

105.521

A
VASÚTI FELÉPITMÉNY
SZÁMITÁSA

IRTA

DR PÓCZY MIHÁLY

AKADÉMIAI KIADÓ

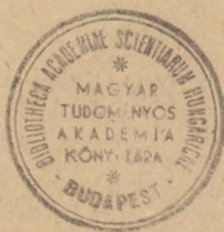
A
VASÚTI FELÉPITMÉNY
SZÁMITÁSA

IRTA
DR PÓCZY MIHÁLY

AKADÉMIAI KIADÓ

BUDAPEST, 1950

105521



Akadémiai Kiadó (Budapest, VI., Sztálin-út 31.) Felelős: Mestyán János.

2552. Franklin-nyomda Budapest, VIII., Szentkirályi-utca 28. Felelős: Ketskés János.



BEVEZETÉS.

A vasúti felépítmény minden szerkezeti része a vonat áthaladása közben kis mozgásokat végez. Jól lejárta és kifogástalan állapotban levő pályán ezek a kis mozgások gyakorlati értelemben *tökéletesen rugalmasaknak* tekinthetők, mert *egy* tengely terhelésének csak sok ezerszeres ismétlődése után növekedik a maradó alakváltozás megmérhető nagyságára. De érzékeny műszerrel sem észlelhető semmi különbség a felépítmény szerkezeti részeinek a terhelés előtti és utáni helyzete között akkor, ha csak néhány tengelyből összetett sorozat *egyszeri* terhelésének hatását vizsgáljuk.

Az amerikai felépítményeken végzett több mint egymillió kísérlet nemcsak azt igazolta, hogy a kis mozgások rugalmasak, hanem azt is, hogy az alakváltozások a terheléssel arányosak és a szuperpozíció elve a felépítményre érvényes, valamint azt, hogy az ágyazási együttható ugyanannál a felépítménynél közel állandó érték, mert bizonyos korlátokon belül független a terhelés nagyságától. E szerint nemcsak a sín és keresztalj anyaga követi a Hooke-törvényt, hanem a pályába bedolgozott és jól lejárta ágyazás, továbbá az alépítmény földteste is olyan rugalmas mozgásokat végez, amelyek a felette álló, vagy nagy sebességgel áthaladó tengelynyomással arányosak, és amelyeknél a terhelés eltávolodása után nem marad vissza alakváltozás.

Elmozdulás közben a felépítményt alkotó szerkezeti részekben és ezek érintkezési felületein megoszló erők, feszültségek ébrednek, s ezek a mozgást gátolni, lefékezni törekednek, mert minden mozgás célja a mozgást előidéző oknak, azaz az egyensúlybomlásnak megszüntetése. Ezért ezeket a mozgás közben ébredő, megoszló erőrendszereket közös névvel *rugalmas ellenállásoknak* nevezzük. Ezek az ellenállások az elmozdulás mértékével arányosan addig a határig növekednek, amíg el nem érik a mozgás megszüntetéséhez, azaz az új egyensúly kialakításához szükséges és elegendő értéküket.

A felépítmény számításának célja meghatározni azokat a legnagyobb fajlagos igénybevételeket (feszültségeket), amelyek a keréksorozat terhelésének hatására a felépítmény szerkezeti részeiben mint rugalmas ellenállások ébrednek a kis mozgások szélső értékének kifejlődése pillanatában.

A felépítmény fő szerkezeti részei: a sín, keresztalj és ágyazás. Az ezek testének belsejében ébresztett megoszló erők játéka egymástól kölcsönös függésben megy végbe. Tehát az alkatrészek közös érintkezési felületein is olyan «külső» megoszló erők támadnak a közös elmozdulási kényszer alatt, amelyeknek az együttesen végzett rugalmas ellenállásból fontos közvetítő szerep jut. Ezek a külső ellenállások: a sín talpfelületén megoszló reakcióerő, illetve a keresztalj felső felületére közvetlenül vagy alátétlemezzel közvetítésével ható *sínnyomás*, valamint a keresztalj talpának alávert része alatt megoszló *ágyazási nyomás*. Mind az ágyazási nyomás, mind a sínnyomás is rugalmas ellenállás lévén, mozgás közben fejlődik ki oly módon, hogy az önmagával párhuzamosan eltolódó felületen az elmozdulás irányával ellentétes értelmű megoszló erő, az elforduló sík mentén pedig az

elfordulással ellentétes értelmű megoszló nyomaték alakul ki. A felépítményre ható aktív erőket már koncentrált erőknek tekinthetjük, mert a kerékabroncs aránylag igen kis felületen nyomódik be a sínkoronába.

Az előrebocsájtottak értelmében a sín és a keresztalj számítására olyan módszert igyekeztünk kidolgozni, amely a felépítmény kis mozgásainak elemzéséből kiindulva, a rugalmas ellenállásokat és ezek kölcsönös egymásrahatását a valóságot megközelítő módon szándékszik számbavenni.

Feladatunk tehát a sín és keresztalj keresztmetszeteire ható legnagyobb eredő erők és nyomatékok számítására alkalmas olyan képletsorozat levezetése, amelyben minden rugalmas ellenállás az eredményre gyakorolt hatásának megfelelő mértékben jut kifejezésre.

Ezért nevezzük a következőkben kifejtett számítási eljárást a rugalmas ellenállások módszerének.

A SIN.

Történeti áttekintés.

A sin valamely keresztmetszetében ébresztett igénybevételek értéke függ a terhelő erőrendszertől, a felépítmény általános elrendezésétől és az egyes szerkezeti részek anyagától és méreteitől. A terhelő erőrendszer lehet izolált sztatikus súly, vagy egymástól nem egyenlő távolságban egymást követő, különböző súlyú kerek sorozata, amely nagy sebességgel halad át a vizsgált keresztmetszet felett. Még az is befolyásolja az igénybevételek kialakulását, hogy milyen a sin talpának a lekötési módja: 4 tirefond nagy alátét-lemezzel, vagy lemez nélkül, csak két sinszeggel.

Ennek a sok tényezőnek a kölcsönös egymásra való hatása folytán a felépítmény egyes szerkezeti részeiben — és így magában a sinben is — fellépő valóságos erőhatásoknak a pontosan egyértelmű számítása rendkívül bonyolult feladat. Mondhatnók, hogy ennek a feladatnak olyan, elméletileg is pontos megoldása, amely az *elméleti fizikust* is kielégítené — lehetetlen. De az elsősorban gyakorlati célokra szolgáló mérnöki számítás olyan egyszerűsítő feltevéseket és elhanyagolásokat enged meg, amelyek folytán a bonyodalmakat okozó hatások egy része kiküszöbölődik, a megmaradó része pedig annyira egyszerűsödik, hogy a számítás számára többé-kevésbé jól megközelítő képleteket lehet vezetni.

A mérnököknek az a törekvése, hogy a sín igénybevételeinek számítására alkalmas képletet kapjanak, nyilván olyan régi, mint a vasút. De komolyabb tudományos értéket jelentő eredmény elérése *Winkler* (1867 és 1871) számítási módszerével kezdődött. *Winkler*, utána pedig *Zimmermann* (1888) és követői olyan utat vágtak, amelynek nyomvonalán — ha lényeges elvi módosításokkal is — épült ki a számításnak ma is használt útja.

A számítás bizonytalanságát az előbb említett, *egyszerűsítő feltevések és elhanyagolások* különfélesége okozza, mert ezek miatt nyilvánvalóan a különböző számítási módszerek különböző képletekre vezettek, sok vitát nyitva a műszaki irodalomban.

A mérőműszerek technikai fejlődése ma már lehetővé teszi a képletek helyességének bírálatát «a kísérletek próbakövén», és ez nyitotta meg a számítási módszer korszerű fejlődésének azt a lehetőségét, amely a sok vitát lezárhatja: *olyan módszert vezetni be, amelynek eredményei kísérletileg és elméletileg egyaránt igazolhatók* az észszerű pontossági igény kielégítése mellett.

A vita során felmerült már az a gondolat is, hogy felesleges fáradság — mert úgysem vezethet kielégítő eredményre — elméleti képleteket vezetni. Az a legfontosabb, hogy az amúgy is közelítő számítás *egységes módszerrel* történjék, mert úgyis csak az eredmények *relatív értéke* dönti el valamely sinszelvény teherbíróságát. Így a beágyazott keresztaljakra kötött sín méretszámításának egyszerűsítésére készült az a «holland» képlet, amelyet *Driessen* ismertetett 1937-ben az *Organ* 7. füzetében. E szerint — *Winkler* képletének elve értelmében — a sín

többszörös tartó módján számítható úgy, hogy a támaszponti lesüllyedés-különbségeket elhanyagoljuk. Bár nem tekinthető kifejezetten «empirikus» képletnek, és elég jó a relatív értékek számítására a holland formula, mégis hiányos, mert — éppen túlzottan egyszerű mivolta folytán — több igen lényeges tényezőre nézve teljesen érzéketlen. Ezek ki is maradtak a képletből. Már pedig, ha egyáltalán számítunk, éppen az a fontos, hogy olyan képletekkel számoljunk, amelyekben minden lényeges tényező szerepel, és pedig a nagyságrendjének legjobban megfelelő helyen. Csak így várható, hogy az eredmény az egyes tényezők változásának hatására a valóságot megközelítő mértékben változzék.

Zimmermann-nak az a módszere, amelyet a keresztaljas felépítmény számítására dolgozott ki, a támaszpontok (azaz a keresztaljak) függőleges irányú rugalmas besüllyedését is számbaveszi. Négy évtizeden át ez volt a «pontos módszer». A kísérletek viszont azt mutatták, hogy nagyon is pontatlan, mert $+80 \sim +100\%$ -os hibája is lehet. Hátránya még, hogy roppant bonyolult képletsorozattal és táblázatokból interpolált értékekkel kell számítani, és így is csak egy izolált súly hatása számítható, keréksorozatát már nem.

Az amerikaiak 1922 óta Zimmermann keresztaljas módszeréről áttértek a hosszaljas számítási módra. Ennek történeti oka az, hogy a vasúttársaságok csökkenteni akarták a pályafenntartás költségeit, és különösen azokon az igen hosszú szakaszokon, ahol vasutak embertől lakatlan területeken át vezettek, a nagyon költséges őrszolgálat és emberi munkaerő és munkaidő helyett inkább az olcsóbb építési anyagra költöttek többet. Így a szokottnál jóval nagyobb szelvényű sín fektettek sűrűbben kiosztott (bár gyengébb keresztmetszetű) talpfákra, arra számítva, hogy a túlméretezett sín elég forgalombiztonságot ad gyéribb felügyelet mellett is. Az ilyen felépítményeken végzett számítási és kísérleti eredményeknek összehasonlítása során merült fel az a természetes és igen termékeny gondolat, hogy az amúgy is nehezen alkalmazható keresztgerendás módszer helyett a sokkal egyszerűbb hosszgerendás módszerrel számítsunk. A sok, egymás mellett fekvő talpfára kötött nagy szelvényű sín ugyanis nem viselkedik többszörös tartó módján, mert a keréksorozat nyomása alatt sokkal inkább hasonlít az ilyen sín erőjátéka a rugalmasan és folytatólagosan alátámasztott hossztartóéhoz.

Arra, hogy a középeurópai vasutak sínigénybevételét is amerikai módon, az eredetileg csak hossztartóra levezetett képletek alkalmas módosításával számítsuk, először Nemesdy tett javaslatot az «Organ»-ban 1930-ban megjelent tanulmányában. Két évvel később ugyanezt, de más alakban javasolta Saller is. Nemesdy az amerikai, Saller az orosz irodalomból vette a gondolatot. E miatt évekig tartó irodalmi vita is támadt, nem annyira az elsőbbség kérdése körül, mert hiszen az kétségtelenül a Nemesdy módszeré volt, hanem inkább arról, hogy melyik módszer alkalmasabb az általános bevezetésre. A két módszer között az a lényeges különbség, hogy Saller Timosenko nyomán egyszerűen úgy alakította át a hossztartóra érvényes képleteket, hogy a folytonos alátámasztást kifejező tényezők a szakaszos alátámasztásnak feleljenek meg átviteles tartóhoz hasonlóan. Nemesdy szerint ezen az egyszerű átalakításon kívül még két fontos tényezőnek a számbavétele is szükséges ahhoz, hogy a kísérleti eredmények elfogadható mértékben megközelíthetők legyenek: szükséges a talpa összenyomódásának, továbbá rugalmasságának mértékét kifejező tényezőket is számításba venni.

Nemesdy kimutatta, hogy Saller módszerével csak úgy lehet követni a kísérleti eredményeket, ha a nyomatékok képlete elé egy teljesen önkényesen felvett tényezőt teszünk. Viszont Saller szerint a Nemesdy-féle eljárás elméletileg kifogásolható, mert olyan sztatikai szerepet tulajdonít a keresztaljsínnek a sín síkjában

ható nyomaték egy részének felvételével, amelyet szerkezeti elrendezése miatt képtelen teljesíteni. De Saller is kénytelen volt elismerni, hogy a mérési adatokat Nemesdy módszerével lehet a legjobban megközelíteni az eddig ismert összes módszerek között.

A Nemesdy által javasolt képletsorozat eredeti alakjában elméleti alapon könnyen volt támadható, mivel nélkülözte az elméleti alátámasztást és így csak empirikus (tapasztalati) módszernek volt tekinthető.

Ezt a hiányt Jáky pótolta 1933-ban, szintén az Organ-ban közzétett leveztésével, amely szerint a sín és keresztalj együttes erőjátékának részletes elemzésével kimutatta azt, hogy a hosszszelvény síkjában ható nyomatékna igen számottevő része a keresztaljra hárul, vagyis az a nyomaték, amelyet Saller és Timosenko szerint egyedül a sín vesz fel, valóban megoszlik a sín és keresztalj között. Ezért Jáky ezt a számítási eljárást *nyomatékelosztó módszernek* nevezte el.

A rugalmas ellenállások módszerének tárgyalása során az itt vázlatosan ismertetett különféle módszerek közötti elvi különbség lényegét új szempontból fogjuk megvizsgálni.

A rugalmas ellenállások elemzése.

A sín alapja a keresztalj. Mint alaptestnek, a keresztaljnak is az a feladata, hogy a felületére ható szerkezeti erőket, azaz a sínnyomást levezesse, és az alj talpfelületén megosztva adja át a kavicságnak. A keresztalj egyensúlyából következik, hogy a sínnyomás, mint a sín talp felületén megoszló erők eredője, egyenértékű az ágyazási nyomás eredőjének azzal az összetevőjével, amely a sín szilárdsági tengelyének síkjába esik. Tehát a sínnyomás függ a keresztalj talpa alatt, a kavicságban ébresztett reakciónyomások kialakulásától és megoszlási módjától. Éppígy igaz a tétel fordítottja is: az ágyazási nyomás függ a sín talpa alatt ébredő nyomások megoszlási módjától.

A sínnyomás a sín behajlásával is egyidejű mozgás közben fejlődik ki, s közben a sín talpa az eredeti, vízszintes síkjához képest valamely kis szöggel elfordul. Ez az elfordulás nem fejlődhetik ki szabadon, azaz *ellenállás* nélkül, mert a sín talpát síncsavar és szorítólemezek vagy legalább is sínszegek kötik többé-kevésbé mereven a keresztaljak felső lapjához. E szerint a sín talpának szögforgásait a keresztaljaknak követniük kell a lekötés merevségétől függő mértékben. Viszont a keresztaljak szabad elfordulását az ágyazásban ébredő ellenálló nyomások gátolják. Így a közös elfordulási kényszer folytán a keresztaljak alávert talpfelülete alatt az elfordulással szemben kifejlődő, ellenálló nyomaték fékezően hat a sín talpának szabad elfordulására, vagyis — végeredményben — *csökkenti* a sín szomszédos keresztmetszeteinek egymásközi elfordulását, azaz *a sínre ható aktív nyomaték hatását*. Ez az ellenálló nyomaték tehát nemcsak a sín talp és keresztalj közötti kötés merevségétől, hanem az ágyazás anyagának rugalmas tulajdonságaitól és a keresztalj talpának alakjától és méreteitől is függ. Az ágyazás rugalmasságának jellemzésére Winkler az *ágyazási együttható*-nak nevezett tényezőt vezette be a felépítmény számításának képleteibe C kg/cm³ jelöléssel. Ez a C arányossági tényezőként szerepel a kavicságba benyomott talp y (cm) besüllyedése és p (kg/cm²) fajlagos ágyazási nyomás között, vagyis — Winkler szerint —: $p = Cy$, tehát az ágyazási együttható fogalma hasonló a Hooke-törvényt követő anyagok rugalmassági tényezőjének fogalmához. Kisebb C érték engedékenyebb, *rugalmasabb* ágyazási anyagnak, nagyobb pedig ellenállóbb, *merevebb* ágyazásnak a jellemző tényezője.

Amint a keresztalj számításának tárgyalása során majd ki fogjuk mutatni: az ágyazási tényezőnek ez az eredeti fogalmazása bizonyos korlátozásra szorul,

mert C nemcsak az ágyazási anyag szemének saját rugalmasságától, szemnagyságától, szemszerkezettől és hézagtenyézőtől, szóval az ágyazás *saját* rugalmasságától függ, egyébként állandó érték, hanem ezen kívül még igen lényegesen függ a nyomólap alakjától és méreteitől is. Ezért a $\sin$ számítása esetében C tényező csak azért alkalmazható, mert itt *azonos* méretű és alakú nyomlapok, azaz keresztaljak rugalmas besüllyedésével kell számolnunk, de már más, vagy változó méretű keresztaljakra kötött $\sin$ számítása ugyanazzal a C értékkel nem volna helyes azonos minőségű ágyazási anyag esetén sem. Tehát az «ágyazási együttható» az ágyazásnak arra a rugalmas ellenállóképességére jellemző tényező, amelyet a nyomólap középpontjának függőlegesében ható, valamely koncentrált G súly esetén a nyomólapnak önmagával *párhuzamos* síkú benyomódásával szemben képes kifejteni. Ha a nyomólap alávert hossza b (cm) és szélessége v (cm): $Cbv = D$ kg/cm az a fajlagos erő, amely a nyomólapot önmagával párhuzamosan $y = 1$ cm mélyre képes az ágyazásba benyomni, vagyis D az az ellenálló erő, amelyet az ágyazás a nyomólapnak 1 cm mélyre történő párhuzamos benyomódása ellen képes kifejteni. E szerint D és ebből $C = \frac{D}{bv}$ (egyenletesen megoszló ágyazási nyomás feltételezésével) kísérlettel meghatározható érték.

Az ágyazási együttható egyedül nem elegendő az ágyazás rugalmas ellenállóképességének számbavételére, mert — amint az előző fejtegetésből kitűnt — a keresztalj talpának nemcsak párhuzamos benyomódásával, hanem egyidejű elfordulásával is kell számolnunk. Ezért a C együtthatóhoz hasonló új tényező fogalmát kell bevezetnünk. Ez az ágyazásnak arra a képességére jellemző szám, hogy a benyomott talp *elfordulásával* szemben milyen mértékben képes *ellenálló nyomatékok* kifejteni. Ha a talp valamely kis φ szöggel fordul el M_a (kg cm) nyomaték hatására és ezután új nyugalmi helyzetébe jut, akkor a talp alatt az új egyensúlyi állapotnak megfelelően az elfordulás közben átalakult reakciónyomásoknak (q_x kg/cm) nyomatéka (M_p) a talp síkjának középvonalára szükségképpen egyenlő, és ellenkező értelmű az aktív (M_a) nyomatékkal:

$$M_p = -M_a$$

Mivel φ szögelfordulás is egyik része a rugalmas kis mozgásnak, amelyet a talp az ágyazásban végez: az ellenállónyomaték arányos az elfordulással, tehát

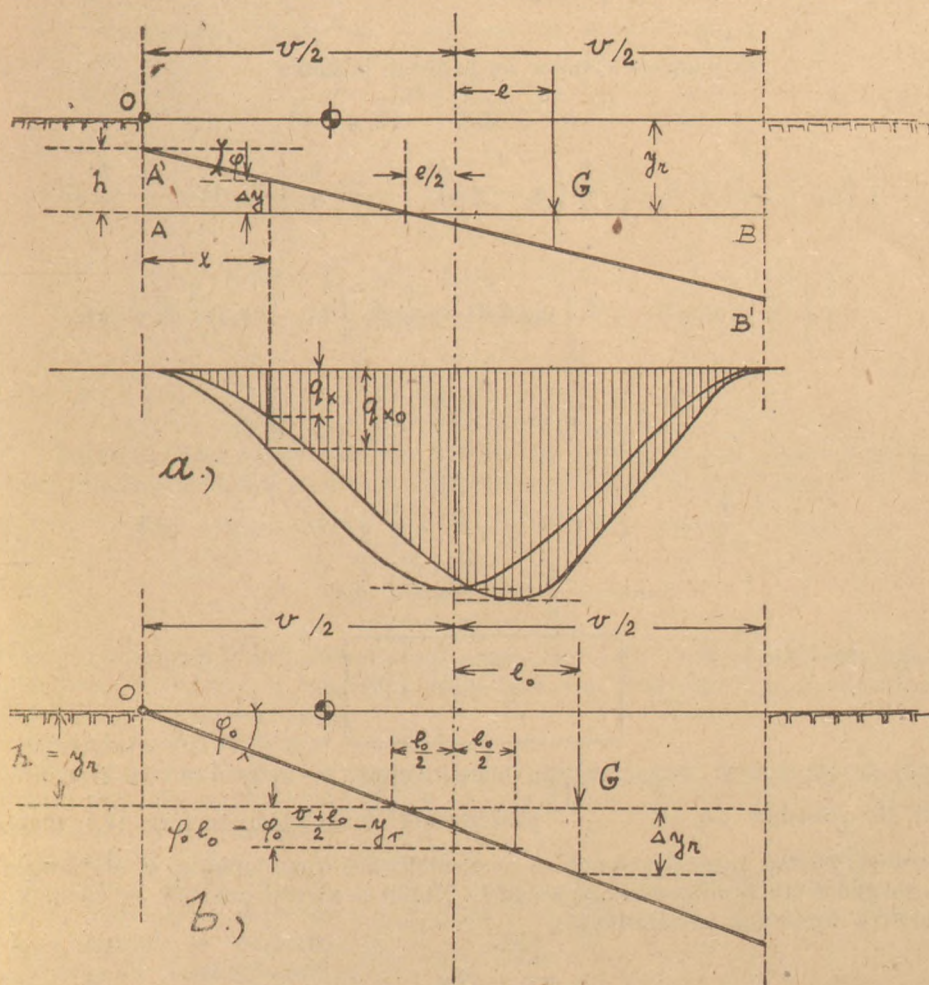
$$\varphi = \psi M_p$$

Itt ψ ($\text{kg}^{-1} \text{cm}^{-1}$) arányossági tényezőnek fizikai értelme az a szögelfordulás, amelyet a talp síkja a középvonalára ható egységnyi ($M_0 = 1$ kg cm) nyomaték hatására végez az ágyazásban. Az ellenállónyomatéknak ez a ψ tényezője szintén kísérlettel határozható meg, és az ágyazási anyag rugalmasságán kívül nyilván függ a talp alakjától és méreteitől is. Vizsgáljuk meg, hogy milyen módon függ ψ a talp méreteitől és alakjától, hogyan határozható meg kísérlettel, és miképpen viszonylik az ágyazási együttható értékéhez.

A nyomólap középpontjának függőlegesében, azaz centrikusan ható G súly a merev nyomólapot önmagával párhuzamos, vízszintes síkban $y_r = \frac{G}{D}$ mélyre nyomja be az ágyazásba. Tegyük fel, hogy ennek a párhuzamos benyomódásnak következtében a talpsík alatt q_{x0} reakciónyomások ébredtek az ágyazásban, megoszlásuk a nyomósík b irányú középvonalára szimmetrikus és, hogy az eredetileg sík talpfelület a reakciónyomások hatása után is sík marad.

Ha a benyomódás után a G súlyon kívül még valamely $+M = eG$ nyomaték is hat a v irányú függőleges síkban a b hosszirányú tengelyre (e cm az M

nyomatéknak megfelelő excentricitás), akkor a talpsík valamely φ szöggel elfordulni kényszerül, miközben a szimmetrikusan megoszló q_{x0} reakciónyomások valamilyen aszimmetrikusan megoszló q_x nyomásokká alakulnak át. Az új egyensúlyi követelménynek megfelelően q_x megoszlási ábrájának súlypontja a közép-vonaltól e távolságra tolódik el, miközben a talpsík jobb szélé mélyebbre süllyed



1. ábra.

Az ellenálló nyomaték rugalmas munkája.

és a bal szélé valamely h magasságra felemelkedik. Az elfordulás és a talpnyomások átalakulása közben az ágyazás rugalmas munkát végez: A_e .

Mivel a sín hossz tengelyének függőleges síkjában, azaz a keresztalj hossz tengelyére merőleges keresztmetszet síkjában ható forgató nyomaték hatását vizsgáljuk, és mert a keresztalj az ágyazás rugalmasságához képest elég merev test, feltehetjük, hogy a keresztalj keresztmetszetének v cm széles (aránylag rövid) talpvonala elfordulás után is egyenes marad, vagyis az alj keresztirányú alakváltozása elhanyagolható az ágyazás alakváltozásához képest. E szerint a

keresztaljnak rugalmas munkáját zérusnak tekintjük az ágyazás által végzett munka értéke mellett.

$$A_e = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=v} \frac{q_x + q_{x0}}{2} \cdot \Delta y \, dx = \frac{1}{2} \varphi M$$

(a jelölések értelme az 1. ábrán látható)

$$\Delta y = -h + x \operatorname{tg} \varphi \quad (\operatorname{tg} \varphi \sim \varphi)$$

$$\frac{1}{2} (q_x + q_{x0}) = q_{x0} + \frac{1}{2} (q_x - q_{x0}), \quad -\frac{h}{2} \int_0^v q_{x0} \, dx = -\frac{h}{2} G$$

$$-\frac{h}{4} \int_0^v (q_x - q_{x0}) \, dx = 0, \quad \int_0^v q_{x0} x \, dx = \frac{v}{2} G, \quad \int_0^v (q_x - q_{x0}) x \, dx = e G$$

$$A_e = \frac{1}{2} \int_0^v q_{x0} \Delta y \, dx + \frac{1}{4} \int_0^v (q_x - q_{x0}) \Delta y \, dx$$

$$A_e = -\frac{h}{2} G + \frac{v}{4} \varphi G + \frac{e}{4} \varphi G = \frac{1}{2} \varphi e G, \quad (M = e G)$$

$$\varphi e G = \frac{1}{2} (v + e) \varphi G - h G$$

$$\varphi e = \varphi \frac{v + e}{2} - h$$

Tehát az önmagával párhuzamosan benyomódott, y_r mélyen fekvő vízszintes síkot az elfordult sík $x = \frac{v-e}{2}$ abszcisszájú tengelyben metszi (1/b ábra).

Elfordulás közben tehát G súlynak az e excentricitású támadópontja y_r alá süllyed Δy_r megmérhető lesüllyedéskülönbséggel. Ebből a mérési adatból az ellenállónyomaték tényezője kiszámítható:

$$\frac{3}{2} \varphi e = \Delta y_r$$

$$\varphi = \varphi e G$$

$$\Delta y_r = \frac{3}{2} \varphi e^2 G$$

$$\varphi = \frac{2}{3} \cdot \frac{\Delta y_r}{G e^2}$$

(1.)

ugyaneből a kísérlethől:

$$D = \frac{G}{y_r} \quad \text{és} \quad C = \frac{G}{y_r v b}$$

Ha ψ és C között keressük az összefüggést, feltesszük, hogy e addig növekedik, amíg G súly eléri azt az e_0 határhelyzetét, amikor a nyomólap bal széle a terheletlen sík nivójára emelkedik, azaz $h = y_r = \frac{G}{D} = \frac{G}{C b v}$. Az elfordulás szöge ebben a határhelyzetben φ_0 :

$$\varphi_0 e_0 = \varphi_0 \frac{v + e_0}{2} = y_r, \quad \varphi_0 = \psi e_0 G, \quad \frac{G}{C b v} = \psi e_0 G \cdot \frac{v - e_0}{2}$$

$$\frac{1}{\psi} = C b v \cdot \frac{1}{2} \cdot (e_0 v - e_0^2)$$

legyen

$$\varepsilon_0 = \frac{e_0}{v} \quad \text{és} \quad I_f = \frac{b v^3}{12}$$

$$\frac{1}{\psi} = \frac{1}{2} \cdot C b v^3 \cdot (\varepsilon_0 - \varepsilon_0^2) = 6 (\varepsilon_0 - \varepsilon_0^2) \cdot C I_f, \quad \frac{1}{\omega} = 6 (\varepsilon_0 - \varepsilon_0^2)$$

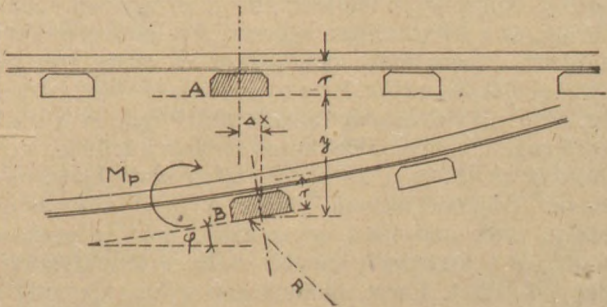
$$\boxed{\psi = \frac{\omega}{C I_f}} \quad (\text{II.})$$

Tehát az az ellenállónyomaték, amelyet az ágyazás fejt ki a sín hossztenge-lyének függőleges síkjára merőleges tengely körüli φ szögelfordulás ellen:

$$\boxed{M_p = \varphi \frac{C}{\omega} I_f}$$

Itt ω és C egyazon kísérlet alkalmával mért két mérési eredményből számítható együtttható, viszont I_f a nyomólap talpfelületének tehetetlenségi nyomatéka a felület b irányú súlyvonalára.

Az ellenálló nyomaték tényezője nemcsak az ágyazási anyag rugalmasságától, a nyomó talpfelület alakjától és méreteitől függő érték, mert ezeken kívül még a hajlító nyomaték síkjának *iránya* szerint is változik úgy, hogy a talpfelületnek a szögelfordulás irányához *konjugált irányú* súlyvonalára vonatkozó inercianyomatékával fordítva arányos.



2. ábra.

A felépítmény rugalmas mozgása.

* * *

A felépítménynek a terhelés előtti és utáni két helyzete között az a különbség, hogy a sín behajlása folytán a keresztaljak talpsíkja a terheletlen helyzetéhez képest:

1. y mélyre lesüllyed,
2. φ szöggel elfordul,
3. Δx távolságra oldalirányba eltolódik (l. 2. ábrát).

Amint már bevezetésünkben is rámutattunk, az új egyensúlyi állapot úgy alakul ki, hogy az ágyazás ellenállást fejt ki mind a három mozgásösszetevővel szemben, és mozgás közben, az elmozdulással arányos mértékben, ezek az ellenálló reakcióösszetevők éppen addig növekednek, amíg a reakciónyomások eredője eléri az új egyensúlyi állapot kialakításához szükséges és elegendő értékét. Tehát a talp alsó síkjában ébresztett, megoszló talpfeszültségeknek oly módon kell kifejlődniök, hogy eredőjük (általában) a talpfelület középvonalán *kívül* eső támadóponton (azaz valamely e excentricitással) ható, *ferde irányú* erő legyen. Így az egyensúly létrehozásában közreműködik az η lesüllyedés közben ébresztett függőleges nyomások és a φ szögelfordulás közben kialakult ellenálló nyomaték mellett még a Δx vízszintes eltolódás következtében a talpfelületen támadó *súrlódási erő* is. A keresztalaj talpfelülete a behajlott-sín szilárdsági tengelyének érintőjével közel párhuzamos és ez alatt valamely (állandó) r távolságban fekszik. Tehát a súrlódási erő, amelynek eredője a talpfelület síkjában hat, a felette levő sínkeresztmetszetre ellenállónyomatékokat fejt ki, s ennek r (cm) a nyomatéki karja és *értelme mindig megegyezik* a φ szögforgás közben ébredő nyomaték értelmével. Így tehát a keresztaljak feletti sínkeresztmetszetekre az aljak talpfelületéről haramló *ellenálló nyomatékok két mozgásösszetevő folytán fejlődnek ki*, amelyek egymás hatását — megegyező értelmük miatt — növelik.

A súrlódási erő — az ellenálló nyomatékon kívül — a sín keresztmetszeteiben olyan »abszolút» igénybevételeket is okoz, amelyek eredője a sín hosszirányú szilárdsági tengelyében támad.

A folytonos alátámasztású hosszgerenda számításának elmélete.

Az amerikai kísérletek eredményeiből levont következtetések szerint a keresztaljakra kötött sín igénybevételeinek számítására a folytonos alátámasztású hosszgerenda számára levezetett képletek — megfelelő módosításokkal — alkalmasak.

Azok az igénybevételek, amelyek a sín szilárdsági tengelyére merőlegesen képzelt átmetszések felületén, a sín anyagában alakulnak ki: *belső* rugalmas ellenállások, és a szilárdságtan egyszerű képleteivel akkor számíthatók ki, ha a keresztmetszetre bálról ható nyomatékot és eredő erőt (vagyis ennek a két főirányú összetevőjét) ismerjük. Ez a nyomaték és eredő erő szintén olyan rugalmas mennyiség, amely a sínkoronát támadó aktív erők és a sín talpán támadó, a sínre nézve *külső* rugalmas ellenállás közös hatására fejlődik ki. A sínnyomásról viszont már kimutattuk, hogy a keresztalaj talpa alatt kialakuló rugalmas ellenállások függvénye. Teljesen hasonló ehhez a folytonos alátámasztású hosszgerenda erőjátéka, csak annyiban egyszerűbb, hogy a szakaszos alátámasztás most nem zavarja a hossz tengely mentén változó tényezőknek *folytonos* függvényekkel történő kifejtését. Ezért alkalmasabb a hosszgerenda az elméleti levezetés céljára. A levezetés után úgy térünk majd vissza a keresztaljas sín számítására, hogy a folytonos alátámasztás feltevésével levezetett képleteket módosítjuk a szakaszos alátámasztásnak megfelelő módon.

Azokat a fizikai problémákat, amelyeknél a tényezők egymástól kölcsönös függésben alakulnak ki, a legcélszerűbben úgy önthatjuk matematikai alakba, ha a kölcsönös függést valamely differenciál-egyenlettel tudjuk kifejezni. Ennek a differenciál-egyenletnek valamelyik partikuláris megoldása lesz alkalmas a fizikai probléma elméleti kifejtésére.

A folytonosan és rugalmasan alátámasztott hosszgerenda keresztmetszeteire ható nyomatékok és *eredő erők* olyan rugalmas mennyiségek, amelyek a külső rugalmas ellenállásokkal közös elmozdulási kényszer alatt, a sín behajlása

közben, kölcsönös függésben alakulnak ki és *folytonos* függvényekkel jellemezhetők.

Tehát első feladatunk felállítani azt a differenciál-egyenletet, amely az eredő és nyomaték — mint rugalmas mennyiségek — függvényei és a rugalmas ellenállások függvényei közötti matematikai kapcsolatot fejezi ki.

A hossztartó számításának képleteit először Winkler (Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit [1867] 182. l.), majd Zimmermann (Dr. H. Zimmermann: Die Berechnung des Eisenbahn-Oberbaues [1888] II. §. 1.) vezették le az alakváltozás függvénye és ennek differenciálhányadosai közötti összefüggést kifejező egyenlethől. De mindegyiknek a levezetése olyan egyenlethől indult ki, amelyben a talpra ható rugalmas ellenállások közül csak a *függőleges nyomás* szerepel, tehát alkalmatlan a probléma teljes kifejtésére. Ugyanis a vízszintes ellenállások elhanyagolása csak akkor volna jogosult, ha nagyságrendi hatásuk a végeredményre valóban elhanyagolhatóan is bizonyulna alapos vizsgálat után is. A hossztartónak azokat a képleteit, amelyekben kifejezésre jut a *talpsúrlódás, vagy egyéb vízszintes ellenállások* hatása is, először Francke (Adolf Francke: Beitrag zur Berechnung des Eisenbahn-Oberbaues. Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover. Band XL. 1894) vezette le 1894-ben, majd 1921-ben Hayashi is azonos módon (Dr. Ing. Keiichi Hayashi: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage. [1921]), de keresztaljas felépítmény igénybevételeinek számítására ezeket a képleteket még nem alakították át. Francke közleményéből problémánk kifejtéséhez az alábbi levezetést használjuk fel.

A rugalmas ágyazáson fekvő és függőleges, koncentrált súlyokkal terhelt hossztartóból egy, a szilárdsági tengelyén mért dx hosszú darabot kimetszve képzelünk, és ennek az elemi hosszúságú résznek az egyensúlyi feltételeit vizsgáljuk (3. ábra).

A tartó terheletlen helyzetében vízszintes szilárdsági tengelyén valamely kezdőponttól balról jobbra mért x távolságban a terhelés után (felülről lefelé mutató pozitív) y lesüllyedés jelentkezik. A keresztmetszet (F) állandó, valamint a súlyvonalra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték (I) és a rugalmassági tényező (E) is.

S a szil. tengelyben ható hosszirányú erő,

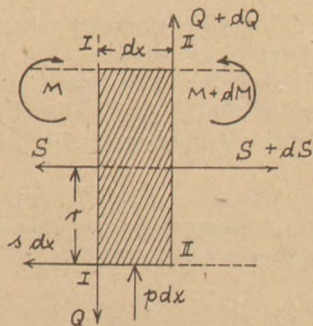
s a fajlagos talpsúrlódás,

p a fajlagos függőleges talpnyomás,

Q a nyíróerő, M a nyomaték,

r a talp távolsága a szilárdsági tengelytől,

b az ábra síkjára merőleges szélesség állandó (a képletben egységnyi).



3. ábra.

A hosszgerenda igénybevételei.

$$dM = -Q dx + r s dx \dots\dots\dots \frac{dM}{dx} = -Q + r s \quad (1)$$

$$dQ = -p dx \dots\dots\dots \frac{dQ}{dx} = -p \quad (2)$$

$$dS = s dx \dots\dots\dots \frac{dS}{dx} = s \quad (3)$$

Érvényes továbbá a hajlított tartókra vonatkozó általános szabály:

$$\frac{M}{E I} = \pm \frac{d^2 y}{dx^2}$$

a két ($\pm$) előjel közül a negatívot választjuk, mert ebben az esetben lesz a lefelé mutató pozitív y irányból nézve a pozitív nyomatéktól hajlított tartó görbülete «felülről homorú». Tehát

$$M = - E I \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (4)$$

Az (1) és (4)-ből :

$$E I \frac{d^3 y}{dx^3} = + Q - r s$$

$$E I \frac{d^4 y}{dx^4} = - p - r \frac{ds}{dx}$$

s a rugalmas kis mozgást végző talp alatt ébredő azt a súrlódási igényt jelenti, amely ezt a kis mozgást fékezni igyekszik és nem azt a legnagyobb (állandó értékű) súrlódási erőt, amely a mozgás határán ébred ($s_m = \text{állandó}$). Tehát s változó értékű 0 és s_m között éspedig a változás mértéke arányos az I. és II. metszetek egymásközi szögelfordulása változásának mértékével:

$$ds = \lambda dz \quad (\lambda \text{ arányossági tényező}).$$

Az M nyomaték hatására történő elemi szögelfordulás a dx távolságon az ismert rugalmassági képlet szerint:

$$dz = \frac{M dx}{E I}$$

tehát

$$\frac{ds}{dx} = \lambda \frac{dz}{dx} = \lambda \frac{M}{E I} = - \lambda \frac{d^2 y}{dx^2}$$

ha

$$p = C y \quad \text{és} \quad r \lambda = \mu, \quad E I \frac{d^4 y}{dx^4} = - C y + \mu \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$\boxed{\frac{d^4 y}{dx^4} - \left(\frac{\mu}{E I}\right) \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{C}{E I}\right) \cdot y = 0} \quad (I)$$

Ennek a negyedfokú differenciálegyenletnek az integrálja, azaz általános megoldása valós alakban felírva a következő:

$$y = e^{+\alpha x} (A_1 \cos \beta x + A_2 \sin \beta x) + e^{-\alpha x} (A_3 \cos \beta x + A_4 \sin \beta x) \quad (II)$$

ahol:

$$\alpha = \sqrt{m^2 + \frac{\mu}{4 E I}} \quad \beta = \sqrt{m^2 - \frac{\mu}{4 E I}}$$

$$m = \sqrt[4]{\frac{C}{4 E I}}$$

A_1, A_2, A_3 és A_4 pedig a négyszeres integrálás útján nyert, a kezdeti feltételeknek megfelelő négy (állandó) együttható (e a természetes logaritmus alapszáma).

* * *

Látjuk, hogy a *Francke* által felírt (I) alatti differenciálegyenlet és ennek (II) alatti megoldása nem egyéb, mint *Zimmermann* egyenlete bővített, általános alakban. A bővítés lényege pedig az, hogy *Francke* egyenletében kifejezésre jut a talpon ébredő passzív erőknek az elfordulással szemben kifejtett ellenálló nyomatéka a tartó szilárdsági tengelyére vonatkoztatva (itt r az ellenálló erő nyomatéki karja). Tehát *Zimmermann* képletével számítva annyit jelent, hogy *elhanyagoltuk* a talpon ébredő vízszintes ellenállás hatását, azaz az (I) képletet úgy számítjuk, mintha $\lambda = 0$ volna; ebben az esetben $\mu = 0$ és így $\alpha = \beta = m$ volna:

$$\frac{1}{m} = L \text{ (cm) (alapérték)}, \quad \frac{x}{L} = \xi, \quad \frac{C}{EI} = 4 m^4$$

az (I) egyenlet:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4 m^4 y = 0$$

és a (II) alatti megoldás:

$$y = e^{\xi} (\bar{A}_1 \cos \xi + \bar{A}_2 \sin \xi) + e^{-\xi} (\bar{A}_3 \cos \xi + \bar{A}_4 \sin \xi)$$

* * *

A végtelen hosszú tartó valamely 0 pontján *egy* P függőleges erő hat. Kereszük a négy rugalmas mennyiség: y , $\text{tg } \varphi$, M és Q képletét a 0 ponttól (mint a koordináta-rendszer középpontjától) valamely $+x$ távolságban levő keresztmetszetben. Meghatározandó a négy A_i együttható.

A (II) alatti egyenlet szerint, ha x értéke a pozitív számokon át közeledik a $+\infty$ -hez, y is a végtelen felé közelednék minden olyan A_1 és A_2 érték mellett, amely nem zérus. Mivel ez nem lehetséges, a (II) egyenletben értelemszerűen $A_1 = A_2 = 0$. Marad tehát két ismeretlen állandó, s ezek meghatározhatók a következő két kezdeti feltételből:

$$1. \quad \frac{dy}{dx}_{(x=0)} = \text{tg } \varphi_{(x=0)} = 0$$

mert y folytonos görbe lévén, a szimmetria miatt az O pontban szélső értéke van.

$$2. \quad \frac{d^3 y}{dx^3}_{(x=0)} = \frac{1}{EI} \cdot (+Q - r s)_{(x=0)} = + \frac{P}{2EI}$$

mert ugyancsak a szimmetria miatt az O pontban P két egyenlő részre osztozik és mivel $s_{(x=0)} = 0$, mert $s = \lambda x$, viszont a 0 pontban $x_{(x=0)} = 0$ szintén a szimmetria miatt.

Ennek a két feltételnek alapján A_3 és A_4 -re, mint két ismeretlenre két, egymástól független egyenletet írhatunk fel, s ezeknek megoldása szerint:

$$A_3 = \frac{P}{2C} \cdot \frac{m^2}{\alpha} \quad \text{és} \quad A_4 = \frac{P}{2C} \cdot \frac{m^2}{\beta}$$

tehát izolált, sztatikai P súly esetén:

$$y = \frac{Pm^2}{2C} \cdot \left[\frac{\sin \beta x}{\beta} + \frac{\cos \beta x}{\alpha} \right] \cdot e^{-\alpha x} \quad (\text{III/a})$$

ebből következik differenciálás útján:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = -\frac{P}{4\alpha\beta EI} \cdot \sin \beta x \cdot e^{-\alpha x} \quad (\text{III/b})$$

$$M = -EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{4} \cdot \left[\frac{\cos \beta x}{\alpha} - \frac{\sin \beta x}{\beta} \right] \cdot e^{-\alpha x} \quad (\text{III/c})$$

$$Q = EI \frac{d^3y}{dx^3} - \mu \frac{dy}{dx} = \frac{P}{2} \cdot \left[\cos \beta x + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \cdot \sin \beta x \right] \cdot e^{-\alpha x} \quad (\text{III/d})$$

Ha a (III/a) alatti függvényt negyedszer is differenciáljuk és hozzáadjuk

$$\left[\frac{C}{EI} \cdot y - \frac{\mu}{EI} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \right]$$

összevont kifejezéshez: *közvetlenül is meggyőződhetünk arról, hogy a (III/a) alatti függvény valóban egyik partikuláris megoldása az (I) alatti differenciálegyenletnek, mert az összeg (az összevonások elvégzése után) zérust ad eredményül, azaz az (I) alatti egyenletet kielégíti.*

A négy rugalmas mennyiség képlete tehát a P erő O támadáspontjának keresztmetszetében (azaz $x = 0$ helyen):

$$y_{(x=0)} = y_{\max} = \frac{P}{2C} \cdot \frac{m^2}{\alpha} \quad (\text{IV/a})$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{(x=0)} = 0 \quad (\text{IV/b})$$

$$M_{(x=0)} = M_{\max} = \frac{P}{4\alpha} \quad (\text{IV/c})$$

$$Q_{(x=0)} = Q_{\max} = \frac{P}{2} \quad (\text{IV/d})$$

A hosszgerendára levezetett képletek átalakítása.

A keresztaljakra kötött sín a hosszgerendától a számítás szempontjából csak abban különbözik, hogy az alátámasztása nem folytonos, hanem szakaszos. Abból, hogy a szakaszos alátámasztású sín elvileg *többlámaszú* tartó, nagyon kis igénybevételtöbblet származik (*Flamache* szerint 1%) ahhoz az igénybevételhez képest, amely az alátámasztások *rugalmas besüllyedéskülönbségei* miatt keletkezik. Az amerikai kísérletek egyik eredménye szerint: «a tehernek a talpfa *feletti* vagy a talpfák *közötti* helyzete majdnem teljesen jelentőség nélküli az alakváltozások mértékére, és a két szomszédos talpfa közötti sínbehajlás igen kis mértékű a talp besüllyedéseivel viszonyítva». Kísérleti alapon indokolt tehát, hogy elhanyagoljuk ezt a kis igénybevétel-különbséget és így a hosszgerendára levezetett képleteket oly módon használhatjuk fel a sín számítására, hogy semmi más különbséget a két képletsorozat között nem teszünk, mint amennyi módosítás a szakaszos alátámasztás miatt szükséges.

A sín egység hosszára (1 cm) jutó hatásokat úgy vezetjük be a (III) és (IV) alatti képletekbe, hogy a két szomszédos talpfaköz felező síkjai közé eső hatások integrálját osztjuk a talpfaköz hosszával (l. [cm]) két szomszédos keresztaljközépvonalának távolsága). Ennek az elvnek megfelelően a (III) alatti képlet

sorozat változatlan marad, csak a képletekben ismétlődően szereplő α , β és m tényezők képleteit kell átalakítanunk a következőkben kifejtett módon.

Egy keresztalj felének alávert felületrésze alatt a sín alatti keresztmetszet y_r besüllyedése közben ébredő függőleges ellenállások (reakciónyomások) felületi integrálja:

$$Dy_r = C v b y_r \quad (vb \text{ a nyomófelület})$$

Ebből a sín egység-hosszára esik:

$$C b \frac{v}{l} y_r = \frac{D}{l} y_r$$

A hossztartó képletében:

$$m = \sqrt[4]{\frac{C b}{4 E I}}$$

(az eredeti képletből a levezetés egyszerűsítése kedvéért egységnyinek feltételezett $b = 1$ cm kimaradt). Vagyis a számlálóban az egység-hosszra eső nyomás és a lesüllyedés közötti *arányossági tényező*: $\frac{p b}{y} = C b$ szerepel a hossztartónál. Mivel ugyanezt az arányossági tényezőt a keresztaljas sín esetében: $\frac{D}{l}$ fejezi ki, tehát m képlete átalakított alakban:

$$m = \sqrt[4]{\frac{D}{4 E I}}$$

* * *

A hossztartónál: $\alpha = \sqrt{m^2 + \gamma}$, $\beta = \sqrt{m^2 - \gamma}$

$$\gamma = \frac{\mu b}{4 E I}$$

itt $\mu b = r \lambda b$: a hossztartó egységnyi hosszán történő szögelfordulás miatt a talp alatt ébresztett vízszintes ellenállások nyomatékának *arányossági tényezője* a nyomaték és szögelfordulás között.

(μb mértékegysége: kg, tehát γ mértékegysége: cm^{-2}
 m „ cm^{-1} , „ m^2 „ cm^{-2})

A keresztaljakra kötött sinre ható ellenálló nyomaték — amint már kimutattuk — két mozgásösszetevő közben ébredő ellenállások együttes hatásaként fejlődik ki:

1. Egy keresztalj alávert felületrésze alatt, a talp Δx eltolódása közben ébredő talpsurlódásból a sín szilárdsági tengelyére haramló, egység-hosszra jutó nyomaték *arányossági tényezője*: $rb \lambda \frac{v}{l}$

2. A keresztalj talpfelületének φ szögelfordulása közben támadó, egység-hosszra eső ellenálló nyomaték *arányossági tényezője*:

$$\frac{M_p}{\varphi l} = \frac{1}{\varphi l} = \frac{C}{\omega} \cdot \frac{I_f}{l}$$

Mivel a két ellenállás mindig megegyező értelmű nyomatékkaal hat a sínre, a két tényező összegét kell γ képletének számlálójába bevezetni, és pedig úgy, hogy ez az összeg még szorzandó egy valódi tört értékű ϑ tényezővel. Ez azt mutatja kifejezésre γ képletében, hogy a szintalp a keresztaljhoz mennyire mereven van lekötve. Ugyanis a kötés merevségétől függ, hogy a keresztalj talpáról a sín szilárdsági tengelyére hármló ellenálló nyomatékok milyen mértékben jutnak érvényre a sín lekötött talpfelületén. E szerint tehát

$$4 E I \gamma = \vartheta \cdot \left[r \lambda b \frac{v}{l} + \frac{C}{\omega} \cdot \frac{I_f}{l} \right] = \frac{N}{l}$$

itt ϑ , λ , C és ω tényezőket meg lehetne határozni egyenként is külön kísérletekkel, de ezek el is kerülhetők, mert elegendő csak az eredményül kapott «ellenálló nyomatéki tényező» kísérleti értékét megállapítani a sín igénybevételeének számításához. Viszont N képlete rámutat azokra a tényezőkre, amelyekből az ellenálló nyomaték értéke, valamint *változásának mértéke* függ (pl. a keresztalj magasságával, valamint az aláérés hosszával (b) csak lineárisan, de a talp szélességének (v) harmadik hatványával változik).

Tehát a keresztaljas sín a III. alatti képletsorozattal olyan α , β és m tényezők helyettesítésével számítható, amelyeknek képletei a szakaszos alátámasztásnak megfelelően módosítva a következők:

$$m = \sqrt[4]{\frac{D}{4 E I l}} \quad (V/a)$$

$$\alpha = \sqrt{m^2 + \frac{N}{4 E I l}} \quad (V/b)$$

$$\beta = \sqrt{m^2 - \frac{N}{4 E I l}} \quad (V/c)$$

Ezekben a képletekben két olyan tényező szerepel, amelyeknek értéke a felépítmény méreteiből nem számítható ki előre, csak kísérleti úton állapítható meg. Ezek: D kg/cm (ill. C kg/cm³) és N kgcm. Mindkettő elsősorban az ágyazás minőségétől, rugalmasságától függ, és pedig D az ágyazásnak attól az ellenálló képességétől, amelyet a keresztalj párhuzamos benyomódása ellen képes kifejteni, N pedig a keresztalj talpának elfordulásával szemben kifejtett ellenálló nyomaték mértékére jellemző. De ezenkívül mindkettő függ még a keresztalj méreteitől is, és N értékében kifejezésre jut a sín és keresztalj közötti kötés merevségének mértéke is: ϑ tényező változása által 0 és +1 között. Például abban az elméletileg szélső esetben, ha a sín talpa és a keresztalj felülete között alátétlemez helyett csuklós görgő sarú volna, azaz a lekötés merevsége zérus értékűre csökkenne, ($\vartheta=0$), akkor a kavicságy elfordulás elleni ellenálló képessége már egyáltalán nem érvényesülhetne, — tehát $N=0$ volna. Ebben — de csakis ebben az elméletileg is szélső esetben, — $\gamma=0$ és $\alpha=\beta=m$ volna, azaz ekkor volna érvényes a Zimmermann hosszartós képletei módosításával levezetett (Saller—Timosenko) módszer. De mivel még a legegyszerűbb szerkezetű felépítménynél is, ahol nincs alátétlemez, a sín talpa «görgők» közvetítése nélkül fekszik a talpfára, és legalább is két sín-szeggel le van szegezve: nyilvánvaló, hogy N zérusnál nagyobb pozitív szám, tehát minden esetben $\alpha > m > \beta$.

D kg/cm és N kgcm értéke különböző felépítményeknél általában különböző, sőt ugyanannál a felépítménynél is változó értékű lehet a szerkezeti részek, kötések lazább vagy merevebb állapota és a talp aláérésének hossza és tömör-

sége szerint. Tehát D és N elméletileg ki nem számítható kísérleti érték. Megállapításukhoz olyan kísérlet szükséges, amikor egyidejűleg *legalább két* rugalmas változónak mérjük meg az összetartozó értékeit ugyanazon a helyen álló, ugyanolyan súly alatt. Így például meghatározhatjuk a P_0 súly támadáspontja alatt ébredő legnagyobb sinfeszültséget (azaz az ebből számítható M_0 nyomatékot), és ugyanott, ezzel egyidejűleg megmérjük a sín talpának y_0 lesüllyedését is. Ezekből a mérési adatokból a két ismeretlen (D és N) kiszámítására két egyenletet írhatunk fel:

$$M_0 = \frac{P_0}{4\alpha}$$

$$y_0 = \frac{P_0 l}{2D} \cdot \frac{m^2}{\alpha}$$

ezeket D és N -re megoldva:

$$D = \frac{M_0^2 l}{y_0^2 EI}$$

$$N = l \cdot \left[\frac{P_0^2 EI}{4 M_0^2} - \frac{2 M_0}{y_0} \right]$$

A sín behajlási görbéjének h hullámhosszát, vagyis a két szomszédos, legjobban felemelkedő (A és B) pont közötti vízszintes távolságot (4. ábra) nagyon nehéz megmérni, mert a két végpont közelében a behajlási görbe annyira ellapul, hogy a legkiemelkedőbb pont helye érzékenyebb műszerrel is csak nagyon bizonytalanul (több méteres hibával) észlelhető. Elméletileg a hullámhossz kiszámítható tg (III/b) alatti képletéből, ha keressük, hogy melyik (— zérustól különböző —) x érték mellett lesz $\text{tg } \varphi = 0$.

$$\sin \beta x = 0, \quad \text{ha } \beta x = \pi, \quad \text{tehát } x = \frac{h}{2}, \quad \beta \frac{h}{2} = \pi$$

$$h = \frac{2\pi}{\beta} \quad \text{és} \quad \beta = \frac{2\pi}{h}$$

A Zimmermann-képletével számított hullámhossz kisebb és a nyomaték mindig nagyobb a Francke képletével számított értékeknél:

$$h_Z : h_F = \beta : m \quad (\beta < m)$$

$$M_Z : M_F = \alpha : m \quad (\alpha > m)$$

* * *

A rugalmas ellenállások módszerének gyakorlati alkalmazásához két kísérleti állandó ismerete szükséges, ezzel szemben a Zimmermann hosszstartós elméletéből lezármaztatott módszerek képleteiben csak egy tényező ($C \text{ kg/cm}^3$) függ az ágyazás rugalmasságától, Winkler—Driessen képleteiben pedig még ez az egy kísérleti érték sem szerepel. Éppen ebben a látszólagos hátrányában rejlik az ellenállások módszerének az az előnye a többiekkel szemben, hogy ezzel a módszerrel könnyebb követni a kísérleti eredményeket, azaz a sín valóságos erőjátékának kifejezésére és megközelítésére alkalmasabb, mert simulékonyabb az eddig használatos módszereknél.

F a keresztmetszet felülete (állandó).

A (III/b) képlet szerint:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-P}{4 \alpha \beta EI} \cdot \sin \beta x \cdot e^{-\alpha x}$$

$$F(x) = \int e^{-2\alpha x} \sin^2 \beta x \cdot dx + \bar{C}$$

$$F(x) = \frac{1}{4\alpha} \cdot e^{-2\alpha x} \left[1 + \frac{\beta\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \sin 2\beta x - \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \cos 2\beta x \right] + \bar{C}$$

$$\beta x_{(x=h/2)} = \pi, \text{ mert } h/2 = \frac{\pi}{\beta}$$

$$F\left(\frac{h}{2}\right) - F(0) = Z = \frac{1}{4\alpha} \cdot \left[e^{-2\pi \frac{\alpha}{\beta}} - 1 \right] \cdot \left[1 - \frac{\alpha^2}{2m^2} \right]$$

tehát a geometriai egyenletből:

$$\delta = \frac{P^2}{16 \alpha^2 \beta^2 E^2 I^2} \cdot Z$$

A szilárdságtani egyenletből:

$$\delta = 2 \frac{S_k}{E F} \cdot \int_0^{h/2} dx = S_k \frac{2\pi}{\beta E F}$$

itt S_k az 1 — 0 keresztmetszetek között változó húzóerők középértéke.

$$\frac{S_k}{F} = \sigma_k = \frac{\beta E}{2\pi} \cdot \frac{P^2}{16 \alpha^2 \beta^2 E^2 I^2} \cdot Z = \frac{P^2}{100 \alpha^2 \beta E I^2} \cdot Z$$

Tehát a hullámvonal legmélyebb (0) és legmagasabb (1) pontjai között, a hossz-irányú erők által okozott húzófeszültségek középértéke:

$$\sigma_k = \frac{-P^2}{800 E I^2} \cdot \frac{\beta}{\alpha^3 m^2} \cdot \left(1 - e^{-2\pi \frac{\alpha}{\beta}} \right)$$

(mert $32\pi \approx 100$ és $\alpha^2 + \beta^2 = 2 m^2$).

(A negatív előjel akkor érvényesülne, ha S_1 nagyobb volna S_0 -nál, tehát értelem-szerűen elhagyható, mert S_0 mindig nagyobb, mint S_1 .)

Vizsgálatunkhoz olyan példát használunk fel, amelynek mérési adatai *nagyon kopott* «C» (MÁV) felépítményre vonatkoznak, mert ennél a behajlás arány-lag olyan nagy, hogy az ebből leszűrt eredmény gyakorlati célra meggyőző erejű lehet.

A felépítmény adatai:

$$\text{Sín: } I_1 = 810 \text{ cm}^4, K = 125 \text{ cm}^3, F = 42,8 \text{ cm}^2$$

$$\text{Alátétlemezek: } 18,0 \times 16,0 = 288 \text{ cm}^2$$

$$\text{Talpfák: } 250 \times 25 \times 15 \text{ cm, } I_2 = 7000 \text{ cm}^4, l = 73,5 \text{ cm.}$$

Abból a célból, hogy a sín számításának képleteiben szereplő két állandó értékét megállapíthassuk, két összetartozó mérési adatként $P_0 = 6750 \text{ kg}$ izolált,

sztatikus súly alatti sinkeresztmetszetre: $M_0 = 1,2$ tm nyomatékot és $y_0 = 2,94$ mm besüllyedést veszünk fel.

$$D = \frac{M_0^2 l}{y_0^3 E I} = \frac{120000^2 \cdot 73,5}{0,294^2 \cdot 2150000 \cdot 810} = 7000 \text{ kg/cm}$$

(feltéve, hogy a talpfa hosszának csak 80 %-a van aláverve, akkor is

$$C = \frac{7000}{0,8 \cdot \frac{250}{2} \cdot 25} = 2,8 \text{ kg/cm}^3$$

aránylag nagyon rugalmas ágyazási anyagra mutat).

$$N = l \cdot \left[\frac{P_0^2 E I}{4 M_0^2} - \frac{2 M_0}{y_0} \right] = 73,5 \cdot \left[\frac{6750^2 \cdot 2150000 \cdot 810}{4 \cdot 120000^2} - \frac{2 \cdot 120000}{0,294} \right] = 412 \text{ tm}$$

$$m = \sqrt[4]{\frac{D}{4 E I l}} = \sqrt[4]{\frac{7000}{4 \cdot 2150000 \cdot 810 \cdot 73,5}} = \frac{1}{92,5} \text{ cm}^{-1}$$

$$\alpha = \sqrt{m^2 + \frac{N}{4 E I l}} = \sqrt{\frac{1}{92,5^2} + \frac{4120000}{4 \cdot 2150000 \cdot 810 \cdot 73,5}} = \frac{1}{71,1} \text{ cm}^{-1}$$

$$\beta = \sqrt{m^2 - \frac{N}{4 E I l}} = \sqrt{\frac{1}{92,5^2} - \frac{4120000}{4 \cdot 2150000 \cdot 810 \cdot 73,5}} = \frac{1}{166,5} \text{ cm}^{-1}$$

Ha P_0 helyébe $P = 8000$ kg keréksúlyt állítunk:

$$y = \frac{P l}{2 D} \cdot \frac{m^2}{\alpha} = \frac{8000 \cdot 73,5 \cdot 71,1}{2 \cdot 7000 \cdot 92,5^2} = 0,348 \text{ cm}$$

aránylag nagy behajlást kapunk. Számítsuk ki erre a behajlásra a hosszirányú megnyúlásból származó húzófeszültség középértékét az előbb levezetett képlet szerint:

$$\sigma_k = \frac{8000^2}{800 \cdot 2150000 \cdot 810^2} \cdot \frac{71,1^3 \cdot 92,5^2}{166,5} \cdot \left(1 - e^{-6,28 \frac{166,5}{71,1}} \right)$$

$$e^{-14,7} \approx 0; \quad \sigma_k = 1,05 \text{ kg/cm}^2$$

Mivel a húzófeszültség szélső értéke ennek a középértéknek közel kétszerese:

$$\sigma_{\max} (\text{húzás}) \approx 2 \text{ kg/cm}^2$$

$$M_{\max} = \frac{P}{4 \alpha} = \frac{8000}{4} \cdot 71,1 = 142200 \text{ kgcm},$$

tehát a hajlításból származó igénybevétel

$$\sigma_{\max} (\text{hajlítás}) = \frac{142200}{125} = 1137 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{\sigma_{\max} (\text{húzás})}{\sigma_{\max} (\text{hajlítás})} = \frac{2}{1137} = \frac{1,75}{1000} < 2\text{‰}$$

azaz a hosszirányú S erő a hajlításból származó igénybevételt két ezrelékkel sem növeli nagyon kopott sín és gyenge ágyazási anyag ($C = 2,8 \text{ kg/cm}^3$) esetén sem. Ebből joggal levonható az az általános érvényű következtetés, hogy a hosszirányú erők sztatikai hatása elhanyagolható.

Mozgó terhelés hatása.

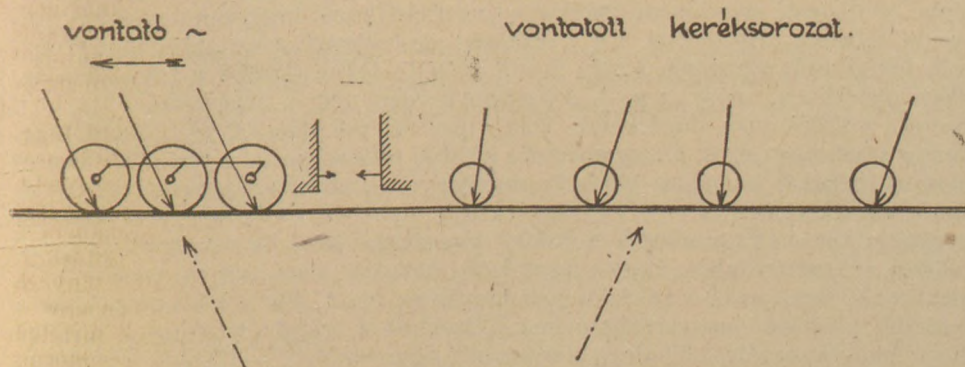
Az álló keréksorozat esetére számított, azaz sztatikus igénybevételek bizonyos mértékben megnőnek, ha ugyanez a terhelő keréksorozat valamely v km/ó sebességgel halad át a vizsgált sínszelvény felett. Azt az egységnél nagyobb tényezőt, amellyel a sztatikus igénybevételeket szorozni kell ahhoz, hogy a mozgó

terhelés folytán megnövekedett igénybevételek közelítő értékére következtethessünk, *dinamikus lényezőnek* hívjuk és egyenes, elég jó karban tartott pályán általában

$$\mu = 1 + \frac{v^2}{30000}$$

képlettel számítjuk. Ez a képlet több olyan hatásnak az egymásrahalmazódását foglalja össze, amelyek külön-külön is a sebesség függvényei és — általában — a sebesség négyzetével arányosan növelik azt a hajlító nyomatékot, amelyből a sín igénybevételét számítjuk. Ebből az alkalomból a mozgó terhelésnek csak azt a hatását vizsgáljuk meg, hogy milyen mértékben növeli meg azt a S hosszirányú erőt, amelyről az álló terhelés esetén már kimutattak, hogy csak elhanyagolhatóan kis (néhány ezrelék) igénybevételkülönbséget okozhat.

Az egyenletes sebességgel mozgó vonat mozdonyának vonórúdján támadó vonóerő — a szabálytalan lökésekből származó ingadozásoktól eltekintve — állandó és egyenlő a rácsatolt járművek (gördülő, csúszó, közeg- stb.) ellenállásainak összegével. Az egyenletes mozgás bármely pillanatában a vonatot és az alatta



5. ábra.

Hosszirányú erők mozgó terhelés alatt.

fekvő felépítményt olyan összefüggő, sztatikailag határozatlan szerkezetnek tekinthetjük, amely *egyensúlyban* van, mert a vonórúdak láncolatában támadó erők összege egyenlő a keresztaljak talpfelületén ébresztett surlódási ellenállások összegével (5. ábra).

A szerkezetnek ebben az erőjátékában a sín közvetítő és teherelosztó szerepet játszik egyrészt a vonat és a keresztaljak, másrészt a vontató és a vontatott keréksorozat között. Ebből a szempontból az álló és mozgó keréksorozat terhelése között csak az a különbség, hogy a mozgó kerékről a sinkoronára ható erő iránya kitér a függőlegesből, mert a súlyerőhöz még a sín hossztengetelyének irányába eső S erő vektora is hozzáadódik.

Ez az S hosszirányú erő természetesen *nem* oszlik meg *egyenletesen* a sín hossztengetelye mentén, mert a megoszlás módját olyan függvény fejezi ki, amely függ — többek között — a sín rugalmas behajlási görbéjének a vonatterhelés alatt felvett alakjától, valamint — a szakaszos alátámasztás folytán — függ a keresztaljak sűrűségétől, méreteitől és a talpsurlódás tényezőjétől is. De azért a nélkül is, hogy a hosszirányú erők megoszlásának ezt a bonyolult függvényét ismernők, *szélső értékének* helyére és nagyságrendjére egyszerűbb megfontolásból is következtethetünk.

Ha a keréksorozatok helyett a vonat csak *egy* vontató és *egy* vontatott tengelyből állana, az egymást követő két kerék első (*A*) és hátsó (*B*) támadási pontjai közötti szakaszban nyomó, *A* előtt és *B* után pedig húzó erő támadna a sín hossz tengelyében. Ennek a $\pm S$ erőnek szélső értéke a talpfaköz közepén levő sinkeresztmetszetben fejlődik ki akkor, amikor a kerék ennek a sínszelvénynek közvetlen közelébe (elméletileg *dx elemi* távolságra) érkezik, illetve éppen már áthaladt felette. Ebben a pillanatban a húzó- és nyomóerő legnagyobb abszolút értéke egymással egyenlő, és mindkettő egyenlő a keréknyomás vízszintes összetevője (azaz a vonóerő) felével.

Több csatolt kerékből összetett vontató keréksorozat és a vontatott keréksorozat hosszan elnyúló láncolata alatt általában a legelső vagy a legutolsó kerék közelében jelentkezik $\pm S$ erő szélső értéke, de itt a vonóerő fél értéke már nem érvényesülhet teljes mértékben, mint az előbbi egyszerűsített esetben. Ugyanis az egyes horizontális rész-erőknek a támadó pontja és a legelső (illetve legutolsó) kerék közé eső keresztaljak talpsurlódási ellenállása fékezi az illető rész-erő hatását a vizsgált sínszelvényre.

Amíg a vonat egyenletes sebességgel halad, *S* erő, mint a vonóerő függvénye, a sebesség négyzetével arányos vonatellenállástól függ, tehát *S* erő is arányos a sebesség négyzetével. De a sebesség megváltoztatásához erőtöbblet (vonó, vagy fékező erő) szükséges, amely *S* erőt is változtatja, és pedig a *sebességtől függetlenül* mértékben, mert ez a $\pm \Delta S$ erőnövekedés nem a sebességtől, hanem a sebesség változásának mértékétől, azaz a *gyorsulástól* függ. Például indításkor, amikor a sebesség zérus, a megmozdulás kezdeti pillanatában, a tapadási tényező fokozása céljából homokolt sínen, a mozdonyt visszatartani akaró vonóerő és ennek következtében *S* erő is elérheti a legnagyobb értékét. A zárfék hirtelen meghúzásakor, vagy amikor a mozdony vonórúdja laza, de az utolsó vonórúd kifeszül, az is előfordulhat, hogy a legutolsó vonatkerék alatt nagyobb sínfeszültség jelentkezik, mint az első adhéziós mozdonykerék alatt. (Ez a jelenség is csak a húzóerők játékával magyarázható meg.) Ezekben a szélső esetekben a húzóerő okozta sínigénybevétel-különbség a *sebességtől függetlenül* is 7–8%-ára növekedhetik a hajlító igénybevétel szélső értékének.

Megállapíthatjuk tehát, hogy *mozgó* terhelés alatt a sín *összetett* igénybevételt szenved és mozgás közben a hosszirányú erők a *gyorsulás* mértékétől függően *el nem hanyagolható* nagyra növekedhetnek.

Mivel *mozgó* terhelés alatt a sín talpán mért feszültségek nem tiszta hajlításból származnak, az ilyen mérési adatok nem alkalmasak a számításhoz szükséges kísérleti tényezők (*D* kg/cm és *N* kgem) meghatározására. Tehát az alapértékek kiszámítására csak álló terhelés alatt mért adatok használhatók.

A számítás képleteinek összefoglalása.

Az egyszerűsítés céljából bevezetjük képleteinkbe azoknak az „alapértékek»-nek fogalmát, amelyek a képleteinkben szereplő *m*, *a* és β tényezők reciprokl értékei:

$$L_{(cm)} = \frac{1}{m} = \sqrt[4]{\frac{4EI}{D}}$$

$$A_{(cm)} = \frac{1}{\alpha} = \frac{L^2}{\sqrt{L^2 + \frac{N}{D}}}$$

$$B_{(cm)} = \frac{1}{\beta} = \frac{L^2}{\sqrt{L^2 - \frac{N}{D}}}$$

- E kg/cm² a sín anyagának rugalmassági tényezője (2 150 000 kg/cm²),
 I cm⁴ a sín keresztiszelvényének tehetetlenségi nyomatéka a súlyponti vízszintes tengelyére,
 l cm a keresztaljak középvonalainak távolsága.

D kg/cm és N kgcm a felépítmény két kísérleti állandója, amelyek értéke az ágyazás rugalmasságától, a keresztalj keménységétől (összenyomhatóságától) és méreteitől függ. N értéke függ még a talpsurlódástól és a sántalp és keresztalj közötti *kötés merevségétől* is.

D az az elméleti erő, amely szükséges ahhoz, hogy a keresztaljnak a sántalp alatti felületét önmagával párhuzamosan 1 cm mélyre lenyomjuk (a szimmetrikus elrendezésből önként következik, hogy egy keresztaljra egyidejűleg két párhuzamos D erő hat a két sántalp alatti felületre),

N az az elméleti nyomaték, amely ahhoz volna szükséges, hogy a keresztalj függőleges síkjában levő sinszelvényt az ívmértékben mért egységnyi szöggel a hosszszelvény síkjában, a keresztalj talpfelületének hossz tengelye körül elfordítsuk.

A terheletlen sín vízszintes, egyenes szilárdsági tengelyén valamely O kezdőponttól jobbra mért távolság: $+x$ (cm) és a lefelé mért mélység: $+y$ (cm).

A kezdőpontra állított, valamely izolált P súly hatására $+x$ távolságban levő sinszelvényenél kifejlődő rugalmas mennyiségek számítására a következő képletsorozat alkalmas.

A balról ható *nyomaték*:

$$M = \frac{P}{4} \cdot \left[A \cos \frac{x}{B} - B \sin \frac{x}{B} \right] \cdot e^{-\frac{x}{A}}$$

A *lesüllyedés*:

$$y = \frac{Pl}{2DL^2} \cdot \left[A \cos \frac{x}{B} + B \sin \frac{x}{B} \right] \cdot e^{-\frac{x}{A}}$$

A *sínnyomás* függőleges összetevője: $S_n = Dy$ (mivel a hosszirányú húzóerőt jelöltük S -el, a függőleges sínnyomást S_n -el jelöljük), tehát

$$S_n = \frac{Pl}{2L^2} \cdot \left[A \cos \frac{x}{B} + B \sin \frac{x}{B} \right] \cdot e^{-\frac{x}{A}}$$

A balról ható erők *eredőjének* függőleges összetevője:

$$Q = \frac{P}{2} \cdot \left[\cos \frac{x}{B} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{B}{A} - \frac{A}{B} \right) \cdot \sin \frac{x}{B} \right] \cdot e^{-\frac{x}{A}}$$

A behajlási görbe *érintője* (a vízszintessel bezárt) hajlásszögének iránytangense:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{Pl}{2DL^2} \cdot \left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A} \right) \sin \frac{x}{B} \cdot e^{-\frac{x}{A}}$$

* * *

A koordináta-rendszer kezdőpontjában, vagyis a P álló súly alatti sínkeresztmetszetben:

$$M_{(x=0)} = M_{max} = + \frac{PA}{4}$$

$$y_{(x=0)} = y_{max} = + \frac{Pl}{2D} \cdot \frac{A}{L^2} = + \frac{Pl}{2\sqrt{L^2 D^2 + ND}}$$

$$S_{n(x=0)} = S_{nmax} = + \frac{Pl}{2} \cdot \frac{A}{L^2} = + \frac{Pl}{2\sqrt{L^2 + \frac{N}{D}}}$$

ha a keréksúly éppen valamelyik keresztalj középvonalának függőlegesében áll. Ekkor a sínnyomásnak nincs vízszintes összetevője, tehát S_{nmax} egyenlő a teljes sínnyomással.

$$Q_{(x=0)} = \pm \frac{P}{2} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \varphi_{(x=0)} = 0$$

A keréksorozat hatása.

Az egymást követő keréksúlyokból összetett terhelés hatásának számítása képleteink segítségével egyszerű feladat, mert ezek a képletek a rugalmas mennyiségek értékét x függvényében fejezik ki.

Mivel az amerikai kísérletek igazolása szerint az alakváltozások arányosak a terhelésekkel és a szuperpozíció elve érvényes a felépítményre, érvényes *Maxwell* felcserélhetőségi tétele is. E szerint a vizsgált O kezdőponti keresztmetszettől x távolságban támadó P erő akkora behatást okoz a O helyen, mint amekkorát az O helyen támadó P erő okozna az x távolságban levő sínkeresztmetszetben. Továbbá több, különböző ponton támadó erő együttes hatása a vizsgált keresztmetszetben egyszerű algebrai összegezéssel számítható.

Mindebből az következik, hogy képleteinkbe $P = P_0 = 1$ kg egységnyi erőt helyettesítve, a rugalmas mennyiségek (M , Q , y , $\operatorname{tg} \varphi$, S_n) *behatási tényezőit* kapjuk x függvényében az $x = 0$ abszcisszájú kezdőpontban levő sínkeresztmetszetre vonatkoztatva. Tehát valamely, több P_i súlyból összetett keréksorozat (vonat, mozdony) terhelésének hatását a O ponti szelvényre úgy számíthatjuk, hogy — (ha P_i támadáspontja x_i távolságban van az O ponttól) — az x_i helyre vonatkozó behatási tényezőt P_i -vel szorozva az i hatásokat összegezzük.

A keréksorozat hatásának ez az egyszerű számítási módja egyik nagy előnye azoknak a módszereknek, amelyek a hosszgerendára levezetett elméleti képletekből származnak. (Az eredeti, *Zimmermann* által a keresztgerendás sín számítására levezetett képletekkel csak egy izolált súly hatása számítható.)

* * *

Bemutatóképpen a példa kedvéért kiszámítottuk a behatási ábrák jellemző pontjainak koordinátáit annál a kopott «C» felépítménynél, amelynek alapértékeit már meghatároztuk a hosszirányú erő hatásának vizsgálata alkalmából. E szerint az alapértékek:

$$L = \frac{1}{m} = 92,5 \text{ cm.}$$

$$A = \frac{1^*}{\alpha} = 71,1 \text{ cm.}$$

$$B = \frac{1}{\beta} = 166,5 \text{ cm.}$$

$$M = \frac{P}{4} \cdot \mu, \text{ itt } \mu \text{ a nyomaték-behatási tényező:}$$

$$\mu = \left(A \cos \frac{x}{B} - B \sin \frac{x}{B} \right) \cdot e^{-\frac{x}{A}}$$

$$\mu(x=0) = A = 71,1 \text{ cm}$$

Keressük azt az x értéket, amelynél $\mu = 0$.

Ennek a feltételi egyenlete:

$$A \cos \frac{x}{B} = B \sin \frac{x}{B}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{B} = \frac{A}{B} = \frac{71,1}{166,5} = 0,427$$

$$\frac{x}{B} = \arctg 0,427 = 0,404 + n\pi$$

n egész szám, tehát $x = [67,2 + 522,8 n] \text{ cm}$,
azaz $x_1 = 67,2 \text{ cm}$, $x_3 = 590,0 \text{ cm}$, $x_5 = 1112,8 \text{ cm}$ stb. Keressük még azt az x értéket, ahol μ tényezőnek szélső értéke van. Ennek az esetben a feltételi egyenlete:

$$\frac{d\mu}{dx} = \left[\left(\frac{B}{A} - \frac{A}{B} \right) \cdot \sin \frac{x}{B} - 2 \cos \frac{x}{B} \right] \cdot e^{-\frac{x}{A}} = 0$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{B} = \frac{2AB}{B^2 - A^2} = \frac{23,676}{22,667} = 1,0445$$

$$\frac{x}{B} = \arctg 1,0445 = 0,806 + n\pi$$

$$x = [134,7 + 522,8 n] \text{ cm}$$

$$x_2 = 134,7 \text{ cm}, x_4 = 657,5 \text{ cm}, x_6 = 1180,3 \text{ cm} \text{ stb.}$$

μ szélső értéke az $x = x_2$ helyen:

$$\mu(x=134,7) = \mu_2 = -10,76 \text{ cm}$$

A 6. ábra I. táblázatába összefoglaltuk a jellemző pontok koordinátáit.

A 4-ik ponton túl μ értéke már olyan rohamosan csökken, hogy elhanyagolható.

* * *

A besüllyedések behatási tényezője:

$$\eta = \frac{1}{L^2} \cdot \left[A \cos \frac{x}{B} + B \sin \frac{x}{B} \right] \cdot e^{-\frac{x}{A}}$$

e szerint:

$$y = \frac{Pl}{2D} \cdot \eta$$

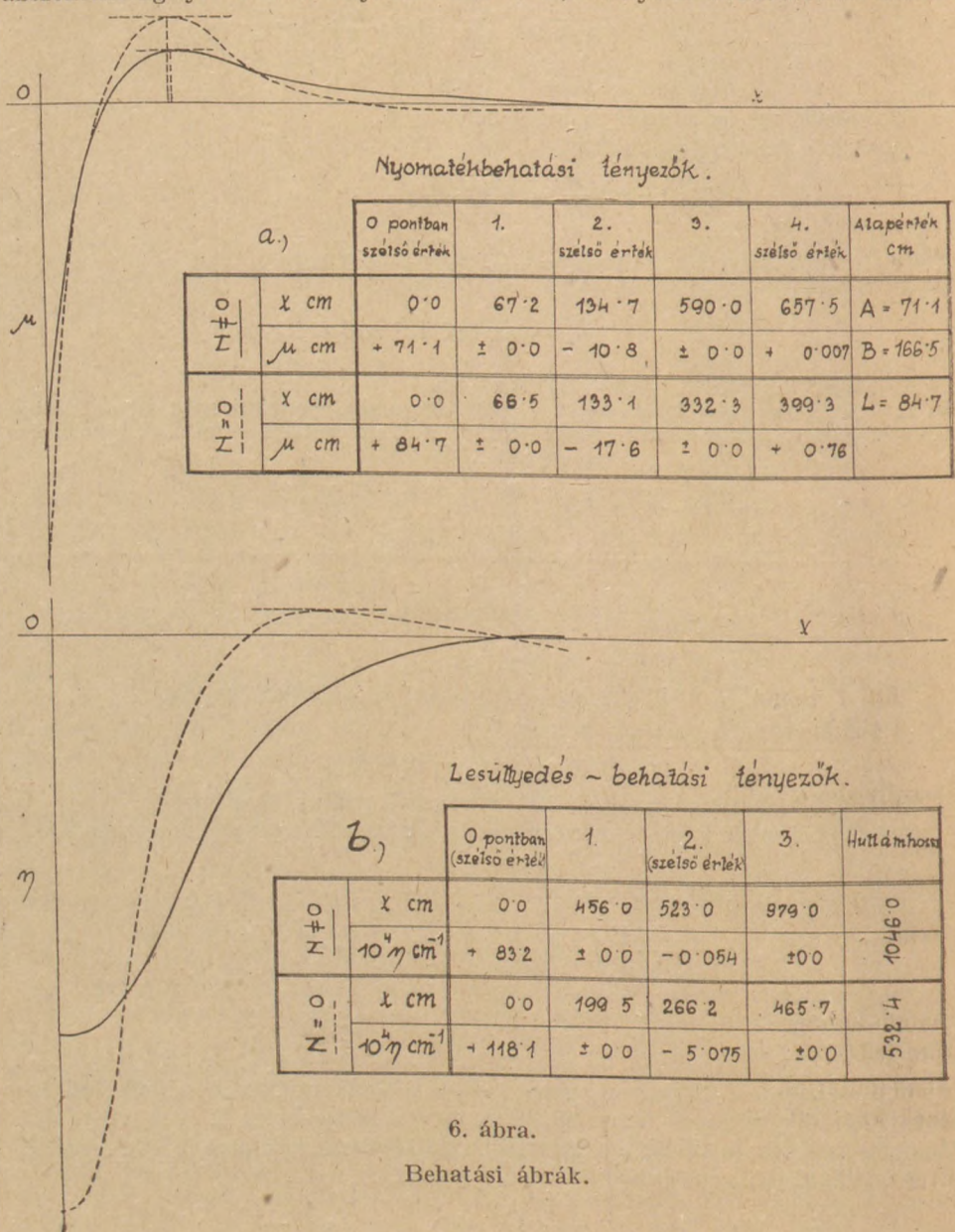
A nyomaték-behatási tényezők számításához hasonló módon kiszámítottuk az η -ábra jellemző pontjainak koordinátáit és az eredményeket a 6. ábra II. táblázatában mutatjuk be (a táblázat az η ordináták 10 000-szeresét tünteti fel). A szélső értékek kiszámításához szükséges feltételi egyenlet:

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{2D}{Pl} \cdot \operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{L^2} \left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A} \right) \cdot \sin \frac{x}{B} \cdot e^{-\frac{x}{A}} = 0$$

$$\sin \frac{x}{B} = 0$$

$$x_0 = 0, \quad x_2 = \pi B = 523 \text{ cm}, \quad x_4 = 2\pi B = 1046 \text{ cm, stb.}$$

Tehát két szomszédos, azonos értelmű szélső érték abszcisszáinak különbsége mindig állandó, vagyis egy izolált súly alatt behajlott sín elasztikus görbéje az abszcisszatengelyre fonódó olyan hullámvonal, amelynek hullámhossza állandó



6. ábra.

Behatási ábrák.

és egyenlő: $h = 2\pi B$, viszont az amplitúdója a súly támadópontjától távolodva nagyon rohamosan csökken.

A nyomatekok és lesüllyedések behatási ábráit a 6. ábrán rajzoltuk fel (teljes vonallal kihúzott görbék).

Azoknál a módszereknél, amelyek a hosszgerendára levezetett képletekből származnak, a behatási tényezők számításának könnyítése céljából szokásos a behatási ábrákat egyszerűsíteni. Ugyanis az ábráknak azok a vonalrészei, amelyek a járatos tengelytávolságoknak megfelelő intervallumba esnek, a görbéknek eléggé ellaposodott szakaszai úgy, hogy jól simuló egyenes darabokkal helyettesíthetők. Az egyenes két jellemző pontjának koordinátáit a behatási tényező eredeti képlete szerint kiszámítva, meghatározható az a *lineáris függvény*, amellyel — az ebbe az intervallumba eső x_i tengelytávolságok számára — az eredetileg $\sin x$, $\cos x$ és e^x függvényeiből összetett kifejezés jó megközelítéssel helyettesíthető. Ez az eljárás a mi képleteinknél is kidolgozható és hasznosítható volna, ámbar túlságosan nagy jelentőségük ezeknek az egyszerűsítéseknek azért nincs, mert maguk az eredeti függvények is alkalmas táblázatok segítségével elég gyorsan kiszámíthatók *pontosan* és a nélkül a veszély nélkül, hogy valamelyik x_i érték a korlátok közé szorított intervallumon kívül esnék. Másrészt a sín vizsgálata és méretszámítása nem olyan gyakori feladat, hogy néhány percnyi megtakarítás a behatási tényezők számításának idejéből számottevő volna.

Összehasonlítás más módszerekkel.

Ha az «ellenálló nyomaték tényezőjé»-nek (N) elemzése útján levezetett képletbe $\vartheta = 0$ értéket helyettesítjük, — ami azt jelenti, hogy a sinton és keresztalj közötti lekötés merevségét zérus értékűnek vesszük —, akkor $N = 0$, és így mind a három alapérték egyenlő lesz egymással: $A = B = L$ tehát

$$M = \frac{PL}{4} \mu \quad \text{és} \quad y = \frac{Pl}{2DL} \cdot \eta$$

$$L = \sqrt[4]{\frac{4EI\pi}{D}} \quad \text{és} \quad \xi = \frac{x}{L}$$

$$\mu = e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi)$$

$$\eta = e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi)$$

Saller—Timosenko módszere a behatási tényezőknek ezzel az egyszerűsített alakjával számol. Abból a célból, hogy az egyszerűsítés folytán tett elhanyagolás hatását szemléltethessük, és hogy az összehasonlítás közös alapon történjék, most is a kopott «C» felépítményre kidolgozott példánk adatait használjuk fel. Tehát az alapértéket ugyanazokból az adatokból kell kiszámítani, amely szerint $P_0 = 6750$ kg izolált súly alatt

$$M_0 = 120000 \text{ cmkg} \quad \text{és} \quad y_0 = 0,294 \text{ cm}$$

$$M_{0(x=0)} = \frac{P_0 L}{4} = 120000 \text{ cmkg}$$

$$L = \frac{4 \cdot 120000}{6750} = 71,1 \text{ cm}$$

De ugyanez az alapérték a besüllyedés képletéből is számítható a következőképpen:

$$y_{0(x=0)} = \frac{P_0 l}{2DL} = \frac{6750 \cdot 73,5}{2 \cdot D \cdot L} = 0,294 \text{ cm}$$

$$DL = 842,500 \text{ kg}$$

$$D L^4 = 4 E I l = 4 \cdot 2150000 \cdot 810 \cdot 73,5 = 5,11 \cdot 10^{11}$$

$$L = \sqrt[3]{\frac{5,11 \cdot 10^{11}}{8,425 \cdot 10^6}} = 84,7 \text{ cm}$$

Tehát az alapértékre két különböző eredményt kaptunk, ez nyilván abból származik, hogy Saller módszere nem elég rugalmas ahhoz, hogy egyszerre két összetartozó kísérleti értéknek is megfeleljen. Ha a lesüllyedésből számított alapértékkel számítjuk a nyomatékokat is:

$$\bar{M}_0 = \frac{6750 \cdot 84,7}{4} = 143\,000 \text{ cm/kg}$$

azaz M_0 -nál 19%-kal nagyobb nyomatéktérteket kapunk. Ez természetes következménye annak, hogy az ellenálló nyomatékok elhanyagoltuk, vagyis olyan sinnel számolunk, amely lekötés helyett surlódás nélküli görgőkön fekszik.

Nemesdy—Jáky nyomatékosztó módszerénél már egy helyett két alapértékkel számolunk, bár a behatási tényezők képletei itt is ugyanazok, mint amelyeket az ellenálló nyomaték elhanyagolásával kaptunk. De Nemesdy, megérezve a keresztalj fontos, nyomatékosökkentő szerepét a sín erőjátékában, olyan képlet-sorozatot szerkesztett, amely azt az elvet fejezi ki, hogy a szerkezetre ható nyomatékokat a sín és keresztalj között el kell osztani, mert az egész nyomatéknak csak az egyik része hárul a sínre. Így az az alapérték, amellyel a besüllyedés és a behatási tényezők számíthatók:

$$L_0 = \sqrt[4]{\frac{4E I l + 4E_1 I_1 s_1}{D}}$$

Itt E_1 a keresztalj rugalmassági modulusza,

I_1 a keresztalj keresztmetszetének inercianyomatéka,

s_1 a keresztalj redukált félhossza.

Viszont a nyomaték már ennél lényegesen kisebb, olyan alapértékkel számítható, amely λL_0 -al egyenlő, és

$$\lambda = \frac{EI}{EI + E_1 I_1}$$

a nyomatékosztás elvének megfelelően.

A példának használt «C» felépítmény adatai szerint:

$$\lambda = \frac{2150000 \cdot 810}{2150000 \cdot 810 + 120000 \cdot 7000} = 0,673$$

$$y_0(x=0) = \frac{P_0 l}{2 D L_0} = \frac{6750 \cdot 73,5}{2 D L_0} = 0,294$$

$$D L_0 = 842500$$

$$D L_0^4 = 4 (2150000 \cdot 810 \cdot 73,5 + 120000 \cdot 7000 \cdot 0,86 \cdot 125)$$

$$L_0 = \sqrt[3]{1,036 \cdot 10^6} = 101,2 \text{ cm.}$$

E szerint a nyomatékok számításának alapértéke:

$$\lambda L_0 = 0,673 \cdot 101,2 = 68,1 \text{ cm,}$$

tehát

$$M_0 = \frac{6750 \cdot 68,1}{4} = 115000 \text{ kgcm}$$

vagyis 4%-kal kevesebb M_0 -nál.

Ebből a példából is kitűnik annak a hátránya, hogy a két alapérték *nem független* egymástól, mert a sín és keresztalj méreteivel előre meghatározott λ tényező kötött értéke miatt egyetlen kísérleti adattal mindkét alapérték adott, és így a számítás nem igazódhatik egyidejűleg két kísérleti értékhez is.

Hiánya a nyomatékosztó módszernek, hogy képleteiben több olyan tényező is van, amelyek változásának hatása az eredmény változására *nem jelel meg a valószínűségi erőjátéknak*. Pl. nyilvánvaló, hogy az ellenálló nyomaték sokkal nagyobb mértékben nő a keresztalj talpának (az elfordulási kényszert jelentő nyomaték síkjára merőleges tengelyére vonatkozó) tehetetlenségi nyomatéka (I_p) növekedésével, mint a keresztalj keresztmetszetének (I_1) inercianyomatékával. Márpedig az egyik növelhető a nélkül is, hogy a másik változnék. Így például, ha minden talpfát oldalára fordítva fektetnénk a vágányba, I_1 lényegesen megnőne, azért ugyanakkor az ellenálló nyomaték mégis erősen csökkenne, mert így a széles talpfelület helyett a talpfa csak a keskenyebb oldalfelületére támaszkodhatnék.

De hátránya és hiányai ellenére is a nyomatékosztó módszer bevezetése nagy haladást jelentett a sín számításának történetében, mert *Nemesdy* igen sok kísérleti eredmény felhasználásával sikeresen igazolta, hogy a keresztalj olyan fékező hatással vesz részt a sín erőjátékában, amely el nem hanyagolható mértékben csökkenti az igénybevételeket.

Driessen módszerének elve szerint a rugalmas lesüllyedések közötti különbségek elhanyagolhatók. Ezáltal a sínre ható nyomaték úgy számítható, mint a mozdulatlan támaszokon fekvő folytatódó tartó, amelynek támaszközei egyenlők egymással. A további egyszerűsítés kedvéért a tengelytávolságok a talpfaköz (feszítáv) egészszámu többszöröseként szerepelnek a képletben. A nevét is erről az-ujtásáról kapta a holland képlet: «tengelytávképlet»-nek hívják az irodalomban. A képlet általános alakja arra az esetre, amikor a terhelés végtelen sok kerékből összetett olyan sorozat, amelyben m és n (két különböző) tengelytávolságban szabályosan váltakozva *egyenlő* P keréksúlyok követik egymást:

$$M_0 = \frac{12mn - 7(m+n) + 4}{16[3mn - (m+n)]} \cdot Pl$$

itt l cm a talpfaköz, m és n pozitív egész számok, M_0 a talpfaköz közepén elhelyezett egyik P súly alatti sinkeresztmetszetre balról ható nyomaték.

Vizsgáljuk meg a holland képletet abban a kivételesen kedvező esetben, amikor végtelen sok, egyenlő nagy P súly egymástól egyenlő távolságban van elosztva a sín hosszán, és amikor a tengelytáv éppen egyenlő a talpfaköz kétszeresével. Számítsuk ki azt az M_0 nyomatékot, amely akkor támad az egyik P súly alatti sinszelvényre, amikor P a talpfaköz közepén áll (vagyis amikor minden második talpfaköz közepén is áll egy-egy P súly). Ezt a terhelési rendszert azért választjuk példánk számára, mert *ebben a terhelési esetben* mindaz a pontatlanság, amely az elhanyagolásokból származnék, a számítás eredményére hatástalanná válik, mert ebben a kivételes esetben nincs elhanyagolni való pontatlanság. Ugyanis a súlyoknak ebben az elosztásában valóban egyenlő mindegyik támaszpont lesüllyedése, mert mindegyik talpra egyenlő $P/2$ súly jut, tehát a támaszok a terhelés után is egy síkban vannak és mindegyik tengelytáv is egészszámu többszöröse a talpfaköznek: $m = n = 2$. Abban az esetben, ha $m = n$, M_0 képlete a következő alakra egyszerűsödik:

$$M_0 = \frac{12n^2 - 14n + 4}{48n^2 - 32n} \cdot Pl = \frac{2n - 1}{8n} \cdot Pl$$

$n = 2$ esetén:

$$\frac{2n-1}{8n} = \frac{3}{16} = 0,1875 \quad \text{tehát } M_0 = 0,1875 \cdot Pl$$

(Ez a képlet már Winkler módszeréből is ismeretes, mint a sínre ható legnagyobb mértékadó nyomaték képlete.)

Ha a példának használt, kopott «C» felépítmény minden második talpfaközének közepén 8 t keréksúly áll (7. ábra), akkor az egyenlő tengelytáv:

$$a = 2l = 2 \cdot 73,5 = 147,0 \text{ cm}$$

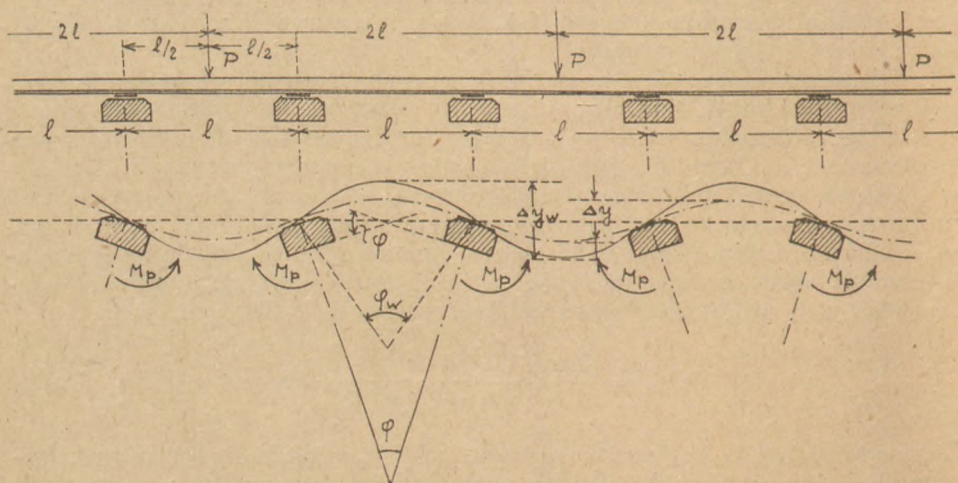
és a nyomaték:

$$M_0 = 0,1875 \cdot 73,5 \cdot 8000 = 110250 \text{ kgcm}$$

Az összehasonlítás céljából kiszámítjuk ugyanerre a terhelési rendszerre a legnagyobb nyomatékot a rugalmas ellenállások módszerének képletével is: kiszámítjuk a nyomaték-behatási tényezőket a keréksúlyok helyén:

$$x_0 = 0,0 \text{ cm}, x_1 = 147 \text{ cm}, x_2 = 294 \text{ cm}, x_3 = 441 \text{ cm}$$

Mivel $4 \times 147 = 588 \approx 590 \text{ cm}$, s itt a behatási ábrának a második zéruspontja van ($\mu_4 \approx 0$), ezért pedig az ábra már annyira belapul, hogy az ordináták



7. ábra.

A holland módszer vizsgálata.

igen kicsire zsugorodnak, — a kezdőponttól számított negyedik keréktől kezdve a távolabb álló keréksúlyok behatása a kezdőponti sinkeresztmetszetre elhanyagolható.

$$\frac{x_0}{B} = 0, \quad \mu = +71,1 \text{ cm}$$

$$\frac{x_1}{B} = \frac{147,0}{166,5} = 0,881, \quad \mu_1 = -10,7 \text{ cm}$$

$$\frac{x_2}{B} = \frac{294,0}{166,5} = 1,762, \quad \mu_2 = -2,8 \text{ cm}$$

$$\frac{x_3}{B} = \frac{441,0}{166,5} = 2,649, \quad \mu_3 = -0,3 \text{ cm}$$

$$\Sigma \mu = +71,1 - 2(10,7 + 2,8 + 0,3) = +43,5 \text{ cm}$$

$$M_0 = \frac{P}{4} \Sigma \mu = \frac{8000}{4} 43,5 = 87000 \text{ kgcm.}$$

Tehát a holland képlettel számított nyomaték *27 %-kal nagyobb*, mint a rugalmas ellenállások módszerével számított érték.

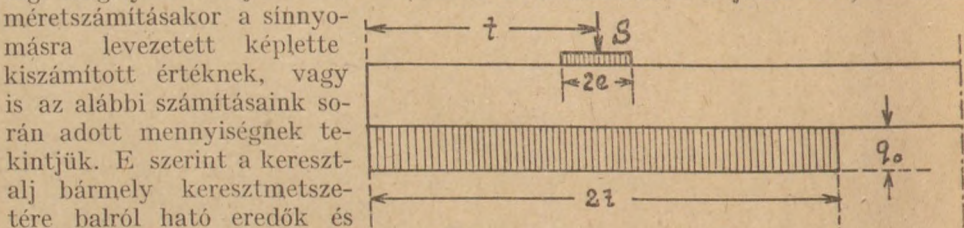
Ez a példa világítja meg a legélesebben az ellenálló nyomaték hatását. Ugyanis a Winkler és Driessen képletével számított nyomaték ez alatt a terhelő erőrendszer alatt *elméletileg pontos érték* volna abban — de csakis abban — az esetben, ha a sín mozgó saruk élén feküdnek, azaz olyan módon volna alátámasztva, hogy a támaszpont feletti sinszelvény *ellenállás nélküli*, szabad elfordulását és az elasztikus görbe elméleti alakjának kifejlődését semmi sem gátolná. Tehát az a különbség, amennyivel a támaszköz közepére ható nyomaték *valódi értéke* a Driessen—Winkler szerint számított értéknél kisebb; egyedül csak azoknak a passzív nyomatékoknak a hatására állhat elő, amelyek a támaszok feletti sinszelvények elfordulási kényszerével mindig *ellentétes értelműek*. Mivel ezek az ellenálló nyomatékok csökkentik a támaszok feletti sinszelvények elfordulását, az elasztikus görbe nem fejlődhetik ki szabadon, tehát a hullámalak amplitudója és két szomszédos támasz feletti sinszelvény elfordulásának szögkülönbsége kisebb lesz, vagyis — végeredményképpen — a támaszköz közepén ébredő legnagyobb nyomatékok értéke csökken. Ez a nyomatékcsökkenítő hatás semilyen más mechanikai okra nem vezethető vissza, mint arra a rugalmas, ellenálló nyomatékra, amely a keresztalj talpfelületének elfordulásával szemben a kavicságyban támad, és amely a keresztalj közvetítésével a sintalp lekötése folytán hárul a támasz feletti sinszelvényekre.

A KERESZTALJ.

Különféle számítási módszerek.

A keresztalj olyan rugalmas prizmatikus test, amelynek felső felületére a két párhuzamos sínnyomás, alsó felületére a sínnyomásokkal egyensúlyt tartó, megoszló reakciónyomások támadnak. Az egyszerűség kedvéért a sínnyomásnak csak azzal a függőleges összetevőjével számolunk, amely a keresztalj szilárdsági tengelyén átmenő függőleges síkba esik, és feltesszük, hogy a két sínnyomás egyenlő egymással. Ebben az esetben a terhelés a vágány tengelyére nézve szimmetrikus, mert ettől a tengelytől a két függőleges összetevő egyenlő távolságban van. Feltesszük továbbá, hogy a keresztalj két alávert része alatt az aláverés tömörsége és hossza is egyenlő és szintén szimmetrikus elosztású a vágánytengelyre nézve. Így a keresztalj egyik fele alatt megoszló reakciónyomások ábrája tükörképe a másik fele alatt ébresztett talpnyomások megoszlási ábrájának. A sínnyomás (S kg) szintén megoszló erő, mert a keresztaljra a sín talpán, vagy az alátétlemez alsó felületén elosztva adódik át. Elméleti levezetésünk során azért S erőt koncentrált erőként számítjuk, de a méretszámításnál már figyelembe fogjuk venni ennek a megoszlásnak azt a hatását, amelynek folytán az eredő erők és nyomatékok csúcserőértékei lényegesen letompulnak.

A sínnyomásnak azt a függőleges összetevőjét, amely a keresztalj szilárdsági tengelyének síkjába esik — (azaz a továbbiakban S -el jelölt erőt) — a sín



8. ábra.

Egyenletesen megoszló talpnyomás.

feladat volna, ha a (q_x kg/cm) reakciónyomásoknak megoszlási módját a keresztalj hossz tengelye mentén ismernők.

A talpnyomásoknak ez a megoszlási törvénye általában matematikai alakban fejezhető ki: $q_x = f(x)$, ha a koordináta-rendszer kezdőpontjaként a terheletlen keresztalj egyenes, vízszintes szilárdsági tengelyével párhuzamos talpvonalának valamelyik (kezdő-, vagy vég-) pontját választjuk és pozitív x iránynak az ettől a kezdőponttól balról-jobbra haladó irányt vesszük. A különféle számítási módszerek abban különböznek egymástól, hogy a talpnyomások megoszlási törvényét, amelyből az egész számítás kiindul, különböző függvényekkel fejezték ki.

A legegyszerűbb számítási mód az, amelyik a talpnyomások megoszlásának

legegyszerűbb törvényéből indul ki, vagyis abból a feltevésből, hogy a megoszlás egyenletes. E szerint $q_x = f(x) = q_0 = \frac{S}{b}$ = állandó (b cm a keresztalj egyik fele alatt alávert rész hossza). További feltevés, hogy az alávert rész a sín mindkét oldalán egyenlő a (t cm) túlnyúlással (8. ábra), azaz $b = 2t$.

Ugyanígy még azt is feltesszük, hogy a sínnyomás is egyenletesen oszlik el az alátétlemez felületén $2e$ hosszban. E szerint a legnagyobb pozitív értelmű nyomaték:

$$M_{max} = + (t - e) \frac{S}{4}$$

negatív nyomaték pedig nincs (= 0).

Például 270 cm hosszú talpfánál $t = 60$ cm, $2e = 18$ cm, $M_{max} = 12,75 S$ kgcm.

* * *

Amennyire túlságosan is egyszerű ez a számítási eljárás, éppen annyira túlságosan bonyolult az úgynevezett «pontos módszer», amely csak táblázatok sorozatából vett, interpolált értékeknek helyettesítésével használható. Ezt a módszert Zimmermann dolgozta ki a Winkler-féle $q_x = C y$ elv alapján (itt y cm a keresztalj talpözélessége), vagyis abból a törvényből indulva ki, hogy a talpnyomások minden x helyen arányosak a keresztalj talpvonalának az x helyhez tartozó y besüllyedésével. A nyomatékok és eredők számításának képletei azért bonyolultak, mert csak a véges hosszúságú, rugalmas alátámasztású, folytatólagos hosszgerendára vonatkozó differenciálegyenlet megoldása útján lehetett azokhoz a képletekhez jutni, amelyek ezt a különben nagyon egyszerűnek és kézenfekvőnek látszó arányossági elvet matematikai alakban ki tudják fejezni.

Az ugyanennek az elvnek alapján számított keresztalj képleteinek tömörebb és világosabb levezetése megtalálható A. Freund: Theorie der elastisch gestützten Körper (Beton und Eisen 1917) című tanulmányában, valamint Keiichi Hayashi: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage (Berlin, 1921) című könyvében.

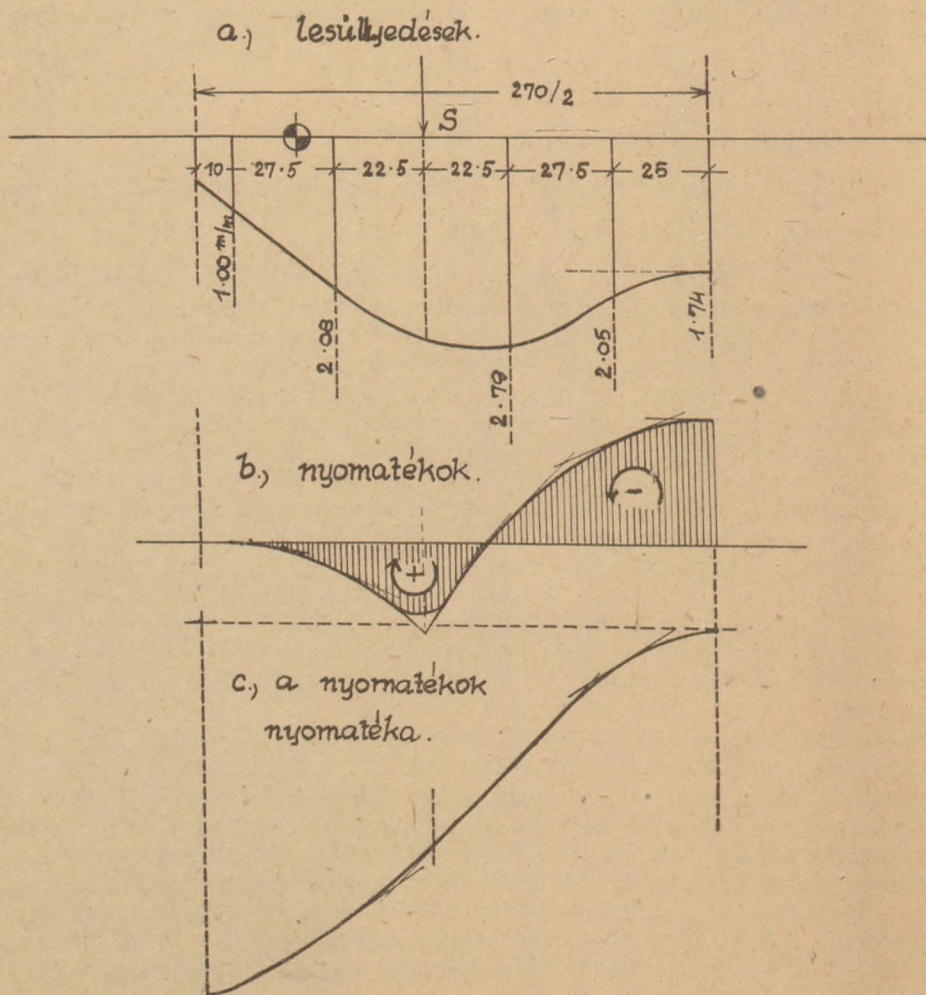
A számításnál a grafikus eljárás szemléltetőbb és világosabb. Erre Aug. Föppl (Vorlesungen über technische Mechanik III. k. 47. és 48. §) hívta fel a figyelmet. Ugyanis, ha a talpnyomások arányosak a besüllyedésekkel, akkor a probléma grafikus megoldása annyiból áll, hogy olyan q_x ábrát kell találni, amelyikre mint terhelési ábrára megszerkesztve az elasztikus görbét (vagyis a nyomatékok nyomatéki ábráját), ez a behajlási görbe csak léptékben különbözzék az előre — próbaképpen — felvett terhelési ábrától. A szerkesztés többszöri megismétlésével a feladat megoldása fokozatosan megközelíthető. Az így szerkesztett behajlási görbe a keresett talpnyomásmegoszlást ábrázolja megfelelően választott léptékben.

* * *

A mérőműszerek fejlődése folytán a század eleje óta fokozódott a felépítményen végzett kísérletek száma és pontossága. Így több olyan közlemény jelent meg a szakirodalomban, amely mérési adatokat ismertet talpfákon végzett próba-terhelések útján felvett behajlási görbékről is. Ez alkalmat adott arra, hogy a Zimmermann—Föppl módszerének helyességét a «kísérletek próbakövén» megvizsgáljuk. Ebből a célból olyan besüllyedési görbét használtunk fel (9. ábra) Driessen közleményéből (Ch. I. Driessen: Die einheitliche Berechnung des Oberbaues in Verein Mitteleuropäischer Eisenbahnverwaltungen, Organ. 1937. 1. IV. Hft 7.), amelyet «oldott» talpfán végzett próbeterhelés alkalmával mértek,

mert így a sínnyomások egyenlőtlenségéből származó pontatlanság is kiküszöbölhető volt (a sántalpak helyén a hidraulikus sajtókkal alkalmazott nyomást manométerekkel mérték és ellenőrizték a próbaterhelések alatt). Ezt a kísérleti úton mért behajlási görbét terhelési ábraként felrajzoltuk, és megszerkesztettük a nyomatékok nyomatéki ábráját.

Az eredményül kapott görbét összehasonlítva a terhelési görbével, szembe-



9. ábra.

A nyomatékok nyomatéki ábrája.

szökő ellentmondás mutatkozik abban, hogy az új görbe a középtől (a vágány-tengelybe eső ponttól) kifelé mindvégig alászáll, tehát sem a szélső érték, sem az inflexiós pont helyére, de még a végponti érintőszög értelmére nézve sem egyezik a terhelési ábrával. Ha ezt a terhelési ábrát csak első megközelítésül, próbaképpen, mintegy találmányra vettük volna fel, akkor a Föppl-féle eljárás értelmében most addig kellene változtatnunk az alakját, míg a két görbe alakja egymáshoz hasonlóvá válik. De kísérleti úton nyert, tehát valóságos és nem csak elképzelt terhe-

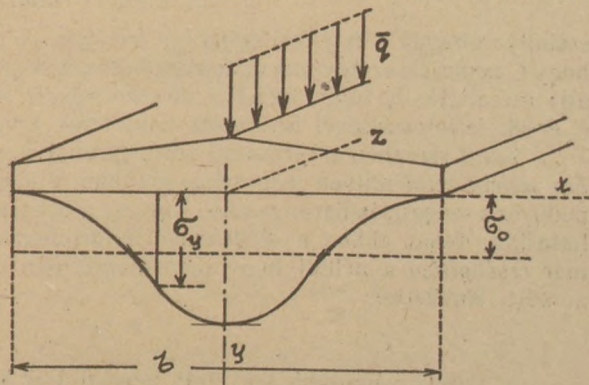
lési ábráról lévén szó, vizsgálatunknak eredménye csak az a megállapítás lehet, hogy az *arányossági elv* alapján levezetett számítási módszer *nem állja ki a próbát* a «kísérletek próbakövén». Mert az elméleti alapon szerkesztett és a kísérlettel mért eredmények között olyan nagy eltérés van, amely csak arra az egy okra vezethető vissza, hogy Zimmermann módszerének az *alapelve* nem felel meg a valóságnak, vagyis a talpnyomások $q_x = Cvy$ függvénye — ahol $y = f(x)$ az elasztikus görbe ordinátáit jelenti — nem alkalmas a talpnyomások valóságos megoszlásának matematikai meghatározására.

Mindebből az következik, hogy olyan új q_x függvényt kell keresnünk, amely y lesüllyedésektől függetlenül, a kísérleti eredményekkel egyező módon képes kifejezni a talpnyomások megoszlási törvényét. Ebből viszont az is következik, hogy a régitől különböző, új módszerre is van szükség, mert q_x megváltoztatása folytán a keresztaljra vonatkozó rugalmas mennyiségek (eredő erők, nyomatékok és a besüllyedések) képletei is megváltoznak.

A talpnyomások harangalakú megoszlása.

Azok a talajmechanikai kísérletek, amelyek a talpfeszültségek függőleges összetevőjének eloszlási törvényét vizsgálták centrikusan terhelt nyomólap alatt, kivétel nélkül arra az eredményre vezettek, hogy ezeknek a feszültségeknek megoszlását ábrázoló görbe kohézió nélküli, szemcsés anyagban *harang* alakjában fejlődik ki. Azaz a többé-kevésbé merev nyomólap közepén a feszültség az átlagos értéknél nagyobb, a nyomólap széleinél pedig zérus, annak ellenére, hogy a középpont és a szélek besüllyedése közel egyenlő egymással. Ennek a jelenségnek — többek között — az a magyarázata, hogy a nyomólap széleinek

közeliében levő szemcsék a nyomás alól oldalirányba könnyebben térhetnek ki, mint a középponthoz közelebb levők. A kitérésí kényszer kifelé, a szélek felé irányuló olyan vízszintes elmozdulást kezdeményez, amelynek ellene hat a nyomólap felületén ébredő surlódás. Ez a surlódás tehát az a közép felé befelé mutató, azaz koncentrikus vízszintes erőrendszert, amely a talpfeszültségek függőleges összetevőjének a talpközép felé torlódását, úgynevezett «koncentráció»-ját okozza. Ha a nyomólap merev körtárcsa, akkor a felül ható centrikus nyomás hatására kifejlődő függőleges talpfeszültségek megoszlását harangalakú forgásfelület ábrázolja. Olyan derékszögű négyszög alakú nyomólap alatt pedig, amelynek egyik oldala aránylag nagyon hosszú (gyakorlatilag végtelen) a rövidebb oldal hosszához viszonyítva, a középvonalban ható, egyenletesen megoszló «vonalas terhelés» alatti (10. ábra) talpfeszültségmegoszlás ábrázolására a keresztmetszet síkjában fekvő haranggörbe alkalmas.



10. ábra.

A talpfeszültségmegoszlás harangalakú ábrája.

Ez a többszörösen igazolt kísérleti tény is bizonyíték a mellett az állításunk mellett, hogy a keresztalj számítására az arányossági elvből levezetett módszer

tévedésen alapszik. Mert ha helyes volna, akkor merev nyomólap alatt, mivel itt minden pont lesüllyedése azonos; a talpfeszültségek értéke is ugyanakkora volna a nyomólap szélein, mint a középpont (illetve középvonal) alatt.

E szerint tehát a keresztalaj számítására alkalmatlan minden olyan módszer, amely $C \text{ kg/cm}^3$ ágyazási együtthatóval, mint valamely — ugyanolyan ágyazásra nézve — *állandó* értékű tényezővel számol. Viszont a sín számítására levezetett képleteinkben $D \text{ kg/cm} = Cbv$ állandó értékű tényezőként szerepel. Tehát ellentmondás látszik abban, hogy C tényező a sín számításánál állandó értékkel használható, de a *keresztalajnál* már nem. Annak, hogy ez az *ellentmondás* csak *látszólagos*, egyszerű magyarázata a következő:

Sok kísérlettel igazolt jelenség az is, hogy ha több, *azonos méretű* nyomólapot ugyanabba az ágyazásba különböző erőkkel benyomunk (ez a keresztaljas felépítmény esete), akkor — egy bizonyos erőhatáron belül — a nyomólapok besüllyedései (elhanyagolhatóan kis különbségekkel) valóban arányosak a nyomóerőkkel. Ezek a nyomóerők az egyensúly folytán egyenlők a nyomólapok alatt ébresztett talpfeszültségek felületi integráljával. Tehát ameddig a nyomófelületek alakra és méretre azonosak, a *határozott integrál értéke* független attól, hogy a határokon, azaz a felület *kerületén belül* a talpfeszültségek milyen függvény szerint változnak. Lényeg csak az, hogy a felületi integrálok értékeinek egymás közötti viszony-száma a nyomóerők viszonyszámával egyenlő. E szerint tehát a sín alátámasztási pontjainak lesüllyedési különbségeire nézve (márpedig a sín számításánál csak ez a mértékadó) közömbös, hogy a keresztaljak talpa alatti talpfeszültségek egyenletes megoszlásúak-e, vagy hogy a megoszlás valamely harangalaknak megfelelően fejlődik-e ki. Tehát ebben az *«integrális»* értelemben

$$S = Dy = Cbv$$

szabálya állandó C értékkel számolva *érvényes*, de itt is csak azzal a megszorítással, hogy C nemcsak az ágyazás állapotától és minőségétől, hanem a nyomólap (keresztalaj) méreteitől is függ. Ezzel a megszorítással tehát a sín számítására állandó C érték feltételezésével levezetett képleteink érvényesek.

Ezzel szemben a keresztalaj számításánál éppen az a döntő, hogy *egy nyomólap szélein belül* milyen megoszlási alakban fejlődnek ki a talpfeszültségek. Mivel pedig ez a megoszlás harangalakú, s így az állandónak feltételezett C érték használhatatlan, tehát ebben a *«differenciális»* értelemben $p = Cy$ arányossági szabály már *érvénytelen* a nélkül, hogy ellentmondásban állana a sín számításánál alkalmazott elmélettel.

* * *

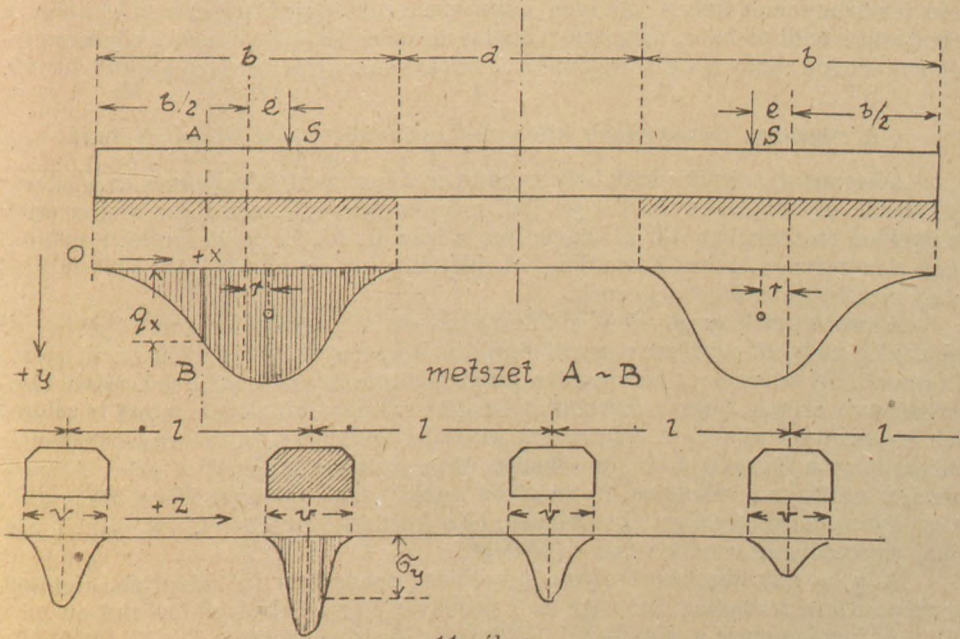
A vasúti vágányba fektetett keresztaljak (gyakorlatilag végtelen) sorozata olyan két, egymással párhuzamosan futó, végtelen hosszú nyomólapként fogható fel, amelynek folytonossága a vágánytengely irányában szabályos közönséges szakad. Ebben a felfogásban a nyomólapok által terhelt két területsáv szélessége az alávert részek b (cm) hosszával egyenlő, a két vonalas terhelésnek pedig a két sín nyomása felel meg. A két párhuzamos, sávalakú nyomófelület között van a keresztaljak aláveretlen, úgynevezett «üres» szakasza, amely összekötő rúdként szerepel a két alávert nyomólap közös erőjátékában (11. ábra).

Mivel a sínnyomás függőleges támadóvonala általában nem esik egybe az alávert hossz középvonalával, hanem attól valamely $\pm e$ (cm) távolsággal (excentricitással) eltér, a talpnyomás megoszlását ábrázoló harangalakú görbe is bizonyos mértékben eltorzul a szimmetrikus alakjától, és az «összekötő rúd»-ra is hárul nyomoték.

Ezek szerint a keresztaljat úgy fogjuk fel, mintha két párhuzamos, végtelen

hosszú nyomólapnak volna egy akkora része, amely a nyomólapok közös tengely-irányára merőleges, két keresztirányú függőleges sík közé esik, amelyek v (cm) távolságra vannak egymástól. Vizsgáljuk meg, milyen módosító hatással van ennek a kivágott résznek, azaz a keresztaltnak az erőjátékára az, hogy ez a két nyomólap nem folytonos, hanem szakaszos, amennyiben két szomszédos keresztalj közötti rész szabályos közönként hiányzik a nyomófelületből.

A nyomófelületen ébredő talpfeszültségek függvénye $\sigma_y = F(x, z)$ kétváltozós függvény (z a nyomósáv hossziránya, x a keresztirány, azaz a keresztalj hossz-



11. ábra.

Harangalakú nyomásmegoszlás a keresztaljak alatt.

tengelyének iránya, y a függőleges irány). Ha $x_i = \text{állandó}$, egyenletesen megoszló vonalas terhelés alatt

$$\sigma_{y_i} = F(x_i, z) = \text{állandó},$$

azaz a hosszirányú megoszlás egyenletes. Ha a z irány mentén a nyomófelületből szabályos közönként egyenlő hosszú darabokat eltávolítunk, a szakadás következtében a már nem terhelt közökből a talpfeszültségek a megmaradt nyomófelületek alá koncentrálnak valamely új $\sigma_{y_i} = \varphi_i(z)$ függvénnyel kifejezhető módon. Ez a $\varphi_i(z)$ függvény már nem lehet állandó, mert a változás folytán σ_{y_i} ordináták nemcsak megnövekednek, hanem nyilván valamely erősen kiemelkedő harangalaknak megfelelő megoszlással fejlődnek ki. E szerint

$$z = +\frac{v}{2} \\ \int \varphi_i(z) dz = q_{xi} \\ z = -\frac{v}{2}$$

Mivel a keresztalj számítása szempontjából a talpfeszültségek z irányú megoszlása egy keresztalj két széle közötti határokon belül érdektelen, mert csak q_x talpnyomás x irányú megoszlása fontos, az új $F(x, z)$ függvényt minden x_i helyen a z változó szerint integrálva képzeljük a két szélnak megfelelő határok között, és így kapjuk azt a $q_x = f(x)$ függvényt, amely a keresztalj hossz tengelye mentén megoszló reakcióerők harangalakú ábrájának felel meg. Ezek után tehát már nem talpfeszültségekkel (σ_y kg/cm²), hanem ezeknek z változó szerinti határozott integráljával, azaz az x tengely mentén megoszló reakcióerőkkel (q_x kg/cm) fogunk számolni. Ezeket a fenti integrállal értelmeztük, és a hossz tengely egység hosszára ható reakciónyomás helyett röviden talpnyomásnak fogjuk nevezni. Ugyanígy a keresztaljra felülről ható, megoszló vonalas terhelés helyett ennek az integráljaképpen értelmezhető S kg sinnyomással, mint koncentrált erővel számolhatunk.

A rugalmas mennyiségek kifejezése racionális egész függvényekkel.

A keresztalj számításának helyes módszerét keresve a talpnyomások (q_x) megoszlásának olyan törvényszerűségét kell megállapítanunk, mely a kísérleti eredményekkel összhangban áll, és elméletileg is igazolható. Ugyanakkor az is célunk, hogy a méreetszámításhoz használandó képleteink (az eredők és nyomatékok képletei) minél egyszerűbbek legyenek.

A probléma lényege tehát a talpnyomások megoszlását olyan függvénnyel fejezni ki, melyből egyrészt egyszerű formájú függvények vezethetők le, másrészt a tapasztalati ténynek: a harangalakú megoszlás törvényének megfelel. Mivel első sorban az a célunk, hogy a mérnöki gyakorlat számára alkalmas, minél könnyebben használható módszert dolgozzunk ki, szükségtelen szigorúan ragaszkodnunk ahhoz, hogy a függvényt tisztán elméleti úton vezessük le, mert a célra jó megközelítő módszer is alkalmas, ha megfelel annak a lényegbevágó követelménynek, hogy harangalakú görbével ábrázolható, és a kezdeti feltételeket, valamint a statikai egyensúly követelményeit is kielégíti.

A $q_x = f(x)$ függvényt olyan koordináta rendszerben ábrázoljuk, melynek kezdőpontja a keresztalj bal vége és a pozitív x irány balról-jobbra mutat.

A függvénynek a következő feltételeket kell kielégítenie:

1. $x = 0, \quad q_x = 0$
2. $x = b, \quad q_x = 0$
3. $x = \frac{b}{2}, \quad q_x = \varrho q_0 \dots \left(q_0 = \frac{S}{b} \right)$
4. $\int_0^b q_x dx = S$
5. $\int_0^b q_x x dx = S \left(\frac{b}{2} + r \right)$

S a sinnyomás, b az alávert rész hossza, ϱ arányossági tényező, r a haranggörbe és abszcisszatengely közé zárt terület súlypontjának távolsága a középvonaltól (11. ábra). r általában nem egyenlő e -vel, mert a rugalmasan (d hosszú rúddal) összekapcsolt két párhuzamos nyomólap egyensúlya e nélkül a feltétel nélkül is létrejöhet.

A legegyszerűbb függvény a racionális egészfüggvény. 5 feltétel 5 együtthatóval, azaz negyedfokú racionális egészfüggvénnyel elégíthető ki. Mivel pedig

a negyedfokú racionális egészfüggvény általában *harangalakú* görbének felel meg: a függvény *alakjánál* fogva is *alkalmas a talpnyomások megoszlásának kifejezésére*. Tehát:

$$q_x = a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 \quad 1.$$

Határozzuk meg ezeket az a_i együtthatókat úgy, hogy az 1. alatti függvény kielégítse öt követelményünket:

1. $a_5 = 0$, mert különben q_x az $x = 0$ helyen nem lehetne 0. — $a_4 \dots a_1$ együtthatók kiszámításához négy egyenletet írhatunk fel:

$$a_1 b^3 + a_2 b^2 + a_3 b + a_4 = 0$$

$$\frac{1}{16} a_1 b^3 + \frac{1}{8} a_2 b^2 + \frac{1}{4} a_3 b + \frac{1}{2} a_4 = \varrho \frac{S}{b^2}$$

$$\frac{1}{5} a_1 b^3 + \frac{1}{4} a_2 b^2 + \frac{1}{3} a_3 b + \frac{1}{2} a_4 = \frac{S}{b^2}$$

$$\frac{1}{6} a_1 b^3 + \frac{1}{5} a_2 b^2 + \frac{1}{4} a_3 b + \frac{1}{3} a_4 = \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{b} \right) \frac{S}{b^2}$$

Ebből a lineáris egyenletrendszerből a négy ismeretlen a_i képletét kiszámítva az eredmény:

$$a_1 = + 40 (2\varrho - 3) \frac{S}{b^5}$$

$$a_2 = - 40 \left(3 \frac{r}{b} + 4\varrho - 6 \right) \cdot \frac{S}{b^4}$$

$$a_3 = + 6 \left(30 \frac{r}{b} + 16\varrho - 25 \right) \cdot \frac{S}{b^3}$$

$$a_4 = - 2 \left(30 \frac{r}{b} + 8\varrho - 15 \right) \cdot \frac{S}{b^2}$$

A könnyebb kezelhetőség céljából a függvényt a következő formában írjuk fel:

$$q_\xi = \frac{S}{b} \cdot [\beta_1 \xi^4 - \beta_2 \xi^3 + \beta_3 \xi^2 - \beta_4 \xi]$$

itt

$$\xi = \frac{x}{b}$$

és az együtthatók:

$$\beta_1 = 40 (2\varrho - 3)$$

$$\beta_2 = 40 \left(3 \frac{r}{b} + 4\varrho - 6 \right)$$

$$\beta_3 = 6 \left(30 \frac{r}{b} + 16\varrho - 25 \right)$$

$$\beta_4 = 2 \left(30 \frac{r}{b} + 8\varrho - 15 \right)$$

* * *

Az eredők függvénye:

$$V_x = \int q_x \cdot dx + C_v$$

$$V_{\xi} = S \cdot \left[\frac{\beta_1}{5} \cdot \xi^5 - \frac{\beta_2}{4} \xi^4 + \frac{\beta_3}{3} \xi^3 - \frac{\beta_4}{2} \xi^2 \right]$$

$$\text{mert } C_v = 0, \quad \text{mivel } V_{\xi}(\xi=0) = 0$$

ez a képlet a *külső szakaszban* érvényes, azaz ott, ahol

$$0 \leq \xi \leq \eta, \quad \eta = \frac{\frac{b}{2} + e}{b},$$

mert az S hatásvonalában a függvény ugrásszerűen változik, mivel itt a balról ható erők eredőjéhez — S is hozzáadódik, tehát a *belső szakaszban*, ahol $\eta < \xi \leq 1$

$$V_{\xi} = S \left[\frac{\beta_1}{5} \xi^5 - \frac{\beta_2}{4} \xi^4 + \frac{\beta_3}{3} \xi^3 - \frac{\beta_4}{2} \xi^2 - 1 \right]$$

(az eredők pozitív értelme felfelé mutat).

* * *

További integrálással jutunk a *nyomatékok képletéhez*. Itt az integrálási állandó megint zérus, mert $M_x(x=0) = 0$, tehát: a *külső szakaszban* ($0 \leq \xi \leq \eta$):

$$M_{\xi} = Sb \cdot \left[\frac{\beta_1}{30} \xi^6 - \frac{\beta_2}{20} \xi^5 + \frac{\beta_3}{12} \xi^4 - \frac{\beta_4}{6} \xi^3 \right]$$

a *belső szakaszban*

($\eta < \xi \leq 1$):

$$M_{\xi} = Sb \cdot \left[\frac{\beta_1}{30} \xi^6 - \frac{\beta_2}{20} \xi^5 + \frac{\beta_3}{12} \xi^4 - \frac{\beta_4}{6} \xi^3 - (\xi - \eta) \right]$$

a *közbülső «üres» szakaszban*

($1 < \xi$):

$$M_{\xi} = M_{\xi}(\xi=1) = \text{Const.} = M_b = S \cdot (e - r)$$

Ezzel a tulajdonképpeni *méretszámításhoz* szükséges képletek kifejtését elvégeztük volna, ha ismernők még a β együtthatók képleteiben szereplő q és r értékét is. Mindkettő statikailag határozatlan mennyiség, tehát meghatározásukhoz más adatok is szükségesek, mint a külső erők és nyomatékok egyensúlyi feltételei.

q arányossági tényező.

$$q = \frac{b}{S} \cdot q_x \left(x = \frac{b}{2} \right)$$

Ennek az arányossági tényezőnek az elméleti értéke általában $+1$ és $+\infty$ között lehet. A keresztalj számítására kidolgozott, közelítő képleteinkben használható, valószínű értékének megállapításához vizsgáljuk meg a centrikusan nyomott, mindkét végén «szabad» lapot, amikor tehát $e = 0$ és $r = 0$.

Ebben az esetben a q_x képletének β együtthatói egyedül csak q lineáris függvényei. Nyilvánvaló, hogy minél nagyobb q , a q_x megoszlása a talp alatt annál «koncentráltabb», mert minél nagyobbak a q_x ordináták a középvonal környezetében, annál kevesebb nyomásrész jut a szélek felé. Ez látható a nyomaték

szélső értékének képletéből is, amely ebben a szimmetrikus terhelési esetben:

$$M_{\max} = M_{x\left(x=\frac{b}{2}\right)} = \frac{Sb}{8} \cdot \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{3} \varrho\right)$$

tehát ϱ növekedésével a nyomaték szélső értéke csökken. Pl. ha $\varrho = 2.0$, akkor $M_{\max}$ 0.58-szorosa az egyenletesen megoszló q_0 -al számított $M_{\max}$ -nak $\left(= \frac{1}{8} Sb\right)$.

Ez a képlet tehát *arra figyelmeztet*, — hogy *közelítő számítási módszerről* lévén szó — a biztonság érdekében ϱ -nak *minél kisebb értékével* kell számolnunk.

Ha a β együtthatókat vizsgáljuk, kitűnik, hogy $\varrho = 1.5$ értéke esetén $\beta_1 = \beta_2 = 0$, tehát a negyedfokú parabolával kifejezett harangalakú görbe *másodfokú parabolává* fajul, azaz már nem lesz többé harangalakú. Ez volna tehát ϱ valószínű értékének *alsó korlátja*.

ϱ tényező valószínű értékének *felső korlátját* abból a követelményből vezethetjük le, hogy a q_{ξ} függvényből számított talpnyomások értékének *pozitív előjelűnek* kell lennie bármilyen $0 \leq \xi \leq +1$ helyen, mert az ágyazási anyagban negatív nyomás, azaz húzás nem jöhet létre. Ebből a követelményből következik: $q_{\xi} > 0$, tehát

$$\beta_1 \xi^4 - \beta_2 \xi^3 + \beta_3 \xi^2 - \beta_4 \xi > 0$$

Itt a β együtthatók képlete a centrikusan nyomott talp esetén:

$$\beta_1 = 40(2\varrho - 3), \quad \beta_2 = 40(4\varrho - 6), \quad (\text{azaz } \beta_2 = 2\beta_1)$$

$$\beta_3 = 6(16\varrho - 25), \quad \beta_4 = 2(8\varrho - 15)$$

$$\beta_1 \xi^3 - 2\beta_1 \xi^2 + \beta_3 \xi > \beta_4$$

$$\xi \cdot [\beta_3 - \beta_1 \xi \cdot (2 - \xi)] > \beta_4$$

Ha $\xi = 1 - \Delta \xi$, ahol $\Delta \xi$ bármilyen kis, +1-nél kisebb, *pozitív* szám lehet:

$$(1 - \Delta \xi) \cdot [\beta_3 - \beta_1 \cdot (1 - \Delta \xi^2)] > \beta_4$$

$$\beta_3 - \beta_1 + \Delta \xi^2 \cdot \beta_1 - \Delta \xi \cdot (\beta_3 - \beta_1) - \beta_1 \cdot \Delta \xi^3 > \beta_4$$

$$\beta_3 - \beta_1 = \beta_4$$

(mert $(96 - 80) \varrho = (150 - 120) = 16\varrho - 30$)

$$\Delta \xi^2 \cdot \beta_1 \cdot (1 - \Delta \xi) > \Delta \xi \cdot \beta_4$$

$$\Delta \xi \cdot (1 - \Delta \xi) \cdot \beta_1 > \beta_4$$

Ez a feltétel abban az esetben, mikor $\Delta \xi$ zérushoz, vagy +1-hez közeledik, csak úgy teljesíthető, ha $\beta_4 \leq 0$,

tehát

$$8\varrho - 15 \leq 0$$

vagyis ϱ tényező felső korlátja: $\varrho_{\max} = \frac{15}{8} = 1.875 \approx 1.9$

$$1.5 < \varrho < 1.9$$

Indokolt tehát, hogy a közelítő képleteinkben az alsó és felső korlát középértékével számoljunk, vagyis $\varrho = 1.7$ értékkel.

Ezt a ϱ értéket a *számítás egyszerűsítése végett konstansnak vesszük* akkor is, ha b és r változnak, bár ϱ nyilván függő változója mindkét változónak. Mivel excentrikus nyomásnál is ϱ továbbra is a b középvonalában ébresztett $q_x \left[x = \frac{b}{2} \right]$

nyomásnak a q_0 átlagos értékéhez viszonyított arányszáma marad (és nem q_{max/q_0}), q állandónak tartott értéke nem zárja ki azt a lehetőséget, hogy r növekedésével q_{max/q_0} is növekedjék, mert ha r már nem zérus, akkor a q_{max} helye is elvándorol a középvonaltól.

Azt, hogy a q értékére vonatkozó egyszerűsítő feltevésünk megengedhető lényeges hiba nélkül, igazolják azok a kísérleti eredmények, amelyekkel — amint később bemutatjuk — számított eredményeinket összehasonlítottuk.

Ezek szerint $q = 1.7$ helyettesítéssel a mérekszámítás képleteihez kiszámítandó β tényezők a következők:

$$\beta_1 = 16.00$$

$$\beta_2 = 120 \frac{r}{b} + 32.00$$

$$\beta_3 = 180 \frac{r}{b} + 13.20$$

$$\beta_4 = 60 \frac{r}{b} - 2.80,$$

vagyis már csak r/b változónak függvényei.

r meghatározása az ellenálló nyomaték számbavételével.

A q_x egység hosszra eső talpnyomások megoszlási ábrájának súlypontja az alávert rész középvonaltól valamely $\pm r$ távolságba tolódik el, mert a haranggörbék a keresztalj alatt általában eltorzult alakban fejlődnek ki a sínnyomás $\pm e$ excentricitása miatt. Ha a keresztalj két, szimmetrikusan alávert részének egyensúlya egymástól teljesen függetlenül alakulna ki, (vagyis ha a két alávert keresztalj darabot nem kötné össze az a közbülső, aláveretlen rész, melyet «összekötőrúd»-nak nevezünk el), akkor r mindig egyenlő volna e -vel, mert $r = e$ egyenlet volna a nyomatékok egyensúlyának egyik feltétele. Azonban az alávert rúdrésznek csak az egyik (külső) vége «szabad», mert a belső (B pontnál lévő) végére az «üres» és alávert szakaszok határán levő keresztmetszetben, az anyagi összefüggés folytán, az összekötő rúdról valamely M_B nyomaték hárul (12. ábra). Így tehát az egyensúly nyomatéki feltétele

$$M_B + S \cdot (r - e) = 0 \quad (1)$$

r súlyponti távolságot ebből az egyenletből határozhatjuk meg, ha M_B nyomatékot ismerjük.

M_B sztatikailag határozatlan mennyiség. Kiszámításához ismerni kell az alávert és az összekötő rúdrész méreteit és rugalmassági modulusát (b, E_1, I_1 és d, E_2, I_2), valamint a külső terhelés adatait (S, e) és az ágyazás rugalmas ellenállásának nyomatéki tényezőjét (ψ). Végül még — a képlet levezetése céljából — szükséges a behajlási görbe érintőszögének (φ) változását kifejező függvényt is ismernünk. Mivel igen kis szögekről van szó:

$$\varphi \propto \operatorname{tg} \varphi$$

tehát

$$\varphi_x = - \int \frac{M_x}{EI} \cdot dx + \varphi_0$$

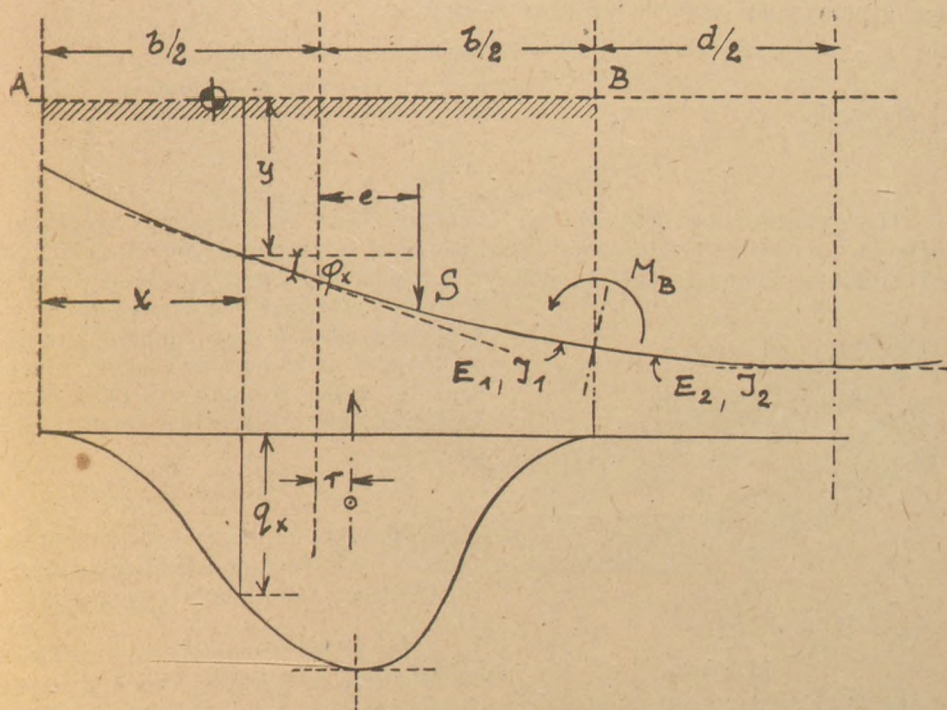
Feltéve, hogy mind az alávert rúdrész (E_1, I_1), mind az összekötőrúd (E_2, I_2) rugalmassági modulusai és inercianyomatékai külön-külön állandók, a nyoma-

tékokra már levezetett M_x függvény egyszerű integrálása és az összevonások elvégzése után kapott eredmények szerint a vízszinteshez hajló érintőszög képletei a következők: (a vízszintes, pozitív irányból pozitívértelmű forgással pozitív értelmű szög másik szárának irányába jutunk) a külső (I.) szakaszban:

$$\varphi_{\xi} = -\frac{Sb^2}{E_1 I_1} \cdot [\alpha_1 \xi^7 - \alpha_2 \xi^6 + \alpha_3 \xi^5 - \alpha_4 \xi^4] + \varphi_0$$

a belső (alávert, II.) szakaszban:

$$\varphi_{\xi} = -\frac{Sb^2}{E_1 I_1} \cdot \left[\alpha_1 \xi^7 - \alpha_2 \xi^6 + \alpha_3 \xi^5 - \alpha_4 \xi^4 - \frac{1}{2} \cdot (\xi - \eta)^2 \right] + \varphi_0$$



12. ábra.

A keresztalj elastikus görbéje.

a belső (üres, III.) szakaszban:

$$\varphi_{\xi} = -\frac{Sb^2}{E_2 I_2} \cdot \left(\varepsilon - \frac{r}{b} \right) \cdot \left(\xi - 1 - \frac{d}{2b} \right)$$

Itt

$$\varphi_0 = \frac{Sb^2}{2} \cdot \left[-\frac{1}{E_1 I_1} \cdot \left(\varepsilon^2 - \varepsilon + \frac{r}{b} + \frac{4}{105} \varrho - \frac{3}{28} \right) + \frac{1}{E_2 I_2} \cdot \frac{d}{b} \cdot \left(\varepsilon - \frac{r}{b} \right) \right]$$

$$\alpha_1 = \frac{4}{21} \cdot (2\varrho - 3)$$

$$\alpha_2 = \frac{r}{b} + \frac{4}{3} \varrho - 2$$

S kg sínnyomás,
 b cm az alávert rész hossza,

E_1 kg/cm² rug. modul. az alávert
rész felett;

$$\alpha_3 = \frac{1}{10} \cdot \left(30 \frac{r}{b} + 16q - 25 \right)$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{12} \cdot \left(30 \frac{r}{b} + 8q - 15 \right)$$

E_2 kg/cm² rug. modul. az üres rész felett;

I_1 cm⁴ inerc. nyom. az alávert rész felett

I_2 cm⁴ inerc. nyom. az üres rész felett;

x cm a külső végponttól a közép felé mért hossz;

d cm az «üres» belső szakasz teljes hossza ($b + \frac{d}{2}$ a ker. alj. félhossza);

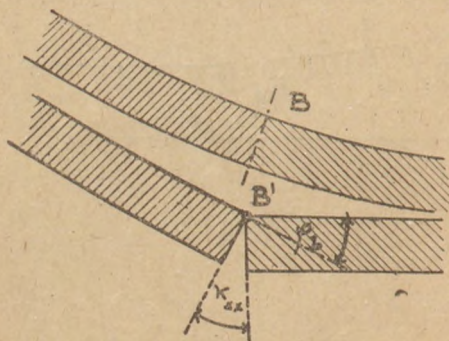
e cm a sínnyomás hatóvonalának excentricitása;

r cm a q_x ábra súlypontjának excentricitása;

$$\xi = \frac{x}{b}; \quad \eta = \frac{b/2 + e}{b}; \quad \varepsilon = \frac{e}{b}; \quad q_0 = \frac{S}{b}; \quad q = \frac{q_x}{q_0 \left(x = \frac{b}{2} \right)}$$

* * *

Ha a rugalmasan alátámasztott, rugalmas rudat a szilárdsági tengelyére merőleges átmetszéssel B pontnál átvágjuk, és a folytonos anyagi összefüggést csak csuklóval helyettesítjük: az alávert b hosszú rúdrész olyan új egyensúlyi helyzetbe mozdul el, amely annak a terhelési esetnek felel meg, amikor a mindkét végén szabad rúdnak egyik végére sem hat külső nyomaték. Tehát az 1. alatti egyensúlyi feltétel értelmében, ha $M_B = 0$,



13. ábra.

Az átmetszett rúd elmozdulása.

$$r = e$$

Az átmetszés helyén a b és d elválasztott két rúd véglapjai szétnyílnak, κ_{xx} szögforgással elfordulnak egymástól (13. ábra).

Ha az új egyensúlyi helyzet kialakulása után, a csuklóval összekötött véglapokra $\pm M_0 = \pm 1$ kgcm, 0 értékű egységnyi nyomatékpár működne, akkor ennek a két egymással ellentétes értelmű egységnyi nyomatéknak a hatására κ_{xx} szög valamely κ_{x_0x} szöggel megváltoznék. Mivel nemcsak a két rúd anyaga követi a Hooke-törvényt, hanem az alátámasztás is rugalmas, és a felépítménynek olyan kis mozgásairól van szó, ahol a nyomatékok *arányosak* az elfordulásokkal:

$$M_B : M_0 = \kappa_{xx} : \kappa_{x_0x}$$

$$M_B = M_0 \frac{\kappa_{xx}}{\kappa_{x_0x}} \dots \dots \dots (2)$$

Tehát keressük κ_{xx} , majd κ_{x_0x} kis szögforgások képletét.

Abban az új egyensúlyi helyzetben, mely az átmetszés után alakult ki, a d hosszú, összekötő rúd vízszintes egyenesre kiegyenesedik, mert véglapjai felszabadultak M_B nyomaték hatása alól, közbül pedig terheletlen és nincs aláverte. Ennek a véglapja tehát függőleges síkba állott. Ugyanakkor a másik, b hosszú

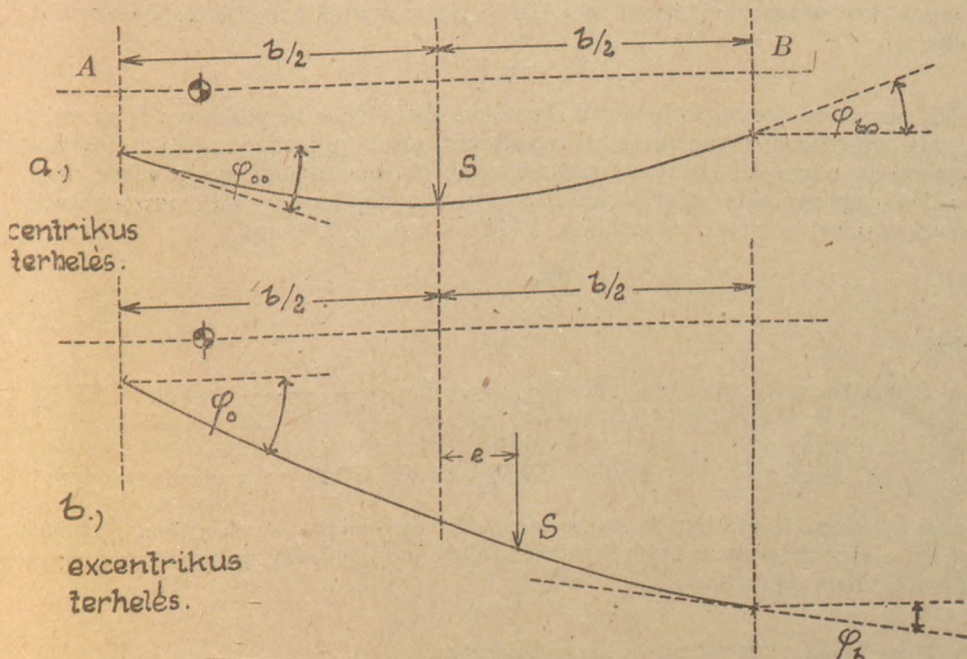
rúd B véglapja a függőleges síktól valamely φ_b szöggel hajlott el. φ_b a mindkét végén «szabad», adott e excentricitású S súllyal terhelt, egész b hosszában rugalmasan ágyazott rúd elasztikus görbéjének érintő-hajlásszöge a vízszinteshez a rúd B végpontjánál (14. ábra).

Mivel a két szög szárai (13. ábra) kölcsönösen merőlegesek egymásra:

$$\kappa_{xx} = \varphi_b \dots \dots \dots (3)$$

φ_ε előbb közölt képletéből φ_b képletét kapjuk a következő helyettesítésekkel:

$\xi = 1$, mert $x = b$; ugyanott φ_0 képletében: $r = e$ és $\frac{r}{b} = \varepsilon$ az egyensúly nyomatéki feltétele értelmében, $\varrho = 1,7$ az előző fejezet szerint és $d = 0$, mert az össze-



14. ábra.

A szabadvégű rúd besüllyedési ábrái.

kötő rúd hatástalan, mivel a rúd mindkét vége «szabad». Az összevonások elvégzése után:

$$\varphi_b = \varphi_0 - \frac{S b^2}{2 E_1 I_1} \cdot (c - \varepsilon^2)$$

ahol

$$c = \left[\frac{3}{28} - \frac{4}{105} \varrho \right]_{(\varrho=1.7)} = 0.0424$$

φ_0 az elasztikus görbe érintőjének hajlása a vízszinteshez A kezdőpontban. Ez valamely ismeretlen kezdeti irány. Megállapításához induljunk ki a *centrikusan* terhelt szabadvégű rúd elasztikus görbéjének alakjából, amely a középvonalra nézve szimmetrikus, tehát ekkor $\varphi_{00} = -\varphi_{b0}$, $e = 0$, $\varepsilon = 0$

$$[\varphi_0 - \varphi_b]_{(\varepsilon=0)} = + \frac{S b^2}{2 E_1 I_1} \cdot c$$

tehát

$$\varphi_{00} = + \frac{Sb^2}{E_1 I_1} \cdot \frac{c}{4}$$

Ha a centrikusan ható S erővel egyidejűleg valamely $M = Se$ nyomaték is hat a középpontra, akkor a rúd valamely új, asszimmetrikus elasztikus görbe alakjába hajlik el, miközben az egész rúd valamely, az ábra síkjára merőleges tengely körüli elfordulást is végez, míg új egyensúlyi helyzetébe jut. Ez ellen az elfordulás ellen az *ágyazás rugalmas ellenállást fejt ki*. Ez az ellenállás azzal a ψ szögelfordulással jellemezhető, amelyet egy b hosszú, merev rúd végez M_0 egységnyi nyomaték hatására. Mivel az elfordulási szög a forgató nyomatékkal arányos (kis mozgásokról lévén szó), $M = Se$ nyomaték következtében az elfordulás:

$$\Delta\varphi = \psi Se$$

Tehát az excentrikusan terhelt rúd elasztikus görbéjének kezdőiránya is az *excentricitás változásával* olyan mértékben változik, mint $\Delta\varphi$. Ugyanis a b hosszban rugalmasan ágyazott, rugalmas rúd teljes alakváltozása úgy megy végbe, hogy a saját rugalmassága miatti elmozdulással egyidejűleg az *alátámasztás* rugalmassága miatt is végez elfordulást. Ebből következik, hogy

$$\frac{d\varphi_0}{de} = \psi S$$

tehát

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \int \psi S de + \varphi_{00} = \psi Se + \frac{Sb^2}{E_1 I_1} \cdot \frac{c}{4} \\ \varphi_b &= S \cdot \left[\psi e - \frac{cb^2}{4E_1 I_1} + \frac{e^2}{2E_1 I_1} \right] \dots\dots\dots (3a) \end{aligned}$$

ez az a vízszintessel bezárt hajlásszöge B végpontján az elasztikus görbének, amely e excentricitással ható S terhelés alatt *a szabadvégű, b* hosszú rúd egyensúlya közben alakul ki.

* * *

κ_{x_0x} szögforgás két részből tevődik össze:

$$\kappa_{x_0x} = \kappa'_{x_0x} + \kappa''_{x_0x} \dots\dots\dots (4)$$

itt κ'_{x_0x} a B véglapra ható egységnyi nyomaték hatására a b hosszban beágyazott rúd B véglapjának elfordulási szöge; κ''_{x_0x} a d hosszú, alávetetlen rúd B véglapján ható egységnyi nyomaték által okozott elfordulási szöge a B véglapnak. (Ez az egész «elméleti kísérlet» természetesen úgy megy végbe, hogy ami az egész keresztalj $(2b + d)$ hosszának középvonalától balra történik, mindazt ugyanúgy egyidejűleg végezzük a jobb felén is, teljesen szimmetrikusan. Így tehát az összekötő rúd két végén egyidejűleg egy-egy ellentétes értelmű, egységnyi nyomatékok működtek.)

$$\kappa'_{x_0x} = \Delta\varphi_b = \varphi_b(r = e + \Delta e) - \varphi_b(r = e)$$

φ_ξ képletéből

$$\xi = 1, \varrho = 1,7 \text{ és } d = 0, \text{ de } r \neq e$$

helyettesítésével az összevonások elvégzése után:

$$\varphi_b = \varphi_0 + \frac{Sb^2}{2E_1 I_1} \cdot \left(\varepsilon^2 - \varepsilon + \frac{r}{b} - c \right)$$

Ugyanis, ha a szabadvégű rúd egyik véglapjára nyomaték hat, akkor az egyensúly nyomatéki feltétele értelmében r már nem lehet egyenlő e -vel, hanem

$$r = e + \frac{M_0}{S} = e + \frac{1}{S}$$

$$\Delta e = \frac{1}{S}; \quad \frac{r}{b} = \varepsilon + \frac{1}{Sb}$$

tehát

$$\varphi_b(r = e + \Delta e) = \bar{\varphi}_0 + \frac{Sb^2}{2E_1 I_1} \cdot \left(\varepsilon^2 - \varepsilon + \varepsilon + \frac{1}{Sb} - c \right)$$

$$\varphi_b(r = e) = \varphi_0 + \frac{Sb^2}{2E_1 I_1} \cdot (\varepsilon^2 - c)$$

$$\Delta \varphi_b = \bar{\varphi}_0 - \varphi_0 + \frac{b}{2E_1 I_1}$$

amikor a véglapon egységnyi nyomaték hat, a rúd saját rugalmas elmozdulásán kívül még valamely, a rúd tengelyére merőleges, vízszintes tengely körül az ágyazásban elfordul $\psi M_0 = \psi$ szöggel az ágyazás rugalmas ellenállása közben, tehát $\varphi_0 - \varphi_0 = \psi$ és így:

$$\kappa'_{x_0} = \psi + \frac{b}{2E_1 I_1} \quad \dots \dots \dots (4a)$$

* * *

A d hosszú összekötő rúd két véglapján egy-egy ellentétes értelmű, egységnyi nyomaték hat, miközben a rúd aláveretlen és terheetlen. A középvonalban (vágánytengelyben) a szimmetria miatt teljes befogás képzelhető. Így a bal véglapra ható $+M_0$ nyomaték hatására a véglap $+\kappa''_{x_0x}$ szöggel fordul el a függőleges siktól; itt

$$\kappa''_{x_0x} = \frac{1}{E_2 I_2} \cdot \int_0^{d/2} M_0 \cdot dx = \frac{d}{2E_2 I_2} \quad \dots \dots \dots (4b)$$

* * *

Ezzel az M_B nyomaték kiszámításához szükséges tényezők képleteit előállítottuk. A (2—4 alatti) képletek egybevetéséből:

$$M_B = S \cdot \frac{\psi e - \frac{c b^2}{4E_1 I_1} + \frac{e^2}{2E_1 I_1}}{\psi + \frac{b}{2E_1 I_1} + \frac{d}{2E_2 I_2}} \quad \dots \dots \dots (5)$$

Az 1. egyenlet szerint

$$M_B = S(e - r), \quad r = e - \frac{M_B}{S}$$

$$r = e - \frac{\psi e - \frac{c b^2}{4E_1 I_1} + \frac{e^2}{2E_1 I_1}}{\psi + \frac{b}{2E_1 I_1} + \frac{d}{2E_2 I_2}} \quad \dots \dots \dots (6)$$

itt $c = 0.0424$ (állandó szám) és ψ az ágyazás által kifejtett rugalmas ellenálló nyomaték tényezője. Ezt a sínre ható rugalmas ellenállások elemzése során már ismertettük. Ugyanaz a képlet itt is érvényes azzal a különbséggel, hogy itt ω más kísérleti érték és $I_f = \frac{v b^3}{12}$, mert most a hajlítás síkja a keresztalj hossz tengelyébe esik, tehát ψ értéke lényegesen különbözik a sín számítására használható ψ kísérleti értékétől.

* * *

Az 5. és 6. alatti képletből a következőket állapíthatjuk meg:

a) Az aláveretlen (közbülső) rúdrész hosszának növekedésével M_B abszolút értéke és $(e-r)$ különbség is csökken.

b) Ha a rúd b alávert hosszában merev $\left(\frac{1}{2E_1 I_1} = 0\right)$, de d hosszban rugalmas:

$$r = e - \frac{\psi e}{\psi + \frac{d}{2E_2 I_2}}$$

ha még $\frac{1}{2E_2 I_2}$ is $= 0$, azaz a rúd egész hosszában merev, akkor

$$r = e - \frac{\psi e}{\psi} = 0$$

c) Fontos megállapítás a következő:

A képlet számlálójában e -nek vegyes, másodfokú, egész függvénye van, s ennek pozitív gyöke:

$$e_h = \sqrt{(\psi E_1 I_1)^2 + \frac{c}{2} b^2} - \psi E_1 I_1 \quad \dots \dots \dots (7)$$

Tehát ha $e = e_h$, akkor $r = e$ és $M_B = 0$.

Igy tehát a pozitív (befelé haladó) excentricitásnak van egy olyan e_h határértéke, amely mellett az összekötő rúd egyenesbe áll. Ennél kisebb $e < e_h$ mellett az összekötő rúd alulról konkáv görbületű, $e > e_h$ esetén pedig alulról konvex. Ez a megállapítás fontos a vasbetonalj középső része méretszámítására: e_h -nál nagyobb e esetén a középső részre csak pozitív nyomaték hat:

$$\left. \begin{array}{l} e < e_h, r > e, M_B < 0 \\ e > e_h, r < e, M_B > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{előjel} \\ \text{változás!} \end{array}$$

A 7. képlet alkalmas az ellenálló nyomaték tényezőjének kísérleti meghatározására, mert az excentricitás fokozatos változtatásával elérhető az az e_h -nak megfelelő *határhelyzet*, amikor az összekötő (aláveretlen) rész *egyenesbe áll*. Az excentricitást úgy is változtathatjuk, hogy az aláverés (b) hosszát növeljük, vagy csökkentjük. A 7. képletből az is látszik, hogy ez a határhelyzet független $\frac{d}{2E_2 I_2}$ -től, azaz a középső szakasz hosszától és rugalmasságától, mert e_h képletében d nem szerepel. Ebből viszont az következik, hogy ψ értékének kísérleti meghatározása olyan szabadvégű rúdon is elvégezhető, melynek méretei, rugalmassága és ágyazása azonos a keresztalj alávert részének adataival.

A számítás képleteinek összefoglalása.

A keresztalj méretszámításához szükséges ismernünk a szilárdsági tengely mentén megoszló, egység hosszra jutó reakcióerők (röviden talpnyomások) (q_x) megoszlását kifejező függvényt, a balról ható eredő erők (V_x) és nyomatékok (M_x) függvényeit. A koordináta-rendszer kezdőpontja a keresztalj balfelének b hosszban alávert része külső (bal) végén van, és pozitív x irány a balról jobbra mutató vízszintes irány. A talpnyomások és eredő erők pozitív értelme alulról felfelé mutat, és a pozitív nyomaték az óramutató járásával megegyező értelmű.

A képleteket három különböző szakaszra külön kell felírni, mert az elméletileg koncentráltan ható S sínnyomás, valamint az alávert és aláveretlen talprészek függőleges határvonalán a függvények folytonossága megszakad. E miatt megkülönböztetjük a külső, alávert (I.), belső, alávert (II.) és a belső, aláveretlen (III.) szakaszt.

A talpnyomások képlete érvényes az I. és II. szakaszban, folytonossági szakadás nélkül; a III. szakaszban $q_x = 0$

$$q_x = \frac{S}{b} \cdot [\beta_1 \xi^4 - \beta_2 \xi^3 + \beta_3 \xi^2 - \beta_4 \xi]$$

$$\xi = \frac{x}{b}; \quad \beta_1 = 16,00; \quad \beta_2 = 120 \frac{r}{b} + 32,00$$

$$\beta_3 = 180 \frac{r}{b} + 13,20; \quad \beta_4 = 60 \frac{r}{b} - 2,80$$

r cm a haranggörbe és abszcisszatengely által bezárt terület súlypontjának távolsága a b cm hosszú alávert rész függőleges középvonalától (külön képlettel kell kiszámítani).

* * *

Az eredő erők (V_x) képletei:

az I. szakaszban, ahol $0 \leq \xi \leq \eta$ $\left[\eta = \frac{b/2 + e}{b} \right]$

(e cm a sínnyomás excentricitása, azaz a függőleges támadóvonalának távolsága az alávert rész középvonalától)

$$V_x = S \cdot \left[\frac{\beta_1}{5} \xi^5 - \frac{\beta_2}{4} \xi^4 + \frac{\beta_3}{3} \xi^3 - \frac{\beta_4}{2} \xi^2 \right]$$

a II. szakaszban, itt $\eta < \xi \leq 1$

$$V_x = S \cdot \left[\frac{\beta_1}{5} \xi^5 - \frac{\beta_2}{4} \xi^4 + \frac{\beta_3}{3} \xi^3 - \frac{\beta_4}{2} \xi^2 - 1 \right]$$

a III. szakaszban, itt

$$\xi > 1, \quad V_x = 0$$

* * *

A nyomatékok (M_x) képletei:

I. szakaszban ($0 \leq \xi \leq \eta$):

$$M_x = Sb \cdot \left[\frac{\beta_1}{30} \xi^6 - \frac{\beta_2}{20} \xi^5 + \frac{\beta_3}{12} \xi^4 - \frac{\beta_4}{6} \xi^3 \right]$$

II. szakaszban ($\eta < \xi < 1$):

$$M_{\xi} = Sb \cdot \left[\frac{\beta_1}{30} \xi^6 - \frac{\beta_2}{20} \xi^5 + \frac{\beta_3}{12} \xi^4 - \frac{\beta_4}{6} \xi^3 - (\xi - \eta) \right]$$

III. szakaszban ($\xi > 1$):

$$M_{\xi} = (e - r) \cdot S \quad (= \text{Const.})$$

* * *

$$r = e - \frac{\psi e - \frac{cb^2}{4E_1 I_1} + \frac{e^2}{2E_1 I_1}}{\psi + \frac{b}{2E_1 I_1} + \frac{d}{2E_2 I_2}}$$

ahol $c = 0,0424$ (állandó szám)

- d cm az aláveretlen, belső szakasz hossza,
 E_1 kg/cm² a keresztalj rugalmassági modulusza az alávert szakaszban,
 I_1 cm⁴ a keresztalj keresztmetszetének inercianyomatéka az alávert szakaszban,
 E_2 kg/cm² a keresztalj rugalmassági modulusza az aláveretlen szakaszban,
 I_2 cm⁴ a keresztalj inercianyomatéka az aláveretlen szakaszban,
 ψ kg⁻¹ cm⁻¹ a kavicságy által, a keresztalj alávert részének *hosszirányú* elfordulása ellen kifejtett ellenálló nyomaték tényezője, kíséreltetel megállapítandó érték, mely az ágyazási együtthatóval és $I_f = \frac{vb^3}{12}$ inercianyomatékkal fordítva arányos (v cm a talp szélessége, b cm az alávert rész hossza).

* * *

A képletek alkalmasak olyan szerkezetű keresztaljak számítására is, melyeknél az összekötő rúd keresztmetszeti méretei (I_2), valamint — esetleg — az anyaga (E_2) is különbözik az alávert részek anyagától (E_1) és méreteitől (I_1).

Az alátétlemez teherelosztó hatására az eredő erők és nyomatékok elméleti «csúcs»-értékei letompulnak. Ez a letompító hatás a szélső értékek számításánál oly módon vehető figyelembe, hogy V_{ξ} és M_{ξ} szélső értékei gyanánt nem a $\xi = \eta$ helyhez tartozó, legnagyobb elméleti értéket adó eredőket és nyomatékokat számítjuk, hanem a lemezszélesség harmadával csökkentett (vagy növelt) $(b/3 + e)$ abszcisszához tartozó V_{ξ} és M_{ξ} ordinátákat számítjuk ki.

* * *

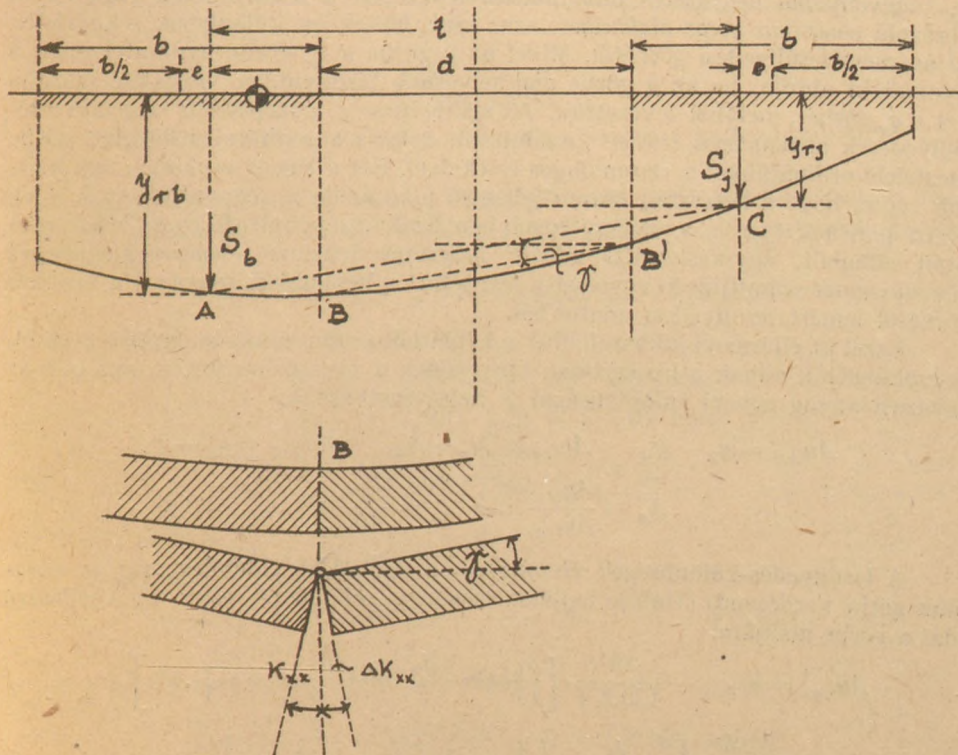
Szélnyomás, túlemlés, centrifugális gyorsulás, hordrúgók egyenetlen játéka miatt a két sínnyomás különböző nagyságú lehet. Ebben az esetben (ívekben fekvő keresztaljaknál) a vertikális túlterheléssel megnövelt sínnyomással kell számolnunk. Közben r képlete is kiegészítendő a következő módon. Legyen a baloldali sínnyomás: $S_b = S + \Delta S$ (itt ΔS a vertikális túlterhelés) és ugyanakkor a jobboldali sínnyomás: $S_j = S - \Delta S$. A két sínnyomás közti különbség folytán a besüllyedési görbe szimmetriája megbomlik (15. ábra), de az összekötő rúd két végére ható nyomaték továbbra is egyensúlyt tart egymással ($M_B = -M'_B$), tehát a rúd körívben görbül meg, mert a görbületi sugara állandó.

A B és B' pontoknál egyidejűleg átmetszett rugalmas rúd az átmetszések helyén képzelt csuklók között most *ferde* egyenesbe áll, és ez valamely γ szöggel hajlik el a vízszintes iránytól. Megközelítő számítási módszerről lévén szó, az egyszerűbb kifejtés kedvéért $\overline{BB'}$ irányt párhuzamosnak vesszük $\overline{AC}$ iránnyal. Ebben az esetben:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{l} \cdot (y_{rb} - y_{rj}) \approx \gamma$$

(itt l a nyomtávolság + a sinkorona szélessége).

M_B képletének számlálójában az a κ_{xx} szög szerepel, melyet az átmetszéssel felszabadított rúdvég a függőlegessel zár be új egyensúlyi helyzetében.



15. ábra.

Besüllyedési görbe vertikális túlterhelés alatt.

Ez a κ_{xx} szög most változik azzal a $\Delta \kappa_{xx}$ szöggel, mellyel az összekötő rúd végső keresztmetszete tér el a függőleges síktól $\Delta \kappa_{xx} = \gamma$

$$y_{rb} = \frac{S_b}{D} \quad \text{és} \quad y_{rj} = \frac{S_j}{D}$$

mivel az A és C pontok besüllyedései a sinnyomásokkal arányosak; az arányossági tényező D kg/cm. Tehát M_B képlete vertikális túlterhelés alatt azzal módosul, hogy κ_{xx} szöget az elferdülés folytán növelni kell $\Delta \kappa_{xx}$ kis szöggel, itt

$$\Delta \kappa_{xx} = \frac{S_b - S_j}{Dl}$$

Ebből következik, hogy r kiegészített (közelítő) képlete:

$$r = e \frac{\psi e - \frac{cb^2}{4 E_1 I_1} + \frac{e^2}{2 E_1 I_1} + \frac{1 - S_j/S_b}{Dl}}{\psi + \frac{b}{2 E_1 I_1} + \frac{d}{2 E_2 I_2}}$$

A rugalmas ellenállások módszerének igazolása kísérleti adatok felhasználásával.

Az igazolás meggyőző erejű, ha be tudjuk mutatni, hogy a talpnyomások q_x függvényéből négyszeres integrálással levezetett y lesüllyedések függvényét ábrázoló *elasztikus görbe alakhelyes*, azaz csak léptékben különbözik a kísérletek útján mért lesüllyedési görbétől. Mivel az y görbe a q_x görbe nyomatekainak a nyomateki ábrája, ha az y görbe alakhelyesnek bizonyul, ez visszafelé igazolja azt a q_x görbét, melyből levezettük. Az alakhelyesség igazolásához elegendő a lesüllyedések *viszonylagos értékeit* kiszámítani, és összehasonlítani a kísérleti görbe megfelelő ordinátáinak a viszonylagos értékeivel. Ezt a legegyszerűbben úgy hajtjuk végre, hogy a keresztalj három jellemző pontjának: a végpontnak (y_0), a sín alatti pontnak (y_r) és a vágánytengelyben levő középpontnak (y_k) a lesüllyedés után elfoglalt, egymásközötti relatív helyzetét jellemző *magasságkülönbségek viszonyszámát* számítjuk ki egyrészt a levezetett y képletéből, másrészt a kísérleti görbéről lement lesüllyedési adatokból.

Ezzel az eljárással kiküszöböljük a képletből a sinnyomás ismeretlen értékét, és csökkentjük annak a bizonytalan tényezőnek a zavaró hatását is, amelyet az ágyazási anyag egyéni tulajdonságai is befolyásolhatnak.

$$\Delta y_{(k0)} = y_k - y_0, \quad \Delta y_{(r0)} = y_r - y_0, \quad \Delta y_{(kr)} = y_k - y_r$$

$$\lambda_0 = \frac{\Delta y_{(k0)}}{\Delta y_{(r0)}}, \quad \lambda_k = \frac{\Delta y_{(kr)}}{\Delta y_{(k0)}}$$

A lesüllyedés-különbségek viszonyszáma mellett, egyidejűleg még az elasztikus görbe kezdőponti érintője hajlásszögének (φ_0) előjele (+ vagy —) is jellemző adat a görbe alakjára.

$$\text{I.} \quad \Delta y_{(r0)} = b \varphi_0 \eta - \frac{Sb^3}{120 E I} \cdot \left[\frac{\beta_1}{14} \eta^8 - \frac{\beta_2}{7} \eta^7 + \frac{\beta_3}{3} \eta^6 - \frac{\beta_4}{1} \eta^5 \right]$$

$$\text{Ia)} \quad \varphi_0 = \frac{Sb^2}{2 E I} \cdot \left[\frac{d}{b} \cdot \left(\varepsilon - \frac{r}{b} \right) - \varepsilon^2 + \left(\varepsilon - \frac{r}{b} \right) + c \right]$$

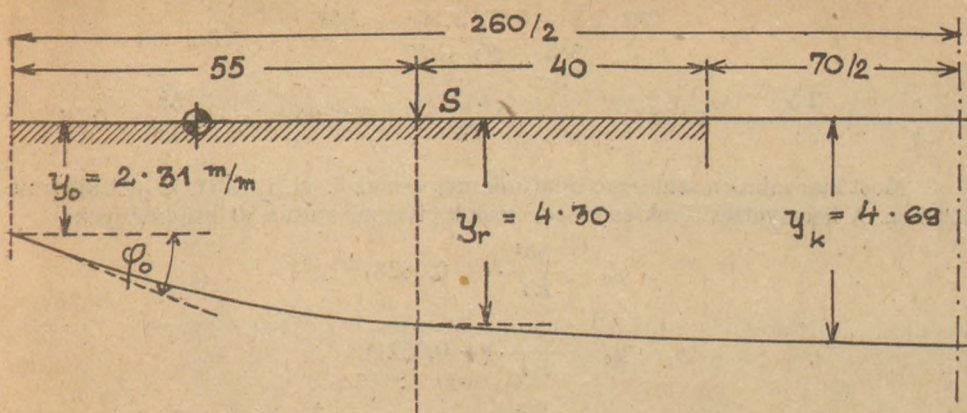
$$\text{II.} \quad \Delta y_{(k0)} = \varphi_0 b + \frac{Sb^3}{E I} \cdot \left[\frac{1}{7} \cdot \frac{r}{b} + \frac{1}{6} \cdot (1 - \eta)^3 + \frac{1}{8} \cdot \left(\varepsilon - \frac{r}{b} \right) \cdot \frac{d^2}{b^2} - c \right]$$

$$\text{ahol } \bar{c} = \left[\frac{1}{21} - \frac{1}{105} \varrho \right]_{(\varrho = 1,7)} = 0,0314$$

$$\text{III.} \quad \Delta y_{(kr)} = \Delta y_{(k0)} - \Delta y_{(r0)}$$

* * *

Az igazoláshoz Cuënot francia mérnök (Ing. M. G. Cuënot: «Etude sur les déformations des voies de chemins de fer.» (Dunod, Paris, 1905.) talpfabehajlási kísérleteinek adatait használjuk fel, mert Cuënot a görbe alakjára — amint a levezetéseink során láttuk — döntően fontos *aláverési hosszakat is megmérte*. Így pl.



16. ábra.

Talpfa besüllyedési ábrája alávetetlen közbülső szakasz esetén.

a kísérletsorozatnak azt az ábráját vizsgáljuk meg, ahol a belső alávetési hossz rövidebb a külsőnél (Planche No XII. Fig. 3.), tehát az excentricitás pozitív. (16. ábra.)

$$y_0 = 2,31 \text{ mm}, y_r = 4,30 \text{ mm}, y_k = 4,69 \text{ mm}$$

tehát a mérési eredmények szerint:

$$\Delta y_{(k_0)} = 4,69 - 2,31 = + 2,38 \text{ mm}$$

$$\Delta y_{(r_0)} = 4,30 - 2,31 = + 1,99 \text{ mm}$$

$$\lambda_0 = \frac{+ 2,38}{+ 1,99} = + 1,20$$

φ_0 előjele pozitív.

Számítással:

$$b = 55 + 40 = 95 \text{ cm}, \quad e = 55 - \frac{95}{2} = + 7,5 \text{ cm}$$

a talpfa keresztmetszete: 14/22 cm, tehát

$$I = \frac{22 \cdot 14^3}{12} = 5020 \text{ cm}^4, \quad E = 120,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$EI = 6 \cdot 10^8 \text{ kgcm}^2$$

$$I_f = \frac{22 \cdot 95^3}{12} = 1,575,000 \text{ cm}^4, \quad \psi \sim \frac{1,63}{3,25 \cdot I_f} = \frac{10^{-6}}{3,15} \text{ kg}^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

(ha felvesszük — más vizsgálat eredményeként — hogy

$$C = 3,25 \text{ kg/cm}^3 \text{ és } \omega = 1,63)$$

$$2E I \psi = \frac{1,2 \cdot 10^9}{3,15 \cdot 10^6} = 381 \text{ cm}, \quad d = 70 \text{ cm}, \quad c = 0,0424$$

$$r = e - \frac{2 E I \psi e - \frac{c}{2} b^2 + e^2}{2 E I \psi + b + d}$$

$$r = +7,5 - \frac{381 \cdot 7,5 - 0,0212 \cdot 95^2 + 7,5^2}{381 + 95 + 70} = +2,5 \text{ cm}$$

$$\frac{r}{b} = +\frac{2,5}{95} = +0,0263, \quad \varepsilon = +\frac{7,5}{95} = +0,0789, \quad \eta = \frac{55}{95} = 0,58$$

Most már minden szükséges adatunk megvan az I. a), I. és II. képlet kiszámításához. A behelyettesítések és összevonások elvégzése után az eredmények:

$$\varphi_0 = \frac{Sb^2}{EI} \cdot (+0,0638)$$

$$y_k - y_0 = \frac{Sb^3}{EI} \cdot (+0,0521)$$

$$y_r - y_0 = \frac{Sb^3}{EI} \cdot (+0,0353)$$

$$\lambda_0 = \frac{\Delta y_{(k_0)}}{\Delta y_{(r_0)}} = \frac{+0,0521}{+0,0353} = +1,48$$

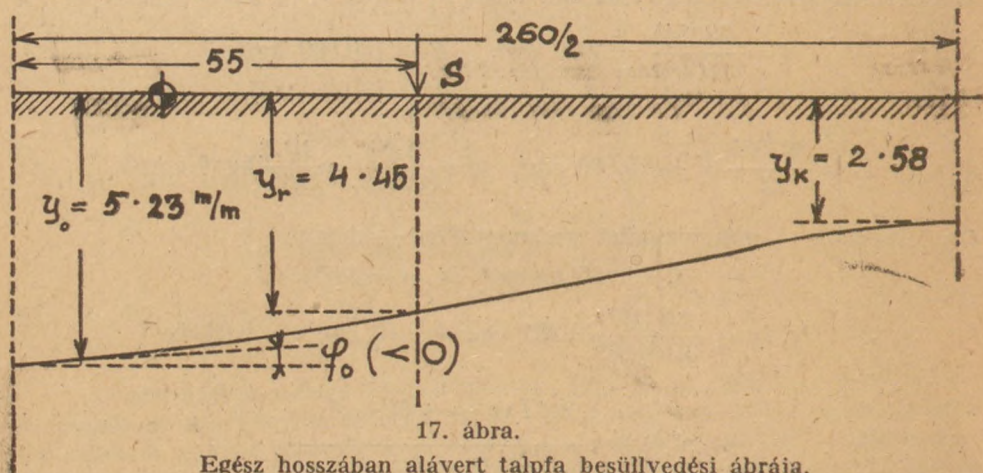
A mért és számított értékeket összehasonlítva:

1. az előjel úgy φ_0 , mint λ_0 -nál megfelelő;

2. λ_0 (számított) 23%-kal nagyobb, mint λ_0 (mért), ez aránylag kis eltérést jelent az elasztikus görbének annál az alakjánál, amelynél $y_r - y_k = -0,39$ mm, vagyis abban az esetben, amikor ez a különbség olyan kicsi, hogy néhány tizedmilliméter mérési hiba a λ viszonzyszámra nagy hatást gyakorolhat. Tehát az összehasonlítás eredményét jó megközelítésnek vehetjük. Meg kell jegyeznünk, hogy a számított és mért lesüllyedések közti különbség növelésének egyik oka az, hogy a valóságban a sínnyomás nem «élen» át (koncentrált erő alakjában) hat a talp felületére, hanem a sántalp közvetítő felületén megoszló erőrendszer alakjában.

* * *

Igazolásunk második kísérleti adata képen választottuk azt a Cuënot-ábrát (17. ábra), amely «az egész hosszában alávert talpfa» lesüllyedési görbét tünteti fel (Planche No XII. Fig. 1. 1903. máj. 4. és 5-i kísérlet. Az ábra baloldala).



Mérés: (φ_0 előjele negatív)

$$y_k - y_0 = 2,58 - 5,23 = -2,65 \text{ mm}$$

$$y_k - y_{r1} = 2,58 - 4,45 = -1,87 \text{ mm}$$

$$\lambda_k = \frac{\Delta y_{(kr)}}{\Delta y_{(ko)}} = \frac{-1,87}{-2,65} = +0,70$$

Számítással:

$$b = \frac{260}{2} = 130 \text{ cm}, \quad e = 55 - \frac{130}{2} = -10 \text{ cm}$$

$$I = 5020 \text{ cm}^4, \quad E = 120,000 \text{ kg/cm}^2, \quad EI = 6 \cdot 10^8 \text{ kg cm}^2$$

$$I_f = \frac{22 \cdot 130^3}{12} = 4,025 \cdot 10^6 \text{ cm}^4, \quad \psi = \frac{1,63}{3,25 \cdot I_f} = \frac{10^{-6}}{8,05} \text{ kg}^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

$$2 E I \psi = \frac{1,2 \cdot 10^9}{8,05 \cdot 10^6} = 149 \text{ cm}$$

$$r = -10 - \frac{-1490 - 0,0212 \cdot 130^2 + 100}{149 + 130 + 0} = -3,74 \text{ cm}$$

$$\frac{r}{b} = \frac{-3,74}{130} = -0,0288, \quad \varepsilon \frac{-10}{130} = -0,0770$$

$$\eta = \frac{55}{130} = 0,422, \quad 1 - \eta = 0,578$$

Ia. képlet szerint, ha $d = 0$

$$\varphi_0 = -\frac{Sb^2}{EI} \cdot 0,0059$$

I. képlet szerint:

$$\Delta y_{(ro)} = -\frac{Sb^3}{EI} \cdot 0,00305$$

II. képlet szerint:

$$\Delta y_{(ko)} = -\frac{Sb^3}{EI} \cdot 0,00920$$

III. képlet szerint

$$\Delta y_{(kr)} = \frac{Sb^3}{EI} \cdot [-0,00920 + 0,00305] = -\frac{Sb^3}{EI} \cdot 0,00615$$

tehát

$$\lambda_k = \frac{-615}{-920} = +0,67$$

A mért és számított eredményeket összehasonlítva:

1. φ_0 és λ_k előjele egyezik;
2. λ_k két értéke közötti különbség csak 4,5%.

* * *

Igazolásunk tehát meggyőző erejű lehet annál is inkább, mert a régi módszer hibájára az mutat rá legélesebben, hogy a mért és számított λ értékek között annyira kirívó különbség van, hogy sok esetben még előjelben is különböznek egymástól.

PÉLDÁK.

I. Példa.

260 cm hosszú, 16 cm magas és 26 cm széles talpfára ható legnagyobb nyomatékok számítása.

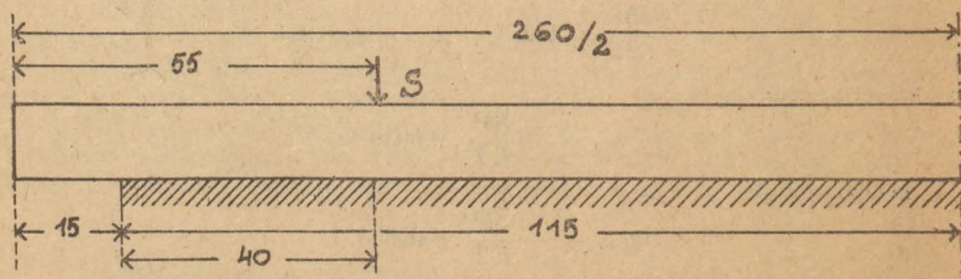
Amint a levezetéseink során láttuk, a talpnyomások megoszlásának módja az aláverési hossz (b) nagyságától és relatív helyzetétől függ, tehát a számítást két «valószínű szélső eset» feltételezésével végezzük:

a) a talpfa belső (sínek közötti) része teljes hosszában van aláverte, míg a külső szakaszban a végektől számított 15 cm hosszban «üres».

b) a talpfa belső szakasza csak a sínektől befelé mért 35 cm hosszban alávert, de közül 80 cm hosszban üres és a külső szakaszokban teljesen alávert.

$$E_1 = E_2 = 120\,000 \text{ kg/cm}^2, \quad I_1 = I_2 = \frac{26 \cdot 16^3}{12} = 8860 \text{ cm}^4$$

A kaviccságy minőségének hatását a nyomatékok mértékére legegyszerűbben úgy vizsgálhatjuk meg, hogy a számítást két — valószínű — szélső esetre is elvégezzük: nagy és kis ellenálló nyomaték kifejtésére képes ágyazási anyag feltételezésével.



18. ábra.

Ábra az I. a.) példához.

$$\text{I. a)} \quad b = 115 \text{ cm}, \quad b/2 + e = 40 \text{ cm}, \quad e = 40 - \frac{115}{2} = -17,50 \text{ cm}$$

$$I_f = \frac{26 \cdot 115^3}{12} = 3,300,000 \text{ cm}^4$$

$$\psi \approx \frac{1,6}{8,3 \cdot 10^6} = \frac{1}{16,5 \cdot 10^6} \text{ kg}^{-1} \text{ cm}^{-1} \quad \text{ha } C = 8 \text{ kg/cm}^3$$

$$\frac{M_B}{S} = \frac{2EI\psi e - \frac{c}{2}b^2 + e^2}{2EI\psi + b + d}, \quad d = 0, \quad c = 0,0424$$

$$2EI\psi = \frac{2 \cdot 1,2 \cdot 8,86 \cdot 10^8}{16,5 \cdot 10^6} = 129 \text{ cm}$$

$$\frac{M_B}{S} = -9,15 \text{ cm}$$

$$r = -17,50 + 9,15 = -8,35 \text{ cm}$$

A külső szakaszban a nyomaték képlete:

$$M_{\xi} = Sb \cdot [\delta_1 \xi^6 - \delta_2 \xi^5 + \delta_3 \xi^4 - \delta_4 \xi^3]$$

$$\frac{r}{b} = \frac{-8,35}{115} = -0,0725$$

$$\delta_1 = +0,533, \delta_2 = +1,165, \delta_3 = +0,0125, \delta_4 = -1,192$$

A sínnyomás nem koncentrált erő képen adódik át a talpfa felületére, hanem a sántalp és alátétlemez útján megoszló erőrendszer alakjában. (Pl. a 48,3 kg/m-es sínhez tartozó egyszerű alátétlemez 21,2 cm széles, a Geo-lemez 32,5 cm), tehát a nyomatékok elméleti «csúcserőteke» letompul úgy, hogy indokolt a legnagyobb nyomaték helyéül nem az S elméleti támadóvonalát választani, hanem az ettől 5-7 cm-rel kifelé eső keresztmetszetet. Vegyük tehát

$$\xi = \frac{40-6}{115} = 0,296 \approx 0,3$$

$$M_{max} = S \cdot 115 \cdot 0,3^3 \cdot [+0,533 \cdot 0,3^3 - 1,165 \cdot 0,3^2 + 0,012 \cdot 0,3 + 1,192]$$

$$\frac{M_{max}}{S} = +3,45 \text{ cm},$$

$$\frac{M_{min}}{S} = -9,15 \text{ cm}$$

Tehát ebben a «valószínű» — szélső esetben a vágánytengelyben levő keresztmetszetre akkora *negatív* nyomaték hat, amely a sín alatti keresztmetszetre ható pozitív nyomatéknak közel háromszorosa.

* * *

Az összehasonlítás kedvéért megismételjük a számítást arra az esetre, ha az ágyazás olyan puha anyagból van, amely sokkal kisebb ellenálló nyomaték kifejtésére képes, mint az előbbi esetben ($1/3$ -ad akkora).

$$\psi \approx \frac{1}{5,5 \cdot 10^6} \text{ kg}^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

vagyis ezt a ψ értéket háromszor akkórának vesszük fel, mint az előző számításhoz.

$$2EI\psi = \frac{2 \cdot 1,2 \cdot 8,86 \cdot 10^8}{5,5 \cdot 10^6} = 387 \text{ cm}$$

$$\frac{M_B}{S} = \frac{-387 \cdot 17,5 - 0,0212 \cdot 115^2 + 17,5^2}{387 + 115}$$

$$\frac{M_B}{S} = \frac{M_{min}}{S} = -13,40 \text{ cm}$$

$$r = -17,50 + 13,40 = -4,10 \text{ cm}$$

A külső szakasz nyomatéki képletének állandói:

$$\frac{r}{b} = \frac{-4,1}{115} = -0,0357$$

$$\delta_1 = +0,533, \delta_2 = +1,386, \delta_3 = +0,564, \delta_4 = -0,824$$

$$M_{\xi} = 115 S \cdot \xi^3 \cdot [\delta_1 \xi^3 - \delta_2 \xi^2 + \delta_3 \xi - \delta_4]$$

$$\xi = 0,3$$

$$\frac{M_{\xi}}{S_{[\xi=0,3]}} = \frac{M_{max}}{S} = +2,74 \text{ cm}$$

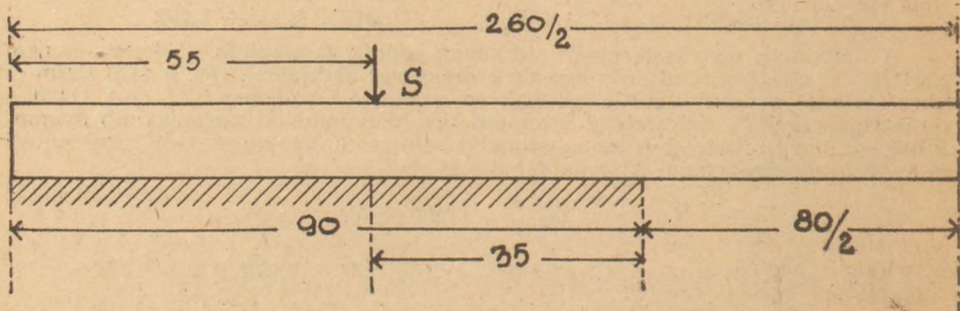
Tehát az ágyazás minőségének változása a nyomatékok változására olyan hatású, mint a talpfa rugalmasságának a változása: ellenállóbb ágyazásban a nyomatékok szélső értékei között kisebb a különbség, mint gyengébb ágyazási anyagban, mert itt a keresztalj erőjátéka *merevebb*, a keményebb ágyazásban viszont *rugalmasabb* rúd módján alakul ki.

* * *

I. b)

$$b = 90 \text{ cm}, \quad b/2 + e = 55 \text{ cm}, \quad e = 55 - \frac{90}{2} = +10,0 \text{ cm}$$

$$I_f = \frac{26 \cdot 90^3}{12} = 1,580,000 \text{ cm}^4, \quad d = 80 \text{ cm}$$



19. ábra.

Ábra az I. b) példához.

$$\psi = \frac{1,6}{8 \cdot 1,58 \cdot 10^6} \approx \frac{1}{8 \cdot 10^6} \text{ kg}^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

$$2 E I \psi = \frac{2 \cdot 1,2 \cdot 8,86 \cdot 10^8}{8 \cdot 10^6} = 266 \text{ cm}$$

$$M_{B/S} = \frac{266 \cdot 10,0 - 0,0212 \cdot 90^2 + 10,0^2}{266 + 90 + 80} = +5,94 \approx +6,0 \text{ cm}$$

$$r = +10,0 - 6,0 = +4,0 \text{ cm}$$

$$\frac{r}{b} = +\frac{4,0}{90} = +0,0444, \quad \xi = \frac{55-6}{90} = 0,545$$

$$M_{\xi/S} = 90 \cdot \xi^3 \cdot [0,533 \xi^3 - 1,867 \xi^2 + 1,766 \xi + 0,023]$$

$$M_{\xi/S} (\xi=0,545) = \frac{M_{max}}{S} = +7,53 \text{ cm}$$

$$M_{B/S} = \frac{M_{min}}{S} = +5,94 \text{ cm}$$

Gyenge ágyazási anyagban (szintén — mint az előbb — az ellenálló nyomatékot egyharmadra véve):

$$\psi \approx \frac{1}{2,67 \cdot 10^6} \text{ kg}^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

$$2 E I \psi = 798 \approx 800 \text{ cm}$$

$$M_{B/S} = \frac{+800 \cdot 10 - 0,0212 \cdot 90^2 + 10^2}{800 + 90 + 80} = +8,17 \text{ cm}$$

$$r = +10,0 - 8,2 = +1,8 \text{ cm}$$

$$\frac{r}{b} = \frac{+1,8}{90} = +0,020$$

$$M_{\xi/S} = 90 \xi^3 \cdot [0,533 \xi^3 - 1,720 \xi^2 + 1,400 \xi + 0,267]$$

$$\xi = 0,545$$

A külső szakaszban:

$$\frac{M_{max}}{S} = M_{\xi/S} [\xi=0,545] = +8,80 \text{ cm}$$

A belső (üres) szakaszban:

$$\frac{M_{min}}{S} = \frac{M_B}{S} = + 8,17 \text{ cm}$$

Táblázatosan összefoglalva az eredményeket:

M/S (cm)	I. a)		I. b)	
	belül teljes, kívül részleges alá- verés		belül részleges, kívül teljes alá- verés	
	kemény ágyazás	puha ágyazás	kemény ágyazás	puha ágyazás
Nyomatéki kar a sín alatt	+ 3,45	+ 2,74	+ 7,53	+ 8,80
Nyomatéki kar a vágánytengelyben	— 9,15	— 13,40	+ 5,94	+ 8,17

1. A sín alatti keresztmetszetekre ható nyomatékok értelme mindig pozitív, és a legnagyobb szélső értéke akkor jelentkezik, ha az ágyazási anyag «puha», azaz aránylag kis ellenállónyomaték kifejtésére képes és a külső szakaszokban a talpfa teljesen alá van verve, míg a sínek közötti szakaszban (a vágánytengely közelében) minél nagyobb hosszban «üres».

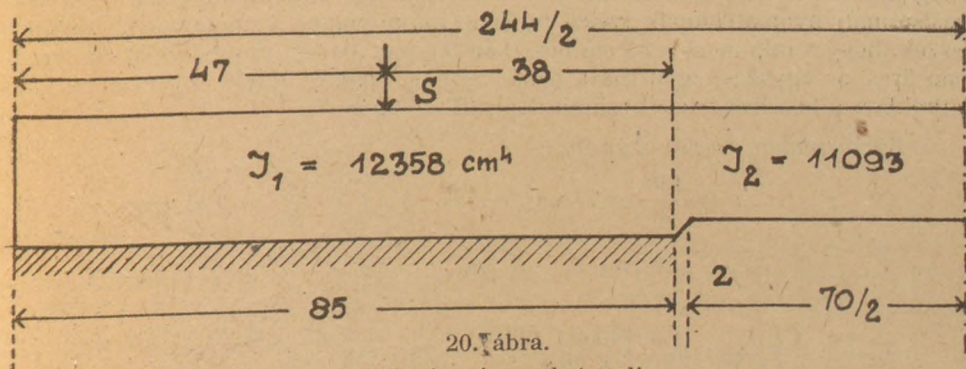
2. A vágány tengelyében levő keresztmetszetre ható nyomaték értelme az aláverési hosszak viszonylagos helyzetétől függően változik. Mind a negatív, mind a pozitív szélső érték a «puha» ágyazási anyagban jelentkezik. Belül részleges, kívül teljes aláverés esetén lép fel a pozitív nyomaték szélső értéke, viszont a belül teljes, kívül részleges aláveréskor a *negatív nyomaték* szélső értéke a pozitív legnagyobb nyomaték értékét 150%-nál is nagyobb mértékben túlhaladja. Ezt — a keresztalj törésére veszélyes — esetet hívjuk «fellovaglás»-nak. Ezért indokolt az a tapasztalati alapon bevezetett szabály, hogy a talpfát nem szabad a vágánytengely közelében aláverni. A Nemesdy tervei szerint készült «B» típusú vasbetonalj középső szakaszán az alj alsó felülete 70 cm hosszban a talpsík fölé emelkedik a «fellovaglás» elkerülésének biztosítása céljából.

* * *

II. Példa

A «B típusú» vasbetonaljra ható legnagyobb nyomatékok számítása.

Míg az egész hosszában síma alsó felületű talpfánál az aláverési hosszak nagyon tág határokon belül variálhatók: a «B típusú» vasbetonaljnál az alj alsó felületének felemelkedési határa határát szabja az aláverési hosszaknak. (20. ábra.)



A «B típusú» vasbetonalj.

$$b = 85 \text{ cm}, d = 70 + 2 \times 2,0 = 74 \text{ cm}, v = 29,4 \text{ cm}$$

$$b/2 + e = 47 \text{ cm}, e = 47 - \frac{85}{2} = +4,5 \text{ cm}$$

$$I_1 = 12358 \text{ cm}^4, I_2 = 11093 \text{ cm}^4, \frac{I_1}{I_2} = 1,115$$

$$E_1 = E_2 = E = 140,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$I_f = \frac{29,4 \cdot 85^3}{12} = 1,500,000 \text{ cm}^4$$

$$\psi \propto \frac{1,6}{8 \cdot 1,5 \cdot 10^6} = \frac{1}{7,5 \cdot 10^6} \text{ kg}^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

$$M_{B/S} = \frac{2 E I_1 \psi e - 0,0212 \cdot b^2 + e^2}{2 E I_1 \psi + b + \frac{I_1}{I_2} d}$$

$$2 E I_1 \psi = \frac{2 \cdot 1,4 \cdot 12,358 \cdot 10^8}{7,5 \cdot 10^6} = 462 \text{ cm}$$

$$M_{B/S} = + 3,09 \approx 3,1 \text{ cm}$$

$$r = + 4,5 - 3,1 = + 1,4 \text{ cm}$$

$$\frac{r}{b} = \frac{+1,4}{85} = + 0,0165$$

$$\xi = \frac{47 - 7}{85} = 0,471$$

$$M_{\xi/S} = 85 \xi^3 \cdot [0,533 \xi^3 - 1,699 \xi^2 + 1,347 \xi + 0,302]$$

$$M_{\xi/S} [\xi=0,471] = \frac{M_{max}}{S} = + 5,47 \text{ cm}$$

$$M_{B/S} = \frac{M_{min}}{S} = + 3,09 \text{ cm}$$

A «B típusú» vasbetonalj további szilárdsági vizsgálatához még ki kell számítani a nyomatékok szélső értékeit azokra a *hiányos ágyazási* esetekre is, amikor a 85 cm talphosszúságon belül az aláverési hosszak változnak; vagy úgy, hogy a külső, vagy úgy, hogy a belső határtól bizonyos «valószínű-szélső» mértékben «üres» a talp. Ezt a vizsgálatot az előző példán már bemutatott módon kell elvégezni, tehát felesleges itt részletezni.

Abból a célból, hogy a bemutatott új módszer eredményeit összehasonlítsuk a régi, Zimmermann-féle számítási módszer eredményeivel, kiszámítjuk a «B típusú» vasbetonalj nyomatékainak szélső értékeit Zimmermann képleteivel is. Feltételezzük, hogy a talp most is 85 cm hosszban teljesen alávert és a belső 74 cm hosszban üres, az ágyazási együttható pedig megfelel annak, amely szerint a mi képletünkben ψ közelítő értékét számítottuk ($C=8 \text{ kg/cm}^3$).

Zimmermann szerint számítva:

$$r = \frac{150}{2} = 75 \text{ cm}, \quad l = \frac{244}{2} = 122 \text{ cm}$$

$$x_1 = 157 \text{ cm}, x_2 = 7 \text{ cm}, \quad x = \frac{150}{2} + 7 = 82 \text{ cm}$$

$$L_1 = \sqrt[4]{\frac{4 E I_1}{C v}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 140000 \cdot 12358}{8 \cdot 29,4}} = 73,7 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{122}{73,7} = 1,657, \quad \varrho = \frac{75}{73,7} = 1,020$$

$$\xi_1 = \frac{157}{73,7} = 2,128, \quad \xi_2 = \frac{7}{73,7} = 0,095, \quad \xi = \frac{82}{73,7} = 1,112$$

$$M_\xi = S \frac{L_1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} (\mu_1 + \mu_2) - v_0 \operatorname{Ch} \xi \cos \xi + u_0 \operatorname{Sh} \xi \sin \xi \right]$$

$$\mu = e^{-\xi} \cdot (\cos \xi - \sin \xi)$$

Zimmermann táblázataiból kikeresve a λ és ϱ , valamint a ξ_1 , ξ_2 és ξ értékeinek megfelelő függvényértékeket, az eredmény (Magy. Techn. 1948. V. száma 92. és 93. l.)

$$M_\xi = + 7,4953 S$$

Ehhez még hozzáadandó az a képzeletbeli M_0 nyomaték, mely annak a P_0 (képzeletbeli) erőnek a hatására ébred, amely a 70 cm hosszú, közbülső aláveretlen rész hatását ellensúlyozza úgy, mintha a teljesen alávert hossz mellett egyidejűleg egy lefelé ható P_0 erő is hatna a keresztalj közepén.

$$P_0 = 2 \alpha \frac{[\eta_0]}{1 - \alpha(\eta_0)} \cdot \tau S$$

$$2 \alpha = 70 \text{ cm}, \quad \alpha = \frac{a}{L_1} = \frac{35}{73,7} = 0,475, \quad \tau = \frac{I_2}{I_1} = \frac{11093}{12358} = 0,8976$$

$[\eta_0] = f(\lambda, \varrho)$ a VI. táblázatból, $(\eta_0) = \varphi(\lambda)$ a IV. táblázatból kikeresve:

$$P_0 = + 0,8488 S$$

E szerint:

$$M_0 = \frac{P_0 L_1}{4} \cdot [\mu - v \operatorname{Ch} \xi \cos \xi + u \operatorname{Sh} \xi \sin \xi]$$

(u és v szintén λ függvényei a III. táblázatból)

$$M_0 = + 0,4066 S$$

tehát az S hatóvonalától 7 cm-re kifelé levő keresztmetszetben:

$$M_z = M_\xi + M_0 = + 7,9019 S$$

A keresztalj közepének keresztmetszetében, az egész hosszában alávert keresztalj esetén

$$M'_0 = S \frac{L_1}{2} \cdot [\mu_0]$$

$[\mu_0]$ kikereshető a VI. táblázatból kétszeres interpolációval, mint λ és ϱ függvénye:

$$M'_0 = S \frac{73,7}{2} \cdot (-0,2583) = - 9,53 S$$

P_0 középen ható erő nyomatéka a középső keresztmetszetre:

$$M''_0 = \frac{P_0 L_1}{4} = \frac{73,7}{4} \cdot 0,8488 S = + 15,64 S$$

tehát

$$M_{0z} = M'_0 + M''_0 = (- 9,53 + 15,64) S = + 6,11 S$$

* * *

Összehasonlítva az új módszer eredményeivel azt látjuk, hogy a régi (Zimmermann) képletekkel számítva, a nyomatékok a $\sin$ alatti keresztmetszetben közel másfélszer (+44,5%) és a vágánytengelyben kétszer (+97,7%) nagyobbak az új módszer képleteivel számított nyomatékoknál.

TARTALOM

	Oldal
Bevezetés.....	3
A <i>sin</i>	5
Történeti áttekintés	5
A rugalmas ellenállások elemzése	7
A folytonos alátámasztású hosszgerenda számításának elmélete	12
A hosszgerendára levezetett képletek átalakítása	16
A hosszirányú erő statikai hatása	20
Mozgó terhelés hatása	22
A számítás képleteinek összefoglalása	24
A keréksorozat hatása	26
Összehasonlítás más módszerekkel	29
A <i>keresztalj</i>	34
Különféle számítási módszerek	34
A talpnyomások harangalakú megoszlása	37
A rugalmas mennyiségek kifejezése racionális egész függvényekkel	40
q arányossági tényező	42
r meghatározása az ellenálló nyomaték számbavételével	44
A számítás képleteinek összefoglalása	51
A rugalmas ellenállások módszerének igazolása kísérleti adatok felhasználásával	54
Példák.	
I. Talpfára ható legnagyobb nyomatékok számítása	58
II. A «B» típusú vasbetonaljra ható legnagyobb nyomatékok számítása ..	61



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIA
KÖNYVTÁRA 25045/1950 N. SZ.

Ára 16.— Ft