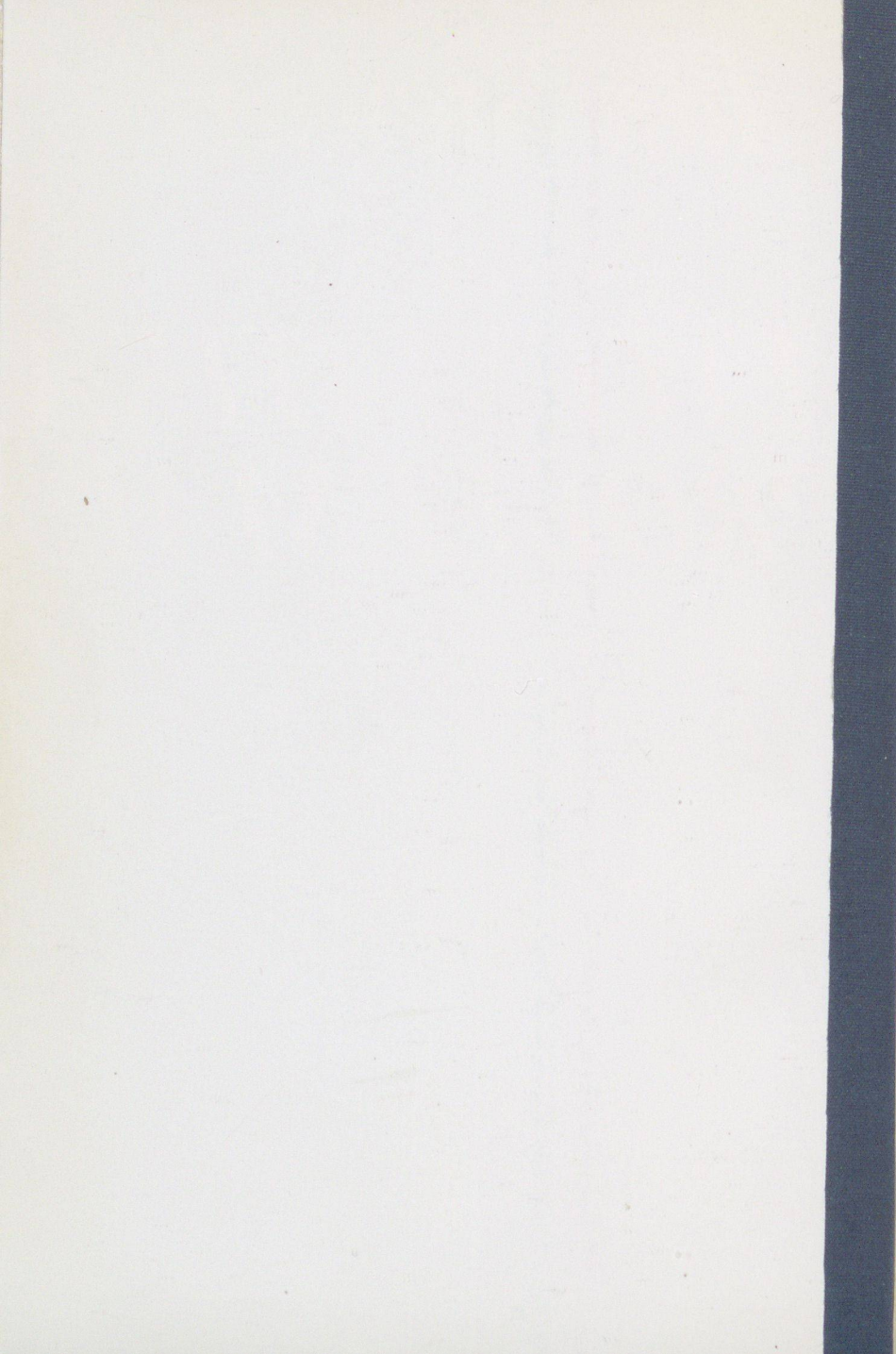


Ian Stewart
A
MATEMATIKA
PROBLÉMÁI

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST



198155

A MATEMATIKA PROBLÉMÁI

IAN STEWART

MTA
KIK



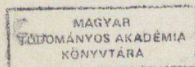
AKADÉMIAI KIADÓ · BUDAPEST 1991

686438

A mű az Oxford University Press alábbi kiadványának fordítása:
The Problems of Mathematics © Ian Stewart 1987

Fordította: FREUD RÓBERT

Lektorálta: LACZKOVICH MIKLÓS



ISBN 963 05 6009 7

Kiadja az Akadémiai Kiadó, Budapest

Első kiadás: 1991

Hungarian translation © Freud Róbert, 1991

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a nyilvános előadás, a rádió- és televízióadás, valamint a fordítás jogát, az egyes fejezeteket illetően is.

Printed in Hungary



ELŐSZÓ

A matematika nem borítólappal határolt és rézkapcsok közé szorított könyv, amelynek tartalmát elegendő türelemmel kiismerhetjük; nem bányá, amelynek kincseit birtokba venni esetleg soká tarthat, ám ezek csak korlátos számú eret és réteget töltenek meg; nem talaj, amelynek termékenységet a sorozatos aratások hozama kimerítheti; nem földrész vagy óceán, amelynek területe feltérképezhető és körvonala meghatározható: a matematika éppoly határtalan, mint az a tér, amelyet túl szűknek érez törekvéseihez; lehetőségei éppoly végtelenek, mint a csillagász szeme előtt szüntelenül sűrűsödő és sokasodó világok; éppoly képtelenség őt kijelölt határok közé szorítani vagy örök érvényű definíciókra korlátozni, mint az élet eszmélő erejét, amely ott szunnyad minden parányi részben, az anyag minden atomjában, a levél és a bimbó minden egyes sejtjében, és mindig készen áll arra, hogy a növényi és állati létet új formákkal gazdagítsa.

James Joseph Sylvester

TARTALOM

	Ábrák jegyzéke	9
	Interjú egy matematikussal	11
1	A matematika természete	15
2	Drága prímek	25
3	Marginális érdekesség	36
4	Euklidész elhanyagolt könyve	48
5	Párhuzamos gondolatok	59
6	A csodakorsó	69
7	Kimúlt mennyiségek kísértetei	80
8	A párbajhős és az óriás	97
9	Csomó hűhó ej, miért	111
10	Színes tintákról álmodom	129
11	Feltesszük az i-re a pontot	139
12	Ringyó szerencse	151
13	A természet matematikája	162
14	Kész katasztrófa!	180
15	A káosz rendje	192
16	A két és feledik dimenzió	204
17	A magányos hullám	217
18	Imigyen szóla Al-Khvárizmi	230
19	A kiszámíthatóság határai	239
20	Séta az aknamezőn	249
	A fordító utószava	262
	Magyar nyelvű irodalom	263
	Név- és tárgymutató	264

ÁBRÁK JEGYZÉKE

1	A ciklois	20
2	A kör területének meghatározása a kimerítés módszerével	52
3	A Möbius-szalag	113
4	A tórusz és a Klein-kancsó	114
5	A keresztsapka	115
6	A Lorenz-attraktor	200
7	Von Koch hópehelygörbéje	207
8	A komplex sík egy leképezéséből származó fraktál	215
9	A szoliton egy mechanikus modellje	222

INTERJÚ EGY MATEMATIKUSSAL ...

A riporter: Emberfia Tamás,
aki az „utca emberét” képviseli

Az igazat mondd, csak kissé ferdítve.

Emily Dickinson

Emberfia: Jó estét kívánok, kedves nézőink, szeretettel köszöntöm Önöket ismét a Nagy agyak című sorozatban, ahol bekukkantunk a tudósok fejébe, és kiderül, mi foglalkoztatja őket. Ma esti vendégünk egy matematikus. [A matematikus felé fordul.] Örülök, hogy megismerhetjük.

Matematikus: Köszönöm és szép jó estét mindenkinek.

Emberfia: Az előző adásokban egy fizikus mesélte el, hogyan pattannak le az atomok a kristályokról; egy vegyész beszélt újfajta műanyagokról; egy biológus magyarázta el a zsiráfembrió korai fejlődési szakaszát; egy mérnök vázolta fel a tömegközlekedés új távlatait; és egy csillagász számolt be az ismert világegyetem legtávolabbi galaxisának a felfedezéséről. Nos, tisztelt Matematikusunk: Ön milyen csodákat tartogat a számunkra?

Matematikus: Talán arról szólnék, hogyan nyerhetünk egy TOP, de nem-DIFF 4-sokaságot a Kummer-felület bemetszésével. És itt van ez a fantasztikus kohomológia metszetalak, amely az E_8 kivételes Lie-algebrához kapcsolódik, és ...

Emberfia: [gúnyosan] Nagyszerű!

Matematikus: [meglepődve és elégedetten] Köszönöm.

Emberfia: És ez a sok halandzsa jelent is valamit?

- Matematikus: [még mindig meglepetten, de már elégedettség nélkül] Természetesen! Ez volt az évtized egyik legfontosabb felfedezése!
- Emberfia: El tudná *magyarázni* úgy, hogy közönséges halandók is megértsék?
- Matematikus: Nézze barátocskám, ha közönséges halandók is megérthetnék, akkor ehhez a dologhoz nem kellenének a matematikusok, nem gondolja?
- Emberfia: Nem érdekelnek a technikai részletek. Csak általános benyomást szeretnék kapni, miről is van szó.
- Matematikus: Általános benyomás szintjén sem érezheti valaki, hogy miről van szó, ha nem érti a technikai részleteket.
- Emberfia: Miért nem?
- Matematikus: [aki erre még sohasem gondolt] Hát ... mert ez egyszerűen lehetetlen.
- Emberfia: A fizikusoknak mintha sikerülne.
- Matematikus: Ők a mindennapos tapasztalati tényekkel foglalkoznak.
- Emberfia: Bizonyára. „Hogyan hat a gluon antiárnyékolás egy kvark színtöltésére.” „Vezetési sávok a gallium-arzenidben.” Mindennap ezekbe botlunk munkába menet, nemde?
- Matematikus: Igen, de ...
- Emberfia: Meggyőződésem, hogy a fizikusok az összes technikai részletet éppolyan csodálatosnak tartják, mint Ön. De nem hagyják, hogy ezek ennyire előtérbe tolakodjanak.
- Matematikus: Hogyan magyarázzam el rendesen a dolgokat, ha átugrom a részleteket?
- Emberfia: Hogyan érthetné meg bárki más, ha nem ugorja át?
- Matematikus: Ha elsiklom a kényes részek felett, akkor egyes dolgok nem lesznek teljesen igazak! Hogyan beszéljek sokaságokról annak említése nélkül, hogy a tételek csak véges dimenziós, parakompakt, üres határvonalú Hausdorff-sokaságokra érvényesek?
- Emberfia: Hazudjon egy kicsit.
- Matematikus: Nem tehetem!
- Emberfia: Miért nem? Mindenki *más* azt teszi.

- Matematikus: [némi kísértést érez, de egy egész élet beidegződése ellen kell küzdenie] Az igazat *kell* mondanom!
- Emberfia: Feltétlenül. Egy kis hajlékonyság azért talán megengedhető, ha ennek révén más emberek is megérthetik, hogy Ön mivel foglalkozik.
- Matematikus: [bizonytalanul] Hát ...
- Emberfia: Akkor kezdjük. Mi a matematika legfontosabb feladata?
- Matematikus: Problémák megoldása.
- Emberfia: Remek. Mesélje el, mik ezek a problémák, honnan származnak, hogyan lehet őket megoldani, milyenek az emberek, akik megoldják őket, mire megyünk a kapott válaszokkal, mely problémákat nem oldották még meg, hogyan befolyásolja a megoldás vagy a sikertelenség a véleményünket arról, mi a matematika és merre tart. Valami ilyesmit. A matematika egészét — dióhéjban.
- Matematikus: Az *egész*ről szó sem lehet! Messze túl nagy. Megteszem, ami tőlem telik, de igen sok területről halvány fogalmam sincs, és ezeket ki kell hagynom.
- Emberfia: Rendben van. Sokak számára már az is óriási meglepetés lesz, hogy a matematikában egyáltalán történik valami új.
- Matematikus: És nem tudom teljesen elhagyni a technikai részeket sem. Úgy értem, nem beszélhetek csoportelméleti kutatásokról anélkül, hogy nagyjából el ne mondanám, mi az a csoport. Ahogy egy fizikus sem beszélhet fekete lyukakról a görbült téridő vázolása nélkül.
- Emberfia: Rendben van. De ne vigye túlzásba. Úgy értem ...
- Matematikus: ... ne magyarázzam el, hogy egy pszeudo-Riemann-sokaságon C^r atlaszt feltéve hogyan következik analitikus atlasz létezése.
- Emberfia: Ezt magam sem tudtam volna jobban megfogalmazni.
- Matematikus: [kétérdőn, de megrészegülve saját merészségétől] Nos, talán *megpróbálhatom* ...

A MATEMATIKA TERMÉSZETE

Lemegyek háromszor, harmadom, ötödöm hozzám adódik; visszatérek, feltöltöttem. Mely mennyiség mondja ezt?

Ahmesz, az Írnok — Rhind-papirusz

A matematika egyik legnagyobb problémája az, hogyan magyarázza el mindenki másnak, mivel is foglalkozik. Technikai csapdái, jelrendszere, formalizmusa, zavarba ejtő terminológiája, a hosszas számolások iránti látszólagos vonzódása: mindezek inkább elrejtik igazi arcát. A zenész szörnyűlködne, ha valaki a művészetét „egy sor vonalra írt különleges ákombákomként” összegezné; pedig ez minden, amit a gyakorlatlan szem a kottalapon észrevesz. A nagyság, a szenvedés, a lírai szárnyalás és a kétségbeesés disszonanciája: nem könnyű feladat ezeket az ákombákomból kiolvasni. Jelen vannak benne, de csak kódolt alakban. Ugyanígy, a matematika jelrendszere is csupán a kódolt alak, és nem a lényeg. Itt is megtalálható a nagyság, a szenvedés és a lírai szárnyalás. Van azonban egy nagy különbség. Még az alkalmi zenehallgató is élvezheti a muzsikát, csak az előadóknak kell ismerniük az ákombákom titkát. A zene közvetlenül hat szinte mindenkire. Matematikai előadásként azonban legfeljebb a reneszánsz viadalok juthatnak eszünkbe, amikor vezető matematikusok nyilvánosan küzdöttek meg egymás feladataival. Talán hasznos lenne ennek felelevenítése; ám hatásában ez inkább a birkózásra emlékeztet, mintsem a zenére.

A zenét többféle szemszögből nézhetjük: a hallgatóéból, az előadóéból, a zeneszerzőéből. A matematikában a hallgatónak nincs megfelelője; és ha lenne is ilyen, őt inkább a zeneszerző, és nem az előadó érdekelné. Ami igazán izgalmas, az az új matematika teremtése, nem pedig annak földi gyakorlata. A matematika nem jelekről és számolásokról szól. Ezek csupán a szakma kellékei — nyolcad- és negyedhangjegyek és újjgyakorlatok. A matematika *gondolatokról* szól. Főképpen pedig arról, ahogyan az egyes gondolatok egymáshoz kapcsolódnak.

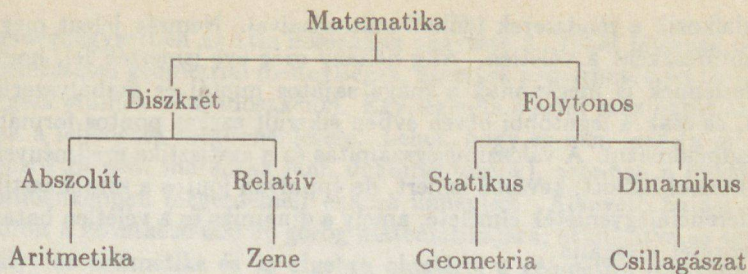
Ha egy bizonyos információ ismert, mi az, ami ebből szükségszerűen következik? A matematika célja, hogy az ilyen kérdéseket megértse. Ehhez lehámozza a problémáról az esetleges, lényegtelen vonásokat, és megpróbál a probléma mélyére hatolni. Nem egyszerűen csak a helyes választ akarjuk megkapni; sokkal inkább meg akarjuk érteni, miért remélhető egyáltalán válasz, és miért lesz az ilyen alakú. A jó matematika takarékos és mindig tartogat meglepetéseket. Az elsődleges azonban, hogy *jelentősége* legyen.

Nyersanyagok

A matematikus szót hallva, azt hiszem, sokak képzeletében egy komoly, szemüveges fickó jelenik meg, aki elmélyülten hajol a végtelen számoszlopok fölé. Olyan superkönyvelő féle. Gondolom, ez a kép inspirálhatta az egyik kiváló számítástechnikai szakembernek azt a fontos előadása során tett megjegyzését, mely szerint „amit a matematikában csak papír és ceruza segítségével meg lehetett oldani, azt mára mind megoldották”. Ez teljes tévedés, és ugyanilyen hamis a fenti kép is. Kollégáim között található lelkes sárkányrepülő, elsőosztályú hegymászó, kistermelő, aki egy traktort percek alatt apró darabokra tud szétszedni, költő és krimíró. És egyikük sem túl jó számoló.

Amint mondtam, a matematika lényegét nem számolások, hanem gondolatok alkotják. Valaki egyszer kimondott egy prímszámokra vonatkozó tételt, azt állítva, hogy ezt sohasem fogják bebizonyítani, mert a prímek tulajdonságait nem lehet jól megfogalmazni. Carl Friedrich Gauss öt perc alatt adott egy bizonyítást, megjegyezve (kissé fanyarul), hogy „nem *fogalmazás*ra, hanem *fogalmakra* van szükség”. A számolás csak eszköz a célhoz vezető úton. Ha egy tételt csak rengeteg számolás árán sikerült igazolni, az eredményt mindaddig nem értettük meg igazán, amíg nem derítettük ki azokat az okokat, amelyek a számolás hatékonyságát biztosították, és amíg mindez nem vált természetessé és szükségszerűvé. Nem minden gondolatból lesz matematika; de minden jó matematikához kell gondolat.

Pitagorasz és iskolája a matematikát négy ágra osztotta, a következő oldalon látható módon:



Ezek közül három ma is a matematikai ihlet alapvető forrása. A negyedik, a zene, már nem játszik ugyanilyen főszerepet, de új értelmezést nyerhet mint az algebrai vagy kombinatorikai megközelítésmód. (Hozzátehetjük, hogy a matematikusok gyakran tehetségesek a zenében is.) Ezt a négy ágat a modern matematika egy ötödikkel gyarapította: Szerencse Kisasszonnyal. Így a matematikai gondolatoknak ma már legalább öt különböző forrása van: a szám, a forma, az elrendezés, a mozgás és a véletlen.

Legalapvetőbb és legismertebb a szám. A számfogalom eredetileg bizonyára a számlálásból alakult ki: „számon” kellett tartani a javakat, a napokat, az ellenségeket. Hosszúságok és súlyok mérése elvezetett a törtekhez és a „valós” számokhoz. A matematikai képzelőerő egyik nagy alkotásaként megszülettek a „képzetes” számok, mint például a $\sqrt{-1}$. Ettől kezdve a matematika többé már nem volt ugyanaz. Az alak vagy forma elvezet a geometriához: nemcsak ahhoz a pedáns stílusú szabványgeometriához, amelyért régebben Euklidész okoltuk, hanem a modern hajtásokhoz is, a topológiához, a szingularitáselmélethez, a Lie-csoportokhoz és a mértékterekhez. Újszerű geometriai alakzatok — fraktálok, katasztrófák, nyalábok, attraktorok — ma is új fejlődési irányokat nyitnak a matematikában. Ha a tárgyak különféle szabályok szerinti elrendezésére vonatkozó problémákat nézzük, máris eljutottunk a kombinatorikához, a modern algebra és a számelmélet bizonyos részeihez, és ahhoz a „véges matematika” néven ismertté váló területhez, amely a számítástudomány egyik alapja. A mozgás vizsgálatából — ágyúgolyók, bolygók és hullámok mozgásának a tanulmányozásából — kialakult az analízis, a közönséges és a parciális differenciálegyenletek elmélete, a variációszámítás és a topológikus dinamika. A matematikai kutatások számos nagy területe

foglalkozik a rendszerek időbeli változásaival. Nemrég jelent meg új alkotórészként a véletlen. Alig néhány száz éve ismerték fel, hogy a véletlennek is megvannak a maga sajátos mintái és szabályszerűségei, és csak a legutóbbi ötven évben sikerült ezeket pontos formában megfogalmazni. A valószínűségszámítás és a statisztika eredményeiről mindenki hallott; kevésbé ismert, de éppolyan fontos a sztochasztikus differenciálegyenletek elmélete, amely a dinamika és a véletlen hatások ötvözetét vizsgálja.

A hajtóerő

A matematika hajtóerejét a *problémák* adják. Jó probléma az, amelynek megoldása a zsákutcák söprögetése helyett új távlatokat nyit. A legtöbb jó probléma nehéz: a matematikában — éppúgy, mint az élet más területein — ritkán kap az ember valamit ingyen. Azonban nem minden nehéz probléma jó is egyben: az intellektuális súlyemelés kifejelezhet ugyan szellemi izmokat, de ki akarja az agyát izmokkal gúzsba kötni? A matematikai inspiráció másik fontos forrását a *példák* jelentik. Egy igazán szép, egyetlen jól megválasztott példára koncentrált, önmagában kerek egész matematikai eredmény gyakran magában hordozza egy általános elmélet csíráját, amelyben a példa tetszés szerint feldiszlíthető apró részletté válik. E két dolgot kombinálva, matematikai problémákból fogok példákat mutatni. A legkülönbözőbb korokból veszem őket, hogy hangsúlyozzam a matematikai gondolkodás folytonosságát. Az előforduló szakszavakat később magyarázom meg.

- (1) Van-e olyan tört, amelynek a négyzete pontosan 2-vel egyenlő?
- (2) Megoldható-e az általános ötödfokú egyenlet gyökjelekkel?
- (3) Milyen alakú a leggyorsabb esésű görbe?
- (4) Lehet-e a 4-dimenziós térben a standard sima struktúrán kívül másikat is megadni?
- (5) Van-e hatékony számítógépes program egy adott szám prímtényezőinek a meghatározására?

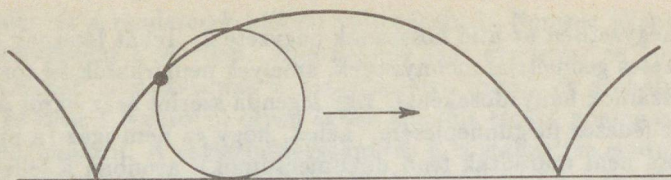
Mindegyik problémához szükséges némi kommentár és előzetes magyarázat, vegyük őket sorra.

Az elsőre már a régi görögök megadták a — nemleges — választ. A felfedezést a pitagoraszai iskolának tulajdonítják i. e. 550 tájáról. Fontos kérdésről volt szó, ugyanis a görög geometerek tudták, hogy az

egységnégyzetben az átló hosszának négyzete 2. Tehát léteznek olyan természetes geometriai mennyiségek, amelyek nem írhatók fel törtként (egész számok hányadosaként). Egy legenda szerint száz ökröt áldoztak a felfedezés megünneplésére. Lehet, hogy ez nem igaz (a pitagoreusoktól nem maradtak fenn dokumentumok), azonban a felfedezés mindenképpen megérdemelt ekkora ünneplést. Alapvető hatást gyakorolt a következő 600 év görög matematikájára, átbillentve az egyensúlyt az aritmetika és az algebra oldaláról a geometria irányába. A görög geometria csodálatos eredményei ellenére ez a kiegyensúlyozatlanság súlyosan eltorzította a matematika fejlődését. Negatív hatása még 2000 év múlva is érződött, akkortájt, amikor Isaac Newton és Gottfried Leibniz az analízist kezdték megalkotni.

A második probléma a reneszánsz korában került előtérbe. *Gyökkifejezésen* olyan képletet értünk, amelyben csak a szokásos aritmetikai műveletek (összeadás, kivonás, szorzás és osztás) valamint a gyökvonás szerepelnek. Egy egyenlet *foka* az ismeretlennek a legnagyobb előforduló hatványkitevője. Első- és másodfokú (lineáris és kvadratikus) egyenleteket már a régi babiloniak is sikerrel oldottak meg i. e. 2000 körül. A harmad- és magasabb fokúak ezzel szemben minden támadásnak notóriusan ellenálltak egészen a tizenhatodik századig, amikor Scipione del Ferro Bolognából és Niccolo Fontana (gúnynevéen Tartaglia, „a dadogó”) Bresciából végre megbírkóztak a harmadfokúval. Nemsokkal ezután Lodovico Ferrari legyőzte a negyedfokút is. Az összes esetben gyökkifejezések adták a megoldást. Az ötödfokú egyenletnél azonban minden erőfeszítés kudarcot vallott. A tizenkilencedik században azután két fiatal matematikus, Niels Henrik Abel és Evariste Galois, egymástól függetlenül bebizonyították, hogy ilyen típusú megoldás általában nem is lehetséges. Galois munkássága kiindulópontul szolgált a modern algebra jelentős részéhez, és ma is termékeny kutatási terület.

A harmadik probléma azt (az idealizált matematikai modellt) vizsgálja, hogyan mozog egy részecske a nehézségi erő hatására egy magasabban fekvő ponttól egy tőle lejjebb és oldalabbra fekvő pontig egy súrlódásmentes huzal mentén. A huzal alakjától függően az út más és más ideig tart. Milyen alakú huzalnál ér le a részecske a leggyorsabban? Galileo Galilei 1630-ban rosszul oldotta meg a feladatot (körívet hozott ki eredményül). Johann Bernoulli „brachisztochron-probléma” néven 1696-ban újra elővette a kérdést; helyes választ adott Newton,



1. ábra. A gördülő kerék peremének egy pontja cikloist ír le.

Leibniz, Guillaume L'Hôpital, maga Bernoulli és bátyja, Jakob. A megoldás egy fordított ciklois (ilyen pályát ír le a gördülő kerék peremének egy pontja). Ez az elegáns kis probléma, csinos és kellemesen klasszikus megoldásával együtt, elindította a variációszámítást, amely rövid idő alatt forradalmasította előbb a mechanikát, majd az optikát. Ma is a matematikai fizika egyik sarokköve, emellett jelentős hatást gyakorol a kvantummechanikára és az általános relativitáselméletre, valamint a „tisztá” matematikára is.

A negyedik probléma újabb keletű és a differenciáltopológia néven ismert területhez tartozik. Ebben a témában a felületek többdimenziós megfelelőit vizsgálják, másnéven a *sokaságokat*, amelyeken bevezetik a „simaság” fogalmát is — így például el lehet dönteni, hogy egy sokaságra rajzolt görbének van-e éles sarka vagy sem. Fontos kérdés, hogy egy adott sokaságon csak *egyellen* sima struktúra létezik-e. John Milnor 1963-ban azzal hökkentette meg a matematikai világot, hogy a 7-dimenziós gömbön egynél több sima struktúrát talált. *Egzotikus gömbjeinek* általánosított változataira azóta más dimenziókban is rábukkantak. Azonban továbbra is tartotta magát az a vélemény, hogy egyszerűbb sokaságokon, mindenekelőtt a közönséges n -dimenziós téren, csak *egyféle* sima struktúra létezhet — az, amit az analízishez használunk. Ezt (nehezen ugyan, de) sikerült valamennyi dimenzióra be is bizonyítani, kivéve a négyet. 1983-ban viszont Simon Donaldson megmutatta, hogy a 4-dimenziós téren a standardon kívül létezik egy *egzotikus* sima struktúra is. Tulajdonképpen Donaldson egy némileg más problémát oldott meg, olyan vadonatúj gondolatok felhasználásával, amelyek topológiai, algebrai és matematikai fizikai módszerek meseteri ötvözéséből születtek. Ha Donaldson eredményeit összekapcsoljuk M. Freedman, K. Uhlenbeck és C. H. Taubes korábbi munkáival, akkor jutunk el az egzotikus 4-dimenziós térhez.

Az ötödik probléma a bonyolultságelmélethez tartozik, amely a matematikának egy egészen új ága. Az elektronikus számítógépek megjelenésével fontossá vált, hogy ne csak egyszerűen megoldási módszereket adjunk egy problémára, hanem hogy ezek *hatékonyak* is legyenek. Donald Knuth ma is érvényes megjegyzése szerint a matematikusok és a számítógéptudósok stílusában döntő különbséget jelent, hogy az előbbieket, úgy általában, nem törődnek a megoldás (munkában, időben vagy pénzben megjelenő) *költségével*. A bonyolultságelméletben a döntő szempont éppen ez a bizonyos költség (amelyet az aritmetikai műveletek összesített számával mérnek). Alapvető választóvonal, hogy a bemenő adatok méretének növelése esetén hogyan emelkedik a költség. Tipikusan kétféle dolog szokott bekövetkezni: ez az emelkedés vagy meglehetősen lassú (kisebb mint az input méretének valamilyen rögzített hatványa), vagy pedig rendkívül gyors (a költség „exponenciálisan” emelkedik; mindannyiszor egy adott mennyiséggel szorozódik, amikor az input méretét egyetlen egységgel növeljük). Emlekezzünk vissza, hogy *prímszámoknak* azokat a számokat nevezzük, amelyeknek nincsenek osztói,¹ ilyen például a 11 vagy a 29. Minden szám felírható prímek szorzataként, azonban egyáltalán nem könnyű ezeket a tényezőket megtalálni. Az összes lehetőség végigpróbálása olyan eljárást eredményez, amelynél a költség a szám növelése esetén exponenciálisan emelkedik. A kérdés mármost a következő: megadható-e hatékonyabb módszer — olyan, amelynél a költség csak egy rögzített hatvány mértékében emelkedik. Senki sem ismeri a választ. Egy darabig a „nem” vezette a vélemények mezőnyét; de éppen a könyvem megírása idején fedezett fel Hendrik Lenstra egy olyan új módszert, amely számos esetben sokkal gyorsabb, mint az eddigiek, és így az „igen” erősen jön fel a célegyenesben. A megoldás nemcsak a bonyolultságelmélet, hanem a gyakorlati rejtjelezés szempontjából is rendkívül fontos; számos „elvileg megfejthetetlen” katonai és diplomáciai kódoknak az „igen” válasz esetén megszűnne ez a tulajdonsága.

¹ Pontosabban, csak triviális osztói vannak, tehát a természetes számok körében csak önmaguk és az 1. Ezenkívül célszerű, ha magát az 1-et sem tekintjük prímnak. Ily módon a következő mondat állítása is csak az 1-nél nagyobb számokra vonatkozik. (FR)

A történelmi szál

Az iménti tallózásom a problémák között azt is illusztrálta, hogy a matematikai gondolatok általában hosszú életűek. Az a módszer, amellyel a babiloniak a másodfokú egyenleteket megoldották, ma is éppolyan friss és hasznos, mint 4000 évvel ezelőtt volt. A variációszámítás első gyümölcsét a klasszikus mechanikában hozta, de sértetlenül átvészelte a kvantummechanikai forradalmat is. Megváltozott a *mód*, ahogy alkalmazták, de nem változott a matematikai alap. Galois gondolatai ma is a matematikai kutatás homlokterében állnak. És ki tudja, hová vezetnek el majd Donaldsonéi? A matematikusok általában jobban tudatában vannak gondolataik történelmi előzményeinek, mint sok más tudós. Nem azért, mert a matematikában az utóbbi időben semmi fontos sem történt volna — ennek éppen az ellenkezője igaz. Az ok a matematikai gondolatok olyan jellegű állandósága, amely a fizikai elméletekből hiányzik.

Igazán jó matematikai gondolatokra nem lehet egykönnyen szert tenni. Ezek sok ember hosszú időn át tartó együttes munkájának a gyümölcsei. A hozzájuk vezető út nem mentes a vargabetűktől és a szellemi zsákutcáktól sem. Nem lehet megrendelni őket: az igazi matematikai újdonságok nem tervezhetők egy ipari „kutatási és fejlesztési” program mintájára. A létrehozásukkal járó áldozatokat azonban busásan meghálálják tartósságukkal és sokoldalúságukkal. Ptolemaiosz naprendszerelmélete egy modern kozmológus számára történeti érdekesség, de komoly kutatásban nem tudja *felhasználni*. Ezzel szemben naponta használunk több ezer éves matematikai gondolatokat a legmodernebb matematikában, sőt minden tudományágban. A ciklois vonzó érdekességet jelentett a görögöknek, de nem tudtak vele mit kezdeni. A brachisztochron-probléma megoldásaként azután gyűjtőszikrája lett a variációszámításnak. Christiaan Huygens a pontos óra tervezéséhez használta. A mai mérnökök a fogaskerékgyártásnál alkalmazzák. Szerepet játszik az égi mechanikában és a részecskegyorsítóknál. Szép karriert futott be — szerény származása ellenére.

A sodorvonal

A Mississippi hossza 3950 kilométer, vízgyűjtő területe 3,25 millió négyzetkilométer. Sok helyen csak kanyarok és holtágak labirintusának tűnik, mégis keresztül folyik gyakorlatilag az egész észak-amerikai kontinensen, a minnesotai Itasca tótól a louisianai New Orleansig. Egyes mellékágak, kanyarok és morotvák teljesen el vannak vágva a folyó fő vonalától, de ez a fő vonal létezik, és bárki érzékelheti, aki mérni tudja a víz sodrását. A végén a Mississippi a Mexikói öbölbe torkollik, hatalmas iszapos deltával, amelyben saját oldalágacskák és főcsatornák burjánzanak, és ezek alakja és összefonódása állandóan változik.

A matematika sok szempontból hasonlít a Mississippire. Vannak benne öblök, holtágak és kisebb állóvizek, de egyértelműen kitapintható a fő sodorvonal; ott, ahol az áramlás — a matematikai teljesítmény — a legerősebb. A delta a matematikai kutatás: növekszik, tart valamerre (esetleg nem mindig világos, hogy merre), ami ma egy fontos csatorna, holnapra talán iszappal tömődik el és elhagyottá válik, ugyanakkor egy apró erecske hirtelen robajló áradattá duzzad. A matematika legjava mindig a sodorvonalat gazdagítja, néha éppen azáltal, hogy teljesen új irányba téríti.

Az aranykor

Egészen a legutóbbi időkig az iskolákban zömmel a „klasszikus” matematikát tanították, amelyben a(z 1700 tájára datálható) kalkulus számított a legújabbnak. Még az ún. „modern matematika” megjelenésével is a tananyag döntő része legalább száz éves! Részben ennek is köszönhető, hogy a matematikát sokan halott tárgynak tekintik, és gyakran revelációként hat, hogy egyáltalán akad még benne felfedeznivaló.

Behatárolható-e történelmileg a matematika aranykora? Talán Euklidész idejében volt, amikor lefektették a geometriai bizonyítás logikai alapjait? A hindu–arab számrendszer kialakulásának a kora? Az algebra virágzása a reneszánszban? Descartes koordináta geometriája? Newton és Leibniz kalkulusa? A természetfilozófia hatalmas tizenhetedik századi épülete, amely a matematikát a csillagászat, a hidrodinamika, a mechanika, a rugalmasság-, hő-, fény- és hangtan szükségleteihez igazította? Ha a matematikának valóban létezik aranykora, akkor

ezek egyike sem tekinthető annak. A matematika aranykora a jelen. Az utolsó ötven évben több matematikát alkottak, mint az összes előző korban együttvéve. Több mint 1500 matematikai folyóiratban évente mintegy 25000 tudományos dolgozat jelenik meg (több mint száz nyelven). 1868-ban a *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (A matematikai fejlődés évkönyve) a matematikai kutatómunkát mindössze tizenkét kategóriába sorolta; a *Mathematical Reviews* 1985-ös listáján ezek száma hatvan fölött van. Természetesen nem a mennyiség, hanem a minőség alapján kell véleményt mondanunk, azonban a matematika aranykora az utóbbi mérce szerint is egyértelműen a jelen.

Egyes megfigyelők a mai matematika sokféleségében és szabadságában a dekadencia és a hanyatlás jeleit vélik felfedezni. Szerintük a matematika egymással össze nem függő darabkákra esett szét, elvesztette egységes jellegét, és fogalma sincs, merre halad. A matematika általános „válságról” beszélnek, mintha az egész tárgy, úgy ahogy van, rossz irányba fordult volna. Nincs ilyen válság. A mai matematika egészséges, életerős, egységes, és az egyetemes emberi kultúra éppoly szerves része, mint bármikor volt. A matematikusok nagyon jól tudják, hogy szerintük merre tartanak ők, és merre tart a tudományuk. A látszat azért jelezhet válságot, mert a tárgy olyan nagyra nőtt, hogy egyetlen ember már nem képes áttekinteni. Emiatt nehéz átfogó képet kapni arról, hogy valójában mi is történik, és ez mire jó. Egy külső szemlélő számára a matematikusok vonzódása az absztrakt elméletek és a szörszálhasogató logika iránt belterjesnek és betegesnek tűnhet. A valódi világ dolgaiban mutatott látszólagos közömbösségük pedig azt a képzetet kelti, hogy csak saját magukkal törődve önelégülten trónolnak elefántcsonttoronyukban. A mai matematika azonban nem valamiféle idegenes eltévelyedés, hanem szerves folytatása a matematikai sodorvonalnak. Absztrakt, általános és szigorúan logikus, de nem perverz hajlamai teszik ilyenné, hanem ez tűnik az egyetlen lehetséges módnak arra, hogy a rá váró munkát rendesen elvégezze. Mint manapság a tudományok többségében, benne is sok a specialitás, mert virágkorát éli és nagyra nőtt. A mai matematika számos olyan problémát sikeresen megoldott, amely kifogott az elmúlt századok legnagyobb elméin. Legabsztraktabb elméleteit folyamatosan, új meg új területeken alkalmazzák alapvető fizikai, kémiai, biológiai, számítógépes és technikai kérdések megoldásánál. Ez lenne a dekadencia és a hanyatlás? Aligha.

DRÁGA PRÍMEK

Tegyük fel, hogy a takarítónő tévedésből kidobta a p és q számokat, de a pq szorzat megmaradt. Hogyan nyerhetjük vissza a tényezőket? Csakis a matematika vereségeként érzékelhetjük, hogy ennek legreményteljesebb módja a szeméttelep átgyeberálása és memohipnotikus technikák alkalmazása.

Ifj. Hendrik W. Lenstra

A legjobb matematikai problémák némelyike egyben a legegyszerűbb is. Nehéz az aritmetikánál egyszerűbb és természetesebb dolgot elképzelni. Az $1, 2, 3, \dots$ egész számok additív szerkezete túl egyszerű ahhoz, hogy nagy rejtélyeket takarjon, de a multiplikatív struktúra már olyan problémákat vet fel, amelyek még több ezer év után is alkotó munkára ösztönöznek. Vegyük például a prímszám nagyon egyszerű és természetes fogalmát: ez olyan szám, amely nem bontható fel két nála kisebb szám szorzatára. Ósidők óta ismert az a tapasztalati tény, hogy minden szám egyértelműen bontható fel prímek szorzatára, és a görögöknek sikerült ezt be is bizonyítaniuk.¹ Ezután rögtön felmerül a kérdés, hogyan *találjuk meg* egy adott szám prímtényezőit. „Elméleti” módszerek könnyen adódnak. A görögök például kidolgozták az eratoszteszi szitát, amelynél tulajdonképpen az összes lehetséges szorzatot, illetve prímet el kell készíteni, és utána meg kell nézni, hogy a kérdéses szám szerepel-e valahol. Kicsit olyan ez, mintha egy házat úgy építenénk fel, hogy szisztematikusan végigpróbáljuk tízezer téglát minden lehetséges elrendezését, és ezek közül kiválasztjuk azt, amelyik a leglakhatóbbnak tűnik. Mindez gyakorlati célokra teljesen használ-

¹ A precíz megfogalmazással kapcsolatban ismét utalunk a 21. oldalon levő lábjegyzetre. Megjegyezzük továbbá, hogy a görögök tulajdonképpen nem mondták ki, és így nem is bizonyították be a felbontás egyértelműségét, noha minden ehhez szükséges segédétel rendelkezésükre állt. (FR)

hatatlan. Bőven akad még tennivaló, számos alapvető kérdésre ma sem ismerjük a választ.

A nehézségek oka a prímek skizofrén jellegében rejlik. Az ismert számelméleti szakember, Don Zagier, így ír erről:

A prímekkel kapcsolatban két tényről szeretném Önöket olyan erővel meggyőzni, hogy ezeket egész életükre a szívükbe véssék. Az egyik az, hogy a matematikusok által vizsgált objektumok közül a prímek viselkednek a legönkényesebben: mintha gyomokként nőnének a természetes számok között, látszólag csak a véletlen törvényeinek engedelmeskedve, és senki sem tudja megjósolni, hogy következő példányuk hol bukkan elő. A másik tény ennek pont az ellenkezője: a prímek döbbenetes szabályosságot mutatnak, viselkedésüket szigorú törvényszerűségek irányítják, és ők ezeknek a törvényeknek szinte katonai pontossággal engedelmeskednek.

Zagier elsősorban azokra a nagyszabású elméletekre utal, amelyek a prímszámok eloszlásával kapcsolatban a múlt században születtek. Itt van például a Prímszámtétel, amelyet a számításokkal nyert adatok alapján Carl Friedrich Gauss sejtett meg 1792-ben,² és egymástól függetlenül Jaques Hadamard és Charles-Jean de la Vallée Poussin bizonyítottak be 1896-ban. Ez a tétel azt állítja, hogy nagy x esetén az x -nél kisebb prímek száma egyre jobban közelíthető az $x/\log x$ értékkel.³ Ebben a fejezetben azonban mellőzni fogjuk az ilyen magasröptű dolgokat, és a prímekkel kapcsolatos számítási kérdésekre koncentrálunk. Még ezekből az egyszerű anyagokból is pompás ruhát szabott a matematika. És szinte melléktermékként adódott, hogy a számelmélet, amelyet sokáig a matematika legabsztraktabb és gyakorlati alkalmazásokra teljesen alkalmatlan ágának tekintettek, olyan jelentőségre tett szert a rejtjelezésben, hogy komoly kísérletek történtek arra, hogy egyes eredményeit katonai titokká nyilvánítsák.

² Tőle függetlenül hasonló eredményre jutott Adrien Legendre is 1798-ban. (FR)

³ Itt $\log x$ az ún. természetes alapú logaritmust jelöli. Az állításban szereplő közelítés relatíve értendő, vagyis a két érték hányadosa tetszőlegesen közel lesz az 1-hez; a különbségük ugyanakkor akármilyen nagy lehet. (FR)

Oszd meg és uralkodj

A prímsorozatok a $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots$ számokkal kezdődik, és meglehetősen szabálytalanul folytatódik, a számítással elérhető határokon is túl. A legnagyobb ismert prímszám a $2^{216091} - 1$, amelyet David Slowinski talált egy Cray X-MP szuperszámítógép segítségével. Biztosak lehetünk azonban benne, hogy léteznek még nagyobb prímszámok, még ha nem is tudjuk, melyek ezek, mert Euklidész bebizonyította, hogy végtelen sok prímszám van. A bizonyítás lényege: tegyük fel, hogy csak véges sok prím van, szorozzuk ezeket össze, és az eredményhez adjunk hozzá 1-et. Az így kapott számnak kell hogy legyen prímosztója, de ez nem lehet az eredeti listán szereplők egyike sem, hiszen azokkal osztva mindig 1 a maradék. Vagyis ellentmondásra jutottunk, és ezért nem létezhetett semmiféle véges kiindulási lista.⁴ Így ha képezzük a $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2^{216091} - 1) + 1$ számóriást, akkor tudjuk, hogy ennek *mindegyik* prímtényezője szükségképpen nagyobb, mint Slowinski gigantikus prímszáma. Nem áll azonban rendelkezésünkre olyan gyakorlati módszer, amellyel akár egy ilyen tényezőt meg tudnánk találni, és itt van a kutya elásva.

Prímtesztelés

A prímszámelmélet két központi gyakorlati problémája a következő:

- (1) Adjunk hatékony eljárást annak eldöntésére, hogy egy adott szám prím-e.
- (2) Adjunk hatékony eljárást egy adott szám prímtényezőkre bontására.

Világos, hogy (2) legalább olyan nehéz, mint (1), hiszen (2) bármely megoldása (1)-et speciális esetként kiadja. A megfordítás nem nyilvánvaló (és valószínűleg nem is igaz): alább látni fogjuk, hogy egy szám összetett voltát hatékonyan igazolhatjuk anélkül is, hogy explicite előállítanánk egy osztóját. A „hatékony” itt azt jelenti, hogy a

⁴ Okoskodhattunk volna úgy is, hogy a feltételezett összes prím helyett a legnagyobbig terjedő valamennyi pozitív egészt szorozzuk össze, vö. a következő mondat. (FR)

szám méretének növelésekor a számítások hossza ne nőjön túlságosan gyorsan. Erre az *elvre* részletesen visszatérünk még a 18. fejezetben.

Ha egy szám egy osztóját meg akarjuk találni, illetve be akarjuk bizonyítani, hogy ilyen osztó nincs, azaz a szám prím, akkor a legegyszerűbb eljárás az, ha a számot sorra elosztjuk minden (a négyzetgyökénél kisebb) számmal, és megnézzük, hogy valamelyikük megvan-e benne maradék nélkül. Ez azonban *nem* hatékony. Képzeljünk el egy olyan számítógépet, amely másodpercenként egymillió osztást tud elvégezni. Ez körülbelül egy óra alatt birkózik meg egy 20-jegyű számmal, tíz év alatt egy 30-jegyűvel, egymillió év alatt egy 40-jegyűvel, egy 50-jegyűhöz pedig százmilliárd évre lenne szüksége, amely több, mint amennyire a világegyetem korát jelenleg becsüljük. Világos, hogy rövidebb eljárások is elképzelhetők, de a ma ismert leggyorsabb módszer is, körülbelül egy hónapot igényel egy 75-jegyű számhoz és száz évnél is többet egy 100-jegyűhöz. Egészen a legutóbbi időkig mindkét probléma igen siralmas képet mutatott. Az utolsó öt év alatt azonban hatalmas előrelépés történt a prímtesztelés, azaz (1) terén. Egy gyors számítógép egy 100-jegyű számról kb. 45 másodperc alatt dönti el, hogy prím-e vagy sem; egy 200-jegyű számnál ugyanez 6 percig tart. Még egy 1000-jegyűvel is végez egy hét alatt. Ezzel szemben (2) megoldása már 200-jegyű számokra is teljesen reménytelennek tűnik.

Véges aritmetika

Hogy ezt a nagy fejlődést megérthessük, egy olyan gondolattal kell kezdenünk, amelyet Gauss kodifikált először a számelméletben mérföldkövet jelentő *Disquisitiones Arithmeticae* című könyvében. Tekintsünk egy olyan órát, amelynek számlapján (a szokásostól eltérő módon) a $0, 1, 2, \dots, 11$ számok jelölik az órákat. Egy ilyen órán sajátos számtan érvényesül. Például, mivel 5 után 3 órával 8 óra van, tehát mondhatjuk, hogy $3 + 5 = 8$, mint rendesen. Azonban 10 után 3 órával 1, 11 után 3 órával pedig 2 a pontos idő; tehát ugyanezen az alapon $3 + 10 = 1$ és $3 + 11 = 2$, ami már eltér a szabványtól. Mindazonáltal, erre az „óraszámstanra” sok minden teljesül, beleértve szinte minden szokásos algebrai szabályt. Gauss nyomán ezt a 12 modulus szerinti aritmetikának nevezzük, és „=” helyett a „ $\equiv$ ” jelet használjuk, mintegy emlékeztetve arra, hogy itt valami gyanús dologról van szó. A „ $\equiv$ ” relációt *kongruenciának* hívjuk. A modulo 12 (azaz a 12 modulus

szerinti) aritmetikában a 12 többségeit nem vesszük figyelembe. Így $10 + 3 = 13 \equiv 1$, mivel $13 = 12 + 1$ és a 12-től eltekinthetünk.

Bármely más n számot is vehetünk modulusként: ekkor az n többségeit hagyjuk figyelmen kívül. Az így kapott aritmetikai rendszer csak a $0, 1, 2, \dots, n-1$ számokból áll, és az összeadás mellett saját(os) szorzással és kivonással is rendelkezik. Az osztással általában már nem ilyen kellemes a helyzet, azonban ha n prím, akkor bármely nemnulla számmal lehet osztani. Modulo 7 például $3/5 \equiv 2$, mivel $2 \cdot 5 = 10 \equiv 3$. Ezt a bizarr aritmetikát Gauss azért vezette be, mert segítségével ideálisan lehet *oszthatósági* kérdéseket kezelni. A számelmélet azóta is folyamatosan használja erre a célra.

A kis Fermat-tétel

A matematikában két fontos tétel viseli Pierre de Fermat, francia jogász és kitűnő amatőr számelméletész nevét. Ezek közül az egyik, a Nagy Fermat-tétel egyáltalán nem is tétel, hanem egy fontos megoldatlan probléma (lásd a 3. fejezetet). A másik, amelyet „kis” Fermat-tételnek szoktak nevezni, annyira egyszerű, hogy mindössze néhány sor a bizonyítása; ennek ellenére zseniális mestermű, bámulatra méltó következményekkel.

Az állítás a következő. Tegyük fel, hogy p prím, és a egy tetszőleges olyan szám, amely nem osztható p -vel. Ekkor $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. A „mod p ” csak azt jelzi, hogy p a modulus. Más szavakkal, a^{p-1} p -vel osztva 1-et ad maradékul. Ha például $2^{10} = 1024$ -et elosztjuk 11-gyel, akkor 1 lesz a maradék, mert a 11 prím. Valóban, $1024 = 93 \cdot 11 + 1$. Másrészt viszont $2^{11} = 2048 = 170 \cdot 12 + 8$, tehát a 12-vel történő osztáskor 8-at kapunk maradékul. Ezzel sikerült bebizonyítanunk, hogy a 12 nem prím, *anélkül*, hogy bármely osztóját előállítottuk volna. Maga az eredmény aligha nevezhető szenzációsnak, de hasonló számolásokat nagyon nagy p értékekre is el lehet végezni, amikor a válasz már kevésbé nyilvánvaló. És $a^{p-1} \pmod{p}$ hatékonyan számolható, a szükséges idő csak a p -ben szereplő számjegyek számának *köbével* arányos. Vagyis rendelkezésünkre áll egy hatékony teszt az összetettség megállapítására — feltéve hogy tudjuk, melyik a értéket kell választanunk.

Csapóajtókódok

Miért érdekelhetnek valakit a nagy prímszámok és a tényezőkre bontás? A pusztán élvezeten kívül ennek gyakorlati oka is lehet, amelyre már korábban utaltam: a kriptográfiai alkalmazás. A katonaságnál mindig nagy erővel próbáltak olyan kódot találni, amely „megfejtethetetlen”, ugyanakkor hatékony. Az 1970-es évek derekán Ralph Merkle, Whitfield Diffie és Martin Hellman egy új típusú kódot javasoltak, az ún. nyilvános jelkulcsú titkosírást. Bármely rejtjelezés két fő lépésből áll: az üzenet *titkosításából* (kódolásából), majd ennek *megfejtéséből* (dekódolásából). A legtöbb kód olyan, hogy aki tudja, hogyan kell az elsőt végrehajtani, egyben azt is tudja, hogyan kell a másodikat elvégezni, és ezért elképzelhetetlen, hogy az üzenet kóddá alakításának a titkát az ellenség (vagy a számos kormányzat által — úgy tűnik — hasonló elbánásban részesülő lakosság) tudomására hozzák. Az ellenség ugyanis egyszerűen csak „megfordítaná” a titkosító eljárást, és meg tudná fejteni az összes kódolt üzenetet.

Merkle, Diffie és Hellman rájöttek arra, hogy ez az érvelés nem egészen helytálló. A gyenge pont az „egyszerűen”. Tegyük fel ugyanis, hogy a titkosító eljárást nagyon nehéz visszacsinálni (mint például a kéménytojásfőzést). Ekkor veszély nélkül közzétehetjük a részleteit. Így jutottak el Merkle-ék a *csapóajtófüggvény* gondolatához. Ha veszünk egy U üzenetet, a titkosítás ebből egy $f(U)$ kódolt alakot állít elő. Az üzenet dekódolása azt jelenti, hogy keresünk egy olyan f^{-1} inverz függvényt, amelyre $f^{-1}(f(U)) = U$. Az f -et csapóajtófüggvénynek nevezzük, ha f könnyen számolható, de f^{-1} csak nagyon nehezen, sőt gyakorlati szempontból egyáltalán nem. A csapóajtófüggvény mint kód ebben a formájában nem valami praktikus, mert a jogos felhasználónak éppolyan nehéz megfejtenie az üzenetet mint az ellenségnek. Ezért még egyet kell csavarni f definícióján úgy, hogy egyetlen apró (titokban tartott) többletinformáció segítségével f^{-1} már könnyen számolhatóvá válik. Csak ezt a picike információt kell titkolnunk az ellenség elől.

A Ted Rivest, Adi Shamir és Leonard Adleman által kidolgozott RSA rendszerben ezt a kis Fermat-tétel segítségével érik el. Induljunk ki két nagy prímből, p -ből és q -ból, amelyeket titokban tartunk, azonban nyilvánosságra hozzuk az $n = pq$ szorzatot és egy további T számot, az ún. *titkosító kulcsot*. Bármely üzenetet könnyen megadhatunk

számjegyek sorozataként; bontsuk fel ezt olyan blokkokra, amelyeket számoknak tekintve, értékük kisebb mint n . Ekkor elég blokkonként titkosítanunk. Ehhez minden egyes B blokkot alakítsunk át a $K \equiv B^T \pmod{n}$ számmá. Ekkor K a kódolt üzenet. A megfejtéshez ismerni kell egy M *megfejtő kulcsot*, amelyet úgy választunk meg, hogy TM kongruens legyen 1-gyel modulo $(p-1)(q-1)$. Ekkor a kis Fermat-tétel Euler által némileg általánosított alakja garantálja, hogy $K^M \equiv B \pmod{n}$, tehát B hasonló módon nyerhető vissza K -ból.

A lényeg az, hogy noha Nyilvános János ismeri n -et és T -t, de nem ismeri p -t és q -t, ennélfogva nem tudja kiszámítani $(p-1)(q-1)$ -et, és így M -et sem. A kód alkotója ezzel szemben ismeri p -t és q -t, hiszen éppen belőlük indult ki. Ugyanez a helyzet azokkal, akik jogosan juthatnak hozzá az üzenet tartalmához; nekik a kód alkotója elárulja a titkos információt. A rendszer megbízhatósága egyetlenegy dolgon múlik: azon, hogy milyen reménytelenül nehéz egy adott n számot prímtényezőkre bontani, amint arra a fejezet mottójául választott Lenstra-féle takarítónős megjegyzésben már utaltunk. Nem hisznek Lenstrának? Rendben van, íme amit a takarítónő meghagyott: $n = 2^{67} - 1$. Ha valaki vasárnaponként *papíron és ceruzával* számolva ebből három évnél hamarabb megtalálja p -t és q -t, akkor legyőzte F. N. Cole -t, akinek ezt elsőként sikerült megcsinálnia 1903-ban. (Az eredményt lásd a fejezet végén.)

Ennek a kódnak egy másik előnyös tulajdonsága, hogy az üzenet küldője „hiteles aláírást” is mellékelhet. Tegyük fel, hogy András és Bea mindketten ismerik a titkos M *megfejtő kulcsot*, és ennek segítségével leveleznek. Egyik nap András kap egy üzenetet, megfejti, és látja, hogy a „CSÓKOL BEA” szavakkal végződik. Hogyan lehet benne biztos, hogy ezt valóban Bea küldte? A T titkosító kulcs nyilvános; bárki kódolhat és elküldhet egy olyan üzenetet, amelynek „CSÓKOL BEA” az utolsó sora. Lehet, hogy nem is Bea volt a feladó, hanem a Kis Hamis. Bea azonban igazolhatja, hogy ismeri a titkos M kulcsot, ha elküldi Andrásnak a $(\text{CSÓKOL BEA})^M$ üzenetet. Az ellenőrzéshez András ezt a T kulcs segítségével *kódolja*, és $(\text{CSÓKOL BEA})^{MT}$ adódik eredményül, ami nem más mint az eredeti CSÓKOL BEA szöveg. Aki nem ismeri M -et, nem tud ilyen üzenetet gyártani. Némiképp erőfeszítéssel az aláírást üzenetfüggővé lehet tenni, vagyis nem lesz lemásolható valamelyik korábbi elfogott levélből. Természetesen ha

az ellenség megszerezte az M kulcsot, akkor minden biztonság elvészett, de nincs olyan kód, amely védelmet nyújtana a megfejtő eljárás jogtalan birtoklása ellen.

Álprímek

A fenti alkalmazást szem előtt tartva térjünk vissza a két elméleti problémához: a prímteszteléshez és a tényezőkre bontáshoz. A korábban említett Fermat-teszt, amellyel egy szám összetettségét mutathatjuk ki, nem üzembiztos. Bármely a -hoz végtelen sok olyan összetett p található, amelyre $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Ezeket az a alaphoz tartozó *álprímeknek* (vagy *pszeudoprímeknek*) nevezik. Ennél is nagyobb baj, hogy olyan p összetett számok is vannak, amelyek *minden* (a p -hez relatív prím) a -ra nézve álprímek. Az ilyen p -ket *Carmichael-számoknak* hívjuk, közülük az $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ a legkisebb. (A dolog azon múlik, hogy $3 - 1$, $11 - 1$ és $17 - 1$ mindhárman osztói $561 - 1$ -nek, és hasonló jelenség jellemzi általában is a Carmichael-számokat. Érdemes végiggondolni, hogyan következik ez a kis Fermat-tételből.)

G. L. Miller a fentiekkel rokon, de bonyolultabb módszert talált, amelyet nem fogok részletezni. Ugyanúgy igaz rá, hogy ha egy szám megbukik a teszten, akkor biztosan összetett, a sikeres teszt azonban önmagában nem garantálja a prímiséget. Ha egy szám teljesíti a Miller-tesztet, akkor az a alaphoz tartozó *dörzsölt álprímnek* hívjuk. Ha nem, akkor az a a p (összetettségének) *tanúja*. Kiderül, hogy a Carmichael-számoknak már nincsen dörzsölt analógjuk. Sőt a legtöbb összetett számot már nagyon kis tanúk is lebuktatják. Például John Selfridge és S. S. Wagstaff közvetlen számolással kimutatták, hogy a 25 milliárdnál kisebb számok közül egyedül a 3215031751-nek nem tanúja a 2, 3, 5 és 7 egyike sem. A 11 azonban már *neki* is tanúja. Ennek alapján 9-jegyű számokra egy kis programozható kalkulátoron két perc alatt írhatunk hatékony prímtesztet.

Miller ezt a gondolatot továbbfejlesztette. Ha igazolni tudjuk, hogy minden összetett szám rendelkezik elegendően kis tanúval, akkor olyan hatékony prímteszthez jutottunk, amely *valamennyi* számra működik. Miller megmutatta, hogy bármely összetett n -nek van olyan tanúja, amely kisebb mint $70(\log n)^2$, de közben fel kellett tennie az egész matematika egyik leghíresebb bizonyítatlan állítását, a Riemann-sejtést (lásd a 11. fejezetet). Ez nagyon különös helyzetet eredményezett.

Van egy prímtesztünk, amelynek hatékonyságában szinte biztosak lehetünk, de nem tudjuk bizonyítani, hogy valóban hatékony. Ha a Riemann-sejtés *helyes* — és a legtöbb szakértő ezt tartja valószínűnek —, akkor *igaz*, hogy a teszt hatékony. Gyakorlati szempontból feltehetőleg majdnem minden számra nagyon jól működik. Egy mérnök a problémát akár megoldottnak is tekinthetné. (Ezt nem sértésnek szántam — a műszaki életben érthetően az egyetlen ésszerű kritérium az, hogy „működik”.) A matematikusok teljesen elégedetlenek a helyzettel — gondolom azért, mert hiába érzik úgy, hogy a kezükben tartják „a választ”, ha annak megértésében hatalmas rés tátong. Az ilyenek fölött a matematikusok nem szoktak átsiklani, mert tapasztalatból tudják, hogy ha valahol egy hézagot nem értenek, akkor ott rendszerint mindenféle gyönyörű és fontos gondolatok rejtőznek.

Nem fér hozzá kétség?

Ami a gyakorlati (esetenként kissé kétes) tesztekkel illeti, M. O. Rabin a következő bátor javaslattal állt elő. Válasszunk alapot *véletlenszerűen*, alkalmazzuk rá a Miller-tesztet, majd mindezt ismételjük meg. Ha egy szám az összes próbát kiállta, akkor „óriási valószínűséggel” prím. Ez a javaslat izgalmas filozófiai kérdéseket vet fel a matematikai igazságról (és érdekes fényt vet a matematikus mentalitásra). A gondolatmenet a következő. A korábbi koroktól eltérően ma már nem tekintjük a matematikát tökéletesnek. Az emberi szellem bármely terméke könnyen tartalmazhat hibákat. Az a valószínűség, hogy egy szám eleget tesz ötven véletlen Miller-tesztnek és mégsem prím, jóval alatta marad annak a valószínűségnek, hogy valaki számolási vagy logikai tévedést követ el, illetve hogy a számítógép vagy a kalkulátor működik hibásan. Ezért értelmetlen minden szörszálhasogatás az eljárás elenyészően csekély valószínűségű hibalehetőségével kapcsolatban.

Nagyon meggyőző érvelés; lehet, hogy még helyes is. Ennek ellenére csak nagyon kevés olyan matematikus van, akit kielégít. *Aggódnak*, hogy fennáll annak a lehetősége, hogy minden tévútra menjen — és ez sokkal jobban zavarja őket, mint az, hogy kiderítetlen logikai vagy számolási hibákat vétenek. A Rabinéhoz hasonló „valószínűségi” bizonyítások *nem méltók* a szakmához. Egy észrevétlenül megbújó hiba lehetősége megengedett (hiszen ez ellen semmit sem tehetünk, kivéve hogy mindent gondosan ellenőrzünk, és összevetjük az eredményeket

más ismert tételekkel); egy logikai hézag *tudott* jelenléte viszont elfogadhatatlan. Emellett az emberben az a gyanú is felmerülhet, hogy a „valószínűség” fogalma esetleg nem illik ide. Elvégre egy adott szám vagy prím, vagy sem. Tehát vagy 0 valószínűséggel prím, vagy pedig 1 valószínűséggel prím. A baj persze ott van, hogy nem tudjuk, melyik az igaz. Ebben a megvilágításban azonban egy ilyen kijelentés, hogy „a 12345321999...627 szám 0,9999999999999999 valószínűséggel prím” teljesen értelmetlen. Mindenesetre ha nem is az, akkor is *matematikai* kihívást jelent, hogy tényleg értelmessé tegyük. És persze ott fészkel az a már korábban említett gyanú is, hogy egy bizonyításbeli hézag általában új becserkészendő gondolatokat jelez — hacsak nem vagyunk annyira önhittek, hogy a problémát megoldottnak nyilvánítjuk, és nem vesszük többé a fáradságot, hogy tovább vizsgálódjunk.

Az Adleman–Rumely-teszt

1980-ban Adleman és Robert Rumely tovább vizsgáloztak, és becserkésztek néhányat azokból a bizonyos rejtőzködő gondolatokból. Ezek segítségével sikerült a Miller-tesztet úgy módosítani, hogy az *garantálja* a prímseget vagy az összetettséget, mindenféle valószínűségi vagy hipotetikus maszlag nélkül. A futási idő kicsit megnőtt, de a módszer (főleg a Lenstra által hamarosan kidolgozott továbbfejlesztett változat) gyakorlatilag is teljesen megfelelő, mondjuk, 200-jegyű prímekre. Az eljárás lényege, hogy egy a dörzsölt álprímekre szabott tesztből további információt nyerjünk, ne csak azt, hogy „átment” illetve „megbukott”, és ehhez az algebrai számelméletből kell néhány olyan gondolatot felhasználni, amelyek az ún. „magasabb rendű reciprocitási tételekhez” kapcsolódnak. A részben klasszikus, részben modern matematika nagyon kifinomult alkalmazása jelenik meg a színen, a megoldandó probléma földhözragadtabb jellege ellenére. Egy k -jegyű szám esetén a módszer futási ideje körülbelül $k^{\log \log k}$. Ez már „majdnem polinomiális idő”, és így a módszer a gyakorlatban is alkalmazható. A futási idő pontos korlátjára Adleman és Rumely fogalmazott meg sejtést, és ezt Andrew Odlyzko és Carl Pomerance nem sokkal később be is bizonyították.

A történet végső csattanója most készülődik, amint a könyvemet írom. Lenstrának sikerült „elliptikus görbék” segítségével nagy számokat felbontania. A módszer akkor működik a legjobban, amikor a

tényezők száma legalább három, illetve ha kettő, de ezek távol esnek egymástól. A számelméletek fél évszázada foglalkoznak az elliptikus görbék önmagában szép és mély elméletével. Senki sem sejtette, hogy ennek bármi kapcsolata lenne a faktorizációval.

Cole válasza: $2^{67} - 1 = 193707721 \cdot 761838257287$.

MARGINÁLIS ÉRDEKESSÉG

Végül arra szeretném kérni ennek a résznek az olvasóit, hogy ha úgy vélik, van bizonyításuk, azt ne küldjék el nekem. Száznál is több elvetélt próbálkozás átbogarászásával azt hiszem megtettem a magamét. Ezek egyike sok évvel ezelőtt három hétig kifogott rajtam. Éreztem, hogy valahol rossz, de nem tudtam kideríteni, hogy hol. Kétségbeesésemben odaadtam a kéziratot egy nagyon okos elsőéves lánynak, aki fél óra alatt megtalálta a hibát.

Mindazoknak, akik egy bizonyítás gondolatát fontolgatják, szíves figyelmükbe ajánlom, mit válaszolt Hilbert arra a kérdésre, hogy ő miért nem próbálkozott: „Mielőtt nekifognék, három év intenzív tanulást kellene belefektetnem, és ennyi időt egy valószínű kudarcra nem tudok elpazarolni.”

Eric Temple Bell

A tizenhetedik század egyik legnagyobb számelmélésze a jogász Pierre de Fermat volt. Hírnevét a más matematikusokkal folytatott levelezésével alapozta meg, mert nagyon keveset publikált. Saját számításaira támaszkodva vetett fel számelméleti problémákat, és jónéhány olyan tételt hagyott az utókorra, amelyek bizonyítását legfeljebb ő ismerhette. Közülük egy széljegyzet a leghíresebb, amelyet Fermat egy tulajdonában levő könyv, Diophantos *Arithmetica* című művének margójára írt: „Nem lehet egy köböt két köb összegére, egy negyedik hatványt két negyedik hatvány összegére, vagy általában egy tetszőleges, kettőnél nagyobb kitevőjű hatványt két ugyanilyen hatvány összegére felbontani; erre egy csodálatos bizonyítást találtam, de nem fér rá a margóra.” Ha volt is Fermat-nak bizonyítása, senkinek még csak halvány fogalma sincs arról, hogy ez mi lehetett. Ami ma az azóta Fermat-sejtésként vagy Nagy Fermat-tételként számontartott állítással kapcsolatban ismeretes, olyan módszereket igényel, amelyek minden bizonnyal nem állhattak rendelkezésre a tizenhetedik században. De akár észrevett Fermat valamit, ami azóta is mindenki előtt rejtve maradt, akár csak ámította önmagát, ennek a szinte mellékes megjegyzésnek nagyon so-

kat köszönhet a matematika. A Nagy Fermat-tétel egy annyira kitűnő problémára mutat példát, amelynek még a kudarcai is mérhetetlenül gazdagabbá tették a matematikát.

Alexandriai algebra

Időszámításunk előtt 332-ben Nagy Sándor várost alapított Egyiptomban, amelyet szerényen — saját magáról — Alexandriának nevezett el. Azonban 323-ban meghalt, mielőtt még a város felépült volna. Az ezt követő ingatag politikai helyzetben Nagy Sándor birodalma három részre szakadt, ezek egyike Egyiptom lett, ahol a Ptolemaiosz-dinasztia uralkodott. A klasszikus görög kor után a ptolemaioszi birodalomba, és ezen belül is elsősorban Alexandriába tevődött át a matematikai élet központja. A természettudomány és a matematika virágzása egészen az alexandriai könyvtár elpusztításáig tartott, amelyet a rómaiak kezdtek el Theodosius császár idején i. sz. 392-ben és a muzulmánok fejeztek be 640-ben — „ami a Koránban megtalálható, az máshol fölösleges, ami pedig nincs a Koránban, az eretnokség”. A becslések szerint Theodosius alatt több mint 300 000 kéziratot semmisítettek meg.

A végső hanyatlás előtt mintegy száz évvel Alexandria adott ott-hont a görög algebra csúcsteljesítményének, Diophantosz munkásságának. Diophantosz életéről nagyon keveset tudunk — például az is csak feltételezés, hogy görög volt. Több könyvet is írt, amelyek közül az *Arithmetica* a legfontosabb. Diophantoszt nyugodtan tekinthetjük az algebra Euklidészének. Szimbolikus írásmódot vezetett be, amelyben más és más jelet használt az ismeretlen négyzetének, köbének stb. jelölésére, és az egyenletek megoldásával foglalkozott. Megoldáson racionális, sőt általában egész számot értett. Ez nem annyira explicit követelmény, mint inkább hallgatólagos feltételezés volt: *aritmetikai* módszerekkel csak ezeket a számfajtákat lehetett kezelni. Ma a *diophantikus* jelzővel azokat az *egyenleteket* illetjük, amelyeknek az egész számok körében keressük a megoldásait.

A Diophantosz által vizsgált kérdések egyike a pitagorasz-i számhármak problémája; ezek olyan egész számok, amelyek egy derékszögű háromszög oldalait alkotják. Ősidők óta ismert volt, hogy a 3, 4 és 5 egység hosszúságú szakaszokból képezett háromszög derékszögű. A Pitagorasz-tétel alapján az általános probléma olyan a, b, c egészek keresését jelenti, amelyekre $a^2 + b^2 = c^2$ teljesül. Az óbabiloni Plimp-

ton 322 tábla, amely valamikor i. e. 1900 és 1600 között keletkezett, tizenöt ilyen számhármast sorol fel. Diophantos megbirkózik az általános problémával — noha módszerét csak speciális példákon keresztül mutatja be. Az 1. könyv 8. feladata például arra vonatkozik, hogy a 16-ot bontsuk fel két négyzet összegére, és a kapott eredmény $256/25$ és $144/25$. Mai jelöléssel az általános megoldást az

$$a = k(u^2 - v^2), \quad b = 2kuv, \quad c = k(u^2 + v^2)$$

képlet adja, ahol k , u és v tetszőleges egészek. Tehát végtelen sok megoldás van, és ezek háromváltozós polinomfüggvények segítségével írhatók le. Diophantos sok más típusú egyenletet is vizsgált, például amikor egy köbös kifejezés egy négyzettel egyenlő. Nem törekedett az összes megoldás megkeresésére, számára elegendő volt, ha már talált egy *akármilyen* megoldást. Ahogy Morris Kline mondja: „Nincsenek általános módszerei. Az egyes problémákhoz használt módszereinek sokfélesége inkább kápráztat, mintsem gyönyörködtet. Ravasz és okos virtuóz, de szemléltomást nem elég mély ahhoz, hogy észrevegye módszerei lényegét és ezáltal jusson el az általánoshoz.” Bizonyos mértékig ugyanez a kór sújtotta a diofantikus egyenletek elméletének szinte egész történetét; az utolsó két évtizedben azonban óriási haladás következett be, és végre egy nagyjából egységes rendszer kezd kialakulni.

A profi amatőr

Fermat, egy kereskedő fia, jogásznak tanult Toulouse-ban az 1600-as évek elején. És szinte minden segítség nélkül megalkotta azt, amit ma Számelméletnek nevezünk: az egész számok matematikáját. Julian Coolidge *Nagy amatőrök matematikája* c. könyvéből azért hagyta ki Fermat-t, mert aki ennyire menő, azt profinak kell tekintenünk. Fermat valóban félelmetes matematikai elme volt, akinek tevékenysége nem korlátozódott a számelméletre. Némely munkája az analízis és a valószínűségszámítás alapgondolatait vetítette előre. Maradandó eredményei közé tartozik, hogy minden $4n + 1$ alakú prím előáll két négyzetszám összegeként. Például $17 = 4^2 + 1^2$, $137 = 11^2 + 4^2$. Bizonyításai közül kevés maradt fenn, de tudjuk, hogy eredményeikhez nem pusztán találgatás útján jutott, mert más matematikusokhoz írott levelei tartalmaznak néha bizonyításrészleteket. Az iménti té-

telt Fermat saját találmányú módszerével, az ún. *végtelen leszállással* igazolta. Ehhez lényegében azt kell megmutatni, hogy ha netán valamelyik $4n+1$ alakú prímre az állítás nem teljesül, akkor az ugyanilyen alakú kisebb prímek között is van egy, amelyikkel ugyanez a helyzet. Egyre lejjebb szállva így végül azt kapjuk, hogy a legkisebbre, az 5-re vonatkozó állítás is hamis kell hogy legyen. Azonban $5 = 2^2 + 1^2$, ami ellentmondás. Mai szemmel nézve ez nem más mint a teljes indukció egy variánsa, de Fermat idejében eredeti újdonságot jelentett.

Diophantosznak a pitagoraszai számhármасokról szóló munkáját olvasgatva, Fermat bizonyára a köbökre, negyedik hatványokra stb. vonatkozó analóg problémán, vagyis az $a^n + b^n = c^n$ ($n \geq 3$) *Fermat-egyenleten* kezdett el gondolkozni. Ezt a már korábban említett margójegyzetből tudjuk, amely szerint $n \geq 3$ -ra *nincs* megoldás a nemnulla egészek körében. Könnyen adódik, hogy elég azokat az eseteket vizsgálni, amikor $n = 4$ vagy n páratlan prím. Fermat vázolt egy bizonyítást $n = 4$ -re. Eulernek sikerült $n = 3$ -at elintéznie. Peter Lejeune Dirichlet 1828-ban és Adrien-Marie Legendre 1830-ban $n = 5$ -re tisztázta a kérdést. 1832-ben Dirichlet $n = 14$ -re is sikerrel járt: érdekes, hogy ezzel könnyebb boldogulni, mint a megfelelő prímre vonatkozó $n = 7$ esettel, és ezt a mulasztást többen is megpróbálták pótolni. 1839-ben Gabriel Lamé közölt $n = 7$ -re egy bizonyítást, de ez hibásnak bizonyult. Gaussnak is volt egy elvetélt kísérlete, és utána azt írta Heinrich Olbersnek, hogy a probléma „nem igazán érdekel, mert könnyen megfogalmazható egy sereg ilyen állítás, amelyet sem bizonyítani, sem megcáfolni nem tudunk”. A szőlő néha még a legnagyobb matematikusnak is savanyú.

Algebrai számok

A továbblépés kulcsa az *algebrai szám* fogalma — ez olyan szám, amely kielégít egy racionális együtthatós polinomegyenletet. A $\sqrt{2}$ például algebrai, mert teljesül rá a $(\sqrt{2})^2 - 2 = 0$ egyenlőség. (Vannak olyan számok, például a π , amelyek nem algebraiak, ezeket *transzcendens*nek hívjuk. Bővebben lásd a 4. fejezetben.) Kiderül, hogy az algebrai számoknak is kiépíthető a saját aritmetikájuk, amelyben megtalálható az egész, a prím stb. fogalmának megfelelő általánosítása. Tekintsük például azokat a *Gauss-egészek*nek nevezett $a + b\sqrt{-1}$ alakú számokat, ahol a és b közönséges egészek, ezek körében minden szám

egyértelműen áll elő prímek szorzataként. Általánosabban, *algebrai egészeknek* azokat a számokat hívjuk, amelyek olyan polinomegyenletnek tesznek eleget, ahol az együtthatók egészek és a főegyüttható 1. Algebrai egészek összege és szorzata ismét algebrai egész. Az algebrai egészek számelméleti bevezetését elsősorban az indokolja, hogy jól használhatók a diofantikus egyenleteknél. Például Fermat azt állította, hogy az $y^2 + 2 = x^3$ egyenletnek nincs más egész megoldása, csak $y = \pm 5, x = 3$. Most erre egy olyan bizonyítást vázolunk, amely az $a + b\sqrt{-2}$ alakú algebrai egészekre támaszkodik. Ezeket azért vesszük elő, hogy a bal oldalt tényezőkre tudjuk bontani, és így az egyenletet

$$(y + \sqrt{-2})(y - \sqrt{-2}) = x^3$$

alakra hozzuk. Némi vacakolás után kiderül, hogy a bal oldalon álló tényezőkről feltehetjük, hogy relatív prímek. A közönséges egészek körében, ha két relatív prím szorzata köbszám, akkor a tényezők külön-külön is köbszámok. Ha feltesszük, hogy ugyanez az algebrai egészek körében is érvényes, akkor speciálisan

$$y + \sqrt{-2} = (a + b\sqrt{-2})^3$$

adódik. Elvégezve a köbre emelést és összehasonlítva $\sqrt{-2}$ együtthatóit, azt kapjuk, hogy

$$1 = b(3a^2 - 2b^2),$$

amelynek a megoldásait már könnyen meg tudjuk keresni próbálgatással. Szükségképpen $b = \pm 1$ és $3a^2 - 2b^2 = \pm 1$. Innen $a = \pm 1$ és $b = 1$. Ekkor viszont $x = 3$ és $y = \pm 5$, amint állítottuk. Így elmondva ez nem egy szigorú bizonyítás, mert nem tudhatjuk biztosan, hogy a köbökre vonatkozó eredmény az $a + b\sqrt{-2}$ alakú egészek körében is igaz marad-e. Ez azonban belátható mint az ilyen alakú egészek egyértelmű prímfelbontásának egyik következménye. A bizonyítás nem teljesen triviális, de nem is különösen mély.

A fentiek kitűnően illusztrálják, mi módon teszi lehetővé új eszközök — jelen esetben az $a + b\sqrt{-2}$ alakú számok — bevezetése, hogy köznapibb matematikai objektumokról — jelen esetben az egészekről

— új eredményeket tudjunk levezetni. Az új eszköz olyan extra szerkezetet hoz magával, amelyet jól ki tudunk használni, majd az egészet kiküszöbölve, sikeresen boldogulunk az eredeti problémával.

Körosztási aritmetika

Több matematikus is észrevette, hogy az $a^n + b^n$ kifejezést is hasonló módon tényezőkre lehet bontani az — általában ζ -val jelölt — n -edik komplex egységgyök felhasználásával. Az előző ponthoz hasonlóan, ha $a^n + b^n$ teljes n -edik hatvány, akkor azt várjuk, hogy mindegyik tényező maga is n -edik hatvány kell hogy legyen. 1847-ben Lamé erre az érvelésre alapozva benyújtotta a Nagy Fermat-tétel bizonyítását. Joseph Liouville, aki nyilván már jó ideje foglalkozott a kérdéssel, azonnal válaszolt Laménak, és rámutatott, hogy a bizonyítás csak akkor működik, ha be tudjuk látni, hogy az egyértelmű prímfelbontás érvényes marad a *körosztási egészek* körében is; ezek ζ -nak egész együtthatós polinomjai. Liouville félelmei beigazolódtak, amikor Ernst Kummer megírta neki, hogy a körosztási egészeknél $n = 23$ -ra nem igaz az egyértelmű prímfelbontás. Úgy tűnt, hogy a Fermat-sejtésnek ez a megközelítésmódja áthághatatlan akadályba ütközött.

Az ideális megoldás

A matematikai kutatás egyik alapszabálya, hogy ne dobjunk el egy jó gondolatot pusztán azért, mert nem működik. Kummer, a teológusból lett matematikus, Gauss és Dirichlet tanítványa, talált egy utat, amellyel helyre lehetett állítani a prímfelbontás egyértelműségét, és nem is csak a körosztási egészekre, hanem algebrai egészek *bármely* rendszerére. Az ötlet akkor merült fel benne, amikor egy teljesen más számelméleti problémán, az ún. magasabb rendű reciprocitási tételeken dolgozott. Ezekről csak annyit említek meg, hogy az $a \equiv b^n \pmod{p}$ teljesülésének feltételeivel foglalkoznak; ez kiterjedt és fontos témakör, de túl messzire vinne el minket. Kummer kidolgozta az *ideális számok* elméletét. Az eredeti megfogalmazás szerint ezek egyáltalán nem is számok, hanem csak nemlétező számok kísértetei. Egy n ideális szám egy tényleges számok közötti olyan reláció, amely úgy viselkedik mint a modulo n kongruencia, azzal az eltéréssel, hogy most nem létezik az n , amely modulus szerint a kongruencia fennállna. Később a

kísértettől két különböző módon is sikerült megszabadulni. Egy ideális számot felfoghatunk valódi számként algebrai számok egy bővebb rendszerében, vagy pedig számok *halmazaként* az eredeti rendszerben. A második értelmezés aratott nagyobb tetszést, és elvezetett a modern *ideál*fogalomhoz. Kummer bebizonyította, hogy noha az algebrai számok prímtényezőkre bontása nem mindig egyértelmű, azonban prím ideális számok szorzataként már mindig egyféleképpen állnak elő. Ennek az új fegyvernek a segítségével (amelyet mesteri módon kellett forgatni, a közönséges számoktól az ideálisokhoz visszahúzódva, majd alkalmas pillanatban ismét kitámadva) Kummer bebizonyította a Nagy Fermat-tételt minden olyan n kitevőre, amely „reguláris” prímszám. Ez egy elég speciális fogalom, elégedjünk meg annyival, hogy a 37, 59 és 67 kivételével minden 100 alatti prím reguláris. További ötletek bevetésével Kummer és Dimitri Mirimanoff ezt a három esetet is elintézte. Azt sejtették, hogy ily módon az eredményt végtelen sok n prímre lehet majd igazolni; a sors iróniája folytán egyelőre csak annyit tudunk, hogy a módszer végtelen sok prímre *mond csődöt!* Persze lehetnek más módszerek is ...

Az eljárásokat továbbfejlesztve a matematikusok egyre messzibbre tolták ki a határt; 1980-ra Wagstaff belátta, hogy a Nagy Fermat-tétel 125 000-ig minden n kitevőre igaz. Ez egyben azt is jelenti, hogy ha esetleg létezik is ellenpélda, az legalább egymillió jegyű hatalmas számokból kell hogy álljon, és így elképzelhetetlen, hogy véletlenül vagy közvetlen számolással rátaláljunk.

Régi megoldását újjáalakítjuk

Egyes diofantikus egyenleteknek — ilyen a pitagoraszi számhármassoké is — megvan az a tulajdonságuk, hogy néhány megoldás megtalálása után ezekből újakat állíthatunk elő. Ebből a típusból a legérdekesebb egyenletek közé tartoznak az *elliptikus görbék*, amelyeket már az előző fejezetben is említettem; ezek

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

alakúak. Bármely egyenes három pontban metsz egy ilyen görbét. Ha ezek közül kettőnek ismertek a koordinátái, akkor ki tudjuk számítani a harmadikéit is. Ha az első kettő koordinátái racionálisak, akkor

ugyanaz áll a harmadikra is. A harmadik pontot tekinthetjük úgy mint a másik kettőnek valamiféle „szorzatát”. Erre a szorzatra meg-
 lepő módon teljesülnek a szokásos algebrai szabályok, egy algebrista
 azt mondaná, hogy a megoldások halmaza Abel-csoportot alkot. L. J.
 Mordell bebizonyította, hogy bármely elliptikus görbe esetén a megfe-
 lelő egyenletnek mindig létezik *véges sok* olyan racionális megoldása,
 amelyekből az összes racionális megoldást a fenti típusú szorzás ismét-
 elt alkalmazásával kapjuk. A megoldások csoportja „végesen gene-
 rált”. Ebből az is adódik, hogy az egyenletnek végtelen sok racionális
 megoldása van. Más egyenletek sokkal szegényebbek, mert csak véges
 sok megoldással rendelkeznek, vagy akár egyetlenegyvel sem. Itt van
 például Axel Thue és Carl Siegel fontos tétele, amely harmad- és ma-
 gasabb fokú egyenleteknek egy általános osztályáról garantálja, hogy
 csak véges sok megoldásuk lehet. Specifikusabb példa W. Ljunggren
 1942-es eredménye arról, hogy az $x^2 + 1 = 2y^4$ egyenletnek pontosan
 két megoldása van, mégpedig $(x, y) = (1, 1)$ és $(239, 13)$. A kérdés
 tehát az, hogyan tudjuk a bőségszarut a koldustarisznyától megkülön-
 böztetni.

Lyukas egyenletek

A kérdésre a válasz egészen más irányból érkezett: az algebrai geo-
 metriából. Az algebrai geometerek olyan (nagyon általános értele-
 men vett) görbéket és felületeket vizsgálnak, amelyeket polinomegyen-
 letek határoznak meg. Ezeket *algebrai sokaságoknak* nevezzük. Az
 elmélet kialakulásához a döntő lökést a komplex számok feletti polino-
 mokra vonatkozó tizenkilencedik századi vizsgálatok jelentették. Egy
 $f(x, y) = 0$ egyenlet két valós változó esetén egy *görbét* határoz meg
 az (x, y) -síkban. Egy ugyanilyen egyenlet két komplex változóval egy
 analóg objektumot, egy komplex görbét definiál. A komplex sík azon-
 ban kétdimenziós, szemben az egydimenziós valós egyenessel, és ezért a
 komplex objektumok rendszerint kétszer annyi dimenziósak mint valós
 megfelelőik. Ebből következik, hogy egy komplex görbe kétdimenziós
 a valós számok felett, tehát tulajdonképpen egy *felület*. A topológu-
 sok szerint egy általános felület olyan mint egy sok fogantyúval ellátott
 gömb, vagy ami ezzel ekvivalens, mint egy soklyukú tórusz (jól átszur-
 kált fánk vagy sokfonatú pereg). A lyukak számát a felület *nemének*
 nevezzük. Vagyis minden komplex egyenlethez tartozik egy szám, az

egyenlet neme. Ez a topológiaiilag definiált szám meglehetősen önkényes és zavaros kreációnak tűnhet, azonban nagyon fontos az algebrai geometriában. Kiderül többek között, hogy aritmetikai úton kiszámítható.

Mordell 1922-ben észrevette, hogy azok az egyenletek, amelyekről tudjuk, hogy végtelen sok racionális megoldásuk van, mind 0 és 1 neműek. A pitagoraszai egyenlet neme 0, az elliptikus görbéké 1. A Diophantos által vizsgált összes egyenlet neme 0 vagy 1! Itt végre valami rend és általánosság kezdett kirajzolódni. Mordell azt sejtette, hogy minden olyan egyenletnek, amelynek a neme legalább 2, csak véges sok racionális megoldása lehet, esetleg egy sincs. A Fermat-egyenlet neme $(n-1)(n-2)/2$, ami nagyobb mint 1, ha n nagyobb mint 3. Tehát a Mordell-sejtés *egyetlen speciális esete* maga után vonja, hogy $n > 3$ -ra a Fermat-egyenletnek csak véges sok megoldása lehet, ha egyáltalán van neki. Ez mutatja, mennyire erős eredményt jelent a Mordell-sejtés. A megoldáshalmaz végeességének bizonyítása után a következő lépés az lenne, hogy a megoldásokra konkrét korlátot szabjunk — „a tételt effektívizáljuk”. Ezután már egy elvileg rutin számolás megmutatná, hogy léteznek-e egyáltalán megoldások, és ha igen, melyek ezek. Mindez persze édes álom, de az volt a Mordell-sejtés is.

A Mordell-sejtést nagyon kevés evidencia támasztotta alá; annyira kevés, hogy André Weil, a világ egyik vezető számelmélésze megjegyezte, hogy „egyetlen jó okot sem tudunk felmutatni arra, hogy mellette vagy ellene szavazzunk”. Weil gyakorta bírálja, hogy túlhajtott módon a „sejtés” szóval szoktak illetni olyan vad találgatásokat is, amelyekről a matematikusok csak *remélik*, hogy talán igaznak bizonyulnak. A sors különös iróniája, hogy éppen Weil néhány sejtése volt az, ami megnyitotta a Mordell-sejtés bizonyításához vezető utat.

Az unalom gyümölcsei

Weil meséli, hogy 1947-ben Chicagóban

rosszkedvű voltam, nem tudtam mit csináljak, és unalmamban belelapoztam két dolgozatba, amelyeket Gauss a bikvadratikus maradékokról írt, és amelyeket korábban sohasem olvastam. A második cikk a Gauss-egészekről szól. Az első lényegében az $ax^4 - by^4 = 1$ egyenlet megoldásszámával foglalkozik a modulo p prímtestben, valamint azzal, hogy ezek milyen kapcsolatban állnak bizonyos Gauss-összegekkel;

a módszer valójában ugyanaz, mint ami a *Disquisitiones* utolsó pontjában szerepel a harmadrendű Gauss-összegekre és az $ax^3 - by^3 = 1$ egyenletekre. Ekkor észrevettem, hogy hasonló elveket alkalmazhatunk minden $ax^m + by^n + cz^r \dots = 0$ alakú egyenletre, és hogy ebből következik az ún. „Riemann-sejtés” a véges testek feletti minden $ax^n + by^n + cz^n = 0$ alakú görbére. Ennek alapján mondtam ki sejtéseket véges testek feletti sokaságokra. . .

A Weil-sejtések kulcsszerepet játszanak a következő kérdésnél: rögzített p prím mellett, hány megoldása van egy adott diofantikus egyenletnek modulo p . Ez a diofantikus egyenletek közönséges egész megoldásai szempontjából is fontos, hiszen bármely egész megoldást „redukálva” egy modulo p megoldáshoz jutunk. Így például, ha modulo p nincs megoldás, akkor egész megoldás sincs. A gyakorlatban olyan problémák merülnek fel, hogyan kell „összeragasztani” a különböző prím modulusok szerinti redukcióból kapott információkat; és erre Weil egy nagyon szép gondolatot dolgozott ki. Ismeretes, hogy bármely p^n prímhathványhoz létezik olyan *véges test*, amelynek pontosan p^n eleme van. Testen olyan rendszert értünk, amely saját aritmetikával rendelkezik, beleértve az osztást is. Egy adott egyenlet megoldásszámát ebben a testben jelöljük a_n -nel. Az egyenlet *zeta-függvénye* olyan eszköz, amely egyetlen objektumban összefogja az összes a_n számot. Defináljunk egy *algebrai sokaságot* mint egy darab egyenlet helyett egy egész rendszer megoldásainak a halmazát. A görbéken végzett vizsgálataira támaszkodva Weil azt sejtette, hogy egy V általános algebrai sokaságra az alábbi három dolog teljesül:

- (1) V zeta-függvénye kifejezhető egy algebrai egészekből álló speciális véges halmaz segítségével.
- (2) Létezik olyan „függvényegyenlet”, amely összekapcsolja a zeta-függvény értékeit s -ben és s/p^n -ben.
- (3) (A V -re vonatkozó „Riemann-sejtés”) Az összes (1)-beli algebrai egész egy olyan körön helyezkedik el a komplex síkban, amelynek középpontja az origó és a sugara $p^{n/2}$.

Mindez meglehetősen technikainak tűnik, a lényege azonban az, hogy nagyon részletes információt nyerünk arról, hány megoldása van egy diofantikus egyenletrendszernek egy véges test felett.

A topológiai kapcsolat

Hogyan jutott Weil ezekre a sejtésekre? Nem találomra, hanem jó okkal szúrta ki őket; „érződött” rajtuk, hogy igaznak kell lenniük. A magyarázat egy topológiai analógiában rejlik; egy olyan eredményt, a *Lefschetz-féle nyomképletet* kell alkalmazni, amely egy topológikus transzformáció fixpontjait számolja össze. A transzformáció itt a *Frobenius-leképezés*, amely x -et x^p -be viszi. Innen származik Weil (1) sejtése. A (2) sejtés alapja egy topológiai „dualitás”. A (3) állítás jóval mélyebb, ebben Solomon Lefschetz és William Hodge más sejtései is szerepet játszanak. Csak egy a bökkenő: a Lefschetz-tétel csak topológikus térben érvényes, a véges testeknek pedig nincs valamirevaló topológiai szerkezetük. Így Weil analógiája nem igazán meggyőző. Sőt azonnal el is vethetnénk, ha *görbékre nem adná a helyes eredményt*. A Weil-sejtéseket végül 1975-ben Pierre Deligne bebizonyította, egészen másféle (és nehéz) módszerek felhasználásával. Az eredmények az algebrai geometriával kapcsolatos számos problémánál azóta is alapvetően fontosnak bizonyultak.

Sejtések parádéja

A tizenkilencedik század óta az algebrai geometerek mindig felhasználják az algebrai számtestek és a „függvénytestek” között fennálló analógiát. Az utóbbiak elemeit is egyenletek gyökeiként származtatjuk, csak itt az egyenletek együtthatói racionális számok helyett $p(x)/q(x)$ racionális függvények, ahol p és q polinomok. Az első kézzelfogható jel, hogy Mordellnek talán igaza lehet, 1963-ból származik, amikor Jurij Manyin függvénytestekre bebizonyította az analóg eredményt. Tőle függetlenül H. Grauert is ugyanezt igazolta 1965-ben. Közben 1962-ben Igor Safarevics kimondott egy sejtést a görbék „jó redukciójáról” — arról az eljárásról, ahogyan egy egészek fölötti egyenletet egy prímmodulus szerint redukálunk. (Ahelyett hogy mondjuk az $x^3 = 22$ egyenletet oldanánk meg, olyanokat nézünk, mint például $x^3 \equiv 22 \pmod{7}$). Ennek egyik megoldása $x \equiv 2 \pmod{7}$, és ez valamit az eredeti x -ről is elárul. Ugyanezt a 7 helyett sok más prímmel is végigjátszva további információ nyerhető.) Safarevics azt tippelte, hogy adott nemszám esetén csak véges sok olyan görbetípus létezhet, amely minden prímmre jól redukálható, kivéve esetleg prímek egy rögzített véges halmazát. A

lényeges vonás itt a görbék halmazának végessége. A helyzet kezdett izgalmassá válni, amikor 1968-ban A. N. Parsin megmutatta, hogy a Safarevics-sejtésből következik a Mordell-sejtés. Amint már bizonyára észrevették, az algebrai geometria bővelkedik sejtésekben. 1966-ban John Tate ezek tárházát újabbal gazdagította, amely az „Abel-sokaságokra”, az elliptikus görbék tetszőleges dimenziós általánosításaira vonatkozott. A 80-as évek elejére a diofantikus egyenletek szakértői gyanítani kezdték, hogy Mordell nem tévedett, a bizonyítás ott ólálkodik valahol a közelben, és a Tate-sejtés is belekeveredett a dologba. És 1983-ban Gerd Faltingsnak sikerült nemcsak Mordell sejtését, hanem rögtön Safarevicsét és Tate-ét is igazolnia. Módszere tulajdonképpen Fermat „végtelen leszállásának” egy nagyon kifinomult változata. Faltings először a Tate-sejtést tisztázza. Ezt Deligne-nek a Weil-sejtésekre vonatkozó eredményével kombinálva eljut a Safarevics-sejtéshez. Végül Parsinnak a Mordell-sejtésre vonatkozó munkájával válik teljessé a bizonyítás.

Ami a Nagy Fermat-tételt illeti, továbbra is maradt egy hézag. Az, hogy véges sok megoldás van, nem ugyanaz, mint hogy egy sincs. Faltings tételétől a Fermat-egyenletnek akár sokmillió megoldása is lehet bármely n -re! Azonban D. R. Heath-Brown nemrég megmutatta, hogy azoknak az n egészeknek az aránya, amelyekre nincs megoldás, egyre jobban megközelíti a 100 százalékot, amint n egyre nagyobb, vagyis a Nagy Fermat-tétel „majdnem mindig” igaz. Elhagyható-e innen a „majdnem”? Ennek eldöntése a következő matematikus-nemzedékre vár.

EUKLIDÉSZ ELHANYAGOLT KÖNYVE

Az összemérhetetlen arányok felfedezését Metapontumi Hippiaszosznak tulajdonítják. A pitagoreusok ekkor állítólag éppen a tengeren jártak, és Hippiaszost büntetésül a vízbe vetették, mert egy olyan elemet talált a világ-egyetemben, amely ellentmond annak a pitagoreus doktrínának, hogy az univerzum minden jelensége egész számokra vagy azok arányaira vezethető vissza.

Morris Kline

A matematika egész eseménydús történetében is az egyik legelőkelőbb hely illeti meg Euklidész *Elemek* c. művét, ezt az i. e. 300 körülről származó geometriai témájú könyvsorozatot. Euklidész a logikai okoskodások szigorúságát tekintve olyan szabványt állított fel, amelyet 2000 éven át nem tudtak felülmúlni. Noha logikájában mai szemmel már hiányosságokat fedezünk fel, axiomatikus megközelítmódja mégis modellként szolgál a jelenkori matematika nagy részéhez. Az iskolai tanításban az *Elemek*ből terjedelmes szemelvényeket használtak fel úgyiszlán módosítás nélkül a középkortól egészen a tizenkilencedik század végéig. A tanított anyag magában foglalta az egybevágó háromszögeket, Pitagorasz tételét, a sokszögek szerkesztését és az öt szabályos test meghatározását. Az egyik könyv azonban nemigen volt iskolai tananyag: a tizedik. Sokkal homályosabb, mint a többi: első ránézésre technikai eredmények zagyva keveréke, minden rendszerezett téma nélkül. Valószínűleg nem sok olyan tanár akadt, aki egyáltalán bármi értelmet talált a Tizedik Könyvben, nemhogy a matematika felépítésében játszott szerepét értékelte volna. Egészen más „érzetet” kelt az emberben, mint a másik tizenkét könyv. Ennek az az oka, hogy valójában egyáltalán nem geometriáról szól, hanem aritmetikáról. Egy olyan hosszas küzdelemnek a tanújele, amely a valós számok rendszerének néhány mélyebb tulajdonsága körül folyt.

A dolog azért érdekes, mert több olyan gondolatot kapcsol össze,

amelyek különböző álrühákba öltözve jelentősen befolyásolták a matematika fejlődését. Különösen arra mutat rá, hogy módszerek egy jól kiépített tárházának ismerete hogyan terelheti vakvágányra a soron következő kutatásokat, miközben elfedi egy egyszerűbb és világosabb nézőpont létét. Más szavakkal, ha valamit akármilyen nyakatekert módon is, de sikeresen el tudunk végezni, akkor sokkal egyszerűbb ezt továbbra is így csinálnunk, mintsem megpróbálnunk jobban megérteni, miről is van szó tulajdonképpen. Sőt, egy komplikált eljárás alkalmazói gyakran egyenesen kedvüket lelik a bonyolult lépésekben, miután azokat már jól elsajátították. Ugyanez meglehetősen gyakran előfordul a modern kutatásban is. Ez nem valami szerencsés dolog, mert a jó matematika lényege éppen az, hogy a probléma mélyére hatoljunk; a megoldás önmagában nem a végső cél.

Irracionális áldozat

Noha a matematika nem kizárólag, sőt még csak nem is elsősorban számokkal foglalkozik, ezek mégis alapvető szerepet játszanak. A matematikusok sokféle számtípust különböztetnek meg. A *természetes számok* a hagyományos nemnegatív egészek: 0, 1, 2, 3, ... és így tovább. Az *egészek* a pozitív és negatív egészek és a 0. A *racióális számok* (vagy röviden „a racionálisok”) az egész számok hányadosai, vagyis a törtek. A *valós számok* („a valósok”) azok, amelyek felírhatók véges vagy végtelen tizedes tört alakban. A *komplex számok* úgy keletkeznek a valósokból, ha megengedjük, hogy a -1 -nek legyen négyzetgyöke.

Történetileg, a számkör minden új bővítését csak hosszas filozófiai csatározások után sikerült keresztülvinni. A csaták mindig győzelemmel végződtek, de nem a rendszer bővítését szorgalmazó intellektuális érvelés kitűnősége döntött, hanem az ilymódon kapott eredmények vitathatatlan hasznossága. A számok annyira szorosan kapcsolódnak a természetes világ egyes vonásaihoz, hogy hajlamosak vagyunk szinte fizikailag létező egyedi dolgoknak képzelni őket. Csak alaposabb szemrevételezésükkor derül ki, hogy az emberi elme szüleményei — egy módszert jelentenek, amelynek segítségével az agyunk *modellezni* tudja a Természet bizonyos vonatkozásait, és semmiképpen sem jelentik magát a Természetet.

A pitagoreusok idejére a számkör mai nyelven megfogalmazva kö-

rülbelül a racionális számokig jutott el, azaz az egész számokhoz és ezek arányaihoz: „ratio”-ihoz. Az egész számok megjelenítése és a velük való bánásmód könnyen megvalósítható: a számláláshoz mindössze egy nagy halom kavicsra van szükség. A törtek is egyszerűen megközelíthetők: a $\frac{2}{3}$ szám megadásához vegyünk például egy zsák homokot, osszuk be három egyforma kupacba, és ezekből válasszunk kettőt. Végtelen sok tört létezik, és ezek a számsor végtelenül finom felosztását teszik lehetővé. Kereskedelmi, földmérési, csillagászati és hasonló jellegű célokra a racionális számok több mint elegendők. A legpontosabb tudományos mérések még ma is csak legfeljebb mintegy tíz tizedes jegyig fejezhetők ki, tehát a kísérleti eredmények leírására már olyan racionálisok is megfelelnek, amelyek nevezői nem haladják meg a 10 milliárdos nagyságrendet. Az *elmélet* követelményeihez azonban ezek nem elegendők.

Az ismert geometria logikai alapjait vizsgálgatva a pitagoreusok meglepő felfedezést tettek. A geometriában a számok természetesen módon adódnak mint egyenes szakaszok hosszai. A görögök azt is tudták, hogy az aritmetikai műveleteket geometriai szerkesztésekkel meg lehet valósítani. Két számot például összeadni úgy kell, hogy a megfelelő hosszúságokat egymás mellé helyezzük. Nyilvánvalónak tűnt, hogy bármely hosszúságnak megfelel egy szám (amin itt racionális számot értettek), és bármely (racionális) számnak megfelel egy hosszúság. Mivel a racionálisok egészen finom eloszlásúak, így bizonyára nincs közöttük hézag — vagyis nincs olyan szakasz, amelynek ne racionális lenne a hossza. A pitagoreusoknak azonban sikerült bebizonyítaniuk, hogy bizonyos könnyen megszerkeszthető szakaszok hossza *egyetlen racionális számnak sem felel meg*. Ezeket *irracionálisnak* nevezték el.¹ Ilyen például az egységnyi oldalú négyzet átlója (amelynek a hosszát ma

¹ Szabó Árpád „A görög matematika kibontakozása” c. könyvében (Magvető, 1978) a 108–109. oldalakon a következőket írja: „A görögök a mi ‚irracionális számunknak’ megfelelő kifejezést (‚alogosz’) ebben az összefüggésben *nem* használták. Helyette ugyanezt a tényt kétféleképpen fogalmazhatták meg. A négyzet átlója — ha az oldal valamilyen szám — ‚kimondhatatlan’ (‚arrhétón’); vagy pedig: a négyzet oldala és átlója hosszúságuk szerint (lineárisan) *összemérhetetlen* mennyiségek (nincs közös hosszúsági mértékük). Az ‚összemérhetetlenségre’ néha ma is használják még a latinos ‚inkommenzurábilis’ kifejezést. Ez a latin megjelölés a görög ‚aszymmetron’ terminus technicus fordítása.” (LM)

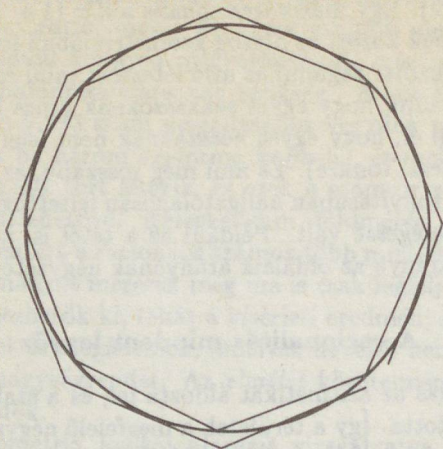
$\sqrt{2}$ -nek mondjuk). Egy másik irracionális a $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ aranymet-szés, amely többek között az ötszög geometriájában fordul elő. Három lehetőség kínálkozott: tagadni az átló létezését (ami romba dönti a geometriát); elfogadni, hogy egyes szakaszoknak nincs hosszuk (dettó); vagy azt fogadni el, hogy egyes hosszaknak nem felel meg szám (ami az aritmetikát teszi tönkre). És ami még rosszabb, az összes olyan tétel, amelynek bizonyításában hallgatólagosan feltettük, hogy a hosszak racionálisak, kétségessé vált. Például az a tétel is, hogy két négyzet területének az aránya az oldalaik arányának négyzetével egyezik meg.

A racionalitás mindent legyőz

A görög megoldás az aritmetikát áldozta fel, és a szakaszokat a hosszukkal azonosította. Így a területek a megfelelő négyzetek szinonímái lettek, stb. Az *arány* ekkor valami relációféle szakaszok párhuzamosai között. Ez a trükk azért működik, mert a tényleg alapvető tételek kivétel nélkül arányokról szólnak. Nem számít, hogy egy arány valójában micso-da, csak azt kell tudnunk, hogy két arány mikor egyenlő, illetve ha nem egyenlők, akkor melyik a nagyobb. A görögök erre vonatkozó válasza, amit Eudoxosz adott meg, az *Elemek* Ötödik Könyvének elején olvasható. Ennek a definíciónak a modern változata a következőképpen hangozhat: „ahhoz hogy két irracionálist meg tudjunk különböztetni, egy racionálist kell közöttük találnunk.” Az eredeti megfogalmazás sokkal nehezkesebb és számok helyett arányokról szól. Mai szemmel nézve rögtön azt sugallja, hogy az irracionálisokat a közelítő racionálisok segítségével kell kezelni. A görögök kezében is lényegében ugyanezre a gondolatra vezetett, csak sokkal körülményesebb formában.

Kimerítés

Tegyük fel, hogy két ugyanolyan alakú háromszögünk van, csak az egyik kétszer akkora méretű mint a másik (vagyis az oldalai kétszeres hosszúságúak). Ekkor tudjuk, hogy a *területe* négyszeres. A terület a méret négyzetével arányos. A görögök ezt először háromszögekre, majd sok kis háromszög összeragasztásával sokszögekre is igazolták. Azonban még egy olyan egyszerű és alapvető alakzat mint a kör sem bontható fel háromszögekre. Ennek ellenére a görögöknek sikerült a bizonyítást a körre és más alakzatokra is kiterjeszteniük azáltal, hogy



2. ábra. A régi görögök kimerítési módszere a kört olyan belső és külső sokszögekkel közelíti, amelyek területe között akármilyen kicsi az eltérés. Ily módon a kör területe meghatározható.

sokszögekkel közelítették őket. Az első kört közrefogjuk egy beírt és egy körülírt sokszöggel, majd hasonló párt képezünk a másik körnél is. A belső sokszögek területe az oldalaik négyzetével arányos, és ugyanez áll a külsőkre is. A beírt és körülírt sokszögek eltérését akármilyen kicsivé tehetjük, és közéjük szorul maga a kör.

Ebben a helyzetben alkalmazható Eudoxosz gondolatmenete. A körök területének aránya vagy megegyezik a méretük arányának négyzetével, vagy pedig nagyobb, illetve kisebb annál. Ha kisebb, akkor egy meghatározott mennyiséggel kisebb; ez elegendő helyet hagy arra, hogy a hézagba beszorítsunk egy közelítő sokszöget, és azt nyerjük, hogy a sokszögnél is baj van. Ez azonban lehetetlen, hiszen sokszögekre tudjuk, hogy a tétel igaz. Ugyanígy okoskodhatunk a „nagyobb” esetben is. Vagyis csak az egyenlőség állhat fenn! Ennek a módszernek a telivér görög változatát *kimerítésnek* nevezik, mert a közelítő sokszögek „kimerítik” az egész területet. Első ránézésre a módszer nagyon nehézkesnek tűnik, ennek ellenére némi gyakorlás után elég könnyű a használata. És ez volt az, ami a görögöket egy merev gondolkodási séma csapdájába csalta. Megakadályozta őket abban, hogy egy tisztességes aritmetikai vagy algebrai módszert kidolgozzanak, sőt

még azoknak a görbéknek és felületeknek a terét is eltorzította, amelyekkel a geometriájuk boldogulni próbált. Figyelemre méltó, hogy a saját maguk szabta béklyóik ellenére milyen sok jó munkára futotta az erejükből. (Nem lenne azonban fair a görögökkel szemben, ha elhallgatnánk, hogy a valós számok rejtett finomságainak a teljes megértéséhez nagyon nehéz lett volna anélkül a geometriai háttér nélkül eljutni, amelyet éppen az ő tevékenységük biztosított.)

A Tizedik Könyv hagyatéka

A homályos Tizedik Könyv, úgy tűnik, az irracionálisok különböző típusainak osztályozására tesz kísérletet. Geometriai úton lényegében csak azokhoz az irracionálisokhoz lehet eljutni, amelyekben négyzetgyökvonások szerepelnek. Vannak közöttük egyszerűbbek, mint például a $\sqrt{7}$, és bonyolultabbak is, mint amilyen a

$$\sqrt{3\sqrt{7\sqrt{31} - 19\sqrt{2}} + 11\sqrt{7\sqrt{31} + 19\sqrt{2}}}.$$

A Tizedik Könyv ilyen bonyodalmakkal próbál megbirkózni. Eredményei mai szemmel nézve nem túl fontosak, a különböző *típusú* irracionalitások vizsgálata azonban ma is az. És ennek egyik fontos eszköze, a *lánc törtek kifejtés* egyenesen a Tizedik Könyvre vezethető vissza.

Egy tipikus lánc tört a következőképpen fest:

$$1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}$$

Nem olyan félelmetes, mint amilyennek látszik, ha a megfelelő sorrendben gombolyítjuk fel. Az aljánál kezdve, $2 + 1/4 = 9/4$. Ennek reciproka $4/9$, amihez 3-at adva $31/9$ -et kapunk. Vegyük megint a reciprokát, ez $9/31$, és adjuk hozzá a kezdő 1-est, amiből $40/31$ adódik. Ez az eredmény. A kényelmesebb jelölés érdekében ezt a terpeszkesdő formulát az $[1; 3, 2, 4]$ alakra rövidíthetjük, és mind a szedő, mind pedig a szövegszerkesztőm nagyon fog örülni, ha ebben valamennyien megegyezünk.

Bármely számnak felírhatjuk a láncörtalakját. Racionális szám esetén, a $40/31$ -hez hasonlóan, a tört egyszerűsítés véget ér. Irracionálisnál viszont nem, így ez pontosan szétválasztja a két számtípust, noha ezt a kritériumot éppenséggel nem mindig könnyű alkalmazni! Néhány fontos irracionális szám láncörtkifejtése a következő:

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 6, 1, 3, \dots]$$

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots]$$

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots]$$

$$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$$

$$\tau = [1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots]$$

Itt e a természetes logaritmus alapszáma és $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ a már korábban említett aranymetszés.

Sorminták

Vegyük közelebbről szemügyre a π -t. Ha nagyon hamar levágjuk a láncörtet, akkor $[3; 7]$ adódik, aminek az értéke a minden iskolásgyerek által ismert $22/7$ tört. Ha néhány lépéssel odébb csonkolunk, akkor $[3; 7, 15, 1] = 355/113$ az eredmény, ami π -nek egy másik híres közelítő értéke. Számszerűleg

$$22/7 = 3,1428571 \dots$$

$$355/113 = 3,1415929 \dots$$

$$\pi = 3,1415926 \dots$$

és minél több tagot tartunk meg a kifejtésből, annál jobb közelítést kapunk. Belátható, hogy a láncörtkifejtés adja a lehető *legjobb* racionális közelítéseket.

A felsorolt példák némelyike nagyon szép mintát mutat, máshol meg a minta hiánya szembeötlő. A legegyszerűbb eset a τ , ahol minden „jegy” 1! Ismétlődő sorozatokat találunk a $\sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$ kifejtésében is. Mindhárom számban legfeljebb racionálisokból vont négyzetgyökök szerepelnek, és már a tizennyolcadik században megmutatták, hogy nem véletlen egybeesésről van szó: a láncörtkifejtésben az ismétlődő

minta éppen az $a + \sqrt{b}$ „másodfokú irracionálisokat” jellemzi, ahol a és b racionálisak.

Azt is észrevehetjük, hogy e is szabályos mintát mutat, ami azonban nem ismétlődik. A mintából látszik, hogy a lánctörtkifejtés nem érhet véget, és ebből következik, hogy e szükségképpen irracionális. Mivel a lánctört nem is periodikus, ezért e nem lehet másodfokú irracionális sem. Ezt Euler vette észre 1737-ben a lánctörtek általános vizsgálata közben. Johann Lambert lánctörtek segítségével bizonyította be, hogy ha x racionális, akkor e^x és $\operatorname{tg} x$ nem az. Ebből következik, hogy π is irracionális. A matematikusok nagyon szeretnék tudni, hogy a lánctörtkifejtésben milyen mintáknak milyen számok felelnek meg. Mondhatunk-e például valamit a *harmadfokú* irracionálisokról (mint amilyen a $\sqrt[3]{2}$)? Mely számok „lánctörtjegyei” maradnak egy felső korlát alatt? Ezek a kérdések a legkülönbözőbb területeken játszanak fontos szerepet, még a dinamikus rendszerek elméletében is. Sajnos nagyon keveset tudunk róluk.

Egyesek irracionálisabbak másoknál

A lánctörtek révén a másodfokú irracionálisok megkülönböztethetők a periodikus mintájuk alapján, de az irracionálisok osztályozására van más lehetőség is. Amint a 3. fejezetben említettük, az egyik legalapvetőbb mód a számok felosztása *algebraiakra*, amelyek kielégítenek egy racionális együtthatós polinomegyenletet, és *transzcendensekre*, amelyeknél ez nem teljesül. A $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, τ és $\sqrt[3]{2}$ algebraiak. Olyan polinomegyenlet, amelynek a π vagy az e tenne eleget, nem ugrik az eszünkbe, azt sejtetve, hogy ezek transzcendensek. Másrészt viszont váratlan formulák is felbukkanhatnak a matematikában, ilyen például az Eulertól származó nevezetes

$$e^{\pi\sqrt{-1}} + 1 = 0$$

összefüggés, tehát balga dolog lenne elhamarkodott következtetéseket levonni. Végül az derült ki, hogy e és π *valóban* transzcendensek, de a bizonyításra egy darabig várni kellett. Sőt, 1844-ig azt sem tudták, hogy egyáltalán léteznek-e transzcendens számok. Abban az évben Liouville egy olyan tételt igazolt, amely szerint az algebrai irracionálisok nem közelíthetők túl jól racionálisokkal. Ezután könnyű olyan

irracionálist találni, amely rendkívül jól közelíthető racionálisokkal, ez a szám tehát szükségképpen transzcendens. Ilyen például az

$$1,101001000010000000010000000000000001\dots,$$

ahol az 1-esek közötti 0-k száma minden menetben megduplázódik. Ez még mindig fényévnyi messzeségben van attól, hogy egy „természetesen előforduló” számról mutassuk meg, hogy transzcendens. Ezt a lépést Charles Hermite tette meg 1873-ban, bebizonyítva, hogy e transzcendens. Ezután így írt: „Nem merem megkísérelni π transzcendenciájának az igazolását. Ha mások vállalkoznak rá, senki sem fog a sikerüknek nálam jobban örülni, de hidd el kedves barátom, hogy a dologhoz szükség lesz némi erőfeszítésre.” Ferdinand Lindemann 1882-ben sikeresen megoldotta ezt a feladatot, hasonló módszert alkalmazva mint Hermite és felhasználva Euler fenti formuláját is.

A kör négyszögesítése

Miért érdekelte az embereket annyira a π transzcendenciája? A görögök három híres problémát hagytak örökül, ezek olyan szerkesztési feladatok, amelyeknél csak körző és vonalzó használható.

- Szerkesszünk olyan négyzetet, amelynek a területe egy adott kör területével egyenlő.
- Harmadoljunk egy adott szöget.
- Szerkesszünk olyan kockát, amelynek a térfogata egy adott kocka térfogatának a duplája.

Lindemann eredményéből azonnal következik, hogy az (a) probléma, a kör négyszögesítése, megoldhatatlan. Ennek az az oka, hogy bármely geometriai szerkesztés elemi lépések egymásutánjára bontható, és első- és másodfokú egyenletek megoldásainak sorozataként értelmezhető. Ezért a geometriai szerkesztésekkel nyert bármely hosszúság biztosan kielégít egy polinomegyenletet. Mivel a kör négyszögesítése egy π hosszúságú szakasz szerkesztésével ekvivalens, így π transzcendenciája teljessé teszi a bizonyítást.

Itt a matematika egy tipikus trükkjét figyelhetjük meg. Az eredeti probléma — a kör négyszögesítése — nyilvánvalóan geometriai. Arra számítanánk, hogy a megoldás is geometriai lesz. A koordinátageo-

metria segítségével azután az egészet algebrai kérdéssé fogalmazzuk át, és algebrai megoldást várunk. Lindemann bizonyítása azonban analitikus; az analízis módszereire támaszkodik, ezen belül felhasználja Euler e -t és π -t összekapcsoló formuláját (aminek a bizonyítása végtelen sorokon múlik). A probléma várva várt megoldása nem közvetlen geometriai roham eredménye — sőt nem is lehet az. A matematikát feloszthatjuk címkével ellátott részterületekre, azonban aki úgy képze-li, hogy a tárgy ezt a felosztást tiszteletben is fogja tartani, az semmit sem okult a történelemből.

Egy bizonyítás, amelyet Euler elszalasztott

1737-ben Euler észrevette, hogy a

$$\zeta(x) = 1 + 2^{-x} + 3^{-x} + \dots$$

sor prímszámokra vonatkozó eredmények bizonyítására lehet felhasználni, például meg lehet így mutatni, hogy a prímek reciprokaiknak az összege végtelen, ami azon túlmenően, hogy végtelen sok prím van, egyben azt is igazolja, hogy elég sűrűn fordulnak elő a számok között. (1859-ben Bernhard Riemann Euler munkájának jelentős általánosításába kezdett, megalapítva ezzel az analitikus prímszámelméletet. A $\zeta(x)$ mai neve Riemann-féle zeta-függvény.) Óriási nehézségek árán Eulernek sikerült a sor bizonyos x értékekre összegeznie. 1734-ben belátta, hogy $\zeta(2) = \pi^2/6$. Később minden páros n -re bebizonyította, hogy $\zeta(n)$ π^n -nek racionális többsége. Ebből adódik, hogy $\zeta(n)$ minden páros n -re irracionális (sőt transzcendens). Egészen a közelmúltig senki sem tudott semmit mondani hasonló szempontból a páratlan n -ekről, és a probléma meglehetősen reménytelennek tűnt. El lehet képze-lni, milyen reakciót váltott ki, amikor 1978 júniusában a Marseille-Luminy-ben tartott Journées Arithmétiques konferencián R. Apéry, a caeni egyetem tanára „A $\zeta(3)$ irracionalitásáról” címmel jelentkezett előadásra. Alf van der Poorten, aki jelen volt, a következőképpen tudósít az eseményről: „Általános szkepticizmus uralkodott. Ezt az előadás szinte tovább fokozta, egészen a hitetlenségig. Az alkalmi hallgatók és a nem francia anyanyelvűek számára az egész csak valószínűtlen állítások sorozatának tűnt.” Van der Poorten ezután néhány bizzar képletet sorol fel, amelyek $\zeta(3)$ racionális megközelítéseinek egy olyan gyorsan

konvergáló sorozatához vezetnek el, hogy (Liouville tétele alapján) $\zeta(3)$ nem lehet racionális. Majd így folytatja:

Némi hitetlenkedéssel fogadtam a hírt, hogy valaki, mégpedig Henri Cohen úgy véli, hogy ezek az állítások talán igazak. Este nagy izgalommal ültem le Hendrik Lenstrával és Cohennel beszélgetni, amikor is Cohen elmagyarázta és megmutatta a bizonyítás legtöbb részletét. A végére meg lettünk győzve arról, hogy Professeur Apéry valóban egy csodálatos és pazar bizonyítást talált a $\zeta(3)$ irracionalitására. Egy kritikus lépést azonban nem tudtunk belátni.

A probléma egy olyan sorozatot érintett, amelyet Apéry a bizonyítás során konstruált, és amelyről azt állította, hogy egészek az elemei. De hogy ez miért lenne igaz, azt látszólag semmi sem támasztotta alá. Sőt első ránézésre az állítás hamissága tűnt „nyilvánvalónak”, lévén annyira furcsák az Apéry által használt formulák. Azonban ... „Marseille-ben teljesen elképedtünk, amikor HP-67-es kalkulátoraink egyre csak egész számokat produkáltak.” De a miértet, úgy tűnt, csak Apéry tudta, és ő nem árulta el. Azután két hónappal később a Helsinkiben tartott Nemzetközi Matematikai Kongresszuson Cohen és van der Poorten megemlégették a problémát Zagiernek, aki „bosszantó gyorsasággal” kifoltozta a gondolatmenetükben levő hézagot. Ezzel véglegesé vált, hogy Apérynek igaza van, és furcsa formulái is helyesek.

Van der Poorten így foglalja össze az epizódot:

Az ördögbe is, mi történik itt? Apéry hihetetlen bizonyítása csodák és rejtélyek keverékének tűnik. Amit látunk, az minden bizonnyal csak a jéghegy csúcsa. Vajon az egész hegy is így néz ki? A magam részéről arra a véleményre hajlok, hogy az eddig bemutatottak inkább kódósításnak tekinthetők, semmint magyarázatnak. A legijesztőbb azonban az, hogy Apéry bizonyításának nincs egyetlen olyan vonatkozása sem, amely ne lett volna elérhető a 200 évvel ezelőtti matematikusok számára.

Azt hiszem, Apéry nem túl népszerű egyes matematikus körökben. Cohen Helsinkiben elmondott beszámolója után a hallgatóság egy tagja némi malíciával „a francia paraszt győzelmére” tett megjegyzést. De egy másik, nagylelkűbb hang így felelt: „Nem! Nem! Ez bámulatos. Valami, amit már Euler is megcsinálhatott volna!”

PÁRHUZAMOS GONDOLATOK

A „nemeuklideszi” geometria tanulmányozása csak fáradttá, önteltté, arrogánssá és gyengeelméjűvé teszi a diákokat. A „nemeuklideszi” tér *démonok* hazug kitalációja, akik sietnek a „nemeuklidesziek” sötét értelmét téveszmékkel ellátni. A „nemeuklidesziek”, akárcsak a régi szofisták, úgy tűnik, nem veszik észre, hogy az értelmüket a *rossz szellemek* sugallatai elhomályosították.

Matthew Ryan

Sydney Smith történetében két szomszédasszony áll épülő házuk frissen elkészült betonalapján, és egymással vitatkozik. „Ezek az asszonyok sohasem fognak egyetérteni — mondja Smith —, mert különböző alapokról érvelnek.” Ez jól példázza azt a tanulságot, amelyért a filozófusok és a logika művelői egyaránt keményen megszenvedtek, nevezetesen, hogy a semmiből nem kaphatunk valamit. A logikai érvelés bármely láncolata valamilyen bizonyítatlan feltevésből kell, hogy kiinduljon. Ahogy Arisztotelész mondta, „nem bizonyítható minden, hiszen akkor a bizonyítási láncnak sohasem szakadna vége. Valahonnan el kell indulnunk, és elfogadott, de bizonyíthatatlan dolgokkal kell kezdenünk.” Euklidesz tudatában volt ennek, és az *Elemek* írását a feltevések felsorolásával kezdte. Ezek legtöbbje nemigen kérdőjelezhető meg, például „amik ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők.” Van azonban közöttük egy, amelynek az intuitív igazsága sokkal vitathatóbb: „Ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenest korlátlanul meghosszabbítva, ezek találkozni fognak azon az oldalon, amerre a két derékszögnél kisebb szögek vannak.” Némi megfontolás árán beláthatjuk, hogy ez a feltevés ekvivalens az alábbi könnyebben érthető kijelentéssel: ha adott egy egyenes és rajta kívül egy pont, akkor a ponton át az egyenessel egyetlenegy párhuzamos húzható. *Pár-*

huzamoson természetesen egy olyan egyenest értünk, amely nem találkozik az eredeti egyenessel, akármennyire is meghosszabítjuk őket.

Hogy egy ilyen feltevést ki kell kötni, azt Euklidész kommentátorai általában szégyenfoltnak tekintették. Jean Le Rond d'Alembert egyenesen botránnyról beszélt. Proklosz i. sz. 450 körül keményen bírálta: „Teljesen ki kellene iktatni, mert ez a tétel nagyon sok nehézséget okoz, amelyeket Ptolemaiosz egy bizonyos könyvében megpróbált tisztázni. Az az állítás, hogy mivel a két egyenes egyre jobban összefut, amint meghosszabítjuk őket, ezért valahol majd találkoznak, hihető, ámde nem szükségszerű.” Világos, hogy a görögök hosszan és alaposan elgondolkoztak a feltevés természetéről. Később számtalan kísérlet történt annak a bizonyítására, hogy ez következik Euklidész többi feltevéséből, de egyik sem járt sikerrel. Euklidész nézete megerősítést nyert, amikor kezdett beigazolódni, hogy a geometriának léteznek olyan konzisztens változatai, amelyekben a *párhuzamossági axióma* nem érvényes. Egyetlen Geometria helyett geometriák egész sora létezik, amelyekben más és más tételek igazak. Ezek felfedezése sokáig tartott, mert mindenki azt hitte, hogy a geometria valamiféle természeti objektum, és nem egyszerűen az emberi agy konstrukciója. Végül világossá vált, hogy noha tökéletesen értelmes azt kérdezni, hogy mi a Természet valódi geometriája, azonban ez nem olyan kérdés, amit pusztán matematikai okoskodással el lehet dönteni.

Euklidész javított kiadásban

A problémával foglalkozó legrégebbi munkák azt a célt tűzik ki, hogy bebizonyítsák a párhuzamosokra az Euklidész által kimondott tulajdonságot. Úgy látszik, néhány matematikai probléma vonzza a bolondokat, ilyen a kör négyszögesítése, a szögharmadolás, a Nagy Fermat-tétel és ilyen a párhuzamossági axióma. Az abszolút örültségeken kívül néhány kitűnő munka is született olyan emberektől, akik azt *hitték*, hogy találtak egy bizonyítást, pedig valójában csak Euklidész feltevését egy vele logikailag ekvivalens, de szintén bizonyítatlan másikkal helyettesítették. Néhány ezek közül:

Három pont vagy egy egyenesen vagy egy körön fekszik.
Van tetszőlegesen nagy területű háromszög.

Egy háromszög szögeinek összege 180° .

Léteznek hasonló alakzatok.

Mások felismerték, hogy csak logikai helyettesítést találtak Euklidész axiómájára, azonban úgy érezték, hogy az ő verziójuk intuitívabb.

Az első érdemleges támadást Girolamo Saccheri intézte, aki 1733-ban adta ki „Az összes hibájától megszabadított Euklidész” c. kétkötetes munkáját. Saccheri indirekt bizonyítással próbálkozott, az alábbi konstrukcióból kiindulva. Húzzunk egy egyenest, állítsunk rá két egyenlő hosszú merőleget, és ezek végpontjait kössük össze egy új egyenessel. Tekintsük azokat a(z egyenlő) szögeket, amelyeket ez az egyenes a merőlegesekkel bezár. Ezekre három eset lehetséges:

- (a) *derékszögek*,
- (b) *tompaszögek* (derékszögnél nagyobbak),
- (c) *hegyesszögek* (derékszögnél kisebbek).

Ha úgy tetszik, Saccheri ötlete az volt, hogy téglalapot próbálunk szerkeszteni, és utána megnézzük, hogy sikerült-e. Megmutatta, hogy (a) ekvivalens a párhuzamossági axiómával. Ezután azt akarta igazolni, hogy (b) és (c) akármelyike ellentmondásra vezet, tehát hamis kell hogy legyen. Saccheri hozzáfogott egy sor levezetéshez. Az 1. könyv megsemmisíti a tompaszöget (a szerző melegegedésére), és azzal a kihívó kijelentéssel zárul, hogy „a hegyesszög feltételezése teljesen hamis, mert ellenkezik az egyenes természetével.” Saccheri talán saját kétségeit próbálta így eloszlatni. Hogy nem sikerült magát teljesen meggyőznie, abból is kitűnik, hogy megírta a 2. könyvet, amelyben megkísérli alátámasztani érvelését. A 37-es számú, döntő fontosságú állításra három bizonyítást is ad: mindhárom hibás. Az egyik infinitezimálisokat használ; a másik helyességéből következne, hogy minden kör kerülete egyenlő; a harmadik az idő és a mozgás fizikai fogalmait hívja segítségül. Miután ilyen hiábavalóan fennakadt a saját maga által kivetett horgon, Saccheri elérkezik a 38. állításhoz: „A hegyesszög feltételezése teljesen hamis, mert önmagát rombolja le.” Ezután következik az összefoglalás, amelyben a tompaszögre vonatkozó hipotézis elvetését a „napnál világosabb” szavakkal intézi el, ám megjegyzi, hogy a hegyesszög hamis volta azon a bizonyos nyugtalanító 37. állításon múlik.

Ötven évvel később Lambert nagyon hasonló utakon haladt mint

Saccheri, és számos olyan tételt bizonyított be, amelyek noha nagyon furcsák az euklideszi szemnek, azonban nem vezetnek logikai ellentmondáshoz. A hegyesszögre vonatkozó feltételezésből származó egyik eredménye a háromszög területének a szögek összegével kapcsolatos képlete:

$$k^2(\pi - (A + B + C)),$$

ahol k egy alkalmas konstans. Ez nagyon hasonlít a gömbi geometria egy tételéhez, amely szerint egy r sugarú gömbön a háromszög területe

$$r^2((A + B + C) - \pi).$$

Itt r -et $k\sqrt{-1}$ -gyel helyettesítve Lambert megkockáztatta azt a feltevést, hogy ennek megfelelően egy imaginárius sugarú gömbi geometriáról van szó. Nem világos, hogy ezen mit értett — ha egyáltalán gondolt valamire —, mindenesetre felfedezhetjük munkájában annak a gondolatnak a csíráját, hogy a párhuzamossági axióma egy felület geometriáján esetleg nem marad érvényben.

Párhuzamos felfedezések

Az összes ilyen korai próbálkozást az az óhaj vezérelte, hogy megdöntsön minden Euklidésszel szembeni alternatívát. A tizenkilencedik század elejére azonban egy merészebb álláspont hódított teret: olyan önmagukban érvényes geometriák megkonstruálása, amelyek különböznek az euklideszitől, különös tekintettel a párhuzamosokra. Úgy tűnik, hogy ennek fő gondolatait hárman fedezték fel egymástól függetlenül: Bolyai János, Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij és Gauss.

Bolyai ragyogó fiatal tüzértiszt volt, aki a fáma szerint egyetlen nap leforgása alatt tizenhárom győzelmes párbajt vívott meg egymásután. Lobacsevszkij a kazanyi egyetemen tanított. Gauss volt a kor (és talán minden idők) legnagyobb matematikusa. Bolyai édesapját, Farkast barátság fűzte Gausshoz, és korábban ő maga is foglalkozott a párhuzamossági axiómával. Fiát óva intette, hogy ne pazarolja idejét ilyen ártalmas problémára. Azonban 1823-ban a fiú már „csodálatos felfedezéseiről” számol be apjának: „semmiből egy ujj más világot teremtettem.” Eközben Lobacsevszkij sem tétlenkedett: 1826-ban előadást tartott a párhuzamosokról, 1829-ben pedig egy hosszú tanulmányt je-

lentetett meg oroszul, amely nyomtatásban először nyújtott alternatívát Euklidésszel szemben. Ez a nem túl szerencsésen hangzó *Képzetes geometria* címet viselte. Bolyai 1832-ben publikálta munkáját.

Gauss ezután, különös megnyilatkozásainak egyikében azt írta az öreg Bolyainak, hogy képtelen dicsérni a fiú munkáját, mert ő, már-mint Gauss, jóval hamarabb ugyanilyen eredményekre jutott (bár ezeket nem publikálta). Gauss visszautasítása Bolyai életét a matematikai ismeretlenség homályára ítélte, munkája érdemeit csak halála után ismerték el. Nem járt sokkal jobban Lobacsevszkij sem: megvakulva, szegénységben halt meg. Gauss kijelentését tanúbizonyság támasztja alá: 1824-ben azt írta Franz Taurinusnak, hogy a hegyesszög feltételezése „egy különös geometriához vezet el, amely egészen más mint a mienk, egy önmagában tökéletesen érvényes geometria ez, amelyet teljesen kielégítő módon kidolgoztam a magam számára, úgyhogy bármely problémát meg tudok benne oldani ... Ha valamikor kicsit több időm lesz, mint most, talán publikálom majd a vizsgálataimat.” Valójában ezt sohasem tette meg, valószínűleg attól félt, hogy a közönség nem értené meg: „Félek a barbárok üvöltésétől ...”

Geometriák a geometriákon belül ...

Mindhárom alkotó arra a meggyőződésre jutott, hogy egy alternatív, önmagában érvényes geometriafajtát talált. Azért érezték így, mert minden értelmesen összeilleni látszott. Annak teljes értékű bizonyítása azonban, hogy a rendszer *sohasem* fog ellentmondásra vezetni, még hiányzott. Kétséges, hogy ezt a hiányt egyáltalán valaki észrevette-e; az biztos, hogy nagyon senki sem aggódott miatta. A végső lépést 1868-ban Eugenio Beltrami tette meg, aki a felületek geometriájával foglalkozott. Egy görbevonalú felületen az egyenesnek a *geodetikus vonal* felel meg — két pont között a legrövidebb görbe. Beltrami bevezette a *pszeudoszférának* nevezett felületet, és megmutatta, hogy itt a geodetikus vonal geometriája kielégíti Saccherinek a hegyesszögre vonatkozó feltételezését, és egyben kielégíti Euklidész maradék axiómáit is. Vagyis megjelent áruhában Bolyai–Gauss–Lobacsevszkij nemeuklideszi geometriája. Ebből következik, hogy a nemeuklideszi geometria sohasem vezethet ellentmondásra — mert ellenkező esetben a pszeudoszféra nem létezhetne. A pszeudoszféra azonban az *euklideszi geometrián* belüli konstrukció! Pontosabban szólva, annyit tudunk, hogy

a nemeuklideszi geometria csak abban az esetben mondhat ellent önmagának, ha az euklideszi geometria is ellentmond önmagának. Ha Saccheri programja sikerrel járt volna, akkor lerombolta volna az euklideszi geometriát, nem pedig tökéletesítette volna!

Beltrami, mai szóhasználattal élve, a nemeuklideszi geometria egy modelljét találta meg: egy olyan matematikai rendszert, amelynek objektumai, ha őket megfelelően értelmezzük, kielégítik Euklidész összes axiómáját, a párhuzamosságit kivéve. Egy ilyen modell meglepte teljesen kizárja annak lehetőségét, hogy a párhuzamossági axiómát a többiből levezessük. A levezetés ugyanis a modellen belüli értelmezés során szükségszerűen a párhuzamossági axióma modellbeli teljesülését is maga után vonná. Ahogy David Hilbert egyszer a berlini pályaudvaron megjegyezte: „Kell, hogy pontok, egyenesek és síkok helyett bármikor asztalokat, székeket és söröskorsókat tudjunk mondani.” Emögött az a gondolat húzódik meg, hogy egy bizonyításban a geometriai objektumoknak csak azokat a tulajdonságait szabad felhasználnunk, amelyeket az axiómák fejeznek ki, tehát bármely adott, a valósághoz kapcsolódó értelmezésük *elvileg* érdektelen. Gyakorlatilag persze egy jó kép segíti az intuíciót, és nagyon valószínű, hogy Hilbertet a geometriáról szóló munkája megírásakor a papírlapra rajzolt egyenesek szokásos képe inspirálta, és nem az asztalon levő söröskorsók. Nem azt mondta, hogy a hagyományos kép ne lenne hasznos, hanem csak azt, hogy nem lényeges.

Beltrami modelljét hamarosan követték mások. Egy különösen szép modell Henri Poincarétól származik, aki a háromdimenziós változatot a következőképpen írja le:

Vegyünk például el egy nagy gömbbe zárt világot, ahol az alábbi törvények érvényesek: a hőmérséklet nem mindenütt egyforma; legelebbebb a középpont, majd kifelé haladva a hőmérséklet fokozatosan csökken, míg végül a gömb felszínén eléri az abszolút nulla fokot. Ezt a következő szabály írja le: ha R a gömb sugara, és r a középponttól mért távolság, akkor az abszolút hőmérséklet $R^2 - r^2$ -tel lesz arányos. Tegyük fel, hogy ebben a világban bármely test lineáris tágulása az abszolút hőmérsékletével arányos. Egy mozgó tárgy egyre kisebbé válik, amint a gömb felszínéhez közeledik. Noha a szokásos geometriánk szemszögéből nézve ez a világ véges, azonban lakói számára végtelennek látszik. Ahogy a gömb felszínéhez közelednek, egyre hidegebbé, s egyszersmind egyre kisebbé válnak. Lépni is egyre kisebbeket lépnek, és így sohasem érhetik el a gömb határát. Ha számunkra

a geometria a merev testek mozgástörvényeinek a tanulmányozását jelenti, ezeknek a képzeletbeli lényeknek a számára az említett *hőmérsékleti változások szerint deformált* testeknek a vizsgálatát fogja jelenteni.

Poincaré úgy folytatja a modell kidolgozását, hogy a fénysugarak útja görbe vonal lesz, nevezetesen olyan körív, amely derékszögben éri el a gömbfelszínt, és mindez nemeuklideszi geometriát alkot. Ez tulajdonképpen egy háromdimenziós modell; ha a gömb helyett körlapot veszünk, akkor hasonló módon egy kétdimenziós nemeuklideszi geometriához jutunk. Felix Klein, aki maga is konstruált a nemeuklideszi geometriához modelleket, *hiperbolikus* geometriának nevezte el az olyan modellt, amely Saccheri hegyesszögű hipotézisét valósítja meg, és *elliptikusnak* a tompaszöghöz tartozót. Az elliptikus geometriára nagyon könnyű modellt találni. Tekintsünk egy gömbfelszínt; az „egyenes” jelentsen „főkört”, a „pont” pedig „átellenes pontpárt”. (A főkörök két átellenes pontban metszik egymást, ezért annak az euklideszi axiómának a teljesüléséhez, hogy két egyenesnek legfeljebb egy közös pontja lehet, azonosítanunk kell az átellenes pontokat. Hilbertnek az asztalokról, székekről és söröskorsókról szóló kijelentése szerint ez megengedett.)

Utólagos előrelátás

Mai eszünkkel meglepődünk azon, milyen sokáig tartott, amire az emberek rájöttek, hogy az euklideszin kívül más geometriák is elképzelhetők. A gömbi geometriát már régen kidolgozták, alkalmazták a csillagászatban, és ennél fogva a hajózásban is. Senki sem vette észre, hogy a gömbi geometriában nem igaz a párhuzamossági axióma? Persze hogy észrevették; de nem tulajdonítottak neki jelentőséget, hiszen a gömb szemmel láthatóan nem ugyanaz mint a sík. A gömbön továbbá két egyenes, azaz két főkör, két pontban metszi egymást. Világos, hogy egy egyenestől nem ezt várjuk. A problémát csak egy másik logikai alapállásból kiindulva kerülhetjük meg, úgy téve mintha az átellenes pontok azonosak lennének! Akkoriban ez nem hangzott volna meggyőzően, hiszen mindenki számára nyilvánvaló, hogy a főkörök nem egyenesek, és két pont nem ugyanaz mint egy. Hogy megérthessük, miért meggyőző ez ma, egy kicsit előre kell utaznunk az időben és egy pillantást vetnünk az axiómarendszerek logikájára.

Az axiómarendszer lényege, hogy minden feltevést előre világosan ki kell mondani. Más szóval, a játékszabályokat pontosan kell rögzíteni. Azt, hogy az axiómák „igazak-e”, éppúgy nem firtatjuk, mint azt, vajon a sakk szabályai „igazak-e”. Természetesen arra számítunk, hogy a játékot játszani lehessen. Ha a sakk szabályai valahol azt írnák elő, hogy elsőnek világos lép, máshol pedig azt, hogy sötét, akkor a játékot el sem lehetne kezdeni. Más szóval, azt akarjuk, hogy a szabályok *konzisztensek*, következetesek legyenek. Ugyanez áll az axiómarendszerekre is: a végső próba a konzisztencia, nem pedig az igazság. Egy axiómarendszer konzisztenciájának a bizonyítására az egyik lehetséges mód az, ha megadunk valami olyat, ami ezeket az axiómákat kielégíti. Egyetlen sakkiparti igazolja, hogy a szabályok egy játszható játékhoz vezettek; az axiómarendszer egyetlen *modellje* igazolja, hogy a feltételek nem mondanak ellent egymásnak. Az euklideszi geometriáról például úgy mutathatjuk meg, hogy konzisztens, ha vesszük a síknak a szokásos koordináta geometriai modelljét, mint az (x, y) pontok halmazát, ahol x és y számok, és ellenőrizzük, hogy valamennyi axióma teljesül. Sajnos van a dolognak egy kis szépséghibája, mégpedig az a kérdés, hogy milyen hozzávalókat használhatunk. A geometria koordinátás modellje *csak* abban az esetben igazolja a konzisztenciát, ha a nyersanyagról — jelen esetben az aritmetikáról — már tudjuk, hogy konzisztens. Más szóval, minden konzisztencia bizonyítás *relatív*. Az X rendszer konzisztenciájának megállapítása helyett mindössze annyit tudunk megmutatni, hogy az X rendszer konzisztens feltéve, hogy valamely más Y rendszer is az. Ez a mára széles körben elfogadott álláspont az egész kérdéshez új irányból közelít. Az eredeti kérdés így hangzott: „Az euklideszi-e az egyetlen igaz geometria?” Mára azonban már az euklideszi geometriát is tüzetes vizsgálatnak kell alávetni. Vajon ő *valóban* konzisztens? És a válasz az, hogy fogalmunk sincs. Ha azonban az aritmetika konzisztens, akkor Euklidesz is az.

Ezután megkérdezhetjük, hogy a *nemeuklideszi* geometria konzisztens-e? És a válasz megintcsak az, hogy nem tudjuk, de konzisztens, ha feltesszük, hogy akár az aritmetika, akár az euklideszi geometria az. Matematikai szempontból egyformán értelmes dolog akár euklideszi, akár nemeuklideszi geometriát használni. Hogy a fizikai tér geometriájaként melyikük igaz (ha egyáltalán valamelyikük), ezt a kérdést már nem matematikailag, hanem csak kísérletileg lehet eldönteni. Mindez annyira világosnak tűnik ma, hogy nehéz felmérnünk, mennyire homá-

lyos volt akkoriban. Utólag persze könnyű okosnak lenni: a tizenkilencedik századi pionírok úttörő gondolatai nélkül még ma is ugyanúgy sötétben tapogatóznánk.

Görbült tér

A nemeuklideszi geometriák felfedezése megszabadította a matematikát korábbi merev hozzáállásától, és gombamódra elszaporodtak a furcsa geometriák. Az ember azt gondolná, hogy ezek a csodabogarak elméletileg lehetnek érdekesek, a valós tér viselkedése szempontjából azonban nincs jelentőségük. De még ez is hamisnak bizonyult! 1854-ben egy fiatal német matematikus, Georg Bernhard Riemann habilitációs előadása került sorra a magántanári cím elnyeréséért. A vizsgáztató maga a nagy Gauss volt. Riemann több alternatívát is beterjesztett, biztonságos és kevésbé biztonságos témákban egyaránt. Gauss ezek közül a legkihívóbbat választotta, amely „A geometria alapjait alkotó hipotézisekről” címet viselte. Gauss később elmesélte, hogy azért esett erre a választásra, mert maga is sokat töprengett rajta, és kíváncsi volt, mit tud a fiatalember mondani. Riemann, az alkalomhoz felnőve, ragyogó előadásban ecsetelte azt az elgondolását, hogy a tér geometriája pontról pontra változhat: itt hiperbolikus, ott euklideszi, amott meg elliptikus. Két dimenzióban ezt mint valamely görbevonallú felület geodetikusainak a geometriáját képzelhetjük el: a helyi geometriát a görbület jellege határozza meg. Riemann ezt kiterjesztette a többdimenziós terekre, vagy *sokaságokra*. Előadását az alábbi jóslattal zárta:

Hátra van annak a kérdésnek a megválaszolása, hogy ezeket a sokaságokra vonatkozó hipotéziseket milyen mértékben és mely határok között erősíti meg a tapasztalat. A tér alapjául szolgáló valóságnak vagy diszkrét sokaságot kell alkotnia, vagy pedig metrikus kapcsolatainak az okait rajta kívül, a ráható kényszerítő erők körében kell keresnünk. Ez egy másik tudomány, a fizika területére visz át minket, aminek a vizsgálata meghaladja a mai értekezésünk kereteit.

1870-ben William Kingdon Clifford visszatért a jóslatra.¹ „Úgy tartom, hogy kis méretekben a tér természete olyan dombocskákhoz hasonlít,

¹ Clifford: *Az anyag térelmélete*. A fordítást lényegében Simonyi Károly *A fizika kultúrtörténete* c. könyvéből vettük át.

amelyek egy átlagosan nézve lapos felületen helyezkednek el ... Ez a görbült vagy deformált jelleg folytonosan halad a tér egyik részéből a másikba, hullám módjára.” Úgy látta továbbá, hogy a fizikai mozgások nem mások, mint ezeknek a hullámoknak a fodrozódásai. Albert Einstein általános relativitáselméletében, amely mintegy hatvan évvel Riemann után keletkezett, a nehézségi erő a téridő görbületeként jelenik meg. Egy nagy tömeg közelében a tér görbültebb, mint ettől távol. A térben mozgó részecskék emiatt a geometriai torzulás miatt írnak le görbevonalú pályát. Az eddigi legjobb kísérletek mind megerősítik az Einstein által felvázolt képet, amely számos olyan jelenséget is megmagyaráz, amelyek egy euklideszi geometriájú téridővel nem lennének összhangban. Ilyenek például a Merkúr bolygó mozgásának a szabálytalanságai és a fény csillagok melletti elhajlása. Nemrégiben csillagászok felfedezték, hogy egész galaxisok is viselkedhetnek „gravitációs lencseként”, összegyűjtve és eltérítve a távoli forrásokból érkező fényt. Egy esetben arról, ami az égbolton két egyforma, közeli kvazárnak tűnt, kiderült, hogy egy nagytömegű galaxis túloldalán levő egyetlen kvazárnak a kettős képe egy torzított gravitációs lencsében. A galaxishoz a két kép egymásból történő „kivonásával” lehetett eljutni. Még újabban a magányos hullámok, a szolitonok tanulmányozása arra vezetett egyes tudósokat, hogy a szubatomi részecskék viselkedése a Clifford által elképzelt mozgó dombocskákhoz hasonlíthat. Abban mindenestre meglehetősen biztosak lehetünk, hogy a tér vagy a téridő geometriája csillagászati méretekben *nem* euklideszi!

A CSODAKORSÓ

Egy porszem világot jelent,
s egy szál vadvirág az eget,
fogd föl tenyeredben a végtelent,
s egy percben élj évezredet.

William Blake¹

Vegyük kézbe akármelyik matematika tárgyú könyvet vagy folyóiratot, és minden bizonnyal már az első vagy a második oldalon a végtelenbe botlunk. Választottam néhány könyvet taláломra a polcomról. Harold Davenport *Felsőbb aritmetikájában* a bevezetés második sorában szerepelnek „az 1, 2, 3, ... természetes számok”, és a három pont itt annak a jelzésére szolgál, hogy a természetes számok sora végtelen. Lee Johnson és Dean Riess *Numerikus analízise* a második oldalon említi az exponenciális függvény végtelen sorát. B. A. F. Wehrfitz *Végtelen lineáris csoportok* — kell-e többet mondanom? A G. I. Baranblatt, G. Iooss és D. D. Joseph által szerkesztett *Nemlineáris dinamika és turbulencia* első oldalán „a Navier–Stokes-egyenletek vagy egy véges dimenziós Galerkin-approximáció” részt olvasva helyesen arra következtethetünk, hogy a matematikusok a teljes Navier–Stokes-egyenleteket végtelen dimenziós matematikai objektumoknak tekintik. Elwyn Berlekamp, John Conway és Richard Guy a *Nyerő stratégiák* 434. oldalán egy olyan játékot írnak le, amelynek a lehetséges állásai „ ∞ , 0, ± 1 , ± 4 ”, ahol ∞ a „végtelen” szokásos jelölése. Lehet, hogy valaki a 434. oldalt túlzásnak érzi, azonban ez a második kötet hatodik oldala, és az első kötetet nem néztem meg.

A végtelen, Philip Davis és Reuben Hersh szerint a „matematika csodakorsója”. Csodás, mert a tartalma kimeríthetetlen. Ha egy végtelen korszóból kiveszünk egy tárgyat, nem eggyel kevesebb, hanem *pontosan*

¹ Kálnoky László fordítása (Az ártatlanság jövődölései)

ugyanannyi marad benne. Az ilyen paradoxonok intették óvatosságra dédapáinkat a végtelenre hivatkozó okoskodásokkal kapcsolatban. Túlságosan nagy azonban a végtelen csábítása. Olyan nagyszerűen lehet benne a problematikus dolgoktól megszabadulni. Azoknak a matematikai bizonyításoknak a száma is szinte végtelen, amelyek úgy érnek célra, hogy minden nehézséget kitolnak a végtelenbe, és ott ezt eltüntetik. De mit is értünk valójában végtelenen? Vadbaromság vagy szelídíthető? Valóságosak-e a matematika végtelenjei vagy csak ügyes hamisítványok, a végtelen farkasa véges báránybőrben?

Hilbert szállodája

Ha az asztalon minden terítéknél egy kés és egy villa van, akkor biztos, hogy pontosan egyezik a villák és kések száma. Ez egyaránt érvényes egy intim kétszemélyes gyertyafényes vacsorára, és egy 2000 fős kínai bankettre, és az egyezésben biztosak lehetünk anélkül, hogy tudnunk kellene, hány személyre terítettek. Ez az észrevétel a számfogalom alapja. Azt mondjuk, hogy tárgyak két halmaza között *egy-egyértelmű* (vagy *kölcsönösen egyértelmű*) *megfeleltetés* áll fenn, ha az egyik halmaz minden egyes tárgyának egyértelműen megfelel a másik halmazból egy tárgy, és viszont. Az egymásnak kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető halmazok azonos számú tárgyat tartalmaznak.

Végtelen halmazok esetén azonban paradoxonok lépnek fel. Hilbert például egy olyan képzeletbeli szállót írt le, amelynek végtelen sok szobája van, a szobaszámok 1, 2, 3, ... Egyik este, amikor a szálloda teljesen tele van, egy magányos vendég érkezik szállást keresve. Az élelmes igazgató minden vendéget egy szobával arrébb költöztet, tehát az 1. szoba lakóját a 2.-ba, a 2.-ét a 3.-ba, stb. Az összes vendég áthelyezésével az 1. szoba felszabadult az újonnan érkezett részére! Másnap a Végtelentours utazási iroda autóbusza érkezik végtelen sok új vendéggel. Az igazgató most az 1. szoba lakóját a 2.-ba, a 2.-ét a 4.-be, a 3.-ét a 6.-ba, ..., az n -edikét a $2n$ -edik szobába költözteti. Ezzel az összes páratlan sorszámú szoba szabaddá vált, tehát a busz első utasa elfoglalhatja az 1. szobát, a második utas a 3. szobát, a harmadik utas az 5. szobát, és általában, az n -edik utas a $2n - 1$ -edik szobát. Még ha végtelen sok busz érkezik, minden buszban végtelen sok turistával, akkor is elhelyezhető mindenki.

Hasonló paradoxonokat már régen is megfigyeltek. Proklosz, aki

i. sz. 450 körül Euklidész munkáihoz írt kommentárt, megjegyezte, hogy mivel a kört egy átmérője két félkörre osztja, ezért kétszer annyi félkörnek kell lennie, mint átmérőnek. A középkor filozófusai észrevették, hogy két koncentrikus kör között az azonos sugáron fekvő pontok segítségével egy-egyértelmű megfeleltetés létesíthető; következésképpen a kis körnek ugyanannyi pontja van, mint a nagyknak. Ugyanezt a problémát veti fel Galilei *Matematikai érvelések és bizonyítások*² c. művében a bölcs Salviati: „Akkor hadd kérdezzem meg, hány négyzetszám van? A válasz teljesen nyilvánvaló: annyi, amennyi a négyzetgyökök száma, hiszen minden négyzetnek megvan a gyöke, és minden gyökhöz tartozik egy négyzet, továbbá egy négyzetnek sincs egynél több gyöke, sem gyöknek egynél több négyzete.” A ritkán elégedett Simplicio most így felel: „Mi hát a megoldás?” Mire Salviati: „Véleményem szerint egyetlen helyes következtetés létezik: végtelen sok természetes szám van, és végtelen sok négyzetszám, és a négyzetszámok számossága sem nem nagyobb, sem nem kisebb az összes számokénál; végső soron ugyanis az egyenlő, kisebb, nagyobb relációknak a végtelenek esetén nincs értelme, csupán ha véges mennyiségekről van szó.”

Álcázott végtelen

Galilei úgy oldja meg a paradoxont, hogy a végtelen másképp viselkedik, mint bármi más, és ezért a legjobb elkerülni. Néha azonban nagyon nehezen lehet elkerülni. A végtelen problémája egyre kitartóbban jelentkezett az analízis kialakulásának korai szakaszában a végtelen sorok megjelenésével. Mennyi például

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots ?$$

Könnyen adódik, hogy a tagok számának növekedésével az összeg egyre jobban megközelíti a 2-t. Ezért kézenfekvőnek látszik azt mondani, hogy az egész végtelen összeg értéke *pontosan* 2. Newton a végtelen sorokra alapozta a függvények differenciálására és integrálására vonatkozó módszereit. Így feltétlenül szükséges, hogy ezeket értelmessé tegyük. Ráadásul a végtelen sorok maguk is paradox módon viselked-

² Az idézetek szövege lényegében Dávid Gábor fordítását követi.

nek. Mennyi például az

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

sor összege? Az

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

alakból az összeg nyilván 0. Másrészt

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots$$

értéke nyilván 1. Tehát $0 = 1$, és a matematika teljes épülete összeomlik egy ellentmondásban.

Az analízis a felhasználók számára sokkal fontosabbnak bizonyult annál, mintsem hogy ilyen aprócska zűrök és filozófikus problémák miatt félretolják. A kérdést végül úgy oldották meg, hogy a végtelen sorokra vonatkozó állításokat véges összegekre kimondott tekervényesebb kijelentésekkel cserélték fel. Ahelyett, hogy az $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ végtelen összeg értéke a , azt mondjuk, hogy az $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ véges összeg a -tól való eltérése akármilyen előírt ϵ hibánál kisebb lesz, ha n -et egy (ϵ -tól függő) N -nél nagyobbra választjuk. A sor csak akkor *konvergál*, azaz az összegnek csak abban az esetben van értelme, ha ilyen a létezik. Hasonlóképpen a „végtelen sok egész szám létezik” kijelentést a „bármely egész számhoz létezik nála nagyobb” véges változattal helyettesíthetjük. Ahogyan Gauss 1831-ben írja: „Tiltakozom az ellen, hogy valaki egy végtelen mennyiséget, mint ténylegesen létezőt használjon; ez teljesen tilos a matematikában. A végtelen csak egy szóhasználat, ami tulajdonképpen olyan határértékeket takar, amelyeket bizonyos arányok tetszőlegesen megközelítenek, míg mások minden korláton túl nőhetnek.” Így tanulják ma is a diákok a végtelennel való bánásmódot bármely egyetemi analízis előadáson. Tekintsük például az alábbi típusfeladatot: „bizonyítsuk be, hogy $(n^2 + n)/n^2$ tart az 1-hez, amint n tart a végtelenhez”. Jaj annak a diáknak, aki azt csinálja, hogy „ $(\infty^2 + \infty)/\infty^2 = \infty/\infty = 1$ ”. De az is megnézheti magát, aki a következőket írja: „ $(n^2 + n)/n^2 = 1 + 1/n$, legyen most $n = \infty$, és ekkor $1 + 1/\infty = 1 + 0 = 1$ ”, bár ez megfelelő magyarázattal helyessé tehető. (Az embernek ilyen pongyola dolgokat csak azután engednek meg,

ha matematikai potenciájának kifogástalanságát már az ehhez szükséges tekervényes szószaporításokkal bebizonyította. Ha valaki egyszer már nagynehezen elsajátította, hogyan nem szabad pongyolának lenni, utána nyugodtan lehet az!)

Ez a felfogás, amelyet *potenciális (lehetséges) végtelennek* nevezünk, Arisztotelészig nyúlik vissza. Eszerint nem állítjuk, hogy létezik egy tényleges végtelen, hanem az állításunkat olyan módon fogalmazzuk át, amely a pillanatnyi kíváncsagságnak megfelelően akármilyen nagy mennyiségeket megenged. A csodakorszok itt már nem a tárgyak valódi végtelenjét tartalmazza; csak annyit tapasztalunk, hogy akármilyen sokat is vettünk ki belőle, még mindig maradt benne. Ebben a formában ez a különbségtétel nem hangzik túl meggyőzően, azonban filozófiai szinten mindenképpen elkerüli azt a kényes kérdést, hogy végül is mennyi holmi van abban az átkozott korszokban.

A soros válság

Akadtt azonban néhány vállalkozó szellem, aki továbbra is eljátszódott a „tényleges (aktuális)” végtelen gondolatával; akinek egy végtelen halmaz nem egy elvileg akármilyen határon túl folytatható 1, 2, 3, ... folyamatot jelentett, hanem egy kész, befejezett, végtelen egészt. Az elsők között volt Bernard Bolzano, aki 1851-ben *A végtelen paradoxonai* címmel könyvet írt. Bolzano fő érdeklődése azonban az analízis szilárd megalapozására irányult, és megállapította, hogy ehhez ténylegesen végtelen halmazokra nincs igazán szükség.

A tizenkilencedik század vége felé válság jelei mutatkoztak a matematikában. Nem holmi elképzelt filozófiai paradoxonok a végtelenről, hanem egy masszív kézzelfogható krízis, amely a Fourier-sorok elméletében dolgozó matematikusokat mindennapi tevékenységükben akadályozta. A Fourier-sorok valahogy így néznek ki:

$$f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x + \dots,$$

és Joseph Fourier vezette be őket a hővezetésről szóló munkájában. A kérdés az, hogy mikor létezik egy ilyen sornak összege. Különböző matematikusok ellentmondó válaszokra jutottak. Az egész dolog szörnyen összegubancolódott, mert helyes, logikus matematika helyett igen so-

kan hihetőnek látszó „fizikai” meggondolásokat használtak. Sürgősen rendet kellett csinálni. A válasz lényegében az, hogy egy Fourier-sor akkor értelmes, ha nem túl ronda azoknak az x értékeknek a halmaza, ahol az f függvény csúnyán viselkedik. A matematikusok így rákényszerültek arra, hogy a valós számegyenes pontthalmazainak finomabb szerkezetét szemügyre vegyék. 1874-ben ez a probléma vezette el Georg Cantort az *aktuálisan (ténylegesen)* végtelen halmazok elméletének a kidolgozásához, amelyet a rákövetkező években sikerrel megvalósított. Ragyogóan eredeti gondolatai érdeklődést és némi csodálatot vívtak ki, azonban maradibb felfogású kortársai alig leplezett ellenszenvvel tekintettek rájuk. Cantor két dolgot csinált. Megalapozta a halmazelméletet (ami nélkül a mai matematikusok beszédzavarral küdenének, annyira alapvető nyelvvé vált), és eközben felfedezte, hogy egyes végtelenek nagyobbak másoknál.

A cantori paradicsom

Cantor azzal kezdte, hogy erényt kovácsolt abból, amit addig mindenki más hibának tartott. A végtelen halmazt úgy *definiálta*, hogy a halmaz és egy valódi részhalmaza között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető. Két halmaz ekvivalens, vagy más szóval ugyanolyan *számosságú*, ha kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak. A legkisebb végtelen halmazt a $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ természetes számok alkotják. Ennek a számosságát az $\aleph_0$ (alef-null) szimbólummal jelöljük, és ez a legkisebb végtelen szám. Mindenféle fura tulajdonsággal rendelkezik:

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0, \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0, \aleph_0^2 = \aleph_0,$$

azonban ezzel együtt a végtelen számokra konzisztens aritmetikát valósít meg. (Végül is, milyen eredményt várunk, ha egy végtelent megduplázunk?) Bármely $\aleph_0$ számosságú halmazt *megszámálható*nak mondunk. Ilyen halmazt alkotnak például a negatív egészek, az összes egészek, a páros számok, a páratlan számok, a négyzetszámok, a köb-számok, a prímek és ami meglepőbb, a racionálisok is. Azt a képet szoktuk meg, hogy sokkal több racionális szám van, mint egész, mert az egészek között nagy hézagok találhatók, míg a racionálisok sűrűn helyezkednek el. Az intuíció azonban félrevezető, mert elfeledkezik arról, hogy egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésnek nem kell te-

kintettel lennie a pontok sorrendjére. Egy p/q racionálist egy (p, q) egész számpár definiál, így a racionálisok száma $\aleph_0^2$. Azonban láttuk, hogy ez megegyezik $\aleph_0$ -nal.

Néhány ilyen bűvészmutatvány után az emberben felmerül, hogy talán minden végtelen halmaz megszámlálható. Lehet, hogy Salviatinak igaza volt, és $\aleph_0$ csak a ∞ egy előkelőbb jelölése. Cantor megmutatta, hogy nem ez a helyzet, mert a valós számok halmaza nem megszámlálható. Létezik tehát a természetes számok végtelenjénél nagyobb végtelen! A bizonyítás rendkívül eredeti. A lényege durván az, hogy feltesszük a valós számok megszámlálhatóságát, és ellentmondást hozunk ki. Soroljuk fel a valósokat tizedes tört alakban. Készítsünk egy új tizedes törtet, amelynek az első tizedes jegye különbözik a lista első számának első tizedes jegyétől, a második jegye különbözik a lista második számának második jegyétől, és általában az n -edik jegye különbözik a lista n -edik számának n -edik jegyétől. Ez az új szám sehol sem szerepelhet a listán, ami lehetetlen, hiszen feltettük, hogy a felsorolás teljes. Ez a Cantor-féle „átlós eljárás”, ami azóta is sok fontos problémánál bukkant elő. Erre támaszkodva Cantornak mesteri módon sikerült igazolnia transzcendens számok létezését. Emlékezzünk vissza a probléma körüli óriási nehézségekre. Cantor azt mutatta meg, hogy az algebrai számok halmaza megszámlálható. Mivel az összes valósok halmaza nem megszámlálható, ezért szükségképpen léteznek olyan számok, amelyek nem algebraiak. Ezzel a bizonyítást (ami tulajdonképpen egy trivialitás) be is fejeztük; a hallgatóság hitetlenkedve ájuldozik. Sőt, a cantori gondolatmenet többet bizonyít: azt, hogy a transzcendens számok halmaza nem megszámlálható! A transzcendens számok *több* vannak, mint az algebraiak, és ezt anélkül tudjuk igazolni, hogy akármelyikből akár egyetlen példányt be kellene mutatnunk. Ez annak idején inkább tűnhetett bűvészmutatványnak, mint matematikának.

Néha magát Cantort is kétségek gyötörték. Amikor háromévi ellenkező irányú próbálkozás után bebizonyította, hogy az n -dimenziós térben pontosan ugyanannyi pont van, mint az egydimenziósban, ezt írta: „Látom, de nem hiszem el.” Mások, mint például Paul du Bois-Reymond, erőteljesebben adtak hangot ellenérzéseiknek: „A józan ész számára visszataszító.” Néhány olyan paradoxon is fellépett, amelyek megoldásához egy új, de önmagában érvényes elmélet kreatív kidolgozásánál többre volt szükség. Például Cantor megmutatta, hogy

bármely végtelen számossághoz megadható nála nagyobb számosság. Végtelen sok különböző végtelen létezik. Ám tekintsük most az összes számosságok halmazának számosságát. Ez bármilyen számosságnál nagyobb kell hogy legyen, önmagát is beleértve! Ezt a problémát végül a „halmaz” fogalmának korlátozásával oldották meg, de nem hinném, hogy ez a válasz akár ma is mindenkit teljesen kielégítene.

Cantor elméletének jelentőségéről a matematikusok véleménye megoszlott. Leopold Kronecker egy évtizeden át intézte ellene nyilvános és nagy hangú támadásait; egy alkalommal Cantor idegösszeomlást kapott. Azonban Kronecker nagyon szigorú nézeteket vallott a matematikáról — „Isten teremtette az egész számokat, minden más már az Ember munkája” — és körülbelül annyira volt várható tőle, hogy jóváhagyja Cantor gondolatait, mint amennyire az amerikai Republikánus Pártról valószínűsíthető, hogy a középnyugaton téveszesítést hajt végre. Poincaré úgy nyilatkozott, hogy későbbi generációk majd olyan „betegségnek” tekintik mindezt, „amelyből sikerült kigyógyulni”. Hermann Weyl szerint Cantor végtelenjeinek végtelenje „a ködnél is ködösebb”. Másrészt viszont Adolf Hurwitz és Hadamard a halmazelméletnek fontos alkalmazásait találták az analízisben, és erről neves nemzetközi konferenciákon számoltak be. Hilbert, korának vezető matematikusa, 1926-ban ezt mondta: „Senki sem űzhet ki minket a Cantor által teremtett paradicsomból”, és Cantor elméletét mint „a matematikai gondolkodás legbámulatraméltóbb alkotását” magasztalta. Más meglepően eredeti gondolatokhoz hasonlóan ezt is csak azok tudták értékelni, akik nem restelltek erőfeszítéseket tenni annak érdekében, hogy megértsék és a saját munkájukban *felhasználják*. Ami pedig a pálya szélén álló gőgösen elutasító kommentátorokat illeti, fantáziájuk és jóízűségük csak hadd essen áldozatul önhittségüknek. Ma Cantor munkásságának a gyümölcsei képezik a matematika egész épületének az alapját.

A kontinuumsejtés

A cantori megvilágosodás után a matematikusok hamar rájöttek arra, hogy a tevékenységük három alapvetően különböző típusú tartományban zajlik, ezek a véges, a megszámlálható és a nem megszámlálható. A véges esetben vannak olyan bizonyításmódok, amelyek sehol másol nem alkalmazhatók, ilyen például a „skatulyaelv”, amely szerint

$n + 1$ tárgyat nem lehet n skatulyában úgy elhelyezni, hogy mindegyikbe legfeljebb egy tárgy jusson. Hilbert szállodája mutatja, hogy ez $n = \aleph_0$ -ra nem igaz, és hasonló a helyzet bármely végtelen n -re. A megszámlálható halmazoknak is megvannak a maguk sajátosságai; sokszor előfordul, hogy 1, 2, 3, ... egyszerűbb, mint 1, 2, 3, ..., n . Például fennáll az

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

pontos egyenlőség, ugyanakkor az

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

kifejezésre senki sem ismer zárt formulát.³ Annak, hogy 1, 2, 3, ... egyszerűbb, mint 1, 2, 3, ..., n , kézenfekvő a magyarázata: nem kell törődnünk az n -nel a végén! Másfelől, 1, 2, 3, ... leszámolásával végül is akárhova eljuthatunk, vagyis egy megszámlálható halmazt végesek sorozatával közelíthetünk; ilyesmi a nem megszámlálható esetben nem lehetséges. Ez nagyon durva, de nagyon fontos megkülönböztetés; és arról, hogy egy matematikus mit kedvel és mit nem, sok mindent megtudhatunk, ha megkérdezzük tőle, milyen méretű halmazokkal szeret leginkább dolgozni.

Cantor megmutatta, hogy a valósok számossága nagyobb, mint $\aleph_0$, de nyitva maradt a kérdés: van-e valami a kettő között? Ezt a problémát nevezik *kontinuumsejtés*nek. Minden bizonyítási kísérlet csúfosan megbukott, de olyan halmazt sem sikerült megadni, amelynek az egészeknél több, de a valósoknál kevesebb eleme lenne. (Nem ismerős ez valahonnan? Mindjárt kiderül.) Csak 1963-ban derítette ki Cohen, hogy a válasz attól függ, milyen halmazelméletet választunk. Vannak cantori halmazelméletek, amelyekben igaz, és nemcantoriak, amelyekben hamis. Olyan ez megint, mint Euklidész párhuzamossági axiómája. És egy kicsit elszégyellhetjük magunkat, ha belegondolunk, hogy a modern matematikusoknak pontosan annyi időbe tellett, hogy a nemcantori halmazelmélet létét megemésszék, mint amennyit

³ Ez az állítás így nem igaz: erre és hasonló összegekre régóta ismeretesek formulák (az ún. Euler-MacLaurin-féle összegképletek). Annyi mindenesetre igaz, hogy ezek a formulák jóval bonyolultabbak, mint az egyszerű $\pi^2/6$ képlet. (LM)

elődeink a nemeuklideszi geometria körül elszerencsétlenkedtek. „A történelemből csak azt sikerül megtanulnunk, hogy sohasem tanulunk a történelemből.”

Az én számosságom nagyobb, mint a tied

Az utóbbi húszegynéhány év alatt a logikusok az Euklidészig visszanyúló axiomatikus megközelítés segítségével megvizsgálták a standard halmazelmélet különféle alternatíváit. Számos olyan kézenfekvőnek látszó tételt fedeztek fel, amelyek igaz vagy hamis volta az axiómák precíz megválasztásától függ. Sikerült továbbá ennek az anyagnak egy nagy részét a „nagy számosságok” létezésére vonatkozó axiómák szerint elrendezni. Például *elérhetetlennek* nevezünk egy számosságot, ha nem lehet kisebb számú kisebb számosság segítségével kifejezni. Durván szólva, egy halmazelméletben a lehetséges számosságtípusok már döntően meghatároznak minden mást is.

A matematikai logikában a különböző axiómarendszerek relatív konzisztenciáját a *konzisztenciaerősség* segítségével tanulmányozzák. Egy axiómarendszernek akkor nagyobb a konzisztenciaerőssége valamely másikénál, ha a konzisztenciája a másik konzisztenciáját maga után vonja (és speciálisan, ha benne a másikat modellezni lehet). A matematikai logika központi problémája, hogy ebben a rendezésben a matematika egy adott részének a konzisztenciaerősségét meghatározzuk. Az egyik leggyengébb rendszer a Giuseppe Peano axiómái szerint formalizált közönséges aritmetika. De hasznosnak bizonyultak még ennél gyengébb rendszerek is. Az analízishez viszont erősebbre van szükség, az ún. másodrendű aritmetikára. Még erősebb rendszerek keletkeznek, amikor magát a halmazelméletet axiomatizáljuk. A standard változat, a *Zermelo–Fraenkel-féle halmazelmélet* még mindig elég gyenge, bár közte és az analízis között nagy a hézag. Ez úgy értendő, hogy számos matematikai eredmény bizonyításához a közönséges analízisnél többet, de az egész Zermelo–Fraenkel-féle halmazelméletnél kevesebbet használunk fel. A Zermelo–Fraenkelen túl a nagy számosságok veszik át az uralmat. Például R. M. Solovay megmutatta, hogy a „létezik elérhetetlen számosság” axiómából következik, hogy a valós számok minden részhalmaza Lebesgue-mérhető (lásd a 12. fejezetet);

majd később Shaharon Shelah az állítás megfordítását igazolta.⁴ De vannak még nagyobb számosságtípusok is: Mahlo, gyengén kompakt, hiper-Mahlo, kimondhatatlan, mérhető, Ramsey, szuperkompakt, óriási, n -óriási. Ez elég ahhoz, hogy Kronecker megforduljon a sírjában — végtelen sokszor.

⁴ Valójában Solovay és Shelah a két állítás konzisztenciájának ekvivalenciáját igazolta. (LM)

KIMÚLT MENNYISÉGEK KÍSÉRTETEI

Az örült vad Matézis csapong határtalan,
 Az anyag erős láncá nála hatástalan,
 Hol tiszta térre bámul, váltja szemszögeit,
 Hol körön szalad körbe, s buzgón négyszögesít.

Alexander Pope

A mai pazarló világban nehezen tudjuk elképzelni, milyen nagy kincs volt valaha a papír. Richard Westfall meséli, hogy 1612-ben North Witham rektora, egy Barnabas Smith nevű úr, „remekül kigondolt teológiai címsorokat írt” egy hatalmas jegyzetfüzetbe, „és a címek alá néhány odavágó passzust válogatott az olvasmányaiból. Ha ezek a jegyzetek képviselik mindazoknak a támadásoknak az összesített eredményét, amelyeket a könyvtára ellen egész élete folyamán indított, akkor nem kell csodálkoznunk azon, hogy nem maradt fenn tudós emberként a híre. Ekkora mennyiségű üres papírt nem dobtak ki csak úgy a tizenhetedik században.” Mindezt egyetlen dolog miatt említem: a kincset Smith mostohafia, Isaac Newton kaparintotta meg, aki ezt „piszkozatfüzetének” nevezte, és ez örökítette meg a kalkulus¹ és a mechanika szülési fájdalmait.

A középkorban a papír (vagy inkább a pergamen) még ritkább volt, és a szerzetesek gyakran mostak tisztára régi kéziratokat, hogy az így nyert felületekre nagyfontosságú vallási tételeket jegyezzenek fel. A tökéletlen törlés folytán néha az eredeti halvány nyomai is megmaradtak, ezt hívják *palimpszeszt*nek. Ahol a középkori barátok alapos mosást végeztek, ott felbecsülhetetlen értékeket tettek tönkre; néhol azonban slendriánul dolgoztak, és így több fontos dokumentumot akaratlanul is

¹ Ez az angol nyelvterületen közhasználatú, de a magyar matematikában ma már ritkán előforduló szó a matematikai analízisnek a történetileg elsőként kialakuló, a differenciál- és integrálszámítással foglalkozó részét jelenti. (FR)

megőriztek az utókor számára. 1906-ban J. L. Heiberg dán tudós értesült egy Konstantinápolyban található matematikai palimpszesztről, megszerezte azt, és kiderítette, hogy eredetileg Arkhimédész munkáit tartalmazta. Ezeket azért törölték le, hogy egy tizenharmadik századi Euchologionnak, a keleti ortodox egyház ima- és liturgiagyűjteményének helyet csináljanak. A szövegben szerepelt a teljes *A gömbről és hengerről*, a *Spirálisokról* nagy része és *A kör mérése*, *A síkidomok egyensúlyáról* és *Az úszó testekről* egyes részei. Mindezeket már korábbról is ismerték más kéziratokból. A palimpszesztről azonban szenzációs módon először került elő egy régen elveszett mű, a *Módszer* egy példánya is. Máshonnan vett utalásokból tudták, hogy Arkhimédész írt egy ilyen című könyvet, azonban a tartalmát homály fedte.

A *Módszer* mind matematikai, mind pedig történeti szempontból igen jelentős, mert bepillantást enged abba, hogyan jött rá Arkhimédész a gondolataira. Mint a legtöbb matematikus, eredményeit előbb ő is szigorúnak egyáltalán nem mondható módszerekkel nyerte, és csak azután csiszolta ezeket tisztességes bizonyítássá. És természetesen mindig is csak a csiszolt változatot bocsátotta közfogyasztásra. Ez a szokás kutatók generációit fosztotta meg az elődök felismeréseitől. Arkhimédész heurisztikus módszereinek egyike abból állt, hogy a testeket felszeletelte végtelen sok infinitezimális vastagságú darabra, és ezeket egy képzeletbeli mérlegre helyezte, ahol az összegüket valamilyen ismert tárggyal tudta összehasonlítani. Ily módon határozta meg a gömb térfogatát. Számos probléma precíz megoldása sokkal könnyebbé válik, ha előre tudjuk a választ, ezért a módszer nagyon hasznosnak bizonyult Arkhimédész számára. Más matematikusok hasonlóképpen építettek „infinitezimális” érvelésekre, és rendszerint (de nem mindig) elnézést kértek a matematikai szigorúság hiányáért, majd némi sajnálkozó kézmozdulatok után azt állították, hogy „egy kis fáradtsággal mindez természetesen teljesen pontossá tehető”.

Az infinitezimálisok teljesen elárasztották a tizenhetedik és tizennyolcadik századi analízist, és a rájuk vonatkozó filozófiai okfejtések ellenére számos jó munka született. A tizenkilencedik századra azután sikeresen száműzték az infinitezimális fogalmát, és a határérték vette át a helyét. Mindenki megegyezett abban, hogy az infinitezimálisok abszolút badarságok. Ami csak azt mutatja, hogy a közmegegyezésben sem szabad teljesen megbízni ...

Eleai ellenvetések

Láttuk, hogy az a pitagoreus felfogás, amely szerint mindennek az alapja a szám, az irracionálisok falába ütközött. Egyúttal filozófiai ellentétbe is került az eleai iskolával, az eleai Parmenidész követőivel. Közülük Zénon a legismertebb, aki i. e. 450 körül élt. Zénon négy paradoxont alkotott a tér és az idő természetével kapcsolatban. Kettő közülük a diszkrét jelleget cáfolja, a másik kettő pedig a folytonosságot. Az infinitezimális története sokkal kacsaringósabb, mint unokatestvéréé, a végtelené, és ebben a Zénonéhoz hasonló megfontolások nagy szerepet játszottak. A „Felezés (Dichotomia)” a tér végtelen oszthatóságát támadja. Ahhoz, hogy egy tárgy egy adott távolságot megtegyen, előbb meg kell tennie a felét. Ehhez azonban előbb meg kell tennie a negyedét, stb. Mivel végtelen sok dolgot kellene fordított sorrendben csinálnia, ezért el sem tud indulni. Hasonló jelenetet tár elénk „Akhilleusz és a teknős”: a gyorslábú, de később induló Akhilleusz sohasem fogja utolérni a lomha teknőt, mert valahányszor arra a helyre ér, ahol a teknős *volt*, az már addigra továbbmászott onnan. A „Nyíl” a diszkrétet veszi célba. Egy repülő nyíl egy adott időpillanatban egy adott helyet foglal el — de akkor lehetetlen megkülönböztetni egy ugyanitt levő mozdulatlan nyíltól, és akkor honnan tudjuk, hogy mozog? A „Stadion” kicsit bonyolultabb, és azt az elvet támadja, hogy a tér és az idő csak egy adott határig osztható. Zénon paradoxonai körmönfontabbak, mint amilyenek látszanak, és ha az állításokat a matematikai idealizáció helyett a fizikai téridővel kapcsolatban nézzük, akkor ma is kényes kérdéseket vetnek fel. A görögökre elsöprő erővel hatottak a paradoxonok, és ez a számoktól még inkább eltávolította és a geometria karjaiba taszította őket.

Rózsafüzér-morzsolgatás

Tekinthetünk-e egy egyenest pontok valamiféle sorozatának? Felvág-hatunk-e egy síkot párhuzamos egyenesekre, vagy egy testet párhuzamos síkokra? A modern álláspont szerint igen, a történelem szinte egyöntetű véleménye szerint nem; ennek fő oka, hogy a kérdés értelmezése időközben átalakult.

Ha egy egyenest csak egy adott mértékig tudunk felosztani, akkor a pontok tulajdonképpen kis „egyenes-atomok”, és felfűzött gyöngysor-

ként követik egymást. Minden pont után ott található egy egyértelműen meghatározott *szomszédos* pont. Nos, mi akkor az origó „szomszédja”? Talán a 0,001? Nem, hiszen a 0,0001 közelebb esik hozzá. Még közelebbi azonban a 0,00001, és még annál is közelebbi a 0,000001, és ... és kezdjük átérezni Akhilleusz helyzetét. Tulajdonképpen azt szeretnénk leírni, hogy 0,00000... és utána a legutolsó helyre tenni egy egyest, de nincsen utolsó hely! A dilemmából kétféle kiutat találhatunk. Az egyik megoldás szerint a nullának létezik szomszédja, de az csak *infinitezimálisan* nagyobb nála, ami azt jelenti, hogy minden 0,00...01 alakú számnál már kisebb. A másik szerint elfogadjuk, hogy nem létezik a nulla után következő „szomszédos szám”. Ekkor egy egyenest korlátlanul fel lehet osztani, és nincsenek „végső atomok”, azaz *oszthatatlanok*. Ekkor viszont nem tekinthetünk egy egyenest pontokból felfűzött gyöngysornak. Másrészt azonban nyilvánvaló, hogy az egyenes bármely adott helye mégiscsak egy *pont*: egyszerűen húzzunk oda egy metsző egyenest, és alkalmazzuk azt az euklideszi axiómát, hogy „két egyenes egy pontban metszi egymást”. Jó kis gubanc, ugye?

Az infinitezimálisokra tett következő észrevételünk mintha a játszma végét jelentené:

Infinitezimálisok pedig nincsenek

Tegyük fel, hogy x a legkisebb olyan szám, amely a 0-nál nagyobb. Ekkor $0 < x/2 < x$, tehát $x/2$ is nagyobb a nullánál, az x -nél viszont kisebb. Ellentmondás.

Hogy mindebbe ne tudjunk könnyedén belenyugodni, íme egy másik észrevétel:

Az infinitezimálisok hasznosak

Már említettem, hogy Arkhimédész infinitezimálisok mérlegelésével határozta meg a gömb térfogatát. Nicolaus Cusanus hasonló módszert alkalmazott a kör területénél; felszeletelte mint egy tortát. Képzünk el nagyon sok, nagyon vékony szeletet. Mindegyikük majdnem háromszög alakú, tehát a területük a magasság (vagyis az r körsugár) és az alap szorzatának a fele. Az alapok összhossza közelítőleg a kör kerülete, ami tudvalevőleg $2\pi r$. A terület így nagyjából r -szer $2\pi r$ -nek a fele, azaz πr^2 . Ha a kört végtelen sok infinitezimálisan keskeny há-

romszög egyesítésének tekinthetnénk, akkor egyáltalán nem keletkezne hiba. Ez a bizonyítás összehasonlíthatatlanul egyszerűbb, mint az eudoxoszi kimerítés, ezért nagy kár, hogy mint teljesen értelmetlent el kell vetnünk. Másrészt viszont, ha teljesen értelmetlen, akkor mitől adja a helyes választ? És ez nem az egyetlen ilyen eset; Demokritosz például a kúpot lapos korongokból rakta össze, és így számította ki a térfogatát. Ez az okoskodás Arkhimédész csodálatát is kivívta.

Már Apollóniosz idejében, i. e. 250 körül, nagy érdeklődést váltott ki az „érintők problémája”: hogyan húzzunk egy adott görbéhez érintőt. Apollóniosz ezt kúpszeletekre, elsősorban a parabolára, tisztán geometriai eszközökkel oldotta meg. Newton és Leibniz a kalkulus kiépítése során koordináta geometria segítségével nyúltak a kérdéshez. A parabola egyenlete $y = x^2$. A fő feladat az x -hez tartozó érintő *meredekségének* a meghatározása. Newton így okoskodott. Növeljük meg x -et egy kicsivel $x+o$ -ra. Ekkor x^2 -ből $(x+o)^2$ lesz. A változás *aránya* annél fogva a négyzetek különbségének és az x -értékek különbségének a hányadosa, azaz

$$\frac{(x+o)^2 - x^2}{(x+o) - x},$$

amiből egyszerűsítés után

$$\frac{2ox + o^2}{o} = 2x + o$$

adódik. Tartsunk most o -val nullához; ekkor a meredekség $2x+0 = 2x$ -hez tart. Ez lesz az érintő meredeksége, vagy Newton szavaival élve az x^2 *fluenshez* tartozó *fluxió*. Ez a válasz is megegyezik Apollónioszéval. Újabb véletlen? Newton módszere, a modern analízis kútforrása, olyan részeket is felfrissít, amelyekhez Apollóniosz nem tudott hozzáférni. Ugyanolyan jól működik például $y = x^3$ esetében, ekkor $3x^2$ a fluxió. Hasonlóan okoskodott Leibniz is, csak nála az o helyett a dx („ x -ből egy icipici”) jel szerepel.

Sokakban az a kényelmetlen érzés támadhat, hogy ez az egész valahogy gyanús. Ebben az esetben azonos véleményre jutottak a kalkulus őskritikusával, George Berkeley püspökkel, aki 1734-ben az alábbi művet adta ki: *Az analizáló, avagy egy hitetlen matematikushoz intézett beszéd, amelyben megvizsgáztatik, vajon a modern analízis tárgya, elvei és következtetései világosabban beláthatók és nyilvánvalóbban bizonyí-*

tottak-e, mint a vallási titkok és hittételek. „Előbb saját szemedben leld meg a gerendát, s csak azután látsz majd tisztán, hogy máséban a szálkát keresd.”² Berkeley azt kifogásolta, hogy az o vagy nem pontosan nulla — ekkor a válaszok, nem nagyon ugyan, de hibásak; vagy pedig *tényleg* nulla — ekkor viszont nem szabad osztani vele, tehát a számolások értelmetlenek. Megjegyezte még, hogy a nagy 0 helyett a kis o használata, noha nem kifejezetten *csalás*, de szemernyivel sem viszi előbbre a dolgokat.

Newton a fluxiót mint „elenyésző növekmények végső hányadosát” definiálta. Erre Berkeley az alábbi ésszerű választ adta: „De mik ezek a fluxiók? Az elenyésző növekmények sebességei. És mik ezek az elenyésző növekmények? Se nem véges mennyiségek, se nem végtelenül kicsinyek, még csak nem is semmik. Mi mások lennének tehát, mint a kimúlt mennyiségek kísértetei?” Berkeley azt kifogásolta, hogy a fluxiót két eltűnő mennyiség (a fenti példánkban $2ox + o^2$ és o) hányadosának tekintsük. A $0/0$ hányadosnak nincs értelme. Mivel $1 \times 0 = 0$, ezért $0/0 = 1$; de ugyanígy $2 \times 0 = 0$, vagyis $0/0 = 2$. Hasonló módon tetszőleges x -re „bebizonyíthatjuk”, hogy $0/0 = x$. De akkor mi az oka annak, hogy Newton módszere eredményesnek tűnik? Berkeley szerint az, hogy a hibák kiejtik egymást.

Az ellenvetések kapcsán először is be kell látnunk, hogy Berkeleynek az analistákkal szemben teljesen igaza volt. Átható, tájékozott kritikájával egy szörnyű szakadékot tárt fel. Lehet, hogy önző szándékok vezették, amikor a matematikai bizonyítás és a vallásos hit közti különbséget (vagy annak hiányát) taglalta, azonban nagyon alaposan belegondolt abba, amit bírált. (Bárcsak mások is így tennének.) Senki sem tudott Berkeleynek *igazán* jó választ adni. Másrészt viszont azt a mesét sem lehetett bevenni, hogy számolások százai, amelyek eredményét más módon is ellenőrizték, csak azért működnek, mert „a hibák kiejtik egymást”, anélkül, hogy megmagyaráznánk, mi az ördögnek esküsznek folyton össze a hibák arra, hogy egymást kiejtsék! Sőt, ha be tudjuk *bizonyítani*, hogy a hibák mindig kiegyenlítődnek, ez annak az igazolásával egyenértékű, hogy nincsenek is hibák. Ráadásul Newton és követői tudták, hogy értelmes, amit csinálnak, mert egy kicsit mélyebben látták (igaz hogy fizikai szemszögből), mi is történik valójá-

² A cím és a következő bekezdésben szereplő idézet szövege Fehér Márta fordítását követi.

ban. Berkeley viszont ragaszkodott az algebrista gondolkodáshoz, ahol o egy fix konstans. Ekkor o -nak egyszerre kellene nullának és nemnullának lennie, ami lehetetlen. Newton azonban o -t *változónak* tekintette, amely tetszőlegesen *megközelítheti* a 0 -t anélkül, hogy ténylegesen eltűnne. Newton a teljes *folymatot* nézte, amint o nullára zsugorodik össze; Berkeley azt követelte Newtontól, hogy o értékét a végleges eltűnést közvetlenül megelőző pillanatban rögzítse, és ezt Newton nem tudta teljesíteni. Newton tudta, hogy Akhilleusz végül utol fogja érni a teknőst, mert gyorsabban fut nála; Berkeley azt kívánta Newtontól, hogy mutasson rá az utolérést közvetlenül megelőző pillanatra, amelyről világos, hogy nem is létezik. Berkeley játszva megnyerte a logikai csatát. Mindez a legkisebb mértékben sem zavart senkit, mert a módszer — leltégyen logikus vagy sem — ragyogóan működött.

Nem sok hiányzott

Colin MacLaurin *Értekezés a fluxiókról* c. munkájában úgy próbálta a kalkulus helyességét igazolni, hogy a módszereket újraértelmezte a klasszikus geometria, nevezetesen a kimerítés keretein belül. Ezt rendkívül ügyesen és meggyőzően csinálta, amivel szándékai ellenére azt a hatást érte el, hogy sokan a geometria kedvéért végképp hátat fordítottak a kalkulusnak. Leibniz az infinitezimálisban keresett menedéket. „Ezek a dx és dy legyenek most végtelenül kicsinyek. ... Hasznos dolog bizonyos mennyiségeket végtelenül kicsinek tekinteni, így amikor ilyenek hányadosát keressük, akkor nullától különbözőnek tekinthetjük őket, azonban mindig elhanyagolandók, valahányszor összehasonlíthatatlanul nagyobb mennyiségekkel együtt fordulnak elő.” Az infinitezimálist emellett változó mennyiségként képzelte el; mindezt egy *folytonossági törvényben* így foglalta össze: „Bármilyen átmenetet is tételezünk fel bármilyen végponttal, szabad olyan általános érvelést használnunk, amelybe a végpontot is beleérthetjük.” Más szóval, ami minden nemnulla o -ra érvényes, az $o = 0$ -ra is érvényes. Ezt az elvet példákkal támasztotta alá, bizonyítással nem. Csínján kell vele bánni: próbáljuk ki az $o > 0$ „általános érvelésre”. Johann Bernoulli 1692-ben megírta egy kalkulus tankönyv második részét, amelyet végül 1742-ben adtak ki. A matematikában nem ismeretlen egy kiadás elhúzódása, ilyen nagyságrendben azonban már meglehetősen szokatlan. Lehet, hogy Bernoulli rekordot akart felállítani: az első rész, amelyet

1691-ben írt, csak 1924-ben jelent meg. A rejtély nyitját keresve úgy érvelt, hogy „ha egy mennyiséget egy végtelenül kicsiny mennyiséggel csökkentünk vagy növelünk, akkor az se nem növekszik, se nem csökken”. Csak mai fülnek hangzik ez talányosan? Bernoulli megpróbálta még az infinitezimálist $1/\infty$ -ként definiálni.

Newton 1704-es gondolatai közelebb jutottak a célhoz, mint Bernoulliéi. „A matematikában a legcsekélyebb hibát sem szabad elhanyagolni. A matematikai mennyiségeket nem úgy tekintem, mint amik nagyon kicsiny részekből állnak, hanem mint amiket folytonos mozgással lehet leírni. A fluxiók, tetszőleges megközelítésben, a fluenssek olyan növekményei, amelyek egyenlő és lehető legkisebb idők alatt képződnek.” Mint következtent, határozottan visszautasította az infinitezimális bizonyításmódot. Valóban nagyon közel jutott a mai értelmezéshez, amikor a *Principia* első és harmadik kiadásában ezt írta: „Azok a végső hányadosok, amelyekben a mennyiségek eltűnnek, szigorú értelemben véve nem a végső mennyiségek hányadosai, hanem olyan határértékek, amelyek felé a mennyiségeknek a hányadosai, vég nélkül csökkenvén, tartanak, és amelyeket noha bármely adott különbségnél jobban megközelítenek, de sohasem lépnek túl, sem el nem érnek, amíg a mennyiségek végtelenül le nem csökkentek.” Más szóval, ahhoz hogy megtaláljuk a határértéket, amelyhez a $2x + o^2 : o$ hányados tart, miközben o lecsökken nulláig, *nem* helyettesítünk be $o = 0$ -t, amivel a $0 : 0$ hányadoshoz jutnánk. Ehelyett o nemnulla marad, egyszerűsítés után $2x + o : 1$ adódik, majd észrevesszük, hogy amint o -val 0 -hoz *közelítünk*, ez a hányados $2x : 1$ -hez *közelít*. Newton pontosan tudta, hogy mit csinál; csak éppen nem találta meg a precíz kifejezésmódot. Nagyjából ugyanebben az időben egy sor más matematikus, köztük John Wallis és James Gregory is csak hajszálnyival vétette el a célt.

A bonyodalom fokozódik

Mielőtt a kalkulus problémája rendben megoldódott volna, a komplex számok képeben új bonyodalmak jelentkeztek. Amint a 11. fejezetben látni fogjuk, az analízis komplex változós függvényekre történő kiterjesztése maga is nagy (de alkotó) kavarodást okozott. A kalkulus megalapozásának a kérdése mégis hamarosan elrendeződött. A komplex függvénytan bibliájában, az 1821-es *Cours d'Analyse*-ben Augustin-Louis Cauchy az elméletet a *határérték* fogalmára alapozta, amelyet

így definiált: „Ha egy változó egymást követő értékei vég nélkül megközelítenek egy rögzített értéket úgy, hogy attól végül annyira kevéssel térnek el, amennyire csak akarjuk, akkor ez utóbbit az összes többi határértékének nevezzük.” Ami az infinitezimálist illeti, Cauchy teljesen világosan beszélt: „Azt mondjuk, hogy egy változó mennyiség végtelenül kicsinnyé válik, ha a számértéke vég nélkül lecsökken úgy, hogy a 0 határértékhez konvergál.” Az infinitezimálisok *változók*, nem pedig konstansok. Hasonlóan a ∞ sem konstans, hanem egy olyan változó, amely tetszőlegesen nagyvá válik. Ez nem más, mint az arisztoteleszi *potenciális* végtelen, átalakítva potenciális infinitezimalitássá. Talán illetlenség megjegyeznünk, hogy senki sem definiálta, mit ért változón. Ez nem volt súlyos mulasztás, és észrevétlen maradt.

Larry Niven *Konvergens sorok* c. elbeszélésében egy tulipiros, szarvas démon hívnak életre a hagyományos módon, egy csillagöszögben (pentagrammában), amelyben a démon kezét-lábát széttárva jelenik meg. A főszereplőnek egyetlen kívánsága teljesülhet, de csak huszonnégy óra haladékot kap, a szerződésben található szokásos apróbetűs záradék miatt. Miután a démon jelentett az Ördögnél, máris újra feltűnik a csillagban, hogy behajtsa a hagyományos büntetést. Az áldozat lehetőséget kap arra, hogy kiradírozza a csillagot, és visszarájzolja oda, ahova akarja. Niven hőse a csillagot a démon kidomborodó hasára kaparintja. Amikor ebben a démon újra megjelenik, saját gyors zsugorodását észleli, és mielőtt rájönne, hogy mi történt vele ... Egy infinitezimális démonunk maradt? Nem, mondja Cauchy; egyáltalán nem maradt démonunk. Az *eltűnés módja* volt infinitezimális.

Epszilontika

Végül — mindenki nagy megkönnyebülésére — 1850 táján Karl Weierstrass rendet teremtett a zűrzavarban; komolyan vette az „annyira közel, amennyire csak akarjuk” kifejezést. Mennyire közel akarjuk *valójában*? Weierstrassnál már nem egy aktívan változó mennyiségről van szó, hanem a lehetséges értékek *halmazának* egy tetszőleges elemét jelentő statikus szimbólumról. Egy $f(x)$ függvény akkor tart az L határértékhez amint x tart az a értékhez, ha bármilyen ϵ pozitív számot is véve, az $f(x) - L$ különbség kisebb lesz mint ϵ , valahány-

szor $x - a$ kisebb mint egy az ϵ -től függő δ szám.³ Olyan ez, mint egy játék: „Te megmondod, hogy az $f(x)$ -et milyen közel akarod az L -hez; utána én mondom meg, milyen közel kell lennie az x -nek az a -hoz.” Az Epsilon játékos közli, hogy δ mennyire közel akarja; ezután Delta léphet tetszése szerint. Ha Deltának mindig van nyerő stratégiája, akkor $f(x)$ az L határértékhez tart. A határértéknek ez az epsilon-deltás definíciója talán egy kicsit körülményes, azonban a görögök kimerítési módszeréhez hasonlóan egy profi szakértő ebbe is hamar beletanul, és precízen, sőt időnként szédítő virtuozitással tud vele bánni.

Figyeljük meg, hogy a fizikai mozgáskép miként alakult át statikus események halmazává, ahol ϵ minden egyes megválasztásához egy ilyen esemény tartozik. Nem kell már egy 0-hoz sodródó változóként gondolnunk az ϵ -ra; csak annyi a dolgunk, hogy tekintsük ϵ összes lehetséges (0-nál nagyobb) értékét, és ezek mindegyikével sikeresen elboldoguljunk. Az aktuális végtelen helyett a potenciálisra való áttérés nem volt más, mint megtévesztő manőver: az egész probléma megfogalmazható tisztán véges eszközökkel. Weierstrass határérték-definíciója megszabadította a kalkulust a metafizikai meggondolásoktól, és megszületett a modern analízis. Manapság minden bevezető analízis kurzusban a hallgatót egy-két hétig az ún. „epszilonitikával” gyötrik — ez az illetőnek kezdetben jókora gondot szokott okozni. Így edzi a szakma a kisasinait. Ha meg akarjuk érteni az analízist, és nemcsak a kalkulussal számolgatni, akkor ennek ez a bevett útja.

Reeb álma

Mindezek ellenére van valami intuitív és vonzó a régimódi infinitezimális okoskodásokban. Ma is megtalálhatók nyelvünkben és gondolkodásunkban: időbeli „pillanatok”, „pillanatnyi” sebességek; a görbe mint végtelenül kicsiny egyenesdarabkák sorozata. A mérnökök, vegyészek és fizikusok szívesen dolgoznak kicsiny δx növekményekkel, amelyeket a számolás megfelelő lépéseiben dx -szé varázsolnak át, és nem strapálják magukat holmi epszilonitikai hókuszpókusszal. „A matematikusok végül is igazolták az ilyen dolgok jogosságát, csak gyötörjék a pici kis agyukat ezzel, ha akarják, én nagyobb tétre megyek.”

³ A korlátozás mindkét esetben az eltérésre, tehát a különbségek abszolút értékére értendő. (FR)

Ékesszólóan mondja Georges Reeb:

A matematikusok mindig is álmodoztak egy olyan infinitezimális kalkulusról, amely méltó a nevéhez, azaz amelyben dx és dy infinitezimális számok, amelyben $\int_a^b f(x)dx$ ilyen számok valódi összege, amelyben a határértékeket valóban elérjük; és ez az álom talán megérdemel némi ismeretelméleti vizsgáldást. Más álmoképek is felsejlettek a matematikus ábrándozó lelki szemei előtt, mégha a kalkulus eredményeihez képest ezek el is törpültek; egy olyan világ körvonalai, ahol a helyes következtetési szabályokkal összefér, hogy vannak „nagy”, „kicsi”, sőt akár „határozatlan nagyságú” egész számok, amelyek eleget tesznek az indukciós elvnek, és ahol a kicsi számok rákövetkezői is kicsik maradnak; ahol zavaros, de semmiképpen sem véges konkrét halmazszerűségeket egyetlen véges halmazba lehet összegyűjteni; ahol a folytonos függvények szinte tökéletesen közelíthetők rögzített fokszámú polinomokkal. Egy ilyen világban a véges birodalmakat vagy távcsővel vagy nagyítósüveggel nézegethetjük, hogy róluk teljesen újszerű képeket nyerjünk. Egy ilyen világban a weierstrassi szigor kritériumainak kettős értelmezése a fantázia és a költészet szabad szárnyalását teszi lehetővé.

Egy lábjegyzet ezt egy példával egészíti ki: „Kell, hogy létezzen olyan véges lánc valamelyik majomtól Darwinig, amely eleget tesz a következő szabályoknak: minden majom fia is majom, és minden ember apja is ember.”

Nemstandard analízis

1920 és 1950 között a matematikai logika robbanásszerű fejlődésnek indult, és a kialakuló új területek egyike a modellelmélet volt. A modellelméletben valamely adott axiómarendszerhez akarjuk megkeresni és jellemezni a *modelleket*, vagyis azokat a matematikai struktúrákat, amelyek a rendszer minden axiómáját kielégítik. A koordinátasík tehát az euklideszi geometria axiómáinak egy modellje, Poincaré konstrikciója a hiperbolikus geometria axiómáinak szolgál modellül és így tovább.

A logika művelői fontos különbséget tesznek az ún. elsőrendű és másodrendű axiómarendszerek között. Az elsőrendű esetben az axiómák olyan tulajdonságokat fejezhetnek ki, amelyeket a rendszer objektumaitól, és nem az objektumokból képezett *halmazoktól* követelünk meg. A másodrendű esetben nincs ilyen megszorítás. A közönséges artitme-

tikában az

$$(1) \quad x + y = y + x \text{ minden } x\text{-re és } y\text{-ra}$$

állítás az elsőrendű logikához tartozik, és ugyanez áll az összes szokásos algebrai szabályra; azonban a

$$(2) \quad \text{ha } x < 1/n \text{ minden } n \text{ egészre, akkor } x = 0$$

formula már másodrendű. A valós számok axiómáinak szokásos listája másodrendű, és régóta ismert, hogy ennek csak *egyetlen* modellje létezik: a valós számok jól ismert $\mathbf{R}$ struktúrája. Ez nagyon megnyugtatóan hangzik. Kiderül azonban, hogy ha az axiómákat olyan értelemben gyengítjük, hogy csak $\mathbf{R}$ elsőrendű tulajdonságait foglalják magukba, akkor más modellek is létrejönnek, köztük olyanok is, amelyekben a fenti (2) nem teljesül. Legyen $\mathbf{R}^*$ egy ilyen modell. Az eredmény a *nemstandard analízis* elmélete, amelyet Abraham Robinson indított el 1961 körül. A nemstandard analízisben tényleges végtelenekkel és tényleges infinitezimálisokkal találkozunk. Ezek konstansok, és nem Cauchy-stílusú változók. És itt Reeb Álma megvalósul! Az például, hogy (2) nem teljesül, éppen azt jelenti, hogy x „valódi” infinitezimális. Ha pedig ω egy végtelen egész, akkor az

$$1, 2, 3, \dots, \omega - 3, \omega - 2, \omega - 1, \omega$$

sorozat az $1, 2, 3, \dots$ majmokat az $\dots, \omega - 3, \omega - 2, \omega - 1, \omega$ Darwinokkal köti össze.

Valósok és hipervalósok

A játék még csak nem is új. Hányszor bővítettük már korábban is a „számkört”, hogy egy kíváncsi tulajdonságot elérjünk! A racionálisból a valósba, hogy legyen $\sqrt{2}$; a valósból a komplexbe, hogy legyen $\sqrt{-1}$. És most a valósból a hipervalósba, hogy legyenek infinitezimálisok. A nemstandard analízisben rendben megtalálhatók a közönséges $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ természetes számok, de van a „nem természetes”, jobban mondva „nemstandard természetes” számoknak egy bővebb $\mathbf{N}^*$ rendszere. Vannak a $\mathbf{Z}$ közönséges egészek és a $\mathbf{Z}^*$ nemstandard egészek. Végül vannak az $\mathbf{R}$ standard valósok és az $\mathbf{R}^*$ nemstandard

valóságok. Az egyes párokat az elsőrendű tulajdonságok szempontjából nem lehet egymástól megkülönböztetni, tehát ha akarjuk megtehetjük, hogy R elsőrendű tulajdonságait R^* segítségével igazoljuk; ugyanakkor R^* mindenféle új finomságot kínál: infinitezimálisokat és végteleneket, amelyeket új módon tudunk felhasználni.

Kóstolónak vegyünk először néhány definíciót. Egy hipervalós szám akkor *véges*, ha valamely standard valósánál kisebb. Akkor *infinitezimális*, ha minden pozitív standard valósánál kisebb. Minden, ami nem véges, az *végtelen*, és minden, ami nincs R -ben, az *nemstandard*. Ha x infinitezimális, akkor $1/x$ végtelen, és megfordítva. Most nézzünk néhány trükkösebb dolgot. Minden véges hipervalós x -nek egyértelműen létezik egy *standard része*, $\text{std}(x)$, amely végtelenül közel van x -hez, azaz $x - \text{std}(x)$ infinitezimális. Minden véges hipervalós egyértelműen írható fel „standard plusz infinitezimális” alakban. Olyan ez, mintha minden standard valóst végtelen közeli hipervalósok homályos felhője venne körül, ez az ő *fényudvara*. És minden ilyen fényudvar egyetlen valós köré csoportosul, ez az ő *árnyéka*.

Vizsgáljuk meg, hogyan számolta ki Newton az $y = f(x) = x^2$ függvény fluxióját (deriváltját). Vett egy kis o számot, és elkészítette az $[f(x + o) - f(x)]/o$ hányadost. Ennek értéke $2x + o$, ami jó is lenne, ha az o -tól meg tudnánk szabadulni. Ehhez kellett a végső hányadosok, a határértékek és az epszilontika, amint láttuk. Van azonban egyszerűbb út is. Legyen o infinitezimális, és $2x + o$ helyett vegyük a *standard részét*, azaz $2x$ -et. Más szóval, az $f(x)$ függvény deriváltjának definíciója legyen

$$\text{std}\{[f(x + o) - f(x)]/o\},$$

ahol x standard valós és o tetszőleges infinitezimális. A gordiuszi csomót átvágó nagysándori kard nem más, mint a standard rész ártatlannak tűnő ötlete. Ez tökéletesen precíz, mert $\text{std}(x)$ egyértelműen meg van határozva. És nem egyszerűen *elfeledkezik* a fölöslegessé váló o -ról, hanem egyszer és mindenkorra megszabadul tőle. Mi is történik itt? Lényegében az, hogy a hipervalósok különféle nagyságrendűek lehetnek, és a helyes nagyságrendhez kell eljutnunk. A standard valósok rendje 0. Az o -hoz hasonló infinitezimálisok rendje többnyire 1, de o^2 rendje 2, o^3 -é 3, stb. Ugyanakkor a végteleneknél $1/o$ rendje -1 ,

$1/o^2$ -é -2 . A standard rész bármely véges hipervalósnak a legkisebb nagyságrendű tagját választja ki.

A nemstandard analízissel nem nyerhetünk semmi olyan információt $\mathbb{R}$ -ről, amely bármilyen módon is különbözne a standard analízistől. Itt a módszer és a módszer háttéréül szolgáló környezet az, ami nem-standard; maguk az eredmények a jó öreg analízis igaz tételei. Akkor meg mi értelme van ennek az üres fecsegésnek, ha semmi újat sem tudunk vele bizonyítani? Mielőtt ezt a fontos kérdést tisztáznánk, éljük bele magunkat kicsit annak a hangulatába, hogyan is működik a nemstandard analízis.

Isten hozta a bolondokházában

Ha megnézünk egy nemstandard analízis kurzust, ez látszólag pontosan azoknak a hibáknak a nagyszabású seregszemléje, amelyek elkerülésére diákjainkat egész idő alatt oktatjuk. Például:

- (1) Egy s_n sorozat korlátos, ha s_ω véges minden végtelen ω -ra.
- (2) Egy s_n sorozat az L határértékhez tart, ha $s_\omega - L$ infinitezimális minden végtelen ω -ra.
- (3) Egy f függvény folytonos x -ben, ha $f(x+o)$ végtelenül közel van $f(x)$ -hez minden infinitezimális o -ra.
- (4) Az f függvénynek akkor és csak akkor lesz x -ben a deriváltja d , ha $[f(x+o) - f(x)]/o$ végtelenül közel van d -hez minden infinitezimális o -ra.
- (5) Az f Riemann-integrálja infinitezimális területek végtelen összege.

A nemstandard analízis nyújtotta formális keretek között azonban ezek már nem hibás állítások, hanem szigorú tények!

Mire jó?

És most térjünk vissza a korábbi kérdésünkhöz: mi értelme van ennek az üres fecsegésnek, ha semmi újat sem tudunk vele bizonyítani?

A kérdés túlzottan leegyszerűsíti a problémát. A helyes válasz rá az, hogy a nemstandard módszerekkel bizonyított bármely eredmény a standard analízis igaz tétele (és így standard módon is biztosan megkapható). Ez azonban semmit sem árul el arról, hogyan találhatjuk meg a standard bizonyítást, és arról sem nyújt felvilágosítást, hogy a

nemstandard bizonyítás ennél rövidebb vagy hosszabb, természetesebb vagy ravaszabb, könnyebben vagy nehezebben érthető lesz-e. Newton a *Principiában* megmutatta, hogy mindaz, ami a kalkulusal bizonyítható, igazolható a klasszikus geometria segítségével is. Ez semmiképpen sem jelenti azt, hogy a kalkulus fabatkát sem érne. Hasonlóképpen a nemstandard analízissel kapcsolatban is a helyes kérdésfeltevés úgy hangzik, vajon hatékonyabb-e ez a gépezet. Ez már nem matematikai vitatéma; a tapasztalatnak kell eldöntenie. A tapasztalat pedig elég határozottan azt sugallja, hogy a nemstandard analízissel kapott bizonyítások általában rövidebbek és közvetlenebbek. Nagymértékben elkerüljük a dolgok nagyságára vonatkozó bonyolult becsléseket. Ahelyett, hogy olyasmikkel kellene törődnünk, vajon o^2 kisebb-e mint $10^{-93,7}$, egyszerűen megjegyezzük, hogy másodrendű infinitezimális, és így tovább. Az ilyen jellegű becslések teszik ki a klasszikus analízis bizonyításainak nagy részét. A fő nehézséget az jelenti, hogy a nemstandard analízis egészen más háttérrel igényel, mint a klasszikus analízis, és így nagyon sok kezdeti erőfeszítést kell tenni, amíg a befektetések megtérülnek.

Kacsák

A nemstandard analízissel új jelenségeket fedeztek fel, köztük olyanokat is, amelyek gyakorlati szempontból fontosnak bizonyultak. Az alkalmazott matematika egyik nagy területe, a perturbációszámítás, az egyenletek „nagyon kis” változásaival foglalkozik. Miért ne vegyük a perturbációt infinitezimálisnak, és nézzük meg, mire jutunk? Néhány bátor szellemű vállalkozó az elmúlt években ráállt erre a vonalra. Elégdjünk meg egyetlen példával. Van egy bizonyos differenciálegyenlet, amelyet nem fogok részletezni, s amelyben szerepel egy kicsi ϵ paraméter és egy további k paraméter. Ismeretes, hogy $k < 1$ esetén egyetlen oszcilláló megoldás létezik, míg $k \geq 1$ -re nincs oszcilláció. Hogyan „kapcsol be” az oszcilláció, amint k áthalad az 1-en? Ehhez a „Hopf-elágazásnak” nevezett matematikai eszköz szolgál mintául. Az oszcilláció szép simán növekszik. Könnyű kiszámolni, hogy az egyenletben $k = 1$ -nél lép fel egy Hopf-elágazás. Kell-e még bármit is mondani?

Kellene, mégpedig nem is keveset. Amint k lefelé menet áthalad az 1-en, egy Hopf-elágazás valóban beindít egy kicsi oszcillációt. Azonban szinte azonnal ez *nagyon* gyorsan egy nagyba csap át. Mivel egyes köz-

beeső fázisokban kacsza alakú görbék jelennek meg, az effektust francia felfedezői *canard*-nak nevezték el. Kacsát csak nagyon pontos számítógéppel lehet lőni: az $\epsilon = 0,01$ esetben például k hatvanadik tizedes jegyére van szükség. Az első kacsát Eric Benoit, Jean-Louis Callot és Francine és Marc Diener találták. Ők nem számítógépet használtak, hanem nemstandard analízist és infinitezimális ϵ perturbációt. A kacsát porig sújtotta a módszer ellenállhatatlan ereje, és önszántából megadta magát.

Mérnöki logika?

Több okunk is van azt feltételezni, hogy a nemstandard analízis gyümölcssei leginkább az alkalmazott matematika területén fognak beérni. Az egyik ok az, hogy az alkalmazott matematikusok, mérnökök és tudósok eleve dx -szerű infinitezimálisokban gondolkodnak. Egy másik ok pedig az, hogy itt annyira fontos szerepet játszanak a kis zavaró tényezők, a perturbációk. A perturbációszámítás nagy része ugyanakkor reménytelenül széteső és pontatlan, és csak úgy hemzsegek benne a pusztán tapasztalati tények alapján levont következtetések. Jó esély kínálkozik arra, hogy a nemstandard analízis végre egy kis rendet teremtsen ezen a területen, és némi erősítő injekciókkal is szolgáljon. A nemstandard analisták már feltártak néhány lehetőséget, ilyenek a polinomegyenletek, a gyors-lassú folyamok, a geodetikusok, a peremérték-feladatok, a peremfelületi folyamok, a sztochasztikus differenciálegyenletek és a matematikai fizika spinrendszerei.

Azt várnánk, hogy a tudományos kutatásban a máshonnan érkező új gondolatokat, új technikákat, új jelenségeket azonnal üstökön ragadják és felhasználják. Valójában erre csak akkor kerül sor, ha ezek közben nem lépték át a tárgyak közötti hagyományos határvonalakat. A „nem itt találták fel” kór nagyon erős, és több perturbációs szakembert is megtámadott. Egyikük például úgy reagált a kacsák felfedezésére, hogy a saját módszereivel kidolgozott egy (meglehetősen bonyolult és trükkös) bizonyítást, miközben a nemstandard megközelítés precizitását illetően (megalapozatlan) kételyeinek adott hangot. Bagoly mondja verébnek! Utólag könnyű bölcsnek lenni; jobb benyomást tennie rám a perturbációszámításos bizonyítás, ha *azelőtt* született volna, hogy a nemstandard analisták a pizkos munkát elvégezték.

Ez a reakció azonban egy általánosabb problémát jelez, amely egy-

általán nem csak az alkalmazott matematikára korlátozódik. Az alkalmazások területén leginkább tájékozott szakemberek, képzésüknél fogva, nem tudnak egy olyan technikát kezelni, amely a matematikai logikából fejlődött ki, különösen akkor nem, ha ez egy egészen eltérő észjárást, egy olyan újszerű gondolkodásmódot igényel, amelyhez csak hosszú évek alatt lehet hozzászokni. Nem érdekli őket, hogyan lesz a pongyola gondolkodásból precíz, mert — merem állítani — ők szívesebben maradnának pongyolák. És ezért a nemstandard analistáknak kell az alkalmazásokat továbbfejleszteni, amíg nem tudnak valami *annyira* drámai dologgal előrukkolni, hogy még a legfantáziátlanabb perturbáló is kezdi majd úgy érezni, hogy valamiből talán kimaradt. Lehet persze, hogy ez sohasem következik be — én mégsem így látom, mert változnak az idők. Az viszont továbbra is kétséges, vajon a huszonegyedik század mérnökeinek meg kell-e majd tanulniuk a modellelmélet metamatematikáját.

A PÁRBAJHŐS ÉS AZ ÓRIÁS

A Cooper's Hill-i Műegyetemen az egyik félév végén fogadást rendeztek, és a vendégek megtekinthették a természettudományi tanszékeket. Egy ifjú hölgy, amikor a fizikai laboratóriumba belépve saját, fejfelé lógó képmását pillantotta meg az egyik nagy homorú tükröben, naívnul így szólt a szomszédjához: „Ezt a tükröt fordítva akasztották fel.”

Clement V. Durell

„Pisztolyokkal huszonöt lépésről!” 1832. május 30-án egy fiatal francia forradalmár egy hölgy becsületéért vívott párbajban haslövést kapott, és másnap hashártyagyulladásban meghalt. A Montparnasse temető egy közös sírjába temették el. Közvetlenül a párbaj előtt ezt írta barátaihoz, Napoleon Lebonhoz és V. Delaneyhoz: „Egy becsstelen kokott áldozataként halok meg. Életemet egy szálnalmas veszekedés oltja ki. Ó! Miért kell ilyen közönséges, ennyire megvetendő dolog miatt elpusztulnom!” Titokzatosak a körülmények; egészen a legutóbbi időig a hölgyről csak annyit tudtunk, hogy „Stéphanie D.”, amíg Carlos Infantozzi némi nyomozás után Stéphanie-Felicie Poterin du Motel néven azonosította, aki egy orvos tökéletesen tiszteletre méltó lánya volt.

A melodráma főhőse aznap éjjel egy másik levelet is írt, Auguste Chevalier-nek, arról, hogy „néhány új felfedezést tettem az analízisben.” Sorait így zárta: „Kérd meg Jacobit vagy Gausst, mondjanak véleményt ezeknek a tételeknek nem is annyira a helyességéről, mint inkább a jelentőségéről. Remélem, később majd akadnak olyanok, akiknek megéri, hogy megfejtsék ezt a zagyvaságot.” A zagyvaság Tony Rothman szerint „jelentősen hozzájárult a matematika egy új ágának a megalkotásához, amely ma olyan különböző területeket világít meg mint az aritmetika, a kristálytan, a részecskefizika és a Rubik-kocka lehetséges állásainak a meghatározása.” A tragikus alkotó Evariste Galois, a mű a Csoportelmélet.

Egyenletek

Galois egy régóta húzódó problémán dolgozott. Amint az 1. fejezetben láttuk, az első-, másod-, harmad- és negyedfokú egyenletek pontos megoldásai *gyökkifejezések* formájában megadhatók. Az *ötödfokú* egyenletnél azonban minden erőfeszítés ellenére sem sikerült ilyen megoldóképletet találni. Az 1800-as évektől kezdve a reménytelennek tűnő keresést egy ellenkező irányú próbálkozás váltotta fel: bebizonyítani, hogy az egyenlet nem oldható meg gyökjelekkel. Paolo Ruffini 1813-as sikertelen kísérlete után ezt végül Abel igazolta 1824-ben. Abel megvizsgálta azokat a segédegységeket, amelyek egy feltételezett megoldási eljárás során előfordulhatnak, és ezek fokszámainak a bonyolult elemzése adta a bizonyítást. Galois nagyobb fába vágta a fejszéjét. Bár az általános ötödfokú egyenletre nincs megoldóképlet, egyes speciális ötöd- és magasabb fokú egyenletek megoldhatók gyökjelekkel. Galois olyan módszert akart, amely *tetszőleges* adott egyenletről eldönti, hogy megoldható-e gyökjelekkel vagy sem. Erre a kérdésre meglepő és eredeti választ adott. Minden az egyenlet *szimmetriáitól* függ.

Szimmetriák

„A szimmetria — mondta a témáról tartott híres előadássorozatában Hermann Weyl — az egyik olyan elv, amelynek segítségével az ember ősidők óta megpróbálja a rendet, a szépséget és a tökéletességet megérteni és megteremteni.” Amikor a matematikusok szimmetriát emlegetnek, ők valami nagyon speciális dologra gondolnak: valamilyen objektum olyan transzformációjára, amelynek során az objektum szerkezete nem változik meg.

Tekintsünk például egy négyzetet, és rajzoljuk meg a kontúrját. Ha a négyzetet elmozdítjuk, utána általában már nem illik bele ebbe a keretbe. Van azonban ez alól pontosan nyolc kivétel, éspedig a következő mozgások:

- (1) Hagyjuk a négyzetet helyben.
- (2) Forgassuk el 90 fokkal (az óramutató járásával ellenkező irányban).
- (3) Forgassuk el 180 fokkal.
- (4) Forgassuk el 270 fokkal.

- (5) Fordítsuk át a függőleges tengelye körül (mint egy forgóajtót).
- (6) Fordítsuk át a vízszintes tengelye körül.
- (7) Fordítsuk át az egyik átlója mentén.
- (8) Fordítsuk át a másik átlója mentén.

A fenti operációk mindegyike a négyzet egy-egy *szimmetriája*. Ha két szimmetriát egymás után alkalmazunk, akkor a négyzet továbbra is „a saját keretei között marad”, tehát az eredmény egy újabb szimmetria. Ha például a „90 fokos” után a „180 fokos forgatás” következik, akkor ezek együttes hatása megegyezik a „270 fokos forgatás”-sal. Azt mondjuk, hogy a szimmetriákra teljesül a *csoporttulajdonság*, ami azt jelenti, hogy bármely két szimmetria „szorzata” is szimmetria.¹ A szimmetriák halmazát a négyzet *szimmetriacsoportjának* nevezzük. Ez a csoport nyolc szimmetriaoperációból áll; azt mondjuk, hogy a csoportnak nyolc *rendje*.

Tekintsünk most egy végtelen fürdőszobafalat, amelyet négyzet alakú lapokkal a szokásos módon kicsempéztek. Ez a csempeminta rendelkezik a négyzet mind a nyolc szimmetriájával, de emellett még végtelen sok *eltolási* szimmetria is érvényesül rajta. Az egészet 1, 2, 3, ... egységgel arrébb rakhatjuk vízszintesen vagy függőlegesen, le vagy fel, balra vagy jobbra, továbbá elforgathatjuk vagy átfordíthatjuk. A szimmetriák száma tehát végtelen, a szimmetriacsoport most végtelen rendű.

A legabsztraktabb matematikai objektumnak is lehetnek szimmetriái. Ezek azok a transzformációk, amelyek megőrzik az objektum „formáját”, azaz belső szerkezetét. A szimmetriák mindig csoportot alkotnak; azaz ha két ilyen egymás után végrehajtunk, akkor eredményül ismét szimmetriát kapunk. A szimmetria általános fogalmának a tanulmányozásához a transzformációk egymás utáni alkalmazásának az algebrai tulajdonságait kell megvizsgálni.

¹ A csoporthoz emellett az is szükséges, hogy a szorzás asszociatív legyen, létezzen ún. egységelem és minden elemnek létezzen inverze. Mindezek teljesülnek a szimmetriákra. Részletesebben lásd az „Absztrakt csoportok” c. résznél. (FR)

Az egyenletek „formája”

Ma ez persze sokkal világosabb, mint Galois idejében volt; ezzel együtt Galois gondolatainak a bemutatásához fel fogom használni a modern szemlélet előnyeit. Tehát milyen is egy egyenlet „formája”? Az ezzel kapcsolatos matematikai objektum a megoldások teljes halmaza. (Egy n -edfokú egyenletnek mindig n darab valós vagy komplex gyöke van.²) A transzformációk a gyökök egymás közötti átrendezései, vagyis *permutációi*. A forma, a megőrzendő szerkezet pedig a közöttük fennálló algebrai relációk rendszere. A lényegét legkönnyebben egy olyan egyenleten keresztül érthetjük meg, amelynek a megoldásait egyszerűen ki tudjuk számítani:

$$x^4 - 5x^2 + 6 = 0.$$

Ennek gyökei $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ és $-\sqrt{3}$; nevezzük őket α -nak, β -nak, γ -nak és δ -nak. Világos, hogy α és β , illetve γ és δ egy-egy „összetartozó párt” alkotnak. Valójában semmilyen módon sem tudjuk α -t és β -t egymástól megkülönböztetni, ha csak racionális együtthatós egyenletekre támaszkodunk. Például α kielégíti az $\alpha^2 - 2 = 0$ egyenletet, de ugyanez áll a β -ra is. Továbbá $\alpha + \beta = 0$; ha itt most α -t és β -t felcseréljük, akkor az ugyanígy érvényes $\beta + \alpha = 0$ egyenlőség adódik. Hasonlóképpen, γ és δ is (racionális együtthatós egyenletek alapján) algebrailag megkülönböztethetetlenek. Ugyanakkor α és γ könnyen szétválaszthatók, mert az $\alpha^2 - 2 = 0$ egyenlőség igaz, a $\gamma^2 - 2 = 0$ pedig hamis. Nem azt állítom, hogy $\sqrt{2}$ és $-\sqrt{2}$ között az égvilágon semmi különbség sincs, hiszen más az előjelük. Ez az előjeletérés azonban nem mutatható ki, ha csak racionális együtthatós polinomokat használhatunk. A négy gyök listáját elkészítve, ezt pontosan négyféleképpen rendezhetjük át úgy, hogy az eredeti sorrendre érvényes valamennyi igaz egyenlet az új sorrend esetén is érvényben maradjon. Ezek a következők:

$$\alpha\beta\gamma\delta \quad | \quad \alpha\beta\delta\gamma \quad | \quad \beta\alpha\gamma\delta \quad | \quad \beta\alpha\delta\gamma.$$

A fenti permutációk alkotják az egyenlet *Galois-csoportját*. És csak rá kell nézni a Galois-csoportra, máris meg tudjuk mondani, hogy megold-

² A gyököket multiplicitással kell számolni, tehát például az $x^5 = 0$ egyenletnek az $x = 0$ ötszörös gyöke. (FR)

ható-e az egyenlet gyökjelekkel vagy sem. Majd kiszúrja a szemünket, ugye? Vagy mégsem? Nos, egy bimbózó Galois-nak igen; a receptet *valóban* egy kicsit bonyolult elmagyarázni. Megteszem, ami tőlem telik: a lényeg az, hogy egy egyértelmű és kiszámolható kritérium adható, amely a Galois-csoport belső algebrai struktúrájától függ.

Tegyük fel, hogy az adott csoport G . Lehet, hogy a G -beli permutációk egy H része maga is csoportot alkot. Ebben az esetben H -t *részcsoporthnak* nevezzük. Egy további technikai feltétel, az ún. *normalitás* szintén szerepet játszik: ez valami olyasmit jelent, hogy H elhelyezkedése G -ben különlegesen kedvező. Galois azt bizonyítja be, hogy egy egyenlet pontosan akkor oldható meg gyökjelekkel, ha:

- (1) Az egyenlet G Galois-csoportja tartalmaz egy nála kisebb rendű H normális részcsoporthot;
- (2) G és H rendjének a hányadosa prímszám;
- (3) H tartalmaz egy nála kisebb rendű K normális részcsoporthot;
- (4) H és K rendjének a hányadosa prímszám;
- (5) Mindez egészen addig folytatható, amíg egy egy elemből álló részcsoporthoz nem jutunk.

Az ilyen csoportot *feloldhatónak* hívjuk. (Durván arról van szó, hogy egy n -edik gyökvonást megkaphatunk p -edik gyökvonások sorozataként, ahol a p -k prímek. Például a hatodik gyök a köbgyöknek a négyzetgyöke, mert $6 = 2 \times 3$; a 2 és a 3 itt már prímek. Minden p -edik gyökvonás egy-egy lépésnek felel meg a részcsoporthok G , H , K , ... láncában.)

Az ötödfokú

Világos, hogy Galois eredményeit csak akkor tudjuk alkalmazni, ha a csoportok, részcsoporthok, normális részcsoporthok, részcsoporthok rendje stb. vizsgálatára jól kidolgozott módszerek állnak a rendelkezésünkre. Ilyen módszerek vannak, egy részük éppen Galois munkájának az ösztönző hatására született meg. Melléktermékként arra is magyarázatot nyerhetünk, mi is olyan speciális az ötödfokú egyenlettel kapcsolatban.

Az *általános* n -edfokú egyenlet gyökei között semmiféle speciális kapcsolat sincs, ezért az egyenlet Galois-csoportja az n gyök *összes* permutációjából áll. Ez egy nagyon sajátos csoport, és nem túl

nagy fáradtsággal sok minden megállapítható róla. Megmutatható többek között, hogy $n = 2, 3$ és 4 esetén a csoport feloldható, tehát az ilyen fokú egyenletek megoldhatók. Sőt, a megoldási módszereket csoportelméleti alapon is értelmezhetjük és rendszerezhetjük. Az összes permutációk G csoportja $n = 5$ -re viszont már nem feloldható. G rendje 120 , és van benne egy 60 rendű H normális részcsoporth. A $120/60 = 2$ hányados prím, tehát rendben el tudunk indulni. Azonban, amint Galois megmutatta, H -ban csak olyan normális részcsoporthok találhatók, amelyek rendje 1 vagy 60 . Így K -ra egyedüli lehetőségként az 1 rendű csoport adódik, azonban a rendek aránya ekkor $60/1 = 60$, ami nem prím. A csoport nem feloldható, és így az egyenlet nem oldható meg gyökjelekkel.

A lángész elnyeri méltó jutalmát?

Galois tizenhét éves korára kidolgozta mindezek alapját, és eredményei egy részét beküldte a Párizsi Tudományos Akadémiának. A dolgozatot elutasították, a kézirat elveszett. Galois még kétszer küldte be eredményeit, és a dolgozata mindkét alkalommal elkallódott. Galois ezért az elnyomó politikájú Bourbon rezsimet okolta, valamint a társadalmat, amely a zseni ellenében a középszerűséget támogatja. Lehet azonban, hogy ő maga volt a hibás: általában nem túl világosan magyarázta el elképzeléseit, és ha az újdonság homállyal párosul, méghozzá egy teljesen ismeretlen részéről, akkor ez felér egy öngyilkossággal. Mindenesetre Galois forradalmi nézeteket kezdett vallani, kicsapták az École Normale-ból, letartóztatták, szabadon engedték, újra letartóztatták és hat hónapra a Sainte-Pélagie börtönbe zárták. Kolerajárvány miatt kórházba került, majd feltételeken szabadlára helyezték. A szabadsággal együtt megélhette élete első és egyetlen szerelmi kapcsolatát, a szó szoros értelmében vett *végzete asszonyával*, Stéphanie-val. Lehet, hogy életével együtt munkája is veszendőbe ment volna, ha nincs Liouville, aki a Galois halála után hátramaradt dolgozatokat később nem kezdi el átnézni. 1843. július 4-én Liouville felszólalt az Akadémián: „Remélem, az Akadémiát érdekelni fogja, hogy Evariste Galois munkái között egy éppoly precíz mint amilyen mélyenszántó megoldást találtam az alábbi gyönyörű problémára: megoldhatók-e gyökjelekkel

...

Csoportok csőstül

Galois munkássága kulcsszerepet játszott a modern csoportelmélet kialakulásában. Több szerző, nevezetesen Cauchy és Joseph-Louis Lagrange foglalkozott permutációkból (vagy „helyettesítések”-ből) álló csoportokkal. Az eredmények nagy részét Camille Jordan foglalta rendszerbe 1870-es *Helyettesítések és algebrai egyenletek elmélete* c. művében. Közben azonban a permutációcsoportokhoz hasonló, de nem permutációkból álló objektumok kezdtek feltűnedezni. Például Auguste Bravais 1849-ben a háromdimenziós tér szimmetriái segítségével kristályok szerkezetét határozta meg, és ez vezette el Jordant olyan csoportok vizsgálatához, amelyek elemei nem permutációk, hanem lineáris transzformációk.

Az inspiráció másik nagy forrását jelentette a Sophus Lie által kidolgozott „folytonos csoportok” elmélete. A négyzetnek csak nyolc szimmetriája van, négy forgatás és négy tükrözés, a szimmetriák tehát egy *véges*, 8 rendű csoportot alkotnak. Bizonyos objektumok azonban, mint a kör vagy a gömb, folytonos szimmetriatartománnyal rendelkeznek. A kört folytonosan, tetszőleges szöggel el tudjuk forgatni; ugyanígy a gömböt is bármelyik tengelye körül. A kör vagy a gömb szimmetriacsoportja tehát kontinuum sok elemet tartalmaz. Egy csoport bonyolultságának hozzávetőleges mérőszáma a *dimenzió*: hány paraméterrel adhatók meg az elemei. A kör szimmetriacsoportja 1-dimenziós (kijelöljük a forgatás szögét). A gömbé 3-dimenziós (kiválasztjuk a forgástengelyt, amelyet „pólusának” hosszúsági és szélességi fokával jellemzünk, s ehhez jön még a forgatás szöge). Az ilyen csoportokra analízisbeli módszerek alkalmazhatók, például differenciálás és integrálás. Lie nagy horderejű elméletet dolgozott ki, amely Lie-csoportok néven központi jelentőségűvé vált a modern matematikában.

Ismét egy másik csoport a komplex függvénytan terméke. Ennek az elemei a komplex számokon értelmezett

$$f(z) = (az + b)/(cz + d)$$

biracionális transzformációk (lásd a 11. fejezetet), amelyek fontos szerepet játszanak az elliptikus függvények elméletében, és amelyekkel érdekes módon Abel és Galois is foglalkozott. A számelmélet is kiter-

melte a maga „csoportos” objektumait: ilyenek az egész számok modulo n az összeadásra nézve, a nemnulla egészek modulo egy p prím a szorzásra, a kvadratikus alakok Gauss-féle osztályai ...

Az erlangeni program

A csoportelmélet fejlődésének újabb nagy lökést adott Felix Klein 1872-es Erlangenben tartott előadása, amelynek programja a geometria egységesítését tűzte ki célul. Akkoriban a geometria egymással összefüggő, de teljesen különböző területekre esett szét: euklideszi és nemeuklideszi geometriára, inverzív és konform geometriára, projektív és affin geometriára, differenciálgeometriára, valamint a kialakulóban levő topológiára. Még olyan geometriák is megjelentek, amelyek csak véges sok pontot és egyenest tartalmaznak. Klein valamilyen közös rendező elvet keresett, és ezt abban a gondolatban találta meg, hogy a geometriát mint transzformációcsoportok invariánsait tekintjük.

Vegyük például az euklideszi geometriát. Itt alapvető szerepet játszik az egybevágó háromszögek fogalma; két háromszög akkor egybevágó, ha ugyanolyan alakúak és nagyságúak. Más szóval, ha az egyik a sík merev mozgatásával átvihető a másikba. Klein erre azt mondta: a merev mozgatások csoportot alkotnak. Ezzel síktranszformációk egy csoportjához jutottunk, és az euklideszi geometria éppen azokat a tulajdonságokat, például hosszúságokat és szögeket vizsgálja, amelyek ennek a csoportnak a hatására nem változnak meg. Hasonlóképpen a hiperbolikus geometriában a megfelelő csoport a merev hiperbolikus mozgásokból áll, a projektív geometriában a projektív transzformációkból, és a topológiában a topológiai transzformációkból. Az egyes geometriák között csoportelméleti alapon tudunk különbséget tenni. Sőt, mondta Klein, néha a csoportok segítségével tudunk az egyik geometriából a másikba átlépni. Ha két látszólag különböző geometriának lényegében azonos a csoportja (esetleg más-más álarcban), akkor a két geometria valójában ugyanaz. Klein számos példát mutatott erre. A *komplex* projektív egyenes geometriája alapján véve megegyezik a valós inverzív sikkal, az pedig a valós hiperbolikus sikkal.

Klein éleslátása egy csapásra világosságot és rendet teremtett az addigi izgalmas, de zürzavaros összevisszaságban. (Egy lényeges kivételt meg kell említenünk. A sokaságok Riemann-féle geometriája megakadályozta Kleint abban, hogy mindent tisztára söpörjön.) Lehetővé

vált, hogy két geometriát összehasonlítsunk, hogy az egyiket egy másiknál erősebbnek vagy gyengébbnek mondjuk, hogy az egyikben elért eredményeket egy másikban kimondott tételek bizonyításához használjuk fel. A klasszikus geometria ma már talán nem foglal el központi helyet a matematikai *kutatásban*, ennek az egyik fő oka az, hogy olyan sikeresen művelték a tizenkilencedik században, azonban (amint látni fogjuk) továbbra is központi jelentőségű a *matematika* szempontjából. És Klein erlangeni programjának még mindig óriási a hatása. A siker egyik fokmérője pedig éppen az, hogy hatását nem is mindig igazán érzékeljük, a szemlélet annyira átment már a matematikai köztudatba.

Absztrakt csoportok

Amikor a matematikusok észreveszik, hogy ugyanazt a tételt tizenöt-ször bizonyították be tizenöt különböző szövegkörnyezetben, akkor általában úgy érzik, hogy eljött az ideje egy kis rendcsinálásnak. A mi esetünkben a rendcsinálást Arthur Cayley kezdte el, aki egy általánosabb fogalmat vezetett be; olyan operátorok halmazát, amelyek közül bármely kettőt egymás után alkalmazva az eredmény ismét a halmazban lesz. Ezt ő *absztrakt csoport*nak nevezte. Cayleynél azonban az operátorok még mindig *valamin* hatottak. A végső lépés a csoport axiomatikus definíciója volt, amelyet tételesen először Huntington fogalmazott meg 1902-ben, de addigra már minden bizonnyal az általános matematikai „folklor” részét képezte. Ez a modern megközelítésmód. Egy *csoport* egy olyan G halmaz, amelyen egy kompozíciót vagy *szorzatot* értelmezünk. Ha g és h elemei G -nek, akkor a szorzatot gh -val jelöljük. (A jelölés ne keltsen olyan képzetet, mintha gh -t a g és h szokásos összeszorozásával kapnánk.) A szorzatnak négy tulajdonságot kell kielégítenie:

- (1) G *zárt*: ha g és h G -beliek, akkor gh is az.
- (2) Létezik G -nek *egységeleme*, jelöljük ezt 1 -gyel, amelyre $1g = g = g1$ minden g -vel teljesül.
- (3) G -ben minden g -nek van *inverze*, jelöljük ezt g^{-1} -gyel, amelyre $gg^{-1} = 1 = g^{-1}g$.
- (4) Érvényes a $g(hk) = (gh)k$ *asszociatív szabály*.

Galois permutációcsoportjai, Bravais és Jordan transzformációcsoportjai és Cayley absztrakt csoportjai valamennyien teljesítik ezeket a felté-

teleket. Az (1) feltétel Galois „csoporttulajdonság”-a, a másik három pedig olyan hasznos alaptulajdonságokat fejez ki, amelyek a transzformációk körében automatikusan teljesülnek, azonban absztraktabb objektumok esetén nem feltétlenül. Például ha G az egész számok halmaza, és a gh „szorzat” a $g + h$ összeget jelenti, akkor mind a négy feltétel teljesül. Ugyanez érvényes akkor is, ha az egészeket modulo n vesszük. A csoportfogalom különböző megjelenési formáiban fellépő speciális eredmények összevissza tömkelege egy csapásra néhány egyszerű általános állításra redukálódott. A matematika pedig a szimmetriaelvek leírásának és kihasználásának hatékony eszközére tett szert.

A szimmetria atomjai

Az ötödfokú egyenlet vizsgálata egy olyan H csoporthoz vezet, amelyben nincs más normális részcsoporthoz, csak a triviális 1 rendű és maga a H (amelynek itt 60 a rendje). Az ilyen csoportot *egyszerűnek* nevezzük. Ha egy csoportra mint molekulára gondolunk, akkor az egyszerű csoportok ennek az atomjai. Az összes csoport megismeréséhez az egyszerű csoportok megismerésén keresztül vezet az út. Sajnos az „egyszerű” most korántsem a „könnyű” szinonímája.

Ezen a területen az első jelentős eredmény az egyszerű Lie-csoportok osztályozása volt. Lie az egyszerű Lie-csoportoknak négy „családját” fedezte fel, amelyeket az n -dimenziós tér lineáris transzformációi segítségével határozott meg. Ezt a munkát Wilhelm Killing fejezte be 1888-ban, és Élie Cartan tökéletesítette 1894-ben. Az eredmények azért is említésre méltók, mert az egyszerű Lie-csoportok mindenféle feltűnnek a matematikában, és mi is hamarosan újra találkozunk majd velük. A Lie által talált négy családról szép egységes elmélet született. Rajtuk kívül azonban öt *kivételes* csoport is létezik. Ezek dimenziója 14, 52, 78, 133 és 248, és amint a számok sejteni engedik, itt nem látszik, hogy valamilyen nyilvánvaló szabályszerűség érvényesülne. Van, aki még a létüket is „a Gondviselés otromba művé”-nek nevezi, ugyanakkor „gyanús” kapcsolatban állnak mindenféle furcsa és gyönyörű matematikai „véletlennel”, és némi pikantériával fűszerezik azt, ami nélkülük talán túlzottan is jólfésült elméletté válna. Mint ha ők lennének a látható jelei egy olyan mélyebbről fakadó rendnek, amely kezd már körvonalazódni, de amelyet még nem igazán értünk. Az egyszerű Lie-csoportok jelenleg nagyon divatosak a matematikai fi-

zikában, és a kivételes csoportok valószínűleg fontos szerepet játszanak a téridő lehetséges felépítéseiben. Lehet, hogy mindez a Gondviselés műve, de otrombának semmiképp sem nevezhető.

A tízezer oldalas bizonyítás

A véges egyszerű csoportok osztályozásának elemibb problémája kevésbé bizonyult kezelhetőnek. A Lie-csoportokban meglevő analitikus struktúra megnehezíti ugyan a technikai részletek nélküli tárgyalásmódot, a tételek bizonyításához azonban hatalmas matematikai arzenált ad a kezünkbe. A véges egyszerű csoportokról az 1900-as évek elején szép lassan összegyűlt némi információ, majd szinte semmi sem történt egészen 1957-ig, amikor hirtelen átszakadtak a zsilipek.

A legkönnyebben adódó egyszerű csoportok a „ciklikus”-ak, amelyeket az egészek egy prímmodulus szerint az összeadásra nézve alkotnak. Nemcsak hogy normális részcsoporthuk nincs; egyáltalán nincs részcsoporthuk. Következnek az alternáló csoportok. Közülük a legkisebbnek 60 a rendje, és ez az a csoport, amelyet Galois fedezett fel az ötöd fokú egyenlettel kapcsolatban. Ezután jönnek az egyszerű Lie-csoportok négy klasszikus családjának a véges megfelelői, amelyeket úgy kapunk, hogy a komplex számokat egy véges testtel helyettesítjük. Ezek közül néhányat már Galois és Jordan is ismert. Van még öt egyedi darab, amelyeket Emile-Léonard Mathieu talált 1861-ben és 1873-ban, és ezeket bizonyos kivételes „véges geometriákkal” hozta kapcsolatba. Így festett a helyzet a századfordulón.

Sokáig csak nagyon csekély haladás történt, noha Leonard Dicksonnak sikerült megtalálnia a 14 és 78 dimenziós kivételes Lie-csoportok véges testekre vonatkozó megfelelőit. Világos volt, hogy a másik három kivételes Lie-csoporttal is valahogy hasonlóképp kellene elbánni, de ennek pontos módját továbbra is homály fedte. 1957-ben azután Claude Chevalley egységes megközelítésmódot dolgozott ki, amely bármely egyszerű Lie-csoport és bármely véges test esetén egy véges egyszerű csoportot eredményezett, ezt *Lie típusúnak* nevezték el. A módszer egy variációjával Robert Steinberg, Michio Suzuki és Rimhak Ree „megcsavart” csoportokat állítottak elő. A káoszban egyszer csak a rend körvonalai kezdtek kirajzolódni. Ott voltak a ciklikus csoportok, az alternáló csoportok, a Lie típusú csoportok, és a Mathieu által talált öt ún. *szórványos* (vagy *sporadikus*) csoport. Ez nagyon emlé-

keztet az egyszerű Lie-algebrák listájára: rendes családok és néhány fekete bárány. Megismétlődik-e vajon a szabályszerűség (vagy annak hiánya)?

Fontos lépést tett a végső megoldás irányában Walter Feit és John Thompson 1963-ban, akik William Burnside-nak azt az 1906-ban megfogalmazott sejtését igazolták, hogy (a ciklikusokon kívül) minden véges egyszerű csoport páros rendű. A 250 oldalas bizonyítás egy folyóirat teljes számát kitölti, és (mind stílusában, mind pedig terjedelmében) mintául szolgált a véges egyszerű csoportok további kutatásához. Teljesen új frontvonalat nyitott, mert minden páros rendű csoportnak van olyan g eleme, amelyre $g^2 = 1$ teljesül, és Richard Brauer kidolgozott egy új módszert, amely éppen az ilyen speciális elemekre épít. Zvonimir Janko ennek segítségével talált egy új szórványos egyszerű csoportot 1965-ben. Sorra bukkantak fel további szórványos csoportok, felfedezésük Donald Higman, Charles Sims, J. MacLaughlin, M. Suzuki, John Conway, Dieter Held, Bernd Fischer, R. Lyons, M. O’Nan és Arunas Rudvalis nevéhez fűződik. Ezek közül néhánynak a létezését egy rövid ideig csak közvetett bizonyítékok alapján sejtették, de nem sikerült őket ténylegesen megadni. Annak igazolásához, hogy valóban léteznek, gyakran hosszadalmas számítógépes számolásokra volt szükség. A legtrükkösebb esetet a legnagyobb szórványos csoport, az *Óriás* jelentette, amelynek a rendje prímtényezős alakban kifejezve

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71.$$

Némi kétely merült fel azzal kapcsolatban, vajon egy nagy számítógép meg tud-e birkózni egy ekkora monstrummal. Mindenki legnagyobb ámulatára 1982-ben Robert Griess pusztán kézzel győzte le az óriást, ami még János vitéznek is becsületére vált volna; megkonstruálta mint a 196883 dimenziós tér forgatásainak egy csoportját (ez a legkisebb lehetséges dimenzió!).

A Daniel Gorenstein által az 1970-es években elindított kutatási program sikeres befejezésének eredményeképpen ma már tudjuk, hogy pontosan huszonhat szórványos egyszerű csoport létezik. Az ismert családokkal együtt kiadják a véges egyszerű csoportok teljes listáját. Az egész bizonyítás legalább 10000 nyomtatott oldalt tesz ki, és több száz matematikus munkájának az eredménye. Igazán figyelemre méltó teljesítmény.

A csoportelmélesek ennek a régi és abszolút központi problémának a megoldása után sem pihennek a babérjaikon. Az egyik kérdés, amelyre még nem született meg a teljes válasz, így hangzik: „Mely csoportok állnak elő Galois-csoportként?” A legjobb tipp az, hogy „mindegyik”, de ezt egyelőre nem sikerült igazolni. Safarevics belátta, hogy minden feloldható csoport Galois-csoport, ezért a figyelem az egyszerű csoportok felé fordult. Nemrég Thompson bebizonyította, hogy az Óriás fellép Galois-csoportként!

Az atomok szimmetriája

A csoportelmélet egyik alkalmazási területe a kristályok szerkezete. Egy kristályban az atomok egy szabályosan ismétlődő struktúrát, ún. *rácsot* alkotnak, amely nagymértékben szimmetrikus. A szimmetriák között találhatók *pontszimmetriák*, amelyek azt mérik, mennyire szimmetrikusan helyezkednek el az atomok a rács egy adott helye körül, továbbá *eltolási szimmetriák*, amelyek szerint az egész rács szerkezete bizonyos irányokban adott távolságonként ismétlődik. A négyzet alakú csempékkel kirakott végtelen fürdőszobafal egy kétdimenziós példa. Ismeretes, hogy a síkon a kristályszimmetria-csoportoknak pontosan tizenhét típusa fordul elő, vagy ugyanezt színesebben megfogalmazva, tapétamintából tizenhét alaptípus létezik. Három dimenzióban a pontcsoportok száma harminckettő, amelyeket az eltolásokkal kombinálva összesen 230 különböző típusú kristályszimmetria adódik. Ez az osztályozás alapvető szerepet játszik a szilárdtestfizikában. Négy dimenzióban a kristálytípusok száma 4783; magasabb dimenzióban az eredmények hiányosságai megkímélnék minket a további részletektől.

Túl a csoportokon

A kristályok osztályozása mutatja, hogy egy kristályrácsnak nem lehet ötszörös szimmetriája (mint egy ötszögnek): csak 2-, 3-, 4- és 6-szoros szimmetriák fordulhatnak elő. A fizikusok azonban nemrég a szilárd anyagnak egy olyan új állapotát, az ún. *kvázikristályt* fedezték fel, amelyben fellépnek 5-szörös szimmetriák. Ezek az eredmények azt jelzik, hogy a csoportelmélet a természet szimmetriáinak a leírásához nem a végső eszköz. A kvázikristály nem rendelkezik a kristály hagyományos rácsstruktúrájával. Vagyis ha arrébb mozdítjuk, a finom

részletekben eltérés keletkezik. Azonban továbbra is nagyfokú szabályosság jellemzi: az atomok közötti kötések csak néhány lehetséges irányba mutathatnak, amelyek az egész testben állandók. Ilyen mintákat először Roger Penrose fedezett fel matematikai szórakozásként. Penrose kétféle csempével, egy sárkány és egy dárda alakúval, az egész síkot le tudta fedni, anélkül, hogy bármiféle periodicitás kialakulna. Alan MacKay megtalálta ezek háromdimenziós megfelelőit. A fenti elveket D. Levine és P. J. Steinhardt helyezte szilárd matematikai alapokra 1984-ben, és a megjósolt kvázikristályt Daniel Schechtman és társai észlelték egy alumínium-magnézium ötvözetben.

Ez a felfedezés azt jelenti, hogy a kristálytan hagyományos eszköze, a csoportelmélet nem elegendő valamennyi „szimmetrikus” jelenség leírására. A csoportelmélet hatalmas sikereket ért el, de nem az övé az utolsó szó. A matematikának együtt kell haladnia az idővel, nem ülhet örökké a babérjain. Lehet, hogy a szimmetria fogalmának tágabb értelmezésére lesz szükség. Lehet, hogy a természet újabb „tiltott” szimmetriákat produkál. A matematikusok és fizikusok új kihívások elé néznek. „Bárhogy is lesz — mondja John Maddox —, a kristálytan kutatóinak meg kell majd tanulniuk némi szokatlan matematikát.” És ugyanígy a matematikusoknak is.

CSOMÓ HŰHÓ EJ, MIÉRT

Lubberkin a fánál aludt jóllakottan,
 Térdszalagja pántját gyorsan leoldottam,
 Nem is vette észre miképp cselekedtem,
 Saját kék övem is hamar levetettem.
 S csomóban míg őket egyesítem éppen,
 Verset mondogatok éspedig eképpen:
Igaz szerelemnek hármas csomót kötök,
Tartós legyen csomóm, s az Ő szerelme örök.

John Gay

Egészen a tizennyolcadik század végéig tartotta magát Európában az a hiedelem, hogy bűvös csomókkal meg lehet babonázni a vőlegényt, és így meg lehet akadályozni a házasság beteljesülését. 1705-ben Skóciában két embert kivégeztek azzal vádolva őket, hogy kilenc bűvös csomóval beleavatkoztak egy bizonyos, ashintillyi illetőségű Spalding úr hitvesi boldogságába. A csomók a titokzatos dolgok jelképei. Bár ennek a fejezetnek a címe nem Shakespeare-től származik, az alábbi sorokat valóban ő írta a *Vízkereszt*-ben:

Idő! te bontod ki majd, nem én,
 Mert nékem ez a csomó túl kemény.¹

A csomók által felvetett problémákat a matematikusok is túl keménynek találták, magasabb dimenziós analógonjaikat pedig *csomó* szempontból még nehezebbnek. Csak az idő segítségével tudtak egy általános elmélet szálainak a kibontásához hozzáfekedni.

A matematikust elsősorban a csomók *topologikus* tulajdonságai érdeklik — azok a sajátosságok, amelyek folytonos deformációk hatására nem változnak meg. Ezek közül legalapvetőbb maga a csomózottság.

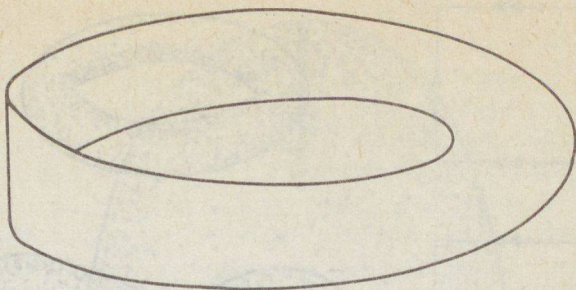
¹ Radnóti Miklós – Rónay György fordítása (II. felvonás, II. jelenet)

A topológiát „a gumilepedő geometriájának” szokták nevezni, ami a helyes képet idézi fel annak ellenére, hogy technikailag pontatlan. A csomók a térgörbék legközvetlenebb topologikus sajátosságai. A görbék után a felületek következnek, a felületek után pedig ezek többdimenziós általánosításai, a *sokaságok*. A topológusok ilyen és mindenféle más tereket vizsgálnak. A topológia a folytonosság fogalmának mélyebb hatásait tanulmányozza, és folytonossági megfontolások szinte mindenütt előfordulhatnak. Ennélfogva a topológia a matematika kulcsfontosságú részévé vált, sőt ma már az alkalmazott tudományban, különösen a matematikai fizikában is kiemelkedő szerepet kezd játszani (lásd a 13., 14., 15. és 17. fejezetet). A nagy történelmi áttekintéssel rendelkezők számára ez nem annyira meglepő, mert a topológia számos gyökere az alkalmazásokból eredt; később azonban a tárgy a körülbelül 1920-tól 1970-ig tartó fő fejlődési szakaszában nagyon absztrakttá vált, és ez sokak elől eltakarta a benne rejlő alkalmazási lehetőségeket.

Hidak és szalagok

Általános vélemény szerint a topológia kezdete 1735-re tehető, amikor Euler megoldotta a königsbergi hidak problémáját. A Pregel folyó itt két szigetet fog közre, amelyeket egy híd köt össze. Az egyik szigetről egy-egy híd vezet mindkét partra, a másikról pedig kettő-kettő. Végigsétálhatnak-e Königsberg lakói a hét hídon folyamatosan úgy, hogy mindegyiken csak egyszer haladnak át? Euler megmutatta, hogy ez nem lehetséges, továbbá megoldotta az ilyen típusú probléma legáltalánosabb változatát is. Módszere azon az észrevételen alapul, hogy csak a területek összekötési módja számít, a hidak pontos elhelyezkedése vagy mérete lényegtelen.

A topológia „előtörténetében” akad néhány korábbi felfedezés is. René Descartes már 1639-ben tudta, hogy ha egy poliédernek C csúcsa, E éle és L lapja van, akkor $C - E + L = 2$. Erre Euler adott 1751-ben egy bizonyítást, és Cauchy 1811-ben egy másikat. Gauss többször is hangsúlyozta, mennyire fontos az alakzatok geometriai alaptulajdonságainak a vizsgálata, de ehhez néhány csomókról és láncokról szóló megjegyzésen kívül semmi többel nem járult hozzá. Gauss egy tanítványa, August Ferdinand Möbius volt az első, aki a topologikus transzformációt alakzatok közötti olyan egy-egyértelmű leképezésként definiálta, amelynél az egyik alakzat közeleli pontjainak a másik alak-



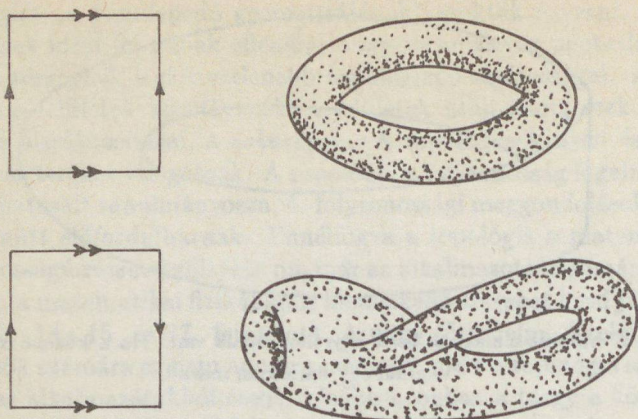
3. ábra. A Möbius-szalagnak csak egyetlen oldala van. Ha a közepe mentén felvágjuk, egy darabban marad.

zatban is közeli pontok felelnek meg. Möbius a felületeket és ezeknek a poliéderekhez való viszonyát vizsgálta, ami később a tárgy egyik központi témájává vált. 1858-ban ő és Johann Listing felfedezték, hogy léteznek egyoldalú (vagy *nem irányítható*) felületek, amelyek közül a Möbius-szalag a leghíresebb. Vegyünk egy hosszú papírcsíkot, félfordulatnyit csavarjunk rajta, és egyesítsük a végeit. Ha azt, ami a két oldalának látszik, különböző színűre be akarjuk festeni, a csavarás miatt ezek valahol találkoznak. Ha a középvonala mentén felvágjuk, egy darabban marad.

A lyukak fontossága

Mindez nagyon mulatságos volt, de nem látszott a jelentősége. A topológia az egész matematika szempontjából akkor vált fontossá, amikor a komplex függvénytanban Riemann bevezette a ma *Riemann-felületeknek* nevezett objektumokat. Egy Riemann-felület egy olyan gömbbel ekvivalens, amelyre néhány fogantyút ragasztottunk (mint csészéhez fület), vagy másképp fogalmazva, egy olyan tóruszal, amelyen van néhány lyuk. A fogantyúk vagy lyukak n számát a felület *nemének* (vagy *nemszámának*) nevezzük.

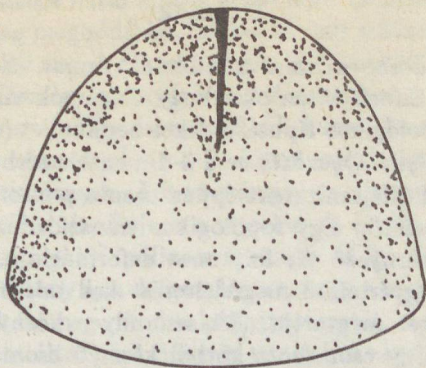
Klein észrevette, hogy a projektív sík (amelyet úgy nyerünk, hogy egy gömb átellenes pontjait azonosítjuk, akárcsak az elliptikus geometria standard modelljében) nem irányítható, és felfedezett egy másik ilyen tulajdonságú felületet, a *Klein-kancsót*. Egyik felületet sem lehet a háromdimenziós térben úgy elhelyezni, hogy ne messe önmagát, de



4. ábra. A tóruszt és a Klein-kancsót úgy kaphatjuk meg, hogy egy négyzet oldalait absztrakt módon azonosítjuk.

mindkettő definiálható absztrakt módon egy sokszög oldalainak azonosításával, vagy összeragasztásával. Egyszerű példaként képzeljünk el egy négyzetet. Ha a két függőleges oldalát összeragasztjuk, hengerhez jutunk. Ha ezután a felső és alsó oldalt is összeragasztjuk, a henger tóruszként záródik. A tórusz összes tulajdonságát tanulmányozhatjuk a ragasztási *recept* segítségével, anélkül, hogy ténylegesen elvégeznénk a hajtogatási folyamatot; elég csak *úgy tennünk*, mintha az összeragasztandó pontok valójában azonosak lennének. Vegyünk ismét egy négyzetet, azonosítsuk a két függőleges oldalt, majd azonosítsuk a két vízszintes oldalt is, azonban ellentétes irányban. Ezzel megkaptuk a Klein-kancsót.

Megfordítva, ha bármely adott felületet görbék alkalmas rendszere mentén felhasítunk, majd szétnyitjuk mint egy meghámozott narancsot, akkor egy sokszöghöz jutunk. Ahhoz, hogy ebből a felületet visszanyerjük, csak el kell képzelni, hogy a sokszög oldalait ismét összeragasztjuk. Ennek a felbontó és újra visszaragasztó eljárásnak a vizsgálata a topologikus felülettípusok teljes osztályozását lehetővé teszi. Az irányítható felületek éppen Riemann n -fogantyús gömbjei. A nem irányíthatók olyan gömbök, amelyekbe n lyukat vágunk (ahol n legalább 1), és mindegyik lyukba egy Möbius-szalagot ragasztottunk. Ez absztrakt értelemben véve azért lehetséges, mert egy Möbius-sza-



5. ábra. A keresztcsapka. Ez a felület topologikusan ekvivalens egy Möbius-szalaggal, amelynek kör a partvonala.

lag partvonala egyetlen zárt hurok, azaz egy topologikus kör. Ha a konstrukciót megpróbáljuk a 3-dimenziós térben megvalósítani, akkor a szalagok szükségképpen átmetszik saját magukat, és kalap formájú objektumok alakulnak ki, amelyeket keresztcsapkáknak nevezünk. Az imént leírt felületeket n nemű irányítható, illetve nem irányítható standard felületeknek nevezzük. Bármely partvonal nélküli zárt felület ezek közül pontosan eggyel ekvivalens.

Ezek szoros összefüggésben állnak Euler tételével. Bár nem említettem, de a $C - E + L = 2$ tétel csak azokra a poliéderekre érvényes, amelyek topologikus gömbök, vagyis amelyekben nincsenek lyukak. Egy poliéder-tóruszban $C - E + L = 0$. Például egy fából készült három oldalú és háromszög keresztmetszetű képeretnél $C = 9$, $E = 18$ és $L = 9$. Vegyünk most egy tetszőleges felületet, rajzoljunk rá egy poliédert és számítsuk ki $C - E + L$ értékét. Az eredmény meglepő módon nem függ attól, hogyan rajzoltuk meg a poliédert, csakis az eredeti felület topologikus típusa számít. Ezt a *topologikus invariáns*t a felület χ Euler-számának nevezzük. A nemszám is topologikus invariáns: két topologikusan ekvivalens felületnek ugyanaz a neve. Ugyanígy topologikus invariáns az irányíthatóság, illetve a nem irányíthatóság. A felület neve és Euler-száma összefügg: irányítható felületnél $\chi = 2 - 2n$, nem irányíthatónál pedig $\chi = 2 - n$.

Csomók

A csomók trükkösebbek, mint a felületek, annak ellenére, hogy csak 1-dimenziósak. Ennek az az oka, hogy a csomók vizsgálatakor nemcsak a görbe topologikus típusa érdekel bennünket (ami mindig kör), hanem az is, *hogyan ágyazódik be a 3-dimenziós térbe*. Ezt szeretném részletesebben is kifejteni, mert éppen ezen a ponton a „gumilepedő” elképzelés félrevezető. Egy topologikus transzformáció általánosabb, mint valamely környező tér folytonos deformációja. Ahhoz ugyanis csak olyan egy-egyértelmű megfeleltetést kell találni, amely a közeli pontok közelségét megtartja. Itt semmilyen környező tér nem játszik szerepet. Egy csomózott körből könnyű csomózatlant csinálni: egyszerűen feleltessük meg egymásnak a megfelelő pontokat! Másképp fogalmazva, először *szétvágjuk* a csomózott kört, azután kibogozzuk, végül a vágás helyén összeillesztjük eredeti formájában. Noha a szétvágás során közeli pontok messzire kerültek egymástól, végül megint csak közel lesznek; és mindössze ennyire van szükség.

Két csomó beágyazása a 3-dimenziós térbe akkor topologikusan ekvivalens, ha az *egész* 3-dimenziós térnek létezik olyan topologikus transzformációja, amely az egyik csomót a másikba viszi át. Ez sokkal erősebb követelmény annál, mint ha csak a csomókat feleltetjük meg topologikusan egymásnak. A rövidség kedvéért ehelyett mindig csak annyit mondunk majd, hogy „a csomók ekvivalensek”. A csomóelmélet fő problémái a következők:

- (1) Döntsük el, hogy egy csomó valóban meg van-e csomózva.
- (2) Két adott csomóról döntsük el, hogy ekvivalensek-e vagy sem.
- (3) Osztályozzuk az összes lehetséges csomót.

Az 1920-as évekig még olyan tétel sem volt, hogy csomók egyáltalán léteznek! Hans Reidemeister bizonyította be, hogy a közönséges kézi *háromlevelű csomó* nem ekvivalens egy csomózatlan hurokkal. Ezt úgy látta be, hogy egy csomó bármely deformációját standard lépések sorozatára bontotta, és a háromlevelű csomónál talált egy olyan tulajdonságot, amely ezeknek a lépéseknek a során nem változik, azonban a közönséges körre már nem érvényes. Ez volt az első *csomóinvariáns*.

Egy Alexander nevű híres csomóelmélész, becenevén Nagy Sándor, i. e. 333-ban „kibogozta” a rendkívül bonyolult *Gordiuszi csomót*. Ezt a „vágd szét és ragaszd vissza” technika részleges alkalmazásával érte

el, csak nagyon sietős fiatal ember lévén nem vacakolt a visszaragasztással, mert a világ meghódítása fontosabb volt számára, mint az, hogy a transzformációját topologikussá tegye. Egy másik, J. W. Alexander nevű csomóelmélész egy gyönyörű csomóinvariánst fedezett fel, az ún. *Alexander-polinom*ot. Egy csomó nélküli hurok Alexander-polinomja 1, a háromlevelű csomóé $x^2 - x + 1$. Mivel ezek különbözők, a csomók *nem lehetnek* ekvivalensek. A 8-as számjegy polinomja $x^2 - 3x + 1$, ez tehát mindkettőtől eltér. Sajnos a vitorlás- és a vénasszony-csomóhoz egyaránt az $(x^2 - x + 1)^2$ polinom tartozik, és így az Alexander-polinom nem elég hatékony annak igazolására, hogy a cserkészek generációi nem hiába tanulták meg mind a kétfajta csomót. Azóta érzékenyebb invariánsokat is találtak, sőt nemrég egy teljes algebrai invariánst is, amely bármely két eltérő csomót meg tud egymástól különböztetni. Ez azonban a gyakorlatban nem mindig alkalmazható. A könyv írása idején öt különböző kutatócsoport egymástól függetlenül egy újabb hatékony csomóinvariánst fedezett fel.

A bűvészek gyakran kötnek egy kötéltre két külön csomót, és addig mesterkednek, amíg a második „közömbösíti” az elsőt. A topológusok tudják, hogy itt valami csalás van, és nem állhatom meg, hogy ezt be ne bizonyítsam. Tegyük fel, hogy ugyanazon a zsinóron egy K és egy L csomót kötöttünk (egymástól szépen elválasztva őket), hívjuk ezt a $K \# L$ *kötélösszegnek*. Tegyük fel, hogy egy K csomónak létezik egy K^* *inverze*, amely őt közömbösíti, és jelöljük 0-val a csomózatlan hurkot. Kössünk egy zsinórra végtelen sok példányt K -ból és K^* -ból felváltva, rohamosan csökkenő méretben, hogy egészében véve véges keretek között maradjunk. Így egy végtelenül bonyolult

$$W = K \# K^* \# K \# K^* \# K \# K^* \# \dots$$

csomóhoz jutunk. Zárójelezzük ezt a kifejezést a következőképpen:

$$W = K \# (K^* \# K) \# (K^* \# K) \# \dots = K \# 0 \# 0 \# \dots = K.$$

Más zárójelezéssel viszont

$$W = (K \# K^*) \# (K \# K^*) \# \dots = 0 \# 0 \# 0 \# \dots = 0$$

adódik, vagyis $K = 0$, tehát K csomózatlan! Ami ebben talán a legin-

kább meglepő, hogy ezt a képtelen okoskodást könnyűszerrel teljesen szabatossá tudjuk tenni. A *W*-hez hasonló végtelen csomókat *vad csomó*knak nevezzük. Egy R. L. Wilder nevű matematikus stílszerűen a vad csomóknak egy különlegesen vad fajtáját fedezte fel.² A $\#$ kötélösszeg művelet a csomók körében egyfajta aritmetikát hoz létre. Egy csomót nevezzünk *prímnek*, ha (a 0-t és önmagát leszámítva) nem áll elő két másik csomó kötélösszegeként. Ekkor minden csomó *egyértelműen* írható fel prímcsomók kötélösszegeként.

A csomózott görbékhez hasonlóan a felületeket is lehet csomózni. Piet Hein dán matematikus erről egy tréfás epigrammát is írt:

Fánkból van nagy csomó,
Némelyen nagy csomó.
Némely meg oly mohó,
Titkolja a kis bohó.

Sokaságok

A topológiának a felületekről magasabb dimenziós sokaságokra történő általánosítását Riemann kezdeményezte, bár ő inkább a merev geometriai tulajdonságok kategóriájában gondolkodott. Ő vezette be a *sokaság* fogalmát.

Helyesebb talán azzal kezdenem, mit értenek a matematikusok *n*-dimenziós téren. Az elv azon alapszik, hogy a síkot olyan pontok halmazának tekintjük, amelyek koordinátái (x, y) , ahol x és y számok, a 3-dimenziós teret pedig az (x, y, z) pontok segítségével képezzük. Így a 4-dimenziós tér az (x, y, z, u) , az 5-dimenziós tér az (x, y, z, u, v) pontok halmaza stb. Ennyi az egész; ennél egyszerűbb dolgot nehéz elképzelni! És alig 3000 évig tartott, amíg rájöttek, hogy ez milyen nyilvánvaló.

Bármely felület, még a leggörbültebb, legbonyolultabb is, úgy tekinthető, mintha rengeteg kis kerek foltból lenne összeragasztva, és mindegyik darabka topologikusan pontosan ugyanolyan, mintha a közönséges euklideszi síkon helyezkedne el. Nem a *lokális* foltszerkezet hoz létre olyasmiket, mint egy tórusz lyuka, hanem az a *globális* mód,

² Lefordíthatatlan szójáték a név és a „vad” szó angol megfelelője, a „wild” között. (FR)

ahogyan a foltok össze vannak ragasztva. Ha ezt megértettük, akkor már könnyen át tudunk lépni n dimenzióba: itt mindent olyan kis darabkákból kell összeállítanunk, amelyeket a sík helyett most az n -dimenziós térből vágunk ki. És néhány olyan technikai részlettől eltekintve, amelyet az 1930-as évekig nem sikerült megoldani, pontosan ezt kell csinálni. Az így kapott tér egy n -dimenziós sokaság. Ezt rendszerint „ n -sokaság”-ként rövidítjük. Jó okunk van rá, hogy a sokaságok iránt érdeklődjünk. Például három testnek a gravitációs erő hatására történő mozgása valójában egy 18-dimenziós sokaságra vonatkozó kérdés, ahol minden testhez három hely- és három sebességkoordináta tartozik.

A topológusokat a sokaságokkal kapcsolatban az érdekli, amit a felületekről és a csomókról már megtudtak. Nevezetesen:

- (1) Döntsük el, mikor lesz, illetve mikor nem lesz két sokaság topologikusan ekvivalens.
- (2) Osztályozzuk az összes sokaságot.
- (3) Adjuk meg az összes lehetséges módját annak, ahogyan egy sokaságot egy másikba beágyazhatunk (mint egy csomózott kört a 3-dimenziós térbe).
- (4) Döntsük el, hogy két ilyen beágyazás mikor azonos, illetve mikor különböző.

Az első két probléma ügye elég rosszul áll; az utolsó kettőé még rosszabbul, bár mindegyiknél történt komoly előrelépés. Főleg az első kettővel kívánok foglalkozni, megemlítek azonban egy eredményt, amely jól mutatja, hogy (3) meglehetősen zűrös kell hogy legyen. A következő kérdésről van szó: mikor fűzhető össze két 50-dimenziós gömb egy n -dimenziós térben? „Összefűzésen” azt értjük, hogy a két gömb nem választható szét a környező tér egy topologikus transzformációjával. A válasz az, hogy nem fűzhetők össze ha n értéke 102 vagy annál több; összefűzhetők, ha $n = 101, 100, 99$ vagy 98; és most jön a meglepetés, nem fűzhetők össze, ha $n = 97$ vagy 96; majd $n = 95$ -re ismét összefűzhetők, és ugyanez a helyzet le egészen $n = 52$ -ig. Fura. A topológia tele van ilyen az intuíciónak ellentmondó dolgokkal.

A Poincaré-sejtés

Egészen a legutóbbi időkig az (1) és (2) probléma vizsgálata egy olyan nehézségen feneklett meg, amellyel Poincaré 1904-ben találta magát szembe, és úgy nyilatkozott, hogy „ez a kérdés nagyon tévútra vinne bennünket”, majd gyorsan más témákra tért át. Igaza volt: nyolcvan évnyi tévelygés után ma sem ismerjük a választ az eredeti kérdésre, noha a magasabb dimenziós változatokat sikerült teljes mértékben tisztázni.

A probléma a *homotópiaelmélethez* tartozik, amely része az *algebrai topológiának*. Az algebrai topológiában a topologikus kérdéseket az absztrakt algebrára vezetik vissza úgy, hogy a topologikus terekhez különféle algebrai invariánsokat rendelnek hozzá. Poincaré volt ennek az elméletnek az egyik szülőatyja, és ő vezette be az ún. *fundamentális csoportot*. Ez a geometria és az algebra ravasz keveréke. Vegyünk egy S sokaságot és válasszunk ki benne egy $*$ pontot. Tekintsünk olyan hurkokat, amelyek $*$ -ban kezdődnek és végződnek. Két ilyen hurkot „összeszorozhatunk” úgy, hogy először az elsőn, utána pedig a másodikon haladunk végig: az eredmény ismét egy $*$ -ban kezdődő és végződő hurok lesz. A hurkokat „osztani” azonban nem tudjuk. Ezen úgy segíthetünk, ha bármely hurkot azonosnak képzelünk a folytonos deformációival. Egy hurok reciproka vagy inverze ekkor ugyanaz a hurok lesz, csak ellenkező irányú bejárással. Az összes hurkok halmaza alkotja erre a „szorzásra” nézve a Poincaré-féle fundamentális csoportot. Ha S egy kör, akkor a hurkokat az különbözteti meg egymástól, hogy hányszor tekerednek körbe, és a fundamentális csoport az egész számokból áll. A „szorzás” valójában összeadás: ha az első hurok 5-ször tekeredik körbe, a második pedig 7-szer, akkor a kettő együttesen 12-szer tekeredik, nem pedig 35-ször.

Poincaré indítása után más matematikusok észrevették, hogy ha az 1-dimenziós hurkok helyett k -dimenziós gömböket használunk, akkor *magasabb rendű homotópiacsoportokat* kapunk, minden k -ra egyet. Mindegyik magasabb rendű homotópiacsoport topologikus invariáns abban az értelemben, hogy két topologikusan ekvivalens sokaságnak szükségképpen *ugyanaz* a homotópiacsoportja. Poincaré eltűnődött azon, vajon ezek az invariánsok alkalmasak-e bármely két eltérő sokaság megkülönböztetésére. Speciálisan azt kérdezte, hogy ha S -nek és a 3-dimenziós G^3 gömbnek azonosak a homotópiacsoportjai, akkor

igaz-e, hogy S és G^3 topologikusan ekvivalensek. Az „igen” válaszra tippelt, de ezt mindmáig nem sikerült bebizonyítani. A problémát mások később általánosították is. Az n -dimenziós Poincaré-sejtés úgy szól, hogy ha egy n -dimenziós sokaságnak ugyanazok a homotópiacsoportjai mint az n -dimenziós G^n gömbnek, akkor ez a sokaság topologikusan ekvivalens G^n -nel. A felületek osztályozására támaszkodva könnyű igazolni, hogy ez $n = 2$ -re igaz. Magasabb dimenzióban azonban nem ismeretes a sokaságok osztályozása, és így a bizonyítás keresése más jelleget kell hogy öltön.

Öt...

1961-ben Stephen Smale kidolgozott egy módszert, hogyan lehet egy sokaságot szépen feldarabolni ún. *fogantyúkra*. A fogantyúk ügyes mozgatásával $n \geq 5$ dimenzióra egy fontos eredményt igazolt, az ún. h -kobordizmus tételt. Ennek egyik következménye az 5- és magasabb dimenziós Poincaré-sejtés. Smale bizonyítása először valójában csak $n \geq 7$ -re működött. John Stallings tisztázta az $n = 6$ és Christopher Zeeman az $n = 5$ esetet. Ezután sikerült Smale-nek a módszereit úgy általánosítania, hogy már ezekkel az esetekkel is megbirkózzon. Egy lényeges alkotóelem, a „Whitney-trükk” azonban teljesen csődöt mond 3 vagy 4 dimenzióra, és úgy tűnt, hogy Smale bizonyítását nem lehet átvinni ezekre az esetekre. A kollektív bölcsesség részévé vált, hogy a topológia valahogy másmilyen a 3 és a 4 dimenzióban, amit elsősorban az látszott alátámasztani, hogy itt senki sem tudott bármi igazán hasznosat bizonyítani.

Négy...

1982-ben Michael Freedmannak sikerült megkerülnie azt a problémát, hogy a Whitney-trükk négy dimenzióban nem működik, és megmutatta, hogy a kollektív bölcsesség tévedett. Négy dimenzióban a sokaságok nagyon hasonlóan viselkednek, mint öt vagy magasabb dimenzióban. Speciálisan, a Poincaré-sejtés igaz a 4-dimenziós sokaságokra.

Három...

Eszerint a Poincaré-sejtésnek csak az az esete maradt hátra, amelyet Poincaré eredetileg megfogalmazott, vagyis a 3-dimenziós. Ez a szív-fájdítóan keskeny hézag onnan adódik, hogy a 2-dimenziós tér még túl kicsi ahhoz, hogy bármilyen jelentős bonyolultságnak helyet adjon, a 4- és magasabb dimenziós terek pedig már olyan nagyok, hogy a bonyolultságok szépen átrendezhetők. A három dimenzió alkotó feszültséget hordoz: elég nagy a megfelelő bonyolultsághoz, de túl szűk a könnyű egyszerűsítéshez. Egy olyan frontvonalra lenne szükség, amely a 3-dimenziós tér speciális tulajdonságait használja ki. De mik ezek a speciális tulajdonságok? A topológusok csatlakoztak a hajtóvadászathoz, tömegesen bújva a 3-dimenziós sokaságok bőrébe.

A hajlékonyság merevsége

A topologikus sokaságok nagyon hajlékony valamik, szabadon gyúrhatók és torzíthatók úgyszólván tetszés szerint, akár a nyers tészta. A hagyományos geometria, euklideszi és nemeuklideszi egyaránt, ennél sokkal merevebb, olyan mint a sült tészta. Van benne metrika, azaz egy távolságstruktúra, és a távolságok nem változtathatók. A nyújtás nem megengedett. Ezért okozott nagy meglepetést, amikor William Thurston az 1970-es évek közepén egy olyan programot hirdetett meg, amely a 3-dimenziós sokaságok tanulmányozását a geometriára vezeti vissza!

Az alapgondolat a felületekkel kapcsolatos múlt századbeli vizsgálatokig nyúlik vissza. A nemeuklideszi geometria klasszikus eredményeinek egyik összefoglalási lehetősége az, hogy a lépték megválasztásától eltekintve három alapvető geometria létezik, amelyek mindegyike megvalósítható egy állandó görbületű felület geometriájaként. A három eset a görbület alapján különböztethető meg:

- (1) az euklideszi sík görbülete 0;
- (2) a hiperbolikus sík görbülete -1 ;
- (3) az elliptikus sík vagy kétdimenziós gömb görbülete $+1$.

Kiderül, hogy minden topologikus felülettípus ezek közül a geometriák közül pontosan az egyikhez kapcsolódik, és abból megszerkeszthető. Speciálisan, minden felületen bevezethető olyan metrika, amelynél a

görbület állandó, éspedig 0, +1 vagy -1. Hogy mikor melyik, az egy topologikus invariánstól, az Euler-számtól függ.

Csak két olyan felület van, amelynek az Euler-száma pozitív: a gömb és a projektív sík. A gömbnek eleve +1 a görbülete, és mivel a projektív síkot úgy kapjuk a gömbből, hogy az átellenes pontokat azonosnak tekintjük, így ez a metrika átvihető a projektív síkra. (Valójában ez az elliptikus geometria szokásos modellje.) Ugyancsak két olyan felület van, amelynek nulla az Euler-száma: a tórusz és a Klein-kancsó. Korábban láttuk, hogyan nyerhetők ezek egy négyzet oldalainak az összeragasztásával. Namármost, a négyzet az euklideszi síkon él, tehát öröklí a sík nulla görbületű metrikáját, ennél fogva a tórusz és a Klein-kancsó is öröklí azt. Végül a negatív Euler-számú felületek családja végtelen. Ezeket mind megkaphatjuk úgy, hogy egy hiperbolikus síkon fekvő sokszög oldalait ragasztjuk össze! Emiatt rájuk az ott érvényes -1 görbületű metrika öröklődik.

Látva ezt a gyönyörű kapcsolatot a geometria és a topológia között, óhatatlanul felmerül a kérdés, vajon általánosítható-e mindez három dimenzióra is. Sajnos, számos nehézség lép fel. Ahogy Thurston írja: „A háromdimenziós sokaságok sokkal bonyolultabbak a felületeknél, és azt hiszem, őszintén be kell vallanunk, hogy a legutóbbi időkig nem sok alapunk volt azt feltételezni, hogy a 3- (vagy magasabb) dimenziós sokaságokra létezik egy hasonló elmélet — kivéve talán azt a tényt, hogy a 3-dimenziós sokaságok annyira szépek.” Ezután azonban hozzátesszi: „A helyzet mára megváltozott.”

Nyolc geometria

Az egyik komplikációt az okozza, hogy a két dimenzióban lehetséges három geometria helyett három dimenzióban a lehetőségek száma *nyolc*, amint azt Thurston 1983-ban bebizonyította. Ezek között természetesen ott található a 3-dimenziós euklideszi tér, hiperbolikus tér és elliptikus tér (vagy gömb), azonban van még további öt. Annak az igazolása, hogy csak ez a nyolc fordulhat elő, a csoportelméleten alapuló hosszas vizsgálatot igényel. Ez Klein erlangeni programja után nem okozhat meglepetést: elvégre a geometria *valójában* csoportelmélet! A bizonyításban a legkülönbébb jól ismert tételek vendégszerepelnek, köztük a tizenhét tapétacsoport osztályozása is.

Ahogy a felületek metrizálhatók a háromféle kétdimenziós geometria valamelyikében levő modelljük alapján, ugyanúgy *egyes* háromdimenziós sokaságokon is megadható metrika a fenti nyolc geometria valamelyikén felvett modelljük segítségével. Minden 3-dimenziós sokaságnak legfeljebb az egyik geometriatípus felel meg. Vannak azonban olyan sokaságok is, amelyeknek egyáltalán nincs ilyen geometriai szerkezetük.

Ezt az akadályt Thurston programja szerint úgy tudjuk kikerülni, ha a sokaságot kis részekre bontjuk, és mindegyik darabkát geometriai struktúrával látjuk el. A sejtés az, hogy ezt csak egyféleképpen lehet megtenni. A sokaságot először daraboljuk fel prímsokaságokra (ahhoz hasonlóan, ahogy a csomókat a $\#$ kötélösszeg segítségével prímcsomókra bontottuk), majd nyissuk szét speciálisan választott tóruszok mentén. Sok minden szól a sejtés mellett, ellene pedig semmi sem. Sőt, a nyolc geometria közül hétre a problémát már teljesen megoldották.

A hiperbolikus főnix

Így már csak egyetlen eset maradt hátra, amely történetesen a 3-dimenziós hiperbolikus geometria, ez azonban keményebb diónak tűnik. Annak kell lennie, mert a 3-dimenziós Poincaré-sejtés mellékes aprósággá törpül, ha Thurston programja tényleg végrehajtható. A program azért izgalmas, mert a problémát egy sokkal tágabb keretbe helyezi, jelentősen megnövelve ezzel a súlyát. A csomók és összefüzesek korábbi elmélete azért fontos a 3-dimenziós sokaságok szempontjából, mert egy csomó komplementuma (vagyis azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek *nincsenek* rajta a csomón) egy 3-dimenziós sokaságot alkot. A csomókomplementumok hiperbolikus geometriája szép és gazdag terület.

Thurston programjának egyik mellékterméke a Smith-sejtés bizonyítása. A sejtés, amelyet Paul Smith az 1940-es években fogalmazott meg, a 3-dimenziós gömbnek olyan önmagába történő transzformációra vonatkozik, amelyek *periodikusak* abban az értelemben, hogy ha egy ilyet egymás után alkalmas számszor végrehajtunk, akkor végül minden az eredeti helyére kerül vissza. Egyes pontok egyáltalán nem mozdulnak el, és a sejtés azt mondja ki, hogy ezeknek a *fixpontoknak* a halmaza (amelyről tudjuk, hogy egy görbe) nem alkothat csomót. Az 1978-ban elkészült teljes bizonyítás számos kutató eredményeit összeg-

zi, köztük van Thurston, Hyman Bass, William H. Meeks III. és Shing-Tung Yau.

A programnak köszönhető, hogy hirtelen ismét nagy érdeklődés támadt a hiperbolikus geometria iránt, amelyet korábban már meglehetősen letarolt területnek tartottak. Tulajdonképpen sohasem fektettek jelentős energiát a 3-dimenziós esetbe, azonban csak most látszik, hogy ez elég érdekes és a fősodor szempontjából elég fontos ahhoz, hogy érdemes vele komolyan foglalkozni. A matematikai kutatás igényeinek változásával „halottnak” tűnő tárgyak saját hamvaikból fönixmadárként újjászülethetnek.

Helyesbítés

A mai matematika néha szédületes iramot diktál. A fentieket 1985 novemberében írtam, a 3-dimenziós Poincaré-sejtésről alkotott akkori kollektív bölcsesség szellemében. 1986 februárjában Eduardo Rêgo és Colin Rourke bejelentette, hogy bebizonyították a 3-dimenziós Poincaré-sejtést. A bizonyítás *nem* támaszkodik Thurston programjára! Ehelyett két klasszikus módszerrel, fogantyúelmélettel és bemetszéssel dolgozik. Ez semmiképpen sem befolyásolja Thurston programjának jelentőségét, amely sokkal magasabb célokat tűzött ki, mindenesetre ismét eszünkbe juttatja, hogy a matematika tartogat még néhány meglepetést a varázsdobozában. A bizonyítást alaposan ellenőrizték, és helyesnek tűnik, bár némi időbe még beletelik, amíg ez teljesen biztosra vehető. Ahogy Hein egy másik bökverse mondja:

A mélyét egy probléma azáltal mutatja,
Hogy keményen visszavág annak, ki kutatja.

Háromféle ragasztó

Az a korábbi megjegyzésem, hogy a 4-dimenziós sokaságok nagyon hasonlítanak magasabb dimenziós unokatestvéreikhez, nem teljesen helytálló. Attól függ, milyen márkájú sokaságot veszünk. Noha ezt a tényt eddig eltitkoltam, háromféle sokaság létezik: szakaszonként lineáris, topologikus és sima. Eddig ez nem játszott szerepet, most azonban minden idők egyik legszenzációsabb topológiai felfedezéséről szeretnék beszélni, ahol éppen ez a különbség a dolog lényege.

Amint korábban már említettem, egy felületet képzeletben sok kis részre vághatunk, amelyek mindegyike egy topologikus transzformációval „kisimítható”, hogy úgy nézzen ki, mint a sík egy darabja. Az eredeti felület ezeknek a részeknek az átfedései összeillesztésével építhető fel. Sőt, a matematikusok éppen így definiálnak egy absztrakt felületet: sok kis síkdarabka, az átfedéseik mentén „összeragasztva”. Hasonló megközelítést alkalmazunk n dimenzióban is, a részeket azonban most az n -dimenziós euklideszi térből vesszük. Az összeragasztás módja határozza meg a felület típusát, és — hogy úgy mondjam — háromféle fontos ragasztó létezik. A valódi ragasztó egy objektum minden egyes pontját a másik egy-egy pontjához illeszti. A matematikai ragasztó az egyiken minden egyes ponthoz csak kijelöli a másiknak a megfelelő pontját (amelyikhez a valódi ragasztó odaerősítené), vagyis az átfedő részek közötti egy-egyértelmű megfeleltetéssel van meghatározva. A ragasztó fajtáját az dönti el, milyen tulajdonságokat tart meg ez a megfeleltetés.

Ha topologikus ragasztót használunk, akkor csak a folytonossági tulajdonságok őrződnek meg. Az egyik darab egymáshoz közeli pontjait a másikon is egymáshoz közeli pontokhoz kell illeszteni, azonban a darabokat tetszés szerint hajlíthatjuk. Ha sima ragasztóval dolgozunk, akkor az egyik darab sima görbéit a másikon is sima görbékhez kell erősítenünk. Az egyikről egy éles sarkot például nem ragaszthatunk hozzá a másikon egy egyenesszakaszhhoz. Riemann a „sokaság” fogalmánál erre az értelmezésre gondolt. Végül, ha Poincaré nyomdokaiba lépünk és szakaszonként lineáris ragasztót használunk, akkor az egyiken fekvő egyeneseket a másikon is egyenesekhez kell illesztenünk. Egy szabálytalan térszemlést topologikus struktúrájú gömböt, egy tojás sima struktúrájú gömböt, egy darab sajt pedig szakaszonként lineáris struktúrájú gömböt alkot. A megkülönböztetés technikai jellegű (lényegében azt szabja meg, hogy ízlésünknek megfelelően a matematikai szerszámkészletből mely eszközöket vehetünk igénybe), a technikai részletek azonban most fontosak, és magasabb dimenzióban óriási különbséget jelentenek. Lehet, hogy egy tétel szakaszonként lineáris sokaságokra igaz, ám sima sokaságokra nem stb. Fontos megértenünk ezek kapcsolatait, mert egy tételt esetleg könnyebben tudunk igazolni (mondjuk) a szakaszonként lineáris esetre, és onnan egy szokásos trükkkel térhetünk át a topologikus vagy a sima sokaságokra. (Például Henry Whitehead az 1930-as években felfedezte, hogyan látható el min-

den sima sokaság szakaszonként lineáris struktúrával, azaz hogyan kell egy tojáást addig hajlítgatni, amíg egy darab sajt nem lesz belőle. Az 1950-es években azután bebizonyították, hogy minden 3-dimenziós topologikus sokasághoz *egyetlen* sima struktúra tartozik, vagyis bármely téstamasszáat egy megfelelő tojásalakra lehet kisimítani. A „tojáson” természetesen lehetnek fogantyúk, lyukak, csomók stb., csak a simaság számít.) A matematikai hadviselésben az a jó stratégia, ha olyan csatamezőt választunk, amely a legjobban illik a fegyverzetünkhöz. Az 1960-as évek kutatásainak jelentős része ezek köré az összefüggések köré csoportosult, és a csúcspontot Robion Kirby és Larry Siebenmann eredményei jelentették, amelyek az 5- és magasabb dimenziós esetre mindent tisztáztak — nagyon szépen, de egy vaskos meglepetéssel.

Négydimenziós hamisítvány

Teljesen alapvető kérdés egy adott sima sokaságon a sima struktúrának az egyértelmősége. Másképp fogalmazva, egy adott téren csak egyféleképpen lehet-e „simaságot” definiálni? Eredetileg mindenki az „igen” válaszra tippelt, azonban Milnor egzotikus 7-dimenziós gömbjei (amelyeket az 1. fejezetben említettünk) a „nem”-et igazolták. A 7-dimenziós gömbön valójában pontosan 28 különféle sima struktúra létezik. Ezzel együtt még mindig abban reménykedtek, hogy a jó öreg n -dimenziós *euklideszi* térben csak egyféle sima struktúra található, az a standard változat, amelyet az analízisben használunk. Valójában ez a 4 kivételével valamennyi n értékre ismert is volt. Ám körülbelül ugyanabban az időben, amikor Freedman azt igazolta, hogy a 4-dimenziós tér a legtöbb szempontból nagyon hasonló az 5- és magasabb dimenziósokhoz, Simon Donaldson 1983-ban drámai felfedezést tett: nemstandard sima struktúrát talált a 4-dimenziós térben.

Bizonyítása nehéz és indirekt, alaposan kihasználja azokat az új gondolatokat, amelyeket topológusok és matematikai fizikusok sütöttek ki a *Yang–Mills-féle mértékterek* kapcsolatban (lásd a 17. fejezetet). Ezek a terek eredetileg az elemi részecskék kvantumelméletének a vizsgálatára születtek, nem pedig arra, hogy az elméleti topológia homályos kérdéseit tisztázzák! Másfelől, a szóban forgó topológiai ötleteket sem az elemi részecskék tanulmányozásához találták ki. Szinte csodának tekinthető, hogy két ilyen távoli szemlélet ennyire szépen és szorosan ötvöződjön. A sors iróniája, hogy Freedman számos gondo-

lata is lényeges szerepet játszik a bizonyításban, a kiindulópont pedig egy különös csoportelméleti egybeesés. Az n -dimenziós tér összes forgatásainak Lie-csoportja mindig egyszerű, kivéve ha $n = 4$. Ekkor viszont a 3-dimenziós tér forgáscsoportjának két példányára bomlik fel. Hogy egy ilyen egybeesés ekkora jelentőséget hordozzon magában, az az erlangeni program újabb diadala.

Azt mindenesetre már tudjuk, hogy a 4-dimenziós tér a többi dimenzióval összehasonlítva meglehetősen egyedi vonásokat mutat. Sőt, a sima struktúra nemcsak hogy nem egyértelmű, hanem *rendkívül* nem egyértelmű. Milnor 7-dimenziós gömbjén csak véges sok sima struktúra lehetséges. A 4-dimenziós téren viszont *megszámlálhatatlanul végtelen* sok különböző sima struktúra létezik. Elképzelhető azonban, hogy a helyzet azért nem annyira rossz, mint amilyennek látszik. A struktúrák között ugyanis található egy „univerzális”, amely valamilyen értelemben az összes többit tartalmazza. Lehet, hogy a probléma végül úgy oldódik meg, hogy mindent természetesnek és szükségszerűnek fogunk érezni, egyelőre azonban sok a rejtély. Jó lenne többek között arra az alapvető kérdésre választ kapni, hogyan is *néznek ki* a 4-dimenziós térnek ezek az egzotikus sima struktúrái.

SZÍNES TINTÁKRÓL ÁLMODOM

Ha egy folyamat több ellentmondást tartalmaz, akkor egyikük szükségképpen a fő ellentmondás, amelynek vezető, döntő szerep jut, míg a többiek csak másodrendű, alárendelt szerepet játszanak. Ezért, ha olyan bonyolult folyamatot vizsgálunk, amelyben kettő vagy több ellentmondás van, akkor minden erőnket a fő ellentmondás megkeresésére kell fordítanunk. Ha ezt megtaláltuk, minden problémát könnyen meg tudunk már oldani.

Mao Ce-tung

1852-ben Francis Guthrie, a londoni University College végzős hallgatója Frederick nevű öccséhez írott levelében egy egyszerű kis rejtvényt is megemlít, amely akkor merült fel benne, amikor Anglia megyetérképét próbálta kiszínezni. „Kiszínezhető-e a síkra rajzolt bármely térkép négy (vagy kevesebb) színnel úgy, hogy a közös határvonallal rendelkező tartományok ne legyenek azonos színűek?”

A „térkép” szót itt földrajzi értelemben használjuk: a síkot véges sok olyan tartományra osztjuk fel, amelyeket görbék határolnak. A „közös határvonal” valóban vonalat jelent, és nem csak egy izolált pontot, amely mentén a tartományok találkoznak. A problémát Frederick Guthrie nem tudta megoldani, ezért megkérdezte professzorát, Augustus De Morgant, a kiváló matematikust. 1852. október 23-án De Morgan egy levélben bevallotta a még kiválóbb William Rowan Hamiltonnak, hogy a kérdéssel ő sem boldogult. Ez a legkorábbi írásos utalás a *Négyszínsejtéssel* kapcsolatban, amely mint a matematika legkönnyebben kimondható, de legnehezebben megoldható nyitott problémája vált híressé. Megoldatlan maradt egészen 1976-ig. Stílszerűen a probléma története is meglehetősen színes, és az elővigyázatlanokat rávasz csapdákba csalja. Hermann Minkowski, a tizenkilencedik század egyik vezető egyénisége, egyszer azt mondta diákjainak, hogy megoldás csak azért nem született, mert csupa harmadrendű matematikus próbálkozott vele. „Azt hiszem, be tudom bizonyítani” — jelentette

ki. Valamivel később félénken így szabadkozott: „Istent magamra haragítottam az önhiittséggemmel; az én bizonyításom is hibás.” Amint Thomas Saaty és Paul Kainen találóan jegyzik meg: „A négyszínsejtés egyik meglepő vonása a sok közül, hogy azok az eredmények, amelyek a témakör fejlődéséhez leginkább hozzájárultak, eredetileg gyakran abban a hiszemben születtek, hogy a probléma megoldását szolgáltatják.”

A végül pozitívnak adódó válasz nem mindennapi, legalábbis technológiai szempontból. A bizonyítás azon múlik, hogy mintegy 2000 speciális térkép egy adott módon viselkedik. Ezeknek az eseteknek az ellenőrzése iszonyú fárasztó, és egy gyors számítógépen több ezer óráig tart. A teljes bizonyítás leírva olyan hosszú lenne, hogy egy emberélet sem lenne elegendő az elolvasásához, nemhogy az ellenőrzéséhez. Egy ilyen monstrum *valóban* bizonyításnak tekinthető? A vélemények megoszlanak. Létezik-e egyszerűbb bizonyítás? Senki sem tudja, noha azt *megmutatták*, hogy egy lényegesen rövidebb bizonyítás nem alapulhat hasonló elven.

Hírneve ellenére a négyszínsejtés nem igazán tartozik a matematika sodorvonalába: nem látszik, hogy megoldása új nagyfontosságú területet nyitna meg. Inkább egy rendcsináló agygyakorlatnak tekinthető. Megoldása azonban hozott néhány új gondolatot, kevés szakismerettel is jól követhető, és néhány izgalmas filozófiai kérdést vet fel, amelyek jól megvilágítják, hogyan is vélekednek a matematikusok a tárgyukról. A matematika problémáinak bemutatásából nem hiányozhat ennek a témakörnek a megemlítése.

Tévedések vígjátéka

De Morgan annyit mindenesetre igazolt, hogy öt országot nem lehet úgy elhelyezni, hogy bármely kettő szomszédos legyen; ez *valószínűsíti*, hogy négynél több színre nincs szükség, azonban nem tekinthető bizonyításnak, ugyanis a 4-színezhetőségnek lehetnek esetleg más „nem helyi” akadályai, például egymáshoz különleges módon kapcsolódó tartományok bonyolult láncai. Nyomtatásban a problémára történő első utalás 1878-ból származik, amikor Cayley a *Londoni Matematikai Társulat Közleményeiben* egy levelet jelentetett meg, aziránt érdeklődve, hogy a problémát megoldották-e már. 1879-ben Arthur Kempe ügyvéd s egyben a Társulat tagja közölt egy bizonyítást, és a kérdés látszólag elintéződött. Apró érdekesség volt, semmi több.

A bizonyítás az ún. *Kempe-láncok* szellemes alkalmazásán alapult. A konkrétság kedvéért tegyük fel, hogy a sárga, a barna, a szürke és a zöld színeket használjuk. Válasszuk ki mondjuk a sárga-barna párt. Tegyük fel, hogy a térkép egy részét már sikerült kiszíneznünk, és gondoljunk erre mint egy szürkészöld „óceánban” úszó sárgásbarna „szigetcsoportra”. (A szigeteken lehetnek tavak, és a tavakban újabb szigetek.) Vegyük észre, hogy a sárga és a barna színt bármely szigeten belül egymás közt felcserélhetjük anélkül, hogy tiltott szomszédság keletkezne; minden belső határvonal ugyanis továbbra is sárga-barna marad, a külső határvonalak pedig vagy egyáltalán nem változnak, vagy pedig a „parton” fekszenek, szürkészöld tengerrel az egyik oldalon és sárgásbarna szárazfölddel a másikon. Ezt a mókát tetszőleges színpárral el lehet játszani. Mindegyik sziget egy-egy Kempe-lánc; a térképet addig színezzük, amíg el nem akadunk, és akkor megfelelően választott Kempe-láncokban színeket cserélünk, így tovább tudunk lépni és az eljárást folytatjuk.

Hupikék törpikék

Formálisabban, egy szabvány matematikai trükkhöz, az „indirekt bizonyításhoz” folyamodunk. Ha a négyszíntétel *hamis*, akkor léteznek olyan térképek, amelyekhez kell egy ötödik szín, mondjuk a hupikék. Ha egyszer ilyen „rossz” térképek léteznek, akkor ezekből mindenféle nagyobb térképeket is készíthetünk, amelyek színezését ismét csak nem úszhatjuk meg hupikék nélkül. Mivel a rossz térképekből nagyobbak fabrikálásának nincs sok teteje, ezért az ellenkező utat választjuk, és vesszük a legkisebb rossz térképeket. Ezek a *hupikék törpikék* csak öt színnel színezhetőek, bármely *kisebb* térkép azonban már megoldható négygyel is. Ennek az információnak a felhasználásával megpróbáljuk behatárolni a hupikék törpikék szerkezetét, majd ennek alapján tovább szűkítjük a kört, és így tovább, míg végül kiderül, hogy ilyen állat nincs is. Ha törpikében nincs hupikék, akkor más méretben sincs, vagyis a tétel igaz.

Kempe ötlete az volt, hogy egy tetszőleges hupikék törpikét véve, annak egy alkalmas tartományát egyetlen pontra zsugorította. Az így kapott térkép kevesebb tartományból áll, tehát 4-színezhető. Ha az összezsugorított tartományt visszaállítjuk, akkor a színezése már gondot okozhat, mert lehet, hogy olyan tartományok között fekszik,

amelyekhez már mind a négy színt felhasználtuk. Ha a tartomány háromszög (csak három szomszédja van), akkor nincs probléma. Ha négyszög, akkor egy Kempe-láncbeli csere az egyik szomszédos színt meg tudja változtatni, és így ismét készen vagyunk. Kempe szerint ötszög esetében is hasonlóan okoskodhatunk. Végül sikerült bebizonyítania, hogy bármely térkép szükségképpen tartalmaz háromszöget, négyszöget vagy ötszöget.

A négyszínsejtés azonban nem adta meg magát ilyen könnyen. 1890-ben Percy Heawood felfedezett egy hibát Kempének az ötszögre vonatkozó gondolatmenetében. A következő évben P. J. Tait egy újabb bizonyítást közölt, de J. Petersen hamarosan abban is hibát talált. Heawood észrevette, hogy Kempe módszerével kihozható, hogy *öt* szín mindig elég. (Az eggyel több szín segítségével az ötszög már könnyebben visszaállítható.) Heawood a sík helyett más felületeken is megvizsgálta a hasonló problémát, és a szükséges színek számát annak függvényében becsülte meg, hogy a felületen hány lyuk található. A *Heawood-sejtés* azt mondta ki, hogy ez a szám a lehető legjobb korlát, és ezt 1968-ban G. Ringel és E. Youngs (szép és szellemes kombinatorikai ötletek felhasználásával) bebizonyították. Két kivétel azért akadt. Az egyik a gömb (vagy sík) volt, ahol a Heawood-féle 4-es korlát továbbra is sejtés maradt, a másik pedig a Klein-kancsó, ahol a Heawood-korlát 7, a helyes érték viszont 6. Vagyis 1968-ra minden felületre ismerték a pontos választ, *kivéve* a síkot! Ez azt a lehetőleg elkerülendő irányzatot illusztrálja, amikor a matematikában egy problémát sokirányban általánosítunk anélkül, hogy az eredetit sikerülne megoldani. Az általánosítások természetesen elvezethetnek, sőt gyakran el is vezetnek egy olyan ötlethez, amely mindent megold. Ez alkalommal nem így történt.

Zsugorítás és helyreállítás

Térjünk vissza az eredeti négyszínsejtéshez. 1922-ben Philip Franklin megmutatta, hogy minden olyan térkép 4-színezhető, amelyen 26 vagy kevesebb tartomány szerepel. Módszere a *redukálható alakzat* (*reducibilis konfiguráció*) bevezetésével lefektette annak a stratégiának az alapjait, amely végül is elvezetett a megoldáshoz. Alakzatnak a térkép bizonyos tartományainak összefüggő halmazát nevezzük, beleértve azt az információt is, hogy az egyes tartományoknak hány külső szomszéd-

juk van. A redukálhatóság jelentését egy példán keresztül világítjuk meg. Tegyük fel, hogy egy térkép tartalmaz háromszöget. Zsugorítjuk ezt egy ponttá. Tegyük fel, hogy az így adódó térkép, amelyen eggyel kevesebb tartomány van, 4-színezhető. Ekkor az eredeti térkép is ilyen. A háromszög csak három tartománnyal érintkezik, és így amikor a térképbe visszaillesztjük, a fennmaradó szabad színnel kiszínezhető. Általában, egy alakzat akkor redukálható, ha a 4-színezhetőséget az öt tartalmazó bármelyik térképre be tudjuk bizonyítani, feltéve, hogy a kisebb térképek már mind 4-színezhetőek. (A „zsugorítás-színezés-helyreállítás-kiterjesztés” stratégia sokféleképpen variálható, de a redukálhatóság igazolására ez az alapvető út.) Hasonlóan láthatjuk be, hogy a négyszögek is redukálhatók.

Hupikék törpikék nem tartalmazhatnak redukálható alakzatot. Tegyük fel ugyanis, hogy valamelyikük mégis tartalmazna. A redukálhatóságból következik, hogy ha egy kisebb térkép 4-színezhető, akkor az eredeti is ilyen. A minimalitás azonban azt jelenti, hogy a kisebb térkép tényleg 4-színezhető, ekkor viszont a törpike is, aki így nem lenne hupikék. Annyit kell tehát csak megmutatnunk, hogy a hupikék törpikék mindegyike szükségképpen tartalmaz redukálható alakzatot, ezzel ugyanis sikerülne őket teljesen a mesébe száműznünk. A legegyszerűbben úgy járhatunk el, ha redukálható alakzatoknak egy olyan halmazát adjuk meg, amely abban az értelemben *elkerülhetetlen*, hogy bármely térkép kell hogy ennek a halmaznak valamelyik alakzatát tartalmazza. Kempe pontosan ezt próbálta csinálni. Helyesen belátta, hogy a {háromszög, négyszög, ötszög} halmaz elkerülhetetlen. Az ötszög redukálhatóságának a bizonyításában azonban hibát követett el. Ezzel együtt kezd kirajzolódni egy alapvető bizonyítási stratégia: keressünk olyan elkerülhetetlen halmazt, amely csupa redukálható alakzattól áll. Ez a lista Kempéénél mindenképpen hosszabb lesz, mert az ötszöget más alakzatokkal kell helyettesíteni.

Mi sül ki a töltésből?

Heinrich Heesch volt az első matematikus, aki 1950-ben nyilvánosan hangot adott annak a véleményének, hogy a négyszínsejtést egy redukálható alakzatokból álló elkerülhetetlen halmaz megadásával be lehetne bizonyítani. Becslése szerint ehhez mintegy 10000 alakzatra lenne szükség, amelyek egyike sem túl nagy méretű. Heesch a redukálható-

ság ellenőrzésére Karl Dürre nevű tanítványával közösen kidolgozott egy számítógépes programot. Sem ez, sem pedig a későbbi rafináltabb változatok nem működtek üzembiztosan. A sikeres teszt valóban garantálta az alakzat redukálhatóságát, ellenkező esetben viszont a redukálhatóság kérdése nyitva maradt.

Heesch az elkerülhetetlenség igazolására is kidolgozott egy módszert, mégpedig egy távoli elektromos analógia alapján. Tegyük fel, hogy mindegyik tartományt elektromosan feltöltjük, és a töltések a szomszédos tartományok között különféle szabályok szerint mozoghatnak. Kiköthetjük például, hogy egy ötszög töltése egyenlő részekre osztható és bármely olyan szomszédra átvihető, amely nem háromszög, négyszög vagy ötszög. A töltéseloszlások általános tulajdonságainak az elemzésével megmutatható, hogy bizonyos alakzatok mindenképpen fel kell hogy lépjenek — egyébként a töltés „elszivárogná”. Bonyolultabb receptekkel elkerülhetetlen alakzatok bonyolultabb rendszereihez jutunk.

Ember és gép

1970-ben Wolfgang Haken továbbfejlesztette Heesch kisüléses módszerét, és komolyan kezdett gondolkodni a négyszínsejtés megoldásán. A fő nehézséget az elkerülhetetlen halmazban levő alakzatok mérete okozta. Egy alakzat *gyűrűmérete* az öt körülvevő tartományok száma. Okkal kellett azt feltételezni, hogy szükség lehet 18-as vagy még nagyobb gyűrűméretre. A redukálhatósági tesztek amellett, hogy kétes megbízhatóságúak, még a gyűrűmérettel együtt exponenciálisan növekednek is; a környező gyűrű minden újabb eleme mintegy négyszeres szorzót jelent. Amíg egy 11-gyűrűs alakzat még kezelhető, egy 14-gyűrűsnél már 26 óra számolás adódik a várhatóan szükséges extrák nélkül is. Ha ezt még sikerülne is átlagosan félórásra leszorítani, a legtöbb 18-gyűrűs alakzat legalább 100 órát igényel, és a számításokhoz több memória kell, mint amennyi akár a legnagyobb komputerbe beleférne. Ha egy elkerülhetetlen halmaz tartományainak a számát 10000-re becsüljük, az egész számolás 100 évig tartana. És ha a végén az elkerülhetetlen halmazból csak egyetlen alakzatról is kiderül, hogy nem redukálható, akkor az egészet eldobhatjuk! A komputer a saját farkát kergeti, és csak akkor nyer, ha azt valóban megfogta. Ezért 1972 és

1974 között Haken, Kenneth Appellel együtt interaktív párbeszédbe kezdett a géppel, hogy az esélyeken javítani próbáljon.

Számítógépes programjuk első futása egy sor hasznos információval szolgált. Ezek némelyike pozitív volt: a várható gyűrűméret 16-ra csökkent, és az elkerülhetetlen halmazok várható mérete is kisebbnek bizonyult. Ugyanakkor a komputer-output mennyisége kezelhetetlenül nagyra nőtt, és a módszerben is hibák mutatkoztak. Ennek alapján módosították a programot és újra szerencsét próbáltak. Most már finomabb problémák jelentkeztek, amelyeket ismét kijavítottak. Mikor már vagy hat hónapja folyt ez a párbeszéd, Appel és Haken kezdtek meggyőződni róla, hogy az elkerülhetetlenség bizonyítására adott módszerüknek jó esélye van a sikerre. Ennek bizonyítása egy újabb évet vett igénybe. 1975-ben ismét módosították a programot. Erről így írnak:

Ezen a ponton a program egyre több meglepetéssel szolgált. Korábban a meggondolásait kézzel ellenőriztük, és így mindig meg tudtuk jósolni, milyen irányt vesz egy tetszőleges helyzetben; most azonban úgy kezdett viselkedni mint egy sakkozógép. Összetett stratégiákat dolgozott ki azoknak a trükköknek az alapján, amelyekre „megtanítottuk”, és ezek a megközelítések gyakran sokkal ügyesebbnek bizonyultak, mint amilyenekkel mi próbálkoztunk volna. Azzal kapcsolatban, hogy miképp haladjunk tovább, ő kezdett el minket olyan dolgokra megtanítani, amilyenekről nem is álmodtunk. Valamilyen értelemben bizonyos vonatkozásokban túlszárnyalta az alkotóit a feladatnak mind az „intellektuális”, mind pedig a mechanikus részét illetően.

A célegyenes

1975-re reális esély nyílt arra, hogy a módszer gyakorlatilag is keresztülvihető legyen, és a kutatóprogram a kísérleti fázisból kilépve döntő rohamra lendült. Első lépésként a redukálhatóság igazolására született hatékony program, amelyet assembler kódban írtak az Illinois-i Egyetem IBM 360-as gépére. A programozás jelentős része John Koch számítógéptudós érdeme. Az elkerülhetetlenség bizonyítására szolgáló kisülési eljárás addigra már annyira átalakult, hogy a program újraírása helyett elhatározták, hogy a munkának ezt a részét kézi erővel végzik el. Az eljárást egy lényeges ponton továbbfejlesztette Jean Mayer, aki a francia irodalom professzora volt Montpellier-ben, de

egész életre szóló érdeklődést tanúsított a négyszínsejtés iránt. A várható gyűrűméret így 14-re csökkent. 1976 januárjában megkezdődött az elkerülhetetlen halmaz konstrukciója. Ez is interaktív módon történt, az ötleteket és az eredményeket a gép segítségével ellenőrizték. 1976 júniusára a munka elkészült. A komputer rendben jelentette, hogy Appel és Haken elkerülhetetlen halmazában minden alakzat redukálható. A sárga, barna, szürke és zöld már elég bármely síkbeli térkép kiszínezéséhez; a hupikék örökre ottmaradhat a mesében.

Ez tényleg bizonyítás?

Mennyire tekinthető bizonyításnak egy olyan okoskodás, amely óriási mennyiségű, ember által ellenőrizhetetlen számoláson alapul? Stephen Tymoczko filozófus szerint „ha a négyszíntételt tételnek fogadjuk el, akkor ezzel azt is aláírtuk, hogy a 'tétel' szó jelentését át kell értékelnünk, pontosabban az ehhez tartozó 'bizonyítás' szó értelmét meg kell változtatnunk.” Érdekes módon ezzel kevés matematikus ért egyet. Annak ellenére van ez így, hogy a gépi számolások helyessége tulajdonképpen hit kérdése; ez nem olyasmi, amit legalább elvben, bárki ellenőrizhetne.

Léteznek olyan matematikai bizonyítások, amelyek annyira hosszúak és bonyolultak, hogy még ha valaki egy évtizeden keresztül is tanulmányozza őket, a teljes hibátlanságukért nem tehetné tűzbe a kezét. A véges egyszerű csoportok osztályozása például legalább 10000 oldalt tesz ki, legalább száz ember munkájának az eredménye, és csak magasan képzett szakember által követhető. A matematikusok azonban általában meg vannak győződve arról, hogy a négyszíntétel bizonyítása helyes. Ennek az az oka, hogy a stratégia értelmes, a részletek összeillenek, senki sem talált lényeges hibát, és a munkát végzők véleménye ugyanúgy hitelt érdemel, mint bárki másé. Az emberek természetéből adódik, hogy hibáznak. A matematikában azonban a komoly hibák előbb vagy utóbb kiderülnek, mert a tárgy különböző területein kapott eredmények állandóan szembesülnek egymással. Mintegy tíz évvel ezelőtt két topológus kutatócsoport, egy japán és egy amerikai, egy fontos kérdésben homlokegyenest ellentétes válaszra jutott. Eltartott egy darabig, mire rájöttek, melyik csoport tévedett, és az amerikaiakat nagyon bosszantotta, hogy a dolog senkit sem izgatott túlságosan; végül azonban meglett a hiba.

A matematikusok igazából a *megvilágító* bizonyításokat szeretik. Ez nem annyira logikai vagy filozófiai kategória, hanem inkább ízlés kérdése. A bizonyítás hallatán feltehetőleg sok matematikus fejében is olyasmi fordult meg, amiről Davis és Hersh¹ alábbi megjegyzése szól:

Az első reakcióm az volt: „Csodálatos! Hogyan csinálták?” Valami briliáns új meglátást vártam, egy bizonyítást, amelynek magva egy olyan ötlet, amelynek szépsége besugározza az egész napomat. De amikor megkaptam a választ, hogy „A megoldás során esetek ezreire bontották szét a feladatot, majd mindegyiket egymás után lefuttatták egy számítógépen” — csalódottnak éreztem magam. Ezután az lett a véleményem, hogy „ha ezt lehet így igazolni, akkor végül is nem volt igazi probléma”.

Az Appel-Haken-féle bizonyításban nincs semmi olyan, ami kevésbé lenne *meggyőző*, mint mondjuk az egyszerű csoportok osztályozása, vagy az a naponta publikált temérdek tétel, amelyek kívül esnek egy adott matematikus szűk szakterületén, és amelyeket soha nem fog ellenőrizni. Továbbá egy gép sokkal kisebb valószínűséggel téved, mint egy ember. Appel és Haken bizonyítási stratégiája logikailag értelmes és elég szabványos ahhoz, hogy nem várható benne nagy bukfenc, az elkerülhetetlen halmazt egyébként is kézi erővel gyártották, és nincs okunk kételkedni a redukálhatóságot ellenőrző program helyességében. Véletlen „rajtaütésszerű tesztek” és újabban a számolások más programok segítségével történt ellenőrzései semmi gyanúsat nem találtak. Nem ismerek olyan matematikust, aki ma megkérdőjelezné a bizonyítás helyességét.

Davis és Hersh még a következő megjegyzést teszik:

A filozófus számára egészen más az a világ, ahol a bizonyítás a számítógép megbízhatóságától függ, mint az, ahol csak az emberi értelemről. A matematikus számára azonban a tévedésének lehetősége annyira mindennapos tény, hogy örömmel fogadja a számítógépet, amely megbízhatóbban számol, mint amennyire ő maga képes volna.

Az utolsó szó legyen talán Hakené, aki egy újságnak így nyilatkozott:

¹ Az alábbi három apró betűs rész Davis és Hersh „A matematika élménye” c. könyvéből való, fordította Székely J. Gábor.

Bárki, bárhol a levezetésben kitöltheti a részleteket és ellenőrizheti őket. Az a tény, hogy a számítógép több részleten tud végigfutni néhány óra alatt, mint amennyit egy ember egyáltalán remélhetne, hogy megtehet akár egész életében, nem változtat a matematikai bizonyítás alapkoncepcióján. Ami változott, az nem a matematika elmélete, hanem a gyakorlata.

FELTESSZÜK AZ I-RE A PONTOT

Magasztosan nyilvánul meg az Isteni Szellem az analízisnek ebben a csodájában, ebben az ideális világból érkező égi jelben, ebben a lét és nemlét között lebegő kettősségben, amelyet a negatív egységből vont képzetes gyöknek nevezünk.

Gottfried Leibniz

A harmad- és negyedfokú egyenlet megoldásával felékesítve az algebra a tizenhatodik században új virágzásnak indult. És mégis, senki sem tudta igazán, mik is a *számok* valójában. A negatív számok Európában még mindig gondot okoztak, noha a hindu Brahmagupta már i. sz. 628-ban jól tudta őket kezelni. Az 1600-as évek közepén Antoine Arnauld a $-1 : 1 = 1 : -1$ aránypárt képtelenségnek tartotta, mert „hogyan képzelhető el, hogy egy kisebb úgy aránylik egy nagyobbhoz, mint egy nagyobb egy kisebbhez?” A szavakkal történő érvelés veszélyeit a matematikában nehezen lehetne ennél jobban illusztrálni, ennek ellenére 1712-ben Leibniz úgy látja, hogy Arnauld-nak valamelyest igaza van. Ugyanakkor Thomas Harriot (1560–1621) már dolgozott negatív számokkal, sőt Raffaello Bombelli (1526–73) világos definíciókat is adott. Simon Stevin és Albert Girard a negatív számokat a pozitívakkal egyenrangúan kezelte.

A negatív számok *négyzetgyöke*it azonban Brahmagupta sem tudta lenyelni, és így elszabadult a pokol, amikor Morris Kline megfogalmazásában „az európaiak anélkül, hogy teljesen úrrá lettek volna az irracionális és a negatív számokkal kapcsolatos nehézségeiken, csak tovább rontottak a helyzetükön, amikor belemásztak abba a kátyúba, amelyet ma komplex számoknak nevezünk.” Így 1545-ben Girolamo Cardano, a matematika zseniális fenegyereke az $x(10 - x) = 40$ egyenletből az $5 + \sqrt{-15}$, $5 - \sqrt{-15}$ megoldásokat hozta ki. „Tegyük félre az ezzel kapcsolatos szellemi kínokat” — mondja, és helyettesítsük be

a feltételezett gyököket az egyenletbe. És íme

$$\begin{aligned} x(10 - x) &= (5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 5^2 - (\sqrt{-15})^2 = \\ &= 25 - (-15) = 40 \end{aligned}$$

annak rendje és módja szerint. „Az aritmetika rafináltsága ily módon fejlődik — mondja Cardano —, míg végül csodálatosan kifinomulttá és teljesen értelmetlenné nem válik.”

A matematikusokat gyakran kísérti ez a mondat: „nincs értelme, de jól működik.” A Cardanoéhoz hasonló véletlen egyezések olyanok, mint a dzsungelben található nyomok; csodálatos felfedezési lehetőséget jeleznek, csak elegendően merész vállalkozó kell hozzá. Van-e tehát a $+1$ -nek négyzetgyöke? Ha igen, miféle állat az? És miért törődjenek praktikus elmék ilyen nem evilági intellektuális cifraságokkal?

Ars Magna

Cardano trükkjei az *Ars Magna*ban jelentek meg, amely a reneszánsz algebra híres összefoglaló műve. Az eredmények egy részét Cardano másoktól csente el, és noha megfelelően hivatkozott a szerzőkre, de azok engedélye nélkül publikált. Ugyanebben a könyvben jegyezte meg, hogy Tartagliának a harmadfokú egyenletre vonatkozó megoldóképlete (lásd az 1. fejezetet) veszélyes vizekre sodorhat minket. Ha az $x^3 = 15x + 4$ egyenletre alkalmazzuk, akkor eredményül

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

adódik. Mivel a nyilvánvaló megoldás $x = 4$, valami bűzlik Bolognában. A minden jel szerint különlegesen tiszta fejű Bombelli észrevette, hogy (a skrupulusokat ismét félretéve)

$$(2 \pm \sqrt{-1})^3 = 2 \pm \sqrt{-121},$$

vagyis Cardano kifejezése az

$$x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$$

alakra hozható, tehát az ostoba formula végül is értelmes mondanivalót takar. Bombelli hajlott elsőként afelé, hogy az ún. *komplex* számok a valós eredmények szempontjából is hasznosak lehetnek.

Descartes 1637-ben „képzetesnek” nevezte el azokat a kifejezéseket, amelyekben negatív számokból vont négyzetgyök szerepelt, és előfordulásukat annak a jeleként értékelte, hogy a feladat megoldhatatlan. Ezt a véleményt Isaac Newton is osztotta. Ennyit Bombelliről. A matematikusok azonban nem állhatták meg, hogy az ínycsiklandozó finomságokba bele ne kóstoljanak. Miután végigbotladoztak az algebrai ingoványon, fejest ugrottak az analízis égő poklába. Johann Bernoulli az $1/(x^2 + 3x + 1)$ -hez hasonló függvények integrálásakor komplex számok *logaritmus*aiba botlott. 1712 táján Bernoulli és Leibniz egy sokkalta egyszerűbb problémáról, a negatív számok *logaritmus*áról vívott egymással éles szópárbajt. Bernoulli úgy érvelt, hogy mivel $d(-x)/-x = dx/x$, ezért integrálással $\log(-x) = \log x$ adódik. Leibniz azzal vágott vissza, hogy az integrálás csak pozitív x -re működik. Euler megállapította, hogy mindketten tévedtek, mert az integrálásnál egy tetszőleges konstans is fellép, vagyis $\log(-x) = \log x + c$ a helyes következtetés, valamilyen c konstanssal, ami nyilvánvalóan $\log(-1)$ -gyel egyenlő, *akárm*i legyen is az. Mindez tovább érlelődött Euler agyának boszorkánykonyhájában, és 1748-ban megszületett az

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

csodálatos formula, ahol $i = \sqrt{-1}$. Valójában ez sem volt új: ugyanezt Roger Cotes már 1714-ben megtalálta, de feledésbe merült. Ha $\theta = \pi$, akkor $e^{i\pi} = -1$, ahonnan $\log(-1) = i\pi$. Köbre emeléssel azonban azt kapjuk, hogy $e^{3i\pi} = -1$ is igaz, vagyis $\log(-1) = 3i\pi$. Más ember már undorral feladta volna, de Euler talált kiutat: a $\log x$ többértékű. Ha L az egyik érték, akkor a többiek $L \pm 2\pi i$, $L \pm 4\pi i$, $L \pm 6\pi i$, és így tovább. A nyomok, amelyeket a dzsungelben követünk, immár nem apró ágacskák, hanem hatalmas letarolt erdők; nem árva mókusra, hanem nagy csorda orrszarvúra utalnak. De vajon csapdát állíthatunk-e a tettes(ek)nek?

Síkos gondolatok

1673-ban kiadott *Algebrájában* John Wallis a komplex számokat a sík pontjaiként értelmezi, ezzel azt a szokásos ábrázolást terjeszti ki, amely szerint a valósok egy egyenes pontjai. Az $x + iy$ pontot úgy kapjuk meg, hogy a valós egyenes x pontjából y -nyi távolságot mérünk fel merőlegesen.¹ Az a tény, hogy a -1 -nek nincs *valós* négyzetgyöke, a Wallis-i képből immáron nem jelent akadályt, hiszen $\sqrt{-1}$ nincs a valós egyenesen! Egységnyivel „hátrébb” található a síkon. Ez aztán a „hátsó gondolat”! Valamilyen okból azonban Wallis javaslata eltűnt a süllyesztőben. 1797-ben Caspar Wessel norvég földmérő közölt egy cikket arról, hogyan ábrázoljuk a komplex számokat a síkon. Mivel dánul írta, erről sem vett senki tudomást egészen addig, amíg száz évvel később francia fordításban is megjelent. Időközben az ötletet Jean-Robert Argand-nak tulajdonították, aki erről Wesseltől függetlenül írt 1806-ban. 1811-re Gauss a komplex számokat már rendszeresen egy sík pontjaiként tekintette, és erről szóló gondolatait 1831-ben publikálta. Az utolsó lépést végül William Rowan Hamilton tette meg 1837-ben, amikor is $x + iy$ -t az (x, y) koordinátákkal azonosította, és a geometriai definíciókat algebrai alakra írta át. Így $(x, 0)$ az x valós számmal azonos, $(0, 1)$ az i , és

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v),$$

$$(x, y)(u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

Ekkor

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

és minden szépen a helyére kerül. Bárki bármit is fedezett fel az 1800-as évek derekán, azonnal kiderült, hogy Gauss erre már korábban gondolt, csak nem szólt senkinek; biztosan tudjuk, hogy Gauss Hamiltont is megelőzte 1832-ben.

Ily módon mintegy három évszázad alatt sikerült eljutni egy olyan válaszhoz, amelyet három perc alatt el lehet magyarázni. Ezt a választ már korábban is többször *megtalálták*, csak nem ismerték el an-

¹ Itt természetesen „előjeles” távolságról van szó, tehát pozitív y esetén „felfelé” mérjük fel, negatív y esetén pedig az abszolút értékét mérjük fel „lefelé”. (FR)

nak. Sőt, mindenki, aki *volt* már valaki, *tudta* mi a válasz. Morris Kline megjegyzi, hogy „sokan; Cotes, de Moivre, Euler, Vandermonde, a komplex számokra a sík pontjaiként gondoltak”, mert amikor az $x^n - 1 = 0$ egyenletet akarták megoldani, a megoldásokat egy szabályos n -szög csúcsaiként képzeltek el. Azt, hogy a választ végül is mindenki ismerte, megerősíteni látszik Hamilton precíz megoldásának a fogadtatása. Megéljenezték? Megsütöttek száz ökröt? Meghívták legalább egy pohár italra? Egyikre sem került sor. Az egészet egyhangú, unalmas, ósdi vacaknak tekintették. Azonban még ha mindenki régóta tudta is a választ, ezt csak 1830 körül kezdték bevallani, még önmaguknak is. Mi okozta ezt a nagy színváltozást?

Szertefoszló filozófia

Amíg a komplex számokat semmire sem lehetett használni, az emberek filozófiai kérdést csináltak belőlük. Úgy gondolták, hogy valamilyen mély és transzcendens *jelentéssel* kell őket felruházni. Ez készítette Leibnizet is arra, hogy olyan kijelentéseket tegyen, mint amilyen a fejezetünk elejét díszíti. A filozófusok semminek sem örülnek jobban, mint valami homályos és rejtélyes elvnek, amellyel igazából senki sem törődik, ellenőrizni pedig még kevésbé tudja, ez ugyanis tág teret enged a csavaros eszmefuttatásoknak. Hány angyal fér el egy tű hegyén és hasonlók. Amikor azonban valami hasznossá válik, akkor a legtöbb ember félreteszi a filozófiát és nekilát inkább a munkának. Nem azt nézi, hogy milyen filozófiai mélységeket rejteget az új eszköz, hanem a lehető legtöbb eredményt akarja belőle kicsikarni a lehető legrövidebb idő alatt. Ha tényleg *látjuk* az angyalokat a tű hegyén táncolni, akkor ahelyett hogy megpróbálnánk őket megszámlálni, inkább átrakjuk őket egy mikrochipre. És pontosan ez történt a komplex számokkal körülbelül 1825 és 1850 között. A matematikusok felfedezték a komplex analízist; hogyan kell *kalkulust* végezni a komplex számokkal. És ez annyira hatékonynak bizonyult, hogy teljesen tragikus következményekkel járt volna, ha egy zseniális, de elővigyázatlan filozófus kimutatta volna, hogy komplex számok valójában nem is léteznek. Néha filozófiai kérdések (pl. „Mi is ez az íz tulajdonképpen?”) kifogásai mögé menekülünk, amiért *nem* jutottunk előre egy nehezen megfogható gondolat kidolgozásában. A komplex számok hasznossága egyik napról a másikra oly mértékben nőtt meg, hogy nem akadt olyan ma-

matematikus, aki józan eszével semmibe vehette volna őket. Így a kérdés némileg módosult; „Mit lehet a komplex számokkal *csinálni?*”, a filozófiai kérdés pedig ... szertefoszlott. Gyász nélkül, észrevétlen lett elfeledve és eltemetve. A matematika története ismer más hasonló esetet is, de talán egyik sem jelentkezett ennyire élesen. Az idő múlásával a kulturális világkép megváltozik. Amit az egyik generáció problémának vagy megoldásnak lát, azt egy másik generáció nem feltétlenül értelmezi ugyanígy. Manapság, amikor a „valós” számokat nem látjuk kevésbé absztraktnak, mint sok más számtípust, beleértve a komplex számokat is, nehéz megértenünk, mennyire másképp látták ezt eleink. Jusson ez eszünkbe, amikor a matematika fejlődésére gondolunk. Ha a történelmet kizárólag a jelen generáció szemszögéből nézzük, akkor a torzítások és félreértelmezések előtt nyitunk kaput.

Komplex kalkulus

A komplex algebra fokozatos és kínkeserves kialakulásával szemben a komplex analízis fejlődése minden jel szerint a matematikusok általánosítási kényszerének egyenes következménye volt. Szándékosan keresték, a valós analízis analógiájára. A határérték, a differenciálás és a hatványsorok elmélete annyira könnyen átvihető, hogy szinte gyakorlati feladatként lehet adni a diákoknak. Az integrál definíciójával is hasonló a helyzet, a tulajdonságaival viszont már nem. Egy új, nagyon gyümölcsöző jelenség lép fel. A valós analízisben, ha egy függvényt két határ között integrálunk, akkor a határok teljesen meghatározzák az integrált. A komplex esetben azonban a határok a sík pontjai, és így több szabadságot élvezünk. Meg kell adnunk a két pontot összekötő görbét, és azután „a görbe mentén integrálunk”. Mivel rengeteg görbe vehető, tudnunk kell, milyen mértékben függ az integrál értéke a görbe választásától.

Egy 1811-ben Friedrich Besselhez írott leveléből kiderül, hogy Gauss (ki más?) ismerte a komplex függvénytan alapját képező tételt. „Azt állítom, hogy az integrálnak mindig ugyanaz az értéke, még ha különböző utak mentén vesszük is, feltéve, hogy $f(x)$ nem válik végtelenné a két út által határolt térségben. Ez egy nagyon szép tétel, a bizonyítását majd megfelelő alkalommal közölni fogom.” Ez az alkalom azonban sohasem jött el. Ehelyett 1825-ben a bizonyítás közzétételének sorsdöntő lépését az az ember tette meg, aki a komplex függvénytan első

virágkorának főszereplőjévé vált: Augustin-Louis Cauchy. Róla nevezték el Cauchy-tételnek. Cauchy kezében gyorsan körvonalazódtak a komplex függvénytan alap gondolatai. Például, egy differenciálható komplex függvény sokkal speciálisabb kell legyen, mint a valós esetben: valós és képzetes részeinek ki kell elégítenie az ún. Cauchy–Riemann-egyenleteket. Cauchy annak rendje és módja szerint bebizonyította Gauss észrevételét. Ha olyan út mentén integrálunk, amely nem teljesíti a tétel feltételeit és olyan pontok körül kígyózik körbe, ahol a függvény végtelenné válik, akkor Cauchy megmutatta, hogy hogyan kell az integrált kiszámítani a „reziduumok elméletének” segítségével. Csak egy bizonyos konstansra, a függvénynek ebben a ronda pontban levő reziduumára van szükség, és arra, hányszor tekeredett körbe az út a pont körül. A pontos útvonal egyáltalán nem játszik szerepet!

Azok a definíciók, amelyeket Cauchy az analitikus fogalmakra (folytonosság, határérték, derivált stb.) adott, nem teljesen azonosak a maiakkal. A teljes szabadságot Weierstrassnak köszönhetjük, aki az egész elméletet a hatványsorokra alapozta. A geometriai szemlélet égetően hiányzott, és ezt Riemann pótolta saját nagy horderejű gondolataival. Ezen belül a *Riemann-felület* fogalma, amely 1851-ből származik, úgy kezeli a többértékű függvényeket (például Euler logaritmusát), hogy a komplex síkot többretegűvé teszi, és a függvény ezek mindegyikén már egyértékű. Kiderül, hogy az a topologikus minta játszik döntő szerepet, amely mentén az egyes rétegek egymáshoz kapcsolódnak.

A tizenkilencedik század közepétől a komplex függvénytan gyorsan és töretlenül fejlődött, számos messzeható következményt vonva maga után. Cauchy alapvető gondolatai továbbra is érvényesek, csak mára kicsit finomabb formát és topologikusabb köntöst kaptak. A komplex számok zavaros találmánya, amelyet egykor „lehetetlennek” és „haszontalannak” tituláltak, a matematika tartópillérévé vált, szerteágazó gyakorlati alkalmazásokkal az aerodinamikában, a hidromechanikában, a kvantumelméletben és az elektrotechnikában. Részletes áttekintésre nincs elegendő helyünk, de némi ízelítőt nyújthat, ha szemügyre vesszük a terület két leghíresebb nyitott kérdését: a Riemann-sejtést és a Bieberbach-sejtést.

A Riemann-sejtés

Jelölje $\pi(x)$ az x -nél kisebb prímek számát. Ez a függvény nagyon szabálytalanul viselkedik. Gauss és mások azonban észrevették, hogy nagy x -re jól közelíthető $x/\log x$ -szel. Ez a Prímszámsejtés váratlan módon összekapcsolta a diszkrétet (prímek) és a folytonost (logaritmus), és így nem meglepő, hogy látványosan eredeti matematika kerekedett ki belőle. Kiderül, hogy a válasz a 4. fejezetben említett

$$\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + \dots$$

zeta-függvény tulajdonságain múlik. A prímekkel való kapcsolatot már Euler is ismerte, aki észrevette, hogy

$$1/\zeta(s) = (1 - p_1^{-s})(1 - p_2^{-s}) \dots,$$

ahol p_n az n -edik prímszám. Ez a formula nem annyira rendkívüli, mint amilyennek látszik: így lehet analitikusan kifejezni a prímfelbontás létezését és egyértelműségét. Mindenesetre csőre tölti a tizenkilencedik századi matematika Nagygyűjút, a komplex függvénytant.

A valós s -ekre értelmezett zeta-függvény segítségével Pafnutyij Csebisev 1852-ben belátott egy a Prímszámsejtéshez közeli állítást: $\pi(x)$ és $x/\log x$ aránya elég nagy x -ek esetén 0,922 és 1,105 közé esik. Bernhard Riemann az analitikus folytatásnak nevezett eljárás segítségével $\zeta(z)$ -t minden komplex z -re értelmezte, és megpróbálta bebizonyítani a sejtést. Rájött, hogy a probléma kulcsát a zeta-függvény *gyökei*, a $\zeta(z) = 0$ egyenlet megoldásai adják. A valós gyököket könnyű megtalálni, ezek a -2 , -4 , -6 , és így tovább. Riemann híres sejtése, amelyet szinte mellékesen említ abban a rövid dolgozatában, ahol a terület fő gondolatait bizonyítás nélkül vázolja, úgy szól, hogy az összes többi gyök $1/2 + iy$ alakú, azaz az „ $1/2$ valós részű egyenesen fekszik”. Általános vélemény szerint a matematikának ez a kiemelkedő problémája. J. van de Lune és Herman te Riele nemrég igazolták, hogy az első másfél milliárd gyök valóban ezen az egyenesen helyezkedik el, de különféle okok miatt ez nem tekinthető meggyőző bizonyítéknak. Egy Franz Mertens-től származó, hasonlóan erős evidenciákkal alátámasztott rokon sejtést Andrew Odlyzko és te Riele 1984-ben *megcáfolt*. Ehhez a zeta-függvény első kétezer gyökét 100 tizedes pontossággal

kellett kiszámolniuk. Ha a Mertens-sejtésről kiderül, hogy igaz, akkor ebből a Riemann-sejtés is következett volna. A szakértőket nem lepte meg teljesen, hogy hamisnak bizonyult, mert nehezen tűnt hihetőnek, hogy a Riemann-sejtés bizonyítását ilyen „olcsón” meg lehessen kapni.

1896-ban Hadamard a zeta-függvény segítségével bebizonyította a prímszámtételt. Ugyanez ugyanebben az évben de la Vallée Poussin-nek is sikerült. Ha a Riemann-sejtés igaz, akkor az eredmények továbbfejleszthetők, mert éles korlátot lehet adni arra, hogy mekkora hibát követünk el, amikor $\pi(x)$ helyére $x/\log x$ -et írunk. A prímszámok eloszlásának elméletében sok minden múlik a Riemann-sejtésen.

A zeta-függvény nagymértékben általánosítható. Egy algebrai számtest zeta-függvényét például az Euler-formula segítségével definiálhatjuk (a prímek helyett *prímideálokat* kell vennünk). A Riemann-sejtés megfelelője is megfogalmazható, amely az algebrai geometria és a diofantikus egyenletek szempontjából átfogó jelentőségű. 1985-ben elterjedt a hír, hogy a Riemann-sejtést ilyen absztraktabb tárgyalásmódban megoldották. A könyv írása idején úgy tűnik, hogy a bejelentés elhamarkodottnak bizonyult, és a zeta-függvény továbbra is őrzi titkait. Hírnév, siker és sok álmatlan éjszaka vár arra, aki ezeket felfedi, bárki is legyen az.

A Bieberbach-sejtés

A geometriai függvénytan, amint a neve is mutatja, a komplex síkon analitikus függvények által definiált transzformációk geometriáját vizsgálja. Az eredete arra a felfedezésre nyúlik vissza, hogy ezek *konform* leképezések, vagyis a görbék által bezárt szögeket nem változtatják meg. Legyen az *egységkörlemez* azoknak a z komplex számoknak a halmaza, amelyeknek az origótól mért távolsága kisebb, mint 1, és legyen $f(z)$ egy komplex függvény. Ekkor $f(z)$ -t a lemez egy deformálásaként is felfoghatjuk, amely az egyes z -ket $f(z)$ -be viszi át. A lemez deformált képe részben átfedheti önmagát, van azonban a függvényeknek egy fontos osztálya, ahol ez nem következik be. Az ilyen függvényt az egységkörlemezen *egyrétűnek* mondjuk. Ezen a ponton a topológus és metrikus tulajdonságok kapcsolatára utaló jeleket figyelhetünk meg. Minél nagyobb a lemez képe, valamilyen értelemben véve annál nagyobb a függvény is. A legnagyobb egyrétű függvéynél lesz a lemez

képe a lehető legnagyobb, vagyis az egész komplex sík.² Van-e ennek a kijeletésnek egyáltalán értelme, és melyik ez a legnagyobb egyrétű függvény? Vonzó tippnek tűnik Koebe $z/(1-z)^2$ függvénye, mert ennek valóban a lehető legnagyobb a képe. Hatványsoralakja

$$z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + nz^n + \dots,$$

és Ludwig Bieberbachnak 1916-ban eszébe jutott, hátha a szélső helyzetet a hatványsor is tükrözi. Ha igen, akkor egy egyrétű függvény hatványsorában az n -edik együttható nem lehet n -nél nagyobb. Más szóval, a geometriai extrémum maga után vonja a metrikus extrémumot. Szép, természetes és egyszerű gondolat, olyasmi, amelyet így vagy úgy, de különösebb gond nélkül el kellene tudni dönteni. Az adott esetben azonban a probléma egészen 1984-ig megoldatlan maradt, amikor Louis de Branges egy csodálatos bizonyítást talált.

Korábban a Bieberbach-sejtés helyességét csak a hatványsor első hat együtthatójára ismerték. A második együtthatóra ezt maga Bieberbach igazolta, a harmadikra Karl Löwner 1923-ban, a negyedikre P. R. Garabedian és M. Schiffer 1955-ben, a hatodikra R. N. Pederson és M. Ozawa 1968-ban, és az ötödikre Pederson és Schiffer 1972-ben.

A valamennyi együtthatóra érvényes de Branges-féle bizonyítás két rokon sejtés közvetítésével adódik. Az első M. S. Robertsontól származik 1936-ból és olyan, az egységkörlemezen egyrétű hatványsorokra vonatkozik, amelyekben csak z páratlan hatványai fordulnak elő. A Robertson-sejtésből következik a Bieberbach-sejtés. 1971-ben I. M. Milin egy olyan egyenlőtlenséget talált, amelyet nem tudott ugyan bebizonyítani, de amelyből a Robertson-sejtés helyessége leolvasható. De Branges Milinnek ezt a sejtését igazolta; innen a Robertson- és a Bieberbach-sejtés azonnal adódott.

Löwnernek a harmadik együtthatóval annak idején egy olyan differenciálegyenlet segítségével sikerült megbirkóznia, amelynek megoldásai bármely egyrétű függvényt jól közelítenek. Ez az egyenlet azt írja le, hogy a körlemez pontjai a függvény hatására hogyan „áramlanak” a képek felé, és „ennek mentén az információáramlás is megvalósít-

² Az itt következő okoskodásban feltesszük, hogy minden szereplő függvény hatványsora $z + az^2 + \dots$ alakú, azaz a konstans tag 0, a z együtthatója pedig 1. (LM)

ható”, például a hatványsorban az együttthatók nagyságának a becslésére vonatkozóan. De Branges bizonyítása olyan segédfüggvényeket vezet be, amelyek a kívánt információt megőrzik. Ha ezekről bizonyos tulajdonságokat igazolni tudunk, akkor a Milin-egyenlőtlenséget ezzel beláttuk. A segédfüggvények sorozata azonban kombinatorikus szempontból hamarosan kezelhetetlenné válik. Walter Gautschi számítógéppel ellenőrizte, hogy a kívánt tulajdonságok egészen a 26-ik együttthatóig megőrződnek (ami egyben a Bieberbach-sejtést is igazolja erre a tartományra). Később kiderült, hogy az általános eredmény következik Richard Askey-nek és George Gaspernek egy speciális függvényekre vonatkozó ismert tételéből. Tételük bizonyításakor Askey és Gasper nem gondoltak a Bieberbach-sejtéssel kapcsolatos alkalmazhatóságra, mindössze érdekesnek találták az eredményt. A legtöbb matematikus a speciális függvények elméletét divatjamúlt és meglehetősen céltalan zsákutcának tekinti; ez a vélemény most a fenti és más okokból kifolyólag felülvizsgálatra szorul.

De Branges bizonyítása eredetileg a *Négyzetesen összegezhető hatványsorok* c. könyvének a második kiadáshoz készült terjedelmes kéziratában található, mintegy az elmélet csúcspontjaként. A szerző bejelentését kétkedve fogadták. A bizonyítás több hibát is tartalmazott, és nem volt világos, hogy ezek javíthatók-e. De Branges korábban egyszer már előrukkolt a Bieberbach-sejtés bizonyításával, amelyről kiderült, hogy rossz, és ez aláásta a hitelét. A sejtés már számos matematikust vezetett tévútra. Ahogy Carl FitzGerald mondja, „a Bieberbach-sejtés nem nehéz, én már több tucatszor bebizonyítottam.” De Branges bizonyítását csak azután fogadták el, hogy a szerző 1984 nyarán a Szovjetunió Sztyeklov Intézetébe látogatott, és a bizonyítást a leningrádi Geometriai Függvénytan Szeminárium tagjai megerősítették. A Szovjet Tudományos Akadémia részére összefoglaló készült, és ez preprint formájában terjedt. A nyugati matematikusok ekkor kapcsolódtak be az (oroszról lefordított!) egyszerűsített bizonyítás tanulmányozásába, további egyszerűsítéseket hajtottak végre, és egyetértettek abban, hogy de Branges valóban megoldotta a problémát. A bizonyítást de Branges, Christian Pommerenke, FitzGerald és mások még tovább egyszerűsítették, míg végül nagyon rövid és közvetlen alakot öltött; egyik változata mindössze öt gépelt oldalt tesz ki.

A kimerült aranybánya

Ma már tudjuk, hogy a Bieberbach-sejtés röviden és egyszerűen bebizonyítható a geometriai függvénytan szokásos kelléktárának a felhasználásával. Minden bizonnyal több tucat vagy akár több száz olyan matematikus is volt, aki egészen közel járhatott a megoldáshoz. Miért nem találták meg a bizonyítást hamarabb? Mindenki ostoba lett volna? Könnyű utólag kritizálni, de ez nem sokat segít. Az okot inkább a probléma kifinomultságában kell keresnünk. A pontos megközelítés nagyon behatárolt, és komoly előzetes munka, részmegoldások és „kísérleti” eredmények nélkül nem valószínű, hogy bárki is rálelt volna a feltételeknek arra a speciális kombinációjára, amelyre a bizonyításhoz szükség volt. Az a lehetőség is felmerül, hogy a legtöbb kísérletet kishitűség árnyékolta be, mert senki sem gondolta komolyan, hogy a szokásos megközelítés célhoz vezethet. A matematikusok néha egyes módszereket „teljesen kimerítettnek” nyilvánítanak abban a bányászati értelemben, hogy már mindaz az érték ismert, amely belőlük nyerhető. Általában időpocsékolásnak tartják, ha valaki nehéz problémákat ilyen „kimerített” módszerrel próbál megoldani. Itt most ez mégis sikerült.

Mindez a matematikai bizonyítások szerkezetével állhat kapcsolatban. Tekintsük analógiaként a sakkot. Nagymesterek generációkon keresztül elemeztek megnyitásokat abban a reményben, hogy sikerül új támadási vonalat találni, az ellenfélnek csapdát állítani, aki így szokatlan terepen és időzavarban találja magát. A sakkban azonban olyan sok a lehetséges variáció, hogy már tíz-tizenkét lépésig sem valósítható meg a teljes elemzés. Mindig lehet a bejárt ösvényről csak egy picit letérve járatlan utat találni. Nimzovics lóugrással nyitott, és ezzel rengeteg gondot okozott az ellenfeleinek, pedig a lépést korábban annyira nevetségesnek tartották, hogy senki sem volt hajlandó komolyan venni. Egy matematikai bizonyításban sokkal több kezdőlépés lehetséges, mint a sakkban. Lehet, hogy egy gondolatmenet csak azért tűnik rossz megnyitásnak, mert mindenki, aki eszerint próbált játszani, ugyanazokat a nyilvánvaló, ám vérszegény lépéseket tette meg, és kihagyta azt a briliáns variációt, amely felpeszsdítené a játszmát. Semmiképpen sem okos dolog egy jónak ígérkező elképzelésről pusztán azért lemondani, mert azt még senki sem vitte sikerre.

RINGYÓ SZERENCSE

Piha, ringyó Szerencse! Istenek,
 Ti mind, ti mind! vegyétek el hatalmát,
 Törjétek össze talpát, külleit,
 S az ég-oromrul a kerék-agyat
 Hömpölygessétek a poklokra le!

William Shakespeare¹

Nem szép dolog ilyeneket mondani egy hölgyről, de ez Szerencse Kisasszony jellemének hagyományos megítélése. Ám valóban rászolgált-e a Kisasszony rossz hírére?

A tizennyolcadik század végén a „világrendszer” gépezete óraműként működött, amelyet valaha a Teremtő Kéz húzott fel, attól kezdve azonban a világegyetemet már csak a saját belső precizitása szabályozta. A Természet Törvényei borotvaélesek és megjósolhatók voltak; semmit sem bíztak a véletlenre, pontos és részletesen feltárható ok nélkül még egy levél sem eshetett le, egy hullám sem fodrozódhatott. A véletlen olyan kétes ügyekre korlátozódott mint a szerencsejátékok. A huszadik században a véletlen diktálta világban találjuk magunkat, ahol a Természetnek még az anyaga is valószínűségek véletlen felhője. Az Óramű helyére egy Kozmikus Lottó került. A véletlen azonban többé már nem a szabálytalan káosz és szeszély szinonímája. A Kisasszonynak ugyan nem sajátja az illemtudó engedelmesség, de semmiképpen sem könnyelműen felelőtlen. Sajátos eseteket teremt, sajátos sémákat követ, de viselkedését belső rend szabályozza. És ez a belső rend hozta létre azt az újfajta matematikát, amelyet valószínűségszámításnak nevezünk.

¹ Arany János fordítása (Hamlet, II. felvonás, II. jelenet)

A tisztességes pénzérme

Nem véletlen, hogy a valószínűségről szóló legelső írások Girolamo Cardanótól, a Hazárdjátékos Tudóstól származnak, és hogy ezek a leginkább gyakorlati emberi tevékenységgel, a szerencsejátékokkal foglalkoztak. A valószínűségszámítás, és annak alkalmazott ága, a statisztika, mindig is sajátos, néha kínosnak tekintett kapcsolatban állt a hazárdjátékokkal. Nézzük például az életbiztosítást: mi arra fogadunk, hogy meghalunk, a biztosító pedig ennek az ellenkezőjére. Ahhoz, hogy nyerjünk, vesz(íte)nünk kell! Cardanot az a speciális probléma érdekelte, hogy egy kockajátéknál milyen arányban kell felosztani a téteket, ha a játék félbeszakad. Ugyanezt a kérdést tette fel de Méré lovag is Blaise Pascalnak 1654-ben. Egy játékos nyolcszor próbálhat egyest dobni egy kockával, de három dobás után a rendőrség razziát tart a le-bujban; hogyan osszák el a téteket a vesz elmúltával? A kérdés nyomán Pascal levelet írt Fermat-nak, és közös gondolataikat Huygens publikálta 1657-ben a valószínűségszámításról szóló első könyvben, amely *A kockajátékokban alkalmazott okoskodásokról* címet viselte. Ez a vizsgálat vezette el Pascalt híres

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & 1 & 2 & 1 & & \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & &
 \end{array}$$

háromszögéhez, amelyben minden szám a két közvetlenül fölötte állónak az összege. Tekintsük például egy érme háromszori feldobását. Ennek összesen nyolcféle kimenetele lehet, amelyeket az alábbi formában rendezhetünk el:

FFF	FFI	FII	III
	FIF	IFI	
	IFF	IIF	

A nyolc dobássorozat közül egy esetben adódik három fej, három esetben két fej, három esetben egy fej, és egy esetben egy fej sem. Ez az 1, 3, 3, 1 számsorozat pontosan megegyezik a Pascal-háromszög negyedik sorával, a számok összege pedig 8. Annak az esélye, hogy

három kísérletből pontosan egy fejet dobjunk, „három a nyolchoz”, vagy más megfogalmazásban, a szóban forgó valószínűség $3/8$. Feltéve persze, hogy mindegyik lehetőség „egyformán valószínű”, vagyis hogy *tisztességes* érmével dobtunk.

A valószínűségszámítás önálló tudományterületként először Pierre-Simon de Laplace *A valószínűségek analitikus elmélete* c. munkájával jelentkezik 1812-ben. Itt a szerző egy esemény valószínűségét úgy definiálja, mint az esemény bekövetkezési lehetőségei számának az összes lehetséges kimenetelhez viszonyított arányát — megint csak feltéve, hogy a kimenetek mind egyformán valószínűek. De mit jelent az, hogy „egyformán valószínűek”? Hibás körforgáshoz vezet, ha erre azt válaszoljuk, hogy mindnek ugyanaz a valószínűsége! Ez a valószínűségszámítás megalapozásával kapcsolatos kérdés számos problémát okozott a korai korszakban; később látni fogjuk, hogyan lettek úrrá rajta. Laplace definíciója a valószínűségi kérdéseket kombinatorikus leszámítási feladatokra vezeti vissza. Ha például meg akarjuk tudni, hogy öt lapot kiosztva milyen esélyünk van egy fullra (ez három egyforma nagyságú és kettő másmilyen de szintén egyforma nagyságú kártyalapot jelent, mondjuk három királyt és két dámát), akkor kiszámítjuk, hogy

- (1) a pókerben valaki összesen hányféle lapot kaphat (ez 2598960),
- (2) ebből hány esetben tart fullt a kezében (ez a szám 3744),

és vesszük a hányadosukat:

$$3744/2598960 = 0,00144.$$

Végtelen problémák

Ez a megközelítés a valószínűséget diszkrét, sőt véges rendszerekre korlátozza. Számos gyakorlati problémánál azonban végtelen sok kimenetel lehetséges. Ha például a dárdás célbadobós játéknál három dárdával dobunk, mi a valószínűsége annak, hogy három tripla-húszas találatot érünk el? Ha a céltáblát körlapként, a dárda becsapódását pedig egy pontként modellezzük, akkor a lehetséges kimenetek száma végtelen, és ezek közül végtelen sok a kedvező. Laplace receptje szerint ∞/∞ adódna, amellyel nem sokra megyünk. Az sem világos,

mit értsünk it „egyformán valószínű”. Bármely pontot ugyanis, ismét Laplace szerint, $1/\infty$ azaz 0 valószínűséggel találunk el. Vagyis mindegyik pont egyformán valószínű. Annak az esélye viszont, hogy egy halmaz valamelyik pontjába beletaláljunk, az egyes pontok esélyeinek összege kellene hogy legyen. Egy csomó 0 összege is 0. Hogyan egyeztethető ez össze azzal a ténnyel, hogy bármely dobásnál *valamelyik* pontot biztosan eltaláljuk?

A legegyszerűbb hozzáállás, ha a tábla egy adott *tartományának* eltalálási esélyét a *területével* vesszük arányosnak. A számok Laplace-féle arányai helyett a területek arányai jelennek meg. Az egyszerűség kedvéért válasszunk olyan egységeket, hogy a teljes terület 1 legyen. Egyetlen pont területe 0, így ennyi az esélye annak, hogy beletalálunk; az egész tábla területe viszont 1, tehát *valamit* biztosan el kell találunk. A tripla-húszas területe durván 0,0005; a háromszoros telitalálat valószínűsége ennek a köbe, vagyis nagyjából egy a nyolcmilliárdhoz. Egy jó dobó ennél persze jobban szerepel, hiszen ő nem véletlenszerűen osztja el a dárdákat a táblán, hanem a célzóna közelében tömöríti őket. Ennek figyelembevételéhez a területet megfelelően „súlyozni” kell.

A tizenharmadik és tizenkilencedik század folyamán a matematikusok ilyen problémákkal küszködtek, nem sikerült azonban a valószínűség általános fogalmát igazán precízen megadniuk. Laplace még bizakodóan úgy vélte, hogy „a valószínűségszámítás alapján véve csak a számolásokra átváltott józan ész”, akadnak azonban sajnos olyan helyzetek, amikor a józan ész egyformán logikus alkalmazása ellentmondó válaszokra vezet. Morgan Crofton 1868-ban erről így ír: „Kétségkívül igaz, hogy néhány esetben az alapelvek körül véleménykülönbség merült fel, és eltérő eredmények születtek”, hozzáteszi azonban, hogy „mindenki érzi, hogy ezt nem a tárgy anyagában rejlő valamiféle eredendő kétértelműség okozza, hanem az, hogy a felhasznált eszközök gyengék.”

Erősebb eszközök

A következő fontos lépésnek látszólag semmi köze sem volt a valószínűségekhez, hanem a hosszúság-, terület- és térfogatszámítással kapcsolatban került előtérbe. Ezek az integrálszámítás körébe tartoznak. Egy görbe alatti terület az őt definiáló függvény integrálja, a térfogatot és magasabb dimenziós megfelelőit többszörös integrálokkal kap-

juk. A többszörös integrálok kezelésében technikai nehézségek lépnek fel, és ezek hatására a matematikusok a hosszúság, terület és térfogat alapvető fogalmait megpróbálták általánosabb módon megadni. Azt remélték, hogy a nagyobb általánosság megoldja majd a technikai gondokat.

A kulcskérdés a hosszúság fogalma. Ha a és b a valós egyenes két pontja, akkor az őket összekötő intervallum hossza $b - a$. Ha a valós egyenes pontjainak egy halmaza véges sok intervallumból épül fel, akkor ennek a hosszát célszerű az őt alkotó intervallumok hosszainak az összegeként megadni. Ennél bonyolultabb halmazokkal is szembe kell azonban néznünk. Van-e mód valós számok *tetszőleges* halmazán „összhosszúságot” definiálni? 1882-ben du Bois-Reymond egy halmaz *tartalmának* definiálásához a halmazt intervallumok véges egyesítésével „kívülről közelítette”. Peano a módszert 1887-ben úgy fejlesztette tovább, hogy belülről is approximált. Például egy síkbeli tartomány területének a meghatározásához kiszámította a *külső tartalmat* mint a halmazt tartalmazó sokszögek területének a határértékét és a *belső tartalmat* mint a halmazba írható sokszögek területének a határértékét. Ha ezek megegyeznek, akkor a közös érték adja a halmaz tartalmát vagy területét.² (Ha nem egyeznek meg, akkor úgy tekintjük, hogy a halmaznak nincs területe.) Ez közvetlen általánosítása annak a módszernek, amellyel Arkhimédész a kör területét kiszámította. Tegyük egy sokszöget kívülre, egy másikat meg belülre, majd növeljük meg a sokszögek oldalszámát úgy, hogy a közöttük levő terület nullára zsugorodjon. Peano koncepciójának az az előnye, hogy *additív*: ha egy halmaz véges sok részre bomlik, akkor a területének a kiszámításához csak össze kell adnunk a részek területeit.

Az elmélet végső változatát Henri Lebesgue dolgozta ki 1902-ben. Lebesgue elméletében a tartalom helyére a *mérték* fogalma lép. A közelítő halmazokban nem véges sok intervallumot egyesítünk, hanem intervallumok végtelen sorozatát. Az összhossz még mindig értelmes feltéve, hogy az egyes intervallumok hoszaiból képezett végtelen sor egy jól meghatározott összeghez konvergál. És a Lebesgue-mérték nemcsak additív, hanem *megszámálhatóan additív*. Ha egy halmaz

² Ezt a fogalmat ma Jordan-mértéknek hívjuk. Camille Jordan 1892-ben publikálta elméletét, tehát évekkel Peano után. A matematika történetében elég gyakori, hogy egy fogalmat vagy tételt nem első felfedezőjéről neveznek el. (LM)

diszjunkt részek sorozatából épül fel, akkor a mértéke az egyes részek mértékeinek (mint végtelen sornak) az összege. Ennek a definíciónak az alapján nagyon sok bonyolult halmaznak lesz hossza, területe stb. A 0 és 1 közötti racionális számok halmaza például nullmértékű, az ugyanide eső irracionálisok mértéke 1. A mértékelmélet alapján sokkal több irracionális szám létezik, mint racionális (ezzel a véleménnyel más okból ugyan de Cantor is egyetértett volna). Azonban még e mellett a sokkal általánosabb definíció mellett is maradnak halmazok, amelyek nem mérhetők (legalábbis a halmazelmélet szokásos keretei között). Ennek ellenére a *mérhető* halmazok skálája roppant széles.

Lebesgue gondolatai (amelyekhez tőle függetlenül William Young is eljutott) nagymértékben továbbfejlesztették az integrálás elméletét és ma már az analízis alapjait képezik. Emellett megoldották a folytonos valószínűségszámítás problematikáját is.

Kolmogorov axiómái

Számtalan korábbi esethez hasonlóan, a helyes válaszhoz ezúttal is úgy lehet eljutni, ha félretesszük az olyan aggodalmakat, hogy „valójában” mi is az a valószínűség, és ehelyett inkább azokat a tulajdonságokat soroljuk fel, amelyeket a valószínűségtől elvárunk. Más szóval, a fogalom axiomatizálására van szükség. A végső lépést 1930 körül Andrej Kolmogorov tette meg, felhasználva a Richard von Mises-től származó *eseménytér* (mintatér) fogalmát: ez egy kísérlet lehetséges *kimenetele*inek a halmaza. Ha például feldobunk egy érmét, akkor a {Fej, Írás} halmaz alkotja az eseményteret. A dárdadobálós játéknál az eseménytér a céltábla pontjainak a halmaza. Ha három érmevel dobunk, akkor a nyolc lehetséges fej-írás sorozat. Most jön a trükk. *Eseményen* ne csak egyetlen kimenetelt értsünk, hanem kimenetelek egy *halmazát*. Három érmevel dobva például a „két fej, egy írás” esemény a {FFI, FIF, IFF} kimenetelekből álló halmazt jelenti. A dárdadobálásnál a „tripla-húszas” esemény a céltábla egy bizonyos tartományának, a tripla gyűrű 20-as szektorának felel meg, és ezt a tartományt megint csak az eseménytér bizonyos pontjai alkotják (ez alkalommal végtelen sokan).

Válasszuk most ki az eseményeknek egy alkalmas halmazát (az „alkalmas” szót mindjárt megmagyarázom), és definiáljunk egy *p valószínűségfüggvényt*, amely ennek a halmaznak minden egyes *E* eseményé-

hez egy $p(E)$ számot rendel hozzá. Ennek az alábbi tulajdonságokkal kell rendelkeznie:

- (1) $p(E)$ mindig 0 és 1 közé esik.
- (2) Ha E a „semmi sem történik” üres esemény, akkor $p(E) = 0$.
- (3) Ha E a „valamelyik lehetséges kimenetel bekövetkezik” biztos esemény, akkor $p(E) = 1$.
- (4) p Lebesgue-féle értelemben megszámlálhatóan additív.

Az „alkalmas” csak annyit jelent, hogy ha akárhogyan is veszünk olyan E eseményekből álló sorozatot, amelyekre $p(E)$ definiálva van, akkor ezek összerakhatók egyetlen olyan F eseménnyé (az egyesítésükké), amelyre $p(F)$ szintén értelmes. Olyan eseményhalmazt kell tehát vennünk, amely a „megszámlálható egyesítésre nézve zárt”.

Hogyan segít mindez?

Véges valószínűségekre minden nagyon kézenfekvő. Itt a kimenetelekből képezett *valamennyi* halmazt tekintetbe vesszük. Rendeljünk az egyes kimenetelekhez valószínűségeket úgy, hogy ezek összege 1 legyen; ekkor egy (kimenetelekből álló) E esemény valószínűsége az őt alkotó kimenetelek valószínűségeinek az összegeként adódik. Ha például három érmével dobunk, akkor a nyolc lehetséges sorozat mindegyikéhez $1/8$ valószínűséget rendelünk; ez a tisztességes érme *definíciója*. Az „egyformán valószínű” kifejezés értelme itt tehát nem jelenik meg, de persze ez motiválja, hogy miért így választottuk meg az értékeket. A dárdadobálásnál óvatosabbnak kell lennünk. A tekintetbe vett események most a céltábla azon *tartományai*, amelyeknek — mértékelméleti értelemben — van területük. A $p(E)$ valószínűség az E által kitöltött összterület részaránya. Egyedül álló pontok területe nulla, és így a valószínűségük is nulla; a tripla-húszas T tartomány azonban egy jól meghatározott nemnulla területtel rendelkezik, és így a valószínűsége sem nulla. Ugyanakkor T felbontható végtelen sok egy-egy pontból álló részhalmazra, amelyek mindegyikének nulla a valószínűsége. Miért nem következik a (4) tulajdonságból, hogy $p(T)$ ezeknek az összege, tehát maga is nulla? Erre az a válasz, hogy T *megszámlálhatatlanul* végtelen sok pontból áll, és így nem hivatkozhatunk (4)-re, amely csak megszámlálható additivitást biztosít. A dolog ezen a finom megkülönböztetésen múlik, és ezzel oldódnak meg a látszólagos paradoxonok.

A valószínűségszámítás alkalmazásakor a végső felhasználó dönti el, hogy milyen legyen az eseménytér, az eseményhalmaz és a valószínűségfüggvény. A valószínűségszámítás gépezete csak ezután lép működésbe. És ez így is van rendjén. A mechanika törvényei például megmondják, hogyan elemezzük a Naprendszer mozgását, de maguktól nem adják meg a bolygók alakját és tömegét, vagy a pályán elfoglalt kezdeti helyzetüket. Elsőnek a modellalkotó lépést kell elvégeznünk, csak azután jöhet a matematika: ez nem része a matematikának.

A többdimenziós részeg

A valószínűséggel kapcsolatos vizsgálatok között találjuk a *sztochasztikus folyamatok* elméletét is. Itt valamilyen rendszer egy bizonyos állapotban van, és minden időpillanatban ez az állapot bizonyos adott valószínűségeknek megfelelően véletlenszerűen megváltozik. Ennek egyik lehetséges alkalmazása arra vonatkozik, hogyan mozog egy molekula, miközben véletlenszerűen összeütközik más molekulákkal, vagyis hogyan történik egy kémiai anyag diffúziója egy adott közegben. A diffúziós hatásokat lehet hagyományosan is tárgyalni egy parciális differenciálegyenleteken alapuló folytonos közeg modell segítségével. Feltehetjük a kérdést, vajon ez összhangban áll-e a molekuláris elmélet által megjósolt eredményekkel. A molekuláris diffúzió matematikája bonyolult, és így érdemes egyszerű modellekkel kezdeni és innen fokozatosan haladni olyanok felé, amelyek a valóságos helyzetnek jobban megfelelnek.

A legegyszerűbb ilyen folyamat az egydimenziós *véletlen bolyongás*. Képzeljünk el egy egyenest, amely egységnyi hosszú szakaszokra van osztva. A 0 időpillanatban egy részecske a 0 pontban helyezkedik el. Az 1 időpillanatban feldobunk egy érmét: ha az eredmény fej, akkor a részecske egységnyit jobbra lép; ha írás, akkor egységnyit balra. A 2 időpillanatban megismételjük az eljárást, és így tovább. Tisztelességes érmét feltételezve a balra, illetve jobbra lépés *átmenetvalószínűsége* minden alkalommal $1/2$. Arra vagyunk kíváncsiak, hogyan viselkedik ez a rendszer hosszú távon. Elmasíroz-e a részecske valamelyik irányba, vagy az origó körül lebzsel, vagy mi az ördögöt művel? Mivel egyforma eséllyel megy akár balra, akár jobbra, így nem látszik túl valószínűnek, hogy az egyik irányban véglegesen eltűnjön; másrészt viszont nemigen lehet megakadályozni, hogy jó messzire elcsatangoljon, mert egyszer-

másszor szokatlanul hosszú csupa fej vagy csupa írás sorozat is elő fog fordulni. Más szóval, azt várjuk, hogy a helyzete meglehetősen szabálytalanul hullámnani fog, és noha átlagosan nem fog túl gyorsan mozogni, jó eséllyel jut el végül is az egyenes bármely kiszemelt pontjába. És valóban ez történik. *Tetszőleges* pontot megadva, legyen az akármilyen messze az origótól, 1 a valószínűsége annak, hogy a részecske valamikor odakeveredik. Ugyanezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy nulla annak a valószínűsége, hogy *sohasem* ér a kiválasztott pontba. Sőt, 1 valószínűséggel végtelen sokszor visszatér a pontba. A mozgás az egész egyenesen történő „egyenletes” hullámozásokba kenődik szét.

Ha tehát eltévedtünk az 1-dimenziós sivatagban, és mindig pénzfeladással döntjük el, hogy éppen keletnek vagy nyugatnak menjünk, akkor végül bármely kívánt pontba el fogunk jutni. De ennek megvan az ára: nagyon sokáig tart. Annyira, hogy ha az ugyanabba a pontba történő két egymás utáni visszatérés között eltelt időket nézzük, ezek *átlaga* már végtelen. Ha ugyanilyen módon a síkon kezdünk el bolyongani, és mindig $1/4$ valószínűséggel megyünk északra, keletre, délre vagy nyugatra, akkor nagyon hasonló eredmények adódnak. Ha egy kétdimenziós sivatagban tévedtünk el, akkor még mindig számíthatunk arra, hogy a négy irányba történő véletlen lépésekkel végül minden pontba eljutunk. Mit mondhatunk három dimenzióban? Most felfelé és lefelé is mehetünk, és az összes átmenetvalószínűség $1/6$. 1921-ben Pólya György bebizonyította, hogy a helyzet alapvetően megváltozott: pozitív (körülbelül $0,65$) valószínűséggel az történik, hogy *sohasem* érjük el a kiszemelt pontot, akármilyen soká is bolyongunk.

A fenti példák nyilván nagyon speciálisak, bár már ezek is jól mutatják, hogy nagyon lényeges annak a térnek a dimenziója, amelyben bolyongunk. Igen sok általánosítási lehetőség kínálkozik. Semmi okunk sincs feltenni, hogy valamennyi átmenetvalószínűség egyenlő legyen. Hogyan függ az eredmény a választott értékektől? Mi történik, ha átlós irányú lépéseket is megengedünk? És ha meghatározott irányokba léphetünk? Mindaddig *diszkrét* bolyongásokról beszéltünk, amelyekben a helyzeteket *egész* koordinátákkal adtuk meg, és minden alkalommal ugyanakkora (egységnyi) távolságot léptünk. Mit mondhatunk a *folytonos* véletlen bolyongásokról? Mi történik, ha a diszkrét, „óraütésekkel vezérelt” lépéseket folytonos mozgás váltja fel?

A molekulaspekuláns

1827-ben Robert Brown botanikus egy folyadékcseppet vizsgált mikroszkóppal. A folyadékban apró részecskék látszottak, és Brown megfigyelte, hogy ezek nem ülnek nyugodtan a helyükön, hanem szeszélyesen ugrabugrálnak. Az élettelen részecskék nem mozoghattak saját akaratukból, maga a folyadék pedig teljesen nyugalmi állapotban volt. Mi okozta mégis a jelenséget? Brown úgy vélte, hogy ez a mozgás az anyag molekuláris természetét bizonyítja — akkoriban ez az elmélet maga is csak egy erősen spekulatív feltételezést jelentett. A folyadék apró molekulákból áll, amelyek nagy sebességgel nyargalnak és véletlenszerűen karamboloznak egymással. Amikor a molekulák egy részecskének ütköznek, azt véletlenszerűen meglölik.

A Brown-mozgást modellezhetjük egy „folytonos” véletlen bolyongással. Ezt úgy definiáljuk, hogy vesszük a diszkrét változatokat kicsi időegységekkel és kicsi, sok irányba lehetséges lépésekkel, majd áttérünk a határértékre. Az eredményt William Feller így jellemzi:

Határértékben a folyamat folytonos mozgásként fog viselkedni. A dolgot az teszi érdekessé, hogy a határátmenet során a képleteink továbbra is értelmesek maradnak és jó egyezést mutatnak a diffúzióelmélet fizikai jelentést hordozó formuláival, amelyeket sokkal általánosabb feltételek mellett jóval testre szabottabb módszerekkel lehet levezetni. Ez a magyarázata annak, hogy a véletlen bolyongási modell, elnagyoltsága ellenére, elég jól írja le a diffúziós folyamatokat.

Ezzel sikerült közvetlen matematikai kapcsolatot létesítenünk az egyes molekulák mozgása és az általuk alkotott folyadék egész tömegének tulajdonságai között. A molekuláris mozgás statisztikus vonásai és a diffúzió folytonossági mechanikája azonos képet mutatnak.

A véletlen bolyongás és a diffúzió kapcsolatát elsőként Louis Bachelier ismerte fel 1900-ban írt doktori disszertációjában. A vizsgáztatók a művet elég haloványnak ítélték, és a „mention honorable” minősítéssel értékelték, amikor csak a „mention très honorable” számított egyáltalán valamit. Azonban Bachelier nem a Brown-mozgást tanulmányozta, hanem egy másik, a valószínűségszámítás hazardjátékos kezdeteihez közelebb álló dologgal, a párizsi tőzsde véletlen ingadozásaival foglalkozott. Talán nem meglepő, hogy egy kötvényekről és részvényekről szóló elvetélt disszertáció kevésbé érdekelte az elméleti fizikusokat. 1905-ben Albert Einstein (legalábbis mindenki így hitte) lerakta a Brown-moz-

gás elméletének az alapjait, majd Norbert Wiener ezeket jelentősen továbbfejlesztette. Csak sokkal később derült ki, hogy a fő gondolatok egy jó részében Bachelier már megelőzte őket!

A véletlen bolyongás ma is fontos szerepet játszik a matematikai fizikában, és mostanában a kvantumelméletben is felbukkan. Az egyik megoldatlan probléma a *kitérő* bolyongások viselkedése, amikor a részszeke nem mehet kétszer ugyanabba a pontba. Eközben a statisztikus mechanikától kezdve az ergodelméleten át a sztochasztikus differenciálegyenetekig a valószínűségszámítás matematikája számtalan alakban „diffundált” a természettudományok egész területén.

A TERMÉSZET MATEMATIKÁJA

Új bölcsélet mindent kételkedve lát,
Kiolttja tűznek elementumát;
Elvész a nap, a föld, nincs emberi
Ész, mi tudná, hogy hol keresheti.

John Donne¹

1642-ben Woolsthorpe faluban egy özvegyasszonynak, aki a családi farmon gazdálkodott, fia született. A koraszülés miatt félő volt, hogy nem éri meg az egyhetes kort sem, de életben maradt. Nem járt különleges iskolákba, és nem látszott rajta semmi rendkívüli, eltekintve talán attól, hogy mindenféle ügyes szerkezeteket fabrikált. Granthami tartózkodását Richard Westfall így írja le:

Amíg a többi fiú játszott, ő különféle dolgokat készített fából, nemcsak lányoknak való bababútort, hanem elsősorban modelleket. Granthamtól északra éppen egy szélmalom épült. A fiúcska ezt olyan jól megfigyelte, hogy tökéletesen szakszerű kivitelben elkészítette annak modelljét, amely működött is, ha a tetőre helyezték. Még javított is rajta: a hozzáépített taposómalomba befogott egy egeret, amelynek a farkára kötelet kötött vagy egy búzaszemet rakott elé, és a „molnárját” így ösztökelte a munkára. Épített magának egy kis járművet is, egy négykerekű kocsit, amelyet belülről tudott hajtani egy kurbli tekerésével. „Hullámpapírból” lámpást csinált, amellyel sötét téli reggeleken az iskolába menet világított, és utána egyszerűen összehajtogatta és zsebrevágta. A lámpa arra is jó volt, hogy éjszakánként egy sárkány farkához kötve „a szomszédos lakókat egy ideig páni félelemmel töltsse el, és piaci napokon a söröskorsók fölé hajolva erről beszélt a környékbeli nép a kocsmákban.”

Felcseperedvén, a fiatalember Cambridge-ben a Trinity College-ban folytatta tanulmányait, ahol semmiben sem tűnt ki. 1665-ben Euró-

¹ Károlyi Amy fordítása (Első évforduló)

pa egy rettenetes kór igája alatt nyögött, amelyet a patkányok bolhái terjesztettek, és amelytől megduzzadtak a nyirokmirigyek: ez volt a bubópestis. A fiatalember visszatért biztonságot nyújtó szülőfalujába. Vidéki magányában szinte egymaga alkotta meg a mechanikát, az optikát és a kalkulust. Isaac Newtonnak hívták.

Mi okozta azt, hogy az alvó géniusz ilyen elemi erővel robbant ki? Erre magának Newtonnak a szavai adják a legjobb magyarázatot: „Azokban a napokban alkotó energiám teljében voltam, & többet foglalkoztam matematikával & tudománnyal, mint azóta bármikor.” Ezekből a munkákból semmit sem publikált. De Morgan ezt annak tulajdonítja, hogy Newton „egész életében halálosan félt mások bíráló véleményétől”. John Barth *Sotweed tényező* című művében a képzeletbeli Newton annyira „nem bízott a tehetségében, hogy csak nagyon vonakodva engedte meg, hogy felfedezéseiből bármi is nyomtatásban megjelenjen, ugyanakkor annyira hiú volt, hogy a düh és a féltékenység szinte az örületbe kergette, ha a legcsekélyebb célzás is arra utalt, hogy valaki már megelőzte. Egy lehetetlen, csodálatos alak!” És könnyen lehet, hogy valóban így volt. Végül 1672-ben kiadták Newton optikai munkáját, és félelmei máris beigazolódtak, mert az ellenvélemények tömör falának ütközött olyan tudósokkal szemben mint Robert Hooke és Christiaan Huygens.

Ez nem volt valami bátorító. Edmund Halley hosszas unszolására Newton végül mégis ráállt, hogy *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* címmel megjelentesse mechanikai és gravitációs elméletét, az emberiség történetének minden bizonnyal a legjelentősebb könyvét. Ebben a „Világrendszer” működését magyarázta meg, a legtöbb ilyen irányú kísérlettől eltérően, ezúttal sikerrel. Nehéz olvasmány, és szándékosan készült annak; Newtonnál kisebb kaliberű emberek is kellő álcázással gondoskodtak arról, hogy a kritikusok dolgát megnehezítsék. Ami a bizonyításokat illeti, a *Principia* szigorúan a klasszikus geometria keretei között marad. Newton geometriájának van azonban egy furcsa vonása. Egy hozzáértő matematikus megérti és a helyességét ellenőrizni tudja, de soha az életben nem lenne képes az egyetlen fontos kérdést megválaszolni: hogy az ördögbe jött rá menderre Newton? Sok évvel később Gauss bizonyításokról beszélve megjegyezte, hogy „ha egy szép épület elkészült, akkor az állványzatnak már nem szabad látszania”, és feltehetőleg Newton is hasonlóan vélekedett. Jacobi Gausst „a matematika rókájának” nevezte, aki a homokban a farkával eltünteti

a nyomokat maga után. A Newton által buzgón eltüntetett nyomok a kalkulusról árulkodtak. Newton egy elsőprő erejű fegyvernek volt a birtokában. Mindent megtett annak érdekében, hogy ez titkos fegyver maradjon; vagy azért, hogy módszerei a kortársak részére emészthetőbbek legyenek, vagy azért, hogy további vitáknak elejét vegye, vagy esetleg azért, mert annyira csodálta a klasszikus görög geometriát. Követői azonban már nem voltak ennyire tartózkodók, rögtön felismerték a szerkezet használhatóságát, nyíltan és egyértelműen elfogadták a kalkulust. Ennek eredményeként megszületett a Természet leírásának új nyelve: a *differenciálegyenletek* elmélete.

Éljen a differenciál

Galileo Galilei a testek mozgását vizsgálva, megfigyeléseiből matematikai törvényszerűségeket vezetett le, és látnoki szavakkal így írt:

Kimutatták, hogy a lövedékek röppályája valamilyen görbe vonal, de senki sem mutatott rá arra, hogy ez egy parabola. Nekem sikerült bebizonyítanom ezt és más nagyszámú és nem kevésbé érdemleges tényt; azonban ennél is fontosabbnak tartom, hogy ebben a hatalmas és nagyszerű tudományban, amelynek az én munkám csak a kezdetét jelenti, olyan utak és eszközök tárultak fel, melyek segítségével az enyémnél élesebb elmék a legtávolibb sarkokat is fel fogják majd fedezni.

Newton elméje elég éles volt ahhoz, hogy olyan általános törvényeket keressen, amelyek a mozgások valamennyi fajtájára érvényesek, és ez a probléma vezette el őt a kalkulus megalkotásához. Mai szemmel nézve, ezt a következőképpen foglалhatjuk össze. Legyen x az időtől függő valamilyen mennyiség. A megváltozásának a pillanatnyi mértékét, vagyis a *deriváltját* x' -vel jelöljük. Ha például x a megtett út, akkor x' a sebesség. Az eljárást ismételve x'' -t kapjuk, amely jelen esetben a gyorsulás stb. Newton ezeket az objektumokat *fluxióknak*, az eredeti mennyiségeket pedig, amelyekből ezek származtak, *fluenseknek* nevezte.

A mozgásra vonatkozó Newton-féle alaptörvény azt mondja ki, hogy egy test *gyorsulása* egyenesen arányos a rá ható erővel, azaz

$$mx'' = F,$$

ahol m jelöli a test tömegét, x a helyzetét és F a hatóerőt. Ez egy *dif-*

ferenciálegyenlet, mert nem a keresett x -re vonatkozik, hanem annak (jelen esetben második) deriváltjára. A megoldás attól függ, hogyan változik F az időben, és egyáltalán nem nyilvánvaló. A lehetséges differenciálegyenletek száma végtelen, és az általuk leírható természeti jelenségek sincsenek kevesebben. Ezek az újfajta egyenletek új megoldási módszereket igényelnek. Közülük Newton mindenekelőtt a hatványsort kedvelte. Felteszi, hogy az

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

kifejezés írja le x -nek a t idő szerinti változását, ezt behelyettesíti az egyenletbe, és ebből rendre meghatározza $a_0, a_1, \dots$ értékét. Mások, például Leibniz, „zárt alakban”, azaz egy t -től függő képlet formájában keresték a megoldásokat. Egyik megközelítés sem igazán kielégítő. „Zárt alakban” megadható megoldások ritkán léteznek, bár akkor kétségkívül hasznosak, de amikor ezért sok esetben az egyenleteket addig csonkítják, amíg a megmaradt roncsnak már van zárt megoldása, akkor ennek a hasznossága már erősen vitatható. A hatványsor alakú megoldások pedig gyakran csak a változók kis értékeire érvényesek, sőt néha még ekkor sem, noha egy fontos módszer, az aszimptotikus sorok elmélete szerint bizonyos soroknak akkor is lehet értelmet tulajdonítani, ha nem konvergensek.

Napisten és kristálygömbök

Newton munkássága a legnagyobb közvetlen hatást az ősidők óta vizsgált égi mechanikára, az égitestek mozgásának tudományára gyakorolta. Az ókorban a babiloni csillagászok számos pontos megfigyelést tettek, és az égboltot a tapasztalat szintjén elég jól megismerték ahhoz, hogy a napfogyatkozásokat meg tudják jósolni. Elméleti kozmológiájuk, amely két korábbi felfogásból, az Eriduból és a Nippurból ötvöződött, már nem állt ilyen magas fokon. Az Eridu kozmológiában mindennek az alapja a víz. A világ a tengerből keletkezik és az veszi körül; az óceánfolyón túl a Napisten legelteti teheneit. A Nippur elméletben a világ egy hegy. A babiloniak azt tartották, hogy az égboltozat szilárd és az óceánra támaszkodik. Fölötte találhatók a felső vizek, azok fölött laknak az istenek, és ott van a „napfényes ház”, ahonnan a Nap minden reggel az egyik ajtón előbukkan és ahová

minden este egy másik ajtón keresztül visszatér. A hegy alatt terül el a holtak birodalma. Ugyanezek az elképzelések tükröződnek vissza az ótestamentumi világképben is.

Az egyiptomiak úgy gondolták, hogy a Föld egy hosszú doboz, amely észak-déli irányban húzódik (akárcsak a Nílus). Az ég a mennyezet; a csillagok lámpásai kötélén lógnak vagy az istenek viszik őket. Nappalra a csillagokat leoltják. A mennyezetet a sarkoknál négy hegy tartja. A csúcsok alatt egy párkány mentén egy folyó fut a Föld körül, és ennek egyik ága a Nílus. Rát, a Napistent egy csónak viszi körbe a folyón, és ha egy kígyó megtámadja, akkor lesz napfogyatkozás. Egyiptomban a Nílus jelentette minden élet forrását, és ezért az egyiptomi kozmológia jócskán felnagyította az érdemeit.

A görögök jón filozófiai iskolája nem sokat tett hozzá ehhez a képhez. Anaximandrosz szerint a Föld lapos; Anaximenész szerint az égbolt szilárd, amelyhez a csillagok szögekként vannak odaerősítve. Thalész ugyan megjósolta az i. e. 585-ös napfogyatkozást, de valószínűleg az egyiptomiak vagy a kaldeusok módszerét vette át. I. e. 500 körül Parmenidész rájött arra, hogy a Föld gömb alakú, de csak a pitagoreusok hittek neki, és ők is minden bizonnyal hibás megfontolásokból. Parmenidész azt állította, hogy a Föld mozdulatlan, mert semmi ok sincs arra, hogy az egyik vagy a másik irányban mozduljon el. A pitagoreusok jellegzetes számmisztikájukkal tovább cifrázták ezt az elméletet. Szerintük tíz égitest van, mivel minden szám forrása a $10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Ezek a Föld, a Hold, a Nap, a Vénusz, a Merkúr, a Mars, a Jupiter, a Szaturnusz, a Csillaggömb és az Antichton (az Ellen-Föld). Közöttük égi tűz ég, és a Föld az Antichtont állandóan elrejtí előlünk (sőt szerencsés módon a tüzet is eltakarja). A Föld gömb alakú, és a Hold nem forog. A Nap egy év alatt kerüli meg a központi tüzeket, a Föld pedig mindössze 24 óra alatt; ez magyarázza a nappalok és éjszakák váltakozását. A bolygók harmonikus hangokat bocsátanak ki („a szférák zenéje”), de ezt nem halljuk, mert teljesen hozzászoktunk.

Platón szerint a Föld kerek és a világegyetem középpontjában fekszik, míg minden más körülötte kering egy csomó üreges gömbön, amelyek a tengelyük körül forognak. Eudoxosz ezt a modellt úgy módosította, hogy a bolygók mozgásában megfigyelt irányváltoztatásokra és a pályák ferdeségére is magyarázatot adjon. A gömbök pólusait mindig a következő gömbhöz erősítette, és összesen 27 gömböt használt

fel. Kallipposz ezt 34 gömbös rendszerré bővítette, amely még jobb egyezést mutatott a megfigyelésekkel. Arisztotelész elfogadta Eudoxosz gömbjeit, de elvetette az égi harmóniát. A gömböket ténylegesen létezőknek tekintette, és ezért a rendszert újakkal kellett kiegészítenie, nehogy az egyik rész mozgása átterjedjen a következőre. Nála 56 gömb szerepel. Hérakleidész (i. e. 370-ben) úgy vélte, hogy a Föld forog, a csillagok helyzete rögzített, továbbá a Vénusz és a Merkúr nem a Föld, hanem a Nap körül kering. Arisztarkhosz (i. e. 281-ben) azt állította, hogy a Föld mozog a Nap körül. Amikor megfigyelték, hogy a Hold mérete változik, tehát nem keringhet körpályán a Föld körül, akkor beiktattak egy kis excentrikus kört. Ez még mindig nem volt kielégítő, ezért Apollóniosz (i. e. 230-ban) *epiciklusokat* vezetett be. A Föld olyan körpályán halad, amelynek a középpontja egy másik körpályán mozog. Klaudiosz Ptolemaiosz Alexandriában élt i. sz. 100 és 160 között. Bebizonyította, hogy mindaz, ami egy excenterrel elérhető, ugyanúgy megvalósítható egy epiciklussal is, és ezzel az excenter a feledés homályába merültek. Ptolemaiosz addig finomította az epiciklusok rendszerét, amíg ez a megfigyelésekkel olyan jó egyezést mutatott, hogy 1400 évig hozzá sem kellett nyúlni.

Az 1473-ban született Nikolausz Kopernikusz észrevette, hogy a ptolemaioszi világrendszerben igen sok *egyforma* epiciklus szerepel, és rájött, hogy ezek mind kiküszöbölhetők, ha azt tesszük fel, hogy a Föld kering a Nap körül. Az epiciklusok csupán a Föld mozgásának a többi égitestnél jelentkező vetületei. Más szóval, egy heliocentrikus elmélet *egyszerűbb*, és ezért helyesebb ezt választanunk. Jól ismert, hogy az egyházi hatóságok más véleményen voltak. Kopernikusz bölcsen tartózkodott attól, hogy elképzelései még életében napvilágot lássanak.² Később azonban egy Galilei nevű vakmerőbb egyént Firenzében az inkvizíciónak kellett felelősségre vonnia:

Elítélendő állítások. Az ítélelhozatalra a Városi Szent Hivatalban 1616. február 24-én, szerdán, az alulírott Teológus Atyák jelenlétében került sor. *Első állítás:* A Nap a világ közepe és helyi mozgások szempontjából teljesen mozdulatlan. *Vélemény:*

² Ebben van némi költői túlzás. Kopernikusz fő műve valóban csak halála évében, 1543-ban jelent meg, és ezt a szerző csak halálos ágyán látta, de gondolatai lényegét már az 1512-ben kézirat formájában körözött *Commentariolus* tartalmazza, Rheticus 1540-ben írt *Narratio Prima* c. könyve pedig részletesen kifejti. (FR)

Mindenki úgy nyilatkozott, hogy a fenti állítás nevetséges és filozófiai szempontból abszurd, valamint formailag is eretnek, ugyanis sok helyen kifejezetten ellentmond a Szentírás tanainak, továbbá az Egyházatyák és a tudós teológusok általános magyarázatának és értelmezésének. *Második állítás:* A Föld nem a világ közepe és nem is mozdulatlan, hanem teljes egésze mozog, sőt napi mozgást is végez. *Vélemény:* Mindenki azt mondta, hogy ezt az állítást filozófiaiilag el kell ítélni; az állítás a teológiai igazság fényében legalábbis hitbeli eltérélyedést mutat.

Tycho Brahe (1540–1601) sem hitt a heliocentrikus elméletben, de csilgászati érdeklődése hamarosan szinte teljesen kísérleti síkra terelődött. Hosszú időn át igen kiterjedt és meglepően pontos megfigyeléseket végzett, és végül a kopernikuszi elmélet egyéni változatával állt elő. Halálos ágyán arra kérte Johannes Keplert, hogy az csináljon rendet a kozmológiában. Kepler úgy érezte, hogy a ptolemaioszi elmélet, még a kopernikuszi átdolgozott formájában is menthetetlenül önkényes és bonyolult. Kepler a bolygók mozgásában keresett szabályszerűségeket. Ezek közül nem mindegyik tarthat számot mai elismerésünkre. A *Mysterium Cosmographicum*ban például a bolygók elhelyezkedését a szféráik közé iktatott szabályos testek segítségével magyarázza meg:

Merkúr	
	Oktaéder
Vénusz	
	Ikozaéder
Föld	
	Dodekaéder
Mars	
	Tetraéder
Jupiter	
	Kocka
Szaturmusz	

Ez a bájos elmélet kétségkívül magyarázatot ad arra, hogy miért csak öt bolygó van (a Földtől eltekintve, ami azért mégiscsak más): csak öt szabályos test létezik. Abban az időben ez az elv is legalább annyira értelmesnek tűnt, mint Kepler bármely másikk állítása (és ez kínosan emlékeztet engem az elemi részecskék olyan mai elméleteire, amelyek a csoportrepresentációkon alapulnak). Szinte észrevétlenül bújik meg

Kepler munkáiban három olyan alapvető törvény, amelyek az idő vasfogának sokkal jobban ellenálltak.

Kepler a Marsot szemelte ki magának, és rögtön látni fogjuk, hogy ez szerencsés választásnak bizonyult. Először feltette, hogy a Mars excentrikus körpályán mozog. Végző soron, ennek a körpálya-hipotézisnek az alapján alkotta meg *Második törvényét*: egy bolygó egyenlő idők alatt egyenlő területeket sűrol.³ Azután rájött, hogy a kör nem lesz jó, de valami ovális esetleg igen. Végül a megfigyelések kényszerítették rá, szinte akarata ellenére, az *Első törvényét*: a bolygók ellipszis alakú pályán keringenek, amelynek egyik fókusza a Nap. Itt mutatkozik meg a szerencse: a Mars pályája nagyon is eltér a körtől, és így az ellipszis alak jól megmutatkozik a megfigyelésekben. Kepler ezután észrevette, hogy a második törvény ellipszis pályákra is érvényben marad, ezen a felfedezésén egyébként nem győzött eleget csodálkozni. Mi a helyzet a bolygóknak a Naptól mért távolságával? A szabályos tesztek után most zenei analógiákat keresett, de ezúttal sem járt sikerrel. Végül ráhibázott a *Harmadik törvényre*: a távolság köbe a keringési idő négyzetével arányos. Keplert határtalan boldogság töltötte el:

Most, miután 18 hónappal ezelőtt az első hajnali derengés, három hónappal ezelőtt a reggeli világosság, pár nappal ezelőtt viszont már a ragyogó Nap világította meg ezt a csodálatos színjátékot, semmi sem tart vissza: igen, szent őrzöngés vesz erőt rajtam. Fölényesen dacolok a halandókkal, nyíltan bevallva: megloptam az egyiptomiak aranyedényeit, hogy istenemnek szentelt hajlékot építsek azokból messze túl Egyiptom határain. Bocsássátok meg nekem, hogy így örülök. Ám, haragudjatok, azt is elviselem. Rajta, elvetem a kockát, és könyvet írok a jelennek vagy az utókornak. Nekem mindegy! Ám, várjon száz évig olvasójára; nem várt-e az Isten is hatezer évig, míg értőjére lett?!⁴

Noha a három törvény szinte elvész a csomó metafizikus elmélkedés között, Kepler aranyat talált, és ezt ő is jól tudta.

³ Pontosabban: a vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket sűrol. (Szerk.)

⁴ Kepler: *Harmonices Mundi*. A fordítást Simonyi Károly *A fizika kultúrtörténete* c. könyvéből vettük át.

Egyenletek mindenütt

Newton mindezt az egyetemes tömegvonzás elméletével magyarázta meg. A világegyetemben bármely két részecske között vonzóerő lép fel, amely egyenesen arányos a tömegükkel és fordítottan arányos a távolságuk négyzetével. A „fordított négyzetesség” adja Newton elméletének a pontosságát, de az univerzalitás — az, hogy *minden* részecskére érvényes — adja az erejét. Részecskék és testek bármely alakzatára alkalmazható. Legalábbis elvileg, mert könnyebb egy egyenletet felállítani, mint megoldani. Két részecske esetén az egyenlet megoldható, és olyan elliptikus pályákat kapunk, amelyek megfelelnek a kísérletileg felfedezett három Kepler-törvénynek. Megfordítva, Kepler törvényeiből következik, hogy ha a bolygók mozgását egy erő okozza, akkor ez egy fordított négyzetességi szabálynak kell hogy eleget tegyen. Newton elméletei a Hold mozgásában mutatkozó igen finom hatásokra is magyarázatot adnak, egy későbbi diadaluk pedig annak a nagy kozmikus táncnak az értelmezése, amelyben a Jupiter és a Szaturnusz a várható helyzeteikhez képest felváltva hátrébb, illetve előrébb mutatkoznak. Newton gondolatai kezdetben még így is sok ellenkezést váltottak ki, mert egy távolra ható erő fogalmát sokan kétségbe vonták.

Általánosabban, kezdtek elterjedni a *parciális differenciálegyenletek*, amelyekben egynél több mennyiség megváltozásának a mértéke szerepel. 1746-ban d'Alembert sikerrel oldotta meg velük a rezgő húr problémáját. Daniel Bernoulli és Euler kiterjesztették ezeket a gondolatokat a víz- és hanghullámokra, a folyadékáramlásra és a szilárd testek deformációira is. A *hullámegyenlet* a matematikai repertoár állandó darabja lett. Legendre és Laplace a newtoni gravitációból kifejlesztette a potenciálméletet, amely többek között az ellipszoidok gravitációs vonzását vizsgálja, mert addigra már ismertté vált, hogy a Föld nem teljesen gömb alakú, hanem a sarkainál belapul. Az új csillagászati felfedezések, mint a kisbolygóké vagy az Uránuszé és a Neptunuszé, tökéletesen beleillettek a newtoni képbe, sőt annak alapján előre megjósolták őket. Joseph Fourier *hőegyenlete* megnyitotta az utat a termodinamika és a Fourier-analízis előtt. James Clerk Maxwell az egész elektromosságtant és mágnességet összefoglalta a *Maxwell-egyenletekben*. Hamarosan csaknem az egész fizikát parciális differenciálegyenletek segítségével írták le, és ez olyan nagy mértékben terjedt el, hogy sok tudós a valóság modellezését még ma is csak ezen az úton tudja elképzelni.

Az Oszkár-díj

A fenti tevékenységek eredményeképpen a bolygómozgás Newton-féle leírását az emberek kezdték a Végső Igazság piedesztáljára emelni. A Naprendszer amolyan végtelenül pontos óramű alakját öltötte, amelyet hajdanán a Teremtő Kéz indított el, amikor a bolygókat pályájukra állította. Ez az óra sohasem áll meg. De vajon megbolondulhat-e? Elképzelhető-e például, hogy a többi bolygó rezonanciába kerül a Földdel, ahogy egy gyerek lábai meghajtanak egy hintát, és a Föld összeütközik a Marssal vagy elszökik a hideg és üres csillagközi térbe? A mienknél egyszerűbb képzeletbeli naprendszerekkel ez megeshet. Megtörténhet-e *velünk*? 1887-ben II. Oszkár svéd király 2500 koronás díjat ajánlott fel a kérdés eldöntéséért.

Az akkori tudomány messze járt attól, hogy kielégítő feleletet adjon. Két test esetére megvolt zárt alakban a pontos megoldás: a Kepler-féle ellipszisek. Ha egy naprendszer egy napból és egy bolygóból áll, akkor nem bolondulhat meg; szükségképpen ugyanazok a mozgások ismétlődnek benne örökkön-örökké. Az általános *háromtest*-probléma már teljesen reménytelennek tűnt. A tudomány mai állása szerint nem létezik zárt alakban megadható megoldás; a rendszer általános viselkedése mindenesetre roppant bonyolult. Néhány speciális megoldás ismeretes: például Joseph-Louis Lagrange megmutatta, hogy a három test szinkronban mozoghat ellipszis pályákon. Ez a fajta mozgás azonban olyan matematikai véletlen, amely a gyakorlatban valószínűleg sohasem fordul elő. Newton hatványsor-módszerei segíthetnek egy kicsit, de leginkább olyan problémáknál, amikor a testek többségének a tömege elhanyagolhatóan kicsi: ilyen rendszert alkot például a Nap, a Jupiter és egy kisbolygó. Lagrange és Laplace közösen kimutatták, hogy a bolygók pályáinak a köralaktól való összeltérése a Naprendszeren belül állandó, és még ha ez az összmenyiség a Földön koncentrálódik is, nem elegendő ahhoz, hogy a Föld üstökösszerű pályára váltson és végleg elhagyja a Naprendszert. Ez azonban nem zárta ki azt az eshetőséget, hogy a Föld lassacskán energiát gyűjt más bolygók rovására, egyre nagyobb majdnem-körpályákra sodródik, és végül a csend és a sötétség nyel el bennünket. Még mindig hiányzott annak a bizonyítása, hogy a kandalló melegét nem hagyjuk el, és a tűzbe sem pottyanunk bele, és erre ajánlotta fel koronáit a király.

Az utolsó mindentudó

Valószínűleg Poincaré volt az utolsó, aki *mindent* teljesen értett saját korának matematikájából. Természetesen megpróbálkozott Oszkár király problémájával is, és jellemző módon ehhez a matematika egy új ágát találta fel: az *analysis situs*t, mai nevén a topológiát. Ennek alkalmazhatóságát bemutatandó, tegyük fel, igazolni tudnánk, hogy egy bizonyos idő múlva valamennyi bolygó ugyanabba a viszonylagos helyzetbe kerül, mint amelyben jelenleg található. Ekkor Newton mozgástörvényéből következik, hogy a mozgás ezután vég nélkül ismétlődni fog. Poincaré jól látta, hogy ez az elv lényegében geometriai. Newton dinamikája szerint egy rendszer mozgását le tudjuk írni, ha egy adott pillanatban ismerjük benne minden részecske helyét és sebességét. Ezt „szemléltethetjük” például egy hatalmas sokdimenziós térben, amelyhez minden részecske hat dimenzióval járul hozzá, a három hely- és a három sebességkoordinátának megfelelően. Ha egy rendszer N testből áll (a Naprendszer esetében $N = 10$, ha a holdaktól eltekintünk, N körülbelül 40, ha a holdakat is beleszámítjuk, és N több milliárd, ha a Szaturnusz gyűrűiben található minden részecskét figyelembe veszünk), akkor a rendszer mozgásának a $6N$ -dimenziós *fázistérben* (vagy *állapot térben*) egyetlen pont mozgása felel meg. Ha a fázistérben ennek a pontnak a pályája (az ún. trajektória) *zárt* hurok-ként önmagába tér vissza, akkor megválaszoltuk Oszkár király kérdését. Egyetlen bolygó sem vándorolhat el; a rendszert jellemző pont, és így az egész rendszer is *periodikusan* mozog, örökösen ugyanazokat a mozgásokat ismétli.

Látjuk tehát, milyen fontos egy olyan egyszerűnek tűnő kérdés, hogy „a fázistérben a trajektória záródik-e”. Poincaré olyan módszereket dolgozott ki, amelyekkel az ilyen kérdéseket *közvetlenül* lehet kezelni, és nem kell hozzá előzetesen az egyenleteket megoldani vagy a számadatokat kiszámolni. A Naprendszer stabilitásának a kérdését nem tudta elintézni, erre az 1960-as évekig kellett várni. Azonban akkora rést ütött a probléma falán, hogy 1889-ben megkapta az áhított Oszkár-díjat, amelyet teljes mértékben meg is érdemelt. Feltalált egy egészen újfajta matematikát. Megmutatta, hogyan lehet különféle fizikai problémákat a topológiára visszavezetni, és néhány esetben az így adódó topológiai problémát is megoldotta. Bebizonyította például, hogy három testből álló rendszer esetén mindig végtelen sok külön-

bőző periodikus mozgás létezik, feltéve, hogy egy bizonyos topológiai tétel igaz. A Poincaré halálát követő évben, 1913-ban George Birkhoff bebizonyította ezt a tételt.

A nagy utazás

Ha a Hold mozgását teljes pontossággal meg tudjuk jósolni, akkor a navigációhoz elég, ha ezt a mozgást megfigyeljük a csillagok alkot-ta háttérhez képest. Ez a probléma annyira gyakorlati, hogy még pénzdíjat is kitűztek a megoldásáért. Ilyen és más, kevésbé anyagi-as természetű okok miatt nagyon sokat foglalkoztak a háromtest-problé-mával: hogyan mozog egy három tömegpontból álló rendszer (mint a Nap, a Föld és a Hold) a newtoni gravitáció hatására. A megfelelő mozgásegyenleteket nem nehéz felírni, azonban összehasonlíthatatlanul nehezebb megoldani őket. A kepleri ellipszisekhez hasonló egy-szerű zárt alakban nem adható meg a megoldás. Az egyik gyakorlati módszer az, hogy az igazi mozgást sorokkal közelítjük. Ez hatékonyan megtehető, azonban nagyon bonyolult képleteket kapunk. Charles De-launay egyetlen, a Hold mozgásával kapcsolatos formulának egy egész *könyvet* szentelt. Egy másik lehetőség, hogy az egyenleteket numeri-kusan megoldjuk számítógéppel, de ez igazán jól csak olyan speciális problémáknál alkalmazható mint például a holdraszállás, és nem sokat segít az általános esetben.

Csak úgy mellékesen: azt szokták mondani, hogy a tudomány hala-dását azzal az n számértékkel mérhetjük, amelyre az n -test-probléma *nem* oldható meg. A newtoni mechanikában a 3-test-probléma tűnik megoldhatatlannak. A relativitáselméletben a 2-test-probléma okoz gondot. A kvantumelmélet az 1-test-problémánál (egyetlen részecské-nél) akad meg; és a relativisztikus kvantumelmélet a 0-test-problémá-nál (a vákuumnál) ütközik nehézségbe!

Bonyolult számításokkal kaphatunk ugyan válaszokat, lényegi meg-látást azonban nemigen. A 3-test-problémát ma topologikusan köze-lítjük meg: célunk a főbb minőségi (kvalitatív) tulajdonságok leolva-sása. Ismeretes, hogy ezek mérhetetlenül bonyolultak is lehetnek. Ha például egy könnyű test kering két nehéz körül, akkor a pályáján gya-korlatilag tetszőleges forgássorozatot produkálhat előbb az első, majd pedig a második nehéz test körül.

Hogy mennyire összetett problémákkal állunk szemben, az az n -test-

probléma *szingularitásaival* foglalkozó legújabb kutatásokból is kiderül. Szingularitáson (vagy elfajuláson) egy olyan eseményt értünk, amikor a mozgás már nem folyatható a Newton-törvények adta matematikai modell keretein belül. A legegyszerűbb szingularitások az ütközések, amikor több test találkozik. 1897-ben Paul Painlevé bebizonyította, hogy három test esetén az ütközés az egyetlen lehetséges szingularitás. Két test ütközését „szabályozott mederben” tarthatjuk, ha feltesszük, hogy rugalmasan lepattannak egymásról: az így nyert megoldás az ütközés utáni időkre is érvényes. Három test egyidejű ütközése már nem szabályozható ily módon: a mozgástörvények alapján egy ilyen ütközés akár a világegyetem végét is jelentheti, mert nem lehet megjósolni, hogyan viselkedik a rendszer ezután. Painlevé úgy vélte, hogy háromnál több test esetén sokkal rondább szingularitások is felléphetnek: például testek véges idő alatt elszökhetnek a végtelenbe, vagy egyre vadabb oszcillációs táncba kezhetnek.

1984-ben Joseph Gerver (H. J. Sperling, Donald Saari, John Mather és R. McGehee korábbi munkáit folytatva) nem szabatosan ugyan, de meggyőző erővel demonstrálta olyan öt tömegpontból álló alakzat létezését, amely a benne fellépő kölcsönös newtoni tömegvonzás hatására véges idő alatt kirepíti saját magát a végtelenbe. Gerver nagyon szellemes mechanizmust javasol. Képzeljünk el három jókora csillagot. (Az asztronómiai szóhasználat csak arra szolgál, hogy könnyebben magunk elé tudjuk képzelni a tömegek nagyságrendjét, de megismétlem, hogy *pontszerű* testekről van szó.) A három csillagot rendezzük olyan háromszög alakba, amely a legnehezebb csillagnál tompaszögű, és indítsuk el a rendszert úgy, hogy ez a háromszög, alakját megtartva, egyenletes sebességgel távolulni kezdjen. Kívülről, közvetlen közelükben egy aprócska aszteroida kering körülöttük. Valahányszor az aszteroida egy csillag mellett elhalad, ugyanolyan „csúszlihatás” éri, mint amilyen a Voyager űrhajó naprendszerbeli útját is segítette. Ennek eredményeként az aszteroida az egyik csillagtól némi mozgási energiára tesz szert, amelyet azután megoszt a másik két csillaggal, és így fokozza azok (és a saját) sebességét. Ha eközben valahogyan az első csillag energiáját is növelni lehetne, akkor el tudnánk érni, hogy a háromszög egyre gyorsuló ütemben távoluljon és *véges* idő alatt eltűnjön a végtelenben. Az energiamegmaradás törvénye ezt természetesen nem teszi lehetővé. Mégis van kiút. Vegyünk egy ötödik testet, egy bolygót, amely a legnehezebb csillag körül kering. Érjük el, hogy az aszteroida

a bolygó rovására nyerjen energiát, és ennek egy részét egy cikcakkos parittyalövéssel a csillagnak adja át. Ettől eltekintve minden történjen ugyanúgy, mint az előbb. Az idő múlásával a csillagkép egyre gyorsabban tágul, de alakját megőrzi; az aszteroida egyre örültebb tempóban cikázik körbe háromszög alakú pályáján; a bolygó pedig egyre alacsonyabban köröz a nagy csillag körül. Az akció eredményeképpen *mind az öt test* véges idő alatt elszökik a végtelenbe. A jelenet beállítása ügyes egyensúlyozást igényel, de Gerver jó érveket sorol fel amellett, hogy ez valóban lehetséges. Úgy hírlik, Mather hamarosan már szabatosan is be tudja majd bizonyítani, hogy a Nagy Utazás tényleg megtörténhet. A valódi világegyetemben a testek mérete nem lehet nulla, és így a mutatóvány számos ok miatt nem sikerülhet (más testek, relativisztikus hatások). Gerver ötlete azonban merész és fantáziadús találatot jelent egy híres problémával vívott párviadalban. Isaac Newton biztosan el lenne tőle ragadtatva.

Az emberi gondolkodás sztratoszférája

Az imponáló kezdet után, amelynek csúcspontjaként Birkhoff bebizonyította a háromtest-problémára vonatkozó Poincaré-sejtést, a topológia kikerült a tudományos nyilvánosság látóköréből. Ennek az volt az oka, hogy a topológiai problémák *nem* mindig oldhatók meg könnyen. A kalkulus bemutatkozása azért sikerült olyan jól, mert rengeteg az olyan függvény, amelyet könnyű differenciálni vagy integrálni, és rengeteg a *megoldható* differenciálegyenlet, még ha a legérdekesebbek nincsenek is köztük. A topológia számára, amely ott látott munkához, ahol a kalkulus megakadt, már nem maradt könnyű zsákmány. Van ugyan szép topologikus bizonyítás arra, hogy az inga lengése periodikus, de mivel a tényt már korábban is ismerték (bár a szokásos bizonyítás teljes ostobaság), az új bizonyítástól a topológusokon kívül senki sem fog tűzbe jönni. A fizika által felvetett topologikus problémák annyira nehéznek bizonyultak, hogy a matematikusok nem tudták a fizikusok igényeit gyorsbüfé szakácsok módjára kielégíteni („hozd csak a problémádat topologizált alakban, és mi megmondjuk a választ”). A matematikusoknak mindent előről kellett kezdeniük, hogy a topológiai problémák kezeléséhez új eszközök egész tárházát fejlesszék ki.

Nem azt akarom ezzel állítani, hogy a topológia a *matematika* más ágaitól elszigetelődött volna; ennek épp az ellenkezője történt. Az

1930-as és 40-es években Lefschetz az algebrai geometriában, Marston Morse pedig a differenciálgeometriában használta fel a topológiát (ezek az eredmények azóta fontos szerephez jutottak a tudományos alkalmazásokban). A topológiára azonban általában nem úgy tekintettek, hogy ez az Amit Minden Ifjú Fizikusnak Tudni Kell. Sőt, az 1950-es évekre az egész tevékenység meglehetősen messzire került a fizikától. Ennek így kellett történnie: ezt az irányt szabta maga a topológia. A topológia tehát önmagába fordult, hogy saját belső problémáit megoldja. A fizikusok rövidesen minden érdeklődésüket elvesztették iránta: számukra az egész körülbelül ugyanolyan fontossággal bírt, mint az, hogy a bölcs Gautama törökülésben medítál egy fa alatt a szenvedés természetéről. Egy nem-szakember számára úgy tűnik, hogy különleges elmélyültség szükséges a topológia befogadásához. Ennek tudható be, hogy Alekszandr Szolzsenyicin, aki matematikai képzettsége folytán felismerte ezt az önelemző folyamatot, de nem látta a kiváltó okok történeti hátterét, így írt *A pokol tornácában*:⁵

Nyerzsin, szigorúan összezárt szájjával, már szinte sértően figyelmetlenné vált: anynyi fáradságot sem vett, hogy megkérdezze, pontosan mit is írt Verenyov a matematikának erről a száraz ágáról, amellyel valaha ő maga is foglalkozott egy kicsit. Egyszeriben megsajnálta Verenyovot... Topológia! Az emberi gondolkodás sztratoszférája. A huszonnegyedik században tán kell majd valakinek, de egyelőre...

Nincs mit mondanom napokról, világokról —

Csupáncsak az embernek szenvedését látom...

Oroszország modern prófétája ezúttal még életében rossz jósnak bizonyult. Szinte minden, ami a modern dinamikában valamennyire is számít, kisebb vagy nagyobb adag topológiát is felhasznál, s ez teremtetten meg a rend érzetét egy olyan területen, amely húsz éve még reménytelenül zűrzavarosnak és megmagyarázhatatlanul rejtélyesnek látszott.

⁵ Az idézet szövege Makai Imre fordítása alapján készült.

A világ egy szörpamacsban

A topologikus rálátás számos egymással látszólag össze nem függő dolgot helyezhet új megvilágításba. Ennek illusztrálásaként tekintsünk egy kisebb jelentőségű fegyvertényt, amely (megfelelően finomított megfogalmazásban) azt mondja ki, hogy egy gömb alakú szörpamacsot nem lehet úgy megfésülni, hogy mindenütt sima legyen. Íme néhány következmény:

- (1) A Föld felszínén bármely pillanatban van legalább egy olyan pont, ahol a vízszintes szélesség nulla. (Ha nem lenne, fésüljünk mindenütt szélirányban.)
- (2) Az olyan gömb alakú mágneses palackok, mint amilyeneket az 1950-es években a fúziós reaktorkísérleteknél használtak, szükségképpen szivárognak. (Ott szivárognak, ahol a mágneses erő merőleges a felületükre, vagyis ahol a vízszintes komponens nulla.)
- (3) A kutyák, medvék, gepárdok és egerek „bundafrizurájában” biztosan kell lennie választéknak. (Nyilvánvaló.)
- (4) Minden polinomnak van komplex gyöke. (A részletes bizonyítás azon múlik, hogy a komplex számok és egy végtelen távoli pont együttesen egy gömböt alkotnak.)
- (5) Egy sejt felületén a kémiai gradiensnek szükségképpen van kritikus pontja (ahol nincs helyi „lefele” irány).

Ez viszonylag egyszerű eset, és az „alkalmazások” sem feltétlenül tartoznak a tudomány frontvonalának legégetőbb kérdései közé. Bonyos nehezebb és technikásabb topológiatételek legújabb alkalmazásai viszont már korszakos jelentőséggel bírnak, többek között azokban a jelenleg folyó kutatásokban, amelyek a Természet négy alapvető kölcsönhatásának az egységes tárgyalására irányulnak (lásd a 17. fejezetet). A fentiekben csupán egy közérthető példán keresztül próbáltam bemutatni egy topologikus meggondolás „mindenhatóságát”.

A köldöknézés előnyei

Mára már a fizika lomtárába került mindaz, ami eredetileg a topológia létrejöttét előidézte. Kinek lenne fontos egy newtoni naprendszer stabilitása, amikor a minket jelenleg érdeklő eset már Einstein törvényének engedelmeskedik, nem pedig Newtonénak. És különben is,

az atomelmélet szerint a Nap végül is fel fog robbanni, ami kérdésesé teszi a napközi bolygómozgás hosszútávú jövőjét, legyen az akár newtoni, akár einsteini. A tudományban mindezek a nagy horderejű változások öt évtized alatt következtek be, és eközben a topológia nem sokat tett a köldöknézésen kívül. (Ez a tevékenysége persze kitűnően illett a témájához.) Mivel az egész öntömjénező gyakorlatozás egyetlen praktikus oka a newtoni fizikában rejtett, ezért úgy tűnik, hogy amíg az orvos hosszasan tűnődött az alkalmazandó gyógymódon, a beteg közben meghalt. A topológia azonban paradox módon, immár borotvaélesre köszörülve, kitüntetett fontosságú maradt a fizika és más tudományok szempontjából. Például (2) a nukleáris technikára, (5) pedig a biokémiára vonatkozik. Nemcsak hogy Poincaré nem gondolt ilyen alkalmazásokra a topológia tervezésekor: maguk ezek a tudományágak sem léteztek, amikor a topológia megszületett.

Hogyan lehetséges ez? Poincaré jobb próféta volt, mint Szolozsenyicin? Minden bizonnyal, de nem ez a dolog lényege. A topológia jelenlegi sikere, amelyre néhány példát a következő fejezetekben részletesebben bemutatunk, nem Poincaré látnoki képességeinek, hanem nagyrészt matematikai képzelőerejének és jó ízlésének köszönhető. A topológia éppen *azért* lett sikerághozat, mert elfelejtkezett az eredeti problémáknak a részleteiről, és ehelyett azok mélyebben fekvő szerkezetére koncentrált. Ez a mélyebb szerkezet minden olyan matematikai vizsgálatban felbukkan, ahol a folytonosság szerepet játszik. Ennek következtében a topológia szinte mindenre rányomja a bélyegét. Hogy ez a dolgokat mennyiben viszi előbbre, az természetesen a megválaszolható kérdéstől függ.

Óvakodj az üregértől!

A topológia érdemeit alaposabban szemügyre vesszük majd az elkövetkező néhány fejezetben, nem zárhatjuk azonban le a jelenlegit anélkül, hogy Oszkár király problémájára ne adnánk meg a modern kor válaszát. 1963-ban Kolmogorov, Vlagyimir Arnold és Jürgen Moser arra a kérdésre, „Vajon stabil-e a Naprendszer?”, átfogó topologikus megfontolások segítségével végre megnyugtató és határozott választ adtak: „Valószínűleg”. Módszerük (amelyet KAM-elméletnek szokás nevezni) azt igazolja, hogy a lehetséges mozgások *legtöbbje* periodikus mozgások szuperpozíciójából épül fel. A bolygóállások sohasem ismét-

lődnek meg *teljes pontossággal*, de állandóan *majdnem* ez történik. Mindazonáltal, ha véletlenszerűen választunk egy kezdeti felállást, akkor picike, de nullánál nagyobb esély nyílik egy másfajta mozgásra, amelynél a rendszer *esetleg* elveszíti egyik bolygóját (vagy még ennél is rosszabb történik), bár ez nem következik be túl gyorsan. Minden attól függ, pontosan hová és milyen sebességre állította be a Teremtő Kéz a bolygókat. A dologban az a meghökkentő, hogy megfigyeléssel sehogyan sem lehet eldönteni, hogy a kétféle viselkedés közül melyik fog bekövetkezni. Vegyünk egy olyan tetszőleges elrendezést, amely majdnem periodikus mozgáshoz vezet; ehhez akármilyen közel található olyan elrendezések is, amelyeknél az egyik bolygó elszökik. Megfordítva, bármely olyan kezdő állapotot nézve, amely később elveszti egyik bolygóját, hozzá tetszőlegesen közel vannak olyanok is, amelyek majdnem periodikus mozgást biztosítanak. A kétféle viselkedés úgy összekeveredik, mint milánói makaróniban a tészta és a szósz. Ha milliárd fényévyire innen egy bolygón egy egér hirtelen megrántja a bajuszát, ez a Naprendszer egy stabil elrendezésből instabilba billentheti át és viszont. Nehéz lenne ezt az elméletet közvetlen megfigyelés útján igazolni, mint ahogy a newtoni elmélet általános érvényűsége is nehezen igazolható. A KAM-elmélet azonban olyan eseményeket jósol meg, például a kisbolygók Nap körüli elhelyezkedéséről vagy a Szaturnusz gyűrűiről, amelyeket megfigyeléssel ellenőrizni tudunk. Alkalmazható a kvantumelméletben is, például gyorsítókbán a részecskék instabilitására vonatkozóan. A topológia olyan bonyolult jelenségeket tárt fel, amelyekről Oszkár király nem is álmodott; de egyúttal eszközt is adott a kezünkbe ahhoz, hogy ezeket megszelídítsük és szolgálatunkba állítsuk.

KÉSZ KATASZTRÓFA!

A mindennapi élet számos olyan jelensége, amely önmagában véve jelentéktelen — például egy régi fal repedései, egy felhő alakja, egy lehulló levél pályája vagy a hab egy korsó sörben —, nagyon nehezen formalizálható; de vajon nem képzelhető-e el, hogy egy olyan matematikai elméletből, amelyet az ilyen egyszerű jelenségek leírására kezdeményeztek, végül a tudomány számára komoly haszon származik?

René Thom

Csábítóan egyszerű azt képzelni, hogy a fokozatosan változó körülmények fokozatosan változó hatásokat okoznak. Miért haltak ki a dinoszauruszok olyan hirtelen? Az egyik divatos elmélet szerint azért, mert egy hatalmas meteor csapódott a Földre. Más teóriák az akkori éghajlat megváltozását vagy a járványokat vagy az élelemforrások elapadását teszik felelőssé. Hallgatólagosan mindegyik abból a feltevésből indul ki, hogy egy drámai hatásnak drámai oka kell hogy legyen. Elvégre meglepő volna, ha egy olyan világban, amelyben nemigen látszanak változások, az összes dinoszaurusz egyszer csak a fejébe venné, hogy kihal.

Es mégis ... melegítsünk egy bögre vizet fokozatosan, egyenletesen. Ez ugyanilyen fokozatosan és egyenletesen melegszik egészen addig, amíg a hőmérséklet el nem éri a $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ot. Ekkor, változatlan hevítés mellett, hirtelen forrni kezd, és gőzzé alakul át. Miért? Milyen drámai ok idézte elő ezt a szó szoros értelmében robbanásszerű hatást? Mi volt a különleges abban a hőményiségben, amely a gőzt termelte? Milyen speciális tulajdonságot rejt az az $N+1$ -edik szalmaszál, amelytől a teve gerince összeroppan, amikor az előző N nem járt ilyen hatással? Miért lép a hidrogén és az oxigén sima reakcióba egy adott nyomáson, és miért robbannak fel egy másik, esetleg *alacsonyabb* nyomáson? Mitől pukkan szét egy léggömb, miért borul fel egy hajó, mitől pattan el egy

rugalmas szalag, miért lendül támadásba egy sarokba szorított patkány, és mitől gurulnak dühbe a molesztált apák? Az okok fokozatos változása is előidézh^{et} hirtelen hatásokat. De hogyan?

Különleges keverék

A tudomány hagyományos, kalkulusra alapozott matematikai modelljei elsősorban a sima, folytonos változások leírására alkalmasak. Azok az újabb módszerek, amelyeket a kombinatorika és a számítástudomány — divatos elnevezéssel: a „véges matematika” — kínál, a teljesen diszkrét jelenségeknél használhatók a leginkább. A legérdekesebb természeti események jelentős része viszont a diszkrét és a folytonos sajátos keverékét mutatja. A sima hullám, amely szelíden gördül a lankás part felé, majd tajtékot permetezve megtörik; a hajladozó faág, amely egy hajszálnyit túl messzire leng ki, és megroppan; az embrió folyamatos növekedése, amelyet a kezdetleges szervek megjelenése drámai módon meg-megszakít. Az ilyen események vizsgálatának egyik módja, hogy a helyzetnek megfelelően hol diszkrét, hol pedig folytonos modellt használunk, de ez a mindenre ráhúzható, meglehetősen *ad hoc*, gumilepedős megközelítés esztétikailag nem kielégítő. Úgy tűnik, hogy a természet a változásnak ezt a két típusát gyakran olyan formában egyesíti, mintha egyetlen folyamatnak lennének a részei. Ezért vonzó feladatnak látszik egy megfelelő matematikai elmélet kiépítése, amely természetes, szervezett és egységes módon tudja kezelni azokat a rendszereket, amelyek általában simán változnak, de néha ugranak. Ezt a célt tűzte ki René Thom, amikor 1972-ben *Szerkezeti stabilitás és alakfejlődés* címmel egy új típusú matematika kiáltványát publikálta. Ezt ma katasztrófaelméletnek nevezik (illetve néhány vonatkozásában a szingularitáselmülethez sorolható). Nevét nem onnan kapta, hogy tömegszerencsétlenségekkel vagy természeti csapásokkal foglalkozna, hanem onnan, hogy Thom a „katasztrófa” szót eredeti görög értelmében használta, amely váratlan, gyökeres fordulatot jelent.

Nem egyedül Thom medítált ezen a problémán, és több más iskola nyújtott további ötletforrásokat. Közéjük tartozik a klasszikus elágazáselmélet, amely differenciálegyenletek megoldásainak a „szétválását” vizsgálja; a topologikus dinamika; a közösen ható (kooperatív) jelenségek elmélete, a szinergetika; valamint a nemegyensúlyi termodinamika. Mindegyiknek megvan a maga szerepe, és azt gyanítom, hogy később,

ahogyan az egyes szempontok látóhatárai kiszélesednek, a különböző megközelítésmódokat sikerül majd egységes keretbe foglalni; az egyszerség kedvéért azonban most csak a Thom-féle elképzelések nyomán kialakult matematikára fogok szorítkozni.

Történetileg a katasztrófaelmélet gyökerei nagyon messzire vezethetők vissza, például Arkhimédész *Az úszó testekről* c. művére, Descartes-nak és Huygensnek a szivárványról szóló munkájára és Leonhard Euler fényelhajlási elméletére. A tárgykör fokozatosan fejlődött, amíg az 1960-as évek vége felé hirtelen robbanásszerű változáson esett át (amivel pontosan az általa leírni próbált viselkedési mintát utánoztam). Thom azzal keltette fel az emberek érdeklődését, hogy a korábbi különálló szálakat egységes egésszé fonta össze. Ő a Nagy Szimfóniát írta és hallotta, sőt a hangszerelést is ő irányította. Ebben nem volt egyedül: különösen Arnold dolgozott ki nagyon hasonló elképzeléseket, Bernhard Malgrange és Mather pedig néhány alapvető tétel szabatos bizonyításával és általánosításával rukkolt elő. Thom topológus volt, és fő munkaterületként a fejlődésbiológiát jelölte meg, ehelyett azonban olyan kiindulópontot választott, amely távoli analógiaként inkább egy matematikailag precízebb tárgyhoz, az optikához hasonlítható. Könyvében sűrítetten, a végletekig egyéni hangvételben és megalkuvást nem ismerő nyersséggel fogalmaz, és nem fukarkodik az olyan filozofikus fejtegetésekkel, amelyek számos tudóst idegesítenek. De a könyv mélyén matematikai aranyrögök rejlenek, amelyek kibányászás és megfelelő finomítás után értékes kincset jelentenek egy sor tudomány számára, a technikától a pszichológiáig.

A változás tája

C. H. Waddington biológus témája a *morfogenezis* volt: hogyan alakítanak ki meghatározott formákat növekedésük során az élő szervezetek. Az embrió fejlődése folyamatos növekedési szakaszok sorozatának tűnik, amelyet olyan váratlan események szakítanak meg, mint egy végtagkezdemény megjelenése vagy az idegsejtek elkülönülése az izomtól. Waddington egy „hidraulikus analógiával” élt. Képzeljünk el egy dimbes-dombos tájat, amelyen folyamatosan víz folyik keresztül. A víz, a legalacsonyabb pontot keresve, tavacskákból gyűlik össze. Az egyes tavacsák fokozatosan telnek meg, amíg a szint a peremet el nem éri, és akkor a víz hirtelen túlszordul és új tavakat kezd képezni máshol. A

táj simasága és az állandó vízhozam ellenére a folyamatosság időnként megszakad. Lehet, hogy az embrió is így úszik át egy sokdimenziós biokémiai „tájon”, ahol a túlcsoordulások adnak jelt az alakváltozásra.

Ahhoz, hogy ezt matematikailag meg tudjuk fogalmazni, képzeljük a tájat egy sima, időben lassan változó függvény grafikonjaként, és vizsgáljuk azt a kérdést, hogyan változhatnak a helyi minimumok (a völgyek mélypontjai, ahol a víz összegyűlhet). Ha nagyon részletes adatokra vagyunk kíváncsiak, például a tavacsák közötti távolságokra, a tavacsák alakjára vagy a bennük levő vízmennyiségre, akkor kérdésünkre azt a választ kapjuk, hogy „rengeteg különféle változás lehetséges”, amivel nem sokra megyünk. Ha azonban csak a kvalitatív, topologikus vonásokra figyelünk, például, hogy egy tavacska túlcsoordulásakor a víz hány másik medencét kezd feltölteni, akkor Thom szerint csak nagyon kisszámú dolog történhet.

Heten mint a gonoszok

Thom elképzeléseinek jellegét jól illusztrálja az az állítása, hogy tetszőleges olyan rendszerben, amely minimalizálni próbál egy függvényt (a hidraulikus modellben ez a magasság, de lehet éppúgy energia, bonyolultság, költség, valószínűség vagy bármi más), helyi szinten tipikusan csak hét különböző alakzat léphet fel, ha a táj változása négy vagy kevesebb paramétertől függ. A „tipikusan” szó az osztályozásnak egy matematikai vonására utal: kizár bizonyos „végtelenül ritka” kivételeket. Lényegében ugyanolyan értelemben használjuk, mint ahogy egy „tipikus” pénzfeldobás eredménye fej vagy írás és nem „az érem harmadik oldala”; a céltábla egy „tipikus” helye nem pont a közepe; egy „tipikus” amerikai állampolgár nem az Egyesült Államok elnöke. A nemtipikus megtörténhet, de akkor ennek speciális oka van. (És ilyenkor esetleg egy módosított matematikai elrendezésre lehet szükség.) A tipikus katasztrófaformák az *áthajlás*, a *csúcs*, a *fecskefarok*, a *pillangó*, az *elliptikus umbilikus*, a *hiperbolikus umbilikus* és a *parabolikus umbilikus*. Mindegyiknek megvan a maga külön gyönyörű geometriája. A katasztrófaelmélet sokkal több, mint a hét elemi katasztrófa pusztá osztályozása, ezek azonban jól illusztrálják majd az elképzelések egységesítő erejét.

A legegyszerűbb elemi katasztrófa az áthajlás. Itt a hirtelen változást egyetlen vezérlő paraméter okozza, amikor az egy adott küszöbér-

téket túllép. Képzeljünk el egy nagy völgy oldalában egy kis bemélyedést, amelyben egy apró tavacska csillog. Fokozatosan simítsuk ki ezt a bemélyedést. Egy adott pillanatban a víz túlsordul és a lejtőn lefolyik a völgy aljára.

A csúcskatasztrófához két vezérlő paraméter szükséges. Ennek szemléltetéséhez képzeljünk el két közeli tavacsát, amelyek a mélységük változásának a hatására összeolvadhatnak, illetve eltűnhetnek. Ha az egyik zsugorodik, miközben a másik mélyül, akkor a mélyebb végül bekebelezi a sekélyebbet. Mivel bármelyiküket kimélyíthetjük, így bármelyikük bekebelezheti a másikat. Másrészt, a bekebelezés után csak egyetlen tavacsánk marad, és nem tudjuk megmondani, hogy ez eredetileg melyik volt. Még azt is megtehetjük, hogy egyetlen medencéből kiindulva, abból leválasztunk egy kisebbet, majd ezt egyre mélyítjük, miközben a mélyet zsugorítjuk, míg végül az új tavacska bekebelezi az eredetit; ezután pedig addig változtatjuk a helyzetét és az alakját, amíg pontosan úgy nem néz ki, mint az, amelyikből eredetileg kiindultunk. Ilyen körülmények között nyilván alaposan meg kell fontolnunk azt a kérdést, hogy „melyik tavacska melyik?” Többek között, ezt *nem* lehet kizárólag azon az alapon eldönteni, hogy „az egyikből a másikba történő átmenet hirtelen vagy simán következett-e be”.

A víz forrása csúcs típusú katasztrófa. Az egyik tavacska a „folyadék”, a másik a „gáz”. Ha a „gáz” bekebelezi a „folyadékot”, akkor a víz hirtelen felforr. Ha a „folyadék” kebelezi be a „gázt”, akkor a gőz lecsapódik. Minden fizikuspalánta tudja azonban, hogy a nyomás és a hőmérséklet összehangolt változtatásával elérhető, hogy a folyadék *folyamatosan*, tényleges forrás nélkül alakuljon gázzá. Így az egyik medence tökéletesen folytonos módon is felveheti a másik identitását. Ehhez hasonlóan, két állapot „konfliktusát” kifejező számos más modell is lényegében egy csúcs típusú katasztrófára vezethető vissza.

Az elemi katasztrófák (kevésbé elemi testvéreikről nem is beszélve) az egész tudományt behálózzák. Az áthajlás fellép például a szivárvány optikájában és a hangrobbanásoknál. A csúcs megtalálható a felboruló hajók, a forrásban levő folyadékok, a mágnesesesződés, a fókuszálás, a felgyűrődés, a vegyi robbanások, a folyadékáramlás, a népességnövekedés és a pajzsmirigy-túlműködés modelljeiben. A fecskék farkok szabályozza egy elliptikus görgő mozgását egy ferde síkon. A pillangó (érthető módon) a repülőgép stabilitásánál jelentkezik. A hiperbolikus umbilikus írja le egy merevített lemez elhajlását. Az ellip-

tikus és parabolikus umbilikus a folyadékcseppek optikájában fordul elő. Ezek az alkalmazások valamennyien standard, elfogadott tudományos modelleket és egyenleteket használnak, de mellettük számos olyan spekulatívabb jellegű elképzelés is kialakult, amelyeknél csak további munkával érhető majd el, hogy őket megalapozottnak tekinthessük. Mindkét típus érzékeltetésére bemutatok egy-egy példát. Thom motivációjának szellemében az egyiket a biológiából, a másikat pedig az optikából választottam.

Naphal-betolakodók

Az Ontario tartománybeli Opinicon tóban él egy aprócska naphal, a *Lepomis gibbosus*, amely megdobogtatja az igazi feministák szívét. Itt ugyanis a hím építi és tartja karban a fészket, ő vigyáz az ikrákra, és ő gondoskodik az ivadékról. Tipikus férfi módjára persze agresszív kis dög, de ez anyai ösztönéből fakad. Képzeljük el halpapát védekező kedvében, amint egy közelítő betolakodót figyel. Amíg az tisztas távolban marad, addig nem bántja. Amikor azonban egy kritikus küszöbnél közelebb merészkedik a fészekhez, a bőszip apa támadólag elkergeti. A legveszélyesebb betolakodó persze ki más lenne, mint ugyanennek a fajnak egy másik egyede.

A naphal viselkedésére Christopher Zeeman állított fel katasztrófaelméleti modellt az 1970-es évek elején. Ez egy csúcs típusú katasztrófa, amelyben a két szembenálló állapotot a hal védekező, illetve támadó kedve jelenti. A modelltől megjósolható, hogy nem is egy, hanem két küszöbtávolságnak kell lennie. Ha egy betolakodó átlépi a belső kör határát, akkor az apa támadásba lendül. A támadást azonban csak akkor fújja le, ha a betolakodót a külső körön kívülre űzte. A két határ között egy „ütközőzóna” terül el. Az ütközőzónában úszkáló hal biztonságban van; ha azonban átlépi a belső kör kerületét, akkor nemcsak az ütközőzónába, hanem azon túlra űzik vissza. Nagyon csinos kis mechanizmus. P. W. Colgan, W. Nowell és N. W. Stokes biológusok vállalkoztak arra, hogy kísérletileg ellenőrzik ezt az elméletet. Egy fából készült aprócska álbetolakodó társaságában gumicsizmával begázoltak az Opinicon tó szélére. Azt találták, hogy fészekrakás idején az átlagos belső küszöb 13 cm, a külső pedig 18 cm. Ez jelentős különbséget mutat. A párzási időszakban a különbség azonban eltűnik, és a hal viselkedése is mind a védekező, mind pedig a támadó szélsőségeket

től mentessé válik. Ennek fontossága nyilvánvaló, hiszen ilyenkor egy közeledő nőtényt nem szabad elkergetni.

Végső jutalmul így egy olyan eredményt nyertünk, amellyel az eredeti elmélet nem számolt előre, de amely, mint láttuk, belőle levezethető. A sűrűn elhelyezett fészkek közötti ütközőzónák léte amolyan városi úszópálya-rendszert jelöl ki, amelyet élelemszerző portyáin valamennyi hal szabadon használhat. Ha csak egyetlen küszöb lenne, akkor a fészkek hézagmentesen zsúfolódnának össze mint szappanbuborékok a lefolyóban. Ilyen helyzetben bármely hal, amely megkísérli elhagyni a fészket, állandó támadás kereszttűzébe kerül, és nem tud élelemről gondoskodni; a faj azonnal kihal. Ez egy olyan spekulatív feltételezést vet fel, hogy a kétküszöbös rendszer esetleg evolúciós kényszerek hatására jött létre.

Hunyorgó csillagok

Zeeman agresszivitási modelljében nem az történik, hogy a katasztrófát matematikailag levezetjük előzetesen létező elvekből, hanem ehelyett a katasztrófát munkahipotézisnek tekintjük és olyan következtetéseket vonunk le, amelyek azután kísérletileg ellenőrizhetők. A katasztrófaelmélet azonban *felhasználható* matematikai eszközként is, hogy adott feltételekből új következtetéseket nyerjünk. Ilyen terület az optika. Egy lencse- és tükörrendszer a rajta áthaladó fénysugarakat gyakran szokatlanul fényes területekre gyűjti össze, amelyeket *kausztikának* (*gyűjtásvonalnak*, *gyűjtősávnak*) neveznek, mert itt a fény mellett nagy hő is koncentrálódik. A katasztrófaelmélet azért jut szerephez, mert egy Fermat-ra visszanyúló és Hamilton által szilárd alapokra helyezett elv szerint a fénysugár mindig a legrövidebb idejű utat igyekszik kiválasztani. Ezt a fizikai rendszert egy olyan matematikai táj írja le, amelynek fiktív terében a pontok a lehetséges utakat képviselik, és amelynek „magasságfüggvénye” az utazási idő. A völgyek mélyén ekkor a „legkisebb magasságú pontok”, azaz a legrövidebb utak húzódnak meg. Az elmélet eredményeképpen teljes listát kapunk arról, hogy — megfelelően tipikus feltételek mellett — milyen alakú kausztikák jöhetnek létre.

A szivárvány az áthajláskatasztrófa egy példája. Az esőcseppeken áthaladó fény különböző szögekben fordul el, attól függően, hol és hogyan érte a cseppet. Egy bizonyos szögnél a kilépő sugarak eltérített-

sége egy matematikai áthajlásban „visszafordul”, az áthajlás mentén fény halmozódik fel, és ez fényes világító kúpot alkot az égen. Minden szín saját kúppal rendelkezik, és ezeknek a kúpoknak a szeletei a szemünkben kör alakú színes koncentrikus gyűrűkként jelennek meg. Egy léghajóról nézve a szivárvány teljesen körbeér: ilyen „szerepelt” A *Hindenburg* c. filmben. A mai repülőgépekről a túl nagy magasság miatt nem láthatunk szivárványt.

Optikai csúcskatasztrófát észlelhetünk egy teli kávéscsészében, amikor rásüt a Nap vagy oldalról éles fény éri. A kávé felületén fénylő görbe húzódik végig, amelynek közepén egy *csúcs*, egy éles fénypont található. Ez az, ahol az oldalfalakról visszaverődő fénysugarak összefülnek.

Van (legalább egy) olyan fénytani hatás is, a hunyorgó csillag, amely az *összes lehetséges* katasztrófát magában foglalja. Ezt a Föld légkörének véletlen ingadozásai okozzák. A légkör egy szabálytalan, mozgásban levő lencseként működik. A csillagfényt véletlenszerűen hol összegyűjti, hol szétszórja, amit a megfigyelő a kausztika hullámmásaként érzékel. Minden egyes katasztrófa a maga sajátos módján gyűjti össze a fényt, és így a különböző kausztikatípusok különböző fényességi fokozatokhoz vezetnek. A (nagy kodimenziós) ritka katasztrófák egyúttal a legfényesebbek is, és a hunyorgás egyensúlyozza ki ezt a két hatást.

Michael Berry fizikus a katasztrófaelmélet segítségével számolta ki a hunyorgás ún. *rövidhullámú aszimptotikáját*. Feltette, hogy az atmoszféra véletlen ingadozásai a statisztikusok kedvenc törvényének, a *normális eloszlásnak* tesznek eleget. Mivel a kausztikában a katasztrófák között bonyolult küzdelem folyik, ezért a megfigyelt csillagfény erőssége, amely maga is véletlenszerűen változik, már korántsem viselkedik ilyen szépen; a légkörétől eltérő eloszlást mutat, amely igen távol esik a normálistól. A fényesség emellett erősen függ a fény hullámhosszától is. Az alapvető kérdés az, hogy a hullámhossz csökkenésével hogyan változik a hunyorgás eloszlása. A legfontosabb statisztikus adatokat *momentumoknak* nevezik. Az n -edik momentum a fényerősség n -edik hatványának az átlagértéke. Ha az összes momentumot ismerjük, akkor elvileg mindent tudunk az eloszlásról, de a gyakorlatban már az első néhány momentum is nagy vonalakban megadja a legfontosabb információkat. Az első momentum maga az átlag; a második megmondja, mekkora az ingadozás az átlag körül; a harmadik azt méri, mennyi-

re féloldalas ennek a kiterjedése; és így tovább. Berry bebizonyítja, hogy mindegyik momentum a hullámhossz egy rögzített hatványaként változik, amelyet *kritikus kitevőnek* nevez el, és a kiszámításukhoz a katasztrófák (Arnold által általánosított) osztályozását használja fel. Ezek valamennyien racionális számok. Három dimenzióban a 2–13. momentumok listája a következő:

0, $1/3$, 1, $5/3$, $5/2$, $7/2$, $9/2$, $11/2$, $13/2$, $38/5$, $87/10$, $157/16$.

Noha a katasztrófaelmélet topologikus, tehát „kvalitatív”, ezek mégis *számszerű* jóslatok. Az első néhányat kísérletileg ellenőrizték, és az eredmények jó egyezést mutattak az elmélettel. A magasabb momentumok tesztelése nehezebb, mert a fényt érzékelő berendezésnek nagyon gyorsan kell reagálnia a nagy változásokra. Ez az alkalmazás érdekes fényt vet arra a feltételezésre, hogy mivel a topológia kvalitatív, ezért nem használható kvantitatív jóslásokra. Azt is mutatja, hogy a katasztrófák osztályozási tétele nem pusztán rendszertani érdekesség.

Variációk egy témára

Bár az elemi katasztrófák osztályozása teljes, ez mégsem jelenti a történet végét. Itt ugyanis egy nagyon fontos matematikai „támaszpontról” van szó, amely nem annyira mint végtermék, hanem inkább mint eszköz érdekes: az elmélet olyan sémát kínál, amely a jövőbeni munka alapjául szolgálhat. Megmutatja, hogyan kell elindulnunk. Sokféle általános „katasztrófát” vizsgálhatunk még, és az elmélet a pusztán osztályozásnál mindenképpen többet nyújt. A kutatások jelenleg a Martin Golubitsky és David Schaeffer-féle 1978-as általánosítás köré csoportosulnak. Ők ketten azt vették észre, hogy sok alkalmazásnál az egyik paraméternek kitüntetett szerep jut, és fontos kérdés, hogyan befolyásolja a dolgok alakulását ennek a paraméternek a változása. Például egy kémiai reakcióban arra vagyunk kíváncsiak, hogyan függ a reakciósebesség a hőmérséklettől, így a kitüntetett paraméter a hőmérséklet; egy ház tervezésekor azt szeretnénk tudni, hogyan viselkedik egy tartógerenda terhelés hatására, így a kitüntetett paraméter a terhelés. Matematikai szempontból ennek az új elemnek a beépítése némi technikai változtatást igényel, és a részletes eredmények természetesen mások lesznek, az általános matematikai séma azonban pontosan

ugyanaz marad, és nem változnak a bizonyítási módszerek sem. Kicsit olyan ez, mint az autóvezetés; ha valaki Fordon tanult vezetni, akkor egy Volkswagen sem fog neki igazán gondot okozni, noha a berendezések jó része máshová esik. Golubitsky és Schaeffer elmélete rengeteg új alkalmazáshoz vezetett a kémiai reakcióknál, a folyadékáramlásnál, a geofizikában és a rugalmasságtanban. Folyamatosan születnek a további általánosítások, és velük együtt az újabb alkalmazások is. Példaként említhetjük, hogy az alkalmazásokban gyakran fontos szerep jut a szimmetriáknak, de erre az eredeti elmélet nem használható, mert a szimmetria „nemtipikus”, és így a tárgyalásból ki kellett zárunk. A megoldást egy olyan általánosítás kidolgozása jelenti, amelybe kifejezetten beépítjük a szimmetriát, és talán ez most az egyik legizgalmasabb új irányzat. Máris sikerrel alkalmazták a téglalap alakú lemez deformációjánál. 1959-ben M. Stein a NASA-nál¹ kísérletileg azt vizsgálta, hogyan viselkedik egy téglalap alakú fémlemez összenyomás hatására. Az általa használt lemezméretnél azt tapasztalta, hogy kezdetben a fém 5-vonalas rajzolatban gyűrődött fel, az erő fokozásakor azonban hirtelen átváltott egy 6-vonalas mintába. Ezt a jelenséget hívják *módusugrásnak*. Golubitsky és Schaeffer megmutatták, hogy ez a téglalap szimmetriájából levezethető, ha az egyenletekben a „peremfeltételeket” helyesen választjuk meg.

Az ingadozó Hopf

Egy másik irányzat az elmélet dinamizálását tűzte ki célul, hogy az oszcillációkkal és szilárd egyensúlyi helyzetekkel egyaránt bánni tudjon. Ennek mintapéldája a (felfedezőjéről, Eberhard Hopf-ról elnevezett) *Hopf-elágazás*, amelyben egy egyensúlyi állapot elveszti stabilitását, és periodikus oszcillációba megy át. Ralph Abraham ezt „ingadozó katasztrófának” hívja. Kiderül, hogy a Hopf-elágazás matematikája átfogalmazható a körszimmetriával kiegészített katasztrófaelmélet nyelvére. Ennek alapján Golubitsky és William Langford kidolgozták az elfajuló Hopf-elágazás új elméletét, amely Hopf eredeti elméletének az általánosítása. Az alkalmazások között szerepel Isabel Labourel-nak az idegi impulzusok továbbításáról szóló munkája. Ezekkel a módszerekkel a szimmetrikus Hopf-elágazást, és legújabban az elfa-

¹ Az USA űrkutatási hivatala (FR)

juló szimmetrikus Hopf-elágazást is kezelni lehet. Kezd kirajzolódni egy *szimmetriatörés*-elmélet is, amelynél egy szimmetrikus rendszer néhány szimmetriáját elveszti.²

A tört szimmetriák a tudomány számos területén jutnak fontos szerephez. Ott van például G. I. Taylor 1923-as híres folyadékdinamikai kísérlete. A berendezés két egymásba helyezett körhengerből áll, a közöttük levő teret folyadék tölti ki. Mi történik, ha a hengereket forgatni kezdjük? Az ember azt gondolhatná, hogy a folyadék is egyenletesen fog forogni, de ez csak alacsony sebességek mellett igaz. A sebesség növekedésekor vízszintes rétegekben Taylor-féle örvénycellák képződnek. A cellákból később egy hullám alakul ki (az ún. örvényhullám), amely maga is merev forgást végez. A hullám azután elkezdi függőleges irányban is mozogni (modulált hullámörvények) mint ringlispílbén a lovak. Más feltételek mellett spirális örvények jönnek létre. Léteznek hullámspirálisok, csavart örvények, fonatos örvények és modulált hullámspirálisok. Úgy tűnik, hogy úgyszólván valamennyi ilyen hatást a tört szimmetriák segítségével lehet értelmezni; és magyarázatuk inkább a berendezés körkörös szimmetriájában rejlik, nem pedig a folyadékáramlás egyenleteiben. Nem lehet teljesen rossz egy matematikai elmélet, ha új megvilágításba tud helyezni egy olyan problémát, amelyet több mint hatvan éven át tudósok százai vizsgáltak.

A katasztrófaelmélet részben a matematikából, részben a fizikából, de leginkább a biológiából ered. Meglehetősen halvány analógiák alapján alakult ki, és ezek többsége nem állja ki a szigorúság próbáját. A motiváció és az eredményesség azonban két különböző dolog. Az elmélet alapvető és rendkívül fontos matematikai gondolatokat vezetett be; számos spekulatív alkalmazási lehetőséget mutatott a „puha” tudományok részére, amelyeknek még be kell férközniük az ottani szakemberek kegyeibe; egy sor váratlan általánosítással rukkolt elő, amelyek most döntő hatást gyakorolnak a fő riválisra, az elágazáselméletre; és sikeres alkalmazások széles körét valósította meg olyan területeken, amelyekre eredetileg senki sem gondolt. Kicsit olyan mint a halmazállapotok: a fizikában szilárd, a biológiában némiképp cseppfolyós, a szociológiában pedig esetleg gázos. Hogy az őt létrehozók által elképzelt irányban fejlődik-e, az bizonytalan. Biztos azonban, hogy hatékony gondolatok

² A szimmetriatörésen kívül ugyanerre a szimmetriasértés és a szimmetriasérülés elnevezések is használatosak. (FR)

tárházává válik. Szép példája annak, hogy egy adott célra kitalált matematika hogyan tesz szert sok másféle alkalmazásra, és megmutatja, mennyire különös, közvetett, sőt néha egyenesen természetellenes lehet a különböző tudományágak egymásra hatása.

A KÁOSZ RENDJE

Eszmék s érzelmek káosza, zilált;
 s mindegy: csalja vagy átlátja magát.
 Fölszállni és bukni teremtetett;
 szolgálják és prédálják mindenek.
 Igazság öre: téved szüntelen.
 Örök dicsőség, tréfa, rejtelem.

Alexander Pope¹

„A május méz-bimbaira vad szél csap” — írta Shakespeare azon tűnődve, mondja-e, társad, másod a nyári nap.² Az idén egy-két napra megkaptuk a vad szelet, de 1985 májusa leginkább a *hidegről* marad emlékezetes. Négy évvel ezelőtt a vén almafánk közel két mázsát termett, amiből 80 liter almabor, több tucat rétes és több kiló almapüré készült, a hulladékból pedig egy csomó komposztot csináltunk. Három éve egy húsvéti hóiharban vagy a rügyek mentek tönkre, vagy a beporzó bogarak pusztultak el (esetleg mindkét dolog bekövetkezett), és így még nyomorúságos 10 kiló sem termett. Hogy az idén mi lesz, arra nem szívesen tippelnék; az angol időjárás híresen kiszámíthatatlan. De mit is *értünk* ezen?

A newtoni hagyaték, az Okság Kora úgy tekintett a Világrendszerre, vagyis *mindenre*, mint valami hatalmas és finom óraműre, amelyben ha elég jól ismernénk a fogaskerekek illeszkedését, akkor elvileg meg tudnánk mondani, hogy mi fog történni mostantól egészen az idők végezetéig. A gyakorlatban persze még csak azt sem tudná senki megjósolni, mi történik mindössze három testtel a tömegvonzás hatására, de a nagy filozófiai állásfoglalások nem arról híresek, hogy ilyen földhözragadt tényeket figyelembe vegyenek. Ehhez a felfogáshoz az adta

¹ Tellér Gyula fordítása (Értekezés az emberről)

² Szabó Lőrinc fordítása (18. szonett)

a matematikai alapot, hogy a világegyetemben bárminek a mozgását valamilyen differenciálegyenlet írja le, és ha ismerjük a „kezdeti feltételeket”, akkor ezt követően minden mozgás már egyértelműen meg van határozva. Akkor miért nem tudjuk megjósolni egy kockadobás eredményét? Azért, mert nem tudunk eleget a kezdeti feltételekről. Amíg a kockákat a dobóedényben zörgetjük, fogalmunk sincs, mi történik velük. De abban a pillanatban, hogy az asztalra kerültek, készíthetnénk egy villámgyors sorozatfelvételt, kiszámíthatnánk a helyzeteket és a sebességeket, az egészet felvihetnénk egy szuperszámítógépre, és — ha a gépünk elég gyors, akkor — *előbb* jelezné az eredményt, mint maguk a kockák.

Determinizmus

Laplace világosan fogalmazta meg ezt az álláspontot.

Egy értelmes lény, aki egy adott időpillanatban ismerné a természetet mozgó összes erőket és az azt alkotó minden létező egymáshoz viszonyított helyzetét, és ha emellett még elég hatalmas lenne ahhoz, hogy ezeket az adatokat analízis alá vesse, egyetlen formulában foghatná át az Univerzum legnagyobb tömegeinek és legkönnyebb atomjainak mozgását: semmi sem lenne bizonytalan számára; mind a jövőt, mind a múltat egyszerre látnák szemei.³

Ez a klasszikus *determinista* nézet. Elvileg, a világegyetem egész története, múlt és jövő egyértelműen determinálva van, ha egyetlen időpillanatban valamennyi részecskéről pontosan tudjuk, hogy merrefelé és milyen gyorsan halad. Ez egy kényes etikai és erkölcsi problémát vet fel, a szabad akaratét. Ahogy Voltaire rámutatott, „nagyon különös lenne, hogy az egész természet, az összes bolygó örök törvényeknek engedelmeskedjék, és ugyanakkor létezzék egy másfél méternél alig magasabb kis állat, aki ezeket a törvényeket semmibe véve, kénye-kedve szerint, kizárólag a szeszélyeit követve cselekedhet.” Van-e olyan, hogy szabad akarat? Gyakorlati szempontból, még ha nincs is, látszólag a nemléte kényszerít minket arra, hogy *úgy cselekedjünk, mintha mégis létezne*. Vagyis amikor a testem összes atomja a természet megmáshíthatatlan törvényeit követve arra kényszerít engem, hogy kiraboljak

³ A fordítást Simonyi Károly *A fizika kultúrtörténete* c. könyvéből vettük át.

egy öregasszonyt, akkor ugyanezek a megmásíthatatlan törvények arra kényszerítik a bírót, hogy ezért engem öt évre sítire vágjon.

Egy nemdeterminisztikus vagy sztochasztikus rendszer egészen más-képp viselkedik. Ugyanazok a kezdeti feltételek különböző alkalmak-kor másféle viselkedéshez vezethetnek. Képzeljük például el, hogy egy szabálytalanul fújdogáló szellőben egy inga leng. A mozgást leíró egyenletben kifejezetten a véletlentől függő tagok is lesznek; és még ha mindent pontosan ugyanabba a kiindulól helyzetbe állítunk is be, a szél hatására a viselkedés hamarosan megváltozik. Vegyük észre, hogy ez a megkülönböztetés bizonyos értelemben a modellnek szól. Ha az egészhez a szél viselkedését leíró determinisztikus egyenleteket is hozzávesszük, akkor az ezekre vonatkozó kezdeti feltételek is beleszólnak a játékba, vagyis az egész megint determinisztikussá válik. Valójában nem lehet egy esemény véletlen voltát a kísérlet pontos megismétlé-sével bebizonyítani, ugyanis az idő vagy a hely közben megváltozott, hiszen egyébként *ugyanarról* a kísérletről lenne szó. Ez ismételten annak a fontosságát húzza alá, hogy a determináltság és a véletlen-szerűség közötti különbséget egy egyeztetett környezetben, egy adott modellen belül kell vizsgálni.

Az, hogy a gyakorlat milyen mértékben képtelen eleget tenni a deter-minisztikus ideálnak, attól függ, mennyire pontosan tudjuk a kezdeti feltételeket megfigyelni (és persze attól is, hogy a helyes differenci-álegyenleteket használjuk-e). Vagyis a matematikailag megalapozott időjárás-előrejelzéshez két dolog szükséges:

- (1) A Föld légkörének mozgását a lehető legpontosabban leíró diffe-renciálegyenlet-rendszer.
- (2) A lehető legpontosabb megfigyelések, földi állomások, hajók, re-pülőgépek, meteorológiai léggömbök és műholdak segítségével.

Ezután az egész már csak számolás kérdése, ugye? Az előzőek után talán nem lesz meglepő, hogy a dolog nem ilyen egyszerű. Először is, ha *túl* pontos differenciálegyenleteket írunk fel, akkor végül hanghul-lámokat, nem pedig időjárást fogunk modellezni; ezek ráadásul a nu-merikus módszerekkel rezonálva egyszer csak felrobbannak és minden érdekeset elmosnak. A megoldás az, hogy szándékosan durvítanunk kell az egyenletek pontosságán! Van azonban egy ennél komolyabb probléma is. Poincarénak a kvalitatív dinamikában adott útmutatá-sa alapján a topológusok azt a kérdést vetették fel, vajon egy tipi-

kus differenciálegyenletnek megjósolható-e a viselkedése. Legnagyobb meglepetésükre Smale felfedezte, hogy erre a kérdésre nemleges a válasz. A determinizmus nem azonos a prognosztizálhatósággal. Sőt, egy tökéletesen determinisztikus differenciálegyenletnek lehetnek olyan megoldásai, amelyek minden szándékunk és célkitűzésünk ellenére véletlenszerűnek tűnnek.

Nem vagyok benne biztos, hogy ez megoldja a szabad akarat problémáját, mindenesetre új megvilágításba helyezi azt. Douglas Adams *Autóstoppal a Tejúton* c. „útikönyvében” olyan hiperintelligens komplex lényekről ír, akik egy Mély Gondolat nevű szuperszámítógépet építenek. Amikor az „Élet, Világegyetem és Minden” kérdésre kérnek tőle választ, akkor közli, hogy ennek semmi akadálya sincs, csak a program futásához némi időre, mintegy hét és fél millió évre van szükség. A határidő lejártával ki is írja a választ: „negyvenkettő”. Ezután már csak egy probléma maradt, kideríteni, hogy mi volt a kérdés. A laplace-i hipotézisben szereplő értelmes lény nagyjából hasonló gyakorlati értékkel bír a számomra, és a válaszai is valószínűleg ugyanennyire lennének érthetők.

Klasszikus vonzódások

Magától értetődő, hogy a topológusok, az analistákkal ellentétben, egy differenciálegyenletet sokkal inkább geometriai oldalról közelítenek meg. Úgy gondolnak rá, mint egy folyamatra. A rendszer állapotát a sokdimenziós fázistér egy pontja írja le, és az idővel együtt a pont helyzete is változik. A mozgó pont által a fázistérben bejárt útvonal jelzi a rendszer állapotának fejlődését valamilyen kiindulási feltételtől kezdve. Az ilyen útvonalak összessége — a *fáziskép* — arról ad kvalitatív leírást, mi történik az *összes* lehetséges kezdeti feltétel mellett. A kérdés tehát az, hogy melyek a fáziskép tipikus fajtái.

Legegyszerűbbek azok a rendszerek, amelyek végül tartós egyensúlyi állapotba kerülnek. Itt valamennyi út egyetlen pontba vezet; vagyis a történet vége mindig ugyanaz a tovább már nem változó állapot. A topológusok az ilyen pontot *attraktornak* (*vonzópontnak*, *nyelőnek*) nevezik. Általánosabban attraktornak a fázistér egy olyan tartományát hívjuk, amely magához vonzza a környezet valamennyi pontját. Az attraktorok írják le a rendszer hosszútávú fejlődését.

A következő legegyszerűbb attraktor a *határciklus*, amikor az útvo-

nalak egy zárt hurokhoz tartanak. Ez a rendszer periodikus oszcillációjának felel meg; azért periodikus, mert az állapotot jelző pont a hurkon újra és újra körbefutva mindig pontosan ugyanazt az esemény-sort jelöli ki.

Létezik végül *kváziperiodikus* mozgás, amely egy sor különböző periódushosszú periodikus mozgásból van összerakva. A Föld kering a Nap körül, a Hold a Föld körül, egy űrhajó a Hold körül, és odabent az űrhajós gombostűkkel zsonglőrködik, mert az űrhajóban annyi hely sincs, hogy egy gombostűt le lehessen ejteni. A gombostű mozgása négy különböző periodikus mozgásból tevődik össze, amelyeknek különböző a periódushosszuk. Az évmilliók során nagyon közel jutunk ahhoz, hogy a tíz korábbi mozgása megismétlődjön, de pontos ismétlődés sohasem következik be (hacsak a négy periódushossz nem lesz valamely rögzített időintervallumnak pontosan egész számú többszöröse). Ha a négy periodikus mozgásnak megfelelő négy különálló kört topologikusan összeillesztjük, akkor attraktorként egy 4-dimenziós tóruszt kapunk.

Ez az a három szokásos viselkedésmód, amelyet a differenciálegyenletek klasszikus elméletében ismertek fel, noha akkori megfogalmazásuk nem a fázistér topologikus attraktorainak a segítségével történt. Mindhárman determinisztikusak abban az értelemben, hogy a megfelelő egyenleteknek egyértelmű kezdeti feltételek mellett egyértelmű a megoldásuk; és abban az értelemben meg is jósolhatók, hogy ha a kezdeti feltételeket elég pontosan ismerjük, akkor a rendszer viselkedése mindig közel olyan marad, mint amilyen a kezdeti feltételek tökéletes pontossága esetén lett volna. A gyakorlatban soha, semmit nem lehet pontosan megmérni; a mérés precizitásának valami szükségképpen hátráltat szab. Így a gyakorlati előrejelzéseknek kicsit pontatlan adatokra kell felkészülniük; és azt reméljük, hogy ekkor az előrejelzések is csak kicsit lesznek pontatlanok. A klasszikus attraktoroknál ez így is van.

Különös vonzódások

A topológusok így azt a kérdést kezdték boncolgatni, vajon egy tipikus attraktor szükségképpen klasszikus-e. A tipikus esetekre történő megszorítást ugyanolyan okból vezetjük be, mint a katasztrófaelméletben (amely egyébként a topologikus dinamikából vette az ötletet): sok millió olyan végtelenül ritka véletlen létezik, amelyek kibogozha-

tatlanul bonyolulttá teszik a helyzetet, ha őket is jellemezni akarjuk, viszont a gyakorlatban csak akkor fordulnak elő, ha valamilyen speciális megszorítás ezt kikényszeríti. Ez utóbbi esetben pedig érdemesebb egy speciálisan ehhez a megszorításhoz szabott elmélettel dolgozni.

A dinamikai rendszereknek két fő fajtája van, a *diszkrét* és a *folytonos*. A kettő között az a különbség, hogy az elsőben az idő a 0, 1, 2, 3, ... elkülönülő lépésekben („sípjelekre, gongütésekre”) folyik, a másodikban pedig folytonosan. A diszkrét eset matematikailag könnyebben kezelhető, főleg ha különleges példákat akarunk konstruálni és elemezni. És bármely diszkrét rendszert átalakíthatunk folytonossá, ha a szomszédos időpillanatok közötti viselkedést „interpolációval” határozzuk meg. Mindössze annyi történik, hogy a fázistér dimenzióját eggyel meg kell növelni, hogy az interpoláció valahol elférjen. Ezt az eljárást *felfüggesztésnek* hívják. Megfordítva, egy folytonos rendszer viselkedését gyakran úgy érthetjük meg, ha megfigyeljük, hogyan haladnak át a reprezentáns pontok valamilyen alacsonyabb dimenziós keresztmetszeten. Ez egy diszkrét rendszert alkot, mert a kiválasztott szelethez történő visszatérések között egy meghatározott idő telik el. Mindebből az következik, hogy elméleti szempontból a 2-dimenziós diszkrét rendszerek körülbelül ugyanolyanok, mint a 3-dimenziós folytonosak, a 3-dimenziós diszkrétéek olyanok, mint a 4-dimenziós folytonosak, és így tovább. Megadok most egy olyan 3-dimenziós diszkrét rendszert, amelyben egy tipikus, de nem klasszikus attraktor található. Ebből felfüggesztéssel egy ugyanilyen tulajdonságú 4-dimenziós folytonos rendszerhez juthatunk. A fázistér egy *tömör* tórusz. A pontjai az egymást követő időpillanatokban a következőképpen mozognak. Nyújtsuk meg a tóruszt, hogy a hossza a tízszeresére nőjön, a vastagsága pedig a tizedére csökkenjen, és csavarjuk körbe *tízszer* önmagán belül egy tízszeres hurokban. (Valójában a tíz helyett kettő is elég lenne, de ez később megnehezítené a dolgunkat.) A következő időpillanatban az egész tovább nyúlik és vékonyodik, és százszorosan tekeredik körbe; azután *ezerszeresen*, *tízezerszeresen* stb. Bármely kiindulási pont ennek a tóruszsorozatnak az egymás utáni tagjait járja be, így az attraktor azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek az összes „becsavarodott” tóruszban benne vannak. Elég világos, hogy ez a halmaz nem a klasszikus pont, kör vagy tórusz. A topológusok *különös attraktornak* hívják. Azért különös, mert a klasszikus attraktorokkal ellentétben „minden léptékben van szerkezete”. Ha a kör egy kis darabját kinagyítjuk,

akkor elég laposnak látszik, és hasonló a helyzet a tórusznál is. Ha azonban a különös attraktorunkat nagyítjuk ki, akkor a részletek is megőrzik az egymásba rakott tóruszokból képezett szerkezetet. Ha egy halmaznak minden léptékben van szerkezete, akkor *fraktálnak* nevezzük. Vagyis az újsütetű különös attraktorok és szokásos klasszikus társaik között a különbség geometriai jellegű: a régié sokaságok, az újak pedig fraktálok. Egyre inkább terjed a *fraktálattraktor* elnevezés is. A fraktálokról részletesen szó lesz a következő fejezetben.

Ronda Számsor a pontját ugratja

Hogy lássuk, miért nem prognosztizálható a mozgás, induljunk ki egy tetszőleges pontból, és kövessük nyomon az útját. Tömör tóruszt úgy kapunk, ha egy korongot egy kör (a tórusz „magja”) mentén végigtolunk. A tömör tórusz pontjait három koordináta segítségével jellemezhetjük; kettő az eredeti korong megfelelő pontját határozza meg, a harmadik pedig az a szög, amennyivel a korongot elmozgattuk. Az egyszerűség kedvéért foglalkozzunk csak ezzel a θ szöggel. Mivel a tóruszt hosszában mindig a tízszeresére nyújtjuk és tízszeresen csavarjuk körbe, egy-egy lépés után θ mindig 10θ -ba megy át.

A θ mérésének egy kényelmes módja, ha a teljes 360 fokos kört egységnyinek vesszük. Egy pont hozzávetőleges helyzetét úgy tudjuk behatárolni, ha a kört tíz szektorra osztjuk, amelyeket a 0, 1, ..., 9 sorszámokkal látunk el. Induljunk ki egy tetszőleges pontból, legyen a szöge mondjuk 0,37528. Az első körbekigyózás alkalmával ez a tízszeresére nő, vagyis 3,7528 lesz belőle; de itt az 1 a teljes 360 fokos szög, ami ugyanaz, mint a 0. Vagyis le kell vágnunk a tizedesvessző előtti részt, és így 0,7528-at kapunk. Hasonló okoskodással ezután rendre a 0,528, 0,28, 0,8 értékek adódnak, majd a pontunk véglegesen betelepszik a 0-ba. Ez ugyancsak meghökkentő. A pont teljes jövőjét meg tudjuk jósolni a neki megfelelő szög tizedesjegyeinek az alapján; az n -edik lépésben az n -edik tizedesjegy által kijelölt szektorban fog elhelyezkedni.

Az imént választott pontunk végül eléri a 0-t és megáll, de ez csak azért van így, mert a tizedestört-alakja véges. A végtelenig kiterjesztve tulajdonképpen 0,375280000000... Ha helyette (mondjuk) a

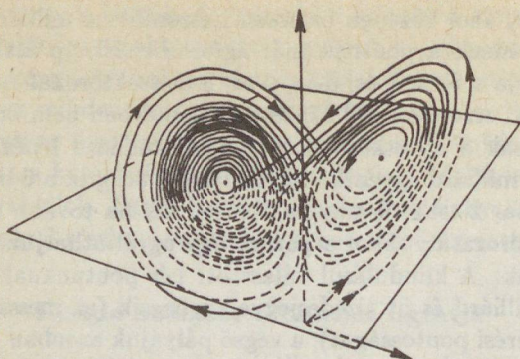
0,37528000...00063291

szöveget nézzük, ahol középen összesen huszonkilenc milliárd nulla szerepel, akkor ennek a pontnak már egészen másképp alakul a sorsa. Ez is végigjárja a 3-as, 7-es, 5-ös, 2-es, 8-as szektorokat és utána beül a 0 szektorba. Azonban a 0,37528-del ellentétben nem örökre marad itt, hanem csak a következő huszonkilenc milliárd lépés idejére. A huszonkilenc milliárd egyedik időpillanatban átugrik a 6-os szektorba, majd a 3-asba, 2-esbe, 9-esbe és 1-esbe. És ha tovább folytatjuk a számjegyek sorozatát, akkor a pontot úgy ugráltathatjuk, ahogy csak nekünk tetszik. A kiindulásul választott két pontunknak az első huszonkilenc milliárd és öt tizedesjegye egybeesik (ez messze meghalad bármilyen mérési pontosságot); a végső pályájuk azonban *teljesen független egymástól*. Ezt a hatást nevezik a „kezdeti feltételek iránti érzékenységnak”. Bármely intervallumban, legyen az akármilyen kicsiny, találunk olyan valós számokat, amelyek tizedesjegyeinek sorozata egy adott ponttól kezdve tetszőlegesen előírt mintát követ. Ez a minta lehet akár teljesen véletlenszerű számjegysorozat is. Sőt, a *legtöbb* számjegysorozat véletlenszerű, lásd a 19. fejezetet. Vagyis bármely kezdeti feltételhez tetszőlegesen közel előfordulnak olyan kezdeti feltételek is, amelyek teljesen véletlenszerű mozgáshoz vezetnek.

Fraktál és időjárás

Ha a különös attraktorok ennyire tipikusak, akkor hogyhogy senki sem szúrta ki őket korábban? Ennek két oka van. Az egyik az analitikus vagy zárt alakban felírható megoldások szeretetének klasszikus rögeszméje; ezek túl decensen viselkednek ahhoz, hogy különös attraktorokhoz vezessenek. A számítógéppel történő numerikus megoldás, amely csak a közelmúlt óta jelent járható utat, ugyanolyan könnyedséggel ontja a különös attraktorokat, mint a klasszikusokat. És az ilyen numerikus vizsgálódások során az emberek *valóban* megfigyeltek különös attraktorokat. Kevés kivételtől eltekintve azonban azt hitték, hogy valami baj van az elmélettel, a számolással vagy a kísérlettel, és így elvetették az eredményeket. Publikálásra még csak nem is gondoltak. Mivel egy determinisztikus rendszerben nem számítottak véletlenszerű viselkedésre, ezért hiába látták, nem hittek a szemüknek. Csak miután a topológusok bebizonyították, hogy mégis erre *kell* számítani, akkor kezdtek cikkeket írni arról, hogy ők ezt már régebben megtalálták.

Ez alól bátor kivételt jelentett E. N. Lorenz meteorológus egy 1963-



6. ábra. A Lorenz-attraktor, amely egy időjárásmodellből levezetett determinisztikus egyenletnél „véletlenszerű” dinamikát produkál. (John Guckenheimer és Philip Holmes *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* c. könyvéből, Springer, New York, 1983.)

as dolgozata. Szakmájához illően Lorenz ... az időjárást modellezte. Egyenletei azonban csak nagyon durva közelítéssel emlékeztetnek bármire is, ami a valóságos időjárásban végbemegy. Lorenz rendszere egy oszcillátor: ide-oda leng akár egy inga. Az ingával ellentétben azonban nem szabályosan oszcillál, sőt a mozgása meglehetősen véletlenszerűnek tűnik. A Lorenz-rendszerben található egy különös attraktor.

A Lorenz által publikált eredmények nem bizonyultak különösen attraktívnak. Így amikor a topológusok kidolgozták az elméletet, nem tudtak Lorenz munkájáról, és a maguk sajátos módján újra felfedezték a különös attraktorokat. Csak később került minden rendesen a helyére. És mivel a topológusok az általános elmélet kidolgozásakor nem ismerték a Lorenz-attraktort, kiderült, hogy ez annyira bonyolult, hogy nem is tudják kényelmesen kezelni. Sőt, mind a mai napig nem sikerült szabatosan bebizonyítani, hogy ez *valóban* egy különös attraktor, noha a szakembereknek van némi elképzelésük, hogyan kelene elindulni.

Turbulens teóriák triója

Az alkalmazott matematika egyik legklasszikusabb területe a folyadékok dinamikája. Ebben többféle differenciálegyenlet szerepel, amelyeket különféle célokra használnak, és közülük a *Navier-Stokes-egyenletek* a legáltalánosabbak. Ezek kitűnő egyezést mutatnak a kísérleti eredményekkel, és egyformán jól alkalmazhatók, akár csatornákon vagy csöveken áramló, akár akadályokat kerülő, akár töltésen átbukó folyadékról van szó. A hullámok mozgását írják le; és a legújabb számítógépes vizsgálatok szerint még azt is jól jellemzik, ahogyan a hullámok megtörnek. A sikerek ellenére létezik egy olyan típusú folyadékáramlás, amely előtt a hidrodinamika több mint egy évszázadig értetlenül állt: ez a *turbulencia*. Az elméletek jól működnek a sima áramlásokor, például ha egy csapot óvatosan nyitunk ki; azonban nem sokat tudnak kezdeni azzal a habzó folyamattal, amely a teljesen kitekert csapból ömlik. Egy folyadék durván akkor válik turbulenssé, ha túl nagy a sebessége. A turbulencia egyszerre szabályos és szabálytalan. A laboratóriumi kísérletek során majdnem mindig nagyjából ugyanakkor és ugyanolyan módon jelentkezik. Fellelphet váratlanul, kialakulhat fokozatosan, különféle alakot ölthet, de megismételhető. Másrészt maga a tényleges mozgás kaotikus, véletlenszerű és kiszámíthatatlan. Statisztikus vonásaiban szabályos tendenciák ismerhetők fel, és a mérnökök gyakran úgy modellezik a turbulenciát, hogy az egyenletekben a véletlentől függő tagokat szerepeltetnek. Noha a turbulenciát igen sokat vizsgálták, alapvető *matematikai* természetét máig is homály fedi.

Az 1934-ből származó Leray-féle turbulenciaelmélet azt állítja, hogy a turbulencia megjelenésekor a Navier-Stokes-egyenletek nem tudják már kellően jellemezni a folyadékot. Más szóval, a turbulencia alapvetően más jelenség, mint a sima áramlás. Az 1948-as Hopf-Landau-elmélet ezt tagadja, és szerinte a turbulencia olyan kváziperiodikus áramlás, amelyben végtelen sok különböző periódusú mozgás kombinálódik, és ez kelti a véletlenszerűség látszatát. 1972-ben David Ruelle és Floris Takens azon az alapon bíralták a Hopf-Landau-elméletet, hogy az topológiailag valószínűtlen. A folyadéknak ugyanis változások egy olyan sorozatán kellene átesnie, amely topologikus szempontból szinte kizárt. A Hopf-Landau-mechanizmus működéséhez ugyanis véletlen egybeesések végtelen sorozatára lenne szükség. Ruelle és Takens ehelyett úgy vélte, hogy a turbulencia nem más, mint a folyadék di-

namikájában jelentkező különös attraktor. Ez az elképzelés okkal tűnik hihetőnek: a véletlen viselkedés és a kezdeti feltételek iránti érzékenység egyaránt jellemző a turbulenciára és a különös attraktorokra. Mitchell Feigenbaum fizikus hasonló ötlettel állt elő egy eltérő topológiai környezetbe ágyazva. A javaslat nagyon ellentmondásos volt, és a klasszikus hidrodinamika számos művelőjének nem tetszett.

Hogyan tudhatjuk meg, hogy mit csinál a folyadék? A klasszikus módszer szerint egy folyadéksugarat megfestünk vagy különböző pontokon szondákat vagy „forró drótokat” helyezünk el. A lézer kifejlesztése lehetővé tette, hogy sokkal gyorsabban és a folyadékot kevésbé megzavarva sokkal jobb eredményeket nyerjünk. A folyadékban apró részecskéket lebegtetünk, amelyeken lézersugarat szórátunk. A sebességüket a Doppler-effektus segítségével határozhatjuk meg; a visszavert fény hullámhossza eltolódik. A Harry Swinney és munkatársai által végzett kísérletek a lézeres Doppler-effektuson alapuló sebességmérés felhasználásával nagyban megerősítették, hogy legalábbis speciális laboratóriumi körülmények között, a turbulencia megjelenése egybevág a különös attraktorok elméletével. A teljesen kifejlődött turbulencia talán már egy másik történet.

Színes forgatag

Ötven évvel ezelőtt a determinizmus és a véletlenszerűség közötti különbség nyilvánvalónak látszott. A véletlen tagok nélküli egyenletek determinisztikusak voltak, és ez megjósolhatóságot jelentett. Amiből az következett, hogy ha egy megfigyelt jelenség viselkedése véletlenszerűnek tűnt, akkor ehhez véletlen modellt kellett választani. Ez a fekete-fehér kép azonban a szürke különböző árnyalataiból álló teljes spektrumnak adta át a helyét. Egy rendszer lehet determinisztikus, de megjósolhatatlan, lehet véletlen tagok nélküli, mégis véletlenszerűen viselkedő. Lehet, hogy sok szabálytalan jelenséget egyszerű determinisztikus egyenletekkel tudunk modellezni. Ugyanakkor nem biztos, hogy az egyszerű egyenletek egyszerű viselkedést garantálnak. A turbulencián kívül további ilyen példák a Föld mágneses tere, a benne fellépő véletlen átfordulásokkal; az elektronikus oszcillátorok; a rovarpopulációk növekedése; és a folyékony hélium tulajdonságai.

Egy tipikus dinamikai rendszer általában se nem teljesen véletlen, se nem teljesen megjósolható. A fázistérben mindketten megtalálják

a nekik megfelelő tartományokat, amelyek egymással gyakran összefonódva kavargó, színes forgatagot alkotnak. Ma már tehát értjük, hogy ez így van, de csak találgatni tudjuk, hogy ez a megfigyelésünk hová vezethet. Feltétlenül szükség lesz új típusú kísérleti módszerekre; egy illet tárgyalunk a következő fejezetben. És lehet, hogy változtatnunk kell majd azon az általános nézeten, hogy egy elmélet elfogadásának a kritériuma a kísérleti „megjósolhatóság” legyen.

A KÉT ÉS FELEDIK DIMENZIÓ

A felhők nem gömbök, a hegyek nem kúpok, a tengerpart vonala nem körív, a fa kérge nem sima, és a villám sem egyenes vonalban halad.

Benoit Mandelbrot

Milyen hosszú a brit tengerpart? Attól függ, mennyire pontosan mérjük meg. Vannak benne nagy kacskaringók (a Wash-öböl vagy a Bristol-csatorna), közepes méretű kacskaringók (a Flamborough-fok vagy Orfordness), kis kacskaringók (a doveri sziklák közötti parti hézagok), pöttömnyi kacskaringók (egyetlen szikla irregularitásai), ... Minél közelebről nézzük, annál több kacskaringót találunk. Vagyis minél gondosabban mérjük meg a partvonalat, annál hosszabbnak tűnik. Mekkora az emberi tüdő felülete? Ugyanez a probléma lép fel, mert itt bonyolult hajtogatások és elágazások találhatók, hogy a szűk mellkasi térben nagy oxigénfelvő kapacitást lehessen elérni.

Az elméleti természettudomány hagyományos modelljei az olyan objektumok, mint a görbék és a felületek. A kalkulus alkalmazhatósága érdekében általában simaságot feltételezünk róluk, ami azt jelenti, hogy elég nagy léptékkal mérve laposnak tűnnek. A Föld például durva közelítéssel gömb alakú; mi földlakók viszont laposnak érzékeljük, mert nem látszik belőle elég ahhoz, hogy a nagyon enyhe görbületet észrevegyük. A brit tengerpart és a tüdőfelület azonban még egy erős mikroszkóp alatt sem mutatkozik laposnak. Gyűrötték maradnak. A természet bővelkedik az ilyen objektumokban, amelyek sok nagysági skálán is részletesen struktúráltak, azonban a természettudósok és a matematikusok csak nemrég vették észre, hogy ezzel a témakörrel érdemes önmagáért foglalkozni. Ennek eredménye egy újfajta geometriai alakzat, a *fraktál* lett. A latin „törni” igéből származó elnevezést Benoit Mandelbrot, a New York állambeli Watson IBM-központ kutatója vezette be. Elsősorban Mandelbrot érdeme, hogy sikerült a fraktált mint olyan újfajta matematikai objektumot meghonosítani, amely

kiválóan alkalmas azoknak a természeti jelenségeknek a modellezésére, amelyek több skálán vizsgálva is szabálytalanságot mutatnak.

Azt szoktuk mondani, hogy háromdimenziós térben élünk (hosszúság, szélesség, magasság). A sík dimenziója kettő, az egyenesé egy, a ponté nulla. A matematikusok tetszőleges egész számhoz csináltak olyan teret, amelynek éppen annyi a dimenziója. Kiderül, hogy a fraktálokhoz értelmes módon hozzárendelhető dimenziók *törtek*¹ lesznek, például 1,4427. Ez a különös tulajdonság egészen alapvető, és azt tükrözi, hogyan viselkedik a fraktál a lépték megváltozásakor. Az ilyen alakzatoknak a pusztá léte hatalmas mennyiségű új fizikai és matematikai kérdést vet fel azáltal, hogy eltereli figyelmünket a simaság iránti klasszikus ragaszkodástól. Mi történik, ha a fénysugarak olyan közegen hatolnak át, amelynek fraktálisan változik a törésmutatója? És ha egy fraktáltükrőről verődnek vissza? (Vagy a gyakorlatiasabb(?) gondolkozásuk kedvéért: hogyan befolyásolják a turbulens légköri viszonyok Ronald Reagan csillagháborús lézersugarainak azt a képességét, hogy nukleáris rakétákat meg tudjanak semmisíteni?) Mi történik egy radarsugárral, ha szabálytalan tájról verődik vissza? Milyen hangot ad egy fraktál peremű dob? Amikor már a fraktálokra jellemző megkülönböztető jegyeket fel tudjuk ismerni, akkor szerte a világban milliónyi fraktált fedezhetünk fel. Mélyebben rejtező természetükről azonban vajmi keveset tudunk.

Szörnyűségek panoptikuma

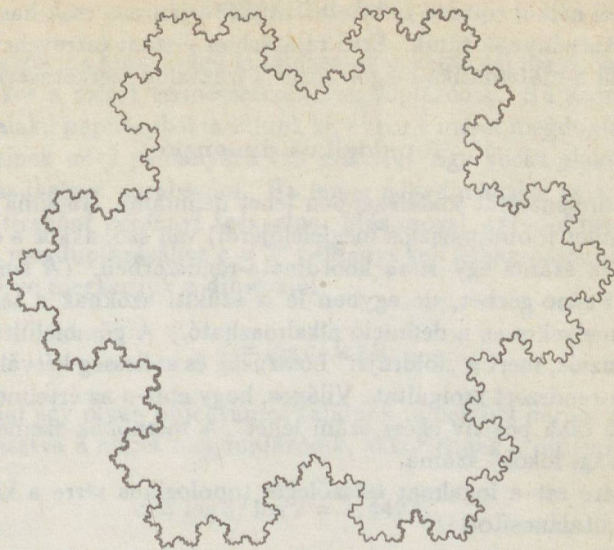
A századforduló tájékán sorra jelentek meg a különböző matematikusok által konstruált újszerű geometriai alakzatok. Ezeket a rendkívül „szabálytalan” görbéket és felületeket akkoriban olyan „patologikus” objektumoknak tekintették, amelyekkel a klasszikus analízis *korlátait* lehetett demonstrálni. Olyan ellenpéldákról volt szó, amelyek emlékeztünkbe vették, hogy a matematika rondaságalkotó képessége háttérbe esik. Görbék, amelyek egy teljes négyzetet kitöltenek; amelyek önmagukat minden pontban átmetszik; amelyek véges területet foglalkoztatnak, de végtelen hosszúak; vagy amelyeknek egyáltalán nincs hosszuk. Például a tizenharmadik században és a tizenkilencedik szá-

¹ Ezek a dimenziók tetszőleges nemnegatív valós számok lehetnek, tehát nem feltétlenül racionálisak. (FR-LM)

zad elején úgy gondolták, hogy egy folytonos függvényhez „majdnem minden” pontban húzható egy jól meghatározott érintő (vagyis a függvény a kalkulus szerinti értelemben majdnem mindenhol differenciálható). A Berlini Akadémián 1872-ben tartott előadásában Weierstrass ezt megcáfolta, és olyan függvényeket konstruált, amelyek mindenütt folytonosak, de sehol sem differenciálhatók. A Weierstrass-függvény gráfiájában nincsenek szakadások, de annyira szabálytalan, hogy egyetlen pontban sincs érintője. Megadhatók további olyan függvények is, amelyek folytonosak, de sehol sem differenciálhatók, egyiküket stílszerűen *sündisznófüggvénynek* szokták nevezni, mert a gráfja csupa tüske.

Egy klasszikus patológikus példa a *Cantor-halmaz*, amelyet úgy nyelünk, hogy egy intervallum legnagyobb részét eldobjuk. Töröljük a középső harmadot, így marad két kisebb intervallumunk; most ezeknek töröljük a középső harmadát, és ezt ismételjük a végtelenségig. A kidobott részek összhossza megegyezik az eredeti intervallum hosszával, mégis megszámlálhatatlanul végtelen sok pont maradt meg. Cantor ezt a halmazt 1883-ban használta; Henry Smith már 1875-ben ismerte. 1890-ben Peano egy olyan görbét konstruált, amely átmegy az egységnyeztet minden pontján. Ez romba döntötte azt az akkori értelmezést, hogy egy halmaz „dimenziója” a pontjai megadásához szükséges változók száma. A *Peano-görbe* lehetővé teszi, hogy a két-dimenziós négyzet pontjait egyetlen változó segítségével definiáljuk: mennyit kell utaznunk a görbén ahhoz, hogy az adott pontba érjünk. 1906-ban megszületett Helge von Koch *hópehelygörbéje*, amely végtelen hosszúságú, de csak véges területet fog közre. Ezt úgy kapjuk, hogy egy szabályos háromszög minden oldalára harmadakkora háromszöget rajzolunk, és ezt az eljárást a végtelenségig folytatjuk. A Weierstrass-görbéhez hasonlóan a hópehely is folytonos, de sehol sincsenek érintői. Nem tekinthető azonban függvénygrafikonnak.

A korszak legtöbb matematikusa elfogadta, hogy ezek a különös halmazok valóban igazolták, hogy a klasszikus analízis alkalmazhatóságának határai vannak. Ugyanakkor teljesen természetes volt számukra, hogy továbbra is ezeken a határokon *belül* dolgozzanak, és csak kevesen érezték, hogy a „patológikus eseteket” érdemes lenne önmagukért tanulmányozni. Ezeket mesterséges objektumoknak tekintették, és valószínűtlennek tartották, hogy a tudományban vagy a matematikában fontos szerepük lehetne. Poincaré a „szörnyűségek panoptikumának” nevezte őket. Hermite azt írta, hogy „rémülettel és borza-



7. ábra. Von Koch hópehelygörbéje végtelen hosszúságú, de csak véges területet fog közre. Ez volt az egyik legkorábban felfedezett fraktál.

lommal fordulok el ettől a siralmas fekélytől: függvények, amelyeknek nincs deriváltjuk!”, és megpróbálta megakadályozni, hogy Lebesgue a nemdifferenciálható függvényekről egy cikket publikáljon. Amint a 12. fejezetben láttuk, Lebesgue fedezte fel azt a rendkívül fontos integrálási eljárást, amely ma is az ő nevét viseli; nem volt tehát pehelysúlyú intellektus. Később így reagált Hermite elutasítására: „Bizonyára azt gondolta, hogy akik ezzel a ostobasággal foglalkoznak, csak az idejüket vesztegetik, ahelyett hogy azt hasznos kutatásra fordítanák.” És hozzáteszi: „Sok matematikus szemében én lettem a derivált-nélküli-függvényes ember. És mivel az Hermite által kinyilvánított rémületet és borzalmat szinte mindenki érezte, ezért valahányszor egy matematikai diskurzusba megpróbáltam bekapcsolódni, megszólalt egy analista: „Ez Önt nem fogja érdekelni; olyan függvényekről beszélgetünk, amelyeknek van deriváltjuk.” ” Lebesgue élménye mutatja, hogy gondosan meg kell különböztetnünk a matematikai sodorvonalat az éppen felkapott vagy divatos áramlatoktól.

Az igazsághoz hozzátartozik, hogy az ilyen halmazok minden külö-

növebb cél nélkül történő indokolatlan túlburjánzása csak haszontalan tornamutatványnak tűnik. Értő rálátásban viszont észrevehetjük, hogyan kezd a matematika megbirkózni a fraktálok szerkezetével.²

Topologikus dimenzió

Egy tér dimenzióját sokféleképpen lehet definiálni. Ha *sima* sokaságról (a felület többdimenziós megfelelőjéről) van szó, akkor a dimenzió a változók száma egy *sima* koordináta-rendszerben. (A *simaság* kizárja a Peano-görbét, de egyben le is szűkíti azoknak a tereknek a körét, amelyekre ez a definíció alkalmazható.) A gömbfelület például kétdimenziós, mert a „földrajzi” hosszúság és szélesség kétváltozós koordináta-rendszert szolgáltat. Világos, hogy ebben az értelmezésben a dimenzió csak pozitív egész szám lehet. A mérnökök szemében ez a „szabadsági fokok” száma.

Poincaré ezt a fogalmat tetszőleges topologikus térre a következőképpen általánosította:

- (a) Az üres halmaz dimenziója -1 .
- (b) Ha a tér valamennyi pontja körül a kis környezetek határai $n - 1$ -dimenziósak, akkor a tér n -dimenziós.

Ez egy *induktív* definíció: a 0 -dimenziós teret a -1 -dimenziós tér segítségével definiálja, majd az 1 -dimenziózt a 0 -dimenziós révén, és így tovább. Az így kapott értéket nevezzük *topologikus dimenzió*nak. Természeténél fogva ez egy topologikus invariáns, és ismét csak pozitív egész lehet.

A fraktálok elméletében a topológiánál erősebb dologra van szükség. A hópehelygörbe topológiailag a körrel azonos! Kiderül, hogy a *metrikus* struktúrát — a távolságfogalmat — is figyelembe kell venni. Olyan definíciót kell keresni a dimenzióra, amely sokaságokra a szokásos értéket adja, azonban nem topologikus, hanem metrikus tulajdonságokon alapul.

² Az a vélemény, hogy Lebesgue csak nemdifferenciálható függvényekkel foglalkozott, teljesen igazságtalan: Lebesgue egyik híres tétele azt állítja, hogy bármely monoton függvény majdnem mindenütt differenciálható. (LM)

Fraktáldimenzió

Ha két egyforma hosszúságú kötél darabot a végüknél fogva összeillesztünk, akkor a méret természetesen megduplázódik. Ha azonban egy négyzet alakú papírlapból indulunk ki, akkor a méret megduplázásához az eredetinek *négy* példányára van szükség. Egy kocka alakú sajt nál *nyolc* a szükséges darabszám. Ha lenne négydimenziós sajt, akkor a művelet *tizenhat* példányt igényelne. Más szóval, egy d -dimenziós hiperkocka megduplázásához $c = 2^d$ példányt kell felhasználnunk. Ebből d -t kifejezve megkapjuk a dimenziót:

$$d = \log c / \log 2.$$

Ha például egy olyan objektumot találunk, amelyből három példányt összeragasztva a méret megduplázódik, akkor ennek a dimenziója

$$d = \log 3 / \log 2 = 1,4427 \dots$$

Általánosabban, ahhoz, hogy egy d -dimenziós hiperkocka méretét az a -szorosára növeljük, $c = a^d$ példányra van szükségünk; tehát

$$d = \log c / \log a.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a hópehely görbe (egyik oldala) önmagának négy darab harmadakkora példányából áll össze. Vagyis $a = 3$, $c = 4$ és

$$d = \log 4 / \log 3 = 1,2618 \dots$$

Az így definiált dimenzió kissé szokatlannak tűnhet (akárcsak a sündisznófüggvény), azonban fontos küldetése van: a görbe *skálázási* tulajdonságait tükrözi. És ez teszi a most definiált *hasonlósági dimenziót* olyan alapvető fogalomná. Azokat a halmazokat, amelyekre alkalmazható, *önhasonlóknak* mondjuk. Megfelelő módosítással kiterjeszthető más halmazokra is; a végső változatot Hausdorff–Besicovitch-dimenziónak, vagy egyszerűen *fraktáldimenzió*nak nevezzük.

1961-ben Lewis Richardson számos országra megvizsgálta a partvonalmérési problémát. Vegyünk egy rögzített ϵ hosszúságú vonalzót és

ezt e nagyságú lépésekben toljuk végig a partvonal mentén. A kapott összhosszúságot jelöljük $H(e)$ -vel. Mivel a rövidebb vonalzók a kisebb kacsaringókat is követni tudják, így $H(e)$ egyre nagyobb lesz, amint e csökken. Richardson kísérletileg azt tapasztalta, hogy létezik egy olyan D szám, amelyre $H(e)$ nagyjából úgy viselkedik, mint e^{1-D} . Nagy-Britannia esetén D körülbelül 1,25. Ugyanez az érték adódik Ausztráliánál is. Németország és Portugália tengeri határaitra D 1,15-hoz van közelebb; Dél-Afrikára pedig mindössze 1. Ha a hópehely hosszát hasonló módon megmérjük, akkor D éppen a fraktáldimenzió. Így Nagy-Britannia partvonala egy kb. 1,25 dimenziós fraktálgörbe. Valamilyen okból Dél-Afrika sokkal simább. Valójában a D mennyiséget úgy tekinthetjük, mint az egyenletlenség fokának mértékét. A hópehelygörbe körülbelül ugyanolyan egyenetlen, mint a brit tengerpart. Nem lenne viszont alkalmas partvonalmodellnek, mert túl szabályos mintát mutat. (Nem szerencsés a fraktált mint „szabálytalant” jellemezni, inkább az „egyenetlen” jelző illik rá.) Véletlen görbékre be lehet vezetni a statisztikus önhasonlóság elvét; és egy 1,25 dimenziós véletlen fraktál pontosan úgy néz ki mint egy partszakasz. Az önhasonlóság azt jelenti, hogy a partszakasz egy darabjának kinagyított képe ugyanúgy egy teljes partszakasznak is elmenne. Másképpen fogalmazva, ha egy partvonalat ábrázoló térképen nincs feltüntetve a lépték, akkor a térkép tanulmányozásával a léptéket nem tudjuk kideríteni.

Fraktálok a természetben

A Természetben sok helyen fordulnak elő fraktálszerű struktúrák. Egy természeti objektum persze nem lesz *minden* lépték mellett struktúrált, a végtelenül nagytól egészen a végtelenül kicsinyig, vagy ha mégis, akkor sem tudjuk a teljes skálát megfigyelni. A fraktálmodell tehát csak egy közelítés. Ha azonban egy tárgy léptékek széles spektruma mellett részletesen struktúrált, akkor egy fraktál jobb modellnek bizonyulhat, mint egy sima görbe vagy felület.

William Harvey, a vérkeringés felfedezője megjegyezte, hogy a test majdnem minden pontja közelében találunk ütőeret és vénát is. Ezt a logikailag lehetséges véglettel modellezve feltehetjük, hogy minden ponthoz tetszőlegesen közel van ütőér és véna is. Más szóval, ha a test egy pontja nem esik egy artéria vagy véna belsejébe, akkor az fekszik a két érhálózat határán. Emellett a hatékonyság érdekében az erek

össztérfogata a test térfogatához képest kicsi kell hogy legyen (hiszen különben az élőlények nagy vérrel teli zsákok lennének). Mandelbrot így fogalmaz: „Euklideszi szemmel nézve a kritériumaink remekbe szabott anomáliát mutatnak. Az alakzatunk topologikusan kétdimenziós, hiszen két topologikusan háromdimenziós alakzat közös határa, ugyanakkor a térfogata nemcsak, hogy nem elhanyagolható az általa határolt két alakzat térfogatához képest, hanem annál jóval nagyobb!” A paradoxon egy egyszerű fraktálkonstrukció segítségével feloldható. Az összes követelménynek eleget tudunk tenni, ha az érhálózatok végteleen sokszor elágaznak, és az erek átmérője eközben rohamosan csökken. Az élő szövet ekkor fraktálfelületűvé válik; topologikus dimenziója 3, de fraktáldimenziója csak 2. Nem két lábon járó vérzsákok vagyunk, hanem testet öltött fraktálok! Lehet, hogy valaki ezt a dús fantázia termékének tekinti, azonban a fraktálokat jól ismerők számára sokatmondó intuitív értékkel bír. A fraktálgeometria paradox tulajdonságai felszabadíthatják az intuíciónkat és megkímélhetnek attól, hogy megalapozatlan feltevésekkel éljünk.

Tekintsük például a Szaturnusz gyűrűit. A legutóbbi időkig ezeket anyagból álló lapos tárcsaszerűségeknek képzelték. A távcsöves megfigyelések öt vagy hat gyűrű alakú zónát mutattak, amelyeket egymástól világosan körülhatárolt hézagok választottak el. (A hézagokat a Szaturnusz egyes holdjainak gravitációs rezonanciájával magyarázták.) Amikor a két Voyager űrhajó ténylegesen odautazott és közelebbről megnézte a Szaturnuszt, akkor bonyolultabb kép tárult eléjük: gyűrűk ezreinek, ha nem millióinak szövevényes szerkezete. A gyűrűk közötti újabb hézagok már sehogy sem illettek bele a „rezonancia”-eleméletekbe. A Szaturnusz gyűrűi sokkal inkább hasonlítanak fraktálra, mint lapos korongra. A fraktáeloszlású anyag gravitációs viszonyait eddig nem tanulmányozták, de nem valószínű, hogy teljesen azonosak lennének a lapos korongokéival. Ez még szűz kutatási terület, és lehet, hogy a fraktálmodell meg tudná magyarázni a rezonanciaszámítások kudarcát. A feltevések egyszerűsítése (például simaság) nem mindig helyénvaló; és ha a kutatókban tudatossá válik a fraktálok nyújtotta alternatív lehetőség, akkor ezzel megkímélhetik magukat, hogy az adott esettel össze nem illő feltételezéssel éljenek.

A legtöbb növény fraktálszerkezetű. Gondoljunk csak egy fára és rajta az ágak egyre csökkenő hierarchiájára: törzs, ág, gally, vessző ... meg a lehullott rózse, amit a népmesei anyóka szedeget! Kép-

zeljünk el egy rovar, amely egy fraktálszerkezetű levélen él. Minél kisebb a rovar, annál kisebb rovátkákhoz és fogazatokhoz is hozzáfér a levélen. Vagyis a tényleges levélfelület a kisebb rovarok számára sokkal nagyobb lesz, amint a brit tengerpart is hosszabbnak tűnik, ha finomabb vonalzót használunk. Új „ökológiai fürkék” nyílnak meg az egyre apróbb lényecskék részére. A D. R. Morse, J. H. Lawton, M. M. Dodson és M. H. Williamson által 1985-ben végzett kísérletek megerősítették ezt az összefüggést a rovarok mérete, a rovarpopuláció alakulása és a gazdanövény fraktáldimenziója között. Lehet, hogy a növények fraktálermészetete a rovarok törzsfjlődését is befolyásolta.

A Brown-mozgás

A Természetben előforduló fraktálok egy másik példája a 12. fejezetben már említett Brown-mozgás: ez a folyadékban lebegő apró részecskék gyors, szabálytalan tánca, amelyet a folyadékmolekulák hőmozgása okoz. A molekulák a részecskéknél ütköznek és meglökik azokat. Jean Perrin 1906-ban ezt írta:

Kössük össze a két nagyon közeli időpillanatban elfoglalt helyzetet egy egyenesszakkasszal. Ennek iránya a két időpont közötti idő csökkenésekor teljesen szabálytalanul változik. Egy elfogulatlan megfigyelő így azt a következtetést vonná le, hogy egy nemdifferenciálható függvényről van szó, és nem egy olyan görbéről, amelyhez érintő húzható. Bizonyos léptékek és bizonyos vizsgálati módszerek mellett számos jelenség írható le szabályos folytonos függvényekkel. Ha azonban továbblépünk, és az anyagnak az atomelmélet szellemével összhangban végtelenül szemcsés szerkezetet tulajdonítunk, akkor a folytonosság szigorú matematikai fogalmának az alkalmazhatósága nagymértékben csökkenni fog.

Perrin a továbbiakban azt diszkutálta, mennyire jogos egy gáz sűrűségét a tömeg/térfogat arány kis tartományban vett határértékeként tekinteni. Rámutatott, hogy ez a fogalom, amely a gázok folytonosságí mechanikájának az alapját képezi, egy atomelméletben értelmetlenné válik, mert a határérték ekkor mindenütt 0, kivéve az atomoknak megfelelő elszigetelt pontokat, ahol viszont végtelen. Egy atomi rendszert az ingadozások urálnak. Perrin felismerte, hogy Weierstrass és von Koch „patologikus” folytonos, de sehol sem differenciálható függvényei a Természetben is előfordulnak, mégpedig olyan alapvető folyamatok-

ban, mint a molekuláris mozgás. Az 1930-as években Norbert Wiener olyan matematikai modellt állított fel a Brown-mozgásra, amely a rézszeccskék pályájának pontosan ezzel a nemdifferenciálható tulajdonságával rendelkezett.

Fraktál és káosz

A káosz dinamikáját és a fraktálokat érdekes kapcsolat fűzi össze. A hagyományos és a különös attraktorok között az a legnyilvánvalóbb különbség, hogy az előbbiek simák, az utóbbiak pedig fraktálok. Ha visszagondolunk az előző fejezet tízszeresen körbecsavart tóruszainak sorozatára, akkor rögtön lerí róla az ön hasonlóság. Nemrég lehetővé vált, hogy a fraktálattraktorok létezését kísérletileg igazoljuk. Ez Floris Takens egy tételének a következménye, abban az értelemben, hogy egy attraktor topológiáját leolvashatjuk egyetlen kísérleti változótól függő megfigyelések idősorozatából, még akkor is, ha ez az attraktor több mint 1 dimenziós. Az ötlet abból áll, hogy választunk egy rögzített T időintervallumot és meghatározzuk a változó értékeit a t , $t + T$, $t + 2T$, $\dots$, $t + NT$ időpillanatokban. Ezeket egy „hamis” $(N + 1)$ -dimenziós fázistérben koordinátákként tekintve arra a meghökkentő eredményre jutunk, hogy elég nagy N esetén a „hamis” attraktor topologikusan ugyanaz, mint az igazi. A hamisat persze megjeleníthetjük és kielemezhetjük egy számítógépen, és az eredményt összevethetjük az elmélettel. Ezt az eljárást a folyadékok turbulenciájánál és a kémiai reakciók kaotikus jelenségeinél több esetben elvégezték. Az eredmények megerősítették azokat a különös attraktorokra vonatkozó elméleti előrejelzéseket, amelyekről a 15. fejezetben volt szó.

Fraktálok a sodorvonalban

A matematikán belül a fraktálok a kezdeti felkapottság után homályba merültek, ahonnan mostanában kezdenek kiemelkedni, hogy elfoglalják méltó helyüket a matematikai sodorvonalban. A káosz dinamikájában szereplő fraktálattraktorok fontos példák ugyan, de vannak más olyan helyek is, ahol a fraktálok új rálátást nyújtanak. Az egyik ilyen terület, amely elég szoros kapcsolatban áll a dinamikával, egy függvény iteráltjainak a viselkedését vizsgálja. Vegyünk egy f függvényt és egy

x számot, és az f ismételt alkalmazásával készítsük el az

$$x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$$

sorozatot. Legyen $f^n(x)$ ennek a sorozatnak az n -edik tagja; az x -nek az f szerinti n -edik *iteráltja*. Legyen például $f(x) = 2x$, és induljunk ki $x = 1$ -ből. Ekkor

$$f(1) = 2, f(f(1)) = 4, f(f(f(1))) = 8;$$

és általában $f^n(1) = 2^n$. Bonyolultabb f függvényeknél nem adható meg ilyen általános formula, azonban a sorozat viselkedését továbbra is lehet tanulmányozni. Fontos példa az $f(x) = ax(1-x)$ függvény, ahol x értéke 0 és 1 közé esik, a pedig egy 0 és 4 közötti paraméter. Az iteráltak hosszútávú viselkedése az a értékétől függ. Ha $a < 3$, akkor egyetlen értékhez konvergálnak; 3-nál kicsit nagyobb a -kra két érték között oszcillálnak, majd négy, nyolc, ... érték között oszcillálnak, végül egy 3,7 körüli a -nál a rendszer kaotikussá válik. A káosz részletesebb tanulmányozásához x helyébe tetszőleges komplex számot is írhatunk. Azoknak a komplex pontoknak a halmaza, amelyek f szerinti iteráltjai nem másznak ki a végtelenbe, fraktálszerkezetet mutat.

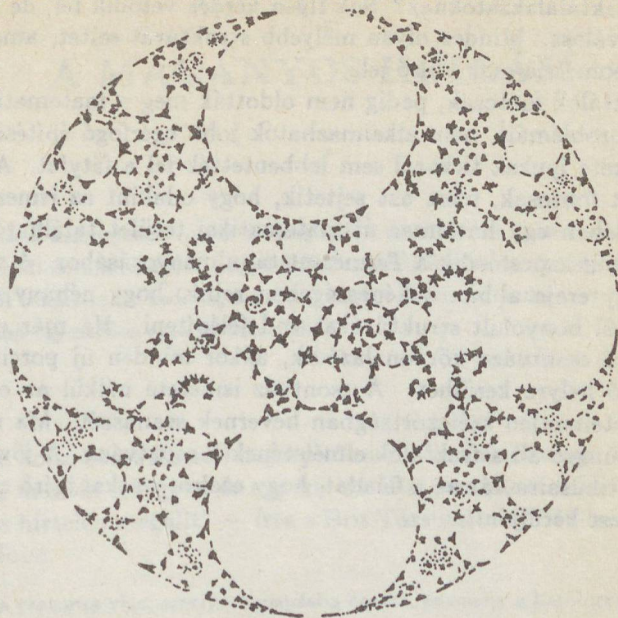
Újabb fraktálokhoz juthatunk, ha a komplex sík

$$g(z) = (az + b)/(cz + d)$$

biracionális transzformációinak egy G csoportját vizsgáljuk. A $H(G)$ *határhalmaz* az azok a pontok alkotják, amelyek körül egy z kiindulási pont $g(z)$ képei torlódnak, amint g végigfut a G csoporton. Dennis Sullivan bebizonyította, hogy ezek a halmazok, amelyek már régóta foglalkoztatták a matematikusokat, „általában” fraktálok.

Fraktál szemüveggel nézve

A fraktálok a természeti világ megértéséhez nem annyira „technológiai” mint inkább a régi természetfilozófiai értelemben járulnak hozzá. A fraktál nem számolási eszköz, hanem rendező elv, egy integrált világkép kulcsa. A fraktáloknak mint újfajta, sajátos matematikai struktúrával rendelkező, alapvető geometriai alakzatoknak a felismerése új



8. ábra. A komplex sík egy leképezéséből származó fraktál, amelyet David Mumford fedezett fel. (Benoit B. Mandelbrot *The Fractal Geometry of Nature* c. könyvéből, Freeman, San Francisco, 1982.)

jelenségek egész sorát hozza a látóterünkbe és új nézőpontok iránt tesz fogékonná minket.

A fraktálmodellek egyelőre inkább leíró mintsem magyarázó jellegűek. Látjuk, hogy a megfelelő dimenziós fraktálhegyek pontosan úgy néznek ki, mint az igazi hegyek; de fogalmunk sincs azokról az eróziós folyamatokkal vagy az anyagok törési tulajdonságaival összefüggő okokról, amelyek a fraktáljelleget létrehozzák. Még olyan alapvető dolgot sem tudunk a fizikai elvekből kiszámítani, mint egy hegymodell fraktáldimenziója. Természetesen fontos, hogy a leírás jó keretek között történjen. Ha a sejtszövetet legjobban fraktállal lehet modellezni, akkor nincs sok értelme egy olyan elméletnek, amely a sejtet téglalakú homogén ragacsnak, az élőlényt pedig egynemű gömbnek tekinti. Milyen hatással van a fraktálszerkezet egy matematikai problémára? Mikor játszik lényeges szerepet, és mikor zavar kevés vizet? Mik az

okai a fraktálalakzatoknak? Sok ilyen kérdés vetődik fel, de egyelőre kevés a válasz. Mindez olyan mélyebb struktúrát sejtet, amelynek a fraktálgeometria csak külső jele.

A fraktálok fontosak, pedig nem oldották meg a matematika nagy nyitott problémáit, nem alkalmazhatók jobb egérfogó építésére, és a forgó fekete lyukak titkáról sem lebbentették fel a fátylat. A fraktálok azért fontosak, mert azt sejtetik, hogy odakint az ismeretlenség dszungenében egy hatalmas új matematikai terület található, amely közvetlenül kapcsolódik a Természet tanulmányozásához. A matematika nagy ereje abban a képességében rejlik, hogy néhány egyszerű alapelvől bonyolult struktúrákat tud felépíteni. Ha már egy ilyen struktúra csontváza körvonalazódik, akkor minden új porcika az őt megillető helyre kerülhet. A csontváz ismerete nélkül az egyes darabok értelmetlen szétszórtságban hevernek szanaszét. Ma már rendelkezésünkre áll a fraktálok elméletének a csontváza. A jövő század matematikusaira vár az a feladat, hogy ezekre a sokat ígérő csontokra eleven test kerüljön.

A MAGÁNYOS HULLÁM

A fizikusok kénytelenek voltak a dologba beletörődni, és bánatos arccal arról panaszkodtak mindenkinek, hogy hétfőn, szerdán és pénteken a fényt hullámnak kell tekinteniük, kedden, csütörtökön és szombaton pedig részecskének. Vasárnap egyszerűen csak imádkoztak.

Banesh Hoffmann

1834-ben John Scott Russell hajóépítő mérnök az Edinburgh–Glasgow-csatorna mentén lovagolt, és egy két ló által vontatott bárkát figyelt. „A bárka hirtelen megállt” — írta a Brit Társulathoz 1844-ben küldött jelentésében.

Nem így a csatorna vize, amelyet mozgásba hozott, és amely a hajó orra körül hevesen felkeveredett, majd hirtelen nagy sebességgel előrelendült, és nagy magányos kiemelkedést alkotva, gömbölyű, sima és jól meghatározott vízkupacként végigfutott a csatornán anélkül, hogy az alakja vagy a sebessége észrevehetően megváltozott volna. Lóháton követtem, és amikor utolértem, még mindig nyolc vagy kilenc mérföldes óránkénti sebességgel gördült tovább, megőrizve eredeti mintegy harminc láb hosszú és másfél láb magas alakját. A magassága fokozatosan lecsökkent, és egy-két mérföldes üldözés után a csatorna kanyarulataiban szem elől tévesztettem. Így zajlott le 1834 augusztusában az első véletlen találkozásom ezzel az egyedülálló és csodaszép jelenséggel, amelyet Eltolási Hullámnak neveztem el.

Russell rendkívüli megfigyelése több mint egy évszázadon át háborítatlanul aludta csipkerózsika-álmát a tudomány megemésztetlen tényeinek sírkertjében a számtalan szanaszét heverő relikvia között. 1965-ben azonban életre kelt, és egy teljesen új matematikai objektumot tárt a szemünk elé, a *szolitont*, amelynek jelentős alkalmazásai vannak szerte a fizikában. Ennek segítségével fedezték fel, hogy a kvantumtérelmélet mélyen összefügg a legabsztraktabbnak számító algebrai topológiával és algebrai geometriával. Könnyen lehet, hogy forradalmi

változást fog előidézni a kvantummechanikában, és új megvilágításba helyezi az anyag végső összetevőiről és a világegyetemet formáló erőkről alkotott fizikai elképzeléseinket.

Részecskék és hullámok

A fény és az elektromágneses sugárzás más formái teszik a világegyetemet azzá, ami. De *mi* a fény? A régi görögök részecskék áramlásának képelték, amelyet a megfigyelő szeme bocsát ki. 1680-ban Newton is részecskék áramlásának gondolta, amelyet azonban a fényforrás bocsát ki, és amely a tárgyról visszapattan, akár a golyók a biliárdasztalon, és látóérzetet kelt, ha egy részecske véletlenül a megfigyelő szemébe jut. Huygens rivális elméletében egy évtizeddel később a fény már nem részecske, hanem hullám, amely úgy terjed, mint tó vizén a fodrozódás. Akkoriban a legtöbb tudós végül Newton mellé állt, bár a Newton által végzett kísérleteket manapság éppen annak igazolásául szokták felhozni, hogy Huygens-nek volt igaza!

A hullámokat a részecskéktől úgy tudjuk megkülönböztetni, hogy ütközés hatására másképp viselkednek. A részecskék visszapattannak, a hullámok viszont *interferálnak*. Ha két kavicsot dobunk egy medencébe, akkor a terjedő vízgyűrűk nem pattannak vissza egymásról. Ehelyett „kereszteződnek”, egymást erősítik, ahol két hullámtaréj találkozik, kioltják egymást, ahol hullámhegy hullámvölgyet ér, és mélyebb horpadást produkálnak, ahol két völgy kerül együvé. Az ilyen interferenciaminták a hullámok jellemző sajátságai. 1890-ben Thomas Young két párhuzamos résen fényt bocsátott át és interferenciát észlelt. A fény tehát hullám.

Másrészt viszont 1922-ben Arthur Compton elektronokat bombázott röntgensugarakkal, és olyan kölcsönhatást tapasztalt, mintha a röntgensugarak részecskékből állnának. Ez mind nagyon szép, csakhogy a röntgensugár is az elektromágneses sugárzás egy más formája, vagyis valójában nagyon kis hullámhosszú fény. A fény most akkor hullám vagy részecske? Nos ... igen. Van még ennél rosszabb is. Az elektronok legalább *tényleg* részecskék, ugye? Tévedés. 1925-ben Louis de Broglie elvégezte a réses kísérletet elektronokkal, és ismét csak interferenciát tapasztalt. Úgy vélte, hogy számos olyan objektumra, amelyet eddig részecskének hittünk, szintén fennáll ez a különös hullám-részecske dualitás, és neki lett igaza. A világegyetem nem külön

hullámokból és részecskékből épül fel, hanem egy sereg hullecskéből, amelyek egy Vörös Pimpernel könnyedségével és lelkesedésével változtatják álruhájukat.

A mai kvantummechanikában a részecske egyfajta valószínűségi hullám, amely azt írja le, milyen valószínűséggel található egy adott helyzetben. A hullám a körül a hely körül koncentrálódik, amelyet egy kísérletben valószínűleg megfigyelünk, és ezt a helyzetet alakváltoztatás nélkül követi, amint a részecske mozog. A matematikában a legközségesebb hullámok végtelen kiterjedésűek, ezért a korai elméletek „hullámcsomagokat” használtak, hogy a végtelen fodrozódások egymásra illesztésével egyetlen lokalizált képződményt tudjanak létrehozni. Sajnos, ezek a hullámcsomagok nem állnak stabilan össze; az idő előrehaladtával szétszóródnak. Egy egyszerű és természetes elméletre van szükség, amelyben szét nem szóródó lokalizált hullámok felléphetnek.

Visszapattanó hullámok

Russell végzett néhány kísérletet az Eltolási Hullámával kapcsolatban. Egy hosszú csatorna egyik végén egy súlyt ejtett a vízbe. Azt tapasztalta, hogy a hullám sebessége a nagyságától függ; ez az eredmény nem áll összhangban a vízhullámok klasszikus lineáris elméletével. A „lineáris” szó azt jelenti, hogy ha két megoldást egymáshoz illesztünk, újabb megoldást kapunk. Abban az időben a matematikai fizikában főleg lineáris egyenletek szerepeltek, mert mászt nem tudtak megoldani. A linearitás érdekében rendszerint valamilyen közelítéssel éltek; sekély hullámok, alacsony sebesség, és effélék. 1871-ben J. Boussinesq azzal a feltevéssel nyúlt a problémához, hogy a hullám szélessége jóval meghaladja a víz mélységét, és hasonló eredményt kapott a sebességre. Tőle függetlenül 1876-ban Rayleigh lordja, John William Strutt is ugyanerre a gondolatra jutott. Az általuk felállított egyenlet nem volt lineáris, de meglepő módon sikerült megoldaniuk. 1895-ben Diederik Korteweg és Hendrik de Vries egy hasonlóképpen nemlineáris egyenletet találtak, a Korteweg–de Vries vagy KdV-egyenletet, és megmutatták, hogy ennek van magányos hullám típusú megoldása, amikor egyetlen púp mozog alakváltoztatás nélkül. A sebesség megint csak a púp méretétől függ, a nagyobb hullámok gyorsabban haladnak. Az a tény, hogy ezeket a nemlineáris egyenleteket explicite meg lehetett oldani, a véletlen

művének tetszett. A véletlenekből nem lesznek szép általános elméletek — legalábbis így érezték — és a témakör szinte teljesen feledésbe merült. A Korteweg halálára írt számos megemlékezés nem említi ezt a ma már híres felfedezést, amely akkor született, amikor de Vries az ő irányítása alatt készítette doktori disszertációját. De Vries egy középiskolában tanított, és alig tudunk róla valamit. A matematika boldogan haladt tovább a linearitás útján.

A számítógépnek édesmindegy, hogy lineáris vagy nemlineáris egyenletet old meg, bár képlet helyett számtáblázatot vagy grafikont ad meg eredményül. Ahogy a számítógépek egyre hatékonyabbá váltak, időszerűnek látszott őket nemlineáris problémákra is ráereszteni. 1965-ben Norman Zabusky és M. D. Kruskal egy komputer segítségével vizsgálták a Fermi–Pasta–Ulam-problémát, amely a KdV-egyenletek egy speciális változatának megoldását jelenti, és valami egészen rendkívülit tapasztaltak. Képzeljük az egypúpú utazó hullámmegoldást mint egyetlen „lűktetést”. Hozzunk most létre olyan feltételeket, amikor egy kis lűktetés mögött egy nagyobb halad, és várjuk meg, mi sül ki ebből. Mivel a nagyobbik gyorsabban mozog, így utoléri a kicsit és belecsapódik. Ekkor a nemlineáris egyenletekre kimondott általános ítélet szerint minden összezavarodik, mert a megoldásokat nem lehet összeilleszteni.

Valóban minden összezavarodik. De csak egy időre. Azután a két lűktetés csodálatos módon újra feltámad, most a nagyobbik halad elől, és folytatják vidám utazásukat. Ez nagyon fura. A nemlineáris hullámok a kölcsönhatás idejét leszámítva lineárisok módjára viselkednek. A történet csattanója azonban még hátravan. A lineáris hullámok között is felléphetnek olyan kölcsönhatások, amikor nehéz kideríteni, ki kicsoda. Kigabalyodásuk után azonban pontosan abban a helyzetben válnak szét, amelyet akkor vettek volna fel, ha egyáltalán nem kerülnek kölcsönhatásba. A KdV-hullámokkal nem ez a helyzet: az egymáshoz viszonyított helyzetükben „fáziseltolódás” következik be, mintha valamelyikük a kölcsönhatástól felgyorsult volna.

Zabusky és Kruskal úgy érezték, hogy ez a nem mindennapi tapasztalati megfigyelés méltó az önmagáért való tanulmányozásra és elméleti vizsgálódást érdemel; és megalkották a *szoliton* fogalmát az olyan magányos hullámok jelölésére, amelyek egyéniségüket más hullámokkal történő összeütközés után is megőrzik. Már az elnevezésben is felsejlik az elemi részecskékkel való kapcsolat lehetősége, hiszen ezek is szinte

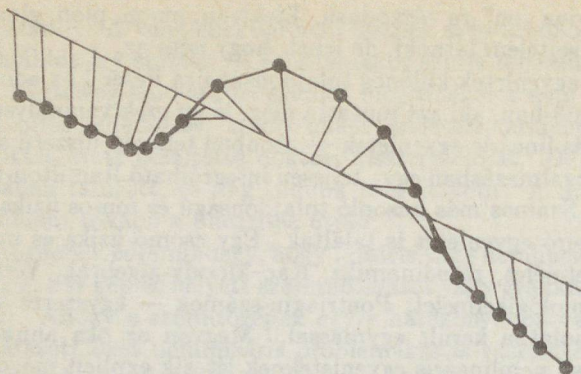
valamennyien „on”-ra végződnek. Elektron, muon, pion, gluon. Lehet, hogy ez a sejtelem látnoki, de lehet, hogy nem az.

A KdV-egyenletek különös tulajdonságaira Peter Lax adott magyarázatot 1968-ban, aki azt mutatta meg, hogy ezek valamilyen értelemben álrúhás lineáris egyenletek — azonban teljesen újszerű álrúhában! Mai megfogalmazásban egy „teljesen integrálható Hamilton-rendszer” alkotnak. Számos más hasonló tulajdonságú és fontos fizikai alkalmazásokkal bíró egyenletet is találtak. Egy csomó fizika és matematika — szóráselmélet, rácsdinamika, Kac-Moody-algebrák, Verma-modulok, kohomológiaelmélet, Pontrjagin-számok — egyszerre új és meg-hitt kapcsolatba került egymással. Megvan az oka annak, hogy a KdV-típusú nemlineáris egyenleteknek létezik explicit megoldásuk, és a „véletlen” végül *mégis* általános elmülethez vezetett. Könnyű ezt utólag kijelenteni, de a matematikában a véletleneket *mindig* érdemes megvizsgálni. Ezek ugyanis, hogy úgy mondjam, nem szoktak véletlenül előfordulni.

A lelapíthatatlan buborék

Körülbelül ekkor jelentek meg a színen a topológusok. Azt akarták tudni, mitől lehetnek a szolitonok annyira stabilak, mint amennyire szemmel láthatóan azok. A régi nézet szerint a magányos hullámoknak energiamegfontolások alapján szét kellene szóródniuk. Egy hullám együtt-tartásához illetve széthúzásához is egy bizonyos mennyiségű energia szükséges. A magányos hullám esetén ezeknek a hatásoknak pontosan ki kellene egyenlődniük, ami teljesen valószínűtlen. És a szolitonok *nem* esnek szét, tehát az érvelés rossz. A hiba a lineáris matematika túlságosan szigorú diétájában keresendő. A nemlineáris matematikával való ismerkedés legjobb módja pedig egy kis topológiai kószoló.

A szoliton egy fizikai modelljén könnyebben láthatjuk, miről is van szó. Képzeljünk el egy végtelen rudat, amelyről egymástól szabályos távolságra elhelyezve egyforma ingák lógnak, akár egy szőnyeg rojtjai. Vegyünk most végtelen sok gumidarabot, és a szomszédos ingák súlyait kössük össze. A gumi arra ösztökéli az ingákat, hogy ugyanazt próbálják csinálni, mint a szomszédai; ugyanakkor bármelyik inga individualista módon is viselkedhet, ha a gumi megnyújtásához rendelkezik a kellő energiával. Ebben az elrendezésben nyilván mindegyik



9. ábra. A szoliton egy mechanikus modellje. Egy rúdra egy sor egyforma ingát függesztünk, amelyeket gumiival kötünk össze, és az egészet egy helyen megcsavarjuk. A szoliton az a tartomány, amelyre a csavarás lokalizálódik: ez maradhat egy helyben, de végig is futhat a rúdon.

inga bánatosan csüng, és semmi érdekes sem történik. Válasszunk ki most egy pontot a rúdon, ragadjuk nyakon a pont egyik oldalára eső ingákat, és egy 360 fokos elforgatással csavarjuk őket teljesen körbe. Ekkor a „végtelenben” a lelógás még mindig nem változott, azonban lesz a rúdon egy olyan tartomány, ahol az ingák körbefordulnak. Ha a gumi nem túl erős, akkor ez csak egy rövid szakaszt jelent. Pontos alakját a nehézségi és a rugalmas erők egyensúlya határozza meg.

A csavarás egy szolitonhoz létre. Ha egy icipicit meglökjük, akkor végignyargal a rúdon. Az egész rendszer szimmetriája biztosítja, hogy nem fog megállni feltéve, hogy a súrlódás fékező hatásától eltekintünk; ez az, amit a fizikusok a „hamiltoni” jelzővel fejeznek ki. Láthatjuk, hogy az energiaegyensúly nem véletlenül marad fenn. A rugalmas erők együtt akarják tartani a hullámot; a gravitáció pedig megpróbálja szétszórni. Ha túl enyhén tekerünk az ingákon, akkor a gravitáció legyőzi az elaszticitást, és szorosabbá teszi a csavarodást. De ezzel egyben meg is növelte a rugalmassági erőket! Így azok végül ugyanakkorák lesznek, mint a gravitáció. Hasonlóan, ha túl erősen tekerünk, akkor a rugalmasság meghaladja a nehézségi erőket és így kicsit lazít a szorításon — de ettől az elasztikus erők *lecsökkennek* egészen a gravitáció szintjéig. Az egész rendszer csodálatos vissza-

csatolási mechanizmussal működik, amely automatikusan *kiigazítja* a kétféle erőt, amíg azok egyenlővé nem válnak. *Kell*, hogy a rendszer ezt a kiigazítást elvégezze, mert magát a csavarást nem lehet megszüntetni. Akármit is csinálunk az ingákkal, pontosan egyszer kell a rúd körül megpördülniük. Ez tisztán topologikus tulajdonság, amelyet a folytonos változások megőriznek, és nem lehet megkerülni. A csavarás összmenyisége változatlan marad. Vagyis a szoliton stabilitása egy topologikus kényszernek köszönhető.

Szolitonra egy másik példa az a buborék, amely tapétázáskor mindig megjelenik. Körbeüzhethjük az egész falon, de nem tudjuk kisímitani. A gyakorlatban eljut a papír széléhez és elszökik, de ha egy végtelen ív tapétát használnánk, akkor sohasem tudnánk tőle megszabadulni. Itt a buborékban levő nyomás és a papír rugalmassága a két szembenálló erő.

Részecskefizika

Itt az ideje, hogy rövid kirándulást tegyünk a modern részecskefizikában. Az atomelmélet hajnalán csak háromféle részecske létezett: a proton, a neutron és az elektron. Mindegyik meghatározott tömeggel és elektromos töltéssel rendelkezett. A proton töltése $+1$, a neutroné 0 , az elektroné -1 . Az atom össztöltését úgy kapták meg, hogy az őt alkotó részecskék töltéseit összeadták; és mivel az össztöltés mindig nulla volt, ez azt jelentette, hogy minden atom ugyanannyi elektront tartalmazott, mint protont. Nem létezett olyasmi, aminek mondjuk $1/2$ lett volna a töltése; a töltés csak egész szám lehetett. Az elektromos töltés egy *kvantumszám* volt (meghatározott méretű darabárúként került forgalomba), amely a részecskék közötti kölcsönhatások során *megőrződött* (a töltés összmenyisége nem változott). A kép hamarosan bonyolultabbá vált, amikor újfajta részecskéket fedeztek fel, mint amilyen a mezon vagy a neutrínó. Kiderült, hogy minden részecskének megvan a maga antirészecskéje, amelyek találkozás esetén egymást megsemmisítenék, és közben robbanásos módon tiszta energia szabadulna fel. A *New Yorker* 1956. november 10-i számában H. P. Furth egy kis verset jelentetett meg ennek a hatásnak a tiszteletére. Teller Ede természetesen az amerikai hidrogénbomba atyja, az AEÜ pedig az Atomenergia Ügynökség.

Messze túl a troposztrátán,
 Hová nem ér Napnak heve,
 Egy kis antianyag hátán
 Ott élt anti-Teller Ede.

Érintetlen, keresetlen,
 Minden Fúziótól távol,
 Körülvéve szeretetben
 Sok-sok anti-rokonától.

Óriás hordót sodort partra
 Egyik nap az anti-tenger,
 AEÜ felirat rajta,
 S kilépett egy földi ember.

Szinte ikrek, hihetetlen.
 Találkoznak. Erre vártak.
 Kézfogás, s már mind a ketten
 Gamma-sugarakká váltak.

Az elektron antirészecskéje a pozitron, a protoné az antiproton. Ahogy a fizikusok a gyorsítóknak egyre nagyobb energiákkal ütköztették egymásnak a részecskéket, egyre több „elemi” részecskét találtak: kaonokat, pionokat, az omega-mínuszt, a J-részecskét. Azonban ebben az örületben mégis van valamiféle rendszer: egy sereg különböző kvantumszám, amelyek bizonyos kölcsönhatásokban megmaradnak, míg másokban nem, ilyenek a töltés, a spin, az izospin, a hipertöltés, a ritkaság és a báj. A legmodernebb elméletek mindezeket a részecskéket új típusú alapelemekből, a *kvarkokból* állítják össze; de még a kvarkoknak is rengeteg fajtája ismeretes. És miközben egy-egy megjósolt részecske tényleges felfedezését minden alkalommal az elmélet beigazolásaként kürtölik világgá, általában mélyen hallgatnak arról a hat-hét részecskéről, amelyeket sehogyan sem tudnak az elméletbe beilleszteni. A fizikusok el vannak ragadtatva, és kétségkívül látványos haladást értek el, be kell azonban vallanom, hogy számomra az egész kissé (nyúlós rágó)gumielméletnek tűnik, szemben mondjuk az általános relativitáselmélet egységes eleganciájával. Ptolemaiosz epiciklusai is igen jó összhangot mutattak a kísérletekkel, mégis éppen a lényeg hi-

ányzott az egészből. A részecskefizikusok óriási erőfeszítéseket tesznek, hogy a gyanútlan kormányokból újabb dollárszázmilliókat préseljenek ki a legmodernebb hiperakármitron építésére, amelynek mindent elsöpítő energiái az anyagnak még érthetetlenebbül hátborzongató állapotait fogják felszínre hozni. Talán megbocsátható a matematikusoknak, ha azon tűnődnek, nem szolgálná-e jobban a tudomány érdekeit egy tízéves moratórium, amely alatt tilos új gyorsítókat építeni, és eközben a fizikusok megpróbálhatnák rendesen megérteni mindazt, amit már megfigyeltek. A tisztesség kedvéért meg kell jegyeznünk, hogy néhányan már most is ezt csinálják, amint mindjárt látni fogjuk.

Csomók a szövetben

Térjünk vissza a hosszú rúdhoz a rajta himbálódzó ingákkal. Másféle szolitonokat is létre tudunk hozni, ha az ingasort a központi rúd körül többször körbecsavarjuk. Ezeket *hurkoknak* nevezzük. Vannak kétszeresen, háromszorosan vagy többszörösen tekeredő hurkok, és az irányuk lehet az óramutató járásával ellentétes vagy azzal megegyező. Két hurok ütközésekor ezek a számok összeadódnak; a csavarások *összmenntisége* nem változik. Ez a részecskékre emlékeztet minket, ahol az elektromos töltés mindig egy (pozitív vagy negatív) egész szám; és a töltések a részecskék egyesülésekor összeadódnak. Ez azt jelenti, hogy minden huroknak megvan a maga *antihurka*, amely őt ütközéskor megsemmisíti, és csak nyugodt ingák csavarodásmentes sora marad. Az antihurok „fordulatszám” ugyanakkora, csak ellentétes irányú. Ez ismét csak a részecskékre emlékeztet, ahol például a (-1) töltésű elektron megsemmisíti a $(+1)$ töltésű pozitront. Ezért a hurok csavarodásainak a számát *topologikus töltésnek* nevezzük.

A matematikusok egy sereg topologikus invariánst találtak ki, ezek egyike a topologikus töltés. Valamennyien diszkrét jellegűek: egész számokban mérhetők. „Additív” algebrai struktúrát alkotnak, amelyben természetes módon kombinálódnak. Így a topológia esetleg nemcsak a szolitonok stabilitását, hanem a hozzájuk tartozó „kvantumszámokat” is meg tudja magyarázni. Mindez az elemi részecskék paradox tulajdonságainak újszerű képét vetíti elénk. Éppúgy mint a szolitonok, egymástól elkülönítve ezek is az igazi részecskékhöz hasonlítanak, de a kölcsönhatásukban hullámok módjára viselkednek. Éppúgy mint a szolitonok, ezek is rendkívül stabilak (leszámítva a kölcsönhatások

idejét és azokat a kérészéletű részecskéket, amelyek az ilyen kölcsönhatások során keletkezhetnek). Éppúgy mint a szolitonok, ezek is egész értékű invariánsokkal rendelkeznek, amelyek a szokásos szabályok szerint kombinálódnak. Éppúgy mint a szolitonokhoz, ezekhez is találhatók antirészecskék, amelyek teljesen megsemmisítik őket.

Az így festett kép szerint a részecskék a téridő szövetében jelentkező apró topologikus csavarodások vagy csomók. Stabilak, mert a topológia nem engedi őket kisimulni („kicsavarodni”); a kölcsönhatásokat pedig a topologikus tulajdonságaiknak megfelelő diszkrét számok irányítják. Sajnos, *egyelőre* senkinek sem sikerült ezt a képet életre keltetni. Ennek az az oka, hogy az egész feltevés alapját képező KdV-egyenletek egydimenziós térben „élő” részecskéknek felelnek meg. A valódi részecskék otthona viszont a háromdimenziós tér. A topologikus csavarás simán kiterjeszthető három dimenzióra; sőt már régen megcsinálták akárhány dimenzióra is. A nehézség abban rejlik, hogy senki sem tud felírni a háromdimenziós térben olyan KdV-szerű egyenleteket, amelyek eddigi fizikai ismereteinkkel összhangban lennének és szoliton típusú megoldásokat adnának.

Insztantonok

Bizonyos előrehaladás azonban ezen a vonalon is történt. Egy fizikus az ingasort „egydimenziós térelméletnek” nevezné. Egydimenziós, mert minden egyes inga helyzetét egyetlen számmal adhatjuk meg; milyen messzire található a rúd mentén. És térelmélet, mert mindegyik ingához tartozik egy fizikai változó, itt most az elforgatási szög, amely az állapotát jellemzi. Az egész rendszer mozgását egy téregyenlet irányítja, amely külön-külön minden egyes ingára érvényes, és a szomszédos ingákat, a guminak köszönhetően, összekapcsolja. A fizikában több olyan fontos egydimenziós térelmélet létezik, amely nagyon hasonlít az ingasorra. A leghíresebb közülük a *szinuszos Gordon-egyenlet*, amely onnan kapta a nevét, hogy egy Oskar Kleintől és Walter Gordontól származó egyenletben az egyik tagot egy szinuszfüggvényre cserélték ki. 1958-ban Walter Thirring a kvantummechanikának egy olyan egydimenziós változatára bukkant, amelyben szolitonszerű részecskék és antirészecskék szerepeltek. Sydney Coleman megmutatta, hogy ez a modell lényegében a szinuszos Gordon-egyenlettel azonos.

A valódi részecskékhez azonban háromdimenziós térelméletre van

sükség, ahol a változó a közönséges háromdimenziós térben elfoglalt helyzethez kapcsolódik. Itt a kvantumtérelméletből származó *mérték-tér* jut szerephez. A fizikusokat különösen a Chen Ning Yang és Robert Mills által felfedezett speciális mértékterek foglalkoztatják (ezekről később még szó lesz). Alekszandr Poljakov és Gerhard t'Hooft megmutatták, hogy egy anyagteret egy Yang-Mills-féle mértéktérrel összekapcsolva szolitonokat nyerhetünk. Az ilyen típusú szolitonokat elvileg elemi részecskeként kísérletileg is meg lehetne figyelni. A bökkenő csak az, hogy ez a részecske egy (eddig sohasem látott) egypólusú mágnes lenne, ráadásul olyan nagy tömeggel, amekkorát a részecskegyorsítók mostani generációjában nem tudunk létrehozni. Ez a szoliton, a KdV-egyenletbeli társaihoz hasonlóan, térben lokalizált, azonban örök időre létezik. Van azonban egy olyan másféle szoliton, amely időben is lokalizált. Ez olyan mint egy részecske, amely egy szemvillanásnyit életre kel, de rögtön utána ismét eltűnik. Ezt *insztanton*nak („pillanat-részecskének”)¹ nevezik, és A. A. Belavin, Poljakov, A. Sz. Svarc és Ju. Sz. Tyupkin orosz fizikusok fedezték fel. Az ő értelmezésükben ez inkább egy részecske állapotátmenete (amely egy pillanat alatt zajlik le), mintsem tényleges részecske. Az insztantonok matematikája pontosan olyan, mint a szinuszos-Gordon-tereké.

Yang-Mills-mértékterek

Nagyon mélyen bele kellene merülnünk a fizikába ahhoz, hogy részletesen bemutassuk a fizikának és a matematikának azt a kölcsönhatását, amely jelenleg zajlik a mértéktérelméletben, és amelynek az insztanton-szoliton kapcsolat csak egy apró láncszeme. A tárgykör azonban túlságosan jelentős ahhoz, hogy teljesen hallgassunk róla. Egy mérték-tér alapvető fogalma a *szimmetria*. A fizikusok régesrég tudják, hogy a szimmetriák rendkívül fontosak a kvantumelméletben. A csoportelmélet legnagyobb fogyasztói manapság a kvantumfizikusok. Lényegében arról van szó, hogy egy fizikai rendszer szimmetriái az őt leíró egyenletekben is tükröződnek. Például, a háromdimenziós euklideszi térben bármely két pont ugyanúgy néz ki, tehát kell, hogy a fizikai egyenletek invariánsak legyenek az eltolásokra, elforgatásokra és tükrözésekre — vagyis a tér összes merev elmozgatásainak csoportjára.

¹ Az *instant* a „pillanat(nyi)” szó (latin eredetű) angol megfelelője. (FR)

Ezenkívül azonban vannak nemgeometriai szimmetriák is. Ha egy rendszerben az összes részecske töltését az ellenkezőjére változtatjuk, pozitívról negatívra és viszont, akkor ez egy másik, fizikailag ugyanúgy lehetséges rendszert eredményez. Vagyis fennáll a *töltéstiükrözési* szimmetria. Más szimmetriák még különösebb hatásokat hoznak létre, például egy neutront protonba „forgatnak át” egy kvantumszámok alkotta képzeletbeli térben.

A tér geometriai szimmetriái *teljes (globális)* szimmetriák, amelyeket az egész fizikai elmélet során mindvégig következetesen kell alkalmazni. Különböző esetekben azonban a szimmetriatranszformációk eltérő módon is felhasználhatók. Ha a transzformációk okozta változásokat egy fizikai térrel kompenzálni tudjuk, akkor *helyi (lokális)* szimmetriáról van szó. Tegyük fel, hogy a térben néhány elektromos töltéssel rendelkező részecske található, és számoljuk ki az elektromos teret. Ha elmozdítjuk a töltéseket és újra kiszámítjuk a teret, akkor az eredmény *nem* engedelmeskedik semmiféle szimmetriának. Ha azonban egy mágneses teret is hozzáveszünk, akkor az elektromos és mágneses terek kombinált rendszere már transzformálható úgy, hogy a szimmetria megmaradjon. Így a két összekapcsolt térből álló rendszer, amely a Maxwell által 1868-ban felfedezett egyenletekkel írható le, egy egzakt lokális szimmetriával rendelkezik.

A kvantummechanikában fellépő mennyiségek nem valós, hanem komplex számok: fázisuk és nagyságuk van. Ha a fázis megváltoztatása (a komplex sík elforgatása) helyi szimmetriát jelent, akkor a rendszert *mértékinvariánsnak* mondjuk. A nem túl kifejező elnevezés Weyltől származik az 1920-as évekből. Weyl arra gondolt, hogy a fizikai elméletek ne függenek a hosszúságegység megválasztásától: a német eredetű „kalibrálás-invariánsnak” vagyis a mértékegység megválasztásától függetlennek is lehet fordítani. Weyl elmélete nem működött, de működött volna, ha a hosszúságegység helyett a kvantummechanikai fázist használja. Yang és Mills kidolgoztak egy mértékinvariáns elméletet az izospin-szimmetriára, amely Maxwell elektromágneses elméletéhez hasonló. Matematikailag azonban bonyolultabb, mert a helyi szimmetriák csoportja nem annyira szép, mint az elektromágneses esetben.

Az 1970-es években és az 1980-as évek elején a fizikusok szorgalmasan tanulmányozták a Yang–Mills-tereket. Közben a matematikusok erről mit sem tudva az ún. „fibrált nyálábok összefüggőseit” vizsgál-

ták. Végül kiderült, hogy a két dolog tulajdonképpen ugyanaz, csak más néven, és azóta már egyikük sem a régi. A fizika haszna például ott jelentkezett, hogy a Yang–Mills-egyenletek megoldására az algebrai geometrián és a topológián alapuló eljárásokat dolgoztak ki, és a matematika is sokat nyert. Donaldson munkája a négydimenziós sokaságokról csak egy a sok fantasztikus eredmény közül; néhány másik a klasszikus algebrai geometria és a parciális differenciálegyenletek között tár fel mély összfüggéseket. Az egész terület robbanásszerűen fejlődik és minden kétséget kizáróan a huszadik század matematikájának egyik legizgalmasabb fejezete.

Hat dimenziónk hiányzik

Egy másik rokon terület az egységes térelmélet keresése. A jelenlegi elképzelések szerint a Természetet négy alapvető kölcsönhatás irányítja: a gravitációs, az elektromágneses, a gyenge és az erős. Valamennyi részecske egymásra hatása ezeken keresztül zajlik. A kölcsönhatásokat leíró egyenletek azonban egészen mások az egyes esetekben. Egy egységes elmélet a négy erőt mint egyetlen objektumnak a különféle megjelenési formáit foglalná magába. Einstein sikertelenül próbálkozott egy egységes térelmélet megalkotásával. Az 1960-as években Sheldon Glashow, Steven Weinberg és Abdus Salam megoldották az elektromágneses és a gyenge kölcsönhatások egységesítését. A jelenlegi kutatások középpontjában szimmetriahatások, az ún. Kaluza–Klein-elméletek és a *szuperhúr* nevű objektumok állnak. A könyv írása idején a pillanatnyi favorit a világegyetemet nem 4-dimenziós, hanem 10-dimenziós téridőként látja, amelynek hat dimenziója egy feszes gömbbe van felcsavarva, és ezért nem tudjuk a mindennapi tapasztalással megfigyelni. Lehet, hogy a huszonegyedik század Világrendszere ilyen groteszk matematikai spekulációkból alakul majd ki.

IMIGYEN SZÓLA AL-KHVÁRIZMI

Azt mondod, nálad az igazi megoldás,
Nos, tudod,
Mindannyian szeretnénk látni azt a tervet.

John Lennon és Paul McCartney¹

Mohamed ibn Músza Abu Abdallah Al-Khvárizmi Al-Madzsúsi Al-Kutrubulli i. sz. 810 körül született Khorezm városában (ez ma az üzbegisztáni Urgencs). Csillagászként állt Al-Mámún kalifa (A Megbízható) szolgálatában, aki a bagdadi Báit al-Hikmát (a Bölcsesség Házát, azaz a Tudományos Akadémiát) édesapjától, Harun Al-Rasidtól (Az Igazságostól) örökölte, és amely az ő idejében élte fénykorát. Al-Khvárizminek tíz könyvét ismerjük. A három legfontosabb a *Kitáb az-zídzs al-szindhind*, amely csillagászati táblázatokat tartalmaz, s köztük az első szinusz- és kotangens-táblákat; a *Kitáb hiszáb al-adad al-hindi*, amely aritmetikáról szól; és a *Kitáb al-mukhtaszar fi hiszáb al-dzsabr v'al-mukábala*, amely az egyenletek megoldásának tömör összefoglalása. A harmadik könyvből, amelynek latinositott alakja *Ludus algebrae et almucgrabalaeque*, származik az „algebra” szó. Ha jól belegondolunk, a dolog rosszabbul is végződhetett volna. A második, amelynek latin címe *Algorithmi de numero Indorum*, a hindu számírást honosította meg az arab világban, és az így keletkező hindu-arab számrendszert pedig Európában. Vagyis a „százásoknak, tízeseknek és egyeseknek” azt a mai rendszerét, ahol a nullát jelölő szimbólum és a kilenc másik számjegy értéke attól függ, hogy melyik helyen állnak. A középkorban az aritmetikát Al-Khvárizmi nevének latinos alakjával, az „Algorismus”-szal azonosították. A *dixit Algorizmi* (imigyen szóla Al-Khvárizmi) kifejezés a világosság és a szaktekintély védjegye volt. Aritmetikakönyvében megtaláljuk az összes alapvető számolási

¹ Márton András fordítása (Forradalom I)

eljárást, amellyel a számokat összedjuk, kivonjuk, duplázzuk, felezzük, szorozzuk, osztjuk vagy négyzetgyököt vonunk belőlük. Szerepel benne egy üzleti számításokról szóló fejezet is. Nevét ma az *algoritmus* szó őrzi, amely egy adott probléma megoldására szolgáló világos és precíz eljárást jelent. Ez a fogalom központi szerepet játszik a gyakorlati és elméleti számítástudományban, valamint a kiszámíthatóság matematikájában. És talán már Önök is észrevették, hogy a számítógépeket az üzleti életben is fel szokták használni.

Egzisztencia és konstruálhatóság

Sokféle stílusú matematika van. Az egyik, kissé ködbevesző szélén áll a tiszta egzisztenciabizonyítás, amely belátja, hogy egy adott tulajdonságokkal rendelkező objektumnak szükségképpen *léteznie* kell, de a megtalálására semmiféle módszerrel nem szolgál. Középen állnak a többé-kevésbé konstruktív eljárások, amelyek a kívánt eredményeknek vagy objektumoknak egy körülhatároltabb leírását adják. Legbelül pedig a teljesen konstruktív algoritmus található, amely egy tökéletesen meghatározott eljárás, és garantáltan kiszámítja azt, amit akarunk, csak győzzük kívánni.

A transzcendens számok problémaköre mindhárom stílust jól illusztrálja. A 6. fejezetben említett Cantor-féle egzisztenciabizonyítás egy darab transzcendenst sem állít elő. Mindössze megjegyzi, hogy mivel valós számból több van, mint algebrai számból, ezért transzcendens számok biztosan léteznek. Ugyanígy, ha egy 348 ülésű Boeingre 349 utasnak adtak ki jegyet, akkor mindenki tudja, hogy valamelyikük nem utazik; de, hogy melyikük, az ebből az okoskodásból nem derül ki. A középső szinten találhatók azok a transzcendenciabizonyítások, amelyek konkrét számokra, például az e -re, π -re, $2\sqrt{2}$ -re vagy a Liouville-számra vonatkoznak. Ezek a megfontolások a szóban forgó számok speciális tulajdonságaira épülnek — amint azt is megjósolhatjuk, hogy nem az öt kisgyermekével utazó apát, vagy az ismert filmszínészt fogják egy másik járatra áttenni. A transzcendenciára vonatkozó algoritmus egy olyan általános eljárás lenne, amely tetszőleges adott számról eldöntené, hogy az eleget tesz-e egy algebrai egyenletnek vagy sem. Ilyen módszer nem ismeretes; valószínűleg nem is létezik. A jelek szerint a repülőgépeknél sincs általános „átrakási szabály”.

Kiterjedt filozófiai vita zajlott és zajlik az ilyen típusú eredmények értékéről és természetéről. Egy tiszta egzisztenciabizonyítás vajon tényleg ad-e bármiféle hasznos információt? Az Errett Bishop által 1967-ben alapított és Konstruktivistáknak nevezett modern matematikai iskola szigorúan korlátozó álláspontot képvisel és minden nem-konstruktív megfontolást teljesen elutasít. A kérdésről alkotott saját felfogásom akkor változott meg, amikor a számítógépek algebrai alkalmazásaival foglalkoztam. Egy bizonyos objektum (az ún. Cartan-részalgebra) esetén létezik klasszikus egzisztenciabizonyítás, de nincs algoritmus. A probléma más irányú megközelítésével sikerült egy algoritmust találnom. Azt azonban, hogy az algoritmus valóban működik, csak a klasszikus egzisztenciátételre támaszkodva tudtam *bebizonyítani*! Ma sincs rá közvetlen bizonyításom. Vagyis az algoritmus igazolásához egy egzisztenciátétel szükséges. Ilyen helyzet igen sokszor adódik. Ahhoz, hogy valamit kiszámítsunk, gyakran hasznos előre tudni, hogy valóban létezik. Azóta mindig úgy érzem, hogy a Konstruktivisták egy kényes ponton nem értették meg a lényegét.

A dolog valójában még zavarosabb. Mit szóljunk olyan bizonyításokhoz, amelyek *algoritmusok létezését* garantálják, de magát az algoritmust nem határozzák meg? El tudok képzelni olyan algoritmust, amely egzisztenciabizonyítások keresésére szolgál; vagy olyan bizonyításokat, amelyek olyan algoritmusok létezését igazolják, amelyekkel olyan algoritmusok létezését lehet kimutatni, amelyek ... nos, ugye értik, mire gondolok.

Algorismus előtti algoritmusok

Az algoritmikus gondolkodás évezredekkel megelőzi Al-Khvárizmit. Az egyik első jelentős algoritmus Euklidész Hetedik Könyvében jelenik meg, és jól illusztrálja az algoritmusok néhány fontos vonását. A feladat két szám legnagyobb közös osztójának (lnko-jának) a kiszámítása; vagyis, hogy melyik az a legnagyobb szám, amely mindkettőjüket (maradék nélkül) osztja. Fogalmilag a legegyszerűbb eljárás az, ha a két számot prímtényezőkre bontjuk és minden prímet a kisebbik kitevővel veszünk; ezt tanítják ma általában az iskolában. Például 60 és 280 lnko-jának a megkereséséhez felírjuk a $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ és $280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$ felbontásokat, ahonnan az lnko $2^2 \cdot 5$, azaz 20. Ez a módszer azonban már négy- vagy ötjegyű számokra sem hatékony, mert nehéz egy

számot prímtényezőkre bontani. (Ráadásul annak a bizonyítása, hogy ez megtehető, az euklideszi algoritmuson *múlik!*) Jobb az euklideszi módszer, amely a következőképpen működik. Legyen a két szám m és n , ahol m a kisebb. Ekkor:

- (1) Osszuk el n -et m -mel maradékosan, legyen a maradék r .
- (2) Írjunk n helyébe m -et és m helyébe r -et.
- (3) Az eljárást az (1) lépéstől kezdve addig ismételjük, amíg a maradék nullává nem válik.

Ekkor a legutolsó m érték a keresett ltko. Számítsuk ki például 50983 és 34017 ltko-ját:

50983/34017	maradéka 16966
34017/16966	maradéka 85
16966/85	maradéka 51
85/51	maradéka 34
51/34	maradéka 17
34/17	nincs maradék.

Az ltko tehát 17. Annak a bizonyítása, hogy az algoritmus mindig működik, elég könnyű; lényegében azon múlik, hogy ami m -et és n -et osztja, az szükségképpen r -nek is osztója.

A jólelkű nyúltenyésztő

Az euklideszi algoritmusban fellépő számok nagyon gyorsan csökkennek. Mennyire gyorsan? Hány lépésig tart az algoritmus? Ennek megválaszolásához megkeressük a legrosszabb esetet, amikor a lépésenkénti csökkenés a lehető legkisebb. Ekkor n és m hányadosa minden lépésben 1 kell hogy legyen. Visszafelé haladva azt kapjuk, hogy m és n szomszédos tagok lesznek az

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

sorozatban, ahol bármelyik szám az előző kettő összege. Ennek a sorozatnak hosszú története van: Pisai Leonardo, becenevén Fibonacci („a jó lélek fia”) vizsgálta először egy nyúltenyésztési probléma kapcsán. Leonardo 1202-es *Liber Abacij*a hozta a hindu-arab aritmetikát Európa, ami egy újabb kapcsolatot jelent Al-Khvárizmival. Mekkora az

n -edik Fibonacci-szám? Létezik rá pontos formula, de a lényegét már egy durvább becslés is mutatja. Az euklideszi algoritmus lépésszáma a nagyobbik számban levő jegyek számának körülbelül az ötszöröse. Még 100-jegyű számok esetén sincs 500 lépésnél többre szükség. Ezzel megkaptuk, hogy mennyire hatékony az algoritmus — a témát már a 2. fejezetben érintettük. A „sebesség” most a jegyek számával arányos. Ez valóban nagyon hatékony. Ezzel szemben a prímtenyezőket próbaosztással kereső eljárás hossza a jegyek számával exponenciálisan nő. Egy 100-jegyű számnál körülbelül 10^{20} lépésre lenne szükség.

A maltuziánus kapcsolat

Tegyük fel, hogy választunk egy formális számítási modellt, amelyben pontosan tudjuk definiálni a bemenő adatok méretét és a futási időt. (Egy ilyen módszerről a következő fejezetben lesz szó, de főleges lenne most bevezetni. Nyugodtan képzelhetjük úgy, hogy az input nagysága az összes felhasznált jegyek száma, a futási idő pedig a lépésszám.) Ekkor az algoritmus hatékonyságát azzal mérhetjük, hogyan függ a futási idő a bemenő adatok nagyságától. 1965-ben J. Edmonds és A. Cobham úgy látták, hogy az a két kritikus eset, amely nagyjából a tapasztalat szerinti „jó”, illetve „rossz” algoritmusnak felel meg, a polinomiális, illetve az exponenciális idő. Ha az s méretű input esetén a futási idő s egy rögzített hatványaként nő, mint például s^3 vagy s^8 , akkor az algoritmus *polinomiális idejű* (vagy röviden: *polinomidejű*). Ha úgy nő, mint 2^s vagy még gyorsabban, akkor *exponenciális idejű*. A kettő közötti növekedési ütemek bár lehetségesek, de a gyakorlatban ritkán fordulnak elő. Ennek az osztályozásnak az egyik előnye, hogy nem függ a számítási eljárás konkrét modellezésétől. Vegyük észre, hogy a „jó” euklideszi algoritmus *lineáris* idő alatt fut (mint s első hatványa), míg a természetes, de „rossz” felbontási módszer exponenciális.

1798-ban Thomas Malthus híres esszéjét írt a túlnépesedésről, amelyben szembeállította az élelmiszer-termelés lineáris növekedését a népesség exponenciális szaporodásával. Ez alapjában véve éppen a fenti megkülönböztetés, és a lényege az, hogy hosszú távon az exponenciális fog nyerni, akármilyen lassan is indít. Ezek a nyers, de hatékony mérőeszközök elméleti célokra alkalmasak, de a gyakorlatban további megfontolásokkal kell őket finomítani. Egy $10^{500}s^{120}$ futási idejű al-

goritmus a definíciónk szerint „jó”, a gyakorlatban azonban használhatatlan. Egy $\exp(10^{-500}s)$ idejű pedig „rossz”, ugyanakkor az s értékek széles tartományára jól működik. Azonban ezen fura agyszülemények egyikére sem ismerek élő példát.

$P=NP?$

Nézzünk most néhány olyan tipikus problémát, amelyre szeretnénk jó algoritmust találni.

- (1) [Rendezési probléma] Egészek egy adott halmazát rendezzük növekvő sorrendbe.
- (2) [Útkeresési probléma] Hogyan lehet a legjobban a szemetésszállító autók útvonalát egy városban úgy kijelölni, hogy a megtett kilométerek száma minimális legyen, miközben teljesülnek az olyan feltételek, hogy a hét folyamán minden szemetésszállításra kerüljön, és csak annyi teherautót használjunk, amennyivel a városi hatóságok rendelkeznek.
- (3) [Hozzárendelési probléma] Adottak a kurzusok, tanárok és diákok adatai, készítsünk olyan órarendet, amelyben nincs ütközés.
- (4) [Ládapakolási probléma] Adott különböző méretű tárgyak egy halmaza, helyezzük el őket a lehető legkevesebb rögzített méretű ládában.
- (5) [Utazó ügynök probléma] Adottak bizonyos városok, amelyek mindegyikét pontosan egyszer kell felkeresni. Mi a legrövidebb út?

Ezek valamennyien *kombinatorikus optimalizációs problémák*. Minden egyes X helyzetben egy $c(X)$ értéket kell minimalizálni. Az (1) esetben ez a még rendezetlen egészek száma; (2)-nél a megtett összkilométer; és így tovább. Ebben az összefüggésben a polinomiális/exponenciális megkülönböztetés egy fontos új vonással gazdagodik.

Jelölje P azoknak a problémáknak az osztályát, amelyek polinomiális idő alatt megoldhatók: ezek a *könnyű* problémák. Egy (valószínűleg) általánosabb osztály, amely a legtöbb érdekes problémát magába foglalja, az NP nevet viseli: ebben a *nemdeterminisztikus polinomidejű* problémák találhatók. Ezt egy kicsit nehezebb elmagyarázni. Tegyük fel, hogy most is minden egyes X helyzetben megpróbáljuk $c(X)$ -et minimalizálni, mint az előbb. Tegyük fel továbbá, hogy bármely adott

B szám esetén ellenőrizni tudjuk, hogy a probléma egy X megoldására $c(X) < B$ teljesül-e. Ekkor a probléma NP-beli. Vegyük észre, hogy a feladat feltehetően nehéz része — a megoldás megtalálása — nincs a dologba beleértve. Világos, hogy minden P-beli probléma egyben NP-beli is. Igaz-e ennek a megfordítása? Más szóval, ha egy megoldást polinomidő alatt le tudunk ellenőrizni, akkor polinomidő alatt meg is tudjuk találni? Nagyon valószínűtlenül hangzik! Ezért arra számítunk, hogy $P \neq NP$. Ez olyasminek néz ki, amit könnyen el lehet dönteni. De a látszat csal. Megoldatlan probléma, és nincs kizárva, hogy ezzel a jelentős kihívással csak a huszonegyedik század matematikusai tudnak majd érdemben szembeszállni.

NP-teljesség

A $P \neq NP$ probléma azért olyan kemény dió, mert nagyon nehéz azt igazolni, hogy egy probléma *nem* oldható meg polinomiális idő alatt. Az összes lehetséges algoritmust számításba kell vennünk, és megmutatnunk, hogy egyikük sem hatékony. A lehetetlenségi bizonyítások gyakran nagyon nehezek, lásd a körnégyesegesítést, az ötödfokú egyenlet megoldását, a párhuzamossági axiómát vagy a kontinuumsejtést. Egy másik érdekesség, hogy mindazok a problémák, amelyekről reméljük, hogy NP-beliek, de nincsenek benne P-ben, általában azonos nehézségűek, és így nem tudjuk, hol induljunk el. Speciálisan, egy problémát NP-teljesnek mondunk, ha NP-beli, és ha ő megoldható polinomidő alatt, akkor minden NP-beli probléma megoldható polinomidő alatt. Más szóval, ha ő nem ellenpélda, akkor nincs is ellenpélda. Úgyszólván minden szóba jövő problémáról, amely NP-beli, és nem látszik róla, hogy P-ben lenne, kiderül, hogy NP-teljes.² Sok ezer problémát vizsgáltak végig. És azt is tudjuk, hogy azok a módszerek, amelyeknek a legnagyobb esélyük lehetne akár $P=NP$, akár $P \neq NP$ igazolására (a szimuláció, illetve a Cantor-féle átlós eljárás), itt nem működnek.

Igaz? Hamis? Egyik sem, akár a kontinuumsejtés? Független az igazsága a formális halmazelmélettől? Halvány gőzünk sincs róla. A matematika egyik legnagyobb megoldatlan rejtélyével állunk szemben.

² Ezalól fontos kivétel a prímtényezőkre bontás. (FR)

Ládák és csomagtartók

Tegyük fel, hogy adott egy csomó különféle méretű tárgyunk, és ezeket egyforma ládába kell bepakolnunk, ahol mindegyik ládába csak egy bizonyos összméret fér. Hány ládára van szükség? Néhány egyszerű észrevétel rögtön adódik.

Mindegyik tárgy kisebb kell hogy legyen, mint a láda, különben nincs megoldás. Egy félliteres edénybe nem tudunk egy litert beletölteni. Ugyanígy, a tárgyak összmérete a ládák kapacitásával osztva a szükséges ládaszámra egy alsó korlátot ad. Ezeken az egyszerű észrevételeken kívül (amelyek nem sokat segítenek) nemigen tudunk mást kitalálni, mint hogy minden lehetséges pakolást végigpróbálunk és kiválasztjuk közülük a legjobbat. Ez persze lassú és nem hatékony, és a probléma valóban NP-teljes. Az optimális megoldás hiányában megelégedhetünk kevesebbrel is: tudunk-e találni egy „elég jó” pakolást? 1973-ban Jeffrey Ullman megmutatta, hogy az „ahová legelőször befér” („first fit” vagy „sietős”) algoritmus (amelynél a ládákat megszámozzuk és mindegyiket addig tömjük, amíg csak lehet, és utána térünk át a következőre), nem ad rosszabb eredményt, mint az optimális ládaszám 17/10-e. Sőt, a 17/10 általában nem javítható. Ha a tárgyak csökkenő nagyság szerint vannak elrendezve, akkor ez az arány 11/9-re vihető le, tehát sohasem követünk el 20 százaléknál nagyobb hibát. Mindenki, aki az elutazások alkalmával a család holmiját az autó csomagtartójába pakolni szokta, tudja, hogy a legjobb először a legnagyobb bőröndöket betenni.

Szimplább szimplex és szakadt hátizsák

Az algoritmuselmélet a matematikának egy teljesen új ága, amely rohamosan fejlődik, ahogy egyre nagyobb hangsúlyt kap a számítási módszerek gyakorlati költségigénye. A számításokat mindennapos szinten használó egyik fontos terület a *lineáris programozás*, amely ilyesféle problémákon dolgozik: hogyan osszuk el a forrásokat különböző tárgyak gyártása között, amelyek bizonyos árfeltételeknek tesznek eleget, hogy közben maximális hasznot érjünk el. Világos, hogy egy ilyen módszernek komoly kereskedelmi értéke van. A hagyományos eljárást George Dantzig dolgozta ki 1947-ben, ezt szimplexmódszernek hívják. A gyakorlatban rendszerint igen gyorsan működik, de egyes patologi-

kus esetekben rendkívül lassú. Stephen Smale topológus néhány éve bebizonyított egy tételt, amely ezt a tényt szabatos formában fejezi ki. 1979-ben nagy sajtóvisszhangot váltott ki L. G. Khacsiján egy új algoritmus — valószínűleg azért, mert az újságírók a lineáris programozást összekeverték a sokkal nehezebb utazó ügynök problémával. Khacsiján a lineáris programozási feladatot polinomidő alatt oldotta meg (ahol az idő a bemenő adatok méretének ötödik hatványa, hogy pontosak legyünk), és ehhez az ellipszoidok geometriai tulajdonságait használta fel. Mintha csak az élet az exponenciális és polinomiális idő közötti különbség kissé akadémikus voltát akarná bemutatni, kiderült, hogy a gyakorlatban Khacsiján módszere majdnem mindig lassabb, mint a szimplexmódszer! 1985-ben azonban Narendra Karmarkarnak sikerült a kettő jótulajdonságait egy valóban hatékony polinomidejű algoritmusban összekombinálni. Ez dollárban is kifejezhető komoly gyakorlati hasznot hozott.

Egy másik fontos áttörés a hátizsákproblémánál következett be nemrég. Tegyük fel, hogy van egy adott méretű hátizsákunk és egy csomó tárgyunk, amelyek mindegyikének ismerjük a méretét. Van-e a tárgyaknak egy olyan részhalmaza, amely pontosan megtölti a hátizsákot? 1982-ben Ralph Merkle felállított egy nyilvános jelkulcsú titkosírási sémát, olyat, amilyent a 2. fejezetben tárgyaltunk. Ezt a hátizsákproblémára építette, és 1000 dollárba fogadott, hogy az így kapott kód feltörhetetlen. Adi Shamir azonnal feltörte a kód egyik változatát, de ez nem volt elégséges a fogadás megnyeréséhez, bár — Merkle nem kis bosszankodására — a sajtó úgy képzelte, hogy elég. 1985-ben azután Ernest Brickell az egészet feltörte, mert gyors algoritmust talált a hátizsákprobléma megoldására.

A KISZÁMÍTHATÓSÁG HATÁRAI

Akhilleusz: Hmm ... valami furcsát érzek itt. Megvan! A mondat saját magáról beszél! Látod?

Teknős: Micsoda? A mondatok nem tudnak beszélni.

Akhilleusz: Nem, de bizonyos dolgokra *vonatkoznak* — és ez itt közvetlenül, egyértelműen és félreérthetetlenül arra a mondatra vonatkozik, amelyik ő maga!

Douglas Hofstadter

A matematikusok évszázadokon keresztül hatalmas erőfeszítéseket tettek, hogy bebizonyítsák Euklidész párhuzamossági axiómáját. A nem-euklideszi geometriák felfedezése a problémát más megvilágításba helyezte. Léteznek az euklideszitől eltérő geometriák, amelyek ugyanúgy konzisztensek: ha az euklideszi geometria ellentmondásmentes, akkor a többi is az. Így egy sokkal mélyebb kérdés vetődött fel: *tényleg* ellentmondásmentes-e az euklideszi geometria? Mivel kezdetben mindenki azt hitte, hogy az euklideszi a Természet egyetlen igaz geometriája, és más geometriáknak nem lehet értelme, majd kiderült, hogy mindkét elképzelés rossz, a matematikusok még Euklidész geometriájában is kételkedni kezdtek. Vajon ez ellentmondásmentes-e? Viszonylag könnyen be tudták látni, hogy igen, feltéve, hogy a valós számok rendszere is ellentmondásmentes. Ezután a matematika alapjainak vizsgálatához Cantor nyomdokaiba lépve a valós számok ellentmondásmentességének a kérdését sikerült visszavezetni az egészek, valamint a matematikai logika és a formális halmazelmélet ellentmondásmentességének a problémájára. A halmazelméleten belül, a logika felhasználásával modellezhetők az egész számok; az egészekkel modellezhetők a valósok; a valósokkal az euklideszi geometria; és az euklideszi geometriával a nemeuklideszi is. Mindez nagyon szép, de mi a helyzet magával a halmazelmélettel és a logikával? Szörnyű mélypont:

a matematikusok a Világegyetem meghódítására indultak, és a végén kiderült, hogy még a saját lábuk alatt is inog a talaj.

A századforduló táján David Hilbert kijelölt egy kutatási programot, amelynek tervezett végeredménye szabatos bizonyítást adott volna a logika és a halmazelmélet, vagy ami ezzel ekvivalens, az aritmetika ellentmondásmentességére. De mielőtt a program igazán beindult volna, egy Kurt Gödel nevű ismeretlen teljesen felborította a terveket, és a program összeomlott. Gödel megmutatta, hogy az aritmetikában vannak olyan igaz állítások, amelyeket sohasem lehet bebizonyítani, és ha valaki talál egy bizonyítást arra, hogy az aritmetika ellentmondásmentes, akkor nem az! Majdnem ugyanebben az időben Alan Turing a matematikai logikában próbálta a kiszámíthatóság fogalmát tisztázni. Ő is arra jutott, hogy bizonyos nagyon természetes kérdéseket *egyáltalán nem lehet megválaszolni*. Ezen nem azt kell érteni, hogy senki sem elég okos ahhoz, hogy megtalálja a választ: teljes szabatossággal bebizonyítható, hogy egyáltalán nem létezik válasz!

Turing-gépek

Ahhoz, hogy a gondolatainkat pontosan meg tudjuk fogalmazni — és ezen a területen ez kötelező — szükségünk van a „kiszámíthatóság” precíz fogalmára. Vehetnénk például egy IBM személyi számítógépet, amelynek ideálisan korlátlan a memóriája, azaz tetszőleges számú floppy lemezt használhatunk, és amely egy assembler nyelven működik. Ez elméleti célokra egy kicsit zavaros lenne, mert a gép teljes operációs rendszerét értenünk kellene, hogyan működnek az áramkörei stb. Ehelyett a *Turing-gépet* szoktuk választani, amelynek szülőatyja, Turing, Neumann Jánossal együtt a modern számítógép létrejöttének elméleti alapjait teremtette meg. A Turing-gép egy lehető legkezdtelegesebb szerkezetű idealizált számítógép. Képzeljünk el egy végtelen hosszú, négyzetekre osztott *szalagot*, amely egy *fej* előtt mozog. A fej véges sok belső *állapotot* vehet fel. A fej el tudja olvasni a szalagot, és a 0 vagy az 1 jelet rá is írhatja. Csak 0-ra és 1-re van szükség, mert minden információ kódolható 0-k és 1-ek segítségével. Használjuk például a Morse-ábécét a pont helyett 0-val, a vonás helyett pedig 1-gyel. (A gyakorlatban inkább egy standard bináris kódot szoktunk választani.) A gép viselkedését egy programféle vezérli, az ún. *Turing-*

Post-program. Ez számozott lépésekből áll, és minden lépés az alábbi hét utasítás valamelyike:

Írj 1-et az aktuális négyzetbe.

Írj 0-t az aktuális négyzetbe.

Lépj egy négyzetnyit jobbra.

Lépj egy négyzetnyit balra.

Menj a program k -adik lépésére, ha az aktuális négyzetben 1 áll.

Menj a program k -adik lépésére, ha az aktuális négyzetben 0 áll.

Állj meg.

A programon kívül a szalag tartalmazzon valamilyen bemenő adatokat is; a program ezekkel operál. A gép a program utasításainak megfelelően feldolgozza az adatokat és utána megáll.

Tegyük fel például, hogy a kiinduló adatsor egy csupa 1-ből álló blokk, amelyet 0-k fognak közre:

... 011111110 ...

↑

ahol a nyíl mutatja az aktuális négyzetet. Tegyük fel, azt akarjuk, hogy a gép a határoló 0-kat változtassa 1-ekre és utána álljon meg, vagyis a blokk hosszát növelje meg kettővel. Ezt a következő programmal érhetjük el:

1. Lépj jobbra.
2. Ha itt 1-et találsz, akkor menj az 1. lépésre.
3. Írj a négyzetbe 1-et.
4. Lépj balra.
5. Ha itt 1-et találsz, akkor menj a 4. lépésre.
6. Írj a négyzetbe 1-et.
7. Állj meg.

A fej addig lépeget jobbra, amíg az első 0-hoz nem ér. Ezt kicseréli 1-re, majd addig lépeget balra, amíg 0-t nem talál. Ezt is kicseréli 1-re és megáll. Azt gondolhatnánk, hogy egy ilyen primitív szerkezet lehetőségei korlátozottak. Nem így van; Turing bebizonyította, hogy bármit, amit egy számítógép ki tud számítani, arra egy Turing-gép is képes. Lassabban persze, de ez nem fogja zavarni azokat az elméleti szakembereket, akik a kiszámíthatóság természetét akarják megismerni.

Egy Turing-Post-program maga is kódolható a szalagon, például a következőképpen:

000	Írj 0-t
001	Írj 1-et
010	Lépj jobbra
011	Lépj balra
10100...01	Menj a k -adik lépésre ha 0-t találtál
11011...10	Menj a k -adik lépésre ha 1-et találtál
100	Állj meg

Itt a ... k -szoros ismétlést jelent. Az előző program kódja ekkor

0101101000101111011110001100,

és bármely program egyértelműen rekonstruálható a kódjából. Turing 1936-ban megmutatta, hogyan kell egy *U univerzális* Turing-gépet konstruálni, amely *bármely* Turing-gép *bármely* programját szimulálni tudja. Ennek rögzített a programja. A bemenő adatok 0-1 sorozata (G kódja) $\cdot d$ alakú, ha a G programú gépről és azon a d inputról van szó. U programja elolvassa a kódot, dekódolja a G szerinti utasításokat, és végrehajtja azokat a d adatokra. Ugyanezt a következőképpen is megfogalmazhatjuk. Bármely számítógép képes bármely másik számítógépet szimulálni, ha elegendő idő és memória áll a rendelkezésére. Egy Commodore-64 megjátszhatja, hogy ő egy Cray X-MP. Nagyon lassan persze — a sebesség hardverfüggő. A program magába foglalja a szimulálandó gép működésének teljes kódolt leírását. Ezért elméleti célokra nyugodtan úgy tekinthetjük, hogy minden számolást Turing-gépekkel végzünk, és az algoritmust mint egy Turing-Post-programot definiáljuk.

A megállási probléma

Egy algoritmus fontos tulajdonsága, hogy végül is *álljon meg* és adjon egyértelmű választ. Nem sokat ér egy olyan számolás, amely végtelen sokáig tarthat, mert amíg nem ért véget, nem ismerjük a választ. Így természetesen vetődik fel a következő kérdés. Tegyük fel, hogy adott egy Turing-Post-program. Bizonyos véges bemenő jelsorozatokra ez végül is megáll. Másokra esetleg nem. (Például, a „lépegess jobbra, amíg 1-et nem találsz” nem fog megállni, ha a fejtől jobbra nincsenek

1-ek.) A *Megállási Problémánál* azt kell eldönteni, hogy mely inputok esetén fog a gép végül is megállni és melyeknél nem. A hely szellemének megfelelően ezt a feladatot egy algoritmussal szeretnénk megoldani. Vagyis egy olyan Turing-Post-programot keresünk, amely bármely (0-kkal és 1-ekkel kódolt) P program és d adatok esetén aszerint ír ki 0-t vagy 1-et, hogy P a d inputra valamikor megáll-e vagy sem.

Ilyesmiken elmélkedett Turing 1936-ban, és ragyogó ötlete támadt.¹ Tegyük fel, hogy létezik egy Megállási Algoritmus, és alkalmazzuk ezt az U univerzális Turing-gépre a d adatokkal. Pontosabban, tekintsük az alábbi kicsit bonyolultabb programot:

- (a) Ellenőrizd, hogy d valamely D Turing-Post-program kódja-e. Ha nem, akkor kezd elölről.
- (b) Ha d a D kódja, akkor a jelsorozatot duplázd meg, így $d \cdot d$ adódik.
- (c) Alkalmazd a Megállási Algoritmust U -ra a $d \cdot d$ inputtal. Ha megáll, akkor menj vissza (c) elejére.
- (d) Egyébként állj meg.

Hívjuk ezt a programot M -nek. Észrevehetjük, hogy M „fennakad” az (a) helyen, ha d nem programkód, illetve a (c) helyen, ha a $d \cdot d$ inputra U megáll. Namármost, az M programnak is van egy m kódja. Megáll-e M az m inputra? Világos, hogy nem akad fenn (a)-nál, mert m definíció szerint (az M program) kód(ja). Akkor és csak akkor jut túl (c)-n, ha U nem áll meg az $m \cdot m$ inputra. Vagyis összefoglalva:

M megáll az m inputra
akkor és csak akkor ha
 U nem áll meg az $m \cdot m$ inputra.

Nézzük meg azonban, hogy az U univerzális gép hogyan szimulál egy P programot. A $(P \text{ kódja}) \cdot d$ bemenő adatokkal indul, és pontosan úgy viselkedik, mint P a d bemenő adatok mellett. Más szóval, az alábbi második „verset” kaptuk:

P megáll a d inputra
akkor és csak akkor ha
 U megáll a $(P \text{ kódja}) \cdot d$ inputra.

¹ Az itt következő gondolatmenet részletesebb kifejtését lásd pl. Gács-Lovász *Algoritmusok* c. könyvében. (FR-LM)

Végül legyen $P = M$, vagyis P kódja = M kódja = m , és legyen $d = m$. Ekkor a második vers így hangzik:

M megáll az m inputra
akkor és csak akkor ha
 U megáll az $m \cdot m$ inputra.

Ez viszont pontosan ellentmond az első versnek!

Ezzel bebizonyítottuk a legegyszerűbb és legalapvetőbb eldönthetlenségi tételt. Egy probléma akkor *eldönthetetlen*, ha nem létezik a megoldására algoritmus. A Megállási Probléma eldönthetlensége bizonyos határt szab az algoritmusok alkalmazhatóságának. A bizonyítás, az eldönthetlenségi elmélet számos más kérdéséhez hasonlóan, tulajdonképpen a Cantor-féle átlós eljárás egy alkalmazása. Nagyon hasonló a logikai szerkezete, mint annak a kártyának, amelynek egyik oldalán

A KÁRTYA MÁSIK OLDALÁRA ÍRT ÁLLÍTÁS IGAZ

felirat, a másikon pedig

A KÁRTYA MÁSIK OLDALÁRA ÍRT ÁLLÍTÁS HAMIS

felirat szerepel.

Az axióma-kereskedő

Turing tétele a legalapvetőbb eldönthetlenségi eredmény, de nem az első ebben a műfajban. 1930-ban Gödel egy közlésre benyújtott dolgozata teljesen romokba döntötte Hilbertnek azt a programját, amely az aritmetika ellentmondásmentességének a bizonyítását tűzte ki célul. Egyúttal menthetetlenül megfúrta Hilbertnek azt a másik kedvenc elképzelését is, hogy elvileg *minden* problémát meg lehet oldani. „Tudnunk *kell*, tudni *fogjuk*” — hirdette Hilbert. Gödel azonban megmutatta, hogy a dolgok bonyolultabbak Hilbert filozófiai ábrándjainál. Az alábbi két megsemmisítő hatású tétel született:

- (1) Ha a formális halmazelmélet ellentmondásmentes, akkor léteznek olyan tételek, amelyek se nem bizonyíthatók, se nem cáfolhatók.
- (2) Nincs olyan eljárás, amellyel be lehetne bizonyítani a halmazelmélet ellentmondásmentességét.

A legenda szerint Hilbertet majdnem megütötte a guta, amikor Gödel eredményeiről értesült. A matematikusok eleinte azt hitték, hogy a bajok a halmazelméletnek a Gödel által használt konkrét formalizálásával függnek össze. Amint azonban kezdték a bizonyítás lényegét megérteni, világossá vált, hogy ugyanezek a gondolatok az aritmetika bármely formalizálása esetén alkalmazhatók. Nem valamely axiómarendszert kell okolni: a „bűnös” maga az aritmetika. Gödel tételeivel egyszer és mindenkorra elenyészett az a remény, hogy a matematika szeplőtelen tisztaságát be lehessen bizonyítani. A matematikának szembe kellett néznie azzal a kegyetlen ténnyel, amellyel a többi tudomány már régen megbarátkozott: nem lehetünk teljesen biztosak abban, hogy amit csinálunk, az helyes. Utólag visszanézve nem ártott, hogy felébredtünk, hiszen a teljes tökéletesség kergetése nyilvánvalóan agyrem volt: hogyan is igazolhatná bármely rendszer a saját tévedhetetlenségét? Hinne-e Ön valakinek, aki azt állítaná: „tévedhetetlen vagyok” és nyomtatékul hozzáfűzné: „mert ezt mondom”? (Ha igen, akkor eladnék Önnek egy csodálatos használt autót, pontosan olyat, amilyenre vágyik, alig pár kilométer van benne; egy öreg hölgyé volt, aki csak arra használta, hogy vasárnaponként matematika szemináriumokra járjon vele...)

Hilbert tizedik problémája

Az 1900-as Nemzetközi Matematikai Kongresszuson tartott előadásában Hilbert huszonhárom, általa kiemelkedően fontosnak tartott problémát sorolt fel. Közöttük volt a kontinuumsejtés és az aritmetika elmentmondásmentessége. Az egyik probléma egy olyan algoritmus megadását tűzte ki célul, amely egy tetszőleges diofantikus egyenlet megoldhatóságát el tudja dönteni. Ez 1970-ig megoldatlan maradt, amikor is Jurij Matijaszevics megmutatta (Martin Davis, Hilary Putnam és Julia Robinson korábbi eredményeire támaszkodva), hogy ilyen algoritmus nem létezik. James Jones egy konkrét példát is talált, egy tizennyolc egyenletből álló rendszert, ahol a foksámok maximuma 5^{60} és a változók száma harminchárom. Amikor az ellenpéldák így néznek ki, akkor lehetséges, hogy a kérdésfeltevéssel van baj. Mi a helyzet, ha például ragaszkodunk ahhoz, hogy a foksámok kicsik maradjanak? Carl Ludwig Siegel másodfokú egyenletekre talált egy algoritmust 1972-ben. Ismeretes, hogy ilyen algoritmus negyedfokúakra nem

létezik, és így nyitott probléma a harmadfokú eset. Matyijaszevics eredménye néhány váratlan melléktermékkel is szolgált, többek között egy olyan polinommal, amelynek a pozitív helyettesítési értékei pontosan a prímek. Kérdéses azonban, hogy hatással lesz-e a prím-számelméletre, ugyanis ez még az előző rendszernél is bonyolultabb. Matyijaszevics lényegében arra talált eljárást, hogyan lehet egy Turing-gépet diofantikus egyenlettel szimulálni. Ennek alapján bármit, amit a Turing-gépekkel el tudunk végezni — prímeket kiszámítani, fennakadni a megállási problémán — ugyanúgy diofantikus egyenletek segítségével is megtehetjük.

Véletlen sorozatok

Az eldönthetetlenségi elméletekben a végsőig ment el Gregory Chaitin 1965-ben annak kapcsán, amikor sikeresen definiálta, mit is értsünk egy *véletlen* 0-1 sorozaton. Természetesen az a véletlen sorozat, amelyben nincs semmiféle szabályszerűség. Gyakran halljuk ezt, de most vegyük is komolyan és elemezzük. Tekintsünk először egy nagyon szabályos esetet: egymillió 1-et egymás után. Nekiülhetnénk, hogy végigírjuk, de fölösleges, mert rövidebb recept is adható: „egymillió 1 egymás után”. Némi további munkával a definíció alapján felépíthetnénk egy Turing-gépet, amelynél éppen ez a sorozat az output, és a programot egymilliónál jóval kevesebb jeggyel kódolhatjuk. Vagyis azt mondhatjuk, hogy egy sorozatban akkor van *szabályszerűség*, ha egy *rövidebb* sorozattal kiszámítható, ez utóbbit egy Turing-gép kódjaként értelmezve. „Egy szabályos sorozat tömören leírható.” Véletlen az a sorozat, amelynek nem létezik tömör leírása. A legrövidebben úgy adhatjuk meg, ha teljesen kiírjuk.

Már Chaitin előtt hasonló gondolatokat dolgozott ki kevésbé formális módon Ray Solomonoff 1960-ban. Turing-Post-program helyett ő egyszerűen a nyelv szavaival határozta meg a sorozatot, és megszámlolta, hány karaktert (betűt, szóközt stb.) használt fel ehhez. Ekkor

11111111111111111111

sorozat „hús 1” módon 6 karakterrel definiálható, míg a

11111111110000000000

sorozat „tíz 1, tíz 0” leírásához 12 karakter szükséges. Ha tömörebb meghatározások nincsenek, akkor eszerint a második sorozat körülbelül kétszer olyan bonyolult, mint az első. Chaitin ennek az elvnek egy formálisabb változatát dolgozta ki, mégpedig az információelmélet segítségével, amelyet Claude Shannon alkotott meg az 1940-es években az adatátvitel vizsgálatára. Ebből az kristályosodott ki, hogy egy 0-1 jelsorozat *bonyolultsága* vagy *információtartalma* c , ha alkalmas adatokból egy olyan Turing-Post-program segítségével kiszámítható, ahol a programkód és az adatok összhosszúsága legfeljebb c . Innen már könnyen belátható, hogy csak nagyon kevés sorozatnak lehet a bonyolultsága sokkal kisebb, mint a hossza. Tegyük fel például, hogy egy n hosszúságú sorozat bonyolultsága $n - 5$. Ekkor kiszámítható egy olyan géppel, amelynél a kód, plusz az adatok hossza $n - 5$ vagy kevesebb. Legfeljebb

$$1 + 2 + \dots + 2^{n-5} = 2^{n-4} - 1$$

ilyen gép létezik, tehát (az egyszerűség kedvéért a -1 -et elhanyagolva) legfeljebb 2^{n-4} olyan n hosszúságú jelsorozat lehetséges, amelynek a bonyolultsága $n - 5$ vagy kevesebb. Mivel az n hosszúságú sorozatok száma 2^n , így a $\leq n - 5$ bonyolultságúak aránya legfeljebb $2^{n-4}/2^n = 1/16$. Vagyis csak minden 16-odik sorozat bonyolultsága lesz 5-tel kevesebb, mint a hossza. Hasonlóan, csak nagyjából minden 500-adik sorozat bonyolultsága marad $\leq n - 10$. A legtöbb sorozat véletlen, vagy legalábbis majdnem az.

Chaitin ezek alapján nagymértékben általánosította Gödel tételeit. Az egyik következmény lényegét a következőképpen fogalmazhatjuk meg. Létezik egy jól meghatározott K szám, hogy semelyik adott 0-1 sorozatról nem lehet bebizonyítani, hogy a bonyolultsága K . Rendkívül bizarr az alábbi következmény. Noha a hosszú 0-1 sorozatok döntő többsége Chaitin definíciója szerint véletlen sorozat, mégsem lehet egy tetszőlegesen hosszú sorozatot leírni és *bebizonyítani* róla, hogy véletlen. Egy tetszőlegesen hosszú sorozatot csak úgy tudnánk *leírni*, ha egy általános szabályt adnánk a tagjaira, de ekkor ez a szabály rövidebb, mint a sorozat elegendően hosszú szakasza, tehát a sorozat végül is nem lehet véletlen! Hogy mindezt jobban el tudjuk képzelni, gondoljunk a Solomonoff-féle megközelítésre, és nézzük az alábbi meg-

határozást: „a legrövidebb olyan jelsorozat, amelyet nem lehet 89-nél kevesebb karakterrel definiálni”. Ez a jelsorozat azonban a definíciója szerint már 88 karakterrel definiálható! Ez a „Richard-paradoxon” a lényege Chaitin eredményeinek.

SÉTA AZ AKNAMEZŐN

Egyesek szerint a tiszta matematika teljes egészében a valóságból ered, ahogyan a geometria, a legenda szerint, a Nílus áradási hatásainak méréséből származik. (Ha ez hamis, és a geometria már azelőtt is létezett, hogy szükség lett volna rá, akkor az okfejtés ingatag talajra épült. Ha igaz, akkor az okfejtés csak annyit bizonyít, hogy az alkalmazott matematika nem tud megenni a tiszta matematika nélkül, miképp a hangyász sem létezhet hangyák nélkül, de ez megfordítva nem feltétlenül áll.) Amennyiben a matematika valóban a tárgyak méreteinek és formáinak a vizsgálatából fejlődött ki, akkor igaz, hogy minden matematika a valóság tárgyaiból ered. Kétséges azonban, hogy a huszadik századi matematika néhány legjelentősebb kutatási vonalához (mint amilyen a Cantor-féle kontinuumsejtés, a Riemann-sejtés vagy a Poincaré-sejtés) a fizikával, a pszichológiával, a biológiával vagy a közgazdaságtannal létrejött megújuló kapcsolatfelvételre lett volna szükség.

Paul Halmos

Befejezésül vessük bele magunkat az élet harsányan kavargó sűrűjébe, ahol máris egy ideológiai aknamező fogad minket: milyen kapcsolatban áll a matematika az alkalmazásaival. Mi különbözteti meg a hasznos matematikát a haszontalantól? A jót a rossztól? Lehet-e a haszontalan matematika jó, vagy a rossz matematika hasznos?

Egykoron, így mesélik, a Régi Szép Időkben (értsd: a tizenkilencedik században) csak Matematika létezett, egy olyan tárgy, amely szorosan összefonódott az Anyatermészet dolgaival. Mára ez a tárgy két ideológiai táborra bomlott, a Tisztára és az Alkalmazottra. Mindegyik bizalmatlanul méregeti a másikat. Az egyetemi tanszékek ellenséges pártokra szakadtak, amelyek partizánháborút viselnek minden egyes új kinevezésért, diákért, íróasztalért és vizsgakérdésért. Mindkét oldal az Igazhitűek módján meg van győződve a saját erkölcsi felsőbbrendűségéről. Az Alkalmazott Matematikusok azzal vádolják a Tisztákat, hogy elvesztették a kapcsolatot a valósággal; a Tiszta Matematikusok

úgy érzik, hogy az Alkalmazottak túlságosan felületesek és soha nem értették meg igazán a játék lényegét. A dologban az a szomorú, hogy ez a karikatúra bizonyos értelemben nagyon közel áll a valóságos képhez, legalábbis brit földön. Szerencsére azonban a matematika jövője nem az egyetemi intézetek bizottsági ülésein dől el, és a karikatúra a matematika ügyvezetésének, és nem magának a tárgynak a képe. Lehet, hogy a matematikai logika egy buzgó harcosa számára, aki kétségbeesetten próbálja a mérnökképző kart rávenni, hogy az ő nemstandard analízis előadását az ottani hallgatók felvegyék, a szakadék áthidalhatatlannak látszik. De azt gyanítom, hogy a huszonegyedik század történészei, amikor a mi korunkra visszanéznek, sokkal egységesebb képet fognak látni, amely nem különbözik lényegesen a tizenkilencedik századétól. Mi túl közel állunk a tárgyunkhoz, túlzottan lefoglálnak bennünket a kicsinyes aggodalmak, és ezért nem rendelkezünk elég széles perspektívával.

Ennek a könyvnek az ideológiai állásfoglalása eddig nem lett nyíltan megfogalmazva, de kétségkívül egyértelműen kiderült. A témák megválasztása illusztrálja, hogy én mit értek „matematika” alatt. Ami a modern kort illeti, ez elsődlegesen — de nem kizárólagosan — „tisztá” matematikát jelent, amin azt értem, hogy olyan emberek alkotása, akik számára a fő mozgatórugó magának a matematikának a fejlődése, nem pedig valamilyen matematikán kívüli tudományos problémának a megoldása. Nem tudtam mindenről beszélni, amit említésre méltónak tartok, és ezek között több „alkalmazott” téma is kimaradt. Ennek ellenére az a kép, amely a (tisztá?) matematikáról így összeállt, semmiképpen sem az a hagyományos szemlélet, amely szerint a művész a „valódi világról” megfelelően (vagy akár ellenségesen tekintve arra) ül az elefántcsonttornyában. Nincsenek éles határvonalak. Azok, akik a Bell Laboratóriumban a prímtényezőkre bontást tanulmányozzák, számelmélészek vagy kriptográfusok? Az öttest-probléma ütközésmentes elfajulásainak a léte tisztá vagy alkalmazott matematika? A szimmetria hatása a Taylor-Couette-folyamra a csoportelmélethez vagy a folyadékok dinamikájához sorolandó? Már nem vered a feleségedet? A válasz bonyolultabb egy egyszerű „igen”-nél vagy „nem”-nél.

Ahogy Paul Halmos írja, „ha csoportosítani akarunk egy csomó dolgot, amelyek témája a hajóépítéstől a folyadékok dinamikáig, a parciális differenciálegyenletektől a topologikus vektorterekig terjed, akkor a tisztá és az alkalmazott a spektrum két szélén világosan szét-

válí, de a közepén teljesen összemósodik.” Ez nem azt jelenti, hogy nincs semmilyen különbség; eszembe jut Charles Fort egy megjegyzése, hogy bár elképzelhető egy folytonos átmenet egy viziló és egy bicikli között, ez mégsem azt jelenti, hogy vizilovakon közlekedünk — mindenesetre óvatosnak kell lennünk. Az alkalmazhatóság önmagában nem jelent semmiféle erényt: az a kérdés, *mire* lehet valamit alkalmazni. Ugyanígy abban még nincs semmi érték, hogy valami tiszta; minden azon múlik, hogy tiszta zsenialitás avagy tiszta marhaság.

Kétségtől mentesen jelentős eltérés tapasztalható a magukat tiszta, illetve a magukat alkalmazott matematikusnak vallók hozzáállásában. Halmos a fő különbséget abban látja, hogy míg az alkalmazott matematikusok meg vannak győződve arról, hogy nincs különbség, addig a tiszta matematikusok tökéletesen jól tudják, hogy igenis van. Szembeötlőbb a törekvésben mutatkozó eltérés. Az alkalmazott matematikus megoldást akar; a tiszta matematikus meg akarja érteni a problémát. A tiszta matematikus észreveszi, hogy az alkalmazott annyira szeretne választ kapni, hogy nem is nagyon törődik azzal, vajon a *helyes* válasz birtokába jutott-e. Az alkalmazott matematikus pedig azt tapasztalja, hogy amikor a tiszta matematikus nem képes egy problémát megérteni, akkor áttér egy másikra, és újra próbálkozik. Az igazi különbség talán az, hogy az alkalmazott matematikus sok energiát fordít a modellalkotási folyamatra (vagyis arra, hogy a természeti jelenséghez hatékony matematikai modellt állítson fel), míg ez a lépés a tiszta matematikából lényegében hiányzik.

Szerintem mindkét álláspont értékes, de teljesen biztos vagyok abban, hogy eltérnek egymástól. Ha Halmosnak igaza van, akkor azt hiszem, hogy ezért tartozom a tiszta matematikusok közé.

A meglepetések csábereje

Számos példát láttunk már arra, amikor a belső szépségük miatt kifejlesztett matematikai területek egyszer csak fontos alkalmazásokra tettek szert. Ha valaki húsz évvel ezelőtt a kis Fermat-tétel *katonai* alkalmazását jósolta volna, minden bizonnyal bolondnak nézik. A csapóajtókódok megjelenésével azonban a Pentagon egyszerre alapos érdeklődést kezdett tanúsítani a számelméleti kutatásokkal kapcsolatos biztonsági kérdések iránt. Einstein általános relativitáselmélete a Riemann-geometriától kapott erős matematikai beütésen alapul, a

Riemann-geometriát pedig évtizedeken át tartó munkával egy olasz differenciálgeometerekből álló iskola tisztán matematikai megfontolásokból dolgozta ki. Senki sem azért foglalkozott a Riemann-geometriával, mert arra számított, hogy ez fontos lehet a gravitációval kapcsolatban. Amikor a topológusok a különös attraktorokat kezdték vizsgálni, akkor nem a turbulencia problémáját akarták megoldani. Lehet, hogy Thom katasztrófaelmélete kapott néhány optikai és biológiai indítást, de sohasem arra tervezték, hogy a technikában vagy a kémiai reakcióknál használják fel. A fibrált nyalábok és a Yang-Mills-féle mértékterek közötti kapcsolatra senki sem számított. A néhai Mark Kac például, aki magát alkalmazott matematikusnak tartotta, így nyilatkozott: „Bármennyire hihetetlenül is hangzik, a fibrált nyalábok, a homotópia és a Chern-osztályok ugyanúgy a fizikai terminológia részévé válnak, mint ahogyan az insztantonok, a mértékterek és a Lagrangianok bevonulnak a matematikába.” Ezt visszhangozzák T. T. Wu és C. N. Yang fizikusok is:

A matematikusok körében általánosan elterjedt az a nézet, hogy a fibrált nyaláb egy természetes geometriai fogalom. Mivel a mértékterek, ideértve speciálisan az elektromágneses teret is, fibrált nyalábok, így minden mértéktér is a geometrián alapul. Rendkívül érdekesnek tartjuk, hogy egy fizikai vonatkozások nélkül született geometriai fogalomról az derüljön ki, hogy a fizikai világban éppen ő az alapja az egyik, sőt esetleg valamennyi legfontosabb kölcsönhatásnak.

A fizikus Freeman Dyson egy beszélgetést idéz, amely valamikor az 1900-as évek elején zajlott a szintén fizikus James Jeans és a geométer Oswald Veblen között egy Princeton-i tantervvel kapcsolatban. „Akár ki is hagyhatjuk a csoportelméletet — mondta Jeans. — Ez olyan tárgy, amely a fizikában soha nem lesz felhasználható semmire.” Ha a fizika megfogadta volna Jeans tanácsát, akkor az elemi részecskékről alkotott jelenlegi ismereteink többsége sohasem született volna meg. Ahogy Dyson mondja: „Akkoriban szinte senki sem sejtette, milyen termékeny lesz a fizika és a csoportelmélet házassága.”

Szárfított elefántok és gömb alakú tehenek

El kell ismernem, hogy a matematikában olyan területek is találhatók, amelyeknek jelenleg nincsenek érdemleges alkalmazásai. Ezek úgy alakultak ki, hogy egy adott időben adott emberek valamely irányt

érdekesnek találtak. És ha egyszer szép az út, akkor nem szoktuk folyton azt kérdegetni, miért is szálltunk fel a buszra. Kac szellemsen „szárított elefántoknak” nevezte az öncélú, steril általánosításokat. Hatásos érvelése szerint a szárított elefántok előállítására ugyan nagyon elmélyült és nehéz technikai feladatot jelent, mégis értelmetlen, mert a végtermék semmire sem használható. Némileg átérzem azt, amit szerintem Kac mondani akart. Egészen biztosan vannak a matematikának olyan területei, amelyeket *soha* nem tud majd senki más használni. Ha ezeket előre azonosítani tudnánk, akkor kitűnő ötlet lenne abbahagyni a kutatásukat. A dolog azonban nem ilyen egyszerű. Lehet, hogy a holnap tudományának éppen egy ma céltalannak látszó területre lesz szüksége. A gályák hidrodinamikája megszűnt égetően fontos kérdés lenni, és azok a matematikai eredmények, amelyeket kizárólag ebből a célból vezettek le, már nem tartoznak a bármiféle értelmes dologra „alkalmazott” matematikába. Ugyanakkor a matematikai logikának az alapelveiről, amelyeket George Boole minden praktikus ok nélkül dolgozott ki az 1850-es években, kiderült, hogy száz évvel később az elektromérnököknek a számítógépek megépítéséhez éppen ezekre van szüksége. Tim Poston rámutat arra, hogy Hannibál annak idején jól tudott volna használni néhány csomag szárított elefántot, feltéve, hogy a rehidráció kérdése is megoldott (amely nélkül persze az eredeti probléma megoldása triviális). Megbízható forrásokból úgy értesültem, hogy Kac kijelentése először akkor hangzott el, amikor az 1950-es években topologikus köntösbe öltöztették a klasszikus hamiltoni mechanikát („a kotangens nyalábon értelmezett szimplektikus struktúra”). Ez az átfogalmazás azonban korántsem bizonyult meddőnek, hanem a huszadik század egy kiemelkedő eredményéhez vezetett. Vlagyimir Arnold ezt írja róla: „Az utóbbi években a szimplektikus és az érintkezési geometria behatolt a matematika valamennyi területére.” Igaz, nem minden gúny nélkül hozzáteszi: „Ahogy minden bohócnak be kell mutatnia krumpliorrát, ugyanúgy minden matematikai ágnak elő kell végül állnia a szimplektikával.”

Az alkalmazott matematikának is megvan a maga szárított elefántja. Az alábbi történet elég szakállas, de nem árt feleleveníteni. Egy farmer aggódott, hogy a tehenei kevés tejet adnak, és megbízta a helyi egyetemet, hogy vizsgálják meg a dolgot. Ott létrehoztak egy interdiszciplináris munkabizottságot, egy alkalmazott matematikussal az élén. A bizottság egy hónap múlva száz oldalas jelentést tett le az

asztalra. A farmer, aki már alig várta, hogy megtudja, mit kapott a nehezen keresett pénzéért, leült és elkezdte olvasni az első mondatot: „Tekintsünk egy gömb alakú tehenet...”

A matematika egysége

Ez az egyik probléma a szárított elefántokkal: ahhoz, hogy „kiszúrjuk” őket, előre kellene látnunk a jövőt. Nemcsak azokat a problémákat kellene végiggondolnunk, amelyek *ma* foglalkoztatják a tudósokat, hanem azokat is, amelyek kétszáz év múlva érdekelhetik őket. A magam részéről nem vállalkoznék arra, hogy megjósoljam, milyen matematikára lesz szükség 2185-ben a kvark-proktológiához (amellyel belenézhethünk a világegyetem alapjaiba) vagy a fénynél gyorsabb úrutazás megtervezéséhez. A múlt tapasztalatai alapján azonban *biztosra* veszem, hogy ez nemcsak a közvetlenül ilyen célból kifejlesztett matematikát jelenti majd.

Van azonban egy másik, kényesebb kérdés is: a matematika egysége. Amint ez a könyv is illusztrálja, a matematika egyes ágai, amelyeket meg szoktunk különböztetni, nagyon szorosan összefonódnak, a közöttük levő határvonalak elmosódnak, és az egyik területen elért nagy áttörés fontos következményekkel jár a másakra nézve is. Ilyen példát szinte mindegyik fejezetben láttunk. És ha elképzelhető, hogy valaki holnap fontos összefüggést fedez fel a kvázianalitikus pszeudogöröngyök és a merev testek dinamikája között — amit csak azért nem tartok valószínűnek, mert legjobb tudomásom szerint nem létezik ilyesmi, hogy kvázianalitikus pszeudogöröngy —, akkor mi a helyzet a szárított elefántokkal? Nem akarom túlértékelni a helyzetet. Noha a matematika a gyökerét tekintve egységes szerekezetű, azonban egy adott pillanatban mindig befejezetlen. Vannak laza végei, és egy csomó limlom hever szanaszét, amely annyira triviális vagy jelentéktelen, hogy bármilyen komolyabb szempontból teljesen hasznavehetetlen. Ha a kvázianalitikus pszeudogöröngyök triviálisak és nem adnak ihletet, akkor meg is lennék lepve, ha valami tényleg meglepő dolog kerekedne ki belőlük, még akkor is, ha *lehet* őket a dinamikában alkalmazni. A matematika alapstruktúrája azonban egyetlen, szerves egész. Ezért bármely részének egy alkalmazása az egész struktúrát is igazolja.

Amikor azt kell eldönteni, hogy a matematika valamely területét elvileg érdemes-e tanulmányozni, akkor nem az a legfontosabb szem-

pont, hogy ez egy adott (vagy akár kívánatos) külső célnak megfelel-e. A *belső* jelentőség a döntő. Hogy ezen mit értek, azt körülbelül ugyanolyan nehéz megmondani, mint megjósolni, miből lesz szárított elefánt, de minden valamirevaló matematikus meglehetősen jó elképzelésekkel rendelkezik arról, hogy mi jó matematika, és mi nem az. (Hozzátenném, hogy a saját szakterületén kívül ez a vélemény esetleg megkérdőjelezhető.) Egy gondolat akkor jelentős, ha új erőt ad a matematika karjának; ha úgy tűnik, hogy jó esélyt kínál a matematikai sodorvonal jelentős gazdagítására. Fermat tétele, a Riemann-sokaságok, a különös attraktorok, a szingularitások, a fibrált nyalábok — mindez jelentős matematika, és a matematikusok hosszú időn, néha évszázadokon keresztül tanulták és tanították őket, mielőtt az alkalmazásukra sor került.

Persi Diaconis, a világ egyik vezető statisztikusa, ezt mondta: „A munkámat igyekszem mindig valamilyen valós problémához kapcsolni.” Ez az ő matematikai munkamódszere, gondolkodási stílusa. Nem képzei azonban, hogy ez az *egyetlen* lehetséges út. Nemrég egy interjúban megkérdézték tőle, egyetért-e azzal a váddal, hogy a matematikusok elszakadnak a valóságtól. Így válaszolt:

Ezt nem fogadom el. Történetileg bizonyos értelemben a matematikusok tényleg a saját orruk után mennek. Ezt azért teszik, mert a dolgok *belső* szépségét keresik. Újra és újra születtek olyan eredmények, amelyekhez semmiféle alkalmazás nem kapcsolódott, még a tiszta matematika többi területén sem, és később kiderül, hogy ezek csodálatosan felhasználhatók egy alkalmazott problémánál. Vannak olyan barátaim, akikkel együtt dolgozom, és nem képesek a problémák valós vonatkozásaira koncentrálni. Amikor elkezdem magyarázni, miért ez vagy az a helyes választás, vagy miért kell ennek vagy annak igaznak lennie az alkalmazások szempontjából, ők csak egy diagramot rajzolnak. Ez felel meg a gondolkodásmódjuknak. Számukra valamilyen funktoriális okból következik a dolgok igazsága, de nincs semmi, ami velük szemben engem igazolna. Gyakran be tudnak bizonyítani olyasmit, amit az intuíció csak sejtet. Szörnyűnek tartanám, ha a tiszta matematikusok nem foglalkozhatnának azzal, amivel csak kedvük tartja.

A Fourier-flaskó

Nem akarom azt a látszatot kelteni, hogy a matematikában a legjobb gondolatok mindig belülről jönnek. Ellenkezőleg, nagyon sok ösztönzés jött kívülről. A fizikai világgal kapcsolatos problémák állandó jelleggel gazdagítják a matematikát, amiről azonnal meggyőződhetünk, ha egy pillantást vetünk a könyv bármelyik fejezetére. Sőt, mivel a matematika egy rendkívül egységes tárgy, és mivel *bizonyos* részeit minden kétséget kizáróan a fizikai valóság inspirálta, így a saját gondolatmenetem fejtetőre állításával azt is mondhatom, hogy éppen ezért az egész onnan származtatható.

A matematikai gondolatokat gyakran sugallják fizikai problémák. Feltűnőnek tartom azonban azt, hogy a legjobb gondolatok általában *annyira* értékesnek bizonyulnak, hogy túlélnek és elhomályosítják azt a fizikai problémát, amelynek a létüket köszönhetnék. Ennek egy klasszikus példája a Fourier-sorok elmélete, amely Joseph Fourier-nek a hővezetéssel kapcsolatos munkájából született. A jelenség jellemzésére Fourier felírta az ún. hőegyenletet, és megpróbálta megoldani. Eközben arra jutott, hogy minden gyönyörűen működik, ha bármely függvényt sikerül szinuszok és koszinuszok szerint sorbafejteni. Hosszú és bonyolult módon ezt be is bizonyította, az együtthatókra talált egy formulát, és 1822-es *A hő analitikus elmélete* c. könyvében ezt alkalmazta minden általa elképzelhető hővezetési problémára. A Fourier-sorok *fantasztikusan* fontosak manapság. A hővezetés is. A hőegyenlet is. Csakhogy...

Egy szakértő, Clifford Truesdell szerint Fourier munkája katasztrofális hatással volt a hőelméletre. Mivel Fourier hőegyenletét egyszerű módon meg lehetett *oldani*, így mindenki otthagytott csapot-papot és ezt kezdte csinálni, anélkül, hogy bármikor is feltette volna magának a kérdést, vajon a hő tényleg úgy viselkedik-e, ahogyan azt Fourier elképzelte. Nos, alapjában véve, nem úgy viselkedik. A Fourier-egyenlet egy *lineáris* parciális differenciálegyenlet. (Lényegében ennek köszönhető, hogy a Fourier-analízis egyáltalán működik.) Egy kitűnő mérnök ezzel kapcsolatban nemrég még úgy vélte, hogy „a Természet nem lehet olyan kegyetlen, hogy nemlineáris egyenleteket használjon”, ez azonban hiú ábrándnak bizonyult, mert mostanában az érdekes természeti jelenségek szinte kivétel nélkül nemlineárisnak tűnnek. A hővezetés biztosan az. Truesdell úgy látja, hogy Fourier módszerének matemati-

kai sikere évtizedekkel vetette vissza a termodinamika fejlődését, mert az emberek abbahagyták a kísérleteket és csak számolgattak. Akkor miért fontosak a Fourier-sorok ma? Azért, mert a hőegyenleten kívül sok másféle lineáris parciális differenciálegyenletre is alkalmazhatók, olyanokra, amelyek valódi fizikai problémákban bukkannak elő. Optikában és elektronikában például. Érdeemes megjegyeznünk, hogy Fourier idejében az elektronika egyáltalán nem is létezett — már csak azért sem, mert még nem fedezték fel az elektront. A hőegyenlet a sokaságok absztrakt matematikájában is fontos szerephez jutott. A hővezetéshez azonban, a heurisztikán kívül, nemigen kapcsolódik. Végül el kell mondanom, hogy azok az *indokok*, amelyekkel Fourier a függvények szinuszos és koszinuszos szerinti sorbafejthetőségéről szóló „tételét” alátámasztotta, égbekiáltó számárságok. A bizonyítások pongyolák, zavarosak és *hibásak*. Fourier bizonyítási stílusát követve csak rossz matematikához juthatunk. A válaszok nem mindig helyesek, és Fourier „fizikai” érvelései pusztán azt próbálják racionalizálni, amit ő igaznak *akart* látni, noha gyakran nem az. Az egész terület sokkal árnyaltabb annál, mint azt Fourier valaha álmodhatta volna, és körülbelül száz év munkája kellett ahhoz, hogy a dolgok a helyükre kerüljenek. Az elmélet egyik következménye a Cantor-féle halmazelmélet. És a Fourier-analízis sok mai alkalmazása sem vált volna lehetővé, ha nem értjük meg alaposan, hogy *valójában* mi is történik matematikailag.

Nem állítom, hogy a valóság és a matematika kölcsönhatása minden esetben így zajlik, de megdöbbenő, hogy milyen sokszor *kezdődik* így. És ha, ahogy egyes kommentátorok állítják, csak azt a matematikát érdemes művelni, amely egyértelműen a „valódi világ” problémáihoz kapcsolódik, akkor miért érdemes ezt a matematikát még akkor is folytatni, amikor azokkal a problémákkal már a kutya sem törődik? Ha a végtermék fontosabb az eszköznél, akkor miért értékeljük az eszközt, és miért dobjuk el magát a terméket? Egy matematikai gondolat alkalmazási céljai megváltozhatnak az idők során. A fibrált nyalábok például ma a kvantumtérelméletben játszanak kiemelkedő szerepet. Eredetileg Élie Cartan differenciálgeometriai munkásságában jelentek meg az 1900-as évek elején. A differenciálgeometria első fontos fizikai alkalmazását, az általános relativitáselméletet 1916-ban jelentette be Einstein. Cartant érdekelték az alkalmazások, motivációja azonban tisztán matematikai volt. De bármi is volt a motivációja, a kvantumtérelmélettel semmiképpen sem lehetett összefüggésben, hiszen ez csak az 1960-as

évek végén született meg. Maga a kvantumelmélet is alig bújt még ki a földből 1916-ban.

Miért van az, hogy a matematika egy darabkája, amelyet esetleg egy adott fizikai alkalmazás szem előtt tartásával, esetleg kizárólag önmagáért hoztak létre, később annyira hasznosnak bizonyulhat egy olyan fizikai elméletben, amely a matematika megszületésekor még nem is létezett? Számomra úgy tűnik, hogy itt a *matematikán* belüli fontosság, és nem a(z állítólagos) fizikai eredet játszik döntő szerepet. Egy jelenlétekeny gondolat fokozza a matematika erejét; a matematika erejével pedig új problémákat tudunk megoldani. Kell-e további magyarázat? Egy hatékony gondolatban mindig ott rejlik az alkalmazás lehetősége, mert ő egy hatékony gondolat. Egy gondolat megszületésekor nem szükséges, hogy valamilyen speciális alkalmazás lebegjen a szemünk előtt. Egy szürke, átlagos matematikusnak egy unalmas és terméketlen elképzeléssel azonban nem sok esélye van a valamikori alkalmazásokra. Nem azért, mert nem gondol az alkalmazásra, hanem mert ő egy szürke, átlagos matematikus egy unalmas és terméketlen elképzeléssel. Lehet valaki akár egy szürke, átlagos alkalmazott matematikus egy unalmas és terméketlen alkalmazással, az előző megjegyzés ugyanúgy érvényes.

Technikus vagy alkotó?

Hadd játsszam most az ördög ügyvédjének szerepét. Biztos, hogy legalábbis néhány esetben az alkalmazást akkor is megtalálták volna, ha a hozzá szükséges matematika esetleg nem áll rendelkezésre. Nem tudom elképzelni, hogy a kriptográfusokat megbénítaná a kis Fermat-tétel hiánya. Eljátszanának vele a számítógépen, megkapnák mint empirikus szabályt, és biztos fel is használnák, anélkül, hogy különösebben igazgatnák magukat a bizonyítás miatt. Ha pedig a bizonyításra valóban szükség lenne, akkor megkeresnék és meg is találnák. Hallottam olyan fizikus véleményeket, hogy ha a csoportelmélet nem születik meg addigra, a részecskefizikusok néhány hónap alatt akkor is ki tudták volna dolgozni belőle mindazt, amire szükségük van. Ez kicsit szemtelenül hangzik, de elég nagyra tartom a részecskefizikusokat, és valószínűleg az előző kijelentés nem nélkülöz minden alapot. Másrészt azt is láttam, mekkora kavarodást tudnak csinálni a csoportelméletből a kristálytudósok — pedig a kristálytan olyan tárgy, amely *elősegítette* a

csoportelmélet kialakulását. A mértékterekre történő topológiai alkalmazások tisztább esetet jelentenek, mert itt számos probléma még ma is megoldatlan, ami azt jelzi, hogy a fizikusoknak egyelőre nem sikerült a topológiát önállóan feltalálniuk.

Jelentős önteltség mutatkozik a másik irányból is. Egyes matematikusok úgy képzelik, hogy egy alkalmazási terület meghódításához mindössze egy jó új matematikai ötletre van szükség. Ezt rögtön alkalmazni lehet, gondolják ők, anélkül, hogy az alkalmazási területet valamennyire is ismernénk. Ez néha valóban igaz lehet, amikor a matematikus technikusként megrendelésre dolgozik. Ha a hullámegyenlet megoldási módszereit jól ismerem, akkor hasznossá tehetem magam anélkül is, hogy magukról a hullámokról sokat kellene tudnom. Nem valószínű azonban, hogy *felfedezem* a hullámegyenletet, ha az még nem létezik. A tudományban az alkotóbb jellegű matematikai alkalmazások azt igénylik, hogy a megoldandó problémát részletesen megismerjük, ami azt jelenti, hogy azzal is tisztában kell lennünk, mi történik az alkalmazási területen. Itt ugrik ki a legjobban, mi adja az alkalmazott matematika jellegzetes vonását: megkülönböztetett szerephez jut a modellalkotási folyamat.

Nézzük a stratégia és a taktika közötti különbséget. Egy topológus esetleg pusztán a matematikai erőnlét, szépség és ízlés alapján eldöntheti, hogy a részecskefizika hasznot tudna húzni egy megfelelő adag differenciálmatematikából. Esetleg még az alapvető stratégiát is felvázolhatja ennek az adagnak a kezelésére, ha átfogó képe van a terepről. Ahhoz azonban, hogy ebből a stratégiából a részletek szintjén valami ténylegesen hasznos dolog süljön ki, taktikussá kellene átvedlenie, aki teljes alaposággal ismeri a pontos helyi viszonyokat. Más szóval, egy matematikus észreveheti, hogy a gondolatok a fizikában alkalmazhatók, azonban egy sereg fizikust kell a munkába bevonnia, hogy minden rendben a helyére kerüljön, és nagyrészt a fizikusok végeznék a további tennivalókat.

Ez történt az általános relativitáselméletnél. Dyson megjegyzi, hogy „az általános relativitás a legszebb példa egy olyan fizikai elméletre, amelynek matematikai alapja egy „ugrás a sötétbe” volt. A felfedezése akár száz évet is késleltethetett volna, ha nincs egy Einstein, akit a sors különleges képzelőerővel ruházott fel.” Mindegy, hogy Einsteint matematikusnak, fizikusnak vagy filozófusnak tekintjük, ő egy új rendstratégája volt. Ahhoz azonban, hogy a belső megfigyelései alapján ellen-

örizhető jóslatokat tudjon tenni, a Merkúr mozgását kellett tanulmányoznia és a fény csillag okozta elhajlását végiggondolnia. Átalakult taktikussá. És taktikus az általános relativitással ma foglalkozó emberek többsége is, akik magukat elméleti fizikusoknak nevezik.

Hasonló véleményt tükröz Dyson két alábbi idézete is:

Az egyik olyan tényező, amely a fizika kacskaringós története során mindvégig állandó maradt, az a matematikai képzelőerő döntő fontosságú szerepe. Minden olyan évszázadban, amely jelentős előrelépést hozott, a fizikai megértés gazdagodását a tapasztalati megfigyelések és a tisztán matematikai intuíció sikeres összeházaítása biztosította. Egy fizikus számára a matematika nem pusztán eszköz, amelynek segítségével kiszámolhatók a jelenségek, hanem olyan fogalmak és elvek alapvető forrása, amelyek segítségével új elméletek teremthetők.

Egy elmélet kiépítésének a folyamatában nélkülözhetetlen a matematikai intuíció, mert „a fölösleges gondolatok kiiktatása” szabad utat enged a képzetnek; a matematikai intuíció veszélyes, mert a tudományokban a megértéshez általában nem a gondolatok kiiktatására, hanem gondolatokra van szükség.

Egy vérsejtecske gondolatai

Azt, hogy a matematika egy darabja jó vagy rossz, nem szabad kizárólag azon az alapon eldönteni, hogy „mi az, ami *nekem, most* jó”. Ha ez a kritérium döntött volna a múltban, akkor sok nagyszerű és hasznos matematika felfedezésére nem került volna sor. Egyes matematikusok a másik végletbe esnek, és szerintük csak a matematikai erő és szépség számíthat. Ez rendben is van, ha a matematikát mint művészeti ágat tekintjük. A matematika azonban több ennél, eszköz is, és eszközként is értékelnünk kell. A feleségemtől karácsonyra kaptam egy fűrófejelező készletet, amely az eredeti dobozában hever a garázsban, anélkül, hogy használtam volna. Eszembe se jutna azonban kidobni. Ennek első sorban nem szentimentális okai vannak. Azért nem használtam eddig, mert egyik fűrófejem sem csorbult még ki annyira, hogy meg kelljen élezni. Ahogy ez bekövetkezik, rögtön elő fogom venni az élezőt. Egy eszköz hasznosságát (általában) nem az jelenti, hogy *most* használom, hanem az, hogy valamikor éppen ezzel lehet majd egy olyan feladatot megoldani, amely másképp nem lenne elvégezhető. A matematikában sok mindennek a kifejlesztése pontosan ilyen „hátsó” gondolatokkal történik: ami annyira jól beleillik az általános

matematikai képbe, annak *biztos*, hogy egyszer valami haszna is lesz — és amikor ez megvalósul, annak mindenki nagyon örül. Ha a kutatást könnyebb lenne „megrendelésre” végezni, akkor nem kellene az eszközöket hamarabb kifejleszteni, mint ahogy szükség van rájuk; a kutatás azonban nehéz dolog, és a Riemann-sejtést valaki attól még nem fogja bebizonyítani, hogy nagy költségvetést és szép irodahelyiséget kap egy szponzortól. Még kevésbé tudná magát a zeta-függvényt feltalálni.

Egy darab matematika akkor jó, ha gazdagítja a tárgyat, ha új távlatokat nyit, ha régi problémákat old meg, ha hézagokat tölt ki, pontosan és megbízhatóan illeszkedve a már ismert dolgokhoz, vagy ha új kapcsolatokat teremt eddig különálló részek között. Akkor rossz, ha triviális, ha túlbonyolított, vagy ha nincs határozott matematikai célja vagy iránya. Akkor tiszta, ha a *módszerei* tiszták, azaz nem csal és nem tesz úgy, mintha más problémával foglalkozna, mint amelyikkel tényleg foglalkozik, és a logikájában nem tátonganak szakadékok. Akkor alkalmazott, ha *hasznos* meglátásokhoz vezet a matematikán kívül. A fenti kritériumok alapján a mai matematikában ugyanolyan magas a jó munkák aránya, mint bármely más korban vagy bármely más területen; és ennek jelentős része egyszerre tud tiszta és alkalmazott lenni. És miközben az egyes konkrét matematikusok közül sokan teljesen fűtyülnek az alkalmazásokra, és maguk a világért sem dolgoznak ilyeneken, ez a munkájuk minőségére nincs érezhető hatással, a tárgy egésze pedig sohasem tévesztette szem elől a tudomány többi részével való kapcsolatát, és gazdag kétirányú kereskedelem zajlik közöttük.

A tudomány kollektív tevékenység, és az egyes résztvevők működésének a többiekével való rezonanciája és kölcsönhatása olyan hatalmas rendszert alkot, hogy az egészből legfeljebb annyit érthetünk, amennyit egy vérszejtecske fog fel a gazdája érzéseiből, amikor annak az ajtó becsípte az ujját. Ez azonban nem változtat azon, hogy a vérszejtecske továbbra is teljesíti a rá háruló feladatokat a test egészségének a megőrzésében. Ugyanígy, az egyes tudósok indítékai nem sok befolyással bírnak a tudomány és a matematika végső egészségére. Amennyire ez a vérszejtecske látja, a páciens él, tevékeny, és tökéletesen ura képességeinek. Sőt úgy tűnik, hogy ereje teljében található. Akik halálhírét költik, biztos, hogy túloznak.

A FORDÍTÓ UTÓSZAVA

Remélem, hogy a könyv érdekes, hasznos és szórakoztató olvasmányt jelentett minden kedves olvasónak. A fordítás során a legnagyobb nehézséget — a lefordíthatatlan szójátékokon kívül — annak az eldöntése jelentette, hogy a mondanivaló érthetőségét elősegítendő, a matematikai elnagyolás milyen mértékig engedhető meg. Ezt a bevezető „Interjú”-ban is megfogalmazott kényes problémát (a lektorral közösen) helyenként lábjegyzetekkel hidaltuk át, és remélem, hogy az eredeti mű szelleméhez híven sikerült a megfelelő egyensúlyt eltalálni. Igen sok fejtörést okozott a szóhasználat is, a szerző ugyanis a szokásos terminológia helyett gyakran költőibb és meghökkentőbb kifejezéseket konstruált. Ezeket általában ugyanebben a szellemben igyekeztem magyarra lefordítani, és csak abban az esetben ragaszkodtam az idegenesebb hangzású elnevezésekhez, ha csak azok terjedtek el a magyar népszerűsítő és szakmai irodalomban.

Az ilyen és hasonló problémák megoldásában sok segítséget nyújtott *Egri Péter*, *Patkós András*, *Simányi Nándor* és *Szász Domokos*, akiknek ezúton is szeretnék köszönetet mondani. Mindenekelőtt azonban *Laczkovich Miklósnak*, a magyar kiadás lektorának tartozom köszönettel, akinek a legapróbb részletekre is kiterjedő gondos, lelkiismeretes munkája óriási segítséget jelentett számomra.

A könyv szedését számítógépen, D. E. Knuth csodálatos $\text{\TeX}$ rendszerével végeztem. Remélem, az Akadémiai Kiadó kívánságai szerint készült formai kialakítás is szépen sikerült. Az ehhez kapott segítségért ezúton is köszönetet mondok *Fried Katalinnak*, *Kiss Emilnek*, *Miklós Dezsőnek* és *Pröhle Péternek*.

Freud Róbert

MAGYAR NYELVŰ IRODALOM

Philip J. Davis–Reuben Hersh: *A matematika élménye.*

Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.

Gács Péter–Lovász László: *Algoritmusok.*

Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

Nagy pillanatok a matematika történetében.

Gondolat, Budapest, 1981.

Simonyi Károly: *A fizika kultúrtörténete.*

Gondolat, Budapest, 1981.

Staar Gyula: *A megélt matematika.*

Gondolat, Budapest, 1990.

B. L. van der Waerden: *Egy tudomány ébredése.*

Gondolat, Budapest, 1977.

NÉV- ÉS TÁRGYMUTATÓ

- Abel, Niels Henrik 19, 98, 103
- Abel-csoport 43
- Abel-sokaság 47
- Abraham, Ralph 189
- Adams, Douglas 195
- additív 155
- , megszámlálhatóan 155, 157
- Adleman, Leonard 30, 34
- Ahmesz, az Írnok 15
- Akhilleusz és a teknős 82, 83, 86, 239
- alakzat 132–6
- , redukálható 132–6
- alapvető kölcsönhatások 177, 229
- alef-null ($\aleph_0$) 74, 75, 77
- Alexander, J. W. 117
- Alexander-polinom 117
- Alexandria 37, 167
- algebra 17, 19, 36–47, 97–110, 140, 230
- algebrai geometria 43, 44, 46, 47, 147, 176, 217, 229
- egész 40, 41, 45
- sokaság 43, 45
- szám 39, 55, 75, 231
- számelmélet 40
- topológia 122, 217
- algoritmus 230–8, 242–5
- , euklideszi 233, 234
- , exponenciális idejű 234, 238
- hatékonysága 21, 27, 29, 33, 232–8
- , polinomiális idejű 234, 238
- alkalmazott matematika 96, 145, 152, 188–90, 249–61
- Al-Khvárizmi, Mohamed 230, 232, 233
- Al-Mámún 230
- álprím 32, 34
- , dörzsölt 32, 34
- analízis 17, 19, 57, 72, 78, 80, 84, 87–96, 103, 141–50
- , nemstandard 90–96
- analysis situs 172
- Anaximandrosz 166
- Anaximenész 166
- Antichton 166
- antihurok 225
- Apéry, R. 57, 58
- Apollóniosz 84, 167
- Appel, Kenneth 135–8
- arány 48, 50, 51, 84, 85, 87, 152, 153
- Arany János 151
- aranykor 23
- arany metszés 51, 54
- Argand, Jean-Robert 142
- Arisztarkhosz 167
- Arisztotelész 59, 73, 88, 167
- aritmetika 17, 19, 28, 48, 51, 78, 90, 97, 140, 230, 233, 240, 245
- Arhimédész 81, 83, 84, 155, 182
- Arnauld, Antoine 139
- Arnold, Vlagyimir 178, 182, 188, 253
- árnyék 92
- Askey, George 149

- aszimptotikus sorok 165
 áthajláskatasztrófa 183, 184, 186
 átlós eljárás 75, 236, 244
 átmenetvalószínűség 158
 attraktor 17, 195–202, 213, 252, 255
 —, fraktál- 198, 213
 —, különös 197–202, 213, 252, 255
 —, Lorenz- 200
 axióma 60–6, 77, 78, 90, 91, 156, 157,
 236, 239, 245
 axiómarendszer 65, 66, 90, 245
 —, valószínűségszámítása 156, 157
- babiloniak 19, 22, 37, 165
 Bachelier, Louis 160, 161
 Barenblatt, G. I. 69
 Barth, John 163
 Bass, Hyman 125
 Belavin, A. A. 227
 Bell, Eric Temple 36
 Beltrami, Eugenio 63, 64
 bemetszés 125
 Benoit, Eric 95
 Berkeley, George, püspök 84–6
 Berlekamp, Elwyn 69
 Bernoulli, Daniel 170
 Bernoulli, Jakab 20
 Bernoulli, Johann 19, 86, 87, 141
 Berry, Michael 187, 188
 Besicovitch, Abram 209
 Bessel, Friedrich 144
 Bieberbach, Ludwig 145, 147–50
 Bieberbach-sejtés 145, 147–50
 biológia 182, 185, 190, 211, 212, 252
 biracionális 103, 214
 Birkhoff, George 173, 175
 Bishop, Errett 232
- Blake, William 69
 Bolyai Farkas 62, 63
 Bolyai János 62, 63
 Bolzano, Bernhard 73
 Bombelli, Raffaello 139–41
 bonyolultságelmélet 21, 247
 Boole, George 253
 Boussinesq, J. 219
 brachisztochron-probléma 19, 22
 Brahe, Tycho 168
 Brahmagupta 139
 Brauer, Richard 108
 Bravais, Auguste 103, 105
 Brickell, Ernest 238
 Brown, Robert 160, 212, 213
 Brown-mozgás 160, 212, 213
 bubópestis 163
 Burnside, William 108
- Callot, Jean-Louis 95
 canard (kacsa) 95
 Cantor, Georg 74–7, 206, 231, 236,
 239, 244, 249, 257
 Cantor-halmaz 206
 Cardano, Girolamo 139, 140, 152
 Carmichael, Robert Daniel 32
 Carmichael-szám 32
 Cartan, Élie 106, 232, 257
 Cauchy, Augustin-Louis 87, 88, 91,
 103, 112, 145
 Cauchy–Riemann-egyenletek 145
 Cayley, Arthur 105, 130
 Chaitin, Gregory 246–8
 Chern, Shen-Shing 252
 Chevalier, Auguste 97
 Chevalley, Claude 107
 ciklikus csoport 107

- ciklois 20, 22
 Clifford, William Kingdon 67, 68
 Cobham, A. 234
 Cohen, Henri 58
 Cohen, Paul 77
 Cole, F. N. 31, 35
 Coleman, Sydney 226
 Colgan, P. W. 185
 Compton, Arthur 218
 Conway, John Horton 69, 108
 Coolidge, Julian 38
 Cotes, Roger 141, 143
 Crofton, Morgan 154
 Cusanus, Nicolaus 83

 csapóajtófüggvény 30
 csapóajtókód 30–2
 Csebisev, Pafnutij 146
 csillagötszög 88
 csomó 111, 116–8, 124, 127
 csomóinvariáns 116
 csoport 43, 97–110, 123, 128
 —, Abel- 43
 —, absztrakt 105
 —, alternáló 107
 —, ciklikus 107
 —, egyszerű 106–9
 —, feloldható 101, 102, 109
 —, folytonos 103
 —, forgás- 108, 128
 —, fundamentális 120
 —, Galois- 100–6, 109
 —, homotópia- 120
 —, kivételes Lie- 106, 107
 —, Lie- 17, 103, 106, 107, 128
 —, permutáció- 101, 103, 105
 —, szórványos 107, 108

 csoport, véges 107, 108
 —, véges egyszerű 107, 108, 136, 137
 csoportelmélet 97–110, 123, 227, 252, 258
 csoporttulajdonság 99, 106
 csúcskatasztrófa 183–7
 csúszlihatás 174

 d'Alembert, Jean le Rond 60, 170
 Dantzig, George 237
 Darwin, Charles 90, 91
 Davenport, Harold 69
 Davis, Martin 245
 Davis, Philip 69, 137, 263
 de Branges, Louis 148, 149
 de Broglie, Louis 218
 dekódolás 30
 Delaunay, Charles 173
 Delauney, V. 97
 de la Vallée Poussin, Charles-Jean 26, 147
 del Ferro, Scipione 19
 Deligne, Pierre 46, 47
 de Méré lovag (Antoine Gombaud) 152
 de Moivre, Abraham 143
 Demokritosz 84
 démon 59, 88
 De Morgan, Augustus 129, 130, 163
 derivált 92, 93, 145, 164, 206–8
 Descartes, René 23, 112, 141, 182
 determinizmus 193–5, 199, 202
 de Vries, Hendrik 219, 220
 Diaconis, Persi 255
 Dickinson, Emily 11
 Dickson, Leonard Eugene 107
 Diener, Francine 95
 Diener, Marc 95

- differenciálegyenlet 17, 94, 164, 165,
 170, 175, 181, 193–5
 —, parciális 17, 158, 170, 229, 250, 256
 —, sztochasztikus 18, 95, 161
 differenciálgeometria 104, 176, 252,
 257
 differenciáltopológia 20
 Diffie, Whitfield 30
 diffúzió 158–61
 dimenzió 103, 118, 205, 208–10, 229
 dinamika 17, 18, 162–203, 213, 254
 dinamikai rendszer 55, 197–200, 202
 — —, diszkrét 197–200
 — —, folytonos 197
 diofantikus egyenlet 36–47, 147, 245,
 246
 Diophantos 36–47
 Dirichlet, Peter Lejeune 39, 41
Disquisitiones Arithmeticae (Gauss)
 28, 45
 diszkrét dinamikai rendszer 197–200
 Dodson, M. M. 212
 Donaldson, Simon 20, 22, 127, 229
 Donne, John 162
 dörzsölt áprím 32, 34
 du Bois-Reymond, Paul 75, 155
 du Motel, Stéphanie 97, 102
 Durell, Clement V. 97
 Dürre, Karl 134
 Dyson, Freeman 252, 259, 260

 e 54–7, 231
 Edmonds, J. 234
 egész 49, 104, 239
 —, algebrai 40, 41, 45
 —, Gauss- 39, 44
 —, körosztási 41
 egzisztenciabizonyítás 231, 232
 egzotikus gömb 20, 127
 — 4-dimenziós tér 20, 127
 egy-egyértelmű megfeleltetés 70, 74,
 112, 126
 egyenlet 18, 19, 22, 98, 100, 140, 219
 —, diofantikus 36–47, 147, 245, 246
 —, Fermat-féle 39, 44
 —, ötödfokú 18, 19, 98, 101, 236
 egyrétű 148
 egységkörlemez 148
 egyszerű csoport 106–9
 Einstein, Albert 68, 160, 177, 229, 251,
 257, 259
 ekvivalens 113, 115–7, 119
 elágazásmélet 94, 181, 189, 190
 eldönthetetlen probléma 244, 246
 elektromosság 134, 170, 223, 228
Elemek (Euklidész) 48, 51, 59
 elkerülhetetlen halmaz 133–6
 ellentmondás 61, 63, 72, 75, 83, 129,
 239
 ellipszis 169, 171, 173
 ellipszoid 238
 elliptikus függvény 103
 — geometria 65, 67, 123
 — görbe 34, 35, 42–4, 47
 — umbilikus katasztrófa 183, 184
 elsőrendű axiómarendszer 90, 91
 eltolási hullám 217, 219
 — szimmetria 99, 109
 epiciklus 167, 224
 epszilontika 88, 89, 92
 eratoszteszeszi szita 25
 érintő 84, 206, 212
 erlangeni program 104, 105, 123, 128
 eseménytér 156
 Eudoxosz 51, 52, 84, 166

Euklidész 17, 23, 27, 37, 48, 59–68, 71,
77, 78, 83, 211, 232, 239
euklideszi algoritmus 233, 234
— geometria 63, 66–8, 90, 104, 122,
239
Euler, Leonhard 31, 39, 55–8, 77, 112,
115, 123, 141, 143, 145–7, 170, 182
Euler-formula 55–7, 141, 147
Euler-szám 115, 123
Euler-tétel 112, 115
excenter 167
exponenciális idejű algoritmus 234,
238
— növekedés 21, 234

Faltings, Gerd 47
fáziskép 195
fázistér 172, 195–7, 202, 213
fecskefarok katasztrófa 183, 184
Feigenbaum, Mitchell 202
Feit, Walter 108
felfüggesztés 197
Feller, William 160
feloldható csoport 101, 102, 109
felület 43, 53, 62, 67, 68, 112–5, 118,
122, 208, 210
fényudvar 92
Fermat, Pierre de 29–32, 36–47, 152,
186, 251, 255, 258
Fermat-sejtés 29, 36–47, 60
Fermi–Pasta–Ulam-probléma 220
Ferrari, Lodovico 19
Fibonacci (Pisai Leonardo) 233
fibrált nyaláb 17, 228, 252, 255, 257
Fischer, Bernd 108
FitzGerald, Carl 149
fluens 84, 87, 164

fluxió 84–7, 92, 164
fogantyú 43, 113, 121, 125, 127
folytonos dinamikai rendszer 197
folytonosság 93, 103, 111, 112, 116,
126, 145, 146, 159, 178, 181, 197,
212
folytonossági törvény 86
Fontana, Niccolo 19
forgáscsoport 108, 128
forrás 180, 184
Fort, Charles 251
Fourier, Joseph 73, 170, 256, 257
Fourier-sor 73, 256, 257
főkör 65
Fraenkel, Abraham A. 78
fraktál 17, 198, 204–16
fraktálattraktor 198, 213
fraktáldimenzió 205, 209–11, 215
Franklin, Philip 132
Freedman, Michael 20, 121, 127
Frobenius, F. Georg 46
Frobenius-leképezés 46
Furth, H. P. 223
függvénytest 46

Galilei, Galileo 19, 71, 164, 167
Galois, Evariste 19, 22, 97–106, 109
Galois-csoport 100–6, 109
Garabedian, P. R. 148
Gasper, George 149
Gauss, Carl Friedrich 16, 26, 28, 29,
39, 41, 44, 45, 62, 63, 67, 71, 72,
97, 104, 112, 142, 144–6, 163
Gauss-egész 39, 44
Gauss-összeg 44, 45
Gautama 176
Gautschi, Walter 149

- Gay, John 111
geodetikus vonal 63, 67, 95
geometria 17, 19, 48, 50–3, 56, 57,
60–8, 94, 104, 122–5, 145, 163, 164,
249, 251–3
—, affin 104
—, algebrai 43, 44, 46, 47, 147, 176,
217, 229
—, differenciál- 104, 176, 252, 257
—, elliptikus 65, 67, 123
—, euklideszi 63, 66–8, 90, 104, 122,
239
—, gömbi 62, 65
—, hiperbolikus 65, 67, 90, 104, 122,
123
—, inverzív 104
—, konform 104
—, koordináta- 23, 56, 57, 66, 84
—, nemeuklideszi 59–68, 78, 104, 122,
239
—, projektív 104
—, Riemann- 251, 252
—, szimplektikus 253
—, véges 104, 107
geometriai függvénytan 147–49
Gerver, Joseph 174, 175
Girard, Albert 139
Glashow, Sheldon 229
Golubitsky, Martin 188, 189
gordiuszi csomó 92, 116
Gordon, Walter 226
Gorenstein, Daniel 108
Gödel, Kurt 240, 244, 245, 247
gömb alakú tehén 215, 253, 254
gömbi geometria 62, 65
görbe 18, 34, 35, 42–7, 53, 124, 144,
204–10
—, elliptikus 34, 35, 42–4, 47
görbület 67, 68, 122, 123, 204
görbült tér 67, 68
görögök 18, 19, 22, 25, 37, 49–53, 89,
164, 166, 218
Grauert, H. 46
gravitáció 68, 119, 163, 170, 192, 211,
222, 229, 252
gravitációs lencse 68
Gregory, James 87
Griess, Robert 108
gumilepedő 112, 116, 181
Guthrie, Francis 129
Guthrie, Frederick 129
Guy, Richard K. 69

gyorsulás 164
gyökkifejezés 18, 19, 98, 101, 102
gyűrűméret 134

Hadamard, Jacques 26, 76, 147
Haken, Wolfgang 134–8
Halley, Edmund 163
halmazelmélet 74–8, 156, 239, 240,
244, 257
Halmos, Paul 249–51
Hamilton, William Rowan 129, 143,
186
Hamilton-rendszer 221, 222, 253
Hannibál 253
háromtest-probléma 171–3, 192
Harriot, Thomas 139
Harun Al-Rasid 230
Harvey, William 210
hasonlósági dimenzió 209
határciklus 195
határérték 81, 87–9, 92, 145

- hatékonyság 21, 27, 29, 33, 232–8
 hátizsákprobléma 238
 hatványsor 144, 148, 149, 165, 171
 Hausdorff, Felix 209
 Hausdorff–Besicovitch-dimenzió 209
 Heath-Brown, D. Robert 47
 Heawood, Percy 132
 Heawood-sejtés 132
 Heesch, Heinrich 133, 134
 hegyesszög feltételezése 61, 63, 65
 Heiberg, Johan Ludwig 81
 Hein, Piet 118, 125
 Held, Dieter 108
 heliocentrikus elmélet 167
 Hellman, Martin 30
 Hérakleidész 167
 Hermite, Charles 56, 206, 207
 Hersh, Reuben 69, 137, 263
 Higman, Donald G. 108
 Hilbert, David 36, 64, 65, 70, 76, 77,
 240, 244, 245
 Hilbert szállodája 70, 77
 — tizedik problémája 245
 hindu–arab számrendszer 23, 230, 233
 hiperbolikus geometria 65, 67, 90, 104,
 122, 123
 — umbilikus katasztrófa 183, 184
 Hippaszosz 48
 h-kobordizmus tétel 121
 Hodge, Sir William V. D. 46
 Hoffmann, Banesh 217
 Hofstadter, Douglas 239
 Hold mozgása 173
 homotópiacsoport 120
 homotópiaelmélet 120, 252
 Hooke, Robert 163
 hópehelygörbe 206–9
 Hopf, Eberhard 94, 189, 201
 Hopf-elágazás 94, 189, 190
 hosszúság 154–6
 hozzárendelési probléma 235
 hő 73, 170, 256
 hőegyenlet 170, 256
 hullám 68, 170, 190, 217–29, 259
 hullámegyenlet 170, 259
 Huntington, Edward 105
 hunyorgó csillagok 186–8
 hupikék törpikék 131–3
 hurok 120, 172, 225
 Hurwitz, Adolf 76
 Huygens, Christiaan 22, 152, 163, 182,
 218
 i 141, 142
 ideál 42, 147
 ideális szám 41
 időjárás-előrejelzés 194, 199, 200
 imaginárius sugár 62
 Infanzoszi, Carlos 97
 infinitezimális 61, 80–96
 információelmélet 247
 információtartalom 247
 inga 175, 194, 200, 221–5
 inkommenzurábilis 50
 insztanton 227, 252
 integrál 71, 90, 93, 144, 145, 154–6,
 221
 interferencia 218
 invariáns 104, 115–7, 120, 123, 225–8
 Iooss, Gérard 69
 irányítható felület 115
 irracionális 50–8, 82, 139
 iteráció 213, 214

- Jacobi, Carl Gustav Jacob 97, 163
 Janko, Zvonimir 108
 Jeans, James 252
 Johnson, Lee 69
 Jones, James 245
 Jordan, Camille 103, 105, 107, 155
 Joseph, Daniel 69
- Kac, Mark 252, 253
 Kac, Victor 221
 kacska 95
 Kainen, Paul 130
 Kallipposz 167
 kalkulus 23, 80, 86–94, 143–5, 163–5,
 175, 181
 Kálnoky László 69
 Kaluza–Klein-elmélet 229
 KAM-elmélet 178, 179
 káosz 192–203, 213, 214
 Karmarkar, Narendra 238
 Károlyi Amy 162
 katasztrófa 17, 181, 183–8
 katasztrófaelmélet 180–91, 196, 252
 kauszika 186, 187
 KdV-egyenlet 219–21, 226, 227
 Kempe, Arthur 130–3
 Kempe-lánc 131, 132
 Kepler, Johannes 168–70, 173
 Kepler-törvények 169
 keresztsapka 115
 kéttest-probléma 171, 173
 kezdeti feltételek iránti érzékenység
 199, 202
 Khacsiján, L. G. 238
 Killing, Wilhelm 106
 kimenetel 156, 157
 kimerítés 51, 52, 84, 86, 89
- Kirby, Robion 127
 kis Fermat-tétel 29–32, 251, 255, 258
 kisülés 133, 134
 Klein, Felix 65, 104, 113, 123
 Klein, Oskar 226
 Klein-kancsó 113, 114, 123, 132
 Kline, Morris 38, 48, 139, 143
 Knuth, Donald 21, 262
 Koch, John 135
 kockadobás 152, 193
 kockaduplázás 56, 60
 kód 21, 30–2, 238, 251
 Koebe, Paul 148
 Kolmogorov, Andrej 156, 178
 kombinatorika 17, 132, 153, 181
 kombinatorikus optimalizáció 235
 komplex függvénytan 87, 103, 113,
 141–50
 — sík 43, 45, 142, 215
 — szám 41, 43, 49, 87, 139–50, 177,
 214, 228
 kompozíció 105
 konform geometria 104
 — leképezés 147
 kongruencia 28, 41
 konstruktivizmus 231, 232
 kontinuumsejtés 76, 77, 236, 245, 249
 konzisztenciaerősség 78, 79
 konzisztens 60, 66, 239, 240
 koordinátagometria 23, 56, 57, 66, 84
 Kopernikus, Nikolausz 167
 Korteweg, Diederik 219, 220
 kozmológia 165–70
 kölcsönhatások 177, 229
 kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés
 70, 74, 112, 126
 königsbergi hidak 112
 körnégyzőgesítés 56, 60, 236

- körosztási egész 41
 kötélösszeg 117, 124
 közelítés 26, 51, 54–6, 87
 kriptográfia 21, 26, 30–2, 238, 250, 251, 258
 kristálytan 97, 103, 109, 110, 258
 kritikus kitevő 188
 Kronecker, Leopold 76, 79
 Kruskal, M. D. 220
 Kummer, Ernst 41, 42
 különös attraktor 197–202, 213, 252, 255
 kvantummechanika 20, 145, 161, 173, 179, 218, 219, 228, 258
 kvantumszám 223–5, 228
 kvantumtérelmélet 217, 227, 257
 kvark 224, 254
 kvazár 68
 kvázikristály 109, 110
 kváziperiodikus 196, 201
 Labouriau, Isabel 189
 ládapakolási probléma 235, 237
 Lagrange, Joseph-Louis 103, 171
 Lambert, Johann 55, 61, 62
 Lamé, Gabriel 39, 41
 lánc tört 53–5
 Landau, Lev Davidovics 201
 Langford, William 189
 Laplace, Pierre Simon de 153, 154, 170, 171, 193, 195
 Lawton, J. H. 212
 Lax, Peter 221
 Lebesgue, Henri 78, 155, 156, 207, 208
 Lebon, Napoleon 97
 Lefschetz, Solomon 46, 176
 Legendre, Adrien-Marie 26, 39, 170
 leggyorsabb esésű görbe 18
 legnagyobb ismert prím szám 27
 — közös osztó 232, 233
 Leibniz, Gottfried 19, 20, 23, 84, 86, 139, 141, 143, 165
 lemezdeformálás 189
 Lennon, John 230
 Lenstra, Hendrik 21, 25, 31, 34, 58
 Leray, J. 201
 Levine, D. 110
 lézeres, Doppler-effektuson alapuló sebességmérés 202
 L'Hôpital, Guillaume 20
 Lie, Sophus 17, 103, 106–8, 128
 Lie-csoport 17, 103, 106, 107, 128
 Lindemann, Ferdinand 56, 57
 lineáris programozás 237, 238
 linearitás 219–21, 234, 256
 Liouville, Joseph 41, 55, 58, 102, 231
 Listing, Johann 113
 Ljunggren, W. L. 43
 Inko 232, 233
 Lobacsevszkij, Nyikolaj Ivanovics 62, 63
 logaritmus 26, 54, 141, 145, 146
 logika 59, 78, 90, 96, 239–45, 253
 Lorenz, E. N. 199, 200
 Lorenz-attraktor 200
 Löwner, Karl 148
 Lyons, R. L. 108
 lyuk 43, 113, 118, 127
 MacKay, Alan 110
 MacLaurin, Colin 77, 86
 Maddox, John 110

- mágneses palack 177
 mágnesség 170, 202, 227, 228
 Malgrange, Bernard 182
 Malthus, Thomas 234
 Mandelbrot, Benoit B. 204, 221, 215
 Manyin, Jurij 46
 Mao Ce-tung 129
 másodrendű axiómarendszer 78, 90, 91
 matematika rókája 163
 matematikai ágak 16, 17
 — sodorvonal 23, 125, 130, 207, 213, 255
 Mather, John 174, 175, 182
 Mathieu, Emile-Léonard 107
 Matyijaszevics, Jurij 245, 246
 Maxwell, James Clerk 170, 228
 Maxwell-egyenletek 170, 228
 Mayer, Jean 135
 McCartney, Paul 230
 McGehee, R. 174
 McLaughlin, J. 108
 mechanika 20, 22, 80, 158, 162–79, 253
 Meeks, William H. III. 125
 megállási probléma 242–4, 246
 megfejthetetlen kód 21, 238
 megfejtő kulcs 31
 megszámlálható 74–7, 128, 157
 megszámlálhatóan additív 155, 157
 Mély Gondolat 195
 merev mozgás 104, 227
 Merkle, Ralph 30, 238
 mérték 155, 156
 mértéktér 17, 127, 227–9, 252, 259
 Mertens, Franz 146
 Mertens-sejtés 146, 147
 metrika 67, 122–4, 147
 Milin, I. M. 148, 149
 Milin-sejtés 148
 Miller, Gary Lee 32–4
 Mills, Robert 127, 227–9, 252
 Milnor, John 20, 127
 Minkowski, Hermann 129
 Mirimanoff, Dimitri 42
 Mississippi 23
 modell 64–6, 90, 91, 158, 181, 185, 194, 239
 modellelmélet 90, 96
 modulus 28
 módusugrás 189
 momentum 187
 Moody, Robert 221
 Mordell, L. J. 43, 44
 Mordell-sejtés 44–7
 morfogenezis 182
 Morse, D. R. 212
 Morse, Marston 176
 Moser, Jürgen 178
 Möbius, August Ferdinand 112
 Möbius-szalag 113–5
 Mumford, David 215
 Nagy Fermat-tétel 29, 36–47, 60
 Nagy Sándor 37, 116
 Nagy Utazás 173–5
 naphal 185, 186
 Naprendszer stabilitása 171, 172, 178, 179
 Navier, Claude-Louis 69, 201
 Navier–Stokes-egyenletek 69, 201
 n -dimenziós tér 20, 75, 118, 126, 127
 négyszínsejtés 129–38
 négyszíntétel 129–38
 nem, nemszám 43, 44, 46, 113, 115
 nemdeterminisztikus polinomidő 235
 nemdifferenciálható 206–8, 212, 213

- nemeuklideszi geometria 59–68, 78,
104, 122, 239
„nem itt találták fel” kór 95
nemlineáris 219–21, 256
nem megszámálható 75–7, 128, 157
nemstandard analízis 90–6
Neumann János 240
Newton, Isaac 19, 23, 71, 80, 84–7,
92, 94, 141, 163–5, 170–5, 177, 179,
192, 218
Newton mozgástörvényei 164, 172, 174
— tömegvonzástörvénye 170, 174
Nimzovics, Aron 150
Niven, Larry 88
normális eloszlás 187
— részcsoport 101, 102, 106
Nowell, W. 185
NP 235–7
NP-teljes 236, 237
- Nyilvános János 31
nyilvános jelkulcsú titkosírás 30, 238
- Odlyzko, Andrew 34, 146
Olbers, Heinrich 39
O’Nan, Michael 108
optika 20, 78, 163, 182, 185–8, 218,
252, 257
Óriás 97, 108, 109
oszcilláció 94, 174, 202
Oszkár, II., svéd király 171, 172, 178,
179
Oszkár-díj 171, 172
oszthatatlan 83
Ozawa, M. 148
- önhasonló 209, 210, 213
összefűzés 119
összemérhetetlen 48, 50
ötödfokú egyenlet 18, 19, 98, 101, 236
- P 235–8
Painlevé, Paul 174
palimpszeszt 80
parabola 84, 164
parabolikus umbilikus katasztrófa 183,
184
paradoxon 70–3, 82, 83, 157, 225, 244,
248
párbaj 97
parciális differenciálegyenlet 17, 158,
170, 229, 250, 256
párhuzamos 59–64
párhuzamossági axióma 60–5, 77, 236,
239
Parmenidész 82, 166
Parsin, A. N. 47
Pascal, Blaise 152
Peano, Giuseppe 78, 155, 206, 208
Peano-görbe 206, 208
Pederson, R. N. 148
pentagramma 88
periodikus 55, 124, 172, 173, 178
permutáció 101, 103, 105
Perrin, Jean 212
perturbációs számítás 94–6
Petersen, J. 132
 π (pi) 39, 54–7, 77, 83, 231
pillangó katasztrófa 183, 184
Pitagorasz 16, 37, 48
pitagoraszai számhármasság 37–9, 42
pitagoreusok 16, 18, 19, 48–50, 82, 166

- Platón 166
 Plimpton 322 tábla 37, 38
 Poincaré, Henri 64, 65, 76, 90, 120–6,
 172, 173, 175, 178, 194, 206, 208,
 249
 Poincaré-modell 64, 65, 90
 Poincaré-sejtések 120–5, 175, 249
 póker 153
 poliéder 112, 115
 polinomiális idejű algoritmus 234, 238
 Poljakov, Alekszandr 227
 Pólya György 159
 Pomerance, Carl 34
 Pommerenke, Christian 149
 Pontrjagin, Lev S. 221
 pontszimmetria 109
 Pope, Alexander 80, 192
 Post, Emil 240–2, 246
 Poston, Tim 253
 potenciálmélet 170
 prímszám 16, 18, 21, 25–35, 38–42, 45,
 46, 74, 101, 146, 232, 236, 246, 250
 Prímszámsejtés 146
 prímszámtétel 26, 147
Principia Mathematica (Newton) 87,
 94, 163
 projektív geometria 104
 — sík 123
 Proklosz 60, 70
 pszeudoprím 32
 pszeudoszféra 63
 Ptolemaiosz 22, 60, 167, 224
 Putnam, Hilary 245
 Radnóti Miklós 111
 ragasztás 114, 116, 118, 123, 125, 126
 Rayleigh, Lord John William Strutt
 219
 Reagan, Ronald 205
 reciprocitási tétel 34, 41
 redukálható alakzat 132–6
 Ree, Rimhak 107
 Reeb, Georges 89–91
 Rêgo, Eduardo 125
 reguláris prímszám 42
 Reidemeister, Hans 116
 rejtjelezés 21, 26, 30–2, 238, 250, 251,
 258
 relativitáselmélet 20, 68, 173, 224, 251,
 257, 259
 rendezési probléma 235
 reneszánsz viadal 15, 19, 140
 részcsoporth 101, 102, 106
 —, normális 101, 102, 106
 részecskefizika 68, 97, 168, 179, 217,
 220, 221, 223–9, 258
 reziduum 145
 Rhind-papirusz 15
 Richard-paradoxon 248
 Richardson, Lewis Fry 209
 Riemann, Georg Bernhard 32, 45, 57,
 67, 68, 93, 104, 113, 114, 118, 126,
 145–7, 249, 255, 261
 Riemann-felület 113, 145
 Riemann-geometria 251, 252
 Riemann-sejtés 32, 33, 45, 145–7, 249,
 261
 Riess, Dean 69
 Ringel, G. 132
 Rivest, Ted 30
 Robertson, M. S. 148
 Robertson-sejtés 148

- Robinson, Abraham 91
 Robinson, Julia 245
 Rónay György 111
 Rothman, Tony 97
 Rourke, Colin 125
 röntgensugár 218
 RSA rendszer 30
 Rubik-kocka 97
 Rudvalis, Arunas 108
 Ruelle, David 201
 Ruffini, Paolo 98
 Rumely, Robert 34
 Russell, John Scott 217, 219
 Ryan, Matthew 59
- Saari, Donald 174
 Saaty, Thomas 130
 Saccheri, Girolamo 61–5
 Safarevics, Igor 46, 109
 Safarevics-sejtés 46, 47
 sakk 66, 135, 150
 Salam, Abdus 229
 Salviati 71, 75
 Schaeffer, David G. 188, 189
 Schechtman, Daniel 110
 Schiffer, M. 148
- sejtések
 Bieberbach-sejtés 145, 147–50
 Fermat-sejtés 29, 36–47, 60
 Heawood-sejtés 132
 kontinuumsejtés 76, 77, 236, 245, 249
 Mertens-sejtés 146, 147
 Milin-sejtés 148
 Mordell-sejtés 44–7
 négyzínsejtés 129–38
 Poincaré-sejtések 120–5, 175, 249
- Riemann-sejtés 32, 33, 45, 145–7, 249, 261
 Robertson-sejtés 148
 Safarevics-sejtés 46, 47
 Smith-sejtés 124
 Tate-sejtés 47
 Thurston-sejtés 124
 Weil-sejtések 44–6
- Selfridge, John 32
 Shakespeare, William 111, 151, 192
 Shamir, Adi 30, 238
 Shannon, Claude 247
 Shelah, Shaharon 79
 Siebenmann, Larry 127
 Siegel, Carl Ludwig 43, 245
 sima struktúra 20, 127, 128
 Simonyi Károly 67, 169, 193, 263
 Simplicio 71
 Sims, Charles 108
- skálázás 209
 skatulyaelv 76
 Slowinski, David 27
 Smale, Stephen 121, 195, 235
 Smith, Barnabas 80
 Smith, Henry 206
 Smith, Paul 124
 Smith, Sidney 59
 Smith-sejtés 124
- sokaság 20, 43, 45, 47, 67, 104, 112, 118–28, 208, 229, 255, 257
 —, algebrai 43, 45
 —, prímszám 124
 —, sima 20, 126–8
 —, szakaszonként lineáris 126, 127
 —, topologikus 125, 126
 sokszög 48, 52, 113, 143, 155
 Solomonoff, Ray 246, 247
 Solovay, Robert Martin 78, 79

- Sperling, H. J. 174
 stabilitás, Naprendszeré 171, 172, 178, 179
 Stallings, John 121
 standard rész 92
 statisztika 18, 152, 255
 Stein, M. 189
 Steinberg, Robert 107
 Steinhart, P. J. 110
 Stevin, Simon 139
 Stokes, Sir George Gabriel 69, 201
 Stokes, N. W. 185
 Sullivan, Dennis 214
 Suzuki, M. 107, 108
 sündisznófűggyvény 206, 209
 Svarc, A. Sz. 227
 Swinney, Harry 202
 Sylvester, James Joseph, Előszó

 szabad akarat 193, 195
 szabályos test 48, 168, 189
 Szabó Árpád 50
 Szabó Lőrinc 192
 szám 17, 49, 70
 —, algebrai 39, 55, 75, 231
 —, egész 49, 104, 239
 —, hipervalós 91–3
 —, irracionális 50–8, 82, 139
 —, képzetes 17, 141
 —, komplex 41, 43, 49, 87, 139–50, 177, 214, 228
 —, nemstandard természetes 91
 —, racionális 49, 74, 75
 —, természetes 49
 —, transzcendens 39, 55–7, 75, 231
 —, valós 17, 48, 49, 74, 75, 77, 90, 91, 228, 239

 számelmélet 17, 29, 36–47, 103, 251
 számítástudomány 17, 181, 231
 számítógép 20, 27, 28, 95, 130, 134–8, 149, 193, 195, 199, 220, 231, 240, 242, 253, 258, 262
 számítógépes program 134, 135
 számosság 74, 77–9
 szárított elefánt 253–5
 Szerencse Kisasszony 17, 151
 szimmetria 98, 99, 103, 106, 109, 189, 227–9
 szimmetriacsoport 99, 103, 109
 szimmetriatörés 190
 szimplektikus geometria 253
 szimplexmódszer 237, 238
 szinergetika 181
 szingularitás 174, 181, 255
 szingularitáselmélet 17, 181
 szinuszos Gordon-egyenlet 226, 227
 szivárvány 182, 186, 187
 szoliton 68, 217–29
 Szolzenyicin, Alekszandr 176, 178
 szöggharmadolás 56, 60
 szörpamacs 177
 sztochasztikus differenciálegyenlet 18, 95, 161
 — folyamat 158
 szuperhúr 229

 Tait, P. J. 132
 Takens, Floris 201, 213
 tanú 32
 tapéta 109, 123
 Tartaglia 19, 140
 tartalom 155
 Tate, John 47
 Tate-sejtés 47

- Taubes, C. H. 20
 Taurinus, Franz 63
 Taylor, G. I. 190, 250
 Taylor-örvények 190
 Teller Ede 223, 224
 Tellér Gyula 192
 te Riele, Herman 146
 térfogat 81, 154
 térkép 129–38
 termodinamika 170, 181
 terület 51, 62, 83, 154–6
 test 45, 46, 107
 —, véges 45, 46, 107
 Thalész 166
 Theodosius császár 37
 Thirring, Walter 226
 Thom, René 180–3, 185, 252
 Thompson, John G. 108, 109
 t'Hooft, Gerhard 227
 Thue, Axel 43
 Thurston, William 122–5
 Thurston-sejtés 124
 tiszta matematika 249–61
 tisztességes pénzérme 152, 157
 titkosító kulcs 30, 31
 tompaszög feltételezése 61, 65
 topológia 17, 20, 46, 104, 111–28, 145,
 172, 175–9, 182, 188, 194–7,
 199–202, 208, 213, 217, 221, 223,
 225, 226, 229, 252, 259
 topologikus dimenzió 208
 — dinamika 17, 172, 175–9, 181, 182,
 192–203
 — sokaság 125, 126
 — töltés 225
 — transzformáció 104, 112, 116, 119
 tórusz 43, 113–5, 118, 123, 196–8, 213
 transzcendens szám 39, 55–7, 75, 231
 Truesdell, Clifford 256
 turbulencia 69, 201–3, 205, 213, 252
 Turing, Alan 240–4, 246
 Turing-gép 240–4, 246
 Turing-Post-program 240–2, 246
 Tymoczko, Stephen 136
 Tyupkin, Ju. Sz. 227
 Uhlenbeck, Karen 20
 Ullman, Jefrey 237
 univerzális Turing-gép 242, 243
 utazó ügynök probléma 235, 238
 útkeresési probléma 235
 ütközés 174, 212
 valós szám 17, 48, 49, 74, 75, 77, 90,
 91, 228, 239
 valószínűség 18, 33, 34, 151–61, 219
 valószínűségfüggvény 156
 valószínűségi bizonyítás 33
 válság a matematikában 24
 van de Lune, J. 146
 Vandermonde, Alexandre-Théophile
 143
 van der Poorten, Alf 57, 58
 variációszámítás 17, 20, 22
 Veblen, Oswald 252
 véges 76, 92
 — aritmetika 28
 — csoport 107, 108
 — egyszerű csoport 107, 108, 136, 137
 — geometria 104, 107
 — matematika 17, 181
 — test 45, 46, 107

végtelen 69–79, 88, 91–3, 128, 145,

153–7, 174

—, aktuális 73, 74

— leszállás 39, 47

—, potenciális 73, 88

— sor 71–3, 155

véletlen 17, 18, 33, 151–61, 187, 194,

199–203, 210, 246–8

— bolyongás 158–61

Verma, D. N. 221

Voltaire 193

von Koch, Helge 206, 207, 212

von Mises, Richard 156

Voyager űrhajó 174, 211

Waddington, C. H. 182

Wagstaff, Samuel Standfield 32, 42

Wallis, John 87, 142

Wehrfritz, Bertram 69

Weierstrass, Karl 88–90, 145, 206, 212

Weil, André 44

Weil-sejtések 44–6

Weinberg, Stephen 229

Wessel, Caspar 142

Westfall, Richard 80, 162

Weyl, Hermann 76, 98, 228

Whitehead, Henry 126

Whitney, Hassler 121

Wiener, Norbert 161, 213

Wilder, R. L. 118

Williamson, M. H. 212

Wu, T. T. 252

Yang, Chen Ning 127, 227–9, 252

Yang–Mills-mértéktér 127, 227–9, 252

Yau, Shing-Tung 125

Young, Thomas 218

Young, William 156

Youngs, E. 132

Zabusky, Norman 220

Zagier, Don 26, 58

zárt alak 77, 165, 199

Zeeman, E. Christopher 121, 185, 186

Zénon 82

Zermelo, Ernst 78

Zermelo–Fraenkel-féle halmazelmélet

78

zeta-függvény 45, 57, 58, 146, 147, 261



A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó és Nyomda Vállalat igazgatója
A nyomdai munkálatokat az Akadémiai Kiadó és Nyomda Vállalat végezte

Felelős vezető: Zöld Ferenc

Nyomdai táskaszám: 19972

Felelős szerkesztő: Sente László — Műszaki szerkesztő: Merkly László

A fedéltervet készítette: Novák Henrik

Kiadványszám: 2833

Megjelent: 17,5 (A/5) ív terjedelemben



Mi a matematika? Mivel foglalkoznak ma a matematikusok? Mi az, ami igazán fontos? Mitől kerül egy probléma a matematika folyamának fő sodorvonalába, és mitől álmos holtág a másik, majd mitől cserélnek hirtelen szerepet időnként? Mit mond minderről egy matematikus, ha van határozott véleménye (vagy talán csak érzése, benyomása)? Hogyan próbálja mindezt elmagyarázni, emberközeli behozni másoknak, beavatni a kívülállókat a formalizmussal, halandzszerű terminológiával álcázott Titokba? Erről szól a könyv.

Ian Stewart rendkívül személyes élménybeszámolót írt a matematikáról. A személyesség a kifejtett nézetekre, a problémacsokrok összeválogatására és az átütő erejű, frappáns, szellemes stílusra egyaránt érvényes.

Ian Stewart könyve először is szórakoztató olvasmány. Szípkázó show: történeti érdekességek, vaskos meglepetések, meghökkentő asszociációk ferge-teges parádéja. A fő- és alcímek általában frappáns szójátékok, a fejezeteket bevezető idézetek szerzői Shakespeare-től Mao-ig terjednek, és egyetlen percére sem lankad az iram.

Azonban Ian Stewart könyve egyben mély és komoly olvasmány is. Komoly dolgokról szól, a legkomolyabban, nemcsak a felszínen jópofáskodva. Fokozatosan és mértéktartóan hatol egyre mélyebbre mind mondanivalóban, mind elemzésben, mind pedig a matematikai tartalomban.

Végül, kiknek szól a könyv? Tulajdonképpen az „utca emberétől” kezdve a profi matematikusig mindenki talál benne kedvére valót (amit megért, élvez, és újat is mond neki). Elsősorban talán a matematikával foglalkozó, illetve azt felhasználó szakembereknek és diákoknak ajánlható.



