $8a^2 \cdot 7a^3 = 8 \cdot 7 \cdot a^2 \cdot a^3$. De

$$a^2 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$$

tehát $8a^2 \cdot 7a^3 = 56a^5$. Vagy : $8a^2b^3 \cdot 5a^3b^2 = 8 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot b^3 = 40a^5b^5$.

Általában ha két hatványt kell szoroznunk, melyekben az alapok egyenlők, akkor a szorzat egyszerűbb alakot ölt. $a^n \cdot a^m$ ugyanis azt jelenti, hogy a vételessék tényezőül n -szer és m -szer. azaz :

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m},$$

tehát *egyenlő alapú hatványokat úgy szorzunk egymással, hogy az egyenlő alapot a kitevők összegére emeljük.*

Feladatok.

1. Képezzük (-1) hatványait. (10-ikig).
2. Képezzük (-2) hatványait. (10-ikig).
3. Állítsuk elő -3 , -4 , -5 , -6 első 6 hatványát.
4. Állítsuk elő -7 , -8 , -9 , -10 első 4 hatványát.
5. a) $7x^2y$. $5xy$, b) $(-3ay^2) \cdot (5xy^3)$, c) $4u^2v \cdot (-3u^2v^2)$.
6. Helyettesítsük $5x^3 - 4x^2 + 2x - 5$ kifejezésben a) $x = -2$, b) $x = -3$, c) $x = -4$.
7. Helyettesítsük ebbe a kifejezésbe: $6a^2 - 3ab + 5b^2$ a) $a = -2$, $b = 5$, b) $a = 9$; $b = -3$, c) $a = -7$ $b = -3$.
8. Helyettesítsük $5u^4 - 3u^3v - 9u^2v^2 - 5uv^3 - 3v^4$ -be a) $u = -3$ $v = -2$, b) $u = -1$ $v = -3$, c) $u = -5$ $v = -2$.
9. Állítsuk elő $(uv)^3$ és helyettesítsük ebbe, valamint uv^3 -ba $u = 5$, $v = 9$.
10. a) $3a^2bc^2 \cdot 4ab^2c^3$; b) $15x^3y^2z \cdot (-8xy^3z^2)$; c) $23a^2x^2 \cdot 17ax^3$.
11. a) $5ab^2c^3 \cdot 19a^2b^3c$; b) $13xyz \cdot 7x^3y^2z^3$; c) $19xy^2z^5 \cdot 37x^2y^3z^4$.
12. a) $3ab^2 \cdot 5a^2c^3 \cdot 6b^3c$; g) 12. $ab^2c \cdot 13a^2b^3c^2 \cdot 14ab^3c^2$.
13. Szorozzuk meg e 4 tényezőt: $7a^2b^3$, $-8ab^3c$, $-9a^2b^4c^2$, $-10ab^3$.
14. Szorozzuk meg ezt az 5 kifejezést: $2x^2y$, $-3xy^2$, $-4xyz$, $5xy^2z$, $-6x^2y^2z^2$.
15. $7a^2b^3c^4$ szoroztassék $-9ab^3c^2$ és helyettesítsük a tényezőkhöz és a szorzatba: a) $a = 3$, $b = -2$, $c = -1$; b) $a = -2$, $b = -3$, $c = 1$; c) $a = 1$, $b = -3$, $c = -2$.

24. **Algebrai összegek szorzása.** Algebrai összegekkel épen úgy kell számolnunk, mint közönséges összegekkel, csak figyelembe kell vennünk az egyes tagok jeleit. Végezzük pl. a következő szorzást:

$$(5a^3 - 3a^2b - 2ab^2 + 9b^3) (2a^2 - 5ab + 6b^2).$$

Alkalmazzuk azt a tételt, hogy összeget úgy szorzunk összeggel, hogy ez egyik tényező minden tagját a másik tényező minden tagjával megszorozzuk és a nyert szorzatokat összeadjuk. (20. pont II.) A szorzat első tagja lesz: $5a^3 \cdot 2a^2 = 10a^5$. A szorzat második tagja: $-3a^2b \cdot 2a^2 = -3 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot b = -6a^4b$. A harmadik tag: $-2ab^2 \cdot 2a^2 = -2 \cdot 2 \cdot a \cdot a^2 \cdot b^2 = -4a^3b^2$; a negyedik tag: $9b^3 \cdot 2a^2 = 9 \cdot 2 \cdot b^3 \cdot a^2 = 18a^2b^3$. A következő tag: $5a^3 \cdot -5ab = -25a^4b$ stb. A szorzat tehát (a hasonló tagokat egymás alá írva):

$$\begin{aligned}
 &10a^5 - 6a^4b - 4a^3b^2 + 18a^2b^3 \\
 &\quad - 25a^4b + 15a^3b^2 + 10a^2b^3 - 45ab^4 \\
 &\quad + 30a^3b^2 - 18a^2b^3 - 12ab^4 + 54b^5 \\
 \hline
 &10a^5 - 31a^4b + 41a^3b^2 + 10a^2b^3 - 57ab^4 + 54b^5.
 \end{aligned}$$

Itt, hol a műveletek már nagyobb terjedelműek, arra is kellő figyelmet fordítunk, hogy a kifejezések legjobban áttekinthető alakban legyenek. Az egyes tagokban, mint már említve volt, a tényezőket rendszerint *abc* sorrendben írjuk, hogy a hasonló tagokat könnyebben felismerhessük, a többtagú tényezőket pedig *rendezve* írjuk föl.

E *rendezés* abban áll, hogy kiválasztva az egyik gyakrabban előforduló, vagy fontosabb jelentőségű betűt, a kifejezés tagjait oly sorrendben írjuk fel, hogy e betű hatványkitevői fogyó sort alkossanak és akkor a kifejezésről azt mondják, hogy az illető betű *fogyó hatványai szerint* rendezett. Így pl. *x*, illetőleg *a* fogyó hatványai szerint rendezett kifejezések:

$$\begin{aligned}
 &7x^6 + 5x^5 - 3x^3 + 2x - 1, \\
 &a^5bc - 4a^4bc - 3a^4b + 3a^3 + 2a^2b + 3abcd - 6,
 \end{aligned}$$

vagy pedig oly sorrendben írjuk, hogy az egyes tagokban e betű kitevői növekedő sort alkossanak. Így pl.:

$$\begin{aligned}
 &6 + 2x + 3x^2 - 5x^3 + 4x^4 \\
 &17U - 25UV + 36U^3V^2 + 10UV^3 - V^4
 \end{aligned}$$

az *x*, illetőleg a *V* növekedő hatványai szerint rendezett.

Feladatok.

Kiszámítandók a következő szorzatok:

- $(4a^2 - 3ab + b^2) \cdot 2ab.$
- $(3a^3 + 5a^2b - 2ab^2 + b) \cdot 6a^2bc.$
- $(25x^4 - 6x^3y - 4x^2yz - 15xy^2 + z^2 - u^2) \cdot 2xyz.$
- $(2p - q)(2q - p).$
- $(a^2 + 3ab - 6b^2)(3a - 8b).$
- $(a^3 - 6a^2b + 7ab^2 + 28b)(a^3 - 28a^2 + 10ab + 3)$ és helyettesítendő mind a tényezőkhöz, mind a szorzatba: $a=4$, $b=3$.
- $(a^2 + 2ax + x^2)(a^2 - 2ax + x^2).$
- $(a + 2ax - a^2x^2 + x^3)(a - 2ax - a^2x^2 - x^3).$
- $(a^2 - 2ax + 6x + x^2 + 6x^3)(a + x)$ és helyettesítendő a 7., 8. és 9. feladatban mind a tényezőkhöz, mind a szorzatba: $a=7$, $x=2$.
- $(5x^2 - 7xy + y^2)(6x^2 + 2xy - y^2).$

11. $(8x^2+7xy-y^2) (x^2+xy-y^2) (3x^2+6xy-5y^2)$ és helyettesítendő
10. és 11-nél $x=-3$, $y=-2$.

12. $(a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc) (b+c-a)$.

13. $(x^5+6x^4-7x^3-2x^2+8x+1) (x^2+6x-3)$.

14. $(x^8+2x^6-5x^5+3x^4+4x^2+2x-1) (x^4+x^2-13x+20)$.

15. $(x^4+5x-3) (x^2+6x^2+5x-10) (x^2-8x-1)$ és helyettesítendő
a 13., 14., 15-nél $x=-2$.

16. $(x^4-ax^3+bx^2-cx+d) (x^4+ax^3-bx^2+cx-d)$.

17. $(x-p) (x-p)$. 18. $(a+b)^{2*}$ 19. $(a+b+c)^{2**}$

20. $(a+b+c+d)^2$. 21. $(a+b)^3$. 22. $(a+b+c)^3$.

23. $(a+b)^4$. 24. $(x+a) (x+b) (x+c)$.

25. $(x+p) (x+q) (x+r) (x+s)$. 25a) $(x^2+3x+1)^2$.

26. $(x+a) (x+b) (x+c)$. 26a) $(2x^2+1)^2$.

27. $(x-p) (x-q) (x-r) (x-s)$. 27a) $(x^2-3x+1) (x-1)^2$.

28. Mutassuk meg: hogy $x(x+1) (x+2) (x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$.

29. $(a+b) (b+c)-(c+d) (d+a)-(a+c) (b+d)$.

29a) $(a-b) (c-d)+(a-c) (d-b)+(a-d) (b-c)$.

29b) $(a^2+b^2+c^2) (x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2=$

29c) $(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2=$

30. $(x+y+z+u)^2+(x-y-z+u)^2+(x-y+z-u)^2+(x+y-z-u)^2$.

31. $(a^2+b^2+c^2)^2-(a+b+c) (a-b-c) (a+c-b) (b+c-a)$.

32. $(a+b+c)^2-a(b+c-a)-b(b+c-a)-c(a+b-c)$.

33. $(x+y)^3+(x-y)^3-3(x+y) (x+y)^2+3(x+y)^2 (x-y)$.

34. Mekkora hibát ejt, aki $(a+b)c$ helyett a $a+bc$ -t mond?

(A hibát úgy számítjuk ki, hogy a helyes eredményből a helytelent kivonjuk.)

35. Mekkora hibát ejt az, aki $(a+b)(c+d)$ helyett $(a+b)c+d$ -t mond? és mekkora hibát ejt az, aki $(a+b)(c+d)$ helyett $a+bc+d$ -t mond?

36. Mekkora hibát ejt az, aki $(a+b)^2$ helyett $a+b^2$ -t mond? mekkorát ejt az, aki $(a-b)^2$ helyet $a-b^2$ -et mond?

37. Mekkora hibát ejt az, aki azt mondja $(a+b)^2=a^2+b^2$ és mekkorát ejt az, aki azt mondja $(a-b)^2=a^2-b^2$.

38. Két szám (pl. a és b) összegének négyzetéből vonjuk le-e két szám négyzeteinek összegét.

*) Jegyezzük meg magunknak, hogy $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Mondjuk el szavakkal e képletet!

**) Jegyezzük meg ezt is: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$.

39. Két szám különbségének négyzetéből vonjuk le e két szám négyzeteinek különbségét.

40. Két szám összegének négyzetéből vonjuk le e két szám különbségének négyzetét.

$$41. 10a - a(10 - b) = .$$

$$42. 10[a - (10 - b)] + (10 - a)(10 - b).$$

$$43. (10 - a)(10 - b) + 10(a + b) - 100.$$

$$44. a(a + 1) + (b - 1)b - (a - b)(a - b + 1).$$

$$45. a(a - 1) + b(b + 1) - (a - b - 1)(a - b).$$

46. Valamely a oldalú négyzet minden oldalát b -vel megnagyobbítjuk (megkisebbitjük). Mennyivel változik a négyzet területe?

47. Egy derékszögű négyszög hossza a m, szélessége b m. Ha hosszát c m-rel megnövesztjük és a szélességét ugyanannyival kisebbítjük, mennyivel változik a területe?

48. Egy kocka mindenik éle a dm. Mennyivel növekszik a felülete és mennyivel a köbtartalma, ha minden élet b dm-mel megnövesztjük? Mennyivel csökken a felülete és köbtartalma, ha mindenik él c dm-rel kisebbítettetik?

49. Számítsuk ki a 9. lap 43., 44., 48., 49., 50-ik példáiban foglalt kifejezéseket!

50a) Mutassuk meg, hogy

$$(x - a) + (x + 3a) + (x - 2a) = (x + a) + (x - 3a) + (x + 2a)$$

$$\text{és } (x - a)^2 + (x + 3a)^2 + (x - 2a)^2 = (x + a)^2 + (x - 3a)^2 + (x + 2a)^2$$

50b) Mutassuk meg, hogy

$$(x - a)(x + 3a) + (x - a)(x - 2a) + (x - 2a)(x + 3a) =$$

$$(x + a)(x - 3a) + (x + a)(x + 2a) + (x + 2a)(x - 3a)$$

V. Osztás és a törtek.

25. **Osztandó, osztó, hányados.** Ha ismerjük a szorzatot, abból még nem tudjuk meghatározni a tényezőket; de ha ismerjük a szorzatot és egyik tényezőjét, akkor a másik tényezőjét meghatározhatjuk. Azt a műveletet, amellyel a szorzatból és egyik tényezőjéből a másik tényezőt meghatározunk, *osztásnak* (divisio) hívjuk. Ha a a szorzat és b egyik tényezője, akkor a másik tényezőt $\frac{a}{b}$ vagy $a : b$ -vel jelöljük. a neve *osztandó* (dividendus), b neve *osztó* (divisor)

és a meghatározott másik tényező $\frac{a}{b}$ vagy $a:b$ neve *hányados* (quotiens).

$\frac{a}{b}$ tehát azon szám, amely b -vel szorozva, szorzatul a -t ad.

Képletben : $\frac{a}{b} \cdot b = a$ vagy $(a:b) \cdot b = a$.

Ez az osztás helyességének próbája : *hányados* $\times$ *osztó* = *osztandó*.

Az osztás két jelzése közül rendszerint a két pontot ($:$) használjuk, mikor magát a műveletet akarjuk végrehajtani, a törtvonást pedig, mikor a művelet eredményével akarunk tovább számolni. Az $\frac{a}{b}$ *törtszám* (fractio), melyben a neve *számláló* (numerator), b neve *nevező* (denominator).

Példák. Mit jelentenek :

$$\frac{x}{y}, \frac{3}{a}, \frac{a}{5}, \frac{b}{12}, \frac{a+b}{c}, \frac{a}{b+c}, \frac{xy}{z}, \frac{x}{zy}?$$

26. Algebrai kifejezések osztása. Mindenekelőtt a következő két kérdésre kell megfelelni : Miképen végezzük a különféle kifejezések osztását ? és másodsor : Miképen számolunk a törtszámokkal ? A két kérdés, mint nemsokára látjuk majd, csak alakjára nézve különbözik ; minden képlet, melyet nyerünk, az első és második kérdésre egyszerre felel.

a) Összeg osztása. Összeget a közönséges számtanban léptenyomon kell osztanunk. Így pl. $648 : 2$ -t fejben így számítjuk ki : 600 fele 300, 40 fele 20, 8 fele 4. 648 fele : 324. Látjuk tehát, hogy *összeget úgy osztunk, hogy minden tagját elosztjuk és a nyert hányadost összeadjuk.* Képletben :

$$\frac{a+b+c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} \dots \dots \dots \alpha)$$

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy e két kifejezés : $\frac{a+b+c}{d}$ és $\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$ valóban egyenlő. Az első az osztás értelmezése szerint az a szám, mely d -vel szorozva, $a+b+c$ -t ad. A másodikból is $a+b+c$ lesz, ha d -vel szorozzuk, mert hiszen összeget úgy kell szoroznunk, hogy tagjait egyenkint megszorozzuk és a nyert részletszorzatokat összeadjuk.

De

$$\frac{a}{d} \cdot d = a, \frac{b}{d} \cdot d = b, \frac{c}{d} \cdot d = c,$$

tehát valóban: $\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}\right) \cdot d = a + b + c.$

Ha tehát a két kifejezést d -vel szorozzuk, egyenlő eredményt kapunk, tehát egyenlők is voltak.

Az $a)$ alatti tétel, fordítva olvasva, azt fejezi ki, hogy: *Egyenlő nevezőjű törtek összege oly tört, melynek számlálója a számlálók összege, a nevezője pedig a közös nevező.* Így pl.:

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}.$$

b) Szorzat osztása. Ha ab szorzatot kell c -vel osztanunk, akkor voltaképen összeg osztása a feladatunk, mert hiszen $ab = b + b + b + \dots + b$ (a -szor); tehát:

$$\frac{ab}{c} = \frac{b + b + b + \dots + b}{c} = \frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{c} \dots + \frac{b}{c} = a \cdot \frac{b}{c}$$

vagyis:

$$\frac{ab}{c} = a \cdot \frac{b}{c}$$

Szorzatot úgy oszthatunk, hogy az egyik tényezőjét elosztjuk és a nyert hányadost a másik tényezővel megszorozzuk.

Ezen tétel:

$$\frac{ab}{c} = a \cdot \frac{b}{c}$$

még (visszafelé olvasva) úgy is kifejezhető, hogy *törtet úgy szorzunk valamely számmal, hogy ezzel a számlálót megszorozzuk és a nevezőt változatlanul hagyjuk.* Így pl.:

$$5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

c) Szorzattal osztás. Ha pl. 6 részre kell valamit felosztanunk, akkor előbb 2 részre osztjuk és azután a hányadost elosztjuk 3 részre. Ha $b \cdot c$ részre kell valamely számot (pl. a -t) osztanunk, akkor előbb b részre osztjuk el, azután pedig az így nyert hányadost c részre osztjuk. *Szorzattal úgy osztunk, hogy előbb az egyik tényezővel osztunk és azután a nyert hányadost a másik tényezővel osztjuk.*

Képletben:

$$\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$$

E tételt még úgy is fejezhetjük ki, hogy *törtet* $\left(\frac{a}{b}\right)$ *valamely számmal (c) úgy osztunk, hogy a nevezőt megszorozzuk e számmal és a számlálót változatlanul hagyjuk.* Pl.:

$$\frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{10}$$

d) **Szorzat osztása szorzattal.** Ha *ab* osztandó *cd*-vel, akkor alkalmazzuk az előbbi (c) alatti tételt; előbb osztunk *c*-vel, azután *d*-vel. *c*-vel oszthatjuk az *ab* szorzatot, hogy (a *b*) alatti tétel szerint) pl. az *a*-t elosztjuk *c*-vel és a nyert hányadost *b*-vel megszorozzuk; azaz

$$\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b$$

A jobb oldalon álló szorzatot pedig úgy oszthatjuk *d*-vel, hogy egyik tényezőjét, pl. *b*-t, osztjuk vele, tehát:

$$\frac{ab}{cd} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}$$

Ezen tétel kifejezi egyúttal a tört szorzását törttel. *Törtet törttel úgy szorzunk, hogy a számlálók szorzatát a nevezők szorzatával osztjuk.* Pl.:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{24}$$

E szorzás a szorzás értelmezése szerint nem volna végezhető, mert valamely számot pl. $\frac{3}{4}$ -szer nem lehet összeadandóul tennünk, tehát itt is, épen úgy mint a negatív számokkal való szorzásnál, a szorzás fogalmának tágítása történik.

Az egységet tört alakban írhatjuk: $1 = \frac{m}{m}$; tehát:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{m} = \frac{am}{bm}$$

Ezen egyenlőség: $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ azt a számtanból ismeretes tételt fejezi ki, hogy *a tört értéke nem változik meg, ha a számlálót és nevezőt egyenlő számokkal szorozzuk.* Ha ezt az egyenlőséget visszafelé olvassuk, akkor azt találjuk, hogy *a tört értéke nem változik meg, ha számlálóját és nevezőjét egyenlő számokkal elosztjuk.* Vagy más szóval: Ha az osztandót és az osztót egyenlő számokkal szorozzuk (vagy osztjuk), a hányados nem változik meg.

e) **Törttel osztás.** Ha $\frac{a}{b}$ -t $\frac{c}{d}$ -vel kell osztanunk, akkor, úgy mint a számtanban tesszük, a feladatot visszavezethetjük egyszerűbbre azáltal, hogy mind az osztandót $\left(\frac{a}{b}\right)$ mind az osztót $\left(\frac{c}{d}\right)$ megszorozzuk az osztó nevezőjével, d -vel.

$$\text{Ezáltal keletkezik: } \frac{ad}{b} : c = \frac{ad}{bc}.$$

Törttel úgy osztunk, hogy e törtosztó nevezőjével szorzunk és számlálójával osztunk; vagy rövidebben: ha az osztó megfordítottjával, ú. n. reciprok) értékével szorzunk. Ezen szabály magában foglalja az egész számnak törttel való osztását is.*

f) **Egyenlő alapú hatványok osztása.** Egyenlő alapú hatványok hányadosa egyszerűbb alakra hozható. $\frac{a^5}{a^3}$ -ban a számláló így írható: $a^3 \cdot a^2$; ha pedig a szorzatot egyik tényezőjével elosztjuk, hányadosul a másikat kapjuk; tehát $\frac{a^5}{a^3} = a^2$.

Általában $\frac{a^n}{a^m}$ számlálója, ha n nagyobb, mint m , így írható: $a^m \cdot a^{n-m}$, tehát $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$. *Egyenlő alapú hatványokat úgy osztunk, hogy az alapot felemeljük az osztandó és osztó kitevőinek különbségére.*

Ezen tétel egyelőre csakis akkor alkalmazható, mikor az osztandó kitevője nagyobb az osztóénál.

27. **A hányados előjele.** Az osztásnak ugyanaz a jelszabálya van, mint a szorzásnak. *Egyenlő jelűek hányadosa pozitív, különböző jelűeké negatív.* Így pl.: $24 : 8 = 3$; $(-24) : 8 = -3$; $24 : (-8) = -3$. $(-24) : (-8) = 3$. Általában :

$$1. \frac{+a}{+b} = \frac{a}{b}; \quad 2. \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}; \quad 3. \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}; \quad 4. \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}.$$

Az első nem szorul bizonyításra. A többi eset beigazolás-

*) Reciprok értékek azok, melyek szorzata $= 1$. Így 1 reciprok értéke 1, 2-é, $\frac{1}{2}$, $\frac{a}{b}$ -é $\frac{b}{a}$: mert $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1$.

sára az osztás próbáját készítjük el. $\frac{-a}{b}$ azon szám, mely b -vel szorozva, szorzatul $-a$ -t ad; $-\frac{a}{b}$ is ugyanilyen szám, mert $\left(-\frac{a}{b}\right) \cdot b = -\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) = -a$.

Éppen így $\frac{a}{-b}$ azon szám, mely $-b$ -vel szorozva szorzatul a -t ad; és $-\frac{a}{b}$ is ugyanaz a szám, mert $\left(-\frac{a}{b}\right) \cdot -b = \frac{a}{b} \cdot b = a$.

Végül $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$, mert $\frac{-a}{-b}$ azon szám, mely $-b$ -vel szorozva $-a$ -t ad és $\frac{a}{b}$ is ugyanez a szám, mert $\frac{a}{b} \cdot (-b) = -\frac{a}{b} \cdot b = -a$.

Feladatok.

1. $6a^3b^2 : 2a^2b = \frac{6}{2} \cdot \frac{a^3}{a^2} \cdot \frac{b^2}{b} = 3a \cdot b$.

2. a) $12a^5b^3 : 4a^2b$; b) $20x^5y^2 : 4x^3y$; c) $45x^6y^5 : 9x^6y^2$; helyettesítsük az osztandóba, az osztóba és a hányadosba: $a=3$, $b=2$, $x=-2$, $y=1$.

3. $(16a^5b^4 + 20a^4b^5 - 12a^3b^6 - 8a^2b^1) : 4a^2b^3$.

4. a) $(4x^2 + 6x) : 2x$; b) $(8x^3 + 6x^2 + 4x) : 2x$; c) $(15x^6 - 20x^4 - 10x^3) : 5x^2$.

5. a) $(6a^4 - 8a^3) : (-3a^2)$; b) $(-20a^4 + 16a^3 + 8a^2) : -4a^2$.

6. a) $a^{2n+3} : a^{n+1}$; b) $a^{2n+5} : a^{n-1}$; c) $a^{n-6} : a^{-n+9}$.

7. a) $4a^{n+2}b^{x+1} : 2a^{n-1}b^{x-2}$; b) $6a^{n+m}b^{n+2m} : 3a^{n-m}b^{n+m}$.

8. $3a^2b^3$ -ba helyettesítsük a) $a=2/3$, $b=3/4$; b) $a=-1/2$, $b=2/3$, c) $a=-3/4$, $b=-3/5$.

9. $\frac{4a^2}{9}$ -be helyettesítsük a) $a=2/5$; b) $a=-3/4$; c) $a=2/3$.

10. Mennyi $\frac{a}{b}$, ha a) $a=1.5$, $b=0.25$; b) $a=-3.4$, $b=1.6$; c) $a=2.8$, $b=1.25$; d) $a=-7.9$, $b=-0.8$.

11. Mennyi $\frac{a}{b}$ és mennyi $\frac{\frac{a}{b}}{c}$? Helyettesítsünk mindenikbe $a=1/2$, $b=-1/2$, $c=2/3$.

12. Mutassuk meg, hogy $\frac{a}{b}$ -t c -vel úgy is szorozhatjuk, hogy a nevezőt c -vel osztjuk és hogy c -vel úgy is oszthatjuk, hogy a számlálót c -vel osztjuk. Mutassuk meg, hogy törtet törttel úgy is oszthatunk, hogy a számlálót a számlálóval, nevezőt nevezővel osztjuk.

13. $\frac{a}{bc}$ kiszámítandó, ha a) $a=-\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{3}{5}$; b) $a=-\frac{3}{4}$, $b=-\frac{2}{5}$, $c=-\frac{1}{6}$; c) $a=\frac{2}{5}$, $b=-\frac{3}{4}$, $c=\frac{1}{8}$.

14. $\frac{ab}{3c}$ kiszámítandó, ha a) $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{3}{4}$, $c=-\frac{1}{5}$; b) $a=-\frac{3}{5}$, $b=\frac{2}{3}$, $c=-\frac{2}{3}$; c) $a=-\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=-\frac{8}{5}$.

15. $(6a^n + 9a^{n-1} - 12a^{n-2}) : 3a^{n-5}$ és helyettesítendő $a=-3$, $n=6$ az osztandóba, az osztóba és a hányadosba.

16. $\frac{a^n}{a^m}$ kiszámítandó a) ha $a=4$, $n=5$, $m=3$; b) $a=3$, $n=6$, $m=4$; c) $a=5$, $n=5$, $m=2$.

17. Hány K-ba kerül αx méter posztó, $\beta\frac{m}{n}$ méter, ha 1 m ára $\frac{a}{b}$ korona?

18. Ha a méter posztó r K; 1 m hogy? $\frac{x}{y}$ m hogy? k K-ért hány m-t kapunk?

19. Ha $\frac{a}{b}$ m posztó x korona, 1 m hogy? $\frac{k}{v}$ m hogy? s K-ért hány m-t kapunk, $\frac{k}{l}$ K-ért hányat?

20. a) $\frac{x^3}{a} : \frac{a}{q}$; b) $\frac{3x}{a^2} : \frac{2x}{a^3}$; c) $x^2 : \frac{a}{x}$; d) $5x^3 : \frac{x^2}{a}$; e) $3x : \frac{x^2}{a^3}$
és helyettesítendő $x=\frac{3}{4}$, $a=-\frac{1}{2}$.

21. Mennyi a K-nak p %-a? Mennyi $(x-500)$ K 3%-a?

22. Mennyi $\frac{x}{3}$ K p %-a? Mennyi x K $\frac{2}{5}$ részének 3%-a?

23. a) $(12x^2 + 6x - 3) : -3$. b) $(24x^5 - 18x^4 + 9x^3) : -3x^2$.

24. a) $(15x^2 - 20x - 30) : -5$. b) $(60x^5y^4 - 48x^4y^3 - 36x^3y^2) : 12x^2y$.

25. a) $5 : -1$; b) $8 : -2$; c) $-3 : 1$; d) $-a : -1$; e) $a : -1$.

28. Osztás többtagú kifejezéssel. Egytagú kifejezéseknél közvetlenül láthatjuk, vajjon ugyanaz a tényező bennfoglal-

tatik-e a számlálóban és a nevezőben vagy nem, de pl. a következő hányadosban :

$$\frac{x^3+6x-7}{x-1}$$

nem tudjuk még fölismerni, vajjon nem lehet-e talán $x-1$ -gyel rövidíteni, azaz lehet-e x^3+6x-7 -et oly szorzat alakjában fölírni, melynek egyik tényezője $x-1$? A szorzás végrehajtása valóban meggyőz arról, hogy :

$$x^3+6x-7=(x-1)(x^2+x+7)$$

és így ama tört számlálója :

$$(x-1)(x^2+x+7)$$

alakban írható, vagy a számláló- és nevezőben $x-1$ -gyel osztva, végre a szóban forgó tört mint egész kifejezés : x^2+x+7 írható ; tehát :

$$(x^3+6x-7):(x-1)=x^2+x+7.$$

A közönséges számtanban is gyakran állunk ilyen feladattal szemben. Így pl. : ha $377856:512$ -vel, akkor tulajdonképen egy többtagú kifejezés ($300000+70000+\dots$) osztandó egy másik többtagúval ($500+10+2$)-vel. Vizsgáljuk meg, hogyan járunk el ez esetben, hogy ezután megállapíthassuk eljárásunkat algebrai kifejezések esetében.

Csak arra kell törekednünk, hogy a hányados első számjegyét meghatározzuk. Ez első jegy 7 százaz. E 7 százazsal megszorozzuk az osztót és a nyert szorzatot levonjuk az osztandóból ; tehát :

$$\begin{array}{r} 377856 \\ 512 \times 700 = 358400 \\ \hline 19456 \end{array}$$

Itt tulajdonképen nem tettünk mást, mint hogy az osztandót két részre választottuk :

$$377856 = 358400 + 19456.$$

Az első részben az osztó megvan 700-szor, a második részben még nem tudjuk hányszor. Most tehát 19456 osztandó 512-vel. Újra osztással van dolgunk ; de egyszerűbb az eset,

mint az előbbi, mert kisebb az osztandó. A hányados első jegye 3 tizes. Megint az előbbi eljárást követve :

$$\begin{array}{r} 19456 \\ 512 \times 30 = 15360 \\ \hline 4096 \end{array}$$

A 19456-ot két részre választottuk szét :

$$19456 = 15360 + 4096.$$

Az első részben megvan az osztó 30-szor, a második részben még nem tudjuk hányszor. Hogy ezt meghatározzuk, a 4096-ot osztjuk tovább 512-vel. Ez a feladat megint egyszerűbb az előbbinél, mert kisebb az osztandó : $4096 : 512 = 8$.

A 377856-ot tehát 3 részből állíthatjuk elő, melyek mindegyike osztható 512-vel, u. i. :

$$377856 = 358400 + 15360 + 4096.$$

Az első tagban megvan az osztó 700-szor, a másodikban 30-szor, a harmadikban 8-szor. A keresett hányados tehát 738. Az osztandót felbontottuk két tényezőre, melyek egyike az osztó.

Feladat. Végezze a tanuló ezen a módon a következő osztásokat :
 $560625 : 575$; $27492 : 79$; $168707 : 539$; $8451168 : 211$.

Általánosságban oly eljárást kell keresnünk, mely az osztandó felbontását adja két tényezőre, hol e tényezők egyike az osztó.

Legyen pl. a következő osztás végzendő:

$$(45x^5 - 37x^4 + 49x^3 - 24x^2 + 13x - 2) : (5x^2 - 3x + 2).$$

Jelöljük az osztandót röviden A -val, az osztót B -vel, a hányadost C -vel, akkor a tulajdonképeni feladatunk az, hogy az A osztandót szorzat alakjában állítsuk elő, melynek egyik tényezője B , a másik ismeretlen tényező C , tehát :

$$A = BC.$$

Az osztandó 5-öd fokú, az osztó másodfokú az x -ben, tehát a hányadosnak harmadfokúnak kell lennie, mert hiszen ha a hányados legmagasabb tagját az osztó legmagasabb tagjával megszorozzuk, szorzatul az osztandó legmagasabb tagját kell kapnunk. Ebből a megjegyzésből az is következik, hogy a

hányados első tagját megkapjuk, ha az osztandó legmagasabb tagját az osztó legmagasabb tagjával elosztjuk. A hányados első tagja tehát :

$$45x^5 : 5x^2 = 9x^3.$$

Meglévén a hányados első tagja, a feladat itt is, mint a számok osztásánál, egyszerűbbé válik. Ha ugyanis a hányados első tagját röviden c -vel a másik, még ismeretlen részét pedig D -vel jelöljük, akkor a C hányados $c+D$ alakban írható, azaz :

$$A : B = c + D$$

vagyis :

$$A = Bc + BD.$$

Ha az egyenlőség mindkét oldalából Bc -t elveszünk, marad :

$$A - Bc = BD.$$

A hányados többi részének, a D -nek meghatározása végetti az egyenlőség mindkét oldalán B -vel osztunk, miből :

$$(A - Bc) : B = D.$$

Ez azt mondja, hogy a hányados megtalált tagjával (c) meg kell szoroznunk az osztót, a nyert szorzatot (Bc) ki kell vonnunk az osztandóból és az így nyert maradékot kell tovább osztanunk.

Egyúttal azt is látjuk, hogy az adott osztandót két részből tehetjük össze, az egyik rész Bc , a másik pedig $A - Bc$. — Az elsőről közvetlenül látjuk, hogy az osztónak c -szerese, a második részből további osztással kell meghatározni, hogy B -nek hány-szorosa. Alkalmazva a felvett példára :

$$\begin{array}{rcl} 45x^5 - 37x^4 + 49x^3 - 24x^2 + 13x - 2 & = & A \\ 9x^3(5x^2 - 3x + 2) = 45x^5 - 27x^4 + 18x^3 & = & Bc \\ \hline -10x^4 + 31x^3 - 24x^2 + 13x - 2 & = & A - Bc \end{array}$$

Az adott osztandó két részből így állítható össze :

$$\begin{aligned} 45x^5 - 37x^4 + 49x^3 - 24x^2 + 13x - 2 &= (45x^5 - 27x^4 + 18x^3) + \\ &+ (-10x^4 + 31x^3 - 24x^2 + 13x - 2). \end{aligned}$$

Az első rész osztható az osztóval, a hányados $9x^3$, a második részt tovább kell osztanunk ; de a feladat egyszerűbb,

mint az eredeti volt, mert most már az osztandó negyedfokú az x -ben.

Itt megint csak a hányados első tagját kell meghatározunk. Ez pedig az előbbi eljárás szerint: $-10x^4 : 5x^2 = -2x^2$.

A hányados nyert tagjával megszorozzuk az osztót, a szorzatot kivonjuk az osztandóból (az előbbi maradékból) és ezáltal az osztandót megint két részre választottuk. Az eredmény a következő:

$$\begin{array}{r}
 -10x^4 + 31x^3 - 24x^2 + 13x - 2 \\
 -2x^2 (5x^2 - 3x + 2) = -10x^4 + 6x^3 - 4x^2 \\
 \hline
 \begin{array}{ccc}
 + & - & + \\
 25x^3 - 20x^2 + 13x - 2
 \end{array}
 \end{array}$$

Az osztandó tehát két részből így állítható elő:

$$\begin{aligned}
 -10x^4 + 31x^3 - 24x^2 + 13x - 2 &= (-10x^4 + 6x^3 - 4x^2) + \\
 &+ (25x^3 - 20x^2 + 13x - 2).
 \end{aligned}$$

Az első rész osztható az adott osztóval, a hányados, miként láttuk, $-2x^2$, a második résznél további osztással kell a hányadost meghatározni; de ez a feladat egyszerűbb mint az előbbi, mert most már az osztandó harmadfokú. Itt megint csak a hányados első tagját kell meghatározunk. Ez: $25x^3 : 5x^2 = 5x$. E taggal megszorozzuk az osztót, a szorzatot kivonjuk az osztandóból és ezáltal az osztandót megint két részre választottuk. Az eredmény a következő:

$$\begin{array}{r}
 25x^3 - 20x^2 + 13x - 2 \\
 5x (5x^2 - 3x + 2) = 25x^3 - 15x^2 + 10x \\
 \hline
 -5x^2 + 3x - 2.
 \end{array}$$

Az osztandó tehát a következő két részből áll:

$$25x^3 - 20x^2 + 13x - 2 = (25x^3 - 15x^2 + 10x) + (-5x^2 + 3x - 2).$$

Az első rész osztható az adott osztóval, a hányados, miként láttuk: $5x$, a második résznél további osztással kell a hányadost meghatározni. Közvetlenül látjuk, hogy:

$$(-5x^2 + 3x - 2) : (5x^2 - 3x + 2) = -1.$$

Az adott osztandót a következő 4 részből állítottuk elő:

$$\begin{aligned}
 (45x^5 - 27x^4 + 18x^3) &+ (-10x^4 + 6x^3 - 4x^2) + (25x^3 - 15x^2 + \\
 &+ 10x) + (-5x^2 + 3x - 2).
 \end{aligned}$$

Mindenik tag külön osztható $5x^2-3x+2$ osztóval. Az egyes hányadosok $9x^3$, $-2x^2$, $5x$ és -1 , tehát a keresett hányados ezek összege :

$$9x^3-2x^2+5x-1.$$

Hogy gyorsabban számolhassunk, az osztás menetét — a gondolatmenetet megtartva — így rendezhetjük be :

$$\begin{array}{r}
 (45x^5-37x^4+49x^3-24x^2+13x-2) : (5x^2-3x+2) = 9x^3- \\
 45x^5-27x^4+18x^3 \qquad \qquad \qquad -2x^2+5x-1. \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 -10x^4+31x^3-24x^2+13x-2 \\
 -10x^4+6x^3-4x^2 \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 + \quad - \quad + \\
 25x^3-20x^2+13x-2 \\
 25x^3-15x^2+10x \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 - \quad + \quad - \\
 -5x^2+3x-2 \\
 -5x^2+3x-2 \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 + \quad - \quad + \\
 0
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

A kész szabályt az osztás elvégzésére többtagú osztó esetében most már összeállítjuk a következőkben :

1. *Osztandó és osztó először is ugyanazon betű fogyó hatványai szerint rendezendő.*

2. *Elosztjuk az osztandó első tagját az osztó első tagjával és ezáltal nyerjük a hányados első tagját, az első részlethányadost.*

3. *Megszorozzuk az egész osztót az így nyert részlethányadossal és kivonjuk e szorzatot az osztandóból.*

4. *A kivonás eredménye, az ú. n. maradék, új osztandónak tekintendő, melyen a most leírt művelet sor ismétlődő, miáltal a hányados második tagját, és ismét új, második maradékol nyerünk s. i. t.*

Ha az osztandó felbontható két olyan algebrai egész kifejezés szorzatára, melyek egyike az osztó, akkor e művelet sornak vége szakad, mert egyik maradék 0 lesz.

Ily módon végezhetjük még el a következő osztást :

$$\begin{array}{r} (5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5) : (a^3 - 4a^2b + 2b^2) = 5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 \\ 5a^7 - 20a^6b \\ \hline \end{array}$$

Első maradék :

$$\begin{array}{r} - 2a^6b + 12a^5b^2 - 16a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5 \\ - 2a^6b + 8a^5b^2 \\ \hline \end{array}$$

Második maradék :

$$\begin{array}{r} 4a^5b^2 - 16a^4b^3 + 8a^3b^5 \\ 4a^5b^2 - 16a^4b^3 \\ \hline \end{array}$$

Harmadik maradék :

$$0$$

Nem szabad e számításoknál soha szem elől tévesztetni, hogy csak akkor vezetnek eredményhez, ha valóban szorzatalakja van az osztandónak. Az adott szabályok kivihetlensége maga figyelmeztet reá, ha ez nincs úgy, midőn t. i. az osztandó és osztó első tagjainak osztása többé nem végezhető. Így pl. :

$$\begin{array}{r} (x^2 + 5x - 3) : (x^2 - 4x + 1) = 1 + \frac{9x - 4}{x^2 - 4x + 1} \\ x^2 - 4x + 1 \\ \hline \end{array}$$

Maradék : $9x - 4$

Ha most a maradékon akarom a számítást folytatni: $\frac{9x}{x^2} = \frac{9}{x}$ tört alakot ad, az osztás nem végezhető; tehát a hányadost

$$1 + \frac{9x - 4}{x^2 - 4x + 1}$$

alakban írhatom föl.

A következő feladatban törtszámú együtthatók lépnek fel:

$$(x^4 + 5x^3 - 6x^2 + x - 5) : (2x + 3) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{4}x^2 - \frac{45}{8}x + \frac{143}{16} - \frac{509}{16(2x+3)}$$

$$x^4 + \frac{3}{2}x^3$$

$$\begin{array}{r} \hline \frac{7}{2}x^3 - 6x^2 \\ \hline \frac{7}{2}x^3 + \frac{21}{4}x^2 \\ \hline \frac{45}{4}x^2 + x \\ \hline \frac{45}{4}x^2 - \frac{135}{8}x \\ \hline + \quad + \\ \hline \frac{143}{8}x - 5 \\ \hline \frac{143}{8}x + \frac{429}{16} \\ \hline \hline \frac{509}{16} \end{array}$$

Itt a hányados a szó szoros értelmében nem egész kifejezés, de megvan benne az egész kifejezés azon főjellege, hogy *egy bizonyos betű fogyó vagy növekedő hatványai szerint rendezett.*

Az említetteken kívül a tanuló figyeljen e példánál még egy másik — tisztán az írásra vonatkozó — egyszerűsítésre. Az egyes osztások után a maradék nincs teljesen kiírva; hanem azok a tagok, melyeken változás nem történik, hiányoznak.

Hogy a többtagúak ilyen osztása — vagy pontosabban beszélve — többtagúak hányadosának ez az átalakítása lehetséges legyen, arra szükséges volt, hogy osztandó és osztó egy közös betű szerint legyen rendezhető. De az, hogy a két kifejezés e betű *fogyó* hatványai szerint volt rendezve, oly megállapítás volt, melyre semmi körülmény sem *kényszerített*. Époly jogosan rendezhattük volna mind a két kifejezést a fölvett betű *növekedő* hatványai szerint.

Végezzük mindjárt ily rendezésben a következő példát :

$$\begin{array}{r}
 (-78+3x+4x^2+5x^3+x^4) : (-2+x) = 39+18x+7x^2+x^3 \\
 \underline{-78+39x} \\
 -36x+4x^2 \\
 \underline{-36x+18x^2} \\
 -14x^2+5x^3 \\
 \underline{-14x^2+7x^3} \\
 -2x^3+x^4 \\
 \underline{-2x^3+x^4} \\
 0
 \end{array}$$

Az eredmény ugyanaz, mintha x szerint fogyólag lettek volna rendezve a kifejezések.

Feladatok.

NB. A tanuló az egyes példákat tárgyalja kétféleképp, t. i. fogyó és növekedő hatványok szerint rendezve és igazolja mindig az eredményt azzal, hogy az osztót a hányadossal szorozva, az osztandót nyeri.

1. $(x^2-7x+12) : (x-3)$.

2. $(x^2+x-72) : (x+9)$.

3. $(2x^2+3x-9) : (2x-3)$.

4. $(6x^3+14x^2-4x+24) : (2x+6)$ és helyettesítsük e 4 feladatnál mind az osztandóba, mind az osztóba, mind a hányadosba a) $x=5$, b) $x=-9$.

5. $(9x^3+3x^2+x-1) : (3x-1)$.

6. $(7x^3-24x^2+58x-21) : (7x-3)$.

7. $(x^6-1) : (x-1)$.

8. $(6-12x+11x^2-5x^3+x^4) : (3-3x+x^2)$ és helyettesítsük e 4 feladat mindenikénél az osztandóba, az osztóba és a hányadosba: a) $x=3$, b) $x=-5$.

9. $(36 - 13x^2 + x^4) : (6 + 5x + x^2)$.
 10. $(64 + x^4) : (8 + 4x + x^2)$.
 11. $(24 + 50x + 35x^2 + 10x^3 + x^4) : (4 + 5x + x^2)$.
 12. $(57 - 35x - 24x^2 + x^3 + x^4) : (-3 + 2x + x^2)$ és helyettesítsük e 4 feladatban a) $x=4$, b) $x=-3$.
 13. $(a^{12} + a^6 - 2) : (a^4 + a^2 + 1)$.
 14. $(a^3 - 2ab^2 + b^3) : (a - b)$.
 15. $(a^3 - 2a^2b - 3ab^2) : (a + b)$.
 16. $(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3) : (x - y)$.
 17. $(a^6 - b^6) : (a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3)$.
 18. $[(x^3 - 12x + 16)(x^3 - 12x - 16)] : (x^2 - 16)$.
 19. $(a^3 + a^2b + a^2c - abc - b^2c - bc^2) : (a^2 - bc)$.
 20. $(3x^3 + 4abx^2 - 5a^2b^2x - 2a^3b^3) : (x + 2ab)$.
 21. $[(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a)] : (a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)$.
 22. $[(ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ax + by + cz)^2] : (a^2 + b^2 + c^2)$.
 23. $[(ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ax + by + cz)^2] : (x^2 + y^2 + z^2)$.

VI. A legfontosabb szorzatok alakjai.

29. **Egytagúak négyzete.** Ama szorzatok közt, melyek az algebrában folyton előfordulnak, legegyszerűbb a *négyzet* (*quadratum*): két egyenlő tényező szorzata.

Fontos megjegyeznünk, hogy

$$(ab)^2 = ab \cdot ab = a^2b^2,$$

vagyis, hogy *valamely szorzat négyzetét nyerjük, ha a tényezőket külön négyzetre emeljük és e négyzeteket egymással megszorozzuk*; valamint ezt:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2},$$

mely szerint *valamely tört négyzetét nyerjük, ha a számlálót és nevezőt külön négyzetre emeljük*.

Feladat. Számítsuk ki e négyzeteket; $(3a)^2$, $(5x)^2$, $(abc)^2$, $(3ab)^2$,

$$9ac)^2, \left(\frac{a}{3}\right)^2, \left(\frac{2x}{5}\right)^2, \left(\frac{3}{5x}\right)^2, \left(\frac{a}{2b}\right)^2.$$

Ha a négyzetre emelendő mennyiség maga már hatvány, pl. a^m , akkor

$$(a^m)^2 = a^m a^m = a^{2m},$$

mely képlet szerint *valamely hatvány négyzetét megkapjuk, ha a kitevőt 2-vel szorozzuk.*

Ezekből kitűnik, hogy bármely egytagú, egész vagy tört kifejezés négyzetét azonnal fölírhatjuk azáltal, hogy számlálóban, nevezőben minden tényezőnek négyzetét vesszük. Pl.

$$\begin{aligned} (6x^2yz^3)^2 &= 36x^4y^2z^6, & (14abc^4)^2 &= 196a^2b^2c^8, \\ \left(\frac{5abc^2}{6xy}\right)^2 &= \frac{25a^2b^2c^4}{36x^2y^2} & \left(\frac{17x^3y}{18zu^2}\right)^2 &= \frac{289x^6y^2}{324z^2u^4}. \end{aligned}$$

Ha a négyzetre emelendő mennyiség negatív előjellel van ellátva, ez nem változtatja az eredményt, mert

$$(-A)^2 = (-A)(-A) = A^2$$

és így pl.

$$(-5ab)^2 = (5ab)^2 = 25a^2b^2.$$

Minden egytagú mennyiség négyzete tehát pozitív előjelű.

30. Kéttagúak négyzete. Ha a négyzetre emelendő mennyiség két tagból áll, amit általánosan $a+b$ -vel jelezhetünk, a szorzás végrehajtása által:

$$\begin{array}{r} (a+b)(a+b) \\ \hline a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2. \end{array}$$

a következő képletet kapjuk:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

amelynek értelmét szavakban kifejezve a következő szabály adja: *Két tag összegének négyzetét nyerjük, ha a tagok négyze- teinek összegét vesszük és ehhez még a két tag kétszeres szorzatát hozzáadjuk.*

Példák:

- $(3x+2y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2.$
- $(8P-3Q)^2 = 64P^2 - 48PQ + 9Q^2.$

A fölírásban — mint eddig — a következő rendet szokás követni. *Első tag négyzete, a két tag kétszeres szorzata, második tag négyzete*; mert így, az eddigi példák szerint is, az eredményt mindjárt rendezett alakban nyerjük.

Ha az adott kifejezés több mint két tagból áll, pl. $a+b+c$, könnyen visszavezetjük a föladatot az előbbire, ha az első két tagot zárójelbe foglaljuk és egyelőre egy tagnak vesszük. Ily módon :

$$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2,$$

és ha itt az ismert műveleteket végrehajtjuk :

$$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2.$$

Minden egyéb háromtagú kifejezésnél most vagy hasonlóképp járunk el, vagy pedig a nyert képletben a , b és c helyébe a megfelelő értékeket tesszük.

A képlet alkata megint egyszerű ; tartalmazza minden tag négyzetét és minden tagpárnak kétszeres szorzatát.

Példák :

$$1. (3x+5y+2z)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2 + 12xz + 12yz + 4z^2.$$

$$2. (x-3y-4z)^2 = x^2 - 6xy + 9y^2 - 8xz + 24yz + 16z^2.$$

$$3. \left(\frac{1}{a} - \frac{x}{b} + \frac{y}{c} \right)^2 = \frac{1}{a^2} - \frac{2x}{ab} + \frac{x^2}{b^2} + \frac{2y}{ac} - \frac{2xy}{bc} + \frac{y^2}{c^2}.$$

És így járunk el még több tagnál is, pl.

$$(a+b+c+d)^2 = [(a+b+c)+d]^2 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2 =$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2,$$

hol a képlet alkata ép úgy értelmezhető, mint előbb ; tartalmazza minden tag négyzetét és minden tagpár kétszeresszorzatát.

31. Összeg és különbség szorzata. Sokszor fordul elő hogy két tag összegének és különbségének, általánosságban tehát $a+b$ és $a-b$ szorzatát kell kiszámítanunk A művelet végrehajtása :

$$\frac{(a+b)(a-b)}{a^2 + ab}$$

$$\frac{-ab - b^2}{a^2 - b^2}$$

mutatja, hogy :

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

azaz : Két tag összegének és különbségének szorzata egyenlő a két tag négyzetének különbségével.

Ha pl. $10x+2y$ és $10x-2y$ szorzatát kell képezni, vegyük $10x$ -et a -nak, $2y$ -t b -nek és akkor részletes számítás nélkül is fölírhatjuk, hogy :

$$(10x+2y)(10x-2y) = 100x^2 - 4y^2.$$

Ép így :

$$\left(\frac{13xy}{z} + \frac{z}{2}\right) \left(\frac{13xy}{z} - \frac{z}{2}\right) = \frac{169x^2y^2}{z^2} - \frac{z^2}{4}.$$

E képletet alkalmazhatjuk pl. a számítás rövidítésére, ha két oly szám szorzandó, melyek közül az egyik egy bizonyos kerek számnál ugyanannyival nagyobb, mint amennyivel a másik kisebb. Pl.

$$997 \cdot 1003 = (1000 + 3)(1000 - 3) = 1,000.000 - 9 = 999.991.$$

$$595 \cdot 605 = (600 + 5)(600 - 5) = 360.000 - 25 = 359.975.$$

Alkalmazhatjuk ezt a képletet akkor is, midőn két szám négyzeteinek különbségét kell előállítanunk. Így pl. :

$$59^2 - 56^2 = (59 + 56)(59 - 56) = 115 \cdot 3 = 345,$$

$$127^2 - 123^2 = (127 + 123)(127 - 123) = 250 \cdot 4 = 1000.$$

Feladatok.

$$1. (3a^2b)^2. \quad 2. (-5a^3b^2c)^2. \quad 3. \left(\frac{5a^3}{b^2}\right)^2. \quad 4. \left(\frac{9a^3x^2y}{5bz}\right)^2.$$

$$5. (a-b)^2. \quad 6. (17x+19y)^2. \quad 7. (5x^3-6y)^2.$$

$$8. (x^2+2x-3)^2. \quad 9. (6x^2-7+y)^2. \quad 10. \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}xy + 5y^2\right)^2.$$

$$11. (1+x+x^2+x^3)^2. \quad 12. (1+3x+3x^3)^2 + (1-3x+3x^2)^2.$$

$$13. (ax+by)(ax-by). \quad 14. (a+1)(a-1). \quad 15. (a+1)^2.$$

$$16. (a-1)^2. \quad 17. (a^2-b^2)^2. \quad 18. (3a^2-2b^2)^2. \quad 19. (2a^3-3b^3)^2.$$

$$19a. (a^2-b^2)^2 + (2ab)^2 \quad 19b. (a^2+b^2)^2 - (2ab)^2.$$

$$19c. \text{Mutassuk meg, hogy } (2a+b)^2 + b^2 = 2[a^2 + (a+b)^2]$$

20. Bebizonyítandó, hogy :

$$\frac{(27a^4 - 18a^2b^2 - b^4)^2}{64a^2b^4} + \frac{(9a^2 - b^2)^2(9a^2 - b^2)(b^2 - a^2)}{64a^2b^4} = b^2.$$

21. Bebizonyítandó, hogy :

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2) = (ap-bq+cr-ds)^2 + \\ + (aq+bp-cs-dr)^2 + (ar-bs-cp+dq)^2 + \\ + (as+br+cq+dp)^2.$$

Rövidebb úton kiszámítandó : [alkalmazzuk ezt a formulát :

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)].$$

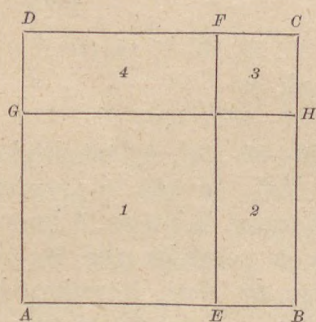
$$22. 1853^2 - 1849^2. \quad 23. 5463^2 - 3463^2. \quad 24. 1874^2 - 1869^2.$$

$$25. 1995 \cdot 2005. \quad 26. 96 \cdot 104. \quad 27. 1996 \cdot 2004.$$

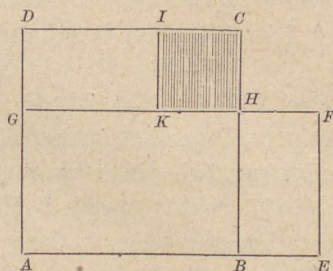
$$28. 3007 \cdot 2993. \quad 29. 498 \cdot 502. \quad 30. 48 \cdot 52.$$

31. Ha az *AEIG* négyzet mindenik oldala *a* méter, és *EB*=*GD*=*b* méter, mekkora az *ABCD* négyzet területe? E négyzet az ábrában

4 részből áll. Mekkora az $AEIG$ négyzet? Mekkora az $IHCF$ négyzet és mekkorák az $EBHI$ és $GIFD$ derékszögű négyszögek? [Láthatjuk ebből az ábrából is, hogy $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$].



1. ábra.



2. ábra.

32. Hát ha AB oldal volna a méter és EB b méter, mekkora az $AEIG$ négyzet területe? Számítsuk ki egyenkint az ábrában 1, 2, 3, 4-gyel jelölt területeket és mutassuk meg, hogy valóban e négy rész összesen megadja az egész négyzet területét!

33. Legyen az AB egyenes hossza a . (2. ábra.) Rajzoljuk meg az $ABCD$ négyzetet. Az egyik oldalát, az AB -t hosszabbítsuk meg BE -vel (b -vel), a másik oldalát rövidítsük meg ugyanennyivel: $DG = b$ -vel és alkossuk meg az $AEFG$ derékszögű négyszöget. Mekkora ennek a területe? Ha DC -re is rámérjük AG -t, akkor $GDIK$ négyszög ugyanannyi, mint a $BEFH$. Mekkora az IC ? Mekkora a beszafozott négyzet területe? Láthatjuk tehát, hogy az $AEFG$ területét úgy is megkaphatjuk, ha az $ABCD$ -ből a beszafozott négyzetet kivonjuk. $[(a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$.

32. **Négyzet a tizes számrendszerben.** A négyzet képlete, melyet eddig algebrai kifejezésekre alkalmaztunk, a végzendő számítás jelentékeny rövidítését eszközli még akkor is, midőn a négyzetre emelendő mennyiség a tizes számrendszerben fölirt közönséges egész szám.

Pl. $(43)^2$ -ét úgy kapjuk, ha 43-at 43-mal megszorozzuk. Az előbbi tétel segítségével a négyzetre emelést következőkép is végezhetjük:

$$(43)^2 = (40 + 3)^2 = (40)^2 + 2 \cdot 40 \cdot 3 + 3^2$$

$$(40)^2 = (4 \cdot 10)^2 = 16 \text{ százaz } 2 \cdot 40 \cdot 3 = 24 \text{ tizes ; } 3^2 = 9 \text{ egyes}$$

Eszerint (a helypótló 0-okat kihagyva) : $(43)^2 = 16$

24

9

1849

Feladat. Állítsuk elő eszerint 57, 65, 79, 98, 47 négyzetét.

A háromjegyűre is alkalmazzuk az

$$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2$$

képletet. $(493)^2$ pl. így írható : $(400 + 90 + 3)^2$. A fönti képletben $a=400$, $b=90$, $c=3$ teendő. Az első tag $a^2=16$ tízezres ; a második tag $2ab=72$ ezres, mert a százas és b tizes. A harmadik tag $b^2=81$ százazas, mert b tizes ; a negyedik tag $2(a+b)c$; $a+b=4$ százazas meg 9 tizes, azaz 49 tizes, következésként $2(a+b)c=2 \cdot 49 \cdot 3$ tizes = 294 tizes. — Az utolsó tag $c^2=9$ egyes. Ezt tekintetbe véve, 493 négyzetét (a helypótló 0-kat ismét elhagyva) így írhatjuk : $(493)^2 = 16$

72

81

294

9

243049

Feladatok.

1. Állítsuk elő 732, 453, 976, 917, 532, 943 négyzeteit.

1a) Mutassuk meg,*) hogy $31^2 + 32^2 + 33^2 + 34^2 + 35^2 + 36^2 + 37^2 = 2^2 + 4^2 + 90^2$,

1b) Mutassuk meg, hogy $539^2 + 540^2 + \dots + 545^2 = 2^2 + 4^2 + 1434^2$,

1c) Mutassuk meg, hogy $8635^2 + 8636^2 + \dots + 8641^2 = 2^2 + 4^2 + 22854^2$,

1d) Mutassuk meg, hogy $7^2 + 8^2 + \dots + 13^2 = 27^2 - 1$,

1e) $23^2 + 24^2 + \dots + 29^2 = 69^2 - 1$,

1f) $158^2 + 159^2 + \dots + 164^2 = 426^2 - 1$.

Ha a négyzetre emelendő számnak *tizedes tört része* is van, a négyzetre emelés műveletében semmi lényeges változás nem történik. Az ily alakot ugyanis közönséges törtnek írhatjuk, pl. $3.615 = \frac{3615}{1000}$; tehát $3.615^2 = \frac{3615^2}{1000^2}$, de $3615^2 = 13.068,225$; és $1000^2 = 1000000$, tehát $3.615^2 = 13.068225$.

*) Ha már a négyzetét ismerjük, akkor $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$, tehát $a+1$ négyzetét úgy kapjuk meg, hogy az a ismeretes négyzetéhez $2a+1$ -et hozzáadjuk. Így pl. : $31^2 = 961$, tehát $32^2 = 961 + 63 = 1024$.

A számítás mintája most p. o. 4·13 négyzeténél:

$$\begin{array}{r}
 16 \\
 8 \\
 1 \\
 246 \\
 9 \\
 \hline
 17\cdot0569
 \end{array}$$

Látjuk, hogy a tizedes törtet tartalmazó számot úgy emeljük négyzetre, hogy a tizedes ponttól eltekintünk, az így nyert egész számot négyzetre emeljük és jobbról balra kétannyi tizedest vágunk el, mint ahány az adott számban volt.

Feladat. Állítsuk elő: 5·6, 3·25, 42·5, 93·8, 76·2, 7·98 négyzeteit.

33. A köb (cubus). Amint már ismeretes, azt a szorzatot: a^3 , mely 3 egyenlő tényezőből alakul, az a köbének nevezzük. Ismét tüstént látni, hogy

$$(ab)^3 = a^3b^3,$$

azaz szorzat köbét nyerjük, ha az egyes tényezőket köbre emeljük és e köböket egymással szorozzuk. Továbbá:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3},$$

azaz tört köbét úgy nyerjük, hogy a számlálót és nevezőt külön köbre emeljük.

Ha végre a köbre emelendő mennyiség maga már hatvány, pl. a^m , akkor:

$$(a^m)^3 = a^m \cdot a^m \cdot a^m = a^{3m},$$

mely képlet szerint valamely hatvány köbét nyerjük, ha a kitevőt 3-mal szorozzuk.

Ismét, épúgy mint a négyzetnél, e szabályok értelmében minden egytagúnak köbét fölírjuk, ha minden tényezőnek — számlálóban, nevezőben — köbét vesszük.

$$\begin{aligned}
 (3x^2yc)^3 &= 27x^6y^3z^3, & (8a^2b^2c^5)^3 &= 512a^6b^6c^{15}, \\
 \left(\frac{2abc}{3x^3y^2}\right)^3 &= \frac{8a^3b^3c^3}{27x^9y^6}, & \left(\frac{4x^2y}{5z^3u^4}\right)^3 &= \frac{125x^6y^3}{64z^9u^{12}}.
 \end{aligned}$$

34. Kéttagúak köbe. Ha a köbre emelendő mennyiség két tagból áll, amit általánosságban $a+b$ -vel jelölünk, a szorzás végrehajtása által:

$$\begin{aligned}
 (a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) \\
 &= (a^2+2ab+b^2)(a+b) \\
 &= \frac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^2b+2ab^2+b^3} \\
 &= \frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}
 \end{aligned}$$

a következő képletet nyerjük :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

melynek alkatát megint a következőkép jellemezhetjük: *Az első tag köbe, az első tag négyzetének és a második tagnak háromszoros szorzata, az első tagnak és a második tag négyzetének háromszoros szorzata, a második tag köbe.*

Példák. 1. $(2x+4y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 4y + 3(2x) \cdot (4y)^2 + (4y)^3 = 8x^3 + 48x^2y + 96xy^2 + 64y^3.$

2. $(2x^2-1)^3 = 8x^6 - 12x^4 + 6x^2 - 1.$

3. $\left(\frac{3x}{y} - \frac{y}{z}\right)^3 = \frac{27x^3}{y^3} - \frac{27x^2y}{y^2z} + \frac{9xy^2}{yz^2} - \frac{y^3}{z^3}.$

Ha az adott kifejezés több mint két tagból áll, pl. $a+b+c$, ismét visszavezetjük a köbreemelés föladatát az épen tárgyaltra, azáltal, hogy $a+b$ -t egyelőre zárójelbe tesszük és ily módon végezzük először a műveletet, azután pedig az eddig csak kijelölt számításokat is végrehajtjuk. Eszerint :

$$\begin{aligned}
 (a+b+c)^3 &= [(a+b)+c]^3 = \\
 &= (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 = \\
 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3 \\
 (a+b+c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + \\
 &+ 3bc^2 + 6abc.
 \end{aligned}$$

Pl. $(2x-y-z)^3 = 8x^3 - y^3 - z^3 - 12x^2y + 6xy^2 - 12x^2z + 6xz^2 - 3y^2z - 3yz^2 + 12xyz.$

Feladatok.

- | | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|--|
| 1. $(2x^2y^3z^4)^3.$ | 2. $(-51x^3yz^2)^3.$ | 3. $(-3a^2bcd)^3,$ |
| 4. $\left(\frac{2x^2}{3y}\right)^3.$ | 5. $\left(-\frac{4x}{3y^5}\right)^3.$ | 6. $\left(-\frac{x^3}{yz^2}\right)^3.$ |
| 7. $(a-b)^3.$ | 8. $(a+b)^3(a-b)^3.$ | 9. $(1-x)^3.$ |
| 10. $(2+x)^3.$ | 11. $(3-2x)^3.$ | 12. $\left(4y - \frac{7}{9}\right)^3.$ |
| 13. $(ax+by)^3 + (ax-by)^3.$ | | 14. $(1+x)^3 + (1-x)^3.$ |
| 15. $(1+x+x^2)^3.$ | | 16. $(1+3x-2x^2)^3.$ |

$$17. (2+3x+4x^2)^3 - (2-3x+4x^2)^3.$$

$$18. (1-x)^2 (1+x+x^2)^3.$$

$$19. (2a^2-3b^2)^3.$$

20. Két szám összegének köbéből vonjuk le e két szám köbeinek összegét!

21. Két szám különbségének köbéhez adjuk e két szám köbeinek különbségét!

22. Két szám összegének köbéhez adjuk e két szám különbségének köbét!

23. Két szám összegének köbéből vonjuk le e két szám különbségének köbét!

24. Valamely szám köbéből vonjuk le a számsorban előtte levő szám köbét.

25. Adjuk össze a természetes számsor 3 egymásutáni számának köbeit!

26. Mennyivel nő az a méter oldaléllal bíró kocka köbtartalma, ha mindenik élét b méterrel megnövesztjük? Mennyivel nő a felülete?

35. Köb a tizes számrendszerben. Midőn valamely, a tizes számrendszerben fölírt közönséges szám köbét keressük, a most levezetett képlet ismét a számítás jelentékeny rövidítésére szolgálhat.

Ha pl. 49 köbét keressük, ezt a számot $40+9$ -nek, vagy $4 \cdot 10+9$ -nek írhatjuk és a köbreemelést az előbbi képlet szerint végezzük, ha u. i. : $4 \cdot 10=a$, és $9=b$, akkor :

$a^3=(4 \cdot 10)^3=64$ ezres ; $3a^2b=3 \cdot 16 \cdot 9$ százazas = 432 százazas ;
 $3ab^2=3 \cdot 4 \cdot 81$ tizes = 972 tizes és $b^3=729$: tehát :

$$49^3=64$$

$$432$$

$$972$$

$$729$$

$$\hline 117649$$

Pl. Ha 147^3 előállítandó, akkor 147 ilyen alakban írható :
 $14 \cdot 10+7$. Jelöljük $14 \cdot 10=a$ és $7=b$ -vel, akkor $a^3=(14 \cdot 10)^3=$
 $=14^3 \cdot 1000 = 2744$ ezres, mert :

$$14^3=1$$

$$12$$

$$48$$

$$64$$

$$\hline 2744$$

$$3a^2b = 3 \cdot (14 \cdot 10)^2 \cdot 7 = 3 \cdot 14^2 \cdot 7 \text{ százaz} = 4116 \text{ százaz}$$

$$3ab^2 = 3 \cdot 14 \cdot 10 \cdot 7^2 = 3 \cdot 14 \cdot 49 \text{ tizes} = 2058 \text{ tizes}$$

$$b^3 = 7^3 = 343$$

tehát:

$$147^3 = 1$$

$$12$$

$$48$$

$$64$$

$$4116$$

$$2058$$

$$343$$

$$3176523$$

Feladatok.

1. Állítsuk elő 67, 58, 79, 106, 213, 327 köbeit.
2. $(2x-1)^3(3x+1) - (2x+1)^3(3x-1)$ kiszámítandó; helyettesítendő mind a két alakba $x=17$.
3. $(5x+3y)^3 - (5x-3y)^3$ kiszámítandó és helyettesítendő $x=13$, $y=-15$.
4. $(3x-5)^3 + (3x-7)^3 + (2x-9)^3$ kiszámítandó és helyettesítendő $x=-11$.
5. $(3a-2b)^3(3a+2b)^3 - (2a+3b)^3(2a-3b)^3$ kiszámítandó és helyettesítendő $a=5$, $b=-3$.

VII. Közös osztó és közös többes.

36. **Osztó fogalma.** Valamely egész számról akkor mondjuk, hogy egy másiknak *osztója*, ha benne maradék nélkül találhatjuk.

d akkor osztója a -nak, ha $\frac{a}{d}$ egész szám (pl. n), azaz:

$$\frac{a}{d} = n; \text{ vagyis } a = dn.$$

Ez utóbbi alakon azt látjuk, hogy, ha d osztója a -nak, mindig találhatunk olyan egész számot, mellyel d -t szorozva, a -t kapjuk. Ha d *osztója* a -nak, akkor a *többese* d -nek.

Minden szám osztója 1 és önmaga. Ha ezenkívül más egész számú osztója nincsen, akkor a számot *törzsszámnak* (numerus primus) mondjuk; ha van még az egységen és ön-

magán kívül egyéb osztója is, akkor a szám *összetett* szám. Az összetett számok törzsszámok szorzataként állíthatók elő. Pl. $6=2 \cdot 3$; $8=2 \cdot 2 \cdot 2=2^3$; $12=2 \cdot 2 \cdot 3=2^2 \cdot 3$.

Feladat. 1. Keressük ki a törzsszámokat 100-ig és bontsuk fel törzstényezőkre a 100-nál kisebb összetett számokat.

2. Mutassuk meg, hogy $a(a+1)$ mindig osztható 2-vel! [Ha a páros, akkor a osztható 2-vel, ha a páratlan, akkor $a+1$ páros!].

3. Mutassuk meg, hogy $a(a+1)(a+2)$ osztható 6-tal!

37. Közös osztó. Azon számot, mely két vagy több szám osztója, ezen számok *közös osztójának* nevezzük. — Így pl.:

12 osztói: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

18 osztói: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Látjuk, hogy e két szám közös osztói: 1, 2, 3, 6. A közös osztók legnagyobbját a számtanban *legnagyobb közös osztónak* nevezzük. Ha két egész szám egyedüli közös osztója az egység, a két számot *relatív (viszonylagos) törzsszámoknak* nevezzük. Így pl. 8 és 15 relatív törzsszámok.

A legnagyobb közös osztónak egyik fontos tulajdonsága a következő tétel által van kifejezve.

Ha a két számot legnagyobb közös osztójukkal elosztjuk, akkor a keletkező hányadosok relatív törzsszámok.

Legyen A-nak és B-nek legnagyobb közös osztója P; akkor előállítható az A és B ily alakban:

$$A=Pa, B=Pb.$$

Azt állítjuk, hogy a és b-nek nincs többé közös osztója (az egységen kívül).

Tegyük föl ugyanis, hogy volna, még pedig m , mely az egységtől különbözik, akkor ismét a is, b is kifejezhető szorzat alakjában, melynek egyik tényezője m , úgy hogy:

$$a=m\alpha, b=m\beta;$$

de akkor:

$$A=Pma, B=Pm\beta.$$

Tüstént látni, hogy itt A -nak és B -nek közös osztója a Pm által kifejezett szám, mely nagyobb a P -nél, tehát A és B -nek nem P volna a legnagyobb közös osztójuk, hanem Pm , ami ellenkezik a föltevésünkkel; tehát a -nak és b -nek az egységen kívül más közös osztójuk nem lehet.

Igy pl. 105 és 70 közös osztói csak az 1 és 70 közt fekvő számok lehetnek; ha ezeket egyenként megvizsgáljuk, csak a következők felelnek meg:

$$1, 5, 7, 35;$$

a legnagyobb közös osztó tehát 35. Most tehát:

$$105 = 35 \cdot 3, \quad 70 = 35 \cdot 2,$$

és valóban 3 és 2-nek nincs közös osztója. (Ezt, hogy »az egység kivételével« nem szükséges megjegyeznünk, mert magától értődik, hogy minden számnak osztója az egység.)

Ha valamely tört kifejezését egyszerűsíteni akarjuk, legegyszerűbb a számlálót és nevezőt a legnagyobb közös osztójukkal elosztanunk: ekkor ugyanis okvetlenül oly számokat nyerünk, melyeknek többé nincs közös osztójuk és a melyeken tehát további egyszerűsítés nem lehetséges. Igy pl. 45 és 60-nak legnagyobb közös osztója 15 és így tehát $\frac{45}{60}$ legegyszerűbb alakja $\frac{3}{4}$.

38. A legnagyobb közös osztó kikeresése. A legnagyobb közös osztó sajátságainak megállapítása után még egy teendőnk marad, t. i. a *legnagyobb közös osztó* kiszámítása: kísérletet tenni ugyanis az összes kisebb számokkal sokszor fölötte hosszúságos és fárasztó munka volna. Ennek helyébe más eljárás lép, melynek lényege abban áll, hogy az A és B legnagyobb közös osztójának fölkeresését *visszavezetjük egy másik, kisebb szám-pár legnagyobb közös osztójának meghatározására.*

Ez az eljárás azon alapszik, hogy az osztandó és osztó legnagyobb közös osztója ugyanaz, mint az osztó- és maradéké. Ha A és B számok legnagyobb közös osztóját keressük, akkor A -t elosztjuk B -vel. Hányadosul kapunk egy Q egész számot és fennmarad még egy R egész szám maradékul; tehát:

$$A = Q \cdot B + R.$$

Ha A és B valamelyik közös osztója d , akkor az

$$\frac{A}{d} = Q \frac{B}{d} + \frac{R}{d}$$

egyenlőségből következik, hogy d az R -nek is osztója. Ugyanis

$\frac{A}{d}$ egész szám és $\frac{B}{d}$ is egész szám, tehát kell, hogy $\frac{R}{d}$ is egész

szám legyen. Látjuk tehát, hogy az osztandó és osztó minden közös osztója egyúttal a maradéknak is osztója. Másrészt, ha B és R valamely közös osztója e , akkor

$$\frac{A}{e} = Q \frac{B}{e} + \frac{R}{e}$$

tehát e A -nak is osztója; mert hiszen $\frac{B}{e}$ tehát $Q \frac{B}{e}$ és $\frac{R}{e}$ egész számok, tehát $\frac{A}{e}$ is az.

Ha tehát P az A és B legnagyobb közös osztója, akkor ez egyúttal R -nek is osztója, tehát B és R közös, még pedig legnagyobb közös osztója, mert ha volna egy ennél nagyobb közös osztója B -nek és R -nek, akkor ez A -nak is osztója volna, tehát A és B -nek nem P volna a legnagyobb közös osztója; tehát valóban: *az osztandó és osztó legnagyobb közös osztója ugyanaz, mint az osztó és maradék legnagyobb közös osztója.*

Ezt a tételt felhasználjuk a legnagyobb közös osztó meghatározásánál. Keressük pl.: 255 és 195 legnagyobb közös osztóját. Tegyük 255-öt osztandónak és 195-öt osztónak, akkor:

$$255 : 195 = 1$$

$$60$$

a maradék 60; eszerint 255 és 195 legnagyobb közös osztója ugyanaz, mint 195 és 60-é. A legnagyobb közös osztó megkeresésének feladata egyszerűbbé vált, mert kisebbek lettek a számok. Most már csak 195 és 60 legnagyobb közös osztóját kell keresnünk. Evégből 195-öt tesszük osztandónak és 60-at osztónak:

$$195 : 60 = 3$$

$$15$$

A maradék 15. Így tehát 195 és 60 legnagyobb közös osztója ugyanaz, mint 60 és 15-é. Közvetlenül látjuk, hogy a legnagyobb közös osztó 15; tehát 255 és 195 legnagyobb közös osztója is 15.

A gyakorlatban követendő eljárás most már könnyen megállapítható: *A számpárt, melynek legnagyobb közös osztója keressük, az adott szabály szerint visszavezethetjük kisebb számpárra, mindaddig, míg a nagyobb szám a kisebb által nem osztható.*

Ez az utolsó kisebb szám akkor nem más, mint a keresett legnagyobb közös osztó.

Az adott számpár (osztandó és osztó) minden közös osztója egyúttal az osztó és maradék közös osztója és viszont; tehát az adott számpár minden közös osztója egyúttal az utolsó osztónak, a legnagyobb közös osztónak, is osztója. Ebben a legnagyobb közös osztónak egy fontos tulajdonságát látjuk, melyet úgy fejezhetünk ki, hogy: *két szám minden közös osztója a legnagyobb közös osztónak is osztója.*

A gyakorlatban legcélszerűbb a dolgot úgy berendezni, hogy az első osztásnál nyert maradék elé írjuk mindjárt a volt osztót osztandónak és folytatjuk a számítást.

Pl. Kerestetik az 1821 és 5616 legnagyobb közös osztója:

$$5616 : 1821 = 3$$

$$1821 : 153 = 11$$

$$291$$

$$153 : 138 = 1$$

$$138 : 15 = 9$$

$$15 : 3 = 5$$

A legnagyobb közös osztó = 3.

Kerestetik a legnagyobb közös osztó 1155 és 1984 közt.

$$1984 : 1155 = 1$$

$$1155 : 829 = 1$$

$$829 : 326 = 2$$

$$226 : 177 = 1$$

$$177 : 149 = 1$$

$$149 : 28 = 5$$

$$28 : 9 = 3$$

$$9 : 1 = 9$$

A legnagyobb közös osztó 1, azaz 1984 és 1155 relatív törzsszámok.

Ha nem két, hanem pl. három számnak keressük legnagyobb közös osztóját, ennek meghatározását könnyű visszavezetni az előbbi esetre. Egyszerű megfontolás a következő tételhez vezet:

Az A, B és C legnagyobb közös osztóját megtaláljuk, ha előbb az A és B legnagyobb közös osztóját meghatározzuk és ha ez pl. P, akkor megkeressük a legnagyobb közös osztót P és C között.

Az A és B minden közös osztója, tehát az is, amely az A , B és C közös osztója, egyúttal a P -nek is osztója, tehát nem kell egyebet tennünk, mint P és C legnagyobb közös osztóját meghatározni.

Igy pl. meghatározzuk, a következő 3 szám legnagyobb közös osztóját: 1368, 11880, 44880. Keressük először az első kettőét:

Lesz:

$$11880 : 1368 = 8$$

$$1368 : 936 = 1$$

$$936 : 432 = 2$$

$$432 : 72 = 6$$

Az utolsó osztó, és így a két szám legnagyobb közös osztója: 72. Most még meghatározandó a 72 és 44880 legnagyobb közös osztója

$$44880 : 72 = 623$$

$$168$$

$$240$$

$$72 : 24 = 3$$

$$0$$

Ez 24 és így a legnagyobb közös osztó a 3 szám között 24.

39. Algebrai kifejezések közös osztói. *Ha valamely algebrai egész kifejezés előállítható mint két más algebrai egész kifejezés szorzata, akkor e szorzókat ama kifejezés osztóinak, tényezőinek mondjuk.* Így pl. a tényezője az a^2 -nak, mert $a^2 = a \cdot a$, hasonlóképp $2b^2c$ osztója a $8a^2b^3c^2$ -nek, mert

$$8a^2b^3c^2 = 2b^2c \cdot 4a^2bc,$$

vagy pedig $x-y$ osztója az x^3-y^3 -nak, mert

$$x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2).$$

Itt is, ha valamely alak két különböző kifejezésnek osztója, ezt a két kifejezés közös osztójának mondjuk. Így pl. a^4 és a^3b -nek közös osztói:

$$1, a, a^2, a^3.$$

Itt azonban némi eltérés van a számtan menetétől. T. i. annak a kérdésnek, hogy melyik közülök a legnagyobb, nincs

értelme. De a legnagyobb közös osztó jellemző tulajdonsága nem is épen az, hogy a legnagyobb, hanem — ami számoknál ezzel összeesik — hogy minden egyéb közös osztó a »legnagyobb k. osztót« ismét osztja.

Ezt a sajátságot vesszük az algebrai értelmezés alapjául és így ez a következő:

Két algebrai egész kifejezés legnagyobb közös osztója alatt azt a közös osztót értjük, mely a két kifejezés minden egyéb közös osztóját, mint tényezőt, tartalmazza.

Eszerint a^4 és a^3b legnagyobb közös osztója: a^3 .

Ezt a legnagyobb közös osztót egytagú mennyiségeknél igen könnyen megtalálhatjuk. Legyen pl. a két egytagú $64x^3y^2z$ és $56x^4z^2u$. Az a kifejezés, mely e két kifejezést osztja, csak azokat a betűket tartalmazhatja, melyek közösen fordulnak elő, így tehát nem lehet benne pl. az u , mert ha ez benne volna, az elsőnél az osztás nem egész, hanem tört kifejezést adna. A közös betűket is csak a kisebb kitevővel tartalmazhatja, ha pl. x^4 volna benne, az első alakból képezett hányados ismét tört volna; tehát csak x^3 lehet benne, hasonlóképp z csak kitevő nélkül, míg y és u egyáltalában nem fordulhatnak elő benne. A közös osztónak végre számbeli együtthatója is lehet, de hogy az osztásnál törtet ne nyerjünk, ismét kell, hogy ez a 64 és 56 közös osztója legyen; tehát ezeknek legnagyobb közös osztója: 8. És így a $64x^3y^2z$ és $56x^4z^2u$ legnagyobb közös osztója: $8x^3z$. Maga a képezés módja mutatja, hogy minden egyéb közös osztó ebben mint tényező előfordul.

Az e példában követett és általa indokolt eljárás tehát általánosságban a következő:

Két (vagy több) algebrai egytagúnak legnagyobb közös osztóját nyerjük, ha azt az egytagút képezzük, melynek együtthatója az adott egytagúak együtthatóinak legnagyobb közös osztója, és melyben mindenik közös betűt a legkisebb kitevővel vesszük, melylyel az adott kifejezésekben előfordul.

A szabály egyöntetűsége végett jó figyelembe venni, hogy x kitevő nélkül nem más, mint x^1 ; hisz a kitevő azt mutatja, hogy x hányszor veendő tényezőnek.

Igy pl. $72a^2b^5c^7d$ és $27a^2b^7d^5e^2$ legnagyobb közös osztója $9a^2b^5d$; $18x^5y^4z^3u^2v$ és $42xy^2z^4u^3v^5$ legnagyobb közös osztója: $6xy^2z^3u^2v$; $6x^4y^3z^2u$, $17x^3y^3z^3$, $28x^2yz^2u$ legnagyobb közös osztója x^2y^2z .

Feladatok.

Keressék a legnagyobb közös osztó a következő kifejezések közt :

1. $15x^4, 8x^2.$
2. $27x^6, 18x^4, 63x^2.$
3. $16a^2b^3, 20a^3b^3.$
4. $36x^4y^5z^6, 48x^6y^5z^4, 600x^5y^4z^6.$
5. $342a^4b^2xy, 270a^2b^3x^2z, 90bx^3.$
6. $400a^5b^2x^3y^6, 700a^4b^2x^2y^4, 308^3bxy^3.$
7. $275M^3N^2P, 325MN^2P^3, 143M^4N^4P^4.$
8. $8176rst^3u^3, 20536r^2s^2t^5u^5, 18729rst^2u^2.$
9. $5128a^4b^4c, 7134a^5b^3c^2, 2866a^3b^5c^{10}.$

40. **Többszörösök legnagyobb közös osztója.** Ha A és B bizonyos betű, mondjuk x , fogyó hatványai szerint rendezett kétféle kifejezés, a legnagyobb közös osztó meghatározására ugyanazt az eljárást használhatjuk, melyet előbb (67. lap) megállapítottunk.

Most is a legnagyobb közös osztó alatt azt értjük, mely a többi közös osztókat magában tartalmazza, tehát ismét áll, mint alapul szolgáló szabály :

Az osztandó és osztó legnagyobb közös osztója ugyanaz, mint az osztó- és maradéké.

Lássuk, hogy e szabály alapján hogyan határozhatjuk meg a legnagyobb közös osztót a következő két kifejezés közt :

$$x^2 - 6x + 8 \text{ és } 4x^3 - 21x^2 + 15x + 20.$$

Osszuk el e két kifejezést, a *magasabbat* (x magasabb hatványát tartalmazót) osztandónak véve

$$(4x^3 - 21x^2 + 15x + 20) : (x^2 - 6x + 8) = 4x + 3$$

$$4x^3 - 24x^2 + 32x$$

$$\hline 3x^2 - 17x + 20$$

$$3x^2 - 18x + 24$$

$$\hline \text{Maradék : } x - 4$$

A keresett legnagyobb közös osztó most az osztó ($x^2 - 6x + 8$) és a maradék ($x - 4$) legnagyobb közös osztója lesz.

Itt is a feladatot egyszerűsítettük, eredetileg 3-ad és 2-od fokú kifejezések közt kerestük a legnagyobb közös osztót ; most ezek helyett osztót és maradékot véve, 2-od és elsőfokú kifejezés jön. Ezeken ismételjük a műveletet :

$$(x^2 - 6x + 8) : (x - 4) = x - 2$$

$$x^2 - 4x$$

$$\hline -2x + 8$$

$$\hline -2x + 8$$

$$\hline 0$$

Itt 0 maradékot kapunk; a műveletsor be van fejezve. A két kifejezés közül egyik a másik osztója és ennek következtében a két eredeti kifejezésnek legnagyobb osztója: $x-4$. Valóban

$$\begin{aligned} 4x^3 - 21x^2 + 15x + 20 &= (x-4)(4x^2 - 5x - 5) \\ x^2 - 6x + 8 &= (x-4)(x-2). \end{aligned}$$

A szabály alkalmazása által a kifejezéseket fölcserélhetjük mindig egyszerűbbekkel. Mert a maradék foka mindig legalább eggyel alacsonyabb az osztóénál. Így járunk el, míg vagy végezhető osztáshoz jutunk, és ekkor ismét az utolsó osztó a keresett legnagyobb közös osztó, vagy pedig, ha ez nem történne, eljutunk végre oly maradékhoz, mely x -et nem tartalmazza, tehát tiszta számérték. Ebben az esetben a legnagyobb közös osztó ebben foglaltatván, maga is tiszta szám, vagyis az x -et tartalmazó közös tényezője a két kifejezésnek nincsen.

Ha két kifejezésnek közös osztója gyanánt számot nyerünk, azt mondjuk, hogy nincs közös osztójuk (hozzáértve t. i., hogy olyan, mely x -et tartalmazza).

Oly példa, melyben ezt az eredményt nyerjük, a következő két kifejezésre vonatkozó művelet:

$$(x^3-1):(x^2+2x+1)=x-2,$$

$$\begin{array}{r} x^3+2x^2+x \\ -2x^2-x-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2x^2-x-1 \\ -2x^2-4x-2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x+1 \end{array}$$

$$(x^2+2x+1):(3x+1)=\frac{x}{3}+\frac{5}{9}$$

$$\begin{array}{r} x^2+\frac{x}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{5}{3}x+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{5}{3}x+\frac{5}{9} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{4}{9} \end{array}$$

Itt a maradék $\frac{4}{9}$, és így tehát x^3-1 és x^2+2x+1 -nek nincsen közös osztója.

41. A tört rövidítése. A törtek visszavezetése a legegyszerűbb alakra, mint tudjuk, lényegében azonos a most tárgyalt föladattal. Megkeressük ugyanis a számláló és nevező legnagyobb közös osztóját, és ha azután ezzel rövidítünk, oly alakját

nyerjük a törtnek, melyen további rövidítés lehetetlen. Így pl. e tört:

$$\frac{3x^5 - 10x^3 + 15x + 8}{x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6}$$

számlálójának és nevezőjének legnagyobb közös osztója $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, mellyel mind a számlálót, mind a nevezőt elosztva nyerjük:

$$\frac{3x^2 - 9x + 8}{x^2 - 5x + 6}$$

Feladatok.

A legnagyobb közös osztó keresendő a következő kifejezések közt:

1. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ és $x^2 - 1$.
2. $x^2 + 8x + 15$ és $x^2 + 9x + 20$.
3. $x^3 + 6x^2 + 13x + 12$ és $x^3 + 7x^2 + 16x + 16$.
4. $x^3 - 41x - 30$ és $x^3 - 11x^2 + 25x + 25$.
5. $x^3 - 10x^2 + 26x - 8$ és $x^3 - 9x^2 + 23x - 12$.
6. $x^2 - x + 1$ és $x^4 + x^2 + 1$.
7. $x^2 - x + 1$ és $x^6 + 1$.
8. $x^3 - 4x^2 + 2x + 3$ és $2x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 7$.
9. $2x^5 - 11x^2 - 9$ és $4x^5 + 11x^4 + 81$.
10. $x^2 - xy - 22y^2$ és $x^2 - 5xy + 6y^2$.
11. $2x^2 + 3ax + a^2$ és $3x^2 + 3ax - a^2$.
12. $a^3 - b^3$ és $a^4 - b^4$.
13. 365 és 511 között.
14. 1233 és 1918 között.
15. 1311 és 1767 között.

A következő törtek, a mennyire lehetséges, egyszerűsítendőek:

- | | |
|--|---|
| 1. $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 6x + 5}$ | 2. $\frac{x^2 + 10x + 21}{x^2 - 2x - 15}$ |
| 3. $\frac{2x^2 + x - 15}{2x^2 - 19x + 35}$ | 4. $\frac{3x^2 + 23x - 36}{4x^2 + 33x - 27}$ |
| 5. $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^3 + x + 10}$ | 6. $\frac{x^2 + 9x + 20}{x^3 + 7x + 14x + 8}$ |
| 7. $\frac{x^2 + x + 42}{x^3 - 10x^2 + 21x + 81}$ | 8. $\frac{6x^2 - 11x + 5}{3x^3 - 2x^2 - 1}$ |
| 9. $\frac{x^3 - 8x - 3}{x^4 - 7x^2 + 1}$ | 10. $\frac{3x^5 - 75x}{2x^4 + 13x^2 + 15}$ |

$$11. \frac{x^3 + a^3}{x^4 + a^2x^2 + a^4},$$

$$13. \frac{2622}{3534},$$

$$15. \frac{2552}{4147},$$

$$12. \frac{x^4 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4},$$

$$14. \frac{435}{609},$$

$$16. \frac{1521}{2535}.$$

42. **Közös többses.** Egy második, a törteknél előforduló és eddigelé még meg nem oldott föladat volt, a törtek összevonását oly módon végezni, hogy az összevonás után föllépő közös nevező a lehető legkisebb legyen. A számtanból tudjuk, hogy ez akkor történik, midőn közös nevezőnek az egyes törtek nevezőinek *legkisebb közös többsését* választjuk. Megint átismétljük röviden a legkisebb közös többsesre vonatkozó ismereteinket és azután térünk át algebrai egész kifejezésekre.

Ha a az m osztója, akkor megfordítva m az a *többsese* (*multiplum*). Pl. 12 többsese: 6-nak, 4-nek, 3-nak, 2-nek.

Ha m az A -t és B -t is tartalmazza tényezőül, akkor m az A és B -nek *közös többsese*.

Ha már ismerjük A és B legnagyobb közös osztóját, a közös többsesnek meghatározása tüstént végezhető. Legyen a legnagyobb közös osztó D és így tehát:

$$A = Da, \quad B = Db,$$

hol az előbbieket szerint a és b már közös osztót nem tartalmaznak.

Az A többsesei: $Da, 2Da, 3Da, \dots$, minden többsese tehát ilyen alakban írható: KDa , ahol K egész szám. Ha azt akarjuk, hogy ez a többses egyúttal B -nek is többsese legyen, akkor kell, hogy $\frac{KDa}{Db}$, vagyis $\frac{Ka}{b}$ egész szám legyen. Minthogy a és b relatív törzsszámok, tehát kell, hogy b a K -nak osztója legyen, vagyis K legyen b , vagy $2b$, vagy $3b, \dots$ általában $K = tb$ legyen, ahol t egész szám. És így az A és B közös többseseinek alakja: tDa , hol t tetszőleges egész szám.

A *legkisebb* közös többses ebből nyerhető, ha t -nek a legkisebb értéket tulajdonítjuk s ez az egység, tehát A és B legkisebb közös többsese: Dab . Minden egyéb közös többses ilyen alakú: $tDab$, tehát *többsese a legkisebb közös többsesnek*.

Ha még tekintetbe vesszük, hogy $a = \frac{A}{D}$, $b = \frac{B}{D}$, a legkisebb közös többszörös képezésére a következő szabályt nyerjük :
Ha az A és B számok legnagyobb közös osztója D, ugyane számok legkisebb közös többszöröse : $D \cdot \frac{A}{D} \cdot \frac{B}{D}$, vagy rövidebben : $A \frac{B}{D}$ vagy $B \frac{A}{D}$.

Igy pl. 38 és 95 legnagyobb közös osztója 19, a legkisebb közös többszörös tehát

$$95 \cdot \frac{38}{19} = 95 \cdot 2 = 190.$$

Hasonlókép 2000 és 900 legnagyobb közös osztója 100, a legkisebb közös többszörös :

$$2000 \cdot \frac{900}{100} = 18000.$$

Ha három számnak A, B, C-nek keressük legkisebb közös többszörösét, akkor meghatározzuk először az A és B-ét ; legyen ez M ; az M és C legkisebb közös többszöröse egyszersmind legkisebb közös többszöröse az A, B és C-nek.

Az A, B és C közös többszöröse ugyanis többszöröse az M és C-nek ; mert az A és B minden többszöröse, tehát az is, mely a C-t is tartalmazza, többszöröse az M-nek ; tehát az A, B és C legkisebb közös többszöröse az M és C legkisebb közös többszöröse lesz.

Egészen hasonlóan végezzük a legkisebb közös többszörös meghatározását 3-nál több szám esetében is.

Pl. 125, 35, 84-nek közös többszöröse = ?

125 és 35 legnagyobb közös osztója = 5 ; 125 és 35 legkisebb közös többszöröse tehát : $125 \cdot 7 = 875$.

875 és 84 legnagyobb közös osztója = 7 ; 875 és 84 legkisebb közös többszöröse tehát : $875 \cdot 12 = 10,500$.

A keresett legkisebb közös többszörös tehát : 10,500.

43. Egytagúak legkisebb közös többszöröse. Ha most már áttérünk oly kifejezésekre, melyek számok és egyes betűk szorzatai, a legkisebb közös többszöröst minden nehézség nélkül közvetlenül felírhatjuk. Hogy p. valamely kifejezés a $26x^3y^2z$ és $169x^2y^2z^3u$ -nak közös többszöröse legyen, minden betűt legalább oly magas hatványkitevővel kell tartalmaznia, mint aminővel ez adott alakok bármelyikében előfordul, így pl. x-nek legalább is a 3-ik hatványon kell előfordulnia, y-nak a

2-ikon, hasonlóképp kell, hogy benne legyen z^3 és u ; végre az együtthatónak a 26 és 169 közös többszörösének kell lennie, melyről tudjuk, hogy a legkisebb közös többszörös (338) többszörösének kell lennie. Így tehát ama két egytagú minden közös többszöröse ily alakú

$$338x^3y^2z^3uM,$$

hol M tetszőleges tényezők szorzatát jelenti, melyek még hozzáléphetnek. Ismét megkapjuk a *legkisebb közös többszöröst* — t. i. azt, melynek minden más közös többszörös többszöröse, ha M -et 1-nek vesszük. Ez tehát: $338x^3y^2z^3u$.

Az általános szabály ebből könnyen kiolvasható: *Akárhány egytagúnak legkisebb közös többszörését fölírjuk következőképp: Együtthatónak vesszük az adott kifejezések együtthatóinak legkisebb közös többszörését és ehhez illesztjük az összes előforduló betűket, mindegyiket a legnagyobb kitevővel, mellyel ellátva az adott egytagúakban még található.*

Így lesz pl. $27a^3b^4c^2$, $12a^2bc^3$, $30abc^2$ legkisebb közös többszöröse: $540a^3b^4c^3$.

Feladatok.

Mi a legkisebb közös többszöröse a következő egytagúaknak?

1. $36a^4bc^2cd^2$, $15a^2b^2cd$, $7a^5bcd^3$
2. $8ab$, $40cd^3$, $35ab^2$, $14a^3cd$.
3. $35xy^2$, $63y^2z^3$, $35z^3x$, $4x^2yz$.
4. $28m^3n^2p$, $42m^2p^3$, $24mp^2n^3$, $m^3n^4p^5$.
5. $375rst$, $495s^3t^2$, $8325t$.

44. **Egész kifejezések legkisebb közös többszöröse.** Áttérünk most ismét az oly többtagúak vizsgálatára, aminők már a legnagyobb közös osztó tárgyalásánál előfordultak, amelyeknél t. i. egy bizonyos betűre vonatkozólag megvan az egész kifejezés jellege. Ezek, mint tudjuk, e betű fogyó hatványai szerint rendezhető alakok, hol az együtthatók tetszőleges számértékek, sőt egyéb betűkből összerakott kifejezések is lehetnek.

Itt is természetesen a *legkisebb közös többszörös képezésére* a következő kész szabályt nyerjük:

Ha az A és B egész kifejezések legnagyobb közös osztója D, akkor e kifejezések legkisebb közös többszöröse: $D \cdot \frac{A}{D} \cdot \frac{B}{D}$ vagy $A \cdot \frac{B}{D}$.

Épp úgy megmarad a számokra vonatkozó szabály fogalmazása több mint két kifejezés esetében:

Ha három egész kifejezésnek, A, B és C-nek keressük legkisebb közös többsét, akkor meghatározzuk először az A és B-ét; legyen ez M; akkor az M és C legkisebb közös többsége egyszer-smind legkisebb közös többsége az A, B és C-nek.

Pl. Kerestetik x^2-3x-4 és x^2-x-12 legkisebb közös többsége.

A legnagyobb közös osztó: $x-4$, így tehát a legkisebb közös többsége:

$$(x^2-3x-4) \frac{x^2-x-12}{x-4} = (x^2-3x-4)(x+3) = x^3-13x-12.$$

Feladatok.

Legkisebb közös többsége kerestetik a következő kifejezéseknek:

1. x^3-3x+2 és x^2-x-2 .
2. $x^3+3x^2+4x+12$ és x^3+4x^2+3x+3 .
3. x^3+x^2+x-3 és x^3+3x^2+5x+3 .
4. $3x^3-13x^2+23x-21$ és $6x^3+x^2-44x+21$.
5. $x^4-x^3+2x^2+x+3$ és x^4+2x^3-x-2 .
6. $x^3-9x^2+26x-24$, $x^3-10x^2+31x-30$ és $x^3-11x^2+38x-40$.
7. x^4-10x^2+9 , $x^4+10x^3+20x^2-10x-21$ és $x^4+4x^3-22x^2-4y+11$.
8. $6x^3-7ax^2-20a^2x$ és $3x^2+ax-4a^2$.
9. x^5-y^5 és x^2-y^2 .
10. $(x+3)^2(x+2)$ és $(x+3)(x-2)^2$.
11. $(x-5)^3(x-3)^2$ és $(x-5)^2(x-3)^3$.
12. $(2x+6)(3x-5)$ és $(x+3)(x-3)$.

12a. Minden páros szám ilyen alakú: $2n$, ahol n egész szám. Milyen alakú a páratlan szám? Írj fel két páratlan számot és add össze!

12b. Milyen alakú az a szám, mely 3-mal osztható? Milyen alakú az, mely 3-mal osztva, maradékul 1-et ad? Milyen az alakja annak, mely 3-mal osztva, maradékul 2-öt ad? Meg tudnád-e mutatni, hogy két, 3-mal nem osztható számnak vagy az összege, vagy a különbsége mindig osztható 3-mal?

45. **Törték összeadása és kivonása.** Eddigélé csak egyenlő nevezőjű törték összeadásáról szoltunk, most a legkisebb közös többsége meghatározása után különböző nevezőjű törték összeadásáról és kivonásáról is szólhatunk.

$\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ összeadása végett a törtet egyenlő nevezőjűekké kell változtatnunk; $\frac{a}{b}$ átalakítható oly módon, hogy mind a számlálóját mind a nevezőjét egyenlő számokkal megszorozzuk, vagyis

$$\frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} = \frac{3a}{3b} = \dots$$

az új nevezők mind b -nek többesei.

$\frac{c}{d}$ is átalakítható oly törtté, melynek nevezője a d többese:

$$\frac{c}{d} = \frac{2c}{2d} = \frac{3c}{3d} = \dots$$

Következőként a törtet olyanokká alakíthatók, melyek nevezője b és d közös többese. (Legcélszerűbb a törtet úgy alakítani, hogy az új nevező a régi nevezők legkisebb közös többese legyen.)

$$\text{Igy lesz: } \frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}, \quad \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd} \quad \text{és} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Példák: 1. $\frac{8}{a^3} + \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a} - 2$ átalakítása végett az utolsó tagot is törtnek tekintjük, melynek nevezője 1. A nevezők legkisebb közös többese lesz: a^3 . A második törtnek számlálóját és nevezőjét a -val szorozzuk, a harmadiknál a^2 -vel, a negyediknél a^3 -mal szorozunk. Így kapjuk a következő összeget:

$$\frac{8+2a+a^2-2a^3}{a^3}$$

2. $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}$. A közös nevező $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Az első törtnek mind a számlálóját, mind a nevezőjét megszorozzuk $a+b$ -vel, a másodikét $a-b$ -vel. Lesz:

$$\frac{a(a+b)-b(a-b)}{a^2-b^2} = \frac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

3. $1 - \frac{a-b}{c}$. Az 1 helyett $\frac{c}{c}$ írható. $\frac{c}{c} - \frac{a-b}{c} = \frac{c-(a-b)}{c} =$
 $= \frac{c-a+b}{c}.$

4. $\frac{x+2}{x-1} - \frac{x+3}{x^2-1}$ összevonása végett meghatározzuk $x-1$ és x^2-1 nevezők legkisebb közös többszörösét. Ez x^2-1 . Az első tört számlálóját és nevezőjét megszorozzuk $x+1$ -gyel. Az összevonandó törtek:

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2-1} - \frac{x+3}{x^2-1} = \frac{x^2+3x+2-x-3}{x^2-1} = \frac{x^2+2x-1}{x^2-1}$$

Feladatok.

1. a) $\frac{a}{x} + \frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; c) $\frac{a}{x} + \frac{1}{2x}$; d) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$;
 e) $\frac{a}{x} - \frac{b}{mx}$; f) $\frac{x}{12a} - \frac{y}{4}$.
2. a) $\frac{4a}{5} - \frac{3a}{10} + \frac{2a}{15}$; b) $\frac{5a}{3} - \frac{2b}{5} + \frac{a-b}{15}$; c) $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{4}$.
3. a) $a + \frac{b}{c}$; b) $a - \frac{b}{c}$; c) $1 + \frac{x}{y}$; d) $1 - \frac{x}{y}$; e) $\frac{x}{y} - 1$.
4. a) $3 + \frac{a}{5}$; b) $1 - \frac{b}{3}$; c) $2 + \frac{b}{5}$; d) $\frac{b}{4} - 1$; e) $1 - \frac{a-b}{3}$.
5. a) $\frac{3xy}{5ab} - \frac{5xy}{6ab} + \frac{8xy}{15ab}$ és helyettesítendő; b) $x=7$, $y=-3$,
 $a=b=5$; c) $x=y=-b$, $a=5$, $b=1$; d) $x=-2$, $y=-3$, $a=-1$, $b=4$.
6. a) $\frac{1+a}{2} + \frac{1-a}{3}$; b) $\frac{1+a}{2} - \frac{1-a}{3}$; c) $\frac{1-a}{2} - \frac{1+a}{5}$.
7. a) $\frac{a+2b}{2} - \frac{a-2b}{3}$; b) $\frac{2a-3b}{2} + \frac{2a+3b}{3}$; c) $\frac{2a-5b}{3} -$
 $\frac{3a-2b}{5}$.
8. a) $\frac{5y-4}{6x} - \frac{7x-6}{9x}$; b) $\frac{x-2y}{8y} - \frac{2x-y}{12y}$; c) $\frac{3x-2}{5} - \frac{5x-3}{2}$.
9. a) $\frac{x}{y} - \frac{x+1}{y+1}$; b) $\frac{x-1}{y-1} - \frac{x}{y}$; c) $\frac{x+1}{y+1} + \frac{x-1}{y-1}$;
 d) $\frac{x+a}{y+a} - \frac{x}{y}$.
10. a) $\frac{x-a}{y-a} - \frac{x}{y}$; b) $\frac{x+a}{y+a} - \frac{x-a}{y-a}$; c) $\frac{x-1}{x^2-4} - \frac{1}{x+2}$.

11. Mennyivel változik $\frac{a}{b}$, ha a számlálójához 1. d -t adunk?
 2. d -t kivonunk? 3. Nevezőjéhez d -t adunk? 4. Nevezőjéből d -t kivonunk? 5. Mind a számlálójához, mind a nevezőjéhez d -t adunk?
 6. Mind a számlálójából, mind a nevezőjéből d -t kivonunk?

12. a) $\frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$, b) $\frac{1}{2 - \frac{1}{2}}$, c) $\frac{1}{a + \frac{1}{b}}$, d) $\frac{1}{a - \frac{1}{b}}$.

13. a) Mennyivel nagyobb a , mint a reciprok értéke? b) $\frac{a}{b}$ mint a reciprok értéke?

14. a) $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^2$; b) $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^3$; c) $\left(1 - \frac{a}{b}\right)^2$; d) $\left(1 - \frac{a}{b}\right)^3$;
 e) $\left(2a^2 - \frac{3}{a}\right)^2$; f) $\left(2a^2 - \frac{3}{a}\right)^3$.

15. a) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2$; b) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^3$; c) $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2$; d) $\left(a - \frac{1}{a}\right)^3$;
 e) $\left(\frac{xy^2}{z} + \frac{2z^2}{x^2y}\right)^2$; f) $\left(\frac{xy^2}{z} + \frac{2z^2}{x^2y}\right)^3$.

16. $\frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x}$ és helyettesítendő a) $a=3, x=5$; b) $a=-5, x=-3$; c). $a=4, x=-1$.

17. a) $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2$; b) $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2$; c) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^3$; d) $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^3$.

18. a) $\left(\frac{3a}{2} - \frac{4}{3a}\right)^2$; b) $\left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)^2$; c) $\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{3}\right) \left(\frac{a}{4} - \frac{b}{3}\right)$.

19. $x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - y^3$ kiszámítandó: a) ha $x=3, y=\frac{2}{3}$; b) $x=\frac{2}{3}, y=\frac{1}{2}$; c) $x=\frac{3}{5}, y=-5$.

20. a) $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2}$; b) $\frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1-x^2} + \frac{3x}{(1+x)^2}$.

21. $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{c} - \frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{a}{b}\right)^2$.

22. Mekkora hibát ejt, aki $(a+b) : c$ helyett $a+b : c$ -t ír?
 Mekkora, aki $\frac{3}{1+a}$ helyett $1 + \frac{a}{3}$ -at, mekkora, aki $\frac{1-x}{y}$ helyett

$1 - \frac{x}{y}$ -t ír?

23. a) $1 - \frac{x+y}{z}$; b) $1 + \frac{x+y}{z}$; c) $1 - \frac{x-y}{z}$.

24. a) $1 + \frac{x+y}{x+y}$; b) $1 + \frac{x-y}{x-y}$; c) $\frac{x-y}{x+y} - 1$.

25. a) $3 - \frac{a}{a-b}$; b) $2 - \frac{a}{a-b}$; c) $4 + \frac{3}{a-b}$; d) $\frac{2a}{a-b} - 3$.

26. Mutassuk meg, hogy

$$1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}.$$

27. Mutassuk meg, hogy

$$1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(a-b+c)(-a+b+c)}{2ab}.$$

27a. Mutassuk meg, hogy ez a kifejezés:

$$\frac{2(ac+bd)-ab-cd-ad-bc}{ab+cd-ad-bc}$$

nem változik, ha a helyett $\frac{1}{a}$, b helyett $\frac{1}{b}$, c helyett $\frac{1}{c}$ és d helyett $\frac{1}{d}$ tesszük. (u. i. ha a helyett $\frac{1}{a}$, b helyett $\frac{1}{a}$ stb. tesszük, akkor oly kifejezésre jutunk, mely az előbbiből származtatható, ha a számlálót és a nevezőt $abcd$ -vel osztjuk.

28. Mekkora x -nek $\frac{3}{4}$ része, $\frac{5}{6}$ része, $\frac{m}{n}$ -ed része? Mennyivel nagyobb a $\frac{5}{6}$ része, mint a $\frac{3}{4}$ része? az $\frac{m}{n}$ -ed része, mint az $\frac{n}{m}$ -ed része?

29. Mekkora $a+b$ -nek $\frac{2}{5}$ része, mekkora $a-b$ -nek $\frac{3}{4}$ része? Mennyivel nagyobb az egyik, mint a másik?

30. Valakinek van x koronája. Kiadja a $\frac{2}{5}$ részét, meg az $\frac{1}{4}$ részét. Mennyi pénze marad?

31. Valakinek van x koronája. Ebből kiad 450 koronát. Mekkora a maradék $\frac{3}{4}$ része, mekkora a $\frac{4}{5}$ része? Mennyivel nagyobb a maradék $\frac{4}{5}$ része, mint a $\frac{3}{4}$ része?

32. Valaki kiadja pénzének $\frac{a}{b}$ -ed részét. Hányadrésze marad? Hányadrésze marad, ha $\frac{n+2}{m}$ -ed részét adja ki. Hányadrésze marad, ha $\frac{n-3}{m}$ -ed részét, ha $\frac{a}{b+1}$ -ed részét, ha $\frac{a}{b-2}$ -ed részét, ha $\frac{a+1}{b-1}$ -ed részét, ha $\frac{a-1}{b-1}$ -ed részét adja ki?

33. Mekkora a -nak $\frac{p}{100}$ része ($p\%$ -a)?
34. Mekkora $\frac{a}{b}$ -nek $p\%$ -a?
35. Vásárlunk a koronáért árút. Eladjuk $p\%$ nyereséggel. Mekkora az eladási ár? (Helyettesítsük $a=4563$ K, $7\frac{2}{4}\%$).
36. Vásárlunk a koronáért árút. Eladjuk $p\%$ veszteséggel. Mekkora az eladási ár? (Helyettesítsük: $a=5245$ K, $p=3\frac{1}{2}\%$.)
37. Mennyire nő a K $p\%$ mellett 5 hó alatt?
38. a koronánk van. $\frac{2}{5}$ részét $p\%$ -ra, $\frac{1}{4}$ részét $q\%$ -ra és a többit $r\%$ -ra helyezzük el 5 hóra. Mekkora a felnőtt tőke?

VIII. Az elsőfokú egyenlet.

(Egy ismeretlennel.)

46. **Egyenlet. Identitás.** Már a közönséges számtanban is igen sokszor előfordúl, hogy valamely számnak csak bizonyos tulajdonságát ismerjük, pl. azt, hogy egyes rajta végzett műveletek minő eredményt adnak és e föltételekből akarjuk meghatározni a keresett számot. Egyszerűbb esetekben következtetés útján lehet e célt elérni, de hogy e következtetés módja egészen világos és szabatos legyen, legélszerűbb a következtetéseknel is az algebra jelzéseit használni. E következtetések magukban foglalják szükségkép a még meghatározandó, *ismeretlen* számértéket is, vagy amint ezt röviden nevezni szokás, az *ismeretlent*. Midőn erre vonatkozólag bizonyos számkapcsolatot akarunk kijelölni, ez csak úgy történhetik, hogy ezt az ismeretlent egyelőre *betűvel* jelöljük. Az ismeretlen jelzésére használt betűk az x , y , z .

Keressük pl. azt a számot, mely 3-hoz hozzáadva, 20-at ad. Itt közvetlenül tudjuk, hogy ezt a számot nyerjük, ha 20-ból 3-at kivonunk. A keresett szám tehát 17. Fogalmazzuk azonban magát a föladatot. Legyen a keresett szám x , akkor a föladat szerint:

$$x + 3 = 20.$$

Ha most úgy az $x + 3$ -ból, mint a vele egyenlő 20-ból 3-at elveszünk, akkor:

$$x = 20 - 3 = 17.$$

Ez a föladat csak az első magyarázatra szolgált. Valamivel bonyolódottabb már a következő :

Valamely szám kétszerese és három negyede éppen akkora, mint a szám maga, héttel nagyobbítva. Legyen a szám x ; akkor a föladat azt mondja, hogy :

$$2x + \frac{3}{4}x = x + 7.$$

Ha mindenik oldalról az x -et, a számot magát levonom, megint egyenlők állnak :

$$x + \frac{3}{4}x = 7.$$

De x és $\frac{3}{4}x$ nem más, mint $\frac{7}{4}x$ és így tehát :

$$\frac{7}{4}x = 7.$$

Ebből x -et meghatározni, már ismeretes föladat, az osztás föladata. Kerestetik oly szám, mely $\frac{7}{4}$ -el szorozva 7-et ad, azaz kerestetik a 7 és $\frac{7}{4}$ hányadosa. Így tehát :

$$x = 7 : \frac{7}{4} = 4.$$

Az ismeretlen értéke tehát 4. Ezt könnyű most igazolni ; a 4 kétszerese 8, $\frac{3}{4}$ része 3, a kettő együtt 11, nem más, mint a 7-tel nagyobbított számérték.

Az ily képletben foglalt feladat, mely az ismeretlen és más adott számok közt bizonyos kapcsolatot állít, úgynevezett *egyenlet* (*aequatio*). A feladatot, vagyis *az egyenletet megoldjuk*, ha az ismeretlennek oly értékét találjuk, mely ama képlet által állított kapcsolatnak valóban eleget tesz. Vagyis : ha az ismeretlennek értékét ama képletben x helyébe tesszük, a két oldalnak egyenlőnek kell lennie.

Pl. az előbbi feladat kifejezésében x helyett 4-et téve, lesz :

$$2 \cdot 4 + \frac{3}{4} 4 = 4 + 7,$$

ami nem más, mint :

$$11 = 11,$$

míg ellenkezőleg 5-öt téve x helyébe, volna

$$2 \cdot 5 + \frac{3}{4} \cdot 5 = 5 + 7.$$

azaz :

$$\frac{55}{4} = 12,$$

ami képtelenség.

Az az érték, melynek segítségével a föladatkép fölirt egyenletből helyes képlet lesz, *az egyenletet megoldja*, vagy *kielégíti*. Az ismeretlennek ily kellően meghatározott értéke *az egyenlet gyöke*.

Az egyenletben az egyenlőség jelét egészen másképp használjuk, mint az eddigi fejtegetések folyamában. Midőn pl. fölírom, hogy :

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

a szorzás végrehajtása által a baloldalon álló kifejezésből a jobboldalon állót nyerhetem. A két oldalon álló kifejezés ugyanazt az értéket jelenti, egymással egyenlő, bárminő számokat tegyünk is *a* vagy *b* helyébe.

Az ily képletet, mely a benne foglalt betűk minden értékénél helyes, egyenlőségnek vagy azonosságnak (identitas) nevezzük.

Ellenkezőleg ez az alak :

$$x + 3 = 20$$

képtelen, ha *x* helyett pl. egyet teszek, épp úgy bármi más számértéket helyettesítsek is benne, a 17 kivételével.

Az egyenletben az ismeretlent jelző betű nem tetszőleges szám, hanem csak helyettese a majdan meghatározandó számértéknek.

47. **Az egyenlet megoldása.** Az előbb tárgyalt példa azt is mutatja, hogy miképpen végezzük az adott feladat megoldását, ha már sikerült azt egyenlet alakjába önteni. *Az egyenlet cél-szerű átalakítása által el kell érni, hogy az egyenlőség állítása az x-re egymagában vonatkozzék*, vagyis el kell érniünk, hogy az egyenletnek ilyen alakja legyen : *x* = bizonyos, adott számokból összerakott kifejezéssel és mihelyt ily alakunk van, az *x* kiszámítása vissza van vezetve oly műveletsorra, mely adott számokon végzendő, melynek eredményét az algebra szabályai szerint kifejezhetjük.

Az átalakításnál alapúl szolgáló elv a következő : *Az egyenlőség nem változik, ha az egyenlőség jelének két oldalán álló kifeje-*

zéseket — rövidebben az egyenlet két oldalát — ugyanazzal a számmal szorozzuk, vagy osztjuk; valamint akkor sem, ha az egyenlet két oldalához ugyanazt a számot hozzáadjuk vagy pedig ezt belőle kivonjuk.

α) Ezen elvet mindenekelőtt felhasználjuk a törteknek eltávolítására az egyenletből. Ez mindenkor megtörténik, ha megszorozzuk az egyenlet két oldalát az előforduló törtek nevezőinek szorzatával, vagy egyszerűbben, ezeknek legkisebb közös többszörösével.

Ez a szabály elégséges pl. már a következő egyenlet megoldására:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 31.$$

A legkisebb közös többszörös: 30 és ezzel szorozva a két oldalon, lesz:

$$15x + 10x + 6x = 930,$$

vagyis összevonva a baloldalon:

$$31x = 930,$$

és osztva most 31-el mindkét oldalon

$$x = 30.$$

Hogy $x=30$, az egyenletnek valóban gyöke-e, azt jó még utólagosan a helyettesítés által megvizsgálni.

Ha x helyébe 30-at teszünk az egyenletben, lesz:

$$\frac{30}{2} + \frac{30}{3} + \frac{30}{5} = 31,$$

ami a törtek kiszámítása és összeadása által tüstént igaznak bizonyul. Ekkor ugyanis

$$15 + 10 + 6 = 31.$$

β) Midőn a törtek eltávolítása után az egyenlet két oldalán egész kifejezések állanak, átalakíthatjuk az egyenletet továbbá úgy, hogy az összes tagok, melyek x -et tartalmazzák, az egyik oldalra kerüljenek, azok pedig, melyek ismert számokból vannak összerakva, a másik oldalon foglaljanak helyet.

Minden tagot szabad ugyanis ellenkező előjellel átvinni a másik oldalra.

Ennek hebizonyítására vegyük fel, hogy az

$$M + a = N$$

egyenletben M és N bármily tagok összege, a pedig egy bizonyos tag. Kisebbsük mind a két oldalt a -val, lesz:

$$M = N - a,$$

azaz a tetszőleges a tagot átvittük a másik oldalra ellenkező jellel. Ha az egyenlet

$$K - a = L$$

volt, akkor épp úgy a -val nagyobbítva a két oldalon, lesz:

$$K = L + a,$$

hol ismét a negatív tag az átvitelnél pozitív előjelt nyert.

Ha pl. megoldandó a következő egyenlet:

$$x^2 + 8x - 3 = x^2 + 7x + 29,$$

akkor mindkét oldalból $x^2 + 7x$ -et elvonunk, hogy a jobb oldalról az x -et tartalmazó tagok eltávozzanak. Így a következő egyenletre jutunk:

$$x^2 + 8x - 3 - x^2 - 7x = 29$$

és ha most még 3-at mindkét oldalhoz adunk, hogy a baloldalon csakis x -et tartalmazó tag maradjon, akkor lesz:

$$x^2 + 8x - x^2 - 7x = 29 + 3,$$

vagy összevonva:

$$x = 32,$$

ami ismét könnyen igazolható. Ugyanis:

$$32^2 + 8 \cdot 32 - 3 = 32^2 + 7 \cdot 32 + 29 = 1277.$$

Hasonlóképp ebből az egyenletből

$$48x + 15 = 40x + 63$$

lesz:

$$48x - 40x = 63 - 15,$$

összevonva:

$$8x = 48,$$

és 8-cal osztva mindkét oldalon:

$$x = 6.$$

A helyettesítés által

$$48 \cdot 6 + 15 = 40 \cdot 6 + 63 = 303.$$

γ) Szabad továbbá az egyenletben minden tagnak előjelét egyszerre megváltoztatni. Ez nem más, mint szorzás —1-gyel és ez meg van engedve.

Legyen pl. adva a következő egyenlet :

$$\frac{7}{8} - \frac{13x}{6} = \frac{5x}{12} - \frac{4x}{3} - 13.$$

Első dolgunk a törtek eltávolítása. Evégből a nevezők legkisebb közös többszörösével, 24-gyel szorzunk mindkét oldalon :

$$21 - 52x = 10x - 32x - 312.$$

Második dolgunk, hogy az x -et tartalmazó tagokat egyik oldalra (pl. a baloldalra), a többit pedig a másik oldalra gyűjtsük :

$$-52x - 10x + 32x = -312 - 21.$$

Összevonva :

$$-30x = -333.$$

Megváltoztatott előjelekkel :

$$30x = 333.$$

És végre 30-cal osztva mindkét oldalon;

$$x = \frac{333}{30} = \frac{111}{10} = 11 \frac{1}{10}.$$

δ) Szabad az egyenlet mindkét oldalát ugyanazzal a számmal osztani. Ha már az egyenlet ilyen alakra hozatott :

$$ax = b$$

akkor a -val elosztjuk mindkét oldalát, miből

$$x = \frac{b}{a}$$

származik.

48. Az egyenletek osztályozása. Miután a törteket eltávolítottuk, az összes jelzett műveleteket végrehajtottuk és a baloldalon álló kifejezést x növekedő hatványai szerint rendeztük, az egyenlet alakja lesz :

$$Px + Qx^2 + \dots = A$$

hol $P, Q, \dots, A$ adott számokból összerakott kifejezések, azaz ismert számok.

Az egyenletet első-, másod- ..., n -edfokúnak mondjuk, amint az x legmagasabb hatványa, mely még föllép, az első, második, ..., n -edik. Most csak az elsőfokú egyenlettel foglalkozunk. Ez tehát a kellő rendezés által

$$Px = A$$

alakot nyer és meg van oldva, ha az x együtthatójával P -vel a két oldalon osztunk. Ekkor ugyanis

$$x = \frac{A}{P}.$$

Az elsőfokú egyenlet teljes ismeretéhez még a következő tétel szükséges:

Minden elsőfokú egyenletnek csak egy gyöke van, azaz csak egy szám van, mely az egyenletet kielégíti.

Tegyük fel, hogy több van, tehát legalább kettő. Nevezzük ezeket u és v -nek, akkor a

$$Px = A$$

egyenletet kielégíti u és v , tehát Pu is és Pv is egyenlő A -val, tehát P két különböző számértékkel szorozva, ugyanazt az eredményt adja, ami lehetetlen.

49. Példák. Az eddigiek elégségesek minden elsőfokú egyenlet megoldására.

1. Legyen pl. megoldandó:

$$\frac{5x+4}{2} - \frac{7x+5}{10} = \frac{28}{5} - \frac{x-1}{2}.$$

A nevezők legkisebb közös többszörösével 10-zel szorozva az egyenlet mindkét oldalán:

$$25x+20-(7x+5)=56-(5x-5).$$

A zárójeleket eltávolítva:

$$25x+20-7x-5=56-5x+5.$$

Rendezve (az ismeretlent tartalmazó tagokat egy oldalra és az ismereteseket a másik oldalra hozva):

$$25x-7x+5x=56+5-20+5.$$

Összevonva:

$$23x=46.$$

És ebből végre:

$$x=2.$$

$$2. \quad \frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-4}{x-5} - \frac{x-5}{x-6}.$$

Szorozva mindkét oldalon $(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)$ -tal, lesz:

$$(x-1)(x-3)(x-5)(x-6) - (x-2)(x-2)(x-5)(x-6) = \\ = (x-4)(x-2)(x-3)(x-6) - (x-5)(x-2)(x-3)(x-5).$$

A sokszorozás és levonás után, azaz midőn az egyes oldalakat rendeztük :

$$-x^2 + 71x - 30 = -x^2 + 65x - 6.$$

Most az egész egyenletet rendezve :

$$-x^2 + 71x + x^2 - 65x = -6 + 30,$$

vagyis :

$$6x = 24,$$

miből :

$$x = 4.$$

3. Az elsőfokú egyenlet tárgyalása nem változik, hogyha együtthatói számok helyett betűkből állanak. A számítás menétét a következő példákból látjuk :

Legyen :

$$ax + b = cx + d.$$

Rendezve :

$$ax - cx = d - b,$$

az x -et közös tényezőül kiemelve :

$$(a - c)x = d - b,$$

és $a - c$ -vel az egyenlet mindkét oldalát elosztva :

$$x = \frac{d - b}{a - c}.$$

A helyettesítés ismét mutatja, hogy :

$$a \frac{d - b}{a - c} + b = c \frac{d - b}{a - c} + d = \frac{ad - bc}{a - c}.$$

4.

$$\frac{x - a}{x - b} = \frac{x - c}{x - d}.$$

Szorozva mindkét oldalon $(x - b)(x - d)$ -vel :

$$(x - a)(x - d) = (x - b)(x - c),$$

a zárójelek eltávolítása után :

$$x^2 - (a + d)x + ad = x^2 - (b + c)x + bc,$$

rendezve és összevonva :

$$(b + c - a - d)x = bc - ad,$$

és :

$$x = \frac{bc - ad}{b + c - a - d}.$$

Feladatok.

1. $5x+50=4x+56.$
2. $24x-49=19x-14.$
3. $16x=38-3(4-x).$
4. $50(x-7)=67(9-x)-2.$
5. $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=11.$
6. $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}+\frac{1}{6}=\frac{x}{8}+\frac{1}{12}.$
7. $\frac{4x}{3}+24=2x+6.$
8. $56-\frac{3x}{5}=48-\frac{5x}{8}.$
9. $\frac{3x}{4}+\frac{180-5x}{9}=29.$
10. $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}=x-2.$
11. $\frac{x}{3}-\frac{1}{3}-\frac{x}{4}-\frac{1}{4}=\frac{x}{5}-\frac{1}{5}-\frac{x}{6}+\frac{1}{6}.$
12. $1+\frac{x}{2}-\frac{2x}{3}=\frac{3x}{4}-4\frac{1}{2}.$
13. $2x-\frac{19-2x}{2}-\frac{2x-11}{2}=0.$
14. $x+\frac{3x-9}{5}=4-\frac{5x-12}{3}.$
15. $x-1-\frac{x-2}{2}-\frac{x-3}{3}=0.$
16. $\frac{1}{7}(3x-4)+\frac{1}{3}(5x+3)=43-5x.$
17. $5x-[8x-3\{16-6x-(4-5x)\}]=6.$
18. $\frac{12}{x}+\frac{1}{12x}=\frac{29}{42}.$
19. $\frac{5}{6}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{7}{6}\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{7}\right)=4\frac{8}{9}.$
20. $x+1-\frac{x^2+3}{x+2}=2.$
21. $\frac{42}{x-2}=\frac{35}{x-3}.$
22. $\frac{x-1}{x-2}=\frac{7x-21}{7x-26}.$
23. $x-3-(3-x)(x+1)=x(x-3)+8.$
24. $(x+7)(x+1)=(x+3)^2.$
25. $\frac{4x+17}{x+3}+\frac{3x-10}{x-4}=7.$
26. $\frac{x+1}{7}+x(x-2)=(x-1)^2.$
27. $\frac{x-4}{2}+(x-1)(x-2)=x^2-2x-4.$
28. $\frac{3x^2-2x-8}{5}=\frac{(7x-2)(3x-6)}{35}.$
29. $\frac{3x-1}{2x-1}-\frac{4x-2}{3x-2}=\frac{1}{6}.$

$$30. \frac{2}{2x-3} + \frac{1}{x-2} = \frac{6}{3x+2}.$$

$$31. \frac{x-4}{x-5} - \frac{x-5}{x-6} = \frac{x-7}{x-8} - \frac{x-8}{x-9}.$$

$$32. \frac{x}{x-2} + \frac{x-9}{x-7} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-8}{x-6}.$$

$$33. \frac{3-2x}{1-2x} - \frac{2x-5}{2x-7} = 1 - \frac{4x^2-1}{7-16x+4x^2}.$$

$$34. \frac{3+x}{3-x} - \frac{2+x}{2-x} - \frac{1+x}{1-x} = 1.$$

$$35. (x+1)(x+2)(x+3) = (x-1)(x-2)(x-3) + 4(3x-2)(x-1).$$

$$36. (x-9)(x-7)(x-5)(x-1) = (x-2)(x-4)(x-6)(x-10).$$

$$37. (8x-3)^2(x-1) = (4x-1)^2(4x-5).$$

$$38. \frac{x^2-x+1}{x-1} + \frac{x^2+x+1}{x+1} = 2x.$$

$$39. a \frac{a-x}{b} - b \frac{b+x}{a} = x.$$

$$40. a \frac{x-a}{b} + b \frac{x-b}{a} = x.$$

$$41. \frac{x^2-a^2}{bx} - \frac{a-x}{b} = \frac{2x}{b} - \frac{a}{x}.$$

$$42. x(x-a) + x(x-b) = 2(x-a)(x-b).$$

$$43. (x-a)(x-b)(x+2a+2b) = (x+2a)(x+2b)(x-a-b).$$

$$44. (x-a)(x-b) = (x-a-b)^2.$$

$$45. \frac{1}{2} \left(x - \frac{a}{3} \right) - \frac{1}{3} \left(x - \frac{a}{4} \right) + \frac{1}{4} \left(x - \frac{a}{5} \right) = 0.$$

$$46. \frac{x}{a} - \frac{x}{b-a} = \frac{a}{b+a}. \quad 47. ax+b = \frac{x}{a} + \frac{1}{b}.$$

$$48. \frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{c} + \frac{x-c}{a} = \frac{x-(a+b+c)}{abc}.$$

$$49. \text{Oldjuk meg az } a+b=c \text{ egyenletet } \alpha) a\text{-ra, } \beta) b\text{-re.}$$

$$50. \text{Oldjuk meg az } ab=c \text{ egyenletet } \alpha) a\text{-ra, } \beta) b\text{-re.}$$

$$51. \text{Oldjuk meg az } \frac{a}{b} = c \text{ egyenletet } \alpha) a\text{-ra, } \beta) b\text{-re.}$$

$$52. \text{Oldjuk meg az } a(b+c)=b(a+c) \text{ egyenletet 1. } a\text{-ra, 2. } b\text{-re,}$$

$$3. c\text{-re.}$$

$$53. \text{Oldjuk meg ezt a kamatszámításban előforduló: } k = \frac{tpn}{36000}$$

$$\text{egyenletet } \alpha) t\text{-re, } \beta) p\text{-re, } \gamma) n\text{-re.}$$

54. Oldjuk meg az $t = t + \frac{tpn}{36000}$ egyenletet 1. t -re, 2. p -re, 3. n -re.
55. Oldjuk meg a $d = t - \frac{tpn}{36000}$ egyenletet 1. t -re, 2. p -re, 3. n -re.
56. Oldjuk meg az $(a+b)^2 - (a-b)^2 = c$ egyenletet 1. a -ra, 2. b -re.
57. Oldjuk meg az $ab = cd$ egyenletet 1. a -ra, 2. b -re, 3. c -re, 4. d -re.

50. **Elsőfokú egyenletre vezető tárgyi feladatok.** Eddig csak a kész elsőfokú (és egy ismeretlent tartalmazó) egyenlet átalakításával és megoldásával foglalkoztunk. Ha azonban a feladat valamely tárgyi körből van véve, ú. n. alkalmazott feladat, akkor mindenekelőtt a feladatban foglalt számviszonyokat ki kell fejeznünk egyenlet által. Természetes dolog, hogy nem minden feladat vezet a most tárgyalt legegyszerűbb egyenlet alakra. Ezt azonban rendszerint csak akkor ítéldhetjük meg, midőn *felállítjuk* a feladatnak megfelelő *egyenletet*. Az egyenletnek e felállítása a kezdőnek némelykor nehézséget okoz. Ki kell találni, hogy a szavakkal megadott feladatot hogyan kell algebrai nyelven kifejezni és erre kész szabályt nem is lehet találni, a kellő ügyességet csak a gyakorlat által szerezhethetjük meg.

Lássuk most a megoldás menetét néhány példán:

1. *Két szám összege: 231, ugyane számok különbsége 79. Melyek e számok?*

Legyen a kisebb szám az ismeretlen: x , a nagyobb szám, mint-hogy különbségük 79, ekkor $x+79$. A kettő összege tehát: $2x+79$; tudjuk másrészt, hogy e két szám összege 231. Tehát e két szám összegének két kifejezését ismerjük: $2x+79$ és 231. E kettőnek egymással egyenlőnek kell lennie;

$$2x+79=231,$$

$$2x=152,$$

$$x=76.$$

A két szám tehát 76 és $76+79=155$, amit könnyen igazolhatunk.

2. *Egy rúd, melynek hossza két méter, három részre osztandó, úgy hogy a második rész 20 centiméter híján kétszer oly hosszú legyen, mint az első, és a harmadik rész ismét 20 cm híján kétszer oly hosszú mint a második.*

Legyen az első rész hossza: x cm, akkor a másodiké $2x-20$, és a harmadiké $2(2x-20)-20=4x-60$; az egész rúd hossza tehát $x+2x-20+4x-60$ cm, de az mondatott, hogy az egész rúd hossza: 200 cm. Tehát:

$$\begin{aligned}x+2x-20+4x-60 &= 200, \\7x &= 280, \\x &= 40.\end{aligned}$$

Eszerint a 3 rész hossza 40, 60 és 100 cm, mely számok a feladatot megoldják.

3. Valaki 1000 korona egy részét kikölcsönözte 4-es kamatra, másik részét 5-ös kamatra. Összes évi jövedelme e tőkéből 44 korona; mennyi a 4, illetőleg 5%-ra kikölcsönzött összeg?

Legyen a 4-es kamatra kiadott rész: x , akkor az 5-ös kamatra kikölcsönzött összeg: $1000-x$. Az első rész jövedelme $\frac{4x}{100}$, a másiké $\frac{5(1000-x)}{100}$. A kettő együtt: 44 K. Tehát:

$$\begin{aligned}\frac{4x}{100} + \frac{5(1000-x)}{100} &= 44, \\4x + 5000 - 5x &= 4400, \\x &= 5000 - 4400, \\x &= 600.\end{aligned}$$

A 4-es kamatra kikölcsönzött összeg: 600 K; a másik tehát 400 K. Ekkor az elsőből húzott jövedelem 24 K, míg a második 20 K-t hajt, együtt tehát 44 K-t.

4. Két háromszögnek egyenlő területe van. Az elsőben az alap és magasság egyenlő. A másodikban az alapvonal 4 m-rel rövidebb, a magassági vonal pedig 4 m-rel hosszabb mint az elsőben. Meghatározandók a háromszögek.

Legyen az első háromszögben az alap és magasság közös hossza: x , akkor területe: $\frac{x^2}{2}$; a másodikban az alap: $x-4$, a magasság: $x+4$, a terület: $\frac{(x-4)(x+4)}{2}$. De a két terület egyenlő. Tehát:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2} &= \frac{(x-4)(x+4)}{2}, \\x^2 &= x^2 - 16, \\16 &= 0.\end{aligned}$$

A rendezett egyenlet nem tartalmazza x -et, tehát nem is egyenlet. A feladat adataiból képtelenség következik. Oly háromszögek, melyeknek ily sajátságuk volna, *lehetetlenek*.

Ha azonban a magasság a másik háromszögben nem 4, hanem 5 m -rel nagyobb, akkor az egyenlet:

$$\frac{x^2}{2} = \frac{(x-4)(x+5)}{2},$$

$$x^2 = x^2 + x - 20,$$

$$x = 20.$$

Ekkor tehát az első háromszög alapja, magassága 20 m , a másodikban az alap: 16, a magasság 25 m ; és ekkor mindkettő területe 200 m^2 .

5. A 45 éves, B 15 éves. Hány év múlva lesz A 4-szer oly idős mint B?

Mondjuk x év múlva. Ekkor A $45+x$ éves és B $15+x$ éves lesz. De azt kívánjuk, hogy A 4-szer oly idős legyen, mint B, tehát:

$$45+x=4(15+x).$$

$$3x=-15.$$

$$x=-5.$$

A felelet: —5 év múlva, azaz a keresett viszony a kettő évszáma közt már azelőtt volt meg, 5 év előtt, mikor A 40 és B 10 éves volt. Tudjuk továbbá, hogy az elsőfokú egyenletnek csak egy gyöke van. A feladatnak oly megoldása, mely a jövőre vonatkoznék, tehát lehetetlen.

6. Két ember, aki 72 kilométernyi távolságban lakik egymástól, találkozni akar. Egyszerre indulnak útnak; az első $5\frac{1}{4}$, a második $3\frac{3}{8}$ kilométert tesz meg óránként. Hol és mikor találkoznak?

Mondjuk: x óra múlva. Akkor az első megtett $5\frac{1}{4}x$ kilométer a másik $3\frac{3}{8}x$ -et. A kettő együtt: 72 kilométer. Tehát:

$$5\frac{1}{4}x - 3\frac{3}{8}x = 72,$$

$$9x = 72,$$

$$x = \frac{72}{9} = 8.$$

Tehát találkoznak 8 óra múlva és ez alatt az idő alatt az első 42 kilométerre távozott lakóhelyétől.

7. Két tört egyenlő értékű volt; azáltal, hogy mindegyiknek számlálójából, nevezőjéből ugyanazt a mennyiséget levonom, a következő értékeket kapom: $\frac{67}{165}$ és $\frac{111}{265}$. Melyek az eredeti törtek?

Legyen a levont mennyiség: x . Akkor az eredeti törtek: $\frac{67+x}{165+x}$ és $\frac{111+x}{265+x}$ és minthogy ezekről azt mondtuk, hogy egyenlők,

$$\begin{aligned} \text{tehát:} \quad \frac{67+x}{165+x} &= \frac{111+x}{265+x}, \\ (265+x)(67+x) &= (111+x)(165+x), \\ 17755+332x+x^2 &= 18315+276x+x^2, \\ x^2+332x-x^2-276x &= 18315-17755, \\ 56x &= 560, \\ x &= 10. \end{aligned}$$

Az eredeti törtek: $\frac{77}{175}$ és $\frac{121}{275}$, melyeknek közös értéke $\frac{11}{25}$.

8. Az órának két mutatója mikor áll pontosan egymás fölött 2 és 3 óra közt?

Mondjuk 2 óra x perckor. Egységnek vesszük az óralap kerületének 60-ad részét, melyen a nagyobb mutató egy perc alatt halad át. Pontban 2 órakor a kis mutató II-n, a nagyobbik a XII-n áll. Ezóta a nagy mutató x részen ment keresztül, a kis mutató, mely már a II-n áll $x-10$ -en. De a nagy mutató 12 részen megy át, míg a kis mutató egyen. Kell tehát, hogy legyen:

$$\begin{aligned} \frac{x}{12} &= x-10, \\ x &= 12x-120, \\ 11x &= 120, \\ x &= 10\frac{11}{10}. \end{aligned}$$

9. Egy munkást 60 napra alkalmaztak oly feltétellel, hogy minden napra, melyen dolgozik, kap 150 fillért és ellátást és minden napra, melyen nem dolgozik, ő fizet az ellátásért 50 f-t. A 60 nap elteltével 24 K-t kapott ki. Hány napon dolgozott és hány napon nem dolgozott?

x napon át dolgozott: akkor $60-x$ napon nem dolgozott. — Az x napra jár neki $150x$ f, a $60-x$ napért ő fizet $(60-x) \cdot 50$ f-t. A 60 nap leteltével tehát

$$150x - (60-x)50$$

f-t kap. Ennek 2400 fillérnek kell lennie, azaz:

$$150x - (60-x)50 = 2400.$$

A kijelölt műveletet elvégezve :

$$150x - 3000 + 50x = 2400,$$

azaz :

$$200x = 5400,$$

miből :

$$x = 27.$$

27 napon dolgozott és 33 napon nem dolgozott.

10. A , B és C közt kell 2400 koronát elosztani, de úgy, hogy B 400 koronával többet kapjon, mint C és A 400 koronával többet kapjon, mint B . Mennyit kap mindegyik ?

C kap x koronát. Akkor B kap $x + 400$ koronát, A kap $x + 800$ koronát, tehát

$$x + x + 400 + x + 800 = 2400$$

miből :

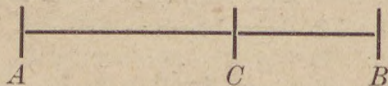
$$3x + 1200 = 2400.$$

és

$$x = 400.$$

C kap 400 koronát, B 800-at és A 1200-at.

11. A helység B helységtől t kilométernyi távolságban van. A -ból B felé indul egy vonat, mely óránként a km-nyi utat tesz ; B -ből A felé n órával később indul egy másik vonat, mely b km-t tesz óránként. Hány óra múlva és a pálya melyik pontján találkoznak ?



Az A indulásától számítva x óra múlva találkoznak ; (C -ben), azaz A vonata megy x óra folyást, akkor B -é megy $x - n$ óra folyást, mert n órával később indult ; A az x óra alatt ax km-nyi utat tesz (AC), B pedig az $x - n$ óra alatt $b(x - n)$ km-nyit (BC). A két út együttvéve a t km-nyi távolsággal egyenlő ; ($AC + CB = AB$), azaz

$$ax + b(x - n) = t,$$

vagyis :

$$ax + bx - bn = t,$$

miből :

$$x(a + b) = t + bn,$$

és

$$x = \frac{t + bn}{a + b}.$$

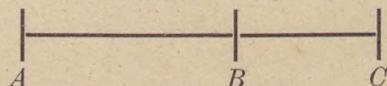
Ennyi óra múlva találkoznak. Ezen idő alatt A az utat tett meg, azaz $a \cdot \frac{t+bn}{a+b} = \frac{at+abn}{a+b}$ utat. B pedig:

$$b(x-n) = b \left(\frac{t+bn}{a+b} - n \right) = b \frac{t+bn-an-bn}{a+b} = b \frac{t-an}{a+b} = \frac{bt-abn}{a+b}$$

km utat. Az A és B utja együttvéve megadja az egész t utat.

$$\frac{at+abn}{a+b} + \frac{bt-abn}{a+b} = \frac{at+bt}{a+b} = \frac{t(a+b)}{a+b} = t.$$

12. A helység B helységtől t km-nyire van. A -ból indul B felé egy vonat, mely óránként a km-nyi utat tesz és B -ből ugyanebben az irányban megy n órával később egy másik vonat, mely óránként b km-nyi utat tesz. Mennyi idő múlva és hol találkoznak?



A indulásától számítva x óra múlva éri utól A vonat a B vonatot (C -ben). A vonat ment tehát x óra folyást, B vonat pedig $x-n$ óra folyást. A ezalatt megtesz ax km-nyi utat (AC -t), B pedig $b(x-n)$ km-nyit (BC -t). Ha AC -ből BC -t kivonjuk, AB -t kapjuk, azaz

$$ax - b(x-n) = t,$$

vagyis:

$$ax - bx + bn = t,$$

miből:

$$x(a-b) = t - bn,$$

és

$$x = \frac{t - bn}{a - b}.$$

Ennyi óra múlva találkoznak. Ez alatt az idő alatt A megtett $a \cdot \frac{t-bn}{a-b} = \frac{at-abn}{a-b}$ km-nyi utat.

(Számítsuk ki B utját és mutassuk meg, hogy A utja éppen t -vel nagyobb mint B -é.)

Látjuk, hogy x -nek ez az értéke tökéletesen megegyezik az előbbivel, ha b helyett $-b$ -t teszünk, vagyis az A felé tartó mozgást *negatív sebességű mozgásnak* tekintjük.

E képletet felhasználjuk, hogy rajta egy eddig képtelenségnek mondott művelettel foglalkozunk. Azt mondtuk ugyanis az osztás-

nál, hogy 0-sal osztani nem lehet. E feladatnál azonban megeshetik, hogy 0 kerül az osztóba; akkor, ha $a=b$. Mit jelent akkor x kifejezése? — Ha az A vonat éppen olyan sebesen megy, mint a B , akkor az egyik vonat *véges idő* alatt nem fogja elérni a másikat. Az x tehát ez esetben *véges* számot nem jelenthet. Minden véges számnál nagyobbat kell tehát az x -nek jelentenie; vagyis, ha valahol egy számot 0-sal kell osztanunk, az azt jelenti, hogy a hányados minden számnál nagyobb, *végtelen nagy*. A végtelen nagynak jele ∞ .

13. Mekkora a vételár, ha a nyereség $p\%$ és az eladási ár a korona?

A vételár x K. Ennek $p\%$ -a $\frac{xp}{100}$. Az eladási ár tehát $x + \frac{xp}{100}$;

vagyis:

$$x + \frac{xp}{100} = a,$$

miből:

$$100x + xp = 100a$$

$$x(100 + p) = 100a, \text{ miből } x = \frac{100a}{100 + p}.$$

Látjuk e feladatoknál, hogy: első teendők a feladatban előforduló ismeretlen mennyiség megnevezése. (Az utolsó feladatban pl. a *vételár* x K.) Azután ez x által kifejezzük a feladatban előforduló mennyiségeket (az utolsó példában a *nyereség* $\frac{xp}{100}$ K) és e mennyiségeket abba a kapcsolatba hozzuk, amelyet a feladat követel. (Itt pl. azt fejezzük ki, hogy a vételár + nyereség = eladási ár.) Az egyenlet föl lévén állítva, az x értékének kiszámítására az előbb megállapított eljárás vezet, nevezetesen:

1. Eltávolítjuk a törteket. 2. A kijelölt műveleteket végrehajtjuk. 3. Rendezzük az egyenletet úgy, hogy az ismeretlent tartalmazó tagok egy oldalra és az ismeretesek a másik oldalra kerüljenek. 4. Összevonást eszközünk és 5. az x együtthatójával az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk.

Feladatok.

1. Két ember vagyona együtt 15.210 korona. Az egyiknek kétszer annyija van, mint a másiknak. Mennyi pénze van mindegyiknek?

2. Miután adósságunk hetedrészét és ötödrészét kifizettük, még 184 koronányi tartozásunk marad. Mennyi volt az egész tartozás?

3. Egy társaságban 266-an vannak : férfiak, nők és gyermekek. 4-szer annyi a férfi mint a gyermek és 2-szer annyi a nő mint a gyermek. Hány férfi, hány nő és hány gyermek volt ?

4. Egy család a bevételének hatodrészt lakásra, harmadrészt élelemre, tizedrészt ruházatra, huszadrészt jótékonyásra és kilencedrészt egyéb szükségleteire adja ki. Marad még 1075 koronája. Mennyi volt a bevétele ?

5. A , B és C együtt 155 koronát kapnak. Ebből B 15 koronával többet kap mint A , C 20 koronával többet mint B ; mennyije van mindegyiknek ?

6. Három ember, A , B és C összesen nyilvános célra 276 K-t. B kétszer annyit adott mint A és még 12 K-t, C 3-szor annyit mint B és még 12 K-t. Mennyit adott mindegyik ?

7. 500 K oly módon osztandó el 4 személy közt, hogy az első és második együtt kapjon 280 K-t, az első és harmadik együtt 260 K-t, az első és negyedik együtt 220 K-t; mennyi jut mindegyikre ?

8. Több szegény közt kiosztanak 22 K-t. Felük $\frac{3}{4}$ koronát kap; egy harmaduk egy koronát, a hátralevők pedig $1\frac{1}{4}$ koronát. Hányan voltak ?

9. Melyik az a szám, mely ötödrésznél 24-gyel nagyobb ?

10. 92 oly két szám összege, melyek közül ha az egyiket 7-tel és a másikat 3-mal osztjuk, a hányadosok összege 20. Melyek e számok ?

11. Harminc éves atyának 2 éves fia van; hány év múlva lesz a fiú kora $\frac{1}{3}$ -a az atyáénak ?

12. Egy szám kétszerese, ha 24-et még hozzáadunk, annyival nagyobb 80-nál, amennyivel az eredeti szám kisebb volt 100-nál: melyik e szám ?

13. A hatvan két részre osztandó, úgy hogy az egyik rész hetede egyenlő legyen a másik rész nyolcadával.

14. A 100 két oly részre osztandó, hogy az egyik rész negyede a másik rész harmadánál 11-gyel nagyobb legyen.

15. A 92 négy részre osztandó, úgy hogy az első rész 10-zel nagyobb legyen a másodiknál, 18-cal nagyobb a 3-diknál és 24-gyel a 4-diknél.

16. Két egymás után következő egész szám találandó, úgy hogy az első fele és ötöde együttvéve egyenlő legyen a második harmad- és negyedrészének összegével.

17. Két oly szám találandó, hogy különbségük 4 legyen, négyszeteik különbsége pedig 112.

18. A száz két oly részre osztandó, hogy e részek négyzeteinek különbsége 2000 legyen.

19. Egyik hordóból kivettünk 34 litert, a másikkól 80-at; eredetileg tartalmuk ugyanaz volt, most pedig az egyikben 3-szor annyi van mint a másikban. Hány liter volt mindegyikben?

20. Egy füzetekben megjelenő könyv ára 4 K 56 f; egy másik könyv, melynek füzete 12 f-rel drágább, és amely ugyanannyi füzetből áll, mint az első, 6 K-ba kerül. Hány füzete van mindegyik könyvnek?

21. Vesztett csata alkalmával egy hadsereg katonáinak 6-od része elesett vagy megsebesült; azonkívül 4000 ember fogságba került; ekkor még 3000 ember a hadsereghez csatlakozik, de ez új vereséget szenved, melyben a katonák 4-ed része harcra képtelenné lesz. Hány ember volt eredetileg a hadseregben, ha most még 18.000 ember marad meg?

22. Valaki 900 koronányi vagyonának egy részét kikölcsönözte 4-es kamatra, a másikat 5-ös kamatra; mindkét részből egyenlő jövedelmet húz. Mennyi a 4%-ra kikölcsönzött összeg?

23. Bizonyos mennyiségű lőporban 6 kg-mal több salétrom van mint amennyi a lőpor egész súlyának fele, kén 5 kg-mal kevesebb az egész súly harmadánál, szén végre 3 kg-mal kevesebb az egész súly negyedénél. Hány kilogramm salétrom, kén és szén van a lőporban?

24. Ha minden 1000 koronánál kisebb jövedelemtől e jövedelemnek $\frac{7}{240}$ -ed része fizetendő mint adó, továbbá minden 1000 koronánál nagyobb jövedelemtől e jövedelemnek $\frac{1}{20}$ -ad része, ha továbbá egy

község 5.000.000 K utáni jövedelemadója kitesz 187.500 koronát; ez adónak minő része származik 1000 K-nál kisebb jövedelmektől?

25. Valamely árucikk métermázsájáért 3 K vám fizetendő; a vámot leszállítják, ennek következtében az árucikkból fogyasztott mennyiség felével nagyobbodik, de a vámjövedelem $\frac{1}{3}$ -dal kisebb lesz. Mennyivel szállították le a vámot?

26. Egy hajó 4 mérföldet tesz meg minden órában, egy másik hajónak, mely még 9 mérfölddel hátra van, gyorsasága 5 mérföld óránként; hány óra múlva éri el egyik hajó a másikat?

27. Valaki pénzt kölcsönzött ki 6-os kamatra, 10 év alatt az ettől húzott jövedelem 120 koronával volt kevesebb a kikölcsönzött tőkénél. Mennyi volt ez?

28. Egy vízmedence két cső által tölthető meg. Ha mindkettőt

kinyitom, 12 perc alatt telik meg, ellenben 20 perc alatt telik meg, ha csak egyiket nyitom ki. Mennyi idő kell, ha csak a másik cső lesz kinyitva? *Megoldás.* A másik csővön át megtelik a kád x perc alatt;

1 perc alatt az első csővön át megtelik a kád $\frac{1}{20}$ része, a második csővön át $\frac{1}{x}$ része, mindakettőn át $\frac{1}{12}$ része;

tehát:

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{x} = \frac{1}{12}.$$

29. Egy medencébe két cső nyílik. Az első megtölti $4\frac{1}{2}$, a másik 6 óra alatt; azonkívül van a medencének egy eresze, melyen át a töltött medence vize 5 óra alatt kiömlik. Ha mindakét cső és az eresze is ki van nyitva, mennyi idő kell a medence megtöltésére?

30. A fél annyi munkát végez mint B , B fél annyit mint C ; mind a 3 együtt 24 nap alatt végez egy munkával; meddig tartott volna a munka, ha A vagy B vagy C egymaga dolgozott volna?

Megoldás menete: C legtöbbet dolgozik, tehát leghamarabb végezné el a munkát. Mondjuk, hogy C elkészül vele x nap alatt, akkor B elkészül $2x$ nap alatt és A $4x$ nap alatt.

C elkészíti tehát naponta a munka $\frac{1}{x}$ részét, B az $\frac{1}{2x}$ -ed részét és A az $\frac{1}{4x}$ -ed részét; együttesen pedig (minthogy 24 nap alatt elkészülnek) $\frac{1}{24}$ részét; tehát:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x} = \frac{1}{24}.$$

31. A és B egykorú; de ha A 36 évvel volna idősebb, a B pedig 52 évvel, A kora B -ének $\frac{3}{4}$ -e volna. Hány évesek?

32. 2000 K úgy lesz fölosztva A és B közt, hogy minden 16 K-ból A 7-et kap, B pedig 9-et; mennyi jut mindegyiknek?

33. Egy munkás napibére 2 K 40 fillér és azonkívül ellátást is kap; de ha nem dolgozik, aznap az ellátásért 1 K 20 fillért kell fizetnie. 48 nap után 50 K 40 fillért kap mindössze. Hány napon át dolgozott ebben az időben?

34. A száz két részre osztandó, úgy hogy e két rész különbségének négyzete 2000-rel nagyobb legyen, mint a kisebb rész kétszeresének négyzete,

35. A a B -től 5 koronát nyer, és ekkor ugyanannyi pénze van mint B -nek. De B ezután visszanyeri a pénzét és még 5 koronát; és ekkor 5-ször annyi pénze van mint A -nak. Mennyiye volt mindegyiknek a játék kezdetekor? (A játék elején A -nak x K-ja van. B -től nyer 5 K-t, tehát lesz neki $x+5$ K-ja. B -nek most, miután már 5 K-át vesztett, szintén ennyije van, tehát a játék elején 5 K-val többje, azaz $x+10$ K-ja volt. A második játékban B visszanyeri ezt az eredeti pénzét és még 5 K-t, tehát $x+15$ K-ja lesz. A -nak pedig, a ki most 5 K veszteségben van, $x-5$ K-ja lesz. B pénze, az $x+15$, 5-ször akkora mint az $x-5$.)

36. Egy kereskedőnek kétféle kávéja van. Az olcsóbbat $3\frac{1}{2}$ K-ért adja kg-onként, a drágábbat 5 K-ért; hogy kell e két fajtát keverni, hogy a keveréket $4\frac{1}{2}$ K-ért adhassa?

37. Egy kereskedő a posztó méterjét 3 K 30 fillérjével vette, azután az egésznek egy harmadát eladta 4 K 80 fillérjével, egy negyedét 4 K 40 fillérjével, a többit végre 4 K-jával. Az egész posztón 128 K-t nyert. Hány méter volt a posztó?

38. Két ember, A és B , 50 napon át egyenlő feltételek mellett volt munkára fogadva. Mindegyik naponként $2\frac{1}{2}$ K-t kapott; de A naponként $\frac{1}{2}$ K-val kevesebbet költött mint B , és így az 50 nap multával A kétszer annyit takarított meg mint B . Mennyit költött A minden nap?

39. Két embernek ugyanaz a jövedelme. De az egyik megtakarítja ennek ötödrészét évenként; a másik pedig évenként 600 K-val többet költ mint az első, és így 3 év múlva 1200 K adóssága lett. Mennyi a jövedelmük?

40. Valaki végrendeletben vagyonának negyed részét jótékony célokra hagyja, még pedig három különböző rendeltetésű részben. Az első rész a vagyonnak 10-ed részét teszi; a második rész ennél 200 koronával kisebb; a harmadik ismét 200 koronával kisebb a másodiknál. Mennyi az egész vagyon?

41. Háromnegyed órával ezelőtt kétszer annyi perccel mult két óra mint ahány perc most hiányzik 4 órához. Hány óra van?

42. Mikor fedik egymást az óramutatók IV és V óra között? VIII és IX között?

43. Az órának két mutatója 12 óra és 1 óra között mikor alkot éppen derékszöget? Hát 4 és 5 óra között?

44. Valaki elutazó barátját el akarja kísérni. De csak a szabad órával rendelkezik. A kocsi, melyen barátja utazik, b km-t tesz meg minden órában; midőn az illető gyalog visszatér, csak c km utat tehet

egy órában. Hány km-re kísérheti barátját, hogy a óra múlva ismét otthon legyen? (Legyen $a=3\frac{3}{4}$ óra, $b=16$, $c=4$.)

45. 10% nyereséggel eladott áruért 5022·60 K-t kaptunk. Hány K a beszerzési érték? Hány K a nyereség?

46. 10% veszteséggel eladott árunkért 4109·40 K-t kaptunk. Hány K a beszerzési érték? Hány K a veszteség?

47. Az eladott árú súlyából leszámítunk 20%-ot tára fejében, a maradékból engedünk 2% pótsúlyt és így a fizetendő súly 3136 kg. Hány kg a bruttosúly?

48. Egy bizonyos tőke a kamattal együtt 8 hónap alatt 2912 korona lett; további 7 hónap múlva pedig 3010 korona. Mennyi volt eredetileg a tőke és minő a kamatláb? (x kamatlábbal 100 K tőke 8 hó alatt

$100 + \frac{8x}{12}$ K-ra nő; 15 hó alatt pedig $100 + \frac{15x}{12}$ -re. E kettő viszonya

$\frac{2912}{3010}$. Így kapjuk a kamatlábat.)

49. A és B -nek együtt 5000 korona vagyona volt. Ezzel üzletet kezdtek és 1600 koronát nyertek, melyből A -nak 320 koronával több járt mint B -nek. Az 5000 koronából mennyi volt A -é és mennyi B -é?

50. A vásárolt áru vételárából engedünk 15% rabottot, a maradékból levonunk 1% skontót és 2524·5 korona fizetendő. Mennyi volt a vételár?

51. Valamely kiadó egy kiadott mű netto árát 3·2 koronában állapítja meg; ha az eladásnál $33\frac{1}{3}\%$ rabottot akar engedélyezni, mennyi lesz a brutto ár?

52. Valamely árú $\frac{1}{4}$ részét 3%, $\frac{1}{2}$ -ét 2% nyereséggel és a többit 1% veszteséggel adták el. Az összes eladási ár 5694 korona. Mennyi a beszerzési ár?

53. 4%-os kamatláb mellett 3 hónapon át kamatozó betétünkért a kamattal együtt 4817·7 koronát kapunk. Mennyi a betét és mennyi a kamat?

54. Jelölje t a tőkét, p a percentet, k a kamatot, f a kamattal megnövesztett tőkét. Oldjuk meg a $k = \frac{tpe}{100}$ egyenletet sorra, t , p , e -re!

55. Oldjuk meg az $f = t + \frac{tpe}{100}$ egyenletet t , p , e -re!

*55a. Róka koma azt mondta a csizmadianak, hogy valahányszor átmegy a hídon, megkétszerezi a pénzét, ha neki előbb minden átmene-

*) Tréfás feladatok,

telért 24 fillért fizet. Mire a csizmadia harmadszor ment át a hídon, nem maradt egy fillére sem. Mennyije volt?

*55b. Egy halásztól azt kérdezték, hogy hány halat fogott. Erre ő így válaszolt: ha 5 annyit fogtam volna mint amennyit valósággal fogtam, akkor éppen annyival volna 99-nél több halam, mint amennyivel most 99-nél kevesebbem van. Hány halat fogott?

*55c. Egy fiú azt kérdezte atyjától, hogy hány éves? Az apa viszont ezt a kérdést tette: Én és te együtt 60 évet éltünk; én és atyám (a te nagyatyád) együtt 120 évet éltünk; te meg a nagyatyád együtt 86 évet éltetek. Hány évesek vagyunk mind a hárman?

*55d. *A* azt mondja *B*-nek: adj nekem egy diót, akkor éppen 2 annyim lesz mint neked. Erre *B* így felel: Inkább adj te nekem egyet, akkor legalább nekem is annyi dióm lesz, mint neked. Hány diója volt mindegyiknek?

*55e. Egy libatársaság uszkált a tavon. Egy szomszédbeli liba így szólt hozzájuk: Jó napot száz ludak! A tóban uszkálók egyike így felelt: Nem vagyunk mi százan, hanem ha még négyszer ennyien, meg fél ennyien lennénk mint ahányan most vagyunk s ha még te is hozzánk csatlakoznál, akkor volnánk 100-an. Hányan voltak?

55f.***) Hogy meddig élt Democharos,

Megtudod, ha kutatod:

Életének negyedrészen

Gyermekmódra mulatott,

Ötödrészét életének

Friss ifjúként élte át,

Harmadát, mint férfiú, ki

Gondolkozik, mélyre lát,

És amikor holló fürtit

Aggkor hava földte be;

Tizenhárom évet élt még

S úgy szállott a földbe le!

55g. Zsákkal terhelt számár, öszvér

Egymás mellett mendegéle,

S hogy a számár nyögni kezdett,

*) Tréfás feladatok.

**) E hat verses számtani feladat az időszámításunk kezdetéiből eredő görög epigramma-gyűjteményből való. A fordítást *Roboz A.* tanár úr végezte.

Szóba állt a társa véle :
 »Mit nyögsz, lelkem, lánymódjára ?
 Ha a teher nyomja vállad :
 Adj egy mázsát ... s akkor nálam
 Kétszer annyi lesz mint nálad.
 S ha egy mázsát te vennél át,
 Egyenlő nagy terhünk lenne ...«

Nosza mondd meg : mennyit vittek,
 Nem csalódsz-e vajjon benne ?

55h. Ha erre jársz, ejts egy könnyüt értünk,
 Kik a sírba váratlanul tértünk.
 Antiochus lakomáját ettük,
 Midőn Isten büntetését vettük ...
 Ránk dült a ház, Antiochus háza,
 Vég lakománk így változott gyászra ...
 Hogy számunkról tudomásod légyen :
 Tegeáták nem voltak csak négyen,
 Tizenkettő Messinából jött el,
 Argos város is szerepelt öttel.
 S míg mindnyájunk fele számát : Spárta város szülte,
 Athén csak az ötödrésznek egy ötödét küldte,
 Végül tudd meg : Antiochus vélünk szállott sírba
 S Korinth város jó Hylasát gyászolja meg sírva ...

55i. Pythagoras, múzsák fia,
 Tudósoknak elseje !
 Mondd meg nekem, hány tanulót
 Rejt háznak belseje
 S hány vív harcot, hol a kardok
 Kárba vesznek merőben,
 Hol az észben bízhatunk csak,
 Nem pedig az erőben ! ?

Halljad hát, oh Polykrates
 S jól figyeld meg beszédem,
 Csak a számok tudománya

Jár *felének* eszében,
Negyedének a természet,
 Mely előtte terül el
 S *egyhetede* bölcs módjára
 Hallgatásba merül el,
Három végre asszony köztük
 S ennél többen nincsenek,
 Adja ég, hogy nemzetünkre
 Ragyogó fényt hintsenek !

55j. Négy szökőkút áll a téren,
 Vizet szórnak mind a négyen.
 Medencéjük elsejüktől
 Egy nap alatt megtelik,
 Ha a másik csapja nyitva,
 Már két nap is eltelik,
 Harmadiknak három nap kell,
 Negyediknek négy nap is,
 Mennyi idő kell vaj' akkor,
 Hogyha nyitva négy csap is ?

55k. Ércoroszlán vagyok, leszek,
 Nem bántanak földi gondok,
 Jó kedvemben két szememen,
 Jobb talpamon vizet ontok.
 Szám is így tesz... s hűvös árnál
 Pihennél, ha erre járnál !

Jobbszemem a vízmedencét
 Két nap alatt tölti tele,
 Három nap kell, hogyha vizét
 Másik szemem önti bele,
 Míg ha nyitva talpam marad,
 Színig tele négy nap alatt.

Ám a számnak ez is sok már
 S hat órának leteltével,
 Úgy megtölti, hogy már benne
 Egyetlen egy csepp se fér el...

Már most mondd meg: vízmedencém
 Mikor leszen színig tele,
 Hogyha talpam, szám és szemem
 Együtt ontja vizét bele?

56. Adott számot oly két részre bontsunk, melyeknek adott különbségük van. (Legyen az adott szám a , az adott különbség d).

57. Adott számot bontsunk két oly részre, melyeknek adott viszonyuk van (azaz az egyik rész pl. c -szer akkora legyen mint a másik).

58. Adott számot bontsunk fel két olyan részre, melyek közül az egyik egy megadott számmal nagyobb legyen mint a másiknak egy bizonyos többszöröse (pl.: c -szerese).

59. Két szám keresendő, melyeknek adott különbségük és adott viszonyuk van.

60. Adott számot két részre bontsunk úgy, hogy az egyiknek bizonyos része a másiknak bizonyos — de más — részével együtt megadott összeget adjon.

61. Adott számot úgy bontsunk két részre, hogy az egyiknek bizonyos része a másiknak bizonyos részénél megadott számmal nagyobb legyen.

62. Van egy szám. Ha ebből két különböző, megadott számot kivonunk, a keletkező maradékoknak megadott viszonyuk van. Melyik ez a szám?

63. Két megadott számhoz olyan számot kell adnunk, hogy a keletkező összegeknek megadott viszonyuk legyen.

64. Két adott számból olyan számot kell elvonni, hogy a keletkező maradékoknak megadott viszonyuk legyen.

65. Adva van 2 szám. Az egyikből egy számot el kell venni, a másikhoz meg ugyanezt hozzá kell adni, hogy a keletkező két szám viszonya megadott szám legyen.

66. Adva van 2 szám. Melyik az a szám, mely azzal a tulajdonsággal bír, hogy ha a megadott első számot hozzáadjuk, a másodikat pedig kivonjuk, az így keletkező két szám adott viszonyban van?

67. Valamely adott számot kétszer kell két részre bontani úgy, hogy a második felbontás első része az első felbontás első részéhez és a második felbontás második része az első felbontás második részéhez megadott (különböző) viszonyokban legyen. [Az adott szám legyen a , az egyik felbontás: x , $a-x$. Ha a megadott viszonyszámok c és d , akkor a második felbontás: cx , $d(a-x)$.]

68. Olvassuk el a következő egyenleteket: $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = x - 2$.
(Igy: Van egy szám. Ha feléből a harmadrészét kivonjuk, a maradék 2-vel kisebb, mint a szám maga) $3x + \frac{x}{2} = 2x + 3$ és oldjuk meg ez egyenleteket!

69. Olvassuk el ezeket is: $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = x + d$, $a(x-b)+b =$
 $= x-c$ és oldjuk meg!

70. Végül ezeket olvassuk el: $\frac{x-a}{b} + \frac{x-c}{d} = x$, $\frac{a-x}{b} - \frac{c-x}{d} =$
 $= x-e$ és oldjuk meg!

51. **Egyenlőtlenségek.** Ha a nagyobb b -nél, azt így írhatjuk fel:

$$1. a > b \quad 2. b < a.$$

Az elsőt így olvassuk: a nagyobb b -nél; a másodikat, ami vele egyenlő jelentésű, így: b kisebb a -nál. Igy pl.: $9 > 7$, $5 < 8$. A negatív számokat mind a 0-nál (tehát a pozitív számoknál is) kisebbeknek tekintjük. Igy: $-3 < 0$, mert hiszen -3 -hoz még 3-at hozzá kell adnunk, hogy 0 legyen.

A negatív számok közül a kisebb *abszolút értékűt* *) nagyobb-nak mondjuk. Igy pl.: $-2 > -5$, mert hiszen a -5 -höz még 3-at kell adnunk, hogy -2 legyen.

Az egyenlőtlenségekkel is lehet olynemű változtatásokat eszközölnünk, mint az egyenlőségekkel. Igy: ha az egyenlőtlenség mindkét oldalához egyenlőket adunk, a nyert számok megint egyenlőtlenek lesznek és pedig a nagyobbikból nagyobb származik, vagyis az egyenlőtlenség jele megmarad. Igy pl. ha:

$$a > b$$

és mindkét oldalhoz c -t adunk, azt kapjuk, hogy

$$a+c > b+c.$$

Éppen így, ha az egyenlőtlenség mindkét oldalából egyenlőket elveszünk, akkor is megmarad az egyenlőtlenség jele. Ha

$$a > b$$

akkor

$$a-c > b-c$$

*) -5 abs. értéke 5, $-a$ abs. értéke a ,

Ha mindkét oldalon szorzunk vagy osztunk egyenlő számokkal, akkor már óvatosaknak kell lennünk; mert az egyenlőtlenség jele csak akkor tartható meg, ha pozitív számmal szoroztunk (vagy osztottunk). Így pl. ha:

$$a > b$$

és c pozitív szám, akkor

$$ac > bc \text{ és } \frac{a}{c} > \frac{b}{c},$$

de ha negatív számmal szorzunk, akkor az egyenlőtlenség jele megváltozik. Így pl.:

$$6 > 5$$

és ha mindkét oldalon pl. -2 -vel szorzunk, ebből:

$$-12 < -10$$

egyenlőtlenségre jutunk. Az egyenlőtlenség jele tehát az ellenkezőbe ment át.

Ha az összeadást és kivonást, valamint a szorzást és osztást egy műveletnek tekintjük, akkor tehát: *az egyenlőtlenség jele nem változik, ha mindkét oldalhoz egyenlőket adunk, vagy ha mindkét oldalon egyenlő pozitív számokkal szorzunk; ellenben megváltozik, ha mindkét oldalon egyenlő negatív számokkal szorzunk.*

Feladat. 1. Mi történik az egyenlőtlenséggel, ha különböző számokat adunk mindkét oldalhoz, vagy ha különböző számokkal szorzunk? Mely esetekre lehet általános szabályokat alkotni?

2. Szabad-e az egyenlőtlenség mindkét oldalán négyzetre emelni?
3. Szabad-e köbre emelni mindkét oldalon?

52. Egyenlőtlenségek megoldása. Sokszor előfordul, hogy oly számokat kell meghatároznunk, melyek valamely egyenlőtlenségnek tesznek eleget, szóval, hogy egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Az eljárás, amelyet az efajta feladatok megoldásánál követünk, ugyanolyan, mint az egyenlet megoldásánál követett eljárásunk. Így pl.: ha a következő feladatot kell megoldanunk: A naponta 10 koronát vesz be, B pedig 12-öt; de A -nak 100 korona, B -nek pedig 150 korona előzetes kiadása volt. Hány nap múlva haladja meg a B tiszta jöve-

delme az A -ét? Felelet: x nap alatt A tiszta jövedelme: $10x-100$, B -é pedig $12x-150$. Kell tehát, hogy:

$$12x-150 > 10x-100$$

legyen. Adjunk mindkét oldalhoz 150-et és vonjunk le $10x$ -et. Ebből ered:

$$2x > 50$$

és ha mindkét oldalon 2-vel osztunk:

$$x > 25$$

tehát 25 nap elteltével már B -nek a tiszta jövedelme felülmúlja az A -ét.

Oldjuk meg ezt az egyenlőtlenséget:

$$3x-5 > 5x-12$$

Ebből, ha $5x$ -et kivonunk mindkét oldalon és 5-öt hozzáadunk:

$$-2x > -7$$

és ha -1 -gyel szorzunk mindkét oldalon:

$$2x < 7$$

vagyis

$$x < 3\frac{1}{2}.$$

53. Arány és aránypár. Az arányok- és aránypároknak a számtanban igen fontos szerepük van, mert a legtöbb feladat, melyet ott meg tudtunk oldani, az aránypárok alkalmazását követeli. De ha e feladatok során áttekintünk, csakhamar észrevevesszük, hogy az elsőfokú egyenlet sokkal egyszerűbb és könnyebb (mert természetesebb) eljárást nyújt e feladatok megoldására mint aminőkkel a számtan rendelkezett. Az algebrában az aránypárok helyébe sokkal általánosabb egyenletek lépnek, melyek amazokat mint egy igen speciális példát, magukban foglalják.

Két szám mértani aránya alatt e számok hányadosát értjük, pl.: 6 és 3 mértani aránya $6:3=2$. *Négy szám mértani aránypárt (proportio) alkot*, ha az első kettőnek hányadosa

egyenlő az utolsó kettőével. Eszerint a, b, c, d mértani aránypárt alkot, ha

$$a : b = c : d \dots\dots\dots 1.$$

amit így is írhatunk $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, és amelyből bd -vel való szorzás által az

$$ad = bc \dots\dots\dots 2.$$

alakot nyerjük.

Ha még, mint szokásos, az a -t és d -t *kültagoknak*, b -t és c -t *beltagoknak* nevezzük, ezt úgy is lehet kimondani, hogy *minden mértani aránypárban a kültagok és beltagok szorzata egyenlő*.

Megfordítva, ha $ad = bc$, fönnáll a következő aránylat :

$$a : b = c : d.$$

Ha az a, b, c, d mennyiségek egyikét ismeretlennek vesszük, az aránypár átmegy az elsőfokú egyenlet egyik legegyszerűbb alakjába s ezzel egyúttal megmutattuk, hogy minden, aránypárok segítségével megoldható számtani feladat elsőfokú egyenlőre vezet.

54. Az aránypárok átalakítása. Minthogy az

$$ad = bc$$

alakban, mely a hozzátartozó aránypárt értelmezi, a szorzók sorrendjét a két oldalon fölcserélhetjük egymással, ebből az egy alakból négy aránypárt nyerünk, mely a következőkben össze van állítva, úgy hogy mindegyik elé a szorzatok közt fönnálló egyenlőséget írjuk a megfelelő alakban.

$$\begin{array}{llll} \text{Igy az } ad = bc \text{ egyenletből nyerjük, hogy : } a : b = c : d, \\ \text{» » } da = bc \text{ » » » } d : b = c : a, \\ \text{» » } da = cb \text{ » » » } d : c = b : a, \dots\dots\dots 3. \\ \text{» » } ad = cb \text{ » » » } a : c = b : d. \end{array}$$

E képletek egyenlőségét úgy is szokás kimondani, hogy *szabad minden aránypárban a kül- vagy beltagokat egymással fölcserélni*. Új 4 aránylatot nyerünk végre, ha, amit természetesen szintén szabad tenni, az *egyenlőség jelének két oldalán álló hányadosokat fölcseréljük*, ekkor :

$$\begin{array}{ll} c : d = a : b, & c : a = d : b, \\ b : a = d : c, & b : d = a : c. \dots\dots\dots 4. \end{array}$$

Továbbá szabad a két egyenlő arány (vagyis hányados) első tagját (a számlálót) mindkét oldalon ugyanazzal a számmal szorozni; vagy pedig a két második tagot (a nevezőket). Ha ugyanis az $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ egyenlet mindkét oldalát n -nel szorozzuk, vagy n -nel osztjuk, akkor az

$$a : b = c : d$$

aránypárból ezek következnek:

$$na : b = nc : d \text{ és } a : nb = c : nd \dots\dots\dots 5.$$

Ha az alapul fölvetett aránypárt

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

alakban írjuk és mindkét oldalon az egységet hozzáadjuk, vagy levonjuk, lesz:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \text{ és } \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1,$$

összevonva e kifejezéseket:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \text{ és } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d},$$

vagy aránypár alakjában írva:

$$(a+b) : b = (c+d) : d \text{ és } (a-b) : b = (c-d) : d \dots\dots 6.$$

Fejezd ki szavakkal ezen egyenletekben foglalt állításokat!

55. Több aránypár összetétele. Legyen adva e két aránypár

$$a : b = c : d$$

$$m : n = p : q$$

akkor az egymás alatt álló egyenlő mennyiségek szorzása egyenlőt ad, s a szorzást úgy végezhetjük, hogy a számlálókat szorozzuk a számlálókkal, a nevezőket a nevezőkkel. De ez annyit jelent, hogy két aránypárban a megfelelő tagokat szorozva, ismét helyes aránypárt nyerünk. Ez:

$$am : bn = cp : dq \dots\dots\dots 7.$$

Éppen így mutatható meg, hogy két aránypárban a megfelelő tagokat egymással elosztva, szintén helyes aránypárt nyerünk.

56. Az aránypárok alkalmazása.

1. Példa. Ha a kg valamely áruból m koronába kerül, b kg hány koronába kerül?

Ahányszor a kg-ct veszünk, annyszor m koronát fizetünk ; tehát ahányszor a kg megvan a b kg.-ban, annyszor van meg m korona, vagyis az a kg ára, az x koronában. Azaz :

$$b : a = x : m.$$

$$\text{Ebből : } ax = bm, \text{ vagyis } x = \frac{bm}{a}.$$

Igy kell eljárunk minden esetben, amikor a szóban forgó két mennyiség között *egyenés arányosság* van, vagyis mikor a két mennyiség egymással olyan összefüggésben van, hogy ha az egyik 2-szer, 3-szor, 4-szer stb. akkorává lesz, a másik is 2-szer, 3-szor, 4-szer stb. akkorává lesz, vagy ha az egyik 2, 3, 4 stb. szerte kisebbé lesz (pontosabban $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ stb. akkora lesz), a másik mennyisége is 2, 3, 4 stb. szerte kisebbé válik.

2. Példa. *Ha a számú munkás elkészül valamely munkával m nap alatt, hány nap alatt készül el b számú munkás (egyenlő munkaerőt és egyenlő körülményeket téve fel) ?*

A munkások száma arányos az egy napi munka nagyságával, mert kétszer annyi munkás 2-szer annyi munkát végez stb. Itt tehát ki kell számítanunk az 1 napi munkát. Ha a munkás m nap alatt készül el, akkor 1 nap alatt a munka $\frac{1}{m}$ -ed részét készítik el. Ha b munkás x nap alatt készül el, akkor 1 nap alatt azon munka $\frac{1}{x}$ -ed részét készítik el ; tehát, mivel a munkások száma épp oly arányban van egymáshoz, mint az ő napi munkájuk, azért

$$b : a = \frac{1}{x} : \frac{1}{m}.$$

Ha a második arányban a külső és belső tagot mx -el szorozzuk, akkor keletkezik :

$$b : a = m : x.$$

Látjuk tehát, hogy a munkások számának aránya = a megfelelő napok számainak *fordított* arányával. Ezért mondjuk, hogy a munkások száma a napok számával fordított arányban van. 2-szer, 3-szor stb. annyi munkás 2-szer, 3-szor stb. *kevesebb* nap alatt készül el.

Az aránypárok tanának közvetlen alkalmazása tehát csak olyan feladatoknál lehetséges, amelyekben a szóban forgó meny-

nyiségek *egyenes* vagy *fordított* arányban állanak egymáshoz ; ha azonban ilyen arányosság nincsen közöttük, akkor az aránypárok tana helyett az általánosabb egyenletek tana nyer alkalmazást.

Feladatok.

1. Valamely aránypár 3 első tagja : 4, 6, 8. Melyik a negyedik tag ?
2. Ha 3 kg valamely áruból a K-ba kerül, m kg. hogy ? 8 kg hogy ? $2+x$ kg hogy ? f koronáért hány kg-ot kapunk ? 10 K-ért hányat ?

3. Ha 5 munkás elkészül valamely munkával n nap alatt, a munkás hány nap alatt készül el ? 12 munkás hány nap alatt ? b nap alatt hány munkás készül el ? 10 nap alatt hány ?

4. Mutassuk meg, hogy, ha helyes ezen aránypár $a : b = c : d$, akkor helyesek a következők is :

a) $(a+b) : b = (c+d) : d$, b) $(a-b) : b = (c-d) : d$; c) $(a+b) : a = (c+d) : c$; d) $(a-b) : a = (c-d) : c$; e) $(a+b) : (a-b) = (c+d) : (c-d)$.

5. Valamely helyes aránypár tagjai sorban : a) $5+x$, $2+x$, $8+x$, $4+x$; Mekkora az x ? b) $x-3$, $x-6$, x , $x-4$. Mennyi az x ?

6. Minő arányosságban van : a munkások száma, a munkaidő, a munka nagysága és a munka ára közül kettő-kettő (egyenlő viszonyokat tételezve fel).

7. Mutassuk meg, hogy, ha $a : b = c : d$; akkor $a : b = \frac{1}{d} : \frac{1}{c}$ és $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = d : c$.

8. Ha a vételár a K, a nyereség $p\%$: mennyi az eladási ár ? Mennyi az eladási ár, ha a nyereség $q\%$. Mutassuk meg, hogy az eladási árak a százalékokkal nem arányosak.

9. Mennyire nő a K $p\%$ -kal n hó alatt ? m hó alatt ? Mutassuk meg, hogy a felnőtt tőke az idővel nem arányos.

10. Összekeverünk a filléres, b filléres árukat [egv-egy kg kerül a fillérbe, b fillérbe] oly arányban, mint $m : n$. Mennyibe kerül a keverék kg-ja ?

11. Összekeverünk a filléres, b filléres, c filléres árut oly arányban, mint $r : s : t$. Mennyibe kerül a keverék kg-ja ? Mennyit kell mindeikből kevernünk, ha K kg súlyú árut akarunk ?

12. a koronát el kell osztanunk 3 részre úgy, hogy az egyes részek oly arányban legyenek, mint $r : s : t$. Mennyi jut mindegyikre ?

13. a koronát el kell osztanunk 3 részre úgy, hogy a második rész r -szer akkora legyen mint az első, és a harmadik rész r -szer akkora legyen mint a második. Mekkora az egyes részek?

14. a koronát el kell osztani 3 részre, melyek oly arányban legyenek, mint $1 : \frac{r}{s} : \frac{t}{u}$.

15. K koronát három ember közt kell elosztani. B a koronáját többet kapjon mint A . C pedig kétszer annyit kapjon mint B , mennyi jut mindegyikre?

16. a filléres és b filléres árut úgy kell keverni, hogy a keverék kg-ja c filléres legyen. Milyen arányban történjék a keverés? [Igy okoskodjunk: 1 kg-hoz vegyünk az elsőből x kg-ot, a másodikból akkor $1-x$ kg. Az x kg ára ax fillér, az $(1-x)$ kg ára $(1-x)b$ fillér és a keverék ára c fillér.] Állapítsd meg ebből a keverés szabályát!

17. Kétféle kávét keverünk. Az egyik 2 korona 80 fillér; a másik 3 korona 30 filléres. A keverék 3 korona 20 filléres legyen. Minő arányban kell kevernünk?

18. a filléres és b filléres áruból K kg c filléres árut kell kevernünk. Mennyit vegyünk mindegyikből?

19. Huzzunk egy egyenest. Rajzoljunk rá egyenlő közöket és írjuk a végpontokra sorban: 0, 1, 2, 3, ... E pontokban emeljük merőlegeseket. Ha 1 kg ára b korona, akkor mérjük az 1-ben huzott merőlegesre b egységet; 2 kg ára $2b$ korona; mérjük a következő merőlegesre $2b$ nagyságu darabot s i. t. Mutassuk meg (vonalzóval), hogy a merőlegesek végpontjai olyan egyenesen vannak, a mely a 0 ponton is átmegy.

Hogyan lehetne-e rajz segítségével meghatározni, hogy pl: a kg. mennyibe kerül?

20. Rajzoljunk ismét egyenest és úgy mint előbb, jelöljük meg a 0, 1, 2, ... pontokat. Ha 1 munkás elkészül valamely munkával b nap alatt, az 1-ben emelt merőlegesre mérjük b egységet. 2 munkás $\frac{b}{2}$ nap alatt készül el; a 2 pontban emelt merőlegesre mérjük $\frac{b}{2}$ darabot s i. t. Próbáljuk a végpontokat egy szép görbével összekötni. Hogyan lehetne-e rajz segítségével meghatározni, hogy pl. a munkás hány nap alatt készül el?

IX. Az elsőfokú egyenletrendszer.

57. Egyenletrendszer két ismeretlennel. A múlt évben megoldottunk ilyen feladatot: *Valaki 900 K vagyonának egy részét kikölcsönözte 4%-os kamatra, a másik részét pedig 5%-os kamatra; mindkét részből egyenlő jövedelmet húz. Mekkoraak voltak ezek a részek?* Itt voltaképpen két részre kérdezzünk, két ismeretlenünk van. Legyen az egyik rész x K, a másik y K; x -ről és y -ről két dolgot tudunk:

1. Azt tudjuk róluk, hogy x K meg y K együtt 900 K.
2. Azt tudjuk, hogy x K 4%-os kamata éppen akkora, mint y K 5%-os kamata. Ezt a két állítást a következő egyszerű alakban írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}x + y &= 900 \\ \frac{4x}{100} &= \frac{5y}{100}.\end{aligned}$$

Látjuk, hogy e két ismeretlen meghatározására 2 egyenletünk van. Sokszor célszerűbb a feladatnak ilyen alakban való tárgyalása, azért megismerkedünk a két ismeretlenű egyenletrendszer megoldásával. Ebben az egyszerű esetben igen könnyen kiszámíthatjuk az x és y számértékeit. Megjegyezzük, hogy a második egyenlet erre az alakra hozható:

$$4x = 5y.$$

Az első egyenletből x -et kifejezzük:

$$x = 900 - y$$

és x ezen kifejezését a második egyenletbe helyettesítjük:

$$4(900 - y) = 5y.$$

Ez az egyenlet már csak egy ismeretlent tartalmaz. Ebből

$$y = \frac{3600}{9} = 400$$

és így:

$$x = 900 - 400 = 500$$

tehát: x , vagyis az első rész, 500 K, y pedig 400 K. Ennél az egyszerű példánál láttuk, hogy az adott egyenletekből olyan egyenletet kellett alkotnunk, mely csak egy ismeretlent tartalmaz. Ezt úgy értük el, hogy az első egyenletből x -et kifejeztük és e kifejezését a második egyenletbe helyettesítettük.

De természetesen a megoldásnak nem ez az egyedüli módja. Hiszen kifejezhettük volna az első egyenletből y -t is. Ekkor

$$y = 900 - x$$

és ha y ezen kifejezését a második egyenletbe helyettesítjük, akkor x -re nézve a következő egyenletet kapjuk:

$$4x = 5(900 - x),$$

melyből megint:

$$x = 500$$

és x ezen értékét az y kifejezésébe helyettesítve, kapjuk, hogy

$$y = 400.$$

Nem is kellett volna az első egyenletből x -et kifejeznünk, felhasználhattuk volna erre a második egyenletet is. Ebből

$$x = \frac{5y}{4}$$

és ha x ezen kifejezését az első egyenletbe helyettesítjük, akkor y -ra nézve a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{5y}{4} + y = 900$$

és ebből az ismeretes eljárással megkaptuk volna megint, hogy

$$y = 400.$$

Az eljárás tehát, amelyet az x és y meghatározására végezhettünk, négyféle is lehet, melyeket a következőkben foglaltunk össze:

Az egyik egyenletből kifejezzük az egyik ismeretlent (a másik ismeretlen által) és e kifejezést a második egyenletbe helyettesítjük. Ezáltal egy ismeretlent tartalmazó egyenletre jutunk, melyet az ismeretes módon megoldunk. Az ismeretlen így megtalált értékét a másik ismeretlen kifejezésébe helyettesítjük.

Ezen egyszerű példa után oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$5x - 3y = 26$$

$$7x - 4y = 37.$$

Kövessük például ezt az utat: Fejezzük ki az első egyenletből x -et és helyettesítsük e kifejezést a második egyenletbe.

Az első egyenletből:

$$x = \frac{26 + 3y}{5}.$$

Ha ezt a második egyenletbe helyettesítjük, akkor a következő, csupán y -t tartalmazó egyenletre jutunk:

$$7\left(\frac{26 + 3y}{5}\right) - 4y = 37,$$

melyből a törtek eltávolítása és kellő összevonás után :

$$y=3.$$

Ha az y ezen számértékét az x kifejezésébe tesszük, akkor x -re a következő értéket kapjuk :

$$x=7$$

$x=7$ és $y=3$ tehát azok a számértékek, melyek az adott egyenletrendszert *kielégítik*. Ez azt jelenti, hogy ha x helyett 7-et és y helyett 3-at teszünk az adott két egyenletbe, akkor *azonos* egyenletekre jutunk :

$$5 \cdot 7 - 3 \cdot 3 = 26$$

$$7 \cdot 7 - 4 \cdot 3 = 37.$$

A megoldásnak ezt a módját *helyettesítő* módnak nevezzük. A lényege abban állott, hogy a két adott egyenletből helyettesítéssel állítottunk elő olyan egyenletet, mely csak az egyik ismeretlent tartalmazza. A két egyenletből az egyik ismeretlent helyettesítéssel *kiküszöböltük, elimináltuk*.

Ezt a kiküszöbölést még más módon is elvégezhetjük, amely némelykor könnyebben célhoz vezet.

58. Az összehasonlítás módja. Az összehasonlítás módjának megismertetése végett oldjuk meg a következő egyenlet-rendszert :

$$3x - 4y = 2$$

$$7x - 9y = 7.$$

Az első egyenletből :

$$x = \frac{2 + 4y}{3}.$$

A másodikból is kifejezzük x -et :

$$x = \frac{7 + 9y}{7},$$

y -nak olyan számértékének kell lennie, hogy x -nek mindkét egyenletből nyert értékei egyenlők legyenek. Vagyis kell, hogy :

$$\frac{2 + 4y}{3} = \frac{7 + 9y}{7}$$

legyen. Ez az egyenlet csakis y -t tartalmazza. Ebből az ismeretes módon y kiszámítható :

$$y=7$$

y -nak ezen számértékét x -nek akármelyik kifejezésébe behelyettesítjük, miből :

$$x=10$$

származik. Ez az eljárás tehát abban áll, hogy az egyik ismeretlent mindkét egyenletből kifejezzük és e két kifejezés egyenlővé tételével a másik ismeretlenre egyenletet kapunk.

Feladat. Küszöbölje ki a tanuló a két egyenletből y -t összehasonlítással.

59. Egyenlő együtthatók módszere. Némelykor még sokkal egyszerűbben küszöbölhetjük ki az egyik ismeretlent. Így pl. ha a következő egyenletrendszert kell megoldanunk :

$$7x - 3y = 44$$

$$7x - 8y = 59.$$

Közvetlenül látjuk, hogy x -et azonnal elimináltuk, ha ezen egyenletek megfelelő oldalait egymásból kivonjuk. Ekkor ugyanis

$$5y = -15.$$

egyenletre jutunk, mely az x -et már nem tartalmazza. Ebből

$$y = -3;$$

x számértékét megkapjuk, ha y ezen értékét bármelyik adott egyenletbe helyettesítjük :

$$7x + 9 = 44$$

és ebből

$$x = 5.$$

Természetesen itt azért értünk oly könnyen célt, mert mindkét egyenletben x -nek ugyanaz volt az együtthatója ; de minden más esetben is úgy alakíthatjuk át az egyenleteket, hogy az egyik ismeretlennek mindkét egyenletben egyenlő együtthatója legyen. Így pl., ha a következő egyenletrendszert kell megoldaniunk :

$$3x + 4y = 43$$

$$5x + 6y = 67,$$

akkor x kiküszöbölése végett előbb azt kell elérnünk, hogy együtthatója mindkét egyenletben egyenlő legyen. Ezt pedig elérjük azáltal, ha az első egyenlet mindkét oldalát 5-tel, a másodikét 3-mal megszorozzuk. Ekkor ugyanis mindkét egyenletben az x együtthatója 15 lesz. A két egyenletből ezeket az új egyenleteket kapjuk :

$$15x + 20y = 215$$

$$15x + 18y = 201$$

és ha most a megfelelő oldalakat egymásból kivonjuk :

$$2y = 14,$$

miből $y=7$. Ha y ezen értékét egyik egyenletbe helyettesítjük, akkor x kiszámítható. x -t azonban függetlenül is meghatározhatjuk. Evégből a két egyenletből y -t elimináljuk. Hogy ezt elérhessük, a két egyenletet úgy kell átalakítanunk, hogy y együtthatója mindkét egyenletben egyenlő legyen. Legcélszerűbb lesz a két egyenletet úgy átalakítani, hogy e közös együttható 4 és 6 *legkisebb közös többszese*: 12 legyen. Evégből az első egyenlet mindkét oldalát 3-mal, a másodikét 2-vel szorozzuk. A két egyenletből lesz:

$$9x + 12y = 129$$

$$10x + 12y = 134$$

és ha ezen egyenletek megfelelő oldalait egymásból kivonjuk (a másodikból az első)

$$x = 5\text{-re}$$

jutunk. Az adott egyenletrendszer megoldása: $x=5$, $y=7$.

60. Kivételes eset. *Kivételes esettel van dolgunk, ha az x kiküszöbölése által nyert egyenletből y is kiesik.* Legyen például:

$$12x + 15y = 3.$$

$$28x + 35y = 7.$$

Akkor az x kiküszöbölése pl. összehasonlítás által

$$[x] = \frac{3 - 15y}{12} = \frac{7 - 35y}{28}$$

egyenlethez vezet, mely a törtek eltávolítása után

$$7(3 - 15y) = 3(7 - 35y),$$

vagy végleges rendezés után: $0=0$. Ez a feladat tehát *határozatlan*.

Ellenben a következő egyenletrendszer

$$2x + 7y = 9$$

$$4x + 14y = 13$$

lehetetlen; mert ha ezekből x -et elimináljuk, absurdumra jutunk, Ha ugyanis x -nek az első egyenletből vett értékét

$$x = \frac{9 - 7y}{2}$$

a másodikba betesszük, lesz:

$$2(9 - 7y) + 14y = 13,$$

azaz rendezés után:

$$5 = 0,$$

ami absurdum, vagyis az adott két egyenlet együttesen nem állhat fenn, egymással *ellentmondanak*.

Feladatok.

Az ismeretlenek értékei meghatározandók a következő egyenlet-rendszerekből:

- | | |
|--|--|
| 1. $x+y=17$; | $x-y=3$. |
| 2. $3x-4y=2$; | $7x-9y=7$. |
| 3. $7x-5y=24$; | $4x-3y=11$. |
| 4. $3x+2y=32$; | $20x-3y=1$. |
| 5. $7x+5y=60$; | $13x-11y=10$. |
| 6. $6x-7y=42$; | $7x-6y=75$. |
| 7. $10x+9y=290$; | $12x-11y=130$. |
| 8. $21y-20x=165$; | $77y-30x=295$. |
| 9. $7y-5x=43$; | $9y-11x=69$. |
| 10. $8x+21y=33$; | $6x-35y=177$. |
| 11. $11x+10y=14$; | $5x-7y=41$. |
| 12. $16x+17y=500$; | $17x-3y=110$. |
| 13. $\frac{x}{2} + 3y=7$; | $\frac{4x-2}{5} = 3y-4$. |
| 14. $6x+5y=1$; | $7x-4y=8\frac{1}{2}$. |
| 15. $2x - \frac{2+y}{5} = 21$; | $\frac{x-4}{6} - 4y-29=0$. |
| 16. $13 - \frac{3x}{19} - 5y=0$; | $33-2x + \frac{7y-4}{2} = 0$. |
| 17. $\frac{x+y}{3} + \frac{y-x}{2} = 9$; | $\frac{x}{2} + \frac{x+y}{9} = 5$. |
| 18. $\frac{x+y}{3} + x=15$; | $\frac{x-y}{5} + y=6$. |
| 19. $\frac{2x}{3} - \frac{3y}{2} = 16\frac{1}{6}$; | $\frac{3x}{2} + \frac{2y}{3} = 16\frac{1}{6}$. |
| 20. $\frac{2x+3y}{5} = 10 - \frac{y}{3}$; | $\frac{4y-3x}{6} = \frac{3x}{4} + 1$. |
| 21. $x + \frac{1}{2}(3x-y-1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(y-1)$; | $\frac{1}{5}(4x+3y) = \frac{7y}{10} + 2$. |
| 22. $\frac{3x-5y}{2} + 3 = \frac{2x+y}{5}$; | $8 - \frac{x-2y}{4} = \frac{x}{2} + \frac{y}{3}$. |

$$23. \quad \frac{3x}{10} + \frac{y}{15} - \frac{4}{9} = \frac{x}{12} + \frac{y}{18}; \quad 2x - \frac{8}{3} = \frac{x}{12} + \frac{y}{15} + \frac{11}{10}.$$

$$24. \quad \frac{4x-3y-7}{5} = \frac{3x}{10} + \frac{2y}{15} - \frac{5}{6}; \quad \frac{x}{2} - \frac{y+1}{3} + \frac{3y}{20} = \frac{x}{6} - \frac{x+y}{15} + \frac{11}{10}$$

$$25. \quad \frac{\frac{2x}{3} - \frac{5y}{12}}{\frac{7}{4}} - \frac{\frac{3x}{2} - \frac{y}{3}}{\frac{23}{2}} = 2; \quad \frac{x-y}{x+y} = \frac{1}{5}.$$

$$26. \quad 3x+9y=2.4;$$

$$0.21x-0.06y=0.03.$$

$$27. \quad 0.3x+0.125=y-6;$$

$$3x-0.5y=288-0.25y.$$

$$28. \quad 0.08x-0.21y=0.33;$$

$$0.12x+0.7y=3.54.$$

$$29. \quad 4x+y=11;$$

$$\frac{y}{5x} = \frac{7x-y}{3x} - \frac{23}{15}.$$

$$30. \quad \frac{x + \frac{y}{2} - 3}{x-5} + 7 = 0;$$

$$\frac{3y-10(x-1)}{6} + \frac{x-y}{4} + 1 = 0.$$

61. Az együtthatók betűkből állanak. Az eddigi feladatokban a rendezés után az egyenleteknek minden egyes együtthatója adott szám volt; de világos, hogy a tárgyalás módja nem változik, ha az együtthatók betűkből állanak.

Csak egyre kell itt még figyelniünk. A kiküszöbölési egyenletben az x együtthatója is betűkből lévén összerakva, ennek eltűnése pedig a kivételes esetre vezetvén, megoldásunk általánosságban határozott ugyan, de vannak mindig az együtthatókat képező betűknek kivételes értékei, melyek mellett a feladat határozatlan vagy lehetetlen lesz.

1. Legyen pl. adva a következő egyenletrendszer:

$$a^2x + b^2y = c^2$$

$$ax + by = c.$$

Hogy az x -nek a két egyenletben egyenlő együtthatója legyen, szorozzunk a második egyenletben a -val. Lesz:

$$a^2x + aby = ac.$$

Most levonva az elsőből, lesz:

$$(b^2 - ab)y = c^2 - ac,$$

vagy:

$$b(b-a)y = c(c-a).$$

Ha $b=0$, vagy $b=a$, az y együtthatója zérus és a feladat határozatlan vagy lehetetlen (a c értéke szerint); minden más esetben :

$$y = \frac{c(c-a)}{b(b-a)}$$

és ekkor kiszámítható az x hozzá tartozó értéke pl. a második egyenletből :

$$x = \frac{c(c-b)}{a(a-b)}.$$

2. Második ily példának vegyük a két ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer legáltalánosabb alakját ;

$$ax+by=p$$

$$cx+dy=q.$$

mely a benne előforduló betűk kellő meghatározása után át-mehet bármely, számbeli együtthatókkal ellátott egyenletrendszerbe.

Az y kiküszöbölésére szorozzunk az első egyenletben d -vel, a másodikban b -vel. Lesz :

$$adx+bdy=pd$$

$$bcx+bdy=bq;$$

és a kivonás után :

$$(ad-bc)x=pd-bq. \quad \alpha)$$

A kivételes eset forog fenn, ha x együtthatója : $ad-bc=0$. Különben :

$$x = \frac{pd-bq}{ad-bc}.$$

Hasonlóképp nyerjük y -t, ha az első egyenletet c -vel, a másodikat a -val szorozzuk és kivonunk :

$$(ad-bc)y=qa-pc, \quad \beta)$$

és ha $ad-bc$ nem zérus :

$$y = \frac{qa-pc}{ad-bc}.$$

Ha $ad-bc=0$, ellenben $pd-bq$ és $qa-pc$ nem zérus, akkor (miként az α) alatti egyenletek mutatják), egyenleteink ellentmondást fejeznek ki ; határozatlan a feladat, ha $ad-bc=0$ és ezenkívül még $pd-bq=0$ és $pc-aq=0$, mert ekkor az α) és β) egyenletek mindkét oldalán 0 áll.

Az $ad-bc=0$ így is írható: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; a második egyenlet pedig így: $\frac{p}{q} = \frac{b}{d}$; a harmadik pedig: $\frac{p}{q} = \frac{a}{c}$, tehát az a, b, c, d, p, q számértékek között ilyen összefüggések vannak: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{p}{q}$.

Ha ezen egyenlő számokat pl. m -mel jelöljük, akkor $a=cm$, $b=dm$, $p=pm$; vagyis az első egyenletet úgy kapjuk a másodikból, ha ezt m -mel megszorozzuk. Voltaképpen tehát az ilyen esetben nem két egyenletünk van, hanem csak egy; a két egyenlet nem független egymástól. Ebben van az oka annak, hogy az ilyen esetben az egyenletrendszer nem oldható meg. Így pl., ha a két egyenlet: $12x-15y=27$, $8x-10y=18$, akkor az első egyenletet úgy állíthatjuk elő a másodikból, ha ez utóbbit $\frac{3}{2}$ -el szorozzuk.

Feladatok.

- | | |
|--|-----------------------------------|
| 1. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$; | $bx-ay=0$. |
| 2. $x+y=a+b$; | $bx+ay=2ab$. |
| 3. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; | $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$. |
| 4. $(a+c)x-by=bc$; | $x+y=a+b$. |
| 5. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c$; | $\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 0$. |
| 6. $a(x+y)+b(x-y)=1$; | $a(x-y)+b(x+y)=1$. |
| 7. $(a+b)x-(a-b)y=4ab$; | $(a-b)x+(a+b)y=2a^2-2b^2$. |
| 8. $(a+h)x+(b-h)y=c$; | $(b+k)x+(a-k)y=c$. |
| 9. $\frac{x}{b+c} + \frac{y}{a+c} = 2$; | $\frac{ax-by}{(a-b)c} = 1$. |
| 10. $\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2a$; | $\frac{x-y}{4ab} = 1$. |

62. Három egyenlet három ismeretlennel. Legyen pl. adva következő egyenletrendszer:

$$3x-4y+7z=8,$$

$$5x-y-3z=10,$$

$$2x+3y-8z=4,$$

és keressük az x, y, z értékeit, melyek mind a 3 egyenletet kielégítik.

Evégből az x -et kiküszöbölöm az 1. és 2., illetőleg az első és 3-ik egyenletből. De amit ekkor nyerek, az *két egyenlet, melyben csak két ismeretlen fordul elő: y és z* . Az y és z értékeit ezekből az előbbieket szerint kiszámíthatom; és ekkor bármelyik egyenlet szolgáltatja az x hozzávaló értékét, és így a kérdéses feladatot teljesen megoldottam.

Visszatérve most már a fölírt példára, végezzük pl. az x kiküszöbölését összehasonlítás által. Lesz az első és második egyenletből:

$$\frac{8 + 4y - 7z}{3} = \frac{10 + y + 3z}{5},$$

az első és harmadikból:

$$\frac{8 + 4y - 7z}{3} = \frac{4 - 3y + 8z}{2}.$$

Igy tehát a két egyenlet y és z számára rendezés után:

$$17y - 44z = -10$$

$$17y - 38z = -4$$

és ezekből:

$$y = 2; z = 1.$$

Ha y és z ezen értékeit bármelyik egyenletbe (pl. az elsőbe) behelyettesítjük, megkapjuk az x értékét:

$$x = 3.$$

Az egész eljárást most már általánosságban következőkép jellemezhetjük: *Két-két egyenletből kiküszöböljük az egyik ismeretlent. Ezáltal két egyenletet nyerünk, melyekben csak két ismeretlen foglaltatik. Meghatározásuk után a hátralévő ismeretlen értéke bármelyik egyenletből kiszámítható.*

Eszerint a három ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer megoldása azáltal történik, hogy egy két ismeretlent tartalmazó rendszer megoldására vezetjük vissza a feladatot, mely után még csak egy ismeretlent tartalmazó elsőfokú egyenlet gyökét kell meghatározni.

Világos, hogy itt is — épp úgy mint előbb — kivételes esetekkel találkozunk; ha ugyanis az a rendszer, melyben már

csak két ismeretlen foglaltatik, lehetetlen, vagy határozatlan, az eredeti is ilyen lesz.

Legyen pl. a megoldandó egyenletrendszer :

$$\begin{aligned} 7x - 5y + 3z &= 2, \\ 4x - 7y + z &= 5, \\ 10x - 3y + 5z &= 1, \end{aligned}$$

akkor az x kiküszöbölését az első és 2-ik, valamint a 2-ik és 3-ik egyenletből végezve lesz :

$$\begin{aligned} 29y + 5z &= -27, \\ 29y + 5z &= -13, \end{aligned}$$

mely egyenletekről könnyen látni, hogy egymásnak ellentmondanak, s így tehát az eredetileg adott rendszernek nincsen megoldása.

Az eljárás, melyet a megelőző cikkben a három ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer megoldására adtunk, a gyakorlatban igen sokféleképp változtatható. Tetszésünktől függ ugyanis, hogy melyik ismeretlent akarjuk kiküszöbölni, hogy melyik egyenlet segítségével, valamint végre az is, hogy magát a kiküszöbölést minő eljárás segítségével akarjuk végezni. Természetesen mindig azt az utat kell választanunk, mellyel célunkat lehető rövid számítás által érjük el; hogy melyik ez az út — arra a gyakorlat által szerzendő tapasztalat tanít meg legjobban.

Feladatok.

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| 1. $x + 3y + 2z = 11,$ | 2. $5x - 6y + 4z = 15,$ |
| $2x + y + 3z = 14,$ | $7x + 4y - 3z = 19,$ |
| $3x + 2y + z = 11,$ | $2x + y + 6z = 46.$ |
| 3. $4x - 5y + z = 6,$ | 4. $7x - 3y = 30,$ |
| $7x - 11y + 2z = 9,$ | $9y - 5z = 34,$ |
| $x + y + 3z = 12.$ | $x + y + z = 33.$ |
| 5. $3x + y - z = 17,$ | 6. $x + y - z = 5,$ |
| $5x - 3y + 2z = 10,$ | $3x - 5y - 7z = 75,$ |
| $7x - 4y + 5z = 3.$ | $9x + 11z + 10 = 0.$ |
| 7. $x + 2y + 3z = 6,$ | 8. $5x - 6y + 4z = 15,$ |
| $2x + 4y + 2z = 8.$ | $7x + 4y - 3z = 19,$ |
| $3x + 2y + 8z = 101.$ | $2x + y + 6z = 46.$ |

$$9. \frac{6y-4x}{3z-7} = 1,$$

$$\frac{5z-x}{2y-3z} = 1,$$

$$\frac{y-2z}{3y-2x} = 1.$$

$$10. \frac{3y-1}{4} = \frac{6z}{5} - \frac{x}{2} + \frac{9}{5},$$

$$\frac{5x}{4} + \frac{4z}{3} = y + \frac{5}{6},$$

$$\frac{3x+1}{7} - \frac{z}{14} + \frac{1}{6} = \frac{2z}{21} + \frac{y}{3}.$$

$$11. \frac{x+2y}{7} = \frac{3y+4z}{8} = \frac{5x+6z}{9}, \quad x+y-z=126.$$

Itt tekintetbe veendő, hogy az efféle sorozat $A=B=C$ két egyenletnek felel meg, t. i. csak rövidítése ennek: $A=B$ és $B=C$.

$$12. \frac{10x+4y-5z}{5} = \frac{4x+6y-3z}{9},$$

$$10x+4y-5z=4x+6y-3z-8,$$

$$\frac{10x+4y-5z}{10} + \frac{4x+6y-3z}{3} - \frac{x+y+z}{4} = 3.$$

$$13. ay+bx=c, \quad cx+az=b, \quad bz+cy=a.$$

Ebben a feladatban számok helyett betűk lépnek föl az ismeretlen mellett, de a számítás menete ezáltal nem változik, minthogy az x , y , z kivételével a többi előforduló betűt *adott* számértéknek kell tekintenünk. A számítás első részletei a következők:

Az első két egyenletből ki akarjuk küszöbölni az x -et. E célból szorozzuk az első egyenletben c -vel, a másodikban b -vel. Lesz:

$$acy+bcx=c^2,$$

$$bcx+abz=b^2,$$

és így tehát a kivonás után:

$$acy-abz=c^2-b^2.$$

Ez az egyenlet már csak y -t és z -t tartalmazza, épp úgy mint a fölirt 3-ik egyenlet. A kettőből tehát meghatározhatjuk y -t és z -t, s ú. t.

$$14. y+z=a, \quad z+x=b, \quad x+y=c.$$

$$15. x+y+z=a+b+c, \quad x+a=y+b=z+c.$$

$$16. y+z-x=a, \quad z+x-y=b, \quad x+y-z=c.$$

$$17. \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

$$18. \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{c} + \frac{z}{b} = 1,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1,$$

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} + \frac{z}{c} = 1.$$

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

19. $x+y+z=0,$

$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0.$

$bcx+cay+abz=1.$

21. $x-ay+a^2z=a^3,$

$x-by+b^2z=b^3,$

$x-cy+c^2z=c^3.$

20. $ax+by+cz=A,$

$a^2x+b^2y+c^2z=A^2,$

$a^3x+b^3y+c^3z=A^3.$

22. $x+y+z=a+b+c,$

$bx+cy+az=a^2+b^2+c^2,$

$cx+ay+bz=a^2+b^2+c^2.$

Ámbár nem tárgyaltuk az ismeretlenek meghatározására szolgáló eljárást több mint 3 ismeretlen esetében, mégis foglaljon még itt helyet néhány 4 ismeretlenre vonatkozó feladat. A szorgalmas tanuló könnyen eszközölheti megoldásukat, ha csak megkísérli az adott szabálynak újból való alkalmazását.

23. $v+x+y+z=14,$

$2v+x=2y+z-2,$

$3v-x+2y+2z=19,$

$\frac{v}{3} + \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{2} = 4.$

24. $7x-3y=1,$

$11z-7u=1,$

$4z-7y=1,$

$19x-3u=1.$

25. $3u-2y=2,$

$5x-7z=11,$

$2x+3y=39,$

$4y+3z=41.$

26. $2x-3y+2z=13,$

$4y+2z=14,$

$4u-2x=30,$

$5y+3u=32.$

27. Határozzuk meg a p és q számokat úgy, hogy ebben a szorzatban: $(x^2+px+q)(x^2+3x+5)$ az x^3 és x együtthatói 0-ok legyenek.

28. Határozzuk meg a p és q számokat úgy, hogy az

$(x^2+px+q)(x^2+ax+b)$ szorzatban az x^2 együtthatója 0 legyen és x együtthatója 1 legyen.

29. Határozzuk meg a p , q , r együtthatókat úgy, hogy az $(x^3+px^2+qx+r)(x^3+ax^2+bx+c)$ szorzatban az x^5 , x^3 és x együtthatói 0-ok legyenek.

63. Elsőfokú egyenletrendszerre vezető tárgyi feladatok.

Valamint az egy ismeretlent tartalmazó elsőfokú egyenlet, úgy az elsőfokú egyenletrendszer is számos, a legkülönbözőbb körökből vett feladatnak algebrai kifejezését adja. Itt is a feladat eredetileg szavakban fogalmazva lép föl és ekkor mindenekelőtt a feladatban jellemzett számviszonyokat ki kell fejezni egyenletek által. Itt is az első dolog az *egyenletrendszer föllállítása*. Ha a tanuló az egy ismeretlent tartalmazó egyenlet tárgyalása alkalmával ebben a kellő ügyességet már megszerezte, itt már alig lesz új nehézsége, sőt sokszor könnyebb

a feladat megoldása két vagy több ismeretlenű egyenlet segítségével, mint egy ismeretlenűvel.

Lássuk a megoldás menetét néhány példán :

1. *Valamely tört értéke $\frac{1}{2}$ lesz, ha a nevezőjét eggyel nagyobbítom ; ellenben $\frac{1}{3}$ lesz, ha számlálóját 3-mal kisebbítem ; melyik e tört ?*

Legyen az ismeretlen tört számlálója x , nevezője y ; akkor a feladatban foglalt adatok értelmében :

$$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{x-3}{y} = \frac{1}{3},$$

A törtek eltávolítása után :

$$2x = y + 1, \quad 3x - 9 = y;$$

rendezve :

$$2x - y = 1, \quad 3x - y = 9.$$

És ebből : $x=8$, $y=15$, s eszerint a keresett tört értéke $\frac{8}{15}$.

2. *Két szám összege : 231 ; ugyane számok különbsége : 79. Melyek ezek a számok ?*

Legyen a kisebb szám x , a nagyobb y ; akkor feladatunk állítja, hogy :

$$x + y = 231,$$

$$y - x = 79,$$

és ebből $x=76$, $y=155$, amivel a keresett számok meghatározása megtörtént.

3. *Ha valamely háromszögben az alapot 2 m-rel nagyobbítom, a magasságot pedig 3 m-rel, területe $14\frac{1}{2}$ m²-rel növekedett ; ha pedig az alapot 4 m-rel nagyobbítom és a magasságot 6 m-rel, akkor a terület növekedése 40 m²-t tesz ki ; mi volt az alap és magasság eredeti hossza ?*

Legyen az alap x , a magasság y méter, akkor a háromszög eredeti területe $\frac{xy}{2}$; ellenben az első változtatás esetében $\frac{(x+2)(y+3)}{2}$, a másodikban $\frac{(x+4)(y+6)}{2}$ a területe ; így tehát a következő két

egyenletet nyerjük :

$$\frac{(x+2)(y+3)}{2} - \frac{xy}{2} = \frac{29}{2},$$

$$\frac{(x+4)(y+6)}{2} - \frac{xy}{2} = 40.$$

Kettővel szorozva, a szorzatok kiszámítása és rendezése után :

$$2y+3x=23,$$

$$4y+6x=56,$$

Ezekből kiküszöböljük pl. az y -t, ha a 2-vel megszorozott első egyenletet a másodikból kivonjuk ; de amit ekkor nyerünk :

$$0=10$$

absurdum ; a feladat tehát *lehetetlenséget követel*. Olyan háromszög, aminőt a feladat kíván, nem létezik.

Ha a terület növekedését a második esetben 40 helyett 35 m^2 -re tesszük, a rendezett egyenletek ezek :

$$2y+3x=23,$$

$$4y+6x=46,$$

és itt a kiküszöbölés eredménye : $0=0$. Minden x és y értékpár, mely kielégíti az első egyenletet, identitássá teszi a másodikat is : hiszen itt közvetlenül látni, hogy az első egyenletből a másodikat nyerem, ha 2-vel szorzok.

Ebben az esetben a *feladat határozatlan* ; mert akár az alapot, akár a magasságot még tetszőlegesen lehet választani, és a másikat azután $2y+3x=23$ egyenletből meghatározni. Így legyen adva az alap x ;

akkor $y = \frac{23-3x}{2}$; ha pl. $x=5$, akkor $y=4$, ha $x=6$, $y=2\frac{1}{2}$, ha $x=7$,

$y=1$. De már $x=8$ -nál a feladat megint más okokból lehetetlen lesz ;

ekkor az egyenlet megoldása a rendes úton haladhat és lesz $y = \frac{23-24}{2}$

$= -\frac{1}{2}$, a nyert eredmény értelmezése azonban lehetetlenségre vezet,

mert y hosszegységek számát jelenti, és mint ilyen negatív nem lehet.

Ha végre a feladat föltételei közül a másodikat úgy változtatjuk, hogy az *alapnak 4 m-rel, a magasságnak pedig 7 m-rel való növebbítése a területet 4 m^2 -rel növeszti*, akkor teljesen meghatározott feladattal van dolgunk. Az egyenletek ugyanis

$$\frac{(x+2)(y+3)}{2} - \frac{xy}{2} = \frac{29}{2},$$

$$\frac{(x+4)(y+7)}{2} - \frac{xy}{2} = 40,$$

vagyis rendezve :

$$2y+3x=23,$$

$$4y+7x=52$$

és ebből $x=6m$, $y = \frac{5}{2} m$.

4. Valaki 12670 korona vagyonát végrendeletében úgy kívánja föl-
osztani 5 gyermeke és 3 testvére között, hogy az örökségi adó fejében fize-
endő összeg levonása után minden gyermek kétszer annyit kapjon mint
a testvérek. Az örökségi adó gyermeki rész után 1%, testvéri rész után 3%.
Mennyit kap mindegyik ?

Legyen az örökségi adó kifizetése előtt a gyermeki rész x K, a test-
véreké y K ; akkor :

$$x - \frac{x}{100} = 2 \left(y - \frac{3y}{100} \right),$$

$$5x+3y=12670.$$

Ha x -et a második egyenletből kiszámítjuk, lesz :

$$x=2534 - \frac{3y}{5}.$$

Ezt az első egyenletbe helyettesítve :

$$2534 - \frac{3y}{5} - 25 \cdot 34 + \frac{3y}{500} = 2y - \frac{6y}{100}.$$

Szorozva 500-zal :

$$1267000 - 300y - 12670 + 3y = 1000y - 20y.$$

$$1267y = 1254330 ;$$

és így $y=990$. Eszerint :

$$x = 2534 - \frac{2970}{5} = 1940.$$

És ekkor valóban az örökségi adót levonva :

$$x - \frac{x}{100} = 1920 \text{ K } 60 \text{ f}$$

$$y - \frac{3y}{100} = 960 \text{ K } 30 \text{ f},$$

ahol az első összeg a másodiknak kétszerese.

5. Valamely, a közönséges módon fölirt, 3 számjegyből álló számnak a következő tulajdonságai vannak: A három számjegy összege 13. Ha fölcserélem a százások és tízesek helyén álló számjegyeket, a szám értéke 270-nel növekszik. Ha a számjegyeket megfordított sorrendben írom, a szám értéke az eredetihez képest 396-tal nagyobb lett. Melyik e szám?

Legyenek a százások, tízesek, egyesek helyén álló számjegyek: x, y, z . Akkor a főlírt adatok értelmében:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 13, \\100y + 10x + z &= (100x + 10y + z) + 270, \\100z + 10y + x &= (100x + 10y + z) + 396.\end{aligned}$$

Rendezve:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 13, \\-90x + 90y &= 270, \\-99x + 99z &= 396,\end{aligned}$$

amelyekből $x=2, y=5, z=6$, a keresett szám tehát: 256.

6. Egy vízmedence megtöltése 3 csővön át történhetik. Ha kinyitom az első és másodikat, akkor a medence 70 perc alatt telik meg; 84 perc alatt, ha az első és harmadikat, és végre 140 perc alatt, ha a másodikat és harmadikat nyitom ki. Mennyi idő kell arra, hogy egy-egy csőből töltsen meg a medencét?

Legyen ez az idő az első, második, harmadik csőre x, y, z perc. Akkor egy perc alatt a 3 cső a medencének $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ -ed részét tölti meg. Ha tehát nyitva van az első és második cső 70 percig, ezalatt oly vízmennyiséget nyerek, mely a medencének $\frac{70}{x} + \frac{70}{y}$ részét tölti be. De ezzel megtelt a medence és így e szám az egység. Ennélfogva egyenleteink a következők:

$$\begin{aligned}\frac{70}{x} + \frac{70}{y} &= 1, \\ \frac{84}{x} + \frac{84}{z} &= 1, \\ \frac{140}{y} + \frac{140}{z} &= 1.\end{aligned}$$

Ha ezeket az egyenleteket rendezzük, a nyert egyenletek *nem elsőfokúak*, mert az ismeretlenek szorzatait is tartalmazzák. De ezt az akadályt könnyen legyőzhetjük, ha nem x, y, z -t, hanem

$\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ -et tekintjük kiszámítandó ismeretleneknek. Ennek jellemzésére legjobb új betűket bevezetni:

$$t = \frac{1}{x}, u = \frac{1}{y}, v = \frac{1}{z}$$

és világos, hogy ha majd t, u, v -t ismerjük, akkor értelmezésük folytán:

$$x = \frac{1}{t}, y = \frac{1}{u}, z = \frac{1}{v}$$

szintén ismeretesek lesznek. Egyenleteink az új ismeretlenek bevezetése után:

$$70t + 70u = 1,$$

$$84t + 84v = 1,$$

$$140u + 140v = 1.$$

Ha most már az első két egyenletből t -t kiküszöböljük, pl. úgy, hogy az első 6-tal, a másodikat 5-tel szorozzuk (mert 14 az együtthatók legnagyobb k. osztója) és levonjuk, lesz:

$$420u - 420v = 1.$$

Összeállítva az utolsó egyenlettel, ha pl. mindkettőből u -t határozzuk meg:

$$[u =] \frac{1 - 140v}{140} = \frac{1 + 420v}{420},$$

Ebből $v = \frac{1}{420}$, így tehát $u = \frac{1}{210}$ és $t = \frac{1}{105}$ és végre:

$$x = 105, y = 210, z = 420.$$

Látjuk e példákból, hogy az egyenletek fölállításánál a következő két lépést kell tennünk:

1. Első dolog az ismeretlenek megállapítása. Kikeressük ugyanis a feladatban előforduló mennyiségek közül azokat, melyeknek meghatározása maga után vonja a feladatban előforduló összes mennyiségek ismeretét. Ezek lesznek az egyenletrendszerben előforduló ismeretlenek. (Pd. az utolsóelőtti példában a számjelek x, y, z .)

2. Miután megtörtént az ismeretlenek megválasztása, megalkotjuk egyenkint azokat az algebrai kifejezéseket, amelyek a feladatban szerepelnek és egyenlőkké tesszük azokat, amelyeket a feladat egyenlőknek mond. (Igy pl.: a számjelek összege $x + y + z = 13$. stb.)

Feladatok.

1. Ha A -nak még 36 koronát adok, háromszor annyi pénze lesz mint B -nek; ha pedig B 5 koronát költ, még fél annyi pénze marad mint amennyije A -nak van; mennyije van mindegyiknek?

2. Két számot gondolok; az első szám, meg a második fele összesen 20-at ad, ugyanannyit nyerek, ha a másodikhoz hozzáadom az első harmadrészét; melyek e számok?

3. Egy számnak fele, meg egy másodiknak harmada együtt 32: az elsőnek negyede pedig, ha hozzáadom a második 5-ödrészét, 18 lesz. Melyek e számok?

4. Januárius elsején az éj Budapesten 7 óra 8 perccel hosszabb a nappalnál; meddig tart ekkor a nap és az éjjel?

5. 4 kg tea és 2 kg cukor 26 K 40 fillérbe kerül; 5 kg tea és 4 kg cukor pedig 34 K 20 fillérbe; mi a tea, illetőleg cukor ára?

6. Hét évvel ezelőtt A 3-szor oly idős volt mint B ; de 7 év múlva már csak kétszer oly idős lesz; mi A és B -nek mostani kora?

7. Ha valamely tört számlálóját eggyel nagyobbítom, egyenlő lesz $\frac{1}{3}$ -dal; ellenben $\frac{1}{4}$ -del, ha a nevezőjéhez hozzáadok egyet; melyik e tört?

8. Egy rúd két részből áll. A felső rész úgy viszonylik az alsóhoz, mint 5 a 7-hez. Ha pedig a felső rész 9-szereséhez hozzáadom az alsó rész 13-szorosát, az egész rúd 11-szeresénél 1 m 8 cm-rel nagyobb hosszat kapok; milyen hosszú a rúd két része?

9. Ha valamely tört számlálóját eggyel nagyobbítom, nevezőjét pedig eggyel kisebbítem, értéke éppen egyenlő lesz 1-gyel; ha pedig a számláléhoz hozzáadom a nevezőt, a nevezőből pedig kivonom a számlálót, a tört megváltoztatott értéke 4 lesz. Melyik e tört?

10. Egy kerékpáros a sík úton 25 km sebességgel haladt (óránként 25 km), az út emelkedő részén 15 km sebességgel ment és a lejtőn lefelé 30 km volt a sebessége. Az egész 100 km-es utat oda 4 óra 24 perc és vissza 4 óra 36 perc alatt tette meg. Számítsuk ki, mekkora volt a 100 km-es út sík része, mekkora volt az emelkedő és mekkora a lefelé lejtő része? (x km az első, y a második és z a harmadik.)

11. Egy két számjelből álló szám értéke 4-szer oly nagy mint az egyes számjелеk összege; ha pedig 18-at hozzáadunk az adott számhoz, oly számot kapunk, mely ugyanazokból a számjelekből áll, de megfordított sorrendben. Melyik e szám?

12. Micsoda kétjegyű szám az, mely kilenccel nagyobbodik, ha

a számjelek sorrendjét megfordítom; és amelyből 33 lesz, ha ezt az utóbb nyert számot még hozzáadom.

13. A -nál és B -nél bizonyos számú fillér van. A annyi fillért ad B -nek, mint amennyije volt B -nek; most megint B annyit ad A -nak, mint amennyije most van (A -nak). Ezt most A ismétli B -vel és utoljára B megint A -val. Ekkor mindegyiknek 16 fillérje van. Mennyije volt mindegyiknek kezdetben?

14. A és B együtt valami munkához fognak, melyet ketten 30 nap alatt végeztek volna; de 18 nap múlva B megbetegszik, és ekkor A -nak egymagában még 20 napig kell dolgozni; meddig tartott volna a munka, ha A vagy B ezt egyedül végezte volna?

15. Egy vasúti vonattal, egy órával elindulása után, baleset történik, melynek következtében 60 percre megáll, és azután útját az előbbi sebességnek csak $\frac{3}{5}$ -ével folytathatja. Ennélfogva 180 perccel később érkezik a végállomásra, mintsem kellene. Ha azonban 50 kilométerrel távolabb történt volna csak a baleset, a vonat csak 80 perccel késett volna. Hány kilométert tett meg a vonat és mennyi idő alatt? (A távolság a két állomás között legyen x km és percenként tesz a vonat y km-t. Haladt 60 percig, ezalatt megtett $60y$ km-t; tehát még hátra van $x - 60y$ km. De most már percenként csak $\frac{3y}{5}$ km-t tehet

meg és így ezt a hátralévő $x - 60y$ km-t $(x - 60y) : \frac{3y}{5} = 5 \frac{x - 60y}{3y}$ perc

alatt futja be. Az egész utat baleset nélkül $\frac{x}{y}$ perc alatt tette volna meg.

E szerint tehát ment 60 percig, azután állt 60 percig, azután ment $5 \frac{x - 60y}{3y}$ percig. E három idő együttvéve 180 perccel több

mint a rendes $\frac{x}{y}$ percnyi menetidő. Ezzel az első egyenletet felállítottuk. A második most már hasonló megfontolást követel.)

16. Két vasúti vonat, melyek közül az egyik 46 m, a másik pedig 42 m hosszú, párhuzamos vágányokon halad. Ha ellenkező irányban mozognak, másfél másodperc alatt mennek el egymás mellett; ha pedig ugyanegy irányban, akkor a gyorsabb vonat 6 másodperc alatt hagyja el a másikat. Minő utat tesz meg mindegyik vonat egy-egy másodpercben?

17. Egy 1200 literes víztartó három csövön át 24 perc alatt telik meg. Ha csak az első csövet nyitom meg, 30 perccel tovább tart a meg-

töltés, mintha csak a 3-ik van nyitva. A 3-ik csövön pedig percenként 10 literrel kevesebb víz jön mint az elsőn és másodikon együtt. Egy-egy cső mennyi idő alatt tölti meg a viztartót?

18. A és B együtt 6 nap alatt 24 K-t szereznek; A és C 9 nap alatt 32 K 40 fillért; végre B és C 48 K-t 14 nap alatt. Mennyit szerez mindegyik külön egy nap alatt?

19. Egy három számjából álló szám értéke 48-szorosa a számjelek összegének. Ha 198-at levonunk belőle, az eredményben ugyanazok a számjelek fordulnak elő megfordított sorrendben. Továbbá a két szélső számjel összege egyenlő a középső számjel kétszeresével. Melyik e szám?

20. Háromféle ötvényem van arany-, ezüst- és rézből. Ezekben a fémek arányai a következő számok által vannak jellemezve: a) $1:1:3$ b) $2:3:4$, c) $3:4:5$. — Ezekből oly ötvényt akarok készíteni, melyben az egyes fémek úgy aránylanak, mint $9:14:19$. — Mennyit kell venni minden egyes ötvényből, ha pl. 210 grammot akarok előállítani.

X. A négyzetgyök és a másodfokú egyenlet.

64. **A négyzetgyök.** Eddigi összes tárgyalásaink körét leginkább az jellemzi, hogy az előfordult feladatok megoldása az ú. n. négy alpművelet — összeadás, kivonás, szorzás és osztás — segítségével történt.

Minden egyes műveletnek megfelel egy második, ú. n. megfordított művelet, melynél ismeretesnek tételezzük fel az eredetileg meghatározandó eredményt, ismeretlennek ellenben ama számok egyikét vesszük, melyek előbb adottak voltak. Ily módon keletkezik az összeadásból a kivonás, a szorzásból az osztás. Most a hatványozás műveletének megfordítottjával kell foglalkoznunk.

Hatványozást végezzünk, ha adott a -ból meghatározzuk a^n értékét; egészen új feladat ellenben a^n adott értékéből visszakövetkeztetni a értékére.

Ezen feladatra számos gyakorlati kérdés is rávezet bennünket.

Mint ilyen legyen itt előlegesen megemlítve egy, a geometriából már ismeretes, legegyszerűbb feladat: Valamely négyzet adott területéből kiszámítani oldalainak hosszát.

Azt a számot, mely n -edik hatványra emelve éppen A -t adja, így jelöljük: $\sqrt[n]{A}$. A $\sqrt{}$ jelet, mely a XVI. században a radix szó kezdőbetűjének átalakulása által keletkezett, *gyökjel*-nek nevezzük, a föléje írt n -et pedig *gyökkitevő*-nek, megfelelőleg a *hatványkitevő* nevének, mely az ellentett műveletnél (a hatványozásnál) szerepel. Magát az A -t sokszor könnyebb szólás végett *gyökjel alatti mennyiségnek* nevezzük.

Eszerint $\sqrt[n]{A}$ és A -nak n -edik gyöke, vagy, minthogy az írás miatt mindig jobb a jeleket az írás sorrendjében olvasni: *n -edik gyök A -ból*. Második, harmadik gyök helyett ismét szokásos a *négyzetgyök*, *köbgyök* elnevezéseket használni.

Általános megállapodás szerint kettesnek vesszük a kitevőt, ha ez nincs kiírva, úgy hogy ezentúl az egyszerű $\sqrt[n]{a}$ *négyzetgyök* jele a $\sqrt{}$ helyett; minden más esetben a *kitevő kiírandó*.

Ezek szerint, minthogy pl. $2^2=4$, megfordítva $\sqrt{4}=2$, hasonlókép:

$$(k)^2=k^2\text{-ből következik, hogy } \sqrt{k^2}=k,$$

$$3^4=81 \quad \gg \quad \gg \quad \sqrt[4]{81}=3.$$

$$(-2)^3=-8\text{-ből} \quad \gg \quad \gg \quad \sqrt[3]{-8}=-2 \text{ s i. t.}$$

Ha a gyökjel alatt többtagú kifejezés áll, akkor annak kijelölésére, hogy a gyökkivonás az egész kifejezés által jelzett értéken történik, ezt zárójelbe tesszük; így pl. egészen mást jelent

$$\sqrt{a+b} \text{ és } \sqrt{a+b},$$

néha a zárjel helyett vonást is teszünk az egész kifejezés fölé, ily módon:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a+b}.$$

Az ily módon kijelölt feladatsorozatból most először is a legegyszerűbbet tárgyaljuk és így a következőkben csakis a négyzetgyökkel foglalkozunk.

65. **A négyzetgyök kétértékűsége.** Ha azt a számot keresem, mely négyzetre emelve négyet ad, tüstént látom, hogy ily szám a 2: mert $2^2=4$; de -2 -nek is megvan e tulajdonsága; mert

$(-2)^2=4$. Azaz $\sqrt{4}$ lehet 2 vagy -2 . Ez egészen új tünemény. Minden eddig tárgyalt számkapcsolat — úgy az egyes alapműveletek, valamint több ilyen összeállítva — mindig *egy és csak egy meghatározott számot* adott eredményképpen. A négyzetgyöknél ez többé nincs úgy. A négyzetgyökök nem *egyértékű* (*uniformis*), hanem *kétértékű* (*biformis*) kifejezés.

Igy van ez minden esetben. Ha ugyanis Q valamely tetszős szerinti szám és

$$N^2=Q,$$

akkor közvetlenül látjuk, hogy nemcsak N , hanem $-N$ is megoldja feladatunkat; mert

$$(-N)^2=N^2$$

és így tehát:

$$(-N)^2=Q.$$

Szóval, *ha a négyzetgyökök valamely értékét meghatároztuk, akkor az előjel megváltoztatásával nyert érték a négyzetgyökök másik értéke.*

A tanuló figyelje meg különösen azt a módosítást, mely e tárgyalások által az egyenlőségi jel értelmezésében történik; ha pl. azt írom, hogy $\sqrt{4}=\pm 2$, akkor azt írtam fel, hogy $\sqrt{4}$ alatt két különböző számot érthetek: $+2$, és -2 -t. $\sqrt{4}$ tehát nem egy értéket, hanem *értékesoportot* jelent.

Egészen más értelme van azonban, ha pl. fölírom, hogy $\sqrt{4}=2$, amint ezt már tettük és még majd sokszor tesszük; itt az egyik oldalon a $\sqrt{4}$ értékesoportot jellemez, a másik oldalon pedig csak egy szám áll, a 2. Ez akkor annyit mond, hogy a $\sqrt{4}$ *egyik értéke* 2; itt a baloldalon álló jelnek *tágabb értelme* van mint a jobb oldalon állónak; amaz ezt *magában foglalja*; de nem megfordítva. Ha ezt az értelmi különbséget nem vesszük tekintetbe, következtetéseink könnyen hibásokká is lehetnek; ha t. i. ezt az állítást $\sqrt{4}$ *lehet 2 is*, fölcserélnők evvel $\sqrt{4}$ *mindig 2*, ahol az első helyes, de a második már hamis.

A $\sqrt{Q}$ az eddigiek értelmében már magában is kétértékű: néha azonban e kétértékűség még jobb feltüntetésére helyette $\pm\sqrt{Q}$ -t írunk.

66. Pozitív szám négyzetgyöke. Eddigélé még nem foglalkoztunk a négyzetgyökök *meghatározásának* feladatával; hanem

csak a *megoldás alakját*, a megoldás írásmódját szabtuk meg pontosabban. Láttuk, hogy a tárgyalandó feladatnak két megoldása van, és hogy az egyik megoldásból az előjel megváltoztatása által megkapjuk a másikat.*) Most már szükséges behatóbban foglalkoznunk azzal a kérdéssel, hogy *miképp nyerhetjük a négyzetgyököknek egy értékét.*

A négyzetgyökök számértékének meghatározása az eddig ismert számok segítségével nem mindig lehetséges, és így, éppen úgy mint a kivonásnál, ahol a negatív számot kellett bevezetnünk, ismét új számalak bevezetését teszi szükségessé.

Ez az eset mindig bekövetkezik, ha az a szám, melyből négyzetgyököt kell vonni, negatív. Ekkor semmiféle pozitív vagy negatív szám nem adhatja a feladat megoldását, mert nincs olyan pozitív vagy negatív szám, melynek négyzete negatív lenne, mert hiszen minden pozitív vagy negatív szám négyzete pozitív.

Látjuk tehát, hogy a negatív szám négyzetgyökének vizsgálata egészen újnemű nehézséget okoz. Mielőtt ezzel foglalkoznánk, előbb az aránylag egyszerűbb esettel foglalkozunk, a *pozitív szám négyzetgyökével.*

Még itt is egyszerűsítünk a feladaton és mindenekelőtt a *pozitív egész szám négyzetgyökével* foglalkozunk. Tüstént látjuk, hogy a négyzetgyök kivonására vonatkozólag a pozitív egész számok két egymástól lényegesen eltérő osztályba lesznek sorozandók, így pl. a $\sqrt{4}$ négyzetgyöke 2, vagy az előjelt is tekintetbe véve, ± 2 , tehát *egész szám*; ellenben a $\sqrt{3}$ *nem lehet egész szám*. E szám természetesen nem lehet sem 0, sem $+1$ vagy -1 ; de az egynél nagyobb egész szám sem lehet (az előjel itt nem jó tekintetbe), mert ennek négyzete 4, vagy ennél is nagyobb, de sohasem három.

Igy tehát a pozitív egész számok két osztályba sorozhatók: az első osztályba tartoznak mindazok, amelyeknek négyzetgyöke ismét egész szám; a másodikba azok, melyeknek nincs meg e tulajdonságuk. Az első osztályba tartozó számokat teljes négy-

*) Az alól, hogy a négyzetgyököknek két értéke van, találunk azonban egy kivételt, midőn t. i. a talált érték olyan, hogy az előjel megváltoztatása ezt meg nem változtatja. Ily szám (melynél tehát, ha x -nek nevezem, $x = -x$ volna), csak a *zérus*. Minthogy továbbá, ha N^2 nem zérus, N semmi esetre sem lehet zérus, e kivétel csakis 0 négyzetgyökére vonatkozik, melynek *egyetlen értéke ismét 0*.

zetek-nek szokás mondani. Így pl. az első teljes négyzetek : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 stb.

Ha valamely egész szám nem teljes négyzet, akkor a négyzetgyöke nemcsak hogy nem egész szám, de törtszám sem lehet; tehát az eddig tárgyalt számalakok közt elő sem fordul.

Ha ugyanis P nem teljes négyzet, a négyzetgyöke egész szám nem lehet; de törtszám sem lehet; mert ha

$$\sqrt{P} = \frac{a}{b}$$

volna (ahol $\frac{a}{b}$ rövidíthetlen törtszám), vagyis megfordítva:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = P$$

volna, akkor az $\frac{a}{b}$ törtszám négyzete egész szám volna: ez azonban lehetetlen.

Eszerint $\sqrt{P}$ új számot jelent, már abban az esetben is, midőn P pozitív egész szám ugyan, de nem teljes négyzet.

A viszonyok közelebbi vizsgálatára oldjuk meg a következő feladatot:

Mekkora azon négyzet oldala, melynek területe 2 négyszög-méter?

Ezt a feladatot geometriai szerkesztéssel megoldhatjuk. Evégből, miként a geometria tanítja, a 2 méter és 1 méter között mértani középárányost kell keresnünk.

E négyzet oldalának mértékszámát: $\sqrt{2}$. Ha most már van kellően beosztott mérővesszőnk, hossz-mértékünk, ezt a hosszát megmérhetjük; az ily mérés azonban mindig csak megközelítőleg történik. Így, ha a $\sqrt{2}$ -nek megfelelő vonalt megmérem oly mérték vesszőkkel, melyek egymásután centiméter-, milliméter-, végre a méter $\frac{1}{10.000}$ részére vannak beosztva, azt látom, hogy a meghatározandó vonal hossza

1'41 és 1'42

1'414 és 1'415

1'4142 és 1'4143

méter között fekszik.

A gyakorlatban az ily mérés elégséges is, mert ha a pontosságot kellően fokozom, végre a kétely a milliméternek oly

apró részére vonatkozik majd, hogy ezt a számításból egészen kihagyhatom.

A $\sqrt{P}$ -nek (valamint általánosságban a $\sqrt{P}$ -nek) törtek által nem nyerhetjük ugyan pontos kifejezését, *de nyerhetjük megközelítését*, még pedig annyira, hogy a még ismeretlen részt tetszésünk szerint kisebbíthetjük.

67. Irracionális szám. Ha nem teljes négyzetből kell gyököt vonnunk, a gyökvonással új számot nyerünk, melynek azonban a számok sorában teljesen meghatározott helye van, amennyiben azt minden más számmal összehasonlíthatom nagyságára nézve. Ez az összehasonlítás oly módon történik, hogy $\sqrt{P}$ -ről akkor mondjuk, hogy a -nál kisebb, ha négyzete P , a^2 -nél kisebb, és akkor mondjuk, hogy b -nél nagyobb, ha P nagyobb a b^2 -nél. Így pl. $\sqrt{2}$ (pozitív értéke) nagyobb mint 1.4 , mert 2 nagyobb 1.4 négyzeténél 1.96 -nál, ellenben $\sqrt{2}$ kisebb mint 1.5 , mert 2 kisebb 1.5 négyzeténél 2.25 -nél. Ezzel a megállapítással *a pozitív egész szám négyzetgyökének amaz egyik értéke, mellyel eddig kizárólag foglalkoztunk, be van iktatva a pozitív számok sorába.*

Az oly pozitív vagy negatív számot, mely sem nem egész, sem nem törtszám, irracionális számnak nevezzük, ellentétben az egész és törtszámokkal, melyek együttesen az ú. n. racionális számokat alkotják. Ha tehát nem teljes négyzetből vonunk négyzetgyököt, az eredmény irracionális szám.

Igy pl.: $\sqrt{5}$ irracionális szám. Ha közönséges törtekkel (tizedes törtekkel) akarjuk megközelíteni, akkor így járhatunk el. Tudjuk, hogy 2 és 3 között van. Megpróbáljuk 2.5 -et. $2.5^2 = 6.25$, tehát $2.5 > \sqrt{5}$.

2.4 is sok, 2.3 is, mert $2.3^2 = 5.29$. De már 2.2 kevés, mert $2.2^2 = 4.84$; tehát: $2.2 < \sqrt{5} < 2.3$.

Most megpróbáljuk 2.25 -öt. Ennek négyzete is nagyobb 5 -nél; 2.24 -é is, mert $2.24^2 = 5.0176$; de már $2.23^2 < 5$; tehát $\sqrt{5}$ 2.23 és 2.24 között van. Így haladva tovább azt találjuk, hogy

$$2.236 < \sqrt{5} < 2.237 \text{ stb.}$$

Feladat. Határozzuk meg 3 tizedes jegyre: $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{23}$.

68. Egytagúak négyzetgyöke. Egytagúak hatványaira vonatkozólag tudjuk, hogy:

$$1. (ab)^2 = ab \cdot ab = a^2 b^2; \quad 2. \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}.$$

(Fejezd ki szavakkal e tételt.)

A négyzetgyökre vonatkozólag e két megfelelő tétel érvényes:

$$1. \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}; \quad 2. \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

azaz: 1. Szorzatból úgy vonunk négyzetgyököt, hogy minden tényezőjéből négyzetgyököt vonunk, és az így nyert gyököket egymással megszorozzuk.

2. Törtből úgy vonunk gyököt, hogy a számlálóból és a nevezőből külön gyököt vonunk és a számláló gyökét a nevezőével elosztjuk.

Ezen állítások helyességéről könnyen meggyőződhetünk:

A $\sqrt{ab}$ oly értéket jelent, melynek négyzete ab . A $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ szintén ilyen érték, mert hiszen

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab.$$

Hasonlóképpen: $\sqrt{\frac{a}{b}}$ oly számértéket jelent, melynek négyzete $\frac{a}{b}$.

A $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ szintén ilyen számérték; mert:

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

Az 1. tétel természetesen nemcsak akkor érvényes, ha a szorzat két tényezőből áll, hanem akárhány tényező esetében is.

A két tétel a szorzat és a hányados négyzetgyökére vonatkozik. Harmadikul említjük a hatvány négyzetgyökére vonatkozó

$$\sqrt{a^{2n}} = \pm a^n$$

tételt, azaz, ha a gyök alatt páros kitevőű hatvány áll, akkor a gyökvonás egyszerűen a kitevő felezésével végezhető, mert hiszen

$\sqrt{a^{2n}}$ olyan szám, melynek négyzete $\sqrt{a^{2n}}$ és a^n szintén ilyen számértéket jelent.

Példák: 1. $\sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$. Alakítsd át ilyen módon a következő gyököket: $\sqrt{9x}$, $\sqrt{16a}$, $\sqrt{25y}$, $\sqrt{a^2b}$, $\sqrt{36a^2b}$, $\sqrt{a^4b}$, $\sqrt{4x^4y}$, $\sqrt{a^2b^2c}$, $\sqrt{9a^2b^2}$, $\sqrt{25a^6b}$.

$$\text{Számítsd ki: } \sqrt{\frac{4}{9}}, \sqrt{\frac{25}{36}}, \sqrt{\frac{49}{64}}, \sqrt{\frac{25}{81}}, \sqrt{\frac{4}{49}}, \sqrt{\frac{81}{100}}, \\ \sqrt{\frac{64}{121}}, \sqrt{\frac{a^2}{9}}, \sqrt{\frac{25}{a^2}}, \sqrt{\frac{49}{x^2y^2}}, \sqrt{\frac{a^2b^2}{64}}.$$

69. Negatív szám négyzetgyöke. Mindeddig csak a pozitív számokból vonandó négyzetgyökkel foglalkoztunk; mindjárt a fejezet elején kijelöltük azt a nehézséget, mely a most tárgyalandó feladatnál föllép, midőn az a szám, melynek négyzetgyökét meg akarjuk határozni, *negatív*. Bármely pozitív vagy negatív számnak is képezzem négyzetét, ennek előjele pozitív lesz; tehát a $\sqrt{-P}$ vizsgálata, hol P ismét pozitív számot jelentsen, nem vezethet oly számhoz, mely az eddig vizsgáltak közé tartozik, hanem ismét *új számnemet* állapít meg. Míg azonban az algebra eddigi fejezeteiben föllépett számokat igen könnyű volt egyes tárgyi körökből, különösen a geometriából vett feladatokra alkalmazni, és ezáltal magának a számnak tulajdonságait is jobban megvilágítani, a most bevezetendő számnem alkalmazhatóságát ebben a tárgyi körben egyelőre meg nem mutathatjuk. Azért itt egyelőre meg kell elégednünk e számok *formális* értelmezésével; míg azt a kérdést, hogy hol és mikor találhatnak alkalmazást, most még érintetlenül hagyjuk.

Kiinduló pontul szolgáljon az a tétel, hogy *valamely szorzat négyzetgyökét úgy is nyerhetem, ha a tényezők négyzetgyökeit szorzom, képletben kifejezve:*

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

E tételt azért bocsátottuk előre, mert ha most a $-P$ negatív számot -1 és P szorzatának írjuk, az egész probléma a $\sqrt{-1}$ megvizsgálására van visszavezetve. Ugyanis:

$$\sqrt{-P} = \sqrt{(-1)P} = \sqrt{P}\sqrt{-1};$$

itt a $\sqrt{P}$ az előbbieket szerint kiszámítható racionális vagy

irracionális szám. A $\sqrt{-1}$ új szám, mely az ismert számokra nem vezethető vissza. Ennek is, mint minden négyzetgyöknek, két értéke van, mely csak előjelében különbözik, tehát $\sqrt{-1}$ és $-\sqrt{-1}$ -gyel jelölhető.

E számnak egyelőre tisztán formális értelmezése a következő: $\sqrt{-1}$ az olyan szám, mely négyzetre emelve -1 -et ad. Ez ismét alaptulajdonság, melyből majd minden egyéb tulajdonságát le lehet vezetni.

Azokat a számokat, melyek mint negatív számok négyzetgyökei jelennek meg, *képzetes (imaginarius) számok*-nak mondjuk, míg az összes eddig tárgyalt számok, ú. m. pozitív vagy negatív egész, tört vagy irracionális számok, együttesen a *valós (reális) számok* osztályát alkotják. E képzetes számok közt a $\sqrt{-1}$ -nek bizonyos tekintetben kiváltságos szerepe van, mert, amint utolsó képletünk mutatja, általa minden egyéb képzetes szám kifejezhető. A $\sqrt{-1}$ -nek megfelelő két értéket *képzetes egységek*-nek mondjuk. A negatív egységnek ugyanis egyik jellemző tulajdonsága az, hogy négyzete $+1$. Általánosságban pedig az algebra további fejlődése indokolja majd azt az általánosítást, mely szerint mindazokat a számokat, melyeknek valamely hatványa a $+1$, egységeknek nevezzük. A pozitív és negatív számok sorában — amint első pillanatra meggyőződünk — nincs is más ily szám, mint a $+1$ és -1 . Most pedig a $\sqrt{-1}$ -ben oly számot birunk, melynek negyedik hatványa $+1$. Ugyanis:

$$(\sqrt{-1})^4 = [(\sqrt{-1})^2]^2 = (-1)^2 = +1.$$

Éppen azért, mert a $\sqrt{-1}$ az eddigi számok által ki nem fejezhető, ennek számára külön jelt vezettek be. A $\sqrt{-1}$ egyik értékét *i*-vel, az imaginárius szó kezdőbetűjével szokás jelölni, akkor a $\sqrt{-1}$ második értéket $-i$ -nek mondhatom, mert:

$$(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = i^2 = -1.$$

A képzetes egységet tehát ezentúl *i*-nek írjuk és ennek alaptulajdonsága: $i^2 = -1$.

Ennek alapján most már alapképletünk következőképpen írható:

$$\sqrt{-P} = i\sqrt{P},$$

és ebből látjuk, hogy a negatív számok négyzetgyökeinek kiszámítása vissza van vezetve a megfelelő pozitív szám négyzetgyökének kiszámítására, melyhez azonban még a képzetes egység mint tényező hozzájárul.

$$\text{Pl. } \sqrt{-4} = \pm 2i, \sqrt{-9} = \pm 3i.$$

Világos, hogy $i\sqrt{P}$ már a négyzetgyöknek mind a két értékét magában foglalja, mert a $\sqrt{P}$ maga is pozitív vagy negatív előjellel vehető; ezt ismét jobban föltüntetjük, hogyha $i\sqrt{P}$ helyett $\pm i\sqrt{P}$ -t írunk.

Teljesség kedvéért mindjárt megemlítjük, hogy végre azokat a számokat, melyek valós és képzetes mennyiségek összeadása által keletkeznek, szintén *képzetes számok*-nak nevezzük, még pedig megkülönböztetésül amazokat tisztán képzetes, ezeket *complex* számoknak mondjuk. Az ilyennek alakja: $a+ib$, hol a és b valós (pozitív vagy negatív) értékek és a a complex szám valós része, ib pedig ennek tisztán képzetes része.

Az ib , vagy $a+ib$ mindig új számot jelent, csak akkor nem, ha $b=0$, mert

$$i \cdot 0 = 0.$$

T. i. ib nem más, mint új jelölés a $\sqrt{-1} \cdot b$ vagy eredetileg a $\sqrt{-b^2}$ helyett, de ha $b=0$, ez nem más, mint $\sqrt{0}$, melynek csak egy érték felel meg, a 0.

Ebből azután az is következik, hogy $a+i \cdot 0 = a$.

Feladat : 1. Fejezzük ki egyszerűbb alakban a következő számokat :

$$\sqrt{-16}, \sqrt{-25}, \sqrt{-36}, \sqrt{-49}, \sqrt{-64}, \sqrt{-81}, \sqrt{-100}.$$

2. Számítsuk ki i hatványait a 10-ikig !

70. **Többtagú kifejezés négyzetgyöke.** Ha *többtagú kifejezéssel* van dolgunk, tüstént belátjuk, hogy a négyzetgyökvonás *általánosságban* csak akkor lehetséges, ha az adott kifejezés oly alakú, aminőt a négyzetre emelésnél nyertünk: *teljes négyzet*. Így pl. világos, hogy

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2} = \pm(a+b).$$

Ellenkezőleg $\sqrt{a+b}$ vagy $\sqrt{a-b}$ esetében a négyzetgyökvonás nem eszközölhető, mert egytagú kifejezés négyzete

ismét egytagú, kéttagúé pedig már három tagból áll. — Hogy megvizsgálhassuk, vajjon az adott kifejezés teljes négyzetnek tekinthető-e vagy sem, összehasonlítjuk ezt a négyzetre emelés alkalmával nyert alakzatokkal.

Mindenekelőtt a megvizsgálandó kifejezést itt is valamely betű fogyó vagy növekedő hatványai szerint rendezzük, mert a négyzetre emelésnél is mindig ily rendezett alakot nyerünk. Hogy az eljárásra kész szabályt nyerjünk, legjobb lesz a viszonyokat egy pár példán áttekinteni. Kerestetik pl. a

$$36x^6 + 48x^3y^2 + 16y^4$$

négyzetgyöke. Ha e kifejezés teljes négyzet, első tagja nem más, mint a négyzetre emelt kifejezés első tagjának négyzete, az első tag tehát $\sqrt{36x^6} = 6x^3$, hol a négyzetgyök másik értékét mellőzzük; de ekkor továbbá a második tag nem egyéb, mint a már meghatározott tag kétszeresének szorzata az ismeretlen második taggal. Ha tehát az adott négyzet második tagját elosztom a $2 \cdot 6x^3$ -al, a keresett kifejezésnek második tagját

nyerem. Ez tehát $\frac{48x^3y^2}{12x^3} = 4y^2$. Ha ez a négyzetgyök második

tagja, kell hogy ennek a négyzete az adott kifejezés 3-ik tagja legyen; és valóban $(4y^2)^2 = 16y^4$. Így tehát a fölirt kifejezés négyzetgyökének egyik értéke: $6x^3 + 4y^2$; amelyből a másodikat is nyerjük: $-(6x^3 + 4y^2)$.

Az egész eljárást az osztáshoz hasonló mintában összeállítva lesz:

$$\begin{array}{r} \sqrt{36x^6 + 48x^3y^2 + 16y^4} = 6x^3 + 4y^2 \\ 36x^6 \\ \hline 48x^3y^2 + 16y^4 : 12x^3 \\ 48x^3y^2 + 16y^4 \\ \hline 0 \end{array}$$

A szabályt most már következőkép fogalmazhatjuk: *Hogy valamely kifejezés teljes négyzet legyen, kell hogy első tagja egymagában is ilyen legyen; ha ez úgy van, emez első tag négyzetgyöke a keresett négyzetgyöknek első tagja lesz; ezen első tag négyzetét az adott kifejezésből kivonom; a második tagot megkapom, ha az adott kifejezés második tagját a gyök megtalált első tagjának kétszeresével elosztom. Kiszámítom a most nyert*

második tagnak az első tag kétszeresével való szorzatát és a második tag négyzetét és ezeket szintén kivonom az adott kifejezésből. Ha a kivonásnál a maradék 0, a négyzetgyök meghatározása be van fejezve.

Ha a maradék nem zérus, az eddig megvizsgált 3 tagot egynek veszem, és minthogy e háromtagú kifejezésnek négyzetgyökét már meghatároztam, épp úgy folytathatom a dolgot, mint előbb.

Ha azonban az adott kifejezés minden tagját fölhasználtam és a maradék nem 0, akkor világos, hogy a kifejezés nincsen a teljes négyzetek mintájára képezve, és így tehát a négyzetgyök-kivonás nem eszközölhető.

Oly példa, melynél a négyzetgyök több mint kéttagú, a következő:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{25a^4 - 30a^3b + 49a^2b^2 - 24ab^3 + 16b^4} = 5a^2 - 3ab + 4b^2 \\
 \underline{25a^4} \\
 -30a^3b + 49a^2b^2 - 24ab^3 + 16b^4 : 10a^2 \\
 \underline{-30a^3b + 9a^2b^2} \\
 *) \quad 40a^2b^2 - 24ab^3 + 16b^4 : 10a^2 - 6ab \\
 \underline{40a^2b^2 - 24ab^3 + 16b^4} \\
 0
 \end{array}$$

A csillaggal jelölt helyen az első két tag $(5a^2 - 3ab)$ és az ismeretlen harmadik tag kétszeres szorzata és e harmadik tag négyzete áll és pedig a $40a^2b^2$ az első és harmadik tag kétszeres szorzata. Ha tehát a $40a^2b^2$ a gyök megtalált első tagjának kétszeresével $[10a^2\text{-el}]$ osztatik, a hányados $[4b^2]$ lehet a gyök harmadik tagja. Ezzel a $4b^2$ -vel elvégezzük a kívánt műveleteket. megszorozzuk az első két tag kétszeresével $[10a^2 - 6ab\text{-vel}]$ és előállítjuk a négyzetét $[16b^4]$ -et.

Hogy a négyzetgyöknek még ellenkező előjelt is lehet adni, azt ezentúl is minden egyes példánál fölemlíteni fölöslegesnek tartjuk.

Feladatok.

Kiszámítandók a következő kifejezések négyzetgyökei:

- | | |
|--|---|
| 1. $16a^2 + 40ab + 25b^2$, | 2. $49a^4 + 84a^2b + 36b^2$, |
| 3. $36x^6 + 12x^3 + 1$, | 4. $64a^2 + 48abc + 9b^2c^2$, |
| 5. $\frac{25a^2 + 20ab + 4b^2}{25a^2 + 20ac + 4c^2}$ | 6. $\frac{9x^4 - 24x^2 + 16}{4x^2 - 12x + 9}$ |
| 7. $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, | 8. $x^4 - 4x^3 - 8x + 4$, |

9. $4x^4+12x^3+5x^2-6x-1$, 10. $4x^4-4x^3+5x^2-2x+1$,
 11. $4x^4-12ax^3+25a^2x^2-24a^3x+16a^4$,
 12. $25x^4-30ax^3+49a^2x^2-24a^3x+16a^4$,
 13. $x^4-2(a+b)x^3+(a^2+4ab+b^2)x^2-2ab(a+b)x+a^2b^2$,
 14. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right)$,
 15. $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+12$.

71. **Négyzetgyökvo nás számokból.** Egyjegyű szám négyzete 1 vagy 2 jegyű, 2 jegyű szám négyzete 3 vagy 4 jegyű (mert hiszen a legkisebb kétjegyű szám 10, melynek négyzete 100 és a legkisebb 3 jegyű szám 100, melynek négyzete 10000). A 3 jegyű szám négyzete 5 vagy 6 jegyű. Fordítva: 1 vagy 2 jegyű szám gyöke csak egy egész számot tartalmazhat; 3 vagy 4 jegyű szám gyöke 2 egész számból áll stb.

1. Számítsuk ki $\sqrt{529}$ -et. Ha van olyan egész szám, melynek négyzete éppen 529, akkor az csak kétjegyű lehet, tehát ilyen alakú: $a \cdot 10 + b$, ahol a és b 10-nél kisebb egész számok. Csak az a -t és b -t kell meghatároznunk. E szám négyzete:

$$a^2 \cdot 100 + 2ab \cdot 10 + b^2 = 529 \dots\dots\dots 1.$$

Hogy tehát az a -t meghatározzuk, megnézzük az 529-ben hány százaz van? Látjuk, hogy 5 százaz van benne. Ez az 5 kell, hogy a^2 -ot tartalmazza, a tehát nem lehet más mint 2, mert $2^2=4$ és már $3^2=9$. Az a , vagyis a tizesek helyén álló szám megvan. Most az 1. egyenlet mindkét oldalából levonjuk:

$$a^2 \cdot 100 = 400$$

marad:

$$2ab \cdot 10 + b^2 = 129.$$

Megnézzük, hogy 129-ben hány tizes van? 12. E 12 tizesben benne van a $2ab$ tizes, vagyis a $4b$ tizes (mert $a=2$); hogy tehát a b -t meghatározhassuk, a 12-t el kell osztani 4-gyel, akkor megkapjuk a b -t. $12:4=3$; a b tehát 3. Hogy valóban $b=3$, arról meggyőződünk, ha előállítjuk a $2ab \cdot 10 + b^2 = 12 \cdot 10 + 9 = 129$; tehát $\sqrt{529} = 23$.

2. Mennyi $\sqrt{4225}$? Ha a gyök egész szám, akkor kétjegyű, $a \cdot 10 + b$ alakú. — E szám négyzete:

$$a^2 100 + 2ab 10 + b^2 = 4225.$$

Megnézzük, hány százas van? 42; tehát a csak 6 lehet, mert $6 \cdot 6 = 36$ és $7 \cdot 7$ már 49. Az $a^2 100$ -at, vagyis a 3600-at levonjuk a megfelelő oldalakból. Marad:

$$2ab \cdot 10 + b^2 = 625.$$

Ebben van 62 tizes, ami tartalmazza a $2 \cdot 6 \cdot b = 12b$ tizest. A b tehát 62:12-ben levő egész szám, tehát csak 5 lehet. Hogy valóban 5, abból látjuk, mert

$$2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 10 + 25 = 625.$$

3. Mennyi $\sqrt{423801}$? Ha a gyök egész szám, akkor csak 3 jegyű lehet, tehát ilyen alakú: $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$. A négyzete:

$$a^2 10000 + 2ab \cdot 1000 + b^2 100 + 2c10(a \cdot 10 + b) + c^2 = 423801.$$

Megnézzük, hány tízezres van? 42. Ebben van az a^2 ; a tehát csak 6 lehet. — Levonunk mindkét oldalból

$$a^2 10000 = 360000;$$

marad:

$$2ab \cdot 1000 + b^2 100 + \dots = 63801.$$

Ebben van 63 ezres, s ez tartalmazza a $2 \cdot 6b$, vagyis a $12b$ ezrest; b tehát legfőlebb 5 lehet. — Levonunk mindkét oldalból:

$$2ab \cdot 1000 + b^2 100 = 60000 + 2500 = 62500,$$

marad:

$$2c(a \cdot 10 + b) \cdot 10 + c^2 = 1301.$$

Ebben van 130 tizes, s ez tartalmazza a $2 \cdot (a10 + b) \cdot c$ tizest. $a \cdot 10 + b = 65$; tehát $c = 130 : 130 = 1$. Hogy valóban 1, arról meggyőződünk, ha előállítjuk a baloldalon álló kifejezést, ami tényleg 1301 lesz.

Ezt az eljárást gyorsan így végezzük: *Felosztjuk a számot kettes csoportokra az egyestől balfelé menve. Az utolsó csoportba egy vagy két szám juthat. Ahány csoport van, annyi egész jegy lesz a gyökben. — Megkeressük azon legnagyobb számot, melynek négyzete az első csoportban foglaltatik (itt 6). Ennek a négyzetét e csoportból kivonjuk és a maradékhoz hozzávesszük a következő csoportot (38-at); de belőle az utolsó számot elvágjuk (8-at). A megmaradt részt (63) elosztjuk az első jegy kétszeresével (12-vel). Megkapjuk a második jegyet (5). E jegyet az osztó mellé írjuk*

(125) és e számot a talált második jeggyel (5) meg is szorozzuk.*) E szorzatot levonjuk és a maradékhoz megint a következő csoportot levesszük (01), de belőle az utolsó jegyet elvágjuk (1-et), a megmaradt részt pedig a gyöknek már megtalált két jegyéből alkotott számnak (65) kétszeresével (130) elosztjuk. A hányados lesz a gyök 3-ik jegye. Ezt az osztóhoz írjuk és vele e számot meg is szorozzuk, a szorzatot levonjuk stb. Így járunk el akkor is, ha a gyök 3-nál több jegyből áll. A következő példák a számítás menetét tüntetik fel.

$\sqrt{42,38,01} = 651$	$\sqrt{7,78,41} = 279$	$\sqrt{7,82,88,04} = 2798$
638 : 125 . 5	378 : 47 . 7	382 : 47 . 7
1301 : 1301 . 1	4941 : 549 . 9	5388 : 549 . 9 .
0	0	44704 : 5588 . 8
		0

72. A négyzetgyök megközelítése tizedes törtekkel. Ha a szám nem teljes négyzet, akkor ezen eljárás csak a gyök egész részét határozza meg. A tizedes számokat miként nyerjük? Legyen a a gyökjel alatt. Akkor $\sqrt{a}$ helyett kiszámítjuk $\sqrt{100a} = 10\sqrt{a}$, avagy $\sqrt{10000a} = 100\sqrt{a}$, szóval az a számhoz annyi pár 0-t illesztünk, amennyi tetszik, de ha $\sqrt{100a}$ -t számítottunk ki, akkor a nyert eredmény 10-szer akkora lesz mint $\sqrt{a}$, ha $\sqrt{10000a}$ -t számítottunk ki, akkor 100-szor akkora lesz; tehát, miután a négyzetgyök egész részét meghatároztuk, a nyert gyököt elosztjuk 10-zel, 100-zal, vagy 1000-rel, aszerint, amint 2, 4, 6 . . . 0-t függesztettünk a számhoz. A 0-ok hozzáfüggesztését a maradéknál kezdhetjük. Pl.:

$$\begin{aligned}\sqrt{10} &= 3.1622 \dots \\ 100 : 61 . 1 \\ 3900 : 626 . 6 \\ 14400 : 6322 . 2 \\ 175600 : 6324.\end{aligned}$$

73. Gyökvonás tizedes törtből. Számítsuk ki $\sqrt{563.4}$ -et. $563.4 = 5634/10$. Törtből úgy vonunk gyököt, hogy a számláló

*) Itt elő kell ugyanis állítanunk levonás végett
 $2ab1000 + b^2100 = (2a \cdot 10 + b) \cdot b$
százast.

gyökét a nevező gyökével osztjuk; de $\sqrt{10}$ irracionális szám, mellyel osztani vesződséges; ezért megszorozzuk mind a számlálót, mind a nevezőt 10-zel és így $\frac{56240}{100}$ -ból kell gyököt bontanunk vagyis $\sqrt{56340}$ -et elosztjuk 10-zel. Ha páratlan számú tizedesjegyük van, egy 0-t függesztünk hozzá, hogy páros legyen.

Az eljárást megkönnyítjük azzal, hogy a *tizedes ponttól jobbra és balra kettős csoportokra osztjuk a számot*. Ha a (jobb-felé) utolsó csoport egy jegyet tartalmaz, 0-t függesztünk hozzá és e gyököt éppen úgy számítjuk ki, mint előbb.

$$\begin{array}{ll} \sqrt{563\cdot40} = 23\cdot736 \dots & \sqrt{6\cdot732} = \sqrt{6\cdot7320} = 2\cdot595 \dots \\ 163 : 43\cdot3 & 273 : 45\cdot5 \\ 3440 : 467\cdot7 & 4820 : 509\cdot9 \\ 17100 : 4743\cdot3 & 23900 : 518 \\ 287100 : 4746 \end{array}$$

Feladatok.

1. Számítsátok ki a következő gyököket: $\sqrt{30276}$, $\sqrt{123904}$, $\sqrt{2509056}$, $\sqrt{271441}$, $\sqrt{2442969}$, $\sqrt{3249}$, $\sqrt{51984}$, $\sqrt{467856}$, $\sqrt{43681}$, $\sqrt{393129}$, $\sqrt{12345678987654321}$.

2. Számítsátok ki a következő gyököket 3 tizedesre: $\sqrt{5\cdot697}$, $\sqrt{7\cdot563}$, $\sqrt{15\cdot48}$, $\sqrt{27\cdot16}$, $\sqrt{3\cdot056}$, $\sqrt{0\cdot968}$, $\sqrt{0\cdot057}$, $\sqrt{0\cdot0325}$.

3. Mekkora azon derékszögű háromszög átfogója, melynek befogói: a) 15 m és 42 m, b) 5·3 m és 3·2 m, c) 3 m 6 dm és 5 m 2 dm, d) 3 m 42 cm és 5 m 17 cm.

4. Mekkora azon derékszögű háromszög másik befogója, melynek a) átfogója 25 m és egyik befogója 13 m, b) átfogója 43 m, befogója 19 m, c) átfogója 6·2 m, befogója 4·7 m, d) átfogója 6 m 52 cm, befogója 5 m 12 cm.

5. Mekkora azon egyenlő oldalú háromszög magassága, melynek egyik oldala: a) 15 m, b) 3·4 m, c) 45·2 m, d) 2 m 56 cm.

6. Mekkora azon négyzet átlója, melynek egyik oldala a) 5 m, b) 4·2 m, c) 6 m 5 dm, d) 8 m 52 cm.

7. Mekkora azon derékszögű négyszög átlója, melynek hossza a) 6 m 12 cm, szélessége 4 m 3 dm, b) hossza 12 m, szélessége 8 m, c) hossza 8·5 m, szélessége 4·2 m, d) hossza 1·72 m, szélessége 0·6 m.

8. Mekkora azon egyenlőszárú háromszög magassága, melynek
a) alapja 12 m, szára 9 m, *b)* alapja 6.4 m, szára 7.5 m, *c)* alapja 25 m,
 szára 17 m, *d)* alapja 9.72 m, szára 5.43 m.

74. **Algebrai műveletek négyzetgyököt tartalmazó kifejezéseken.** Ami először is az *összevonást* illeti, ennél egyszerűen úgy járunk el, mintha az egész gyökkifejezés egy betű volna. Pl.

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt{a} = 5\sqrt{a}, \quad \sqrt{a^2 + b^2} - 2\sqrt{a^2 + b^2} = -\sqrt{a^2 + b^2}.$$

A *szorzás- és osztásnál* már némi egyszerűsítés eszközölhető. Ha t. i. a szorzat és tört négyzetgyökeire vonatkozó és már többször használt képleteket visszafelé olvassuk, ezek a következők:

$$\begin{aligned} \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} &= \sqrt{ab}, \\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} &= \sqrt{\frac{a}{b}}, \end{aligned}$$

melyek szerint négyzetgyökök szorzását vagy osztását úgy végezhetjük, hogy a négyzetgyök jele alatt álló kifejezéseket szorozzuk vagy osztjuk és az eredményből négyzetgyököt vonunk.

$$\text{Pl. } \sqrt{3x} \cdot \sqrt{5y} = \sqrt{15xy}, \quad \sqrt{18x^3} : \sqrt{2} = \sqrt{9x^3}, \quad \sqrt{5x} : \sqrt{2x} = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

s. ú. t.

A *hatványozásnál* még lényegesebb egyszerűsítés történhetik. A négyzetgyök alapértelmezésénél fogva ugyanis

$$(\sqrt{a})^2 = a,$$

és így a magasabb hatványokra nézve

$$\begin{aligned} (\sqrt{a})^3 &= a\sqrt{a}, \\ (\sqrt{a})^4 &= a^2, \text{ s. ú. t.,} \end{aligned}$$

általánosságban látni, hogy a négyzetgyök páros hatványából a $\sqrt{}$ jel kiesik, a páratlan hatványnál $\sqrt{a}$ csak egyszer fordul elő mint tényező; képletben:

$$(\sqrt{a})^{2k} = a^k, \quad (\sqrt{a})^{2k+1} = a^k \sqrt{a}.$$

Négyzetgyököt tartalmazó kifejezések szorzásánál erre tekintettel kell lennünk; az utolsó megjegyzések értelmében ugyanis a $\sqrt{a}$ minden második és magasabb hatványa oly

kifejezések által helyettesíthető, melyekben legfőlebb a $\sqrt{a}$ fordul elő.

75. Gyökkifejezések átalakítása. Sokszor a gyakorlati számítás érdekében a gyökkifejezéseket az előbbi pontban foglalt eljárásokkal átalakítjuk. Ezen átalakítások közül hármat ismeretünk meg: *egy tényezőnek a gyökjel alól kiemelését*, és ennek ellenkezőjét *a gyökjel alá vitelt és végre a gyöktelenítést*.

Az előbbieket szerint:

$$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b},$$

hol a szokásos műszót használva $\sqrt{a^2b}$ -ben az a^2 -t a gyökjelből kivesszük, egyszersmind négyzetgyököt vonva belőle. Hasonlóképp, visszafelé olvasva ezt az egyenlőséget, azt látjuk, hogy $a\sqrt{b}$ -ből oly módon lesz $\sqrt{a^2b}$, hogy a -t a gyökjel alá vesszük, de egyszersmind négyzetre emelve ezt.

$$\text{Pl. } \sqrt{36x^2y} = 6x\sqrt{y}, \quad \sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7} = 2\sqrt{7}, \quad \sqrt{144x^3} = 12x\sqrt{x}$$

$$5\sqrt{2} = \sqrt{50}, \quad 2y\sqrt{x} = \sqrt{4xy^2}, \quad 5\sqrt{u} = \sqrt{25u}.$$

A gyakorlati hasznát látjuk az elsőnek abban, hogy nagyobb számok helyett kisebbekből vonhatunk gyököt, esetleg olyanokból, melyek gyökét már ismerjük. Így pl. ha számításainkban $\sqrt{28}$, $\sqrt{63}$, $\sqrt{175}$ stb. fordul elő, akkor e három gyökvonás helyett csak 7 gyökét számítjuk ki és az első esetben 2-vel, a másodikban 3-mal és a harmadikban 5-tel szorozzuk; mert $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$, $\sqrt{63} = 3\sqrt{7}$, $\sqrt{175} = 5\sqrt{7}$.

Különös figyelmet érdemelnek még azok az átalakítások, amelyeknek segítségével *valamely tört nevezőjét racionálissá tesszük*, azaz belőle a négyzetgyök jelét egészen eltávolítjuk (a nevezőt *gyöktelenítjük*). Ha először is az *egész nevező négyzetgyök jele alatt áll*, akkor a számlálót és nevezőt ugyancsak a nevezővel szorozva, nem változtatunk az értéken, de oly kifejezést nyerünk, melyben az előbbi nevező helyett négyzet áll, a $\sqrt{}$ jel tehát kiesett. Általánosságban:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}{(\sqrt{b^2})} = \frac{\sqrt{ab}}{b},$$

$$\text{pl. } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \frac{\sqrt{x^3y}}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{abx^3y}}{ab}, \text{ s i. t.}$$

Ugyanilyen átalakítást végezhetünk, mikor a *nevező két-tagú összeg*, és akár egy, akár mind a két tag a $\sqrt{}$ jel alatt áll. A második eset magában foglalja mint egyszerűbbet az elsőt is, így tehát csak ezt tárgyaljuk. Legyen a tört

$$\frac{k}{\sqrt{a} + \sqrt{b}};$$

itt oly kifejezést kell keresnünk, mely a nevezővel szorozva, oly szorzatot ad, mely a $\sqrt{a}$ és $\sqrt{b}$ -nek csak négyzetét tartalmazza. Ily kifejezést ismerünk; mert ha az összeget a tagok különbségével szorozzuk, az eredmény a négyzetek különbsége. Az átalakítást tehát a $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ szorzó eszközli. A számlálót és a nevezőt ezzel megszorozzuk:

$$\frac{k}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{k(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{k\sqrt{a} - k\sqrt{b}}{a - b}.$$

Ily módon pl.

$$\frac{2 + 3\sqrt{5}}{6 - \sqrt{5}} = \frac{(2 + 3\sqrt{5})(6 + \sqrt{5})}{(6 - \sqrt{5})(6 + \sqrt{5})} = \frac{27 + 20\sqrt{5}}{31}.$$

E gyöktelenítésnek is nagy hasznát látjuk a gyakorlati számításban, mert a nevezőben levő gyök rendszerint irracionális szám, melyet több tizedesre kellett volna kiszámítanunk és e tizedes törttel kellett volna az osztást elvégeznünk. E helyett pedig egyszerűbb alakú számmal oszthatunk. Így pl. az utolsó esetben $6 - \sqrt{5}$ helyett 31-gyel.

Hasonlókép járunk el, ha több négyzetgyök összege áll a nevezőben. Ha ez pl. 3-tagú összeg:

$$\begin{aligned} \frac{k}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} &= \frac{k(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})} \\ &= \frac{k(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})}{a + b + 2\sqrt{ab} - c} \end{aligned}$$

hol a nevező már csak egy gyökjelt tartalmaz, és így tehát az előbbieket szerint végezhetünk.

Feladatok.

Kiszámítandók, illetőleg egyszerűsítendőek:

1. $\sqrt{a^2}$, $\sqrt{a^4}$, $\sqrt{a^6}$, $\sqrt{a^2b}$, $\sqrt{4a}$, $\sqrt{9a^2b}$, $\sqrt{16a^3b^2}$, $\sqrt{25a^3b^2c}$.
2. $\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{28}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{5x^5}$, $\sqrt{x^3}$.
3. $3\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} - 2\sqrt{72}\sqrt{2}$.
4. $(7\sqrt{2} - 5\sqrt{6} - 3\sqrt{8} + 4\sqrt{20})\sqrt{2}$.
5. $(\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.
6. $(8 + 3\sqrt{5})(2 - \sqrt{5})$.
7. $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})$.
8. $(\sqrt{x} + \sqrt{x-y})(\sqrt{x} - \sqrt{x-y})$.
9. $(-1 + \sqrt{3})^2 + (-1 - \sqrt{3})^2$.
10. $3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{32}$.
11. $2\sqrt{3} + 3\sqrt{\frac{4}{3}} - \sqrt{\frac{16}{3}}$.
12. $\left(\sqrt{5} + \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\sqrt{3}$.
13. $(1 + \sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.
14. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.
15. $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \frac{b}{\sqrt{a}}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{b}} - \sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$.
16. $(\sqrt{x^3} - x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - \sqrt{y^3})(x + \sqrt{xy} + y)$.
17. $(\sqrt{a^2} - a^3 + \sqrt{a^5} - a^2 + \sqrt{a^3} - a + \sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)$.
18. $(\sqrt{x^3} - x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - \sqrt{y^3}) : (\sqrt{x} - \sqrt{y})$.
19. $\left(\sqrt{a^{3n}} - \frac{1}{\sqrt{a^{3n}}}\right) : \left(\sqrt{a^n} - \frac{1}{\sqrt{a^n}}\right)$.

Gyöktelenítendőek a következő törtek, és értékük 3 tizedes jegyre kiszámítandó:

20. $\frac{3 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$.
21. $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.
22. $\frac{2\sqrt{5} + \sqrt{3}}{3\sqrt{5} + 2\sqrt{3}}$.
23. $\frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} - 2\sqrt{5}}$.

Kiszámítandók:

24. $\frac{1}{a - b\sqrt{c}} - \frac{1}{a + b\sqrt{c}}$.
25. $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$.
26. $\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$.

76. **A másodfokú egyenlet.** Az első négy alpművelet elég-séges volt minden elsőfokú egyenlet megoldására; a most tárgyalt művelet — a négyzetgyök kivonása — segítségével az egyenletek tárgyalásában ismét egy lépéssel tovább tudunk menni: megtalálhatjuk minden *másodfokú egyenlet* megoldását. Egyelőre itt csak a legegyszerűbb esetre, az egy ismeretlent tartalmazó egyenletre szorítkozunk.

Amint már az egyenletek első tárgyalásánál említettük, *másodfokúnak* nevezzük az oly (egy ismeretlent tartalmazó) egyenletet, melyben a rendezés után az ismeretlennek csak első és második hatványa fordul elő. A legegyszerűbb másodfokú egyenlet $x^2=A$, melynek megoldásai: *)

$$x_1 = +\sqrt{A}, \quad x_2 = -\sqrt{A}$$

Igy pl.: $x^2=16$ megoldásai: $x_1=4$, $x_2=-4$; $x^2=144$ egyenlet megoldásai $x_1=12$, $x_2=-12$. Az ily egyenletet *tiszta másodfokú egyenletnek* nevezzük, ellentétben az *általános* vagy *vegyes másodfokú egyenlettel*, mely külön tagokban egymás mellett tartalmazza az x -et és az x^2 -t; ilyen volna pl.

$$Px^2 + Qx = A.$$

Az előbbieket szerint *minden tiszta másodfokú egyenlet megoldását el tudjuk végezni.*

Igy pl.

$$x^2=a^2 \text{ egyenlet két gyöke } x_1=a \text{ és } x_2=-a$$

$$p^2x^2=q^2-\epsilon$$

$$x_1 = \frac{q}{p} \text{ és } x_2 = -\frac{q}{p},$$

$$x^2=27-\epsilon$$

$$x_1 = \sqrt{27} \text{ és } x_2 = -\sqrt{27}$$

vagy ebben az utolsó esetben az irracionális számok helyébe behozva a nekik megfelelő közelítő értékeket, pl. három tizedes helyre terjedő pontossággal: $x_1=5.196$ és $x_2=-5.196$.

1. Megoldhatjuk most már a következő egyenleteket is, melyek átvezetnek bennünket a vegyes másodfokú egyenletekhez.

$$(x+3)^2=64.$$

*) Itt az x mellé, jobbról és alúl, ú. n. *mutatót (index)* tettünk, hogy az egyenletnek megfelelő *első és második* értéket, »*egy*» és »*kettő*»-t egymástól megkülönböztethessük.

Valamint előbb x -et, úgy most egyelőre az $(x+3)$ -t tekint-
hetjük ismeretlennek és így tehát a következő két elsőfokú
egyenletre jutunk :

$$x+3=+8 \text{ vagy } x+3=-8.$$

Azaz végre a két gyök: $x_1=5$ és $x_2=-11$. Mind a kettőnél
könnyű meggyőződni, hogy az adott egyenletet valóban ki-
elégitik.

2. A számítás menete elvileg nem változik, ha, mint pl.

$$(x-2)^2=17$$

egyenletnél a négyzetgyök értéke irracionális, tehát a végleges
értéknek megközelítő kifejezésével kell megelégednünk. Itt lesz :

$$x-2=\pm\sqrt{17},$$

$$x=2\pm\sqrt{17}$$

és minthogy a $\sqrt{17}$ pl. 5 tizedesjegyre terjedő pontossággal :
4.12311, lesz végre :

$$x_1=6.12311, \quad x_2=-2.12311.$$

3. A következő egyenletben :

$$x^2+6x-2=0,$$

nem használhatjuk többé az előbbi példában követett eljárást,
mert a baloldalon álló kifejezés nem teljes négyzet. A két első
tag ugyan megfelelne az $x+3$ négyzetének ; de ekkor kellene,
hogy 3-dik tagnak 9 álljon és nem -2 . Azonban ily változtatást
könnyű eszközölni. A két egyenlőnek állított kifejezés egyenlők
hozzáadása után is ilyen marad. Hogy tehát a harmadik tag
9 legyen, adjunk hozzá mind a két oldalon 11-et ; lesz :

$$x^2+6x+9=11,$$

így tehát

$$x+3=\pm\sqrt{11}$$

a $\sqrt{11}=3.31662$ és így :

$$x_1=0.31662, \quad x_2=-6.31662.$$

4. Épp úgy járhatunk el a

$$2x^2-5x=3$$

egyenletnél, ámbár itt már az első tag sem felel meg az eddigi
alaknak. Hogy az első tag x^2 legyen, osszunk mindenekelőtt
2-vel, lesz :

$$x^2-\frac{5}{2}x=\frac{3}{2};$$

most már ismét megfelel a baloldal $x - \frac{5}{4}$ négyzetének; csak a 3-dik tag hiányzik: $\frac{25}{16}$. Ezt a két oldalon hozzáadjuk. Lesz:

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = \frac{3}{2} + \frac{25}{16}.$$

vagyis:

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

tehát:

$$x - \frac{5}{4} = \pm \frac{7}{4}.$$

Eszerint:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Feladat; Oldjuk meg ilyen módon ezeket a másodfokú egyenleteket: a) $x^2 - 7x + 12 = 0$; b) $x^2 - 5x + 14 = 0$; c) $x^2 + 3x + 40 = 0$; d) $x^2 - 8x + 7 = 0$; e) $x^2 + 24x + 25 = 0$.

77. A gyök képlete. Minden másodfokú egyenlet rendezéssel a következő alakra hozható:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Ha ezt az egyenletet megoldjuk, akkor egyúttal olyan eljárást állapítunk meg, amellyel *minden* másodfokú egyenlet gyökét meghatározhatjuk, mert hiszen a , b és c tetszés szerinti számok. Ezzel tehát a másodfokú egyenlet gyökének *képletét* kapjuk meg. Ezen egyenlet megoldása céljából osszuk el az egyenlet mindkét oldalát a -val. Ezzel az

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

egyenletre jutunk. Az első két tagot, úgy mint eddig tettük, kiegészítjük teljes négyzetté.

$x^2 + \frac{b}{a}x$ az $x + \frac{b}{2a}$ négyzetének első két tagja. Ugyanis:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

Adjunk tehát az $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ egyenlet mindkét oldalához $\frac{b^2}{4a^2}$ -et. Ha még $\frac{c}{a}$ tagot a jobboldalra hozzuk, akkor a megoldandó egyenlet a következő lesz :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Ez még így is írható (a jobboldalon közös nevezőre hozva) :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

és ha most mindkét oldalon gyököt vonunk :

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

és innen az adott egyenlet két gyöke :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ezek az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei, vagyis a másodfokú egyenlet gyökeinek *képletei*, melyeket jó lesz emlékezetben tartanunk. Lássuk e képlet alkalmazását. 1. Ha pl. a következő egyenletet kell megoldani :

$$5x^2 - 3x - 14 = 0$$

akkor

$$a = 5, \quad b = -3, \quad c = -14.$$

tehát :

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{9 + 280}}{10} = \frac{3 + \sqrt{289}}{10}$$

és

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{289}}{10}.$$

Mínthogy $\sqrt{289} = 17$, tehát :

$$x_1 = \frac{3 + 17}{10} = 2.$$

$$x_2 = \frac{3 - 17}{10} = -\frac{14}{10} = -\frac{7}{5}.$$

Próba :

$$a) 5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 14 = 20 - 6 - 14 = 0,$$

$$b) 5 \cdot \left(\frac{-7}{5}\right)^2 - 3 \cdot \frac{-7}{5} - 14 = \frac{49}{5} + \frac{21}{5} - 14 = 0.$$

2. Oldjuk meg ezt az egyenletet :

$$2x^2 - 3x = 9.$$

Jól ügyeljünk arra, hogy a képletünk az

$$ax^2 + bx + c = 0$$

alakú egyenletre, vagyis olyan egyenletre vonatkozik, melynek jobboldalán 0 áll. Előbb tehát az adott egyenletet ilyen alakra kell hoznunk. A 9-et evégből áthozzuk a baloldalra. Az egyenlet :

$$2x^2 - 3x - 9 = 0$$

lesz. Most tehát :

$$a = 2, \quad b = -3, \quad c = -9.$$

Eszerint :

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{9 + 72}}{4} = \frac{3 + 9}{4} = 3$$

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{9 + 72}}{4} = \frac{3 - 9}{4} = -\frac{3}{2}$$

3. Oldjuk meg az

$$x^2 + px = q$$

egyenletet. Ezt megint előbb

$$x^2 + px - q = 0$$

alakban írjuk. Itt tehát :

$$a = 1, \quad b = p, \quad c = -q,$$

tehát :

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}, \quad x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

Az x_1 -et még így is írhatjuk :

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 + 4q}}{2},$$

vagy ha a 2-vel osztást úgy végezzük, hogy a gyökjel alatt 4-gyel osztunk :

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$$

Éppen így :

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$$

4. Oldjuk meg pl. ezt az egyenletet :

$$\left(\frac{x+12}{x+5}\right)^2 = 4.$$

Most előbb rendezzük. A négyzet kiszámítása után :

$$\frac{x^2 + 24x + 144}{x^2 + 10x + 25} = 4.$$

a törtet eltávolítva :

$$x^2 + 24x + 144 = 4x^2 + 40x + 100.$$

Véglegesen rendezve, még pedig, hogy a négyzetes tag előjele pozitív legyen, mindjárt fölcserélve a két oldalt :

$$3x^2 + 16x - 44 = 0.$$

Itt $a=3$, $b=16$, $c=-44$, tehát :

$$x_1 = \frac{-16 + \sqrt{256 + 528}}{6} = \frac{-16 + \sqrt{784}}{6}.$$

De $\sqrt{784}=28$, tehát :

$$x_1 = \frac{-16 + 28}{6} = 2.$$

Éppen így :

$$x_2 = \frac{-16 - 28}{6} = -\frac{44}{6} = -\frac{22}{3}.$$

5. A következő egyenletben :

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

$a=1$, $b=1$, $c=1$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}},$$

ahol további számításról nem lehet szó, mert a négyzetgyökvonás képzetes számhoz vezet ; legfőlebb még külön-külön négyzetgyököket vonva a számlálóból és nevezőből, a számlálóban -3 -at $(-1)3$ -nak írva, és a $\sqrt{-1}$ -et i -vel jelölve :

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2},$$

azaz :

$$x_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Ennek az egyenletnek tehát nincs valós gyöke, hanem mind a két gyöke képzetes.

6. Legyen adva a következő egyenlet :

$$\frac{x^2-4}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}.$$

Akkor a törtek eltávolítása végett $(x-2)(x-3)$ -mal szorozva :

$$x^2-4 = x-3 + x-2.$$

Rendezve :

$$x^2-2x+1=0.$$

Tehát $a=1$, $b=-2$, $c=1$.

$$x = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1 \pm \sqrt{0},$$

tehát $x_1=1$ és x_2 szintén $= 1$. Ebben az esetben a megoldások, melyek rendszerint különböző értékek, egyenlők lesznek, és így kivételesen csak egy számérték van, mely az egyenletet kielégíti, az 1.

78. A különböző esetek felsorolása. A másodfokú egyenletek megoldásában föllépő különböző esetek az eddigi példák által jellemezve vannak.

Ha a négyzetgyök jele alatt álló mennyiség b^2-4ac pozitív, a gyökök pozitív vagy negatív egész, tört vagy irracionális számok.

Ha ez a kifejezés negatív, mind a két gyök képzetes.

Ha végre ennek a kifejezésnek értéke éppen 0, a két különböző érték, mely az egyenletnek megfelel, egybeolvad és így tulajdonképpen csak egy gyöke volna. Hogy azonban ama szabálynak, mely szerint minden másodfokú egyenletnek két gyöke van, általános érvényességét megőrizhessük, ebben az esetben azt mondjuk, hogy az egyenletnek két egyenlő gyöke van.

Feladatok.

1. $x^2-4x+3=0.$

2. $x^2-5x+4=0.$

3. $6x^2-13x+6=0.$

4. $3x^2-7x=20.$

5. $2x^2-7x+3=0.$

6. $3x^2-53x+34=0.$

7. $x^2+10x+24=0.$

8. $7x^2-3x=160.$

9. $14x - x^2 = 33.$

10. $2x^2 - 2x - \frac{3}{2} = 0.$

11. $x^3 - 3 = \frac{1}{6}(x - 3).$

12. $4(x^2 - 1) = 4x - 1.$

13. $110x^2 - 21x + 1 = 0.$

14. $780x^2 - 73x + 1 = 0.$

15. $(x-1)(x-2) = 6.$

16. $(3x-2)(x-1) = 14.$

17. $(3x-5)(2x-5) = (x+3)(x-1).$

18. $(x-1)(x-2) + (x-2)(x-4) = 6(2x-5).$

19. $(5x-3)^2 - 7 = 44x + 5.$

20. $(x-7)(x-4) + (2x-3)(x-5) = 103.$

21. $\frac{5}{7}x^2 + \frac{7}{5}x + \frac{73}{140} = 0.$

22. $\left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{3}\right) + \left(x - \frac{1}{3}\right) \left(x - \frac{1}{4}\right) = \left(x - \frac{1}{4}\right) \left(x - \frac{1}{5}\right).$

23. $\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}.$

24. $\frac{5x}{21}(x+1) - \frac{1}{7}(2x^2 + x - 1) = \frac{4}{35}(x+1).$

25. $\frac{6}{x} + \frac{x}{6} = \frac{5(x-1)}{5}.$

26. $\frac{x}{15} + \frac{40}{3(10-x)} = \frac{3(10+x)}{95}.$

27. $\frac{x^2 - 5x}{x+3} = x - 3 + \frac{1}{x}.$

28. $\frac{x+3}{x+2} + \frac{x-3}{x-2} = \frac{2x-3}{x-1}.$

29. $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{2(x+3)}{x-3}.$

30. $10(2x+3)(x-3) + (7x+3)^2 = 20(x+3)(x-1).$

31.*) $\frac{1}{x-8} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+8} = 0.$

Ha a második egyenlet együtthatói betűkből vannak összeállítva, a tárgyalás nem változik. Így pl. ebben az egyenletben:

$$x^2 - 2ax = b^2 - a^2$$

*) Legcélszerűbb ebben az alakban írni:

$$\frac{1}{x-8} + \frac{1}{x+8} = -\left(\frac{1}{x-6} + \frac{1}{x+6}\right)$$

és mindenik oldalon külön végezni a törtek összeadását.

Itt az x^2 együttthatója az előbb a -val jelölt szám : 1, a b -vel jelölt : $-2a$, a c -vel jelölt pedig $a^2 - b^2$ [$(b^2 - a^2)$ a baloldalra viendő !]

$$x = a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - a^2} = a \pm b,$$

vagyis $x_1 = a + b$, $x_2 = a - b$.

$$32. \quad x^2 - 2ax + b^2 = 0.$$

$$33. \quad (3a^2 + b^2)(x^2 - x + 1) = (3b^2 + a^2)(x^2 + x + 1).$$

$$34. \quad \frac{1}{(x-a)} + \frac{1}{(x-b)} + \frac{1}{(x-c)} = 0.$$

$$35. \quad \frac{1}{a+b+x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}.$$

$$36. \quad (ax-b)(bx-a) = c^2.$$

$$37. \quad \frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = \frac{2c}{x-c}.$$

$$38. \quad (c+a-2b)x^2 + (a+b-2c)x + (b+c-2a) = 0.$$

$$39. \quad \frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} + \frac{x+c}{x-c} = 3.$$

$$40. \quad \frac{a+c(a+x)}{a+c(a-x)} + \frac{a+x}{x} = \frac{a}{a-2cx}.$$

41. Oldjuk meg az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletet és mutassuk meg,

$$\text{hogy } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

42. Mutassuk meg, hogy $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Fejezzük ki szavakkal e két

összefüggést.

79. Két ismeretlenű egyenletrendszer. Két ismeretlen meghatározására két egyenletre van szükségünk, mint az elsőfokú egyenleteknél láttuk. Oly kétismeretlenű egyenletrendszerrel foglalkozunk, mely másodfokú egyenletre vezet.

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert :

$$x + 2y = 17$$

$$x^2 + y^2 = 58.$$

Az első egyenletből (az elsőfokúból) az egyik ismeretlent kifejezzük és e kifejezést a második egyenletbe helyettesítjük :

$$x = 17 - 2y,$$

ezt betéve a második egyenletbe :

$$(17 - 2y)^2 + y^2 = 58,$$

azaz :

$$289 - 68y + 4y^2 + y^2 = 58$$

ered, miből :

$$5y^2 - 68y + 231 = 0$$

s ebből $y_1 = 7$; $y^2 = \frac{33}{5}$. Az x értékeit úgy határozzuk meg, hogy y ezen megtalált értékeit x kifejezésébe $(17 - 2y)$ helyettesítjük.

$$\text{Eszerint : } x_1 = 17 - 14 = 3 \text{ és } x_2 = 17 - \frac{33}{5} = \frac{52}{5}.$$

Az egyenletrendszer megoldása tehát $x_1 = 3$, $y_1 = 7$ és $x_2 = \frac{52}{5}$, $y_2 = \frac{33}{5}$.

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert :

$$x(y-1) = 10$$

$$y(x-1) = 12.$$

Az első egyenlet $xy - x = 10$, miből $x = \frac{10}{y-1}$ értékét a második egyenletbe helyettesítjük :

$$\frac{10y}{y-1} - y = 12$$

$y-1$ -gyel az egyenlet mindkét oldalt szorozva :

$$10y - y^2 + y = 12y - 12,$$

vagyis :

$$y^2 + y - 12 = 0,$$

melynek gyökei : $y_1 = 3$; $y_2 = -4$; ebből pedig $x_1 = 5$, $x_2 = -2$. Az egyenletrendszer megoldása tehát $x_1 = 5$, $y_1 = 3$ és $x_2 = -2$, $y_2 = -4$.

Oldjuk meg ezen egyenletrendszereket :

$$1. \quad 2x + 3y = 18$$

$$xy = 12.$$

$$2. \quad 9x + y = 70$$

$$x^2 + y^2 = 50.$$

$$3. \quad x : y = 9 : 4$$

$$x : 12 = 12 : y.$$

$$4. \quad \frac{x}{y} = a.$$

$$xy = 6.$$

$$5. \quad x + y = a$$

$$xy = b.$$

$$6. \quad \frac{x+1}{y+1} = 2.$$

$$\frac{x^2+1}{y^2+1} = 5.$$

80. Másodfokú egyenletre vezető tárgyi feladatok. A másodfokú egyenlet is számos, a legkülönbözőbb körökből vett feladatnak algebrai kifejezését adja. Ismét az eredetileg szavak-

ban fogalmazott feladattól át kell térnünk az egyenletre, azaz algebrailag jellemezve a feladatban foglalt számviszonyokat, *fözlállítjuk a megfelelő egyenletet*. Az erre vonatkozó szabályok ugyanazok mint előbb, amiért itt már kevesebb példa elég lesz az eljárás begyakorlására.

1. *Több szegény közt kiosztanak 14 K 40 fillért; ha kettővel kevesebb szegény lett volna, mindegyik 10 fillérrel többet kapott volna; hányan voltak?*

Legyen a részesítettek száma: x ; mindegyik kapott $\frac{1440}{x}$ fillért; ha kettővel kevesebb lenne, mindegyiknek jutna $\frac{1440}{x-2}$, és ez 10 fillérrel több az $\frac{1440}{x}$ -nél, tehát:

$$\frac{1440}{x-2} = \frac{1440}{x} + 10.$$

A törtek eltávolítására $x(x-2)$ -vel szorozva lesz:

$$1440x = 1440x - 2880 + 10x^2 - 20x.$$

Rendezve:

$$10x^2 - 20x - 2880 = 0,$$

és tízzel osztva:

$$x^2 - 2x - 288 = 0.$$

Ebből végre: $x_1 = 18$, $x_2 = -16$. Míg azonban az egyenletnek megfelel mind a két érték, a feladat értelmének csak x_1 tesz eleget; mert személyek száma nem lehet negatív. — Így tehát a szegények száma 18 volt. Ekkor ugyanis mindegyik kap 80 fillért; ha pedig kettővel kevesebb volna, azaz 16, mindegyik kapna 90 fillért.

2. *Mekkora az egyes oldalak hossza ama derékszögű paralelogrammban, melynek kerülete 10 méter, területe pedig 15 négyzetméter.*

Két-két szemközti oldal egyenlő hosszú; legyen az egyik oldal hossza: x , akkor a másik oldalpár együttesen $10-2x$ méter hosszú, egy-egy oldal ezek közül tehát: $5-x$. A terület $x(5-x)$ és így az egyenlet:

$$x(5-x) = 15.$$

Rendezve:

$$x^2 - 5x + 15 = 0.$$

Ebből pedig :

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 15},$$

vége : $x_1 = \frac{5+i\sqrt{35}}{2}$, $x_2 = \frac{5-i\sqrt{35}}{2}$; azaz mind a két gyök

képzetes; mintbogy pedig a keresett meghatározás hossza vonatkozik, melynek kifejezését csak pozitív szám adja, ama geometriai feladat *lehetetlenséget követel*. Ha azonban a terület 15 négyszögméter helyett 6 négyszögméter volna, akkor

$$x(5-x) = 6$$

egyenlet megoldása : $x_1 = 2$; $x_2 = 3$. A derékszögű négyszög egyik oldala 2 méter; de akkor a másik oldal $5-2=3$ méter. Ha pedig a derékszögű négyszög egyik oldalának $x_2=3$ -at vesszük, akkor a másik oldal $5-3=2$ m, tehát voltaképpen csak egy derékszögű négyszög felel meg a követelésnek.

Feladatok.

1. A 60-at két részre felbontani, úgy hogy a részek szorzata egyenlő legyen —864-gyel.

Ha az egyik rész x , a másik $60-x$ s u. t.

2. Két szám összege 60; négyzeteik összege 1872; melyek e számok?

3. Két szám különbsége 6, szorzatuk 720; melyek e számok?

4. Három szám közül a második kétharmada az elsőnek; a harmadik pedig az elsőnek fele; négyzeteik összege 549; micsoda három szám ez?

5. Két szám különbsége 2; négyzetének összege 244; melyek e számok?

6. Két részre bontani a 10-et, úgy hogy e részek négyzeteinek és szorzatuknak összege 76 legyen.

7. Valamely számhoz hozzáadva négyzetgyökének egyik értékét, 210-et nyerek; melyik e szám?

(Ismeretlennek a négyzetgyökök értéke veendő.)

8. Két szám közül egyik a másiknak 16-szorosa; a számok szorzata 144; micsoda két szám ez?

9. Néhány szegény közt kiosztanak 110 métermázsa szemet; ha egy-

egy mázsával többet adnak, akkor éppen annyi mázsát kapott volna mindegyik, mint ahány személy közt történt a kiosztás. Hányan voltak?

10. Néhány ember a vendéglőben együtt ebédelt; számlájuk kitett 17 K 50 fillért. Kettő közülök nem fizetett és e miatt a többinek egy koronával többet kellett fizetni mint különben. Hányan voltak?

11. Egy medence két csövön át tölthető meg. Az első cső segítségével 6 órával gyorsabban telik meg mint a másikkal. Ha mind a kettőt kinyitjuk, a medence négy óra alatt telik meg. Meddig tart a megtöltés egy-egy csőn?

12. Egy kereskedő 675 korona ára cukrot vett és ennek métermázsáját eladja 48 K-ért. Az egészen éppen annyit nyert, mint amennyibe egy métermázsza került. Hány métermázsát vett?

13. A és B együtt elvégeznak valami munkát $14\frac{2}{5}$ nap alatt. Aztán külön-külön vállalják ugyane munkát; ekkor A 12 nappal előbb lesz kész mint B ; mennyi idő kellett mindegyiknek?

14. Valaki kibérel néhány hold földet 672 koronáért; négy holdat maga művel, a többit pedig tovább kiadja bérbe, még pedig 4 koronával drágábban. Így aztán éppen ingyen bírja a négy holdat. Hány holdat bérelt?

15. Két szám szorzata 750; e számok hányadosa $3\frac{1}{3}$; melyek e számok?

16. Két irtók közül az egyik bizonyos idő alatt 48 koronát szerez; a másik, ki hat nap nem dolgozott, 27 K-t; ha azonban az első mulasztja a hat napot, a másik pedig az egész idő alatt dolgozik, egyenlő összeg járt volna mind a kettőnek. Meddig dolgoztak és mennyi mindegyiknek a napidija?

17. Egy négyzet oldala 110 cm; mily hosszú és széles az a derékszögű paralelogramm, melynek kerülete 4 cm-rel nagyobb mint a négyzeté, míg területe emezénél 4 cm^2 -rel kisebb?

18. Egy négyzet két szemközti oldalát 3 méterrel megnyújtjuk. Az így keletkezett derékszögű négyszög területe 70 m^2 . Mekkora volt a négyzet oldala?

19. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 7 m-rel nagyobb mint a másik. Átfogója 13 m. Mekkora a befogók?

20. Egy derékszögű háromszög átfogója 5 m; területe 6 m^2 . Mekkora a befogói?

21. Egy derékszögű háromszög befogóinak összege 31 m, átfogója 25 m. Mekkora a befogók?

22. Egy derékszögű négyszög kerülete 126 m. Átlója 45 m. Mekkora a hossza, szélessége?

23. Két négyzetalakú udvar, melyek közül az egyik 7 m-rel nagyobb oldalú mint a másik, együtt 1429 m² területű. Mekkora mindenikük?

24. Egy derékszög szárain a csúctól elindul egy-egy pont; az egyik 22 perccel később mint a másik. Hány perc múlva lesznek egymástól 275 m-nyi távolságban, ha az első percenként 7 m-nyi, a másik 8 m-nyi utat tesz meg?

25. Egy derékszögű háromszög befogói oly arányban vannak, mint 5 : 12; az átfogója 16 méterrel kisebb mint a befogók összege. Melyik ez a háromszög?

26. Egy derékszögű háromszög befogói oly arányban vannak mint 8 : 15; ha a kisebbik befogót 16 méterrel nagyobbítjuk és a másikat 3-mal kisebbítjük, akkor az átfogó 7 méterrel növekszik. Mekkora a befogók?

27. Egy derékszögű háromszög befogói oly arányban vannak, mint 3 : 4; ha a kisebbiket 15 m-el, a nagyobbikat pedig 6 m-rel növeljük, az átfogó megkétszereződik. Melyik ez a háromszög?

28. Egy derékszögű háromszög kerülete 40 m; ha az egyik befogót 4 méterrel, a másikat pedig 1 méterrel nagyobbítjuk, akkor az átfogó 3 méterrel nő. Mekkora e háromszög oldalai?

29. Egy a méter hosszúságú egyenes vonal két részre osztandó úgy, hogy az egyik részre alapított négyzet kétszer akkora legyen mint az egész vonal és a másik részből alkotott derékszögű négyszög területe. Mekkora a részek?

30. Kiszámítandók egy derékszögű háromszög oldalai, ha az átfogó a és a befogók összege l .

31. Egy derékszögű háromszög átfogója a és az átfogóra bocsátott magasság m . Mekkora az oldalai?

32. Valaki 1300 koronát kikölcsönöz, még pedig két részben különböző kamatláb mellett úgy, hogy a két rész egyenlő jövedelmet hoz. Az első rész a második kamatlába mellett 36 koronát hozna, a második pedig, úgy kamatoztatva mint az első rész, 49 K-t. Mi az egyes részeknek megfelelő kamatláb?

33. Valaki kikölcsönzött 5000 K-t bizonyos kamatláb mellett; az év végén a kamatot 25 korona híján a tőkéhez csatolja és így a második év végén a tőke felszaporodott 5382 koronára. Mi a kamatláb?

34. Úgyanazon időben indul a gyorsvonat Budapestről Bécsbe és egy közönséges vonat Bécsből Budapestre. Útközben találkoznak és e találkozás után a gyorsvonat 2 óra 24 perc, a közönséges vonat pedig 5 óra 24 perc múlva ér céljához. Meddig ment mindegyik? [A gyorsvonat a találkozásig az egész távolság x -szeresét teszi meg, a

szem. vonat az $1-x$ -szeresét, a sebességeik aránya tehát: $\frac{x}{1-x}$.

Másrészt: a gyorsvonat a hátralevő $1-x$ -szeres útát 144 perc alatt futja be; tehát percenként $\frac{1-x}{144}$ részt tesz meg; a személyvonat a neki

hátralevő x -szeres útát 324 p. alatt, vagyis percenként $\frac{x}{324}$ részét teszi

meg az útnak. A sebességeik aránya tehát: $\frac{324(1-x)}{144x}$. Folytassuk.]

35. Vásároltunk árut, melyet 21 koronáért adunk el. Annyi %-ot vesztítettünk, ahány koronába az áru kerül. Mennyibe került ez az áru?

36. Egy kétjegyű szám jegyeinek összege 11. Ha e jegyeket fölcseréljük és az így nyert számot az eredetivel szorozzuk, szorzatul 3154-et kapunk. Melyik e kétjegyű szám?

37. Egy kétjegyű szám jegyeinek összege 5. Ha e jegyeket fölcseréljük és az eredeti meg az új szám négyzeteit összeadjuk, 1553-at kapunk. Melyik ez a kétjegyű szám?

XI. A köbgyök.

81. Pozitív szám n -edik gyöke. A megelőző fejezetben a gyökkvonásnak legegyszerűbb esetével foglalkoztunk, midőn t. i. a gyökkitevő 2. Azt a számot, melynek n -edik hatványa A , $\sqrt[n]{A}$ -val jelöljük. Mit jelent $\sqrt[3]{A}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[4]{B}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt[5]{A+B}$, $\sqrt[3]{2x}$?

A következőkben nem szabad soha szem elől tévesztenünk, hogy $\sqrt[n]{A}$ — mint ezt a legegyszerűbb eset ($n=2$) vizsgálatából már tudjuk — *töbértékű lehet és csak kivételesen fejezhető ki a valós és racionális számok által.*)*

*) A töbértékűséggel itt részletesebben nem foglalkozunk. Példaképpen megemlítjük, hogy pl.: $\sqrt[4]{16}$, mely azt a számot jelenti, melynek negyedik hatványa 16, lehet 2, -2 , $2i$, $-2i$.

Itt is először a pozitív szám n -edik gyökével foglalkozunk.

Az első kérdés, amelyre megfelelünk, ez: Ha P pozitív egész szám, van-e a $\sqrt[n]{P}$ -nek is pozitív értéke?

Tüstént látni, hogy a pozitív egész számok két különböző osztályba sorozhatók; még pedig az első osztályba tartoznak mind-azok, melyeknél az n -edik gyök egy értéke pozitív egész szám, a másodikba azok, melyeknek nincs meg e tulajdonságuk. Az első osztályba tartozó számokat teljes n -edik hatványoknak mondjuk.

Igy pl. 27 teljes 3-ik hatvány, 64 teljes 6-ik hatvány (2-nek 6-ik hatványa), 625 teljes 4-ik hatvány (5-nek 4-ik hatványa);

azaz: $\sqrt[3]{27}=3$, $\sqrt[6]{64}=2$, $\sqrt[4]{625}=5$ stb.

Ha azonban valamely pozitív egész szám nem teljes n -edik hatvány, akkor az n -edik gyöke nemcsak hogy nem egész szám, de törtszám sem lehet. Egyik értéke ismét pozitív irracionális szám.

Ha ugyanis P nem teljes n -edik hatvány, és $\sqrt[n]{P}$ egyik értéke törtszám volna, azaz:

$$\sqrt[n]{P} = \frac{a}{b},$$

ekkor megfordítva: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = P$

volna, azaz $\frac{a}{b}$ törtszám n -edik hatványa egész szám; ez azonban

lehetetlen. Az $\frac{a}{b}$ tört fölírásánál ugyanis föltehetjük, hogy ezt

már lehetőleg egyszerűsítettük, azaz: hogy a számlálónak és nevezőnek nincs közös osztója. De akkor a és b -nek nincs

közös osztója, $\frac{a}{b}$ nem egyszerűsíthető és így tehát egész szám

nem lehet. Ebből azonban az következik, hogy kiindulópontunk hamis volt; tehát pozitív egész szám n -edik gyöke nem lehet törtszám.

Ebben az esetben az $\sqrt[n]{P}$ egyik értékének meghatározását (megközelítő kifejezését) a következő értelmezés segítségével nyerem:

Az $\sqrt[n]{P}$ egyik értéke a és b közt fekszik, ha P az a^n és b^n között fekszik. Igy pl. $\sqrt[3]{40}$ 3 és 4 között van, mert $3^3=27$ és $4^3=64$. (P , a és b pozitív számokat jelentenek!)

Ez az értelmezés ismét beigtatja az $\sqrt[n]{P}$ egyik értékét a pozitív számok sorába. Az így nyert érték ismét irracionális szám, melynek törtek által tetszőleges megközelítését nyerhetjük.

82. Egytagúak köbgyöke. Egytagúak köbeire vonatkozólag tanultuk, hogy :

$$1. (ab)^3 = a^3b^3; \quad 2. \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}; \quad 3. (a^m)^3 = a^{3m}.$$

[A tanuló fejezze ki e tételeket szavakkal.]

Az egytagúak köbgyökeire vonatkozólag ezekből következik, hogy :

$$1. \sqrt[3]{AB} = \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B}; \quad 2. \sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}; \quad 6. \sqrt[3]{A^{3n}} = A^n.$$

[Fejezze ki a tanuló e tételeket szavakkal.]

A bizonyítás egészen olyan, mint a négyzetgyök esetében.

Igy pl. az első a következőként bizonyíthatjuk :

$\sqrt[3]{AB}$ oly számértéket jelent, melynek harmadik hatványa AB .

$\sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B}$ is ilyen számérték ; mert hiszen :

$$(\sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B})^3 = (\sqrt[3]{A})^3 \cdot (\sqrt[3]{B})^3 = AB.$$

A 2. és 3. alatti tételeket bizonyítsa be a tanuló !

Feladatok.

$$1. \sqrt[3]{27a} = 3\sqrt[3]{a}. \text{ Alakítsuk át ilyen módon a következő kifejezéseket : } \sqrt[3]{8a}, \sqrt[3]{124a^3b}, \sqrt[3]{8a^6b}, \sqrt[3]{64a^6b^3c}, \sqrt[3]{64a^6b^9}, \sqrt[3]{125x^3y^{12}z}, \\ \sqrt[3]{-27}, \sqrt[3]{-64a^3}, \sqrt[3]{125x^6}, \sqrt[3]{-216a^9}.$$

$$2. \sqrt[3]{\frac{8}{27}}, \sqrt[3]{\frac{27}{64}}, \sqrt[3]{\frac{64}{125}}, \sqrt[3]{\frac{125}{216}}, \sqrt[3]{\frac{a^3}{27}}, \sqrt[3]{\frac{8a^3}{27b^3}}, \\ \sqrt[3]{\frac{27a^3b^3}{125c^3}}, \sqrt[3]{\frac{a^3b^3c^6}{8}}.$$

83. Algebrai többtagúak köbgyöke. Többtagú kifejezések esetében most már előre láthatjuk, hogy ama kérdés eldöntésére ; vajjon lehet-e a harmadik gyök értékét általánosságban meghatározni, megint csak azt kell vizsgálnunk, vajjon az adott

kifejezés azon minta szerint van-e készítve, melyet többtagúak harmadik hatványainak számára már kifejtettünk.

A köbgyök kiszámítása általánosságban ismét csak akkor lehetséges, ha az adott kifejezés oly alak, aminőt a köbre emelésnél nyertünk. Így pl. világos, hogy

$$\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b.$$

Ellenkezőleg $\sqrt[3]{a+b}$ vagy $\sqrt[3]{a^2+2ab+b^2}$ esetében a köbgyökvonás nem eszközölhető, mert egytagú kifejezés köbe ismét egytagú, kéttagúé pedig már 4 tagból áll. Hogy megítélhessük, vajjon az adott kifejezés teljes köbnek tekinthető-e, vagy sem, összehasonlítjuk ezt a köbreemelésnél nyert alakzatokkal, vajjon követi-e az ezekben létező törvényt?

Mindenekelőtt a megvizsgálandó kifejezést itt is valamely betű fogyó vagy növekedő hatványai szerint rendezzük; mert a köbreemelésnél is ily rendezett alakot nyertünk. Hogy az eljárásra kész szabályt kapjunk, legjobb lesz a viszonyokat egy pár példán áttekinteni. Kerestetik pl. a

$$8x^6 + 36x^4y^2 + 54x^2y^6 + 27y^9$$

köbgyöke. Ha e kifejezés teljes köb, akkor első tagja nem más, mint a köbre emelt kifejezés első tagjának köbe, s eszerint a

keresett *alap* első tagja $\sqrt[3]{8x^6} = 2x^2$; de ekkor továbbá a köb második tagja nem egyéb, mint a máris meghatározott tag 3-szoros négyzetének szorzata a még ismeretlen második taggal. Ha tehát az adott köb második tagját elosztom a $3(2x^2)^2 = 12x^4$ -el, a keresett köbgyöknek második tagját nyerem. Ez

tehát $\frac{36x^4y^2}{12x^4} = 3y^2$. De ekkor kell, hogy a teljes köb még a $3 \cdot 2x^2(3y^2)^2 = 54x^2y^6$ és $(3y^2)^3 = 27y^9$ tagokat tartalmazza. Valóban ezek a tagok foglaltatnak még az adott kifejezésben, és így a keresett köbgyök értéke: $2x^2 + 3y^2$.

Az egész eljárást az osztáshoz hasonló mintában összeállítva, lesz:

$$\sqrt[3]{8x^6 + 36x^4y^2 + 54x^2y^6 + 27y^9} = 2x^2 + 3y^2$$

$8x^6$

$$36x^4y^2 + 54x^2y^6 + 27y^9 : 12x^4$$

$$36x^4y^2 + 54x^2y^6 + 27y^9$$

0

A szabályt most már a következőkép fogalmazhatom: *Hogy valamely kifejezés teljes köb legyen, kell hogy első tagja egymagában is ilyen legyen; ha ez úgy van, emez első tag köbgyöke a keresett köbgyöknek első tagja lesz; a második tagot megkapom, ha az adott kifejezés második tagját a köbgyök máris nyert első tagjának 3-szoros négyzetével elosztom. A köbnek már tekintetbe vett tagját mindig kivonom. Képezem tehát még az első tagnak és a második tag négyzetének 3-szoros szorzatát, valamint a második tag köbét és ezeket is kivonom. Ha a kivonásnál a maradék 0, a köbgyök meghatározása be van fejezve.*

Ha a maradék nem 0, az eddig megvizsgált tagokat egynek veszem, és minthogy e 4-tagú kifejezésnek a köbgyökét már meghatároztam, épp úgy folytatom a dolgot, mint előbb.

Ha azonban az adott kifejezés minden tagját már fölhasználtam és a maradék nem 0, akkor világos, hogy a kifejezés nincs a teljes köb mintájára képezve, és így tehát a köbgyökvonás nem is eszközölhető.

Lássunk most még egy példát, hol a nyerendő köbgyök 3-tagú kifejezés.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt[3]{\frac{8x^6 - 36cx^5 + 66c^2x^4 - 63c^3x^3 + 33c^4x^2 - 9c^5x + c^6}{8x^6}} = 2x^2 - 3cx + c^3 \\
 \underline{-36cx^5 + 66c^2x^4 - 63c^3x^3 : 12x^4} \\
 -36cx^5 + 54c^2x^4 - 27c^3x^3 \\
 \underline{12c^2x^4 - 36c^3x^3 + 33c^4x^2 - 9c^5x + c^6 : (12x^4 - 36cx^3 + 27c^2x^2)^*} \\
 12c^2x^4 - 36c^3x^3 + 27c^4x^2 \text{ **)} \\
 \underline{6c^4x^2 - 9c^5x + c^6 \text{ ***)}} \\
 0
 \end{array}$$

A számítás menete itt teljes hasonlóságot mutat avval, melyet már a négyzetgyök kivonásánál használtunk; az eljárás csak azáltal bonyolódik némileg, hogy a kivonandók ($3a^2b$, $3ab^2$, a^3) képzése itt több mellékes számítást követel.

*) Az osztó a már megtalált $2x^2 - 3cx$ 3-szoros négyzete; u. i.:

$$3(2x^2 - 3cx)^2 = 12x^4 - 36cx^3 + 27c^2x^2.$$

**) Ez a levonandó a $2x^2 - 3cx$ 3-szoros négyzete, szorozva a harmadik taggal c^2 -al.

***) Ez a két részből álló levonandó a c^2 3-szoros négyzete, szorozva a $2x^2 - 3cx$ -el + a harmadik tag köbe.

Feladatok.

Meghatározandó a következő kifejezések köbgyöke :

1. $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$.
2. $1728x^6 + 1728x^4y^3 + 576x^2y^6 + 64y^9$.
3. $x^6 - 9x^5 + 33x^4 - 63x^3 + 66x^2 - 36x + 8$.
4. $x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1$.
5. $x^6 - 3ax^5 + 5a^3x^3 - 3a^5x - a^6$.
6. $8x^6 + 48cx^5 + 60c^2x^4 - 80c^3x^3 - 90c^4x^2 + 108c^5x - 27c^6$.
7. $1 - 9x + 39x^2 - 99x^3 + 156x^4 - 144x^5 + 64x^6$.
8. $1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 12x^4 - 12x^5 + 10x^6 - 6x^7 + 3x^8 - x^9$.
9. $1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + 64x^6$.
10. $729x^6 - 1458x^5 + 1215x^4 - 540x^3 + 135x^2 - 18x + 1$.

84. **Köbgyök a tizes számrendszerben.** Az algebrai kifejezések köbgyökének kiszámítására vonatkozó eljárást most könnyű szerrel alkalmazhatjuk bármely, a tizes számrendszerben fölirt egész számra vagy tizedes törtre.

Ismét — épp úgy, mint a négyzetgyöknél — előbb *egész számokra vonatkozólag* végezzük feladatunkat.

Minthogy most tulajdonképpen a köbgyökben fellépő egyes számjelek meghatározásáról van szó, először is azt kell tudnunk, hogy a keresendő köbgyök (illetőleg egész számú része) hány számjegyből áll. Erre az előzetes kérdésre könnyen felelhetünk.

Minthogy ugyanis az

1, 10, 100, 1000, s u. t.

köbei :

1, 1000, 1000000, 1000000000, s u. t.

megfordítva látni, hogy az

1 és 1000, 1000 és 1000000, 1000000 és 1000000000 s u. t.

közt fekvő számok köbgyökei

1 és 10, 10 és 100, 100 és 1000, s u. t.

között foglalnak helyet. De az 1. és 1000 közt az összes 1, 2 vagy 3 számjegyből álló egész számok foglaltatnak, az 1000 és 1000000 közt a 4, 5 vagy 6 számjegyből állók, az 1000000 és 1000000000 közt a 7, 8 vagy 9 számjegyet tartalmazók. Vagy általánosságban :

Ha valamely számban a számjegyek száma 3-mal osztható, köbgyökének egész számú részében a számjegyek száma éppen haramada a köb számjegyeinek; ha pedig a számjegyek száma (a köb-ben) nem osztható 3-mal, akkor helyette e meghatározásnál a hozzá legközelebb fekvő nagyobb és 3-mal osztható számot vesszük, vagyis $3k$, $3k-1$ és $3k-2$ számjegyből álló szám köbgyökében k egész szám van.

Most már térjünk át az egyes számjegyek meghatározására.

Világos, hogy az 1, 2 vagy 3 számjegyből álló számok (1-től 1000-ig) köbgyökeinek egész számú része egy számjegyből áll. Az első tíz egész szám köbét ismernünk kell (éppen úgy, mint a négyzetgyök-kivonásnál az első tíz szám négyzetét), ezeknek tábláját:

Num. :	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
Cubus	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000

különben is célszerű lesz emlékezetben tartani.

A 4, 5 vagy 6 számjeltől álló számnál a meghatározandó köbgyöknek, illetőleg egész számú részének alakja: $a \cdot 10 + b$, hol a és b egyes számjegyeket jelentenek, melyeket egyenként kell meghatározni. Ennek az $a \cdot 10 + b$ alakú számnak köbe $a^3 \cdot 1000 + 3a^2b \cdot 100 + 3ab^2 \cdot 10 + b^3$; ha tehát az adott számot ily alakra tudjuk hozni, akkor a -t és b -t ismerjük. Ha ez nem lehetséges, a szám nem lévén teljes köb, eljárásunk mégis szolgáltatja azt a számot, melynek köbe legközelebb áll az adott számhoz, és még ennél kisebb, azaz adja a köbgyök egész számú részét.

A további tárgyalást legjobb lesz ismét egyes példához fűzni. Legyen például meghatározandó $\sqrt[3]{274625}$. Az $a^3 \cdot 1000$ benne van 274.000-ben, vagy minthogy a 1 és 9 közt fekszik, a legfőlebb a 274-hez legközelebb álló, de ennél nem nagyobb teljes köb köbgyöke. Ily köb 216; a tehát legfőlebb 6. Akkor az $a^3 \cdot 1000 = 216000$ és levonva a 274.625-ből, 58625 felel meg a $3a^2b \cdot 100 + 3ab^2 \cdot 10 + b^3$ -nak. A $3a^2b \cdot 100$ ismét benne van az 58600-ban, azaz $3a^2b$ legfőlebb 586, és végre ha ezt az 586-ot elosztom $3a^2$ -tel (jelen esetünkben 108-cal), látom, hogy b legfőlebb 5. (Ha b -t ötnek véve, oly számot nyernénk, melynek köbe 274625-nél nagyobb, áttérnénk $b=4$ -re.) Ha tehát

$b=5$, akkor $3a^2b \cdot 100 = 54000$, $3ab^2 \cdot 10 = 4500$, $b^3 = 125$, és minthogy

$$274625 = 216000 + 54000 + 4500 + 125 = 6^3 \cdot 10^3 + 3 \cdot 6^2 \cdot 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 6 \cdot 5^2 \cdot 10 + 5^3,$$

látni, hogy $\sqrt[3]{274625} = 65$. — A számolási minta összeállítása a következő:

$\begin{array}{r} \sqrt[3]{274.625} = 65 \\ 216000 \\ \hline 58625 : 108 \\ \text{I.} \quad 54000 \\ \quad 4500 \\ \quad 125 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} \sqrt[3]{274.625} = 65 \\ 216 \\ \hline 58625 : 108 \\ \text{II.} \quad 540 \dots = 3 \cdot 6^2 \cdot 5 \\ \quad 450 \dots = 3 \cdot 6 \cdot 5^2 \\ \quad 125 = \dots 5^3 \\ \hline 0 \end{array}$
---	--

Némi egyszerűsítést nyerünk ismét a zérusok elhagyásával, ami által a minta második alakját nyerjük.

Ha most 7, 8 vagy 9 számjelből álló számmal van dolgunk, pl. 109215352 köbgyöke volna meghatározandó, akkor ezt is $109215.1000 + 352$ alakban írhatom, és az egész különbség az előbbivel szemben csak az, hogy a 109215-höz legközelebb álló köböt is már a fent adott módon határozom meg. Az egész eljárás tehát kétszer ismételtetik. Lesz:

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{109.215.352} = 478 \\ 64 \\ \hline 452.15 : 48 \\ 336 \dots = 3 \cdot 4^2 \cdot 7 \\ 588 \dots = 3 \cdot 4 \cdot 7^2 \\ 343 = \dots 7^3 \\ \hline 53923.52 : 6627 (= 3 \cdot 47^2) \\ 53016 \dots = 3 \cdot 47^2 \cdot 8 \\ 9024 \dots = 3 \cdot 47 \cdot 8^2 \\ 512 = \dots 8^3 \\ \hline 0. \end{array}$$

E példák után a szabály általános fogalmazását is fölírhatjuk:

1. Az adott számot, az egyesektől kezdve, három számjegyből

álló osztályokra bontjuk; csak a legmagasabb osztály állhat esetleg kevesebb — egy vagy két — számjegyből.

2. A köbgyök legmagasabb számjegye az a szám lesz, melynek köbe még kisebb mint a legmagasabb osztály, ezt külön számnak olvasva.

3. E köb kivonása után a legközelebbi osztály legmagasabb számjegyét hozzáírjuk a maradékhoz és ezt a számot elosztjuk a köbgyök már is meghatározott részének háromszoros négyzetével. A hányados (egy jegye) a köbgyökben a legközelebbi számjegy. Most a maradékhoz hozzáírjuk az illető osztály többi számjegyeit; és a $3a^2b$, $3ab^2$, b^3 alakoknak megfelelő számokat (mindegyiknek helyét egyvel tovább tolva jobbjelé) kivonjuk a maradékból.

4. Ezt az eljárást ismételjük, míg az adott szám minden osztályát kimerítettük.

5. Ha ekkor a maradék 0, az adott szám teljes köb volt; ha pedig nem, akkor a köbgyökből ily módon csak az egész számú részt nyertük.

Néha a meghatározásnak e módja kelletténél nagyobb számjegyet ad. Ezt észrevevesszük azáltal, hogy a levonás negatív eredményhez vezet; akkor a legközelebbi kisebb számjegyet vesszük, míg végre pozitív maradékot nyerünk.

Ha az adott szám nem teljes köb, akkor az eddigiek szerint a köbgyöknek csak egész számú részét nyerjük. Ha nagyobb pontosság kívántatik, akkor a megközelítést mindjárt tizedes tört alakjában lehet előállítani, azaz a megközelítést $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ -re vinni s ú. t. (épp úgy, mint a négyzetgyöknél tettük).

Ecélből megszorozzuk az adott számot 10^3 , 100^3 , vagy 1000^3 -al, az így nyert szám köbgyökének meghatározzuk egész számú részét, és ezt elosztjuk 10, 100, 1000-rel. A példa áttekintése mutatja, hogy e szabályt így is fogalmazhatjuk:

Ha a köbgyök értékét k tizedes jegyre akarom meghatározni, akkor a számhoz az egyesek után még k három-három zérusból álló osztályt csatolok, és úgy járok el, mintha az így nyert egész számmal volna dolgom. Csakhogy a hozzácsatolt osztályokból nyert számjegyek már nem tartoznak a köbgyök egész számú részeihez, hanem a tizedes tört részét adják.

Igy pl. 400 köbgyökét 2 tizedes jegyre a következő számítás adja:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt[3]{400} = 7.36 \dots \\
 343 \\
 \hline
 570.00 : 147 \\
 441 = 3.7^2.3 \\
 189 = 3.7.3^2 \\
 27 = 3^3 \\
 \hline
 109830.00 : 15987 \\
 95922 = 3.73^2.6 \\
 7884 = 3.73.6^2 \\
 216 = 6^3 \\
 \hline
 1311744 \text{ s. ú. t.}
 \end{array}$$

Ha végre az adott szám, melynek köbgyökét meg kell határozni, nem egész szám, hanem *tizedes tört* része is van, akkor ezt oly közönséges törtnek tekinthetem, melyben a nevező a tíznek valamely 3-mal osztható hatványa, pl. $10^3 = 1.000$, $10^6 = 1.000.000$. Ha az adott szám nincs közvetlenül ily alakban adva, hanem mint pl. 4·56-nál a nevezőben a 10-nek második hatványa áll, a szükséges átváltoztatás egyszerűen az, hogy a tizedes törthöz még egy vagy két zérust hozzácsatolunk, így $4.56 = 4.560 = \frac{4560}{1000}$. Ekkor a nevezőnek köbgyökét közvetlenül ismerem és a végleges szabály a következő lesz :

Ha a tizedes pont után álló számjegyek száma nem osztható 3-mal, akkor ezt zérusok hozzácsatolása által ilyenné kiegészítem ; azután úgy járok el, mintha a tizedes pont nem volna ott ; de a végeredményben a tizedes pont után következő osztályoknak megfelelő számjegyek elé ismét tizedes pontot teszünk.

Eszerint a köbgyökben a tizedes pont után álló számjegyek száma a köbben előforduló tizedes helyek számának 3-adrésze, természetesen, miután ezt a számot a zérusok hozzácsatolása által 3-mal oszthatóvá tettük.

Ha nem teljes köbbel van dolgunk, a zérusokból álló osztályok hozzácsatolása által épp úgy határozunk meg akárhány további számjegyet, mint az előbbi esetben.

$$\begin{array}{l}
 \text{Igy pl. minthogy } \sqrt[3]{109215352} = 478, \text{ lesz továbbá :} \\
 \sqrt[3]{109.215352} = 4.78, \\
 \sqrt[3]{109215.352} = 47.8,
 \end{array}$$

de figyelmeztetjük megint a tanulót, hogy $1092 \cdot 15352$ köbgyöke egészen más szám lesz; a számjegyek egymásutánja ugyanaz itt is, de az osztályok egészen mások.

Feladatok.

Kiszámítandók a következő számok köbgyökei:

19683, 42875, 157464, 226981, 681472.

778688, 2628072, 3241792, 54010152, 60236288.

191102976, 0220348864, 167284151, 1371330631.

20910518875, 91398648466125, 5340104393239,

731189187729, 10970645048.

Az első tíz egész szám köbgyöke meghatározandó 2 tizedes helyre.

XII. Negatív hatványkitevők, számrendszerek.

85. A hatványokra vonatkozó műveletek. Az eddigiekben sokszor volt alkalmunk a hatványokkal való műveletek elvégzésére; de rendszerint csak második és harmadik hatvánnyal volt dolgunk. Most az előzőekben használt eljárásokat általánosabban akarjuk ismertetni.

a) Szorzat hatványa.

$(ab)^5$ -nek értelme az, hogy ab 5-ször veendő tényezőül, azaz

$$(ab)^5 = ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab,$$

de a tényezők sorrendje tetszésszerű, tehát ez úgy is írható, hogy egymásmellé írjuk az a tényezőket és a b tényezőket is, azaz:

$$(ab)^5 = ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = a^5 \cdot b^5.$$

s általában:

$$(ab)^n = ab \cdot ab \dots ab = a \cdot a \dots a \cdot b \cdot b \dots b = a^n b^n,$$

azaz: Szorzat hatványát úgy állíthatjuk elő, hogy a tényezőket külön-külön hatványozzuk és az így nyert hatványokat egymással megszorozzuk.

Ebből egyúttal azt is látjuk, hogy mindegy, akár előbb szorozzuk az a -t b -vel és azután hatványozzuk a szorzatot, akár pedig előbb hatványozzuk egyenként a -t és b -t, azután szorozzuk egymással a hatványokat. A szorzás és hatványozás sorrendje fölcserélhető.

Feladat. Mutassa meg a tanuló e tétel helyességét az esetben, ha a tényezők száma nem 2, hanem 3.

b) Hányados hatványa.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Fejezze ki a tanuló ezt a tételt szavakkal.

c) Egyenlő alapú hatványok szorzása.

$$a^m \cdot a^n = \overset{1}{a} \cdot \overset{2}{a} \cdots \overset{m}{a} \cdot \overset{1}{a} \cdot \overset{2}{a} \cdots \overset{n}{a} = a^{m+n}$$

Egyenlő alapú hatványok szorzata oly hatvány, melynek alapja a közös alap és kitevője a tényezők kitevőinek összege.

Mennyi $a^3 \cdot a^5 \cdot a^8$, $b^2 \cdot b^7 \cdot b^9$, $x^5 \cdot x^m \cdot x^3$, $x \cdot x^n \cdot x^m$?

d) Hatvány hatványozása. Ha a^m -nek az n -ik hatványát kell előállítanunk, akkor tulajdonképpen a^m n -szer veendő tényezőül, azaz:

$$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdots a^m = a^{m+m+m+\cdots+m} = a^{mn}.$$

Valamely hatványt úgy hatványozunk, hogy az alapot a kitevők szorzatával hatványozzuk.

Mennyi $(a^3)^5$, $(a^n)^2$, $(a^5)^m$, $(x^2)^{m+n}$, $[(x^2)^3]^4$, $[(x^3)^m]^n$, $[(5^2)^m]^3$, $[(k^3)^r]^5$.

e) Egyenlő alapú hatványok osztása. Ha m nagyobb az n -nél, akkor

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

mert hiszen:

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^m.$$

Egyenlő alapú hatványok hányadosa oly hatvány, melynek alapja a közös alap és kitevője az osztandó és osztó kitevőinek különbsége.

Igy pl. $a^5 : a^3 = a^2$, $a^8 : a^3 = a^5$ stb.

86. 0 és negatív kitevőjű hatvány. Az eddigiek szerint a^{m-n} jelenti az $\frac{a^m}{a^n}$ hányadost abban az esetben, midőn m az n -nél nagyobb szám. Ebben az osztásnak az a szabálya foglaltatik, hogy ha az osztandó és osztó egyenlő alapú hatványok és az osztandó kitevője nagyobb mint az osztóé, akkor a hányadost megkapjuk, ha a közös alapot az osztandó és osztó kitevőinek különbségére emeljük. Ha azonban m egyenlő n -nel vagy annál kisebb, az a^{m-n} jelzésnek nincs is értelme, mert akkor a hatvány-

kitevő 0 vagy negatív szám; a kitevő pedig azt jelentette, hogy *hányszor* kell az a -t mint szorzót fölírni, tehát *eddig* csakis pozitív egész szám lehetett.

Minthogy az a^{m-n} jel értelme még nincs lefoglalva, ha

$$m=n \text{ vagy } m < n,$$

ezt megállapíthatjuk úgy, hogy az

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \dots\dots\dots \text{I.}$$

képlet, mely az $m > n$ esetben *műveletszabály* kijelentése, a másik két esetben az a^{m-n} jel *értelmezését* szolgáltatja. Így, ha $m=n$, akkor az I. képlet baloldalán álló $\frac{a^m}{a^n} = 1$; és a jobboldalon álló $a^{m-n} = a^0$; tehát megállapodunk abban, hogy az a^0 jel az 1-et jelentse. Eszerint tehát legyen:

$$a^0 = 1.$$

Ha pedig n nagyobb az m -nél, és pedig $n = m + k$, akkor $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+k}}$, mely tört a^m -el rövidíthető; tehát ez esetben az

I. képlet baloldalán álló kifejezés $\frac{1}{a^k}$; a jobboldalon álló pedig: $a^{m-(m+k)} = a^{-k}$; tehát megállapodunk abban, hogy az a^{-k} jel értelme:

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k}.$$

Jegyezzük tehát meg, hogy ezentúl a^0 jel 1-et, a^{-k} pedig $\frac{1}{a^k}$ jelent; azaz valamely szám 0 kitevőjű hatványa: 1 és valamely szám negatív kitevőjű hatványát úgy állítjuk elő, hogy a hatványkitevőben a negatív jelet elhagyjuk, az alap helyett pedig a reciproktól vesszük.

E jelzés még nem lévén lefoglalva, bevezetése minden esetre jogosult. De ez még nem elég, ki kell mutatnunk, hogy a hatványra vonatkozó műveletszabályok ugyanazok maradnak, ha a kitevő zérus vagy negatív egész szám, vagyis más szóval, hogy az *értelmezés általánosítása után a hatványokra vonatkozó műveleti szabályok ezekre az újfajta hatványokra is érvényesek.*

Feladatok. 1. Mennyi: 3^0 , 6^0 , 19^0 , a^{-2} , x^{-1} , a^{-3} , a^{-8} , x^{-m} , u^{-5} ?

2. Irjuk fel negatív kitevőjű hatvány formájában a következő kifejezéseket :

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{x^m}, \frac{1}{a^{m+n}}, \frac{1}{(a+b)^2}, \frac{1}{a^{mn}}.$$

87. Műveletek a 0 és negatív kitevőjű hatvánnyal. Ami a zérus esetét illeti, közvetlenül látni, hogy e képletek értelmében :

$$a^m \cdot a^0 = a^m, \\ (a^0)^n = a^0; (a^m)^0 = a^0.$$

ha ugyanis tekintetbe vesszük, hogy az a^0 értelmezésénél fogva = 1.

Épp így lesz :

$$a^m \cdot a^{-n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

vagyis a alapot fel kell emelnünk a tényezők kitevőinek (az m és $-n$ -nek) összegére; tehát a pozitív kitevők esetében megállapított szorzási szabály érvényes abban az esetben is, midőn egyik tényező kitevője negatív.

Épp így, ha mindkét kitevő negatív :

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-(m+n)}$$

mert :

$$\frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}}.$$

Továbbá a hatvány hatványozására vonatkozó műveleti szabály is érvényben marad. Ezt az állítást igazolandó, kimutatjuk, hogy

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

műveleti szabály fönnáll akkor is, ha az egyik kitevő (x vagy y) negatív, valamint akkor is, ha mindkét exponens negatív. Így :

$$(a^m)^{-n} = a^{-mn},$$

mert :

$$(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}.$$

Hasonlóképpen

$$(a^{-m})^n = a^{-mn},$$

mert :

$$(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}.$$

Vége : $(a^{-m})^{-n} = a^{mn},$

mert : $(a^{-m})^{-n} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n} = \frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} = a^{mn}.$

Jó lesz még egyszer megjegyezni, hogy a negatív hatványkitevőknek az

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k}$$

képletében foglalt értelmezését így is lehet fogalmazni :

Valamely mennyiség $-k$ -adik hatványa nem egyéb, mint e mennyiség k -ik hatványának reciprok értéke.

Figyelemreméltó speciális eset még az a^{-1} , mely az előbbieket szerint egyszerűen az a reciprok értékét jelenti.

Látjuk tehát, hogy az új hatványokkal — a 0 és negatív kitevőjű hatványokkal — éppen úgy kell a műveleteket végeznünk, mint a régiekkel (a pozitív kitevőjűekkel). Ha úgy képzeljük, hogy a művelet elvégzésének módja a pozitív kitevőjű hatvány egy-egy tulajdonsága, akkor azt is mondhatjuk, hogy az új hatványainknak ugyanolyan tulajdonságai vannak, mint a régieknek, vagyis az a^0 és a^{-k} jeleket joggal nevezhetjük *hatványoknak*.

Példák : $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; $3^{-3} = \frac{1}{27}$. Mennyi $5^{-1}, \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$.

88. Fogó hatványok szerint rendezett kifejezések. Valamint a kisebbedő egész számok sorát a zéruson túl folytatjuk a negatív számok bevezetése által, úgy most valamely szám kisebbedő hatványainak sorát is a 0-ik, -1 -ik, -2 -ik hatvány stb. fölírása által bármeddig folytathatjuk. Ha valamely kifejezés az x fogó hatványai szerint volt rendezve, e kifejezés két utolsó tagja az volt, mely x -et csak egyszer, illetőleg már éppen nem tartalmazta mint tényezőt. Ezt az utóbbi tagot most mint az x^0 -ot tartalmazó tagot is jellemezhetjük. Az x^k értelmének most történt tágítása után azonban a tagok fölírását folytathatjuk, x^0 után az x^{-1} -et tartalmazó tagot írva s u. t.

Igy pl. az x fogó hatványai szerint rendezett kifejezés lesz

$$3x^2 + 5x - 1 + 2x^{-1} + 3x^{-2} - 4x^{-3}$$

hol a -1 helyébe a szimmetria kedvéért még $-x^0$ is írható.

Az ily kifejezés most általánosságban az x -nek k -adik hatványával kezdődik és pl. $-l$ -ik hatványáig halad. Ekkor általános alakja :

$$A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \dots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 + \\ + B_1 x^{-1} + B_2 x^{-2} + \dots + B_{l-1} x^{-l+1} + B_l x^{-l}.$$

E kifejezésben az együtthatók jelzésére új írásmódot használtunk. T. i. ahelyett, hogy az egyes hatványok együtthatóit különböző betűkkel jelölnők, itt a kifejezés egész részéhez tartozó összes együtthatókat egy és ugyanazon betűvel, pl. A -val jelöljük, és csak azáltal különböztetjük meg egymástól, hogy ehhez az állandó betűhöz egy helyét jelölő *mutatót*, *indexet* csatolunk. Az $A_1, A_2 \dots A_k$ (olv. A egy A kettő $\dots$) csak úgy egy betűnek veendő, mintha helyette $A, B, C \dots K$ állana. — Hasonlóképp egy betűt használunk az összes tagoknál, melyekben az x negatív hatványkitevővel áll.

A negatív hatványkitevő előfordulta valamely kifejezésben az azokon végzendő műveletnél a számolás szabályait — mint láttuk — teljesen változtatlanul hagyja.

Begyakorlás kedvéért a tanuló számítsa át a következő példasorozatot :

Feladatok.

Számíttassanak ki a következő kifejezések :

1. $(3x^3 + 5x^2 - x^{-1} - 3x^{-2})(2x^2 - x^{-1} - 2x^{-3})$.
2. $(10x^2 + 20x + x^{-2} - 3x^{-3})(x^2 + x + 1 + x^{-1} + x^{-2})$.
3. $(x + x^{-1})(x^2 + x^{-2}) + (x - x^{-1})(x^2 + x^{-2}) + (x + x^{-1})(x^2 - x^{-2})$.
4. $(a_0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + a_3 x^{-3})(b_0 + b_1 x^{-1} + b_2 x^{-2} + b_3 x^{-3})$.
5. $(3 + 2x + 10x^2)^{-1} (2 + x - x^{-1})^{-1}$.
6. $(x^2 + 5x - 6 - 3x^{-1} - x^{-2}) : (x + 1 + x^{-1})$.
7. $(1 + x^{-1})^2$. 8. $(1 + 2x^{-1} + x^{-3})^2$. 9. $(2 - x^{-1})^3$.
10. $(3 - 2x^{-2})^3$. 11. $(2a^{-2} + 3a^{-1}b^{-1} + 2b^{-2})^2$.
12. $\sqrt{y - 4 + 4y^{-1}}$. 13. $\sqrt{(x + x^{-1})^2 - 4(x - x^{-1})}$.
14. $\sqrt{4y^6 - 12y^3 + 25 - 24y^{-3} + 16y^{-6}}$.
15. $\sqrt{\frac{a^4}{4} + a^3 x^{-1} + a^2 x^{-2} - ax - 2 + x^2 a^{-2}}$.

89. **A tizes számrendszer. Oszthatóság 3-mal, 9-cel.** Minden, a tizes számrendszerben fölirt számérték egész szám, tizedestört vagy a kettő összeállításából keletkező vegyes szám, nem egyéb, mint a 10 fogyó hatványai szerint rendezett kifejezés. Így pl. 1034567 részletesen kiírva :

$$1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}.$$

Ez az alak tehát módot nyújt arra, hogy a tizes rendszerben fölirt számokra vonatkozó tételeket, melyeket a számtanban félig tapasztalati úton nyertünk, újból áttekinssük. Az ily vizsgálatok egyszerű példái gyanánt szolgáljanak azok a szabályok, melyek szerint fölismerjük, hogy valamely, a tizes számrendszerben fölirt egész szám osztható-e 2-vel, 4-gyel stb.

a) **Oszthatóság 2-vel, 4-gyel, 8-cal.** Minden egész szám a tizes rendszerben fölírva, a 10 hatványai szerint rendezett összegnek tekinthető. Minden egész szám tehát bizonyos számú egyesek, tizedesek, századok, stb. összege ; tehát ilyen alakú :

$$S = A_k 10^k + A_{k-1} 10^{k-1} + \dots + A_1 10 + A_0$$

ahol az $A_k, A_{k-1} \dots A_1, A_0$ számjegyek mind a 10-nél kisebb pozitív egész számok (vagy 0-ok).

10, 100 stb. osztható 2-vel ; tehát ha A_0 , azaz az *egyesek helyén álló számjegy is osztható 2-vel, akkor a szám is osztható vele.*

100, 1000 stb. osztható 4-gyel, tehát ha $A_1 10 + A_0$ osztható vele, akkor az egész szám is osztható.

Pl. 83948-nál $A_1 10 + A_0 = 4 \cdot 10 + 8 = 48$; tehát a két utolsó jegyből alkotott szám oszthatóságától függ az egész szám oszthatósága 4-gyel.

1000, 10000 stb. oszthatók 8-cal ; tehát ha $A_2 100 + A_1 10 + A_0$ is osztható 8-cal, akkor az egész szám is osztható vele. Pl. 13248-ban $A_2 100 + A_1 10 + A_0 = 200 + 40 + 8 = 248$, vagyis a három utolsó jegyből alkotott szám. Ahelyett tehát, hogy az 5 vagy esetleg többjegyű számot kellene osztanunk 8-cal, csak 3 jegyűt kell osztanunk : *csak a 3 utolsó jegyből alkotott szám oszthatóságától függ a számnak oszthatósága 8-cal.*

b) **Oszthatóság 5-tel, 10-zel.** Hogy valamely szám osztható-e 5-tel, annak a megállapítása végett csak az egyesek helyén álló számot nézzük meg, mert hiszen a 10, 100 stb. mind osztható vele. 10-zel azon számok oszthatók, melyek végén 0 áll.

c) **Oszthatóság 9-cel, 3-mal.** 10 hatványai, azaz a tizes-rendszer egységei nem oszthatók 9-cel; de $10^n - 1$ osztható 9-cel; mert általában

$$(x^n - 1) : (x - 1) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1.$$

vagyis $x^n - 1$ osztható $x - 1$ -gyel.

(Végezd el ezt az osztást!)

Ha itt x helyett 10-et teszünk, akkor azt látjuk, hogy $10^n - 1$ osztható 9-cel. A hányados: $10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1$.

Ha tehát 10-nek valamely hatványát 9-cel osztjuk, maradékul 1-et kapunk. 10 helyett 9+1-et írhatunk; akkor

$$A_1 10 = A_1(9+1) = A_1 \cdot 9 + A_1.$$

Éppen így $A_2 100 = A_2 \cdot 99 + A_2$; $A_3 \cdot 1000 = A_3 \cdot 999 + A_3$ stb., vagyis maga a szám így írható:

$$\dots \underbrace{9999A_4 + 999A_3 + 99A_2 + 9A_1}_{\text{}} + \dots + \underbrace{A_4 + A_3 + A_2 + A_1 + A_0}_{\text{}}$$

Az első rész mindenesetre osztható 9-cel; tehát ha a második rész $\dots + A_4 + A_3 + A_2 + A_1 + A_0$, vagyis a *számjegyek összege is osztható vele*, akkor az egész szám is osztható. Például 4626-nál a jegyek összege $4+6+2+6=18$, 9-cel osztható, tehát a szám is osztható vele; ellenben 5612-nél $5+6+1+2=14$ osztva 9-cel, maradékul 5-öt ad; tehát $5612 : 9$ is maradékul 5-öt ad. Éppen így állapíthatjuk meg, hogy osztható-e a szám 3-mal.

d) **Oszthatóság 6-tal, 12-vel.** Hogy egy szám 6-tal osztható legyen, ahhoz szükséges, hogy 2-vel és 3-mal osztható legyen. Előbb megvizsgáljuk, hogy osztható-e 2-vel, azután pedig, hogy osztható-e 3-mal. Hogy egy szám 12-vel osztható legyen, szükséges, hogy 4-gyel és 3-mal osztható legyen. Előbb megvizsgáljuk, hogy osztható-e 4-gyel, azután pedig, hogy osztható-e 3-mal. Ilyen eljárást követhetnénk annak a megítélésénél is, hogy osztható-e a szám 15-tel, 18-cal.

Midőn ily *ismertető jeleket* keresünk a számok bizonyos tulajdonságaira nézve, ez egyszerűen annyit jelent, hogy az eredetileg adott szám vizsgálatát valamely kisebb szám vizsgálata által kívánjuk pótolni, mely kisebb számot azonban úgy képezzük, hogy a kérdésben lévő tulajdonságra nézve az eredetileg adattal teljesen megegyezzek. Így pl. midőn kérdezem, vajjon 2534712 osztható-e 3-mal, e vizsgálatnál a számot

pótolhatom számjeleinek összege, azaz 24 által; sőt ennek helyébe ismét számjeleinek összegét téve, a 6-ot nyerem, melyen a 3-mal való oszthatóságot minden számítás nélkül láthatom. Ugyane szám mutatja, hogy az eredetileg fölirt 2534712 nem osztható 9-cel.

A nyert oszthatósági föltétel *szükséges és elégséges* föltétel. Hogy mit értünk e kifejezésmód alatt, azt a következő példa mutathatja legjobban.

Annak, hogy valamely egész szám néggyel osztható legyen, *szükséges föltétele*, hogy páros szám legyen; mert ha valamely szám 4-nek többszöröse, akkor okvetlenül páros szám. De e föltétel *nem elégséges*, mert vannak páros számok, pl. 6, 10 s u. t., melyek 4-gyel nem oszthatók.

Annak, hogy valamely egész szám néggyel osztható legyen, *elégséges föltétele*, hogy 8-cal osztható legyen, mert minden szám, mely 8-nak többszöröse, egyszersmind a 4-é is; de a 8-cal való oszthatóság *nem szükséges föltétel*, mert vannak számok, mint pl. 12, 20 s u. t., melyek 4-gyel oszthatók, de 8-cal nem.

Végre annak, hogy valamely szám néggyel osztható legyen, *szükséges és elégséges feltétele* az, hogy a százask helyén és ezen túl álló számjelek elhagyása után megmaradó, száznál kisebb szám a 4-gyel osztható legyen. Mert minden ily szám osztható 4-gyel, és megfordítva, minden számnak, mely 4-gyel osztható, megvan e tulajdonsága.

A választott példa egyszersmind mutatja, hogy a szükséges föltétel magában véve nem mindig elégséges, és megfordítva, az elégséges föltétel magában véve nem mindig szükséges is. — A szükséges föltétel magában foglalhat még a tárgyhoz nem tartozó idegen eseteket, az elégséges föltétel ellenben kizárhatja még az oly esetet is, mely a tárgyalás keretébe tartozik.

90. Tizedes tört átalakítása közönséges törtté. A *tizedes tört* általános alakja, ha a vele összekapcsolt egész számú részt mellőzzük, a következő:

$$B_1 10^{-1} + B_2 10^{-2} + \dots + B_{l-1} 10^{-(l-1)} + B_l 10^{-l}$$

vagy ha a negatív hatványok helyett törteteket írunk:

$$\frac{B_1}{10} + \frac{B_2}{10^2} + \dots + \frac{B_{l-1}}{10^{l-1}} + \frac{B_l}{10^l}$$

hol ismét a B együtthatók csakis a tíz számjel valamelyikét

jelenthetik. A számtanban történt megállapítás szerint ezt a kifejezést azután rövidebben írjuk:

$$\text{Pl.} \quad 0 \cdot B_1 B_2 \dots B_{l-1} B_l \\ 0 \cdot 3047 = \frac{3}{10} + \frac{4}{1000} + \frac{7}{10000},$$

(hol a $\frac{0}{100} = 0$ -t elhagytuk). Itt $B_1 = 3$, $B_2 = 0$, $B_3 = 4$, $B_4 = 7$.

A tizedes tört átalakítása közönséges törtté e fölírásmód mellett egyszerűen úgy történik, hogy közös nevezőre hozunk és összevonunk. Így pl. $0 \cdot 3047 = \frac{3047}{10000}$. Képletben:

$$\frac{B_1}{10} + \frac{B_2}{10^2} + \dots + \frac{B_{l-1}}{10^{l-1}} + \frac{B_l}{10^l} = \frac{B_1 10^{l-1} + B_2 10^{l-2} + \dots + B_{l-1} 10 + B_l}{10^l}$$

Itt a számláló nem egyéb, mint az az egész szám, melyet nyerünk, ha a tizedes törtben előforduló számjegyek egymásutánját egész számnak olvassuk. A nevező pedig 10 hatványa, még pedig ha a tizedes tört l számjegyet foglalt magában, l -dik hatványa. (Tíz l -edik hatványa nem más, mint az l -es számjegy l reá következő zérussal.)

Eszerint minden tizedestört értéke a következő közönséges tört-alakban írható: $\frac{E}{10^l}$, de világos, hogy ez nem lesz mindig a fölírandó tört legegyszerűbb alakja; mert a számlálónak és nevezőnek még lehet közös osztója. A legnagyobb közös osztó meghatározása után evvel osztva, a szám alakja lesz:

$$\frac{F}{2^a 5^b},$$

amint ez közvetlenül belátható, mert a nevezőben más törzsszám, mint a 2 és 5 nem fordul elő, a rövidítés után is csak ezek maradhatnak meg, még pedig általánosságban különböző kitevőkkel, mert az egyik többször fordulhat elő a számlálóban mint a másik.

$$\text{Pl.} \quad 0 \cdot 125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{2^3}; \quad 0 \cdot 15 = \frac{15}{100} = \frac{3}{2^2 \cdot 5}, \text{ s u. t.}$$

91. **Közönséges tört átalakítása tizedes törtté.** Ha a tizedes törtet közönséges tört alakjában írjuk fel, akkor, miként láttuk, legegyszerűbb alakjában csakis ilyen alakú lehet $\frac{F}{2^a \cdot 5^b}$

Ez az alak mutatja, hogy nem lehet minden közönséges törtet

teljes pontossággal tizedes tört alakjában fölírti, t. i. nem olyan által, mely bizonyos számú számjegyből áll. Legyen pl. $\frac{m}{n}$ már legegyszerűbb alakjára hozott tört, hol az n a 2- és 5-től különböző p törzsszám által osztható, pl. 3-mal. Akkor m , minthogy m és n -nek már nincs közös osztója, nem osztható p által. Ha $\frac{m}{n}$ mégis teljes pontossággal volna kifejezhető pl. egy l számjegyből álló tizedes tört által, akkor, minthogy ennek véglegesen rövidített alakja mindig $\frac{F}{2^a \cdot 5^b}$ által jellemezhető, tehát

$$\frac{m}{n} = \frac{F}{2^a \cdot 5^b}$$

volna és ebből, ha mindkét oldalon $2^a \cdot 5^b$ n -nel szorzunk :

$$2^a \cdot 5^b \cdot m = n \cdot F,$$

de ez lehetetlenség ; a baloldalon álló szám ugyanis nem osztható p -vel, mert m nem osztható vele, míg a jobboldalon, hol n a p többsége, a p által osztható szám áll ; így tehát a nyert eredmény, mely szerint a két szám egyenlő volna, képtelenség. Az olyan rövidíthetlen közöséges tört, melynek nevezője 2 és 5-ön kívül más törzstényezőt is tartalmaz, tehát véges tizedes törtté nem alakítható.

Az ily tört, minő pl. $\frac{1}{3}$, tehát akárhány számjegyet írunk is, nem fejezhető ki tizedes tört által, hanem kifejezésére új alakot kell használnunk, az ú. n. végtelen tizedes törtet.

Ha tehát közöséges tört tizedes törtté átalakítandó, e föladat a megelőzők szerint oda módosul, hogy az adott törtnek l tizedes helyre pontos megközelítést adják.

Igy pl. lesz 3 tizedes helyre terjedő megközelítéssel :

$$\frac{1}{7} = 0.143.$$

Ebben az esetben a 0.143 megközelített kifejezése egy oly számnak, mely $\frac{1425}{10000}$ és $\frac{1430}{10000}$ közt fekszik, és így a hiba,

melyet elkövetünk, ha $\frac{1}{7}$ helyébe 0.143-at teszünk, az előjel

mellőzésével kisebb mint $\frac{1}{2000}$.

Hogy l tizedes helyre terjedő megközelítését nyerjük az $\frac{m}{n}$ törtnek, egyszerűen megszorozzuk a számlálót 10^l -el, és meghatározzuk a hányados egész számú részét. Lesz

$$\frac{m \cdot 10^l}{n} = E + t,$$

ahol E a hányados egész számú része, t pedig valódi tört. Ebből, ha 10^l -el osztunk

$$\frac{m}{n} = \frac{E}{10^l} + t \cdot \frac{1}{10^l}$$

ahol $\frac{E}{10^l}$ nem más, mint a kívánt tizedes tört l helyre terjedő pontossággal, mert $t \cdot \frac{1}{10^l}$ az $\frac{1}{10^l}$ -nek csak törtrésze és így csak az $l+1$ -edik és későbbi tizedes helyre jutó számjeleket adja.

Igy pl. ha $\frac{1}{13}$ -ot 5 tizedesre akarjuk kiszámítani, akkor előbb megszorozzuk 10000-el és kiszámítjuk egyesig a $\frac{10000}{13}$ -at $10000 : 13 = 7692 \dots$; tehát $\frac{1}{13}$ ennek a 10000-ed része, azaz : 0.07682.

Ha tekintetbe vesszük, hogy a 10^l -el való szorzás egyszerűen l zérus hozzácsatolásából áll, és hogy e zérusokat nem szükséges egyszerre fölírni, hanem csak egyenkint az egymásután föllépő maradékokhoz, akkor a nyert szabályt a számtanban nyert eljárással teljesen összhangzó-nak találjuk.

Midőn a közönséges megállapítások szerint pl. 5 tizedes hellyel dolgozunk, akkor a 6-ikat is ki kell számítani, de az így nyert számjegyet csak a megelőzőnek esetleges javítására használjuk.

$$\text{Pl. } \frac{1}{8} = 0.12500, \text{ mert } 1 : 8 = 0.125$$

$$\frac{1}{7} = 0.14286, \text{ mert } 1 : 7 = 0.142857$$

Feladatok ; 1. Alakítsuk át tizedes törtté 5 tizes jegyre a következő törteteket : $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{8}{17}$, $\frac{12}{23}$, $\frac{45}{87}$, $-\frac{4}{91}$. 2. Alakítsuk át közönséges törtté (a legegyszerűbb alakban) ezeket a tizedes törteteket : 0.125, 0.3125, 0.64, 0.512.

92. Véges és szakaszos tizedes tört. Midőn valamely közösleges törtnek tizedes tört által való kifejezésében a pontosság folytonos fokozására az osztást mindig folytatjuk, megeshetik, hogy a maradékok sorában egyszer föllép a zérus. Ekkor természetesen az osztás be van fejezve, és így a nyert tizedes tört nem csupán megközelítés, hanem az eredetileg adott törttel teljesen egyenlő. *Ez azonban csak akkor történhetik, ha az átalakítandó tört $\frac{m}{n}$ legegyszerűbb alakjában olyan, hogy a nevező más törzstényezőt mint 2-t, 5-öt nem tartalmaz, vagyis következő alakú:*

$$\frac{F}{2^a \cdot 5^b}.$$

Könnyű ugyanis belátni, hogy minden $\frac{F}{2^a \cdot 5^b}$ alakú törtnél az osztás 0 maradékhoz vezet, más szóval: minden $\frac{F}{2^a \cdot 5^b}$ alakú tört véges tizedes törttel egyenlő.

Ezt tüstént megmutatjuk azáltal, hogy a számlálót és nevezőt $2^b \cdot 5^a$ -val szorozzuk. Ekkor:

$$\frac{F}{2^a \cdot 5^b} = \frac{2^b \cdot 5^a \cdot F}{2^{a+b} \cdot 5^{a+b}} = \frac{2^b \cdot 5^a \cdot F}{10^{a+b}},$$

hol az utolsó alak már a tizedes törtet adja, ámbár esetleg még lehet a 10 valamely hatványával számlálóban és nevezőben osztani.

$$\text{Igy pl. } \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = 0.75 \quad \frac{7}{40} = \frac{7}{2^3 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 5^3}{2^4 \cdot 5^4} = 0.1750.$$

Ha ellenben az $\frac{m}{n}$ törtben, miután ezt legegyszerűbb alakjára hoztuk, az n a 2- és 5-től különböző törzstényezőt tartalmaz, a 0 soha nem léphet föl mint maradék az osztások folyamatában. Ez ugyanis azt jelentené, hogy az átalakítás befejezhető, és hogy az $\frac{m}{n}$ -nel pontosan egyenlő tizedes törtet nyerhetünk, ami előbbi fejtegetéseink szerint lehetetlen. Ekkor tehát az osztást akármeddig határtalanul folytathatjuk, és ezáltal a pontosságot is akármeddig fokozhatjuk. Így ismét (úgy mint a négyzetgyök s köbgyök kiszámításánál) a végtelen tizedes tört képzetéhez jutunk, melyet, minthogy végtelen sok

számjegyből állana, valósággal fölírni nem lehet, de azért mégis könnyen áttekinthető, mert e végtelen tizedes tört számjegyeiben igen egyszerű törvényt követ, t. i. *szakaszos (periodikus)*. E szakaszosság abban mutatkozik, hogy egy bizonyos helytől kezdve egynéhány számjegyből álló csoport folyton ismétlődik. Hogy ennek így kell lennie, abból következik, hogy folyton ugyanegy számmal, n -nel osztunk, és így csak néhány szám, t. i. $1, 2, \dots, n-2, n-1$ fordulhat elő mint maradék. Ha ez már előbb nem történt, akkor az n -ik osztásnál bizonyára oly maradékot nyerünk, mely már előfordult, és innét kezdve a hányadosban föllépő számjelek, valamint a maradékok, szabályszerűen ismétlődnek.

$$\text{Igy pl. } \frac{2}{7} = 0.285714285714285714 \dots$$

mert

$$2^0 : 7 = 0.2857142 \dots$$

$$6^0$$

$$4^0$$

$$5^0$$

$$1^0$$

$$3^0$$

$$2^0$$

$$6^0$$

hol az osztási alak megtekintése a törvényszerűséget mutatja.

A szakaszosan ismétlődő számjegyek azonban nem kezdődnek mindig a legelsőnél.

$$\text{Pl. } \frac{86}{495} = 0.1737373 \dots \text{ mert } 86^0 : 495 = 0.17373 \dots$$

$$365^0$$

$$185^0$$

$$365^0$$

$$185^0$$

$$\dots$$

Ismeretes, hogy az ily tizedes törtet, amint a szakaszosság mindjárt az első, vagy csak későbbi számjegynél kezdődik, *tisztán*, illetőleg *vegyesen szakaszosnak* nevezzük. Ha a szakaszban foglalt első és utolsó számjegy fölé pontot rakunk, és ezáltal

az ismétlődő számjegycsoportot kiemeljük, elég e csoportot egyszer kiírni, és mégis teljesen jellemeztük az egész végtelen tizedes törtet.

$$\text{E jelölésben: } \frac{2}{7} = 0.285714, \frac{86}{495} = 0.173, \frac{1}{3} = 0.3, \frac{1}{9} = 0.1.$$

Az utolsó két példában az ismétlődő csoport csak egy számjelből áll és így természetesen csak ezen egy számjegy fölé rakunk pontot.

Minden közönséges tört tehát kifejezhető vagy — kivételesen — véges tizedes tört által, vagy pedig — általánosságban — végtelen szakaszos tizedes tört által.

E tétel meg is fordítható, amennyiben megfordítva *minden végtelen szakaszos tizedes tört valamely közönséges törttel egyenlő, tehát racionális szám.* E helyen azonban még nem foglalkozunk ama szabályokkal, melyek az ekkor követelt átalakításra vonatkoznak. Ez teljes tudományos szigorúsággal csak akkor történhetik, ha majdan a végtelen sok tagból álló összegek, az ú. n. végtelen sorok összeadásával foglalkozunk, mely föladatnak legegyszerűbb esete éppen a most említett kérdés.

93. Számrendszerek tetszőleges alapszámmal. Bármely egész szám, S , a tizes számrendszerben fölírva, ily alakú lesz :

$$S = A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \dots + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0$$

hol x tizedet jelent, és az A együtthatók 10-nél kisebb pozitív egész számokat jelentenek (beleértve a zérust is). A tizedet, mely a fölírási módot jellemzi, épp ezért e számrendszer *alapszáma*-nak nevezzük.

Tisztán elméleti, tudományos szempontból a tíz e választása teljesen önkényes ; és e számok kiírására (kisebb számokból való összeállítására) épp úgy lehet használni bármely más, az egységtől különböző pozitív egész számot, mint a tizedet. (Az egység nem használható, mivel az egység hatványai mindig egyenlők eggyel és így nem adnak növekedő számsort.)

Gyakorlati szempontból azonban a 10 választása szükségesnek mutatkozik, mert minden európai nyelv a számok neveit tizes rendszerben képezi.

Ha az S számot az a alapszámra vonatkoztatott számrendszerben gondoljuk fölírva, akkor a számnak föntebbi általános

alakjában x az a -t jelenti, az A együtthatók értéke pedig a következő sorozatból választandó :

$$0, 1, 2, \dots, a-2, a-1.$$

Az első kérdés, mely ekkor megfejtendő, a következő :
Mikép lehet a tetszőlegesen adott S számot az a alapszámmra vonatkozólag kifejezni, vagy más szóval, az

$$S = A_k a^k + \dots + A_3 a^3 + A_2 a^2 + A_1 a + A_0$$

alakban az A együtthatókat meghatározni.

Erre a következő megjegyzés vezet. Ha S -et, a kifejezendő számot, elosztjuk a -val, az alapszámmal, akkor a hányados :

$$A_k a^{k-1} + \dots + A_3 a^2 + A_2 a + A_1$$

és a maradék A_0 nem más, mint az a^0 -nak megfelelő együttható. Ha az utoljára nyert hányadost ismét elosztjuk a -val, a hányados :

$$A_k a^{k-2} + \dots + A_3 a + A_2$$

és a maradék A_1 az a^1 együtthatója. Épp úgy kapjuk a 3-ik osztásnál A_2 -t s ú. t.

Ha tehát S -et az a alapszámmra vonatkoztatott számrendszerben akarjuk kifejezni, akkor S -et elosztjuk a -val, a nyert hányadost ismét s így tovább. A maradékok sora adja a keresett együtthatók sorát az a^0 -nak megfelelő A_0 -tól felfelé.

E műveletsorozat véget ér, mihelyt az a -nál kisebb hányadoshoz értünk, mert ekkor a legközelebbi hányados zérus.

Igy pl. ha 1376 a hetes számrendszerben kifejezendő, az osztási folyamatban

$$\begin{array}{cccc} 1376 : 7 = 196, & 196 : 7 = 28, & 28 : 7 = 4, & 4 : 7 = 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{array}$$

fellépő maradékok sorban : 4, 0, 0, 4 és így $1376 = 4 \cdot 7^3 + 0 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7 + 4$.

Hasonlókép 13526 a 12-es rendszerben :

$$\begin{array}{cccc} 13526 : 12 = 1127, & 1127 : 12 = 93, & 93 : 12 = 7, & 7 : 12 = 0 \\ 15 & 47 & 9 & 7 \\ 32 & 11 & & \\ 86 & & & \\ 2 & & & \end{array}$$

tehát $13526 = 7 \cdot 12^3 + 9 \cdot 12^2 + 11 \cdot 12 + 2$.

157 a *kettes* rendszerben :

$$\begin{array}{cccccc} 157 : 2 = 78, & 78 : 2 = 39, & 39 : 2 = 19, & 19 : 2 = 9, & 9 : 2 = 4, & 4 : 2 = 2, \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & 2 : 2 = 1, & 1 : 2 = 0 \\ & & 0 & 1 \end{array}$$

$$157 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1.$$

Az elv, mely szerint a számok közönséges írása történik, az, hogy az

$$A_k x^k + \dots + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0$$

kifejezésből mindent kihagyunk, ami az *állandó alak* jellemzésére szolgál és csak a változó együtthatók (számjelek) egymásutánját írjuk ki : $A_k \dots A_3 A_2 A_0$.

Ez természetesen bármely rendszernél eszközölhető, és az ily rövidítés értelme teljesen adva van, ha az alapszámot kijelöltük.

Ily módon a tízes rendszerben fölirt 1376 a hetes rendszerben lesz : »4004«, vagy 157 a kettes rendszerben : »10011101«.

Ha a 12-es rendszert akarjuk használni, akkor a 10 és 11 jelölésére új számjeleket kell bevezetni. Ily jeleknek használva a megfelelő latin számnevek kezdőbetűit : *d* és *u*-t, lesz pl. 13526, a 12-es rendszerben : »79u2«. Megfordítva pl. az e rendszerben írt »d301n« lesz : $10 \cdot 12^4 + 3 \cdot 12^3 + 1 \cdot 12 + 11$.

94. Kettes számrendszer. A kettes számrendszer bizonyos tekintetben a legegyszerűbb. Ebben t. i. csak két számjegy fordul elő, az 1 és 0. E sajátosságát még így is lehet kifejezni : Minden szám kifejezhető mint oly összeg, melyben csak az

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots$$

sorozatban foglalt számok (a 2 egymásután következő hatványai) fordulnak elő, és ezek közül is mindegyik legfőlebb egyszer. Képletben kifejezve minden szám a következő alakban írható :

$$S = 2^{k_1} + 2^{k_2} + 2^{k_3} + 2^{k_4} + \dots$$

hol $k_1, k_2, k_3 \dots$ pozitív egész számokat jelentenek, melyek szabálytalanul a 0-ig fogyhatnak.

A számoknak a kettes rendszerben való ily fölírása alapjául szolgál csinos számtani játéknak, mely nálunk is elterjedt és melynek magyarázata a következő.

Hét táblácskán a számok 1—100-ig ily módon állnak:

I. 1, 3, 5 s ú. t. az összes páratlan számok.

II. 2, 3; 6, 7; 10, 11; 14, 15; 18, 19; 22, 23; 26, 27; 30, 31; 34, 35; 38, 39; 42, 43; 46, 47; 50, 51; 54, 55; 58, 59; 62, 63; 66, 67; 70, 71; 74, 75; 78, 79; 82, 83; 86, 87; 90, 91; 94, 95; 98, 99.

III. 4—7*); 12—15; 20—23; 28—31; 36—39; 44—47; 52—55; 60—63; 68—71; 76—79; 84—87; 92—95; 100.

IV. 8—15; 24—31; 40—47; 56—63; 72—79; 88—95.

V. 16—31; 48—63; 80—95.

VI. 32—63; 95—100.

VII. 64—100.

Ha valaki most egy számot gondol (1-től százig), és csak azt mondja meg nekünk, hogy micsoda táblákon találta, akkor a szám nem lehet más, mint az e táblákon álló első (legkisebb) számok összege. — Így pl. 31 előfordul az I., II., III., IV. és V. táblán; megfelelőleg $1+2+4+8+16=31$; vagy 97 az I., VI. és VII-en és valóban $1+32+64=97$.

Már ez a két példa is mutatja, hogy az az összeg, melynek alakjában a számot nyerjük, a kettő hatványaiból van összerakva, vagy más szóval: a számot a kettes-rendszerben nyerjük. A táblák egyszerűen úgy vannak szerkesztve, hogy amint a szám a 2-es rendszerben fölírva tartalmazza az

1, 2, 4, 8, 16, 32 vagy 64-et,

beírjuk az

I., II., III., IV., V., VI. vagy VII-ik

táblába. Így pl. minthogy $57=1+8+16+32$, beírjuk az I., IV., V. és VI. táblába. Ezután már világos, hogy a gondolt szám értéke valóban így kitalálható.

Minthogy 128 ($=2^7$) az első szám, mely 2^7 -et tartalmazza, világos, hogy a táblákat ki lehet egészíteni 127-ig, és így a kitalálható számok sorát eddig bővíteni. *A tanuló végezze a táblák ily bővítését.*

Ha minden számot ki akarunk találni 255-ig, akkor, minthogy $256=2^8$, még egy táblát kell csak hozzácsatolni azokkal a számokkal, melyek $2^7=128$ -at tartalmaznak. *A tanuló próbálja meg e tábláknak az előadott elv értelmében való szerkesztését.*

*) 4—7, rövidítés 4, 5, 6, 7 helyett.

95. **Törtszámok más számrendszerben.** Valamint a tizes-rendszerben az egész számok fölírására használt elv általánosításával átmegyünk a tizedes törtrekre, úgy minden más rendszerben is képezhetünk *e rendszerre vonatkozó alaptörteket, melyekben t. i. a nevező az alapszám valamely hatványa.* Az az alak, mely az egész számú rész mellőzésével a tizedes törtöt jellemezte, a következő volt:

$$B_1x^{-1} + B_2x^{-2} + \dots + B_{l-1}x^{-(l-1)} + B_lx^{-l};$$

ha x az alapszám, a B -k pedig 0 és $x-1$ közt fekvő egész számokat jelentenek.

Már most azt kérdezhetjük, hogyan lehet *bármely közönséges törtet tetszőleges számrendszerben az alaptörtek által kifejezni?* A tíz esete már meggyőzött arról, hogy ez teljes pontossággal nem mindig eszközölhető; tehát a feladat most is úgy fogalmazandó, hogy *a törtnek l helyre pontos megközelítését keressük,* ami által a hiba ismét kisebb lesz $\frac{1}{x^l}$ -nél.

A számítás menete a következő lesz. Ha $\frac{m}{n}$ az átalakítandó tört, akkor szorozzuk e törtet előbb x^l -el és az így nyert $\frac{mx^l}{n}$ alakon végezzük az osztást. Ha kifejezzük a hányados egész számú részét az x rendszerben, lesz:

$$\frac{mx^l}{n} = B_1x^{l-1} + B_2x^{l-2} + \dots + B_{l-1}x + B_l + t,$$

hol t a hányados tört részét jelenti. Hogy az egész számú rész fölírását az x^{l-1} -el kezdjük, azzal indokolható, hogy $\frac{mx^l}{n}$ maga is x^l szorzata valódi törttel, tehát x^l -nél kisebb. Ez tehát a másik oldalon sem fordulhat többé elő. Ha most x^l -el osztunk, lesz:

$$\frac{m}{n} = \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \dots + \frac{B_{l-1}}{x^{l-1}} + \frac{B_l}{x^l} + \frac{t}{x^l},$$

hol azután a feladatnak megfelelőleg az utolsó tagot, amelynek nincs alaptört alakja (t tört!), mint az $\frac{1}{x^l}$ -nél kisebb értéket elhagyjuk és az $\frac{m}{n}$ kívánt megközelítését nyerjük.

Ha tehát az $\frac{m}{n}$ törtet az x számrendszer alaptörtjei által 1 helyre terjedő pontossággal akarjuk kifejezni, akkor $\frac{mx^l}{n}$ egész számú részét kifejezzük ugyanebben a számrendszerben, és a nyert értéket tagonként elosztjuk x^l -el.

Legyen pl. $\frac{23}{28}$ a kettes rendszerben 5 helyre terjedő pontossággal kifejezendő; akkor:

$$\frac{23 \cdot 2^5}{28} = \frac{23 \cdot 2^3}{7} = \frac{184}{7} = 26 + \frac{2}{7}.$$

Most még 26 a 2-es rendszerben kifejezendő. Lesz:

$$\frac{23 \cdot 2^5}{28} = 2^4 + 2^3 + 2 + \frac{2}{7}$$

és így 2^5 -nel osztva:

$$\frac{23}{28} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{32}\right).$$

Az utolsó tagot elhagyjuk, mert 5 helyre, tehát $\frac{1}{32}$ -ig menő pontosságot kívánunk; e tag pedig ennél kisebb.

Ugyane tört kifejezendő pl. 6 helyre terjedő pontossággal a hármas rendszerben. Lesz:

$$\begin{aligned} \frac{23 \cdot 3^6}{28} &= \frac{23 \cdot 729}{28} = \frac{16767}{28} = 598 + \frac{23}{28} \\ &= 2 \cdot 3^5 + 3^4 + 3^3 + 3 + 1 + \frac{23}{28} \end{aligned}$$

és így $\frac{23}{28}$ -nak $\frac{1}{36}$ -ra megközelített kifejezése:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729}.$$

Valamely tört ily előállítás a kettes rendszernek megfelelő alaptörtök segítségével ismét különösen egyszerű jelleget nyer azáltal, hogy a fellépő együtthatók nem lehetnek mások, mint 0 és 1. A kettes rendszer e sajátosságát úgy is lehet kifejezni, hogy minden valódi tört mint oly összeg írható, melyben csak az

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^l}$$

sorozatból vett törtök fordulnak elő, és ezek közül mindegyik

legfőlebb egyszer, ha t. i. általánosságban $\frac{1}{2^l}$ -nél kisebb hibát mellőzünk. Képletben minden valódi tört a következő alakban írható :

$$\frac{1}{2^{g_1}} + \frac{1}{2^{g_2}} + \frac{1}{2^{g_3}} + \frac{1}{2^{g_4}} + \dots$$

hol $g_1, g_2, g_3, g_4, \dots$ pozitív egész számok, melyek az 1-től kezdve egészen szabálytalanul növekednek.

Feladatok.

1. Fejezd ki 7-es számrendszerben azt a számot, mely tízes számrendszerben 643. Fejezd ki ugyanezt a számot 9-es számrendszerben !

2. Fejezd ki 8-as számrendszerben azt a számot, melynek jegyei a 7-es számrendszerben írva : 35421. (Ez a szám $3 \cdot 7^4 + 5 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 1$ felírható 10-es rendszerben és azután 8-as rendszerben.)

3. Fejezd ki 5-ös számrendszerben azt a számot, mely 9-es rendszerben : 134285.

4. Ha valamely szám a 12-es rendszerben 753(11)2, milyen alakú a 7-es rendszerben ?

5. Fejezd ki $\frac{5}{6}$ -ot 8-as rendszerben 4 jegyre pontosan.

6. Fejezd ki 0.379-et 7-es rendszerben 5 jegyre pontosan.

7. 15.75-öt alakítsd át 8-as rendszerbe !

8. Ha van egy-egy 1, 2, 2^2 , 2^3 , $2^4, \dots 2^n$ kg-osunk, hogyan lehet megmérni 1719 kg-ot (a súlyt a mérlegnek csak egyik serpenyőjébe tehetjük).

9. Készítsd el az egyszer-egyet a 7-es számrendszerben ! (1×1 -től 7×7 -ig.)

10. Add össze a 8-as számrendszerben írt ezen 3 számot : 27543, 23541, 20361 a nélkül, hogy 10-es számrendszerben írnád fel a számokat. (Az összeadás éppen úgy eszközölhető, mint a 10-es rendszerben, természetesen 8 egység már egy magasabb rendű egységnek tekintendő.)

11. Végezd az összeadást e 7-es rendszerben írt számokon : 136, 563, 412, 324, 215.

12. $A=543216$, B 235432 a hetes rendszerben. Mekkora $A+B$, mekkora $A-B$, mekkora $2A$, $3A$, $5B$ a hetes rendszerben írva ?

13. Szorozd meg e 7-es rendszerben írt számot : 12346, 6-al ; e 8-as rendszerben írt számot : 123457, 7-el ; e 9-es rendszerben írt számot : 1234568 pedig 8-cal, a szorzatot mindig az illető rendszerben írva !

14. Melyik az a számrendszer, amelyben a 10-es rendszerbeli 86 számjelei 321 ?

15. Melyik az a számrendszer, amelyben 59 így iratik : 113. Melyik az, amelyben 21 így iratik : 111 ?

XIII. Tört hatványkitevők.

96. A gyökmennyiségekre vonatkozó műveletek. A négyzetgyökre és a köbgyökre vonatkozó néhány tételt már megismertünk ; most a gyökökre vonatkozó műveleteket általánosan és kimerítőbben akarjuk ismertetni.

De előzetesen kissé pontosabban kell foglalkoznunk az n -edik gyök fogalmával. $\sqrt[n]{A}$ oly számot jelent, melynek n -edik hatványa A . Ilyen szám, miként már a négyzetgyök esetében is láttuk, nemcsak egy van. $\sqrt[4]{4}$ 2-t és -2 -t is jelent, mert mindkettőnek négyzete 4. $\sqrt[4]{16}$ oly szám, melynek negyedik hatványa 16. Ilyen szám négy is van : 2, -2 , $2i$, $-2i$. Köbre-emeléssel meggyőződhetünk arról is, hogy pl. :

$$\sqrt[3]{8} \text{ jelenthet } 2, -1+i\sqrt{3} \text{ és } -1-i\sqrt{3}\text{-at.}$$

Az $\sqrt[n]{A}$ tehát nem egyetlen számérték jele, hanem egy értékesoporté. $\sqrt[n]{A}$ nem egyértékű, hanem többértékű kifejezés.

Különösen fontos az a kérdés, hogy az $\sqrt[n]{A}$ értékei között vannak-e valóságok, és hány valós érték van. Vizsgáljuk meg ezt először abban az esetben, midőn a gyökjel alatt álló szám pozitív, azután pedig akkor, midőn e szám negatív.

1. Az $\sqrt[n]{P}$ -nek (hol P pozitív szám !), csak egy pozitív érték felelhet meg.

Ha több volna, legyen a a legkisebb köztük ; akkor egy másodikat $a+x$ -szel lehetne jelölni, hol x is pozitív, tehát a és $a+x$ -nek n -edik hatványa P volna ; de ez lehetetlen, mert

ha $a+x$ -et n -szer tényezőül teszem, nagyobb szorzatot kapok mint ha a nála kisebb a -t teszem n -szer tényezőül.

2. Ha $\sqrt[n]{P}$ -ben a gyökkitevő páratlan, a $\sqrt[n]{P}$ -nek negatív értéke nem lehet.

Mert ha $\sqrt[n]{P} = -a$ volna (a alatt pozitívot értve); akkor kellene, hogy :

$$P = (-a)^n$$

legyen, de páratlan számú negatív tényező szorzata ismét negatív, e szorzat nem lehet P , tehát : $\sqrt[n]{P} = -a$ lehetetlen.

3. Ha $\sqrt[n]{P}$ -ben a gyökkitevő páros, a nyert pozitív értékből az $\sqrt[n]{P}$ egy második (negatív) értékét nyerem az előjel megváltoztatása által.

Ha ugyanis $\sqrt[n]{P} = a$, akkor az $\sqrt[n]{P} = -a$ állítás is helyes, mert :

$$a^n = (-a)^n$$

ha n páros, és így $-a$ is oly szám, melynek n -edik hatványa egyenlő P -vel.

Ha tehát P pozitív, az $\sqrt[n]{P}$ -nek csak egy pozitív érték felel meg; negatív érték pedig csak akkor, ha a kitevő páros. Ebben az esetben a negatív érték nem más, mint a megváltoztatott előjelű pozitív érték.

4. Az $\sqrt[n]{-P}$ -nek nincs valós értéke, ha a kitevő n páros.

Mert minden pozitív vagy negatív szám páros kitevőjű hatványa pozitívot ad; ha pedig $\sqrt[n]{-P} = a$ volna, hol a valós, akkor kellene, hogy $a^n = -P$ legyen, ami lehetetlen. Ebben az esetben az n -edik gyöknek tehát nincs valós értéke.

5. Ha pedig a kitevő páratlan, az $\sqrt[n]{-P}$ -nek pozitív érték nem felelhet meg és csak egy negatív érték.

Ha ugyanis $\sqrt[n]{-P} = a$ volna, hol a pozitív, akkor $a^n = -P$ következne belőle: és ez abszurdum, mert a^n pozitív, $-P$ pedig negatív. Negatív értéket azonban találhatni. Hogy

$$\sqrt[n]{-P} = -a$$

legyen, kell hogy

$$-P = (-a)^n$$

legyen, de $(-a)^n = -a^n$, mert n páratlan, és így tehát az a meghatározását az

$$a^n = P$$

egyenletből vehetjük, mely jelenti, hogy a az $\sqrt[n]{P}$ pozitív értéke.

Azaz: ha $\sqrt[n]{P}$ pozitív értéke a , akkor az $\sqrt[n]{-P}$ -nek negatív értéke $-a$.

S így tehát végre e tételek sorát befejezhetjük a következővel:

Ha a kitevő páratlan, az $\sqrt[n]{-P}$ -nek nincs pozitív értéke, csak egy negatív.

Példák: $\sqrt[4]{16} = 2$, vagy -2 ; $\sqrt[3]{125}$ -nek csak egy $\sqrt[5]{-32}$ valós értéke van: 5 . $\sqrt{-9}$ -nek valós érték nem felel meg, ellenben $\sqrt{-32}$ -nek valós értéke -2 .

a) Szorzat gyöke.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Szorzatból úgy kell gyököt vonnunk, hogy a tényezők gyökeit egymással megszorozzuk.

E tétel helyességét be kell bizonyítanunk. A baloldalon oly szám áll, melynek n -edik hatványa ab . Meg kell mutatnunk, hogy a jobboldalon is ilyen szám áll. Vagyis a jobboldalon álló számot $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ -t fel kell emelnünk az n -edik hatványra. Ez a szám szorzat. Szorzatot pedig úgy hatványozunk, hogy a tényezők hatványait egymással megszorozzuk. $\sqrt[n]{a}$ n -edik hatványa a , $\sqrt[n]{b}$ -é pedig b . A jobboldalon álló szám n -edik hatványa tehát szintén ab . Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

E tétel nemcsak két tényező esetében érvényes, hanem akkor is, ha a szorzat több tényezőből áll.

Ha megfordítva olvassuk e tételt, akkor úgy mondhatjuk, hogy egyenlő kitevőjű gyököket úgy lehet szoroznunk, hogy a gyök alatti mennyiségek szorzatából gyököt vonunk, vagyis: mindig, akár szorzunk előbb két számot és azután keressük e szor-

zat gyökét, akár előbb keressük a gyökét mindenik tényezőnek és azután szorozzuk e gyököket.

Igy pl. : $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = \pm 4$. E példánál látjuk, hogy a tanult tétellel milyen könnyítést végeztünk a számításainkban. Itt $\sqrt{8}$ -at kellett volna kiszámítanunk, azután $\sqrt{2}$ -t és e két számot szoroznunk kellett volna. Két gyökvonás és szorzás helyett szorzást és egy gyökvonást kellett végeznünk; még pedig 2 irracionális szám szorozása helyett 2 racionális számét.

Feladatok.

1. Mennyi $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$, $\sqrt{50} \cdot \sqrt{2}$, $\sqrt{75} \cdot \sqrt{12}$, $\sqrt{12} \cdot \sqrt{27}$, $\sqrt{20} \cdot \sqrt{45}$, $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$, $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$?

2. Számítsuk ki e szorzatokat: $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{15} \cdot \sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{15} \cdot \sqrt[3]{24}$.

b) Hányados gyöke.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Hányadosból úgy vonunk gyököt, hogy a számláló gyökét a nevező gyökével elosztjuk. Bebizonyítjuk, hogy az egyenlőség jelének két oldalán álló kifejezések ugyanazt jelentik.

A baloldalon álló szám n -edik hatványa $\frac{a}{b}$. A jobboldalon álló hányados hatványát úgy nyerjük, hogy a számláló hatványát a nevezőével elosztjuk.

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \right)^n = \frac{a}{b}.$$

Tehát valóban mindkét oldalon oly szám áll, melynek n -edik hatványa $\frac{a}{b}$.

Ezt a tételt még úgy is kifejezhetjük, hogy *egyenlő kitevőjű gyököket úgy oszthatunk, hogy a gyök alatti mennyiségek*

hánnyadosából vonunk gyököt; vagyis: mindegy, akár előbb végezzük az osztást, azután a gyökvonást, vagy fordítva. Ez a tétel is jelentékenyen megkönnyíti a számításainkat.

Feladatok.

1. Mennyi? $\sqrt[1]{4}$, $\sqrt[1]{9}$, $\sqrt[4]{9}$, $\sqrt[64]{91}$, $\sqrt[8]{27}$, $\sqrt[27]{1000}$, $\sqrt[54]{729}$?
2. Valódi tört gyöke nagyobb, mint e tört, áltörté kisebb. Miért?

c) **Hatvány gyöke.** Ha hatványból, pl. a^m -ből kell gyököt bontanunk, akkor a feladatot szorzatból való gyökvonásra vezethetjük vissza, mert hiszen

$$a^m = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$$

tehát:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a \cdot a \cdot \dots \cdot a} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

ami azt fejezi ki, hogy *hatványból úgy bonthatunk gyököt, hogy az alap gyökét a hatványkitevőre emeljük*. E tételnél azonban egy fontos megjegyzést kell tennünk. Vegyük például $\sqrt[4]{4^2}$. Tudjuk, hogy ez $+4$, és -4 . Ha azonban $(\sqrt[4]{4})^2$ -et számítjuk ki, ez csak $+4$ lehet. Az egyik tehát kétértékű, a másik azonban

csak egyértékű. Eszerint míg az $\sqrt[n]{a^m}$ többértékű kifejezés, addig $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ kevesebb értékű; tehát a jobboldalon a baloldalon álló kifejezésnek *nem minden értéke van*.*)

Ez a tétel megint úgy fogalmazható, hogy a hatványozás és gyökvonás műveletei felcserélhetők, azaz ugyanarra az eredményre jutunk (az említett megszorítással), ha valamely számot előbb hatványozunk, azután a hatványból gyököt vonunk, akár előbb vonunk gyököt és az így nyert gyököt hatványozzuk.

d) **Gyökből gyökvonás.** A hatványozással való analogia itt is a következő tételre vezet:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a},$$

*) Ezentul, ha csak külön meg nem mondjuk, az $\sqrt[n]{a}$ -val csak egyik értékét jelöljük és pedig, ha a pozitív, a pozitív értéket, $\sqrt[4]{4}$, tehát 2-t jelent (nem -2 -t).

azaz : gyökből úgy kell gyököt bontanunk, hogy a gyök alatti mennyiségből a gyökkitevők szorzatával vonunk gyököt.

Az egyenlet jobboldalán ugyanis olyan szám áll, melynek nm -edik hatványa a . Meg kell mutatnunk, hogy a baloldalon álló kifejezésnek is nm -edik hatványa a lesz. Evégből a baloldalon álló kifejezést is nm -edik hatványra kell emelnünk. Itt a hatványkitevő szorzat, tehát előbb az egyik tényezőnek megfelelő hatványozást végezzük el és azután a nyert hatványt a második tényezőre emeljük. — Ha az m -edikre emeljük, a

hatvány lesz : $\sqrt[n]{a}$, ha e hatványt az n -edikre emeljük, a -t kapunk.

Visszafelé olvasva : Ha a gyökkitevő szorzat, akkor előbb az egyik tényezőnek megfelelő gyökkvonást végezzük el és a nyert gyökkel a másik tényezőnek megfelelő gyökkvonást végezzük. Így például : $\sqrt[4]{16} = \sqrt{\sqrt{16}}$, melynek egyik értéke 2.

97. A hatványkitevő és gyökkitevő változtatása. Az

$$\sqrt[n]{a^m}$$

alakú gyökmennyiség számtalan sok alakban állítható elő ; ugyanis : szabad a gyökkitevőt és a gyök alatti mennyiség hatványkitevőjét egyenlő számokkal szoroznunk. Képletben :

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$$

ahol k tetszésszerű pozitív egész számot jelent. E képlet helyességéről megint azzal győződünk meg, ha megmutatjuk, hogy mindkét oldalon egyenlő számok vannak. Evégből mindkét oldalon nk -ik hatványra emelünk. A jobboldalon az nk -ik gyök értelmezése szerint a gyök alatti mennyiség : a^{mk} keletkezik. A baloldalon pedig nk -ik hatványra két lépésben emelünk : először az n -ikre, miáltal a^m -et nyerjük és azután k -ikra emelünk, miből itt is a^{mk} keletkezik. Mindkét oldalon tehát (ha a^m pozitív) olyan pozitív szám van, melynek nk -ik hatványa a^{mk} , és minthogy ilyen pozitív szám csak egy van, tehát a képlet helyessége be van bizonyítva.

Ennek a tételnek jó hasznát vesszük, ha olyan gyököket kell egymással szoroznunk vagy osztanunk, melyeknek gyök-

kitevői különbözök. Így pl. ha $\sqrt[3]{a}$ szorzandó $\sqrt{a}$ -val, akkor mindkettőt átalakítjuk 6-ik gyökké :

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}; \quad \sqrt{a} = \sqrt[6]{a^3}$$

és most már alkalmazzuk azt az ismeretünket, hogy :

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},$$

tehát :

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt[6]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[6]{a^5}.$$

A fentebbi képletből még egy másik fontos tételt is levezethetünk, ha az

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$$

egyenletet fordítva olvassuk. Az mk -ból úgy keletkezik m , ha k -val elosztjuk, éppen így az nk -ból n , ha k -val elosztjuk ; tehát a fentebbi tételt már most meg bővítve úgy is fejezhetjük ki, hogy : *szabad a gyökkitevőt és a gyök alatti mennyiség hatványkitevőjét egyenlő számokkal szoroznunk vagy osztanunk.*

Ezt az utóbbi ismeretünket használhatjuk a gyökök egyszerűsítésénél. Ha ugyanis a gyökkitevőnek és a gyök alatti mennyiség hatványkitevőjének van közös osztója, akkor ezzel mind a kettőt elosztjuk.

Igy pl. :

$$\sqrt[4]{a^6} = \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a^2.$$

Feladatok.

1. Alakítsuk át a következő kifejezéseket úgy, hogy csak egy

gyökkel szerepeljen : $\sqrt{a} \sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{a} \sqrt[4]{a} \sqrt{a}$, $\sqrt[4]{3a} \sqrt[3]{5a^3} \cdot \sqrt[3]{2a^2} \cdot \sqrt[4]{4a}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{ab}}$,

$$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}, \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}, \quad \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{5x}}.$$

2. Egyszerűsítsük a következő gyökkifejezéseket : $\sqrt[4]{a^6}$, $\sqrt[6]{a^4}$,

$$\sqrt[3]{x^6}, \sqrt[5]{a^{10}}, \sqrt[10]{a^{15}}, \sqrt[8]{x^{12}}, \sqrt[6]{a^{10}}, \sqrt[3]{a^9}, \sqrt[4]{x^{12}}, \sqrt[6]{x^{18}}.$$

98. **Törtkitevőjű hatvány.** Ezen utóbbi szabályunkat, mely szerint a gyökkitevőt és a gyök alatti mennyiség hatványkitevőjét szabad egyenlő számokkal elosztanunk, felhasználjuk a gyökmennyiség legegyszerűbb alakban való előállítására.

Evégből az

$$\sqrt[n]{a^m}$$

alakú gyökmennyiséget úgy alakítjuk át, hogy mind a gyökkitevőt, mind a hatványkitevőt n -nel, a gyökkitevővel elosztjuk.

Ekkor lesz :

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Az $\sqrt[n]{a^m}$ tehát ebben az alakban állt elő : $a^{\frac{m}{n}}$. Természetesen, ennek az átalakításnak csakis akkor van értelme, ha az m osztható n -nel, ellenkező esetben a hatványjelzésnek értelme nincs, mert hiszen a hatványkitevő eredeti jelentése az, hogy az alap hányszor teendő tényezőül. Ez a szám pedig törtszám nem lehet ; mert pl. $\frac{3}{4}$ -szer nem lehet valamit tényezőül tenni.

De éppen azért, mivel az $a^{\frac{m}{n}}$ csak arra az esetre van értelmezve, mikor m az n többsége, megállapíthatjuk, hogy ez a képlet, mely ebben az esetben műveletszabály kijelentése, minden más esetben az eddig le nem foglalt $a^{\frac{m}{n}}$ jelnek, (hol $\frac{m}{n}$ törtszám,) értelmezése legyen ; úgy hogy tehát $a^{\frac{m}{n}}$ jelölje az $\sqrt[n]{a^m}$ kifejezést.

Igy pl. :

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, \quad a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}, \quad 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4 \text{ stb.}$$

Erre a megállapításra mindenesetre van jogunk, mert új jelre vonatkozván, az eddigi tárgyalásokkal ellentétbe nem juthatunk ; de célszerűnek csak akkor bizonyul, ha a hatvány ily általánosításáról kimutatjuk, hogy a hatványok számára nyert műveletszabályok most is kivétel nélkül érvényesek maradnak.

Feladatok.

1. Irjuk fel hatvány alakjában a következő kifejezéseket: $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{a^3}$, $\sqrt[n]{x^5}$, $\sqrt[n]{x}$, $\sqrt[n]{x^4}$, $\sqrt[n]{x^5}$, $\sqrt[n]{5}$, $\sqrt[n]{3}$, $\sqrt[n]{a^5}$, $\sqrt[n]{a^6}$.

2. Irjuk fel gyökkifejezés alakjában a következő törtkitevőjű hatványokat: $a^{1/2}$, $x^{3/4}$, $y^{5/6}$, $8^{2/3}$, $16^{3/4}$, $25^{1/2}$, $z^{2/5}$, $u^{1/4}$, $v^{3/5}$, $125^{2/3}$.

99. **Műveletek a törtkitevőjű hatvánnyal.** Áttérünk most annak kimutatására, hogy a hatványok számára nyert művelet-szabályok érvényesek azon esetben is, ha a kitevők törtszámok.

α) A szorzat hatványozásánál most is helyes a következő képlet:

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}.$$

mert a baloldalon álló kifejezés a törtkitevő értelmezése szerint:

$\sqrt[n]{(ab)^m}$, vagyis $\sqrt[n]{a^m \cdot b^m}$. A jobboldalon álló kifejezés pedig $\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m}$ és e kettő egymással valóban egyenlő.

β) A tört hatványozásánál most is helyes az az eljárás, hogy tört hatványát úgy állítjuk elő, hogy a számláló hatványát a nevező hatványával elosztjuk; azaz helyes ez a képlet:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$$

mert a baloldalon álló kifejezés a törtkitevőjű hatvány értelme

szerint $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$, vagyis $\sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}}$.

A jobboldalon álló kifejezés pedig: $\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}}$

és valóban

$$\sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}}.$$

γ) Két hatvány szorzására a következő képletnek kell szolgálnia:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{r}{s}} = a^{\frac{ms + nr}{ns}}.$$

A baloldalon álló kifejezés a törtkitevőjű hatvány értelmezése szerint : $\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[s]{a^r}$. Ezt átalakítjuk úgy, hogy a két tényezőt közös gyökkitevőre hozzuk. A közös gyökkitevőül ns -et választjuk.

Az első tényezőnek mind a gyökkitevőjét, mind a gyök alatti mennyiségének hatványkitevőjét s -el szorozzuk, a másodiknál pedig n -nel. Ezáltal ez a kifejezés a következőbe megy át :

$$\sqrt[n]{a^{ms}} \cdot \sqrt[s]{a^{nr}}.$$

Ez pedig az egyenlő kitevőjű gyökök szorzására vonatkozó eljárás szerint :

$$\sqrt[n]{a^{ms+nr}}.$$

A jobboldalon álló kifejezés a törtkitevőjű hatvány értelmezése szerint szintén :

$$\sqrt[n]{a^{ms+nr}}.$$

$\delta)$ *Hatvány hatványozásánál* a következő képletnek kell érvényesnek lennie :

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{mr}{ns}}.$$

A törtkitevőket ismét gyökjelek által helyettesítve, e képlet azt mondja, hogy :

$$\sqrt[s]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^r} = \sqrt[n]{a^{mr}}$$

a baloldalon álló kifejezés a 96. cikk $c)$ alatti tétele szerint így

írható : $\sqrt[s]{\sqrt[n]{a^{mr}}}$; ez pedig a $d)$ alatti tétel szerint : $\sqrt[n]{a^{mr}}$; ami a jobboldalon álló kifejezéssel tényleg megegyezik.

$\epsilon)$ *Hatványok osztásánál* végre :

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{r}{s}} = a^{\frac{ms-nr}{ns}}.$$

A képlet igazolására fölírjuk ugyancsak gyökjelek segítségével :

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[s]{a^r}} = \sqrt[n]{a^{ms-nr}}$$

és ha a számlálót és a nevezőt úgy alakítjuk át, hogy mindkettőben ns -edik gyök szerepeljen, akkor a baloldalon álló kifejezés lesz :

$$\frac{\sqrt[n]{a^{ms}}}{\sqrt[n]{a^{nr}}}$$

Ez pedig a 96. cikk b) tétele szerint megegyezik a jobboldali kifejezéssel.

Ha az egyenlő alapú hatványok osztására vonatkozó fentebbi képletben $m=0$ -t teszünk, a következőre jutunk :

$$\frac{1}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{-\frac{r}{s}}$$

vagyis :

$$a^{-\frac{r}{s}} = \frac{1}{a^{\frac{r}{s}}} = \sqrt[s]{\frac{1}{a^r}} = \sqrt[s]{a^{-r}}$$

Ez azt mutatja, hogy a levezetett képletsorozat nemcsak pozitív, hanem negatív törtkitevőkre is vonatkozik.

A hatvány eredeti értelme szerint a szorzatnak egy fajtája volt. Az a fajtája, melynél a tényezők mind egyenlők. Ezen eredeti értelme szerint csakis pozitív egész kitevőjű hatványról szólhattunk. Erre a hatványra vonatkozólag több tételt ismertünk, mindmegannyi tulajdonságát a hatványnak. Az egyenlő alapú hatványok osztása rávezetett bennünket a 0 és a negatív kitevőjű hatványokra. A gyökmennyiségeknek az a nevezetes alaptulajdonsága, hogy a gyök nem változik meg, ha a gyök-kitevőt és a gyök alatti mennyiség hatványkitevőjét egyenlő számokkal elosztjuk, rávezetett a törtkitevőjű hatványra, melyet úgy értelmeztünk, hogy

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ezzel a hatvány értelmét tágítottuk. Kimutattuk, hogy mindazon tételek, melyek a pozitív egész kitevőjű hatványra vonatkoztak, az új hatványokra is érvényesek.

Ez kiváló jelentőséget nyer azáltal, hogy az általánosított hatványozás, melyben a kitevő tetszőleges racionális szám, magában foglalja, mint egyes részletes eseteket, a szorosabb értelemben vett hatványozást és gyökkivonást, és így tehát

ezeket mint egy és ugyanazon művelet különböző eseteit lehet fölfogni: éppen úgy, mint a negatív szám bevezetése által összeolvadt az összeadás és kivonás művelete, vagy a törtszám bevezetése által a szorzás és osztás művelete.

100. **A gyökmennyiségek átalakítása.** Gyakorlatilag a tört-kitevőjű hatványt fölhasználhatjuk a gyökmennyiségek olyan átalakítására, amely a számítás könnyítésére szolgál.

A *gyökmennyiség átalakítása* egyszerűen abból a megjegyzésből indul ki, hogy azt törtkitevőjű hatvány alakjában állítjuk elő és a kitevőül szolgáló törtet, ha az az egységnél nagyobb, egész számú és valódi tört részre lehet fölbontani. Így pl. ha

$$\frac{m}{n} = q + \frac{r}{n},$$

tehát

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{q + \frac{r}{n}} = a^q \cdot a^{\frac{r}{n}}$$

a gyökjelekre visszatérve, ezt így írhatjuk:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^q \sqrt[n]{a^r},$$

Pl. $\sqrt[5]{a^6 b^7 c^8} = a^{\frac{6}{5}} b^{\frac{7}{5}} c^{\frac{8}{5}} = abc \cdot a^{\frac{1}{5}} b^{\frac{2}{5}} c^{\frac{3}{5}} = abc \sqrt[5]{ab^2 c^3},$
vagy megfordítva

$$x^3 y \sqrt[7]{xy z^2} = x^3 y x^{\frac{1}{7}} y^{\frac{1}{7}} z^{\frac{2}{7}} = x^{\frac{22}{7}} y^{\frac{8}{7}} z^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{x^{22} y^8 z^2}.$$

Hasonlókép minden gyökmennyiségre vonatkozó szorzási, osztási, hatványozási vagy gyökkivonási föladat legkönnyebben úgy végezhető, hogy a műveletek végrehajtása előtt az összes gyökjeleket hatványjelekre változtatjuk.

Pl. $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{5}}} = a^{\frac{2}{3} - \frac{3}{5}} = a^{\frac{1}{15}} = \sqrt[15]{a},$

$$\frac{\sqrt[5]{a^4} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[2]{a}} = \frac{a^{\frac{4}{5}} \cdot a^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{4}{5} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}} = a^{\frac{23}{60}} = \sqrt[60]{a^{23}}$$

$$\sqrt[3]{x^3 y \sqrt[2]{y z^2 x}} = \left(x^3 y^{\frac{3}{2}} z x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} = x y^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{6}} = x \sqrt{y} \sqrt[3]{z} \sqrt[6]{x},$$

vagy ha az egész kifejezést egy gyökjel alá akarjuk hozni :

$$xy^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{7}{6}}y^{\frac{3}{6}}z^{\frac{2}{6}} = (x^7y^3z^2)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x^7y^3z^2}.$$

Számértékekből összeállított kifejezéseknél néha lényeges egyszerűsítéseket nyerünk, ha a számokat mint törzsszámaik szorzatát írjuk föl és azután az előbbieket szerint járunk el.

$$\begin{aligned} \text{Pl. } 8\sqrt{45} - 12\sqrt{12} + 10\sqrt{48} - 5\sqrt{80} + 9\sqrt{125} &= \\ &= 8\sqrt{3^2 \cdot 5} - 12\sqrt{2^2 \cdot 3} + 10\sqrt{2^4 \cdot 3} - 5\sqrt{2^4 \cdot 5} + 9\sqrt{5^3} \\ &= 8 \cdot 3 \cdot 5^{\frac{1}{2}} - 12 \cdot 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 10 \cdot 2^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} - 5 \cdot 2^2 \cdot 5^{\frac{1}{2}} + 9 \cdot 5 \cdot 5^{\frac{1}{2}} \\ &= (8 \cdot 3 - 5 \cdot 2^2 + 9 \cdot 5) 5^{\frac{1}{2}} + (10 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2) 3^{\frac{1}{2}} = 49\sqrt{5} + 16\sqrt{3}. \end{aligned}$$

A nevező gyöktelenítése magasabb gyököknél nem oly egyszerű, mint ha csak négyzetgyökökkel van dolgunk. Azért itt csak a legegyszerűbb esetet említjük, midőn az egész nevező gyökjel alatt áll. Ekkor :

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{a \cdot b^{\frac{n-1}{n}}}{b^{\frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}}} = \frac{ab^{\frac{n-1}{n}}}{b} = \frac{a}{b} \sqrt[n]{b^{n-1}}$$

Feladatok.

Kiszámítandók, illetőleg egyszerűsítendők a következő kifejezések :

1. $\sqrt[3m-2n]{x^{5m-n} \cdot y^{4m-5n}}.$
2. $\sqrt{4\sqrt{a^8}}.$
3. $2\sqrt{175} + 4\sqrt{7} - 6\sqrt{28} + 10\sqrt{63} - 3\sqrt{112}.$
4. $15\sqrt{320} - 8\sqrt{45} + 7\sqrt{20} - 10\sqrt{125} + 14\sqrt{130} + 20\sqrt{500}.$
5. $4\sqrt{12} - 3\sqrt{8} + 30\sqrt{27} + 7\sqrt{32} + 106\sqrt{48}.$
6. $4\sqrt[3]{24} - 6\sqrt[3]{81} + 10\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{375} + 15\sqrt[3]{1/9}.$
7. $\frac{x}{y} \sqrt[3]{\frac{x^2y^2}{z}} + \frac{z}{y} \sqrt[4]{\frac{z^2}{x^3y^5}}.$
8. $\sqrt{\frac{x}{y}} \sqrt[4]{\frac{x^4}{y^2}} \sqrt[3]{\frac{x^4}{y^2}} \sqrt[7]{\frac{x}{y^2}}.$
9. $\sqrt{12} \cdot \sqrt{24}.$
10. $\sqrt{24} \cdot \sqrt{28}.$
11. $\sqrt{16} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{24}.$
12. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}.$
13. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}.$

$$14. \frac{x}{y} : \sqrt[3]{\frac{x}{y}}$$

$$15. \frac{2}{5} \sqrt[3]{\frac{a^2 b^{-3}}{c^{-2}}} : \frac{1}{5} \sqrt[3]{\frac{a^3 b^{-2}}{c}}$$

$$16. \frac{\sqrt[4]{a^2 b^2 c} \sqrt[4]{a b^{-1} c^{-3}}}{\sqrt[3]{a^2 b c^{-4}}}$$

$$17. \frac{\left((a^m)^{\frac{1}{r}} (a^q)^{\frac{1}{n}} \right)^{nr}}{\left(a^{\frac{n}{q}} a^{\frac{r}{m}} \right)^{mq}} : \left(\frac{a}{b} \right)^{gr}$$

$$18. \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{5}}$$

$$19. \frac{\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[7]{5}}{\sqrt[35]{5^{11}}}$$

$$20. \frac{\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[7]{8}}{\sqrt[7]{8} \cdot \sqrt[9]{8} \cdot \sqrt[8]{8}}$$

$$21. \left(a^{-\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}} + 1 \right) \left(a^{-\frac{1}{3}} - 1 \right)$$

$$22. \left(a^{\frac{4}{3}} - 2 + a^{-\frac{4}{3}} \right) \left(a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{2}{3}} \right)$$

$$23. \left(a + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} \right) \left(a - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} \right)$$

$$24. \left(x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} \right) : \left(x^{\frac{1}{6}} - y^{\frac{1}{6}} \right) \quad 25. (a-b) : \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}} \right)$$

$$26. (64x^{-1} + 27y^{-2}) : \left(4x^{-\frac{1}{3}} + 3y^{-\frac{2}{3}} \right)$$

$$27. \left(a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{2}{3}} \right) : \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{3}} \right)$$

$$28. \left(x^{\frac{3}{4}} - 2a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{8}} + a^3 \right) : \left(x^{\frac{1}{4}} - 2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{8}} + a \right)$$

$$29. \left(x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{3}{8}} y^{\frac{1}{8}} + 6x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} - 4x^{\frac{1}{8}} y^{\frac{3}{8}} + y^{\frac{1}{2}} \right) : \left(x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{1}{8}} y^{\frac{1}{8}} + y^{\frac{1}{4}} \right)$$

101. **Másodfokúra vezető egyenletalakok.** A gyökvonás igen kiterjedt alkalmazást talál oly magasabb fokú egyenletek megoldásában, amelyek másodfokúakra redukálhatók. Ilyen pl. ez a $2k$ -ad fokú egyenlet

$$ax^{2k} + bx^k + c = 0.$$

Ha t. i. x^k -t tekintjük ismeretlennek, akkor az egyenlet, melyben csak x^k és $x^{2k} = (x^k)^2$ foglaltatik, ezen ismeretlenre nézve másodfokúnak tekinthető, és így előbb x^k értékeit nyerjük, melyekről azután áttérünk az x meghatározására. Ezt az eljárást képletekben fogalmazva, legyen először:

$$x^k = y,$$

akkor egyenletünk:

$$ay^2 + by + c = 0;$$

ebből a másodfokú egyenletek módjára meghatározva y -t, ennek számára két értéket nyerünk :

$$y = \alpha \text{ vagy } y = \beta ;$$

de y nem egyéb, mint x^k és így tehát :

$$x^k = \alpha \text{ vagy } x^k = \beta ,$$

melyből ismét egyszerűbb esetekben, különösen mikor α vagy β pozitív, az x egyes értékeit nyerhetjük, így tehát az eredeti egyenletnek is, ha nem minden, de mégis egy vagy több gyökét meghatároztuk.

1. Ha pl. megoldandó a következő negyedfokú egyenlet :

$$x^4 - 9x^2 + 20 = 0 ;$$

akkor az $x^2 = y$ helyettesítés átviszi az egyenletet a következő alakba :

$$y^2 - 9y + 20 = 0$$

és ebből :

$$y = 4 \text{ vagy } y = 5$$

tehát :

$$x^2 = 4 \text{ vagy } x^2 = 5$$

és ebből az x négy értéke :

$$2, -2, \sqrt{5}, -\sqrt{5}.$$

Ebben az esetben a *négy* gyök a *negyedfokú* egyenlet teljes megoldását adja.

2. Ha épp úgy járunk el a következő egyenlet esetében

$$x^4 + x^2 + 1 = 0,$$

akkor ebből

$$x^2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ vagy } x^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$

és így az x értéke a következő alakban ábrázolható :

$$\pm \sqrt{\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}},$$

hol az előjelek négyféleképp választhatók. De a gyököket ebben az esetben még nem tudjuk valójában kiszámítani, mert a gyökjel alatt itt képzetes szám áll, és még nem tanultuk az ilyenek négyzetgyökét meghatározni.

3. Az $x^6 - 9x^3 = -8$ egyenlet megoldása céljából tegyük $x^3 = y$; akkor az egyenlet ilyen alakú lesz :

$$y^2 - 9y = -8$$

és ebből :

$$x^3 = 1 \text{ vagy } x^3 = 8,$$

amiből az x -nek két valós értékét nyerjük :

$$x = 1 \text{ és } x = 2.$$

Most olyan esetekkel foglalkozzunk, melyekben az előbb k -val jelölt kitevő törtszám; ezekkel az esetekkel legjobban a következő példák tárgyalásánál lehet megismerkednünk.

4. Legyen pl. adva a következő egyenlet :

$$x + 4\sqrt{x} = 21,$$

akkor ebben a $\sqrt{x}$ -et tekinthetjük ismeretlennek. Ha $\sqrt{x} = y$ tesszük, akkor az egyenlet ily alakú lesz :

$$y^2 + 4y = 21,$$

melyből :

$$\sqrt{x} = 3 \text{ vagy } -7,$$

tehát :

$$x = 9 \text{ vagy } 49.$$

és pedig ha $\sqrt{x} = 3$, akkor $x = 9$ és ha $\sqrt{x} = -7$, $x = 49$.

Midőn a kezdő az ily egyenletnél a nyert gyökértéket az egyenletbe való helyettesítés által igazolni akarja, akkor a következő körülmény igen könnyen zavarba ejtheti. Kísértsük meg, vajjon 49 valóban kielégíti-e az egyenletet. Akkor $\sqrt{49} = 7$ tehát $x + 4\sqrt{x} = 49 + 28 = 77$ és nem 21, mint az egyenlet követeli. De ha így okoskodunk, akkor elfelejtettük, hogy a megoldás közben *nemcsak* x értéke lett megállapítva, *hanem* $\sqrt{x}$ -é is, és pedig $\sqrt{x}$ nem lehet 7, hanem -7 .

Éppen így ha az $x + 4\sqrt{x} = 21$ egyenletről azt mondom, hogy $x = 9$ gyöke, ez még nem teljes meghatározás, hanem hozzá kell tenni még azt a föltételt, ha t. i. $\sqrt{9}$ -et $+3$ -nak veszem.

Erre különösen azért kell figyelni, mert más módon járva el a megoldásnál, nem kapjuk meg egyszerre a $\sqrt{x}$ és x összetartozó értékeit és utólagosan kell meghatároznunk, hogy x megtalált értékéhez $\sqrt{x}$ -nek melyik értéke tartozik. Az ily

egyenletek megoldása ugyanis úgy is végezhető, hogy az egyenletből először a gyökjelet rendezés által eltávolítjuk. Ez úgy történik, hogy a gyökjelet egymagában egy oldalra hozzuk és azután négyzetre emelünk. A fentebbi egyenletnél:

$$4\sqrt{x} = 21 - x$$

és ha most mindkét oldalon négyzetre emelünk,

$$16x = 441 - 42x + x^2,$$

amiből aztán rendezve és megoldva

$$x_1 = 9 \text{ és } x_2 = 49.$$

Ily eljárás mellett csakugyan hiányzik még a $\sqrt{x}$ előjelének meghatározása, és csak a helyettesítés mutatja, hogy a 9 esetében a pozitív, a 49 esetében a negatív előjel veendő.

5. Ezen viszonyok áttekintése céljából oldjuk meg meg a következő egyenletet is:

$$x + \sqrt{5x + 10} = 8.$$

Tegyük $\sqrt{5x + 10}$ helyett y -t; akkor

$$5x + 10 = y^2$$

vagyis

$$x = \frac{y^2 - 10}{5}.$$

Az adott egyenlet tehát ilyen alakú lesz:

$$\frac{y^2 - 10}{5} + y = 8$$

és ha ezt y -ra megoldjuk, azt találjuk, hogy:

$$y_1 = 5; y_2 = -10$$

y megtalált értékéből következik, hogy

$$x_1 = 3; x_2 = 18.$$

Itt is tehát egyszerre kaptuk meg az x és a hozzá tartozó $\sqrt{5x + 10}$ értékét.

Ha $x = 3$, akkor y , vagyis $\sqrt{5x + 10}$ nem vehető -5 -nek, hanem csak $+5$ -nek, és ha $x = 18$, akkor $\sqrt{5x + 10}$ nem vehető $+10$ -nek, hanem -10 -nek.

Ha ezt az egyenletet a gyökjel kiküszöbölésével készítjük elő a megoldásra, akkor ilyen alakban kell írunk:

$$\sqrt{5x+10}=8-x$$

és ha mindkét oldalon négyzetre emelünk:

$$5x+10=64-16x+x^2$$

vagyis:

$$x^2-21x+54=0$$

és ebből $x=3$ vagy 18 ; de most mindegyik gyökre nézve kísérlet útján kell megtudnunk, vajjon a négyzetgyököknek pozitív vagy negatív előjele mellett elégíti-e ki az egyenletet.

Feladatok.

- | | |
|--|-------------------------------|
| 1. $x^4-5x^2+4=0$. | 2. $4x^4-17x^2+4=0$. |
| 3. $x^4-8x^2-9=0$. | 4. $x^4-(a^2+b^2)+a^2b^2=0$. |
| 5. $c^4x^4+(a^2c^2-b^2c^2)x^2-a^2b^2=0$. | 6. $6x^4-35=11x^2$. |
| 7. $x^4-13x^2+36=0$. | 8. $(x^2-10)(x^2-3)=78$. |
| 9. $x+\sqrt{x}=20$. | 10. $3x+2\sqrt{x-1}=0$. |
| 11. $x-2\sqrt{x^2+x+5}-14=0$. | 12. $x+5-\sqrt{x+5}=6$. |
| 13. $\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}=\sqrt{x+1}$.*) | |
| 14. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{b}$. | |
| 15. $3\sqrt{x-3}+2\sqrt{x+2}=3\sqrt{x+9}$. | |
| 16. $2\sqrt{2x+15}-3\sqrt{3x+1}=-2$. | |
| 17. $5\sqrt{4x-3}+7\sqrt{2x+3}=9\sqrt{5x+1}$. | |
| 18. $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=7$. | |

102. A hatvány és hatványkitevő számértékeinek kapcsolata.

Áttérünk most ama törvények vizsgálatára, melyek a k és a^k számértékeit összekapcsolják, ha az alapszámot, a -t adott, meghatározott számnak vesszük, a kitevő k pedig átfutja a számsor összes értékeit. Természetesen avval az egyszersminden-

*) Ha a gyökjelek eltávolításával akarjuk a megoldást előkészíteni, akkor előbb mindkét oldalon négyzetre emelünk: de ezzel még nem értük el a célunkat, mert a baloldalon megmarad a gyökjel: $2\sqrt{(2x+7)(3x-18)}$. Most minden tagot átvisszünk a jobboldalra, hogy ez a gyökjel maga maradjon a baloldalon és újból négyzetre emelünk mindkét oldalon. Ezzel a gyökjeleket eltávolítottuk.

korra behozott megszorítással, hogy a pozitív és az a^k nem a tulajdonképpen megfelelő értékcsoportot, hanem az ebben előforduló egyetlen pozitív értéket jelenti.

$\alpha)$ Az egység bármely pozitív vagy negatív, egész vagy tört kitevőjű hatványa ismét egy, vagyis :

$$1^k = 1.$$

Ezt közvetlenül belátjuk, ha figyelembe vesszük, hogy 1-nek minden pozitív egész kitevőjű hatványa és gyöke 1.

$\beta)$ Ha a az egységnél nagyobb, a minden pozitív kitevőjű hatványa szintén nagyobb az egységnél.

A legegyszerűbb esetben, hol a kitevő pozitív egész szám, csak azt kell tekintetbe venni, hogy $a^m = aa \dots$; minden egyes szorzó nagyobb lévén az egységnél, a szorzat is ilyen lesz.

A gyökkvonás esetében $\sqrt[m]{a}$ szintén nem lehet az egységnél kisebb vagy egyenlő eggyel, mert : $(\sqrt[m]{a})^m = a$ és így, ha $\sqrt[m]{a}$ egynél kisebb (vagy 1) volna, akkor csupán az egynél kisebb vagy eggyel egyenlő szorzók szorzata a -t, az egységnél nagyobb adna, ami lehetetlen. Ha most már általánosságban a kitevő $k = \frac{r}{s}$, akkor :

$$a^k = \sqrt[s]{a^r},$$

az előbbieket szerint a -val együtt a^r is nagyobb lesz az egységnél és a^r -rel együtt $\sqrt[s]{a^r}$ is, amivel be van bizonyítva, hogy az egységnél nagyobb szám bármely pozitív kitevőjű hatványa szintén nagyobb az egységnél.

Ha e bebizonyítás folyamában a »nagyobb« és »kisebb« szokat fölcseréljük, épp úgy nyerjük, hogy :

$\gamma)$ Ha a az egységnél kisebb, a -nak minden pozitív kitevőjű hatványa szintén kisebb az egységnél.

A negatív kitevőjű hatványokra nézve két egészen hasonló tétel áll :

$\alpha)$ Ha a az egységnél nagyobb, a -nak minden negatív kitevőjű hatványa az egységnél kisebb. És :

$\beta)$ Ha a az egységnél kisebb, a -nak minden negatív kitevőjű hatványa az egységnél nagyobb.

A tanuló maga képes lesz ezeket kimutatni, ha csak tekintetbe veszi, hogy $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$.

Ezek megállapítása után hasonlítsuk össze az 1-nél nagyobb a -nak két hatványát: a k -ik és l -ik hatványát.

Az összehasonlítás végett osszuk el a^k -t a^l -el; a hányados: a^{k-l} . Ha $k > l$, akkor $k-l$ pozitív, tehát $a^{k-l} > 1$, vagyis $a^k > a^l$. Ha pedig $k < l$, akkor $k-l$ negatív, tehát $a^{k-l} < 1$, vagyis $a^k < a^l$.

Ha a az egységnél nagyobb, a^k k -val együtt növekszik és fogy.

103. Az egységet megközelítő hatványok. A d kitevőt úgy lehet meghatározni, hogy a^d akármennyire megközelítse az egységet.

Ha azt akarjuk, hogy a valamely hatványa pl. legalább $\frac{1}{1000}$ részre megközelítse az egységet, akkor voltaképpen az a feladatunk, hogy a d exponenst úgy határozzuk meg, hogy a^d az 1-től 0.001-nél kevesebbel különbözzék. Ha a kívánt d exponens pozitív, akkor a^d az 1-nél nagyobb; tehát akkor a d -t úgy kell meghatároznunk, hogy $a^d < 1.001$ legyen. Ha pedig negatív exponenst keresünk, akkor, minthogy a -nak minden negatív kitevőjű hatványa 1-nél kisebb, a d exponenst úgy kell meghatároznunk, hogy $a^d > 0.999$ legyen.

Általában, ha t valamely kis számot jelent és azt óhajtjuk, hogy a -nak valamely pozitív kitevőjű hatványa legalább t pontossággal megközelítse az egységet, akkor olyan d exponenst keresünk, hogy $a^d < 1+t$ legyen és ha a -nak oly negatív kitevőjű hatványát keressük, mely t pontossággal megközelítse az egységet, akkor oly negatív e exponenst kell meghatároznunk, hogy $a^e > 1-t$ legyen.

Első feladatunk tehát abban áll, hogy olyan pozitív d kitevőt határozzunk meg, hogy:

$$a^d < 1+t$$

legyen.

Az a az egységnél nagyobb, tehát ilyen alakban írható:

$$a = 1+u.$$

ahol u pozitív. Ebből következik, hogy

$$a^{\frac{1}{2}} < 1 + \frac{u}{2}$$

mert ha $a^{\frac{1}{2}}$ akkora, vagy nagyobb volna, mint $1 + \frac{u}{2}$, akkor $a^{\frac{1}{2}}$ -nek négyzete, vagyis a akkora, vagy nagyobb volna, mint

$$\left(1 + \frac{u}{2}\right)^2; \text{ de}$$

$$\left(1 + \frac{u}{2}\right)^2 = 1 + u + \frac{u^2}{4}.$$

Ez pedig $1+u$ -nál, vagyis a -nál nagyobb, tehát arra a képtelenségre jutottunk, hogy a nagyobb a -nál. Következésképp $a^{\frac{1}{2}}$ nem lehet $1 + \frac{u}{2}$ -vel egyenlő, vagy ennél nagyobb.

Ezzel tehát kimutattuk, hogy tényleg

$$a^{\frac{1}{2}} < 1 + \frac{u}{2}.$$

$$\left[\text{Igy pl. } \sqrt{2} = \sqrt{1+1} < 1 + \frac{1}{2}, \sqrt{1.5} < 1.25, \sqrt{1\frac{1}{4}} < 1\frac{1}{8}, \right. \\ \left. \sqrt{1\frac{1}{8}} < 1\frac{1}{16} \text{ stb.} \right]$$

Most már tudjuk, hogy

$$a^{\frac{1}{2}} < 1 + \frac{u}{2}$$

tehát hasonló okoskodással következik, hogy (ismét négyzetgyököket vonva)

$$a^{\frac{1}{4}} < 1 + \frac{u}{4}$$

$$a^{\frac{1}{8}} < 1 + \frac{u}{8}$$

$$a^{\frac{1}{16}} < 1 + \frac{u}{16} \text{ s í. t.}$$

Ezt az eljárást folytathatjuk addig, míg az egység mellett álló és folytonosan kisebbedő szám az előre megállapított t törtnél kisebb lesz. Ennek egyszer be kell következnie, mert hiszen

$$u, \frac{u}{2}, \frac{u}{4}, \frac{u}{8}, \frac{u}{16}, \frac{u}{32}, \dots, \frac{u}{2^k}, \dots$$

folyton kisebbedő számok. Ha e sorban már oly messzire jutottunk, hogy :

$$\frac{u}{2^n} < t$$

akkor

$$a^{\frac{1}{2^n}} < 1+t,$$

tehát $\frac{1}{2^n}$ a kívánalmunknak megfelelő d kitevő.

Ha pl. $a=10$, és mi oly pozitív d kitevőt keresünk, hogy 10^d az egységtől csak 1 tízezredrésznnyire különbözzék, azaz

$$10^d < 1.0001$$

legyen, akkor az előbbieket szerint

$$10 = 1 + 9$$

$$10^{\frac{1}{2}} < 1 + \frac{9}{2}$$

$$10^{\frac{1}{4}} < 1 + \frac{9}{4}$$

.....

tehát olyan n kitevőt kell találunk, hogy

$$\frac{9}{2^n} < 0.0001$$

legyen. 2-nek 17-ik hatványa 131072, tehát

$$\frac{9}{2^{17}} < 0.0001$$

vagyis ha d kitevőül $\frac{1}{2^{17}}$ használjuk, akkor :

$$10^d < 1.0001,$$

vagyis ha 10-ből 131072-ik gyököt vonunk, 1.0001-nél kisebb számot kapunk.

Miután megtaláltuk a d -nek olyan pozitív értékét, hogy

$$a^d < 1+t,$$

meghatározandó oly negatív e exponens, hogy a^e az 1-et legalább t pontosságra megközelítse, azaz hogy a^e nagyobb legyen $1-t$ -nél. Az előbbi eljárással már ezt is megtaláltuk ; azt állítjuk ugyanis, hogy a keresett negatív exponens egyszerűen $-d$. Ezt a következőként mutathatjuk meg : az a^{-d} , minthogy a

kitevő negatív, mindenesetre kisebb az egységnél, másrészt, ha az $a^{-d} = \frac{1}{a^d}$ -ben a nevezőt a nála nagyobb $1+t$ -vel helyettesítem, a tört értékét kisebbítem, tehát :

$$a^{-d} > \frac{1}{1+t}$$

de

$$\frac{1}{1+t} > 1-t;$$

mert ha $\frac{1}{1+t} < 1-t$ volna, akkor (mindkét oldalon $1+t$ -vel szorozva és tekintetbe véve, hogy $(1+t)(1-t) = 1-t^2$), következne, hogy $1 < 1-t^2$, ami pedig képtelenség.

Ha azonban a^{-d} nagyobb $\frac{1}{1+t}$ -nél, és $\frac{1}{1+t}$ nagyobb $1-t$ -nél, ez az utolsó a legkisebb a 3 érték közt, és így :

$$1 > a^{-d} > 1-t.$$

Ha pedig a^{-d} az $1-t$ és 1 közt fekszik, világos, hogy a^{-d} is a kívánt módon megközelíti az egységet. Az előbbi példánál azt találtuk, hogy ha $d = \frac{1}{2^{17}}$, akkor $10^d < 1.0001$. E mostani tárgyalásból következik, hogy $10^{-d} > 0.9999$; tehát 10^d és 10^{-d} 1 tízezredrésznyre megközelítik az egységet.

Ezek után a jelen cikk vizsgálataiból még az is következik, hogy :

Ha csak a d-t elég kicsinynek vesszük, mindig elérhetjük, hogy a^{k+d} és a^{k-d} az a^k -től csak szabadon kijelölt kis mennyiségben különbözzék. Mert

$$\begin{aligned} a^{k+d} - a^k &= a^k(a^d - 1) \\ a^k - a^{k-d} &= a^k(1 - a^{-d}). \end{aligned}$$

Az a^d és a^{-d} tetszőlegesen közel hozható az egységhez, amint ezt éppen bebizonyítottuk. De ekkor a zárjelben álló tényezők értéke mindinkább megközelíti a 0-t. Minél közelebb áll pedig az egyik szorzó a zérushoz, annál közelebb jut maga a szorzat is ehhez az értékhez.

104. Irracionális kitevőjű hatvány. A végzett tárgyalások alapján az a^k hatvány értelmét végre azon esetre is kiterjeszthetjük, midőn a k kitevő irracionális szám. Ez különösen azért fontos,

mert — amint majd látjuk — a logaritmus rendszerint nem más, mint ilyen irracionális hatványkitevő. Amint ezt az irracionális számok első bevezetésénél láttuk, az ily szám teljesen ismeretesnek tekintendő, ha adva van az oly eljárás, melynek segítségével azt tetszőlegesen megközelíthetjük.

Ha pl. a -nak $\sqrt{2}$ -ik hatványáról van szó, akkor a $\sqrt{2}$ tetszésszerű pontossággal megközelíthető tizedes törttekkel; $\sqrt{2}$ ugyanis $1.4142 \dots$ és így

$$a^{\sqrt{2}}$$

hatvány e tört-kitevőjű hatványok között van:

$$a^{1.4} \text{ és } a^{1.5}$$

$$a^{1.41} \text{ és } a^{1.42}$$

$$a^{1.414} \text{ és } a^{1.415} \text{ stb.}$$

Minthogy pedig e két számérték annál közelebb jut egymáshoz, minél több tizedes helyre visszük a $\sqrt{2}$ megközelítését, magát a hatványt is bármennyire fokozható pontossággal nyerjük.

XVI. A logaritmus.

105. **A logaritmus fogalma.** Az alap a , a kitevő k és a hatvány m közt fennálló kapcsolatot az

$$a^k = m$$

egyenlet ábrázolja. Ha ebben az egyenletben a és k adott számértékek, akkor a hatványozás műveletével van dolgunk és pedig ha k kitevő pozitív egész szám, a hatványozás eredeti alakjával, ha pedig nem pozitív egész szám (hanem 0, vagy negatív egész szám, vagy törtszám vagy irracionális szám), akkor a hatványozás általánosításáról van szó. De ha nem az alap és a kitevő adatnak meg, akkor kétféle esettel lehet dolgunk. Vagy az m és k adatnak meg és a kerestetik, vagy a és m adatnak és k kerestetik. E kétféle feladatnak megfelelően a hatványozásnak megfelelő két fordított művelethez jutunk.

Az összeadásnak, valamint a szorzásnak csak egy megfordítása volt: a kivonás, illetőleg az osztás. Ez onnét ered, hogy az a két szám, a két összeadandó vagy a két szorzó, melynek bizonyos törvény szerint történő kapcsolata adja az összeget vagy a szorzatot, teljesen egyenjogú

szerepet visel, egymással fölcserélhető és így a feladat alakja nem változik, akármelyiket tekintjük is ismeretlennek. Ez a hatványnál többé nincs úgy. Az alap és a kitevő két egészen külön jellegű számérték és ha megkísértjük fölcserélésüket, az eredmény megváltozik. (Pl. $2^3=8$, $3^2=9$.) Egészen kivételes, hogy $2^4=4^2$.

Midőn a hatvány és a kitevő adott értékeiből az alap értékére következtetünk, a legegyszerűbb esetben, midőn t. i. a kitevő pozitív egész szám, a szorosabb értelemben vett hatványozástól a gyökkivonáshoz jutunk, míg az általános esetben, midőn a kitevő törtszám, e feladat szintén az általánosított hatványozásra vezet.

Most a még hátralevő esettel foglalkozunk, midőn az alap és hatvány értékeiből a kitevőt kell meghatározni.

A szám, melyet az a alaphoz (basis) mint kitevőt kell csatolni, hogy a hatvány értéke m legyen, az m -nek az a alaphoz tartozó *logarithmusa*, vagy rövidebben az m -nek a *logarithmusa*. E számot a következőképp írjuk: "*log m*". a *log* szót tagot mint műveleti jelt használva és ehhez csatolva balról és fölül az a alapot, melyre a tárgyalás vonatkozik.

Épp-úgy mint a gyökjel magában nem fejez ki semmit, ha a kitevőt nem csatoljuk hozzá, úgy a *log* jel is magában határozatlan, míg ki nem jelentjük, hogy a számítás micsoda alapra vonatkozik. Ott is azonban az egyik legegyszerűbb esetben — a négyzetgyöknél — elhagyjuk a kitevőt, föltételezve, hogy a ki nem írt kitevő mindig kettes. Itt is hasonló eset történik. Legtöbbet ama logarithmusokkal dolgozunk, melyeknél az alapszám tíz. E logarithmusok az ú. n. közönséges vagy Briggs-féle logarithmusok.*) Ezeknél az alap külön jelölését elhagyjuk és így *log a* ezentúl mindig $^{10}\log a$ -t jelent.

A számművelet, melyet most ki kell fejtenünk, a logarithmus fölkeresése.

Pl. abból, hogy $2^5=32$, látni, hogy $^2\log 32=5$, hasonlóképpen :

$$3^3=27, \text{ tehát : } ^3\log 27=3.$$

*) Az angol Henry Briggs volt ugyanis, aki 1618-ban a tízes alapra vonatkozó logarithmusokat bevezette.

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = 10 \qquad {}^{10}\log 10 = -1,$$

$$10^{\frac{1}{2}} = 3.16228 \qquad \log 3.16228 = \frac{1}{2}.$$

A logaritmustól a hozzá tartozó számhoz, *numerushoz* visszatérünk hatványozás által, mert hiszen a logaritmus nem más, mint az a kitevő, melyet az alaphoz kell csatolni, hogy a számot nyerjük.

A számnak egyazon alapra vonatkoztatott logaritmusainak összességét logaritmusrendszernek hívjuk. A leggyakrabban használt alap a 10, tehát a leggyakrabban a 10-es logaritmusrendszert, az ú. n. Briggs-féle rendszert használjuk.

Feladatok.

1. Mennyi $\log 10$? $\log 100$, $\log 1000$, $\log 10000$?
2. Mennyi $\log 1$? $\log 0.1$, $\log 0.01$, $\log 0.001$?
3. Mennyi $\log \sqrt{10}$? ${}^2\log 4$, ${}^2\log 16$, ${}^2\log \frac{1}{2}$?
4. Mennyi ${}^5\log 5$? ${}^5\log 25$? ${}^5\log \frac{1}{5}$, ${}^5\log \frac{1}{25}$?
5. Mennyi ${}^8\log 2$? ${}^8\log 4$? ${}^8\log 64$? ${}^8\log \frac{1}{8}$?

106. **Az alap választása.** *Alap* gyanánt bármely 0-tól különböző számot választhatnánk; de célszerű olyan logaritmusrendszert alkotni, melyben a pozitív számoknak valós logaritmusuk van. 1-et nem választjuk alapul, mert hiszen 1-nek minden pozitív kitevőjű hatványa (e hatványok közül a pozitívot véve) 1, tehát más pozitív számnak nem volna logaritmus. Hasonló okokból célszerűtlen volna negatív számot alap gyanánt választani. *Alapul* tehát célszerű pozitív számot kiszemelni. Ha e pozitív alap 1-nél kisebb volna, akkor az 1-nél nagyobb számok logaritmusai negatívak volnának, mert hiszen 1-nél kisebb számok pozitív kitevőjű hatványai 1-nél kisebbek. Ha tehát *célszerűségi szempontból még azt is kívánjuk, hogy 1-nél nagyobb számok logaritmusai pozitívak legyenek, akkor a logaritmusrendszer alapjául 1-nél nagyobb számot választunk.* Legtöbbször, miként említettük, a 10-et.

107. **Szorzat, hányados, hatvány és gyök logaritmusa.** Mielőtt a logaritmus számértékének meghatározását megkezdjük, ismét, mint az előbb tárgyalt műveleteknél, megállapítjuk azon egyszerű törvényeket, melyek a szorzat, a tört, a hatvány logaritmusát adják, ha amaz algebrai kifejezésekben foglalt számok logaritmusai ismeretesek.

a) *Szorzat logaritmusa.* Ha ismerjük a és b logaritmusát (pl. t alapra vonatkozólag), akkor ab logaritmusát megkapjuk, ha a és b logaritmusait összeadjuk. Mert ha

$${}^t\log a = \alpha \text{ és } {}^t\log b = \beta$$

akkor :

$$t^\alpha = a \text{ és } t^\beta = b$$

és ezen egyenleteknek megfelelő oldalait egymással szorozva :

$$t^{\alpha + \beta} = ab,$$

miből :

$${}^t\log ab = \alpha + \beta = {}^t\log a + {}^t\log b.$$

Szorzat logaritmusát úgy kapjuk, hogy a tényezők logaritmusait összeadjuk. Ez a tétel könnyen tágítható több tényező esetére is.

b) *Hányados logaritmusa.* Ha ismeretesek a és b logaritmusai, akkor $\frac{a}{b}$ hányados logaritmusát megkapjuk, ha a logaritmusából b logaritmusát kivonjuk. Mert ha

$${}^t\log a = \alpha \text{ és } {}^t\log b = \beta$$

akkor

$$t^\alpha = a \text{ és } t^\beta = b$$

és ha ezen egyenletek megfelelő oldalait egymással elosztjuk :

$$t^{\alpha - \beta} = \frac{a}{b}$$

miből :

$${}^t\log \frac{a}{b} = \alpha - \beta = {}^t\log a - {}^t\log b.$$

Hányados logaritmusát úgy kapjuk, hogy a számláló logaritmusából a nevező logaritmusát kivonjuk.

c) *Hatvány logaritmusa.* Ha ismeretes a logaritmusa, akkor a n -edik hatványának logaritmusát megkapjuk, ha a logaritmusát n -szer vesszük. Mert ha

$${}^t\log a = \alpha$$

akkor

$$t^a = a$$

és ha mindkét oldalon n -ik hatványra emelünk :

$$t^{an} = a^n$$

miből :

$${}^t\log a^n = n\alpha = n \log a.$$

Hatvány logaritmusát megkapjuk, ha az alap logaritmusát a kitevővel megszorozzuk.

d) *Gyök logaritmusa.* Ebben az előbbi tételben benne foglaltatik már a gyök logaritmusának meghatározási módja, mert hiszen a gyök törtkitevőjű hatvány. Az előbbi szerint tehát :

$${}^t\log \sqrt[m]{a} = {}^t\log a^{\frac{1}{m}} = \frac{\log a}{m}.$$

Gyök logaritmusát tehát megkapjuk, ha a gyök alatti mennyiség logaritmusát a gyökkitevővel elosztjuk.

Ezen tételek segítségével komplikáltabb kifejezések logaritmusait is kifejezhetjük, ha ezen kifejezésekben csakis szorzás, osztás, hatványozás és gyökkivonás fordul elő. Így pl. :

$$\log a^3 b^2 c = 3 \log a + 2 \log b + \log c ;$$

$$\log a^2 \sqrt[3]{bc} = 2 \log a + \frac{\log b + \log c}{3} ;$$

$$\log \frac{a^2}{b^3 c} = 2 \log a - (3 \log b + \log c) ;$$

$$\log \frac{a^3 \sqrt[3]{b}}{c \sqrt{d}} = 3 \log a + \frac{1}{2} \log b - \log c - \frac{1}{3} \log d.$$

Feladatok.

Az adott képletek értelmében átalakítandók a következő kifejezések :

$$1. \log \sqrt[s]{x^p y^q z^r}.$$

$$2. \log \frac{\sqrt{x^3 y}}{\sqrt[3]{xy^2}}.$$

$$3. \log \left[(a+b)^2 \sqrt{\frac{a+c}{c^3}} \right].$$

$$4. \log \frac{x^{\frac{n}{b}} y^{\frac{c}{d}}}{z^{e-1}}.$$

$$5. \log \sqrt[m]{a \sqrt[n]{a+b}}.$$

$$6. \log \sqrt[3]{a \sqrt[3]{a \sqrt[5]{a}}}$$

$$7. \log \sqrt[m]{\frac{a^8 \sqrt{b^2 y}}{x^7 \sqrt{z^3}}}.$$

108. **A logaritmuskok számértéke.** Az összes számoknak ugyanarra az alapra vonatkoztatott logaritmuskai összesen ú. n. *logaritmuskrendszer*t alkotnak. Minthogy végtelen sok különböző alapot lehet választani, végtelen sok logaritmuskrendszer képezhető. Ezek közül a matematikában különösen kettővel dolgozunk.

Ezek közül az egyik az ú. n. *természetes logaritmuskok rendszere*, melynek alapja irracionális szám. Ezt a gyakran föllépő számértéket külön betűvel szokás jelölni, *e*-vel (épp úgy, mint a geometriában a π számot). Megközelített értéke :

$$e = 2.7182818459 \dots$$

Gyakorlati számításoknál azonban *e* rendszer az irracionális alap miatt igen kényelmetlen volna. Ekkor legegyszerűbb azt a logaritmuskrendszer választani, melynek alapja ugyanaz mint számrendszerünk alapszáma, t. i. 10. Ez a már említett *közönséges, vagy Briggs-féle logaritmuskok rendszere*.

Legközelebbi feladatunk a logaritmuskok számértékeinek meghatározására vonatkozó módszerek megállapítása.

Ezentúl majdnem kizárólag közönséges logaritmuskokkal lesz dolgunk. És ezért, midőn röviden csak logaritmusról beszélünk, mindig közönséges logaritmuskus értendő.

A 10 minden pozitív és negatív hatványának logaritmuskusa közvetlenül ismeretes.

A logaritmuskus értelmezéséből ugyanis tüstént látni, hogy

$$1, 10, 100, 1000, 10.000, 100.000 \text{ s ú. t.}$$

$$\text{logaritmuskusa : } 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

és épp úgy

$$0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001$$

$$\text{logaritmuskusa : } -1, -2, -3, -4, -5, \dots$$

mert

$$10^0 = 1, \text{ tehát } \log 1 = 0; \log 10 = 1, \text{ tehát :}$$

$$\log 10^k = k \log 10 = k.$$

Minden más egész vagy törtszám logarithmusa irracionális szám.

Mert ha a logarithmusa racionális szám volna, pl. a következő rövidíthetetlen törtszám: $\frac{m}{n}$, akkor

$$10^{\frac{m}{n}} = a$$

volna, vagyis:

$$\sqrt[n]{10^m} = a$$

10^m -nek n -edik gyöke csakis akkor lehet racionális szám, ha 10^m teljes n -edik hatvány vagyis ha m az n többszöröse, pl.: $m = nk$; de akkor

$$\sqrt[n]{10^m} = 10^k$$

tehát csakis 10 egész-, vagy törtkitevőjű hatványának a logarithmusa lehet racionális, minden más szám logarithmusa irracionális.

Minthogy tehát a logarithmusok irracionális értékek, a meghatározásukra vezető eljárás megint — úgy mint a gyökvonásnál — megközelítő eljárás lesz.

Feladatunk teljes megoldására elég, ha az 1 és 10 közt fekvő számok logarithmusainak kiszámítására találunk módszert; mert minden más számé ebből tüstént fölírható; mert ha például a 10-nél kisebb 3.764 logarithmusát ismerjük, akkor ebből a 37.64-ét azonnal meghatározhatjuk; 37.64 ugyanis a 3.764-nek 10-szerese, tehát

$$\log 37.64 = \log 3.764 + \log 10 = \log 3.764 + 1$$

éppen így:

$$\log 376.4 = \log 3.764 + 2, \log 3764 = \log 3.764 + 3 \text{ stb.}$$

Ha például keressük a 10-nél nagyobb 578.4 logarithmusát, akkor előbb megkereshetjük a 10-nél kisebb 5.784 logarithmusát és minthogy $578.4 = 100 \times 5.784$, tehát

$$\log 578.4 = \log 5.784 + 2.$$

Látjuk tehát a példákából, hogy a logarithmusok számértékeinek meghatározására tényleg elégséges a 10-nél kisebb számok logarithmusainak meghatározására szolgáló módszer ismerete.

109. **Kis logaritmustábla szerkesztése.** A megelőzőkből néhány irracionális szám logaritmusa is ismerjük. Ugyanis pusztán egymásután végzendő négyzetgyökvonások segítségével kiszámíthatjuk

$$10^{\frac{1}{2}}, 10^{\frac{1}{4}}, 10^{\frac{1}{8}}, \dots$$

értékeit és ezeknek logaritmusa természetesen :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

Ezekkel a számokkal megszerkesztjük a kis táblánkat a következőképpen : Az első rovatba írjuk a számot (numerus) 10,

$\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[4]{10}$ -et s ú. t., a másodikba a megfelelő logaritmust, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, s ú. t., miután decimális tört alakjára hoztuk mind a kettőt (a tizedes törteknek csak első 5 jegyét írjuk fel, a többi elhanyagoljuk).

<i>Num.</i>	<i>Log.</i>	<i>Num.</i>	<i>Log.</i>
10·00000	1·00000	1·00225	0·00098
3·16228	0·50000	1·00112	0·00049
1·77828	0·25000	1·00056	0·00024
1·33352	0·12500	1·00028	0·00012
1·15478	0·06250	1·00014	0·00006
1·07461	0·03125	1·00007	0·00003
1·03663	0·01562	1·00004	0·00002
1·01815	0·00781	1·00002	0·00001
1·00904	0·00391	1·00001	0·00000
1·00451	0·00195	—	—

Ha valamely *N* számnak logaritmusa kiszámítandó, akkor elég erre az *N*-et mint a táblában foglalt számok szorzatát előállítani. Ha ez megtörtént, akkor az egyes szorzók logaritmusa nyerjük.

Számítsuk ki például log 2·19-et. Evégből 2·19-et állítjuk elő a kis táblában levő numerusok szorzata gyanánt.

A táblázaton az első szám, mely 2·19-nél kisebb, 1·77828, az osztást végrehajtva : *)

$$2 \cdot 19000 : 1 \cdot 77828 = 1 \cdot 23152, \text{ tehát } 2 \cdot 19 = 1 \cdot 77828 \times 1 \cdot 23152$$

41172

5606

271

93

4

Folytatva az eljárást az 1·23152-n; az első szám a táblázatban, mely nála kisebb : 1·15478. És így :

$$1 \cdot 23152 : 1 \cdot 15478 = 1 \cdot 06645, \text{ és } 1 \cdot 23152 = 1 \cdot 15478 \times 1 \cdot 06645$$

7674

745

52

6

Felbontva ismét az 1·06645-öt, minthogy a táblázatban 1·03663 a hozzá legközelebb álló kisebb :

$$1 \cdot 06645 : 1 \cdot 03663 = 1 \cdot 02878 \text{ és } 1 \cdot 06645 = 1 \cdot 03663 \times 1 \cdot 02878$$

2982

909

80

8

Mindig újból ismételve ezt az eljárást :

$$1 \cdot 02878 : 1 \cdot 01815 = 1 \cdot 01044 \text{ és } 1 \cdot 02878 = 1 \cdot 01815 \times 1 \cdot 01044$$

1063

45

4

$$1 \cdot 01044 : 1 \cdot 00904 = 1 \cdot 00139 \text{ és } 1 \cdot 01044 = 1 \cdot 00904 \times 1 \cdot 00139$$

140

39

9

*) Minthogy csak öt tizedeshelyre adott számokkal dolgozunk, az osztás folytatásánál — e korlátozott pontosságnak megfelelőleg — nem csatolunk zérust az osztandóhoz, hanem az osztandóból egy-egy számjelt törölünk, de úgy, hogy midőn a hányados számjeleivel szorzunk, az elhagyott rész befolyását a megmaradt számokra még tekintetbe vesszük.

$$1\cdot00139 : 1\cdot00112 = 1\cdot00027 \text{ és } 1\cdot00139 = 1\cdot00112 \times 1\cdot00027$$

27

7

$$1\cdot00027 : 1\cdot00014 = 1\cdot00013 \text{ és } 1\cdot00027 = 1\cdot00014 \times 1\cdot00013$$

13

3

$$1\cdot00013 : 1\cdot00007 = 1\cdot00006 \text{ és } 1\cdot00013 = 1\cdot00007 \times 1\cdot00006$$

6

$$1\cdot00006 : 1\cdot00004 = 1\cdot00002 \text{ és } 1\cdot00006 = 1\cdot00004 \times 1\cdot00002$$

hol a számítás be van fejezve, mert $1\cdot00002$ már a táblázatban foglaltatik. Összefoglalva az egész felbontást, lesz öt tizedeshelyre terjedő pontossággal

$$2\cdot19 = 1\cdot77828 \times 1\cdot15478 \times 1\cdot03663 \times 1\cdot01815 \times 1\cdot00904 \times \\ \times 1\cdot00112 \times 1\cdot00014 \times 1\cdot00007 \times 1\cdot00004 \times 1\cdot00002.$$

Minthogy pedig szorzat logaritmusa egyenlő a szorzók logaritmusainak összegével, tehát:

$$\log 2\cdot19 = \log 1\cdot77828 + \log 1\cdot15478 + \log 1\cdot03663 + \text{és úgy tovább.}$$

A számok logaritmusai táblázatunkban állanak és így összegük is képezhető:

$$\begin{array}{ll} \log 1\cdot77828 = 0\cdot25000 & \log 1\cdot00112 = 0\cdot00049 \\ \log 1\cdot15478 = 0\cdot06250 & \log 1\cdot00014 = 0\cdot00006 \\ \log 1\cdot03663 = 0\cdot01562 & \log 1\cdot00007 = 0\cdot00003 \\ \log 1\cdot01815 = 0\cdot00781 & \log 1\cdot00004 = 0\cdot00002 \\ \log 1\cdot00904 = 0\cdot00391 & \log 1\cdot00002 = 0\cdot00001 \\ & \hline & \log 2\cdot19 = 1\cdot34045 \end{array}$$

Minthogy az egész számítást 5 tizedeshellyel végeztük, az elhagyott 6-ik, sőt 7-ik számjegy pedig a számításnál befolyást gyakorolhat a fölírt részre is, világos, hogy az eredményben az 5-ik hely már nem lesz teljesen megbízható. A mi esetünkben az 5-ik tizedeshely pontos értéke 4.

Az elv, mely ebben az eljárásban rejlik, most még röviden így fejezhető ki. Az N logaritmusa ismeretes, ha N -et ily alakban tudom felírni: $N = 10^k$; minthogy az N -ről föltételezem, hogy 1 és 10 közt fekszik, a k pozitív, egynél kisebb szám; a táblázat módot nyújt arra, hogy meglássuk, a k miképpen van összetéve az $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ... törtekből, vagyis ezt a keresett kitevőt vagy logaritmust a kettes számrendszer alakjában szolgáltatja.

Feladat. Határozzuk meg e kis táblázat segítségével 7·43, 5·67, 3·25 logarithmusait.

110. **Charakteristika és mantissa.** Bármely szám logarithmusa, mint általánosságban irracionális szám, egész számú részből és az egységnél kisebb részből áll, melyet a szükséges megközelítésben tizedes tört alakjában írunk.

Miként már említettük, az egységnél nagyobb szám logarithmusa pozitív, és minden az egységnél kisebb szám logarithmusa negatív. Ez abból következik, hogy $10^0 = 1$, és hogy az egységnél nagyobb lévén az alap, kitevő és hatvány, vagy ami ugyanaz, logarithmus és szám együtt növekszik vagy fogy. Az 1-nél kisebb szám logarithmusát azonban nem szokás egy egyetlen negatív szám alakjában fölírni: pl. nem írjuk, hogy:

$$\log 0\cdot2 = -0\cdot69897 \text{ vagy } \log 0\cdot00019 = -3\cdot72125$$

hanem a negatív számértékű logarithmust átalakítjuk úgy, hogy ilyen alakú legyen: negatív egész szám + valódi tört. Evégből pl. a $-0\cdot69897$ -hez hozzáadunk 1-et és megint levonunk 1-et:

$$-0\cdot69897 = (1 - 0\cdot69897) - 1 = 0\cdot30103 - 1.$$

A $-0\cdot69897$ helyett tehát ezt az alakot használjuk: $0\cdot30103 - 1$.

A $-3\cdot72125$ átalakítása végett e számhoz 4-et hozzáadunk és ugyanennyit kivonunk:

$$-3\cdot72125 = (4 - 3\cdot72125) - 4 = 0\cdot27875 - 4.$$

Feladat. Alakítsd át ilyen alakra (valódi tört — poz. egész szám) e negatív számokat: $-0\cdot45678$, $-1\cdot23415$, $-2\cdot40318$, $-3\cdot06508$, $-4\cdot08916$, $-3\cdot50632$, $-0\cdot03875$.

Minden logarithmus tehát ezután úgy irandó, hogy a pozitívnak vett decimális törthöz pozitív vagy negatív egész számot csatolunk. Ekkor a decimális tört részt mantissának, az egész számot pedig karakteristikának mondják. Pozitív logarithmusnál a karakteristikát mint egész számú részt a törttel egyesítjük, negatív logarithmusnál mint második tagot a mantissa után írjuk.

111. **A karakteristika meghatározása.** Tudjuk, hogy $\log 1 = 0$ és $\log 10 = 1$, minthogy pedig logarithmus és szám együtt növekszik, tehát minden számnak, mely egy és tíz közt fekszik, logarithmusa 0 és 1 közt foglaltatik; azaz egész számú része, karakteristikája: 0. De az egy és 10 közt fekvő számok azok, melyeknek egész számú része egy, természetesen 0-tól különböző számjeből áll. Tehát:

Ama számoknál, melyeknek egész számú része egy számjegyből áll, a logarithmus karakteristikája 0. Folytatva e megfontolásokat, látni, hogy $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$. Tehát minden 10 és 100 közt fekvő szám logarithmusa 1 és 2 közt foglaltatik. Vagy ismét más fogalmazásban:

Ama számoknál, melyeknek egész számú része két számjegyből áll, a logarithmus karakteristikája 1.

Világos, hogy e következtetéseket miképp kell folytatni, míg végre az általános szabályt nyerjük:

Ama számoknál, melyeknek egész számú része k számjegyből áll, a logarithmus karakteristikája k—1.

Hátra vannak most még ama számok, melyekben nincs egész számú rész, a valódi törtek, melyeknek logarithmusa negatív. Ekkor, minthogy az

$$1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, \text{ s ú. t.}$$

logarithmusai: $0, -1, -2, -3, -4, \text{ s ú. t.}$

ismét látjuk, hogy az 1 és 0.1 közt fekvő számok logarithmusai 0 és —1 közt foglaltatnak, a 0.1 és 0.01 közt fekvő számoké —1 és —2 közt, s ú. t.

Az 1 és 0.1 közt ama valódi törtek foglaltatnak, melyeknél a tizedes pont után következő helyen a 0-tól különböző számjegy áll. A logarithmusaik 0 és —1 között vannak. Minden szám, mely 0 és —1 között van, így írható: Valódi tört —1. Eszerint:

Ha a numerus első tizedeshelyén a zérustól különböző számjegy áll, logarithmusának karakteristikája —1.

Hasonlóképpen a 0.1 és 0.01 közt ama tizedes törtek fekszenek, melyeknél az első tizedes helyen 0 áll, a másodikon pedig a 0-tól különböző számjegy. Minthogy 0.1 logarithmusa —1 és 0.01 logarithmusa —2, tehát ezen számok logarithmusai —1 és —2 között vannak. Minden szám, mely —1 és —2 között

van, vagyis mely -2 -nél nagyobb, de -1 -nél kisebb, ilyen alakban írható: $-2 +$ valódi tört, vagy »Val. tört -2 «. Tehát:

Az oly valódi törtnél, melyben a második tizedeshelyen áll az első, zérustól különböző számjegy, a logaríthmus karakteristikája -2 .

E következtetések ismétlése ismét általánosságban a következő szabályt adja:

Ha a numerusban a k -edik tizedes helyen áll először a 0-tól különböző számjegy, a logaríthmus karakteristikája $-k$.

E szerint pl.:

$$\log 3 \cdot 125 = 0 \dots; \log 3425 = 3 \dots$$

$$\log 0 \cdot 05 = 0 \dots - 2; \log 0 \cdot 00007 = 0 \dots - 5,$$

hol a még ismeretlen mantissa helyét pontokkal jelöltük.

Feladat. Határozd meg a következő számok logaríthmusainak karakteristikáit: $5 \cdot 48$, $36 \cdot 48$, $0 \cdot 563$, $0 \cdot 0429$, $563 \cdot 4$, $0 \cdot 0095$, $73 \cdot 12$, $0 \cdot 0834$, $5 \cdot 678$, $0 \cdot 1934$, $0 \cdot 004$, $40 \cdot 56$.

112. A mantissa kikeresése. *A logaríthmushoz tartozó mantissát a táblában találjuk.* E táblák, amint a megkívánt pontosság nagyobb vagy kisebb, különböző kiterjedésűek. A gyakorlatban használtak közvetlenül vagy a 3 számjegyből álló egész számok logaríthmusait adják 4 decimálisra, vagy a 4 számjegyből álló számokét 5 decimálisra, vagy végre az 5 számjegyből állókat 7 decimálisra.

Ezek közül mi a második sorban említetteket használjuk.

A tábla használatához először is tudnunk kell, hogy:

Ha két szám egymástól csakis a tizedes pont helyzetében különbözik, akkor a logaríthmusaik mantissái megegyeznek.

Olyan szám, mely pl. N -től csakis a tizedes pont helyzetében különbözik: $N \cdot 10^k$, ahol k pozitív vagy negatív egész szám. Ha k pozitív egész szám, akkor az N -ben előforduló tizedes pont k hellyel jobbfelé tolódott, ha k negatív egész szám, akkor pedig k hellyel balfelé tétetett. $N \cdot 10^k$ és N logaríthmusai egymástól csakis a karakteristikában különbözhetnek, mert hiszen $N \cdot 10^k$ szorzat, melynek logaríthmusa a tényezők logaríthmusainak összege és minthogy 10^k logaríthmusa k , tehát

$$\log N \cdot 10^k = \log N + k.$$

Látjuk tehát, hogy valóban az $N \cdot 10^k$ logarithmusát úgy kapjuk meg, ha az N logarithmusához a k egész számot hozzáadjuk; ezáltal pedig a mantissa meg nem változik; tehát ha két numerus számjelei megegyeznek és mindössze csak a tizedes-pont helyzetében van eltérés, a logarithmusaik mantissái is megegyeznek és csakis a karakteristikában van különbség. Így pl. 1938 logarithmusának mantissája ugyanaz, mint 1938, 1938, 01938, 001938 stb. logarithmusának mantissája.

Ezek után lássuk a tábla használatát.

Egy-egy sorban tíz egymásután következő szám logarithmusa áll, t. i. azoké, melyek csak az egyesekben különböznek. A három állandó számjel az első rovatban áll (Num. fölírással), a negyedik számjel az utána következő tíz rovat fején. Ha ezzerint pl. 1538 logarithmusát keressük, akkor először is megállapítjuk, hogy a karakteristika 3, ezután az első rovatban a 153-at keressük és azután ebben a sorban ahhoz a rovathoz megyünk, melynek fölírása 8-as. Ott a következő számcsoportot találjuk: 696. Ez a keresett mantissának 3-ik, 4-ik és 5-ik számjegye. Az első két számjegy t. i. csak a sor elején egyszer lesz kiírva, hogy a tábla ily módon kisebb térre szoríttassék. A két számjegy, mely a sor előtt áll: 18. A karakteristika, mint tudjuk, 3, és így a keresett logarithmus 5 tizedes helyre 318696. Az első két számjegy változása azonban nem történik mindig a sor elején. Hogy ne kelljen a sorok alakját megzavarni, ilyenkor a három utolsó számjegy csoportjánál egy kis jel (csillag) áll, mely azt jelenti, hogy a mantissa két első számjele nem a megelőző, hanem a következő sorokban keresendő. Így pl. 4576 logarithmusánál a táblában *049-et találunk, az első két számjegynek tehát az utána álló 66 veendő és így $\log 4576 = 3.66049$.

Némely iktáblában az utolsó számjegy alatt néha egy kis vonást találunk. Ez annyit jelent, hogy ezen a helyen tulajdonképpen egygyel kisebb számjegy állott, mely azonban, minthogy a 6-ik elhagyott helyen 5-ös vagy ennél nagyobb szám állott, eggyel megnagyobbított.

Ha az oly szám logarithmusát keressük, mely a táblában foglalt egész számok közt fekszik, a táblát *interpoláljuk*. Ez a következő tétel alapján történik:

A logaritmusok különbségei arányosak a számok különbségeivel.

E tétel általánosságban nem helyes, de amint a logaritmus általános elmélete mutatja, egymáshoz nagyon közel álló logaritmusoknál a használt megközelítés határain belül helyes eredményeket ad. Ezen elv alapján, ha pl. $\log 3377.7$ kerestetik, következőképp járunk el. A táblából látjuk, hogy

$$\log 3377 = 3.52853, \log 3378 = 3.52866,$$

míg tehát a szám 1-el növekszik, a logaritmus növekedése 13 százzezred. Ez a 13 a 3377-hez tartozó *táblabeli különbség*. Ha tehát a szám 0.1-el növekszik, a logaritmus 1.3 százzezreddel növekszik és végre, ha a szám 0.7-el nő, a logaritmus $7 \times 1.3 = 9.1$ százzezreddel nő. A milliomodrészt elhanyagoljuk, 3377.7 logaritmusa tehát 9 százzezredrésszel nagyobb mint 3377 logaritmusa. Ezt a 9 *pótléket* tehát a 3377 logaritmushoz hozzáadjuk.

Eszerint $\log 3377.7 = 3.52853 + 0.00009 = 3.52862$, ha a hozzáadandó pótlékban a 6-ik számjegyet elhagyjuk.

Az interpolációt azonban a tábla szerkesztése megkönnyíti. Egy és ugyanazon oldalon t. i. mint két egymásután következő logaritmus különbsége, csak egynéhány szám lép föl. Ezeknek most egy, két, ... kilenc tizedét a »P. P.«-vel (*partes proportionales*) vagy »A. R.«-ek (arányos részek) címzett rovatban készen találjuk, hol ezekhez csak a »százzezred« elnevezést kell hozzágondolni. A gyakorlatban azután fölösleges a javításnak tizedes tört alakját egészen odaírni, hanem a mantissa alá írjuk, úgy hogy a »P. P.« rovatban az egynek helyén álló számjegy (ez a »százzezred«) a mantissa utolsó számjegye alá kerüljön. A 6-ik tizedes jegyet, mely úgy sem pontos, elhagyjuk, esetleg az 5-iknek javítására használjuk.

Pl. $\log 2490.4 = 3.39620$ (mert a rákövetkező logaritmus

$$\begin{array}{r} 6.8 \\ 3.39627 \end{array} \quad \text{»17«-tel nagyobb}$$

Ha a számban még századrészek is állanak, az interpolációt épp úgy végezhetjük; a P. P. alatt álló tizedrészekből a tizedes pont eltolása által a megfelelő századokat nyerjük, de az új számjel befolyása a logaritmusnak 5 tizedessel vett értékére már igen csekély, mint azt egy-két példa mutatja:

$$\log 3141\cdot56 = 3\cdot49707$$

7

08

$$\underline{3\cdot49715}$$

Az ezredrészek már éppen nem gyakorolnak befolyást az 5 decimálisra.

Eszerint bárminő szám logaritmusaát keressük is, a karakteristikát az előbb adott szabály szerint találjuk, a mantissát pedig úgy keressük, mintha a négy első (0-tól különböző) számjel után állana a tizedespont. Az 5-ik számjel befolyását interpoláció által nyerjük, esetleg a hatodikét is, (ámbar ez már csak ritkán gyakorol befolyást a logaritmushoz ötödik tizedes helyére) és pedig oly módon, hogy a táblabeli különbséget az ötödik, vagy ötödik és hatodik jegyből álló résszel megszorozzuk és e szorzatból egy, illetőleg (ha hatodik jegy is van) 2 jegyet elvágunk, s igazítás vétele után e pótlékot a táblában talált logaritmushoz hozzáadjuk. Ezt az eljárást a P. P. segélyével is végezhetjük. A hetedik számjegy már soha sem gyakorol befolyást az 5 tizedessel vett logaritmushoz.

$$\text{Pl. } \log 23\cdot567 = 1\cdot37218$$

$$\begin{array}{r} 12\cdot6 \\ \hline 1\cdot37231 \end{array}$$

$$\log 16007\cdot1 = 4\cdot20412$$

$$\begin{array}{r} 18\cdot9 \\ \hline 4\cdot20431 \end{array}$$

$$\log 0\cdot00635 = 0\cdot80277 - 3$$

$$\log 23\cdot5672 = 1\cdot37218$$

$$\begin{array}{r} 12\cdot6 \\ \hline 0\cdot36 \\ \hline 1\cdot37231 \end{array}$$

$$\log 16007\cdot4 = 4\cdot20412$$

$$\begin{array}{r} 18\cdot9 \\ \hline 1\cdot08 \\ \hline 4\cdot20432 \end{array}$$

$$\log 0\cdot0063547 = 0\cdot80305 - 3$$

$$\begin{array}{r} 4\cdot9 \\ \hline 0\cdot86310 - 3 \end{array}$$

Feladatok. Keresd meg a következő számok logaritmusaát: 64·56, 73·418, 432·53, 506·73, 489·56, 963·47, 3·6358, 0·4976, 0·58319, 0·03645, 0·83567, 3042·96, 54812·6, 370·483.

113. Visszakeresés. Midőn az adott logaritmushoz a számot kell meghatározni, ez, amint az alapegyenlet

$$10^{\log x} = x$$

mutatja, nem más, mint hatványozási feladat, melynél azonban szintén a kész eredményt a táblából lehet kiírni.

A karakteristika mindenekelőtt a szám alakját adja; mutatja ugyanis, hogy hány számjegy áll a tizedespont előtt, vagy midőn negatív, hogy a tizedespont után hányadik helyen van az első értékes számjegy.

Igy pl. ha a karakteristika 0, akkor a numerus 1 és 10 között van, tehát a tizedespont előtt egy számjegy van. Ha a karakteristika 1, akkor a numerus 10 és 100 közt van, tehát a tizedes pont előtt 3 számjegy van s í. t. Ha a karakteristika -1 , akkor a numerus 1 és 0.1 között van, tehát az első értékes jegy közvetlen a tizedes pont után van. Ha a karakteristika -2 , akkor a tizedes pont után egy 0 van és azután következik az értékes számjegy stb.

Különösen a kezdőre nézve előnyös a számnak ily alakját előlegesen jelölni, pl.

$$\text{num log } 1.24563 = \dots\dots$$

$$\text{num log } (0.35782 - 4) = 0.000 \dots\dots$$

hol a számítás folytatásánál a pontok helyét betöltjük a meghatározandó számjelekkel.

Ha pl. keressük azt a numerust, melynek logarithmusa 2.95119 , akkor a táblában csakis 95119 mantissát keressük meg és pedig az első két jegyből álló részt az első rovatokban, a többi 3 számjegyből állót pedig a következőkben. Meg is találjuk a táblában a 95119 -et. Ezzel vízszintes irányban 893 van, a 119 fölött pedig a rovat fején 7 , tehát

$$\text{num log } 2.95119 = 893.7.$$

Feladat. Gyakorlatképen keresse ki a tanuló azokat a számokat, melyek logarithmusai ezek: 0.68278 , 1.81265 , $0.91630 - 1$, 2.86016 , $0.67015 - 2$, $0.24005 - 1$, 0.27114 , 1.64028 , 1.67025 , 3.82020 .

A legtöbbször azonban nem találjuk meg a táblában az adott logarithmust. Ha megtaláljuk, az annak a jele, hogy a hozzátartozó numerus csak négy számjegyből áll. Ha azonban nem találjuk meg a táblában az adott logarithmust, akkor a numerus négynél több jegyű. Ekkor a táblából közvetlenül csakis a négy első jegyét vehetjük ki, a többit (5 -ik és esetleg 6 -ik jegyet) megint interpolációval határozzuk meg.

Évégből az előbb a logarithmus meghatározásánál követett utat megfordítjuk.

Ha pl. azt a numerust keressük, melynek logarithmusa 1.24563 , a táblában mint a legközelebb álló mantissákat a

24551 és 24576-ot találjuk, tehát a numerus e logarithmusoknak megfelelő 1760 és 1761 közt van. (Ennél a számításnál a karakteristika nem jön tekintetbe, azért a számnál sem rakjuk be a tizedes pontot.) A két logarithmus közti különbség 25 századrész. Ha a logarithmus 25 százezredrésszel növekszik : a szám 1-gyel nagyobbodik ; mennyivel nagyobbodik a szám — kérdezzük most — ha a logarithmus csak 12 százezredrésszel nő ? (Ennyivel nagyobb az adott logarithmus a táblában megtalált közvetlen kisebb logarithmusnál.) Ha a logarithmus pótléka csak 1 volna, akkor a numerus $\frac{1}{25}$ -del növe-

kednék, tehát 12 pótléknak megfelel a numerusnak $\frac{12}{25}$ növekedése. $12 : 25 = 0.48$. A keresett numerus tehát 0.48-al nagyobb mint 1760 és a karakteristikát is figyelembe véve :

$$\text{num log } 1.24563 = 17.6048.$$

Ezt a kérdést is a »P. P.« rovat segítségével fejthetjük meg. Ott találjuk, hogy a logarithmus 10-zel növekedvén, a szám 4 tizeddel növekszik, és eltolva benne a tizedespontot, éppen úgy, ha a logarithmus 2-vel növekszik, a szám 8 századdal növekszik.

Ezután a számítás berendezése

$$\text{num log } 1.24563 = 17.6048$$

$$\begin{array}{r} 551 \\ \hline 12 \\ \hline 10 \\ \hline 2 \\ \hline 2 \end{array}$$

a 10 levonásának megfelelőleg a számhoz csatolva a 4-et, s ú. t.

A 6-ik számjel nem tekinthető biztosnak és azért ez rendszerint csak az 5-ik számjel javítására használtatik.

Az eljárás tehát általánosságban a következő : Kikeressük a táblában az adott logarithmushoz legközelebb álló, de még kisebb mantissát, ez adja a 4 első (0-tól különböző) számjelt ; az 5-iket azután ismét azon elv alapján nyerjük, hogy a log és szám növekedése arányos. Egyszerűen a pótlékot (előbb 12) elosztjuk a táblabeli különbséggel (előbb 25) s a tizedes pont után jövő 1—2 számjegyet a megtalált első 4 számjegy után

írjuk. A számításnál megint a »P. P.«-t vehetjük segítségül, felhasználva azt, hogy a »P. P.« rovatban két egymásután következő logaritmussal különbségét már tizedrészekre osztva találjuk.

$$P. \text{ num } \log (0.68973 - 4) = 0.00048947$$

$$\begin{array}{r} 966 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$6,3$$

$$\frac{0,7}{}$$

$$\text{num } \log 2.67995 = 478.57$$

$$\begin{array}{r} 988 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$6,3$$

$$\frac{0,7}{}$$

$$\text{num } \log 10.59110 = 390033 \dots$$

$$\begin{array}{r} 106 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$3,6$$

hol a nyerendő tizenegy számjegyből álló egész számú részből már a hatodik nem biztos, a hátralevők pedig éppen nem határozhatók meg. Oka ennek abban rejlik, hogy a logaritmussal is csak korlátozott pontossággal ismerjük; ily nagy számoknál pedig a számnak pl. százszal való nagyobbítása a logaritmussal első 5 tizedeshelyére nem gyakorol még befolyást.

Feladat. Keresse meg a tanuló azokat a numerusokat, melyek logaritmussal ezek: 0.81207, 1.68265, 2.55597, 0.95399, 0.55779—1, 0.24632—2, 0.56103, 1.67664, 0.82215—1, 1.88324.

114. Logarithmikus számítások. A logaritmustáblák alkalmazása számértékek meghatározásánál a végzendő műveletek sorát lényegesen egyszerűsíti; ezért numerikus feladatoknál, ahol csak lehet, segítségül vesszük e táblákat.

A logarithmikus számítás alapja e 3 képlet:

$$\log (xy) = \log x + \log y$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

$$\log x^k = k \log x$$

Eszerint a logaritmusok alkalmazásánál szorzás helyett csak összeadást kell végezni, osztás helyett kivonást, hatványozás helyett végre szorzást, gyökvonás helyett osztást.

Az eljárást magát néhány példa mutatja legjobban :

1. $x=875\cdot63 \times 62\cdot824$. Tehát :

$$\begin{aligned} \log x &= \log 875\cdot63 + \log 62\cdot824, \quad \log 875\cdot63 = 2\cdot94232 \\ &= 4\cdot7405 \end{aligned}$$

és visszakeresve :

$$x=55010\cdot8 \dots$$

$$\begin{array}{r} \log 62\cdot824 = 1\cdot79813 \\ \hline 4\cdot74045 \\ \hline 044 \\ \hline 1 \end{array}$$

hol azonban a hatodik számjegy úgy sem biztos és azért egyszerűbben írjuk :

$$x=55011.$$

2. $x=0\cdot087563 \times 0\cdot0062824$

$$\begin{aligned} \log 0\cdot087563 &= 0\cdot94232 - 2 \\ \log 0\cdot0062824 &= 0\cdot79813 - 3 \\ \hline 1\cdot74045 &- 5 \end{aligned}$$

vagy, hogy a közönséges alakra hozzuk a logaritmust (1-et elveszünk mind a kisebbítendőből, mind a kivonandóból) :

$$0\cdot74045 - 4,$$

és visszakeresve :

$$x=0\cdot00055010$$

(A tanuló észreveszi könnyen, hogy e két példában a végzendő műveletek tulajdonképen ugyanazok voltak.)

$$3. x = \frac{56\cdot438}{3\cdot563}$$

$$\begin{aligned} \log x &= \log 56\cdot438 - \log 3\cdot563 \\ \log 56\cdot438 &= 1\cdot75157 \\ \log 3\cdot563 &= 0\cdot55182 \\ \hline \log x &= 1\cdot19975 \end{aligned}$$

és ebből visszakeresve :

$$x=15\cdot8396 \dots$$

$$4. y = \frac{48\cdot672}{63\cdot528}$$

$$\begin{aligned} \log x &= \log 48\cdot672 - \log 63\cdot528 \\ \log 48\cdot672 &= 1\cdot68728 \\ \log 63\cdot528 &= 1\cdot80297. \end{aligned}$$

A kisebbítendő kisebb mint a kivonandó ; a különbség tehát negatív. Hogy ezt a negatív különbséget mindjárt olyan alakban nyerjük, aminőre

szükségünk van a visszakeresés céljából (+ valódi tört — egész szám) a kisebbítendőhöz 1-et hozzáadunk és 1-et kivonunk. Lesz tehát:

$$\begin{array}{r} 2.68728-1 \\ 1.80297 \\ \hline \log y=0.88431-1 \end{array}$$

és ebből visszakeresve:

$$y=0.76614$$

$$5. z = \frac{87.563}{0.62824}$$

$$\begin{aligned} \log z &= \log 87.563 - \log 0.62824 \\ \log 87.563 &= 1.94232 \\ \log 0.62824 &= 0.79813-1. \end{aligned}$$

A kivonásnál figyelembe veendő, hogy a kivonandó kéttagú alakban áll előttünk, tehát egyszerűen megváltoztatott előjellel kell a kisebbítendőhöz adnunk. A -1 -ből lesz $+1$.

$$\begin{array}{r} 1.94232 \\ 0.79813 \\ \hline 1.14419 \end{array}$$

tehát:

$$\log z = 2.14419$$

és visszakeresve:

$$z = 139.377 \dots$$

$$6. x = \frac{0.29784}{0.48326}$$

$$\begin{aligned} \log x &= \log 0.29784 - \log 0.48326 \\ \log 0.29784 &= 0.47398-1 \\ \log 0.48326 &= 0.68418-1. \end{aligned}$$

Minthogy a kisebbítendő mantissája kisebb mint a kivonandóé, tehát, hogy a szükséges alakjában kapjuk mindjárt a különbséget, a kisebbítendőhöz hozzáadunk 1-et és le is vonunk belőle egyet. Lesz:

$$\begin{array}{r} 1.47398-1 \\ 0.68418-1 \\ \hline \log x = 0.78980 \end{array} \quad x = 6.1631$$

$$\begin{array}{r} 979 \\ \hline 1 \\ 0.7 \end{array}$$

7. Kerestetik 3-nak 18-ik hatványa :

$$\log 3^{18} = 18 \log 3.$$

$$\log 3 = 0.47712$$

$$18 \log 3 = 8.58816$$

tehát $3^{18} = 38740 \dots$, hol a ponttal jelzett négy számjel bizonytalan, azaz $3^{18} = 38740 \times 10000 +$ a tízezernél kisebb szám.

8. $y = (0.8325)^6$

$$\log y = 6 \times \log 0.8325$$

$$6 \times \log 0.8325 = (0.92038 - 1) \times 6$$

$$= 5.52228 - 6 = 0.52228 - 1$$

$$\log y = 0.52228 - 1$$

és ebből visszakeresve :

$$y = 0.332877.$$

9. $x = \sqrt[5]{672.83}$

$$\log x = \frac{\log 672.83}{5}$$

$$\log 672.83 : 5 = 2.82791 : 5 = 0.56558$$

$$x = \text{num } \log 0.56558 = 3.67775.$$

10. Kerestetik 0.0084368 ötödik gyöke :

$$\log a^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \log a$$

$$\log 0.0084368 = 0.92618 - 3 ;$$

ha ily alakban akarunk 5-tel osztani, a charakteristikából tört lenne ; hogy ezt elkerüljük, úgy alakítjuk át az osztandót, hogy a kivonandó ne 3, hanem 5 legyen ; evégből 2—2-t hozzáadunk és a logarithmust így írjuk :

$$\log 0.0084368 = 2.92618 - 5$$

$$\frac{1}{5} \log 0.0084368 = 0.58524 - 1$$

és ebből visszakeresve :

$$\sqrt[5]{0.0084368} = 0.38480.$$

Ha a kiszámítandó kifejezésben csakis szorzás, osztás, hatványozás (illetőleg gyökvonás) művelete szerepel, akkor e kifejezés számértékét úgy határozzuk meg, hogy előbb megkeressük az egész kifejezés logarithmusát és azután e logarithmushoz tartozó numerust. Így pl. :

$$x = \frac{875.63 \times \sqrt[3]{832.5}}{(2.9784)^5 \times \sqrt{23}}$$

akkor :

$$\log x = \log 875 \cdot 63 + \frac{\log 832 \cdot 5}{3} - \left(5 \log 2 \cdot 9784 + \frac{\log 23}{5} \right)$$

$$\log 875 \cdot 63 = 2 \cdot 94233$$

$$\frac{\log 832 \cdot 5}{3} = 2 \cdot 92038 : 3 = 0 \cdot 97346$$

$$5 \times \log 2 \cdot 9784 = 0 \cdot 47398 \times 5 = 2 \cdot 36990$$

$$\frac{\log 23}{5} = 1 \cdot 36173 : 5 = 0 \cdot 27235$$

$$\log x = 3 \cdot 91579 - 2 \cdot 64225 = 1 \cdot 27353$$

$$x = \text{nüm log } 1 \cdot 27353 = 18 \cdot 773.$$

De ha a kiszámítandó kifejezésben összeadás vagy kivonás művelete fordul elő, akkor minden egyes tagját külön kell kiszámítanunk és azután ezeken kell az összeadás (kivonás) műveletét elvégezni. Ha az egyes tagok bonyolódottabbak, akkor kiszámításukat logaritmusok segítségével is végezhetjük.

Igy pl. ha kiszámítandó :

$$x = \frac{98 \cdot 256^{1 \cdot 2} - \sqrt[3]{444 \cdot 18}}{23 \cdot 907 \times 0 \cdot 0035122^{0 \cdot 1}},$$

akkor először külön kell kiszámítanunk a számláló két tagját, és azután a számlálóban jelzett kivonást kell elvégeznünk.

Az eljárás a következő lesz :

$$\log 98 \cdot 256 = 1 \cdot 99236$$

$$1 \cdot 2 \log 98 \cdot 256 = 2 \cdot 39083$$

$$98 \cdot 256^{1 \cdot 2} = 245 \cdot 94$$

$$\log 444 \cdot 18 = 2 \cdot 64756$$

$$\frac{1}{3} \log 444 \cdot 18 = 0 \cdot 88252$$

$$\sqrt[3]{444 \cdot 18} = 7 \cdot 63.$$

$$\text{Számoló} = 245 \cdot 94 - 7 \cdot 63 = 238 \cdot 31.$$

Most már kiszámítandó :

$$x = \frac{238 \cdot 31}{23 \cdot 907 \times 0 \cdot 0035122^{0 \cdot 1}},$$

$$\log \text{ száml.} = 1.37714$$

$$\log 23.907 = 1.37853$$

$$\log 0.0035122 = 0.54558 - 3$$

$$0.1 \log 0.0035122 = 0.75456 - 1$$

$$\begin{aligned} \log \text{ nevező} &= \log 23.907 + 0.1 \log 0.0035122 \\ &= 1.13309. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log x &= \log \text{ száml.} - \log \text{ nev.} = 1.24405 \\ x &= 17.541. \end{aligned}$$

Feladatok.

1. 34.432×1.89756 .
2. 406.52×0.38956 .
3. 72.508×0.083956 .
4. 0.05634×0.89375 .
5. $63.897 : 26438$.
6. $7.4356 : 97.385$.
7. $6.4878 : 0.29536$.
8. $78.365 : 0.04379$.
9. $58.765 : 0.83756$.
10. $0.49738 : 0.03562$.
11. $0.37906 : 0.073897$.
12. $0.7354 : 9.5628$.
13. $(1.045)^{12}$.
14. $(1.0235)^{75}$.
15. $(1.06)^{100}$.
16. $(0.69378)^4$.
17. $(5.0673)^5$.
18. $(0.73408)^5$.
19. $\sqrt[5]{138.92}$.
20. $\sqrt[3]{5384.8}$.
21. $\sqrt[10]{36452}$.
22. $\sqrt[5]{0.23892}$.
23. $\sqrt[4]{0.039785}$.
24. $\sqrt[10]{0.0023954}$.
25. $543.25 \times (1.063)^{10}$.
26. $(1.006)^{12} \cdot (1.0368)^{20}$.
27. $(1.0438)^{10} \cdot (1.06)^{12} \cdot (1.075)^{15}$.
28. $\sqrt[5]{673.42} \cdot \sqrt[7]{589.24}$.
29. $\frac{(1.2345)^{10} \cdot \sqrt[5]{806.42}}{42.563}$.
30. $\frac{(1.4063)^{15} \cdot \sqrt[7]{609.43}}{(1.0876)^{20} \cdot \sqrt[5]{97.463}}$.
31. $\frac{(1.3876)^5 + (1.7943)^7}{(1.5684)^9 - (1.4526)^7}$.
32. $\frac{1}{\sqrt[6]{463.52} - \sqrt[5]{96.354}}$.
33. $\frac{(1.0678)^{25} - 1}{(1.0739)^{25} - 1}$.
34. $\frac{\sqrt[3]{0.17983 + 1}}{\sqrt[5]{0.04256 + 1}}$.
35. $\frac{143.42 \cdot (1.0095)^{12} - 106.56 \cdot (1.0412)^{15}}{187.42 \cdot (1.0583)^{15} - 197.85 \cdot (1.0365)^{12}}$.

115. Áttérés más logaritmus-rendszerre. Kitevős egyenlet.
 Azt a feladatot, hogy bármely m szám közösleges logaritmusát határozzuk meg, úgy is lehet fogalmazni, hogy a keresett x szám elégítse ki a következő egyenletet:

$$10^x = m$$

mert ez, mint tudjuk, éppen azt mondja, hogy $\log m = x$.

A logaritmus alkalmazása tehát ennek az egyenletalaknak megoldását adja. Ez az ú. n. *kitevős* vagy *exponenciális egyenlet* legegyszerűbb alakja. Ez lényegesen eltér az eddig tárgyalt egyenletektől, benne az ismeretlen mint kitevő szerepelvén.

$x = \log m$ az egyenletnek egy gyöke, de ezzel nem nyertük az egyenlet teljes megoldását, mert még más x értékek is lehetségesek, melyek az egyenletet kielégítik; de ezekkel nem foglalkozunk.

Hasonló egyenletalakra vezet még a következő feladat is: az m számnak a -logaritmusát kiszámítani (vagyis az a alapra vonatkoztatott logaritmusát). Ha ezt az ismeretlen logaritmust x -szel jelölöm, a logaritmus értelmezése szerint az a kérdés, hogy az a alapot minő kitevőre kell emelnünk, hogy hatványul m -et kapjunk? vagyis kell, hogy

$$a^x = m$$

legyen és így tehát az m -nek a -logaritmusát megkapom, ha ezt az egyenletet megoldom. Amint látni, ez az egyenlet az előbbtől csak azáltal különbözik, hogy 10 helyett a áll.

Vegyük mindkét oldalon a 10-es alapra vonatkoztatott logaritmust:

$$\log a^x = \log m$$

vagy átalakítva a hatvány logaritmusát:

$$x \log a = \log m$$

és így, minthogy x nem egyéb, mint ${}^a\log m$:

$$x = {}^a\log m = \frac{\log m}{\log a}.$$

E képlet az a -logaritmus meghatározását ismert műveletekre vezeti vissza. Az m -nek a -logaritmusát *t. i. úgy nyerjük, hogy az m közösleges logaritmusát az új alap közösleges logaritmusával elosztjuk.*

Kerestetik pl. 15-nek logaritmusa, ha az alapszám 3. Ez más kifejezésben a következő egyenlet:

$$3^x = 15$$

megoldásának feladata. Tehát:

$$x = \frac{\log 15}{\log 3}$$

és így

$$x = 1.17609 : 0.47712 = 2.4650$$

$$22185$$

$$2100$$

$$237$$

$$2$$

vagyis: ${}^3\log 15 = 2.4650$.

(Ily esetekben kiírjuk a 0-t, mert a 2.465 általánosságban azt jelenti, hogy az érték csak 3 tizedes helyre pontos; míg itt a 4-ik hely is teljesen meg van határozva, de esetleg 0.)

Feladatok.

Oldjuk meg a következő exponenciális egyenleteket:

$$1. 5^x = 43. \quad 2. 12^x = 69. \quad 3. 5^x = 3 \cdot 2^x. \quad 4. 13 = 27 \cdot 3^x.$$

$$5. (1.045)^x = 763.4. \quad 6. 56.43 (1.04)^x = 72.58 (1.03)^x.$$

$$7. 5^{2x} = 37.42. \quad 8. (1.046)^{x+3} = 13.485.$$

$$9. 5^{x+1} - 3 \cdot 5 = 432 \quad (5^x \text{ kiemelhető közös tényezőül a balold.}).$$

$$10. 2^x - 3 \cdot 2^{x-2} = 8. \quad 11. 2 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{x-3} = 1323.$$

$$12. (1.05)^x + 5 \cdot (1.05)^{x-1} = 16.583.$$

$$13. \sqrt[2]{2} = 3^{x+3}.$$

$$14. \sqrt[2]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[4]{4} = 1.$$

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

$$1. *) \log x + \log y = a \quad 2. **) \quad a^x = b^y \quad 3. 3^x + 4^y = 73$$

$$x^2 \times y^2 = m. \quad x^a = y^b. \quad 3^x \cdot 4^y = 576.$$

$$4. 3 \cdot 2^{x+y} - 5 \cdot 2^{y-x} = 182. \quad 5. 3^x + 4^y = 73$$

$$5. 2^{x+y} - 4 \cdot 2^{x-y} = 312. \quad 3^x \cdot 4^y = 576$$

6. Melyik az az x alapszám, melyre vonatkozólag

$${}^x\log 1000 = ({}^x\log 10)^2 + 3$$

$[{}^x\log 1000 = {}^x\log 10^3 = 3 \cdot {}^x\log 10$. Tegyük egyelőre ${}^x\log 10$ helyett y betűt!]

*) Az első egyenletből következik, hogy $xy = 10^a$.

**) Az első egyenlet mindkét oldalán logaritmust veszünk és például x -et ezen egyenletből kifejezzük és a másodikba helyettesítjük.

XV. Számítási és geometriai sor.

116. **Számítási sor.** *Ha a számok egy sorozatának az a tulajdonsága, hogy a sorozat bármelyik számából az előttevalót kivonva, ugyanazt a különbséget kapjuk, akkor e számok számítási sort alkotnak.* Ilyen számítási sor pl. a természetes számok sora: 1, 2, 3... n , $n+1$, ... mert akármelyikből az előtte valót kivonva, különbségül 1-et kapunk. Ilyen sor pl.: 1, 3, 5, 7, 9... stb. Az *állandó különbséget a számítási sor különbségének hívjuk.* — Ha e különbség pozitív, a számítási sor *emelkedő*, ha pedig a különbség negatív, a sor *csökkenő*, pl.: 1, 5, 9... emelkedő, 20, 18, 16... csökkenő sor.

Ha a számítási sor első tagja a , különbsége d , akkor második tagja $a+d$, harmadik tagja $a+2d$ stb. Ha a_n -nel jelöljük a számítási sor n -ik tagját, akkor:

$$a_1 = a, a_2 = a + d, a_3 = a + 2d, a_4 = a + 3d, a_5 = a + 4d,$$

általában:

$$a_n = a + (n-1)d \dots\dots\dots 1.$$

vagyis a számítási sor n -ik tagját úgy kapjuk meg, hogy az első tagjához a különbségnek $(n-1)$ szeresét adjuk.

117. **A számítási sor n tagjának összege.** Jelöljük a számítási sor első tagját a_1 -gyel, különbségét d -vel, n első tagjának összegét S_n -nel, akkor

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

Az első és utolsó tag összege: $a_1 + a_n$; a második tag: $a_2 = a_1 + d$; az utolsóelőtti: $a_{n-1} = a_n - d$; tehát

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n.$$

Általában, ha előlről számítva bizonyos taghoz visszaról számítva ugyanennyediket hozzáadjuk, mindig $a_1 + a_n$ -et kapunk. Pl. előlről számítva az 5-ik tag $a_1 + 4d$; visszaról számítva az 5-ik tag $a_n - 4d$. E kettő összege $a_1 + 4d + a_n - 4d = a_1 + a_n$.

Vagy általában előlről számítva a k -ik tag: $a_1 + (k-1)d$. Visszaról számítva a k -ik tag: $a_n - (k-1)d$. E kettő összege: $a_1 + a_n$. Ha tehát az S_n tagjait fordított sorrendben is felírjuk:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1$$

és ezen egyenletek megfelelő oldalait összeadjuk, akkor

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_n + a_1) = n(a_1 + a_n)$$

kapjuk, miből:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = n \frac{a_1 + a_n}{2}$$

vagyis a számtani sor n tagjának összegét úgy kapjuk meg, hogy az első és utolsó tag összegének felét (az úgynevezett középszámot) a tagok számával megszorozzuk. Így pl. ebben a számtani sorban:

$$3, 7, 11, \dots$$

a 10-ik tag: $3 + 4 \cdot 9 = 39$ és a 10 első tag összege:

$$(39 + 3) \cdot 5 = 210.$$

Feladatok.

1. Melyik a 20-ik páratlan szám? A 60-ik, az 54-ik, a 100-ik?
2. Melyik a 10-ik páros szám? a 25-ik, a 100-ik, a 73-ik?
3. Melyik az 50-ik tag azon számtani sorban, melynek első tagja 15, a második tagja 18?
4. Egy számtani sorban $a_1=7$, $a_2=15$. Mennyi d ? Mennyi a_{10} ? a_{20} ?
5. Egy számtani sorban $a_1=10$, $a_2=8$. Mennyi d ? a_{15} ? a_{20} ?
6. Egy számtani sorban $a_1=3/4$, $a_2=4/5$. Mennyi d ? a_{10} ? a_{15} ? a_{20} ?
7. Egy számtani sorban $a_1=8$, $a_2=-1$; mennyi d ? mennyi a_{10} ? a_{15} ?
8. Az első zóna 25 km, minden következő (a tizenkettedikig) 15 km-rel több. Meddig terjed a 7-ik zóna? a 9-ik? a 11-ik? Hányadik zónában van azon hely, mely 85 km-nyire van?
9. Valamely számtani sor utolsó tagja u , különbsége d . Állítsuk elő e sor utolsóelőtti tagját. Állítsuk elő (visszáról számítva) a második, harmadik, ötödik, k -ik tagját.
10. Mennyi a természetes számsor tagjainak összege 1—100-ig?
11. Mennyi a természetes számsor n első számának összege?
12. Mennyi a 20 első páratlan szám összege? Mennyi az n első páratlan szám összege?

13. Mennyi a 100 első páros szám összege? Mennyi az n első páros szám összege?

14. Valamely számtani sorban az első tag 2, az ötödik 7; hány tagot kell venni, hogy az összeg 63 legyen?

15. Mivel egyenlő a különbség, ha az első tag 1, az utolsó 50 és az összeg 204?

16. Hat számot kell rakni 1 és 29 közé úgy, hogy a nyert sorozat számtani sorozat legyen!

17. Mi az első 17 páratlan szám összege?

18. Mi a különbsége annak a sornak, melyben a 10-dik tag $21\frac{1}{3}$ és a 15-dik tag 24?

19. Valamely sorban a 14-dik, 134-dik és utolsó tag: 66, illetőleg 666 és 6666: mi az első tag és hány tag van?

20. Három számot rakni 12 és 20 közé úgy, hogy a sorozat számtani sor legyen.

21. Hasonlóképp ötöt 13 és 15 közé.

22. Hasonlóképp tizet 8 és -3 közé.

23. Hasonlóképp hetet -1 és $+1$ közé.

24. Sorold elő az első n számot, mely d -vel osztható és állítsd elő ezek összegét! $(0, d, 2d, \dots, (n-1)d$.

25. Sorold elő az első n számot, melyek d -vel osztva, maradékul 1-et adnak és állítsd elő ezek összegét!

26. Sorold elő az első n számot, melyek d -vel osztva a -t adnak maradékul és állítsd elő ezek összegét?

27. Egy számtani sorban $a_1=3$, $d=2$. Mennyi a_{20} ?, s_{20} ?

28. Egy számtani sorban $a_5=15$; $d=2$; mekkora a_1 mekkora a_{20} , mekkora s_{20} ?

29. Egy számtani sorban $s_{10}=11$, $a_1=20$, mekkora d , mekkora s_{20} ?

30. Egy számtani sorban $s_{10}=140$; $a_{10}=33$. Mekkora a_1 , mekkora d ?

$(s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ egyenlet a_1 -re megoldandó.)

31. Egy számtani sorban $a_{10}=42$, $a_{20}=72$. — Mekkora d ? a_{50} ? s_{20} ? s_{50} ?

32. Egy számtani sor első tagja $a_1=15$, különbsége $d=2$, hány tag összege 240? $(s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ egyenletbe $a_n = a_1 + (n-1)d$ helyettesítendő és az egyenletet az ismeretlen n -re megoldjuk.) (Másodfokú egyenlet.)

33. A számtani sorban 5 mennyiség fordul elő: a_1, a_n, d, s_n, n . Ha ezen 5 mennyiség közül három ismeretes, a hiányzó kettő meghatározható:

a)	adatik	a_1, d, n	meghatározandó	a_n, s_n
b)	»	a_1, d, a_n	»	n, s_n
c)	»	a_1, n, s_n	»	a_n, d
d)	»	a_1, a_n, n	»	d, s_n
e)	»	a_1, n, d	»	a_n, s_n
f)	»	a_n, d, s_n	»	a_1, n
g)	»	a_n, n, s_n	»	a_1, d
h)	»	a_1, a_n, s	»	n, d
i)	»	n, d, s_n	»	a_1, a_n
j)	»	a_1, d, s_n	»	n, a_n

34. A szabadon eső test az első másodpercben 4·9 m-nyi utat tesz meg. Minden következő másodpercben 9·8 m-rel többet. Milyen magasról esett az a test, mely 4 mp alatt ér le a földre? (Levegő ellenállása nem vétetett figyelembe.)

35. Hány másodperc alatt ér le a földre egy test 122·5 méter magasságból?

36. A föld belsejében minden 61 méternyi mélységben 2 Celsius fokkal magasabb a hőmérséklet. Minő mélységben lesz a hőmérséklet 100° C., ha a földszínen 10°? és minő mélységben lesz 250°?

37. Összeadni a következő sort:

$$1-2+3-4+5-6+ \dots \text{és így tovább } 2n+1 \text{ tagra.}$$

(A pozitív és negatív tagok külön-külön számtani sort alkotnak: az összeget tehát így is írhatom:

$$(1+3+5+\dots+2n+1)-(2+4+6+\dots+2n),$$

hol mindegyik sorban n tag van. Most már képleteink alkalmazása a végeredményt adja.)

38. Összeadni 23 tagra e sort:

$$1-3+5-7+9-\dots \text{s ú. t.}$$

39. Valamely számtani sor első tagja 1. Az első 5 tag összege a következő 5 tag összegének negyedrésze. Melyik ez a sor?

40. 8 szám számtani sort alkot. Ha a két középsőt összeadom, 41-et kapok, ha a két szélsőt megszorozzuk, a szorzat 114 lesz. Melyik ez a 8 szám?

41. Egy számtani sorban a 7-ik, 10-ik és 14-ik tag összege 90; az 5-ik, 12-ik, 15-ik és 20-ik tag összege 152. Mekkora az a , mekkora d és mekkora az s_{20} ?

42. $a_4 + a_6 = 28$, $a_3 \cdot a_{10} = 232$. Mekkora a_1 , mekkora d ?

43. Egy számtani sorban, mely páratlan számú tagból áll és első tagja 1, az első, harmadik, ötödik stb. tagok összege 45, a második, negyedik stb. tagok összege pedig 36. Melyik ez a sor?

44. Egy számtani sor m tagjának összege n , és n tagjának összege m . Mekkora az $m+n$ tag összege?

45. Bebizonyítandó, hogy ha a^2 , b^2 , c^2 számtani sort alkotnak, akkor $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ is számtani sort alkot. [Kiszámítjuk az $\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c}$ különbséget, azután az $\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c}$ -t és megmutatjuk, hogy e kettő egyenlő, ha $b^2 - a^2 = c^2 - b^2$.]

118. Geometriai sor. Ha a számok egy sorozata azzal a tulajdonsággal bír, hogy a sorozat bármelyik száma az előttevalóval osztva, hányadosul ugyanazt a számot adja, akkor e számok geometriai sort alkotnak. Ilyen sor pl.: 1, 10, 100, 1000 stb. Bármelyiket az előbbivel osztva, hányadosul 10-et kapunk. Ezt az állandó hányadost a mértani sor hányadosának nevezzük.

Ha a geometriai sor első tagja a , hányadosa q , akkor a második tagja aq , harmadik tagja $aq \cdot q = aq^2$; negyedik tagja aq^3 , az ötödik aq^4 . Ha a_n -nel jelöljük a sor n -ik tagját, akkor $a_1 = a$, $a_2 = aq$, $a_3 = aq^2$; stb. általában:

$$a_n = aq^{n-1}$$

vagyis a geometriai sor n -ik tagját úgy kapjuk meg, hogy az első tagját a hányados $n-1$ -ik hatványával szorozzuk.

Feladat: Egy geom. sor első tagja 5, hányadosa 2, alkossuk meg a 7 első tagját!

119. A geometriai sor n tagjának összege. Jelöljük a geometriai sor első tagját a -val, hányadosát q -val, n első tagjának összegét S_n -nel, akkor:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}.$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát q -val, akkor

$$S_n q = aq + aq^2 + \dots + aq^n$$

egyenletet nyerjük. Ha ezen egyenlet egyes oldalaiából a felső egyenlet megfelelő oldalait kivonjuk, ered:

$$S_n(q-1) = aq^n - a,$$

miből:

$$S_n = \frac{aq^n - a}{q-1}.$$

Hogy szavakban könnyebben kifejezhessük e tételt, megjegyezzük, hogy aq^n nem más, mint az utolsó tag (aq^{n-1}) szorozva a hányadossal (q). Eszerint a mértani sor n tagjának összegét úgy kapjuk meg, hogy az *utolsó tagot megszorozzuk a hányadossal, ebből a szorzatból kivonjuk az első tagot és e maradékot elosztjuk az eggyel kevesbített hányadossal*. A számlálóból a közös szorzóul kiemelhető. Így keletkezik:

$$S = a \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

a geometriai sor n tagjának összegét tehát úgy is nyerhetjük, hogy *a hányados n -edik hatványából 1-et kivonunk, e különbséget az eggyel kisebbített hányadossal elosztjuk és az így nyert kifejezést az első taggal szorozzuk*.

Feladatok.

1. $a_1=5$, $a_2=10$; mennyi q ? a_4 , a_5 , a_{10} ?
2. $a_1=4$, $a_2=3$; mennyi q ? mennyi a_5 ?
3. $a_5=12$, $q=2$; mennyi a_4 ? a_3 ? a_7 ? a_1 ?
4. $a_1=1$, $q=1/3$; mennyi a_5 ? mennyi a_7 ?
5. $a_1=15$, $q=-2$; mennyi a_4 ? mennyi a_8 ?
6. a) $a_1=1$, $q=-2/3$; mennyi a_3 ? a_5 ? b) $a_1=506.45$, $q=1.045$; mennyi a_{10} , a_{15} , a_{20} ? c) $a_1=603.98$, $q=1.0296$; mennyi a_{101} , a_5 ? d) $a_6=53.45$, $q=1.29$; mennyi a_7 ? a_8 ?

7. Valamely geometriai sorban $a_1=a$, $a_2=\frac{a}{m}$; mekkora q ? Mekkora a_n ?

8. Ha ismeretes a_n és q , a_1 -et hogyan kapjuk meg? a) [$a_n = a_1 q^{n-1}$ egyenletet megoldjuk a_1 -re] pl. $a_5=48$, $q=2$; mekkora a_1 ? b) $a_7=1035$, $q=-2$; mekkora a_1 ? c) $a_{10}=607.52$, $q=1.0653$; mekkora a_1 ? d) $a_{21}=5400$, $q=1.0396$. Mekkora a_1 ?

9. Ha ismeretes a_n és a_1 : q -t hogyan határozzuk meg?

$$\left(a_n = a_1 q^{n-1} \text{ből } q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} \right) \text{ pl. : } a_{20}=5642, a_1=486; \text{ mennyi } a \text{ } q?$$

10. $a_1=43\cdot56$, $q=1\cdot045$. Mennyi a_{10} ? a_{15} ? a_{20} ?
11. $a_{10}=546\cdot8$, $q=1\cdot0632$. Mennyi a_1 ? a_{20} ?
12. $a_{25}=83\cdot056$, $q=1\cdot0253$. Mennyi a_1 ? a_{10} ?
13. $a_{100}=56\cdot789$, $q=1\cdot03256$. Mennyi a_1 ? a_{20} ?
14. $a_{20}=156\cdot432$, $a_1=2\cdot438$. Mennyi q ? a_{10} ? a_{100} ?
15. $a_{25}=342\cdot64$, $a_{10}=183\cdot92$. Mennyi q ? mennyi a_{30} ?
16. $a_1=5$, $q=2$; mekkora s_5 ?
17. $a_1=1$, $q=3$; mekkora s_6 ?
18. Mekkora $1+q+q^2+q^3+\dots+q^{15}$?
19. $a_1=1$, $q=m^2$; mekkora a_n ? s_n ?
20. $a_1=4$, $q=\frac{1}{2}$; mekkora a_6 ? s_6 ?
21. $a_1=1$, $q=-m$; mekkorák a_4 , a_5 , a_6 , a_7 ? s_8 , s_9 ?
22. $a_1=1$, $q=\frac{1}{m}$; mekkora s_n ?
23. Mennyi $1-\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}\dots$ geometriai sor hányadosa? mennyi s_{15} ? Legyen $q=1\cdot0396$.
24. Mekkora $1+1\cdot04+(1\cdot04)^2+\dots+(1\cdot04)^{25}$?
25. $a_1=1$, $q=\frac{a}{b}$; mekkora s_n ? — Helyettesítsük: $a_1=2\cdot4356$; $q=2\cdot1543$; $n=15$.
26. $a_1=5$, $q=\frac{3}{4}$; mekkora s_5 ?
27. $a_1=8$, $a_2=-6$; mekkora q ? mekkora s_5 ?
28. $a_1=43\cdot85$, $q=1\cdot036$; mennyi a_{20} ? s_{20} ? a_{30} ? s_{30} ?
29. $a_1=532\cdot63$, $q=1\cdot045$; mennyi a_{15} ? s_{30} ? a_{20} ? s_{40} ?
30. $s_{12}=638\cdot72$, $q=1\cdot0639$; mennyi a_1 ? s_{20} ? s_{30} ? s_{40} ?
31. $a_{30}=139\cdot76$, $a_{15}=46\cdot838$; mennyi q ? s_{10} ? s_{12} ?
32. 1 és 4 közé 10 tagot kell igtatni, hogy ezek az előbbiekkal geometriai sort alkossanak.
33. Mutassuk meg, hogy ha a , b , c , d egy geometriai sor első 4 tagját alkotják, akkor $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$!
34. Mutassuk meg, hogy egy geometriai sor első 4 tagja a , b , c , d között fennáll ez az összefüggés:
$$(a-d)^2=(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2.$$
35. Valamely geometriai sor első tagja a , hányadosa q , fejezzük ki a , q és n által ezt az összeget:
$$s_1+s_2+s_3+\dots+s_n.$$

36. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c geom. sorban egymás után következő tagok, akkor :

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3.$$

37. Igtassunk a és b közé egy számot, hogy e három szám geom. sort alkosson. (Mértani közép.)

38. Mutassuk meg, hogy

$$a + \sqrt{a^2 - b^2} \text{ és } a - \sqrt{a^2 - b^2}$$

számtani közepe a , mértani közepe b .

39. A geometriai sornál ez az 5 mennyiség szerepel :

$$a, q, n, a_n, s_n.$$

Ha ezek közül 3-at ismerünk, a többit kiszámíthatjuk.

Eszerint tehát a következő feladatok lehetségesek :

- | | | | | |
|-----|------------|---------------|--------------|------------|
| 1. | Adva van : | a, q, n | kerestetik : | a_n, s_n |
| 2. | » | a, q, a_n | » | n, s_n |
| 3. | » | a, q, s_n | » | n, a_n |
| 4. | » | a, n, a_n | » | q, s_n |
| 5. | » | a, n, s_n | » | q, a_n |
| 6. | » | a, a_n, s_n | » | q, n |
| 7. | » | q, n, a_n | » | a, s_n |
| 8. | » | q, n, s_n | » | a, a_n |
| 9. | » | q, a_n, s_n | » | a, n |
| 10. | » | n, a_n, s_n | » | a, q . |

Oldjuk meg ezeket a feladatokat. (Az 5-ik és 10-ik kivételével, mert ezek oly magasabb fokú egyenletekre vezetnek, melyek megoldását nem tanultuk.)

40. Mekkora azon geom. sor hatodik tagja, melynek első tagja

$$\frac{1}{a\sqrt{b}} \text{ és hányadosa : } a\sqrt{b} - b\sqrt{a}.$$

41. Három szám számtani sort alkot. Ha az elsőből 16-ot elveszünk és az utolsóhoz 22-öt hozzáadunk és a középsőt meghagyjuk, oly geom. sort kapunk, amelynek összege 114. Melyik e három szám ? [Legjobb a középsőt x -nek venni, akkor az első $x-d$, az utolsó $x+d$. Az új számok : $x-d-16, x, x+d+22$ lesznek. Felírjuk, hogy a második osztva az elsővel = a harmadik osztva a másodikkal és felírjuk, hogy összegük 114.]

42. Van-e olyan 3 szám, melyek számtani és mértani sort alkotnak ?
43. Három szám geometriai sort alkot. Összegük : 26 ; ha a közép-sőhöz 4-et adok, a sor számtanivá lesz. Melyek ezek a számok ?
44. Egy mértani sor első és ötödik tagjának összege 902 ; e két tag szorzata 980. Mekkora az a és a q ?
45. Egy 10 tagú geom. sorban a páratlan tagok összege 36905, a párosaké 110715. Keresendő a és q .

XVI. Kamatos-kamatszámítás.

120. **A kamatos-kamatszámítás alapképlete.** A kamatos-kamatszámításban az alapeladat a következő: *Valamely tőke (T korona) ki van adva kamatra, úgy hogy érte minden időegységben (év, félév, s ú. t.) pl. p percentes kamat fizetetik. Az esedékes kamat azonban mindig a tőkéhez csatoltatván, ezt nagyobbitja. Mennyire nőtt meg a tőke n időegység alatt ?*

Jelöljük a tőke nagyságát $1, 2, \dots k, \dots$ időegység után $T_1, T_2, \dots T_k \dots$ -val. Akkor a közönséges kamatszámítás megállapításai szerint, az első időegység után a T tőkéért $\frac{Tp}{100}$ korona fizetendő mint kamat, de ez a tőkéhez csatoltatván, lesz az időegység végén a *felnövekedett tőke*:

$$T_1 = T + \frac{Tp}{100} = T \left(1 + \frac{p}{100} \right).$$

A második időegység kezdetén a tőke T_1 és így ismét következtethetjük, hogy T_2 , mely nem más, mint T_1 -ből 1 időegység alatt felnövekedett tőke :

$$T_2 = T_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = T \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2.$$

Vagyis, amint egy időegységgel tovább megyünk, ismét $1 + \frac{p}{100}$ -addal kell szoroznunk, tehát n időegység után a *fel-növekedett tőke* :

$$T_n = T \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n \dots \dots \dots (I.)$$

Az $1 + \frac{p}{100}$ az úgynevezett *kamattényező*; ha ezt egy betűvel, q -val jelöljük, lesz még:

$$T_n = Tq^n \dots \dots \dots (II.)$$

mely képlet szerint a *felnövekedett tőkét* n időegység után megkapjuk, ha az *eredeti tőkét* a *kamattényező* n -edik hatványával szorozzuk. Ezt még úgy is szoktuk mondani, hogy T korona tőke értéke n időszak múlva Tq^n .

A nyert alapképletben négy jellemző mennyiség fordul elő: az *eredeti tőke* (T), a *kamatláb* (p), az *időegységek száma* (n), és az n időegység alatt *felnövekedett tőke* (T_n). Minthogy ezek közt fönnáll az (I.) alatti egyenlet, háromból mindig kiszámíthatjuk a negyediket. Az ide vonatkozó képletek:

$$T_n = T \cdot q^n \quad \text{vagy} \quad \log T_n = \log T + n \log q \dots (1.)$$

$$T = T_n q^{-n} \quad \text{»} \quad \log T = \log T_n - n \log q \dots (2.)$$

$$q = \sqrt[n]{\frac{T_n}{T}} \quad \text{»} \quad \log q = \frac{\log T_n - \log T}{n} \dots (3.)$$

vége

$$n = \frac{\log T_n - \log T}{\log q}.$$

Ha a kamatláb, p kerestetik, akkor a q meghatározása után ez az

$$1 + \frac{p}{100} = q$$

egyenletből tüstént nyerhető:

$$p = 100(q - 1).$$

A gyakorlatban a kamatlábat többnyire egész évre szokták vonatkoztatni, ámbár a kamatfizetés kisebb időközökben történik. Így pl. azt mondják, hogy 10000 korona 6%-ra van kiadva félévi kamatfizetéssel. Ekkor az időegység a félév, és az ennek megfelelő kamat 3%; az e föltételeknek megfelelő kamattényező: 1.03.

A számításnál a logaritmustáblák által nyújtott előnyöket használjuk; de emellett nem szabad elfelejtenünk, hogy ezáltal számításaink pontossága csak bizonyos számú számjegyre terjed. Ahol nagyobb összegről van szó és mégis fillérig menő pontosság kívántatik, többjegyű logaritmustábla lesz használandó.

Példák : 1. *Mennyire növekszik 7400 K 4% mellett 9 év alatt, ha a kamat évenként csatoltatik a tőkéhez ?*

$$\begin{aligned} T &= 7400, n=9, p=4, \text{ tehát } q=1.04; \text{ kerestetik } T_9 \\ \log T_9 &= \log 7400 + 9 \log 1.04. \\ \log 7400 &= 3.86923, \log 1.04 = 0.01703 \\ 9 \log 1.04 &= 0.15327 \\ \hline \log T_9 &= 4.02250 \\ T_9 &= 10531.7. \end{aligned}$$

Tekintettel arra, hogy 5-jegyű logaritmussal dolgoztunk, a tizedes tört rész már nem igen megbízható, és valóban, ha többjegyű logaritmustáblát használunk, az eredmény nem 10531 K 70 fillér, hanem 10532 K 15 fillér.

2. *Mennyire növekszik 6500 K 4½%-kal 25 év alatt, ha a kamatok fél évenként csatoltatnak a tőkéhez ?*

Az évi kamatláb 4½%; tehát a fél évi kamatláb 2.25% és így a kamatozási tényező: $q=1.0225$. Az időegységek száma: $2 \times 25 = 50$.

$$\begin{aligned} T &= 6500, n=50, p=2.25, \text{ tehát } q=1.0225; \text{ kerestetik } T_{50} \\ \log T_{50} &= \log 6500 + 50 \log 1.0225 \\ \log 6500 &= 3.81291 \\ 50 \log 1.0225 &= 0.48300 \\ \log T_{50} &= 4.29591 \\ T_{50} &= 19765.5 \end{aligned}$$

3. *Mennyi volt eredetileg ama tőke, mely 10 év alatt 4⅓% mellett 1600 koronára emelkedett, a kamatok évenként csatoltatván a tőkéhez ?*

$$p=4\frac{1}{3} \text{ tehát } q=1+\frac{13}{300}, n=10, T_{10}=1600; \text{ kerestetik } T.$$

$$\begin{aligned} \log T &= \log 1600 - 10 \log \left(1 + \frac{13}{300} \right), \\ \log 1600 &= 3.20412, & \log \left(1 + \frac{13}{300} \right) &= \log 313 - \log 300. \\ & & \log 313 &= 2.49554 \\ & & \log 300 &= 2.47712 \\ & & \hline 10 \log \left(\frac{313}{300} \right) &= 0.18420 & \log \left(\frac{313}{300} \right) &= 0.01842 \\ \log T &= 3.01992 \\ T &= 1046.83. \end{aligned}$$

Az eredeti tőke, amennyire számításunk pontos, 1046 K 83 fillér (valóban 3 fillérrel több).

4. *Minő kamatláb az, melynél egész évi kamatfizetés mellett valamely tőke 16 év alatt a kétszeresre nő?*

Világos, hogy itt a tőke nagysága nem jön tekintetbe, mert ha 1 koronából 2 korona lesz, akkor ugyanily föltételek mellett t koronából lesz $2t$ korona. Tehát mondhatjuk:

$$T=1, n=16, T_{16}=2$$

$$\log q = \frac{\log 2 - \log 1}{16} = \frac{\log 2}{16}.$$

$$\log 2 = 0.30103$$

$$\log q = \frac{\log 2}{16} = 0.01881$$

$$q = 1.04426$$

$$p = 100(q-1) = 4.426.$$

5. *Há az 5%-nyi kamat évenként csatoltatik a tőkéhez, hány év alatt lesz 2000 K-ból 3000 K?*

$T=2000, T_n=3000, p=5$, tehát $q=1.05$; kerestetik n . Lesz:

$$n = \frac{\log 3000 - \log 2000}{\log 1.05}$$

$$\log 3000 = 3.47712$$

$$\log 2000 = 3.30103$$

$$\text{Számológép} = 0.17609$$

$$\text{Nevező} = \log 1.05 = 0.02119$$

$$n = 0.17609 : 0.02119 = 8.3.$$

Az eredmény 8.3 év; ez csak annyit mond, hogy 8 év után a tőke nem egészen 3000 K, de 9 év után már ennél több.

A kamatok kamatjának kiszámításánál alapul szolgáló

$$T_n = Tq^n$$

képlet megállapítja, hogy két különböző időpontban esedékes pénzösszeg értéke miképpen hasonlítható össze. E képlet egyszerűen matematikai fogalmazása a kereskedelmi világ ama megállapodásának, mely szerint különböző időkben teljesítendő fizetések egymásért cserébe fogadtatnak.

Ha az idő nem az időegység egész számú többszöröse, hanem n egész időegység és ennek egy t tört része, akkor a T tőke állását az $n+t$ idő után úgy szokás meghatározni, hogy előbb az n időegységre a kamatok kamatját vesszük; lesz tehát T_n , a hátralevő időrészre pedig egyszerű kamatot számítanak. Eszerint a tőke végállása T' ekkor

$$T' = T_n + \frac{T_n p t}{100}$$

és ha $T_n = T q^n$ tesszük:

$$T' = T q^n \left(1 + \frac{p t}{100} \right).$$

Eszerint ha a feladatban az idő az ismeretlen, az előbbi képlet csak az időegység egész számú többszörösét adja, a t törtrészt az n meghatározása után a most fölirt elsőfokú egyenletből nyerjük.

Ha eszerint az utolsó föladat tárgyalását folytatjuk, lesz: $T' = 3000$, $T = 2000$, $p = 5$, $q = 1.05$, $n = 8$; kerestetik még t .

Akkor még $T_n = T \cdot q^n$ számítandó. Ez most:

$$T_8 = 2954.90 \text{ K.}$$

és így

$$1 + 0.05t = \frac{3000}{2954.9}$$

$$t = \frac{1}{0.05} \frac{45.1}{2954.9} = 0.31.$$

És így a keresett időtartam $8 \frac{31}{100}$ év.

121. Előleges és utólagos kamatozás. Eddigi fejtegetéseinkben föltételeztük, hogy valamely tőke használatáért járó kamat a megállapított időegység végén fizetendő és így tehát a kamatos-kamat számításánál csak akkor csatolandó a tőkéhez. A gyakorlati életben azonban igen sokszor oly föltétel kötik meg a kölcsönt, hogy a kamat előre fizetendő. E föltétel természetesen megváltoztatja a számítás alapját. Ha ugyanis nekem a 100 K-ért járó hatos kamatot az év elején kell lefizetnem, ez az év alatt újra kamatozván, az év végén már 6 K-nál többet tesz ki, és így az újabb föltétel mellett megállapított

6% magasabb kamatot képvisel mint előbb. — Az eddig tárgyalt *utólagos* (*decursiv*) kamatozásra vonatkozó képletek mellett még szükséges az ú. n. *előleges* (*anticipativ*) kamatozásra vonatkozókat is levezetni.

Ez nagyon egyszerűen történhetik. Ha *t. i.* *T* kor. tőkéért *p*%-nyi kamat előlegesen fizetendő, akkor, minthogy a *T* K-ból $\frac{Tp}{100}$ koronát mindjárt visszafizetek, tulajdonképen csak $T\left(1 - \frac{p}{100}\right)$ K-t kapok, és ezért kell az év végén *T* koronát visszafizetni. Azaz az időegység alatt

$$T\left(1 - \frac{p}{100}\right) \text{ K-ból lesz } T \text{ K,}$$

és így

$$T \text{ K-ból } T \frac{1}{1 - \frac{p}{100}} K$$

Ha most az $\frac{1}{1 - \frac{p}{100}}$ törtet jelölöm *q*-val, akkor úgy mint

előbb :

$$T_1 = Tq.$$

és minden előbbi képlet érvényben marad; csakhogy a kamattényező jelentése más, *t. i.*

$$q = \frac{1}{1 - \frac{p}{100}}$$

és így, midőn a kamattényezőtől a kamatlábat kiszámítjuk :

$$p = 100\left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Feladat. Mekkora a kamattényező előleges 4%, 4½%, 5%, 5¼% mellett ?

122. **Évi betétek és járadékok.** Az eddigi fejtegetések értelmében még néhány, a közéletben gyakrabban előforduló és fontosabb feladatot tárgyalunk. *Ha valaki n egymásután következő időegység (év s ú. t.) elején mindenkor A K-t, az ú. n.*

évi betétet, bizonyos kamatláb mellett eltesz kamatok kamatjára, mennyi lesz ezen összes betétek értéke az n -edik időegység elején (tehát az utolsó részlet elhelyezése napján)?

Az első A K $n-1$ évig kamatozik, tehát, ha q a kamatozási tényező, Aq^{n-1} -re növekszik.

A második év elején betett A K már csak $n-2$ évig kamatozik, tehát Aq^{n-2} -re növekszik.

A harmadik év elején betett A K Aq^{n-3} K-ra nő s i. t.; végre az n -edik év elején betett utolsó részlet már nem kamatozik, az marad A K. Eszerint tehát a fölhalmozódott évi betétek végértéke az n -edik év elején:

$$U = Aq^{n-1} + Aq^{n-2} + \dots + Aq + A.$$

A jobboldalon álló kifejezés geometriai haladvány és ha első tagjának tekintjük A -t (mely az utolsó helyen áll), akkor hányadosa q és így:

$$U = A \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Ez a feladat a gyakorlati életben ritkán fordul elő, mert azon a napon, amelyen az utolsó részletet elhelyezzük (az n -edik év elején), rendszerint nem vesszük ki a felhalmozott tőkét, de ezen értékből azonnal meghatározhatjuk, hogy:

Ha valaki n egymásután következő időegység (év s ú. t.) elején mindenkor A K évi betétet helyez el kamatos-kamatokra, mennyi lesz az összes betétek értéke az n -ik időegység végén (tehát az utolsó részlet elhelyezése után 1 időegységgel)?

Az utolsó részlet elhelyezése napján az évi betétek összes értéke az előbbi szerint:

$$U = A \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ez az összeg még egy évig kamatozik, tehát az év végén q -szor ennyi lesz. Ha ezt az értéket U_1 -al jelöljük, akkor tehát:

$$U_1 = Uq = Aq \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Megmondhatjuk mindjárt azt is, hogy mennyi pénze lesz a takarékpénztárban annak, aki n éven át (pl. mindig az év elején) elhelyez A K-t és az egész felhalmozódott összeget k évvel az utolsó részlet elhelyezése után veszi ki?

Az utolsó részlet elhelyezése napján az $\bar{o}$ összes felhalmozott tőkéje U korona, és ez az U korona mint tőke kamatozik a további k éven át ; tehát a felnőtt tőke, melyet U_k -val jelölünk :

$$U_k = Uq^k = Aq^k \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Az A koronányi évi betétek a takarékpénztárnak (illetőleg annak, akinél elhelyeztetnek) *járadékot* alkotnak (*rente*), mely járadéknak U , U_1 , U_k különböző időben való értékei. Az évenkénti részletet a *járadék tagjának* nevezzük (A). Az n tagú *járadék értékét* tehát k időegységgel az utolsó *járadéktag esedékesége után* ez a képlet szolgáltatja :

$$U_k = Aq^k \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

A leggyakrabban előforduló eset, midőn $k=1$, vagyis midőn a járadék értékét 1 időegységgel az utolsó részlet elhelyezése után akarjuk meghatározni. Ekkor mint már láttuk :

$$U_1 = Aq \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ez ismét oly egyenlet, mely a kapcsolatot adja az évi betét, a végérték, az időegységek száma és a kamattényező között, mely tehát mutatja, hogy e négy mennyiség közül 3 adva lévén, a negyedik kiszámítható, de ha a többi adatból a kamattényezőt kell meghatároznunk, akkor a rendezés után q számára $n+1$ -fokú egyenletet nyerünk, melynek megoldása föltételezi az egyenletek általános elméletének ismeretét, és azért itt nem végezhető.

Példák : 1. Valaki 23 éven át betesz mindig az év elején 60 K-t a takarékpénztárba, mely évi $4\frac{1}{2}\%$ utólagos kamatot fizet ; mennyi tőkéje lesz a 24-ik év elején (tehát 1 évvel az utolsó elhelyezés után) ?

$$A=60, n=23, p=4.5, q=1.045.$$

$$\begin{aligned} \text{Tehát : } U_1 &= 60 \times 1.045 \times \frac{1.045^{23} - 1}{0.045} \\ &= 2441.35 \text{ K} \end{aligned}$$

2. Mennyit kell 18 éven át befizetnem, hogy a 18-ik év elején (tehát az utolsó részlet elhelyezése napján) 12000 K-t kapjak, ha egész évre 5% utólagos kamat számíttatik ?

$U=12000$, $n=18$, $p=5$, $q=1.05$; kerestetik A . Képletünk:

$$U=A \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ebből A -t kell kiszámítanunk:

$$A = \frac{U(q-1)}{q^n - 1}.$$

Az adott számértékeket behelyettesítve:

$$A = \frac{12000 \times 0.05}{1.05^{18} - 1}.$$

amiből:

$$A = 406.24 \text{ K.}$$

3. Hány éven át kell évenként A koronát elhelyeznünk, hogy az utolsó részlet elhelyezése napján U koronánk legyen? ($p\%$ -os kamatláb.)

$$\text{Az} \quad U = A \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

egyenletből n -et kell kiszámítanunk. Evégből ezen egyenletet megoldjuk q^n -re

$$q^n = \frac{U(q-1) + A}{A}.$$

Ez az n -re nézve kitevős egyenlet. Mindkét oldalon logarithmust véve:

$$n \log q = \log [U(q-1) + A] - \log A$$

és végül:

$$n = \frac{\log [U(q-1) + A] - \log A}{\log q}$$

Tegyük ezen képletbe $U=12000$, $A=406.24$, $p=5$. Ha n -re nem kapunk egész számot, akkor U korona végösszeget egész időszakok alatt nem érhetünk el. Ha pl. $n=18.35$ volna, akkor ki kell számítanunk, hogy 18 év alatt mennyire növekszik az évenként elhelyezett A korona és az U -hoz hiányzó összeget kipótoljuk akár az U esedékessége napján, akár egy előbbi időpontban egyszerűen discontálva.

Az előbb tárgyalt feladatnak megfordítottja az a feladat, hogy: *Mennyi tőkét kell letennem, hogy n éven át és pedig először a letét napján, A koronányi évi járadékot húzhassak?*

A koronát akarok húzni ma, mához 1 évre, 2 évre
 $n-1$ évre (az n -edik év elején). Hogy ma A koronát kaphassak,

avégből le kell tennem A koronát. Hogy 1 év múlva A koronát húzhassak, avégből ma nem kell A koronát letennem, hanem csak $\frac{A}{q}$ koronát, mert ez az összeg egy év múlva $\frac{A}{q} \cdot q = A$ K lesz.

Hogy 2 év múlva kapjak A koronát, avégből ma le kell tennem $\frac{A}{q^2}$ koronát, mert ebből 2 év alatt $\frac{A}{q^2} \cdot q^2 = A$ korona lesz, s í. t. Végre, hogy az n -edik év elején, azaz mához $n-1$ év múlva A koronát kapjak, avégből ma le kell tennem $\frac{A}{q^{n-1}}$ koronát. Eszerint, hogy n éven át minden év elején A koronát húzhassak, ma le kell tennem :

$$E = A + \frac{A}{q} + \frac{A}{q^2} + \dots + \frac{A}{q^{n-1}}$$

koronát. A jobboldalon álló kifejezés geometriai haladvány, melynek első tagja A , hányadosa $\frac{1}{q}$, tehát összege :

$$E = \frac{\frac{A}{q^n} - A}{\frac{1}{q} - 1}$$

s ha mind a számlálót, mind a nevezőt q^n -nel szorozzuk :

$$E = \frac{A}{q^{n-1}} \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

E azt az összeget szolgáltatja, amelynek fejében n éven át (először a letét napján) A koronányi évi járadékot húzhatunk. E korona tehát az n éven át húzható A koronányi évi járadék értékét fejezi ki az első részlet esedékessége napján.

Ha tehát valaki n éven át A koronányi évi járadékot akar húzni, akkor azon a napon, amelyen a járadék kezdődik, E koronányi összegnek kell részére letéve lenni.

Ez az eset a gyakorlatban ritkábban fordul elő, de ebből azonnal következtethetünk arra a gyakorlatban sokszor előforduló esetre, hogy : *mennyi tőkét kell letennem, hogy n éven át és pedig először egy évvel a letét napja után, A koronányi járadékot húzhassak ?*

Azon a napon, amelyen az első A koronányi járadékot húzom, E koronának kell letéve lenni ; tehát, ha a szükséges

összeget egy évvel korábban teszem le, nem kell E koronát letennem, hanem csak annyit, amennyiből 1 év alatt E korona lesz, vagyis $\frac{E}{q}$ koronát. Eszerint tehát, ha az 1 évvel korábban leteendő összeget E_1 -gyel jelöljük:

$$E_1 = \frac{E}{q} = \frac{A(q^n - 1)}{q^n(q - 1)}.$$

De rögtön felelhetünk arra a kérdésre is, hogy *ennyit kell letennünk, ha azt akarjuk, hogy n éven át A koronányi évi járadékot húzhassunk és pedig először a letét napja után k esztendővel?* Azon a napon, mikor az első részletet húzzuk, E koronának kell letéve lenni. Ha azonban mi k évvel korábban tesszük le az összeget, akkor annyit kell letennünk, hogy az k év múlva E korona legyen. Ha ezt az összeget E_k -val jelöljük:

$$E_k = \frac{E}{q^k} = \frac{A}{q^{n+k-1}} \frac{(q^n - 1)}{(q - 1)}.$$

Ebben a képletben természetesen benne vannak az előbbieket is. Ha ugyanis $k=0$ -t tesszük, akkor E értékét kapjuk meg, mert hiszen $k=0$ azt jelenti, hogy az első részlet 0 évvel az elhelyezés után, tehát az *elhelyezés napján* esedékes. $k=1$ -et téve, megkapjuk E_1 -et.

E , E_1 és általában E_k egy és ugyanazon n éven át tartó A koronányi évi járadéknak *értékeit* szolgáltatják különböző időpontokban. Mondhatjuk tehát, hogy E jelenti az n éven át tartó A koronányi évi járadék értékét az első járadéktag esedékessége napján, E_1 ugyanazon járadék értékét 1 évvel az első járadéktag esedékessége előtt, s általában E_k jelenti a járadék értékét k időszakkal az első járadéktag esedékessége előtt.

Igen egyszerű összefüggés van U és E között is. Ha összehasonlítjuk a két kifejezést:

$$U = A \frac{q^n - 1}{q^n - 1} \qquad E = \frac{A}{q^{n-1}} \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

azonnal észrevesszük, hogy

$$U = E q^{n-1}$$

és ez igen természetes is. Ha ugyanis valaki letesz a takarékpénztárba E koronát, akkor ennek fejében a takarékpénztár fizet neki évenként A koronát és pedig először mindjárt a letét

napján s utoljára (n -edszer) $n-1$ év múlva. De ha ő ezt az évenkénti járadékot nem veszi fel, hanem ismét beteszi a takarékpénztárba, akkor az n -edik év elején, vagyis az utolsó elhelyezés napján, neki

$$U = A \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

koronája lesz a takarékpénztárban. Ez az összeg az előre elhelyezett E koronából lett, mert hiszen neki a takarékpénztárban E koronája volt, melyhez hozzá nem tett, s melyből el nem vett. $n-1$ éven át volt ez az E korona a takarékpénztárban, tehát felnövekedett

$$Eq^{n-1}$$

koronára. Eszerint tehát valóban:

$$U = Eq^{n-1}.$$

Az U , U_1 , U_k , E , E_1 , E_k (vagy rövidebben U_k és E_l) egy és ugyanannak az n tagú járadéknak értékét szolgáltatják különböző időben: U_k az utolsó részlet esedékessége után k évvel, E_l az első részlet esedékessége előtt l évvel. Összefoglalva tehát az eddigieket, mondhatjuk, hogy a járadék értékét bármely időben a következő képlet szolgáltatja:

$$Uq^m,$$

ahol m jelenti az utolsó részlet esedékessége utáni évek számát. És ez a képlet nemcsak pozitív m -re, hanem negatívra is érvényes. Ha ugyanis $m = -(n-1)$, azaz $n-1$ évvel az utolsó részlet esedékessége előtt, tehát az első részlet esedékessége napján

való értékét keressük, akkor a formula megadja $\frac{U}{q^{n-1}}$ -et és való-

ban ez az E érték. Ha $m = -n$ tesszük, vagyis a járadék értékét az utolsó részlet esedékessége előtt n évvel, tehát az első részlet esedékessége előtt 1 évvel keressük, akkor a képlet

$\frac{U}{q^n}$ -et szolgáltatja és valóban ez az, amit E_1 -gyel jelöltünk.

A járadékszámításnak tehát voltaképpen csak egyetlenegy képletét kell jól tudnunk; azt, hogy a járadék értéke az utolsó részlet esedékessége napján $U = A \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Ebből azután meghatározhatjuk a járadék értékét bármely időpontban azáltal, hogy U -t mint tőkét tekintjük, amelyhez a felkamatolt tőkét

keressük, vagy pedig (ha korábbi időben akarjuk a járadék értékét meghatározni) felkamatolt tőkének tekintjük, melyhez az eredeti tőkét keressük. Éppen olyan könnyen boldogulunk, ha nem az U , hanem az $E = \frac{A}{q^{n-1}} \frac{q^n - 1}{q - 1}$ képletet tartjuk észben, mely kifejezi a járadék értékét az első részlet esedékesége napján.

Példa. *Mennyit kell lefizetnem, hogy félvévenként 800 K járadékot húzhassak 10 éven át, ha az utólagos 7%-nyi kamat félvévenként csatoltatik a tőkéhez és az első részlet a befizetés után egy félév múlva esedékes.*

Itt az időegység a félév, tehát $n=20$, $p=3.5$, $q=1.035$, $A=800$.

Tehát $E_1 = \frac{A}{q^n} \frac{q^n - 1}{q - 1}$ képlet szerint:

$$\log E_1 = \log 800 - 20 \log 1.035 + \log \frac{1.035^{20} - 1}{0.035}$$

$$\log 1.035 = 0.01494$$

$$20 \log 1.035 = 0.29880$$

$$1.035^{20} = 1.9898$$

$$\log 0.9898 = 0.99555 - 1$$

$$\log 0.035 = 0.54407 - 2$$

$$\log \frac{1.035^{20} - 1}{0.035} = 1.45148$$

$$\log 800 = 2.90309$$

$$\log E_1 = 4.05577$$

$$E_1 = 11370 \text{ K.}$$

123. Törlesztési terv. Nagyobb kölcsönöknél a szokásos fizetési módozat többnyire az, hogy az adós a fölvelt összeget n éven át fizetendő egyenlő évi részletek által *törleszti* (amortizálja), természetesen úgy, hogy e fizetések részben a megállapított kamat kiegyenlítésére, részben pedig az adósság törlesztésére fordítatik. A föladat tulajdonképp ugyanaz, mint az előbbi. A hitelező a T helyébe cserébe kapja az n éven át fizetendő részleteket, az úgynevezett *annuitásokat*.

Kétmillió koronányi tőke 20 év alatt törlesztendő évi 4½% utólagos kamat mellett (az első részlet 1 évvel a kölcsön fölvétele után); mennyi az évi annuitás?

E feladatnál ismeretes $E_1=2$ millió korona, továbbá $q=1.045$ és $n=20$, tehát az

$$E_1 = \frac{A}{q^n} \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

képletből

$$A = E_1 \cdot q^n \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}.$$

A , E_1 , q és n értékeit behelyettesítve találjuk, hogy

$$A = 153,752 \cdot 29.$$

Az ily kölcsönöknél gyakran szükséges tudni, hogy egy-néhány ily részlet lefizetése után tulajdonképp még mennyit tesz ki a tartozás. Evégből kiszámítjuk az ú. n. *törlesztési tervet*, mely minden évre kimutatja a kölcsön állását.

Az első év végén 153,752 K 29 fillér fizettetik, az adósság eddig 2.000,000 K volt; ezért járt kamat fejében 90,000 K; tehát az annuitásból 63,752 K 29 fill. az adósság törlesztésére fordíttatik, és így a fennmaradó adósság az első év végén 1,936,247 K 71 fill.

Ezért a második évben újból jár kamat fejében 87,131 korona 15 fill.; tehát az annuitásból törlesztésre jut 66,621 K 14 fillér és így a kölcsönből marad 1,869.626 K 57 fillér.

Ily módon folytatjuk a számítást, és ha ez helyes volt, a megállapított törlesztési idő végén a kölcsön teljesen ki lesz fizetve.

A törlesztési tervezetet táblában szokás összeállítani, melynek mintája a fentebbi példánál a következő:

$$A n n u i t á s = 153752 \cdot 29$$

Év	Kamat	Tőketörlesztés	Adósság
1	90.000	63.752·29	1,936.247·71
2	87.131·15	66.621·14	1,869.626·57
3	84.133·20	69.619·09	1,800.007·48
4	81.000·34	72.751·95	1,727.255·53
5	77.726·50	76.025·79	1,651.229·74

s ú. t.

Ha az első évi törlesztési részletet kiszámítottuk, akkor bármelyik évi törlesztési részletet megállapíthatjuk, anélkül hogy minden egyes törlesztési részletet sorrendben kiszámítanánk. Ha ugyanis az első törlesztési részlet a K, akkor a második évben az állandó annuitásból már kevesebb fordítatik kamatra mint az előző évben, tehát több jut tőketörlesztésre; ugyanis a második évben már a törlesztett a K után kamat nem jár, tehát ha a kamatláb p , akkor $\frac{ap}{100}$ K-val kevesebb a kamat, tehát az annuitásból $\frac{ap}{100}$ K-val több esik törlesztésre. A második évi törlesztési részlet tehát:

$$a + \frac{ap}{100} = a \left(1 + \frac{p}{100} \right) = aq.$$

A harmadik évben már ez után a törlesztett részlet után sem jár már kamat, tehát az állandó annuitásból aq K kamatjával kevesebb fordítatik kamatra, mint a második évben, tehát ennyivel több esik a törlesztésre, aq K kamatja $\frac{aqp}{100}$ tehát a harmadik évi törlesztési részlet:

$$aq + \frac{aqp}{100} = aq \left(1 + \frac{p}{100} \right) = aq^2.$$

Ha ezt az okoskodást folytatjuk, akkor azt találjuk, hogy a k -ik évben törlesztésre fordítatik: aq^{k-1} K. Ezt a számítást fel szokták használni a törlesztési tervezet kipróbálására. Evégből először is kiszámítjuk az annuitást (A). Ebből levonjuk a T kor. kölcsön első évi kamatját. Ezáltal megkapjuk az első évi törlesztési részletet (a), és ha ez megvan, akkor néhány törlesztési részletet az aq^{k-1} formula szerint számítunk ki.

Feladatok.

Megjegyzés. — A kamatok kamatjának számítására vonatkozó képletek természetesen nemcsak akkor használhatók, midőn valamely tőke szaporodását számítjuk, hanem általánosabban mindig, midőn az oly mennyiségek növekedését vizsgáljuk, melyeknél e növekedés egyenlő időközökben a növekedő mennyiséggel magával arányosan történik. Így mondjuk pl., hogy valamely város lakossága évenként

2%-kal, vagy hogy egy erdőben foglalt famennyiség egy év alatt 4%-kal növekedett. Világos, hogy ezen (különben csak megközelítőleg helyes) alapfeltevéshez most ugyanoly feladatokat fűzhetünk, mint a tőke-szaporodáshoz.

1. Mennyi lesz 374 K-ból 20 év alatt 5% évi (a) előleges és b) utólagos) kamattal?

2.*) Mennyi lesz 450 K-ból 25 év alatt 4.3% évi kamattal, ha a kamat félévénként csatoltatik a tőkéhez?

3. Mennyi lesz 2530 K-ból 10 év alatt félévi 2½%-kal?

4. Mennyi lesz 1000 K-ból 10 év alatt a) évi 6%, b) félévi 3%, c) negyedévi 1½%, d) hónaponként ½% mellett?

5. Évi 4%-ra kiadott tőke 22 év alatt 1700 korona lett, mennyi volt eredetileg?

6. Mekkora tőke az, melyből évi 5¼%-kal 100 év alatt egy millió lesz?

7. 1897. január elsején félévi 5⅓%-re fölvelt kölcsön 1908. július elsején visszafizettetett 1329 K 60 fillérrel: milyen nagy volt a kikölcsönzött összeg?

8. Két pénzösszeg kamatozik 4¾%-kal évenként; 20 év után az egyik tőke 1466 koronával nagyobb a másiknál. A két pénzösszeg együtt eredetileg 2579 K 50 fillér volt. Milyen nagy volt mindegyik külön?

9. Hány százalékos kamatra kell kiadni 1500 K-t, hogy 32 év alatt 6000 K legyen?

10. Minő kamatra kell kiadni 4444 koronát, hogy 44 év alatt 44444 K legyen?

11. Minő kamatláb az, mellyel valamely tőke megkétszerezedik 10, 15 vagy 20 év alatt?

12. Micsoda kamatot fizet az, aki kötelezi magát 3 év lefolyása után 700 K helyett 1000 K-t visszafizetni?

13. Hány év alatt kétszereződik meg valamely tőke 3, 3½, 4, 4½, 5, 5½, 6% évi kamat mellett?

14. Hány év alatt, ha a kamat félévénként csatoltatik a tőkéhez?

15. Egy birtok megvételére 3-an tesznek ajánlatot; az első 153.000 K-t akar mindjárt fizetni, a második 4 év múlva 185.000 K-t, a harmadik 215.000 K-t 7 év múlva. Évi 5½%-ot számítva, melyik ajánlat

*) Néhány feladat előleges és utólagos kamatozással számítandó.

a legkedvezőbb, és mennyivel különböznek egymástól, ha a fizetéseket mind a jelen időre számítjuk át.

16. Magyarorszában a polgári népesség száma 1870-ben 13,561.000 volt; 1880-ban 13,729.000; 1890-ben 15,133.000; 1900-ban 16,683.517. Hány percent az évi szaporodás 1870-től 1880-ig, 1880-től 1890-ig és 1890-től 1900-ig?

17. Föltéve, hogy a növekedési arány ugyanaz marad, mint 1890—1900 közt, mikor lesz Magyarországnak 20 millió lakosa?

18. A Szent István korona országaiban együtt a polgári népesség száma 1890-től 1900-ig 17,349.000-ről 19,122.340-re növekedett; hány % az évi szaporodás?

19. Budapest polgári népessége 1880-ban 360.500, 1890-ben 491.938, 1900-ban 703.448 volt; mennyi volt a 10 évi átlagos gyarapodási százalék?

20. Hány év múlva lenne Budapestnek 900.000 lakosa, ha a növekedési arány ugyanannyi marad, mint az utolsó 10 évben?

20. a) Szegeden 1890-ben 85.569, 1900-ban 100.270 lakos volt. Hány % az évi gyarapodás?

20. b) 1880-ban Szabadkán 61.367, Debrecenben 51.122, Pozsonyban 48.000 lakos volt; 1900-ban e helyeken 81.464, 72.351, 61.537 ember lakott. Hány %-os a gyarapodás e városokban?

(E föladatoknál az utólagos kamatozás képleteit szokás használni.)

21. Valaki 40.000 koronányi adósságára évenként 5000 koronát fizet; mennyivel adós 10 év múlva, ha ötös kamatot számítunk?

Megoldás menete: Kiszámítjuk először, hogy 40.000 korona adósság mennyire növekednék 10 év alatt 5%-kal? Kiszámítjuk azután, hogy évenként 5000 K mennyire halmozódik 10 év alatt? E kettő különbsége megadja a hátralevő adósság nagyságát.

22. Valakinek 4500 K vagyona van; évenként még megtakarít 150 K-t; évi $4\frac{1}{2}\%$ -ot számítva, minő vagyona lesz a 12-ik év végén?

23. 150 K évi betét 4%-kal mennyi lesz a 30-ik év végén?

24. Tízezer koronányi kölcsön minő félévi fizetéssel törleszthető

a) 10, b) 15, c) 20 év alatt,

ha az évi kamat

a) 4%, b) 5%-nak számítatik?

25. Mennyit kell évenként megtakarítanom 10 éven át, hogy a rákövetkező 20 éven át évi 2000 K járadékom legyen? (4%.)

26. Valakinek joga van 16 éven át 2000 K évi járadékra. Ehelyett inkább 25 évig tartó kisebb járadékot akar élvezni. Mennyi lesz ez? ($4\frac{1}{2}\%$.)

27. Százezer korona kölcsön félévi $2\frac{1}{2}\%$ mellett 20 év alatt törlesztendő. Készíttessék el a törlesztési tervezet első 5 tagja. Mekkora a 10-ik, mekkora a 15-ik törlesztési részlet?

28. Valaki 15 éven át, minden év végével, 250 koronát kapna. De ezt az összeget 5 ízben nem vette fel. Az ötödik év végével egész követelését 20 éven át tartó (először egy év múlva esedékes) évi járadékká akarja változtatni. Mekkora lesz az évi járadék? (5% .)

29. Valaki 12 éven át mindig az év kezdetén egyenlő évi járadékot akar fizetni egy takarékpénztárba, hogy magának vagy örököseinek a következő 18 éven át mindig az év végén fizetendő 800 K évi járadékot biztosítson. Mekkora a befizetendő részletek? ($4\frac{1}{2}\%$.)

30. Egy város 35 éven át évenként 6000 koronával visszafizetendő kölcsönt akar felvenni. Mennyit fog kapni 5% -os kamatláb mellett?

31. Valaki tartoznék fizetni 5 éven át évenként 500 koronát, további 5 éven át 400 koronát, további öt éven át 300 koronát. Mennyivel törleszthetné adósságát az első részlet esedékessége napján, ha 5% -os kamatokat számítanak. Mennyivel törleszthetné adósságát az első 400 koronás részlet esedékessége napján?

31. a) Valaki felvesz 10.000 korona kölcsönt, melyért évenként (és pedig először a kölcsön felvétele után 1 évvel) 1000 korona annuitást fizet. Hány év alatt törleszti a kölcsönt? (4% -os évi kamat számíttassék.)

31. b) Évenként elhelyezünk 750 koronát. Hányszor kell ezt tennünk, ha azt akarjuk, hogy az utolsó elhelyezés után egy évvel 12.500 koronánk legyen ($3\frac{1}{2}\%$ -os kamatláb.)

31. c) Mennyit kell félévenként 40 féléven át elhelyeznünk, ha azt akarjuk, hogy az utolsó elhelyezés után 15 félévvel 20.000 koronánk legyen? ($2\frac{1}{4}\%$ -os félévi kamatláb.)

31. d) Valaki elhelyez félévenként 30 féléven át 500 koronát 2% -os félévi kamatlábbal. Hány félévig kell még a felnőtt összeget az utolsó elhelyezés után kamatoztatnia, hogy 40.000 koronája legyen?

32. A földtehermentesítési adósság névértéke 1888-ban 199,509.000 K volt, melyet az állam 70 év alatt törleszt 2% -os félévi kamatokkal. Számítsuk ki, mennyi az évi annuitás, mekkora az első törlesztési részlet. Készítsük el a törlesztési tervezet első 10 tételét. Mekkora lesz a földtehermentesítési adósság 1910-ben, 1925-ben?

33. Az 1870: X. törvényezikken alapuló nyereménykölsön, mely a Duna szabályozására, a Lánchíd megváltására s a főváros szépítésére szolgált, melyet az állam a bécsi bankkegyesülettől kapott, 24.000.000 forint volt. Ezt az állam oly módon törleszti, hogy félékenként a kisorsolt sorsjegyek tulajdonosainak 612.000 forintot fizet. A sorsolás 50 évig tart. Számítsuk ki, hogy jól járt-e az állam ezen üzletnél, ha 5%-os kamatot számítunk. Vagyis: Mennyit ért 1870-ben (tehát az első részlet esedékessége előtt félévvel) a 100 féléken át tartó 612.000 forintos évi járadék $2\frac{1}{2}\%$ -os félévi kamatláb mellett?

Ha az állam a felvett 24.000.000 forintot 100 félévben $2\frac{1}{2}\%$ -os kamatokkal együtt törleszteni akarná, mennyi volna a félévi annuitás? Mennyivel kisebb a tényleg fizetett félévi részlet a kiszámítottnál?

34. A Tiszát és mellékfolyóit szabályozó társulatok segélyezésére, valamint Szeged város újjáépítése céljából az állam az 1880: XX. törvénycikk alapján 44 millió forint névértékű kölcsönt vett fel. Ezt a kölcsönt az állam (nagy megközelítéssel) $2\frac{1}{2}\%$ -os félévi kamatjaival együtt 40 év alatt törleszti. Mekkora az annuitás? (Ennek egy részét arra fordítja az állam, hogy a sorsjegyek között nyereményeket sorsoljon ki, más részét pedig, hogy minden forgalomban levő sorsjegy után félékenként 2% -os kamatot fizessen.)

35. Az 1889-ik évi $4\frac{1}{2}\%$ -os állami vasuti kölcsön névértéke 1889-ben 182 millió aranyforint, mely 75 év alatt törlesztendő. Mekkora az annuitás?

36. Az állam valóságban nem kapott 182 millió forintot. A Rothschild hitelintézet ugyanis 100 frt névértékű kötvényt 93 forintért vett át; de kötelezte magát arra, hogy ha 96 forintnál drágábban adhatja el, akkor az ezen felüli összeg felét a kincstárnak adja. 130 millió forint névértékű kötvényt $97\frac{1}{2}$ forintjával (minden 100 forintos kötvényt $97\frac{1}{2}$ forinton, $97\frac{1}{2}$ -es árfolyammal), 52 milliót $98\frac{1}{4}$ árfolyammal adott el. Vajjon mennyit kapott a kincstár?

37. A *Vaskapu-kölcsönt* az állam a Vaskapunál végzett munkálatok költségeinek fedezésére vette fel 1895-ben. A kölcsön névértéke 45 millió aranykorona, melyet az állam 3% -os kamatokkal 90 év alatt törleszt. Mekkora az annuitás?

38. Vannak olyan államkölcsönök, melyek tőkáját az állam nem köteles visszafizetni, hanem csak egyszerű kamatot fizet. Ilyen pl. a 4% os koronajáradék, mely 1892-ben bocsáttatott ki, több régi kölcsön becserélése végett, 1062 millió korona névértékben. Az állam a 100 koronás kötvényekért nem kapott valóságban 100 koronát, csak

92½ koronát. Mennyit kapott az állam az 1062 millió korona névérték fejében? Mennyi kamatot fizet félévénként? Valóságban hány %-os a kamat? (92½ koronáért 2 korona félévénként.)

39. Az 1062 millió korona névértékű 4%-os kölcsönrel az állam régebbi, 483,718.510 forint névértékű 5%-os adósságát cserélte be (konvertálta). Vajjon mennyi kamatot takarít meg évenként?

40. Fontos államkölcsön az 1888-ban felvett 230 millió forint névértékű 4½%-os kölcsön, melyet az állam az italmérési jog kártalanítása céljából vett fel. Mekkora a félévi kamat?

A közönséges számtani ismereteink átismétlése céljából oldjunk meg néhány egyszerű számtani feladatot.

41. T tőke p %-kal n nap alatt mennyi kamatot hajt?

Felelet: $K = \frac{Tpn}{36000}$. Oldjuk meg ezt az egyenletet $\alpha)$ T -re, $\beta)$ p -re és

$\gamma)$ n -re és fejezzük ki szavakkal ezen eredményeket.

42. $a)$ Mennyi kamatot hajt 2450 korona 53 napra?

$b)$ Mennyi kamatot hajt 3780 korona január 15-től augusztus 20-ig? (Kamatláb 3½%.)

43. Egy takarékpénztári könyvben ez áll:

Betétek:	1908	jan.	20-án	450	K
		márc.	10-én	720	K
		május	5-én	600	K
		aug.	20-án	850	K

Kivett összegek:	febr.	1-én	200	K
	ápr.	15-én	350	K
	szept.	1-én	400	K

Mennyi e könyvecske értéke dec. 31-én? Mennyi lesz az értéke 1919 dec. 31-én? (Kamatláb 3½%.)

44. Vásárlunk márc. 5-én 4500 K névértékű koronajáradékot. Árfolyam 97.4. Mennyibe kerül a járadék? (A szelvényeket dec. 1-én és jun. 1-én váltják be.)

45. Mennyibe kerül szept. 20-án 9800 K névértékű járadék, ha az árfolyam 98.5 K?

46. Egy 5200 K-ról szóló, ápr. 1-én lejáráó váltót febr. 15-én discontálunk. Mennyit kapunk érte, ha a discontláb 6%?

XVII. Végtelen geometriai sor.

A mult évben megismerkedtünk a geometriai sorral. Látuk, hogy ha az első tagja a , s a hányadosa q , akkor a sorozat tagjai rendre :

$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots$$

Ez a sorozat akármeddig folytatható. A közönséges számításainkban is szerepelt olyan geometriai sorozat, melynek tagjai vég nélkül folytatódtak. Így pl. midőn ezt a törtet $\frac{3}{10}$, tizedes törtté változtattuk, akkor erre a végtelen tizedes törtre jutottunk :

$$0.3333 \dots$$

amely nem más, mint

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$$

tehát egy geometriai sor összege, melynek első tagja $\frac{3}{10}$, hányadosa $\frac{1}{10}$. Az ilyen sorozat *végtelen geometriai sor*.

Itt is felmerül az a kérdés, hogy mekkora a sor összege ; de ez az összeg direkt úton nem képezhető, mert végtelen sok összeadandó összevonását követeli.

Alkossuk meg az $1, q, q^2, q^3, \dots$ sorozat n tagjának összegét. Ez, miként tudjuk :

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \dots \dots \dots 1.$$

Ez az összeg így írható : $S_n = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}$, tehát két részből áll ; az első :

$$\frac{1}{1-q}$$

nem is függ az n -től, a tagok számától. A második pedig :

$$\frac{q^n}{1-q}$$

függ az n -től.

Ha q pozitív szám, mely az egységnél nagyobb, akkor ez a kifejezés n -nel együtt növekszik, még pedig úgy, hogy n -nel együtt q^n is minden határon túl nagyobbodik, végtelen nagygyá válik.

Ha ellenkezőleg q pozitív és az egységnél kisebb, akkor q^n az n növekedésével mindig kisebb lesz; ez esetben ugyanis q mindig ilyen alakban írható: $q = \frac{1}{r}$, ahol r nagyobb az egységnél, tehát

$$q^n = \frac{1}{r^n}$$

hol r az egységnél nagyobb, tehát r minden határon túl nagyobbodik, a q^n tehát n növekedésével mindig jobban megközelíti a zérust. Ez az állítás más szóval azt jelenti, hogy n kitevőt oly nagyra vehetjük, hogy q^n kisebbé válik egy tetszőszerinti kis számnál. Így pl. ha $q = \frac{1}{2}$ és azt akarjuk, hogy q^n kisebb legyen $\frac{1}{100}$ -nál, akkor csak n -et 7-nek, vagy ennél nagyobbak kell választanunk, mert $2^7 = 128$, tehát $\left(\frac{1}{2}\right)^7 < \frac{1}{100}$.

Ha azt akarnók, hogy q^n kisebb legyen $\frac{1}{1000}$ -nél, akkor n -et 10-nek, vagy 10-nél nagyobbak kell választanunk, mert $2^{10} = 1024$, tehát $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} < \frac{1}{1000}$.

Ha azt akarjuk, hogy q^n $\frac{1}{1000000}$ -nál kisebb legyen, akkor n -et 20-nak, vagy ennél nagyobbak kell választanunk, mert $2^{20} = 1048576$, tehát $\left(\frac{1}{2}\right)^{20} < \frac{1}{1000000}$ s í. t.

Akárminő kis számot jelölünk is meg, mindig meghatározhatunk oly kitevőt, hogy q^n kisebb legyen azon megjelölt kis számnál, ha csak n nagyobbak vétetik a meghatározott kitevőnél. A végtelen geometriai haladvány összegében tehát, ha n minden határon túl nő, a második rész: a $\frac{q^n}{1-q}$ eltűnik, és így az 1. alatti kifejezés: $\frac{1}{1-q}$ lesz; és így: az

$$a + aq + aq^2 + \dots$$

végtelen geometriai sor összege ebben az esetben: $\frac{a}{1-q}$.

Ha q negatív szám, akkor

$$q^n = (-1)^n (q)^n$$

lévén, $(-q^n)$ (hol most $-q$ pozitív) értéke az előbbieket szerint nyerhető, és csak az előjel marad kétes a $(-1)^n$ tényező miatt. De látni, hogy ekkor az előbbi eredmények mind érvényesek maradnak; az első esetben ismét végtelenbe nagybodódt értéket nyerünk, a második esetben pedig, t. i. mikor a $q < 1$, a q^n eltűnése miatt a negatív előjel egyáltalában nem jó tekintetbe.

Ily módon az eddigiek összeállításából a következő tételt nyerjük:

A végtelen geometriai sor összege

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

egyenlő $\frac{a}{1-q}$ -val, midőn q pozitív vagy negatív valódi tört; ellenben végtelen értéket ad, ha q az esetleges negatív előjel mellőzésével az egységénél nagyobb.

A q -nak két speciális értékére, az 1 és -1 -re nézve e tétel nem ad fölvilágosítást. Ami először $q=1$ esetét illeti, tüstént látni, hogy

$$S = a + a + a + a + \dots$$

ismét végtelen lesz.

Ha pedig $q=-1$, akkor

$$S = a - a + a - a + \dots$$

ami új eredményt ad. Amint t. i. az összeadással a tagokon tovább haladunk, az összeg fölváltva a és 0 lesz; és látni, hogy az értékeknek ezen ingadozása nem szűnik meg, bármennyire folytatjuk is az összeadást. Ebben az esetben tehát a végtelen geometriai haladvány összeadása véges, de határozatlan értékhez vezet.

Mindent összefoglalva tehát kimondhatjuk, hogy a végtelen geometriai sor összeadása csak akkor vezet véges és meghatározott értékhez, ha a sor hányadosa (pozitív vagy negatív) 1-nél kisebb (abs. értékű).

Példák. 1. A következő végtelen geometriai sor:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$$

(hol $a=1$, $q=\frac{1}{3}$) összege:

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

2. Van-e oly végtelen geometriai sor, melyben minden tag tízszerese a reá következő végtelen sok tag összegének?

Ha valamely tetszőleges (n -edik) tag: aq^{n-1} , akkor a reá következő tagok összege:

$$S = aq^n + aq^{n+1} + aq^{n+2} + \dots$$

tehát oly végtelen geometriai sor összege, melyben az első tag aq^n , a hányados ismét q .

Ha q nem (pozitív vagy negatív) valódi tört, akkor a feladat lehetlenséget követel; mert az n -edik tag véges, a reá következő tagok összege pedig végtelen. Ha q pedig valódi tört, akkor az n -edik tag után következő tagok összege:

$$S = aq^n \frac{1}{1-q};$$

és így a kérdéses sort akkor nyerjük, midőn

$$aq^{n-1} = 10 \cdot aq^n \frac{1}{1-q},$$

vagyis aq^{n-1} -el osztva:

$$1 = 10q \frac{1}{1-q}.$$

azaz midőn:

$$q = \frac{1}{11}.$$

Tehát függetlenül az első tag értékétől, minden sor, melynek hányadosa $\frac{1}{11}$, megfejtí a feladatot, pl. legegyszerűbben

$$1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \dots$$

3. Van-e oly végtelen geometriai sor, melynek első tagja 3 és melynek összege 2?

Erre kell, hogy

$$2 = 3 \cdot \frac{1}{1-q}$$

és ebből: $q = -\frac{1}{2}$. A keresett sor:

$$3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \dots$$

4. Ellenben oly geometriai sor, melynek első tagja -1 és összege 2 volna, nem lehetséges, mert ekkor kell, hogy legyen:

$$2 = -\frac{1}{1-q}$$

és ebből: $q = \frac{3}{2}$. De ha a hányados $\frac{3}{2}$, akkor az összeg végtelen lesz.

Feladatok.

A következő végtelen geometriai sorok összege képezendő :

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

2. $3 + 2 + \frac{4}{3} + \dots$

3. $4 + \frac{12}{5} + \frac{36}{25} + \dots$

4. $5 - \frac{1}{2} + \frac{1}{20} - \dots$

5. $\frac{\sqrt{2+1}}{\sqrt{2-1}} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots$

6. $ar + (a+ab)r^2 + (a+ab+ab^2)r^3 + \dots$

hol r és b valódi törteteket jelentenek.*)

7. Van-e oly geometriai sor, melyben az n -edik tag után következő tagok összege egyenlő az n -edik tag k -szorosával?

Legyen $k=1$, $k=-1$, vagy $k=9\cdot9$.

8. Mivel egyenlő a végtelen geometriai sorban az n -edik tagnak és a rá következő végtelen sok összegének hányadosa?

9. Valamely végtelen geometriai sor összege $\frac{3}{4}$; ha első tagját hányadosnak veszem, hányadosát pedig első tagnak, új sort nyerek, melynek összege $\frac{2}{3}$. Ezekből az adatokból meghatározandó a sor.

10. Ha a oldallal egyenlő oldalú háromszöget szerkesztünk és ennek magasságával újból egyenlő oldalú háromszöget, ennek a magasságával ismét s í. t., mekkora volna az így keletkező végtelen sok egyenlő oldalú háromszög területeinek összege?

11. Ha az a oldallal bíró négyzet oldalainak középpontjait összekötve bele új négyzetet, s ebbe, ugyanilyen módon, új négyzetet s í. t. szerkesztenénk, mekkora volna e végtelen sok négyzet kerületeinek és mekkora volna területeiknek összege?

*) Ez a végtelen sor a következő részekből állítható elő:

$$ar + ar^2 + ar^3 + \dots,$$

$$abr^2 + abr^3 + abr^4 + \dots,$$

$$ab^2r^3 + ab^2r^4 + \dots,$$

s í. t. és mindenik rész külön adandó össze. A részletösszegek azután újból összeadandók.

12. Egy R sugarú körbe négyzetet rajzolunk, ebbe megint érintő kört, ebbe ismét négyzetet s í. t. Mekkora volna az így keletkező négyzetek és mekkora a körök területeinek összege?

13. Egy R sugarú gömbbe kockát teszünk. Ebbe megint belülről érintő gömböt, ebbe ismét kockát s í. t. Mekkora az ily módon képzelhető végtelen sok golyó felületének, mekkora a kockák felületének, mekkora a golyók köbtartalmának és mekkora a kockák köbtartalmának összege?

14. a hegyes szög egyik szárán föl vesszük az M pontot. Ebből merőlegest bocsátunk a másik szárra. E merőleges talppontja legyen M_1 ; M_1 -ből merőlegest bocsátunk az első szárra. E merőleges talppontja legyen M_2 . M_2 -ből megint a második szárra bocsátunk merőlegest s í. t. Mekkora az így vont merőlegesek összege?

15. Valakinek joga van örök időnkig évenként k koronához. Mekkora ezen örökjáradék jelenlegi értéke? [$p\%$ -os kamatlábat számítsunk.] (Az első részlet jelenlegi értéke $\frac{k}{q}$, a másodiké $\frac{k}{q^2}$ s í. t.)

Mekkora az a tőke, mely $p\%$ -kal évenként k korona kamatot hajt? (Látjuk, hogy az egyszerűen kamatozó tőke tekinthető egy örökjáradék jelenlegi értékének.)

124. A szakaszos tizedestörtek. Minden szakaszos tizedestört rövidített alakban fölirt végtelen geometriai sornak tekinthető. Ha a geometriai sor összegét képezzük, egyszersmind elvégeztük a szakaszos tizedes törtnek közönséges törtté való átalakítását.

Lássuk a tárgyalás menetét először egy-egy a tisztán és vegyesen szakaszos tizedes törtre vonatkozó példán. Így $0\cdot37\bar{1}$ nem egyéb, mint:

$$\frac{371}{1000} + \frac{371}{1000^2} + \frac{371}{1000^3} + \dots,$$

azaz oly geometriai sor, melynek első tagja $\frac{371}{1000}$, hányadosa pedig

$\frac{1}{1000}$, melynek tehát (a hányados értéke az egységnél kisebb lévén, mindenesetre véges) összege:

$$\frac{371}{1000} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{371}{999}$$

így tehát $0\cdot37\bar{1} = \frac{371}{999}$.

Hasonlóképen a következő vegyesen szakaszos tizedes tört, $0\dot{2}3\dot{7}$ azaz $0.2373737 \dots$ részletesen kiírva :

$$\frac{2}{10} + \frac{37}{1000} + \frac{37}{100.1000} + \frac{37}{100^2.1000} + \dots,$$

hol az első tag még nem követi a törvényt, de a második tagtól kezdve oly végtelen geometriai sorral van dolgunk, melynek kezdő tagja :

$\frac{37}{1000}$ és hányadosa : $\frac{1}{100}$. Így tehát az összeadás eredménye :

$$\frac{2}{10} + \frac{37}{1000} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{2}{10} + \frac{37}{1000} \cdot \frac{100}{99} = \frac{235}{990}$$

és eszerint $0.\dot{2}3\dot{7} = \frac{235}{990}$.

Hogy az általános átalakítási szabályokat levezessük, legyen először a tisztán szakaszos tizedes törtre nézve a szakasz k számjelműből álló szám, melyet a -val jelölünk. (Az első példánál $a=371$.) Jegyezzük meg azt a véges tizedes törtnek értékének meghatározására szolgáló szabályt, hogy a véges tizedes tört oly közösleges tört alakjában írható, melynek számlálója a tizedes tört számjegyeiből egyszerű összeolvasással alkotott szám, nevezője pedig 10-nek annyadik hatványa, ahányadik helyet foglalja el az utolsó számjegy. Így pl. :

$$0.371 = \frac{371}{1000}, \quad 0.5468 = \frac{5468}{10^4}.$$

Eszerint az első szakasz $\frac{a}{10^k}$; a második szakasz utolsó számjegye $2k$ -ik helyen van; tehát értéke : $\frac{a}{10^{2k}}$; a harmadik szakasz értéke : $\frac{a}{10^{3k}}$, s í. t. Eszerint az átalakítandó tizedes tört értéke :

$$\frac{a}{10^k} + \frac{a}{10^{2k}} + \frac{a}{10^{3k}} + \dots$$

végtelen geometriai sor, melynek első tagja $\frac{a}{10^k}$ és hánya-

dosa $\frac{1}{10^k}$; tehát a sor véges és határozott. Ez az összeg:

$$\frac{\frac{a}{10^k}}{1 - \frac{1}{10^k}} = \frac{a}{10^k - 1}$$

$10^k - 1$ nem egyéb, mint k 9-esből álló szám; tehát:

A tisztán szakaszos tizedes tört egyenlő az oly közönséges törttel, melynek számlálója a szakasz számjeleiből a sorrend meg-hagyásával alakuló egész szám, míg a nevező ugyanannyi 9-esből álló egész szám, mint ahány számjel van a szakaszban.

$$\text{Pl. } 0.\dot{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \quad 0.\dot{4}7\dot{0} = \frac{470}{999}, \quad \text{s í. t.}$$

Ha másodszor a *vegyesen szakaszos tizedes tört*nél, a szakaszt megelőző szám k számjeltől áll, melyet a -val jelölünk és maga a szakasz l számjeltől áll és ezt b -vel jelöljük (a $0.2\dot{3}7$ -nél $a=2$, $b=37$, a $0.43\dot{5}0\dot{6}$ -nál $a=43$, $b=506$), akkor az átalakítandó tizedes törtben a szakaszt megelőző rész értéke: $\frac{a}{10^k}$, mert az a utolsó számjegye a k -ik helyen van. Az első szakasz utolsó számjegye a $k+l$ -ik helyen van, tehát értéke: $\frac{b}{10^{k+l}}$. A második szakasz utolsó számjegye a $k+2l$ -ik helyen van, tehát értéke: $\frac{b}{10^{k+2l}}$, s í. t. Az átalakítandó tizedes tört tehát a következő:

$$\frac{a}{10^k} + \frac{b}{10^{k+l}} + \frac{b}{10^{k+2l}} + \frac{b}{10^{k+3l}} + \dots$$

A második tagtól kezdve végtelen geometriai sorunk van, melynek kezdő tagja: $\frac{b}{10^{k+l}}$ és hányadosa $\frac{1}{10^l}$, mely 1-nél kisebb, tehát a sorunk összege véges. Ezen összeg:

$$\frac{\frac{b}{10^{k+l}}}{1 - \frac{1}{10^l}} = \frac{b}{10^k(10^l - 1)}$$

(ha ugyanis mind a számlálót, mind a nevezőt 10^{k+l} -el szo-

rozzuk). Eszerint tehát az átalakítandó tizedes tört ilyen alakúvá lett:

$$\frac{a}{10^k} + \frac{b}{10^k(10^l-1)}$$

és ha e két tagot közös nevezőre hozzuk, lesz:

$$\frac{a \cdot 10^l + b - a}{10^k(10^l-1)}.$$

A számlálóban levő kifejezés a tizes számrendszerben igen egyszerűen alkotható meg. Az $a \cdot 10^l$ -t úgy nyerhetjük, hogy a szakaszt megelőző számhoz l 0-t hozzáfűggesztünk. Ehhez kell azután még az l jegyű b szakaszt hozzáadni. Ha egy oly számhoz, melynek végén l számú 0 van, egy l jegyű számot hozzáadunk, az összeget egyszerűen úgy kapjuk, hogy az első szám zérusai helyébe a második számot tesszük, vagyis a két számot egyszerűen egybeolvassuk. (Igy pl. ha $a=43$, $b=506$, akkor $a \cdot 10^l=43000$ és így: $a \cdot 10^l + b = 43506$.) A számlálóban álló kifejezés tehát a következőként alkotható meg: a szakaszt megelőző számhoz egyszerűen hozzáírjuk a szakaszt és az így nyert számból a szakaszt megelőző számot kivonjuk.

A nevező is egyszerűen alkotható meg. 10^l-1 nem más, mint l számú 9-esből álló szám; tehát $10^k(10^l-1)$ az a szám, melyet kapunk, ha l számú 9-eshez k 0-t hozzáfűggesztünk, amiből ismét a következő szabályt lehet leolvasni:

A vegyesen szakaszos tizedes tört egyenlő oly közönséges törttel, melynek számlálója a szakaszt megelőző és a szakaszban előforduló számjegyekből a sorrend meghagyásával alakuló egész szám és a szakaszt megelőző szám különbsége, míg a nevező annyi kilencesből áll, mint ahány számjegy áll a szakaszban, melyet még annyi zérus követ, mint ahány számjegy áll a szakasz előtt.

$$\text{Pl. } 0.3748\bar{5} = \frac{37485-37}{99900} = \frac{37448}{99900}$$

$$0.24\bar{3} = \frac{243-24}{900} = \frac{219}{900},$$

hol természetesen az így nyert közönséges törtön esetleg még rövidítést végezhetünk.

Feladatok. Fejezzük ki közönséges törtekben ezeket a szakaszos tizedes törtöket: 0.43, 0.465, 0.721, 0.436, 0.5263, 0.5719, 0.873, 0.3487, 0.7916.

125. **Végtelen sorok.** A geometriai sorok csak speciális példái a *soroknak*, melyekben a tagok egymásutánját valamely általánosabb törvény szabja meg. Ily sor általánosságban:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots + u_n,$$

melyhez az u_k -val jelölt (általános) k -dik tag minden egyes sorra nézve külön adandó szabály szerint lesz kiszámítandó. Így adja pl.:

$$u_k = u_1 q^{k-1} \text{ vagy } u_k = u_1 + (k-1)d$$

a geometriai, illetőleg számtani sort, ha k helyett egymásután 1-et, 2-t stb. teszünk; így adja pl.:

$$u_k = \frac{1}{1+2^k}, u_k = (-1)^{k-1} \frac{1}{k},$$

ha k helyett 1-et, 2-t s í. t. teszünk, a következő két soralakot:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{17} + \dots$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Ily véges (n tagból álló) sorban elvégezzük az összeadást, esetleg még összevonást eszközölve az eredményen. De ha a tagok számát ismét minden határon túl növesztjük, a sor átmeny úgynevezett *végtelen sorba* (*series infinita*); és az első n tag összege átmegy a *végtelen sor összegébe vagy értékébe*.

Ezen összeg most már lehet véges vagy végtelen, az első esetben ismét *határozott* vagy *határozatlan*, úgy hogy mindössze három esetet kell megkülönböztetnünk.

1. A sor összege *véges és meghatározott* értéket ad; ekkor a sort *összetartónak, convergensnek* mondjuk.

2. A sor összege *véges, de határozatlan* értékhez vezet; ekkor a sor *ingadozó* vagy *oscilláló*.

3. A sor összege *végtelen*, amely esetben a sort *széttartónak, divergensnek* mondjuk.

Igy például az $1+q+q^2+q^3+\dots$ végtelen sor összetartó, ha q pozitív vagy negatív valódi tört, ingadozó, ha $q=-1$, mert az a sor: $1-1+1-1+\dots$ véges, de határozatlan értékhez vezet ($+1$ vagy 0) és széttartó, ha q abszolút értéke 1-nél nagyobb.

Minden egyes soralaknál az első és legfontosabb kérdés most már az, vajjon összetartó-e vagy sem, mert rendszerint csak ha összetartó, lehet azt véges és meghatározott számérték kép-

viselőjének tekinteni. *A sorok összetartásának vizsgálata* a matematikának egyik terjedelmes fejezete, melyet azonban itt nem tárgyalunk. Csak egy egyszerű tételt vezetünk majd le, mely csupán pozitív számokból alkotott végtelen sorokra vonatkozik.

126. Pozitív tagú sorok összehasonlítása. Az oly *végtelen soroknál, melyekben minden tag pozitív szám*, a vizsgálat mindenekelőtt azáltal lesz sokkal egyszerűbb, hogy az ingadozás esete egyáltalában nem fordulhat elő. Ha ugyanis a végtelen sor összeadását az egymásután következő tagok folytonos hozzácsatolása által képzeljük eszközölve, világos, hogy e pozitív számértékek hozzátoldása az összeget folyton növeszti. E növekedés most már vagy véges határig megy, (mint például az $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \dots$ -nél, melynek összege $1\frac{1}{9}$) vagy minden határon túl, de ingadozás nem lehetséges. Azaz:

Csupán pozitív tagokból álló sor összege vagy véges és meghatározott, vagy pedig végtelen nagy, azaz ilyen sor csak összetartó vagy széttartó lehet.

Ennek alapján a következő *összehasonlítási elv* segítségével gyakran következtethetünk a sor összetartására:

Ha valamely

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots$$

(pozitív számokból álló) sor tagjai rendre kisebbek, a (szintén csak pozitív számokból álló)

$$V = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_k + \dots$$

sor tagjainál, és a V sor összetartó, akkor az U sor is összetartó.

Minthogy ugyanis minden összeadandó kisebb, világos, hogy akárhány tag összege az első sorban kisebb a megfelelő összegnél a második sorban. Ez helyes marad, bármi határon túl növekszük is a tagszámot. Az U végtelen sor összege tehát kisebb V sorénál. Ez pedig véges; de akkor U sem lehet végtelen, és minthogy az ingadozás esete ki van zárva, kell hogy az U véges és meghatározott összeget adjon, vagyis a sor összetartó.

Igy pl. meggyőződünk arról, hogy az

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1)k} + \dots$$

sor összetartó.

E sor általános k -adik tagja oly tört, melynek számlálója 1, nevezője pedig az első k egész szám szorzata. Az e sor által adott irracionális

számérték azért fontos, mert eggyel nagyobbítva nem más, mint a természetes logaritmikus-rendszer alapszáma.

Ha ugyanis összehasonlítjuk e sort a következő geometriai sorral

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} + \dots$$

akkor látjuk, hogy az első sor k -dik tagja kisebb a második sor k -dik tagjánál, azaz :

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \dots (k-1)k} < \frac{1}{2^{k-1}},$$

mert az első tört nevezője nagyobb mint a másodiké, melyben a 3, 4... s i. t. tényezők helyébe mindig a kisebb 2 iratott. Minthogy pedig már tudjuk, hogy a felvett végtelen geometriai sor összege véges, az előbbi tétel értelmében a vizsgált sor összege is véges és meghatározott szám.

Minden végtelen sor két részből összeállítottnak tekinthető, ha első résznek vesszük a sornak néhány első, mondjuk $n-1$ tagját, míg a második rész a hátralevő tagsorozatból áll, tehát ismét végtelen sor. Világos, hogy az

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \dots$$

sor mindig az

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

sorral együtt összetartó; mert ha ennek összege véges és meghatározott szám, ez a véges számmal lévő $n-1$ tag hozzáadása után is ilyen marad.

Ennek következtében az imént tárgyalt összehasonlítási elvet sem kell az egész sorra alkalmaznunk, hanem csak a n -edik tagnál kezdődő részre és ekkor a megfelelő szabályt következőképpen fogalmazhatjuk: *Valamely (pozitív tagból álló) U sor összetartó, ha tagjai az n -edikről kezdve rendre kisebbek a már összetartónak ismert V sor megfelelő tagjainál.*

127. Az összetartás ismertető jele. Midőn az

$$U = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

(pozitív tagokból álló) végtelen sort a geometriai sorral akarjuk összehasonlítani, az erre vonatkozó eljárást a következő alakra hozhatjuk. Először is átmehetünk az előbbieket szerint az

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$$

sor vizsgálatára, melyet

$$1 + \frac{u_{n+1}}{u_n} + \frac{u_{n+2}}{u_n} + \frac{u_{n+3}}{u_n} + \dots$$

által pótolhatunk. Ha t. i. tagonként u_n -nel osztottuk, és ha e sor összege véges és meghatározott számot ad, akkor u_n -szerese vagyis az előbbi sor, is ilyen lesz. Most az egyes tagokat a következő alakban írhatjuk:

$$\frac{u_{n+2}}{u_n} = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n}, \quad \frac{u_{n+3}}{u_n} = \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} \cdot \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ s í. t.,}$$

tehát e sor így is írható:

$$1 + \frac{u_{n+1}}{u_n} + \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n} + \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} \cdot \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n} + \dots$$

Ha már most

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}, \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}, \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}}, \dots$$

mindannyian kisebbek egy bizonyos valódi törtnél, K -nál, akkor a sor összege kisebb az

$$1 + K + K^2 + K^3 + \dots$$

geometriai sorénál, tehát évvel együtt összetartó és így tehát a tulajdonképp tárgyalandó sor is ilyen.

Ez a következő összetartási ismertetőjelt adja:

Ha az U sorban az n -edik tagtól kezdve minden tag osztva az előttevalóval egy meghatározott (különböző tetszőleges) valódi törtnél kisebb hányadost ad, a sor összetartó.

Igy pl. az előbb példa gyanánt fölhozott sorban két tetszőleges tag, a k -adik és a $k+1$ -edik:

$$u_k = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}, \quad u_{k+1} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k(k+1)};$$

tehát a kettő hányadosa:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{k+1},$$

s ez a 3-ik tagtól kezdve, hol $k=2$, mindig kisebb $\frac{1}{2}$ -nél.

Jegyzet. A most tárgyalt összetartási ismertetőjel segítségével azonban csak a sorok legegyszerűbb osztályánál végezhetni az összetartás vagy széttartás vizsgálatát. A nyert föl-

tétel ugyanis *elegendő*, de semmikép sem *szükséges*. Így pl. a következő soroknál :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

melynek általános tagja $u_k = \frac{1}{k^2}$, illetőleg $\frac{1}{k}$, két egymásután következő tag hányadosa, amint a sorban tovább megyünk, mindinkább közelebb jut az egységhez, úgy hogy nem lehet többé oly valódi törtet kijelölni, melynél a hányados mindig kisebb maradna. E sorok összetartásának eldöntésére új és általánosabb elvek bevezetése, a végtelenbe való határátmenet tüzetesebb elemzése szükséges.

Említsük még meg, hogy a fölirt két sorból az első összetartó, a második pedig széttartó ; a másodiknál az összegnek a végtelenbe való nagyobbodása különösen azért figyelemre-méltó, mert ez a sornál együtt jár a tagoknak vég nélkül való kisebbedésével.

XVIII. Az algebra és geometria kapcsolata.

128. A valós számsor és az egyenes vonal. A valós (pozitív és negatív, egész, tört és irracionális) számok együttevve az úgynevezett *valós számsort* alkotják. Ez a számsor kapcsolatba hozható az egyenes vonallal oly módon, hogy e valós számsorban foglalt minden egyes számnak az egyenes vonal egy bizonyos pontja felel meg és megfordítva. E vonatkoztatás a következőképen eszközölhető :

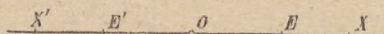
A végtelenbe terjedőnek gondolt egyenesen fölveszünk akárhol egy kezdőpontot, O -t s egy második pontot, E -t, mely O -val együtt az OE vonalдарabban megállapítja a (különben szintén szabadon választott) hosszegységet. Akkor az x számnak az az X pont felel meg, melynél az OX és OE hosszak közti összefüggés a következő aránypár által van adva :

$$OX : OE = x : 1 \dots\dots\dots 1.$$

vagyis :

$$\frac{OX}{OE} = x \dots\dots\dots 2.$$

Minthogy az ily módon az O ponttól számított távolsága által meghatározott X pont az adott egyenesen fekszik, a meghatározás még nem teljes, mert világos, hogy két pont X és X' , van az egyenesen, melyek távolsága O -tól ugyanaz. E pontok helyzete közt csupán *iránykülönbség* van: e tüneményt már a negatív számok első bevezetésénél vizsgáltuk és már ott láttuk,



1. ábra.

hogy az OX és OX' közt ugyanaz az ellentét, mint az x és $-x$ számok közt. Eszerint azt kell mondanunk, hogy ha $\frac{OX}{OE}$ megfelel az x -nek, akkor $\frac{OX'}{OE}$ a $-x$ -nek felel meg és viszont.

Hogy micsoda irányt választok az egyenesen pozitív iránynak, az egészen mindegy. De világos, hogy miután az O egyik oldalán fekvő pontok távolsága az O -tól mind egyirányú, a vonalnak O -tól számított egyik fele lesz a pozitív számok képviselője, másik fele a negatív számoké.

Minthogy pedig rendesen az először észlelt irányt mondjuk pozitívnek, és először az E pontot vesszük fel, az egyenes vonal ama része lesz »pozitív«, melyen az E fekszik. Ekkor, minthogy

$$\frac{OE}{OE} = 1,$$

az E pont az 1-nek felel meg és viszont; és az E -vel O kezdőponthoz szimmetrikusan fekvő E' pont, melyre nézve, ha az irányt mellőzzük, $OE = OE'$, épp úgy a -1 -nek felel meg.

129. Racionális számértékeknek megfelelő pontok az egyenesen. Hogy miképen *szerkesztjük* a legfontosabb esetekben

$$OX : OE = x : 1$$

aránylat által meghatározott OX hosszát, az a geometriából már ismeretes; miért is itt csak röviden összeállítjuk az erre vonatkozó szabályokat.

Geometriai szerkesztés a szó szorosabb értelmében az, melynél a körző és vonalzó segítségével a keresett X pontot teljes pontossággal

nyerjük, ha t. i. rajzeszközeinket teljesen pontosaknak gondoljuk. Az ily geometriai szerkesztés csak akkor lehetséges, ha x bizonyos egész számokból csupán összeadás, kivonás, szorzás és négyzetgyökkivonás által keletkezett (valós) érték.*) Így például szerkeszthetők lesznek a következő számoknak megfelelő pontok:

$$3, \frac{11}{5}, 1.23, \sqrt{5}, \frac{3+2\sqrt{3}}{1-2\sqrt{5}}, \sqrt{10+\sqrt{3}} \text{ s í. t.}$$

Ellenben a fönt megállapított szorosabb értelemben nem szerkeszthető a $\sqrt[3]{2}$. Mindama számoknál, melyek magasabb műveletekből keletkeznek, a megfelelő pontot csak oly eljárás segítségével találjuk, mely már föltételezi az egyenes- és körtől különböző más görbék pontos rajzolását, vagy pedig, ami céljainkra elégséges, *megközelítőleg* szerkesztjük, ha ugyanis az adott számot fölcsereljük megközelített (pl. tizedes tört alakjában adott) értékével.

Ha x racionális, azaz egész vagy tört szám, a szerkesztés csak a hasonlósági tételek alkalmazását követeli.

1. Legyen először x egész szám: $x=m$; akkor egyszerűen fölrakjuk egymás mellé m -szer az OE távolságot, és az így elért pont lesz az m -nek megfelelő pont M , melyre nézve

$$\frac{OM}{OE} = m \text{ és } \frac{OM'}{OE} = -m,$$

ha t. i. M az E oldalán fekszik, és (ismét az irány mellőzésével) $OM=OM'$.

2. Ha bármi módon meghatároztuk az m - és n -nek megfelelő M és N pontokat, akkor meghatározhatjuk az $x = \frac{m}{n}$ -nek megfelelő X pontot is; ami megfejt a föladatot a *törtszámok* esetében.

Ha ugyanis az adott egyenesen fölrakjuk az OM távolságot, az O -n keresztül vont másik egyenesen fölrakjuk az $OA=OE$ és ON távolságokat, és az M és N pontokat összekötve, végül az A -n keresztül párhuzamost vonunk, mely OM -et X -ben metszi; akkor az OXA és OMN háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$OX : OA = OM : ON,$$

azaz: minthogy $OA=OE$, továbbá $\frac{OM}{OE} = m$, $\frac{ON}{OE} = n$,

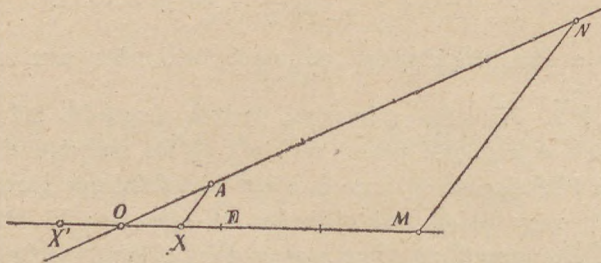
*) A hatványozás, melyben a kitevő pozitív vagy negatív egész szám, még ide tartoznék; de nem szükséges ezt külön említeni, mert nem más mint szorzás- és osztásból összeállított művelet.

végre

$$\frac{OX}{OE} = \frac{m}{n},$$

ha $\frac{m}{n}$ pozitív, míg ha ez negatív, csak a megfelelő X' pontra kell átmennünk.

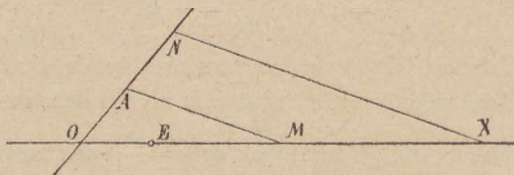
(A 2. ábrában $m=3$, $n=5$.)



2. ábra.

3. Ha M és N (úgy mint 2. alatt) ismeretesek, könnyen meghatározhatjuk az $m \pm n$ és mn -nek megfelelő távolságokat.

Az első esetben a távolságokat ugyanis az ismeretes módon összeadjuk vagy kivonjuk; a szorzatnak megfelelő szerkesztés pedig (3. ábra) a következő:



3. ábra.

Ha ugyanis az adott egyenesen fölrakjuk az OM távolságot, az O -n keresztül vont másik egyenesen fölrakjuk az $OA=OE$ és ON távolságokat és végre az A és M pontokat összekötve, az N -en keresztül párhuzamost vonunk, mely a (szükség szerint meghosszabbított) OM -et X -ben metszi, akkor az OXN és OMA háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$OX : OM = ON : OA,$$

hol $OA=OE$ lévén,

$$OX = \frac{OM \cdot ON}{OE}$$

és így valóban

$$\frac{OX}{OE} = \frac{OM}{OE} \cdot \frac{ON}{OE} = mn$$

130. Irracionális számértékeknek megfelelő pontok. Ha a szerkesztendő kifejezésben négyzetgyökök foglaltatik, akkor geometriai középarányos szerkesztendő, és így a körzöt nemcsak távolságok mérésére, hanem körív rajzolására is kell használnunk.

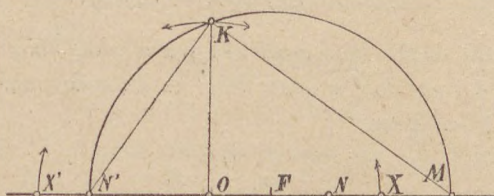
Általánosságban, ha az m és n -nek megfelelő pontok adva vannak, azaz

$$\frac{OM}{OE} = m, \frac{ON}{OE} = n,$$

akkor a $\sqrt{mn}$ -nek megfelelő X pontot, melyre nézve (ha ugyanis mn pozitív, mert különben $\sqrt{mn}$ nem tartozik a *valós* számsorba)

$$\frac{OX}{OE} = \sqrt{mn}$$

következőképp nyerjük :



4. ábra.

Fölrajjuk az OM és ON távolságokat ellenkező irányban, azaz az OM és ON' ($=ON$) távolságokat és az $N'M$ -et felezzük F -ben és FN' sugárral az F középpontból az $N'KM$ kört rajzoljuk, végre pedig O -ban merőlegest vonunk a kör átmérőjére MN' -re, mely a kört fölül K pontban metszi. Ekkor, mint tudjuk, az $N'OK$ és KOM háromszögek hasonlók, és így

$$N'O : OK = OK : OM$$

vagyis, minthogy $N'O = ON$

$$\overline{OK}^2 = OM \cdot ON$$

$$\left(\frac{OK}{OE}\right)^2 = \frac{OM}{OE} \cdot \frac{ON}{OE} = mn,$$

tehát: $\frac{OK}{OE} = \sqrt{mn}$. Ha tehát az OK távolságot egyenesünkre fölrajjuk, az X és X' -ben a $\sqrt{mn}$ két értékének (melyek csak előjelben különböznek) megfelelő pontokat kapjuk.

Ha $n=1$ lesz, akkor természetesen egyenesen a $\sqrt{m}$ -nek megfelelő szerkesztést nyerjük, melynél tehát ON az alapul fölvetett hossz-egység lesz. Így pl.: $\sqrt{3}$ egység a 3 és 1 egység hosszúságú egyenesek mértani középárányosa.

Az egyes műveleteknek megfelelő szerkesztések összeállítása által most már minden oly *algebrai érték geometriai szerkesztése* megtörténhetik, mely a tárgyalt műveletek által keletkezett. Ez az eljárás igen gyakran geometriai problémák megoldását adja algebrai úton.

Igy pl. az ú. n. *aranymetszésnél* megkívántatik, hogy az OD vonalon oly X pontot találjunk, melyre nézve

$$OX : XD = XD : OD,$$

vagyis tehát :

$$OX : (OD - OX) = (OD - OX) : OD$$

Hogy az OX és OD -tól a megfelelő d és x számokhoz áttérhessünk, melyek közül d ismeretes, x ismeretlen, az aránylat minden tagjában OE -vel osztunk és ekkor :

$$\frac{OX}{OE} = x, \quad \frac{OD}{OE} = d$$

lévén

$$x : (d - x) = (d - x) : d,$$

vagyis áttérve az aránylattól az egyenlethez és azt rendezve :

$$x^2 - 3dx + d^2 = 0$$

és ebből

$$x = \frac{3d}{2} + \sqrt{\frac{5d^2}{4}},$$

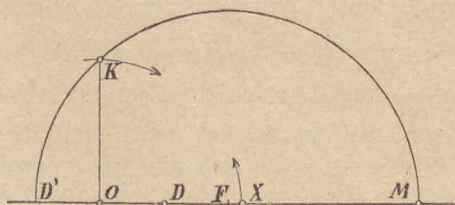
azaz

$$x = d \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Minthogy x -nek két érték felel meg, látjuk, hogy a föladatnak két pont felel meg: X_1 és X_2 , melyek közül, minthogy $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1$ és $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1$, az egyik O és D közt fekszik, *belső* pont, a második pedig OD -n kívül: *külső* pont.

A szerkesztésnél legegyszerűbb OD -t hosszegységnek venni, mert ekkor $d=1$. Ha ezt tesszük, először $\sqrt{5}$ szerkesztendő.*) Ha tehát az egyenesen fölrajtuk az $OD'=OD$ és $OM=5 \cdot OD$ távolságokat, és az OD' és OM mértani középárányosát az előbbi eljárással meghatározzuk, azt találjuk, hogy

$$OK=OX=\sqrt{5}, OD.$$



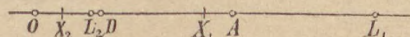
5. ábra.

Ezután, ha OD távolság 3-szorosát OA -t vesszük, és ehhez OK -t hozzáadjuk vagy levonjuk ($AL_1 = AL_2$, hol OK az 5. ábrában meghatározott vonal), lesz:

$$AL_1 = (3 + \sqrt{5})OD$$

$$AL_2 = (3 - \sqrt{5})OD$$

és így végre e vonalak felezése által megkapjuk a keresett X_1 és X_2 pontokat.



6. ábra.

A megközelítő szerkesztésnél legegyszerűbb az ábrázolandó szám-értéket decimális tört alakjában kifejezni, melynek számjegyeit egy bizonyos számjegyen túl elhanyagoljuk; e megközelített (racionális) szám-értéknek megfelelő hosszat az előbbieket szerint szerkesztjük.

Feladatok.

1. Adva van egy derékszögű négyszög hosszúsága és szélessége. Szerkesszük meg : a) azt a négyzetet, b) azt az egyenlő oldalú háromszöget, melynek a derékszögű négyszöggel egyenlő területe van.

2. Szerkesszük meg azt a négyzetet, melynek területe két adott négyzet területének összege (különbsége) [Pythagoras tétele].

*) Röviden $\sqrt{5}$ szerkesztéséről beszélünk, ami alatt természetesen mindig $\sqrt{5} \cdot OE$, azaz $\sqrt{5}$ -szeres hosszegység értendő.

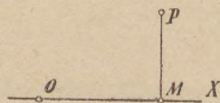
3. Adva vannak $\bar{a}$, b , c , d hosszúságú egyenesek. Szerkesszük meg a $\sqrt{ab}$, $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $\frac{ab}{\sqrt{cd}}$, *) $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ hosszúságú egyeneseket!

4. Szerkesszük meg a $\sqrt{a^2+bc}$, **) $\sqrt{ac+bd}$, $\sqrt{a^2+b^2+cd}$ hosszúságú egyeneseket.

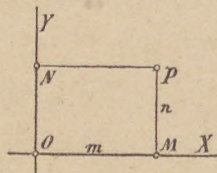
5. Szerkesszük meg azon egyeneseket, melyek hosszúsága: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$ hosszegység.

131. **A síkon fekvő pontok koordinátái.** A kezdőpont és hosszegység megállapítása után az adott egyenes vonal minden egyes pontjának egy bizonyos (pozitív vagy negatív) szám felel meg, mely szám ismét megfordítva a megfelelő pontot teljesen meghatározza. Geometriai felfogásban e számot az illető vonal pontjainak jellemzésére használjuk és ekkor az OX távolságot, illetőleg az x számot az X pont *koordinátájának* mondjuk.

Miután így az egy vonalban fekvő pontok összességét számértékek által sikerült jellemeznünk, önként felmerül ama kérdés, vajjon nem lehetne-e az *egy síkban fekvő pontok összességét* szintén hasonló módon számértékek által jellemezni.



7. ábra.



8. ábra.

Könnyű lesz belátni, hogy a használt módszer természet-szerű tágításával valóban lehetséges lesz a *sík minden pontját* nem egy, hanem *két valós számérték által teljesen meghatározni*.

Évégből felveszünk egy O kezdőpontot, melyen át az OX egyenest vonjuk. A P ponton át az OX egyenesre merőlegest

*) Előbb megszerkesztjük a $\sqrt{cd}$ egyenest c és d mértani középarányosát; jelöljük ezt e -vel; azután az $\frac{ab}{e}$ racionalis kifejezést szerkesztjük meg az ismeretes módon.

**) Előbb megszerkesztjük a b és c mértani középarányosát; jelöljük ezt e -vel; akkor $bc = e^2$; tehát $\sqrt{a^2+e^2}$ szerkesztendő. Ugyanígy járunk el a következőknél is!

bocsátunk. Ennek talppontja M . A P pont helyzete meg van határozva, ha ismerem az OM távolságot (vagy ennek megfelelő $\frac{OM}{OE} = m$ számértéket) és ismerem még a PM távolságot (vagy az ennek megfelelő $\frac{PM}{OE} = n$ számértéket), vagyis az m és n számok együttesen teljesen megadják a P pont helyét. A távolságoknál természetesen itt is tekintetbe veendő az iránykülönbség és kezdettől fogva megkülönböztetjük egymástól a P ponton át vont merőlegesen az OX metszőpontja által elválasztott pozitív és negatív részt. Hogy melyiket mondjuk pozitívnak vagy negatívnak, tetszésüinktől függ; szokásos a merőleges ama részén pozitívoknak venni a távolságokat, mely fölfelé irányul, ha magát az OX vonalt vízszintesen képzeljük elhelyezve.

Eszerint az m és n számok, tehát két koordináta teljesen meghatározza a P pontot. E meghatározás módját még némileg megváltoztatjuk azért, hogy az m és n koordináta bevezetése egészen egyenlő módon történjék. Az OX -re mindjárt O -ban merőlegest vonunk, OY -t, és ekkor a P pont koordinátáit nyerjük, ha P -ből a két egyenesre merőlegeseket bocsátunk. A két egyenesen nyertük OM és ON távolságokat és, amint látjuk, ON nagyságra és irányra nézve megegyezik az előbbi MP -vel.

Az OX és OY határtalan egyeneseket ekkor *koordináta-tengelyeknek* nevezzük, még pedig OX -et az *abscissák*, ON -t az *ordináták* tengelyének. Rövidebben X és Y -tengelyről is beszélünk. Az OM , ill. ON vagy MP távolságokat hasonlóképen a P pont *abscissájának*, illetőleg *ordinátájának* nevezzük és azt az elnevezést végre még átviesszük az

$$m = \frac{OM}{OE}, \quad n = \frac{ON}{OE}$$

számokra is.

Hogy valamely pontnak abscissája m , ordinátája n , azt úgy szoktuk írni, hogy

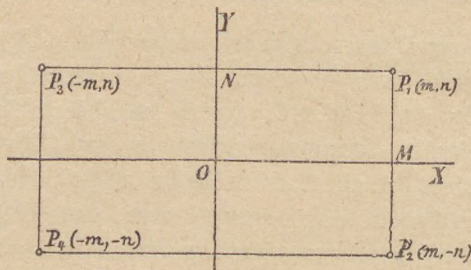
$$x = m, \quad y = n,$$

az x -et az X -tengelyre, az y -t az Y -tengelyre vonatkoztatva. Végre utolsó rövidítésben az (m, n) pontról beszélünk, hol a pontot koordinátái által jellemezzük, elsőnek írva mindenkor az abscissát.

E négy pont P_1, P_2, P_3, P_4 koordinátái által jellemezve:

$$(m, n), (m, -n), (-m, n), (-m, -n)$$

a koordinátatengelyekre vonatkozólag szimmetrikusan fekszik. (A 9. ábra azt az esetet mutatja, hol m és n pozitív számok.)

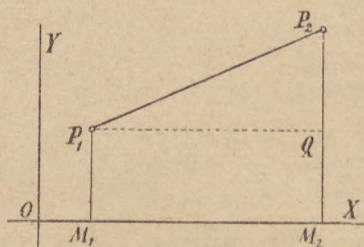


9. ábra.

Feladat. Rajzoljuk meg a koordinátatengelyeket és határozzuk meg a következő pontokat: $(1, -1)$, $(2, 1)$, $(-2, 3)$, $(-2, -3)$, $(0, -4)$, $(4, 0)$, $(-\frac{3}{2}, 2\frac{1}{2})$, $(1\frac{1}{2}, -5)$, $(\sqrt{2}, -3)$, $(\sqrt{3}, \sqrt{5})$, $(\sqrt{7}, \sqrt{15})$, egységül választva a centimétert.

132. Két pont távolsága. A *koordináták módszere* kapcsolatot létesít számértékek és geometriai alakzatok közt.

Az algebra ezáltal igen fontos segédeszközt nyer, mert az elvont számviszonyokat e módszer segítségével geometriai alakzatokon szemléltethetők tudjuk tenni. Másrészt pedig a geometria problémáit algebrai alakban fogalmazhatjuk és így módon képesek vagyunk az algebra módszereit geometriai



10. ábra.

feladatok megoldására fölhasználni. A geometria e része az ú. n. *analitikus geometria*, melyben a geometriai alakzatok tulajdonságait a nekik megfelelő algebrai kifejezéseken tanulmányozzuk. Itt csak néhány lehetőleg egyszerű föladaton lássuk a módszer lényegét.

Minthogy minden egyes pont koordinátái teljesen meghatározzák az illető pont fekvését, kell, hogy két pont távolságát a koordinátákból kiszámíthassuk.

Legyen a két pont: P_1 és P_2 , koordinátáik: (x_1, y_1) és (x_2, y_2) . Akkor a 10. ábra értelmében:

$$OM_1 = x_1, \quad P_1M_1 = y_1,$$

$$OM_2 = x_2, \quad P_2M_2 = y_2,$$

hol természetesen a számok mind az alapul vett hosszegységre vonatkoznak. A keresett távolság pedig

$$d = P_1P_2;$$

de a P_1P_2Q derékszögű háromszögből (P_1Q ugyanis P_2M_2 -re vont merőleges) látjuk, hogy

$$P_1P_2^2 = P_1Q^2 + P_2Q^2.$$

Minthogy pedig:

$$P_1Q = M_1M_2 = OM_2 - OM_1,$$

$$P_2Q = P_2M_2 - QM_2 = P_2M_2 - P_1M_1,$$

lesz, ha e hosszak helyett mindenütt bevezetjük a megfelelő mérőszámokat:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

és így a P_1P_2 távolság kifejezése az adott pontok koordinátái által:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \dots\dots\dots 1.$$

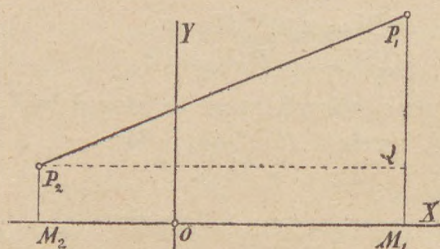
hol a koordináták valóságosak lévén, mindegyik négyzet és összegük is pozitív, és így a négyzetgyök pozitív számból vonandó. Magánál e műveletnél a d hosszat jelentvén, a pozitív eredményt vesszük.

Azt lehetne hinni, hogy az eredmény csak akkor helyes, ha P_1 és P_2 a koordináta-tengelyek ugyanazon oldalán fekszenek, mert ha pl. P_1 és P_2 az Y -tengely két különböző oldalán fekszik (mint a 11. ábrában), akkor a P_2Q távolság az OM_1 és OM_2 távolságok összege lesz:

$$P_2Q = OM_1 + OM_2$$

de éppen ekkor az OM_2 -nek megfelelő x_2 negatív; és így hogy valóban a P_2Q hosszát nyerjük, megint $x_1 - x_2$ veendő, tehát a két pont távolságát ugyanaz a formula szolgáltatja. Közvetlenül látni, hogy éppen úgy áll a dolog az y -okra nézve, ha P_1 és P_2 az X -tengely két különböző oldalán fekszik, azaz az 1. alatti képlet mindenkor helyes.

A tanuló kövesse a rajzban részletesen a különböző lehetséges eseteket.

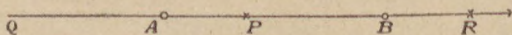


11. ábra.

Amint e tárgyalás mutatja, az algebrai eredményben eltűnnek a geometriai alakzat speciális helyzeti viszonyaiból keletkező különbségek. Az eredményeknek emez általános érvényessége az, ami az analitikus geometria módszereit oly becsesekké teszi.

133. Pontok helyzetének meghatározása adott egyenesen. Ha ismeretesek két pont, A és B koordinátái, akkor ezáltal volta-képpen teljesen meg van határozva a rajtuk átmenő egyenes helyzete. Ezen az egyenesen, miként láttuk, valamely P pont helyzete meg van határozva, ha ismeretes a P -nek A -tól vagy B -től való távolsága és megállapodtunk abban, hogy melyik irányt tekintjük pozitívnak. Ahelyett, hogy P pont helyzetét e távolságok egyikével határoznók meg, az AP és PB távolságoknak egymáshoz való *viszonyával* jellemezzük a P helyzetét. Az egyenes minden pontjának megfelel egy ilyen viszonzszám és pedig:

1. Ha P pont A és B között van, akkor AP és PB távolságok egyenlő irányúak, tehát $\frac{AP}{PB}$ pozitív.
2. Ha Q pont az A előtt van, akkor AQ és QB ellenkező irányúak, tehát $\frac{AQ}{QB}$ negatív.
3. Ha R pont a B után jön, akkor AR és RB megint ellenkező irányúak, tehát $\frac{AR}{RB}$ negatív.



12. ábra.

A 2. és 3. esetben az illető pontoknak megfelelő viszony-szám negatív; de ha a pont A előtt van, mint a Q , akkor az AQ távolság abszolút mérőszáma kisebb mint a QB távolságé, mert hiszen $QB = QA + AB$; tehát az $\frac{AQ}{QB}$ viszony abszolút értéke kisebb 1-nél; míg ellenben a 3. esetben, midőn a pont B után következik, e viszony abszolút értékszáma nagyobb 1-nél.

Minden P pontnak megfelel egy bizonyos viszonyszám $\frac{AP}{PB}$. Fordítva, ha meg van adva ez a viszonyszám, akkor a P pont helyzete is ismeretes. Így pl. ha

$$\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$$

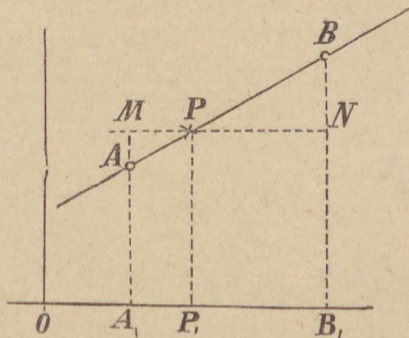
és $\frac{m}{n}$ pozitív, akkor tudjuk, hogy a P pont A és B között van; helyzetét úgy határozzuk meg, hogy az AB távolságot felosztjuk $m+n$ részre és ilyen osztályrészből A -tól B felé m -et mérünk fel. Ennek a végén van a P pont.

Ha a viszony negatív $\left(-\frac{m}{n}\right)$, akkor figyelembe vesszük, hogy abszolút értéke nagyobb vagy kisebb-e 1-nél. Ha nagyobb, akkor az AB távolságot felosztjuk $m-n$ részre és ilyen részt veszünk B -n túl n -et. Ennek a végpontja a keresett pont (R). Valóban ekkor BR tartalmaz n osztályrészt, AR pedig $m-n+n=m$ részt, tehát $\frac{AR}{RB} = -\frac{m}{n}$.

Ha pedig $\frac{m}{n}$ az egységnél kisebb, akkor felosztjuk az AB közt $n-m$ részre és e szerint mérünk A elé m -et. Ha a végpontot Q -val jelöljük, akkor valóban:

$$\frac{AQ}{QB} = -\frac{m}{n}.$$

Még megemlítjük azt is, hogy ezen megállapítások az egyenes



13. ábra.

minden pontjához rendelnek egy viszonyt és fordítva, minden viszonyhoz pontot; de az A , B pontok, valamint az egyenes végtelenben levő pontja kivételesek. Az A pontnak megfelelő viszony 0 (miért?), a B ponté nem lehet véges szám, mert a nevező 0, tehát minthogy a P pontnak a B -hez való közeledésével e viszony mindinkább nő, a B pontnak, mint határesetnek, a viszony végtelen nagy értéke felel meg. Ha pedig Q pont mindinkább távozik az A -tól, akkor az $\frac{AQ}{QB}$ viszony mindinkább közeledik a -1 -hez.

Az AB egyenesen fekvő P pont helyzete tehát teljesen meg van határozva, ha ismeretes a hozzá tartozó $\frac{AP}{PB}$ viszonyszám. Következésként, ha ismeretesek az A és B koordinátái, és ismeretes a P -nek megfelelő viszonyszám, akkor a P koordinátái kiszámíthatók. Ezzel akarunk foglalkozni.

Legyenek A pont koordinátái: x_1, y_1 .

Legyenek B pont koordinátái: x_2, y_2 .

Jelöljük továbbá az $\frac{AP}{PB}$ viszonyt λ -val és jelöljük P pont koordinátáit ξ, η -val, akkor e jelölésekkel az előbbi ábra szerint:

$$\begin{aligned} AA_1 &= y_1, & PP_1 &= \eta, & BB_1 &= y_2 \\ OA_1 &= x_1, & OP_1 &= \xi, & OB_1 &= x_2 \end{aligned}$$

és:

$$\frac{AP}{PB} = \lambda.$$

Ha a P ponton át az X tengellyel párhuzamos MN egyenest vonjuk, akkor az AMP és BNP hasonló háromszögek keletkeznek, melyekből:

$$MA : BN = AP : PB.$$

De: $MA = MA_1 - AA_1 = PP_1 - AA_1 = \eta - y_1$.

Éppen így: $BN = BB_1 - NB_1 = BB_1 - PP_1 = y_2 - \eta$ tehát:

$$\frac{\eta - y_1}{y_2 - \eta} = \lambda$$

és ebből, ha ezt az egyenletet η -ra megoldjuk, azt találjuk, hogy:

$$\eta = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Egészen hasonló módon kapjuk azt is, hogy :

$$\xi = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

tehát azon P pont koordinátái, mely az (x_1, y_1) , (x_2, y_2) pontok között λ viszony szerint osztja ;

$$\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Példák : 1. Az A és B köz felező pontjának koordinátái (mint-hogy $\lambda=1$) :

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

2. Az AB közt 3 egyenlő részre osztó pontok koordinátái (mint-hogy az egyiknél $\lambda=\frac{1}{2}$, a másiknál $\lambda=2$) :

$$\frac{2x_1 + x_2}{3}, \frac{2y_1 + y_2}{3} \text{ és } \frac{x_1 + 2x_2}{3}, \frac{y_1 + 2y_2}{3}.$$

134. Három pont által meghatározott háromszög területe.

Két pont adott koordinátáiból meghatározhatjuk a két pont távolságát. Most három pont adott koordinátáiból ki akarjuk számítani e három pont által alkotott háromszög területét. Legyenek

A pont koordinátái x_1, y_1 ,

B » » x_2, y_2 ,

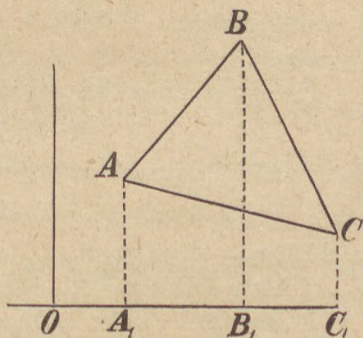
C » » x_3, y_3 .

ABC háromszög területe előállítható az ABB_1A_1 , BCC_1B_1 , ACC_1A_1 trapézok területeiből.

Egyanis : $ABC = ABB_1A_1 + BCC_1B_1 - ACC_1A_1$.

Az ábrából közvetlenül látjuk, hogy az ABB_1A_1 trapéz alapvonalai y_1 és y_2 , magassága pedig $x_2 - x_1$, tehát

$$ABB_1A_1 = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{2}.$$



14. ábra.

Éppen így :

$$BCC_1B_1 = \frac{(x_3 - x_2)(y_3 + y_2)}{2}$$

és végre :

$$ACC_1A_1 = \frac{(x_3 - x_1)(y_3 + y_1)}{2}$$

tehát ABC háromszög területe :

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_1 + y_2) + (x_3 - x_2)(y_3 + y_2) - (x_3 - x_1)(y_3 + y_1)] \\ &= \frac{y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)}{2} \end{aligned}$$

Feladatok.

1. Az $(5, 11)$ és $(-3, 5)$ pontok távolsága :

$$d = \sqrt{(5+3)^2 + (11-5)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10.$$

2. Számítsuk ki a következő 3 pont által meghatározott háromszög oldalainak hosszait (2 tizedesig) $(5, -3)$, $(11, 4)$, $(15, -8)$.

3. Mekkora az oldalai ennek a háromszögnek $(-4, -3)$, $(2, 5)$, $(6, 7)$.

4. A P_1 pontnak, melynek koordinátái $(5, 2)$, távolsága egy második P_2 ponttól, melynek abszcisszája 2, egyenlő 5 hosszegységgel. Mily nagy a P_2 ordinátája ?

Ha ezt az ismeretlen ordinátát egyelőre y -nal jelöljük, akkor

$$(5-2)^2 + (2-y)^2 = 25.$$

Ez másodfokú egyenlet az y meghatározására rendezett alakban :

$$y^2 - 4y - 12 = 0$$

és ebből $y_1 = -2$ és $y_2 = 6$.

Tehát a feladatnak két pont felel meg : $(2, -2)$ és $(2, 6)$.

5. Az előbbi feladat többi adatainak megtartása mellett, legyen a P_1P_2 távolság két hosszegység.

Akkor az egyenlet :

$$\begin{aligned} (5-2)^2 + (2-y)^2 &= 4 \\ y^2 - 3y + 9 &= 0, \end{aligned}$$

amelyből $y = 2 \pm \sqrt{-5}$; tehát az y -nak csak képzetes értékei felelnek meg. Ez természetesen annyit jelent, hogy a feladatnak megfelelő pont nem létezik, mert az y -nak, mely mint ordináta értelmezendő, valósnak kellene lennie.

5a. P_1 pont koordinátái: $(a_1 \ b_1)$; P_2 pont abszcissája a_2 . Mekkora az ordinátája, ha P_1P_2 távolság d hosszegység?

6. Micsoda pont az, mely az $(1, 3)$, $(2, 5)$ és $(-1, 2)$ által jellemzett 3 ponttól egyenlő távolságban fekszik?

Ha a keresett pont koordinátáit x és y -nal jelöljük, az adatokat a következő egyenletek által lehet kifejezni:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = (x-2)^2 + (y-5)^2$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2.$$

A rendezésnél x^2 és y^2 kiesik és lesz:

$$2x + 4y = 19$$

$$4x + 2y = 5.$$

Ebből pedig: $x = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{11}{2}$, tehát a keresett pont: $\left(-\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

6a. Határozzuk meg azon pont koordinátáit, mely az $(a_1 \ b_1)$, $(a_2 \ b_2)$ $(a_3 \ b_3)$ pontoktól egyenlő távolságra van!

7. Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A: (x_1 \ y_1)$, $B: (x_2 \ y_2)$, $C: (x_3 \ y_3)$. Felezzük meg az AB egyenest. Legyen a felező pont M . Melyek az M koordinátái?

Határozzuk meg a CM egyenesen azt a P pontot, melyre nézve

$$\frac{CP}{PM} = 2.$$

8. Felezzük meg most a BC egyenest N -ben és határozzuk meg azon Q pont koordinátáit, melyre nézve: $\frac{AQ}{QN} = 2$ és végre felezzük meg az AC egyenest L -ben és határozzuk meg azon R pont koordinátáit, melyre nézve $\frac{BR}{RL} = 2$. Az ily módon meghatározott P , Q és R pontok egybeesnek; tehát *számítással* azt a geometriai tételt bizonyítottuk be, hogy a háromszög oldalfelezői egy pontban metszik egymást.

9. Legyen adva 4 pont: $A: (x_1 \ y_1)$, $B: (x_2 \ y_2)$, $C: (x_3 \ y_3)$, $D: (x_4 \ y_4)$. Felezzük meg az AC és BD átlókat R és S pontokban. Határozzuk meg az RS felező pontjának G -nek koordinátáit!

10. Felezzük meg az előbbi feladatban adott négyszög oldalait. Legyen AB felezőpontja K , BC -é L , CD -é M és DA -é N . Határozzuk meg a KM és LN felezőpontjait. Legyen KM -é P , az LN -é Q . Felezzük meg a PQ egyenest is! Minő geometriai tételt fejez ki a 9. és 10. feladatok megegyező eredménye?

11. A legyen az X tengelyen (koordinátái tehát $\xi, 0$), B az Y tengelyen (koordinátái $0, \eta$). Határozzuk meg az AB távolság felező pontját (M) és mutassuk meg, hogy M -nek a kezdőponttól való távolsága éppen félakkora mint AB .

12. Mekkora a területe annak a háromszögnek, melynek csúcsai: $(3, -2)$, $(5, 3)$, $(7, -4)$.

13. Mekkora a területe annak a háromszögnek, melynek csúcsai: $(-\frac{1}{2}, -2\frac{1}{3})$, $(3\frac{1}{2}, 2)$, $(5, -2\frac{1}{2})$.

14. Valamely háromszög csúcsai: $A:(x_1 \ y_1)$, $B:(x_2 \ y_2)$, $C:(y_3 \ y_3)$. Az oldalait megfelezzük és a felező pontokat összekötjük. Mekkora az így keletkezett háromszög területe?

15. Valamely háromszög csúcsai: $A:(x_1 \ y_1)$, $B:(x_2 \ y_2)$, $C:(x_3 \ y_3)$. A 7. és 8. feladatokban meghatározott P , Q és R pontok (melyek összeesnek) koordinátái: $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.

Mutassuk meg, hogy

$$3(\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2) = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2.$$

16. Éppen így mutassuk meg, hogy ha egy négyszög csúcsai: $A:(x_1 \ y_1)$, $B:(x_2 \ y_2)$, $C:(x_3 \ y_3)$, $D:(x_4 \ y_4)$ és a 9. feladatban meghatározott G pont koordinátái: $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$, $\frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$, akkor:

$$4(\overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + \overline{GD}^2) = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2.$$

17. Valamely háromszög csúcsainak koordinátái: $A:(x_1 \ y_1)$, $B:(x_2 \ y_2)$, $C:(x_3 \ y_3)$. Határozzuk meg P pontot az AB egyenesen úgy, hogy $\frac{AP}{PB} = \lambda$, éppen így Q pontot a BC egyenesen úgy, hogy $\frac{BQ}{QC} = \lambda$ és R pontot az AC egyenesen úgy, hogy $\frac{CR}{RA} = \lambda$ legyen, és számítsuk ki a PQR háromszög területét.

18. Határozzuk meg azon pont koordinátáit, amely az $(1, 0)$, $(1, -1)$ és $(-1, +1)$ pontoktól egyenlő távolságra van.

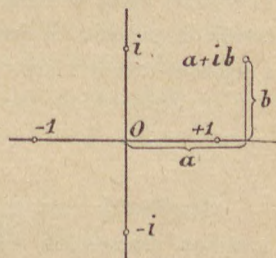
135. **Komplex számok geometriai ábrázolása.** Mikor a komplex számot legelőször bevezettük, említettük, hogy nem

mondhatunk olyan tárgyi kört, amelynek jellemzésére a komplex számok szolgálnának; de most már tudunk a geometriai szemléletből vett oly tárgyi kört kijelölni, melyen a számviszonyokat komplex számok jellemzik.

A complex (általánosságban képzetes) szám $a+ib$, két valós szám a és b által teljesen meg van határozva. E számok egymással föl nem cserélhetők, mert $b+ai$ az $a+ib$ -től különböző szám. Ha adva vannak a valós számok a és b , akkor már meg van határozva az $a+bi$ komplex szám. Az a és b számok azonban a sík egy pontját is meghatározzák. Ha ugyanis felvesszük a koordinátarendszert és a -t tekintjük a P pont *abscissájának*, b -t pedig *ordinátájának*, akkor ezáltal P pont teljesen meg van határozva. Az $a+ib$ szám és az (a, b) koordináták által meghatározott P pont vonatkoztatása kölesönös; mindegyik teljesen meghatározza a másikat. Ha megadjuk az $a+ib$ complex számot, akkor meghatározhatjuk a P pontot, melynek koordinátái a , b , és fordítva, ha meg van adva a P pont, ismeretes $a+ib$. A sík összes pontjainak megfelelnek az összes komplex számok és viszont.

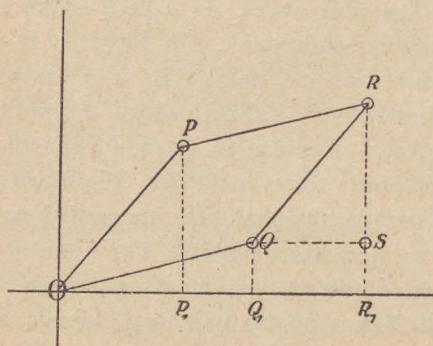
Könnyű belátni, hogy e megállapításnál a valós számok geometriai ábrázolása ugyanaz, mint előbb; mert $a+ib$ akkor és csak akkor valós, ha $b=0$. Ha $b=0$, a megfelelő pont az X tengelyen fekszik és viszont; hiszen b épen a pont távolságát jelenti az OX vonaltól. A valós számoknak tehát az X tengelyen levő pontok felelnek meg és viszont. Éppen ezért az X tengelyt sokszor *valós számvonalnak* is nevezzük. Ha pedig $a=0$, akkor az $a+bi$ szám tiszta képzetes szám. Ilyen alakú: bi . Vajjon melyik pont felel meg e számnak? Minthogy $a=0$, a keresett pont koordinátái: $(0, b)$, tehát ez a pont az Y tengelyen van a kezdőponttól b távolságra. A tiszta képzetes számoknak megfelelő pontok mértani helye az Y tengely, melyet éppen ezért a *tisztán képzetes számok tengelyének* is nevezünk.

Önként feltűnik, hogy az i és $-i$ nek az Y tengelyen ama pontok felelnek meg, melyeknek távolsága a kezdő ponttól a hosszegységgel egyenlő, az egyik esetben pozitív, a másik esetben negatív irányban véve.



15. ábra.

Minden algebrai művelet, melyet komplex számokon végzünk, ezen alapon geometriai értelmezést nyer. Így a legegyszerűbb esetet említve, ama föladat, hogy az $a+bi$ és $c+di$ számok összegét $a+c+(b+d)i$ -t képezzük, geometriai értelmezésben a következő lesz: az adott (a, b) és (c, d) pontokból az $(a+c, b+d)$ pontot szerkeszteni. Ábrázoljuk e végből a P pontot, melynek koordinátái: (a, b) és a Q pontot, melynek koordinátái (c, d) . Alkossuk meg az $OPRQ$ paralelogrammot.



16. ábra.

Azonnal beláthatjuk, hogy e paralelogramm R csúcsának abszcisszája: $a+c$, ordinátája: $b+d$.

Ugyanis QSR háromszög egybevágó OP_1P -vel (miért?) és így $QS=a$, $RS=b$, tehát $OR_1=a+c$, $RR_1=b+d$.

Az R pont tehát az $a+bi$ és $c+di$ komplex számok összegét ábrázolja.

Feladat: 1. Hogyan lehetne ábrázolni e három komplex szám összegét: a_1+b_1i , a_2+b_2i , a_3+b_3i ?

2. Szerkesszük meg azt a pontot, mely e négy komplex szám összegét ábrázolja: a_1+b_1i , a_2+b_2i , a_3+b_3i , a_4+b_4i .

3. Szerkesszük meg azt a pontot, mely e három szám összegét ábrázolja: $1+i$, 2 , $3+2i$.

A komplex számok részletes elmélete, melynek fontos segédeszköze a most említett és a legegyszerűbb esetben példaképpen bemutatott geometriai ábrázolás, az algebrai műveletek értelmezését és érvényét kiterjeszti újból a komplex számokra, úgy amint ezt eddig fokként tettük a negatív és irracionális számokra vonatkozólag. Az algebra e fejezete már e könyv keretén kívül esik.

Feladatok.

Szerkesszük meg azokat a pontokat a síkon, melyek a következő komplex számoknak felelnek meg (a következő komplex számokat ábrázolják):

1. $3 + 4i$. 2. $2 - 3i$. 3. $1 + 2i$. 4. $-1 + i$. 5. $-3 + 5i$.
 6. $\frac{1+i}{2}$. 7. $-3i$. 8. $2i$. 9. $3-i$.

Határozzuk meg azokat a pontokat, melyek e komplex számokat ábrázolják:

10. $\sqrt{2} + i$. 11. $1 + i\sqrt{3}$. 12. $1 - i\sqrt{3}$.

13. Határozzuk meg azokat a pontokat, melyek e számokat ábrázolják: $3 + 2i$, $5 + 4i$ és azt, mely e kettő összegét ábrázolja.

14. Ha P pont ábrázolja az $a + bi$ komplex számot, Q pedig a $c + di$ komplex számot, szerkesztük meg azt a pontot, mely e kettő összegét $a + c + i(b + d)$ ábrázolja. Szerkesztük meg azt, mely e kettő különbségét $a - c + i(b - d)$ ábrázolja. (L. a 16. ábrát.)

15. Határozzuk meg azt a P pontot, mely a $-1 + i\sqrt{3}$ komplex számot ábrázolja. Mekkora az OP ? [Felelet: $OP = \sqrt{1+3} = 2$.] Mekkora a PO és az X tengely hajlásszöge? [Jelöljük ezt a szöveget φ -vel, akkor

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \varphi = -\frac{1}{2}; \quad \text{tehát } \varphi = 120^\circ. \quad \text{Eszerint tehát } -1 + i\sqrt{3}$$

így is írható: $-1 + i\sqrt{3} = 2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$.] Irjuk fel hasonló

alakban az $1 + i$, az $1 - i$, a $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ komplex számokat!

16. Határozzuk meg azt a P pontot, mely a $3 + 4i$ komplex számot ábrázolja és számítsuk ki az OP távolságot, továbbá az OP -nek az X tengelyhez való hajlásszögét. Irjuk fel ezután a $3 + 4i$ komplex számot a 15. feladatban megállapított trigonometriai alakban. Tegyük ugyanezt a $3 - 4i$, $4 + 3i$, $4 - 3i$ komplex számokkal.

17. Egy komplex szám (trigonometriai alakban) $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Mekkora a valós része (a)? mekkora a képzetes része (b)?

18. Mutassuk meg, hogy e két komplex szám: $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ és $r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ szorzata: $rr_1[\cos(\varphi + \varphi_1) + i \sin(\varphi + \varphi_1)]$. Fejezzük ki szavakkal a szorzás ezen szabályát. [Könnyebb kifejezhetőség végett nevezzük az r -et (illetőleg r_1 -et) a komplex szám *modulusának* és φ , illetve φ_1 szögeket a komplex szám *argumentumának* (irányszög).]

19. Mutassuk meg, hogy

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^2 = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

Fejezzük ki szavakkal a négyzetreemelés szabályát.

20. Mutassuk meg, hogy

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^3 = r^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) \text{ s. í. t.}$$

Fejezzük ki a hatványozás szabályát szavakkal!

136. Függvény. Grafikus ábrázolás. Minden algebrai kifejezésnek, mely adott számokból és betűkből van összerakva, értéke általánosságban változik, amint a benne előforduló betűk számértékét változtatjuk. Így pl.

$$2x + 3$$

számértéke egymás után: $-3, -1, 1, 3, 5, 7$;

amint a benne előforduló x : $-3, -2, -1, 0, 1, 2$, s. ú. t.

Hasonlóképpen áll a dolog, midőn a kifejezés két vagy több (határozatlan) betűt tartalmaz. Ezt az általánosabb esetet itt még nem tárgyaljuk.

Az efféle kifejezések értéke attól *függ*, hogy az x értéket mikép állapítjuk meg és éppen ezért az ily kifejezéseket az x *függvényeinek* mondjuk. Ilyenek pl.

$$\frac{3+5x}{4+6x}, \quad \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}, \quad \sqrt{1+2x}, \text{ s. ú. t.}$$

A harmadik alaknál az x minden egyes értékének, a függvény ($\sqrt{1+2x}$) két értéke felel meg.

E kifejezésekben x értékét tetszés szerint változtathatónak képzeljük, míg a többi előforduló számérték meghatározott, változatlan érték és éppen ezért az x -et *változónak* (*variábilis*) nevezzük.

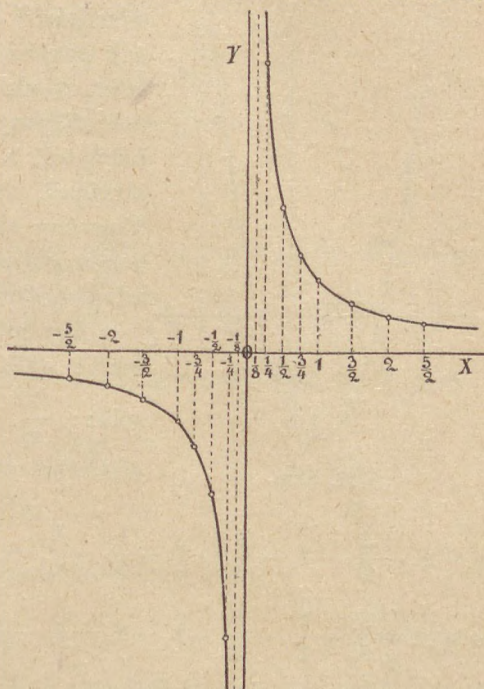
Igen gyakran általánosabb függvényalakot vizsgálunk, mint pl.

$$\frac{a+bx}{c+dx}, \quad ax^3+bx+c, \text{ s. ú. t.,}$$

melyekben az a, b, c, d az előbb kiírt számok helyén állanak és egyszersmindenkorra megállapított, változatlan értékeket jelentenek, és e jelentésben *állandóknak* (*constans*) neveztetnek.

Az állandók jelölésére többnyire a betűsor első betűit használjuk ($a, b, c, \dots$), a változókéra pedig az utolsókat (u, v, x, y, z).

A változó értéke mindenkor meghatározza a függvény értékét (gyökvonásnál, többértékű műveletnél értékesoportját). A változó és a függvény számértékei közötti összefüggést úgy szoktuk feltüntetni, hogy táblázatot állítunk elő, melynek egyik rovatába írjuk az x változó egyes számértékeit és a másik rovatba a függvény hozzá tartozó számértékét. Ilyen táblázatos összeállítást már ismerünk. Ilyen pl. a $\log x$, $\log \sin x$, $\sin x$ stb. táblázata. A változónak minél több értékére ismerjük a függvény hozzá tartozó értékét, annál jobban jellemezzetük a függvény által kifejezett szám törvény, a függvény *menete* ama táblázat által, melyben két rovatban egymás mellett írjuk a változó és függvény értékét. Az ily táblázatazonbansoha sem teljes, mert akárhány értékre nézve végezzük is a számítást, mindig van a táblázatárain túl és a tábla egyes számai közt fekvő számtalan érték, melyre nézve a



17. ábra.

számítást nem végeztük. (Igy pl. a logarithmus-táblánál is interpolatiót kellett végeznünk, ha 4-nél többjegyű szám logarithmusát akartuk meghatározni.)

A táblázatos összehasonlítás azonkívül semmikép sem nyújt *átnézetes képet* a függvény menetéről; a táblázatból nem látjuk a függvény értékváltozásainak jellemző *sai*osságait. A függvény menetének ily szemléltető képét a geometriai ábrázolás (grafikus ábrázolás) által nyerjük.

A változó különböző értékeit az OX tengely különböző pontjai által jellemezve, minden egyes pontban az y hozzátar-

tozó értékét fölrakjuk mint ordinátát, és az ordináták végpontjainak összeköttetése által a függvény menetének képét nyerjük egy *görbe vonalban*, melynek pl. emelkedése, illetőleg leszállása

közvetlenül mutatja, hogy az x nagyobbodásával a függvény értéke nagyobbodik-e vagy kisebbedik.

Itt is természetesen csak megközelítésről lehet szó, mert a görbének pontjait is csak véges számmal lehet meghatározni, de ez alakban már többnyire néhány kevés érték feltünteteti a függvény jellemző sajátságait, valamint megfordítva: a függvény alakjából magának a görbének alakját általánosságban megállapíthatjuk.

Igy pl. ha a következő függvényt (17. ábra) akarjuk ábrázolni: $\frac{1}{x}$, elég lesz a következő

értékeket tekintetbe venni:

$$x = \dots -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$$

$$y = \dots -\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -1, -2, -4, -8, 8, 4, 2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \dots$$

Vagy pedig, ha

$$y = x^2 + 2x - 3,$$

hol egymásnak megfelelő értékek:

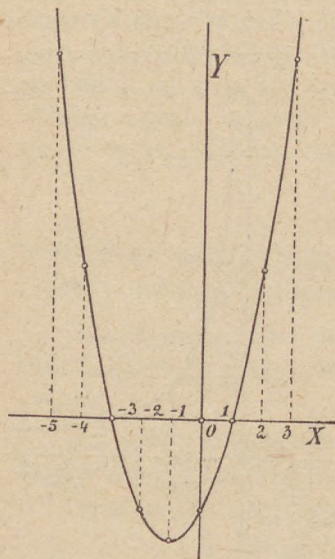
$$x = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.$$

$$y = 12, 5, 0, -3, -4, -3, 0, 5, 12, \text{ s. ú. t.}$$

a 18. ábrát nyerjük.

137. Elsőfokú függvény ábrázolása. Kövessük most részletesebben az ily ábrázolás viszonyait a legegyszerűbb függvények esetében. Az oly alak, mely az x hatványai szerint rendezhető, és melyben az x legmagasabb hatványa az n -edik, *n-edfokú* egész függvénynek neveztetik, ez tehát:

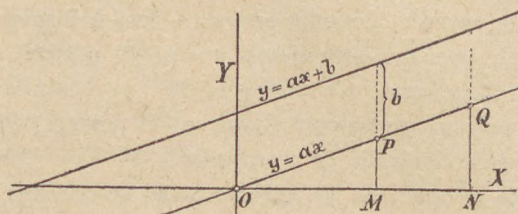
$$A + Bx + Cx^3 + \dots + Nx^n.$$



18. ábra.

Eszerint $y = ax + b$ elsőfokú egész függvény. Könnyű lesz kimutatni, hogy *e függvény menetét ábrázoló vonal mindig egyenes.*

Ezt majdnem közvetlenül belátjuk, ha $b = 0$; mert akkor az $y = ax$ által jellemzett vonal átmegy a koordináta-tengelyek



19. ábra.

metszőpontján, a kezdőponton (mert ha $x = 0$, $y = 0$). Ha most PM -et úgy határozzuk meg, hogy

$$PM = a \cdot OM,$$

akkor az O és P -n keresztül menő egyenes bármely Q pontjára nézve

$$QN : ON = PM : OM,$$

vagyis :

$$QN = \frac{PM}{OM} ON,$$

azaz : (ha x és y ezen egyenes bármelyik pontjának koordinátái)

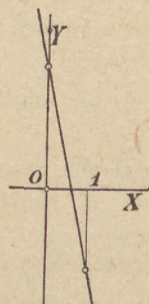
$$y = ax.$$

Az $y = ax$ -nak megfelelő egyenesből megkapjuk az $y = ax + b$ -nek megfelelő görbét, ha minden ordináta hosszát b -vel megtoldjuk és világos, hogy ezáltal újból egyenest, még pedig az előbbivel párhuzamos egyenest nyerünk.

Eszerint az $ax + b$ alakú függvénynél elég két értéket kiszámítani, a megfelelő pontokon átmenő egyenes mindenkor ábrázolja a függvény menetét. Így pl. ha

$$y = -5x + 3$$

az x és y két összetartozó értéke $(0, 3)$ $(1, -2)$ és így a függvény menetét a 20. ábra mutatja.



20. ábra.

Feladatok.

1. Szerkesszük meg azt az egyenest, mely az $y = \frac{x}{2} - 3$ függvény menetét ábrázolja.

2. Melyik egyenes ábrázolja az $y = -3x + 1$ függvény menetét?

3. Melyik egyenes ábrázolja az $y = x + 5$ menetét és melyik az $y = -x + 3$ függvényét?

4. Valamely egyenes keresztülmegy e két ponton $(2, 7)$, $(-1, 2\frac{1}{2})$. Melyik függvényt ábrázolja ez az egyenes?

Megoldás menete: Ez az egyenes mindenesetre egy ilyen alakú elsőfokú függvényt ábrázol:

$$y = ax + b,$$

ahol a és b még ismeretlen számértékek. Az egyenes keresztülmegy a $(2, 7)$ ponton. Ez azt jelenti, hogy ha x számértéke 2, akkor y -é 7; azaz

$$7 = 2a + b.$$

Éppen így abból, hogy ez az egyenes keresztülmegy a $(-1, 2\frac{1}{2})$ ponton, következik, hogy:

$$2\frac{3}{2} = -a + b.$$

Az a és b meghatározására tehát két egyenletünk van, melyekből:

$$a = \frac{1}{2}, b = 4.$$

Az adott pontokon átmenő egyenes tehát az

$$y = \frac{1}{2}x + 4$$

elsőfokú függvényt ábrázolja.

5. Melyik függvényt ábrázolja az az egyenes, mely keresztülmegy a $(3, -1)$ és $(-3, \frac{1}{3})$ pontokon?

6. Melyik függvényt ábrázolja az az egyenes, mely keresztülmegy a kezdőponton és ezen a ponton $(7, -3)$?

7. Valamely egyenes az $y = 7x - 3$ függvényt ábrázolja. Mekkora ezen egyenes azon pontjának abszcisszája, melynek ordinátája 18?

8. Egyik egyenes az $y = x - 3$ függvényt ábrázolja, egy másik pedig az $y = \frac{x}{2} - 5$ függvényt. Határozzuk meg azon pont koordinátáit, amelyben ez a két egyenes egymást metszi. (A metszéspont koordinátái ξ , η kielégítik mindkét egyenletet, tehát ξ és η meghatározására e két egyenletünk van:

$$\eta = \xi - 3, \quad \eta = \frac{\xi}{2} - 5.$$

9. Határozzuk meg azon pont koordinátáit, amelyben az $y = 3x - 5$ függvényt ábrázoló egyenes az X tengelyt metszi. Határozzuk meg azon pont koordinátáit, amelyekben ez az egyenes az X tengelyt metszi.

10. Határozzuk meg az $y = ax + b$ függvényt ábrázoló egyenesnek az X és Y tengelyekkel való metszőpontjait!

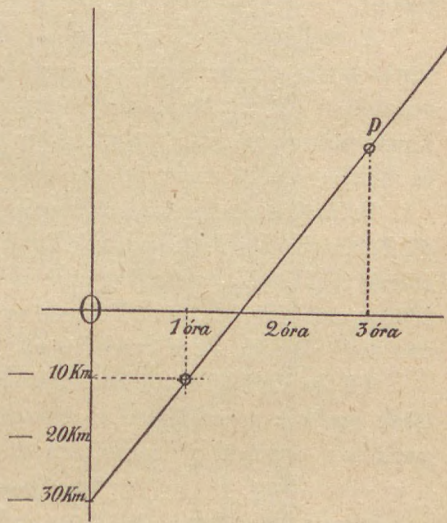
11. Az elsőfokú függvény grafikus ábrázolását felhasználják a vasutasok a grafikus menetrend készítésénél. Ez a grafikus menetrend sokkal áttekinthetőbb, mint a közönséges menetrend és éppen ezért a lokomotívvezetők mindig ezt használják. Hogy ezt megérthessük, előbb az egyenletes mozgás grafikus ábrázolását mutatjuk be néhány példán. Ábrázoljuk az éjjeli 12 órától eltelt időt az X tengelyen, pl. olyformán, hogy minden óra 12 mm, azaz minden 5 perc 1 mm legyen. Ha már most a vonat éjféli utáni a órákor a kiinduló helytől b km távolságra van, és megállapodunk abban, hogy 1 km-t például 1 mm-rel ábrázoljuk, akkor e vonat helyzetét azon ponttal ábrázoljuk, melynek abszcisszája az a órának megfelelő $12a$ mm és ordinátája a b km-nek megfelelő b mm. Így pl., ha éjjel 2 órákor 40 km távolságban van, akkor helyzetét az a pont ábrázolja, melynek abszcisszája 24 mm és ordinátája 40 mm.

Ha már most a vonat egyenletesen mozog (amit átlagosan mindig fölvehetünk) és sebessége c (óránként c km utat tesz meg) és éjféltkor a kiinduló ponttól már b km-nyire van, akkor x óra múlva a kiinduló helytől

$$cx + b$$

km-nyire lesz; jelöljük ezt a távolságot y -nal (minden km-t milliméternek ábrázolva), akkor a vonat haladását az

$$y = cx + b$$



21. ábra.

képlet szolgáltatja. És ha x ezen elsőfokú függvényét grafikusán ábrázoljuk, akkor egyenes vonalat kapunk, mely a vonat haladását feltünteti. [Az ábrában $c=20$ km, $b=-30$ km vétetett.] Ez a kép igen szemléletes. Ha meg akarjuk tudni, hogy 3 órakor hol van a vonat, csak megkeressük ezen az egyenesen azt a pontot, melynek abszcissája $3.12=36$ mm. Ezen P pont magassága (ordinátája) adja meg a vonat távolságát a kiinduló ponttól (minden mm 1 km-t ábrázol). Ábrázoljuk azon vonat menetét, melyre nézve: $\alpha)$ $b=10$ km, $c=30$ km; $\beta)$ $b=20$ km, $c=40$ km; $\gamma)$ $b=50$ km, $c=25$ km. (Ez a vonat a kezdőpont felé halad.)

A mellékelt 22-ik ábrában feltüntettük a szombathely-fehringi vonat grafikus menetrendjének egy szakaszát. A vastag vonal gyorsvonalat, a vékonyabb személyvonalat, az egész vékony tehervonalat, a pontozott vegyes vonalat stb. jelent. Az időt déli 12-től éjfélig vettük és minden köz 10 perccel jelent.

Próbáld elolvasni erről a képről, hogy mikor indul Szombathelyről Fehringbe a délutáni gyors? Mikor érkezik a fehringi gyors? Mikor érkezik Fehringbe az estéli gyors? Hol találkozik az 1303-as gyors az 1308-as személyvel? Hol találkozik ez a gyorsvonal az 1394-es tehervonattal? Meddig áll Körmenden az 1394-es tehervonal? stb.

12. Az elsőfokú függvény ábrázolását még a két ismeretlenű egyenletek grafikus megoldására is használhatjuk. Ábrázoljuk (milliméter papiroson, egységül pl. a centimétert véve) az

$$5x - 8y = 18$$

egyenletet! [Evégből az $y = \frac{5}{8}x - \frac{18}{8}$ elsőfokú függvényt ábrázoljuk pl. oly módon, hogy két pontját meghatározzuk. Legegyszerűbb lesz, ha $x=0$ tesszük, ekkor $y = -\frac{18}{8} = -2\frac{1}{4}$ és ha $x=8$ tesszük, ekkor $y = 5 - 2\frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$. E két pontot összekötő egyenes ábrázolja az $5x - 8y = 18$ egyenletet.] Hasonlóképpen ábrázoljuk a

$$3x - 5y = 11.$$

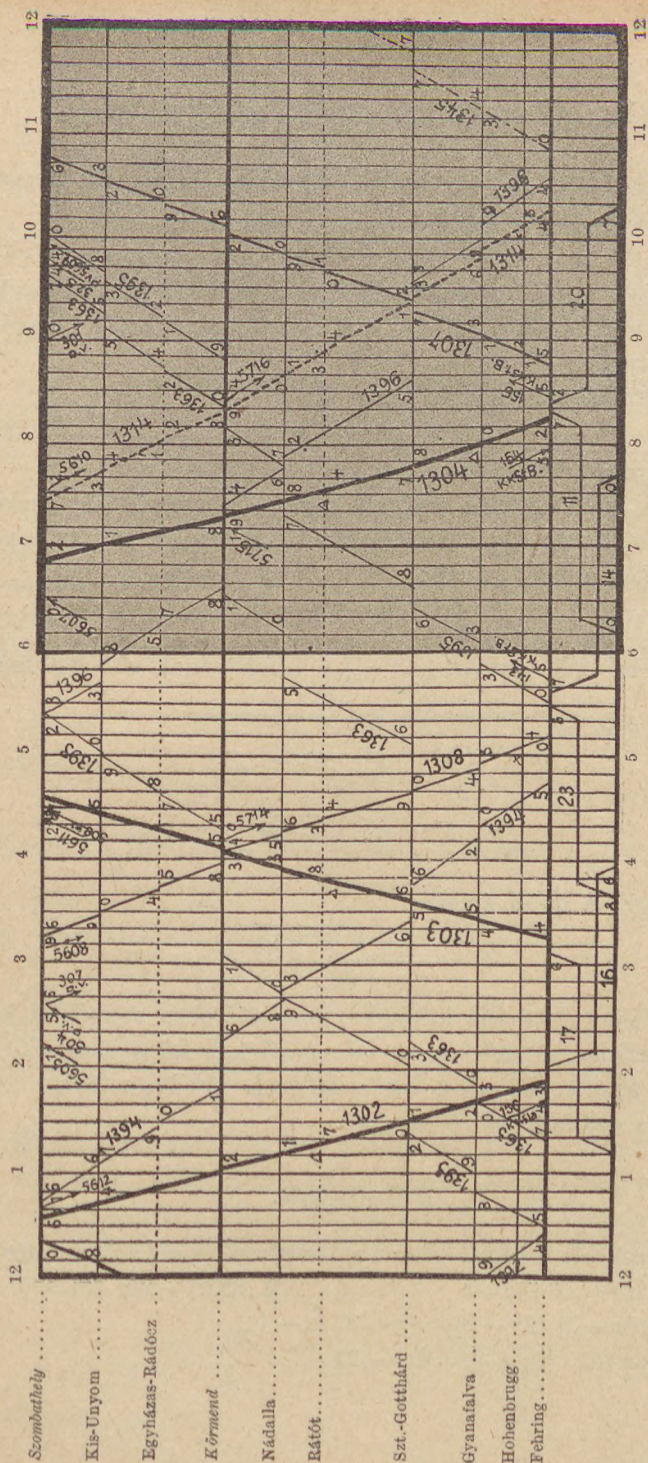
egyenletet. E két egyenes metszéspontjának koordinátáit lemérjük. Azt találjuk, hogy e koordináták: 2, és -1 (cm), tehát a két egyenlet megoldása:

$$x = 2, y = -1.$$

Oldjuk meg grafikusán a következő egyenletrendszereket:

$$\alpha) 3x + 4y = 7, 5x - 2y = 3. \quad \beta) 8x - 3y = 41, 10x - 7y = 35$$

Oldjuk meg ezeket az egyenletrendszereket számítással is!



22. ábra.

XIX. Másodfokú egész függvények.

138. A másodfokú egyenletek megoldása. A másodfokú egész függvény általános alakja,

$$ax^2 + bx + c \dots\dots\dots 1.$$

hol a , b és c adott számértékeket jelentenek. E függvény vizsgálatánál első kérdésünk, hogy x mely értékeinél lesz e függvény értéke zérus.

E kérdésre megfelelünk az

$$ax^2 + bx + c = 0 \dots\dots\dots 2.$$

egyenlet megoldása által.

Ezen már egyszer tárgyalt feladatok megoldását csekély módosítással még egyszer áttekintjük. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát a -val:

$$a^2x^2 + abx + ac = 0.$$

Az első két tag az $\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2$ kifejtésének első két tagja, tehát az egyenlet baloldalát így is írhatjuk:

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4} = 0,$$

és így :

$$ax + \frac{b}{2} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2};$$

tehát végre a gyök értéke :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

hol a gyökjel alatt álló kifejezés, meghatározza a gyökök jellegét. Eszerint az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek két gyöke valós, ha $b^2 - 4ac$ pozitív, képzetes, ha e kifejezés értéke negatív; végre két gyöke egyenlő, ha $b^2 - 4ac = 0$.

Feladatok.

Állítsuk elő e képlet szerint a következő egyenletek gyökeit:

1. $2x^2 + 7x + 3 = 0$.

2. $110x^2 - 21x + 1 = 0$.

3. $(3x - 5)(2x - 5) = (x + 3)(x - 1)$.

4. $(x + 1)(2x + 3) = 4x^2 - 22$.

$$5. (2x-3)^2 = 8x.$$

$$6. (5x-3)^2 - 7 = 44x + 5.$$

$$7. \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}.$$

$$8. \frac{6}{x} + \frac{x}{6} = \frac{5(x-1)}{4}.$$

$$9. \frac{5}{x+2} + \frac{3}{x} = \frac{14}{x+4}.$$

$$10. \frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{2(x+3)}{x-3}.$$

$$11. (ax-b)(bx-a) = c^2.$$

$$12. \frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = \frac{2c}{x-c}.$$

139. A másodfokú függvény felbontása tényezőkre. Amint az előbbiekből látjuk, a következő képlet

$$ax^2 + bx + c = \frac{\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4}}{a}$$

azonosságot fejez ki, azaz ha a jobboldalon jelzett műveleteket végrehajtjuk, a baloldalon álló kifejezést kapjuk. A jobboldalon álló kifejezés számlálójában két négyzet különbsége van: u. i.

$$\begin{aligned} & \frac{b^2 - 4ac}{4} \\ \text{tekinthető: } & \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \end{aligned}$$

négyzetének. Két négyzet különbsége pedig az

$$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$$

formula szerint két tényezőre bontható; tehát:

$$\begin{aligned} & \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4} = \\ & = \left(ax + \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}\right) \left(ax + \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}\right). \end{aligned}$$

Ez a jobboldalon álló kifejezés számlálója. — A jobboldalon álló kifejezést ebből megkapjuk, ha ezt a -val még elosztjuk; a -val úgy osztunk, hogy mindegyik tényezőt elosztjuk a -val (ekkor a^2 -tel osztottunk) és azután még a -val szorzunk; tehát:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right).$$

Ha az $ax^2+bx+c=0$ egyenlet két gyökét x_1 és x_2 -vel jelöljük, például:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ és } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

akkor tehát e jelöléssel:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2) \dots\dots\dots 3.$$

Ez mutatja, hogy a másodfokú egész függvény a megfelelő egyenlet megoldása után elsőfokú tényezőkre bontható. Világos, hogy a 3. is identitás, azaz ha x_1 és x_2 helyett kiírjuk részletes értéküket és szorzunk, megkapjuk a baloldali kifejezést.

Az x_1 és x_2 gyököknek megfelelő $x-x_1$ és $x-x_2$ kifejezéseket az egész függvény gyöktényezőinek nevezzük, és a 3. mutatja, hogy a másodfokú egész függvény két gyöktényezőjének szorzatával egyenlő, ha e szorzathoz a változó legmagasabb hatványának együtthatóját még mint együtthatót hozzácsatoljuk.

Igy pl. a $10x^2-11x+3=0$ egyenlet gyökei: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{5}$, tehát ezen tétel szerint az egyenlet baloldala a következőképen bontható fel elsőfokú tényezőkre:

$$10x^2-11x+3=10\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{5}\right).$$

Feladatok.

Bontsuk fel elsőfokú tényezőkre a következő kifejezéseket:

$$1. x^2-5x+6. \quad 2. x^2-7x+12. \quad 3. x^2-(a+b)x+ab.$$

$$4. a^2-9a+14. \quad 5. a^2-\frac{5a}{2}+1.$$

140. A másodfokú egyenletnek csak két gyöke van. A másodfokú egész függvénynek ily előállítás, mint gyöktényezők szorzata, igen fontos. Így többek közt mutatja, hogy az x_1 és x_2 -vel jelölt számértékeken kívül más gyöke nem lehet a másodfokú egyenletnek.

Mert ha ilyen volna k , akkor x helyébe k -t téve, a 3.-ban lenne

$$0=a(k-x_1)(k-x_2);$$

mert hisz ama föltevés, hogy k gyök, azt mondja, hogy :

$$ak^2 + bk + c = 0 ;$$

de szorzat csak úgy lehet zérus, ha valamely tényezője zérus. Azonban a , az ismeretlen legmagasabb hatványának együtthatója, nem zérus, és így az eltűnő tényező vagy $k - x_1$, vagy $k - x_2$, azaz kell, hogy a gyöknek föltételezett k vagy x_1 vagy x_2 -vel legyen egyenlő.

Az egyenlet többtagújának 3. alatti alakja azt is mutatja, hogy a két gyök egyenlősége tulajdonképen mit jelent. A másodfokú egész függvénynek valóban mindig két gyök-tényezője van. Ha az x_1 és x_2 -vel jelölt számértékek egyenlők, a két gyöktényező is egyenlő lesz, és mindegyik ugyanazt a gyököt szolgáltatja. Ekkor azt mondjuk előbbi megállapításaink szerint, hogy *az egyenletnek két egyenlő gyöke van*; de látni most, hogy ezt az állítást egész szabatosan úgy fogalmazhatjuk, hogy *a megfelelő másodfokú egész függvénynek két gyöktényezője egyenlő*.

Az a , b és c oly értékei mellett, melyekre nézve a két gyöktényező egyenlő, vagyis midőn $b^2 - 4ac = 0$, a másodfokú egész függvény *teljes négyzet* lesz. Mert ekkor mindkét gyök egyenlő és ha ezt x_1 -gyel jelöljük, mindkét gyöktényező $x - x_1$, tehát :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)^2 \\ &= (\sqrt{a} \cdot x - \sqrt{a} \cdot x_1)^2. \end{aligned}$$

Igy pl. $4x^2 - 12x + 9$ teljes négyzet, mert $12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$; négyzet alakja :

$$(2x - 3)^2,$$

hasonlóképpen : $2x^2 + \sqrt{24} \cdot x + 3$, mert $24 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 0$; négyzet alakja :

$$(\sqrt{2} \cdot x + \sqrt{3})^2.$$

Feladatok.

Bontsuk fel elsőfoku tényezőkre a következő másodfokú függvényeket :

1. $x^2 - 5x + 6$.

2. $x^2 - (a + b)x + ab$.

3. $x^2 - 2ax + a^2 - b^2$.

4. $x^2 - ax + ab - b^2$.

5. $c^2x^2 - 2ax + a^2 - b^2$.

6. $x^2 - 2a^2x + a^4 - 1$.

7. $4(x^2 - 1) - 4x + 1$.

8. $6x^2 - 13x + 6$.

9. $x^2 + 2ax + a^2 - a$.

10. $x^2 + 2ax + a^2 - a + b$.

11. $2x^2 + x - 6$.

12. $x^2 - 3ax + 2a^2$.

13. $x^2 - 88x + 1612$.

14. $x^2 + 73x + 780$.

141. A másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti kapcsolat.

Ha az

$$ax^2 + bx + c = 0$$

egyenlet két gyöke x_1 és x_2 , akkor az előbbieket szerint

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

és ha a jobboldalon a szorzást elvégezzük :

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

identitásra jutunk. Ebből következik, hogy

$$bx + c = -a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

az x minden értékénél ; ami csakis úgy lehet, ha egyenkint minden együttható megegyezik e két kifejezésben, azaz :

$$-a(x_1 + x_2) = b,$$

$$ax_1x_2 = c ;$$

vagyis :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} \dots\dots\dots 4.$$

Ez két igen fontos képlet, mely a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közt fennálló kapcsolat kifejezése.

Ha t. i. a , b és c -t az egyenlet első, második és harmadik együtthatójának nevezzük, akkor eszerint :

A két gyök összege nem egyéb, mint a második együttható, osztva az elsővel, és az eredmény ellenkező jellel véve.

A két gyök szorzata pedig a harmadik együttható osztva az elsővel.

E két tétel közvetlenül is igazolható. Minthogy ugyanis

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

a két kifejezés összege és szorzata könnyen megalkotható és ekkor újból a (4.) alatt álló képletekhez jutunk.

A gyökök és együtthatók között fennálló összefüggés képesít bennünket arra, hogy közvetlenül felállítsuk azt a másodfokú egyenletet, melynek megadott gyökei vannak.

Minden másodfokú egyenlet baloldala ugyanis ilyen alakban írható :

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

és ha ennek gyökei : x_1 és x_2 , akkor az előbbieket szerint

$$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2), \quad \frac{c}{a} = x_1 x_2$$

tehát minden másodfokú egyenlet, melynek adott x_1, x_2 gyökei vannak, ilyen alakú :

$$a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2] = 0.$$

Ebből egyúttal azt is látjuk, hogy mindazon másodfokú egyenletek baloldalai, melyeknek gyökei ugyanazok, csakis egy állandó szorzóban különböznek egymástól (az a számértéke lehet más).

Igy pl. azok a másodfokú egyenletek, melyeknek gyökei : 2 és 3, ilyen alakúak :

$$ax^2 - 5ax + 6a = 0.$$

A legegyszerűbbet kapjuk, ha $a = 1$ tesszük. Ez : $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Feladat : Készítsünk olyan másodfokú egyenletet, melynek gyökei :

$\alpha)$ 3 és 4; $\beta)$ $-2, -5$; $\gamma)$ $1+i$ és $1-i$; $\delta)$ $3+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2}$.

142. A gyökök szimmetrikus kifejezései. Az előbbi tételek azt is mutatják, hogy míg általánosságban a másodfokú egyenlet megoldására, vagyis a gyökök meghatározására irracionális művelet, azaz a négyzetgyökvonás szükséges; mégis *vannak a gyökökből összerakott olyan kifejezések, melyeknek értékét az egyenlet együtthatóiból tisztán a négy alapművelet által nyerhetjük.* Ilyen pl. a gyökök összege, mely egyenlő $-\frac{b}{a}$ -val,

a gyökök szorzata, mely $\frac{c}{a}$. Ezeken kívül van még számtalan

más. Ilyen pl. $(x_1 - x_2)^2$. Ha ugyanis a négyzetre emelést elvégezzük,

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$

és ha a jobboldalon $2x_1x_2 - 2x_1x_2$ még hozzáadunk, lesz:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

és minthogy

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ és } x_1x_2 = \frac{c}{a},$$

$$\text{tehát: } (x_1 - x_2)^2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$$

Látjuk tehát, hogy $(x_1 - x_2)^2$ tényleg az egyenlet együtthatóiból tisztán a négy alpművelettel (tehát gyökvonás nélkül) számítható ki.

Ilyenek még például:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

amint ezt az illető kifejezéseknek a jobboldalon álló alakja közvetlenül mutatja.

Igy pl. ha az

$$x^2 + 5x - 7 = 0$$

egyenlet gyökeit α és β -val jelöljük, akkor az α és β értékének előleges meghatározása nélkül is tudjuk, hogy

$$\alpha + \beta = -5, \alpha\beta = -7,$$

$$(\alpha - \beta)^2 = 53, \alpha^3 + \beta^3 = -230,$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{5}{7}.$$

Az itt például fölhozott kifejezéseknek közös jellege az, hogy, épp úgy mint az $x_1 + x_2$ és x_1x_2 -nek, még algebrai alakjuk sem változik, ha az x_1 -et és x_2 -t egymással fölcseréljük. Az ily kifejezésekről azt mondjuk, hogy x_1 és x_2 -re nézve *szimmetrikusak*.

Világos, hogy nem minden, a gyökökből összerakott kifejezés ily jellegű; így pl. maga a *gyökök különbsége*:

$$x_1 - x_2 = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{a},$$

tehát, miként a jobboldal mutatja, nem számítható ki az egyenlet együtthatóiból gyökvonás nélkül.

Érdekes e jellemző különbség okát is megemlíteni. Az egyenletben a gyökök x_1 és x_2 egyenjogúan foglaltatnak; egészen tetszésüinktől függ, hogy melyiket mondjuk elsőnek, melyiket másodiknak. Így tehát ha feladatul tűzöm ki magamnak a gyökök különbségének meghatározását, kell hogy e meghatározás épp úgy vezessen az $x_1 - x_2$, mint $x_2 - x_1$ értékéhez. A meghatározásba tehát okvetlenül belép oly művelet, mely az eredményt kétértékűvé teszi, t. i. a négyzetgyökvonás.

143. A discriminans. Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökeit e képlet szolgáltatta:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A gyökjel alatt álló kifejezéstől

$$b^2 - 4ac\text{-től}$$

függ, hogy a gyökök valósak-e vagy képzetesek. Ezt a kifejezést $-D$ -vel jelöljük és D -t, tehát $4ac - b^2$ kifejezést e másodfokú egyenlet *discriminansának* nevezzük és a gyökök képletéből azonnal következik, hogy (ha a, b, c valós számok)

ha $D < 0$, mind a két gyök valós és különböző,

ha $D = 0$, a két gyök valós és egyenlő,

ha $D > 0$, a két gyök képzetes.

Ez utóbbi esetben a két gyök ilyen alakban írható:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{D}}{2a}.$$

A két gyök tehát csak a tisztán képzetes rész előjele által különbözik. Az ily két komplex értéket, melynek általános mintája:

$$p + qi \text{ és } p - qi$$

kapcsolt (konjugált) értékpárnak nevezzük. A másodfokú egyenlet gyökei tehát (ha az együtthatók valósak) konjugáltak egymáshoz. A kapcsolt értékekre vonatkozólag megjegyezzük, hogy: 1. a kapcsolt értékek összege valós; 2. a kapcsolt értékek szorzata valós. Ha ugyanis $p + qi$ és $p - qi$ a két kapcsolt érték, és ha az összeadást és szorzást a valós számokra megállapított eljárással végezzük, akkor azt találjuk, hogy:

1. $(p + qi) + (p - qi) = 2p$; 2. $(p + qi)(p - qi) = p^2 + q^2$
(ha ugyanis $i^2 = -1$ tesszük).

Amaz egyenlet, melynek gyökei: $p+qi$ és $p-qi$, ezek szerint:

$$x^2 - 2px + p^2 + q^2 = 0,$$

amit az egyenlet megoldása által igazolhatunk.

Feladatok.

Ha az $ax^2+bx+c=0$ egyenlet gyökei x_1 és x_2 , fejezzük ki az együtt-hatók által (a négy alapművelet segítségével) a következő szimmetrikus kifejezéseket:

1. $x_1^3 + x_2^3$.

2. $x_1^4 + x_2^4$.

3. $x_1^5 + x_2^5$.

4. $(x_1 - x_2)^4$.

5. $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$.

6. $x_1^3 x_2 + x_2^3 x_1$.

7. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$.

8. $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$.

9. $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$.

10. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét: $x_1^2 + x_2^2$; $(x_1 - x_2)^2$, $x_1^3 + x_2^3$, $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ ha x_1 és x_2 gyökei ennek az egyenletnek: $x^2 + 5x + 3 = 0$.

11. Számítsuk ki $x_1^3 + x_2^3$, $(x_1 - x_2)^4$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ értékét, ha x_1 és x_2 gyökei ennek az egyenletnek: $x^2 + (a+b)x - (a-b) = 0$.

12. A következő egyenleteknél:

a) $x^2 - 42x + 117 = 0$,

b) $x^2 - px + q = 0$,

c) $3x^2 - x + 8 = 0$,

d) $ax^2 - 2x + b = 0$,

számítsuk ki $x_1^3 x_2 + x_2^3 x_1$ és $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$ kifejezéseket.

13. Alkossunk olyan másodfokú egyenletet, melynek gyökei: 5 és -7.

14. Melyik másodfokú egyenletnek gyökei 1 és -2?

15. Alkossunk olyan egyenletet, melynek gyökei: $1 + \sqrt{5}$ és $1 - \sqrt{5}$.

16. Alkossunk olyan egyenletet, melynek gyökei a következő kapcsolt értékek: a) $2+3i$ és $2-3i$, b) $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$.

17. Minő számértéket kell adnunk m -nek, hogy a $2x^2+8x+m=0$ egyenlet gyökei egyenlők legyenek egymással és melyek ezek a gyökök?

18. Ha $ax^2+bx+c=0$ gyökei x_1 és x_2 ; melyik az az egyenlet, melynek gyökei $2x_1$, $2x_2$.

19. Ha $ax^2+bx+c=0$ gyökei α és β , melyik az az egyenlet, melynek gyökei $\frac{1}{\alpha}$ és $\frac{1}{\beta}$.

20. Minő összefüggésnek kell lenni az a , b , c és d számok között, hogy

$$(a+bx)^2+(c+dx)^2+0$$

egyenlet gyökei egyenlők legyenek?

21. Mutassuk meg, hogy $x^2+px+q=0$ gyökei racionális számok, ha $p=k+\frac{q}{k}$, bármely racionális számok legyenek is a k és q .

22. Melyik az a másodfokú egyenlet, melynek gyökei az $x^2+px+q=0$ egyenlet gyökeinek négyzetei? [Ha ezen egyenlet gyökeit α és β -val jelöljük, az új egyenlet gyökei α^2 , β^2 lesznek; tehát együtthatói: $-(\alpha^2+\beta^2)$, $\alpha^2\beta^2$, melyeket p és q segítségével kiszámíthatunk.]

23. Minő értéket kell adnunk q -nak, hogy az $x^2+px+q=0$ egyenlet egyik gyöke a másiknak kétszerese legyen? [Ha az egyik gyök α , a másik 2α , akkor $p=-3\alpha$, $q=2\alpha^2$; ebből q a p segítségével meghatározandó.]

24. Minő értéket kell tulajdonítani y -nak, hogy az

$$x^2-3xy+y^2+2x+11y+1=0$$

egyenlet gyökei egyenlők legyenek? [Discriminansa 0 legyen. Ez y -ra másodfokú egyenletet szolgáltat.]

25. Határozzuk meg az a számot úgy, hogy az

$$x^2-\frac{15x}{4}+a^2=0$$

egyenlet egyik gyöke a másiknak négyzete legyen.

26. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\frac{a^2}{x-p}+\frac{b^2}{x-q}-1=0$$

egyenlet gyökei mindig valósak, akármekkora a legyenek is e valós számok: a , b , p , q .

[Kimutatjuk, hogy a discriminans negatív (azaz a négyzetgyök alatt álló kifejezés) pozitív. A gyökjel alatti kifejezés: $a^4+b^4+p^2+q^2+2a^2b^2+2a^2p-2a^2q-2b^2p+2b^2q-2pq$. Ha még $4a^2b^2$ -et kivonunk belőle és ugyanezt hozzáadjuk, akkor az ötödik tagból $-2a^2b^2$ lesz és

11-iknek még $4a^2b^2$ írható. Az első, második és ötödik tag együtt: $(a^2-b^2)^2$; a harmadik, negyedik és tizedik együtt hogyan írható? Ha az összevonást elvégezzük, észrevevessük, hogy e kifejezés: $(a^2-b^2+p-q)^2+4a^2b^2$, tehát valóban pozitív, mert két négyzet összege.]

27. Van-e az x -nek valós értéke, melyre nézve

$$\frac{2x-7}{2x^2-2x-5}$$

egyenlő lesz $\frac{1}{10}$ -el?

28. Micsoda értékeket kell λ -nak adni, hogy az

$$ax^2+bx+c+\lambda(a'x^2+b'x+c')=0$$

egyenletnek valós gyökei legyenek?

29. Ha az $x^2-5x+4=0$ egyenlet gyökei x_1, x_2 , határozzuk meg (az egyenlet megoldása nélkül) azt az egyenletet, melynek gyökei x_1-1, x_2-1 . [Ezen egyenlet együtthatói sorban: 1, $-(x_1+x_2-2)$ és $(x_1-1)(x_2-1)=x_1x_2-(x_1+x_2)+1$ szimmetrikus kifejezései az x_1, x_2 -nek.)

30. Ha az $x^2+ax+\beta=0$ egyenlet gyökei x_1, x_2 , határozzuk meg azt az egyenletet, melynek gyökei $x_1^2+mx_1+n, x_2^2+mx_2+n$.

31. Az $x^2+ax+b=0$ egyenlet gyökei: α, β . Az $x^2+px+q=0$ egyenlet gyökei pedig: γ, δ . Fejezzük ki az

$$(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)$$

szorzatot (az egyenletek megoldása nélkül) az a, b, p, q együtthatók által. [Ez a kifejezés úgy az α, β , valamint a γ, δ gyökök szimmetrikus kifejezése.]

32. Az $x^2+px+q=0$ egyenlet gyökei: x_1, x_2 . Határozzuk meg azt az egyenletet, melynek gyökei:

$$\alpha+\beta x_1+\gamma x_2 \text{ és } \alpha+\beta x_2+\gamma x_1.$$

33. Ha az $x^2+px+q=0$ egyenlet gyökei: $\operatorname{tg} \varphi$ és $\operatorname{tg} \psi$, számítsuk ki (az egyenlet megoldása nélkül) $\operatorname{tg}(\varphi+\psi)$ és $\operatorname{tg}(\varphi-\psi)$ -t.

[A $\operatorname{tg}(\varphi+\psi)=\frac{\operatorname{tg} \varphi+\operatorname{tg} \psi}{1-\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi}$ -ben csak a gyökök összege és szorzata szerepel. Folytassuk.]

34. Az $x^2+ax+b=0$ egyenlet gyökei: x_1, x_2 . Határozzuk meg azt az egyenletet, melynek gyökei: $\frac{x_1+1}{x_1+1}$ és $\frac{x_2+1}{x_2+1}$. Határozzuk meg azt

is, melynek gyökei: $\frac{\alpha x_1 + \beta}{\gamma x_1 + \delta}$ és $\frac{\alpha x_2 + \beta}{\gamma x_2 + \delta}$.

35. Melyik az az egyenlet, melynek gyökei: $\cos^2 \alpha$, $\sin^2 \alpha$?
Melyik az, melynek gyökei: $\cos^2 \alpha$, $-\sin^2 \alpha$?

144. Két másodfokú egyenlet közös gyöke. Ha adva van két elsőfokú egyenlet:

$$ax + b = 0, \quad cx + d = 0,$$

akkor rendszerint e két egyenletnek különböző megoldása volt; de ha

$$-\frac{b}{a} = -\frac{d}{c}$$

vagyis:

$$ad - bc = 0,$$

akkor a két egyenlet megoldásai egyenlők. Ha tehát az adott egyenletek együtthatói között az az összefüggés van, hogy $ad - bc = 0$, akkor a két egyenletnek közös gyöke van. Ez az $ad - bc = 0$ a *föltétele* annak, hogy közös gyök létezzék. Áttérünk már most a másodfokú egyenletek esetében fellépő viszonyok tárgyalására. Ha adva van két másodfokú egyenlet:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0,$$

akkor rendszerint e két egyenletnek nincs közös gyökük; de megeshetik, hogy a második egyenlet egyik gyöke egyúttal az első is kielégíti, vagyis hogy közös gyöke van a két egyenletnek. Kérdés, mikor fordulhat ez elő, vagyis minő összefüggésnek kell lenni a két egyenlet együtthatói között, hogy közös gyökük legyen; *mi a feltétele a közös gyök létezésének?*

Jelöljük az első egyenlet gyökeit x_1 , x_2 -vel, a másodikét ξ_1 , ξ_2 -vel; akkor a kérdésünk abban áll, hogy mi a feltétele annak, hogy ξ_1 vagy ξ_2 az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletet kielégítse, vagyis hogy e két kifejezés közül

$$a\xi_1^2 + b\xi_1 + c \quad \text{és} \quad a\xi_2^2 + b\xi_2 + c$$

legalább egyik 0 legyen?

Hogy két kifejezés közül egyik zérus, azt úgy jelenthetjük ki, hogy szorzatuk zérus. Föltételünk első alakja tehát:

$$R = (a\xi_1^2 + b\xi_1 + c)(a\xi_2^2 + b\xi_2 + c) = 0.$$

Az itt álló kifejezés ξ_1 és ξ_2 -re, a második egyenlet gyökeire nézve, szimmetrikus. (Ha ξ_1 és ξ_2 fölcseréltetik, a két szorzó egyszerűen helyét változtatja.) Ennek következtében *másodfokú egyenlet megoldása nélkül* kiszámíthatjuk a kifejezés értékét. Lesz a szorzás által:

$$R = a^2 \xi_1^2 \xi_2^2 + ab \xi_1 \xi_2 (\xi_1 + \xi_2) + ac (\xi_1^2 + \xi_2^2) + b^2 \xi_1 \xi_2 + bc (\xi_1 + \xi_2) + c^2$$

de minthogy ξ_1, ξ_2 a második egyenlet gyökei, tehát:

$$\xi_1 \xi_2 = \frac{\gamma}{\alpha},$$

$$\xi_1 + \xi_2 = -\frac{\beta}{\alpha},$$

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = (\xi_1 + \xi_2)^2 - 2\xi_1 \xi_2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{2\gamma}{\alpha},$$

és ha mindezen értékeket behelyettesítjük, R a következő alakra hozható:

$$R = \frac{(a\gamma - ac)^2 - (a\beta - ab)(b\gamma - \beta c)}{\alpha^2}.$$

E kifejezés csak úgy tűnhetik el, ha a számláló zérus, mert a nevező a zérustól különböző számérték, az adott másodfokú egyenlet első együtthatójának négyzete. Eszerint a *főltétel* arra, hogy az adott két másodfokú egyenletnek közös gyöke legyen:

$$(a\gamma - ac)^2 - (a\beta - ab)(b\gamma - \beta c) = 0.$$

Igy pl. az $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x^2 + 5x - 14 = 0$$

egyenleteknek van közös gyökük, mert

$$(1 \cdot -14 - 1 \cdot 6)^2 - (1 \cdot 5 + 1 \cdot 5)(5 \cdot 14 - 6 \cdot 5) = 400 - 10 \cdot 40 = 0.$$

Ha ily közös gyök létezik, meghatározása nagyon egyszerű. Akkor a két egyenlet fönnáll ugyanazon x érték mellett és x^2 kiküszöbölhető mint elsőfokú egyenleteknél az x . Ekkor elsőfokú egyenlet marad a közös gyök meghatározására.

Ha ugyanis az $ax^2 + bx + c = 0$

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0$$

egyenleteknek van közös gyökük, azaz

$$R = (a\gamma - ac)^2 - (a\beta - ab)(b\gamma - \beta c) = 0,$$

vagyis, ha van olyan x érték, mely mind a két egyenletet kielégíti, akkor ez az érték kielégíti azt az egyenletet is, melyet a

két adott egyenletből az x^2 kiküszöbölése által nyerhetünk. Evégből tehát az első egyenletet megszorozzuk α -val, a másodikat a -val és az így nyert egyenleteket egymásból kivonjuk. Ekkor a közös gyökre a következő egyenletet kapjuk:

$$(\alpha b - a\beta)x + \alpha c - a\gamma = 0.$$

és ha x együtthatója nem 0, akkor a közös gyök értéke:

$$-\frac{\alpha c - a\gamma}{\alpha b - a\beta}$$

tehát elsőfokú egyenletből számítottuk ki a két másodfokú egyenlet közös gyökét.

Igy pl. az előbb tárgyalt numerikus példánál az x^2 eliminálása által a következő elsőfokú egyenletet kapjuk:

$$10x - 20 = 0$$

és így a közös gyök: 2.

Megeshetik azonban, hogy x együtthatója $\alpha b - a\beta = 0$, akkor az R kifejezésében a második tag 0 (mert hiszen e tag első tényezője éppen $\alpha b - a\beta$); minthogy pedig $R = 0$ közös gyök esetében, tehát egyúttal kell, hogy első tagja is 0 legyen, vagyis: $a\gamma - \alpha c = 0$, tehát a közös gyökre nyert elsőfokú egyenlet ilyen alakú:

$$0 = 0,$$

miből a közös gyök meg nem határozható. Ez esetben tehát

$$\alpha b - a\beta = 0 \text{ és } \alpha c - a\gamma = 0.$$

Ebből a két egyenletből következik (ha ugyanis ezen egyenleteket aránypárok alakjában írjuk), hogy:

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$$

és ha ezt a viszonyt pl. λ -val jelöljük, akkor

$$\alpha = a\lambda, \quad \beta = b\lambda, \quad \gamma = c\lambda,$$

vagyis a második egyenlet baloldala ilyen alakú:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \lambda(ax^2 + bx + c),$$

tehát a két adott másodfokú egyenlet egymástól csak egy állandó szorzóban különbözik; nem két egyenletünk van, hanem voltaképpen csak egy. Ez esetben tehát nem *egy* közös gyöke van a két egyenletnek, hanem mindkét gyök közös. Ebben van az oka annak, hogy a közös gyök meghatározása ez esetben elsőfokú egyenletből nem lehetséges.

Feladatok.

1. Van-e közös gyöke e két egyenletnek:

$$x^2 - 4x = 3 + 0, \quad x^2 - 8x + 15 = 0$$

és ha igen, melyik az?

2. Van-e közös gyöke e két egyenletnek:

$$x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a = 0; \quad x^2 - (2a - 1)x + a^2 - a = 0$$

és ha igen, melyik az?

3. Határozd meg
- m
- et úgy, hogy

$$3x^2 + 5x - m = 0 \\ 10x^2 + 21x - 72 = 0$$

egyenleteknek közös gyökük legyen.

4. Határozzuk meg
- m
- et úgy, hogy az
- $x^2 + mx - 1 = 0$
- és
- $x^2 + x + m = 0$
- egyenleteknek közös gyökük legyen.

5. Határozzuk meg az
- $x^2 - (a+2)x + 2a = 0$
- és
- $x^2 - (b+2)x + 2b = 0$
- közös gyökét.

6. Határozzuk meg az
- $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$
- és
- $x^2 - (2a+b)x + a^2 + ab = 0$
- közös gyökét.

7. Határozzuk meg az
- $x^2 - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} x + \cos \alpha = 0$
- és az
- $x^2 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} x - \cos \alpha = 0$
- egyenletek közös gyökét!

8. Határozzuk meg az
- $x^2 - \sin^2 \alpha \cdot x - \cos^2 \alpha = 0$
- és
- $x^2 - \cos^2 \alpha \cdot x - \sin^2 \alpha = 0$
- közös gyökét.

9. Határozzuk meg az
- $x^2 + 4x - 837 = 0$
- és
- $x^2 - 8x - 513 = 0$
- egyenletek közös gyökét!

10. Határozzuk meg az
- $4x^2 - 4x + \sin^2 \alpha = 0$
- és
- $4x^2 - 4x \cdot \cos \alpha - \sin^2 \alpha = 0$
- egyenletek közös gyökét!

145. **Két másodfokú egyenlet két ismeretlennel.** Másodfokúnak nevezzük a két ismeretlent tartalmazó egyenletet, ha benne a rendezés után legalább egy tag foglaltatik, melyben az ismeretlenek kitevőinek összege egyenlő kettővel, és amelyben ez az összeg egy tagban sem nagyobb a 2-nél. A két ismeretlent tartalmazó másodfokú egyenlet általános alakja tehát:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

hol $A, \dots, F$ adott számértékeket jelentenek.

Az ily egyenlet megoldása magában véve határozatlan feladat; mert az y -t szabadon választhatjuk és mindig megtalálhatjuk azután az x hozzátartozó értékét.

A feladat határozottá lesz, ha még egy második egyenlet kielégítése követeltetik.

Ha az egyik egyenlet elsőfokú, a tárgyalás, miként már láttuk, egészen úgy folyik, mint elsőfokú egyenletrendszernél, a helyettesítési eljárás követésével.

$$\text{Pl.} \quad \begin{aligned} x^2 - 2y^2 &= 71 \\ x + y &= 20. \end{aligned}$$

Akkor a második egyenletből:

$$y = 20 - x$$

és az elsőbe helyettesítve:

$$x^2 - 80x + 871 = 0.$$

Igy tehát

$$\begin{aligned} x_1 &= 13, & x_2 &= 67; \text{ megfelelőleg} \\ y_1 &= 7 & y_2 &= -47. \end{aligned}$$

Látjuk, hogy csak x_1 és y_1 , x_2 és y_2 összetartozó értékek. — Mert a második egyenlet szerint minden x -hez csak egy y tartozik és viszont.

Ha a második egyenlet nem elsőfokú, hanem szintén másodfokú, akkor is a helyettesítéssel vezetjük vissza a feladatot egyismeretlenű egyenlet megoldására; ugyanis megint: az egyik egyenletből kifejezzük x -et (vagy y -t) és e kifejezést a másik egyenletbe helyettesítjük. A számítás megkönnyítése végett a két adott egyenletet átalakítjuk úgy, hogy az egyikben y^2 (vagy x^2) együtthatója 0 legyen. Ezt könnyen elérhetjük. Ha ugyanis a két egyenlet a következő:

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F &= 0, \\ A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1 &= 0, \end{aligned}$$

akkor e két egyenletből y^2 -t (vagy x^2 -t) elimináljuk azáltal, hogy az első egyenletet C_1 -gyel, a másodikat C -vel szorozzuk és az így nyert két egyenletet kivonjuk egymásból. Ezáltal olyan egyenletet kapunk, melyből az y^2 -t tartalmazó tag hiányzik; tehát ilyen alakú:

$$ax^2 + bxy + dx + ey + f = 0.$$

Az így nyert egyenletből, mely y -ra elsőfokú, y -t kifejezzük és y ezen kifejezését az első egyenletbe (vagy a másodikba) helyettesítjük, miáltal oly egyenletet kapunk, mely csakis x -et tartalmazza. Ez az egyenlet, a *kiküszöbölési egyenlet*, rendszerint negyedfokú egyenlet, tehát feladatunk teljes megoldását csakis a negyedfokú egyenletek megoldási módjának ismerete után végezhetnők el; de némely esetben ez az x -re szolgáló egyenlet másodfokúra redukálható és akkor a feladatot teljesen megoldhatjuk. Ha az x értékét (illetőleg értékeit) kiszámítottuk, akkor y hozzátartozó értéke, melyet az előbbi egyenletből x által kifejeztünk, racionális műveletekkel kiszámítható.

Lássuk az eljárást egy-két példán.

1. Példa :

$$x^2 + y^2 = 25, \quad xy = 12.$$

Itt a második egyenlet nem tartalmazza az y^2 tagot, tehát az egyenletek átalakítására nincs szükségünk. A második egyenletből y -t kifejezzük és ezt a kifejezést az első egyenletbe helyettesítjük.

$$y = \frac{12}{x}, \quad x^2 + \frac{144}{x^2} = 25$$

$$x^4 - 25x^2 + 144 = 0.$$

Ez az egyenlet x -re negyedfokú ugyan, de másodfokúra redukálható, ha $x^2 = z$ tesszük; lesz:

$$z^2 - 25z + 144 = 0.$$

melynek gyökei $z_1 = 9$, $z_2 = 16$, miből:

$$\begin{array}{llll} x_1 = 3, & x_2 = -3, & x_3 = 4, & x_4 = -4, \\ y_1 = 4, & y_2 = -4, & y_3 = 3, & y_4 = -3. \end{array}$$

2. Példa :

$$2y^2 - 4xy + 3x^2 = 17 \quad y^2 - x^2 = 16.$$

Ha a második egyenletet 3-mal szorozva hozzáadjuk az elsőhöz, lesz

$$5y^2 - 4xy = 65$$

és ez az egyenlet x^2 -ot nem tartalmazza; tehát ebből kiszámítjuk x -et és x kifejezését egyik egyenletbe helyettesítjük.

Ebből:

$$x = \frac{5y^2 - 65}{4y}.$$

Behelyettesítve pl. a második egyenletbe :

$$y^2 - \frac{25y^4 - 650y^2 + 4225}{16y^2} = 16$$

$$9y^4 - 394y^2 + 4225 = 0,$$

mely egyenlet megint másodfokúra redukálható, ha y^2 tekintjük ismeretlennek.

És ebből :

$$y_1 = 5, \quad y_2 = -5, \quad y_3 = \frac{13}{3}, \quad y_4 = -\frac{13}{3},$$

tehát

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = \frac{5}{3}, \quad x_4 = -\frac{5}{3}.$$

3. Példa :

$$x^2 + xy - 6y^2 = 24$$

$$x^2 + 3xy - 10y^2 = 32.$$

Az első egyenletet kivonva a másodikból :

$$2xy - 4y^2 = 8$$

Tehát :

$$x = \frac{2y^2 + 4}{y}$$

Az első egyenletbe helyettesítve :

$$\left(\frac{2y^2 + 4}{y}\right)^2 + 2y^2 + 4 - 6y^2 = 24.$$

Rendezve :

$$4y^2 - 16 = 0.$$

Tehát :

$$y_1 = 2, \quad y_2 = -2 \text{ és}$$

$$x_1 = 6, \quad x_2 = -6.$$

Az itt adott általános módszerek fölöslegessé tesznek minden ú. n. fogást, melyet az egy ismeretlent tartalmazó egyenlet felállítására régebben használtak. Ha ez az egyenlet harmad- vagy negyedfokú és nem oldható meg másodfokú alakokra való visszavezetés által, akkor az illető feladat csakis eme magasabb fokú egyenletek tárgyalása után végezhető be teljesen.

Feladatok.

1. $x+y=100$; $xy=2400$.
2. $x+y=4$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$.
3. $x+y=7$; $x^2+2y^2=34$.
4. $x-y=12$; $x^2+y^2=74$.
5. $x-\frac{x-y}{2}=4$; $y-\frac{x+3y}{x+2}=1$.
6. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$; $x+y=2$.
7. $x^2+xy+2y^2=74$; $2x^2+2xy+y^2=73$.
8. $x^2+xy+2y^2=21$; $y^2-2xy+15=0$.
9. $x^2-4y^2=9$; $xy+2y^2=3$.
10. $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3}$; $x^2+y^2=45$.
11. $y^2-4xy+20x^2+3y-264x=0$.
 $5y^2-38xy+x^2-12y+1056x=0$.
12. $x^2+y^2=\frac{5}{2}xy$; $x-y=\frac{1}{4}xy$.
13. $x+2y+\frac{3x}{y}=16$; $3x+y+\frac{3x}{y}=23$.
14. $4(x+y)=3xy$; $x+y+x^2+y^2=26$.
15. Két szám összege 10; szorzatuk -20 ; melyek e számok?
 (Az $x^2-10x-20=0$ egyenlet gyökei.)
16. A derékszögű négyszög kerületéből ($=k$) és területéből ($=t$) meghatározandók oldalainak hossza. A kerület és terület minő mérőszámainak felel meg négyszög és melyeknek nem?
17. Egy derékszögű háromszög átfogója 13 m, területe 30 m², Mekkora a befogói?
18. Adva van egy háromszög két oldalának összege, ezen oldalak közé fogott szög és a háromszög területe. Mekkora egyenként ezek az oldalak?
19. Adva van egy háromszög egyik oldala (a), a területe és a háromszögbe írható kör sugara. Mekkora az oldalai?
20. Egy derékszög szárain két pont egyenletesen halad a csúcs felé. Az egyik száron levő 100 m, a másik száron levő 50 m távolság-

ban van a csúcstól. 10 mp múlva egymástól való távolságuk 50 m, 15 mp múlva pedig 22·36 m lesz. Mekkora a sebességeik?

21. Egy derékszögű háromszög átfogója 76·2 m-el nagyobb mint az egyik befogója és 152 m-el nagyobb mint a másik befogója. Mekkora az oldalai?

22. Egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai számtani sort alkotnak. Területe 294 m. Mekkora az oldalak?

146. A másodfokú egész függvény geometriai ábrázolása. Maximum- és minimum-értékek. Midőn az

$$y = ax^2 + bx + c$$

másodfokú egész függvény menetét vizsgáljuk, jó lesz mindjárt kezdettől fogva azt a két esetet különválasztani, ahol a pozitív vagy negatív. (Hogy a , b , c valósak és a változónak x -nek is csak valós értékeiről van szó, itt már magától értendő.)

Először az a -t pozitív számnak vesszük.

Az előbbieket szerint a vizsgált függvény így is írható:

$$y = \frac{\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4}}{a},$$

y értéke aszerint változik, amint x értéke megváltozik: de x csakis az első tagban fordul elő, tehát y legkisebb értékét akkor kapja, ha ez az első tag a lehető legkisebb lesz. De ez a tag négyzet, tehát 0-nál kisebb nem lehet, amiből közvetlenül következik, hogy az y függvény legkisebb értékét akkor veszi föl, midőn a számláló első tagja eltűnik, azaz midőn:

$$ax + \frac{b}{2} = 0, \text{ vagyis } x = -\frac{b}{2a}.$$

ekkor ugyanis:*)

$$y_{\text{Min.}} = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Ha x -nek bármilyen más értéket tulajdonítunk, a hozzátartozó y mindig nagyobb lesz ennél; ugyanis

$$y - y_{\text{Min.}} = \frac{\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2}{a}$$

*) A következőkben $y_{\text{Min.}}$, ill. $y_{\text{Max.}}$ jelöli az y függvény legkisebb, ill. legnagyobb értékét.

és ebben a kifejezésben a számláló négyzet, a nevező a tett megállapítások szerint pozitív, és így $y - y_{\min}$ pozitív, tehát valóban az x változó bármely értékénél:

$$y > y_{\min}.$$

A geometriai ábrázolásra vonatkozólag ez annyit mond, hogy az $y = ax^2 + bx + c$ által jellemzett görbének, ha $a > 0$, van egy legmélyebb pontja (melynek ordinátája t. i. legkisebb) és

$$\text{hogy ezen pont koordinátái: } -\frac{b}{2a} \text{ és } -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Igy pl. az $y = 3x^2 - 2x + 5$ másodfokú függvény (ahol $a = 3$ pozitív) legkisebb értékét akkor veszi fel, ha $x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{3}$. Ekkor

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = 4\frac{2}{3}. \text{ Ha } x \text{ helyett bárminő más értéket teszünk, } y \text{ nagyobb lesz mint } 4\frac{2}{3}.$$

A görbe ettől a legmélyebb ponttól mindkét oldalon emelkedik. Ez azt jelenti más szóval, hogy pontjainak ordinátái folyton nagyobbodnak, amint e ponttól akár jobbfelé, akár balfelé távozunk. Hogy ezt belássuk, vegyünk két pontot, P és Q -t, melyek közül az egyik abszcissája

$$-\frac{b}{2a} + k$$

és a másiké

$$-\frac{b}{2a} + l.$$

Akkor a megfelelő ordinátákat megkapjuk, ha $y = ax^2 + bx + c$ -ben x helyébe ezeket az értékeket helyettesítjük. Ezek lesznek:

$$\frac{4k^2 - b^2 + 4ac}{4a} \text{ és } \frac{4l^2 - b^2 + 4ac}{4a}.$$

Ebből látjuk, hogy e két ordináta közül a legmélyebb ponttól távolabb eső ponté nagyobb. Ha ugyanis $l^2 > k^2$, a második pont ordinátája nagyobb az elsőnél, a pont tehát magasabban fekszik. De $l^2 > k^2$ annyit jelent, hogy az esetleges negatív előjeltől megszabadított k és l számok közül l a nagyobbik. Tehát valóban eszerint annak a pontnak van magasabb ordinátája, amelynek abszcissája nagyobb abszolút értékű.

A görbe alakja ezáltal nagyjában jellemezve van. A görbe a legmélyebb pontjától kezdve jobbra és balra folyton emelkedik. Még azt is megmutatjuk, hogy e két része teljesen szimmetrikus. Ha t. i. két abszcissát veszünk, melynek végpontjai egyenlő távolságban fekszenek a tetőpont abszcissájának végpontjától, pl.

$$-\frac{b}{2a} + k, \quad -\frac{b}{2a} - k,$$

akkor ezen abszcissáknak megfelelő ordináták mind a két esetben ugyanazt az értéket nyerik, mint a helyettesítés mutatja, ez :

$$\frac{4k^2 - b^2 + 4ac}{4a}.$$

Már egy előbbi fejezetben volt alkalmunk ily görbét szerkeszteni, és így pl. ha

$$y = x^2 + 2x - 3,$$

a tetőpont abszcissája $= -1$, és a megfelelő ordináta $= -4$; vagy más kifejezésmódban az y függvény legkisebb értéke, minimuma -4 , és ezt akkor éri el, midőn a változó értéke -1 .

A rajzon egyszersmind újból áttekinthetjük az imént leírt geometriai viszonyokat. — A rajzban a görbe metszi az

X -tengelyt; e metszőpontok jelentése nagyon egyszerű. A görbe valamely pontja az X -tengelyen fekszik, ha ordinátája $= 0$; eszerint a metszőpontok abszcissáit nyerjük, ha kérdezzük, hogy x minő értékeinél lesz $y = 0$? Az illető abszcissák tehát, amint az

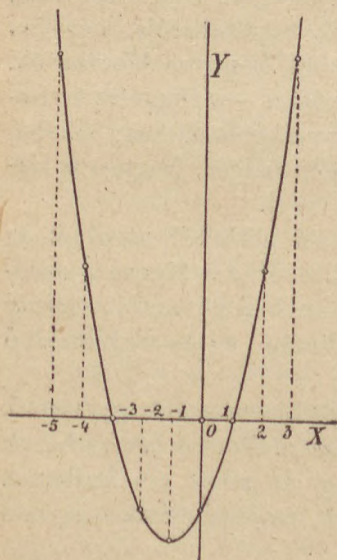
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

egyenlet megoldásából látni,

$$x_1 = 1 \text{ és } x_2 = -3.$$

Az $y = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvényt ábrázoló görbe csakis akkor metszi az *abszcissa* tengelyt, ha az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet gyökei valóságok, vagyis midőn

$$b^2 - 4ac > 0,$$



23. ábra,

Ha a másodfokú egyenletnek nincs valós gyöke, az annyit jelent, hogy nincs oly *abscissa*, melynek megfelelő ordináta zérus volna, vagyis más szóval: a görbe nem metszi az *X*-tengelyt. Ilyen pl. az

$$y = x^2 + x + 1$$

függvény esete. Ilyenkor a görbe legmélyebb pontja is az *abscissa* tengely fölött van, vagyis a függvény legkisebb értéke is pozitív.

Minthogy ekkor a görbének legkisebb ordinátája is pozitív, világos, hogy az egész görbe az *X*-tengely fölött fekszik.

Ez az eset akkor áll be, ha az $ax^2 + bx + c = 0$ alakban

$$b^2 - 4ac < 0,$$

mert akkor a függvény legkisebb értéke $\frac{4ac - b^2}{4a}$, és ez pozitív.

Ha pedig $b^2 - 4ac = 0$, akkor, amint látjuk, $y_{\min} = 0$, azaz a legmélyebb pont éppen az *X*-tengelyen fekszik.

Összefoglalva ezen eseteket, azt látjuk, hogy az $y = ax^2 + bx + c$ függvényt ábrázoló görbe:

1. az *abscissa* tengelyt két különböző pontban metszi. ha $b^2 - 4ac > 0$;
2. az *abscissa* tengelyt nem metszi, ha $b^2 - 4ac < 0$;
3. az *abscissa* tengelyt érinti, ha $b^2 - 4ac = 0$.

Ha a vizsgálandó $y = ax^2 + bx + c$ egész függvényben a , a változó legmagasabb hatványának együtthatója negatív, az erre az esetre vonatkozó eredmények könnyen lehozhatók.

Akkor először az y függvény helyett a $-y$ függvényt vizsgálhatjuk, és minthogy ez az y -ból úgy származik, hogy minden együtthatót ellenkező előjellel veszünk, világos, hogy $-y$ tárgyalása az előbb részletezett esetre vezet.

A $-y$ függvény menetét ábrázoló görbéből azonban az y -nak megfelelőét közvetlenül nyerhetjük. Hisz a függvény megfelelő értékei csak az előjelben különböznek. A görbe rajzolásánál ez annyit jelent, hogy minden ordináta most az ellenkező irányban rajzolandó.

Az y -nak és $-y$ -nak megfelelő görbék eszerint egymásnak mintegy *tükörképei* az *X*-tengelyre nézve. Mert a két görbének megfelelő pontjait úgy nyerjük, hogy az adott *abscissához* a hozzátartozó ordinátát majd az egyik, majd a másik irányban rajzoljuk. A

$$-y = ax^2 - bx - c$$

függvénynek megfelelő görbének van, miként az előbbieknél következik, legmélyebb pontja ; tehát e görbe tükörképének, mely az eredeti

$$y = ax^2 + bx + c$$

görbének felel meg, van egy legmagasabb pontja, ú. n. *tetőpontja*.

Eszerint, ha az

$$y = ax^2 + bx + c$$

függvényben a negatív, a megfelelő görbének lesz *tetőpontja*, mely a görbe legmagasabb pontja, melyről akár jobbra, akár balra haladva, a görbe folytonosan leszáll, ismét úgy, hogy a tetőpont által elválasztott részei teljesen szimmetrikusak.

Ebben az esetben tehát akkor, midőn

$$x = -\frac{b}{2a}$$

(a tetőpont abszcissája) a függvénynek *legnagyobb értéke* van és e *maximum* értéke, csak úgy mint előbb a *minimumé* :

$$y_{\text{Max.}} = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Az előbbi esetben maximumról nem lehetett szó, mert a változó nagyobbításával vagy kisebbítésével a függvény értéke is minden határon túl nagyobbítható volt ; most megfelelőleg nem lehet szó minimumról, mert a változó nagyobbításával vagy kisebbítésével a függvény értéke bármi határon túl kisebbíthető. (Alig szükséges hozzátenni, hogy ez csak algebrai fogalmazása annak, hogy amint az abszcissák tengelyén a tetőponttól mindinkább távozzunk, a görbe maga mindinkább emelkedik, illetőleg leszáll.)

A keletkező görbe ismét metszi a X -tengelyt vagy nem, amint a megfelelő másodfokú egyenlet gyökei valósak vagy képzetesek. A két eset közt geometriailag átmenetet képez az egyenlő gyökök esete, melynél a görbe tetőpontja az X -tengelyen fekszik.

A negatív a esetét nem kísérvük a szövegben külön rajzzal, melyet a tanuló minden nehézség nélkül maga készíthet. — A nyert görbéket, melyek mind ugyanazon fajhoz tartoznak, a geometriában *parabolák*-nak nevezzük.

Az előbbieket szerint a *másodfokú egész függvény legnagyobb vagy legkisebb értékének meghatározási módját* a következő szabályba foglalhatjuk össze.

A másodfokú egész függvény:

$$ax^2 + bx + c$$

akkor éri el legnagyobb vagy legkisebb értékét, midőn $x = -\frac{b}{2a}$,

még pedig a hozzátartozó $\frac{4ac - b^2}{4a}$ függvényérték maximum vagy minimum, amint az x^2 együttthatója negatív vagy pozitív. Az első esetben nem létezik minimum, a másodikban nincs maximum.

Hogy az ily vizsgálat miért lép föl először a másodfokú egész függvényeknél, és miért nem már előbb az elsőfokúaknál, könnyen belátható. Az elsőfokú függvénynek megfelelő görbe az egyenes volt. Az egyenesen tovább haladva, világos, hogy az ordináta (a függvény értéke) egyik irányban nagyobbodik, a másik irányban kisebbedik. Tehát a függvény bármely értékétől áttérhetünk kisebbre és nagyobbra. Geometriai kifejezőmódban az egyenesnek nincs oly pontja, mely a parabola tetőpontjával analog tulajdonságokat mutatna.

Jegyzet. Néhány más függvényalak legnagyobb vagy legkisebb értékének meghatározása visszavezethető a másodfokú egész függvényre. Így pl.:

$$y = \frac{M}{ax^2 + bx + c},$$

hol M pozitív számérték, annál nagyobb, minél kisebb a nevező és megfordítva. Amint tehát az $ax^2 + bx + c$ -nek van legnagyobb vagy legkisebb értéke, az y -nak legkisebb vagy legnagyobb értékét nyerjük.

A maximum- vagy minimum-értékek általános értelmezése geometriailag az, hogy a függvény menetét ábrázoló görbében oly pontok ordinátái, melyekben a görbe, miután egy darabig emelkedett, kezd leszállani, vagy megfordítva. Éppen azért beszélünk mi most maximum (minimum)-értékről akkor is, mikor a függvény a változónak távolabb eső értékkörében nagyobb (kisebb) értéket is nyerhet.

Igy pl.

$$\frac{1}{2 - x^2}$$

minimális értékű, midőn $x = 0$, és ez a minimális érték: $\frac{1}{2}$, ámbár midőn $x = 2$, a függvény értéke $-\frac{1}{2}$ tehát $\frac{1}{2}$ -nél,

kisebb. De a görbének $(0, \frac{1}{2})$ pontja mégis legmélyebb pont a változónak egy bizonyos értékközére nézve, ú. n. *relatív minimum* (vagy maximum), a másodfokú egész függvénynél fellépő *abszolút minimummal* (vagy maximummal) szemben.

Példák: 1. *A k szám két oly részre osztandó, hogy szorzatuk a lehető legnagyobb vagy legkisebb értékű legyen.*

Legyen az egyik rész x , a másik $k-x$ és így

$$y = x(k-x) = -x^2 + kx$$

maximuma vagy minimuma keresendő. Az előbbi szabályok szerint (minthogy itt $a = -1$, $b = k$),

$$x = \frac{k}{2}$$

a változó azon értéke, melynél az $y = x(k-x)$ szorzat maximum lesz, és a függvény értéke $\frac{k^2}{2}$ maximum, mert x^2 együtthatója negatív.

Tehát az eredmény az, hogy a két rész szorzata akkor legnagyobb, midőn a részeket egyenlőknek vesszük. Ha a két tényező nem egyenlő, hanem az egyik $\frac{k}{2} + \alpha$, akkor a másik $\frac{k}{2} - \alpha$, akkor a szorzatuk $\frac{k^2}{4} - \alpha^2$, tehát kisebb mint $\frac{k^2}{4}$.

2. *Oly derékszögű négyszög szerkesztendő, melynek kerülete egyenlő 2k hosszúsággal, és melynek átlója a lehető legnagyobb vagy legkisebb legyen.*

Ha az egyik oldalpár hosszát x -szel jelöljük, a másodiké lesz: $k-x$, és az átló hossza

$$\sqrt{x^2 + (k-x)^2},$$

de minthogy a négyzetgyökök pozitív előjellel veendő, ez négyzetével együtt növekszik és kisebbedik, és így

$$y = x^2 + (k-x)^2 = 2x^2 - 2kx + k^2$$

a vizsgálandó függvény. Ennek minimum felel meg, minthogy a pozitív, még pedig akkor nyerjük e minimumot, ha

$$x = \frac{k}{2}$$

azaz, ama négyszögek közül, melyeknek kerülete egyenlő, a szabályos négyszögnek van a legkisebb átlója; és ez $\frac{k}{\sqrt{2}}$.

Feladatok.

Meghatározandók a következő függvények legnagyobb vagy legkisebb értékei:

1. $10x^2 + 5x - 36$. 2. $8x^2 + 5x - 7$.

3. $(1+x)(1-x) - 2(1+x)(1+x)$.

4. $(x-a)^2 - 2(x+b)^2$.

5. $(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 + (x-d)^2$.

6. $\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x}$.

7. $\frac{1}{2x^2 + 6x - 7} + \frac{-3x^2 - 4}{(2x^2 + 6x - 7)(5x^2 + 6x - 3)}$.

8. Oly derékszögű négyszög szerkesztendő, melynek kerülete adva lévén, területe lehető legnagyobb vagy legkisebb legyen.

9. Oly háromszög szerkesztendő, melyben egy oldal és a másik kettő összege adva lévén, a területe lehető legnagyobb vagy legkisebb.

10. Valamely szám két részre bontandó, úgy hogy a részek négyzeteinek összege lehető legnagyobb vagy legkisebb legyen.

11. Valamely négyzetbe beírandó egy másik négyzet (azaz úgy rajzolandó, hogy minden szögpontja az első négyzet egy-egy oldalán fekszenjen), úgy hogy területe lehető legnagyobb vagy legkisebb legyen.

12. Ha az ABC egyenlő oldalú háromszög oldalaira A -tól B felé, B -tól C felé és C -tól A felé egyenlő darabokat mérünk fel és ezek végpontjait összekötjük, ismét egyenlő oldalú háromszöget kapunk. Mekkora darabokat kell felmérnünk, hogy a keletkezett új háromszög a lehető legkisebb kerületű legyen?

13. Egy a hosszúságot úgy kell két részre osztanunk, hogy azon két kocka köbtartalmának összege minimum legyen, amelyeknek ezek a részek az élei.

14. Egy félkör átmérőjét két részre osztjuk. Mindegyikre mint átmérőre (fölfelé) új félkört rajzolunk. A 3 félkör által bezárt idom (arbelos) területe mikor lesz maximum?

15. Határozzuk meg az

$$y = (ax + \alpha)^2 + (bx + \beta)^2$$

szélső értékét (maximumát, illetőleg minimumát).

16. Határozzuk meg a p számot úgy, hogy az

$$x^2 + (2 - p)x - p - 3 = 0$$

egyenlet gyökei négyzeteinek összege minimum legyen.

17. Az a hosszúságú egyenest úgy kell két részre osztani, hogy e részek fölött alkotott négyzetek összege minimum legyen.

18. Rajzoljuk fel (milliméter papiroson) a következő másodfokú függvények menetét (határozzuk meg a legmélyebb, illetőleg legmagasabb pontját és egyik oldalán 3–4 pontot)

$$y = x^2 - 2x + 3, \quad y = -2x^2 + 5x - 3, \quad y = 3x^2 - x + 1.$$

19. Rajzoljuk meg jó pontosan (milliméterpapiroson) a következő fontos másodfokú függvény menetét: $y = x^2$.

20. Ezt a görbét (parabola) felhasználhatjuk grafikus gyökvonásra. Ha például 43 gyökét keressük, akkor megkeressük a görbe azon pontját, melynek ordinátája: 43. (Hogyan?) [Egységül nagyobb pontosság végett ne az 1 mm, hanem pl.: 2 mm választassék.] Ennek a pontnak az abszcissája: $\sqrt{43}$. (Miért?) Határozd meg ilyen módon 58, 73, 27, 120 gyökeit és hasonlítsd össze e gyököket a közönséges gyökvonással nyert eredményekkel!

21. Felhasználhatjuk még e görbét a másodfokú egyenlet grafikus megoldására is. Ha például az $x^2 - x - 3 = 0$ egyenletet akarjuk megoldani, akkor így járhatunk el. Felrajzoljuk az $y = x^2$ görbét, azután az $y = x + 3$ egyenest és megkeressük azokat a pontokat, amelyekben az egyenes a görbét átmetszi. Ha ilyen pont az M , melynek abszcissája x , ordinátája y , akkor ez az ordináta y egyrészt x^2 (mert a görbén van az M), másrészt pedig $x + 3$ -al egyenlő (mert az egyenesen van), tehát $x^2 = x + 3$, vagyis $x^2 - x - 3 = 0$.

Ha az egyenes nem metszené a görbét, akkor ez azt jelentené, hogy az adott egyenletnek nincs valós gyöke.

Oldjuk meg grafikusán még a következő egyenleteket:

$$x^2 + 2x - 5 = 0, \quad x^2 + 5x - 7 = 0, \quad x^2 = 7x - 1, \quad x^2 = 6x + 5.$$

Mínthogy ezen eljárásnál a legnehezebb az $y = x^2$ parabola felrajzolása, azért célszerű ezt a parabolát (a milliméter papiroson készített rajz után) átrajzoló (átlátszó) papirostra felrajzolni. Az egyenest, pl.: az első példánál az $y = -2x + 5$ egyenest a milliméterpapirostra rajzoljuk és az átrajzoló papirost pontosan ráhelyezzük. Így meghatározhatjuk a metszőpontokat anélkül, hogy az $y = x^2$ parabolánk tönkremenne.

A másodfokú egész függvény geometriai ábrázolásának részleteit követve, a tanuló könnyen bebizonyíthatja a következő tételeket:

1. Az ax^2+bx+c egész függvény értéke, hacsak x nagyobb egy bizonyos pozitív, vagy kisebb egy bizonyos negatív számnál, mindenkor megegyezik előjelére nézve az a együtthatóéval.

2. Az ax^2+bx+c egész függvénynek, ha a megfelelő egyenlet gyökei képzetesek, minden (valós x -nek megfelelő) értéke pozitív, ha a pozitív és minden értéke negatív, ha a negatív.

3. Ha az $ax^2+bx+c=0$ egyenlet két valós gyöke x_1 és x_2 , ha továbbá a pozitív, akkor az ax^2+bx+c negatív az x minden értékénél, mely x_1 és x_2 közt fekszik és x minden más értékénél pozitív.

4. Mi a megfelelő tétel negatív a -ra vonatkozólag?

A most bebizonyított 3. alatti tétel azt fejezi ki, hogy ha a pozitív, akkor az ax^2+bx+c másodfokú függvény negatív az x_1 és x_2 gyökök közötti helyen, minden más helyen pozitív. Ebben már a 2. alatti, vagyis az is benne van, hogy ha x_1 és x_2 képzetesek, akkor a másodfokú függvény (melyben a pozitív), mindig pozitív értékű, mert hiszen x_1 és x_2 közötti hely az x tengelyen nincsen.

Ennek a megjegyzésünknek igen jó hasznát vesszük olyan egyenlőtlenségek megoldásánál, melyek másodfokú függvényekre vonatkoznak.

5. Ha például azt kérdezzük, hogy x minő értékeinél lesz az x^2-5x+8 kisebb mint 2, akkor így okoskodunk:

$$x^2-5x+8 < 2$$

egyenlőtlenség mindkét oldalából 2-t elveszünk, akkor kell, hogy

$$x^2-5x+6 < 0$$

legyen, vagyis negatív legyen. De ez a másodfokú függvény csakis az $x^2-5x+6=0$ egyenlet gyökei közötti értékeknél lesz negatív. E gyökök: $x_1=2$, $x_2=3$, tehát ha x 2 és 3 között van, azaz

$$2 < x < 3$$

akkor az x^2-5x+8 kisebb a 2-nél, minden más esetben nagyobb (vagy ha $x=2$, vagy $x=3$, akkor éppen 2).

x minő értékeinél lesz az $x^2-9x+5 < 3$? x minő értékeinél lesz $2x^2-5x+8 < 4$?

6. x minő értékeinél lesz az x^2-7x+2 nagyobb, mint 10? Felelet: $x^2-7x+2 > 10$ -ből ered: $x^2-7x-8 > 0$. A baloldalon álló függvény pozitív lesz minden x értékénél, mely nem fekszik az $x^2-7x+8=0$

egyenlet gyökei között (tehát, ha e gyökök sorban: x_1, x_2 , vagy az x_1 -től balfelé, vagy x_2 -től jobbfelé esik).

7. x minő értékeinél lesz $-3x^2+2x+8$ nagyobb 2-nél? Felelet: Ha $-3x^2+2x+8 > 2$, akkor $(-1$ -gyel szorozva) $3x^2-2x-8 < -2$. Most már x^2 együtthatója pozitív, tehát az előbbi módon következtetünk.

8. Mekkora az az x szög, melyre nézve:

$$3 \cos^2 x - 12 \cos x + 5 > 0.$$

9. Oldjuk meg ezt az egyenlőtlenséget x -re:

$$5 \sin^2 x + 3 \sin x - 1 < 0.$$

10. Mutassuk meg, hogy $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$ mindig pozitív, ha a, b, c egy háromszög oldalainak mérőszámai. [Azt kell tehát csak megmutatni, hogy ez esetben a $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ egyenletnek képzetes gyökei vannak, vagyis a discriminansa: $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$ pozitív. Ezt a négyzetkülönbséget az ismeretes módon átalakítjuk és megmutatjuk, hogy mindkét tényezője pozitív, ha a, b, c között a $b+c > a, a > b-c$ ismeretes egyenlőtlenségek érvényesek.]

11. Számítsuk ki, hogy α -nak minő értéket lehet tulajdonítani, hogy az $x^2 + (1+\alpha)x + 2\alpha = 0$ egyenlet gyökei valósak legyenek? [Kell, hogy $(1+\alpha)^2 - 8\alpha$ pozitív legyen. Ez az α -ra másodfokú egyenlőtlenség.]

12. Az $(1+y)x^2 - 3xy - 1 = 0$ egyenletnek az y minő értékeinél lesznek valós gyökei?

XX. Elsőfokú határozatlan egyenletek.

147. Az egész számú megoldás szükséges feltétele. A két ismeretlent tartalmazó elsőfokú egyenlet általánosságban következőkép írható:

$$Ax + By = M.$$

Ez egymagában csak az x és y összefüggését adja, vagyis meghatározza az egyik ismeretlent, mint a másik függvényét:

$$y = \frac{M - Ax}{B} \text{ és } x = \frac{M - By}{A}.$$

Mint egyenlet, határozatlan feladat, mert az egyik ismeretlen értékét tetszés szerint választhatom és ekkor még mindig

meghatározható a másik ismeretlen hozzátartozó értéke. A föladat e határozatlansága miatt azonban az ismeretlenek meghatározását újabb föltételekhez köthetjük. Ilyen pl. ha követeljük, hogy az ismeretlenek értékei még egy második hasonló alakú egyenletnek is eleget tegyenek, ami a két ismeretlenű egyenletrendszerre vezet.

Most az egyenletet egészen más természetű föltétel mellett vizsgáljuk. Ez t. i., hogy *mindkét ismeretlen értéke egész szám legyen, föltéve egyszersmind, hogy az A , B , M együtthatók egész számok.*

Az ily megszorítással megoldandó egyenletek az ú. n. *határozatlan* vagy *diophantikus egyenletek*. (Diophantos alexandriai mathematicus után.)

Minden ily megszorítás bevezetésénél mindenekelőtt megvizsgálandó: vajjon a föladat egyáltalában *lehetséges-e*? Közvetetlenül belátható, hogy vannak esetek, midőn a feladat lehetetlenséget követel. Ha pl. x és y oly egész számú értéke kerestetik, mely kielégíti a

$$33x + 15y = 2$$

egyenletet, akkor látjuk, hogy ha x és y egész számok, akkor $33x$ és $15y$ oszthatók 3-mal, ellenben az egyenlet jobboldalán álló 2 nem osztható 3-mal, tehát a feladat megoldhatatlan.

Az e példánál használt következtetést általánosítva, belátjuk, hogy az

$$Ax + By = M$$

egyenlet egész számokban való megoldása csak akkor lehetséges, ha A és B legnagyobb közös osztója (melyet D -vel jelölünk) egyszersmind osztja az M -et is. Mert x és y bármely egész számú értékénél Ax és By osztható D -vel, tehát $Ax + By$ is. De M ezzel az összeggel egyenlő és így kell, hogy M is D -vel osztható legyen.

Ez a föltétel, amint a tárgyalás mutatja, *szükséges föltétel*; hogy egyszersmind *elégséges*, kitűnik majd abból, hogy valóban megoldást találhatunk, mihelyt e föltétel ki van elégítve.

148. A megoldás menete. Ha valamelyik ismeretlen együtthatója a (pozitív vagy negatív) egység, akkor az egyenlet tüstént megfejezhető. Akkor t. i. a második ismeretlen bármely egész számú értékének az első ismeretlennek is egész számú értéke

felel meg. Ebben az esetben tehát végtelen sok, a föltételeket kielégítő megoldás létezik. Így pl. a

$$3x - y = 10$$

egyenletből :

$$y = 3x - 10$$

és így x minden egész számú értékéhez az y egész számú értékét nyerjük. Így tehát az x és y összetartozó értékrendszerei :

$$\dots - 2, - 1, 0, 1, 2, \dots$$

$$\dots - 16, - 13, - 10, - 7, - 4, \dots$$

Minden más esetben a megoldáshoz vezető eljárás elve az, hogy az adott egyenlet megoldását visszavezetjük egy másik egyenletére, melyben az együtthatók ismét egész számok, de az eredetieknél kisebbek.

Hogy ezt mikép érjük el, azt legegyszerűbben először példán láthatjuk. Legyen pl. adva a következő egyenlet :

$$5x - 4y = 11$$

akkor ebből :

$$y = \frac{5x - 11}{4},$$

vagy, ha a 4-gyel való osztást az együtthatókon elvégezzük :

$$y = \left(1 + \frac{1}{4}\right)x - \left(2 + \frac{3}{4}\right);$$

itt végre az egész számú és tört részt külön írjuk :

$$y = x - 2 + \frac{x - 3}{4}.$$

Következtetéseink fordulópontja most az, hogy ez az egyenlet, melyben a föltétel szerint x és y egész számok, csak úgy lehetséges, ha a tört alakban írt utolsó tag

$$\frac{x - 3}{4} \text{ egész szám.}$$

Ha megfordítva x -et (mint egész számot) úgy tudjuk meghatározni, hogy $\frac{x - 3}{4}$ egész szám legyen, akkor y is egész szám lesz és föladatunkat megoldottuk. Ha, épp úgy mint eddig az x -et és y -t, most a z -t egyelőre ismeretlen egész szám jelének használjuk, akkor az új feltétel :

$$\frac{x - 3}{4} = z$$

vagy :

$$x = 4z + 3.$$

Tehát z bármely egész számú értékének x egész számú értéke felel meg és ha az x számára nyert kifejezést a megelőző egyenletek bármelyikében helyettesítjük, az y alakját kapjuk. Ez

$$y = 5z + 1.$$

Az $x = 4z + 3$ és $y = 5z + 1$ együttvéve most már a z bármely egész számú értékénél az

$$5x - 4y = 11$$

egyenlet egy-egy megoldását adja. Így: ha

$$z = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{akkor } x = \dots -5, -1, 3, 7, 11, \dots$$

$$y = \dots -9, -4, 1, 6, 11, \dots$$

Feladatok. 1. Határozzuk meg x és y azon egész számú értékeit, melyek ezen egyenletet kielégítik: $3x - 7y = 49$.

2. Oldjuk meg ezt a határozatlan egyenletet (egész számokban): $8x + 13y = 22$.

Az e példákban foglalt eljárás általánosan fogalmazva a következő: Legyen az adott egyenlet:

$$Ax + By = M \dots \dots \dots 1.$$

és tegyük fel, hogy A és B egész számú együttthatók közül a B a kisebbik. Az adott egyenletből

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{M}{B}.$$

$A - \frac{A}{B}$ és $\frac{M}{B}$ együttthatókban az osztást elvégezzük.

Hányadosul kapunk egész számú részt és törtrészt. Legyen:

$$-\frac{A}{B} = a + \frac{A'}{B}; \quad \frac{M}{B} = m + \frac{M'}{B},$$

ahol tehát a és m az illető osztásoknál fellépő egész részeket és $\frac{A'}{B}$ és $\frac{M'}{B}$ a maradékokból származó törtrészeket jelölik,

akkor tehát az egész részeket és törtrészeket egybefoglalván:

$$y = ax + m + \frac{A'x + M'}{B} \dots \dots \dots 2.$$

hol A' és M' mint maradékok jelennek meg, midőn B -vel osztunk, tehát B -nél kisebbek. — Hogy x és y számértékei egészek legyenek, kell, hogy

$$\frac{A'x + M'}{B}$$

is egész legyen, mert $ax + m$ egész ; jelöljük ezt az egész számot z -vel, kell tehát, hogy

$$\frac{A'x + M'}{B} = z.$$

legyen. Most tehát x -et és z -t úgy kell meghatároznunk, hogy

$$A'x - Bz = -M' \dots\dots\dots 3.$$

legyen. Ha ezt elvégeztük, az x értékét nyertük, azután 2-ből az y hozzátartozó értékét kiszámíthatjuk.

Az 1. egyenlet megoldása vissza van vezetve eszerint a 3. alatt álló egyenletére. Az eredeti A és B együtthatók helyett itt A' és $-B$ együtthatók szerepelnek. Az új egyenlet abban különbözik az eredetitől, hogy a nagyobbik együttható helyét egy ennél kisebb szám foglalja el ; ugyanis A' , mely a B -vel osztásnál mint maradék lépett fel, okvetlenül kisebb B -nél, tehát annál inkább A -nál.

Most még csak azt kell kimutatnunk, hogy a kisebbitést mindaddig folytathatjuk, míg valamelyik ismeretlen együtthatója az egység. Mert az ily egyenletet meg tudjuk oldani egész számokban és ettől a megoldott egyenlettől visszamehetünk azután az eredeti föladathoz.

Föltehetjük ennek bebizonyításánál, hogy A és B relatív törzsszámok, mert ha volna közös osztójuk, D , akkor vagy M is osztható D -vel, és akkor elosztjuk az egész egyenletet D -vel ; vagy pedig M nem osztható D -vel ; de ekkor az egyenletről már tudjuk, hogy egész számú megoldása nem lehet.

De ha A és B relatív törzsszámok, akkor A' és B is ilyen ; mert A' maradék, melyet nyerünk, ha A -t B -vel osztjuk : és a legnagyobb közös osztó meghatározására szolgáló eljárásból tudjuk, hogy A és B legnagyobb közös osztója ugyanaz, mint A' és B -é.

Az új egyenlet együtthatói szintén relatív törzsszámok. Most ezen az új egyenleten folytatjuk az előbbi eljárást, miáltal megint oly egyenletre jutunk, melynek egyik együtthatója A' , a másik pedig ennél kisebb s í. t. ; végre olyanra kell jutnunk, melynek egyik együtthatója 1 és akkor a feladat már egyszerűen megoldható.

Oly példa, melynél a végleges megoldásra az említett eljárás többször ismétlendő, a következő :

$$13x - 29y = 5.$$

$$x = \frac{5 + 29y}{13} = 2y + \frac{5 + 3y}{13};$$

$$\frac{5 + 3y}{13} = z,$$

az új egyenlet tehát :

$$3y - 13z = -5.$$

Ezt megoldjuk y -ra, s megint különválasztjuk az egész részt a törtrésztől.

$$y = \frac{13z - 5}{3} = 4z - 1 + \frac{z - 2}{3}$$

$$\frac{z - 2}{3} = u;$$

$$z - 2 = 3u.$$

Itt z és u az új, egész számokban meghatározandó ismeretlenek jelei; z most már (minthogy együtthatója az egység) az u minden egész számú értékénél egész szám, és ha visszafelé helyettesítünk :

$$y = 4(2 + 3u) - 1 + u = 13u + 7$$

$$x = 2(13u + 7) + z = 2(13u + 7) + 2 + 3u = 29u + 16.$$

Igy tehát

$$x = 29u + 16; \quad y = 13u + 7;$$

az u bármely egész számú értékénél egyenletünk egy-egy megoldását adja. Pl., ha

$$u = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \dots$$

$$x = 16, \quad 45, \quad 74, \quad 103, \dots$$

$$y = 7, \quad 20, \quad 33, \quad 46, \dots$$

149. **A megoldások összefüggése.** Ha a két ismeretlent tartalmazó elsőfokú határozatlan egyenlet megoldása (egész számokban) egyáltalában lehetséges, akkor az előbbi cikkben vázolt eljárás mindig szolgáltat ily megoldást. Már e tárgyalt példák ráutalnak arra a jellemző sajátságra, hogy e feladatoknál a *megoldások száma nem véges*, hanem végtelen nagy.

Tárgyalásunkat csak akkor tekinthetjük befejezettnek, ha az összes létező megoldásokról áttekintést nyertünk. Minthogy pedig az előbbiek szerint mindig lehet legalább egy megoldást találni, ezt oly módon eszközöljük, hogy egy megoldást ismeretesnek véve, ebből minden más megoldást levezetünk.

Legyen tehát az

$$Ax + By = M$$

egyenlet egyik (egész számú) megoldása:

$$x = \xi, \quad y = \eta.$$

Jelöljük x, y -nal általánosságban minden más megoldást; akkor az

$$Ax + By = M$$

$$A\xi + B\eta = M$$

egyenletek összeállítása (ha a másodikat kivonjuk az elsőből) a következő kapcsolathoz vezet:

$$A(x - \xi) + B(y - \eta) = 0,$$

és ebből:

$$x = \xi - \frac{B(y - \eta)}{A}.$$

Itt, minthogy x és ξ egész számok, az utolsó tagnak is egész számnak kell lennie, vagyis kell, hogy $B(y - \eta)$ osztható legyen A -val; de egyenletünkben A és B mindenkor már relatív törzsszám, és így már $y - \eta$ maga is osztható A -val, vagyis

$$\frac{y - \eta}{A} = t$$

egész szám; miből

$$y = \eta + At,$$

$$x = \xi - Bt,$$

hol t még bármely egész számot jelenthet.

Ha az $Ax + By = M$ egyenlet egy (egész számú) megoldása ξ, η , akkor ugyanezen egyenlet minden megoldása

$$x = \xi - Bt, \quad y = \eta + At$$

által ábrázolható, melyből az összes megoldásokat nyerjük, ha t helyébe minden egész számú értéket teszünk.

Igy pl. az

$$5x - 2y = 1$$

egyenlet egyik egész számú megoldása: $x = 3, y = 7$ (amit

közvetlen helyettesítés által is igazolhatunk). Az egyenlet általános megoldása tehát, miután itt :

$$\xi = 3, \eta = 7, A = 5, B = -2$$

a következő :

$$x = 3 + 2t, \quad y = 7 + 5t :$$

és így a t egyes értékeinek megfelelő egyes megoldások :

$$t = \dots -1, 0, 1, 2, \dots$$

$$x = \dots 1, 3, 5, 7, \dots$$

$$y = \dots -2, 7, 12, 17, \dots$$

150. Határozatlan egyenlet megoldása pozitív számokban.

Néha a föladat természetéhez képest a határozatlan egyenlet megoldását még újabb megszorítással végezzük ; azt követeljük ugyanis, hogy a megoldások *pozitív* egész számok legyenek.

Ekkor még csak ki kell keresnünk ama t értékeket, melyeknél úgy x , mint y pozitív lesz, tehát :

$$\xi - Bt > 0.$$

$$\eta + At > 0.$$

Amint látjuk, a t számára két egyenlőtlenséget nyerünk és a t értékeinek megszorítását kapjuk, ha ezeket t szerint megoldjuk. E megoldás, épp úgy, mint már láttuk, tisztán rendezésből áll és a következő két, magában elég világos alaptörvény szerint végezhető :

1. Ha $P > Q$, akkor k minden értékénél $P + k > Q + k$.

2. Ha $P > Q$, akkor a k pozitív értékénél $kP > kQ$.

Szorónak (vagy osztónak) csak pozitív számot szabad venni, mert míg pl. $5 > 3$, addig $-5 < -3$. Ezt a viszonyt még jó lesz következőképp fogalmazva kimondani :

3. Ha $P > Q$ (vagy pedig $P < Q$), akkor megfordítva :

$$-P > -Q \text{ (illetőleg } -P > -Q).$$

Ha már most pl. a

$$3x + 8y = 30$$

egyenlet pozitív megoldásait keressük, először az egész számú megoldások általános alakját vizsgáljuk. Egyik megoldás : $x = 2, y = 3$, tehát minden megoldás ezen alakban állítható elő :

$$x = 2 - 8t$$

$$y = 3 + 3t$$

ahol t egész számot jelent.

Most meghatározzuk a t amaz értékeit, melyeknél x pozitív ;
vagyis

$$2 - 8t > 0.$$

Ebből :

$$8t < 2, \text{ vagyis : } t < \frac{1}{4}.$$

Hogy y is pozitív legyen, kell, hogy

$$3 + 3t > 0,$$

vagyis

$$t > -1.$$

Eszerint kell, hogy t nagyobb legyen -1 -nél és kisebb $\frac{1}{4}$ -nél. E két föltételt csak egy szám elégíti ki, a 0 ; és így *egyenletünknek pozitív egész számokban csak egy megoldása van*, mely $t=0$ -nak felel meg

$$x=2, y=3.$$

Magának a $t=-1$ határesetnek a megoldásban is határeset felel meg :

$$x=10, y=0,$$

melyben t. i. az egyik ismeretlen értéke 0 .

Az előbbi példában oly esetet látunk, melyben a határozatlan egyenlet pozitív megoldásainak száma *véges* ; ezzel szemben lehetséges az is, hogy a pozitív megoldások száma végtelen nagy, vagy hogy ilyen egyáltalában nincs.

Igy pl. az

$$5x - 4y = 1$$

egyenlet általános egész számú megoldása :

$$x = 1 + 4t, y = 1 + 5t$$

és ebből következik pozitív számú megoldás esetére, hogy

$$1 + 4t > 0, 1 + 5t > 0$$

legyen ; vagyis :

$$t > -\frac{1}{4}, t > -\frac{1}{5},$$

vagyis $t=0, 1, 2, \dots$ ú. t. kielégíti a föltételt. Pozitív megoldások eszerint :

$$x=1, 5, 9, 13, \dots$$

$$y=1, 6, 11, 16, \dots$$

Ellenben az

$$5x + 4y = 1$$

egyenlet általános megoldása :

$$x = 1 + 4t, y = -1 - 5t,$$

és ebből pozitív megoldást kapunk, ha

$$[1+4t > 0, -1-5t > 0$$

$$t > -\frac{1}{4}, t < -\frac{1}{5};$$

két föltétel, mely egymást kizárja. Oly szám, mely $-\frac{1}{5}$ -nél kisebb és egyszersmind $-\frac{1}{4}$ -nél nagyobb, lehetetlen; tehát egyenletünknek pozitív egész számokban nincs megoldása.

151. Elsőfokú határozatlan egyenletek 3 vagy több ismeretlennel. Az eddig tárgyalt $Ax+By=M$ egyenlet az ú. n. »határozatlan feladatok« sorában a legegyszerűbb. A föladat határozatlan marad, ha az egyenletek száma kisebb az ismeretleneknél. Ily módon legközelebb tárgyalandó esetek:

1. Egy egyenlet három ismeretlennel.

2. Két egyenlet három ismeretlennel.

E föladatok tárgyalása megtörténhetik amaz elvek alapján, melyeket az alapföladat vizsgálatánál kifejtettünk, úgy hogy elégséges lesz egy-egy példán a számítás menetét bemutatni.

1. Ha pl. a következő egyenlet egész számú megoldása követeltetik:

$$2x+3y+5z=23,$$

akkor, úgy mint előbb:

$$x = \frac{23-3y-5z}{2} = 11-y-2z + \frac{1-y-z}{2};$$

az utolsó tagnak itt egész számnak kell lennie; így tehát:

$$\frac{1-y-z}{2} = t$$

és

$$y = 1-z-2t.$$

Ha tehát z és t egész szám, x és y is ilyen és így

$$x = 11-y-2z+t$$

kifejezésében még y értékét helyettesítve:

$$x = 10-z+3t$$

$$y = 1-z-2t$$

$$z = z$$

az általános megoldást ábrázolja. Ebből, ha pl. $z=1, t=1$.

$$x=12, y=-2, z=1 \text{ s ú. t.}$$

2. Ha a következő egyenletrendszer:

$$3x-5y+2z=7$$

$$5x-8y+2z=6$$

egész számokban megoldandó, akkor mindenekelőtt e rendszer úgy alakítható át, hogy az egyik egyenlet csak két ismeretlent

tartalmazzon. Ezt az adott példán elérjük azáltal, hogy az első egyenletet a másodikból kivonjuk. Ekkor a megoldandó egyenletrendszer

$$3x - 5y + 2z = 7$$

$$2x - 3y = -1.$$

Most először is mindazon egész számokat keressük, melyek a második egyenletnek eleget tesznek, és ezek közül azután kiválasztjuk azokat, melyek egyszersmind az első is kielégítik.

A második egyenlet ily általános megoldása :

$$x = 1 + 3t,$$

$$y = 1 + 2t,$$

és most, hogy az első egyenlet is kielégítve legyen, x és y értékét behelyettesítjük az első egyenletbe, ami által

$$3(1 + 3t) - 5(1 + 2t) + 2z = 7,$$

vagyis

$$2z - t = 9$$

egyenletet nyerjük. Ez ismét határozatlan egyenlet z és t számára. Ezt megoldva, és a megoldásba lépő új, határozatlan számot u -val jelölve :

$$z = u$$

$$t = 2u - 9,$$

így végre :

$$x = -26 + 6u, \quad y = -17 + 4u, \quad z = u;$$

hol most már u minden egész számú értéke egyenletünknek egy egész számú megoldását adja ; még pedig, ha $u > 4$, egyszersmind pozitív megoldásokat. Ilyen tehát már, midőn $u = 5$,

$$x = 4, \quad y = 3, \quad z = 5.$$

Feladatok.

A következő egyenletek megoldandók : a) egész számokban, b) pozitív egész számokban :

1. $8x + 65y = 81.$

3. $19x + 5y = 119.$

5. $3x + 7y = 250.$

7. $7x - 9y = 29.$

9. $19x - 5y = 119.$

11. $5x + 8y + 10z = 38.$

13. $38x - 17y - 113z = 2.$

2. $17x + 23y = 183.$

4. $7x + 10y = 297.$

6. $13x + 19y = 1170.$

8. $9x - 11y = 8.$

10. $17x - 49y + 8 = 0.$

12. $17x + 10y + 201z = 208.$

14. $5x - 8y + 3z = 12,$

$6x - 7y - 20z = 19.$

15. $20x + 209y - 513z = 101,$

16. $7x + 8y + 9z = 107,$

$13x + 54y - 26z = 307.$

$11x + 12y - 13z = 217.$

17. A 200 két részre osztandó úgy, hogy az első rész 6-tal osztva 5-öt, a második rész 11-gyel osztva 4-et adjon maradékul. (Az egyik szám $6x+5$, a másik $11y+4$.)

18. Oly n egész szám találandó, mely számtani sort képez, és amelynek összege $=n^2$. Kimutatandó, hogy két pozitív megoldás van, ha n páratlan. [Ha az első tag: x és a különbség y , akkor a számtani sor n tagjának összege $\frac{n[2x+(n-1)y]}{2}$; tehát az egyenlet:

$$2x + (n-1)y = 2n. \text{ Ebből: } x = n - \frac{n-1}{2}y.$$

Ha n páratlan, akkor ilyen alakú: $2k+1$, tehát kell, hogy $n-ky$ pozitív egész legyen. Folytassuk.]

19. Melyik a legkisebb pozitív egész szám, mely 28-cal osztva 21-et, 19-cel osztva 17-et ad maradékul? [Az, amely 28-cal osztva 21-et ad maradékul, ilyen alakú: $28x+21$, másik alakja pedig $19y+17$.]

20. Melyek azok a számok, melyek 3, 5, 7-tel osztva: 2, 4, illetőleg 6-ot adnak maradékul?

21. Minő kétjegyű egész szám az, melynek 10-szerese 99-cel nagyobb, mint számjeleinek összege?

22. Valamely 3 számjelből álló számnál a számjelek összege 20; ha a számból 16-ot levonunk és a maradékot 2-vel osztjuk, a hányados az eredeti szám számjeleit mutatja megfordított sorrendben. Melyik e szám?

23. Valaki 4 koronáért 3-féle szivart akar venni, 20 fillérest, 4 fillérest és 2 fillérest. Hányféleképp teheti ezt?

24. Egy könyvszekrény 3 sorában húsz-húsz könyv helyezhető el. Három ötkötetű munkám van, hat négykötetű, két háromkötetű; hogy kell ezeket beosztani, hogy minden sorban teljes munkák álljanak?

25. Ha centiméter-kockás papíron megrajzolnók a $2x-3y=5$ által ábrázolt egyenest [mértékegység gyanánt a cm választandó], vajjon a papiros osztóvonalainak mely metszéspontjain (rácspontoknak nevezhetjük ezeket) megy át az egyenes? [E rácspontok koordinátái egész centiméterek, tehát az egyenlet egész számú megoldásait keressük.]

26. A $3x-5y=6$ egyenes mely rácspontokon megy át?

XXI. A kapcsolástan elemei.

152. **A csoport.** A kapcsolástan a tárgyaknak bizonyos sorát csupán e tárgyak elhelyezésére nézve vizsgálja. E tárgyak — az úgynevezett *elemek* — a betűk vagy számok természetes sora által jelölhetők:

$$a, b, c, d, \dots$$

vagy:

$$1, 2, 3, 4,$$

vagy pedig változó jelzővel ellátott állandó betű által:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

A fölvetett elemeknek minden adott elrendezése *csoportot* vagy *komplexiót* képez.

Két komplexió közül magasabbnak azt mondjuk, melyben az első, nem megegyezőleg betöltött helyen a természetes sorrendben később következő elem áll. Így a

$$231 \text{ és } 132$$

$$abdef \text{ és } abede$$

komplexiók közül az első mindig a magasabb.

Feladat. 1. Sorozzuk magasságuk szerint ezeket a komplexiókat: $acdb, bcad, dacb, cdab, cadb$.

2. Sorozzuk magasságuk szerint ezeket: 21435, 12453, 35412, 53412, 54312, 51243.

153. **Permutációk.** Adott elemek (n elem) permutációit akkor nyerjük, ha az összes elemeket minden lehetséges különböző sorrendbe rakjuk.

Igy az 1 és 2 elemek permutációi:

$$12 \text{ és } 21,$$

az 1, 2, 3 elemeké:

$$123, 132, 213, 231, 312 \text{ és } 321.$$

A permutációk megalkotását legcélszerűbb oly módon elvégezni, hogy elsőnek írjuk a *legalacsonyabb* komplexiókat és azután a többi a magasság sorrendje szerint állítjuk elő. Evégből csak azzal kell tisztában lennünk, hogy mi módon állíthatjuk elő egyik komplexióból az *utána* következőt (vagyis a közvetlen magasabbat). Lássuk ezt az eljárást egy példán: Legyen adva 6 elemnek ez a komplexiója: 436521. A leg-

közelebbi csoporthoz úgy jutunk, ha jobbról balfelé haladunk addig, míg olyan elemre találunk, amelynek helyébe az átfutott elemek közül magasabbat tehetünk. Ilyen elem a 3; ez az első, amely mögött nagyobb elem is van: 6, 5. Már most 3 helyébe magasabbat teszünk, még pedig a mögötte levők közül a közvetlen magasabbat, tehát itt 5-öt, nem pedig 6-ot. Az 5 előbbre lépve, mögéje kerülnek: 3, 6, 2, 1. Ebből a négy elemből a legalacsonyabb komplexiót alkotjuk meg azáltal, hogy természetes sorrendben írjuk: 1236; tehát az új komplexió lesz: 451236. Ezt az eljárást alkalmazva pl. az 1, 2, 3, 4 elemekből sorrend szerint a következő komplexiók keletkeznek: 1234, 1243, 1324, 1342, . . . s í. t.

Az összes komplexiók ezek:

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143,
2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241,
3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

Vége az 1, 1, 3, 4 elemeké:

1134, 1143, 1314, 1341, 1413, 1431,
3114, 3141, 3411, 4113, 4131, 4311.

Feladatok.

1. Alkossuk meg magasságuk sorrendjében az 1222 elemek összes permutációit!

2. Alkossuk meg sorrendben az a, b, b, c elemek összes permutációit!

3. Alkossuk meg az 1, 2, 3, 4, 5 számoknak 32514 után következő 20 permutáció-csoportját!

4. Alkossuk meg az a, b, c, d, e elemeknek $dcaeb$ után következő 20 permutációját!

154. Permutációk száma. Az n különböző elemből alkotható permutációk számának meghatározására jelöljük egyelőre e számot P_n -nel. Ha P_{n-1} ismeretes, P_n közvetlenül kiszámítható. Az n elem permutációiban minden egyes elem elfoglalhatja az első helyet. Tegyük pl. az első elemet az első helyre. A többi $n-1$ elemet P_{n-1} féleképpen permutálhatjuk még; tehát az első elem P_{n-1} számú komplexióban lesz első helyen. Tegyük most első helyre a második elemet. Ez megint annyiszor

maradhat első helyen, ahányszor a mögötte levő $n-1$ elemet permutálhatjuk, tehát P_{n-1} -szer. (A most előállított komplexiók mind különböznek az előbbiektől, mert hiszen most a második elem van az első helyen, előbb pedig az első volt.) Ha ezt az eljárást folytatjuk, azt találjuk, hogy mindenik elem P_{n-1} komplexióban lesz első helyen. Minthogy pedig az elemek száma n , tehát az n elemből alkotható komplexiók száma :

$$P_n = n \cdot P_{n-1};$$

minthogy pedig :

$$P_1 = 1, \text{ tehát } P_2 = 1 \cdot 2, P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3, \dots$$

és így :

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)n = n! \dots \dots \dots 1.$$

Igy pl. 1, 2, 3, 4, 5, 6 különböző elem permutációinak száma : 1, 2, 6, 24, 120, 720.

Az első n egész szám szorzatának kifejezésére a $n!$ rövidebb jelzöt használjuk ; $n!$ -t az n szorzatosának (*factoriale*) mondjuk.

Ha az elemek között *egyenlők* fordulnak elő, melyeknek egymással való fölcserélése a csoporton nem változtat, a permutációk száma kevesebb.

Legyen pl. adva n golyó, melyek között p fehér színű egészen egyforma ; a többi pedig mind különböző színű. Kérdés, hányféle sorrendben lehet e golyókat egy sorban elhelyeznünk ? Ha minden golyó különböző volna, akkor a komplexiók száma $n!$ volna. Így azonban, minthogy a fehér golyók felcserélése nem ad új komplexiót, a komplexiók száma kevesebb : mondjuk x . Különböztessük most meg egymástól a fehér golyókat, pl. azáltal, hogy egyikre 1 fekete pontot, a másokra 2-t stb. teszünk. Ha most egy bizonyos komplexióban levő, így megkülönböztetett (p számú) fehér golyókat egymással minden lehető módon felcseréljük, akkor ebből a komplexióból $p!$ komplexió keletkezik ; minthogy pedig a különböző komplexiók száma x és mindenikből most $p!$ keletkezik, tehát összesen $x \cdot p!$ komplexió lesz ; de most már mind az n elemet különbözőnek tekintettük, tehát az összes csoportok száma $n!$ Eszerint :

$$x \cdot p! = n!$$

miből tehát az következik, hogy ha az n elem között p egyenlő fordul elő, akkor a permutációk száma :

$$\frac{n!}{p!}$$

Ha az n elem közt nemcsak p egyenlő, hanem ezeken kívül ismét $q, r, \dots$ más elem egymás közt egyenlő, ezekre nézve egészen úgy áll a dolog és az összes permutációk száma :

$$\frac{n!}{p! q! r! \dots}$$

E tört — mint permutációk száma — mindenkor egész számú értékhez vezet, ha csak

$$p+q+r+\dots \leq n.$$

Igy pl. ha 4 elem között 2 egyenlő, a permutációk száma $\frac{24}{2!}=12$. Ha 5 elem között 3 egyenlő, a permutációk száma

$\frac{5!}{3!}=20$. Ha 8 golyó közül 2 fehér, 3 fekete, 2 piros és 1 sárga,

akkor a permutációk száma $\frac{8!}{2! 3! 2! 1!}=1680$.

Feladatok.

1. Alkossuk meg sorrendben az $abcde$ első 20 permutációját!
2. Hányadik permutációja az $abcde$ -nek a $bdaec$? [Megoldás menete : a -val kezdődő permutáció annyi van, ahányszor az utána jövő 4 elem permutálható; tehát $4!=24$. Ezután következnek a b -vel kezdődők, melyekben a második helyen a áll. Ilyen annyi van, ahányszor az utána jövő cde elemek permutálhatók, vagyis $3!=6$. Azután jönnek azok, amelyekben a második helyen c áll. Ilyen megint 6 van. Azután jönnek azok, amelyekben a második helyen d áll. Ezek közé tartozik a mienk is. Ezek között első, amelyekben a van a harmadik helyen. Ilyen csak 2 van : $bdace$ és $bdaec$. A mienk ez a második. Tehát a mi permutációnk a $24+6+6+2=38$ -ik.]
3. Hányadik permutáció a $ceadb$? Hányadik a $dacbe$?
4. Számítsuk ki, hogy az a, b, c, d, e, f elemek hányadik permutációi ezek : $cdbafe, dfbaec, ebacfd$?
5. Alkossuk meg az $abcde$ elemek 57-ik permutációját! [a -val kezdődik 24, b -vel is 24. Az 57-ik tehát c -vel kezdődik. Ebben a cso-

portban a 9-ik. A második helyen van a 6-szor (miért?), tehát az 57-ikben a második helyen b lesz, b után az a , d , e permutációi vannak. Ezek közt a 3-ikat kell keresni.]

6. Alkossuk meg az $abcde$ elemek 75-ik, 89-ik, 100-ik permutációit!

7. Alkossuk meg az $abcdef$ elemek 500-ik, 600-ik és 700-ik permutációit!

8. Hányszor permutálhatók ezek a betűk: $aabbcc$? Hát ezek: $aaabbbcc$?

9. Hány szám alkotható 2 egyesből, 5 hármashból és 3 nyolcasból?

10. Hányszor permutálhatók a *hatalom* szó betűi?

155. Variációk. Adott n elem k -tagú vagy k -adik osztályú variációit nyerjük, ha mindazon különböző elhelyezéseket készítjük el, melyekben az adott n elem közül k elem tetszőleges sorrendben foglaltatik.

(Eszerint n elem n -tagú variációi nem mások, mint a permutációk.)

Igy pl. az 1, 2, 3, 4 elemek 2 tagú variációi:

12, 21, 13, 31, 14, 41, 23, 32, 24, 42, 34, 43;

ugyanezen elemek 3 tagú variációi:

123, 124, 134, 234, 132, 142, 143, 243, 213, 214, 314, 324,

231, 241, 341, 342, 312, 412, 413, 423, 321, 421, 431, 432.

A variációk számát közvetetlenül le lehet vezetni a permutációkéból. E szám meghatározása végett képzeljük az n elem összes permutációit megalkotva. Írjuk e permutációkat egymás alá; és most a k -ik elem után húzzunk egy függélyes vonást végig az összes komplexiókon. Ez a vonás tehát elválasztja az első k elemet minden csoportban a következő $n-k$ elemtől. A vonás baloldalán van az n elem közül kiválasztható k elem mindenféle sorrendben, tehát a k -ad osztályú variáció-csoportok. De minden csoport többször fordul elő; t. i.: olyan permutáció-csoportokból, amelyek egymástól csakis a húzott vonal jobb oldalán álló elemek sorrendjében különböztek, (nem pedig a baloldalon álló elemek sorrendjében,) ugyanaz a variáció-csoport keletkezik; tehát egy és ugyanaz a variáció-csoport annyi permutáció-csoportból lesz, ahányféleképen a vonal jobb oldalán lévő $n-k$ elemet permutálni lehet. E permutációk

száma $(n-k)!$, tehát minden variáció-csoport $(n-k)!$ -szer fordul elő, és így n elem k -tagú variációinak száma:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \dots (n-k+2)(n-k+1).$$

Példák:

6 elem 2-od osztályú variációinak száma: $\frac{6!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30$;

5 elem 3-ad osztályú variációinak száma: $\frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Másként áll a dolog, ha az elemek ismétlése is meg van engedve, azaz ha n elem közül k elemet kell minden lehető módon kiválasztani; úgy is, hogy egy és ugyanazt az elemet vesszük többször.

Ha pl. az n elem a következő $a, b, c, d, \dots$ és ezen n elem közül 2 elemet kell ilyen módon kiválasztani, akkor az első elemet összekapcsoljuk az n elem közül mindenikkel. Ezáltal a következő komplexiókat kapjuk:

$aa, ab, ac, ad, \dots$

szám szerint n -et. Most a második elemet kapcsoljuk össze mindenikkel, miáltal megint

$ba, bb, bc, bd, \dots$

komplexiókat kapjuk s í. t. Mindenik elem így módon n komplexióhoz vezet, tehát az összes, ismétléssel alkotható, másod-osztályú variáció-csoportok száma n^2 .

A harmadosztályú ismétléssel alkotott variáció-csoportokat megkapjuk, ha előbb a másodosztályúakat készítjük el és azután mindenik elemet ezek elé írjuk. Ilyenformán n^3 csoportot kapunk s általában az ismétléssel képzett k -tagú variációk száma n elemnél n^k .

156. Kombinációk száma. Adott n elem k -ad osztályú kombinációit nyerjük, ha az n elem közül minden lehető módon kiválasztunk k elemet, de a kiválasztott elemek sorrendjére nem tekintünk. Így pl. a, b, c elemek másodosztályú kombinációi: ab, ac, bc ; x, y, z, t elemek harmadosztályú kombinációi: xyz, xyt, xzt, yzt .

A kombinációk számát a következő okoskodással határozhatjuk meg: Képezzük n elem k -ad osztályú variációit. Ugyanazon k elem $k!$ csoportban fordul elő, mert k elem $k!$ féleképen permutálható; tehát annyi különböző kombinációs csoport van, ahányszor $k!$ találtatik a variációk összes számában. A variációk száma volt $\frac{n!}{(n-k)!}$, következésként a kombináció-csoportok száma, melyet C_n^k -val jelölünk:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! k!}.$$

E szám alkotását könnyen megjegyezhetjük magunknak:

$$C_n^k = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-k) (n-k+1) \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-k) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}.$$

Látjuk, hogy $1 \cdot 2 \dots (n-k)$ -val rövidíthetünk. A megmaradt tényezőket fordított sorrendben írva:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}.$$

A számlálóban is, a nevezőben is k tényező van. A számlálóban a természetes számsor k száma van n -től kezdve csökkenően, a nevezőben a természetes számsor első k száma van. Pl.: 5 elemből alkotható 3-ad osztályú kombinációk száma:

$$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

6 elemből alkotható 4-ed osztályú kombinációk száma:

$$C_6^4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15.$$

E C_n^k számot $\binom{n}{k}$ -el jelöljük (n a k fölött). Ezek közül $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{n} = 1$.

Az egyes kombinációkat unióknak, a kettőseket ambóknak, a hármasokat ternóknak, a négyeseket kvaternóknak és az ötösöket kvinternóknak nevezzük.

Feladatok.

1. Alkossuk meg az a, b, c, d, e elemek ambóit, ternóit, kvaternóit.
2. Határozzuk meg, hogy 90 elemből hány ambót, hány ternót készíthetünk?
3. 10 elemből hány ambót, hány ternót, hány kvaternót alkotunk?
4. Mennyi a 7 elemből alkotható negyedosztályú kombinációk száma: C_7^4 ? Mennyi C_8^5 , C_9^4 , C_{10}^6 , C_{12}^8 , C_{20}^{15} ?
5. 20 fiút hányféleképpen lehet párba állítani? Nyolc ember búcsuzodik; kettő-kettő kezét fog. Hány kézszorítás történik?

157. Kombinációk ismétléssel. Ha az a, b, c, d, e elemekből oly módon választunk ki kettőt-kettőt, hogy egy és ugyanaz az elem kétszer is választható, akkor az

$$aa, ab, ac, ad, ae, bb, bc, bd, be, \dots de, ee$$

kombinációkra jutunk. Ezeket az adott 5 elem másodosztályú ismétléses kombinációinak nevezzük.

Az a, b elemek harmadosztályú ismétléses kombinációi ezek:

$$aaa, aab, abb, bbb.$$

Feladat. 1. Alkossuk meg az a, b, c elemek harmadosztályú ismétléses kombinációit!

2. Készítsük el az a, b, c elemek ötödosztályú ismétléses kombinációit!

Általában n számú elem k -ad osztályú ismétléses kombinációit úgy alkotjuk meg, hogy az n elemből k elemet minden lehető módon (a sorrendre tekintet nélkül) kiválasztunk, egy-egy elemet többször is téve.

Kérdés, hogy n elemből hány ismétléses k -ad osztályú kombináció alkotható? Ha például adva van ez az öt elem: a, b, c, d, e , és 8-ad osztályú ismétléses kombinációt akarunk alkotni, akkor olyan füzeteket kell készítenünk, melyekben 8 betű áll az adott betűk közül. Ilyen füzet például ez (melyet mindig abc sorban képzelhetünk):

$$bb\ ccc\ eee.$$

Ez a füzet meg van határozva, ha tudom, hogy mely betűk vannak benne [itt b, c, e] és hogy e betűk hányadik

helyen ismétlődnek. Itt a 2, 4, 5, 7, 8-ik helyeken ismétlődnek a betűk. Látjuk tehát, hogy az a, b, c, d, e betűkből és 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számokból, tehát az

$$a, b, c, d, e, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

12 elemből kiválasztott $b c e 2 4 5 7 8$ nyolc elem meghatározza az illető füzetet. És viszont, ha ebből a 12 elemből kiválasztom pl. a következő 8 elemet: $b c d 3 4 6 7 8$, akkor elkészíthetem azt a füzetet, melyben a b, c, d elemek szerepelnek és pedig ismétlődés van a 3-ik, 4-ik, 6-ik, 7-ik, 8-ik helyeken. Ez a füzet:

$$b c c c d d d d$$

[a második és ötödik helyeken nincs ismétlődés, tehát azokon a helyeken változik az elem b -ről c -re, c -ről d -re.]

Eszerint tehát az adott 5 elemből annyi 8-ad osztályú ismétléses kombináció alkotható, ahány egyszerű 8-ad oszt. kombináció készíthető az $a b c d e 2 3 \dots 8$ azaz 12 elemből: azaz

$$\binom{12}{8} = 495.$$

Általában, ha adva van n elem:

$$a, b, c, \dots$$

és ezekből k -ad osztályú ismétléses kombináció alkotandó, akkor éppen úgy okoskodunk, mint előbb. Minden egyes füzet meg van határozva, ha tudom, hogy mely betűk vannak benne és hogy e betűk hányadik helyeken ismétlődnek, vagyis megint az adott n betűből és a 2, 3, 4, $\dots, k$ rendszámokból, tehát összesen $n+k-1$ elemből kiválasztott k elem [melyek között okvetlenül legalább az egyik elem betű lesz (miért?)] meghatározza az illető füzetet. Annyi ismétléses kombináció-füzetet kapunk, ahányszor ebből az $n+k-1$ elemből k elem különféle módon, ismétlés nélkül kiválasztható. E szám pedig

$$\binom{n+k-1}{k}, \text{ tehát}$$

az n elemből ismétléssel alkotható k -ad osztályú kombinációk száma:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Feladat: 1. Hány ismétléses ötödosztályú kombináció készíthető 3, 4, 5, 6, 7, 8 elemből?

2. Hány hetedosztályú ismétléses kombináció készül 2, 3, 4 elemből?

158. Kéttagúak szorzatai és hatványai. Ha $x+a_1$ kéttagú kifejezés szorzandó $x+a_2$ -vel, akkor a szorzatot rögtön rendezve is felírhatjuk. Az első tag x^2 ; oly tagot, melyben x első hatványa szerepel, kétszer kapunk: ha az első szorzóból vesszük az x -et és megszorozzuk a második tényező a_2 tagjával és ha a második tényező x -ét szorozzuk az első tényező a_1 -ével; tehát a szorzat második tagja: $x(a_1+a_2)$. A szorzat harmadik tagja a_1a_2 .

A szorzat tehát:

$$x^2 + (a_1 + a_2)x + a_1a_2.$$

Ha $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)$ szorzatot kell megalkotnunk és ezt mindjárt rendezett alakban akarjuk előállítani, akkor is így járunk el. A legelső tag lesz x^3 ; azokat a tagokat, melyekben x^2 szerepel, úgy kapjuk, hogy két tényezőtől az x -eket, a harmadikból pedig az a -t vesszük tényezőül. Így kapjuk e 3 tagot: a_1x^2, a_2x^2, a_3x^2 ; vagyis az x^2 -et tartalmazó tag lesz: $(a_1+a_2+a_3)x^2$. A következő tagok x -et első hatványon tartalmaznak. Ezeket akkor kapjuk, ha egyik tényezőtől az x -et és a másik kettőtől az a -kat vesszük szorzóul. Így tehát a szorzat következő tagja lesz: $x(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)$. Végre a szorzat utolsó tagja: $a_1a_2a_3$.

Eszerint tehát: $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) = x^3 + x^2(a_1+a_2+a_3) + x(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3) + a_1a_2a_3$.

Éppen így kapnók, hogy:

$$\begin{aligned} (x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4) = & x^4 + x^3(a_1+a_2+a_3+a_4) + \\ & x^2(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4) + \\ & x(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4) + a_1a_2a_3a_4. \end{aligned}$$

Ezen az alakon már láthatjuk, hogy x^3 együtthatója az a betűkből alkotható uniók összege; x^2 együtthatója az a -kból alkotható ambók összege (ambó oly értelemben véve, hogy két a szorzatát alkotjuk); az x együtthatója az a -kból (szorzással) alkotható ternók összege.

Most már általában a következő szorzat:

$$(x+a_1)(x+a_2)\dots\dots(x+a_{n-1})(x+a_n)$$

kifejtése a kombinációk eddig tárgyalt törvényei segítségével eszközölhető. Ami először is a szorzat tagjainak számát illeti, ez, mielőtt bármi összevonás történt volna, egyenlő 2^n -nel. Minden egyes szorzóból ugyanis — függetlenül a többitől — az első vagy második tag választható tényezőnek.

Rendezve azonban a szorzat csak akkor lesz, ha az x egyenlő hatványait tartalmazó tagokat összevontuk. Ha oly tagot akarunk, mely az x^k hatványt tartalmazza, tetszőleges k szorzóban az x tagot választjuk tényezőnek, a többi $n-k$ szorzóban pedig a megfelelő a -t. Eszerint x^k hatvány együtthatóját képezi az

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

elemek $n-k$ -ad rendű egyszerű kombinációinak összege, ezeket a kombinációkat mint szorzatokat tekintve; ez az együttható lesz tehát:

$$a_1 a_2 \dots a_{n-k} + a_1 a_2 \dots a_{n-k-1} a_{n-k+1} + \dots$$

hol így egymásután az a elemek minden $n-k$ tagú kombinációja veendő. Ezen összeget némelykor úgy jelöljük, hogy csak az első (legalaacsonyabb) kombinációt írjuk föl és eléje a Σ összegező jelt írjuk, tehát:

$$\Sigma a_1, a_2 \dots a_{n-k-1} a_{n-k}.$$

Eszerint az egész szorzat a következő:

$$(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_{n-1})(x + a_n) = x^n + \Sigma a_1 x^{n-1} + \Sigma a_1 a_2 x^{n-2} + \dots + \Sigma a_1 a_2 \dots a_{n-1} x + a_1 a_2 \dots a_n$$

Az utolsó tagban az összegező jelet elhagyhattuk, mert n elemnek n -ed rendű kombinációja csak egy van.

Ha az előbbi képletben az a jelzőit elhagyjuk és így e mennyiségek mindnyájan egymással egyenlőkké válnak, a baloldalon $(x+a)^n$ hatvány marad meg, míg a jobboldalon ennek kifejtése foglal helyet. Így keletkezik tehát a *kéttagú (binomiális) tantétel*, mely azonban, mivel a szorzás ismétlése által fejtetett ki, *csakis pozitív egész számú hatványkitevőkre vonatkozik*.

Lássuk most x^k hatványnak együtthatóját. Az $n-k$ tagú kombinációk mindegyikének értéke most a^{n-k} és így, mivel a kombinációk száma C_n^{n-k} , lesz az x^k -t tartalmazó tag:

$$C_n^{n-k} a^{n-k} x^k$$

Eszerint maga az ú. n. *binomiális képlet* :

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \dots + C_n^k a^k x^{n-k} + \dots + C_n^{n-2} a^{n-2} x^2 + C_n^{n-1} a^{n-1} x + a^n.$$

Az utolsó tag tulajdonképpen $C_n^n a^n$ -nek írandó, de az előbbieik szerint :

$$C_n^n = 1.$$

Ha a C_n^k -ra előbb megállapított jelölést használjuk, mely szerint :

$$C_n^k = \binom{n}{k}$$

akkor :

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1} a x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} + \dots + \binom{n}{k} a^k x^{n-k} + \dots + \binom{n}{n-2} a^{n-2} x^2 + \binom{n}{n-1} a^{n-1} x + a^n.$$

Példa : $(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5$.

Feladat : Állítsa elő a tanuló : $(x+a)^6$, $(x+a)^7$, $(x+a)^8$, $(x+a)^9$, $(x+a)^{10}$, $(x+1)^5$, $(x-2)^7$, $(x-3)^5$, $(x-1)^{10}$.

E könyvben mindenütt ismétlődő gondolatmenet alapján a tanuló maga is látja, hogy e vizsgálatok természetszerű folytatása a binomiális képlet érvényének kiterjesztését követeli amaz esetre, midőn a hatványkitevő n többé nem pozitív egész szám. Ez az általánosítás azonban, mely csak többrendbeli megszorítás után lehetséges, e könyv keretén kívül esik.

159. A binomiális együtthatók néhány tulajdonsága. Az $(x+a)^n$ kifejtésében előforduló együtthatókat, melyek voltaképpen az n elemből alkotható kombinációk számát adják, binomiális együtthatóknak nevezzük. E binomiális együtthatóknak néhány nevezetes s magánál a kéttagú kifejezések hatványainak kifejtésénél is alkalmazandó tulajdonságait akarjuk még megállapítani.

Hogy a levezetendő tételeket szavakban is fogalmazhassuk, megállapodunk abban, hogy az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatónál n -et elnevezzük ez együttható *felső számának*, és k -t *alsó számának*.

I.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \dots \dots \dots 1.$$

Ez azt fejezi ki, hogy olyan *binomiális együtthatók, melyek felső számai megegyeznek, alsó számaik összege pedig a felsővel egyenlő, egymással egyenlők.*

A tétel bizonyításánál azt vesszük figyelembe, hogy a baloldalon álló kifejezés az n elemből alkotható k -ad osztályú kombinációk számát adja, a jobboldalon álló pedig az $n-k$ -ad osztályú kombinációk száma; de ha mi n elem közül k elemet kiválasztunk, akkor voltaképpen egyúttal $n-k$ elemet is kiválasztottunk (a megmaradókat) és fordítva; tehát ahány k -ad osztályú kombináció alkotható n elemből, ugyanannyi $n-k$ -ad osztályú kombináció is alkotható. Ezzel a tétel be is van bizonyítva.

Könnyű lesz ennek a tételnek helyességét egyszerű számítással is igazolni. Ugyanis

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}$$

Ha a jobboldalon álló kifejezés számlálóját és nevezőjét $(n-k)!$ -al szorozzuk, akkor a számlálóban $n!$ lesz, tehát:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

és ha e képletbe k helyett $n-k$ -t teszünk, a jobboldala nem változik; a baloldalán pedig az alsó szám $n-k$ lesz tehát;

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

Ezzel tehát a jelzett tételt bebizonyítottuk. A binomiális tételre vonatkozólag ez az összefüggés azt fejezi ki, hogy az x^{n-k} együtthatója megegyezik az x^k együtthatójával, vagyis a kéttagú kifejezés kifejtett n -ik hatványában a szimmetrikus helyeken álló együtthatók számértékei egyenlők (előlről a k -ik a visszaról számított k -ikkal).

II.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \dots \dots \dots 2.$$

amely egyenlőség azt fejezi ki, hogy két binomiális együttható összege, melyek felső számai egyenlők, alsó számai pedig 1-gyel

eltérnek egymástól, egyenlő egy oly binomiális együtthatóval, melynek felső száma eggyel nagyobb, mint a közös felső szám és alsó száma egyenlő a nagyobbik alsó számmal.

Ezt megint könnyen megmutathatjuk, ha tekintetbe vesszük a binomiális együttható jelentését. Ha van $n+1$ elemünk, melyekből a k -ad osztályú kombinációkat képezzük, és egyik elemet kiszemeljük, pl. a -t, akkor az összes kombinációkat két osztályba sorozhatjuk. Vannak olyan kombinációk, melyekben ez az a elem előfordul és olyanok, melyekben nem fordul elő. Hány van mindenikből? Oly kombináció-csoportot, melyben az a elem nem fordul elő, úgy kapunk, ha az a elvételével megmaradó n elem közül választjuk ki a k elemet. Ilyen csoport tehát $\binom{n}{k}$ van.

Olyan kombináció-csoportot pedig, amelyben a előfordul, úgy kapunk, ha az a elvételével megmaradó n elem közül csak $k-1$ -et választunk ki és mindegyikhez k -ik elemnek oda tesszük az a elemet. Ilyen csoport tehát $\binom{n}{k-1}$ van. E két szám összege megadja az $n+1$ elem k -ad osztályú kombinációinak összes számát; tehát:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Megint igazolhatjuk ezt a tételt egyszerű számítással is, ha a baloldalon álló törtet, közös nevezőre hozva, összeadjuk. A közös nevező $k!$ tehát a második tört számlálóját és nevezőjét k -val szorozzuk. Ezáltal lesz:

$$\binom{n}{k-1} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+2) \cdot k}{k!}$$

és

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+2) (n-k+1)}{k!}.$$

E kettő összegében a számlálóban kiemelhető

$n(n-1) \dots (n-k+2)$ közös tényezőül, tehát:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+2) (k+n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{(n+1) n(n-1) \dots (n-k+2)}{k!} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

III.

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \dots \dots 3.$$

Az $(x+a)^n$ kifejtésében előforduló együtthatók összege 2^n .
Ha ugyanis az

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} a + \binom{n}{2} x^{n-2} a^2 + \dots + \binom{n}{n} a^n \text{ -ben mind-}$$

két oldalon $x=1$ és $a=1$ tesszük, akkor a föntebbi egyenlőségre jutunk.

IV.

Ha pedig $x=1$ és $a=-1$ tesszük, akkor a következőt kapjuk:

$$0 = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n.$$

160. A valószínűség mérése. Ha egy kocka lapjain e számok állanak: 1, 2... 6, akkor az, hogy e kockával 7-nél kisebb számot dobunk: *bizonyos*, de hogy pl. 5-nél kisebbet dobunk, az *valószínű*, de nem bizonyos. A matematikus ezt a valószínűséget megméri és pedig *a kedvező esetek számának az összes lehető esetek számához való viszonyával*. Így az említett esetben a kockával dobhatunk 1-est, 2-öst... 6-ost, tehát a lehető esetek száma 6; 5-nél kisebb számok: 1, 2, 3, 4; a kedvező esetek száma tehát 4; tehát annak a matematikai valószínűsége, hogy 5-nél kisebbet dobunk: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Ha minden eset kedvező, akkor a valószínűség egyenlő az egységgel; de ezen esetben az esemény *bizonyos*; a bizonyosság mérőszáma tehát 1.

Ha az esemény bekövetkezésére kedvező esetek száma a , a kedvezőtleneké b , akkor az esemény valószínűsége $v = \frac{a}{a+b}$. Ezzel együtt azt is látjuk, hogy az esemény be nem következésének valószínűsége $\frac{b}{a+b}$. A két valószínűség összege:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1.$$

Ha tehát egy esemény valószínűségét e valódi tört fejezi ki: p , akkor az esemény be nem következésének valószínűsége $1-p$, mert hiszen, amint látjuk, a két valószínűség összege az egység.

Példák: 1. Mi a valószínűsége annak, hogy a kockával 1-est vetünk?

A lehető esetek száma: 6. A kedvező esetek száma: 1. A valószínűség $\frac{1}{6}$.

2. Mi a valószínűsége annak, hogy egy pénzdarabbal írást dobunk?

3. Egy edényben van 5 fehér, 2 fekete és 3 vörös golyó. Mi a valószínűsége annak, hogy vaktában fehér golyót húzunk?

A lehető esetek száma 10. A kedvező eseteké 5; tehát a valószínűség: $\frac{5}{10}$.

Annak a valószínűsége, hogy feketét húzunk: $\frac{2}{10}$, hogy vöröset húzunk: $\frac{3}{10}$.

A három valószínűség összege: $\frac{5}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{10}{10}$.

Annak a valószínűsége, hogy fehér vagy fekete golyót húzunk $\frac{7}{10}$, mert a kedvező esetek száma $5 + 2 = 7$.

4. Carlisle halandósági táblázatában azt látjuk, hogy 6335 14 éves egyén közül 6047-en érik el a 21-ik évüket. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 14 éves egyén 21 éves korát megéri?

Ha szabadna feltennünk, hogy egészen vaktában szemeli ki a halál áldozatait, akkor azt kellene mondanunk, hogy a 14 éves egyénre annak a valószínűsége, hogy megéli a 21-ik évet $\frac{6047}{6335}$ és hogy nem

éli meg, annak a valószínűsége: $\frac{288}{6335} = 0.0455$.

5. Mi volt a valószínűsége annak, hogy a 90 számból álló kis lutrin valaki kvinternót csinál?

A 90 szám közül 5-öt $\binom{90}{5}$ -féleképpen, azaz

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43949268$$

féleképpen választhatunk ki; tehát a keresett valószínűség:

$$\frac{1}{43949268}$$

6. Mi a valószínűsége annak, hogy valaki *ternót* csinál a kis lutrin?

A kis lutrin 5 számot húztak. Ezek közt kell lenni a megtett 3 számnak. 5 számot $\binom{90}{5}$ -féleképpen lehet kiválasztani a 90 közül. Ezen kvinternók közül hányban fordul elő a megtett 3 szám? Gondoljuk, hogy a megtett 3 szám 1, 2, 3. E 3 számhoz a 87 megmaradt közül 2-t kell tennünk, hogy megkapjuk mindazokat a kvinternókat, melyekben az 1, 2, 3 előfordul, vagyis $\binom{87}{2}$ kvinternóban fordul elő a mi ternónk. Az összes esetek száma: $\binom{90}{5}$. A kedvező eseteké: $\binom{87}{2}$; tehát a ternó valószínűsége:

$$\frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{\frac{87 \cdot 86}{1 \cdot 2}}{\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88} = \frac{1}{11748}.$$

7. Mi a valószínűsége annak, hogy ambót csinálunk?

Az előbbi gondolatmenetet követve, azt találjuk, hogy a megtett ambó $\binom{88}{3}$ kvinternóban fordul elő és a lehető kvinternók száma $\binom{90}{5}$, tehát az ambó valószínűsége:

$$\frac{\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{\frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3}}{\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} = \frac{4 \cdot 5}{90 \cdot 89} = \frac{2}{801}.$$

8. Mi a valószínűsége annak, hogy extratót csinálunk?

Ha pl. ezt a számot tesszük: 1, akkor azt találjuk, hogy ez $\binom{89}{4}$ kvinternóban fordul elő; az extrato valószínűsége tehát:

$$\frac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{\frac{89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}}{\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}.$$

Feladatok.

1. Mi a valószínűsége annak, hogy ha az első 10 szám közül 4-et kihúznak, e 4 között lesz: 3, 5?
2. Mi a valószínűsége annak, hogy ha m szám közül 5-öt húznak, ez 5 között lesz bizonyos megadott 3 szám?
3. 100 ember közül 5-öt küldenek el. Mi a valószínűsége annak, hogy A és B elküldetik?

161. **Összetett valószínűség.** Ha több esemény közül egyik vagy másik bekövetkezését tartjuk kedvezőnek, akkor a kedvező eset valószínűsége egyenlő az egyes esetek valószínűségeinek összegével. Így pl.: ha egy edényben 5 fehér, 2 fekete és 4 vörös golyó van, akkor a fehér húzásának valószínűsége $\frac{5}{11}$; a feketéé $\frac{2}{11}$; a fehér vagy fekete golyó húzásáé $\frac{5}{11} + \frac{2}{11} = \frac{7}{11}$.

Ha több (egymástól független) esemény együttes bekövetkezését tartjuk kedvezőnek, akkor ennek valószínűsége az egyes valószínűségek szorzata. Így pl. annak a valószínűsége, hogy két kocka mindenikével 1-est dobunk: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Erre különben közvetlenül az esetek megszámlálásával is felelhetünk.

A két kockával dobás eseteinek száma 36; ugyanis dobhatunk (1, 1), (1, 2), (1, 3) (2, 1), (2, 2) (3, 1), (3, 2) (6, 6) és a kedvező esetek száma csak 1; tehát ennek a valószínűsége $\frac{1}{36}$.

Általában, ha egy esemény valószínűsége p , egy másiké q , akkor e két esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége pq .

Példák. 1. Egy edényben van 2 fehér, 5 fekete és 3 vörös golyó. Mi a valószínűsége annak, hogy két húzásra 2 vörös golyót húzunk, ha a kihúzott golyót megint visszatesszük.

Hogy az első húzásra vörös golyót húzunk, annak valószínűsége $\frac{3}{10}$, hogy a másodikra is vöröset találjunk, annak a valószínűsége $\frac{3}{10}$; a keresett valószínűség tehát $\frac{9}{100}$.

2. Ha nem tesszük vissza a golyót, akkor az eset ugyanaz, mintha azt várjuk, hogy egy húzásra két vörös golyót találjunk. Hogy az elsőre vöröset találjunk, annak valószínűsége $\frac{3}{10}$; hogy a másodikra is vörös jöjjön, annak valószínűsége $\frac{2}{9}$ (mert most már 9 golyó között 2 vörös lesz); tehát a keresett valószínűség $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$. Ha azt kér-

dezzük, mi a valószínűsége annak, hogy ha egyszerre két golyót húzunk, ez a két golyó vörös legyen, akkor így kell okoskodnunk:

A 10 golyó közül 2-t $\binom{10}{2}$ -féleképpen választhatunk ki. A 3 vörös golyó közül 2-t $\binom{3}{2}$ -féleképpen. A valószínűség tehát:

$$3 : \binom{10}{2} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}, \text{ mint előbb.}$$

3. Hány dobást kell tennünk a kockával, hogy éppen olyan matematikai valószínűsége legyen annak, hogy legalább egyszer 1-et dobunk, mint annak, hogy egyszer sem dobunk 1-et?

Az olyan esemény valószínűsége, melynek bekövetkezése éppen olyan biztosra fogható, mint be nem következése: $\frac{1}{2}$; tehát a kérdés az, hogy hány dobást kell tennünk, hogy az 1-es találásának valószínűsége $\frac{1}{2}$ legyen?

Hogy nem találjuk az 1-et az első dobásra, annak valószínűsége $\left(\frac{5}{6}\right)$. Hogy a másodikra sem találjuk, azé $\left(\frac{5}{6}\right)^2$; hogy az x -ikre sem találjuk, azé: $\left(\frac{5}{6}\right)^x$; vagyis kell, hogy $\left(\frac{5}{6}\right)^x = \frac{1}{2}$ legyen, ami x -re kitevős egyenlet; miből:

$$x = \frac{\log 2}{\log 6 - \log 5} = \frac{0.30103}{0.77815 - 0.69897}$$

ami körülbelül 3.8. Vagyis 4 dobásnál már annak a valószínűsége, hogy 1-et dobunk, $\frac{1}{2}$ -nél nagyobb, 3-nál ellenben kisebb.

4. Hány dobást kell tennünk két kockával, hogy éppen olyan matematikai valószínűsége legyen annak, hogy legalább egyszer két 1-et dobunk, mint annak, hogy egyszer sem dobunk két egyest?

Annak valószínűsége, hogy egy dobásra nem dobunk két egyest: $\frac{35}{36}$, hogy kétszeri dobásra nem dobunk két egyest $\left(\frac{35}{36}\right)^2$; hogy x dobásra egyszer sem dobunk két egyest: $\left(\frac{35}{36}\right)^x$ és kell, hogy

$$\left(\frac{35}{36}\right)^x = \frac{1}{2}$$

legyen, miből:

$$x = \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35}$$

Ez a szám 24.6, vagyis annak a valószínűsége, hogy 25 dobásra legalább egyszer 2 egyest dobunk, nagyobb mint azé, hogy egyszer

sem dobunk 2 egyest, ellenben annak a valószínűsége, hogy 24 dobásra legalább egyszer 2 egyest dobunk, kisebb mint azé, hogy egyszer sem dobunk 2 egyest.

162. Ismétlődő események valószínűsége. Ha ismerjük valamely esemény valószínűségét egy húzásnál, mi a valószínűsége több húzás esetében?

Ha valamely esemény valószínűsége p , akkor ellenkezőjének valószínűsége, azaz be nem következésének valószínűsége $1-p$, melyet q -val jelölünk.

Ha n húzást teszünk, akkor megeshetik, hogy az esemény nem következik be egyszer sem, vagy bekövetkezik egyszer, kétszer stb. *Mennyi a valószínűsége annak, hogy n húzás közt 0-szor, mi a valószínűsége, hogy 1-szer, hogy 2-szer stb. következik be?*

Hogy az első húzásra be ne következzen, annak a valószínűsége: q . Hogy a másodikra se következzen be, annak a valószínűsége q^2 stb.; hogy n húzásra ne következzen be egyszer sem, annak valószínűsége q^n .

Hogy az első húzásra bekövetkezzék és a többire ne, annak a valószínűsége pq^{n-1} ; hogy a másodikra következzen be, és a többire ne, azé ugyanennyi stb.; tehát, hogy az n húzás közül csak egyetlen egyszer álljon be az esemény, annak a valószínűsége ezen valószínűségek összege, azaz npq^{n-1} .

Hogy csak kétszer következzen be, annak a valószínűségét így számítjuk ki: Hogy előszörre beálljon, annak a valószínűsége p , hogy előszörre és másodszorra is beálljon, azé p^2 és hogy csakis az első két húzásnál következzen be az eredmény, a többi húzásnál pedig egyszer se, azé p^2q^{n-2} ; de bekövetkezhetik az első és a harmadik, az első és negyedik stb., szóval bármelyik két húzásnál. Az n húzás közt $\binom{n}{2}$ -szer lehet ilyen két húzást kiszemelni, tehát annak a valószínűsége, hogy az n húzás közt csakis 2-szer következzen be az esemény: $\binom{n}{2}p^2q^{n-2}$. Így haladhatunk tovább.

Hogy az n húzás közt m -szer következzen be, annak a valószínűsége:

$$\binom{n}{m}p^mq^{n-m}.$$

E valószínűségek könnyen észben tarthatók. Nem mások, mint a

$$(p+q)^n$$

kifejezésben előforduló tagok.

Igy pl. kérdezhetjük, hogy mi a valószínűsége annak, hogy 10 dobás között 3-szor lesz fej és 7-szer írás? Ennek a valószínűsége az előbbiek szerint $\binom{10}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{120}{1024} = 0.1172$, körülbelül $\frac{1}{85}$, tehát ugyanannyi, mint annak a valószínűsége, hogy egy urnából, melyben 84 fekete és 1 fehér golyó van, éppen a fehéret húzzuk ki.

Feladatok.

1. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kockával 5 dobás közt éppen háromszor találunk 1-et?

2. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy szabályos oktaeder négyszer dobva, kétszer ugyanarra a lapjára esik?

3. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy szabályos dodekaeder tízszer dobva, háromszor ugyanarra a lapjára esik?

4. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy szabályos ikozaeder százszor dobva, nyolcszor ugyanarra a lapjára esik?

5. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy szabályos tetraeder húszszor dobva, ötször ugyanarra a lapjára esik?

163. A Bernoulli-féle tétel. Ha az esemény bekövetkezésének valószínűsége p , a be nem következés valószínűsége $1-p=q$, és n kísérletet akarunk tenni, akkor annak a valószínűsége, hogy m -szer következék be az esemény, mint láttuk:

$$\binom{n}{m} p^m q^{n-m} = w$$

Azt akarjuk kiszámítani, hogy ezen valószínűségek közül melyik a legnagyobb? Jelöljük ezt az előbbi számot w_m -mel. Annak a valószínűsége, hogy $m+1$ -szer álljon be, ugyanezen képlet szerint:

$$\binom{n}{m+1} p^{m+1} q^{n-m-1} = w_{m+1}$$

$$\text{de } \binom{n}{m+1} = \frac{n(n-1) \dots (n-m)}{1 \cdot 2 \dots (m+1)} \text{ és } \binom{n}{m} = \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m}$$

$$\text{vagyis: } \binom{n}{m+1} = \binom{n}{m} \cdot \frac{n-m}{m+1};$$

ha ezen értéket w_{m+1} -be helyettesítjük, akkor:

$$w_{m+1} = \binom{n}{m} \cdot \frac{n-m}{m+1} \cdot p^{m-1} q^{n-m-1} = \binom{n}{m} p^m \cdot q^{n-m} \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q}$$

vagyis:

$$w_{m+1} = w_m \cdot \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q}.$$

Hogy a w_{m+1} kisebb legyen a w_m -nél, kell, hogy a w_m szorzója e kifejezésben 1-nél kisebb legyen, azaz:

$$\frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q} < 1$$

legyen; miből:

$$\frac{n-m}{m+1} < \frac{q}{p}.$$

Ezt elérjük akkor, ha:

$$\frac{n-m}{m} = \frac{q^*}{p} \dots \dots \dots 1.$$

mert ha $\frac{n-m}{m}$ egyenlő $\frac{q}{p}$ -vel, akkor $\frac{n-m}{m+1}$, mely azáltal kelet-

kezik, hogy a nevezőt nagyobbítjuk, kisebb lesz $\frac{q}{p}$ -nél. Ha m

úgy választatik, hogy az I. egyenlet fönnálljon, akkor egyúttal $w_m > w_{m-1}$; mert miként az előbbi okoskodáshoz hasonlóan beláthatjuk,

$$w_m = w_{m-1} \frac{n-m+1}{m} \frac{p}{q}.$$

A jobboldal így is írható:

$$w_{m-1} \left(\frac{n-m}{m} \frac{p}{q} + \frac{p}{qm} \right)$$

és ez az I. folytán:

$$w_{m-1} \left(1 + \frac{p}{qm} \right) > w_{m-1}$$

tehát $w_m > w_{m-1}$, ha az I. egyenlet fönnáll. Egészen hasonlóan

*) Itt természetesen csak azon esetről van szó, midőn ezen egyenlet m -re egész számú értéket szolgáltat.

mutatható meg az is, hogy ez esetben $w_m > w_{m-2}$, w_{m-3} s í. t., valamint az is, hogy $w_m > w_{m+2}$, $w_m > w_{m+3}$ s í. t., szóval, hogy w_m az összes w számok között a legnagyobb.

Az I. egyenlet így is írható :

$$(n-m) : m = q : p.$$

$n-m$ jelenti azon húzások számát, melyekben az esemény be [ne következék, m azokét, melyekben bekövetkezzék ; q a be nem következés valószínűsége egy húzásnál, p a bekövetkezés valószínűsége. E tétel tehát azt fejezi ki, hogy több húzásnál a legnagyobb valószínűsége van annak, hogy az esemény bekövetkezésének száma a kimaradásának számához oly arányban van, mint az esemény bekövetkezésének valószínűsége egy húzásnál a be nem következésének valószínűségéhez. Ez a Bernoulli-tétel.

Igy pl. arra, hogy írást dobjunk, a valószínűség $\frac{1}{2}$. Ha 100 dobást teszünk, a 100 dobás mindenike fej lehet, lehet 1 írás 99 fej ; 2 írás 98 fej ; 25 írás 75 fej ; 50 írás 50 fej stb. Minden egyes esetnek megvan a maga valószínűsége. Például annak a valószínűsége, hogy 25-ször lesz írás és 75-ször fej :

$$\binom{100}{25} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \text{ stb.}$$

Az előbbi, nevezetes tétel már most azt

mondja, hogy a legnagyobb valószínűsége ezek közül annak van, hogy 50 írás és 50 fej lesz. Ennek valószínűsége 0.079.

Ha egy edényben 2 fehér és 1 fekete golyó van és 300 húzást teszünk (mindig visszatéve a kihúzottat), akkor az előbbi tétel szerint a legnagyobb valószínűsége annak van, hogy e 300 húzás közt 200-szor fehéret és 100-szor feketét húzunk, mert egy húzásnál a fehér húzásának valószínűsége $\frac{2}{3}$, a feketéé $\frac{1}{3}$;

a kettő aránya 2 : 1 ; tehát az előbbi tétel szerint $(n-m) : m = 1 : 2$ és $n=300$, tehát $m=200$.

Ha egy kockát 600-szor szándékozunk vetni, akkor meg lehet, hogy az 5-ös (vagy akármelyik más szám) 0-szor, 1-szer... 600-szor esik. Mindegyiknek megvan a maga kis valószínűsége. E kis valószínűségek közt az előbbi tétel szerint legnagyobb az, hogy éppen 100-szor esik 5-ös.

Ha egy szabályos tetraedert szándékozunk 100-szor vetni (vagy 100 tetraedert egyszerre), akkor a legnagyobb valószínűsége van annak, hogy a 100 közül 25-ször ugyanarra a lapjára esik.

Ha két kockát egyszerre vetünk, akkor annak a valószínűsége, hogy mind a kettő egyesre esik: $\frac{1}{36}$, tehát az előbbi tétel szerint pl. 360 dobásnál a legnagyobb valószínűsége van annak, hogy 10-szer esik mind a kettő 1-esre.

164. Előbb láttuk, hogy annak a valószínűsége, hogy n húzás közt azon esemény, melynek egy húzásnál p a valószínűsége, m -szer fordul elő:

$$\binom{n}{m} p^m q^{n-m};$$

tehát annak a valószínűsége, hogy *legfeljebb* m -szer fordul elő, azaz, hogy vagy 0-szer, vagy 1-szer, vagy 2-szer vagy m -szer fordul elő:

$$q^n + \binom{n}{1} p q^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \dots + \binom{n}{m} p^m q^{n-m},$$

annak a valószínűsége, hogy *legalább* m -szer fordul elő, azaz hogy vagy m -szer, vagy $m+1$, vagy $m+2$ -szer stb.

$$\binom{n}{m} p^m q^{n-m} + \binom{n}{m+1} p^{m+1} q^{n-m-1} \dots + \binom{n}{n} p^n.$$

Példa. Mi a valószínűsége annak, hogy öt dobás közt *legalább* háromszor egyest dobunk? Hogy mind az ötször egyest dobjunk, annak a valószínűsége $\left(\frac{1}{6}\right)^5$, hogy négyszer egyest dobjunk, azé $\binom{5}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \frac{5}{6}$, hogy háromszor egyest dobjunk, azé $\binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2$.

Hogy ezen esetek közül egyik bekövetkezik, annak valószínűsége ezek összege, vagyis $\frac{276}{7776} = 0.035$.

Mi a valószínűsége annak, hogy az öt dobás között *legfeljebb* háromszor dobunk egyest? Hogy egyszer se dobjunk egyest, annak a valószínűsége $\left(\frac{5}{6}\right)^5$, hogy egyszer dobjunk egyest, annak a valószínűsége $\binom{5}{1} \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6}$, hogy kétszer dobunk egyest, annak a valószínűsége $\binom{5}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)^2$ és hogy háromszor dobunk egyest, annak a valószínűsége $\binom{5}{3} \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^3$ összesen $\frac{7750}{7776} = 0.997$.

Feladatok.

1. Hány permutáció készíthető a következő szavak betűiből: Heliopolis, Mississippi, Caraccas?

2. Ha n elemnek tizenkétszer annyi négytagú variációja van, mint ahány kéttagú, melyik ez az n ?

3. Tíz kockával hányféleképp lehet 2 hatost, 3 ötöst és 5 kettest dobni? Hányféleképpen lehet 4 ötöst és 6 hármast dobni? Hányféleképpen lehet 5 egyest és 5 kettest dobni?

4. Hatvan ember közül hányféleképpen lehet 12-t kiválasztani?

5. Hányféleképp helyezkedhetik el hat ember egy asztal körül?

6. Hány szám képezhető az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjelekből, ha minden képezendő számban minden számjel egyszer és csak egyszer fordul elő? Hány háromjegyű, hány ötjegyű szám képezhető?

7. Valamely gyűlésben a többség 16, a kisebbség 12 tagból áll. Hetes bizottság választandó, melyben a kisebbség három tagja foglaljon helyet. Hányféleképp történhetik ez?

8. Hány szó képezhető 17 mássalhangzó és 5 magánhangzóból, ha minden képezendő szó két mássalhangzó- és egy magánhangzóból áll?

9. n pont között, melyek közül 3—3 nem fekszik egy egyenesen, hány egyenes vonható?

10. Adva van n pont a síkban, ezek közül p egy egyenesen fekszik, de különben a pontok közt nincs oly három, mely egy egyenesen fekszenék; a pontok összekötése hány egyenest ad?

11. Hány háromszög készíthető e pontok összekötése által?

12. Adva van n pont a térben, melyek közül nincs oly négy, mely egy síkban fekszenék. Hány síkot lehet az n ponton át fektetni, hogy mindenik sík három pontot tartalmazzon közülök?

13. Adva van n pont a térben; ezek közül p egy síkban fekszik; különben a pontok közt nincs oly négy, mely egy síkban fekszenék. Hány oly sík van, mely e pontok közül éppen hármat tartalmaz?

14. Adva van n pont a síkban. Ha e pontokat minden lehető módon egyenesek által összekötjük, ha ezek az egyenesek mind különbözők, ha továbbá nincs köztük párhuzamos és végre nincs köztük oly három egyenes, mely ugyanazon ponton menne keresztül (természetesen az adott n pont kivételével). akkor bebizonyíthatjuk, hogy ezen egyenesek metszőpontjainak száma (nem számítva az eredeti n pontot) a következő:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$$

15. Állítsuk elő $(x-1)^5$, $(x-3)^6$, $(x-5)^6$, $(3x-2)^8$, $\left(x + \frac{1}{2}\right)^5$, $\left(2x - \frac{3}{4}\right)^2$ hatványokat.

1. Állítsuk elő $(1+i)^{10}$, $(1-i)^{12}$, $(1+i)^7 + (1-i)^6$, ha $i = \sqrt{-1}$.

17. Ha A a páratlan és B a páros helyen álló tagok összege $(x+a)^n$ kifejtésében, akkor:

$$A^2 - B^2 = (x^2 - a^2)^n.$$

[Ekkor ugyanis $(x+a)^n = A+B$ és $(x-a)^n = A-B$. E két egyenletből összeszorzással keletkezik a tétel.]

18. Melyik a középső tag $(1+x)^{2n}$ kifejtésében?

19. Ha $(a+x)^n$ kifejtésében az egymásután jövő tagok $t_0, t_1, t_2, \dots$ mekkorák az $(a-x)^n$ kifejtésében e tagok? Mekkorák az $(a+ix)^n$ kifejtésében ezek a tagok?

20. Ha $t_0, t_1, t_2, \dots$ s ú. t. $(a+x)^n$ kifejtésének egymásután következő tagjait jelentik, akkor:

$$(t_0 - t_2 + t_4 - \dots)^2 + (t_1 - t_3 + t_5 - \dots)^2 = (a^2 + x^2)^n.$$

[Az $(a+ix)^n$ sorfejtését készítjük el, ezután az $(a-ix)^n$ -ét és e kettőt összeszorozzuk.]

21. Egy A esemény bekövetkezésének valószínűsége: $\frac{2}{3}$, B -é, mely tőle független, $\frac{3}{4}$. Mi a valószínűsége annak, hogy $\alpha)$ A vagy B áll be, $\beta)$ hogy A és B következik be, $\gamma)$ hogy A bekövetkezik és B nem, $\delta)$ hogy A nem áll be és B igen és $\epsilon)$ mi a valószínűsége annak, hogy sem A , sem B nem létesül?

22. Mi a valószínűsége annak, hogy két kockával összesen 7-et dobunk? [A lehető esetek száma: 36, 7-es előállhat a következő módokon: az első kocka 1-esre, a második 6-osra esik; az első 2-esre a második 5-ösre s í. t. folytassuk.]

23. Mi a valószínűsége annak, hogy két kockával összesen 8-at dobunk? Mennyi a valószínűsége annak, hogy 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 vagy 12-t dobunk összesen?

24. Mennyi a valószínűsége annak, hogy két kockával összesen 6-nál többet dobunk?

25. Mi a valószínűsége annak, hogy 3 kockával összesen 11-et dobunk?

26. Számítsuk ki a valószínűségét annak, hogy 3 kockával összesen: 3-at, 4-et, 5-öt, 6-ot, 7-et, ... 17-et, 18-at dobunk?

27. Hány dobást kell tennünk 2 kockával, hogy ép olyan valószínű legyen, hogy két 1-est dobunk, mint hogy nem dobunk 2 egyest. Hány dobást kell tennünk 3 kockával, hogy éppen olyan valószínűre foghassuk, hogy 3 egyest dobunk, mint hogy ez nem áll be?

28. Egy gyűlésben 17-en vannak; közülük 11 az egyik párton, 6 a másik párton van. Sorshúzással 3-as bizottságot választanak. Mi a valószínűsége annak, hogy ebben a 3-as bizottságban a kisebbség tagjai többségben lesznek? [Vagyis közülök 2, vagy 3-ra esik a sors-húzás.] Mi volna a valószínűsége annak, hogy egy 5-ös bizottságban jut többségre a kisebb párt?

29. Ha a képviselőházban m kormánypárti és n ellenzéki képviselő van és egy r tagú bizottságot választanak sorshúzással, mi a valószínűsége annak, hogy ebben k kormánypárti lesz?

30. Mi a valószínűsége annak, hogy valaki egy 50 jegyű lutriban ternót csinál, ha egyszerre (úgy mint 90-es lutriban) 5 számot húznak? Mi a valószínűsége annak, hogy egy a jegyű lutriban ternót csinál, ha egyszerre k számot húznak?

31. Ha 32 kártya közül vaktában 4-et húznak, mi a valószínűsége annak, hogy mind a 4 vörös lesz? Mi a valószínűsége annak, hogy mind a 4 egyszínű?

32. Mi a valószínűsége annak, hogy ha n -szer feldobunk egy pénzdarabot, fej és írás mindig váltakozva fordul elő?

33. Egy urnában a fehér és b fekete golyó van. Egyszerre húzunk r golyót ($r < a$). Mi a valószínűsége annak, hogy csupa fehéret húzunk? [Legyen $a = 7$, $b = 5$, $r = 4$.]

34. Egy edényben van 10 golyócska. Vaktában kihúzunk belőle egy marékka. Mi a valószínűsége annak, hogy páros számút húzunk? Mi a valószínűsége annak, hogy páratlant találunk? [Páros lehet: 2, 4, 6, 8, 10 és pedig 2 golyócska $\binom{10}{2}$ féleképpen, 4 golyócska $\binom{10}{4}$ féleképpen stb húzható. Folytassuk.]

35. n babszem közül vaktában egy marékka kiveszünk (az egész is belefér egy marékba). Mi a valószínűsége annak, hogy párosat húztunk, mi a valószínűsége annak, hogy páratlant találtunk? Mennyi a kettő közötti különbség? [L. a 375. lap IV. formuláját!]

TARTALOM.

	Lap
I. Az algebra jelei	3
II. A negatív számok	12
III. Algebrai egész kifejezések összevonása	17
IV. Algebrai egész kifejezések sokszorozása	31
V. Az osztás és a törtek	40
VI. A legfontosabb szorzatok alakjai	55
VII. Közös osztó és közös többes	64
VIII. Az elsőfokú egyenlet	82
IX. Az elsőfokú egyenletrendszer	115
X. A négyzetgyök és a másodfokú egyenlet	136
XI. A köbgyök	170
XII. Negatív hatványkitevők, számrendszerek	180
XIII. Tört hatványkitevők	201
XIV. A logaritmus	224
XV. Számítási és geometriai sor	250
XVI. Kamatos-kamat számítás	258
XVII. Végtelen geometriai sor	278
XVIII. Az algebra és geometria kapcsolata	291
XIX. Másodfokú egész függvények	320
XX. Elsőfokú határozatlan egyenletek	349
XXI. A kapcsolástan elemei	361

Nélkülözhetlen iskolai kézikönyvek

KELEMEN (Wolff) BÉLA :

Magyar és német zsebszótár — Tekintettel a két nyelv szólásaira. — Harmadik javított és bővített kiadás. —

I. Német-magyar. II. Magyar-német. I. Német-magyar rész. Ára vászonkötésben ... **K 2.20**

II. Magyar-német rész. Ára vászonkötésben ... **K 2.20**

A két rész együtt, félbörkötésben ... **K 4.40**

— **Magyar és német kézi szótár.** — Tekintettel a két nyelv szólásaira. — I. Német-magyar rész. — Ára félbörkötésben ... **K 7.50**

II. Magyar-német rész. — Ára félbörkötésben ... **K 8.50**

A két rész egybekötve **K 16.** —

— **Jó magyarság.** Tanácsadó a magyar nyelvtan és helyesírás kétséges eseteiben. Ára kötve ... **K 2.** —

— **A magyar helyesírás kis szótára.** Keskeny kötet, ára kötve ... **K 1.** —

Fűzve ... **K —.60**

SCHMIDT JÓZSEF : Latin-

magyar zsebszótár a középiskolák számára. 2 kiadás.

I. Latin-magyar rész. A tulajdonnevek tárával. Vászonkötésben ... **K 2.80**

II. Magyar-latin rész. Vászonkötésben ... **K 2.** —

A két rész együtt, félbörkötésben ... **K 4.80**

SIMOMYI ZS. : Helyes ma-

gyarság. Kötve ... **K 3.** —

— Iskolai helyesírás

Ára ... **K —.50**

— Helyesírási szótár.

Bevezetésül a hivatalos iskolai helyesírás újításai ... **K —.20**

— Ugyanaz, fali tábla alakjában

... **K —.12**

UJVÁRY BÉLA : Francia és magyar zsebszótár.

I. Francia-magyar. II. Magyar-francia. Két rész félbörkötésben. Ára ... **K 5.** —

Fr.-magyar rész. Kötve **K 2.40**

M.-francia rész. Kötve **K 2.40**

Középiskolai Műszótár.

Az Országos Középiskolai Tanáregyesület

megbízásából, számos szakember közreműködésével szerkesztette :

Simonyi Zsigmond. a Magyar Nyelvőr szerkesztője. A Vallás- és Közoktatásügyi Magyar királyi Ministerium támogatásával kiadja

Az Országos Középiskolai Tanáregyesület. Bolti ára ... **K 8.** —

Kaphatók az ATHENAEUM irodalmi és nyomdai részvénytársulatnál Budapest, VII., Rákóczi-út 54. szám.

Minden osztály tanulói részére kiválóan alkalmas jutalomkönyv. — Külön kötetekben. — Olcsó kiadás iskolai könyvtárak és jutalomkönyvek számára :

NAGY MAGYAROK ÉLETE

IRTA: ————— Diszesen bekötve. ✂
BENEDEK ELEK Kötetenként kötve K 1.50

Régóta érzett hiányt pótoltt Benedek Elek, midőn a Nagy Magyarok Élete megírásával oly könyvet adott a tanuló ifjuság kezébe, mely *megdicsőült nagyjainkat a legrégibb kortól mai napig ismerteti*. A Nagy Magyarok Életé-ben száznál több jelesünk életével találkozunk az olvasó. Hogy a Nagy Magyarok Életé-t minden tanuló olvashassa, abból jutányos iskolai kiadást rendeztünk, melynek ára kötetenként csinosan bekötve 1 K 50 f.

A Nagy Magyarok Életéből eddig a következő kötetek jelentek meg :

- I. kötet: Attila. Árpád. Szent István. Szent László. Könyves Kálmán. IV. Béla. Számos képpel. Ára bekötve ... K 1.50
- II. kötet: Nagy Lajos. Hunyady János. Mátyás király. Számos képpel. Ára bekötve ... K 1.50
- III. kötet: Werbőczy István. Zrínyi Miklós, aszige-tvári hős. Tinódy Lantos Sebestyén. Balassa Bálint. Báthory I. Számos képpel. Ára kötve K 1.50
- IV. kötet: Bocskay István. Bethlen Gábor. Pázmán Péter. Szenczi Molnár Albert. Apáczai Csere János. Számos képpel. Ára bekötve ... K 1.50
- V. kötet: Zrínyi Miklós, a költő és hadvezér. Thököly Imre. Számos képpel. Ára bekötve ... K 1.50
- VI. kötet: II. Rákóczi Ferenc. Zágoni Mikes Kelemen. Számos képpel. Ára bekötve ... K 1.50
- VII. kötet: Bessenyei Gy. Révai Miklós. Kazinczy F. Gvadányi J. Számos képpel. Ára kötve ... K 1.50
- VIII. kötet: Csokonai Vitéz Mihály. Kisfaludy S. Kőrösi Csoma S. Számos képpel. Ára bekötve K 1.50
- IX. kötet: Berzsenyi Dániel. Kölcsey F. Kisfaludy Károly. Katona J. Számos képpel. Ára kötve K 1.50
- X. kötet: gróf Széchenyi István élete és működése. Számos képpel. Ára kötve ... K 1.50

Kaphatók az ATHENAEUM irodalmi és nyomdai részvénytársulatnál, Budapest, VII. kerület, Rákóczi-út 54. szám.
 ☞☞ Megrendelhető minden könyvkereskedésben. ☞☞