



**Az elektronika  
újabb eredményei**

**MŰSZAKI TUDOMÁNYOK**

LANTOS BÉLA

**ROBOTOK  
IRÁNYÍTÁSA**

AKADÉMIAI KIADÓ · BUDAPEST

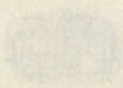


MŰSZAKI TUDOMÁNYOK  
AZ ELEKTRONIKA ÚJABB EREDMÉNYEI

ROBOTOK  
IRÁNYÍTÁSA

Szerkesztő  
PAP LÁSZLÓ

A szerkesztőség  
szerkesztője: GÖRNER KÁROLY  
Szerkesztő: PAPP LÁSZLÓ  
Felelős szerkesztő: GÖRNER KÁROLY  
Tudományos tanácsadó:  
SZÉKELY JÓSEF  
Szerkesztő: SZÉKELY JÓSEF  
Tudományos tanácsadó:  
TISCHER RÓBERT



MTA TUDOMÁNYOS KIADÁSOK

MTA  
KIK

# MŰSZAKI TUDOMÁNYOK AZ ELEKTRONIKA ÚJABB EREDMÉNYEI

7. kötet

Szerkeszti  
PAP LÁSZLÓ

A szerkesztőbizottság

elnöke: GÉHER KÁROLY

titkára: PAP LÁSZLÓ

tagjai: CSIBI SÁNDOR

CSURGAY ÁRPÁD

GYULAI JÓZSEF

SOMLÓ JÁNOS

TÓFALVI GYULA

TUSCHÁK RÓBERT



AKADÉMIAI KIADÓ · BUDAPEST 1991

188974

LANTOS BÉLA

# ROBOTOK IRÁNYÍTÁSA

BEVEZETÉS

1. A ROBOT KINEMATIKA

1.1. Főbb fogalmak

1.2. Puffer-Darwin-robot

1.3. Róka-Kardinaletrobot

1.4. Róka-Forgórobot

1.5. Puffer-robotok a tárgyalóasztal körül

1.6. Puffer-robotok a tárgyalóasztal körül

1.7. Puffer-robotok a tárgyalóasztal körül

1.8. Puffer-robotok a tárgyalóasztal körül

1.9. Puffer-robotok a tárgyalóasztal körül

1.10. Puffer-robotok a tárgyalóasztal körül

1.11. Puffer-robotok a tárgyalóasztal körül

1.12. Puffer-robotok a tárgyalóasztal körül

1.13. Puffer-robotok a tárgyalóasztal körül

1.14. Puffer-robotok a tárgyalóasztal körül

1.15. Puffer-robotok a tárgyalóasztal körül

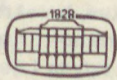
1.16. Puffer-robotok a tárgyalóasztal körül

1.17. Puffer-robotok a tárgyalóasztal körül

1.18. Puffer-robotok a tárgyalóasztal körül

1.19. Puffer-robotok a tárgyalóasztal körül

1.20. Puffer-robotok a tárgyalóasztal körül



AKADÉMIA KIADÓ · BUDAPEST 1991

**MTA  
KIK**

0 00003 98477 2

686437

MAGYAR  
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
KÖNYVTÁRA

ISBN 963 05 6217 0

Kiadja az Akadémiai Kiadó, Budapest  
Első kiadás, 1991  
© Lantos Béla, 1991

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás,  
a nyilvános előadás, a rádió- és televízióadás, valamint  
a fordítás jogát, az egyes fejezeteket illetően is.

Printed in Hungary

M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVTÁRA  
Könyvtár: 1613 / 19 91 sz.

# TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ .....	11
BEVEZETÉS .....	13
Robottechnikai alapfogalmak .....	13
<b>1. A ROBOT KINEMATIKÁJA: GEOMETRIA</b> .....	19
1.1. Lineáris transzformációk .....	20
1.1. Példa: Vektorszorzás .....	21
1.2. Példa: Diadikus szorzás .....	23
1.3. Példa: Koordinátatranszformáció .....	24
1.4. Példa: Forgatás a z tengely körül $\varphi$ szöggel .....	25
1.5. Példa: Forgatás az y tengely körül $\varphi$ szöggel .....	28
1.6. Példa: Forgatás az x tengely körül $\varphi$ szöggel .....	28
1.2. Rodrigues-képlet .....	29
1.7. Példa: Koordinátatranszformáció általános forgatás esetén .....	31
1.3. Forgatás inverze .....	33
1.4. Az orientáció jellemzése t tengely körüli $\varphi$ forgatással .....	34
1.5. Az orientáció jellemzése Euler-szögekkel .....	35
1.6. Az orientáció jellemzése RPY-szögekkel .....	39
1.7. Merev testek relatív helyzetének jellemzése homogén koordinátákkal .....	41
1.8. Merev, nyílt láncú, elágazás nélküli robot leírása .....	45
1.9. A robot transzformációs gráfja .....	49
1.10. Denavit-Hartenberg-alak .....	50
1.11. A direkt geometriai feladat .....	52
1.8. Példa: Stanford-kar .....	52
1.9. Példa: Elbow-manipulátor kar .....	55

1.10. Példa: IBM RS-7565 derékszögű koordinátás kar .....	56
1.11. Példa: Fanuc M1 hengerkoordinátás kar .....	56
1.12. Példa: Unimate 4000B gömbkoordinátás kar .....	59
1.13. Példa: Puma-560 kar .....	60
1.14. Példa: Scara-kar .....	61
1.15. Példa: Euler-kézcsukló .....	63
1.16. Példa: RPY-kézcsukló .....	64
1.17. Példa: Elbow-manipulátor kézcsukló .....	65
1.18. Példa: Puma-560 kézcsukló .....	67
1.19. Példa: A direkt geometriai feladat megoldása a Puma-560 robot esetén .....	68
1.12. Az inverz geometriai feladat .....	69
1.12.1. Az inverz geometriai feladat megoldása dekompozícióval .....	70
1.20. Példa: Az inverz geometriai feladat megoldása Puma-560 robot esetén dekompozícióval .....	71
1.12.2. Az inverz geometriai feladat megoldása csak egy ismeretlen csuklóváltozótól függő egyenlet keresésével .....	72
1.21. Példa: Az inverz geometriai feladat megoldása az Elbow-manipulátor esetén független egyenletek keresésével .....	73
<b>2. A ROBOT KINEMATIKÁJA:</b>	
<b>DIFFERENCIÁLIS MOZGÁS .....</b>	<b>77</b>
2.1. A robot differenciális mozgása .....	77
2.2. A robot Jacobi-mátrixa .....	81
2.2.1. Az inverz kinematikai feladat megoldása dekompozícióval .....	85
2.1. Példa: A Stanford-robot Jacobi-mátrixa .....	87
2.2. Példa: A parciális sebességek és szögsebességek számítása álló koordinátarendszerben .....	90
2.3. Példa: A Jacobi-mátrix számítása derékszögű koordinátás kar és Euler-kézcsukló esetén .....	90
2.4. Példa: A gyorsulás és szöggyorsulás számítása a Jacobi-mátrix felhasználásával .....	92

2.5. Példa: A gyorsulás és szöggyorsulás számítása derék- szögű koordinátás kar és Euler-kézcsukló esetén ..	93
2.2.2. A sebesség- és a gyorsulásalgoritmus .....	94
2.3. A kinematikai mennyiségek rekurzív számítása .....	95
2.4. A kinematikai mennyiségek direkt számítása .....	97
2.6. Példa: A kinematikai mennyiségek számítása kétszabadságfokú kar esetén .....	99
2.5. Statikus erők és nyomatékok transzformálása .....	105
<b>3. A ROBOT DINAMIKUS MODELLJE .....</b>	<b>108</b>
3.1. A tehetetlenségi nyomaték és transzformációja .....	109
3.1. Példa: Két merev test eredő tehetetlenségi mátrixa .....	111
3.2. A Lagrange-féle másodfajú egyenletek .....	112
3.3. A mozgásegyenletek rekurzív számítása .....	113
3.3.1. A kinetikus energia hatása .....	113
3.3.2. A potenciális energia hatása .....	116
3.3.3. A rekurzív számítások sorrendje .....	118
3.4. A mozgásegyenletek direkt (nemrekurzív) számítása .....	119
3.2. Példa: A mozgásegyenletek a 2.3. ábra szerinti kétszabadságfokú kar esetén .....	123
3.5. A beavatkozó szerv (motor és áttétel) figyelembevétele a mozgásegyenletekben .....	127
3.3. Példa: A beavatkozó szerv miatti korrekciók számítása háromszabadságfokú robotkar esetén .....	134
3.6. A robot modelljének előállítás szimbolikus alakban .....	137
<b>4. PÁLYATERVEZÉS .....</b>	<b>139</b>
4.1. A pályatervezési feladat tipikus sémája .....	139
4.2. Pályatervezés megállítással nélkül, nemfolytonos gyorsulással egy skalárváltozó esetén .....	143
4.3. Pályatervezés megállítással nélkül, folytonos gyorsulással egy skalárváltozó esetén .....	147
4.4. Pályatervezés csuklókoordinátákban .....	150
4.4.1. Pályatervezés álló conveyer esetén .....	150
4.4.2. Pályatervezés mozgó conveyer esetén .....	152
4.5. Pályatervezés Descartes-koordinátákban .....	155

4.5.1. Pályatervezés Descartes-koordinátákban nemfolytonos gyorsulással .....	157
4.5.2. Pályatervezés Descartes-koordinátákban folytonos gyorsulással .....	160
4.5.3. A szögsebesség és a szöggyorsulás számítása a pálya mentén .....	166
4.1. Példa: A kinematikai mennyiségek álló conveyor és Euler-szögek esetén .....	167
4.2. Példa: A $\text{Rot}(t(t), \vartheta(t))$ transzformációhoz tartozó szögsebesség .....	167
4.3. Példa: A $\text{Rot}(t(t), \vartheta(t)) * \text{Rot}(z, \psi(t))$ transzformációhoz tartozó szögsebesség és szöggyorsulás .....	167
4.4. Példa: A kinematikai mennyiségek számítása Paul pályatervezési módszeréhez .....	169
<b>5. A ROBOT SZABAD MOZGÁSÁNAK</b>	
<b>IRÁNYÍTÁSA .....</b>	<b>170</b>
5.1. A robot és a beavatkozó szerv együttes modellje .....	170
5.2. Robotirányítás decentralizált szervokkal .....	172
5.2.1. A csatoló hatás domináns részének leválasztása .....	173
5.2.2. A kompenzálás megtervezése .....	176
5.2.3. A követési tulajdonságok javítása .....	179
5.2.4. A terhelés kompenzálása előrecsatolással .....	181
5.2.5. Decentralizált PID-szabályozás stabilitása és robusztussága .....	181
5.1. Példa: Stabilitásvizsgálat Ljapunov direkt módszerével ..	183
5.3. A kiszámított nyomaték (nemlineáris szétcsatolás) módszere .....	187
5.4. Változó struktúrájú irányítás .....	188
5.4.1. A csúszó felület alapján történő szabályozás elve .....	189
5.2. Példa: Csúszóirányítás másodrendű rendszer esetén ....	190
5.4.2. Az irányítás nagyfrekvenciás komponenseinek kiküszöbölése .....	194
5.3. Példa: Kapcsolási sáv tervezése másodrendű rendszer esetén .....	196
5.4.3. Robot változó struktúrájú irányítása .....	197

5.5.	Szabályozás Descartes-koordinátákban .....	198
5.5.1.	A pozíció- és orientációhiba számítása .....	198
5.5.2.	Gyorsulásirányítás (RMAC) .....	200
5.6.	A robot perturbált mozgásának irányítása .....	202
5.6.1.	A perturbált rendszer linearizált modellje .....	202
5.6.2.	A perturbált lineáris rendszer irányítása .....	203
<b>6.</b>	<b>ERŐIRÁNYÍTÁSI MÓDSZEREK</b> .....	<b>205</b>
6.1.	Az irányítási módszerek osztályozása .....	205
6.2.	Engedékenységi centrum és általánosított centroid számítása .....	209
6.1.	Példa: Scara szerelőrobot engedékenységi mátrixa .....	219
6.3.	Implicit merevség- és impedanciairányítás .....	224
6.4.	Hibrid pozíció-erő irányítás .....	226
6.5.	Az operációs tér módszer .....	231
6.5.1.	Általánosított feladatspecifikációs mátrixok .....	231
6.5.2.	Nemredundáns robot végberendezésének szabad mozgása .....	234
6.5.3.	Nemredundáns robot végberendezésének korlátozott mozgása .....	236
6.5.4.	Redundáns robotok irányítása .....	238
6.5.5.	Szinguláris konfigurációk .....	242
<b>7.</b>	<b>ROBOTOK ADAPTÍV IRÁNYÍTÁSA</b> .....	<b>244</b>
7.1.	A szabad mozgás modellreferenciás adaptív irányítása .....	244
7.2.	A szabad mozgás önhangoló adaptív irányítása .....	250
7.2.1.	Önhangoló adaptív irányítás csuklókoordinátákban .....	253
7.2.2.	Önhangoló adaptív irányítás Descartes-koordinátákban .....	257
7.3.	A korlátozott mozgás önhangoló adaptív irányítása .....	258
<b>8.</b>	<b>SZERELŐROBOTOK IRÁNYÍTÁSÁNAK REAL-TIME ASPEKTUSAI</b> .....	<b>262</b>
8.1.	Az irányítások bonyolultsági foka .....	262
8.2.	A feladatok megosztása és koordinálása .....	263
8.3.	Az irányító berendezés architektúrája .....	266
	<b>FÜGGELÉK</b> .....	<b>270</b>
A.	Az $AC_{\alpha} + BS_{\alpha} = D$ egyenlet megoldásai .....	270

B.	Deriválási szabályok mozgó koordináta-rendszerben .....	271
C.	LaSalle stabilitástétele .....	277
D.	Többváltozós autonóm szabályozási rendszer tervezése időtartományban (állapottér módszer) .....	279
D.1.	Luenberger-féle irányítható és megfigyelhető normálalak ....	281
D.2.	Kompenzálás állapot-visszacsatolással előírt pólusok esetén .....	286
D.3.	Minimális rendű állapotmegfigyelő tervezése .....	289
D.4.	Szétcsatolás és kompenzálás állapot-visszacsatolással (Gilbert-módszer) .....	293
D.5.	Az állapot-visszacsatolás realizálása általánosított PID szabályozóval .....	299
D.6.	Pólusáthelyezés kimeneti visszacsatolással .....	308
E.	Többváltozós autonóm szabályozási körök tervezése frekvenciatartományban .....	311
E.1.	Az átviteli függvény mátrix minimális alakja .....	311
E.2.	Állapot-visszacsatolás és állapotmegfigyelő tervezése frekvenciatartományban .....	316
E.3.	A szétcsatolás megtervezése frekvenciatartományban .....	319
F.	Áttérések a lineáris rendszerek különböző reprezentációi között .....	325
F.1.	Egybemenetű-egykimenetű rendszer diszkrét idejű átviteli függvényének számítása .....	325
F.2.	Áttérés átviteli függvényről állapotegyenletre .....	327
F.3.	Áttérés állapotegyenletről átviteli függvényre .....	328
F.4.	Áttérés folytonos és diszkrét idejű rendszerek között állapottérben .....	329
G.	Optimális irányítás kvadratikus kritérium szerint .....	331
G.1.	Folytonos idejű feladat .....	331
G.2.	Diszkrét idejű feladat .....	334
H.	Diszkrét idejű Kalman-szűrő .....	338
J.	Az inerciamátrix tulajdonságai .....	341
	<b>IRODALOMJEGYZÉK .....</b>	<b>346</b>

A könyv a Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki Karán "Robotok irányítása" címmel 1986-tól tartott előadásaimon alapul, melyek a műszer- és irányítástechnika szakon és az informatika szak robotirányítás ágazatán hangzottak el. Szándékom szerint haszonnal forgathatják a könyvet a robotok alkalmazása és a robotok tervezése iránt érdeklődő mérnök vagy informatikus szakemberek, kutatók, továbbá a műszaki egyetemek, főiskolák oktatói és felsőbb évfolyamos hallgatói.

A témakört a könyv a megírásakor rendelkezésre álló nemzetközi szakirodalom és saját kutatási eredmények alapján a lehetőségekhez képest teljességében kísérli meg átfogni. A matematikai alapoktól kiindulva a geometriai, kinematikai és dinamikus modellek vizsgálatán keresztül jut el a pályatervezési és szabályozástechnikai problémák tárgyalásáig. Ahol ez lehetséges, gyakorlati példák megoldásán keresztül mutatja be az ismertetett módszerek mérnöki alkalmazásának lehetőségeit. A bemutatott algoritmusok és a gazdag példaanyag a robotirányító szoftverrendszerek tervezői és alkalmazói számára nyújtanak segítséget.

A könyv bevezetésre, további nyolc fejezetre és függelékre tagolódik. A *bevezetés* összefoglalja a robottechnikai alapfogalmakat. Az *1. fejezet* a robot geometriai modelljének felállításával, továbbá a robot mozgásszimulációjánál és a pályatervezésnél használható direkt és inverz geometriai probléma megoldásával foglalkozik. A *2. fejezet* a robot sebesség- és gyorsulásviszonyait (a kinematikát) vizsgálja, amely redundáns robotok pályatervezésénél, a dinamikus modellnél és több irányítási módszernél is alkalmazható. A *3. fejezet* a robot dinamikus modelljével foglalkozik, amely a korszerű robotirányítási módszerek alapjául szolgál. A *4. fejezet* a pályatervezési módszereket vizsgálja abban az eléggé általános esetben, amikor a robot mozgó objektumokkal koo-

perál. Az 5. fejezet a robot szabad mozgásának irányítási módszereit mutatja be a klasszikus decentralizált hajtásoktól a korszerű változó struktúrájú és térbeli irányítások felé haladva (kiszámított nyomatékok módszere, csúszószabályozás, RMAC irányítás). A 6. fejezet az erőirányítási módszereket tekinti át, részletesen vizsgálva az engedékenységi centrum fogalmát és a hibrid pozíció- és erőirányítást. A 7. fejezet a modellreferenciás és az önhangoló adaptív irányítás lehetőségeit vizsgálja robotoknál. A 8. fejezet szerelőrobotok valós idejű irányításának architektúrális és szoftver kérdéseivel foglalkozik. A szabályozástechnika iránt általában is érdeklődő számára különösen érdekes lehet a *függelék*, mivel összefoglalja a többváltozós szabályozási rendszerek időtartományban (állapottérben) és frekvenciatarományban történő tervezésére szolgáló fontosabb módszereket, melyek a könyv írásakor magyar nyelven még nem álltak az olvasó rendelkezésére.

A könyv anyagának bizonyos részei a G/6-V Am-6-057 állami megbízás és az OTKA 5-141 téma keretében keletkezett kutatási eredményeimen alapulnak. A kutatási támogatásért ezúton mondok köszönetet.

A könyv megírásához nagymértékben hozzájárultak azok a beszélgetések, melyeket a szakterület hazai és külföldi művelőivel folytathattam. A könyv lektorainak, Keviczky László akadémikusnak és Somló János egyetemi tanárnak külön is megköszönöm hasznos tanácsait.

Speciális köszönet illeti Csala Péter nappali szakmérnök hallgatót, aki vállalta a könyv nyomdakész alakra történő gépelését.

Budapest, 1989. július.

Lantos Béla

# BEVEZETÉS

## ROBOTTECHNIKAI ALAPFOGALMAK

A robot fogalmát a fejlett ipari országokban szabványok rögzítik [25]. Itt megelégszünk a következő értelmezéssel:

- a robot egy irányított mechanizmus,
- előírható pályán mozog,
- a pálya mentén vagy annak meghatározott pontjaiban előírható feladatokat lát el.

A robot mint mechanizmus **szegmensekből** (tagokból) áll, melyeket **csuklók** (izületek) kapcsolnak össze. A szegmens a csukló tengelye körül a megelőző szegmenshez képest elfordulhat (rotációs csukló), vagy a csukló tengelye mentén a megelőző szegmenshez képest elmozdulhat (transzlációs csukló). A rotációs és transzlációs csuklók 1-szabadságfokúak. Nyílt láncú robotok esetén a szegmensek megszámozhatóak úgy, hogy az *i*-edik szegmens helyzete (pozíciója és orientációja) csak az első *i* csuklókoordináta (rotációs csukló esetén szögelfordulás, transzlációs csukló esetén elmozdulás) függvénye. A lánc végén van a munkavégzés céljára szolgáló cserélhető **végberendezés** (effektor), amely a legtöbbször

- ujjszerű megfogó,
- szerszám,
- ponthegesztő berendezés
- ívhegesztő berendezés,
- festékszóró pisztoly,
- lézeres vágóberendezés,
- sorjázóberendezés stb.

Ennek megfelelően a robot legtöbbször

- anyagmozgató robot,
- szerelőrobot,
- ponthegesztő robot,
- ívhegesztő robot,
- festőrobot,
- lézeres vágórobot,
- sorjázórobot stb.

A végberendezés- és a robottípusok köre folyamatosan bővül. Alkalmazástechnikai szempontból szokásos a tömörebb anyagmozgató (manipulációs), szerelő- és technológiai robot felosztás.

A robot irányításához szükség van érzékelőkre, szabályozókra és beavatkozó szervekre. Az érzékelők lehetnek belső és külső érzékelők.

**A belső érzékelők** mérik

- a csuklókoordináták értékét,
- a csuklókoordináták változási sebességét.

**A külső érzékelők** mérik

- a végberendezés pozícióját és orientációját,
- a robot és környezetének kölcsönhatásakor keletkező kontaktuse-  
rőket (hatkomponensű erő és nyomaték érzékelő),
- a tapintási információt (taktilis érzékelő),
- a látási információt (kamera által nyert intenzitásképet /2D/ vagy  
lézerscanner által felvett távolságképet /3D/ feldolgozó látórend-  
szerek).

Sok ipari robot csak belső érzékelőket használ, míg az intelligens robotok külső érzékelőket is. Az érzékelők jeleit és az előírásokat (pálya, erők) a szabályozó kiértékeli és beavatkozik. A **beavatkozó szerv** valamilyen villamos motor és áttétel, hidraulikus motor vagy pneumatikus motor. A beavatkozás elvégzéséhez a jelfeldolgozás eredményét a szabályozóban megfelelő teljesítményszintre kell hozni. Villamos motorok esetén erre a teljesítményelektronika szolgál. A villamos motor

a teljesítményelektronikával a tengely hajtását végzi. Szokásos elnevezése a **szervohajtás**. Sok ipari robot szervohajtása egy belső áram (nyomaték-) szabályozásból, egy a fölé épülő sebesség- (fordulatszám-) szabályozásból és egy a fölé épülő pozíció- (szögelfordulás-) szabályozásból áll. A belső és a középső hurok a szerszámgépekhez hasonlóan sokszor analóg. A pozíciószabályozó alapjele a megfelelő csuklókoordináta előírt pályája és kimenete a sebességszabályozó alapjele. A sebességszabályozó kimenete az áramszabályozó alapjele. Az áramszabályozó kimenete a teljesítményelektronika és az áttétel segítségével befolyásolja a csukló tengelyét mozgó nyomatékot. Áttételt a motor forgási sebességének csökkentésére és a szegmenst meghajtó nyomaték növelésére használunk. Az intelligens robotirányítási algoritmusok a három szabályozási hurok helyett közvetlenül a nyomatékot szabályozzák. A direkt hajtások áttétel nélküli speciális (reluktancia) motorokat használnak, amelyek 60 fordulat/perc fordulatszámon kb. 150 Nm nyomatékot tudnak kifejteni.

A pálya előírását a robotbetanító pult (teach pendant) és a robotprogramozási nyelv segítségével lehet megadni (PUMA 560). A **betanítópult** lehetővé teszi a betanítás (végrehajtás) sebességének megválasztását, a csuklók mozgatását (és vele a végberendezés mozgatását), a végberendezés mozgatását és forgatását a robot álló bázisához vagy relatíve a szerszámhoz rögzített koordinátarendszer tengelyei mentén (mozgatás) vagy körül (forgatás) a megfelelő nyomógombok működtetésével. A robot helyzete eközben lekérdezhető és megfelelő gomb lenyomásával változóhoz rendelhető. A betanított és változókhöz rendelt pozíciók és orientációk hivatkozhatók a robotprogramban a változók nevével. A **robotprogramozási nyelv** lehetővé teszi a betanított változók hozzárendelését a munkaváltozókhöz, azon módosítások (shiftelések) elvégzését, a változókra alapozott pálya befutását, a megfogó nyitását vagy csukását a pálya előírt pontjaiban, ciklusok szervezését, szubrutinok hívását, digitális bemenő jelek lekérdezését, digitális kimenő jelek kiszámítását és kiadását (PLC funkciók realizálását is).

Sok ipari robot, nem rendelkezvén grafikus támogatással, a pálya pontjainak definiálására csak a betanítást engedi meg, de felkínálja azok **módosításának** lehetőségét értékadó utasítások révén a robotprogramozási nyelvben.

A biztonságosság érdekében kikapcsoláskor vagy a tápfeszültség ki-  
maradásakor a robot csuklói **mechanikus fékek** segítségével utolsó  
helyzetükben arretálnak. Ha a hajtások szabályozási köreit bekapcsol-  
juk, akkor a mechanikus fékek elengednek, és a zárt szabályozások révén  
történik az utolsó helyzet tartása. A betanítópulton általában arra is le-  
hetőség van, hogy az egyes tengelyek szabályozási körei közül egyet vagy  
többet felnyissunk, és a robotot (kezünkre nehezedő súlyával) kézzel  
mozgassuk a kívánt pontba és annak értékét a betanító pult megfelelő  
gombjának megnyomásakor változóhoz rendeljük. A megfelelő pontok  
megmutatása és megjegyzése után a megbontott szabályozási köröket  
ismét zárni kell (a betanítópult működtetésével).

A robotprogram végrehajtásakor a megjegyzett változókkal definiált  
pontokat a robot térben összeköti és befutja. Lehetőség van a válto-  
zóban csuklókoordináták vagy pozíciók és orientációk megjegyzésére.  
Ennek alapján ezek összeköthetők csuklókoordinátákban és Descartes-  
koordinátákban.

A betanítópult helyett alkalmazható **master-slave programozás**,  
amikor egy kis teljesítményű, kézzel mozgatható master robot mozgását  
másolja le a valódi, nagy teljesítményű slave robot. Eközben a pálya  
adatai megjegyezhetők, majd visszajátszhatók.

**Pont-pont irányításról** beszélünk, ha a robothajtások tengelyei  
számára nincs definiálva a pálya, csak a soron következő pont. Ilyen-  
kor például minden egyes tengely pozíciószabályozója alapjelként meg-  
kapja a soron következő pont megfelelő csuklókoordinátáját (ponton-  
ként konstans alapjel), és a szabályozás tranziensétől függő, kiadódó  
trajektória mentén fogja a robot a pontot elérni. Ezt az irányítást nem  
célszerű alkalmazni, ha a robot környezetében akadályok vannak, mi-  
vel nem tudjuk megítélni, lesz-e ütközés. A trajektória a sebességtől is  
függ.

**Folytonos pályairányításnál** a befutandó pontok között interpo-  
lálás történik, amely elvégezhető csuklókoordinátákban vagy Descartes-  
koordinátákban. A legelterjedtebb két sarokpontot (tartópontot) egye-  
nessel összekötni a megfelelő változók terében. Figyelembe kell azon-  
ban venni, hogy míg derékszögű koordinátákban két pont között line-  
árisan interpolálva a két pontot összekötő egyenest kapunk a térben,  
addig csuklókoordináták között lineárisan interpolálva általában nem

kapunk térbeli egyenest, mert a megfogó pozíciója a rotációs csuklók miatt trigonometrikus függvények alakjában függ a csuklóváltozóktól, tehát nemlineárisan. Így csuklókoordináták között lineárisan interpolálva hullámos görbét kapunk a térben, amely szintén nehezen áttekinthető. Másrészt, ha a pontokat összekötő görbét már ismerjük, még mindig hátra van az időparaméter elosztása a görbe mentén. Ezt az előírt vagy a maximális sebességek és gyorsulások figyelembevételével kell elvégezni. Nem célszerű minden tengelyt maximális sebességgel mozgatni. Nincs ugyanis értelme, hogy az a csukló, amelynek a két sarokpont között kicsit kell változnia, maximális sebességgel fusson be a soron következő sarokpontba, mert akkor fölöslegesen korábban éri el új értékét, míg más csuklók a két sarokpont közötti nagyobb változás miatt csak később érik el új értéküket. Ezért **koordinált mozgásra** kell törekedni. Csak a legnagyobb változást igénylő csuklót kell maximális sebességgel mozgatni, törekedvén arra, hogy az összes csukló az új sarokpontot egyszerre érje el.

Ha a pálya sarokpontjai között lineárisan interpolálunk és a pálya sarokpontjain hiba nélkül akarunk áthaladni, akkor (a gyorsulás korlátozott volta miatt) lokálisan le kell állni. Fordítva, ha nem akarunk a sarokpontokon leállni, akkor szükségképpen a megfogó csak a sarokpontok közelében (de nem precízen azokon) fog elhaladni.

A robotprogramozási nyelv rendszerint lehetőséget ad arra, hogy megválasszuk, melyik változóban (csuklókoordinátákban vagy derékszögű koordinátákban) kell interpolálni és át kell-e haladni a közbenső sarokpontokon.

A robot irányítási rendszere rendszerint hierarchikus. Egy **magasabb hierarchiaszint** összeköti a sarokpontokat, megválasztja a befutáshoz szükséges időt és kiszámítja a pálya közbenső pontjaihoz tartozó csuklókoordináta-értékeket, eljuttatja azokat az **alacsonyabb hierarchiaszintre** az egyes tengelyek szervohajtásainak alapjelbemeneteire, ahol analóg vagy mikroprocesszoros szabályozás révén megtörténik a pálya realizálása. Ilyenkor az alapjelek időfüggvények (követő szabályozás). Nem szabad elfeledkezni azonban arról, hogy a realizált trajektória a szabályozás tranzienst és statikus hibái révén eltérhet a pályától. Ennek mértéke függ a választott sebességtől, a szabályozási algoritmus intelligenciájától és robusztusságától, a motoroktól, a teljesítményelek-

tronikától, az áttételek kotyogásától és az érzékelők pontosságától. A robotirányítás központi kérdése, hogyan lehet alkalmasan választott algoritmusokkal az előírt feladatokat kis hibával realizálni. A könyv célja ilyen irányítási algoritmusok bemutatása.

**Kiváló könyvek léteznek**, melyek a robotirányítás egyes részeit nagy alaposággal tárgyalják [1], [2], [10], [24], [25], [26], [28]. Mint minden viszonylagos teljességre törekvő könyvben, így ebben a könyvben is fellelhetők hasonlóságok más könyvekkel. Ezek közül az alapműnek számító Paul [2] könyv, továbbá Vukobratovic és Potkonjak [24], Asada és Slotine [10] könyve, valamint Khatib [20], Slotine és Li [22], [23], Wang és Buthner [27] cikke külön is kiemelkedő. A könyvben közölt levezetések önállóak, és egységes alapokon nyugszanak. Ha az eredmény régóta ismert és az elnevezés (Euler-szög, Rodrigues-képlet) azonosítja a szerzőt, úgy azt nem hivatkozunk. Ha egy robotikai probléma egyszerű matematikai feladatra vezet, amely elemi módszerekkel megoldható (például a pályatervezéskor a negyedfokú polinom együtthatóinak meghatározása öt feltételből), akkor nem keressük, ki végezte el azt először a robotikában. Minden más esetben törekszünk a korrekt forrás megadására.

A **magyar nyelven** ezen a területen megjelent művek közül Báthor [33] homogén transzformációt használó műszaki doktori disszertációja, Siegler [32] könyve, Somló (szerk.) [34] tanulmánya, Cat [35] akadémiai doktori disszertációja és a [36], [37] diplomatervek külön kiemelendők. Bár a könyvnek nem célja, hogy részletesen ismertesse, mely intézmények végeztek úttörő munkát a **robotirányítási** kultúra és oktatás megteremtése területén, a teljességre törekvés igénye nélkül szeretném kiemelni az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, a BME Gépészmérnöki Karán a Gépgyártástechnológia Tanszék és az Elektrotechnika Tanszék, a BME Villamosmérnöki Karán a Folyamat-szabályozási Tanszék, az Automatizálási Tanszék és a Villamosgépek Tanszék tevékenységét, valamint az ország többi műszaki egyetemének és főiskolájának, az OKKFT G/6 programirodának és az Országos Műszaki Fejlesztési Bizottságnak a munkáját.

# 1. A ROBOT KINEMATIKÁJA: GEOMETRIA

A robot különböző szintű modelljei közül a legegyszerűbb a geometriai modell. Nem igényli a sebességek és az inerciaparaméterek (tömeg és tehetetlenségi nyomatékok) ismeretét. Arra a kérdésre ad választ, hogyan függ a csuklókoordinátáktól a végberendezés pozíciója és orientációja (direkt geometriai feladat). Ha tehát előírjuk a pozíciót és az orientációt, ezt az összefüggést kell "invertálni" ahhoz, hogy meghatározzuk azokat a csuklókoordináta-értékeket, amelyeket az egyes tengelyek szervosabályozásainak alapjelbemeneteire kell eljuttatni (inverz geometriai feladat).

Az elvi alapokat a különböző forgatások, az orientáció jellemzési módjai és a homogén transzformációk szolgáltatják. A szomszédos szegmensek közötti kapcsolat jellemzésére a Denavit-Hartenberg-alakot használjuk. Az inverz geometriai feladat megoldására két módszert ismertetünk (dekompozíció és független egyenletek keresése). Ezek alkalmazása sok esetben eredményre vezet, de alkalmazhatóságuk feltételekhez kötött. Különösen problematikusak azok az esetek, amelyekben a robot tengelyei között több, egymás után következő, párhuzamos rotációs csuklótengely fordul elő. Redundáns szabadságfokok esetén több változó van mint feltétel, és a végtelen sok megoldás közül egy "kedvező" kiválasztása az inverz geometriai módszerrel nem lehetséges.

## 1.1. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

Jelölje  $R^n$  az  $n$ -dimenziós vektorteret és legyen  $P$  a tér egy pontja. Jelölje  $\mathbf{x}$  a tér origójából a  $P$  pontba mutató vektort. Ha lerögzítjük a tér  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  bázisvektorait, akkor  $\mathbf{x}$  egyértelműen felírható

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j \quad (1.1)$$

alakban. A rögzített bázisban  $\mathbf{x}$  és a koordinátáiból képzett szám  $n$ -es azonosítható:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

A megfeleltetés  $P$  és  $\mathbf{x}$  között független a bázistól, míg ugyanannak a pontnak a koordinátái különböző bázisokban eltérőek lehetnek.

Az  $\mathcal{A} : R^n \rightarrow R^m$  leképezést (függvényt, transzformációt) **lineáris transzformációnak** nevezzük, ha

$$\mathcal{A}(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \beta \mathcal{A}(\mathbf{y}) \quad (1.3)$$

teljesül. A bázisok megválasztásától független  $\mathcal{A}$  lineáris leképezés (ponttranszformáció) jellemezhető egy bázisfüggő  $\mathbf{A}$  mátrixszal:

$$\begin{array}{ccc} R^n & \xrightarrow{\mathcal{A}} & R^m \\ \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_m \end{bmatrix} \\ R^n & \xrightarrow{\mathbf{A}} & R^m \end{array} \quad (1.4)$$

Legyen ugyanis

$$\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m y_i \mathbf{f}_i, \quad (1.5)$$

$$\mathcal{A}e_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{f}_i, \quad (1.6)$$

akkor (1.1) és (1.3) alapján

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{f}_i &= \sum_{j=1}^n x_j \mathcal{A}e_j = \sum_{j=1}^n x_j \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{f}_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \mathbf{f}_i, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longleftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.8)$$

$\begin{matrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{A}e_1 & \dots & \mathcal{A}e_n \end{matrix}$

felírva az  
 $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$   
bázisban

Az (1.6) és (1.8) egyenletek együttesen azt jelentik, hogy az  $\mathcal{A}$  lineáris transzformáció  $\mathbf{A}$  mátrixának  $j$ -edik oszlopa a kiindulási tér  $e_j$  bázisvektorának az  $\mathcal{A}e_j$  képe felírva a képtér bázisában.

### 1.1. Példa: Vektorszorzás

Legyen  $\mathbf{a} \in R^3$  egy lerögzített vektor, és

$$\mathcal{A}\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a} \times \mathbf{x} \quad (1.9)$$

a lineáris transzformáció, ahol kereszt ( $\times$ ) jelöli a vektorszorzást. Jelölje

$$\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{a} \times] \quad (1.10)$$

a lineáris transzformáció mátrixát az  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  ortonormált bázisban:

$$\begin{array}{ccc} R^3 & \xrightarrow{\mathbf{A}} & R^3 \\ \left[ \begin{array}{c} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{array} \right] & & \left[ \begin{array}{c} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{array} \right] \\ R^3 & \xrightarrow{[\mathbf{a} \times]} & R^3 \end{array} \quad (1.11)$$

Képezzük a bázisvektorok képét a szimbolikus determináns felhasználásával:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{i} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_z \mathbf{j} - a_y \mathbf{k}, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a_x \mathbf{k} - a_z \mathbf{i}, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_y \mathbf{i} - a_x \mathbf{j}, \quad (1.14)$$

akkor (1.8) alapján

$$[\mathbf{a} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

## 1.2. Példa: Diadikus szorzás

Legyenek  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^3$  lerögzített vektorok, és

$$\mathcal{A}\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a} \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) \quad (1.16)$$

a lineáris transzformáció, ahol  $\langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}$  jelöli a skalárszorzatot. Jelölje

$$\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{a} \circ \mathbf{b}] \quad (1.17)$$

a lineáris transzformáció mátrixát az  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  ortonormált bázisban:

$$\begin{array}{ccc} R^3 & \xrightarrow{\mathcal{A}} & R^3 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \\ R^3 & \xrightarrow{[\mathbf{a} \circ \mathbf{b}]} & R^3 \end{array} \quad (1.18)$$

A bázisvektorok képei

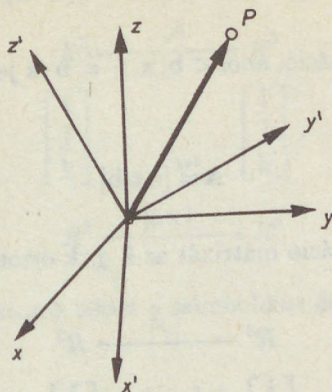
$$\begin{aligned} \mathbf{a} \langle \mathbf{b}, \mathbf{i} \rangle &= ab_x, \\ \mathbf{a} \langle \mathbf{b}, \mathbf{j} \rangle &= ab_y, \\ \mathbf{a} \langle \mathbf{b}, \mathbf{k} \rangle &= ab_z, \end{aligned} \quad (1.19)$$

ezért (1.8) alapján

$$[\mathbf{a} \circ \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

### 1.3. Példa: Koordinátatranszformáció

Tekintsük a közös origóval rendelkező  $K$  és  $K'$  koordinátarendszereket és egy tetszőleges közös  $P$  pontot (1.1 ábra):



1.1. ábra

Koordinátatranszformáció

Legyenek  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  és  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  a tengelyek irányába mutató bázisvektorok. Mivel a  $P(x, y, z) = P(x', y', z')$  pont közös, ezért  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$  az identikus transzformáció, amelynek  $\mathbf{A}$  mátrixa azonban eltér az  $\mathbf{I}$  egységmátrixtól:

$$\begin{array}{ccc}
 R^3 & \xrightarrow{\mathbf{I}} & R^3 \\
 \left[ \begin{array}{c} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{array} \right] & & \left[ \begin{array}{c} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{array} \right] \\
 R^3 & \xrightarrow{\mathbf{A}} & R^3
 \end{array} \quad (1.21)$$

Mivel  $\mathbf{I}\mathbf{i}' = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{I}\mathbf{j}' = \mathbf{j}$  és  $\mathbf{I}\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ , ezért (1.6) és (1.8) alapján

$$\mathbf{A} = [\mathbf{i}' \mathbf{j}' \mathbf{k}'] \quad (1.22)$$

felírva az  
 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$   
 bázisban

és

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Az  $\mathbf{A}$  jelentősége kettős. Egyrészt (1.22) alapján közvetlenül megadja a  $K'$  koordinátarendszer tengelyeinek orientációját (állását) a  $K$  koordinátarendszerben, másrészt (1.23) alapján kapcsolatot teremt **ugyanannak** a  $P$  pontnak  $K'$  és  $K$ -beli koordinátái között. A két koordinátarendszer felcserélésével írható:

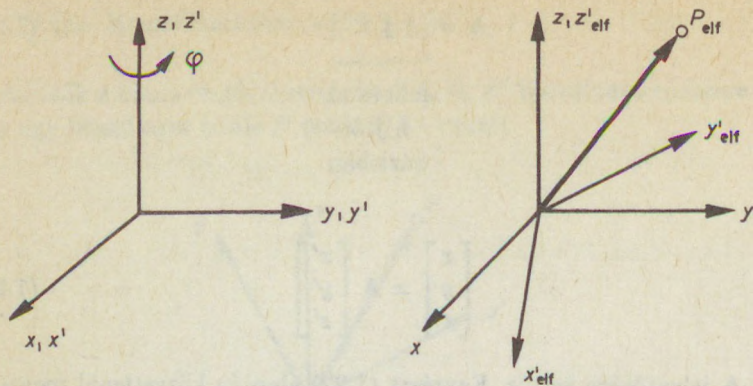
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

felírva az  
 $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$   
 bázisban

#### 1.4. Példa: Forgatás a $z$ tengely körül $\varphi$ szöggel

Essenek eredetileg egybe a  $K$  és  $K'$  derékszögű koordinátarendszerek. Forgassuk el a  $K'$  koordinátarendszert a  $z$  tengely körül  $\varphi$  szöggel (1.2 ábra).

Tekintsük a forgatás utáni helyzetet és mindkét koordinátarendszerben **ugyanazt** a  $P_{el}$  pontot **a forgatás után**, akkor alkalmazhatók az 1.3. példa eredményei:



1.2. ábra

Forgatás a z tengely körül

$$\begin{array}{ccc}
 R^3 & \xrightarrow{\mathcal{I}} & R^3 \\
 \left[ \begin{array}{c} \mathbf{i}'_{elf} \\ \mathbf{j}'_{elf} \\ \mathbf{k}'_{elf} \end{array} \right] & & \left[ \begin{array}{c} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{array} \right], & (1.25) \\
 R^3 & \xrightarrow{\mathbf{Rot}(z, \varphi)} & R^3
 \end{array}$$

$$\mathbf{Rot}(z, \varphi) = \underbrace{[\mathbf{i}'_{elf} \quad \mathbf{j}'_{elf} \quad \mathbf{k}'_{elf}]}, \quad (1.26)$$

felírva az  
 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$   
 bázisban

$$\begin{bmatrix} x_{elf} \\ y_{elf} \\ z_{elf} \end{bmatrix} = \mathbf{Rot}(z, \varphi) \begin{bmatrix} x'_{elf} \\ y'_{elf} \\ z'_{elf} \end{bmatrix} = \mathbf{Rot}(z, \varphi) \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}. \quad (1.27)$$

Itt felhasználtuk, hogy a pont együtt forgott a  $K'$  koordináta-rendszerrel, ezért koordinátái a forgás előtt és után megegyeznek:

$$\begin{bmatrix} x'_{elj} \\ y'_{elj} \\ z'_{elj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}. \quad (1.28)$$

Az 1.3. ábra alapján

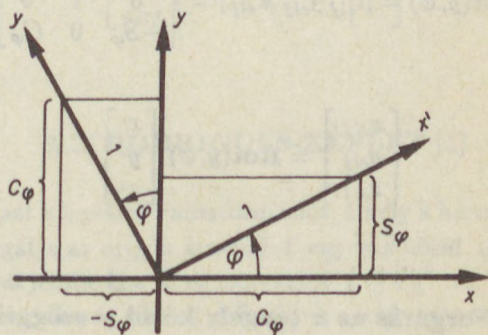
$$\mathbf{Rot}(z, \varphi) \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.29)$$

vagy a robotikában szokásos

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta + \dots) &= C_{\alpha\beta\dots}, \\ \sin(\alpha + \beta + \dots) &= S_{\alpha\beta\dots} \end{aligned} \quad (1.30)$$

jelölés mellett:

$$\mathbf{Rot}(z, \varphi) \begin{bmatrix} C_\varphi & -S_\varphi & 0 \\ S_\varphi & C_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.31)$$

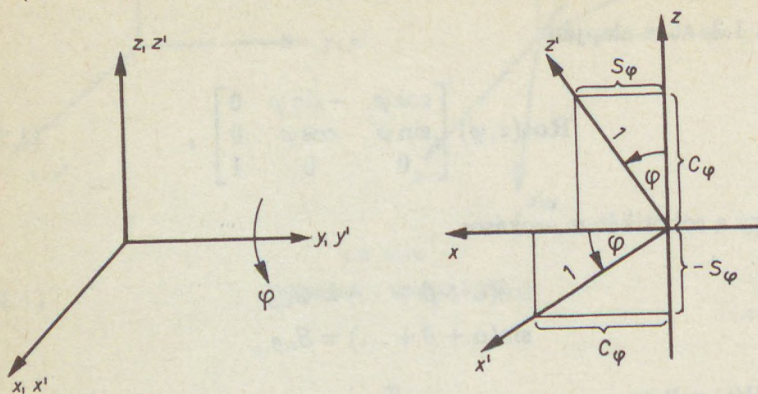


1.3. ábra

$\mathbf{i}'_{elj}$  és  $\mathbf{j}'_{elj}$  koordinátái

### 1.5. Példa: Forgatás az $y$ tengely körül $\varphi$ szöggel

Essenek eredetileg egybe a  $K$  és  $K'$  derékszögű koordinátarendszerek. Forgassuk el a  $K'$  koordinátarendszert az  $y$  tengely körül  $\varphi$  szöggel (1.4 ábra).



1.4. ábra  
Forgatás az  $y$  tengely körül

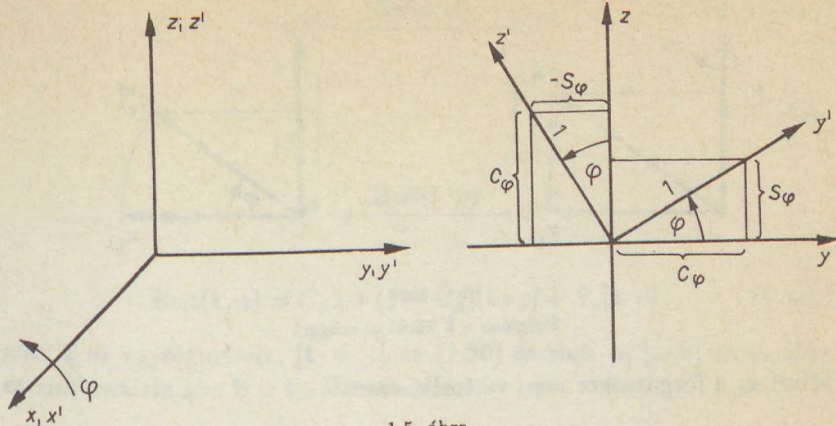
Az 1.4. példához hasonlóan kapjuk:

$$\mathbf{Rot}(y, \varphi) = [\mathbf{i}'_{elj} \mathbf{j}'_{elj} \mathbf{k}'_{elj}] = \begin{bmatrix} C_\varphi & 0 & S_\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\varphi & 0 & C_\varphi \end{bmatrix}, \quad (1.32)$$

$$\begin{bmatrix} x_{elj} \\ y_{elj} \\ z_{elj} \end{bmatrix} = \mathbf{Rot}(y, \varphi) \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}. \quad (1.33)$$

### 1.6. Példa: Forgatás az $x$ tengely körül $\varphi$ szöggel

Essenek eredetileg egybe a  $K$  és  $K'$  derékszögű koordinátarendszerek. Forgassuk el a  $K'$  koordinátarendszert az  $x$  tengely körül  $\varphi$  szöggel (1.5 ábra).



1.5. ábra  
Forgatás a  $x$  tengely körül

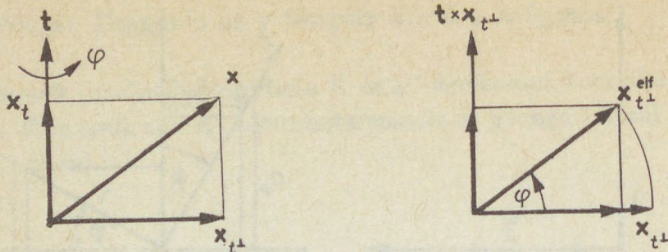
Az 1.4. példához hasonlóan kapjuk:

$$\mathbf{Rot}(x, \varphi) = [\mathbf{i}'_{elf} \mathbf{j}'_{elf} \mathbf{k}'_{elf}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\varphi & -S_\varphi \\ 0 & S_\varphi & C_\varphi \end{bmatrix}, \quad (1.34)$$

$$\begin{bmatrix} x_{elf} \\ y_{elf} \\ z_{elf} \end{bmatrix} = \mathbf{Rot}(x, \varphi) \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

## 1.2. RODRIGUES-KÉPLET [1]

Tekintsük azt a lineáris transzformációt, amely a háromdimenziós tér pontjait elforgatja az origón átmenő  $t$  egyenes körül  $\varphi$  szöggel. A  $t$  egyenes irányát jelölje ki a  $t$  egységvektor ( $\|t\|^2 = \langle t, t \rangle = 1$ ). A forgatás pozitív irányát  $t$  körül definiáljuk a jobbszavar-szabály szerint. Legyen  $x$  az elforgatandó pont, amelynek vetületei a forgatás előtt  $t$  irányban és a  $t$ -re merőleges síkban rendre  $x_t$  és  $x_{t\perp}$  (1.6. ábra, bal oldal). Jelölje az  $x_{t\perp}$  vetület elforgatott képét a  $t$ -re merőleges síkban  $x'_{t\perp}$  (1.6. ábra, jobb oldal).



1.6. ábra  
Forgatás a  $\mathbf{t}$  körül  $\varphi$  szöggel

Mivel  $\mathbf{x}_t$  a forgatáskor nem változik, ezért

$$\mathbf{x}^{elf} = \mathbf{x}_t + \mathbf{x}_{t\perp}^{elf}, \quad (1.36)$$

ahol

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{t} \langle \mathbf{t}, \mathbf{x} \rangle, \quad (1.37)$$

$$\mathbf{x}_{t\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_t = \mathbf{x} - \mathbf{t} \langle \mathbf{t}, \mathbf{x} \rangle, \quad (1.38)$$

Másrészt a  $\mathbf{t}$ -re merőleges síkban  $\mathbf{x}_{t\perp}$  és  $\mathbf{t} \times \mathbf{x}_{t\perp}$  egymásra merőleges irányok, továbbá

$$\|\mathbf{t} \times \mathbf{x}_{t\perp}\| = \|\mathbf{t}\| \|\mathbf{x}_{t\perp}\| \sin 90^\circ = \|\mathbf{x}_{t\perp}\|, \quad (1.39)$$

ezért

$$\mathbf{x}_{t\perp}^{elf} = \mathbf{x}_{t\perp} \cos \varphi + \mathbf{t} \times \mathbf{x}_{t\perp} \sin \varphi, \quad (1.40)$$

amiből (1.36) – (1.38) alapján következik, hogy

$$\mathbf{x}^{elf} = \mathbf{t} \langle \mathbf{t}, \mathbf{x} \rangle + (\mathbf{x} - \mathbf{t} \langle \mathbf{t}, \mathbf{x} \rangle) \cos \varphi + \mathbf{t} \times \mathbf{x} \sin \varphi. \quad (1.41)$$

Rendezés után kapjuk a **Rodrigues-képletet**:

$$\mathbf{x}^{elf} = \text{Rot}(\mathbf{t}, \varphi) \mathbf{x} = \mathbf{x} \cos \varphi + \mathbf{t} \langle \mathbf{t}, \mathbf{x} \rangle (1 - \cos \varphi) + \mathbf{t} \times \mathbf{x} \sin \varphi. \quad (1.42)$$

Felhasználva az 1.1. és 1.2. példa eredményeit, írható, hogy

$$R^3 \xrightarrow{\text{Rot}(t, \varphi)} R^3$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \qquad \qquad \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}, \qquad (1.43)$$

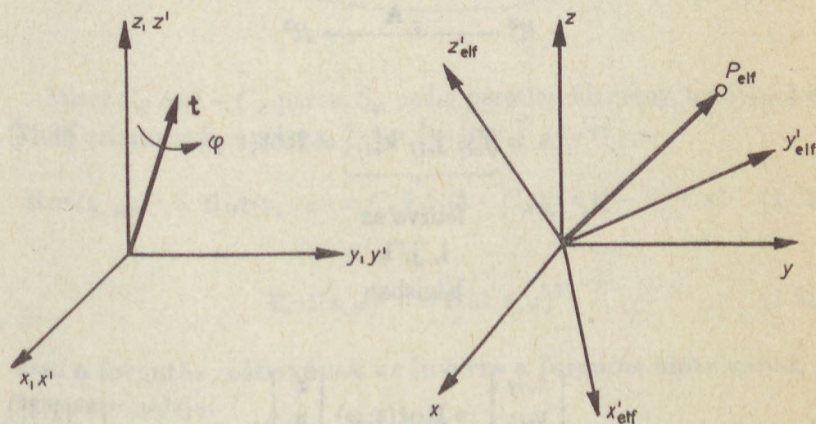
$$R^3 \xrightarrow{\text{Rot}(t, \varphi)} R^3$$

$$\text{Rot}(t, \varphi) = C_\varphi \mathbf{I} + (1 - C_\varphi)[t \circ t] + S_\varphi[t \times], \qquad (1.44)$$

ahol  $\mathbf{I}$  az egységmátrix,  $[t \circ t]$  az (1.20) szerinti és  $[t \times]$  az (1.15) szerinti mátrix  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{t}$  választással.

### 1.7. Példa: Koordinátatranszformáció általános forgatás esetén

Essenek eredetileg egybe a  $K$  és  $K'$  derékszögű koordinátarendszerek. Forgassuk el a  $K'$  koordinátarendszert az origón átmenő  $\mathbf{t}$  irány körül  $\varphi$  szöggel (1.7. ábra).



1.7. ábra

Koordinátatranszformáció általános forgatás esetén

Mivel  $K$  és  $K'$  eredetileg egybeestek, ezért a Rodrigues-képlet szerint

$$\begin{aligned} \mathbf{i}'_{elf} &= \mathbf{Rot}(\mathbf{t}, \varphi) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{Rot}(\mathbf{t}, \varphi) \quad \text{első oszlopa,} \\ \mathbf{j}'_{elf} &= \mathbf{Rot}(\mathbf{t}, \varphi) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{Rot}(\mathbf{t}, \varphi) \quad \text{második oszlopa,} \\ \mathbf{k}'_{elf} &= \mathbf{Rot}(\mathbf{t}, \varphi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{Rot}(\mathbf{t}, \varphi) \quad \text{harmadik oszlopa,} \end{aligned} \quad (1.45)$$

ahonnan az 1.4. példához hasonlóan következik, hogy

$$\begin{array}{ccc} R^3 & \xrightarrow{\mathcal{I}} & R^3 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{i}'_{elf} \\ \mathbf{j}'_{elf} \\ \mathbf{k}'_{elf} \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}, \\ R^3 & \xrightarrow{\mathbf{A}} & R^3 \end{array} \quad (1.46)$$

$$\mathbf{A} = \underbrace{[\mathbf{i}'_{elf} \ \mathbf{j}'_{elf} \ \mathbf{k}'_{elf}]} = \mathbf{Rot}(\mathbf{t}, \varphi), \quad (1.47)$$

felírva az  
 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$   
bázisban

$$\begin{bmatrix} x_{elf} \\ y_{elf} \\ z_{elf} \end{bmatrix} = \mathbf{Rot}(\mathbf{t}, \varphi) \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}. \quad (1.48)$$

### 1.3. FORGATÁS INVERZE

Tekintsünk egy általános helyzetű  $\mathbf{t}$  irány körül  $\varphi$  szöggel történő forgatást, amelynek a  $\text{Rot}(\mathbf{t}, \varphi)$  lineáris transzformáció felel meg. A  $\text{Rot}(\mathbf{t}, \varphi)$  lineáris transzformáció után az inverzét alkalmazva a tér pontjai visszatérnek kiindulási helyzetükbe. A lineáris transzformáció inverze ezért a visszaforgatás:

$$\text{Rot}(\mathbf{t}, \varphi)^{-1} = \text{Rot}(\mathbf{t}, -\varphi), \quad (1.49)$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & \mathbf{I} & \\
 & \curvearrowright & \\
 R^3 & \xrightarrow{\text{Rot}(\mathbf{t}, \varphi)} & R^3 \xrightarrow{\text{Rot}(\mathbf{t}, -\varphi)} R^3 \\
 \left[ \begin{array}{c} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{array} \right] & & \left[ \begin{array}{c} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{array} \right], & (1.50) \\
 R^3 & \xrightarrow{\text{Rot}(\mathbf{t}, \varphi)} & R^3 \xrightarrow{\text{Rot}(\mathbf{t}, -\varphi)} & R^3 \\
 & \curvearrowleft & \\
 & \mathbf{I} & 
 \end{array}
 \end{array}$$

Mivel  $C_\varphi$  és  $1 - C_\varphi$  páros,  $S_\varphi$  pedig páratlan függvény, továbbá  $\mathbf{I}$  és  $[\mathbf{t} \circ \mathbf{t}]$  szimmetrikus mátrix,  $[-\mathbf{t} \times] = [\mathbf{t} \times]^T$ , ezért

$$\text{Rot}(\mathbf{t}, \varphi)^{-1} = \text{Rot}(\mathbf{t}, -\varphi) = C_\varphi \mathbf{I} + (1 - C_\varphi)[\mathbf{t} \circ \mathbf{t}] - S_\varphi[\mathbf{t} \times], \quad (1.51)$$

$$\text{Rot}(\mathbf{t}, \varphi)^{-1} = \text{Rot}(\mathbf{t}, \varphi)^T, \quad (1.52)$$

azaz a forgatás mátrixának az inverze a forgatás mátrixának a transzponáltja.

## 1.4. AZ ORIENTÁCIÓ JELLEMZÉSE t TENGELEY KÖRÜLI $\varphi$ FORGATÁSSAL

Legyenek  $K$  és  $K'$  derékszögű koordinátarendszerek, amelyeknek közös az origójuk (1.1. ábra). Akkor  $K'$  állása  $K$ -hoz képest ismert, ha előírtuk az (1.22) szerinti  $\mathbf{A}$  mátrix számszerű értékét. Felvetődik a kérdés, hogy előírva  $K'$  orientációjának (állásának) számszerű értékét, el lehet-e jutni  $K$ -ból egy  $\mathbf{t}$  irány körül  $\varphi$ -vel történő forgatás révén  $K'$ -be. Más szóval  $\mathbf{A}$  kilenc valós paramétere jellemezhető-e  $\mathbf{t}$  és  $\varphi$  három valós paraméterével ( $\|\mathbf{t}\| = 1$  miatt  $\mathbf{t}$ -nek csak két független paramétere van). A megoldást  $\varphi \in [0, \pi]$  esetén határozzuk meg, ahol

$$S_\varphi \in [0, 1], \quad C_\varphi \in [-1, 1], \quad 1 - C_\varphi \in [0, 2]. \quad (1.53)$$

Keressük tehát az

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} = C_\varphi \mathbf{I} + (1 - C_\varphi)[\mathbf{t} \circ \mathbf{t}] - S_\varphi[\mathbf{t} \times] = \\ &= \begin{bmatrix} C_\varphi + (1 - C_\varphi)t_x t_x & (1 - C_\varphi)t_x t_y - S_\varphi t_z & (1 - C_\varphi)t_x t_z + S_\varphi t_y \\ (1 - C_\varphi)t_x t_y + S_\varphi t_z & C_\varphi + (1 - C_\varphi)t_y t_y & (1 - C_\varphi)t_y t_z - S_\varphi t_x \\ (1 - C_\varphi)t_x t_z - S_\varphi t_y & (1 - C_\varphi)t_y t_z + S_\varphi t_x & C_\varphi + (1 - C_\varphi)t_z t_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.54)$$

transzcendens egyenletrendszer megoldását. Vethetjük rendre a főátlóban álló elemek összegét, a főátlóra szimmetrikusan elhelyezkedő két elem különbségét és kifejezhetjük  $\mathbf{t}$  komponenseit a főátlóbeli elemekből [1]:

$$3C_\varphi + (1 - C_\varphi) \|\mathbf{t}\|^2 = l_x + m_y + n_z \implies C_\varphi = \frac{l_x + m_y + n_z - 1}{2}, \quad (1.55)$$

$$\left. \begin{aligned} m_z - n_y &= 2t_x S_\varphi \\ n_x - l_z &= 2t_y S_\varphi \\ l_y - m_x &= 2t_z S_\varphi \end{aligned} \right\} S_\varphi = \frac{+\sqrt{(m_z - n_y)^2 + (n_x - l_z)^2 + (l_y - m_x)^2}}{2}, \quad (1.56)$$

$$t_x = \sqrt{\frac{l_x - C_\varphi}{1 - C_\varphi}} \operatorname{sign}(m_z - n_y), \quad (1.57)$$

$$t_y = \sqrt{\frac{m_y - C_\varphi}{1 - C_\varphi}} \operatorname{sign}(n_x - l_z), \quad (1.58)$$

$$t_z = \sqrt{\frac{n_z - C_\varphi}{1 - C_\varphi}} \operatorname{sign}(l_y - m_x), \quad (1.59)$$

ahol

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0; \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases} \quad (1.60)$$

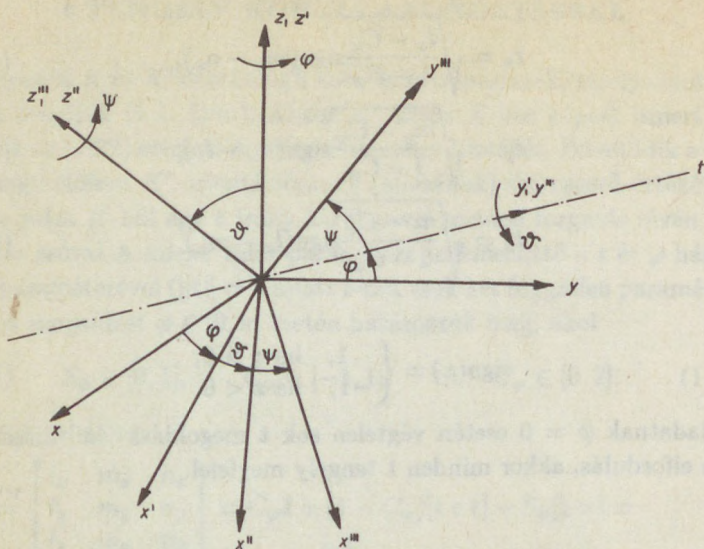
A feladatnak  $\varphi = 0$  esetén végtelen sok  $t$  megoldása van, hiszen ha nincs elfordulás, akkor minden  $t$  tengely megfelel.

### 1.5. AZ ORIENTÁCIÓ JELLEMZÉSE EULER-SZÖGEEKKEL [1]

Legyenek  $K$  és  $K'''$  derékszögű koordinátarendszerek, amelyeknek közös az origójuk. Meghatározunk három speciális forgatást, amelyek révén  $K$ -ból  $K'''$ -be lehet jutni (1.8. ábra).

Legyen  $t = [x, y] \cap [x''', y''']$  a két sík metszéspontja. Válasszunk egy  $K'$  koordinátarendszert, amelyik egybeesik  $K$ -val. Forgassuk el a  $K'$  koordinátarendszert  $z$  körül  $\varphi$  szöggel úgy, hogy  $y'$  és  $t$  egybeessenek. Válasszunk egy  $K''$  koordinátarendszert, amelyik egybeesik  $K'$ -vel. Forgassuk el a  $K''$  koordinátarendszert  $y'$  körül  $\vartheta$  szöggel úgy, hogy  $z''$  egybeessen az előre adott  $z'''$ -vel. Válasszunk egy  $K''''$  koordinátarendszert, amelyik egybeesik  $K''$ -vel. Forgassuk el a  $K''''$  koordinátarendszert  $z''$  körül  $\psi$  szöggel úgy, hogy  $y''''$  tengelye egybeessen az előre adott  $y'''$ -vel. Alkalmazzuk az 1.4. és 1.5. példa eredményeit:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \mathbf{Rot}(z'', \psi) \begin{bmatrix} x'''' \\ y'''' \\ z'''' \end{bmatrix}, \quad (1.61)$$



1.8. ábra  
Euler-szögek

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathbf{Rot}(y', \vartheta) \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}, \quad (1.62)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{Rot}(z, \varphi) \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad (1.63)$$

amiből következik, hogy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{Rot}(z, \varphi) \mathbf{Rot}(y', \vartheta) \mathbf{Rot}(z'', \psi) \begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{bmatrix}, \quad (1.64)$$

$$\mathbf{Euler}(\varphi, \vartheta, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Rot}(z, \varphi) \mathbf{Rot}(y', \vartheta) \mathbf{Rot}(z'', \psi) =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} C_\varphi & -S_\varphi & 0 \\ S_\varphi & C_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\vartheta & 0 & S_\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\vartheta & 0 & C_\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} C_\varphi C_\vartheta C_\psi - S_\varphi S_\psi & -C_\varphi C_\vartheta S_\psi - S_\varphi C_\psi & C_\varphi S_\vartheta \\ S_\varphi C_\vartheta C_\psi + C_\varphi S_\psi & -S_\varphi C_\vartheta S_\psi + C_\varphi C_\psi & S_\varphi S_\vartheta \\ -S_\vartheta C_\psi & S_\vartheta S_\psi & C_\vartheta \end{bmatrix}. \quad (1.65)
\end{aligned}$$

Ha előírjuk  $K'''$  orientációjának számszerű értékét  $K$ -hoz képest, akkor a  $\varphi, \vartheta, \psi$  Euler-szögeket az

$$\text{Euler}(\varphi, \vartheta, \psi) = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

transzcendens egyenletrendszer megoldásával kell meghatározni. A megoldásokat a  $(-\pi, \pi]$  intervallumban keressük. Kerülni fogjuk az arcsin és arccos függvényeket, mert pl. az  $\arccos x$  függvény  $x = 1$  környékén kis számítási hibára  $x$ -ben nagy számítási hibát eredményezhet arccos  $x$  értékében. Másrészt, ha ismerjük  $S_x$  és  $C_x$  értékét, akkor ismerjük a síknegyedet is, ezért ekkor  $\arctan(S_x/C_x)$  egyetlen értéket ad.

a)  $n_x = n_y = 0$  esetén  $S_\vartheta = 0$ . Két eset lehetséges.

i)  $n_z = C_\vartheta = 1$  esetén  $\vartheta = 0$  ( $z = z'''$ ). Ekkor

$$\begin{bmatrix} C_{\varphi\psi} & -S_{\varphi\psi} \\ S_{\varphi\psi} & C_{\varphi\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & m_x \\ l_y & m_y \end{bmatrix}, \quad (1.67)$$

$$\varphi + \psi = \arctan\left(\frac{l_y}{l_x}\right). \quad (1.68)$$

Csak  $\varphi + \psi$  határozható meg.

Például választható  $\psi = 0$  vagy - ha van előző érték, akkor -

$$\varphi := \varphi_{\text{rég}} + \frac{(\varphi + \psi) - (\varphi + \psi)_{\text{rég}}}{2}, \quad (1.69)$$

$$\psi := \psi_{\text{rég}} + \frac{(\varphi + \psi) - (\varphi + \psi)_{\text{rég}}}{2}.$$

ii)  $n_z = C_\vartheta = -1$  esetén  $\vartheta = \pi$  ( $z = -z'''$ ). Ekkor

$$\begin{bmatrix} -C_{\psi-\varphi} & S_{\psi-\varphi} \\ S_{\psi-\varphi} & C_{\psi-\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & m_x \\ l_y & m_y \end{bmatrix}, \quad (1.70)$$

$$\psi - \varphi = \arctan\left(\frac{m_x}{m_y}\right). \quad (1.71)$$

Csak  $\psi - \varphi$  határozható meg.

Például választható  $\psi = 0$  vagy - ha van előző érték, akkor -

$$\varphi := \varphi_{régi} - \frac{(\psi - \varphi) - (\psi - \varphi)_{régi}}{2}, \quad (1.72)$$

$$\psi := \psi_{régi} + \frac{(\psi - \varphi) - (\psi - \varphi)_{régi}}{2}. \quad (1.73)$$

b)  $n_x^2 + n_y^2 \neq 0$  esetén  $S_\vartheta \neq 0$ . Ekkor teljesülnek:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{n_y}{n_x}\right) + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \pi \\ -\pi \end{array} \right\} \in (-\pi, \pi], \quad (1.74)$$

$$S_\vartheta = C_\varphi n_x + S_\varphi n_y, \quad (1.75)$$

$$C_\vartheta = n_z, \quad (1.76)$$

$$\vartheta = \arctan \frac{C_\varphi n_x + S_\varphi n_y}{n_z}, \quad (1.77)$$

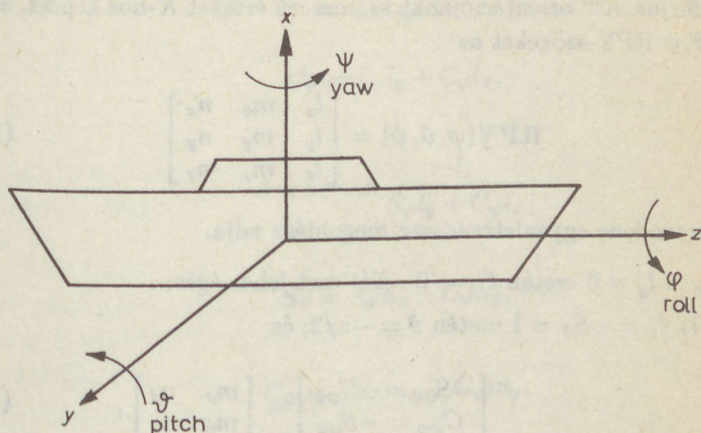
$$S_\psi = -S_\varphi l_x + C_\varphi l_y, \quad (1.78)$$

$$C_\psi = -S_\varphi m_x + C_\varphi m_y, \quad (1.79)$$

$$\psi = \arctan \frac{-S_\varphi l_x + C_\varphi l_y}{-S_\varphi m_x + C_\varphi m_y}. \quad (1.80)$$

## 1.6. AZ ORIENTÁCIÓ JELLEMZÉSE RPY-SZÖGEKKEL [1]

Az orientáció jellemzésének egy másik módja a csavarás (roll), billentés (pitch) és forgatás (yaw) szögek használata, melyeket a hajózásból vettek át (1.9. ábra).



1.9. ábra  
RPY-szögek

Az Euler-szögekhez képest (1.8. ábra) az a különbség, hogy a harmadik forgatás az  $x''$  tengely körül történik, ezért az 1.4., 1.5. és 1.6. feladat eredményei szerint

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{Rot}(z, \varphi) \mathbf{Rot}(y, \vartheta) \mathbf{Rot}(x'', \psi) \begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{RPY}(\varphi, \vartheta, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Rot}(z, \varphi) \mathbf{Rot}(y, \vartheta) \mathbf{Rot}(x'', \psi) =$$

$$= \begin{bmatrix} C_\varphi & -S_\varphi & 0 \\ S_\varphi & C_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\vartheta & 0 & S_\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\vartheta & 0 & C_\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\psi & -S_\psi \\ 0 & S_\psi & C_\psi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_\varphi C_\vartheta & C_\varphi S_\vartheta S_\psi - S_\varphi C_\psi & C_\varphi S_\vartheta C_\psi + S_\varphi S_\psi \\ S_\varphi C_\vartheta & S_\varphi S_\vartheta S_\psi + C_\varphi C_\psi & S_\varphi S_\vartheta C_\psi - C_\varphi S_\psi \\ -S_\vartheta & C_\vartheta S_\psi & C_\vartheta C_\psi \end{bmatrix}. \quad (1.81)$$

Ha előírjuk  $K'''$  orientációjának számszerű értékét  $K$ -hoz képest, akkor a  $\varphi, \vartheta, \psi$  RPY-szögeket az

$$\text{RPY}(\varphi, \vartheta, \psi) = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} \quad (1.82)$$

transzcendens egyenletrendszer megoldása adja.

a)  $l_x = l_y = 0$  esetén  $C_\vartheta = 0$ . Két eset lehetséges.

i)  $l_z = -S_\vartheta = 1$  esetén  $\vartheta = -\pi/2$ , és

$$\begin{bmatrix} -S_{\varphi\psi} & -C_{\varphi\psi} \\ C_{\varphi\psi} & -S_{\varphi\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_x & n_x \\ m_y & n_y \end{bmatrix}, \quad (1.83)$$

$$\varphi + \psi = \arctan\left(\frac{n_y}{n_x}\right) + \begin{cases} 0 \\ \pi \\ -\pi \end{cases}. \quad (1.84)$$

ii)  $l_x = -S_\vartheta = -1$  esetén  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ , és

$$\begin{bmatrix} S_{\psi-\varphi} & C_{\psi-\varphi} \\ C_{\psi-\varphi} & -S_{\psi-\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_x & n_x \\ m_y & n_y \end{bmatrix}, \quad (1.85)$$

$$\psi - \varphi = \arctan\left(\frac{m_x}{m_y}\right) + \begin{cases} 0 \\ \pi \\ -\pi \end{cases}. \quad (1.86)$$

b)  $l_x^2 + l_y^2 \neq 0$  esetén  $C_\vartheta \neq 0$ . Ekkor teljesülnek:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{l_y}{l_x}\right) + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \pi \\ -\pi \end{array} \right\} \in (-\pi, \pi], \quad (1.87)$$

$$S_\vartheta = -l_z, \quad (1.88)$$

$$C_\vartheta = S_\varphi l_y + C_\varphi l_x, \quad (1.89)$$

$$\vartheta = \arctan \frac{-l_z}{S_\varphi l_y + C_\varphi l_x}, \quad (1.90)$$

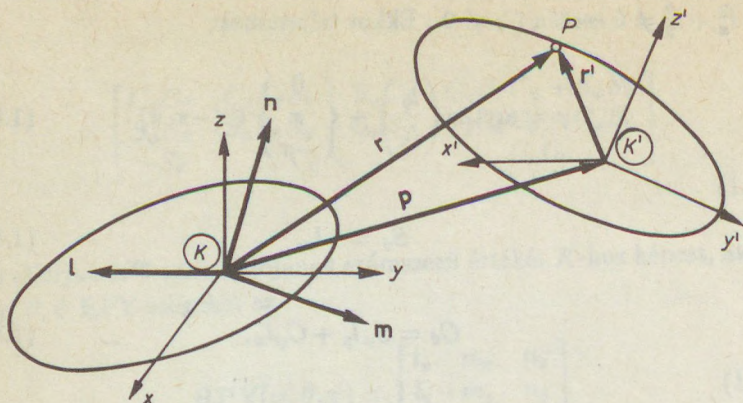
$$S_\psi = S_\varphi n_x - C_\varphi n_y, \quad (1.91)$$

$$C_\psi = -S_\varphi m_x + C_\varphi m_y, \quad (1.92)$$

$$\psi = \arctan \frac{S_\varphi n_x - C_\varphi n_y}{-S_\varphi m_x + C_\varphi m_y}. \quad (1.93)$$

## 1.7. MEREV TESTEK RELATÍV HELYZETÉNEK JELLEMZÉSE HOMOGÉN KOORDINÁTÁKKAL

Tekintsünk két merev testet és rögzítsünk mindegyikhez egy-egy derékszögű koordinátarendszert ( $K$  és  $K'$ ). Mivel a két test merev, így mozgásuk közben deformáció nem lép fel, ezért relatív elhelyezkedésük a  $K$  és  $K'$  koordinátarendszerek (coordinate frame = keret vagy reference system = referencia rendszer) relatív elhelyezkedésével egyértelműen jellemezhető (keretkoncepció, 1.10. ábra).



1.10. ábra  
Keretkonceptió

Jelölje az  $x', y', z'$  tengelyekkel párhuzamos egységvektorokat, amelyek a  $K$  keret origójából indulnak, rendre  $l, m, n$ . Legyen  $p$  a  $K$  keret origójából induló és a  $K'$  keret origójába mutató vektor. Legyen  $P(x', y', z') = P(x, y, z)$  egy pontja a második szegmensnek, akkor az 1.3. példa alapján

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{p} \quad (\text{bázisfüggetlen alak}), \quad (1.94)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} l & m & n \end{bmatrix}}_{\text{bázisvektorok}} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \mathbf{p} = x'l + y'm + z'n + \mathbf{p}. \quad (1.95)$$

felírva az  
 $i, j, k$   
bázisban

Tekintsük az

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & n & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.96)$$

alakot. Ennek első három egyenlete azonos (1.95)-tel, utolsó egyenlete pedig az  $1 = 1$  azonosság. Ezért (1.95) és (1.96) ekvivalensek. Az  $(x, y, z)^T$  vektor homogén koordinátás alakjának az 1 értékű negyedik koordinátával kiegészített  $(x, y, z, 1)^T$  vektort fogjuk nevezni. A homogén koordináták ilyen **szűkebb** értelmezése további céljainkhoz elegendő lesz.

A  $K$  és  $K'$  keretekkel jellemzett merev testek relatív helyzete leírható (1.96) szerint a

$$\mathbf{T}_{KK'} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{m} & \mathbf{n} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.97)$$

homogén koordinátás mátrixszal (röviden homogén mátrixszal).  $\mathbf{T}_{KK'}$  jelentősége kettős:

- a) Megadja a  $K'$  keret **orientációját** a  $K$  kerethez képest  $(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n})$ , továbbá a  $K'$  origójának **pozícióját** a  $K$  origójához képest  $(\mathbf{p})$ . Minden vektor koordinátáját a  $K$  keret  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  bázisában kell képezni.
- b) A  $K'$  keret bármelyik pontjának  $x', y', z'$  koordinátái ismeretében felírhatjuk **ugyanennek a pontnak** az  $x, y, z$  koordinátáit a  $K$  keretben:

A homogén mátrixok körében az alábbi egyszerűen belátható szabályok érvényesek [1]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.98)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.99)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{A}\mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.100)$$

Kérdéses az inverz mátrix alakja, amelyre a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{c} \\ \mathbf{d}^T & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ \mathbf{d}^T & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (1.101)$$

feltételnek kell teljesülnie (a \* ki nem részletezett elemeket jelöl), ami csak  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$  és  $e = 1$  esetén teljesülhet. Ennek alapján

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{c} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{Ac} + \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.102)$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}, \quad (1.103)$$

$$\mathbf{Ac} + \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad (1.104)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}, \quad (1.105)$$

$$\mathbf{c} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}, \quad (1.106)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.107)$$

Speciálisan, ha

a)  $\mathbf{A}$  forgatás, akkor (1.52) szerint

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T, \quad (1.108)$$

b)  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \dots$  forgatások szorzata, akkor

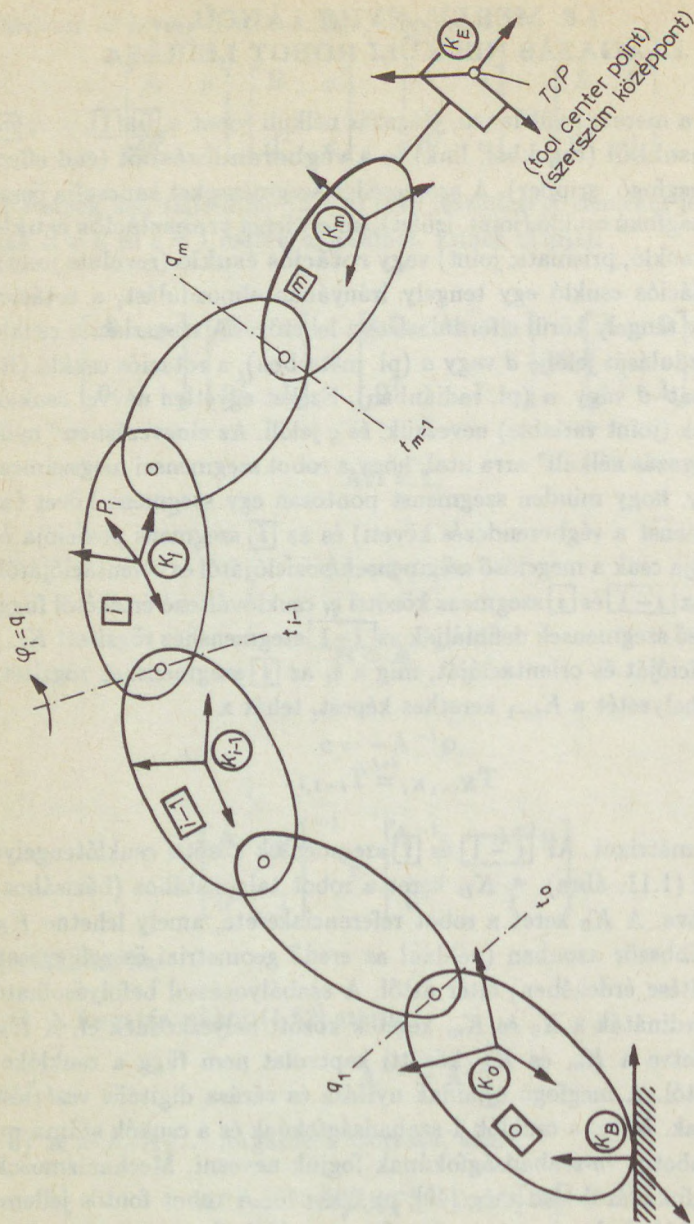
$$\mathbf{A}^{-1} = \dots \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1} = \dots \mathbf{A}_2^T\mathbf{A}_1^T = \mathbf{A}^T. \quad (1.109)$$

## 1.8. MEREV, NYÍLT LÁNCÚ, ELÁGAZÁS NÉLKÜLI ROBOT LEÍRÁSA

Álljon a merev, nyílt láncú, elágazás nélküli robot a  $\boxed{0}$ ,  $\boxed{1}$ , ...,  $\boxed{m}$  szegmensekből (tagokból, link) és a végberendezésből (end effector; pl. megfogó, gripper). A szomszédos szegmenseket kapcsolja össze 1-szabadságfokú csukló (joint, ízület), amely lehet **transzlációs csukló** (lineáris csukló, prismatic joint) vagy **rotációs csukló** (revolute joint). A transzlációs csukló egy tengely irányában elmozdulást, a rotációs csukló egy tengely körül elfordulást tesz lehetővé. A transzlációs csukló (T) elmozdulását jelölje  $d$  vagy  $a$  (pl. méterben), a rotációs csukló (R) elfordulását  $\vartheta$  vagy  $\alpha$  (pl. radiánban). Ezeket egyetlen névvel csuklóváltozónak (joint variable) nevezzük, és  $q$  jelöli. Az elnevezésben "nyílt láncú, elágazás nélküli" arra utal, hogy a robot szegmensei megszámozhatók úgy, hogy minden szegmenst pontosan egy szegmens követ (az  $\boxed{m}$  szegmenst a végberendezés követi) és az  $\boxed{i}$  szegmens pozíciója és orientációja csak a megelőző szegmensek pozíciójától és orientációjától, továbbá az  $\boxed{i-1}$  és  $\boxed{i}$  szegmens közötti  $q_i$  csuklóváltozó értékétől függ. A megelőző szegmensek definiálják az  $\boxed{i-1}$  szegmenshez rögzített  $K_{i-1}$  keret pozícióját és orientációját, míg a  $q_i$  az  $\boxed{i}$  szegmenshez rögzített  $K_i$  keret helyzetét a  $K_{i-1}$  kerethez képest, tehát a

$$\mathbf{T}_{K_{i-1}K_i} \stackrel{def}{=} \mathbf{T}_{i-1,i}$$

homogén mátrixot. Az  $\boxed{i-1}$  és  $\boxed{i}$  szegmensek közötti csuklótengelyt  $t_{i-1}$  jelöli (1.11. ábra). A  $K_B$  keret a robot talapatához (bázisához) van rögzítve. A  $K_0$  keret a robot referenciakerete, amely lehetne  $K_B$  is, a legtöbbször azonban (például az eredő geometriai összefüggések egyszerűsítése érdekében) eltér attól. A szabályozással befolyásolható csuklókoordináták a  $K_0$  és  $K_m$  keretek között helyezkednek el. A  $K_B$  és  $K_0$ , illetve a  $K_m$  és  $K_E$  közötti kapcsolat nem függ a csuklókoordinátáktól. A megfogó ujjainak nyitása és zárása digitális vezérlést igényel csak. Mivel a csuklók 1-szabadságfokúak és a csuklók száma  $m$ , ezért a robotot  $m$ -szabadságfokúnak fogjuk nevezni. Mechanizmusok szabadságfokákról lásd még [40], pp.609-610. A robot fontos jellemzője a **csuklóképlet**, amely egyszerűen a csuklók típusának felsorolása



I.11. ábra

Nyílt láncú robot elvi felépítése

a láncban. Például RRTRRR egy 6-szabadságfokú robotot jelöl, amely-nél az első, második, negyedik, ötödik és hatodik csukló rotációs, míg a harmadik translációs. Ahhoz, hogy a megfogónak a bázishoz képesti pozícióját és orientációját szabadon befolyásolhassuk, legalább 6 csukló szükséges ( $m \geq 6$ ). Ezen belül is a robot véges geometriai méreteinél fogva csak a tér egy részében pozícionálható (munkatér).

Szokás az emberi felső végtag analógiája alapján a pozícionálásban fő szerepet játszó [0], [1], [2], [3] szegmenst **karnak** (arm), az orientálásban fő szerepet játszó [4], [5], [6] szegmenst **kézcsuklónak** (wrist), míg a végberendezést **kézfejnek** (hand) nevezni. Célszerű megkülönböztetni még a (cserélhető) végberendezés felerősítési helyét és a referenciapont-ját (szerszámközpont, TCP).

Az [i-1] szegmenshez rögzített koordináta-rendszer elvben akárhol lehetne. A gyakorlatban a következő két szokás terjedt el:

- $K_{i-1}$  origója a  $t_{i-1}$  csuklótengelyen helyezkedik el, és a  $z_{i-1}$  tengely (ritkábban az  $x_{i-1}$  tengely) iránya megegyezik  $t_{i-1}$  irányával.
- $K_{i-1}$  origója a tömegközéppontban helyezkedik el, és a tengelyek iránya megegyezik a főtehetetlenségi irányokkal.

Tekintsük a [j] szegmens egy  $P_j$  pontját, amelynek koordinátái  $x_j, y_j, z_j$  a  $K_j$  koordináta-rendszerben. A  $P_j$  pont koordinátáit (1.96) és (1.97) szerint kifejezhetjük a  $K_i, \dots, K_{j-1}$  koordináta-rendszerekben is:

$$\begin{bmatrix} x_{j-1} \\ y_{j-1} \\ z_{j-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{j-1,j} \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{i,i+1} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \\ 1 \end{bmatrix},$$

ahonnan következik, hogy

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{i,i+1} \cdot \mathbf{T}_{i+1,i+2} \cdots \mathbf{T}_{j-1,j} \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{i,j} \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.111)$$

ahol

$$\mathbf{T}_{i,j} \stackrel{def}{=} \mathbf{T}_{i,i+1} \cdot \mathbf{T}_{i+1,i+2} \cdots \mathbf{T}_{j-1,j}. \quad (1.112)$$

Itt  $\mathbf{T}_{i,j}$  megadja a koordinátatranszformációt, továbbá a  $K_j$  tengelyeinek orientációját és origójának pozícióját a  $K_i$  bázisában. Speciálisan,

$$\mathbf{T}_{0,m} = \mathbf{T}_{0,1} \cdot \mathbf{T}_{1,2} \cdots \mathbf{T}_{m-1,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{0,m} & \mathbf{p}_{0,m} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.113)$$

$$\mathbf{T}_{B,E} = \mathbf{T}_{B,0} \cdot \mathbf{T}_{0,m} \cdot \mathbf{T}_{m,E}, \quad (1.114)$$

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{B,E} \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.115)$$

ahol az (1.115) egyenlet bal és jobb oldalán **ugyanannak a pontnak** a koordinátái állnak, felírva a  $K_E$  és  $K_B$  keretekben. Vegyük észre, hogy (1.98) szerint

$$\mathbf{A}_{0,m} = \mathbf{A}_{0,1} \cdot \mathbf{A}_{1,2} \cdots \mathbf{A}_{m-1,m}, \quad (1.116)$$

ami az alkalmazásoknál lehetővé teszi (1.109) felhasználását.

Hangsúlyoznunk kell, hogy az indexek sorrendjének (1.111)-ben lényeges szerepe van. Ha a sorrendet felcseréljük, akkor fokozatos inverzállással következik (1.110)-ből, hogy

$$\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{j-1,j}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{j-2,j-1}^{-1} \cdots \mathbf{T}_{i,i+1}^{-1} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{j,i} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.117)$$

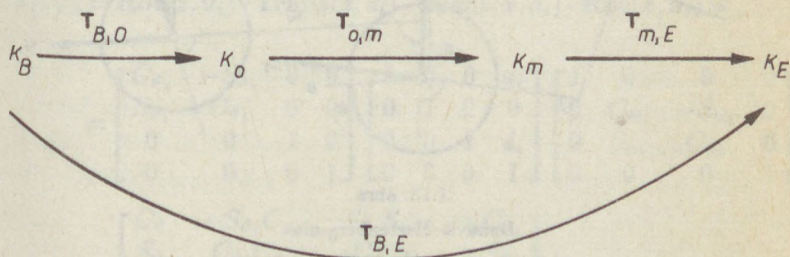
$$\mathbf{T}_{j,i} \stackrel{def}{=} \mathbf{T}_{i,j}^{-1} = \mathbf{T}_{j-1,j}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{j-2,j-1}^{-1} \cdots \mathbf{T}_{i,i+1}^{-1}. \quad (1.118)$$

## 1.9. A ROBOT TRANSZFORMÁCIÓS GRÁFJA

Következik (1.114)-ből, hogy

$$\mathbf{T}_{0,m} = \mathbf{T}_{B,0}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{B,E} \cdot \mathbf{T}_{m,E}^{-1}. \quad (1.119)$$

Rajzoljuk fel a kereteket abban a sorrendben, ahogy következnek a nyílt láncban. Kössük össze a kereteket irányított éllel, amelyeket címkézzünk a keretek közötti transzformációval. Az él iránya és  $\mathbf{T}_{bal,jobb}$  indexei között álljon fenn a  $K_{bal} \xrightarrow{\mathbf{T}_{bal,jobb}} K_{jobb}$  kapcsolat (1.12. ábra).



1.12. ábra

Robot transzformációs gráfja

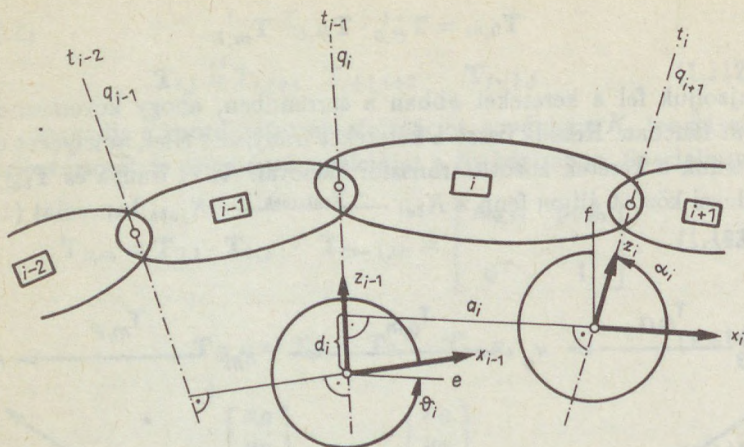
A  $K_0$  keretből a  $K_m$  keretbe kétféleképpen juthatunk el:

- a) előre haladva  $K_0, K_m$  sorrendben,
- b) visszafelé indulva és  $K_B, K_E, K_m$  sorrendben haladva.

Ha a robot transzformációs gráfjában a nyíllal szembe haladást invertálásnak értelmezzük, akkor a haladási sorrendben kell az invertált és invertálatlan homogén transzformációkat balról egymás után írni és összeszorozni, hogy az (1.119) bal oldalát (a) vagy jobb oldalát (b) kapjuk. A transzformációs gráfot általánosabb esetekre is kiterjeszthetjük (robot, tárgy, szerelvény vagy robot, conveyor, tárgy, kamera stb.).

## 1.10. DENAVIT–HARTENBERG- ALAK [3]

Tekintsük a robot szegmenseinek egy részletét (1.13. ábra).



1.13. ábra

Denavit–Hartenberg-alak

A Denavit–Hartenberg-alak esetén a csukló tengelyének iránya a  $z$  tengely iránya, a csuklókoordináta  $d$  (transzlációs csukló) vagy  $\vartheta$  (rotációs csukló), a Denavit–Hartenberg-paraméterek  $d, a$  (távolság),  $\vartheta, \alpha$  (szög).

Tételezzük fel, hogy a  $K_{i-1}$  keretet már megválasztottuk. Az ábrában berajzoltuk a  $z_{i-1}$  és  $x_{i-1}$  tengelyeket, ahol  $z_{i-1}$  iránya megegyezik az  $i-1$  és  $i$  szegmensek közötti csukló tengelyének irányával. Legyen  $t_{i-1}$  az  $i$  és  $i+1$  szegmensek közötti csukló tengelyének iránya. Legyen a  $K_i$  keret  $x_i$  tengelye merőleges a  $t_{i-1}$  és  $t_i$  tengelyekre (kitérő tengelyek esetén egyértelműen definiált). Legyen  $K_i$  origója abban a pontban, ahol  $x_i$  metszi a  $t_i$  tengelyt. Egyezzen meg  $z_i$  iránya a  $t_i$  irányával.

Húzzunk párhuzamost  $K_{i-1}$  origójában az  $x_i$  tengellyel ( $e$ ) továbbá  $K_i$  origójában a  $z_{i-1}$  tengellyel ( $f$ ). Akkor

- $\vartheta_i$ : az a szög, amellyel a  $z_{i-1}$  tengely körül el kell forgatni az  $x_{i-1}$  tengelyt úgy, hogy az  $e$  egyenesbe kerüljön ( $e \parallel x_i$ );
- $d_i$ : az a távolság, amennyivel el kell tolni az  $e$  egyenest  $z_{i-1}$  mentén, hogy az  $x_i$  tengelybe kerüljön;
- $a_i$ : az a távolság, amivel a  $z_{i-1}$  és az  $x_i$  tengely metszéspontját el kell tolni  $x_i$  mentén, hogy a  $K_i$  keret origójába kerüljön;
- $\alpha_i$ : az a szög, amellyel az  $f$  egyenest el kell forgatni  $x_i$  körül, hogy a  $z_i$  tengelybe kerüljön.

A távolságok előjele  $+z_{i-1}$ ,  $+x_i$  irányú elmozdulás esetén pozitív. A szögek előjele  $z_{i-1}$  és  $x_i$  körül jobbsavár irányban történő elfordulás esetén pozitív. Felhasználva az 1.4. és 1.6. példák eredményeit:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{i-1,1} &= \mathbf{Rot}(z, \vartheta_i) \cdot \mathbf{Trans}(z, d_i) \cdot \mathbf{Trans}(x, a_i) \cdot \mathbf{Rot}(x, \alpha_i) = \\
 &= \begin{bmatrix} C_{\vartheta_i} & -S_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ S_{\vartheta_i} & C_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\alpha_i} & -S_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C_{\vartheta_i} & -S_{\vartheta_i} C_{\alpha_i} & S_{\vartheta_i} S_{\alpha_i} & a_i C_{\vartheta_i} \\ S_{\vartheta_i} & C_{\vartheta_i} C_{\alpha_i} & -C_{\vartheta_i} S_{\alpha_i} & a_i S_{\vartheta_i} \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.120)
 \end{aligned}$$

Ha  $t_{i-1}$  és  $t_i$  párhuzamos, akkor végtelen sok (egymással párhuzamos) transzverzális van, ekkor  $d_i = 0$  szokásos.

Ha  $t_{i-1}$  és  $t_i$  metszik egymást, akkor  $a_i = 0$  szokásos, és  $x_i$  párhuzamos  $\mathbf{k}_{i-1} \times \mathbf{k}_i$  irányával.

A  $\boxed{0}$  szegmens esetén  $z_0$  és  $t_0$  egybeesnek, és  $x_0$  tetszőleges merőleges irány  $z_0$  irányára.

Az  $\boxed{m}$  szegmens esetén  $z_m$  iránya tetszőleges, és  $x_m$  tetszőleges merőleges irány  $z_{m-1}$  irányára.

**Különleges esetekben** (derékszögű TTT pozícionálás első  $x$  tengelye vagy RPY orientálás utolsó  $x$  tengelye esetén) előfordulhat, hogy a csukló tengelyét nem  $z$ , hanem  $x$  irányúnak választjuk. Ilyenkor (1.120) érvényben marad, de a csuklókoordináta  $a_i$ , illetve  $\alpha_i$  lesz.

## 1.11. A DIREKT GEOMETRIAI FELADAT

A direkt geometriai feladat arra a kérdésre keres választ, hogy mi az összefüggés a csuklókoordináták és a végberendezés felerősítési helyének  $T_{0,m}$  homogén transzformációja között:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} \mapsto T_{0,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{0,m} & \mathbf{P}_{0,m} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.121)$$

Ha ezt meg tudjuk válaszolni, akkor a csuklókoordinátáktól független  $T_{B,0}$ , és  $T_{m,E}$  homogén transzformációk ismeretében (1.114) szerint számítható  $T_{B,E}$ , a végberendezés szerszámközpontjának (TCP, tool center point) pozíciója és orientációja.  $T_{0,m}$  a szegmensek Denavit-Hartenberg-alakja ismeretében (1.120) és (1.113) alapján számítható.

A továbbiakban néhány fontos esetre meghatározzuk a  $T_{0,3}$  kar- és  $T_{3,6}$  kézcsukló-transzformációkat. A példákban a koordinátarendszereket úgy rajzoljuk fel, mintha a szögelfordulások nullák, az elmozdulások pedig nem nullák lennének. A karok és kézcsuklók Denavit-Hartenberg-alakjait az 1.1. és 1.2. táblázatok tartalmazzák.

### 1.8. Példa: Stanford-kar ([1], p.57)

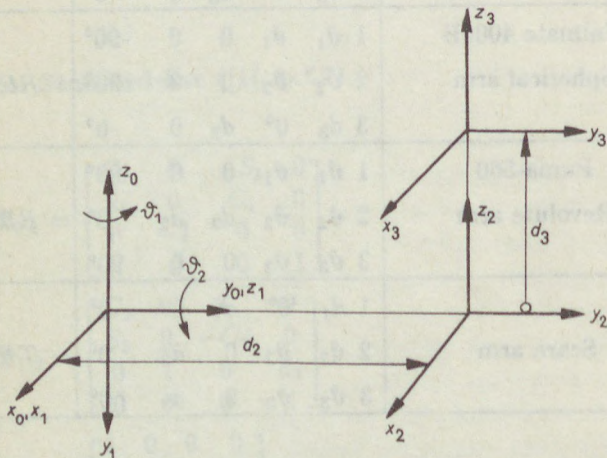
$$T_{0,1} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.122)$$

$$T_{1,2} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.123)$$

$$T_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.124)$$

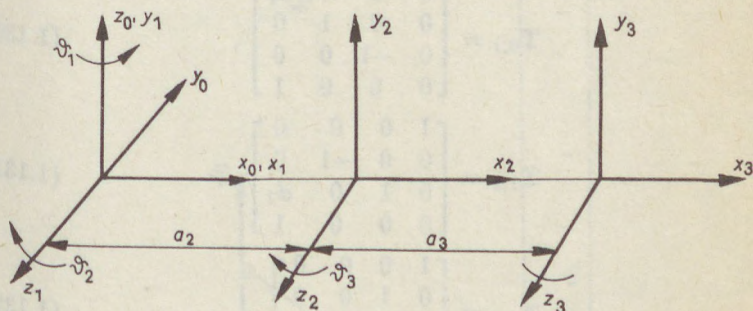
Kar (angol elnevezés)	$i$	$q_i$	$\vartheta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$ °	Csuklóképlet
Stanford arm	1	$\vartheta_1$	$\vartheta_1$	0	0	-90°	$RR^{\perp}T^{\perp}$
	2	$\vartheta_2$	$\vartheta_2$	$d_2$	0	90°	
	3	$d_3$	0°	$d_3$	0	0°	
Elbow manipulator arm Revolute arm	1	$\vartheta_1$	$\vartheta_1$	0	0	90°	$RR^{\perp}R^{\perp}$
	2	$\vartheta_2$	$\vartheta_2$	0	$a_2$	0°	
	3	$\vartheta_3$	$\vartheta_3$	0	$a_3$	0°	
IBM RS-7565 Cartesian arm	1	$a_1$	0°	0	$a_1$	-90°	$TT^{\perp}T^{\perp}$
	2	$d_2$	0°	$d_2$	0	90°	
	3	$d_3$	0°	$d_3$	0	0°	
Fanuc M1 Cylindrical arm	1	$d_1$	0°	$d_1$	0	0°	$TR^{\perp}T^{\perp}$
	2	$\vartheta_2$	$\vartheta_2$	0	$a_2$	-90°	
	3	$d_3$	0°	$d_3$	0	0°	
Unimate 4000B Spherical arm	1	$\vartheta_1$	$\vartheta_1$	0	0	-90°	$RR^{\perp}T^{\perp}$
	2	$\vartheta_2$	$\vartheta_2$	0	0	90°	
	3	$d_3$	0°	$d_3$	0	0°	
Puma-560 Revolute arm	1	$\vartheta_1$	$\vartheta_1$	0	0	-90°	$RR^{\perp}R^{\perp}$
	2	$\vartheta_2$	$\vartheta_2$	$d_2$	$a_2$	0°	
	3	$\vartheta_3$	$\vartheta_3$	0	0	90°	
Scara arm	1	$d_1$	0°	$d_1$	0	0°	$TR^{\perp}R^{\perp}$
	2	$\vartheta_2$	$\vartheta_2$	0	$a_2$	0°	
	3	$\vartheta_3$	$\vartheta_3$	0	$a_3$	0°	

Kézcsukló (angol elnevezés)	$i$	$q_i$	$\vartheta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$	Csuklóképlet
Euler wrist	4	$\vartheta_4$	$\vartheta_4$	0	0	$-90^\circ$	$RR^\perp R^\perp$
	5	$\vartheta_5$	$\vartheta_5$	0	0	$90^\circ$	
	6	$\vartheta_6$	$\vartheta_6$	0	0	$0^\circ$	
RPY wrist	4	$\vartheta_4$	$\vartheta_4$	0	0	$-90^\circ$	$RR^\perp R^\perp$
	5	$\vartheta_5$	$\vartheta_5$	0	0	$90^\circ$	
	6	$\alpha_6$	$0^\circ$	0	0	$\alpha_6$	
Elbow manipulator wrist	4	$\vartheta_4$	$\vartheta_4$	0	$a_4$	$-90^\circ$	$R_{offset\ x} R^\perp R^\perp$
	5	$\vartheta_5$	$\vartheta_5$	0	0	$90^\circ$	
	6	$\vartheta_6$	$\vartheta_6$	0	0	$0^\circ$	
Puma-560 wrist	4	$\vartheta_4$	$\vartheta_4$	$d_4$	0	$-90^\circ$	$R_{offset\ z} R^\perp R^\perp$
	5	$\vartheta_5$	$\vartheta_5$	0	0	$90^\circ$	
	6	$\vartheta_6$	$\vartheta_6$	0	0	$0^\circ$	

1.14. ábra  
Stanford-kar

$$T_{0,3} = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -S_1 & C_1 S_2 & C_1 S_2 d_3 - S_1 d_2 \\ S_1 C_2 & C_1 & S_1 S_2 & S_1 S_2 d_3 + C_1 d_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 & C_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.125)$$

### 1.9. Példa: Elbow-manipulátor kar ([1], p.60)



1.15. ábra  
Elbow-manipulátor kar

$$T_{0,1} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.126)$$

$$T_{1,2} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & C_2 a_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & S_2 a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.127)$$

$$T_{2,3} = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & C_3 a_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & S_3 a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.128)$$

$$\mathbf{T}_{0,3} = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & S_1 & C_1(C_{23}a_3 + C_2a_2) \\ S_1 C_{23} & -S_1 S_{23} & -C_1 & S_1(C_{23}a_3 + C_2a_2) \\ S_{23} & C_{23} & 0 & S_{23}a_3 + S_2a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.129)$$

1.10. Példa: IBM RS-7565 derékszögű koordinátás kar ([2], p.31)

$$\mathbf{T}_{0,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.130)$$

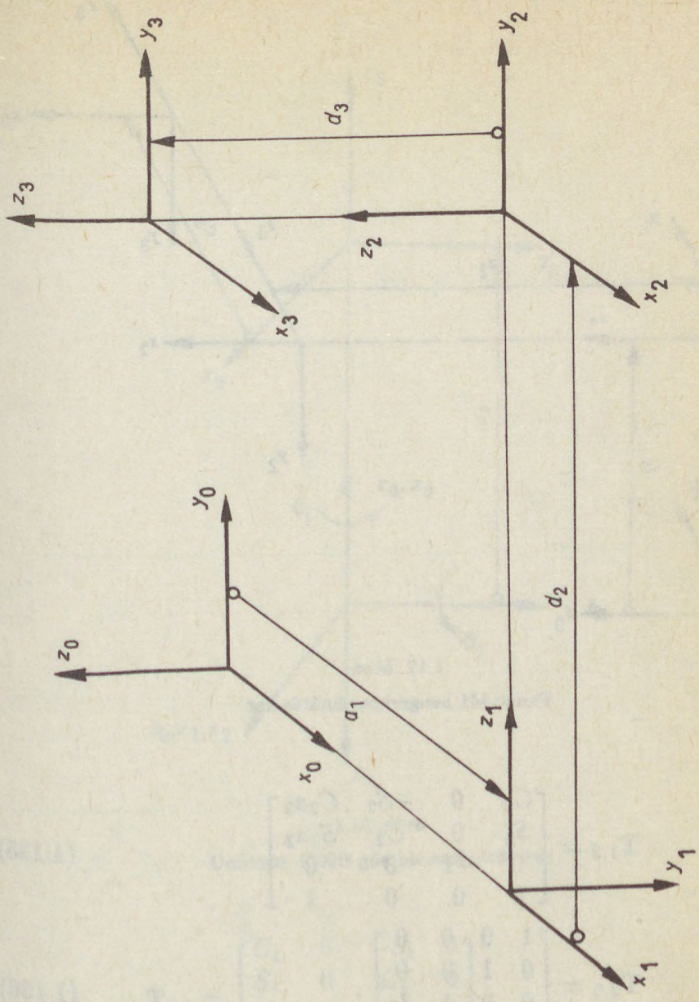
$$\mathbf{T}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.131)$$

$$\mathbf{T}_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.132)$$

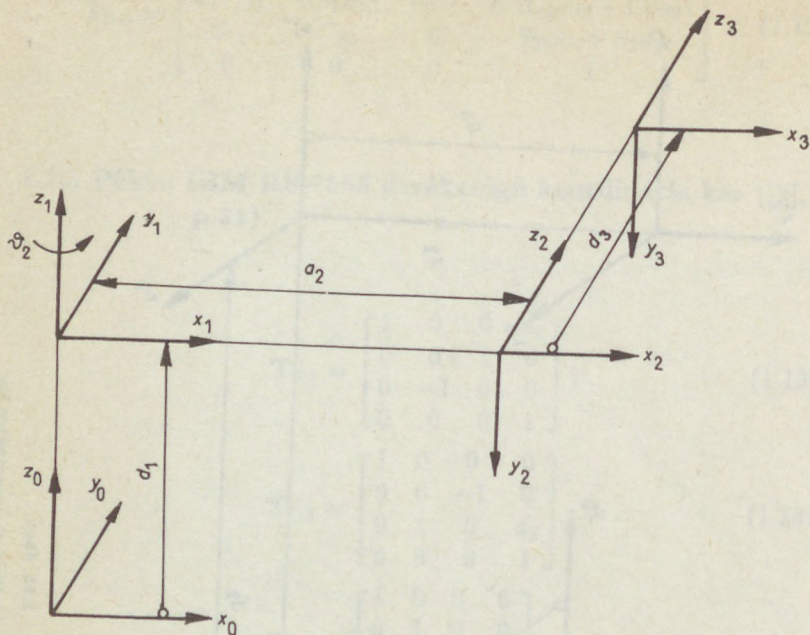
$$\mathbf{T}_{0,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.133)$$

1.11. Példa: Fanuc M1 hengerkoordinátás kar ([2], p.32)

$$\mathbf{T}_{0,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.134)$$



1.16. ábra  
IBM-RS-7565 derékszögű koordinátás kar



1.17. ábra

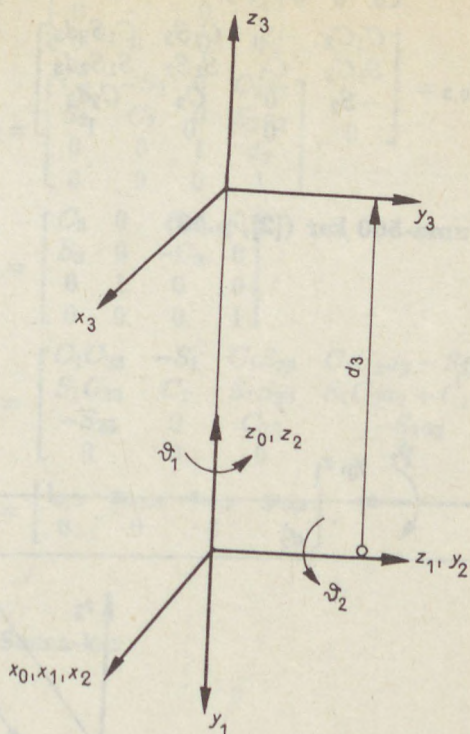
Fanuc M1 hengerkoordinátás kar

$$\mathbf{T}_{1,2} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & C_2 a_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & S_2 a_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.135)$$

$$\mathbf{T}_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.136)$$

$$\mathbf{T}_{0,3} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & C_2 a_2 - S_2 d_3 \\ S_2 & 0 & C_2 & S_2 a_2 + C_2 d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.137)$$

1.12. Példa: Unimate 4000B gömbkoordinátás kar ([2], p.35)



1.18. ábra

Unimate 4000B gömbkoordinátás kar

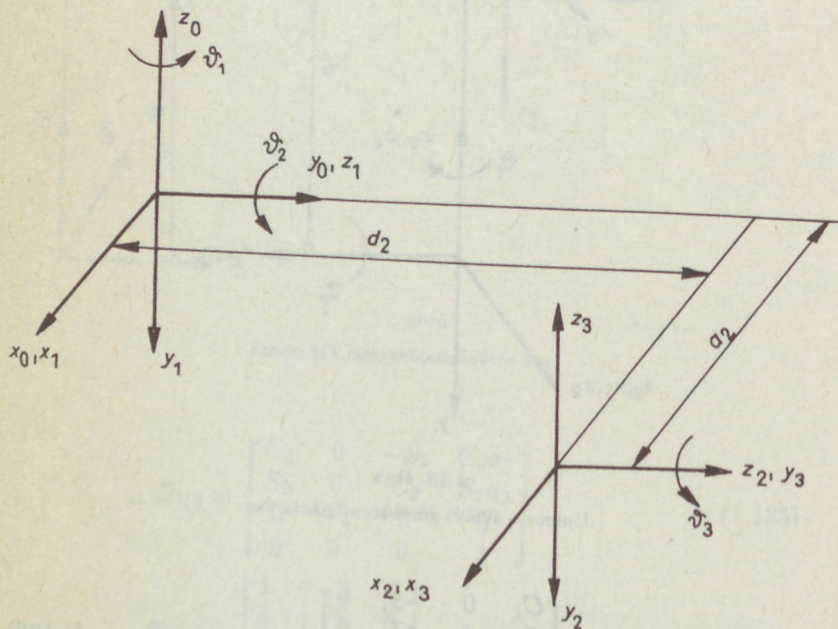
$$\mathbf{T}_{0,1} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.138)$$

$$\mathbf{T}_{1,2} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.139)$$

$$\mathbf{T}_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.140)$$

$$\mathbf{T}_{0,3} = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -S_1 & C_1 S_2 & C_1 S_2 d_3 \\ S_1 C_2 & C_1 & S_1 S_2 & S_1 S_2 d_3 \\ -S_2 & 0 & C_2 & C_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.141)$$

1.13. Példa: Puma-560 kar ([2], p.59)



1.19. ábra  
Puma-560 kar

$$\mathbf{T}_{0,1} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.142)$$

$$\mathbf{T}_{1,2} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & C_2 a_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & S_2 a_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.143)$$

$$\mathbf{T}_{2,3} = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.144)$$

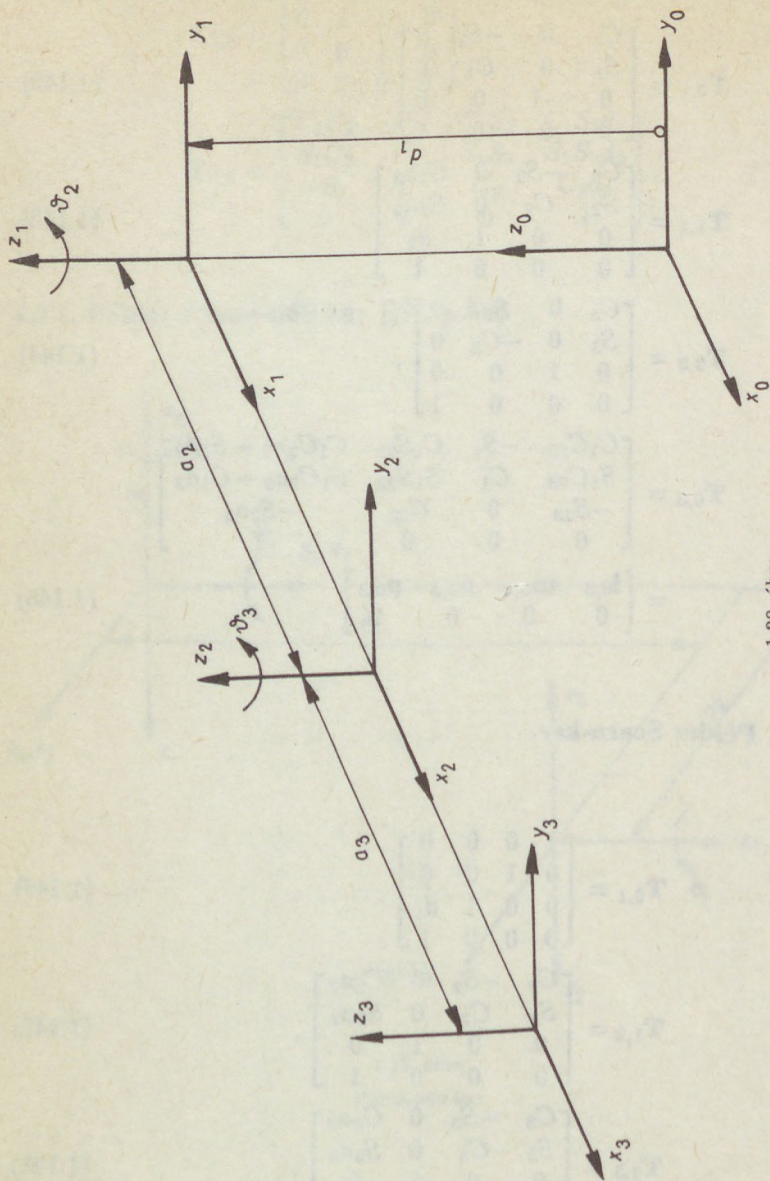
$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{0,3} &= \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -S_1 & C_1 S_{23} & C_1 C_2 a_2 - S_1 d_2 \\ S_1 C_{23} & C_1 & S_1 S_{23} & S_1 C_2 a_2 + C_1 d_2 \\ -S_{23} & 0 & C_{23} & -S_2 a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{l}_{0,3} & \mathbf{m}_{0,3} & \mathbf{n}_{0,3} & \mathbf{p}_{0,3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.145)$$

#### 1.14. Példa: Scara-kar

$$\mathbf{T}_{0,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.146)$$

$$\mathbf{T}_{1,2} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & C_2 a_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & S_2 a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.147)$$

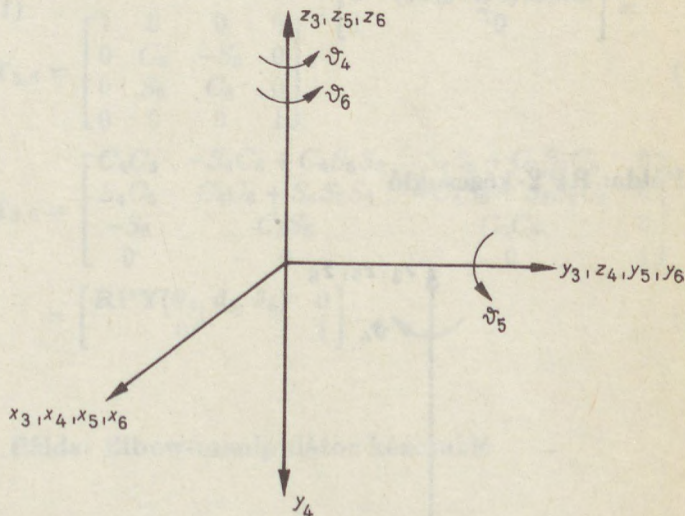
$$\mathbf{T}_{2,3} = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & C_3 a_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & S_3 a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.148)$$



1.20. ábra  
Scara-kar

$$\mathbf{T}_{0,3} = \begin{bmatrix} C_{23} & -S_{23} & 0 & C_{23}a_3 + C_2a_2 \\ S_{23} & C_{23} & 0 & S_{23}a_3 + S_2a_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.149)$$

### 1.15. Példa: Euler-kézcsukló



1.21. ábra  
Euler-kézcsukló

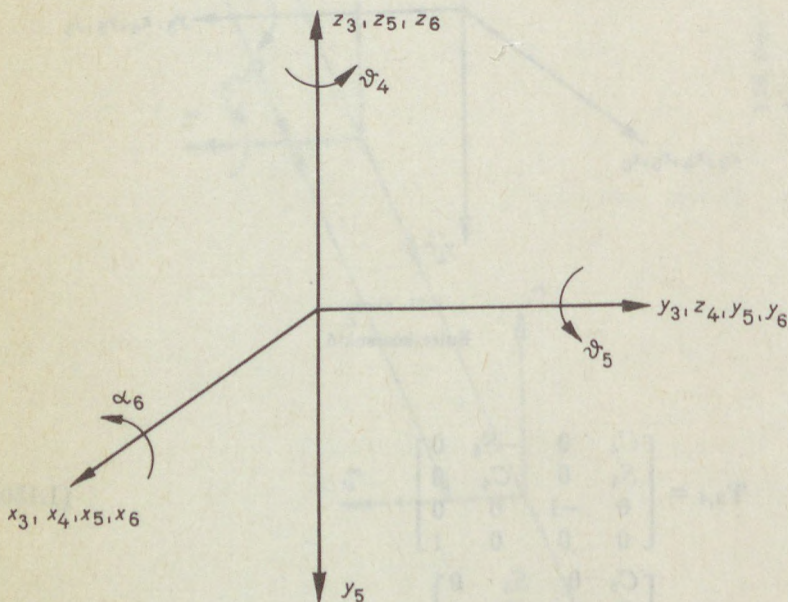
$$\mathbf{T}_{3,4} = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.150)$$

$$\mathbf{T}_{4,5} = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.151)$$

$$\mathbf{T}_{5,6} = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.152)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{3,6} &= \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 & 0 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & 0 \\ & S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{Euler}(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.153)$$

### 1.16. Példa: RPY-kézcsukló



1.22. ábra  
RPY-kézcsukló

$$\mathbf{T}_{3,4} = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.154)$$

$$\mathbf{T}_{4,5} = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.155)$$

$$\mathbf{T}_{5,6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_6 & -S_6 & 0 \\ 0 & S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.156)$$

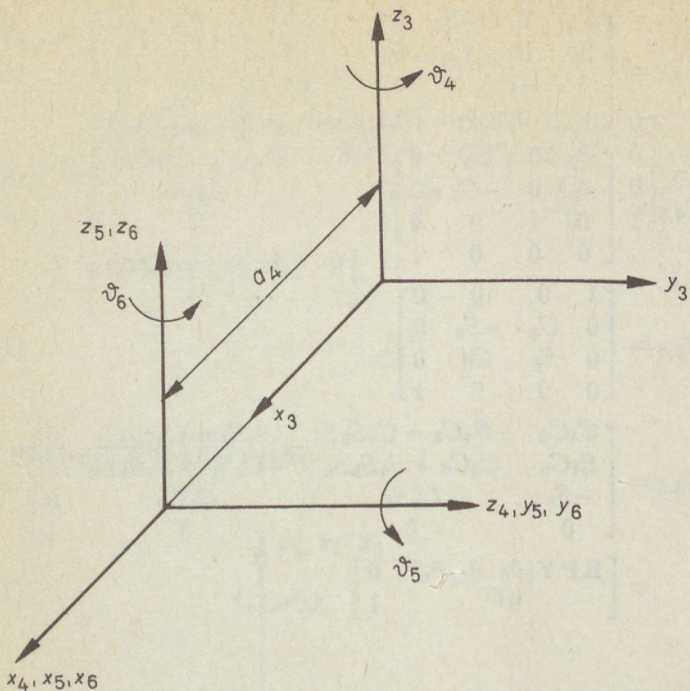
$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{3,6} &= \begin{bmatrix} C_4C_5 & -S_4C_6 + C_4S_5S_6 & S_4S_6 + C_4S_5C_6 & 0 \\ S_4C_5 & C_4C_6 + S_4S_5S_6 & -C_4S_6 + S_4S_5C_6 & 0 \\ -S_5 & C_5S_6 & C_5C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{RPY}(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.157)$$

### 1.17. Példa: Elbow-manipulátor kézcsukló

$$\mathbf{T}_{3,4} = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & C_4a_4 \\ S_4 & 0 & C_4 & S_4a_4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.158)$$

$$\mathbf{T}_{4,5} = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.159)$$

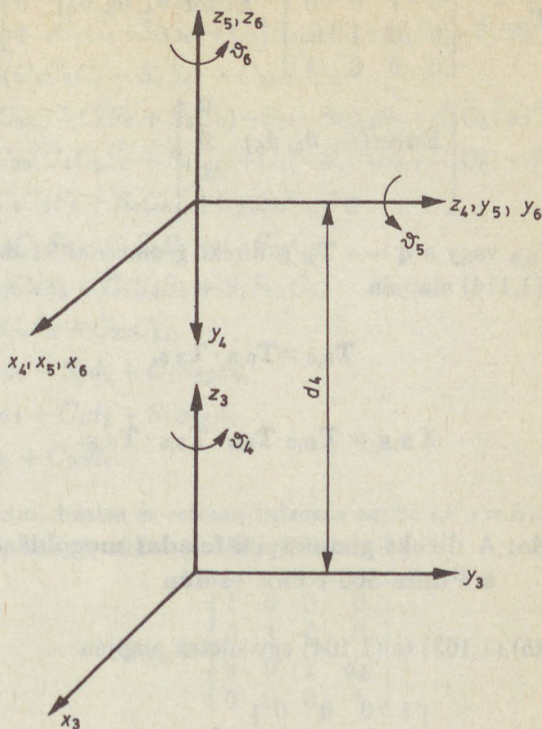
$$\mathbf{T}_{5,6} = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.160)$$



1.23. ábra  
Elbow-manipulátor kézcukló

$$\mathbf{T}_{3,6} = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 & C_4 a_4 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & S_4 a_4 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.161)$$

# 1.18. Példa: Puma-560 kézcsukló



1.24. ábra  
Puma-560 kézcsukló

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{3,4} &= \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.162)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{3,6} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Euler}(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} & & 0 & \\ \mathbf{Euler}(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6) & & 0 & \\ & & d_4 & \\ & \mathbf{0}^T & & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.163}
\end{aligned}$$

A  $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{T}_{0,6}$  vagy a  $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{T}_{B,E}$  direkt geometriai feladat megoldása (1.113) és (1.114) alapján

$$\mathbf{T}_{0,6} = \mathbf{T}_{0,3} \cdot \mathbf{T}_{3,6}, \tag{1.164}$$

$$\mathbf{T}_{B,E} = \mathbf{T}_{B,0} \cdot \mathbf{T}_{0,3} \cdot \mathbf{T}_{3,6} \cdot \mathbf{T}_{6,E}. \tag{1.165}$$

### 1.19. Példa: A direkt geometriai feladat megoldása a Puma-560 robot esetén

Az (1.145), (1.163) és (1.164) egyenletek alapján

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{0,6} &= \mathbf{T}_{0,3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{Euler}(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{0,3} \cdot \mathbf{Euler}(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6) & \mathbf{p}_{0,3} + d_4 \mathbf{n}_{0,3} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{m} & \mathbf{n} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.166}
\end{aligned}$$

ahol

$$l_x = C_1 C_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) - C_1 S_{23} S_5 C_6,$$

$$l_y = S_1 C_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + C_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) - S_1 S_{23} S_5 C_6,$$

$$l_z = -S_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - C_{23} S_5 C_6,$$

$$m_x = -C_1 C_{23} (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) - S_1 (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6) + C_1 S_{23} S_5 S_6,$$

$$m_y = -S_1 C_{23} (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + C_1 (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6) + S_1 S_{23} S_5 S_6,$$

$$m_z = S_{23} (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + C_{23} S_5 S_6,$$

$$n_x = C_1 C_{23} C_4 S_5 - S_1 S_4 S_5 + C_1 S_{23} C_5,$$

$$n_y = S_1 C_{23} C_4 S_5 + C_1 S_4 S_5 + S_1 S_{23} C_5,$$

$$n_z = -S_{23} C_4 S_5 + C_{23} C_5,$$

$$p_x = C_1 C_2 a_2 - S_1 d_2 + C_1 S_{23} d_4,$$

$$p_y = S_1 C_2 a_2 + C_1 d_2 + S_1 S_{23} d_4,$$

$$p_z = -S_2 a_2 + C_{23} d_4.$$

Essen a robot bázisa és referenciakerete egybe ( $K_B = K_0$ ), és legyen a megfogó  $z_6$  irányú, akkor (1.166) jelöléseivel

$$\mathbf{T}_{6,E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_E \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.168)$$

$$\mathbf{T}_{0,E} = \mathbf{T}_{0,6} \cdot \mathbf{T}_{6,E} = \begin{bmatrix} \mathbf{l} & \mathbf{m} & \mathbf{n} & \mathbf{p} + d_E \mathbf{n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.169)$$

A direkt geometriai feladat megoldása egyik részfeladatát képezi a robotmozgás grafikus szimulációjának [45].

## 1.12. AZ INVERZ GEOMETRIAI FELADAT

Az inverz geometriai feladat esetén a végberendezés előírt pozíciójához tartozó csuklókoordináták meghatározása a cél. Ennek egyik alkalmazása a meghatározott csuklókoordináták felhasználása alapjelként a

lokális szervohajtások számára. Mivel fennáll (1.119), ezért elegendő csupán a

$$\mathbf{T}_{0,m} \mapsto \mathbf{q} \quad (1.170)$$

inverz feladatot megoldani.

### 1.12.1. Az inverz geometriai feladat megoldása dekompozícióval

Ha az utolsó három csukló rotációs, és az utolsó három tengely egy ponton megy át (elégséges feltétel), akkor ( $m=6$  esetén) az inverz feladat két háromcsuklós részfeladatra bontható [2], pp. 56–67. Például, ha  $a_4 = a_5 = a_6 = 0$  és  $\alpha_6 = 0^\circ$ , akkor (1.98) és (1.99) szerint

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{0,6} &\stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{m} & \mathbf{n} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{T}_{0,3} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{3,4} & 0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{4,5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{l}_{0,3} & \mathbf{m}_{0,3} & \mathbf{n}_{0,3} & \mathbf{p}_{0,3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{3,6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{3,6} & \mathbf{p}_{0,3} + d_4 \mathbf{n}_{0,3} + d_6 \mathbf{n} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.171) \end{aligned}$$

ahonnan következik, hogy

$$\mathbf{p}_{0,3}(q_1, q_2, q_3) + d_4 \mathbf{n}_{0,3}(q_1, q_2, q_3) = \mathbf{p} - d_6 \mathbf{n}, \quad (1.172)$$

$$\mathbf{A}_{3,6}(q_4, q_5, q_6) = \mathbf{A}_{0,3}^T(q_1, q_2, q_3) \cdot [\mathbf{1} \ \mathbf{m} \ \mathbf{n}]. \quad (1.173)$$

Először meghatározandó (1.172) alapján  $q_1, q_2, q_3$ , majd ennek ismeretében kiszámítható (1.173) jobboldalának számszerű értéke és a hozzá tartozó  $q_4, q_5, q_6$ .

## 1.20. Példa: Az inverz geometriai feladat megoldása Puma-560 robot esetén dekompozícióval

Az (1.172) és (1.144) egyenletekből következik, hogy

$$C_1 C_2 a_2 - S_1 d_2 + d_4 C_1 S_{23} = p_x - d_6 n_x \stackrel{def}{=} p_x^*, \quad (1.174)$$

$$S_1 C_2 a_2 + C_1 d_2 + d_4 S_1 S_{23} = p_y - d_6 n_y \stackrel{def}{=} p_y^*, \quad (1.175)$$

$$-S_2 a_2 + d_4 C_{23} = p_z - d_6 n_z \stackrel{def}{=} p_z^*. \quad (1.176)$$

Szorozzuk meg az (1.174) egyenletet  $(-S_1)$ -gyel, az (1.175) egyenletet  $C_1$ -gyel, és adjuk össze az így kapott egyenleteket, akkor teljesül, hogy

$$-S_1 p_x^* + C_1 p_y^* = d_2, \quad (1.177)$$

ahonnan Függelék A alapján  $q_1$  meghatározható (két megoldás van). Szorozzuk meg ezután az (1.174) egyenletet  $C_1$ -gyel, az (1.175) egyenletet  $S_1$ -gyel, és az így kapott egyenleteket adjuk össze, akkor  $S_1^2 + C_1^2 = 1$  miatt

$$a_2 C_2 + d_4 S_{23} = C_1 p_x^* + S_1 p_y^* \stackrel{def}{=} e. \quad (1.178)$$

Rendezzük át az (1.176) és (1.178) egyenletet:

$$S_2 = \frac{-p_z^* + d_4 C_{23}}{a_2}, \quad (1.179)$$

$$C_2 = \frac{e + d_4 S_{23}}{a_2}. \quad (1.180)$$

Képezzük mindkét oldal négyzetét az (1.179) és (1.180) egyenletekben, és az így kapott egyenleteket adjuk össze, akkor  $S_2^2 + C_2^2 = 1$  és  $S_{23}^2 + C_{23}^2 = 1$  miatt következik, hogy

$$p_z^{*2} - 2p_z^* d_4 C_{23} + e^2 - 2ed_4 S_{23} + d_4^2 = a_2^2, \quad (1.181)$$

$$(-2p_z^* d_4) C_{23} + (-2ed_4) S_{23} = a_2^2 - p_z^{*2} - e^2 - d_4^2. \quad (1.182)$$

Függelék A alapján (1.182)-ből meghatározható  $q_2 + q_3$  (két megoldás van), majd ennek ismeretében (1.179) és (1.180) alapján  $q_2$ .

### 1.12.2. Az inverz geometriai feladat megoldása csak egy ismeretlen csuklóváltozótól függő egyenlet keresésével

A módszer ötlete abban áll, hogy például a  $K_6$  keret helyzete  $K_1$ -hez képest független  $q_1$ -től, ezért előírva  $T_{0,6}$  számszerű értékét, a

$$T_{0,1}^{-1} \cdot T_{0,6} = T_{1,6} \quad (1.183)$$

egyenlet bal oldala csak csak  $q_1$ -től, míg jobb oldala csak  $q_2, \dots, q_6$ -től függ [1], pp.73-83. Ha tehát a mátrixok ugyanazon pozíciójú elemének helyén jobb oldalt konstans áll, míg bal oldalt változó, akkor ebből az egyenletből  $q_1$  meghatározható. A módszer  $q_1$  ismeretében rekurzíven folytatható, mivel

$$T_{1,2}^{-1} \cdot T_{0,1}^{-1} \cdot T_{0,6} = T_{2,6} \quad (1.184)$$

bal oldala csak a  $q_2$  ismeretlentől, míg jobb oldala csak a  $q_3, \dots, q_6$  ismeretlenektől függ. A problémát az okozza, hogy nincs garancia arra, hogy a jobb oldalon van konstans elem. Ügyelni kell arra is, hogy korábbi lépésekben felhasznált egyenletek azonosságot eredményező következményeit ne használjuk fel.

1.21. Példa: Az inverz geometriai feladat megoldása az Elbow-manipulátor esetén független egyenletek keresésével [1]

A dekompozíciós módszert nem tudjuk alkalmazni, mivel  $a_4 \neq 0$  miatt az utolsó három rotációs csukló tengelyei nem metszik egymást egy pontban. Mivel

$$\mathbf{T}_{1,3} = \begin{bmatrix} C_{23} & -S_{23} & 0 & C_{23}a_3 + C_2a_2 \\ S_{23} & C_{23} & 0 & S_{23}a_3 + S_2a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.185)$$

ezért (1.161) miatt a  $\mathbf{T}_{1,6} = \mathbf{T}_{1,3} \cdot \mathbf{T}_{3,6}$  mátrix (3,4) elemének helyén jobb oldalt nulla áll. Másrészt

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{0,1}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{0,6} &= \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{l} & \mathbf{m} & \mathbf{n} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C_1l_x + S_1l_y & C_1m_x + S_1m_y & C_1n_x + S_1n_y & C_1p_x + S_1p_y \\ l_z & m_z & n_z & p_z \\ S_1l_x - C_1l_y & S_1m_x - C_1m_y & S_1n_x - C_1n_y & S_1p_x - C_1p_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.186)$$

ahonnan a (3,4) elem alapján következik, hogy

$$S_1p_x - C_1p_y = 0, \quad (1.187)$$

$$q_1 = \arctan \frac{p_y}{p_x}. \quad (1.188)$$

Vegyük észre, hogy (1.186) ugyanazon sorában álló elemek hasonlóak, mivel

$$[a \ b \ c \ d] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = ax + by + cz + du, \quad (1.189)$$

és az oszlopvektor helyére rendre  $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$  és  $\mathbf{p}$  került.

Tekintsük ezután a  $\mathbf{T}_{1,2}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{0,1}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{0,6} = \mathbf{T}_{2,6}$  egyenlet két oldalát, akkor (1.128) és (1.161) miatt  $\mathbf{T}_{2,6}$ -nak csak (3,4) eleme konstans=0, míg ezen a helyen (1.186) és

$$\mathbf{T}_{1,2}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{0,1}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{0,6} = \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 & -a_2 \\ -S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{T}_{0,1}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{0,6} \quad (1.190)$$

miatt a már felhasznált  $S_1 p_x - C_1 p_y = 0$  azonosság áll. Mivel  $\mathbf{T}_{3,6}$ -nak csak a (3,4) eleme konstans=0, továbbá  $\mathbf{T}_{0,3}^{-1}$  harmadik sora helyén (1.129), (1.107) és (1.108) alapján  $[S_1 - C_1 \ 0 \ 0]$  áll, ezért a  $\mathbf{T}_{0,3}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{0,6} = \mathbf{T}_{3,6}$  egyenlet ismét a már felhasznált  $S_1 p_x - C_1 p_y = 0$  azonosságra vezet.

Tekintsük ezért a  $\mathbf{T}_{0,4}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{0,6} = \mathbf{T}_{4,6}$  egyenletet, ahol

$$\mathbf{T}_{4,6} = \begin{bmatrix} * & * & S_5 & 0 \\ * & * & -C_5 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.191)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{0,4} = \mathbf{T}_{0,3} \cdot \mathbf{T}_{3,4} &= \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & S_1 & C_1(C_{23} a_3 + C_2 a_2) \\ S_1 C_{23} & -S_1 S_{23} & -C_1 & S_1(C_{23} a_3 + C_2 a_2) \\ S_{23} & C_{23} & 0 & S_{23} a_3 + S_2 a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & C_4 a_4 \\ S_4 & 0 & C_4 & S_4 a_4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C_1 C_{234} & -S_1 & -C_1 S_{234} & C_1 C_{234} a_4 + C_1(C_{23} a_3 + C_2 a_2) \\ S_1 C_{234} & C_1 & -S_1 S_{234} & S_1 C_{234} a_4 + S_1(C_{23} a_3 + C_2 a_2) \\ S_{234} & 0 & C_{234} & S_{234} a_4 + S_{23} a_3 + S_2 a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.192)$$

$$\mathbf{T}_{0,4}^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 C_{234} & S_1 C_{234} & S_{234} & -a_4 - C_4 a_3 - C_{34} a_2 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ -C_1 S_{234} & -S_1 S_{234} & C_{234} & S_4 a_3 + S_{34} a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.193)$$

$$\mathbf{T}_{0,4}^{-1}\mathbf{T}_{0,6} \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{l}^* & \mathbf{m}^* & \mathbf{n}^* & \mathbf{p}^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.194)$$

$$p_x^* = (C_1 p_x + S_1 p_y)C_{234} + S_{234} p_z - C_{34} a_2 - C_4 a_3 - a_4, \quad (1.195)$$

$$p_y^* = -S_1 p_x + C_1 p_y = 0, \quad (1.196)$$

$$p_z^* = -(C_1 p_x + S_1 p_y)S_{234} + C_{234} p_z + S_{34} a_2 + S_4 a_3, \quad (1.197)$$

$$n_z^* = -(C_1 n_x + S_1 n_y)S_{234} + C_{234} n_z. \quad (1.198)$$

Az (1.198) és (1.191) egyenletekből következik, hogy

$$q_2 + q_3 + q_4 = \arctan \frac{n_z}{C_1 n_x + S_1 n_y} \quad (1.199)$$

(két megoldás van). Vezessük be a

$$p_x^{**} = (C_1 p_x + S_1 p_y)C_{234} + S_{234} p_z - a_4, \quad (1.200)$$

$$p_z^{**} = (C_1 p_x + S_1 p_y)S_{234} - C_{234} p_z \quad (1.201)$$

jelöléseket, akkor (1.191), (1.195) és (1.197) alapján írható:

$$C_{34} a_2 + C_4 a_3 = p_x^{**}, \quad (1.202)$$

$$S_{34} a_2 + S_4 a_3 = p_z^{**}. \quad (1.203)$$

Emeljük mindkét oldalt négyzetre, és adjuk össze az egyenleteket, akkor

$$a_2^2 + 2(C_{34}C_4 + S_{34}S_4)a_2a_3 + a_3^2 = p_x^{**2} + p_z^{**2}, \quad (1.204)$$

$$C_3 = \frac{p_x^{**2} + p_z^{**2} - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3}, \quad (1.205)$$

$$S_3 = \pm \sqrt{1 - C_3^2}, \quad (1.206)$$

ahonnan meghatározható  $q_3$  két lehetséges értéke.

Mivel

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad (1.207)$$

és (1.202),(1.203) felírható

$$\begin{bmatrix} C_3 a_2 + a_3 & -S_3 a_2 \\ S_3 a_2 & C_3 a_2 + a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_4 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x^{**} \\ p_z^{**} \end{bmatrix} \quad (1.208)$$

alakban is, ezért

$$S_4 = \frac{-S_3 a_2 p_x^{**} + (C_3 a_2 + a_3) p_z^{**}}{(C_3 a_2 + a_3)^2 + S_3^2 a_2^2}, \quad (1.209)$$

$$C_4 = \frac{(C_3 a_2 + a_3) p_x^{**} + S_3 a_2 p_z^{**}}{(C_3 a_2 + a_3)^2 + S_3^2 a_2^2}, \quad (1.210)$$

ahonnan meghatározható  $q_4$  értéke. Az (1.191), (1.193) és  $\mathbf{T}_{0,4}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{0,6} = \mathbf{T}_{4,6}$  egyenletek alapján

$$\begin{aligned} S_5 &= C_1 C_{234} n_x + S_1 C_{234} n_y + S_{234} n_z = \\ &= (C_1 n_x + S_1 n_y) C_{234} + S_{234} n_z, \end{aligned} \quad (1.211)$$

$$C_5 = S_1 n_x - C_1 n_y, \quad (1.212)$$

ahonnan meghatározható  $q_5$  értéke. Végül (1.159), (1.193), (1.160) és  $\mathbf{A}_{0,5}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{0,6} = \mathbf{A}_{5,6}$  alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{0,5}^{-1} &= \begin{bmatrix} C_5 & S_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ S_5 & -C_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 C_{234} & S_1 C_{234} & S_{234} \\ -S_1 & C_1 & 0 \\ -C_1 S_{234} & -S_1 S_{234} & C_{234} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C_1 C_{234} C_5 - S_1 S_5 & S_1 C_{234} C_5 + C_1 S_5 & S_{234} C_5 \\ -C_1 S_{234} & -S_1 S_{234} & C_{234} \\ C_1 C_{234} S_5 + S_1 C_5 & S_1 C_{234} S_5 - C_1 C_5 & S_{234} S_5 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.213)$$

$$\begin{aligned} S_6 &= C_1 S_{234} l_x - S_1 S_{234} l_y + C_{234} l_z = \\ &= -(C_1 l_x + S_1 l_y) S_{234} + C_{234} l_z, \end{aligned} \quad (1.214)$$

$$\begin{aligned} C_6 &= (C_1 C_{234} C_5 - S_1 S_5) l_x + (S_1 C_{234} C_5 + C_1 S_5) l_y + S_{234} C_5 l_z = \\ &= C_5 [C_{234} (C_1 l_x + S_1 l_y) + S_{234} l_z] + S_5 (-S_1 l_x + C_1 l_y), \end{aligned} \quad (1.215)$$

ahonnan kiszámítható  $q_6$  értéke.

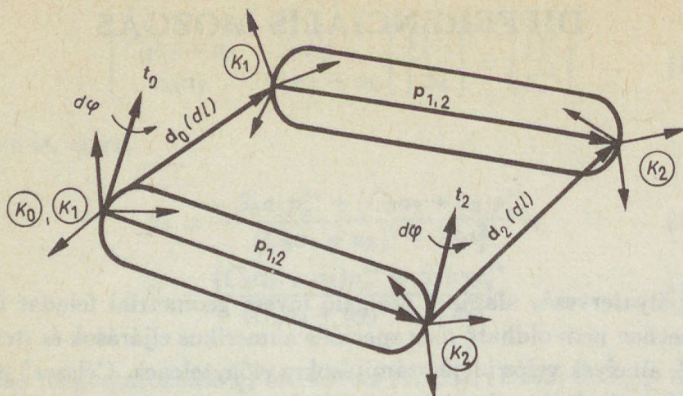
## 2. A ROBOT KINEMATIKÁJA: DIFFERENCIÁLIS MOZGÁS

A pályatervezés alapjául szolgáló inverz geometriai feladat általános esetben nem oldható meg speciális numerikus eljárások és iterációk nélkül, amelyek valós idejű számításokra előnytelenek. Célszerű ezért a csuklókoordináták, valamint a pozíció és orientáció közötti nemlineáris (transzcendens) függvénykapcsolatot lokálisan linearizálni és a sebességekre áttérni. A linearizáció csuklókoordináta- (konfiguráció-) függő lesz, és a robot differenciális mozgásán alapul. A viszonylag egyszerű linearizált alak redundáns robotok esetén is lehetőséget ad a kedvező megoldás meghatározására.

Másrészt a differenciális mozgás ismeretében le tudjuk írni a megfogó szögsebességének, szöggyorsulásának függését a csuklókoordinátáktól (a konfigurációtól) és azok első és második deriváltjától. Közismert, hogy ezek a kinematikai mennyiségek szerepet játszanak a robot mozgatásához szükséges nyomatékok értékének meghatározásában, ezért a robot dinamikus modelljének felállításához elengedhetetlenek.

### 2.1. A ROBOT DIFFERENCIÁLIS MOZGÁSA

Tekintsünk egy merev testet a hozzá rögzített  $K_1$  és  $K_2$  keretekkel. Eredetileg  $K_1$  essen egybe a  $K_0$  álló koordináta-rendszerrel (2.1. ábra). Végezzon a merev test a  $t_0$  körül  $d\varphi$  elfordulást, és legyen a  $K_1$  keret origójának elmozdulása  $\mathbf{d}_0$  mentén  $dl$  értékű ( $t_0$  és  $\mathbf{d}_0$  koordinátái legyenek  $K_0$ -ban adottak). A merev test minden pontjának egyforma a szögsebessége, így a  $K_2$  origójának is. A  $K_2$  origójának sebessége eltér a  $K_1$  origójának sebességétől. Az eltérés egyenlő a szögsebesség és



2.1. ábra

Merev test differenciális mozgása

$\varrho = \mathbf{p}_{1,2}$  vektoriális szorzatával (B.25) szerint. Ennek alapján felírhatjuk  $K_2$  origójának elfordulását és elmozdulását a  $K_2$  keretben (a merev test eredeti helyzetében  $\mathbf{T}_{0,2} = \mathbf{T}_{1,2}$ ):

$$\mathbf{t}_2 d\varphi = \mathbf{A}_{0,2}^{-1} \mathbf{t}_0 d\varphi, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{d}_2(dl) = \mathbf{A}_{0,2}^{-1} \{ \mathbf{d}_0(dl) + \mathbf{t}_0 d\varphi \times \mathbf{p}_{0,2} \}, \quad (2.2)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_2(dl) \\ \mathbf{t}_2 d\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_{0,2}^T & (\mathbf{p}_{0,2} \times \mathbf{l}_{0,2})^T \\ \mathbf{m}_{0,2}^T & (\mathbf{p}_{0,2} \times \mathbf{m}_{0,2})^T \\ \mathbf{n}_{0,2}^T & (\mathbf{p}_{0,2} \times \mathbf{n}_{0,2})^T \\ \mathbf{0}^T & (\mathbf{l}_{0,2})^T \\ \mathbf{0}^T & (\mathbf{m}_{0,2})^T \\ \mathbf{0}^T & (\mathbf{n}_{0,2})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0(dl) \\ \mathbf{t}_0 d\varphi \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

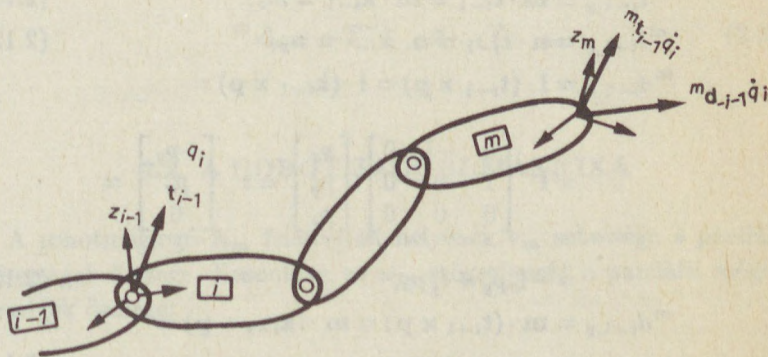
Bevezetve a

$$\mathbf{D}_{0,1} = \begin{bmatrix} [\mathbf{t}_0 d\varphi \times] & \mathbf{d}_0(dl) \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{0,2} = \begin{bmatrix} [\mathbf{t}_2 d\varphi \times] & \mathbf{d}_2(dl) \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

jelölést és felhasználva a Rodrigues-képletet, a következő összefüggést kapjuk:

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{T}_{0,2} &= \left\{ \mathbf{Trans}(\mathbf{d}_0(dl))\mathbf{Rot}(\mathbf{t}_0, d\varphi) - \mathbf{I} \right\} \mathbf{T}_{0,2} = \\
 &= \mathbf{D}_{0,1} \mathbf{T}_{0,2} = \\
 &= \mathbf{T}_{0,2} \left\{ \mathbf{Trans}(\mathbf{d}_2(dl))\mathbf{Rot}(\mathbf{t}_2, d\varphi) - \mathbf{I} \right\} = \\
 &= \mathbf{T}_{0,2} \mathbf{D}_{0,2}, \tag{2.5} \\
 \mathbf{D}_{0,2} &= \mathbf{T}_{0,2}^{-1} \mathbf{D}_{0,1} \mathbf{T}_{0,2}. \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

Vizsgáljuk ezután egyetlen  $q_i$  csuklókoordinátának a megfogó  $K_m$  felerősítési helyének  $\mathbf{v}_m$  sebességére és  $\omega_m$  szögsebességére kifejtett hatását. Jelölje a bal felső index a keretet, amelyben ezek koordinátáit képeztük. Mivel  $q_1, \dots, q_{i-1}$  és  $q_{i+1}, \dots, q_m$  nem változnak, ezért álló keretnek választhatjuk a  $K_{i-1}$  keretet és merev testnek az  $\boxed{i}, \dots, \boxed{m}$  szegmensekből álló együttest (2.2. ábra).



2.2. ábra

Robot differenciális mozgása

Alkalmazzuk a (2.1)–(2.6) eredményeket  $K_0 := K_{i-1}$  és  $K_2 := K_m$  megfeleltetés mellett. Akkor a  $q_i$  csuklókoordináta megváltozása

${}^m d_{i-1} \dot{q}_i$  parciális sebességet és  ${}^m t_{i-1} \dot{q}_i$  parciális szögsebességet eredményez a  $K_m$  keret origójában [30], [1], ahol a

$$\mathbf{T}_{i-1,m} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{m} & \mathbf{n} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

jelölés mellett

$${}^m t_{i-1} = \mathbf{A}^{-1}(\kappa_i t_{i-1}), \quad (2.8)$$

$${}^m d_{i-1} = \mathbf{A}^{-1} \left\{ (1 - \kappa_i) t_{i-1} + \kappa_i t_{i-1} \times \mathbf{p} \right\}. \quad (2.9)$$

Itt  $\kappa_i = 1$  rotációs és  $\kappa_i = 0$  translációs csukló esetén. Ha a  $z_{i-1}$  tengely azonos a csuklótengellyel, akkor  $t_{i-1} = k_{i-1}$ .

**Rotációs csukló esetén:**

$${}^m t_{i-1,x} = \mathbf{l} \cdot t_{i-1} = \mathbf{l} \cdot k_{i-1} = l_x, \quad (2.10)$$

$${}^m t_{i-1,y} = \mathbf{m} \cdot t_{i-1} = \mathbf{m} \cdot k_{i-1} = m_x, \quad (2.11)$$

$${}^m t_{i-1,z} = \mathbf{n} \cdot t_{i-1} = \mathbf{n} \cdot k_{i-1} = n_x, \quad (2.12)$$

$${}^m d_{i-1,x} = \mathbf{l} \cdot (t_{i-1} \times \mathbf{p}) = \mathbf{l} \cdot (k_{i-1} \times \mathbf{p}) =$$

$$= \mathbf{l}^T \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \mathbf{l}^T \begin{bmatrix} -p_y \\ p_x \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -l_x p_y + l_y p_x, \quad (2.13)$$

$${}^m d_{i-1,y} = \mathbf{m} \cdot (t_{i-1} \times \mathbf{p}) = \mathbf{m} \cdot (k_{i-1} \times \mathbf{p}) =$$

$$= -m_x p_y + m_y p_x, \quad (2.14)$$

$${}^m d_{i-1,z} = \mathbf{n} \cdot (t_{i-1} \times \mathbf{p}) = \mathbf{n} \cdot (k_{i-1} \times \mathbf{p}) =$$

$$= -n_x p_y + n_y p_x. \quad (2.15)$$

Transzlációs csukló esetén:

$${}^m \mathbf{t}_{i-1} = \mathbf{0}, \quad (2.16)$$

$${}^m d_{i-1,x} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{t}_{i-1} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{k}_{i-1} = l_z, \quad (2.17)$$

$${}^m d_{i-1,y} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{t}_{i-1} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{k}_{i-1} = m_z, \quad (2.18)$$

$${}^m d_{i-1,z} \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_{i-1} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_{i-1} = n_z. \quad (2.19)$$

Alkalmazzuk a

$$\Delta_{i-1} = \begin{bmatrix} [\kappa_i \mathbf{t}_{i-1} \times] & (1 - \kappa_i) \mathbf{t}_{i-1} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

$${}^m \Delta_{i-1} = \begin{bmatrix} [{}^m \mathbf{t}_{i-1} \times] & {}^m \mathbf{d}_{i-1} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

jelöléseket, akkor teljesül, hogy

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{i-1,m}}{\partial q_i} = \Delta_{i-1} \mathbf{T}_{i-1,m} = \mathbf{T}_{i-1,m} {}^m \Delta_{i-1}, \quad (2.22)$$

$${}^m \Delta_{i-1} = \mathbf{T}_{i-1,m}^{-1} \Delta_{i-1} \mathbf{T}_{i-1,m}. \quad (2.23)$$

## 2.2. A ROBOT JACOBI-MÁTRIXA

A robotmegfogó  $K_m$  felerősítési helyének  $\mathbf{v}_m$  sebessége a parciális sebességek összege. Hasonlóan az  $\omega_m$  szögsebesség a parciális szögsebességek összege:

$${}^m \mathbf{v}_m = \sum_{i=1}^m {}^m \mathbf{d}_{i-1} \dot{q}_i, \quad (2.24)$$

$${}^m \omega_m = \sum_{i=1}^m {}^m \mathbf{t}_{i-1} \dot{q}_i. \quad (2.25)$$

Ezeket az összefüggéseket a robot

$${}^m \mathbf{J}_m = \begin{bmatrix} {}^m d_0 & {}^m d_1 & \dots & {}^m d_{m-1} \\ {}^m t_0 & {}^m t_1 & \dots & {}^m t_{m-1} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Jacobi-mátrixával felírhatjuk a

$$\begin{bmatrix} {}^m \mathbf{v}_m \\ {}^m \boldsymbol{\omega}_m \end{bmatrix} = {}^m \mathbf{J}_m \dot{\mathbf{q}} \quad (2.27)$$

alakban is. Mivel az álló  $K_0$  keretben

$${}^0 \mathbf{v}_m = \mathbf{A}_{0,m} {}^m \mathbf{v}_m, \quad (2.28)$$

$${}^0 \boldsymbol{\omega}_m = \mathbf{A}_{0,m} {}^m \boldsymbol{\omega}_m, \quad (2.29)$$

ezért

$${}^0 \mathbf{J}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{0,m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{0,m} \end{bmatrix} {}^m \mathbf{J}_m. \quad (2.30)$$

A (2.27) vagy (2.30) összefüggés lehetőséget ad a nemlineáris

$$\mathbf{T}_{0,m}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{m} & \mathbf{n} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

egyenlet lokális (a csuklókoordináták értékétől függő) linearizálására. Ezért olyan esetben, ha a (2.31) inverz geometriai feladat nem oldható meg zárt alakban, mert például az utolsó három rotációs csukló tengelye nem megy át egy ponton, amikor is gyakran magas fokszámú polinomegyenletek megoldása válik szükségessé, a (2.27) vagy a

$$\begin{bmatrix} {}^0 \mathbf{v}_m \\ {}^0 \boldsymbol{\omega}_m \end{bmatrix} = {}^0 \mathbf{J}_m \dot{\mathbf{q}} \quad (2.32)$$

egyenlet lehetőséget ad  $\dot{q}$  meghatározására, és ebből integrálással  $q(t)$  számítására (sebességalgoritmus). Ekkor a pálya mentén a sebességet és szögsebességet kell előírni (vagy a pozíció és az orientáció analitikus alakjából számítani). A sebesség és szögsebesség előírt értékéből  $\dot{q}$  kiszámítható (inverz kinematikai feladat) a Jacobi-mátrix  $J_m^\#$  pszeudo-inverzének segítségével:

$$\dot{q} = {}^0J_m^\# \begin{bmatrix} {}^0v_m \\ {}^0\omega_m \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Ha  $m = 6$  és  $J_m$  nem szinguláris, akkor  $J_m^\# = J_m^{-1}$ . Azokat a csuklókoordináta-értékeket, amelyekre  $J_m$  képtere nem a teljes  $R^6$  tér ( $\dim \text{Range}(J_m) < 6$ ), szinguláris pontoknak nevezzük. Ezekben a robot bizonyos irányok mentén nem mozgatható vagy forgatható.

Ha  $m > 6$ , vagyis a robot redundáns szabadságfokokkal rendelkezik, akkor a végtelen sok megoldás közül célszerű olyat kiválasztani, amelynél  $\|\dot{q}\| \rightarrow \min$ , mert ez rövid tranziensthez és kis energiefelhasználáshoz fog vezetni. Kérdés tehát, hogy mi a megoldása  $A_{n \times m} x, n < m$  esetén az

$$Ax - y = 0; \quad \|x\|^2 \rightarrow \min \quad (2.34)$$

optimumfeladatnak. Mivel  $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$  konvex funkcionál és  $Ax - y = 0$  lineáris korlátozás, ezért a Lagrange-multiplikátor szabállyal ([40], p.150) számított  $x$  optimális megoldás:

$$\begin{aligned} F &= \langle x, x \rangle + \langle \lambda, Ax - y \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + \langle A^T \lambda, x \rangle - \langle \lambda, y \rangle, \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$F'_x = 2x + A^T \lambda = 0, \quad (2.36)$$

$$x = -\frac{1}{2} A^T \lambda, \quad (2.37)$$

$$Ax - y = A\left(-\frac{1}{2} A^T \lambda\right) - y = 0, \quad (2.38)$$

$$\lambda = -2(AA^T)^{-1} y, \quad (2.39)$$

$$x = A^T (AA^T)^{-1} y. \quad (2.40)$$

Ha tehát  $m > 6$ , akkor (2.32) vagy (2.33) minimális normájú megoldása

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_m^T (\mathbf{J}_m \mathbf{J}_m^T)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_m \\ \boldsymbol{\omega}_m \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Ha  $m < 6$ , vagyis a robot nem teszi lehetővé a sebesség és a szögsebesség egyidejű szabad megválasztását, akkor két lehetőségünk van:

- a)  $\mathbf{v}_m$  és  $\boldsymbol{\omega}_m$  koordinátái közül kiválasztunk annyit, amennyi  $\dim \mathbf{q}$ , és tekintjük (2.27) vagy (2.32) ezekhez tartozó egyenleteit, a többi feltételt pedig figyelmen kívül hagyjuk. Például  $\dim \mathbf{q} = 2$  esetén választhatjuk a  $v_x$  vagy  $v_y$  értékére vonatkozó egyenleteket, ha  $p_x$  és  $p_y$  függenek  $q_1$  és  $q_2$  értékétől.
- b) Választhatjuk azt a megoldást, amelyik minimalizálja az egyenlet bal és jobb oldala különbségének hibáját. Ekkor az a kérdés, hogy  $\mathbf{A}_{n \times m}$ ,  $n > m$  jelöléssel mi a megoldása az

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|^2 \rightarrow \min \quad (2.42)$$

feladatnak. Mivel  $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{Ax} - \mathbf{y}, \mathbf{Ax} - \mathbf{y} \rangle$  konvex funkcionál, ezért ott, ahol a derivált nullává válik, egy optimális megoldást kapunk:

$$\begin{aligned} F &= \langle \mathbf{Ax} - \mathbf{y}, \mathbf{Ax} - \mathbf{y} \rangle = \\ &= \langle \mathbf{Ax}, \mathbf{Ax} \rangle - 2 \langle \mathbf{Ax}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \\ &= \langle \mathbf{A}^T \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle - 2 \langle \mathbf{A}^T \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle, \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$F'_x = 2\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} - 2\mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (2.44)$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}, \quad (2.45)$$

tehát  $m < \dim \mathbf{q}$  esetén választható a

$$\dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{J}_m^T \mathbf{J}_m)^{-1} \mathbf{J}_m^T \begin{bmatrix} \mathbf{v}_m \\ \boldsymbol{\omega}_m \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Ha  $m = 6$  és  $J_m$  alakja

$$J_m = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

ahol  $\mathbf{A}$  és  $\mathbf{C}$   $3 \times 3$  típusú és invertálható, akkor

$$J_m^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

és így a  $6 \times 6$  típusú mátrix invertálása helyett elegendő két  $3 \times 3$  típusú mátrixot invertálni, ami numerikus szempontból egyszerűbb és gyorsabb; például

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}; & A_{12} &= a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}; & A_{13} &= a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}, \\ A_{21} &= a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}; & A_{22} &= a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}; & A_{23} &= a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}, \\ A_{31} &= a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}; & A_{32} &= a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}; & A_{33} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\det \mathbf{A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \quad (2.51)$$

### 2.2.1. Az inverz kinematikai feladat megoldása dekompozícióval

Ha  $m = 6$ , továbbá az utolsó három csukló rotációs csukló, és a tengelyeik egy ponton mennek át, akkor az inverz kinematikai feladat két háromszabadságfokú részfeladatra bontható. Ekkor ugyanis (1.171) szerint

$$\mathbf{T}_{B,E} = \mathbf{T}_{B,0} \cdot \mathbf{T}_{0,3^*} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{3,6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{T}_{6^*,E}, \quad (2.52)$$

ahol

$$\mathbf{T}_{0,3^*} = \mathbf{T}_{0,3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

$$\mathbf{T}_{6^*,E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{T}_{6,E}. \quad (2.54)$$

Ezért a következő algoritmus szerint járhatunk el:

1. Adott a végberendezés  ${}^B \mathbf{v}_E$  sebessége és  ${}^B \boldsymbol{\omega}_E$  szögsebessége.
2. A sebességet és a szögsebességet átszámítjuk a  $K_E$  keretbe:

$${}^E \mathbf{v}_E = \mathbf{A}_{B,E}^{-1} {}^B \mathbf{v}_E; \quad {}^E \boldsymbol{\omega}_E = \mathbf{A}_{B,E}^{-1} {}^B \boldsymbol{\omega}_E. \quad (2.55)$$

3. Meghatározzuk a  $K_{6^*}$  keret origójának sebességét és szögsebességét (2.1) és (2.2) szerint a  $K_0 := K_E$  és  $K_2 := K_{6^*}$  választás mellett, amikor is  $\mathbf{T}_{0,2} := \mathbf{T}_{6^*,E}^{-1}$ :

$${}^{6^*} \mathbf{v}_{6^*} = \mathbf{A}_{6^*,E} \{ {}^E \mathbf{v}_E + {}^E \boldsymbol{\omega}_E \times (-\mathbf{A}_{6^*,E}^{-1} \mathbf{p}_{6^*,E}) \}, \quad (2.56)$$

$${}^{6^*} \boldsymbol{\omega}_{6^*} = \mathbf{A}_{6^*,E} {}^E \boldsymbol{\omega}_E. \quad (2.57)$$

4. Felhasználjuk, hogy (2.13)–(2.15) szerint  ${}^{6^*} \mathbf{d}_{i-1} = \mathbf{0}$ ,  $i = 4, 5, 6$ , ezért  ${}^{6^*} \mathbf{J}_{6^*}$  alakja a (2.47) szerinti:

$${}^{6^*} \mathbf{J}_{6^*} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

A csuklókoordinátákat

$$\mathbf{q}_A = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q}_B = \begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

módon felbontva a következő részfeladatokat kell megoldani:

$$\dot{\mathbf{q}}_A = \mathbf{A}^{-1} {}^6\mathbf{v}_{6^*}, \quad (2.60)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_B = \mathbf{C}^{-1} \{ -\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} {}^6\mathbf{v}_{6^*} + {}^6\boldsymbol{\omega}_{6^*} \}. \quad (2.61)$$

## 2.1. Példa: A Stanford-robot Jacobi-mátrixa

Tekintsük a Stanford-kart (1.4. ábra) az Euler-kézcsuklóval (1.21. ábra). Akkor (1.122)–(1.124) és (1.150)–(1.152) alapján teljesül:

$$\mathbf{T}_{5,6} = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.62)$$

$$\mathbf{T}_{4,6} = \begin{bmatrix} C_5C_6 & -C_5S_6 & S_5 & 0 \\ S_5C_6 & -S_5S_6 & -C_5 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.63)$$

$$\mathbf{T}_{3,6} = \begin{bmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -C_4C_5S_6 - S_4C_6 & C_4S_5 & 0 \\ S_4C_5C_6 + C_4S_6 & -S_4C_5S_6 + C_4C_6 & S_4S_5 & 0 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

$$\mathbf{T}_{2,6} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{A}_{3,6} \\ d_3 \\ \mathbf{0}^T \quad 1 \end{bmatrix}, \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned}
 l_{1,6,x} &= C_2(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_2S_5C_6, \\
 l_{1,6,y} &= S_2(C_4C_5C_6 - S_4S_6) + C_2S_5C_6,
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned}
 l_{1,6,z} &= S_4C_5C_6 + C_4S_6, \\
 m_{1,6,x} &= -C_2(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + S_2S_5S_6, \\
 m_{1,6,y} &= -S_2(C_4C_5S_6 + S_4C_6) - C_2S_5S_6,
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

$$\begin{aligned}
 m_{1,6,z} &= -S_4C_5S_6 + C_4C_6, \\
 n_{1,6,x} &= C_2C_4S_5 + S_2C_5, \\
 n_{1,6,y} &= S_2C_4S_5 - C_2C_5,
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

$$\begin{aligned}
 n_{1,6,z} &= S_4S_5, \\
 p_{1,6,x} &= S_2d_3, \\
 p_{1,6,y} &= -C_2d_3,
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned}
 p_{1,6,z} &= d_2, \\
 l_{0,6,x} &= C_1[C_2(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_2S_5C_6] - S_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6), \\
 l_{0,6,y} &= S_1[C_2(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_2S_5C_6] + C_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6), \\
 l_{0,6,z} &= -S_2(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - C_2S_5C_6,
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned}
 m_{0,6,x} &= C_1[-C_2(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + S_2S_5S_6] - S_1(-S_4C_5S_6 + C_4C_6), \\
 m_{0,6,y} &= S_1[-C_2(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + S_2S_5S_6] + C_1(-S_4C_5S_6 + C_4C_6), \\
 m_{0,6,z} &= S_2(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + C_2S_5S_6,
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

$$\begin{aligned}
 n_{0,6,x} &= C_1(C_2C_4S_5 + S_2C_5) - S_1S_4S_5, \\
 n_{0,6,y} &= S_1(C_2C_4S_5 + S_2C_5) + C_1S_4S_5,
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

$$\begin{aligned}
 n_{0,6,z} &= -S_2C_4S_5 + C_2C_5, \\
 p_{0,6,x} &= C_1S_2d_3 - S_1d_2, \\
 p_{0,6,y} &= S_1S_2d_3 + C_1d_2,
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

$$p_{0,6,z} = C_2d_3.$$

Innen következik (2.10)–(2.19) és (2.26) felhasználásával:

$${}^6\mathbf{d}_5 = \mathbf{0}; \quad {}^6\mathbf{t}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (2.74)$$

$${}^6\mathbf{d}_4 = \mathbf{0}; \quad {}^6\mathbf{t}_4 = \begin{bmatrix} S_6 \\ C_6 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (2.75)$$

$${}^6\mathbf{d}_3 = \mathbf{0}; \quad {}^6\mathbf{t}_3 = \begin{bmatrix} -S_5C_6 \\ S_5S_6 \\ C_5 \end{bmatrix}; \quad (2.76)$$

$${}^6\mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} -S_5C_6 \\ S_5S_6 \\ C_5 \end{bmatrix}; \quad {}^6\mathbf{t}_2 = \mathbf{0}; \quad (2.77)$$

$${}^6\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} d_3(C_4C_5C_6 - S_4S_6) \\ -d_3(C_4C_5S_6 + S_4C_6) \\ d_3C_4S_5 \end{bmatrix}; \quad {}^6\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} S_4C_5C_6 + C_4S_6 \\ -S_4C_5S_6 + C_4C_6 \\ S_4S_5 \end{bmatrix}; \quad (2.78)$$

$${}^6\mathbf{d}_0 = \begin{bmatrix} -d_2[C_2(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_2S_5C_6] + d_3S_2(S_4C_5C_6 + C_4S_6) \\ -d_2[-C_2(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + S_2S_5S_6] + d_3S_2(-S_4C_5S_6 + C_4C_6) \\ -d_2(C_2C_4S_5 + S_2C_5) + d_3S_2S_4S_5 \end{bmatrix}; \quad (2.79)$$

$${}^6\mathbf{t}_0 = \begin{bmatrix} -S_2(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - C_2S_5C_6 \\ S_2(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + C_2S_5S_6 \\ -S_2C_4S_5 + C_2C_5 \end{bmatrix}; \quad (2.80)$$

$${}^6\mathbf{J}_6 = \begin{bmatrix} {}^6\mathbf{d}_0 & {}^6\mathbf{d}_1 & {}^6\mathbf{d}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ {}^6\mathbf{t}_0 & {}^6\mathbf{t}_1 & \mathbf{0} & {}^6\mathbf{t}_3 & {}^6\mathbf{t}_4 & {}^6\mathbf{t}_5 \end{bmatrix}. \quad (2.81)$$

Vegyük észre, hogy a Jacobi-mátrix jobb felső blokkja nulla, ezért alkalmazható (2.60)–(2.61).

## 2.2. Példa: A parciális sebességek és szögsebességek számítása álló koordinátarendszerben

A (2.26)–(2.30) egyenletek szerint a parciális sebességek és szögsebességek átszámíthatók az álló  $K_0$  keretbe is. Másrészt (2.8) és (2.9) szerint írható, hogy

$$\mathbf{A}_{0,m}{}^m \mathbf{t}_{i-1} = \kappa_i \mathbf{A}_{0,i-1} \mathbf{t}_{i-1} = \kappa_i \mathbf{A}_{0,i-1} \mathbf{k}_{i-1} = \kappa_i \mathbf{n}_{0,i-1}, \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{0,m}{}^m \mathbf{d}_{i-1} &= (1 - \kappa_i) \mathbf{A}_{0,i-1} \mathbf{t}_{i-1} + \kappa_i \mathbf{A}_{0,i-1} (\mathbf{t}_{i-1} \times \mathbf{p}_{i-1,m}) = \\ &= (1 - \kappa_i) \mathbf{A}_{0,i-1} \mathbf{k}_{i-1} + \kappa_i \mathbf{A}_{0,i-1} (\mathbf{k}_{i-1} \times \mathbf{p}_{i-1,m}) = \\ &= (1 - \kappa_i) \mathbf{n}_{0,i-1} + \kappa_i \{-l_{0,i-1} p_{i-1,m,y} + m_{0,i-1} p_{i-1,m,x}\} \end{aligned} \quad (2.83)$$

vagy

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{0,m}{}^m \mathbf{d}_{i-1} &= (1 - \kappa_i) \mathbf{A}_{0,i-1} \mathbf{t}_{i-1} + \kappa_i (\mathbf{A}_{0,i-1} \mathbf{t}_{i-1}) \times (\mathbf{p}_{0,m} - \mathbf{p}_{0,i-1}) = \\ &= (1 - \kappa_i) \mathbf{A}_{0,i-1} \mathbf{k}_{i-1} + \kappa_i (\mathbf{A}_{0,i-1} \mathbf{k}_{i-1}) \times (\mathbf{p}_{0,m} - \mathbf{p}_{0,i-1}) = \\ &= (1 - \kappa_i) \mathbf{n}_{0,i-1} + \kappa_i \mathbf{n}_{0,i-1} \times (\mathbf{p}_{0,m} - \mathbf{p}_{0,i-1}). \end{aligned} \quad (2.84)$$

## 2.3. Példa: A Jacobi-mátrix számítása derékszögű koordinátáskar és Euler-kézcsukló esetén

Alkalmazzuk az 1.10. és az 1.15. példa eredményeit, továbbá a (2.82)–(2.84) egyenleteket:

$$\mathbf{A}_{0,6}{}^6 \mathbf{d}_0 = \mathbf{A}_{0,0} \mathbf{i}_0 = \mathbf{i}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.85)$$

$$\mathbf{A}_{0,6}{}^6 \mathbf{d}_1 = \mathbf{A}_{0,1} \mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.86)$$

$$\mathbf{A}_{0,6} {}^6 \mathbf{d}_2 = \mathbf{A}_{0,2} \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.87)$$

$$\mathbf{A}_{0,6} {}^6 \mathbf{t}_3 = \mathbf{A}_{0,3} \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.88)$$

$$\mathbf{A}_{0,6} {}^6 \mathbf{t}_4 = \mathbf{A}_{0,4} \mathbf{k}_4 = \mathbf{A}_{3,4} \mathbf{k}_4 = \mathbf{n}_{3,4} = \begin{bmatrix} -S_4 \\ C_4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.89)$$

$$\mathbf{A}_{0,6} {}^6 \mathbf{t}_5 = \mathbf{A}_{0,5} \mathbf{k}_5 = \mathbf{A}_{3,5} \mathbf{k}_5 = \mathbf{n}_{3,5} = \begin{bmatrix} C_4 S_5 \\ S_4 S_5 \\ C_5 \end{bmatrix}, \quad (2.90)$$

$${}^0 \mathbf{J}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S_4 & C_4 S_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_4 & S_4 S_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & C_5 \end{bmatrix}, \quad (2.91)$$

$$\mathbf{A}_{0,6}^{-1} = \mathbf{Euler}(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6)^T, \quad (2.92)$$

$${}^6 \mathbf{J}_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{0,6}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{0,6}^{-1} \end{bmatrix} {}^0 \mathbf{J}_6 =$$

$$= \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_5 C_6 & 0 & 0 & 0 \\ -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_5 S_6 & 0 & 0 & 0 \\ C_4 S_5 & S_4 S_5 & C_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S_5 C_6 & S_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_5 S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2.93)

## 2.4. Példa: A gyorsulás és szöggyorsulás számítása a Jacobi-mátrix felhasználásával

Jelölje vessző ( $\dot{\phantom{x}}$ ) az elemenkénti idő szerinti deriválást. Legyen a Jacobi-mátrix alakja:

$${}^0\mathbf{J}_m = \begin{bmatrix} {}^0\Omega_m \\ {}^0\Gamma_m \end{bmatrix};$$

$${}^m\mathbf{J}_m = \begin{bmatrix} {}^m\Omega_m \\ {}^m\Gamma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{0,6}^{-10} \Omega_m \\ \mathbf{A}_{0,6}^{-10} \Gamma_m \end{bmatrix}. \quad (2.94)$$

Mivel

$$\mathbf{v} = {}^0v_x \mathbf{i}_0 + {}^0v_y \mathbf{j}_0 + {}^0v_z \mathbf{k}_0 = {}^m v_x \mathbf{i}_m + {}^m v_y \mathbf{j}_m + {}^m v_z \mathbf{k}_m, \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= {}^0v'_x \mathbf{i}_0 + {}^0v'_y \mathbf{j}_0 + {}^0v'_z \mathbf{k}_0 = \\ &= {}^m v'_x \mathbf{i}_m + {}^m v'_y \mathbf{j}_m + {}^m v'_z \mathbf{k}_m + {}^m v_x \dot{\mathbf{i}}'_m + {}^m v_y \dot{\mathbf{j}}'_m + {}^m v_z \dot{\mathbf{k}}'_m = \\ &= {}^m v'_x \mathbf{i}_m + {}^m v'_y \mathbf{j}_m + {}^m v'_z \mathbf{k}_m + {}^m \boldsymbol{\omega}_m \times {}^m \mathbf{v}_m, \end{aligned} \quad (2.96)$$

ezért (2.94) jelöléseivel következik, hogy

$$\begin{bmatrix} {}^0\mathbf{a}_m \\ {}^0\boldsymbol{\varepsilon}_m \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{J}_m \ddot{\mathbf{q}} + {}^0\dot{\mathbf{J}}'_m \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} {}^0\Omega_m \ddot{\mathbf{q}} + {}^0\dot{\Omega}'_m \dot{\mathbf{q}} \\ {}^0\Gamma_m \ddot{\mathbf{q}} + {}^0\dot{\Gamma}'_m \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}, \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^m\mathbf{a}_m \\ {}^m\boldsymbol{\varepsilon}_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}^m\Omega_m \ddot{\mathbf{q}} + {}^m\dot{\Omega}'_m \dot{\mathbf{q}} + ({}^m\Gamma_m \dot{\mathbf{q}}) \times ({}^m\Omega_m \dot{\mathbf{q}}) \\ {}^m\Gamma_m \ddot{\mathbf{q}} + {}^m\dot{\Gamma}'_m \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \\ &= {}^m\mathbf{J}_m \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} {}^m\dot{\Omega}'_m + ({}^m\Gamma_m \dot{\mathbf{q}}) \times {}^m\Omega_m \\ {}^m\dot{\Gamma}'_m \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (2.98)$$

vagy például (B.19) felhasználásával:

$$\begin{bmatrix} {}^m\mathbf{a}_m \\ {}^m\boldsymbol{\varepsilon}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{0,6}^{-1} \{ {}^0\Omega_m \ddot{\mathbf{q}} + {}^0\dot{\Omega}'_m \dot{\mathbf{q}} \} \\ \mathbf{A}_{0,6}^{-1} \{ {}^0\Gamma_m \ddot{\mathbf{q}} + {}^0\dot{\Gamma}'_m \dot{\mathbf{q}} \} \end{bmatrix}. \quad (2.99)$$

## 2.5. Példa: A gyorsulás és szöggyorsulás számítása derékszögű koordinátás kar és Euler-kézcsukló esetén

A 2.3. és 2.4. példa eredményei alapján írható:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{a}_6 \\ {}^0\boldsymbol{\varepsilon}_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S_4 & C_4S_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_4 & S_4S_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & C_5 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C_4\dot{q}_4 & -S_4S_5\dot{q}_4 + C_4C_5\dot{q}_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S_4\dot{q}_4 & C_4S_5\dot{q}_4 + S_4C_5\dot{q}_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_5\dot{q}_5 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}, \tag{2.100}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} {}^6\mathbf{a}_6 \\ {}^6\boldsymbol{\varepsilon}_6 \end{bmatrix} &= \\
 &= \begin{bmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & S_4C_5C_6 + C_4S_6 & -S_5C_6 & 0 & 0 & 0 \\ -C_4C_5S_6 - S_4C_6 & -S_4C_5S_6 + C_4C_6 & S_5S_6 & 0 & 0 & 0 \\ C_4S_5 & S_4S_5 & C_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S_5C_6 & S_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_5S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_5C_6\dot{q}_5 + S_5S_6\dot{q}_6 & C_6\dot{q}_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_5S_6\dot{q}_5 + S_5C_6\dot{q}_6 & -S_6\dot{q}_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S_5\dot{q}_5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}. \tag{2.101}
 \end{aligned}$$

### 2.2.2. A sebesség- és a gyorsulásalgorithmus

A robot mozgását előírhatjuk a végberendezés mozgása révén. Ennek során megadhatjuk a végberendezés referenciapontjának (például a szerszámközeppontnak = TCP) kívánt

- i) pozícióját és orientációját (pozícióalgorithmus),
- ii) sebességét és szögsebességét (sebességalgorithmus),
- iii) gyorsulását és szöggyorsulását (gyorsulásalgorithmus).

**Pozícióalgorithmus** esetén a csuklókoordinátákat ( $\mathbf{q}$ ) az **inverz geometriai feladat** megoldásával határozhatjuk meg (lásd 1. fejezet).

**Sebességalgorithmus** esetén a csuklókoordináták deriváltjait ( $\dot{\mathbf{q}}$ ) az inverz kinematikai feladat megoldásával határozhatjuk meg (lásd [(2.33), (2.41), (2.46) egyenletek]).

**Gyorsulásalgorithmus** esetén a csuklókoordináták második deriváltját ( $\ddot{\mathbf{q}}$ ) az

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ \boldsymbol{\varepsilon}_m \end{bmatrix} = \mathbf{J}_m \ddot{\mathbf{q}} + \frac{d\mathbf{J}_m}{dt} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.102)$$

egyenlet megoldásaként számíthatjuk:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_m^\# \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ \boldsymbol{\varepsilon}_m \end{bmatrix} - \frac{d\mathbf{J}_m}{dt} \dot{\mathbf{q}} \right\}. \quad (2.103)$$

A  $d\mathbf{J}_m/dt$  tag alakját az álló  $K_0$  és a mozgó  $K_m$  koordinátarendszerben az (2.97) és (2.98) egyenletben részletesen kifejtettük. Vegyük észre, hogy mozgó koordinátarendszerben  $d\mathbf{J}_m/dt$  nem kapható meg egyszerűen a mátrix elemeinek időszerinti deriválásával.

A **Jacobi-mátrix inverze**  $m = 6$  esetén viszonylag egyszerűen számítható (2.48)–(2.51) alapján, ha az utolsó három csukló rotációs, és a tengelyeik egy ponton mennek át. Ehhez szükség lehet a (2.56)–(2.57) számítások elvégzésére, valamint gyorsulásalgorithmus esetén a  $K_6$  keret origója gyorsulásának és szöggyorsulásának meghatározására is:

$${}^6\epsilon_{6^*} = \mathbf{A}_{6^*,E} {}^E\epsilon_E, \quad (2.104)$$

$${}^6\mathbf{a}_{6^*} = \mathbf{A}_{6^*,E} \left\{ {}^E\mathbf{a}_E + {}^E\epsilon_E \times (-\mathbf{A}_{6^*,E}^{-1} \mathbf{P}_{6^*,E}) + \right. \\ \left. + {}^E\omega_E \times [{}^E\omega_E \times (-\mathbf{A}_{6^*,E}^{-1} \mathbf{P}_{6^*,E})] \right\}. \quad (2.105)$$

Ha a szabályozási algoritmus igényli a pálya  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\omega$ ,  $\epsilon$  kinematikai mennyiségeit, de a pályát pozícióalgoritmussal például a  $\mathbf{p}(t)$  pozíció és a  $\varphi(t)$ ,  $\vartheta(t)$ ,  $\psi(t)$  Euler-szögek analitikus megtervezésével határoztuk meg, akkor ezek ismeretében tekinthető egy fiktív  $TT^{-1}T^{-1}RR^1R^1$  robot, amelynek ugyanazok lesznek a kinematikai mennyiségei mint a végberendezésnek. A fiktív robot kinematikai mennyiségei számíthatók a 2.3. és 2.5. példa alapján.

### 2.3. A KINEMATIKAI MENNYISÉGEK REKURZÍV SZÁMÍTÁSA

Az a célunk, hogy olyan rekurzív összefüggéseket vezessünk le a kinematikai mennyiségek számítására, amelyek segítségével a robotok különféle irányítási algoritmusaihoz a meghajtónyomaték ( $\tau$ ) és a robot csuklókoordinátái ( $\mathbf{q}$ ) közötti összefüggés

$$\tau = \mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h} \quad (2.106)$$

alakban kapható meg. Ekkor ugyanis lehetségessé válik  $\ddot{\mathbf{q}}$  kifejezése

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}^{-1}(\tau - \mathbf{h}) \quad (2.107)$$

alakban, ami kulcsfontosságú lesz több irányítási algoritmus esetén is. Ezért a kinematikai mennyiségeket Vukobratovichoz és Potkonjakhoz hasonlóan ([24], p.43)

$${}^i\omega_i = \Gamma_i \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.108)$$

$${}^i\mathbf{v}_i = \Omega_i \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.109)$$

$${}^i\epsilon_i = \Gamma_i \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_i, \quad (2.110)$$

$${}^i\mathbf{a}_i = \Omega_i \ddot{\mathbf{q}} + \Theta_i \quad (2.111)$$

alakban keressük, mert ez támogatni fogja  $\tau$  felbontását a (2.106) alakban. A feladat ezért  $\Gamma_i, \Phi_i, \Omega_i, \Theta_i$  meghatározása előretartó rekurzióval. Alkalmazzuk a deriválási szabályt mozgó koordinátarendszerben, akkor (B.27) – (B.32) szerint teljesül:

$$p'_{i-1,i} = (1 - \kappa_i) t_{i-1,i} \dot{q}_i + \kappa_i t_{i-1,i} \dot{q}_i \times p_{i-1,i} \equiv d_{i-1,i} \dot{q}_i, \quad (2.112)$$

$$p''_{i-1,i} = d_{i-1,i} \ddot{q}_i + \kappa_i t_{i-1,i} \dot{q}_i \times d_{i-1,i} \dot{q}_i, \quad (2.113)$$

$${}^{i-1}v_i = {}^{i-1}v_{i-1} + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times p_{i-1,i} + d_{i-1,i} \dot{q}_i, \quad (2.114)$$

$${}^{i-1}a_i = {}^{i-1}a_{i-1} + {}^{i-1}\epsilon_{i-1} \times p_{i-1,i} + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times ({}^{i-1}\omega_{i-1} \times p_{i-1,i}) + d_{i-1,i} \ddot{q}_i + \kappa_i t_{i-1,i} \dot{q}_i \times d_{i-1,i} \dot{q}_i + 2{}^{i-1}\omega_{i-1} \times d_{i-1,i} \dot{q}_i, \quad (2.115)$$

$${}^{i-1}\omega_i = {}^{i-1}\omega_{i-1} + \kappa_i t_{i-1,i} \dot{q}_i, \quad (2.116)$$

$${}^{i-1}\epsilon_i = {}^{i-1}\epsilon_{i-1} + {}^{i-1}\omega_i \times \kappa_i t_{i-1,i} \dot{q}_i + \kappa_i t_{i-1,i} \ddot{q}_i. \quad (2.117)$$

Alkalmazzuk a (2.8) és (2.9) összefüggéseket, akkor a (2.114)–(2.117) egyenletek a következő alakra hozhatók:

$${}^i\omega_i = A_{i-1,i}^{-1} {}^{i-1}\omega_{i-1} + {}^i t_{i-1,i} \dot{q}_i, \quad (2.118)$$

$${}^i\epsilon_i = A_{i-1,i}^{-1} {}^{i-1}\epsilon_{i-1} + {}^i t_{i-1,i} \ddot{q}_i + {}^i\omega_i \times {}^i t_{i-1,i} \dot{q}_i, \quad (2.119)$$

$${}^i v_i = A_{i-1,i}^{-1} ({}^{i-1}v_{i-1} + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times p_{i-1,i}) + {}^i d_{i-1,i} \dot{q}_i, \quad (2.120)$$

$$\begin{aligned} {}^i a_i &= A_{i-1,i}^{-1} \{ {}^{i-1}a_{i-1} + {}^{i-1}\epsilon_{i-1} \times p_{i-1,i} + \\ &\quad + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times ({}^{i-1}\omega_{i-1} \times p_{i-1,i}) \} + \\ &\quad + {}^i d_{i-1,i} \ddot{q}_i + {}^i t_{i-1,i} \dot{q}_i \times {}^i d_{i-1,i} \dot{q}_i + \\ &\quad + 2(A_{i-1,i}^{-1} {}^{i-1}\omega_{i-1}) \times {}^i d_{i-1,i} \dot{q}_i = \\ &= A_{i-1,i}^{-1} \{ {}^{i-1}a_{i-1} + {}^{i-1}\epsilon_{i-1} \times p_{i-1,i} + \\ &\quad + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times ({}^{i-1}\omega_{i-1} \times p_{i-1,i}) \} + \\ &\quad + 2 \cdot {}^i\omega_i \times {}^i d_{i-1,i} \dot{q}_i - {}^i t_{i-1,i} \dot{q}_i \times {}^i d_{i-1,i} \dot{q}_i + {}^i d_{i-1,i} \ddot{q}_i. \end{aligned} \quad (2.121)$$

A (2.118)–(2.121) egyenletekből közvetlenül leolvashatók a  $\Gamma_i, \Phi_i, \Omega_i, \Theta_i$  meghatározására szolgáló rekurzív képletek. Álljon ugyanis  $\Gamma_i$  és  $\Omega_i$

a  $\Gamma_{i,j}$  és  $\Omega_{i,j}$  oszlopokból,  $j = 1, \dots, i$ , akkor (2.108)–(2.111) szerint

$$\Gamma_{i,j} = \mathbf{A}_{i-1,i}^{-1} \Gamma_{i-1,j}, \quad j = 1, \dots, i-1, \quad (2.122)$$

$$\Gamma_{i,i} = \kappa_i {}^i t_{i-1}, \quad (2.123)$$

$${}^i \omega_i = \mathbf{A}_{i-1,i}^{-1} {}^{i-1} \omega_{i-1} + \kappa_i {}^i t_{i-1} \dot{q}_i, \quad (2.124)$$

$$\Phi_i = \mathbf{A}_{i-1,i}^{-1} \Phi_{i-1} + \kappa_i {}^i \omega_i \times {}^i t_{i-1} \dot{q}_i, \quad (2.125)$$

$$\Omega_{i,j} = \mathbf{A}_{i-1,i}^{-1} (\Omega_{i-1,j} + \Gamma_{i-1,j} \times \mathbf{p}_{i-1,i}), \quad (2.126)$$

$$\Omega_{i,i} = {}^i \mathbf{d}_{i-1}, \quad (2.127)$$

$$\begin{aligned} \Theta_i = & \mathbf{A}_{i-1,i}^{-1} \{ \Theta_{i-1} + \Phi_{i-1} \times \mathbf{p}_{i-1,i} + {}^{i-1} \omega_{i-1} \times ({}^{i-1} \omega_{i-1} \times \mathbf{p}_{i-1,i}) \} + \\ & + 2 \cdot {}^i \omega_i \times {}^i \mathbf{d}_{i-1} \dot{q}_i - \kappa_i {}^i t_{i-1} \dot{q}_i \times {}^i \mathbf{d}_{i-1} \dot{q}_i. \end{aligned} \quad (2.128)$$

#### 2.4. A KINEMATIKAI MENNYISÉGEK DIREKT SZÁMÍTÁSA

A direkt (nem rekurzív, párhuzamos feldolgozásra is alkalmas) számítás alapja lehet a (2.22)–(2.25) egyenlet. Mivel (2.23) alapján

$${}^i \Delta_{j-1} = \mathbf{T}_{j-1,i}^{-1} \Delta_{j-1} \mathbf{T}_{j-1,i}, \quad (2.129)$$

ezért  $k < j$  esetén

$$\frac{\partial {}^i \Delta_{j-1}}{\partial q_k} = 0. \quad (2.130)$$

Legyen  $k \geq j$ , akkor

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^i \Delta_{j-1}}{\partial q_k} = & - \mathbf{T}_{j-1,i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{T}_{j-1,i}}{\partial q_k} \mathbf{T}_{j-1,i}^{-1} \Delta_{j-1} \mathbf{T}_{j-1,i} + \\ & + \mathbf{T}_{j-1,i}^{-1} \Delta_{j-1} \frac{\partial \mathbf{T}_{j-1,i}}{\partial q_k}, \end{aligned} \quad (2.131)$$

ahonnan következik (2.22) felhasználásával, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^i \Delta_{j-1}}{\partial q_k} &= -{}^i \Delta_{k-1} {}^i \Delta_{j-1} + {}^i \Delta_{j-1} {}^i \Delta_{k-1} = \\ &= \left[ \begin{array}{c} [{}^i t_{j-1} \times] [{}^i t_{k-1} \times] - [{}^i t_{k-1} \times] [{}^i t_{j-1} \times] \\ 0 \end{array} \quad {}^i t_{j-1} \times {}^i d_{k-1} - {}^i t_{k-1} \times {}^i d_{j-1} \right] = \\ &= \left[ \begin{array}{c} [(-{}^i t_{k-1} \times {}^i t_{j-1}) \times] \\ 0 \end{array} \quad {}^i t_{j-1} \times {}^i d_{k-1} - {}^i t_{k-1} \times {}^i d_{j-1} \right], \end{aligned} \quad (2.132)$$

$$\frac{\partial {}^i t_{j-1}}{\partial q_k} = -{}^i t_{k-1} \times {}^i t_{j-1}, \quad (2.133)$$

$$\frac{\partial {}^i d_{j-1}}{\partial q_k} = {}^i t_{j-1} \times {}^i d_{k-1} - {}^i t_{k-1} \times {}^i d_{j-1}. \quad (2.134)$$

Végül felhasználva a (2.24)–(2.25), (2.98), (2.133)–(2.134) egyenleteket a következő eredményekhez jutunk:

$${}^i \omega_i = \sum_{j=1}^i {}^i t_{j-1} \dot{q}_j, \quad (2.135)$$

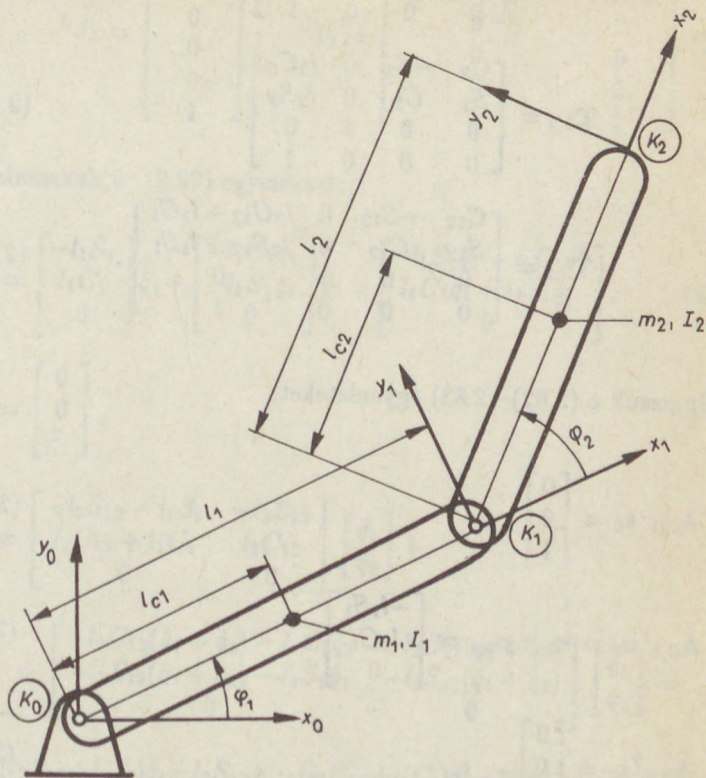
$${}^i \mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^i {}^i d_{j-1} \dot{q}_j, \quad (2.136)$$

$${}^i \boldsymbol{\varepsilon}_i = \sum_{j=1}^i {}^i t_{j-1} \ddot{q}_j + \sum_{j=2}^i \left( \sum_{k=1}^{j-1} {}^i t_{k-1} \dot{q}_k \right) \times {}^i t_{j-1} \dot{q}_j, \quad (2.137)$$

$${}^i \mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^i {}^i d_{j-1} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^i {}^i t_{j-1} \dot{q}_j \times ({}^i d_{j-1} \dot{q}_j + 2 \sum_{k=j+1}^i {}^i d_{k-1} \dot{q}_k). \quad (2.138)$$

## 2.6. Példa: A kinemataikai mennyiségek számítása kétszabadságfokú kar esetén

Tekintsük a 2.3. ábra szerinti kétszabadságfokú robotot.



2.3. ábra  
Kétszabadságfokú kar

A számításokat több módszerrel is elvégezzük.

# 1. módszer (számítás álló koordinátarendszerben)

$$\mathbf{T}_{0,1} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{1,2} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.139)$$

$$\mathbf{T}_{0,2} = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_2 C_{12} + l_1 C_1 \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_2 S_{12} + l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.140)$$

Alkalmazzuk a (2.82)–(2.83) egyenleteket:

$$\mathbf{A}_{0,1} {}^1 \mathbf{t}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.141)$$

$$\mathbf{A}_{0,1} {}^1 \mathbf{d}_0 = \mathbf{k}_0 \times \mathbf{p}_{0,1} = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 \\ l_1 C_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.142)$$

$$\mathbf{A}_{0,2} {}^2 \mathbf{t}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.143)$$

$$\mathbf{A}_{0,2} {}^2 \mathbf{d}_0 = \begin{bmatrix} -l_2 S_{12} - l_1 S_1 \\ l_2 C_{12} + l_1 C_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.144)$$

$$\mathbf{A}_{0,2} {}^2 \mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.145)$$

$$\mathbf{A}_{0,2} \mathbf{d}_1 = - \begin{bmatrix} C_1 \\ S_1 \\ 0 \end{bmatrix} l_2 S_2 + \begin{bmatrix} -S_1 \\ C_1 \\ 0 \end{bmatrix} l_2 C_2 = \begin{bmatrix} -l_2 S_{12} \\ l_2 C_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.146)$$

$${}^0 \mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 \\ l_1 C_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad {}^0 \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} -l_2 S_{12} - l_1 S_1 & -l_2 S_{12} \\ l_2 C_{12} + l_1 C_1 & l_2 C_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.147)$$

Alkalmazzuk a (2.97) egyenletet:

$${}^0 \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 \\ l_1 C_1 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{q}_1 + \begin{bmatrix} -l_1 C_1 \dot{q}_1 \\ -l_1 S_1 \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 \ddot{q}_1 - l_1 C_1 \dot{q}_1^2 \\ l_1 C_1 \ddot{q}_1 - l_1 S_1 \dot{q}_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.148)$$

$${}^0 \boldsymbol{\epsilon}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix}, \quad (2.149)$$

$$\begin{aligned} {}^0 \mathbf{a}_2 &= \begin{bmatrix} -l_2 S_{12} - l_1 S_1 & -l_2 S_{12} \\ l_2 C_{12} + l_1 C_1 & l_2 C_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} -l_2 C_{12}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - l_1 C_1 \dot{q}_1 & -l_2 C_{12}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ -l_2 S_{12}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - l_1 S_1 \dot{q}_1 & -l_2 S_{12}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -(l_2 S_{12} + l_1 S_1) \ddot{q}_1 - l_2 S_{12} \ddot{q}_2 - (l_2 C_{12} + l_1 C_1) \dot{q}_1^2 - 2l_2 C_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 - l_2 C_{12} \dot{q}_2^2 \\ (l_2 C_{12} + l_1 C_1) \ddot{q}_1 + l_2 C_{12} \ddot{q}_2 - (l_2 S_{12} + l_1 S_1) \dot{q}_1^2 - 2l_2 S_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 - l_2 S_{12} \dot{q}_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.150)$$

$${}^0 \boldsymbol{\epsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.151)$$

## 2. módszer (rekurzív számítás)

Alkalmazzuk a (2.10)–(2.15) és a (2.121)–(2.127) egyenleteket:

$${}^1\mathbf{t}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1\mathbf{d}_0 = \begin{bmatrix} -C_1 l_1 S_1 + S_1 l_1 C_1 \\ -(-S_1) l_1 S_1 + C_1 l_1 C_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.152)$$

$${}^2\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^2\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.153)$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi}_1 = \mathbf{0}, \quad {}^1\boldsymbol{\epsilon}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix}, \quad (2.154)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.155)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Theta}_1 &= 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} l_1 \dot{q}_1^2 = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{q}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^1\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{q}_1^2 \\ l_1 \ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.156) \end{aligned}$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^2\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi}_2 = \mathbf{0}, \quad {}^2\boldsymbol{\epsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.157)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_{2,1} &= \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 C_2 \\ l_2 S_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_2 S_2 \\ l_1 + l_2 C_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 S_2 \\ l_2 + l_1 C_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.158) \end{aligned}$$

$$\Omega_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix} l_1 S_2 & 0 \\ l_2 + l_1 C_2 & l_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.159)$$

$$\begin{aligned} \Theta_2 &= \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -l_1 \dot{q}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \times \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 C_2 \\ l_2 S_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right\} + \\ &+ 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \dot{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \dot{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1 \dot{q}_1^2 - l_2 C_2 \dot{q}_1^2 \\ -l_2 S_2 \dot{q}_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) l_2 \dot{q}_2 + l_2 \dot{q}_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -(l_2 + l_1 C_2) \dot{q}_1^2 - 2l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - l_2 \dot{q}_2^2 \\ l_1 S_2 \dot{q}_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.160) \end{aligned}$$

$${}^2 \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} l_1 S_2 \ddot{q}_1 - (l_2 + l_1 C_2) \dot{q}_1^2 - 2l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - l_2 \dot{q}_2^2 \\ (l_2 + l_1 C_2) \ddot{q}_1 + l_2 \ddot{q}_2 + l_1 S_2 \dot{q}_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.161)$$

Tisztán geometriai megfontolások alapján is következik a 2.3. ábrából, hogy a tömegközéppontok sebessége és gyorsulása:

$${}^1 \mathbf{v}_{c1} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{c1} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1, \quad {}^1 \mathbf{a}_{c1} = \begin{bmatrix} -l_{c1} \dot{q}_1^2 \\ l_{c1} \ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.162)$$

$${}^2 \mathbf{v}_{c2} = \begin{bmatrix} l_1 S_2 & 0 \\ l_{c2} + l_1 C_2 & l_{c2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.163)$$

$${}^2 \mathbf{a}_{c2} = \begin{bmatrix} l_1 S_2 \ddot{q}_1 - (l_{c2} + l_1 C_2) \dot{q}_1^2 - 2l_{c2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + l_{c2} \dot{q}_2^2 \\ (l_{c2} + l_1 C_2) \ddot{q}_1 + l_{c2} \ddot{q}_2 + l_1 S_2 \dot{q}_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.164)$$

### 3. módszer (direkt számítás)

Alkalmazzuk a (2.10)-(2.15) és a (2.135)-(2.138) egyenleteket:

$${}^2\mathbf{t}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.165)$$

$${}^2\mathbf{d}_0 = \begin{bmatrix} -C_{12}(l_2 S_{12} + l_1 S_1) + S_{12}(l_2 C_{12} + l_1 C_1) \\ S_{12}(l_2 S_{12} + l_1 S_1) + C_{12}(l_2 C_{12} + l_1 C_1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 S_2 \\ l_2 + l_1 C_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.166)$$

$${}^1\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{q}_1, \quad {}^1\boldsymbol{\epsilon}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{q}_1, \quad (2.167)$$

$${}^1\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{q}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \times \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{q}_1^2 \\ l_1 \ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.168)$$

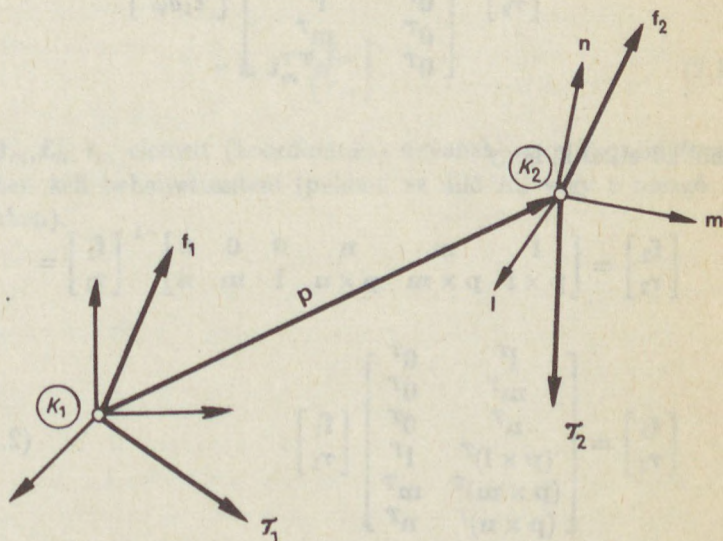
$${}^2\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.169)$$

$${}^2\boldsymbol{\epsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.170)$$

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{a}_2 &= \begin{bmatrix} l_1 S_2 & 0 \\ l_2 + l_1 C_2 & l_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \times \left\{ \begin{bmatrix} l_1 S_2 \\ l_2 + l_1 C_2 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \right\} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \times \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_2 = \\ &= \begin{bmatrix} l_1 S_2 \ddot{q}_1 - (l_2 + l_1 C_2) \dot{q}_1^2 - 2l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - l_2 \dot{q}_2^2 \\ (l_2 + l_1 C_2) \ddot{q}_1 + l_2 \ddot{q}_2 - l_1 S_2 \dot{q}_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.171)$$

## 2.5. STATIKUS ERŐK ÉS NYOMATÉKOK TRANSZFORMÁLÁSA

Tekintsünk egy tárgyat a hozzá rögzített  $K_1$  és  $K_2$  koordinátarendszerekkel. Legyen adott a  $K_1$  origójában a tárgyra ható  $f_1$  erő és  $\tau_1$  nyomaték. Megvizsgáljuk, hogy helyettesíthető-e a  $K_1$  origójában ható erő és nyomaték a  $K_2$  origójába képzelt  $f_2$  erővel és  $\tau_2$  nyomatékkal úgy, hogy a tárgyra kifejtett hatás ugyanaz legyen (2.4. ábra).



2.4. ábra

Erő és nyomaték transzformálása

A feladat megoldására a virtuális munka elvét ([40], p. 628) fogjuk alkalmazni. Olyan erőt és nyomatékot keresünk, hogy ekvivalens differenciális virtuális elmozdulások esetén a virtuális munkák ( $\delta W$ ) egyenlők legyenek. Legyen

$$\mathbf{T}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{m} & \mathbf{n} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.172)$$

akkor a (2.3) szerinti ekvivalens differenciális mozgás esetén

$$\begin{aligned} \delta W &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \tau_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{d}_2(dl) \\ \mathbf{t}_2 d\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \tau_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1(dl) \\ \mathbf{t}_1 d\varphi \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \tau_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{l}^T & (\mathbf{p} \times \mathbf{l})^T \\ \mathbf{m}^T & (\mathbf{p} \times \mathbf{m})^T \\ \mathbf{n}^T & (\mathbf{p} \times \mathbf{n})^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{l}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{m}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{n}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1(dl) \\ \mathbf{t}_1 d\varphi \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.173)$$

amiből következik, hogy

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \tau_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{l} & \mathbf{m} & \mathbf{n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \times \mathbf{l} & \mathbf{p} \times \mathbf{m} & \mathbf{p} \times \mathbf{n} & \mathbf{l} & \mathbf{m} & \mathbf{n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \tau_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{l}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{m}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{n}^T & \mathbf{0}^T \\ (\mathbf{p} \times \mathbf{l})^T & \mathbf{l}^T \\ (\mathbf{p} \times \mathbf{m})^T & \mathbf{m}^T \\ (\mathbf{p} \times \mathbf{n})^T & \mathbf{n}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \tau_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.174)$$

Vegyük észre, hogy mást jelent

- i) egy erőt **helyben hagyni** és komponenseit különböző koordinátarendszerekben felírni,
- ii) egy erőt egy másik koordinátarendszerbe **áthelyezni**, és komponenseit az új koordinátarendszerben kifejezni.

Például (2.174)-hez úgy is eljuthattunk volna, hogy a  $K_2$  keret origójában felvettünk volna egy  $+\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_1 = \mathbf{0}$  erőt. Akkor a  $K_2$ -beli  $+\mathbf{f}_1$  adott volna egy áthelyezett erőt, míg a  $K_1$ -beli  $+\mathbf{f}_1$  és a  $K_2$ -beli  $-\mathbf{f}_1$  erőpár megnövelte volna a nyomatékot  $\tau_1 + \mathbf{f}_1 \times \mathbf{p}$  értékre. Valóban, (2.174)

nem más, mint az  $\mathbf{f}_1$  erő és  $\boldsymbol{\tau}_1 + \mathbf{f}_1 \times \mathbf{p}$  nyomaték felírva a  $K_2$  keret bázisában.

A virtuális munka elvével levezethetjük a  $K_m$  keretben ható statikus  $\mathbf{f}_m$  erővel és  $\boldsymbol{\tau}_m$  nyomatékkal ekvivalens  $\boldsymbol{\tau}$  csuklónyomatékokat (transzlációs csuklók esetén erőket) is:

$$\delta W = \boldsymbol{\tau}^T \delta \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_m \\ \boldsymbol{\tau}_m \end{bmatrix}^T \mathbf{J}_m \delta \mathbf{q}, \quad (2.175)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_m^T \begin{bmatrix} \mathbf{f}_m \\ \boldsymbol{\tau}_m \end{bmatrix}. \quad (2.176)$$

Itt  $\mathbf{J}_m, \mathbf{f}_m, \boldsymbol{\tau}_m$  elemeit (koordinátáit) ugyanabban a koordinátarendszerben kell behelyettesíteni (például az álló  $K_0$  vagy a mozgó  $K_m$  keretben).

### 3. A ROBOT DINAMIKUS MODELLJE

A robot egy bonyolult nemlineáris rendszer, ezért dinamikus modellje is komplikált. A dinamikus modell felállításához a mechanika szokásos módszerei jöhetnek számításba:

- Newton-Euler-módszer, amely a Newton-axiómákon és a perdülettelésen alapul [40] (a robotikában elterjedt ennek Luh-Walker-Paul-féle változata [42]),
- Lagrange-féle másodfajú egyenletek, amelyek a robot kinetikus és potenciális energiáján alapulnak ([40], p. 640),
- Appel-egyenletek, amelyek alapja a robot "gyorsulás" energiája (a Gibbs-függvény; [24], p. 128),
- Renaud módszere [43], amely az  $i$ -edik szegmenst és az azt követő szegmenseket egy fiktív testtel helyettesíti. A fiktív test az  $i$ -edik szegmensből és a rákövetkező szegmenseknek a  $K_{i+1}$  keret origójába koncentrált eredő tömegéből áll. A módszer a továbbiakban a 0, 1, 2-rendű momentumokat és lényegében a Newton-Euler-módszert használja.

Ebben a fejezetben a Lagrange-egyenletből indulunk ki, de átalakítások után az Appel-egyenlettel ekvivalens eredményekhez jutunk. Nem használjuk a Newton-Euler-módszert, mert irányítástechnikai szempontból nincs szükség a reakcióerőkre, másrészt szükség van az irányítási algoritmusban a meghajtónyomaték ( $\tau$ ) felbontására ( $\mathbf{H}, \mathbf{h}$ ), melyet ez a módszer közvetlenül nem szolgáltat.

### 3.1. A TEHETETLENSÉGI NYOMATÉK ÉS TRANSZFORMÁCIÓJA

Tekintsük a  $[\varrho \times]^T [\varrho \times]$  kifejezést:

$$\begin{aligned} [\varrho \times]^T [\varrho \times] &= \begin{bmatrix} 0 & \varrho_z & -\varrho_y \\ -\varrho_z & 0 & \varrho_x \\ \varrho_y & -\varrho_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\varrho_z & \varrho_y \\ \varrho_z & 0 & -\varrho_x \\ -\varrho_y & \varrho_x & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \varrho_y^2 + \varrho_z^2 & -\varrho_x \varrho_y & -\varrho_x \varrho_z \\ -\varrho_x \varrho_y & \varrho_x^2 + \varrho_z^2 & -\varrho_y \varrho_z \\ -\varrho_x \varrho_z & -\varrho_y \varrho_z & \varrho_x^2 + \varrho_y^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Legyen  $\varrho$  az  $\mathcal{S}$  szegmens tetszőleges pontja, akkor  $K\mathbf{x} = -\int \varrho \times (\varrho \times \mathbf{x}) dm$  a szegmens tehetetlenségi tenzora (lineáris transzformációja), melynek pozitív definit mátrixa:

$$\mathbf{K} = \int_{\mathcal{S}} [\varrho \times]^T [\varrho \times] dm = \begin{bmatrix} K_x & -K_{xy} & -K_{xz} \\ -K_{xy} & K_y & -K_{yz} \\ -K_{xz} & -K_{yz} & K_z \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Legyen  $\varrho_c$  a szegmens tömegközéppontja és  $m$  a tömege, azaz

$$m\varrho_c = \int_{\mathcal{S}} \varrho dm. \quad (3.3)$$

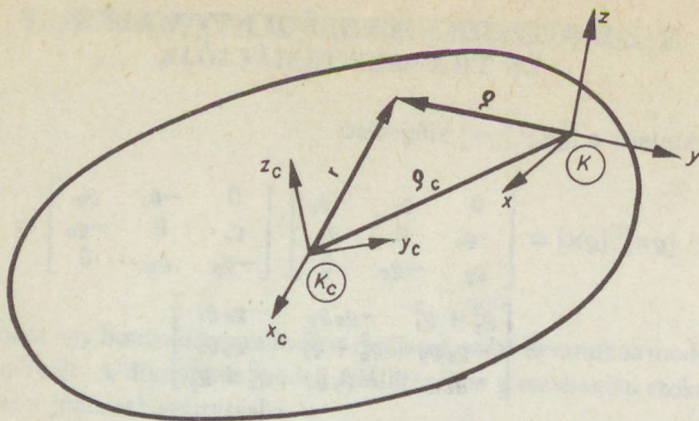
Legyen  $K_c$  egy derékszögű koordinátarendszer, amelynek origója a tömegközéppontban van, és legyen  $K$  a szegmenshez rögzített tetszőleges koordinátarendszer (3.1. ábra).

Legyen

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\stackrel{def}{=} \mathbf{A}_{K, K_c}, \\ \varrho &= \mathbf{A}\mathbf{r} + \varrho_c, \end{aligned} \quad (3.4)$$

akkor

$$-\varrho \times (\varrho \times \mathbf{x}) = -\varrho \langle \varrho, \mathbf{x} \rangle + \mathbf{x} \langle \varrho, \varrho \rangle =$$



3.1. ábra

A tehetetlenségi nyomaték transzformációja

$$\begin{aligned}
 &= -(\mathbf{Ar} + \boldsymbol{\rho}_c) \langle \mathbf{Ar} + \boldsymbol{\rho}_c, \mathbf{x} \rangle + \mathbf{x} \langle \mathbf{Ar} + \boldsymbol{\rho}_c, \mathbf{Ar} + \boldsymbol{\rho}_c \rangle = \\
 &= -\mathbf{Ar} \langle \mathbf{Ar}, \mathbf{x} \rangle - \mathbf{Ar} \langle \boldsymbol{\rho}_c, \mathbf{x} \rangle - \boldsymbol{\rho}_c \langle \mathbf{Ar}, \mathbf{x} \rangle - \boldsymbol{\rho}_c \langle \boldsymbol{\rho}_c, \mathbf{x} \rangle + \\
 &\quad + \mathbf{x} \langle \mathbf{Ar}, \mathbf{Ar} \rangle + 2\mathbf{x} \langle \mathbf{Ar}, \boldsymbol{\rho}_c \rangle + \mathbf{x} \langle \boldsymbol{\rho}_c, \boldsymbol{\rho}_c \rangle = \\
 &= -\mathbf{Ar} \langle \mathbf{r}, \mathbf{A}^T \mathbf{x} \rangle - \boldsymbol{\rho}_c \langle \boldsymbol{\rho}_c, \mathbf{x} \rangle + \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{x} \langle \mathbf{r}, \mathbf{A}^T \mathbf{Ar} \rangle + \\
 &\quad + \mathbf{x} \langle \boldsymbol{\rho}_c, \boldsymbol{\rho}_c \rangle + \dots = \\
 &= \mathbf{A}(-\mathbf{r} \langle \mathbf{r}, \mathbf{A}^T \mathbf{x} \rangle + \mathbf{A}^T \mathbf{x} \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle) - \boldsymbol{\rho}_c \langle \boldsymbol{\rho}_c, \mathbf{x} \rangle + \\
 &\quad + \mathbf{x} \langle \boldsymbol{\rho}_c, \boldsymbol{\rho}_c \rangle + \dots = \\
 &= \mathbf{A} \left\{ -\mathbf{r} \times [\mathbf{r} \times (\mathbf{A}^T \mathbf{x})] \right\} - \boldsymbol{\rho}_c \langle \boldsymbol{\rho}_c, \mathbf{x} \rangle + \mathbf{x} \langle \boldsymbol{\rho}_c, \boldsymbol{\rho}_c \rangle + \dots = \\
 &= \mathbf{A}[\mathbf{r} \times]^T [\mathbf{r} \times] \mathbf{A}^T \mathbf{x} - [\boldsymbol{\rho}_c \circ \boldsymbol{\rho}_c] \mathbf{x} + \boldsymbol{\rho}_c^2 \mathbf{x} + \dots, \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

ahol a ki nem részletezett tagok integrálásánál nullát adnak, mivel

$$\mathbf{r}_c = \int_{\mathcal{K}} \mathbf{r} dm = \mathbf{0}. \tag{3.6}$$

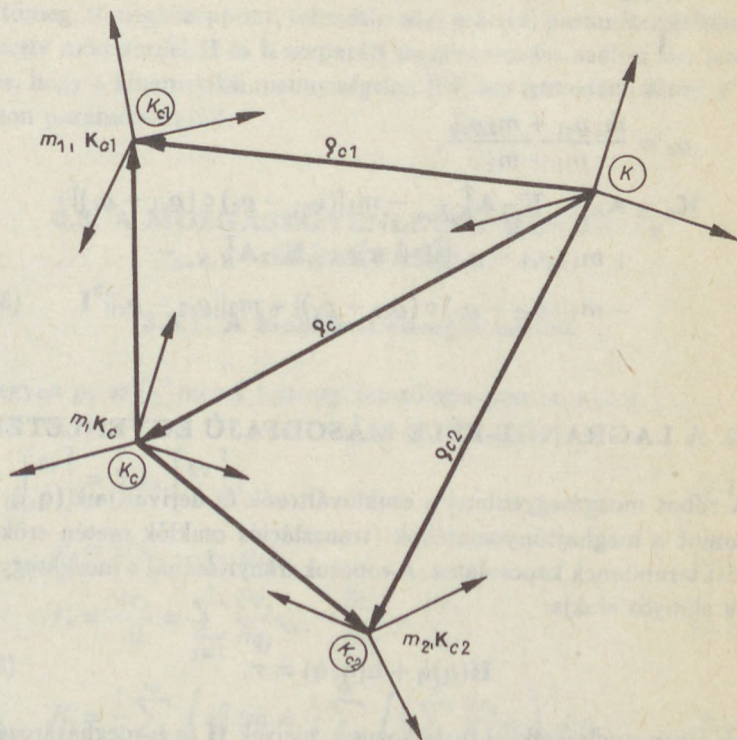
Ezért (3.5) integrálásával a tehetetlenségi nyomaték alábbi transzformálási szabályához jutunk:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}_{K, K_c} \mathbf{K}_{c, K_c} \mathbf{A}_{K, K_c}^T - m[\boldsymbol{\rho}_c \circ \boldsymbol{\rho}_c] + m\boldsymbol{\rho}_c^2 \mathbf{I}. \tag{3.7}$$

Itt a  $K_c$  keret origója a tömegközéppont, de  $x_c, y_c, z_c$  nem szükségképpen a főirányok. A képlet természetesen főtengelyek esetén is igaz.

### 3.1. Példa: Két merev test eredő tehetetlenségi mátrixa

Alkalmazzuk a (3.7) egyenletet összetett rendszerekre (3.2. ábra).



3.2. ábra

Két merev test eredő tehetetlenségi mátrixa

A két merev test tehetetlenségi paraméterei legyenek  $m_1, q_{c1}, K_{c1}$ , illetve  $m_2, q_{c2}, K_{c2}$ . A tehetetlenségi mátrixok a tömegközéppontokban felvett (például a főirányokkal egybeeső) koordinátarendszerekben

adottak. A  $K$  keret például a Denavit–Hartenberg-alakban szereplő koordináta-rendszer. A tömegközéppontok koordinátái a  $K$  keretben adtak. A két komponens lehet például az  $\overline{m}$  szegmens és a teher. A két komponens helyettesítse az eredő  $m, \varrho_c, \mathbf{K}_c$ . A  $K_c$  és  $K$  keret **tengelei legyenek párhuzamosak**. Alkalmazzuk a (3.7) egyenletet  $K_{c1}$  és  $K_c$ , illetve  $K_{c2}$  és  $K_c$  keretek között, akkor a pontozott vonallal berajzolt  $\varrho_{c1} - \varrho_c$ , illetve  $\varrho_{c2} - \varrho_c$  vektorokkal és  $\mathbf{A}_{K,K_{c1}} = \mathbf{A}_{K_c,K_{c1}}$ , illetve  $\mathbf{A}_{K,K_{c2}} = \mathbf{A}_{K_c,K_{c2}}$  figyelembevételével az alábbi eredményhez jutunk:

$$\begin{aligned} m &= m_1 + m_2, \\ \varrho_c &= \frac{m_1 \varrho_{c1} + m_2 \varrho_{c2}}{m_1 + m_2}, \\ \mathbf{K}_c &= \mathbf{A}_{K,K_{c1}} \mathbf{K}_{c1} \mathbf{A}_{K,K_{c1}}^T - m_1 [(\varrho_{c1} - \varrho_c) \circ (\varrho_{c1} - \varrho_c)] + \\ &\quad + m_1 \|\varrho_{c1} - \varrho_c\|^2 \mathbf{I} + \mathbf{A}_{K,K_{c2}} \mathbf{K}_{c2} \mathbf{A}_{K,K_{c2}}^T - \\ &\quad - m_2 [(\varrho_{c2} - \varrho_c) \circ (\varrho_{c2} - \varrho_c)] + m_2 \|\varrho_{c2} - \varrho_c\|^2 \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

### 3.2. A LAGRANGE-FÉLE MÁSODFAJÚ EGYENLETEK

A robot mozgásegyenletei a csuklóváltozók és deriváltjaik ( $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ ), valamint a meghajtónyomatékok (transzlációs csuklók esetén erők;  $\boldsymbol{\tau}$ ) között teremtenek kapcsolatot. A robotok irányításánál a mozgásegyenletek előnyös alakja:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}. \quad (3.9)$$

Csak olyan módszerekkel foglalkozunk, melyek  $\mathbf{H}$  és  $\mathbf{h}$  meghatározását is lehetővé teszik. Egy ilyen módszer alapját képezhetik a Lagrange-féle másodfajú egyenletek is:

$$\begin{aligned} K &\text{ kinetikus energia,} \\ P &\text{ potenciális energia,} \\ L &= K - P \text{ Lagrange-függvény,} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i; \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.10)$$

A továbbiakban egy rekurzív és egy direkt módszert ismertetünk  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  és  $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  meghatározására. Ezek a mennyiségek függenek a szegmensek (és meghajtómotorok) geometriai (Denavit–Hartenberg) és inerciális (tömeg, tömegközéppont, tehetetlenségi mátrix) paramétereitől is. A rekurzív módszernél  $\mathbf{H}$  és  $\mathbf{h}$  szeparált meghatározása azáltal lesz lehetséges, hogy a kinematikai mennyiségeket [24]-hez hasonlóan  $\Omega, \Theta, \Gamma, \Phi$  módon paraméterezzük.

### 3.3. A MOZGÁSEGYENLETEK REKURZÍV SZÁMÍTÁSA

#### 3.3.1. A kinetikus energia hatása

Legyen  $\rho_s$  az  $\boxed{s}$  merev test egy tetszőleges pontja, akkor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_s \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{0,s} \begin{bmatrix} \rho_s \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{r}_s \stackrel{def}{=} \mathbf{r}(q_1, \dots, q_s, \rho_s), \quad (3.12)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_s = \frac{d\mathbf{r}_s}{dt} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_s}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial q_j}, \quad (3.13)$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \int_{\boxed{s}} \dot{\mathbf{r}}_s^2 dm = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \int_{\boxed{s}} \left( \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 dm, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{s=i}^m \int_{\boxed{s}} \dot{\mathbf{r}}_s \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_s}{\partial \dot{q}_i} dm = \sum_{s=i}^m \int_{\boxed{s}} \dot{\mathbf{r}}_s \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial q_i} dm, \quad (3.15)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{s=i}^m \int_{\boxed{s}} \left\{ \ddot{\mathbf{r}}_s \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial q_i} + \dot{\mathbf{r}}_s \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 \mathbf{r}_s}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j \right\} dm, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_i} = \sum_{s=i}^m \int_{\mathbb{S}} \dot{\mathbf{r}}_s \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_s}{\partial \dot{q}_i} dm = \sum_{s=i}^m \int_{\mathbb{S}} \mathbf{r}_s \left( \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 \mathbf{r}_s}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j \right) dm. \quad (3.17)$$

Mivel a másodrendű vegyes parciális deriváltakban a deriválás sorrendje felcserélhető, ezért

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} = \sum_{s=i}^m \int_{\mathbb{S}} \left\langle \ddot{\mathbf{r}}_s, \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_s}{\partial \dot{q}_i} \right\rangle dm. \quad (3.18)$$

### Egy elemi pont kinetikus energiájának hatása

Mivel  $\langle \mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0 \rangle = \langle \mathbf{A}_{0,s} \mathbf{a}_s, \mathbf{A}_{0,s} \mathbf{b}_s \rangle = \langle \mathbf{a}_s, \mathbf{A}_{0,s}^T \mathbf{A}_{0,s} \mathbf{b}_s \rangle = \langle \mathbf{a}_s, \mathbf{b}_s \rangle$ , ezért a skalárszorzat (3.18)-ban vehető a megfelelő kinematikai mennyiségek között a  $K_s$  keretben is.

Legyen  $\boldsymbol{\rho}_s$  az  $\mathbb{S}$  merev test egy pontja, és jelölje az  $\mathbb{S}$  szegmenshez rögzített keret origójának kinematikai mennyiségeit  ${}^s\boldsymbol{\omega}_s$ ,  ${}^s\mathbf{v}_s$ ,  ${}^s\boldsymbol{\epsilon}_s$  és  ${}^s\mathbf{a}_s$ . Átmenetileg felfüggesztjük az  $s$  index kiírását. Akkor (2.108)–(2.111), (B.25) és (B.26) alapján írható, hogy

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{j=1}^s \boldsymbol{\Gamma}_j \dot{q}_j, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^s \boldsymbol{\Omega}_j \dot{q}_j, \quad (3.20)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\Gamma} \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\Omega} \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Theta}, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{v}_\rho = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{a}_\rho = \mathbf{a} + \boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}), \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \ddot{\mathbf{r}}, \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} \right\rangle &= \left\langle \mathbf{a}_\rho, \frac{\partial \mathbf{v}_\rho}{\partial \dot{q}_i} \right\rangle = \\ &= \left\langle \mathbf{a} + \boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\Omega}_i + \boldsymbol{\Gamma}_i \times \boldsymbol{\rho} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Írjuk fel a (3.25) egyenletből keletkező tagokat a szegmens tömegével és tehetetlenségi nyomatékával könnyen kapcsolatba hozható alakban:

$$\langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\Omega}_i \rangle \quad \text{változatlan,} \quad (3.26)$$

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\Gamma}_i \times \boldsymbol{\rho} \rangle = \langle \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\Gamma}_i \rangle = \langle [\boldsymbol{\rho} \times]^T [\boldsymbol{\rho} \times] \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\Gamma}_i \rangle, \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\Gamma}_i \times \boldsymbol{\rho} \rangle &= - \langle (\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\Gamma}_i \rangle = \\ &= - \langle ([\boldsymbol{\rho} \times]^T [\boldsymbol{\rho} \times] \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Gamma}_i \rangle, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\Omega}_i \rangle \quad \text{változatlan,} \quad (3.29)$$

$$\langle \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\Omega}_i \rangle \quad \text{változatlan,} \quad (3.30)$$

$$\langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\Gamma}_i \times \boldsymbol{\rho} \rangle = \mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\Gamma}_i \times \boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\Gamma}_i \cdot (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{a}) = - \langle \mathbf{a} \times \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\Gamma}_i \rangle. \quad (3.31)$$

### Egy szegmens kinetikus energiájának hatása

Vegyük figyelembe a (3.26)–(3.31), (3.2), (3.3), (3.18) és (3.25) egyenleteket, akkor az integrálás elvégzése és rendezés után egy szegmens kinetikus energiájának az alábbi hatásához jutunk a mozgásegyenletekben:

$$\begin{aligned} \int_s \langle \ddot{\mathbf{r}}_s, \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_s}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \rangle dm &= \langle m\mathbf{a} + ([\boldsymbol{\epsilon} \times] + [\boldsymbol{\omega} \times][\boldsymbol{\omega} \times])m\boldsymbol{\rho}_c, \boldsymbol{\Omega}_i \rangle + \\ &+ \langle \mathbf{K}\boldsymbol{\epsilon} - (\mathbf{K}\boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} - \mathbf{a} \times m\boldsymbol{\rho}_c, \boldsymbol{\Gamma}_i \rangle. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Speciálisan, ha a  $K$  keretet eltoljuk a  $\boldsymbol{\rho}_c$  tömegközéppontba, úgy, hogy a tengelyek iránya ne változzék meg, akkor az

$$\boldsymbol{\Omega}_{ci} = \boldsymbol{\Omega}_i + \boldsymbol{\Gamma}_i \times \boldsymbol{\rho}_c, \quad i = 1, \dots, s, \quad (3.33)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_c = \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\rho}_c + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_c), \quad (3.34)$$

$$\mathbf{a}_c = \boldsymbol{\Omega}_c \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Theta}_c, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{K}_{\bar{c}} \stackrel{def}{=} \mathbf{A}_{K, K_c} \mathbf{K}_c \mathbf{A}_{K, K_c}^T \quad (3.36)$$

jelöléssel következik, hogy

$$\int_s \langle \ddot{\mathbf{r}}_s, \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_s}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \rangle dm = \langle m\mathbf{a}_c, \boldsymbol{\Omega}_{ci} \rangle + \langle \mathbf{K}_{\bar{c}} \boldsymbol{\epsilon} - (\mathbf{K}_{\bar{c}} \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Gamma}_i \rangle. \quad (3.37)$$

## A szegmensek kinetikus energiájának hatása

A (3.18) és (3.37) egyenlet alapján

$$\sum_{s=i}^m \int_s \langle \ddot{\mathbf{r}}_s, \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_s}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \rangle dm = \sum_{s=i}^m \{ \langle m_s {}^s \mathbf{a}_{cs}, \Omega_{cs,i} \rangle + \langle \mathbf{K}_{\bar{c}s} {}^s \boldsymbol{\epsilon}_s - (\mathbf{K}_{\bar{c}s} {}^s \boldsymbol{\omega}_s) \times {}^s \boldsymbol{\omega}_s, \Gamma_{si} \rangle \} \quad (3.38)$$

teljesül, ahonnan következik az  $\Omega_{cs,i} = \Gamma_{si} = 0$ ;  $i > s$  jelöléssel a (3.9) alak két komponense:

$$\mathbf{H}_K = \sum_{s=1}^m \{ \Omega_{cs}^T m_s \Omega_{cs} + \Gamma_s^T \mathbf{K}_{\bar{c}s} \Gamma_s \}, \quad (3.39)$$

$$\mathbf{h}_K = \sum_{s=1}^m \{ \Omega_{cs}^T m_s \boldsymbol{\Theta}_{cs} + \Gamma_s^T [ \mathbf{K}_{\bar{c}s} \boldsymbol{\Phi}_s - (\mathbf{K}_{\bar{c}s} {}^s \boldsymbol{\omega}_s) \times {}^s \boldsymbol{\omega}_s ] \}. \quad (3.40)$$

### 3.3.2. A potenciális energia hatása

A szegmensek potenciális energiája:

$$P = - \sum_{s=1}^m m_s \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix}^T \mathbf{T}_{0,s} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_{cs} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

ahol  $\mathbf{g}$  a nehézségi gyorsulás a  $K_0$  keretben kifejezve.

A Lagrange-egyenletben a potenciális energia hatása:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} \right) (-P) &= \frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}_i} = - \sum_{s=1}^m m_s \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix}^T \frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial \mathbf{q}_i} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_{cs} \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= - \sum_{s=i}^m m_s \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix}^T \mathbf{T}_{0,s} {}^s \boldsymbol{\Delta}_{i-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_{cs} \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= - \sum_{s=i}^m m_s \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix}^T \mathbf{T}_{0,i-1} \boldsymbol{\Delta}_{i-1} \mathbf{T}_{i-1,s} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_{cs} \\ 1 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$-\left[\mathbf{g}^T \quad 0\right] \mathbf{T}_{0,i-1} \Delta_{i-1} \sum_{s=i}^m \left[ \begin{array}{c} \mathbf{A}_{i-1,s} m_s \mathbf{Q}_{cs} + m_s \mathbf{P}_{i-1,s} \\ m_s \end{array} \right] \stackrel{def}{=} h_{P,i}. \quad (3.42)$$

Ha a csuklótengely  $\mathbf{t}_{i-1} = \mathbf{k}_{i-1}$ , akkor

i) rotációs csukló esetén:

$$-\left[\mathbf{g}^T \quad 0\right] \mathbf{T}_{0,i-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [-\mathbf{g} \cdot \mathbf{m}_{0,i-1}, -\mathbf{g} \cdot \mathbf{l}_{0,i-1}, 0, 0], \quad (3.43)$$

ii) translációs csukló esetén:

$$-\left[\mathbf{g}^T \quad 0\right] \mathbf{T}_{0,i-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0, 0, 0, -\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_{0,i-1}], \quad (3.44)$$

Használjuk ki, hogy (3.43) és (3.44) csak  $\mathbf{A}_{0,i-1}$ -től függ, ahol  $\mathbf{A}_{0,i} = \mathbf{A}_{0,i-1} \mathbf{A}_{i-1,i}$  és legyen

$$\mathbf{G}_i^T = -\left[\mathbf{g}^T \quad 0\right] \mathbf{T}_{0,i-1} \Delta_{i-1}, \quad (3.45)$$

$$\mathbf{r}_i \stackrel{def}{=} \sum_{s=i}^m \{ \mathbf{A}_{i-1,s} m_s \mathbf{Q}_{cs} + m_s \mathbf{P}_{i-1,s} \}, \quad (3.46)$$

$$M_i \stackrel{def}{=} \sum_{s=i}^m m_s, \quad (3.47)$$

akkor

$$M_i = M_{i+1} + m_i, \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \sum_{s=i+1}^m \{ \mathbf{A}_{i-1,i} \mathbf{A}_{i,s} m_s \boldsymbol{\rho}_{cs} + m_s (\mathbf{A}_{i-1,i} \mathbf{p}_{i,s} + \mathbf{p}_{i-1,i}) \} + \\ &\quad + \mathbf{A}_{i-1,i} m_i \boldsymbol{\rho}_{ci} + m_i \mathbf{p}_{i-1,i} = \\ &= \mathbf{A}_{i-1,i} (\mathbf{r}_{i+1} + m_i \boldsymbol{\rho}_{ci}) + M_i \mathbf{p}_{i-1,i}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$h_{P,i} = \mathbf{G}_i^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}_i \\ M_i \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

### 3.3.3. A rekurzív számítások sorrendje

A (3.9) alakú mozgásegyenletekben

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_K \quad \text{pozitív definit}, \quad (3.51)$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_K + \mathbf{h}_P. \quad (3.52)$$

Mivel  $\mathbf{H}_K$  és  $\mathbf{h}_K$  egy összeg, ezért (előre vagy hátra tartó) rekurzióval számítható. Ajánlott kihasználni, hogy  $\mathbf{H}$  szimmetrikus, és  $m^2$  helyett elég  $m(m+1)/2$  elemét kiszámítani. Lényeges egyszerűsítést jelent az is, hogy  $\boldsymbol{\Omega}_{cs}$  és  $\boldsymbol{\Gamma}_s$  utolsó  $m-s$  oszlopa nullvektor. A  $\mathbf{G}_i^T$  vektor előre tartó, míg  $\mathbf{r}_i$  és  $M_i$  hátra tartó rekurzióval számítható. A kinematikai mennyiségeket ( $\boldsymbol{\Gamma}_s$ ,  $\boldsymbol{\Phi}_s$ ,  $\boldsymbol{\Omega}_s$ ,  $\boldsymbol{\Theta}_s$ ) előzőleg előre tartó rekurzióval meg kell határozni.

Eredményünket értékelve megállapíthatjuk, hogy  $\mathbf{H}$  és  $\mathbf{h}_K$  alakja megegyezik Vukobratovic és Potkonjak Appel-egyenletekből kapott eredményével ([44], pp.33-38).

Ha csak  $\boldsymbol{\tau}_i$  meghatározása a cél (például RMAC irányítás), akkor a (3.37) egyenleten alapuló, kevesebb számítást igénylő alakot használhatjuk. Ne felejtjük azonban el, hogy ha az irányításhoz  $\mathbf{H}$  és  $\mathbf{h}_K$  ismerete szükséges, akkor ezzel az egyszerűsítéssel nem élhetünk.

### 3.4. A MOZGÁSEGYLETEK DIREKT (NEMREKURZÍV) SZÁMÍTÁSA

Írjuk fel a Lagrange-függvényt és a Lagrange-egyenletben szereplő deriváltakat:

$$\begin{aligned}
 L &= \sum_{s=1}^m \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{S}} \left[ \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{0,s} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix}) \right]^2 dm + \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix}, m_s \mathbf{T}_{0,s} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_{cs} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \\
 &= \sum_{s=1}^m \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{S}} \left[ \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_j} \dot{q}_j \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix} \right]^2 dm + \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix}, m_s \mathbf{T}_{0,s} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_{cs} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \right\},
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{s=1}^m \sum_{j=1}^s \int_{\mathfrak{S}} \left\langle \frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_j} \dot{q}_j \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_i} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle dm, \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \sum_{s=1}^m \sum_{j=1}^s \int_{\mathfrak{S}} \left\{ \left\langle \frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_j} \ddot{q}_j \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_i} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle + \right. \\
 &\quad + \sum_{k=1}^s \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_i} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle + \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^s \left\langle \frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_j} \dot{q}_j \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{\partial^2 \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \right\} dm, \tag{3.55}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \sum_{s=1}^m \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \int_{\mathfrak{S}} \left\langle \frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_j} \dot{q}_j \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{\partial^2 \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_k \partial q_i} \dot{q}_k \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle dm + \\
 &\quad + \sum_{s=1}^m \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix}, m_s \frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_i} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_{cs} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \tag{3.56}
 \end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy a vegyes másodrendű parciális deriváltakban a deriválás sorrendje felcserélhető, ezért (3.55), (3.56) és (3.10) alapján a Lagrange-egyenlet alakja:

$$\tau_i = \sum_{s=1}^m \sum_{j=1}^s \int_{\mathfrak{S}} \left\langle \frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_j} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_i} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle dm \ddot{q}_j +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=1}^m \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \int \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_j \partial q_k} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_i} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle dm \dot{q}_j \dot{q}_k + \\
& - \sum_{s=1}^m \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix}, m_s \frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_i} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_{cs} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \\
& = \sum_{j=1}^m \sum_{s=\max\{i,j\}}^m \int \left\langle \frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_j} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_i} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle dm \ddot{q}_j + \\
& + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{s=\max\{i,j,k\}}^m \int \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_j \partial q_k} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_i} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle dm \dot{q}_j \dot{q}_k - \\
& - \sum_{s=i}^m \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix}, m_s \frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_i} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_{cs} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \\
& = \sum_{j=1}^m D_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m D_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + D_i, \tag{3.57}
\end{aligned}$$

ahol a bevezetett paraméterek fizikai jelentése:

$D_{ii}$	effektív inercia,	
$D_{ij}$	csatoló inercia; $i \neq j$ ,	
$D_{ijj}$	centripetális hatás,	
$D_{ijk}$	Coriolis-hatás; $j \neq k$ ,	
$D_i$	gravitációs tér hatása.	(3.58)

Részletezzük az egyes tagokat és közben alkalmazzuk a (2.21)–(2.22), (2.131)–(2.132) egyenletekből következő alábbi összefüggéseket:

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_j} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{0,s} ([{}^s \mathbf{t}_{j-1} \times] \quad {}^s \mathbf{d}_{j-1}) \\ \mathbf{0}^T \quad 0 \end{bmatrix}, \quad j \leq s, \tag{3.59}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_j \partial q_k} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{0,s} ([{}^s \mathbf{t}_{j-1} \times] [{}^s \mathbf{t}_{k-1} \times] \quad {}^s \mathbf{t}_{j-1} \times {}^s \mathbf{d}_{k-1}) \\ \mathbf{0}^T \quad 0 \end{bmatrix}, \quad j \leq k \leq s. \tag{3.60}$$

A mozgásegyenletekben szereplő  $D_{ij}$ ,  $D_{ijk}$ ,  $D_i$  tagok a parciális szögsebességekkel és sebességekkel kifejezett alakja a következő:

$$\begin{aligned}
D_{ij} &= \sum_{s=\max\{i,j\}}^m \int_{\mathbb{R}} \left\langle \frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_j} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_i} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle dm = \\
&= \sum_{s=\max\{i,j\}}^m \int_{\mathbb{R}} \left\langle \mathbf{A}_{0,s} ({}^s \mathbf{t}_{j-1} \times \boldsymbol{\rho}_s + {}^s \mathbf{d}_{j-1}), \right. \\
&\quad \left. \mathbf{A}_{0,s} ({}^s \mathbf{t}_{i-1} \times \boldsymbol{\rho}_s + {}^s \mathbf{d}_{i-1}) \right\rangle dm = \\
&= \sum_{s=\max\{i,j\}}^m \int_{\mathbb{R}} \left\langle {}^s \mathbf{t}_{j-1} \times \boldsymbol{\rho}_s + {}^s \mathbf{d}_{j-1}, {}^s \mathbf{t}_{i-1} \times \boldsymbol{\rho}_s + {}^s \mathbf{d}_{i-1} \right\rangle dm = \\
&= \sum_{s=\max\{i,j\}}^m \int_{\mathbb{R}} \left\{ \left\langle [\boldsymbol{\rho}_s] \times^T [\boldsymbol{\rho}_s] {}^s \mathbf{t}_{j-1}, {}^s \mathbf{t}_{i-1} \right\rangle + \left\langle {}^s \mathbf{d}_{j-1}, {}^s \mathbf{d}_{i-1} \right\rangle - \right. \\
&\quad \left. \left\langle \boldsymbol{\rho}_s, {}^s \mathbf{t}_{j-1} \times {}^s \mathbf{d}_{i-1} + {}^s \mathbf{t}_{i-1} \times {}^s \mathbf{d}_{j-1} \right\rangle \right\} dm = \\
&= \sum_{s=\max\{i,j\}}^m \left\{ (\mathbf{K}_s {}^s \mathbf{t}_{j-1}) \cdot {}^s \mathbf{t}_{i-1} + m_s {}^s \mathbf{d}_{j-1} \cdot {}^s \mathbf{d}_{i-1} - \right. \\
&\quad \left. m_s \boldsymbol{\rho}_{cs} \cdot ({}^s \mathbf{t}_{j-1} \times {}^s \mathbf{d}_{i-1} + {}^s \mathbf{t}_{i-1} \times {}^s \mathbf{d}_{j-1}) \right\}, \tag{3.61}
\end{aligned}$$

$$D_{ij} = D_{ji} \quad (\text{elég képezni : } D_{ij}, \quad i \leq j), \tag{3.62}$$

$$D_{ijk} = \sum_{s=\max\{i,j,k\}}^m \int_{\mathbb{R}} \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_j \partial q_k} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_i} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_s \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle dm, \tag{3.63}$$

$$D_{ijk} = D_{ikj} \quad (\text{elég képezni : } D_{ijk}, \quad j \leq k), \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}
D_{ijk} &= \sum_{s=\max\{i,k\}}^m \int_{\mathbb{R}} \left\langle {}^s \mathbf{t}_{j-1} \times ({}^s \mathbf{t}_{k-1} \times \boldsymbol{\rho}_s + {}^s \mathbf{t}_{j-1} \times {}^s \mathbf{d}_{k-1}), \right. \\
&\quad \left. {}^s \mathbf{t}_{i-1} \times \boldsymbol{\rho}_s + {}^s \mathbf{d}_{i-1} \right\rangle dm =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=\max\{i,k\}}^m \int_{\square} \{ \langle {}^s t_{j-1} \times ({}^s t_{k-1} \times \boldsymbol{\rho}_s), {}^s t_{i-1} \times \boldsymbol{\rho}_s \rangle + \\
&\quad + \langle {}^s t_{j-1} \times ({}^s t_{k-1} \times \boldsymbol{\rho}_s), {}^s \mathbf{d}_{i-1} \rangle + \\
&\quad + \langle {}^s t_{j-1} \times {}^s \mathbf{d}_{k-1}, {}^s t_{i-1} \times \boldsymbol{\rho}_s \rangle + \\
&\quad + \langle {}^s t_{j-1} \times {}^s \mathbf{d}_{k-1}, {}^s \mathbf{d}_{i-1} \rangle \} dm = \\
&= \sum_{s=\max\{i,k\}}^m \int_{\square} \{ \langle \boldsymbol{\rho}_s \times [(\boldsymbol{\rho}_s \times {}^s t_{k-1}) \times {}^s t_{j-1}], {}^s t_{i-1} \rangle + \\
&\quad + \langle \boldsymbol{\rho}_s, {}^s t_{j-1} ({}^s t_{k-1} \cdot {}^s \mathbf{d}_{i-1}) - {}^s \mathbf{d}_{i-1} ({}^s t_{k-1} \cdot {}^s t_{j-1}) \rangle + \\
&\quad + \langle \boldsymbol{\rho}_s, {}^s \mathbf{d}_{k-1} ({}^s t_{i-1} \cdot {}^s \mathbf{d}_{j-1}) - {}^s t_{j-1} ({}^s t_{i-1} \cdot {}^s \mathbf{d}_{k-1}) \rangle + \\
&\quad + {}^s \mathbf{d}_{i-1} \cdot ({}^s t_{j-1} \times {}^s \mathbf{d}_{k-1}) \} dm = \\
&= \sum_{s=\max\{i,k\}}^m \left\{ \frac{1}{2} \text{Spur}(\mathbf{K}_s) {}^s t_{i-1} \cdot ({}^s t_{j-1} \times {}^s t_{k-1}) - \right. \\
&\quad - (\mathbf{K}_s {}^s t_{j-1}) \cdot ({}^s t_{k-1} \times {}^s t_{i-1}) + \\
&\quad + m_s \boldsymbol{\rho}_{cs} [{}^s t_{j-1} ({}^s t_{k-1} \cdot {}^s \mathbf{d}_{i-1}) - {}^s \mathbf{d}_{i-1} ({}^s t_{k-1} \cdot {}^s t_{j-1}) + \\
&\quad + {}^s \mathbf{d}_{k-1} ({}^s t_{i-1} \cdot {}^s t_{j-1}) - {}^s t_{j-1} ({}^s t_{i-1} \cdot {}^s \mathbf{d}_{k-1})] + \\
&\quad \left. + m_s {}^s \mathbf{d}_{i-1} \cdot ({}^s t_{j-1} \times {}^s \mathbf{d}_{k-1}) \right\}, \quad j \leq k, \quad (3.65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_i &= - \sum_{s=i}^m \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix}, m_s \frac{\partial \mathbf{T}_{0,s}}{\partial q_i} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_{cs} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \\
&= - \sum_{s=i}^m \langle \mathbf{g}, m_s \mathbf{A}_{0,s} ({}^s t_{i-1} \times \boldsymbol{\rho}_{cs} + {}^s \mathbf{d}_{i-1}) \rangle = \\
&= \sum_{s=i}^m m_s (-\mathbf{A}_{0,s}^T \mathbf{g}) ({}^s t_{i-1} \times \boldsymbol{\rho}_{cs} + {}^s \mathbf{d}_{i-1}). \quad (3.66)
\end{aligned}$$

Itt (3.65)-ben felhasználtuk, hogy (a könnyebb megfeleltethetőség ér-

dekében az indexével jelölve a vektorokat) teljesül, hogy

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{j} \times (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\rho}), \mathbf{i} \times \boldsymbol{\rho} \rangle = \langle -[\boldsymbol{\rho}]^T \{(\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{j}\}, \mathbf{i} \rangle = \\ & = \langle \boldsymbol{\rho} \times \{(\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{j}, \mathbf{i}\} \rangle = \langle \boldsymbol{\rho} \times \{-\boldsymbol{\rho} \langle \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle + \mathbf{k} \langle \mathbf{j}, \boldsymbol{\rho} \rangle\}, \mathbf{i} \rangle = \\ & = \langle \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{k} \langle \mathbf{j}, \boldsymbol{\rho} \rangle, \mathbf{i} \rangle, \end{aligned} \quad (3.65a)$$

$$\begin{aligned} & - \langle \{[\boldsymbol{\rho}]^T [\boldsymbol{\rho}] \mathbf{j}\} \times \mathbf{k}, \mathbf{i} \rangle = \langle \{\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{j})\} \times \mathbf{k}, \mathbf{i} \rangle = \\ & = \langle \{\boldsymbol{\rho} \langle \boldsymbol{\rho}, \mathbf{j} \rangle - \mathbf{j} \langle \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho} \rangle\} \times \mathbf{k}, \mathbf{i} \rangle = \\ & = \langle \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{k} \langle \boldsymbol{\rho}, \mathbf{j} \rangle, \mathbf{i} \rangle - \langle \mathbf{j} \times \mathbf{k} \langle \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho} \rangle, \mathbf{i} \rangle. \end{aligned} \quad (3.65b)$$

### 3.2. Példa: A mozgásegyenletek a 2.3. ábra szerinti kétszabadságfokú kar esetén

Felhasználjuk a 2.6. példa eredményeit.

#### 1. módszer (rekurzív számítás 3.3. szerint)

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_1 = \mathbf{0},$$

$$\Omega_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l_{c1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta_{c1} = \begin{bmatrix} -l_{c1} \dot{q}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = \mathbf{0}, \quad (3.68)$$

$$\Omega_{c2} = \begin{bmatrix} l_1 S_2 & 0 \\ l_{c2} + l_1 C_2 & l_{c2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

$$\Theta_{c2} = \begin{bmatrix} -(l_{c2} + l_1 C_2) \dot{q}_1^2 - 2l_{c2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 - l_{c2} \dot{q}_2^2 \\ l_1 S_2 \dot{q}_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.70)$$

$$H_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_2 [(l_1 S_2)^2 + (l_{c2} + l_1 C_2)^2] +$$

$$+ [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + 2l_1 l_{c2} C_2 + l_{c2}^2) + I_1 + I_2, \quad (3.71)$$

$$H_{12} = m_2 (l_{c2} + l_1 C_2) l_{c2} + I_2 = m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} C_2) + I_2 = H_{21}, \quad (3.72)$$

$$H_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2, \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} h_{K1} &= m_2 \{ (l_1 S_2) [-(l_{c2} + l_1 C_2) \dot{q}_1^2 - 2l_{c2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 - l_{c2} \dot{q}_2^2] + \\ &\quad + (l_{c2} + l_1 C_2) (l_1 S_2 \dot{q}_1^2) \} = \\ &= -2m_2 l_1 l_{c2} S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_{c2} S_2 \dot{q}_2^2, \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$h_{K2} = m_2 l_1 l_{c2} S_2 \dot{q}_1^2, \quad (3.75)$$

$$M_2 = m_2, \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} m_2 \begin{bmatrix} -(l_2 - l_{c2}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} l_2 C_2 \\ l_2 S_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= m_2 \begin{bmatrix} -C_2(l_2 - l_{c2}) + m_2 l_2 C_2 \\ -S_2(l_2 - l_{c2}) + m_2 l_2 S_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 l_{c2} C_2 \\ m_2 l_{c2} S_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$M_1 = m_1 + m_2, \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 l_{c2} C_2 - m_1 (l_1 - l_{c1}) \\ m_2 l_{c2} S_2 \\ 0 \end{bmatrix} + (m_1 + m_2) \begin{bmatrix} l_1 C_1 \\ l_1 S_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C_1 (m_2 l_{c2} C_2 - m_1 l_1 + m_1 l_{c1} + m_1 l_1 + m_2 l_1) - S_1 m_2 l_{c2} S_2 \\ S_1 (m_2 l_{c2} C_2 - m_1 l_1 + m_1 l_{c1} + m_1 l_1 + m_2 l_1) + C_1 m_2 l_{c2} S_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} m_1 l_{c1} C_1 + m_2 (l_1 C_1 + l_{c2} C_{12}) \\ m_1 l_{c1} S_1 + m_2 (l_1 S_1 + l_{c2} S_{12}) \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.80)$$

$$\mathbf{G}_1^T = [g \ 0 \ 0 \ 0], \quad (3.81)$$

$$\mathbf{G}_2^T = [C_1 g \ -S_1 g \ 0 \ 0], \quad (3.82)$$

$$h_{P1} = g\{m_1 l_{c1} C_1 + m_2(l_1 C_1 + l_{c2} C_{12})\}, \quad (3.83)$$

$$h_{P2} = g\{m_1 l_{c2} C_1 C_2 - m_2 l_{c2} S_1 S_2\} = gm_2 l_{c2} C_{12}, \quad (3.84)$$

$$h_1 = -2m_2 l_1 l_{c2} S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_{c2} S_2 \dot{q}_2^2 + \\ + g\{m_1 l_{c1} C_1 + m_2(l_1 C_1 + l_{c2} C_{12})\}, \quad (3.85)$$

$$h_2 = m_2 l_1 l_{c2} S_2 \dot{q}_1^2 + gm_2 l_{c2} C_{12}. \quad (3.86)$$

## 2. módszer (direkt számítás 3.4. szerint)

A számítások egyszerűsítése érdekében a  $K_s$  keretet eltoljuk az  $\bar{s}$  szegmens tömegközéppontjába, hogy a  $\rho_{cs}$  értékét tartalmazó tagok ne szerepeljenek. Az eltolás következtében az  ${}^s \mathbf{d}_{j-1}$  parciális sebességet úgy kell képezni, mintha  $\mathbf{p}_{s-1,s}$  a tömegközéppontba mutatna:

$${}^2 \mathbf{t}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^2 \mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1 \mathbf{t}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.87)$$

$${}^2 \mathbf{d}_0 = \begin{bmatrix} l_1 S_2 \\ l_{c2} + l_1 C_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^2 \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{c2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^1 \mathbf{d}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{c1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.88)$$

$${}^2 \mathbf{d}_0 \cdot {}^2 \mathbf{d}_0 = l_1^2 + 2l_1 l_{c2} C_2 + l_{c2}^2, \quad (3.89)$$

$${}^2 \mathbf{d}_0 \cdot {}^2 \mathbf{d}_1 = l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} C_2, \quad {}^2 \mathbf{d}_1 \cdot {}^2 \mathbf{d}_1 = l_{c2}^2, \quad (3.90)$$

$${}^1 \mathbf{d}_0 \cdot {}^1 \mathbf{d}_0 = l_{c1}^2, \quad (3.91)$$

$${}^2 \mathbf{t}_0 \times {}^2 \mathbf{d}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 S_2 \\ l_{c2} + l_1 C_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c2} - l_1 C_2 \\ l_1 S_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.92)$$

$${}^2\mathbf{t}_0 \times {}^2\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} -l_{c2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = {}^2\mathbf{t}_1 \times {}^2\mathbf{d}_1, \quad (3.93)$$

$${}^1\mathbf{t}_0 \times {}^1\mathbf{d}_0 = \begin{bmatrix} -l_{c1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.94)$$

$$-\mathbf{A}_{0,1}^T \mathbf{g} = - \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 g \\ C_1 g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.95)$$

$$-\mathbf{A}_{0,2}^T \mathbf{g} = \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 g \\ C_1 g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{12} g \\ C_{12} g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.96)$$

$${}^1\mathbf{t}_0 \times \boldsymbol{\rho}_{c1} + {}^1\mathbf{d}_0 = {}^1\mathbf{d}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{c1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.97)$$

$${}^2\mathbf{t}_0 \times \boldsymbol{\rho}_{c2} + {}^2\mathbf{d}_0 = {}^2\mathbf{d}_0 = \begin{bmatrix} l_1 S_2 \\ l_{c2} + l_1 C_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.98)$$

$${}^2\mathbf{t}_1 \times \boldsymbol{\rho}_{c2} + {}^2\mathbf{d}_1 = {}^2\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{c2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.99)$$

$$D_{11} = I_1 + m_1 l_{c1}^2 + I_2 + m_2 (l_1^2 + 2l_1 l_{c2} C_2 + l_{c2}^2), \quad (3.100)$$

$$D_{12} = I_2 + m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} C_2) = D_{21}, \quad (3.101)$$

$$D_{22} = I_2 + m_2 l_{c2}^2, \quad (3.102)$$

$$D_{111} = m_2 \begin{bmatrix} l_1 S_2 \\ l_{c2} + l_1 C_2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l_{c2} - l_1 C_2 \\ l_1 S_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad (3.103)$$

$$D_{112} = m_2 \begin{bmatrix} l_1 S_2 \\ l_{c2} + l_1 C_2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l_{c2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -m_2 l_1 l_{c2} S_2 = D_{121}, \quad (3.104)$$

$$D_{122} = m_2 \begin{bmatrix} l_1 S_2 \\ l_{c2} + l_1 C_2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l_{c2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -m_2 l_1 l_{c2} S_2, \quad (3.105)$$

$$D_{211} = m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ l_{c2} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l_{c2} - l_1 C_2 \\ l_1 S_2 \\ 0 \end{bmatrix} = m_2 l_1 l_{c2} S_2, \quad (3.106)$$

$$D_{212} = m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ l_{c2} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l_{c2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 = D_{221}, \quad (3.107)$$

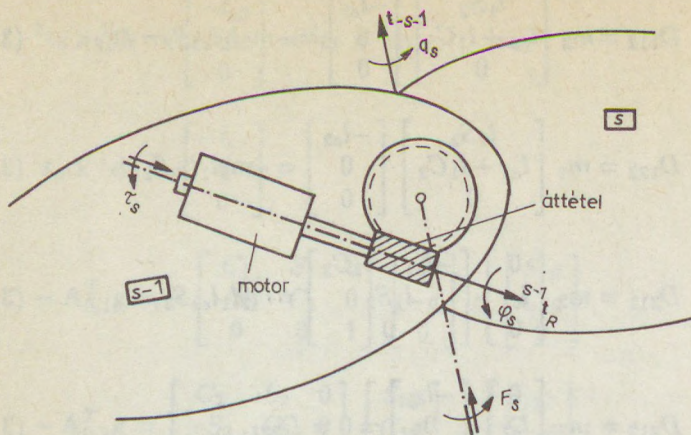
$$D_{222} = m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ l_{c2} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l_{c2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \quad (3.108)$$

### 3.5. A BEAVATKOZÓ SZERV (MOTOR ÉS ÁTTÉTEL) FIGYELEMBEVÉTELE A MOZGÁSEGYENLETEKBEN

Alkalmazzuk eredményeinket a 3.3. ábra szerinti beavatkozó szervvel mozgatott szegmensre.

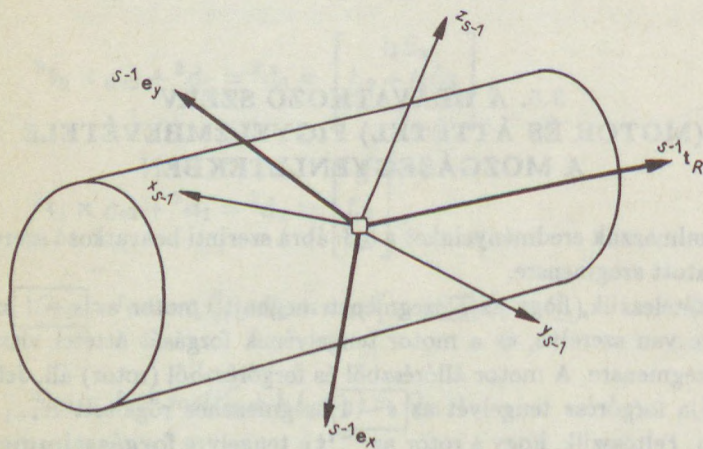
Feltételezzük, hogy az  $\boxed{s}$  szegmenst meghajtó motor az  $\boxed{s-1}$  szegmensre van szerelve, és a motor tengelyének forgását áttétel viszi át az  $\boxed{s}$  szegmensre. A motor állórészből és forgórészből (rotor) áll. Jelölje  ${}^{s-1}\mathbf{t}_R$  a forgórész tengelyét az  $\boxed{s-1}$  szegmenshez rögzített  $K_{s-1}$  keretben. Feltesszük, hogy a rotor az  ${}^{s-1}\mathbf{t}_R$  tengelyre **forgásszimmetrikus**, és tömegközéppontja ( ${}^{s-1}\mathbf{q}_{c,R}$ ) forgás közben a tengely ugyanazon pontjában marad. A forgásszimmetria miatt a rotor tehetetlenségi mátrixa ( ${}^{s-1}\mathbf{K}_{c,R}$ ) forgás közben a  $K_{s-1}$  keretben nem változik. Tekintsük most a rotort a tömegközéppontba eltolt  $K_{s-1}$  kerettel (3.4. ábra).

Jelölje  ${}^{s-1}\mathbf{K}_{c,R}$  a tehetetlenségi mátrixát a rotornak ebben a keret-



3.3. ábra

A szegmenst mozgató beavatkozó szerv



3.4. ábra

A rotorhoz rögzített koordináta-rendszer

ben,  $s^{-1}e_x$ ,  $s^{-1}e_y$ ,  $s^{-1}t_R$  a főtehetetlenségi irányokat (sajátvektorokat) és  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_{R,s-1}$  a főtehetetlenségi nyomatékokat (sajátértékeket). A

rotor kinematikai mennyiségei (B.27)-(B.32) alapján a következők:

$${}^{s-1}\boldsymbol{\omega}_R = {}^{s-1}\boldsymbol{\omega}_{s-1} + {}^{s-1}\mathbf{t}_R\dot{\varphi}_s, \quad (3.109)$$

$${}^{s-1}\boldsymbol{\epsilon}_R = {}^{s-1}\boldsymbol{\epsilon}_{s-1} + {}^{s-1}\mathbf{t}_R\ddot{\varphi}_s + {}^{s-1}\boldsymbol{\omega}_{s-1} \times {}^{s-1}\mathbf{t}_R\dot{\varphi}_s, \quad (3.110)$$

$${}^{s-1}\mathbf{v}_{c,R} = {}^{s-1}\mathbf{v}_{s-1} + {}^{s-1}\boldsymbol{\omega}_{s-1} \times {}^{s-1}\boldsymbol{\rho}_{c,R}, \quad (3.111)$$

$${}^{s-1}\mathbf{a}_{c,R} = {}^{s-1}\mathbf{a}_{s-1} + {}^{s-1}\boldsymbol{\epsilon}_{s-1} \times {}^{s-1}\boldsymbol{\rho}_{c,R} + \\ + {}^{s-1}\boldsymbol{\omega}_{s-1} \times ({}^{s-1}\boldsymbol{\omega}_{s-1} \times {}^{s-1}\boldsymbol{\rho}_{c,R}). \quad (3.112)$$

Legyen  $\nu_s$  az áttétel,  $\tau_s$  a rotornyomaték,  $\varphi_s = \nu_s q_s$  az általánosított koordináta, akkor (3.10) szerint

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = \tau_i \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \nu_i \tau_i \stackrel{je!}{=} F_i, \quad (3.113)$$

és a rotor kinetikus energiájának hatása (3.37) szerint

$$\langle m_{R,s-1} {}^{s-1}\mathbf{a}_{c,R}, \boldsymbol{\Omega}_{cR,s-1,i} \rangle + \\ + \langle {}^{s-1}\mathbf{K}_{c,R} {}^{s-1}\boldsymbol{\epsilon}_R - ({}^{s-1}\mathbf{K}_{c,R} {}^{s-1}\boldsymbol{\omega}_R) \times {}^{s-1}\boldsymbol{\omega}_R, \frac{\partial {}^{s-1}\boldsymbol{\omega}_R}{\partial \dot{q}_i} \rangle. \quad (3.114)$$

Részletezzük ki a **második skalárszorzat bal oldalán álló kifejezést**:

$${}^{s-1}\mathbf{K}_{c,R} {}^{s-1}\boldsymbol{\epsilon}_R - ({}^{s-1}\mathbf{K}_{c,R} {}^{s-1}\boldsymbol{\omega}_R) \times {}^{s-1}\boldsymbol{\omega}_R = \\ = {}^{s-1}\mathbf{K}_{c,R} {}^{s-1}\boldsymbol{\epsilon}_{s-1} + {}^{s-1}\mathbf{K}_{c,R} {}^{s-1}\mathbf{t}_R\ddot{\varphi}_s + {}^{s-1}\mathbf{K}_{c,R} ({}^{s-1}\boldsymbol{\omega}_{s-1} \times {}^{s-1}\mathbf{t}_R\dot{\varphi}_s) - \\ - ({}^{s-1}\mathbf{K}_{c,R} {}^{s-1}\boldsymbol{\omega}_{s-1} + {}^{s-1}\mathbf{K}_{c,R} {}^{s-1}\mathbf{t}_R\dot{\varphi}_s) \times ({}^{s-1}\boldsymbol{\omega}_{s-1} + {}^{s-1}\mathbf{t}_R\dot{\varphi}_s) = \\ = {}^{s-1}\mathbf{K}_{c,R} {}^{s-1}\boldsymbol{\epsilon}_{s-1} - ({}^{s-1}\mathbf{K}_{c,R} {}^{s-1}\boldsymbol{\omega}_{s-1}) \times {}^{s-1}\boldsymbol{\omega}_{s-1} + \\ + {}^{s-1}\mathbf{K}_{c,R} {}^{s-1}\mathbf{t}_R\ddot{\varphi}_s + {}^{s-1}\mathbf{K}_{c,R} ({}^{s-1}\boldsymbol{\omega}_{s-1} \times {}^{s-1}\mathbf{t}_R\dot{\varphi}_s) - \\ - ({}^{s-1}\mathbf{K}_{c,R} {}^{s-1}\boldsymbol{\omega}_{s-1}) \times {}^{s-1}\mathbf{t}_R\dot{\varphi}_s - ({}^{s-1}\mathbf{K}_{c,R} {}^{s-1}\mathbf{t}_R\dot{\varphi}_s) \times {}^{s-1}\boldsymbol{\omega}_{s-1} - \\ - ({}^{s-1}\mathbf{K}_{c,R} {}^{s-1}\mathbf{t}_R\dot{\varphi}_s) \times {}^{s-1}\mathbf{t}_R\dot{\varphi}_s. \quad (3.115)$$

Hajtsuk végre a lehetséges összevonásokat az utolsó öt tagban. Ennek során figyelembe vesszük, hogy az ortonormált sajátvektorok esetén

teljesül, hogy

$${}^{s-1}\omega_{s-1} = \omega_x {}^{s-1}e_x + \omega_y {}^{s-1}e_y + \omega_z {}^{s-1}t_R, \quad (3.116)$$

$${}^{s-1}\omega_{s-1} \times {}^{s-1}t_R = -\omega_x {}^{s-1}e_y + \omega_y {}^{s-1}e_x, \quad (3.117)$$

$${}^{s-1}K_{c,R}({}^{s-1}\omega_{s-1} \times {}^{s-1}t_R) = -\omega_x K_y {}^{s-1}e_y + \omega_y K_x {}^{s-1}e_x, \quad (3.118)$$

$${}^{s-1}K_{c,R} {}^{s-1}\omega_{s-1} = \omega_x K_x {}^{s-1}e_x + \omega_y K_y {}^{s-1}e_y + \omega_z K_{R,s-1} {}^{s-1}t_R, \quad (3.119)$$

$$-({}^{s-1}K_{c,R} {}^{s-1}\omega_{s-1}) \times {}^{s-1}t_R = \omega_x K_x {}^{s-1}e_y - \omega_y K_y {}^{s-1}e_x, \quad (3.120)$$

$$-({}^{s-1}K_{c,R} {}^{s-1}t_R) \times {}^{s-1}t_R = -K_{R,s-1} {}^{s-1}t_R \times {}^{s-1}t_R = 0. \quad (3.121)$$

Mivel a rotor forgásszimmetrikus, ezért  $K_x = K_y$  és így (3.118) és (3.120) kiejtik egymást. A (3.115) egyenlet egyszerűsített alakja:

$$\begin{aligned} & {}^{s-1}K_{c,R} {}^{s-1}\epsilon_{s-1} - ({}^{s-1}K_{c,R} {}^{s-1}\omega_{s-1}) \times {}^{s-1}\omega_{s-1} + \\ & + K_{R,s-1} {}^{s-1}t_R \nu_s \ddot{q}_s - K_{R,s-1} {}^{s-1}t_R \nu_s \dot{q}_s \times {}^{s-1}\omega_{s-1}. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Hátra van még (3.25) analógiájára  $\partial({}^{s-1}\omega_R)/\partial\dot{q}_i$  meghatározása:

$$\begin{aligned} \frac{\partial({}^{s-1}\omega_R)}{\partial\dot{q}_i} &= \frac{\partial({}^{s-1}\omega_{s-1})}{\partial\dot{q}_i} + {}^{s-1}t_R \nu_s \frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\dot{q}_i} \\ &= \begin{cases} \Gamma_{s-1,i}, & \text{ha } i \leq s-1 \leq m-1, \\ {}^{i-1}t_R \nu_i, & \text{ha } i = s. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.123)$$

Összefoglalva az eredményeket, a beavatkozószerű hatását a mozgásegyenletekben a következő módon vehetjük figyelembe:

- i) Az  $\boxed{s-1}$  szegmensnek, a rászertelt motor állórészének, forgórészének és az áttételnek a rotoroldali tömegét és tehetetlenségi nyomatékát a 3.1. példa módszerével összevonjuk egyetlen taggá [lásd (3.114) első tagja és (3.122) első két tagjának  $\Gamma_{s-1,i}$ -vel vett skaláris szorzata], ahol  $s-1 = 1, 2, \dots, m-1$ . Itt figyelembe vettük, hogy a  $\boxed{0}$  szegmens áll, és az  $\boxed{m}$  szegmensre már nincs motor szerelve. Az áttételnek a rotorral ellentétes oldalon lévő tömegét és tehetetlenségi nyomatékát az  $\boxed{s}$  szegmens adataival vonjuk össze, ahol  $s-1 = 0, 1, \dots, m-1$ .

ii) A (3.122) és (3.123) szerinti, még figyelembe nem vett tagok a következők:

1.  $s-1 = i, i+1, \dots, m-1$  ( $1 \leq i < m$ ) esetén:

$$K_{R,s-1}\nu_s < {}^{s-1}\mathbf{t}_R, \Gamma_{s-1,i} > \ddot{q}_s; \quad (3.124)$$

$$-K_{R,s-1}\nu_s < {}^{s-1}\mathbf{t}_R \times {}^{s-1}\boldsymbol{\omega}_{s-1}, \Gamma_{s-1,i} > \dot{q}_s = \quad (3.125a)$$

$$= -K_{R,s-1}\nu_s < {}^{s-1}\mathbf{t}_R, {}^{s-1}\boldsymbol{\omega}_{s-1} \times \Gamma_{s-1,i} > \dot{q}_s =$$

$$= -\sum_{k=1}^{s-1} K_{R,s-1}\nu_s < {}^{s-1}\mathbf{t}_R, \Gamma_{s-1,k} \times \Gamma_{s-1,i} > \dot{q}_s \dot{q}_k; \quad (3.125b)$$

2.  $i = 2, \dots, m$  esetén:

$$\begin{aligned} < {}^{i-1}\mathbf{K}_{c,R} {}^{i-1}\boldsymbol{\epsilon}_{i-1}, {}^{i-1}\mathbf{t}_R \nu_i > &= < {}^{i-1}\boldsymbol{\epsilon}_{i-1}, {}^{i-1}\mathbf{K}_{c,R} {}^{i-1}\mathbf{t}_R \nu_i > = \\ &= K_{R,i-1}\nu_i < {}^{i-1}\mathbf{t}_R, {}^{i-1}\boldsymbol{\epsilon}_{i-1} > = \end{aligned} \quad (3.126a)$$

$$= K_{R,i-1}\nu_i < {}^{i-1}\mathbf{t}_R, \Gamma_{i-1}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{i-1} > = K_{R,i-1}\nu_i < {}^{i-1}\mathbf{t}_R, \Phi_{i-1} > +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-1} K_{R,i-1}\nu_i < {}^{i-1}\mathbf{t}_R, \Gamma_{i-1,j} > \ddot{q}_j; \quad (3.126b)$$

$$\begin{aligned} - < ({}^{i-1}\mathbf{K}_{c,R} {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1}) \times {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1}, {}^{i-1}\mathbf{t}_R \nu_i > &= \\ &= < {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1}, ({}^{i-1}\mathbf{K}_{c,R} {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1}) \times {}^{i-1}\mathbf{t}_R \nu_i > = \\ &= < \omega_x {}^{i-1}\mathbf{e}_x + \omega_y {}^{i-1}\mathbf{e}_y + \omega_z {}^{i-1}\mathbf{t}_R, \omega_y K_y {}^{i-1}\mathbf{e}_x - \omega_x K_x {}^{i-1}\mathbf{e}_y > \nu_i = \\ &= \nu_i (\omega_x \omega_y K_y - \omega_x \omega_y K_x) = \nu_i \omega_x \omega_y (K_y - K_x) = 0; \end{aligned} \quad (3.127)$$

3.  $i = 1, 2, \dots, m$  esetén:

$$K_{R,i-1}\nu_i^2 \ddot{q}_i < {}^{i-1}\mathbf{t}_R, {}^{i-1}\mathbf{t}_R > = K_{R,i-1}\nu_i^2 \ddot{q}_i; \quad (3.128)$$

$$-K_{R,i-1}\nu_i^2 \dot{q}_i < {}^{i-1}\mathbf{t}_R \times {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1}, {}^{i-1}\mathbf{t}_R > = 0. \quad (3.129)$$

Ezért  $\nu_i \tau_i = F_i$  tartalmazni fogja még a

$$\sum_{j=1}^m H_{ij}^R \ddot{q}_j + h_i^R = \sum_{j=1}^m H_{ij}^R \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m D_{ijk}^R \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (3.130)$$

tagot is, ahol (3.124), (3.126) és (3.128) alapján számítható  $H_{ij}^R$ , illetve (3.125) és (3.126) alapján képezhető  $h_i^R$ :

$$H_{ij}^R = \begin{cases} K_{R,i-1} \nu_i < {}^{i-1}t_R, \Gamma_{i-1,j} >, & 1 \leq j \leq i-1, \\ & i = 2, \dots, m, \\ K_{R,i-1} \nu_i^2, & j = i = 1, 2, \dots, m, \\ K_{R,j-1} \nu_j < {}^{j-1}t_R, \Gamma_{j-1,i} >, & j = i+1, \dots, m; \\ & i = 1, \dots, m-1, \end{cases} \quad (3.131)$$

$$h_i^R = - \sum_{j=i+1}^m K_{R,j-1} \nu_j < {}^{j-1}t_R, {}^{j-1}\omega_{j-1} \times \Gamma_{j-1,i} > \dot{q}_j +$$

$$(1 \leq i < m)$$

$$+ K_{R,i-1} \nu_i < {}^{i-1}t_R, \Phi_{i-1} > = \quad (3.132a)$$

$$(2 \leq i \leq m)$$

$$= - \sum_{j=i+1}^m \sum_{k=1}^{j-1} K_{R,j-1} \nu_j < {}^{j-1}t_R, \Gamma_{j-1,k} \times \Gamma_{j-1,i} > \dot{q}_j \dot{q}_k +$$

$$(1 \leq i < m)$$

$$+ \sum_{j=2}^{i-1} \sum_{k=1}^{j-1} K_{R,i-1} \nu_i < {}^{i-1}t_R, \Gamma_{i-1,k} \times \Gamma_{i-1,j} > \dot{q}_j \dot{q}_k,$$

$$(2 \leq i \leq m)$$

$$(3.132b)$$

$$D_{ijk}^R = \begin{cases} \frac{1}{2} K_{R,i-1} \nu_i < {}^{i-1} \mathbf{t}_R, \Gamma_{i-1,k} \times \Gamma_{i-1,j} > & \{2 \leq i \leq m; \\ & 2 \leq j < i; \\ & k < j\} + \\ + \frac{1}{2} K_{R,j-1} \nu_j < {}^{j-1} \mathbf{t}_R, \Gamma_{j-1,i} \times \Gamma_{j-1,k} > & \{1 \leq i < m; \\ & i < j \leq m; \\ & k < j\}, \\ 0, & \text{ha } j = k, \\ D_{ikj}, & \text{ha } k > j. \end{cases} \quad (3.133)$$

Elvégezve a

$$\mathbf{H} := \mathbf{H} + \mathbf{H}^R, \quad (3.134)$$

$$\mathbf{h} := \mathbf{h} + \mathbf{h}^R, \quad (3.135)$$

$$\mathbf{F} := \text{diag}(\nu_i \tau_i) \quad (3.136)$$

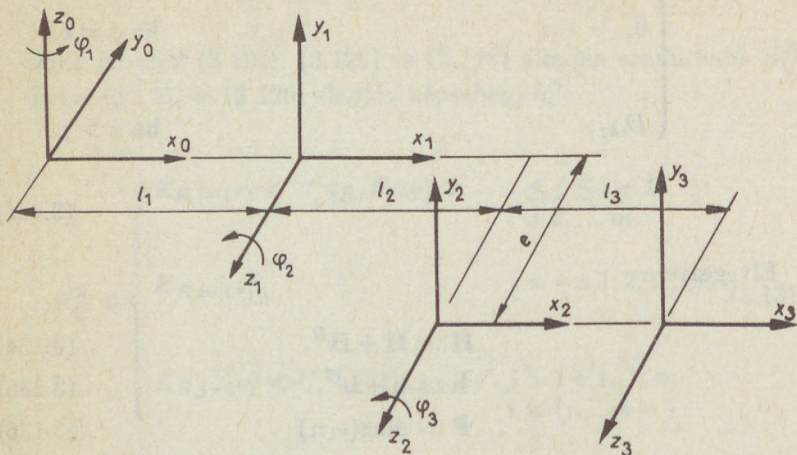
helyettesítést, a szegmensekből és meghajtómotorokból álló robot mozgásegyenletét a következő alakban nyerjük:

$$\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h} = \mathbf{F} = \text{diag}(\nu_i \tau_i). \quad (3.137)$$

- iii) Speciálisan, ha a **hajtás közvetlen** ( ${}^{s-1} \mathbf{t}_R = \mathbf{t}_{s-1}$ ;  $\nu_s = 1$ ;  $\tau_s = F_s$ ), akkor a rotor az  $\overline{\mathbf{s}}$  szegmennel is összevonható, hiszen együtt mozognak, és így egyetlen merev testnek tekinthetők. Ekkor nincs szükség a (3.134)–(3.136) korrekciókra. Az összevonás azért lehetséges, mert  $\varphi_s = q_s$  és  ${}^{s-1} \mathbf{t}_R = \mathbf{t}_{s-1}$  miatt a rotor tömegközéppontja és tehetetlenségi mátrixa a  $K_s$  keretben is helyben marad. Az összevonás a (3.122)–(3.123) egyenletekből formálisan is következik.

### 3.3.Példa: A beavatkozó szerv miatti korrekciók számítása háromszabadságfokú robotkar esetén

A robotkar szegmenseihez rögzített kereteket és a Denavit-Hartenberg-alakot a 3.5.ábra tartalmazza.



$i$	$q_i$	$\vartheta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$\varphi_1$	$\varphi_1$	0	$l_1$	$90^\circ$
2	$\varphi_2$	$\varphi_2$	$e$	$l_2$	$0^\circ$
3	$\varphi_3$	$\varphi_3$	0	$l_3$	$0^\circ$

3.5.ábra  
Háromszabadságfokú robotkar Denavit-Hartenberg-alakja

Feltesszük, hogy az előző pontban részletezett módon az állórész, forgórész és áttétel tömegét és tehetetlenségi nyomatékát a megfelelő szegmensével összevontuk és álló rotor esetén  $\mathbf{H}$  és  $\mathbf{h}$  értékét már kiszámítottuk. Most csak a forgó rotor miatti  $\mathbf{H}^R$  és  $\mathbf{h}^R$  számítását (a korrekciót) részletezzük ki.

## A robotkar geometriája:

$$\mathbf{T}_{0,1} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & l_1 C_1 \\ S_1 & 0 & -C_1 & l_1 S_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{1,2} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.138)$$

## A robotkar sebessége és gyorsulása:

$${}^1\mathbf{t}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^2\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.139)$$

$$\mathbf{\Gamma}_1 = {}^1\mathbf{t}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^1\boldsymbol{\omega}_1 = {}^1\mathbf{t}_0 \dot{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi}_1 = \mathbf{0}, \quad (3.140)$$

$$\mathbf{A}_{1,2}^{-1} \mathbf{\Gamma}_{1,1} = \mathbf{A}_{1,2}^T {}^1\mathbf{t}_0 = \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2 \\ C_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.141)$$

$$\mathbf{\Gamma}_2 = \begin{bmatrix} S_2 & 0 \\ C_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^2\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} S_2 \dot{q}_1 \\ C_2 \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}_2 &= {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{t}_1 \dot{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_2 & C_2 \dot{q}_1 \\ -\dot{q}_2 & 0 & -S_2 \dot{q}_1 \\ -C_2 \dot{q}_1 & S_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{q}_2 = \\ &= \begin{bmatrix} C_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ -S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.142)$$

A korrekciók számítása (3.131) és (3.132a) szerint:

$$H_{11}^R = K_{R,0}\nu_1^2, \quad (3.143)$$

$$H_{12}^R = K_{R,1}\nu_2 < {}^1\mathbf{t}_R, \mathbf{\Gamma}_{11} > = K_{R,1}\nu_2 t_{R,1y}, \quad (3.144)$$

$$H_{13}^R = K_{R,2}\nu_3 < {}^2\mathbf{t}_R, \mathbf{\Gamma}_{21} > = K_{R,2}\nu_3 \{t_{R,2x}S_2 + t_{R,2y}C_2\}, \quad (3.145)$$

$$H_{22}^R = K_{R,1}\nu_2^2, \quad (3.146)$$

$$H_{23}^R = K_{R,2}\nu_3 < {}^2\mathbf{t}_R, \mathbf{\Gamma}_{22} > = K_{R,2}\nu_3 t_{R,2z}, \quad (3.147)$$

$$H_{33}^R = K_{R,2}\nu_3^2, \quad (3.148)$$

$$H_{21}^R = H_{12}^R, \quad H_{31}^R = H_{13}^R, \quad H_{32}^R = H_{23}^R, \quad (3.149)$$

$$h_1^R = -K_{R,1}\nu_2 < {}^1\mathbf{t}_R, {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{\Gamma}_{11} > \dot{q}_2 - \\ - K_{R,2}\nu_3 < {}^2\mathbf{t}_R, {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{\Gamma}_{21} > \dot{q}_3 =$$

$$= -K_{R,2}\nu_3 < {}^2\mathbf{t}_R, \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_2 & C_2\dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 & 0 & -S_2\dot{q}_1 \\ -C_2\dot{q}_1 & S_2\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_2 \\ C_2 \\ 0 \end{bmatrix} > \dot{q}_3 =$$

$$= -K_{R,2}\nu_3 < {}^2\mathbf{t}_R, \begin{bmatrix} -C_2\dot{q}_2 \\ S_2\dot{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix} > \dot{q}_3 =$$

$$= K_{R,2}\nu_3 \{t_{R,2x}C_2 - t_{R,2y}S_2\} \dot{q}_2 \dot{q}_3, \quad (3.150)$$

$$h_2^R = -K_{R,2}\nu_3 < {}^2\mathbf{t}_R, {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{\Gamma}_{22} > \dot{q}_3 + K_{R,1}\nu_2 < {}^1\mathbf{t}_R, \boldsymbol{\Phi}_1 > =$$

$$= -K_{R,2}\nu_3 < {}^2\mathbf{t}_R, \begin{bmatrix} C_2\dot{q}_1 \\ -S_2\dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} > \dot{q}_3 =$$

$$= -K_{R,2}\nu_3 \{t_{R,2x}C_2 - t_{R,2y}S_2\} \dot{q}_1 \dot{q}_3, \quad (3.151)$$

$$h_3^R = K_{R,2}\nu_3 < {}^2\mathbf{t}_R, \boldsymbol{\Phi}_2 > = K_{R,2}\nu_3 \{t_{R,2x}C_2 - t_{R,2y}S_2\} \dot{q}_1 \dot{q}_2,$$

$$(3.152)$$

### 3.6. A ROBOT MODELLJÉNEK ELŐÁLLÍTÁSA SZIMBOLIKUS ALAKBAN

A robot kinematikai és dinamikus modelljének bevonása a szabályozási algoritmusba szükségessé teszi a modellben szereplő mennyiségek (például  $\tau$  vagy  $\mathbf{H}$  és  $\mathbf{h}$ ) számítását minden egyes mintavételi időpontban. A számításukra megismert rekurzív módszerek azonban nagyszámú összeadást és szorzást igényelnek, melyekre a legtöbb architektúrán nem áll rendelkezésre elegendő idő. Másrészt a rekurzív számítások eleve csak sorosan végezhetőek el, ezért kedvezőtlenek párhuzamos feldolgozásra egy sokprocesszoros rendszeren. Kézenfekvő tehát olyan módszer keresése, amely lehetővé teszi  $\tau_i$ ,  $h_i$  és  $\mathbf{H}$   $i$ -edik sorának számítását anélkül, hogy ehhez más részeredményeket meg kellene várni. Biztos, hogy ez lehetséges, ha ezeket a mennyiségeket szimbolikus alakban, azaz képlet formájában elő tudjuk állítani. Ez megfelel annak, mintha a rekurzív összefüggéseinket kézzel képletszerű (nem numerikus) alakban végigszámolnánk és a keresett részeredményeket ( $\tau_i$ ,  $h_i$ ,  $H_{ij}$ ) szimbolikus alakban gigyűjtenénk. Sajnos azonban ez a kézi számítás egy reális hatszabadságfokú robot esetén rendkívül bonyolult, és valószínű, hogy több hibát is elkövetnénk, melyet nehéz lenne felismerni. Ezért számítógéppel célszerű elvégezni a feladatot.

A szimbolikus számítások elvégzésére nagyobb számítógépeken magasszintű nyelvek (MAXIMA, REDUCE) állnak rendelkezésre, amelyeken a képletek alakjában történő számítások elvégezhetőek. PC-környezetben jelenleg ezek a szolgáltatások nem állnak rendelkezésre. Kézenfekvőnek látszik tehát erre a célra egy listakezelő célprogram kidolgozása, amely PC-környezetben a rendelkezésre álló nem túlságosan nagy memóriaterületen (kb. 640 kbyte) és elviselhető futási idők mellett offline el tudja végezni a szükséges számításokat.

Célszerűnek látszik, ha a listák a robotváltozókon ( $q_i$ ,  $S_i$ ,  $C_i$ ,  $\dot{q}_i$ ,  $\ddot{q}_i$ ) kívül szimbolikusán tudják kezelni a geometriai ( $d_i$ ,  $a_i$ ,  $\alpha_i$  vagy  $\vartheta_i$ ,  $a_i$ ,  $\alpha_i$  nem változó Denavit–Hartenberg) paramétereket és az inerciaparamétereket ( $m_i$  tömeg,  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  tömegközéppont és  $K_{ix}$ ,  $K_{iy}$ ,  $K_{iz}$ ,  $K_{ixy}$ ,  $K_{ixz}$ ,  $K_{iyz}$  tehetetlenségi nyomaték), ezen belül is speciálisan kezelve a paraméterek  $0, 0^\circ, \pm 90^\circ, \pm 180^\circ$  értékét. A paraméterek szimbolikus kezelése később hasznos lehet az önhangoló adaptív irányítási algorit-

musoknál. A listakezelő célprogram a csuklóképlet, a triviális és nem-triviális paraméterek megadásával indul és kimenete egy szokásos magasszintű nyelven (PASCAL, C vagy FORTRAN) megírt inicializáló és ciklikusan futtatható szubrutin. Az inicializáló szubrutin a paramétereket számszerű értékkel helyettesíti, és belőlük a további hívásig nem változó munkaváltozókat alakít ki. A ciklikusan futtatható szubrutinok minden híváskor az inicializált munkaváltozók felhasználásával képzik az irányításhoz szükséges értékeket (például  $\tau_i$  vagy  $h_i$  és  $H_{ij}$  értékét). A ciklikusan futtatható szubrutinok számára is automatikusan képzik a listakezelő célprogram a leggyorsabb kiértékeléshez szükséges munkaváltozókat (közbenső eredményeket). A ciklikusan futtatható szubrutinok száma függ az architektúrától. A csuklók számával megegyező számú processzor esetén minden szubrutin külön processzoron futtat, és  $\tau_i$  vagy  $h_i$  és  $H_{ij}$  értékét számítja. A számítások részlépésekre bontását (a munkaváltozók megválasztását) minimális futási időre törekedve célszerű elvégezni.

A listakezelő célprogram magja egy szubrutinkészlet, amely kétszintű (változó és paraméter) listákkal összeadást, kivonást, szorzást és parciális differenciálást tud végezni. Ezek fölé épül a vektorműveletek (összeadás, kivonás, nyújtás, skalárszorzás, vektorszorzás), a mátrixműveletek (transzponálás, homogén transzformációk összeadása és invertálása) és a mátrixnak vektorral való szorzásának elvégzése listákon, ahol a vektorok és mátrixok elemei skalárértékű listákra mutatnak. Minden művelet után megtörténik a listák egyszerűsítése és a trigonometriai azonosságok figyelembevétele. Ezekre épülve már viszonylag egyszerűen és az elméleti eredményeknek közvetlenül megfeleltethetően képezhető a robot geometriai, kinematikai és dinamikai modellje.

A szimbolikus modell bonyolult listakezelése robottípusonként egyszer elvégzendő bonyolult off-line számítást jelent, amely után már csak az összevont és egyszerűsített képletekbe foglalt elengedhetetlen számításokat kell valós időben elvégezni. A szimbolikus modellt generáló listakezelő célprogram egy változata [37] elkészült az  $\Omega$ ,  $\Theta$ ,  $\Gamma$ ,  $\Phi$ ,  $\mathbf{H}$ , és  $\mathbf{h}$  számítására kifejlesztett és korábban ismertetett rekurzív algoritmus alapján.

## 4. PÁLYATERVEZÉS

A pályatervezés célja az előírt sarokpontok összekötése térbeli görbével (tipikusan egyenessel) a változók (csuklókoordináták, Descartes-koordináták) terében, és a görbe mentén az időparaméter elosztása. Nem foglalkozunk optimális pályatervezéssel, mivel ennek alapja a robot dinamikus modelljére felírt optimumfeladat (tipikusan a motor-nyomatékokra előírt korlátozásokkal), amelynek megoldása rendkívül időigényes, és csak speciális ismétlődő pályáknál kifizetődő. A valós idejű realizáció és a szenzorcsatolt irányítás igényeit kielégítő egyszerűbb megoldásokra törekszünk. Célunk olyan algoritmusok megadása, amelyek mozgó objektummal (például szállítószalagon lévő tárggyal mozgás közben) műveleteket végző robot esetén is alkalmazhatók.

Mivel intelligens robotirányító algoritmusok nemcsak a pályát, hanem a pálya menti sebességeket, gyorsulásokat, szögsebességeket és szöggyorsulásokat is igényelhetik, ezért ezek számításával is foglalkozunk.

### 4.1. A PÁLYATERVEZÉSI FELADAT TIPIKUS SÉMÁJA

Tekintsük a 4.1. ábra szerinti csap-furat problémát mozgó szállítószalag (conveyor) esetén. A feladat a csap (object) betolása a furatba (hole), melyet több lépésben szokás megoldani:

1. a robot megközelíti a tárgyat (APPROACH),
2. a robot eléri a tárgyat (MOVE),

3. a robot megfogja a tárgyat (CLOSE),
4. a robot eltávolodik a tárggyal (DEPART),
5. a robot a tárggyal megközelíti a furatot (APPROACH),
6. a robot a tárgyat betolja a furatba (MOVE),
7. a robot elengedi a furatban lévő tárgyat (OPEN),
8. a robot eltávolodik a furattól (DEPART).

A 4.1. ábra az 5. lépést illusztrálja. Ez a lépés sémáját tekintve a **pályatervezés** szempontjából a legáltalánosabb lépés a felsoroltak közül (a 6. lépés ennek speciális esete: a furat alját kell megközelíteni). Mindazonáltal **irányítás** szempontjából a 6. lépés a legkomplikáltabb, mivel a tárgy és a környezete a pontatlanságok (például tranziens hibák) következtében kontaktusba kerül, és indokolt a hibrid pozíció- és erőirányítás. A mozgás felbontása megközelítésre (APPROACH) és elérésre (MOVE) azért célszerű, mert a megközelítés szabad térben való mozgást (gross motion), míg az elérés a közelben lévő akadály miatt finom mozgást (fine motion) igényel.

Mozgó conveyor esetén a tárgynak a furathoz képesti relatív helyzetét (pozícióját és orientációját) írjuk elő. A feladat ennek betartása tetszőleges conveyormozgás esetén a robotcsuklók mozgatása révén. A robot gráfjából következik:

$$\begin{aligned} T_{0,m} = & T_{B,0}^{-1} * T_{B,CONV} * T_{CONV,BLOCK} * T_{BLOCK,HOLE} * \\ & * T_{HOLE,OBJ} * T_{E,OBJ}^{-1} * T_{m,E}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

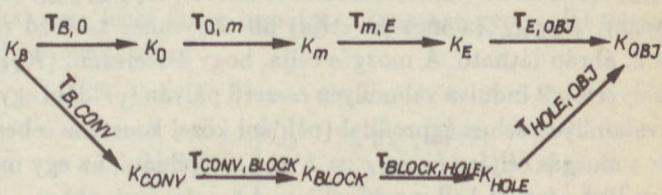
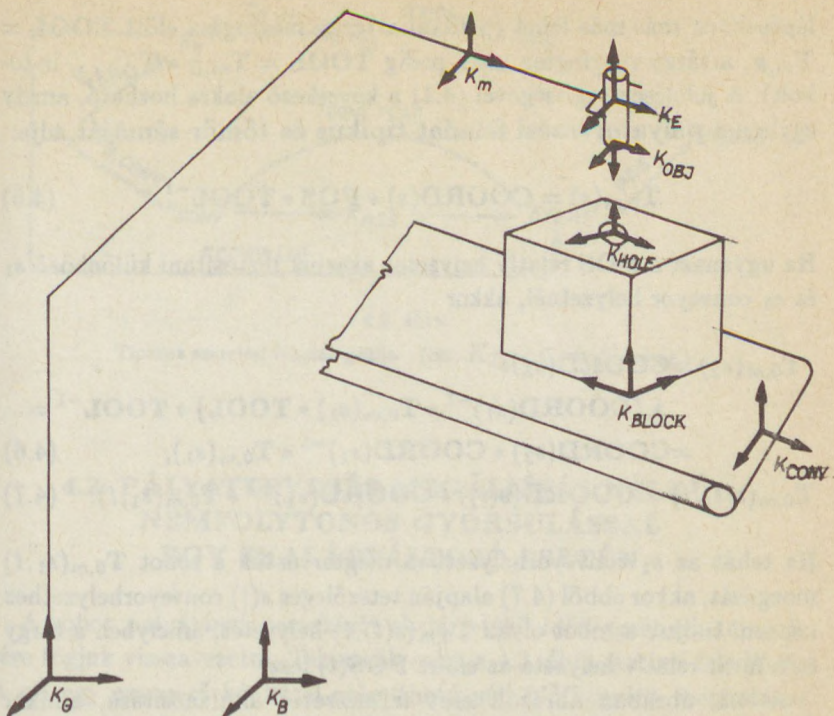
Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} \text{COORD}(s) = & T_{E,0}^{-1} * T_{B,CONV}(s) * T_{CONV,BLOCK} * \\ & * T_{BLOCK,HOLE}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\text{POS} = T_{HOLE,OBJ}, \quad (4.3)$$

$$\text{TOOL} = T_{m,E} * T_{E,OBJ} = T_{m,E} * T_{OBJ,E}^{-1}. \quad (4.4)$$

Itt az  $s$  útparaméter a conveyorhoz rögzített koordináta-rendszer mozgását írja le. A szállítószalag hajtásának érzékelő jeleiből számítható



4.1. ábra

Csap-furat probléma mozgó szállítószalag esetén

az  $s(t)$  elmozdulás.  $K_{CONV}$  a bázishoz képest egyenes vonalú mozgást végez, de sebessége változhat (meg is állhat). A mozgás tervezésekor magasabb szinten a **POS** transzformációt (a tárgyának a furathoz képesti relatív helyzetét) írják elő. A **TOOL** transzformáció a különböző

lépésekben más-más lehet (például a tárgy megfogása előtt  $\mathbf{TOOL} = \mathbf{T}_{m,E}$ , a tárgy megfogása után pedig  $\mathbf{TOOL} = \mathbf{T}_{m,E} * \mathbf{T}_{OBJ,E}^{-1}$  indokolt). A jelölések segítségével (4.1) a következő alakra hozható, amely egyben a pályatervezési feladat tipikus és tömör sémáját adja:

$$\mathbf{T}_{0,m}(s) = \mathbf{COORD}(s) * \mathbf{POS} * \mathbf{TOOL}^{-1}. \quad (4.5)$$

Ha ugyanazt a  $\mathbf{POS}$  relatív helyzetet akarjuk biztosítani különböző  $s_1$  és  $s_2$  conveyor helyzetnél, akkor

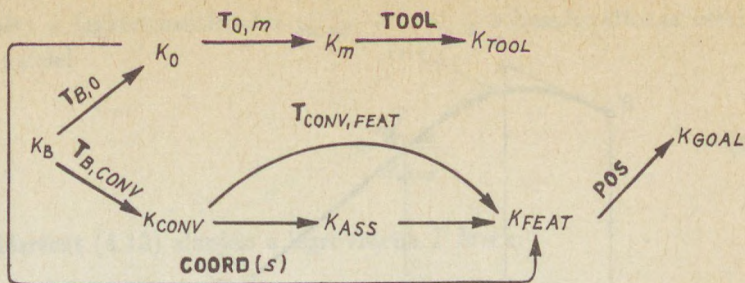
$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{0,m}(s_2) &= \mathbf{COORD}(s_2) * \\ &* \{ \mathbf{COORD}(s_1)^{-1} * \mathbf{T}_{0,m}(s_1) * \mathbf{TOOL} \} * \mathbf{TOOL}^{-1} = \\ &= \mathbf{COORD}(s_2) * \mathbf{COORD}(s_1)^{-1} * \mathbf{T}_{0,m}(s_1), \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{T}_{0,m}(s(t), t) = \mathbf{COORD}(s(t)) * \mathbf{COORD}(s_1)^{-1} * \mathbf{T}_{0,m}(s_1, t). \quad (4.7)$$

Ha tehát az  $s_1$  conveyorhelyzetben megterveztük a robot  $\mathbf{T}_{0,m}(s_1, t)$  mozgását, akkor ebből (4.7) alapján tetszőleges  $s(t)$  conveyorhelyzethez képezni tudjuk a robot olyan  $\mathbf{T}_{0,m}(s(t), t)$  helyzetét, amelyben a tárgy és a furat relatív helyzete az előírt  $\mathbf{POS}(t)$  lesz.

A 4.1. ábrában ábrázolt eset természetes általánosítása, amikor  $K_{BLOCK}$ ,  $K_{HOLE}$ ,  $K_{OBJ}$  helyett rendre valamilyen, a feladathoz illő  $K_{ASSEMBLY}$  (a szerelés vonatkoztatási rendszere),  $K_{FEATURE}$  (a szerelés lényege),  $K_{GOAL}$  (a mozgás célja) áll. Az ehhez tartozó robot gráfja a 4.2. ábrán látható. A mozgás célja, hogy a szerszám ( $K_{TOOL}$ ) aktuális helyzetéből indulva valamilyen ésszerű pályán (például egyenes mentén) valamilyen sebességprofilal (például közel konstans sebességgel) elérje a mozgás célját ( $K_{TOOL} := K_{GOAL}$ ). Például, ha egy mozgó conveyoron lévő tárgyat kell megközelíteni a megfogóval, akkor

$$\begin{aligned} K_{TOOL} &= K_E, \\ K_{ASS} &= K_{CONV} \quad (\text{itt felesleges}), \\ K_{FEAT} &= K_{OBJ}, \\ K_{GOAL} &\text{ a megközelítendő helyzet,} \\ \text{cél: } K_E &:= K_{GOAL}. \end{aligned} \quad (4.8)$$



4.2. ábra

Tipikus szerelési feladat gráfja (cél:  $K_{TOOL} := K_{GOAL}$ )

## 4.2. PÁLYATERVEZÉS MEGÁLLÍTÁS NÉLKÜL, NEMFOLYTONOS GYORSULÁSSAL EGY SKALÁRVÁLTOZÓ ESETÉN

A robot pályájának tervezését skalárértékű időfüggvények tervezésére fogjuk visszavezetni. Tekintsük ezért a 4.3. ábra szerinti feladatot. A cél egy egyszerű képlettel számítható  $y(t)$  időfüggvény meghatározása, amely a  $B' \rightarrow B \rightarrow C$  törött vonalat jól közelíti véges gyorsulással mellett. Az  $y(t)$  görbe szükségképpen el fogja kerülni a  $B$  pontot, mivel  $y''(t)$  nem lehet Dirac-impulzus. Konstans gyorsulást feltételezve a  $[-\tau, \tau]$  intervallumban

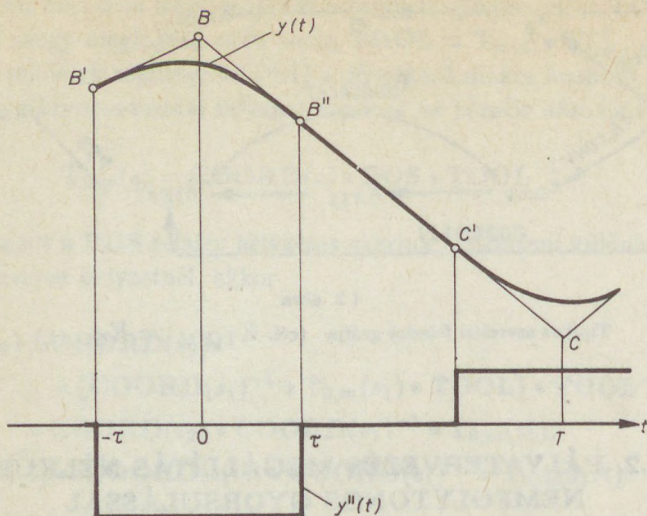
$$y''(t) = \begin{cases} a_0, & \text{ha } t \in [-\tau, \tau], \\ 0, & \text{ha } t \in [\tau, T - \tau], \end{cases} \quad (4.9)$$

ahonnan  $t \in [-\tau, \tau]$  esetén

$$y'(t) = a_0 t + a_1, \quad (4.10)$$

$$y(t) = \frac{a_0}{2} t^2 + a_1 t + a_2 \quad (4.11)$$

következik.



4.3. ábra

Pályatervezés megállítás nélkül, nemfolytonos gyorsulással

Megköveteljük, hogy

$$y'(-\tau) = v_{BB'} = \frac{B - B'}{\tau}, \quad y(-\tau) = B' = B - \tau v_{BB'}, \quad (4.12)$$

$$y'(\tau) = v_{CB} = \frac{C - B}{T}, \quad y(\tau) = B'' = B + \tau v_{CB} \quad (4.13)$$

teljesüljön, amelynek megoldása jól ellenőrizhető formában:

$$y(t) = -\frac{(\tau - t)^2}{4\tau} v_{BB'} + \frac{(\tau + t)^2}{4\tau} v_{CB} + B. \quad (4.14)$$

Mivel

$$a_0 = \frac{v_{CB} - v_{BB'}}{2\tau}, \quad (4.15)$$

$$|a_0| = \frac{|v_{CB} - v_{BB'}|}{2\tau} \leq y''_{max}, \quad (4.16)$$

$$\tau \geq \frac{|v_{CB} - v_{BB'}|}{2y''_{max}}, \quad (4.17)$$

ezért a legkedvezőtlenebb  $y'_{max} \rightarrow -y'_{max}$  sebességváltozás esetén is megfelel

$$\tau = \frac{y'_{max}}{y''_{max}}. \quad (4.18)$$

Másrészt (4.13) alapján a legrövidebb  $T$  érték:

$$T = \frac{|C - B|}{y'_{max}} \geq 2\tau. \quad (4.19)$$

A  $t = 0$  pillanatban az ideális  $B$  értéktől való eltérés:

$$y(0) - B = \frac{v_{CB} - v_{BB'}}{4} \tau. \quad (4.20)$$

Ha  $t \in [\tau, T - \tau]$ , akkor a  $B \rightarrow C$  egyenesen haladva

$$y(t) = B + tv_{CB}. \quad (4.21)$$

Azért, hogy  $y(t)$  a  $B$  ponton hiba nélkül áthaladjon, elegendő a  $B$  pontot megduplázni:

$$\dots, A, B, C = B, \dots \quad (4.22)$$

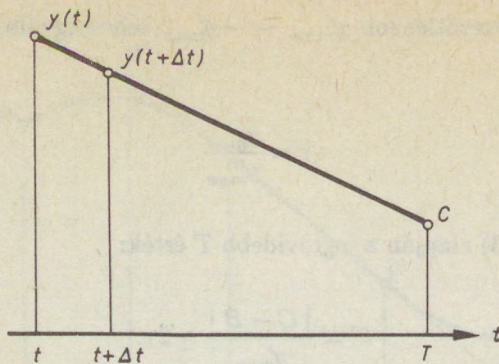
mert ekkor

$$y(\tau) = B'' = C' = B. \quad (4.23)$$

Tekintsük most a 4.4. ábra szerinti **primitív stratégiát**. Legyen adott  $y$  értéke a  $t$  időpontban. Keressük  $y$  értékét a  $t + \Delta t$  időpontban, amely az  $y(t)$  és  $y(T) = C$  egyenes mentén helyezkedik el.

A megoldás  $t + \Delta t < T$  esetén

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \frac{C - y(t)}{T - t} \Delta t, \quad (4.24)$$



4.4. ábra

Egy primitív pályatervezési stratégia

amely a következő alakban is felírható:

$$y(t + \Delta t) = C - \frac{T - (t + \Delta t)}{T - t}(C - y(t)). \quad (4.25)$$

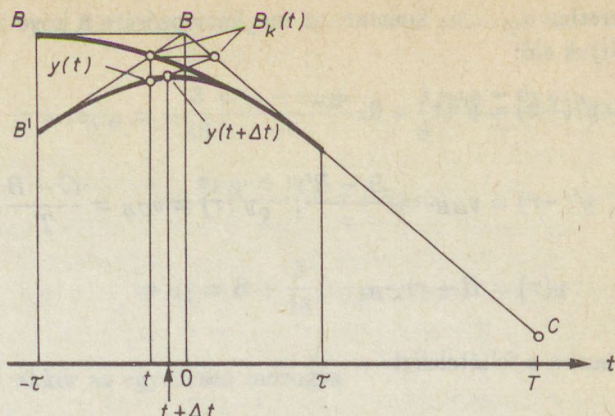
Ha  $t + \Delta t > T$  és  $C$ -ben kell maradni, akkor nyilvánvalóan megfelel  $y(t + \Delta t) = C$ . Az előző két stratégia ötvözhető a 4.5. ábra szerinti új módszerrel, melyet Taylor mozgó conveyor vagy más üldözési (pursuit) probléma esetén javasol ([4], pp.152-164). A módszer lényege, hogy az első módszerrel (konstans gyorsulás  $-\tau$  és  $\tau$  között) mozgatja a  $B_k(t)$  pontot  $B' := B$ ,  $B$  és  $C$  között, és a primitív módszerrel számítja  $y(t + \Delta t)$  értékét az előző  $y(t)$  és  $C := B_k(t)$  között.

A (4.14), (4.21) és (4.25) egyenlet alapján

$$B_k(t) = \begin{cases} B + \frac{(\tau + t)^2}{4\tau} v_{CB}, & \text{ha } t \in [-\tau, \tau], \\ B + tv_{CB}, & \text{ha } t > \tau, \end{cases} \quad (4.26)$$

$$y(t + \Delta t) = B_k(t) - \frac{T - (t + \Delta t)}{T - t}(C - y(t)). \quad (4.27)$$

Üldözési feladatok esetén a (4.26), (4.27) egyenleteket változó  $B$  és  $C$  esetén implementálhatjuk.



4.5. ábra

Összetett pályatervezési stratégia

### 4.3. PÁLYATERVEZÉS MEGÁLLÍTÁS NÉLKÜL, FOLYTONOS GYORSULÁSSAL EGY SKALÁRVÁLTOZÓ ESETÉN

Ha megfelelően sima pályát kívánunk tervezni, akkor előtérbe kerül az az eset, amikor a sarokpontok között lényegében konstans sebességgel (nulla gyorsulással) akarunk haladni, de a csatlakozó időintervallumok határán az eltérő sebességek miatti gyorsítást vagy lassítást sima (ugrás nélküli) függvénynek választjuk. Mivel a gyorsulás nulláról indul és nullához tart, ezért legalább másodfokú polinomnak kell választani a  $[-\tau, \tau]$  intervallumon (a 4.3. ábrában  $y''(t)$  parabolára módosul).

$$y''(t) = a_0 t^2 + a_1 t + a_2, \quad (4.28)$$

$$y'(t) = \frac{a_0}{3} t^3 + \frac{a_1}{2} t^2 + a_2 t + a_3, \quad (4.29)$$

$$y(t) = \frac{a_0}{12} t^4 + \frac{a_1}{6} t^3 + \frac{a_2}{2} t^2 + a_3 t + a_4. \quad (4.30)$$

Az ismeretlen  $a_0, \dots, a_4$  konstansok meghatározására a következő feltételeket írjuk elő:

$$y''(-\tau) = y''(\tau) = 0, \quad (4.31)$$

$$y'(-\tau) = v_{BB'} = \frac{B - B'}{\tau}, \quad y'(\tau) = v_{CB} = \frac{C - B}{T}, \quad (4.32)$$

$$y(\tau) = B + \tau v_{CB}. \quad (4.33)$$

Vegyük sorba a feltételeket.

1.  $y''(-\tau) = y''(\tau) = 0 :$

$$\left. \begin{aligned} a_0\tau^2 - a_1\tau + a_2 &= 0 \\ a_0\tau^2 + a_1\tau + a_2 &= 0 \end{aligned} \right\} a_1 = 0; \quad a_2 = -a_0\tau^2, \quad (4.34)$$

2.  $y'(-\tau) = v_{BB'}, \quad y'(\tau) = v_{CB} :$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{a_0}{3}\tau^3 - a_2\tau + a_3 &= v_{BB'} \\ \frac{a_0}{3}\tau^3 + a_2\tau + a_3 &= v_{CB} \end{aligned} \right\} a_3 = \frac{v_{BB'} + v_{CB}}{2}, \quad (4.35)$$

$$\frac{2}{3}a_0\tau^3 + \frac{v_{BB'} + v_{CB}}{2} = v_{BB'} \Rightarrow a_0 = -\frac{3}{4} \frac{v_{CB} - v_{BB'}}{\tau^3}, \quad (4.36)$$

$$a_2 = \frac{3}{4} \frac{v_{CB} - v_{BB'}}{\tau}, \quad (4.37)$$

$$3. \quad y(\tau) = B + \tau v_{CB} :$$

$$\begin{aligned} B + \tau v_{CB} &= -\frac{3}{48} \frac{v_{CB} - v_{BB'}}{\tau^3} \tau^4 + \frac{3}{8} \frac{v_{CB} - v_{BB'}}{\tau} \tau^2 + \\ &+ \frac{v_{BB'} + v_{CB}}{2} \tau + a_4 \Rightarrow \\ \Rightarrow a_4 &= B + \frac{3}{16} (v_{CB} - v_{BB'}) \tau. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Ha  $t > \tau$ , akkor az egyenesen mozogva

$$\begin{aligned} y''(t) &= 0, \\ y'(t) &= v_{CB}, \\ y(t) &= B + t v_{CB}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Mivel

$$y''_{\max} = |y''(0)| = |a_2| = \frac{3}{4} \frac{|v_{CB} - v_{BB'}|}{\tau}, \quad (4.40)$$

ezért

$$\tau \geq \frac{3 y'_{\max}}{2 y''_{\max}}, \quad (4.41)$$

$$T \geq 2\tau, \quad (4.42)$$

és az eltérés a törött vonaltól:

$$B - y(0) = B - a_4 = -\frac{3}{16} (v_{CB} - v_{BB'}) \tau. \quad (4.43)$$

#### 4.4. PÁLYATERVEZÉS CSUKLÓKOORDINÁTÁKBAN ([1], pp.137-139)

Csuklókoordinátákban történő pályatervezéskor a pálya sarokpontjai vagy eleve csuklókoordinátákban adottak ( $\dots, \mathbf{q}_A, \mathbf{q}_B, \mathbf{q}_C, \mathbf{q}_D, \dots$ ), vagy pedig Descartes-koordinátákban ( $\dots, \mathbf{T}_A, \mathbf{T}_B, \mathbf{T}_C, \mathbf{T}_D, \dots$ ), de a pályatervezés megkezdése előtt átszámítjuk ezeket csuklókoordinátákká az inverz geometriai feladat megoldása révén. Jelölje "solve" az inverz geometriai feladat megoldását, akkor például  $\mathbf{T}_A := \mathbf{T}_{0,m}^A$  jelöléssel  $\mathbf{q}_A := \text{solve}(\mathbf{T}_A)$ . Ha már adottak a pálya sarokpontjai csuklókoordinátákban, akkor minden egyes  $q_i$  koordináta számára az előző pontban ismertetett módszerek valamelyikével megtervezhető a  $q_i(t)$  pálya a sarokpontokhoz. Az így keletkező  $q_i(t)$  pálya egy törött vonalat közelít meg, tehát közel lineáris az idő függvényében, ezért  $\mathbf{q}(t)$  is közel lineáris az idő függvényében. Mivel azonban  $\mathbf{T}_{0,m}(\mathbf{q})$  nemlineáris módon függ a csuklókoordinátától, így az argumentum lineáris változásából nem következik a függvényérték lineáris változása. Ezért  $\mathbf{T}_{0,m}(\mathbf{q}(t))$  nemlineárisan függ az időtől, vagyis a pozíció a sarokpontok között nem egyenes mentén változik, hanem attól kisebb-nagyobb mértékben eltér. Következésképpen a csuklókoordinátákban történő pályatervezést csak akadályoktól távol, a robot durva mozgásánál (gross motion) célszerű alkalmazni.

##### 4.4.1. Pályatervezés álló conveyor esetén

Álló conveyor esetén a pályatervezés viszonylag egyszerű. A pályát a  $\mathbf{q}_B$  pont elérésekor tervezzük meg relatív időben a  $[-\tau, T]$  intervallumon, és alkalmazzuk  $\Delta t$  időközönként a  $-\tau \leq t + \Delta t \leq T - \tau$  értékek mellett. A pályatervezést minden  $q_i$  skalárváltozóban a 4.2. pontban (nemfolytonos gyorsulás) vagy 4.3. pontban (folytonos gyorsulás) ismertetett módszerek valamelyikével végezhetjük el. A  $\tau$  értéket univerzálisra választjuk (pesszimista választás az iterációk elkerülése érdekében), például nemfolytonos csuklókoordináta-gyorsulás esetén:

$$\tau \geq \frac{3}{2} \max \left\{ \frac{q'_i \max}{q''_i \max} \right\}. \quad (4.44)$$

A mozgást **koordinátnak** választjuk, vagyis csak azt a csuklót mozgatjuk maximális sebességgel, amelyet a legtávolabbi kellene mozgatni ahhoz, hogy a  $q_{B_i} \rightarrow q_{C_i}$  csuklókoordináta-változás létrejöjjön. A pályát mindig az új  $B'$ ,  $B$ ,  $C$  szakaszra tervezzük meg (4.6. ábra).

### Pályatervezési algoritmus álló conveyor esetén:

1. Ha  $t = T - \tau$ , akkor végezzük el a következő számításokat:

$$\mathbf{q}_{B'} := \mathbf{q}(T - \tau),$$

$$\mathbf{q}_B := \mathbf{q}_C,$$

$$\mathbf{q}_C := \text{solve}\{\text{COORD} * \text{POS} * \text{TOOL}^{-1}\}_D,$$

$$T_i := \frac{|q_{C_i} - q_{B_i}|}{q'_i \max} \quad \text{minden } i \text{ esetén,}$$

$$T := \max\{\max_i\{T_i\}, 2\tau\},$$

$$\mathbf{v}_{BB'} := \frac{\mathbf{q}_B - \mathbf{q}_{B'}}{\tau},$$

$$\mathbf{v}_{CB} := \frac{\mathbf{q}_C - \mathbf{q}_B}{T}.$$

Tervezzük pályát a 4.2. vagy 4.3. pont módszereivel. Például folytonos gyorsulás esetén határozzuk meg az  $\mathbf{a}_0$ ,  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$ ,  $\mathbf{a}_4$  konstansokat és a

$$\mathbf{P}(t) = \begin{cases} \mathbf{P}_4(t), & \text{ha } -\tau \leq t \leq \tau \\ \mathbf{q}_B + t\mathbf{v}_{CB}, & \text{ha } t > \tau \end{cases}$$

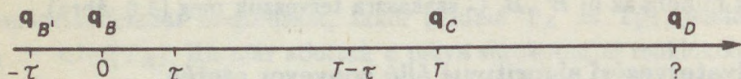
polinomot. Állítsuk be a  $t := -\tau$  kezdőértéket.

2.  $\mathbf{q}(t) := \mathbf{P}(t)$ .

3. Ha  $t = T - \tau$ , akkor ugrás 1-re. Különben

$$t := \begin{cases} t + \Delta, & \text{ha } t + \Delta \leq T - \tau \\ T - \tau, & \text{ha } t + \Delta > T - \tau \end{cases}$$

és ugrás 2-re.



4.6. ábra

A pályatervezési feladat sémája álló conveyor esetén csuklókoordinátákban

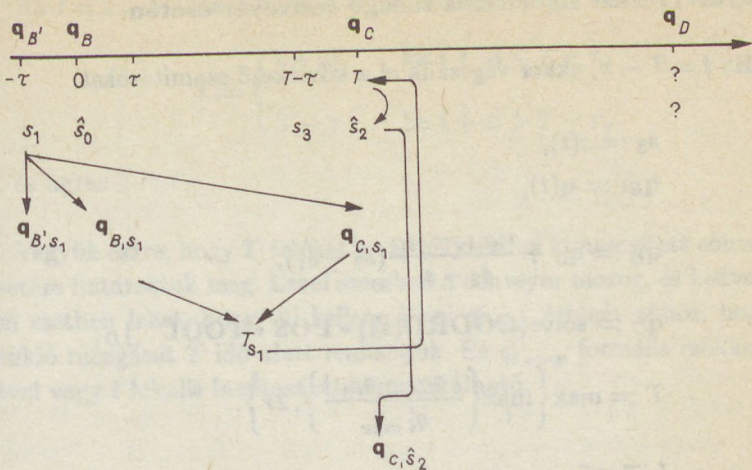
A pályát egy magasabb irányítási hierarchiaszinten megtervezve a  $q_{ia}(t) := q_i(t)$  értékeket (lásd 2 pont az algoritmusban) az alacsonyabb hierarchiaszinten lévő, például decentralizált szervohajtások alapjel bemeneteire kell juttatni a hardware által kínált lehetőségek (csatorna vagy memória műveletek) révén.

#### 4.4.2. Pályatervezés mozgó conveyor esetén

Mozgó conveyor esetén problémát okoz, hogy nem tudjuk előre megmondani, milyen helyzetben lesz a conveyor, amikor az új  $D$  pontot elfogja érni. Ezért mérni kell a conveyor által megtett utat, és ebből **előre becsülni kell** valamilyen egyszerű stratégia (például lineáris extrapoláció) révén a conveyor jövőbeni mozgását. Másrészt, ha a továbbiakban a conveyor mozgása módosul (gyorsul vagy lassul, esetleg megáll), akkor az alapjelet ennek arányában módosítani kell. Legyen ezért

- a conveyor mozgás **mért** értéke:  $s(t)$ ,
- a conveyor mozgás **becsült** értéke:  $\hat{s}(t)$ .

A pályát most is  $B'$ ,  $B$ ,  $C$  szakaszra tervezzük. A módszer Paultól származik ([1], pp.137-139), és elve a 4.7. ábrán látható.



4.7. ábra

A pályatervezési feladat sémája mozgó conveyor esetén csuklókoordinátákban

A  $-\tau$  pillanatban gondolatban megállítjuk a conveyort ( $s_1$ ) és ehhez meghatározzuk  $B'_{s_1}$ ,  $B_{s_1}$ ,  $C_{s_1}$  és  $T_{s_1}$  értékét. A conveyormozgás extrapolálásával meghatározzuk  $\hat{s}_0 = \hat{s}(0)$  és  $\hat{s}_2 := \hat{s}(T_{s_1})$  értékét, valamint az  $\hat{s}_2$  conveyorhelyezethez tartozó  $C_{\hat{s}_2}$  értéket is. A  $B'_{s_1}$ ,  $B_{s_1}$ ,  $C_{s_1}$  értékhez lényegében megkonstruálhatnánk a  $\mathbf{P}(t)$  polinomot, melyet minden kiértékelésnél lineáris extrapolációt alkalmazva korrigálhatnánk az aktuális conveyorhelyzetnek megfelelően a

$$\mathbf{q}(t) := \mathbf{P}(t) + \frac{\mathbf{q}_{C, \hat{s}_2} - \mathbf{q}_{C, s_1}}{\hat{s}_2 - s_1} \{s(t) - s_1\} \quad (4.45)$$

képlet alapján. Ekkor azonban a  $B'$  pontban a csuklókoordináta-sebesség a jobb oldalon álló második tag miatt ugrásszerűen megváltozna. Ennek elkerülése érdekében módosítjuk  $\mathbf{P}(t)$  tervezésekor a  $\mathbf{q}_B$  értéket. Ez várhatóan nem fog problémát okozni, hiszen a  $\mathbf{q}_B$  ponton úgysem haladt át a pálya precízen.

## Pályatervezési algoritmus mozgó conveyor esetén:

1. Ha  $t = T - \tau$ , akkor végezzük el a következő számításokat:

$$s_3 := s(t),$$

$$\mathbf{q}_{B'} := \mathbf{q}(t),$$

$$\mathbf{q}_B := \mathbf{q}_C + \frac{\mathbf{q}_{C, \hat{s}_2} - \mathbf{q}_C}{\hat{s}_2 - s_1} (s_3 - s_1),$$

$$\mathbf{q}_C := \text{solve}\{\text{COORD}(s_3) * \text{POS} * \text{TOOL}^{-1}\}_D,$$

$$T := \max\left\{\max_i\left\{\frac{|q_{Ci} - q_{Bi}|}{q'_{i \max}}\right\}, 2\tau\right\},$$

$$t := -\tau,$$

$$s_1 := s_3,$$

$$\hat{s}_0 := \hat{s}(0),$$

$$\hat{s}_2 := \hat{s}(T),$$

$$\mathbf{q}_{C, \hat{s}_2} := \text{solve}\{\text{COORD}(\hat{s}_2) * \text{POS} * \text{TOOL}^{-1}\}_D,$$

$$\mathbf{q}_B := \mathbf{q}_B - \frac{\mathbf{q}_{C, \hat{s}_2} - \mathbf{q}_C}{\hat{s}_2 - s_1} (\hat{s}_0 - s_1),$$

$$\mathbf{v}_{BB'} := \frac{\mathbf{q}_B - \mathbf{q}_{B'}}{\tau},$$

$$\mathbf{v}_{CB} := \frac{\mathbf{q}_C - \mathbf{q}_B}{T}.$$

Tervezzünk pályát a 4.2. vagy 4.3. pont módszereivel. Például folytonos gyorsulás esetén határozzuk meg az  $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_4$  konstansokat és a

$$\mathbf{P}(t) = \begin{cases} \mathbf{P}_4(t), & \text{ha } -\tau \leq t \leq \tau, \\ \mathbf{q}_B + t\mathbf{v}_{CB}, & \text{ha } t > \tau \end{cases}$$

polinomot.

$$2. \mathbf{q}(t) := \mathbf{P}(t) + \frac{\mathbf{q}_{C, \hat{s}_2} - \mathbf{q}_C}{\hat{s}_2 - s_1} \{s(t) - s_1\}.$$

3. Ha  $t = T - \tau$ , akkor ugrás 1-re. Különben

$$t := \begin{cases} t + \Delta, & \text{ha } t + \Delta \leq T - \tau, \\ T - \tau, & \text{ha } t + \Delta > T - \tau, \end{cases}$$

és ugrás 2-re.

Vegyük észre, hogy  $T$  értékét az  $s_3$  helyzetben kimerevített conveyor esetére határoztuk meg. Ezzel szemben a conveyor mozog, és kedvezőtlen esetben lehet, hogy túl kellene lépni  $q'_i \max$  értékét ahhoz, hogy a csukló mozgását  $T$  idő alatt realizáljuk. Ez  $q'_i \max$  formális csökkentésével vagy  $t$  lokális lassításával kompenzálható.

#### 4.5. PÁLYATERVEZÉS DESCARTES-KOORDINÁTÁKBAN

Mivel a csuklókoordinátában történő pályatervezés nem tudja garantálni, hogy két sarokpont között a pálya egyenes legyen (vagy más előírható görbe), ezért kritikus esetben a pályát Descartes-koordinátákban célszerű megtervezni. A 4.1. pont szerint a pálya sarokpontjait

$$T_{0,m} = \text{COORD}(s) * \text{POS} * \text{TOOL}^{-1} \quad (4.46)$$

alakban célszerű megadni. Itt **POS** sarokpontról sarokpontra változik, míg **TOOL** szerszámcseré esetén vagy egy tárgy megfogása után (az alkalmazó felfogásmódjától függően) módosul. Hasonlóan **TOOL**-hoz, álló conveyor esetén **COORD** a feladat elrendezésétől függően változhat, de akár több sarokponton át is azonos maradhat. Mozgó conveyor esetén **COORD**( $s$ ) a megtett úttól függően folyamatosan változik. Célszerű ezért a sarokpontokat  $T_{B,E}$  helyett a **COORD**, **POS**, **TOOL** komponensekben definiálni, amit a robotprogramozási nyelvnek is tárogatnia kell.

A pályát a korábbiakhoz hasonlóan szakaszokra bonthatjuk. A pályatervezés a  $B' \rightarrow B \rightarrow C$  szakaszok megtervezéséből építhető fel. Fügyelembe kell azonban venni, hogy **COORD** alakja, valamint **TOOL** a  $B' \rightarrow B$  és a  $B \rightarrow C$  szakaszon eltérő lehet.

Az eddig megismert pályatervezési módszerek felhasználására több lehetőség is kínálkozik (a könnyebb érthetőség kedvéért tekintünk az álló szállítószalag esetét):

- i) A  $B'$ ,  $B$ ,  $C$  pontokat jellemezhetjük a  $(p_x, p_y, p_z, \varphi, \vartheta, \psi)$  pozíciókoordinátákkal és Euler-szögekkel. A pályát megtervezhetjük ezekben a skalárváltozóknak, mintha egy fiktív  $TTTRRRR$  típusú robot csuklókoordinátáit terveznénk meg. Ekkor a  $\mathbf{p}(t)$  pozíció közvetlenül adódik, míg az  $\mathbf{A}(t)$  orientáció (1.65) szerint számítható. Ha szükség van a sebességre, a szögsebességre, a gyorsulásra, és a szöggyorsulásra is a pálya mentén, akkor ezeket (2.100) vagy (2.101) alapján számíthatjuk (a sebességek esetében csak az első tag szerepel és  $\dot{\mathbf{q}}$  helyére  $\dot{\mathbf{q}}$  kerül). Látható, hogy a szögsebesség a  $B'' \rightarrow C'$  szakaszon is nemlineárisan függ az időtől annak ellenére, hogy  $\varphi(t)$ ,  $\vartheta(t)$ ,  $\psi(t)$  itt lineáris. Ezért a megengedett **fizikai**  $|\omega|_{max}$  értékből nem tudunk következtetni a **fiktív**  $\dot{\varphi}_{max}$ ,  $\dot{\vartheta}_{max}$ ,  $\dot{\psi}_{max}$  értékekre, és így nincs támpontunk a  $B \rightarrow C$  szakasz befutásához szükséges  $T$  idő megtervezésére.
- ii) A  $B$  pontot bázisul véve, a  $B'$  és  $C'$  pontok orientációját jellemezhetjük a  $B$ -hez képesti  $\mathbf{Rot}(\mathbf{a}, \alpha)$  és  $\mathbf{Rot}(\mathbf{b}, \beta)$  forgatásokkal. A pozíció tervezésének előbb ismertetett elvét megtartjuk. Az orientációt kétféleképpen tervezhetjük meg:
  - **Egyetlen változó irányú  $\mathbf{t}(t)$  tengely körüli  $\varphi(t)$  forgatásra** alapozva. Ekkor  $B' \rightarrow B \rightarrow C$  mentén a  $B$ -hez képesti orientációt  $\mathbf{t}(t)\varphi(t)$  írja le ( $\|\mathbf{t}\| = 1$ ,  $\varphi \geq 0$ ), amely közben  $\mathbf{a}\alpha \rightarrow \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{b}\beta$  tranziensnek, melyet a korábbi módszerekkel koordinátánként tervezhetünk meg. Ekkor a  $B'' \rightarrow C'$  szakaszon  $\mathbf{t}$  fix, és  $\varphi$  lineárisan változik, ami lehetőséget ad az  $|\omega|_{max}$  fizikai szögsebesség alapján a  $B \rightarrow C$  szakasz befutásához szükséges  $T$  idő számítására.
  - **Két fix tengely  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  körüli  $\alpha(t)$  és  $\beta(t)$  forgatásra** alapozva, melyeket egymás után kell képzelni. Ekkor a  $B'' \rightarrow C'$  szakaszon  $\alpha(t) = 0$  és  $\beta(t)$  lineáris, ezért most is lehetséges  $T$  tervezése a fizikai  $|\omega|_{max}$  érték alapján.

#### 4.5.1. Pályatervezés Descartes-koordinátákban nemfolytonos gyorsulással

Tekintsük először az álló conveyor esetét, amikor az előírás

$$\mathbf{T}_{0,m}(-\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{B'} & \mathbf{p}_{B'} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.47)$$

$$\mathbf{T}_{0,m}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_B & \mathbf{p}_B \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.48)$$

$$\mathbf{T}_{0,m}(T) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_C & \mathbf{p}_C \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Határozzuk meg az (1.55)–(1.60) egyenletek segítségével  $\mathbf{a}$ ,  $\alpha$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\beta$  értékét a

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{a}, \alpha) = \mathbf{A}_B^{-1} * \mathbf{A}_{B'}, \quad (4.50)$$

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{b}, \beta) = \mathbf{A}_B^{-1} * \mathbf{A}_C \quad (4.51)$$

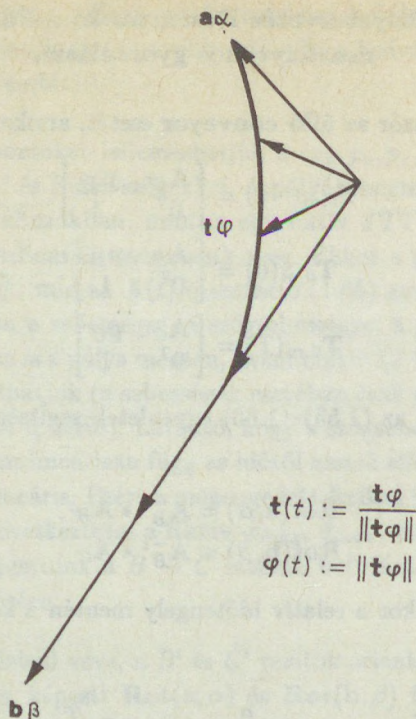
feltételekből. Akkor a relatív időtengely mentén a következő vektorok adóttak:

$-\tau$	0	$T$	
$\mathbf{a}\alpha$	0	$\mathbf{b}\beta$	(4.52)
$\mathbf{p}_{B'}$	$\mathbf{p}_B$	$\mathbf{p}_C$	

Megtervezhetjük a  $t\varphi$  szorzatot és ebből  $\|\mathbf{t}\| = 1$  és  $\varphi > 0$  feltételekből számíthatjuk  $\mathbf{t}$  és  $\varphi$  értékét (4.8. ábra).

A (4.14) egyenlet szerint a  $B' \rightarrow B \rightarrow C$  pálya a következő lehet:

$$\mathbf{p}(t) = \begin{cases} \mathbf{p}_B - \frac{(\tau - t)^2}{4\tau} \frac{\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_{B'}}{\tau} + \\ + \frac{(\tau + t)^2}{4\tau} \frac{\mathbf{p}_C - \mathbf{p}_B}{T}, & \text{ha } t \in [-\tau, \tau] \\ \mathbf{p}_B + t \frac{\mathbf{p}_C - \mathbf{p}_B}{T}, & \text{ha } t > \tau, \end{cases} \quad (4.53)$$



$$t(t) := \frac{t\varphi}{\|t\varphi\|}$$

$$\varphi(t) := \|t\varphi\|$$

4.8. ábra

Kapcsolat  $\mathbf{a}$ ,  $\alpha$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\beta$  és  $t$ ,  $\varphi$  között

$$t\varphi = \begin{cases} \frac{(\tau-t)^2}{4\tau} \frac{\mathbf{a}\alpha}{\tau} + \frac{(\tau+t)^2}{4\tau} \frac{\mathbf{b}\beta}{T} = \\ \mathbf{a}\alpha(t) + \mathbf{b}\beta(t), & \text{ha } t \in [-\tau, \tau] \\ t \frac{\mathbf{b}\beta}{T} = \mathbf{b}\beta(t), & \text{ha } t > \tau, \end{cases} \quad (4.54)$$

$$\tau = \max \left\{ \frac{v_{max}}{a_{max}}, \frac{\omega_{max}}{\varepsilon_{max}} \right\}, \quad (4.55)$$

$$T = \max \left\{ \frac{\mathbf{p}_C - \mathbf{p}_B}{v_{max}}, \frac{\beta}{\omega_{max}}, 2\tau \right\}, \quad (4.56)$$

$$\mathbf{T}_{0,m}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

Az orientációs részt kétféleképpen is megválaszthatjuk:

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_B * \mathbf{Rot}(\mathbf{t}(t), \varphi(t)) \quad (4.58a)$$

vagy

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_B * \mathbf{Rot}(\mathbf{a}, \alpha(t)) * \mathbf{Rot}(\mathbf{b}, \beta(t)). \quad (4.58b)$$

A két orientációfüggvény eltérő, de bármelyik esetén a  $\mathbf{T}_{0,m}(t)$  pálya kielégíti a következő feltételeket:

$$\mathbf{A}(-\tau) = \mathbf{A}_{B'}, \quad \mathbf{p}(-\tau) = \mathbf{p}_{B'}, \quad (4.59)$$

$$\mathbf{A}(T) = \mathbf{A}_C, \quad \mathbf{p}(T) = \mathbf{p}_C, \quad (4.60)$$

továbbá kis  $\tau$  esetén

$$\mathbf{A}(0) \approx \mathbf{A}_B, \quad \mathbf{p}(0) \approx \mathbf{p}_B. \quad (4.61)$$

**Mozgó conveyor** esetén az "üldözési" stratégiát alkalmazhatjuk, de a (4.26), (4.27) egyenleteket mozgó  $B$  ( $\mathbf{A}_B, \mathbf{p}_B$ ) és  $C$  ( $\mathbf{A}_C, \mathbf{p}_C$ ) értékekkel kell használni. Az induló értékek  $\mathbf{A}(-\tau) = \mathbf{A}_{B'}$ ;  $\mathbf{p}(-\tau) = \mathbf{p}_{B'}$ ;  $\mathbf{A}_k(-\tau) = \mathbf{A}_B$ ;  $\mathbf{p}_k(-\tau) = \mathbf{p}_B$ . Minden egyes  $t$  időpillanatban meg kell határozni  $\mathbf{a}, \alpha, \mathbf{b}, \beta$  értékét a

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{a}, \alpha) = \mathbf{A}(t)^{-1} \mathbf{A}_k(t), \quad (4.62)$$

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{b}, \beta) = \mathbf{A}_B(t)^{-1} \mathbf{A}_C(t), \quad (4.63)$$

feltételekből az (1.55)–(1.60) egyenletek segítségével. Ezután képezni kell ( $\|\mathbf{t}_k\| = 1$  betartása mellett) a (4.26) és (4.27) egyenleteknek megfelelően  $\mathbf{p}_k, \mathbf{A}_k, \mathbf{p}$  és  $\mathbf{A}$  értékét:

$$\mathbf{p}_k(t) = \begin{cases} \mathbf{p}_B(t) + \frac{(\tau+t)^2}{4\tau} \frac{\mathbf{p}_C(t) - \mathbf{p}_B(t)}{T}, & \text{ha } t \in [-\tau, \tau], \\ \mathbf{p}_B(t) + t \frac{\mathbf{p}_C(t) - \mathbf{p}_B(t)}{T}, & \text{ha } t > \tau, \end{cases} \quad (4.64)$$

$$\mathbf{t}_k \varphi_k = \begin{cases} \frac{(\tau+t)^2}{4\tau} \frac{\mathbf{b}\beta}{T} = \mathbf{b}\beta(t), & \text{ha } t \in [-\tau, \tau], \\ t \frac{\mathbf{b}\beta}{T} = \mathbf{b}\beta(t), & \text{ha } t > \tau, \end{cases} \quad (4.65)$$

$$\mathbf{A}_k(t) = \mathbf{A}_B(t) * \mathbf{Rot}(\mathbf{t}_k(t), \varphi_k(t)) = \mathbf{A}_B(t) * \mathbf{Rot}(\mathbf{b}, \beta(t)), \quad (4.66)$$

$$\mathbf{p}(t + \Delta t) = \mathbf{p}_k(t) - \frac{T - (t + \Delta t)}{T - t} \{\mathbf{p}_C(t) - \mathbf{p}(t)\}, \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t + \Delta t) &= \mathbf{A}_k(t) * \mathbf{Rot}(\mathbf{a}, -\frac{T - (t + \Delta t)}{T - t} \alpha) = \\ &= \mathbf{A}_k(t) * \mathbf{Rot}(\mathbf{a}, \alpha(t)). \end{aligned} \quad (4.68)$$

A csuklókoordinátákban történő tervezéshez hasonlóan, mozgó conveyor esetén most sincs biztos becslés a  $T$  időtartamra. Támpontul most is a  $-\tau$  időpontbeli conveyorhelyzethez tartozó

$$T = \max \left\{ \frac{|\mathbf{p}_C(-\tau) - \mathbf{p}_B(-\tau)|}{v_{max}}, \frac{\beta(-\tau)}{\omega_{max}}, 2\tau \right\} \quad (4.69)$$

érték szolgál.

#### 4.5.2. Pályatervezés Descartes-koordinátákban folytonos gyorsulással

Csak a mozgó conveyor esetét tárgyaljuk. Az álló conveyor (vagy a conveyor nélküli) eset ennek speciális esete. Tekintsük a tipikus  $B' \rightarrow B \rightarrow C$  átmenetet. Minden POS relatív transzformációt a  $C$ -beli szerszámra és koordinátarendszerre számítunk át a kezdeti  $t = -\tau$  időpontban.

Például

$$\begin{aligned} \text{COORD}(-\tau)_{B'} * \text{POS}_{B'} * \text{TOOL}_B^{-1} &= \\ &= \text{COORD}(-\tau)_C * \text{POS}_{B'C} * \text{TOOL}_C^{-1} \end{aligned} \quad (4.70)$$

miatt

$$\begin{aligned} \text{POS}_{B'C} &= \text{COORD}(-\tau)_C^{-1} * \text{COORD}(-\tau)_{B'} * \\ &* \text{POS}_{B'} * \text{TOOL}_B^{-1} * \text{TOOL}_C, \end{aligned} \quad (4.71)$$

és hasonlóan

$$\begin{aligned} \text{POS}_{BC} &= \text{COORD}(-\tau)_C^{-1} * \text{COORD}(-\tau)_{B'} * \\ &* \text{POS}_B * \text{TOOL}_B^{-1} * \text{TOOL}_C, \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\text{POS}_{CC} = \text{POS}_C. \quad (4.73)$$

A feladat a  $\text{POS}_{B'C} \rightarrow \text{POS}_{BC} \rightarrow \text{POS}_{CC}$  relatív mozgás conveyormozgástól független pályájának megtervezése és realizálása akkor is, ha a conveyor mozog. A pálya tervezésére a 4.3. pont módszerét, ezen belül a (4.28)–(4.42) egyenleteket fogjuk használni.

Legyen minden **POS** transzformáció alakja

$$\text{POS} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.74)$$

Határozzuk meg az (1.55)–(1.60) egyenletek segítségével és a 4.8. ábra előírásainak betartásával  $\mathbf{a}$ ,  $\alpha$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\beta$  értékét a

$$\text{Rot}(\mathbf{a}, \alpha) = \mathbf{A}_{BC}^{-1} * \mathbf{A}_{B'C}, \quad (4.75)$$

$$\text{Rot}(\mathbf{b}, \beta) = \mathbf{A}_{BC}^{-1} * \mathbf{A}_{CC} \quad (4.76)$$

feltételekből. Akkor a relatív időtengely mentén a következő vektorok adottak:

$$\begin{array}{ccc} -\tau & 0 & T \\ \mathbf{a}\alpha & \mathbf{0} & \mathbf{b}\beta \\ \mathbf{P}_{B'C} & \mathbf{P}_{BC} & \mathbf{P}_{CC} \end{array} \quad (4.77)$$

Legyen

$$\mathbf{v}_{BB'} = \frac{\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_{B'}}{\tau}; \quad \mathbf{v}_{CB} = \frac{\mathbf{p}_C - \mathbf{p}_B}{T}; \quad (4.78)$$

$$\omega_{BB'} = -\frac{\mathbf{a}\alpha}{\tau}; \quad \omega_{CB} = \frac{\mathbf{b}\beta}{T}, \quad (4.79)$$

és határozzuk meg  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  értékét ( $\mathbf{v}_{BB'}$  és  $\mathbf{v}_{CB}$  felhasználásával), illetve  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$  értékét ( $\omega_{BB'}$  és  $\omega_{CB}$  felhasználásával) a (4.35)–(4.38) egyenletek segítségével. Legyen

$$\mathbf{p}(t) = \begin{cases} \frac{\mathbf{a}_0}{12}t^4 + \frac{\mathbf{a}_2}{2}t^2 + \mathbf{a}_3t + \mathbf{a}_4, & \text{ha } t \in [-\tau, \tau], \\ \mathbf{p}_B + t\mathbf{v}_{CB}, & \text{ha } t > \tau, \end{cases} \quad (4.80)$$

$$t\varphi = \begin{cases} \frac{\mathbf{b}_0}{12}t^4 + \frac{\mathbf{b}_2}{2}t^2 + \mathbf{b}_3t + \mathbf{b}_4, & \text{ha } t \in [-\tau, \tau], \\ t\omega_{CB}, & \text{ha } t > \tau. \end{cases} \quad (4.81)$$

Határozzuk meg  $t$  és  $\varphi$  értékét a 4.8. ábra feltételeinek betartásával. Végül legyen

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_{BC} * \mathbf{Rot}(t(t), \varphi(t)), \quad (4.82)$$

$$\mathbf{POS}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.83)$$

$$\mathbf{T}_{0,m}(t) = \mathbf{COORD}(s(t))_C * \mathbf{POS}(t) * \mathbf{TOOL}_C^{-1}. \quad (4.84)$$

Vegyük észre, hogy

$$\mathbf{A}(-\tau) = \mathbf{A}_{B'C}, \quad \mathbf{p}(-\tau) = \mathbf{p}_{B'C}, \quad (4.85)$$

$$\mathbf{A}(T) = \mathbf{A}_{CC}, \quad \mathbf{p}(T) = \mathbf{p}_{CC}. \quad (4.86)$$

A  $\tau$  és  $T$  értékek megválasztásának alapja:

$$\tau = \frac{3}{2} \max \left\{ \frac{v_{max}}{a_{max}}, \frac{\omega_{max}}{\varepsilon_{max}} \right\}, \quad (4.87)$$

$$T = \max \left\{ \frac{|\mathbf{v}_{CB}|}{v_{max}}, \frac{|\beta|}{\omega_{max}}, 2\tau \right\}. \quad (4.88)$$

A pályatervezési algoritmusban  $t = -\tau$  esetén egyszer el kell végezni  $\text{POS}_{B'C}$ ;  $\text{POS}_{BC}$ ;  $\mathbf{a}$ ,  $\alpha$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\beta$ ;  $\mathbf{v}_{BB'}$ ;  $\mathbf{v}_{CB}$ ;  $\omega_{BB'}$ ;  $\omega_{CB}$ ;  $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_4$ ,  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_4$  meghatározását. Ezután minden  $\Delta t$  időközönként ki kell számítani  $\mathbf{p}(t)$ ,  $\mathbf{t}\varphi$ ,  $\mathbf{t}$ ,  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\text{POS}(t)$ ,  $s(t)$  vagy  $\hat{s}(t)$ ,  $\text{COORD}(s(t))_c$  és  $\mathbf{T}_{0,m}(t)$  értékét, majd ebből a  $\mathbf{q}(t) = \text{solve}\{\mathbf{T}_{0,m}(t)\}$  alapjelet a csuklószerelvők számára. Ha a számítások csak ritka időközönként (pl. 50ms) végezhetőek el az irányítás magasabb szintjén, akkor a csuklóprocesszorokban  $\mathbf{q}(t)$  értékét lineáris extrapolációval célszerű finomítani (pl. 10ms időközönként).

**Egy másik alakot** javasol a (4.84) egyenlet szerinti  $\text{POS}(t)$  transzformációra Paul ([1], pp.139–151 vagy [4], pp.142–151). Ennek lényege, hogy az orientáció változását a pálya mentén két tengely körüli egymás utáni rotációból építi fel, amelyek közül az első tengely a  $[-\tau, \tau]$  intervallumban változik, míg a másik tengely fix:

$$\text{POS}(t) = \text{POS}_{BC} * \text{Trans}(\mathbf{p}(t)) * \text{Rot}(\mathbf{t}(t), \vartheta(t)) * \text{Rot}(z, \psi(t)), \quad (4.89)$$

$$\mathbf{t}(t) = \text{Rot}(z, \varphi(t)) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.90)$$

Ez a felbontás szoros kapcsolatban van az Euler-szögek értelmezésével:  $\mathbf{t}$  a  $\varphi(t)$ -vel elforgatott  $y$  tengely;  $\mathbf{t}$  körül forgatni  $\vartheta(t)$ -vel annyit jelent mint az elforgatott  $y$  tengely körül forgatni  $\vartheta(t)$ -vel stb. Vezessük be a

$$\mathbf{D}(t) = \text{Trans}(\mathbf{p}(t)) * \text{Rot}(\mathbf{t}(t), \vartheta(t)) * \text{Rot}(z, \psi(t)) \quad (4.91)$$

jelölést, akkor az elvárások:

$$\mathbf{D}(-\tau) = \text{POS}_{BC}^{-1} * \text{POS}_{B'C}, \quad (4.92)$$

$$\mathbf{D}(0) = \mathbf{I}, \quad (4.93)$$

$$\mathbf{D}(T) = \text{POS}_{BC}^{-1} * \text{POS}_{CC}, \quad (4.94)$$

melyek közül a  $t = 0$  időpontbeli feltétel megállítással nélkül folytonos gyorsulással csak közelítőleg elégíthető ki.

$$\mathbf{t} = \mathbf{Rot}(z, \varphi) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_\varphi \\ C_\varphi \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.95)$$

ezért  $V(\vartheta) = 1 - \cos \vartheta$  jelöléssel (1.54) és (1.29) alapján írható, hogy

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} C_\psi() + S_\psi[] & -S_\psi(S_\varphi^2 V_\vartheta + C_\vartheta) + C_\psi[-S_\varphi C_\varphi V_\vartheta] & C_\varphi S_\vartheta & x \\ C_\psi() + S_\psi[] & -S_\psi(-S_\varphi C_\varphi V_\vartheta) + C_\psi[C_\varphi^2 V_\vartheta + C_\vartheta] & S_\varphi S_\vartheta & y \\ C_\psi() + S_\psi[] & -S_\psi(-C_\varphi S_\vartheta) + C_\psi[-S_\varphi S_\vartheta] & C_\vartheta & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.96)$$

ahol az egyszerűség kedvéért nem írtuk ki a  $t$  időváltozót. Az első oszlopban ki nem részletezett zárójelek rendre a második oszlop ugyanolyan sorában álló zárójeles kifejezésével egyeznek meg. Mivel  $\mathbf{D}(-\tau)$  és  $\mathbf{D}(T)$  alakja egyaránt

$$\begin{aligned} \mathbf{POS}_1^{-1} * \mathbf{POS}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 & \mathbf{m}_1 & \mathbf{n}_1 & \mathbf{p}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} \mathbf{l}_2 & \mathbf{m}_2 & \mathbf{n}_2 & \mathbf{p}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1^T \mathbf{l}_2 & \mathbf{l}_1^T \mathbf{m}_2 & \mathbf{l}_1^T \mathbf{n}_2 & \mathbf{l}_1^T (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \\ \mathbf{m}_1^T \mathbf{l}_2 & \mathbf{m}_1^T \mathbf{m}_2 & \mathbf{m}_1^T \mathbf{n}_2 & \mathbf{m}_1^T (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \\ \mathbf{n}_1^T \mathbf{l}_2 & \mathbf{n}_1^T \mathbf{m}_2 & \mathbf{n}_1^T \mathbf{n}_2 & \mathbf{n}_1^T (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.97) \end{aligned}$$

ezért mindegyikhez tartozik egy  $(x, y, z, \varphi, \vartheta, \psi)$  megoldás:

$$x = \mathbf{l}_1^T (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1), \quad (4.98)$$

$$y = \mathbf{m}_1^T (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1), \quad (4.99)$$

$$z = \mathbf{n}_1^T (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1), \quad (4.100)$$

$$T_\varphi = \frac{\mathbf{m}_1^T \mathbf{n}_2}{\mathbf{l}_1^T \mathbf{n}_2} \text{ és } \varphi \in [-\pi, \pi), \quad (4.101)$$

$$S_\vartheta = C_\varphi \mathbf{l}_1^T \mathbf{n}_2 + S_\varphi \mathbf{m}_1^T \mathbf{n}_2, \quad (4.102a)$$

$$C_\vartheta = \mathbf{n}_1^T \mathbf{n}_2, \quad (4.102b)$$

$$S_\psi = -S_\varphi C_\varphi V_\vartheta \mathbf{l}_1^T \mathbf{l}_2 + (C_\varphi^2 V_\vartheta + C_\vartheta) \mathbf{m}_1^T \mathbf{l}_2 - S_\varphi S_\vartheta \mathbf{n}_1^T \mathbf{l}_2, \quad (4.103a)$$

$$C_\psi = -S_\varphi C_\varphi V_\vartheta \mathbf{l}_1^T \mathbf{m}_2 + (C_\varphi^2 V_\vartheta + C_\vartheta) \mathbf{m}_1^T \mathbf{m}_2 - S_\varphi S_\vartheta \mathbf{n}_1^T \mathbf{m}_2. \quad (4.103b)$$

## 4.1. táblázat

A pálya előírásai Paul módszere esetén

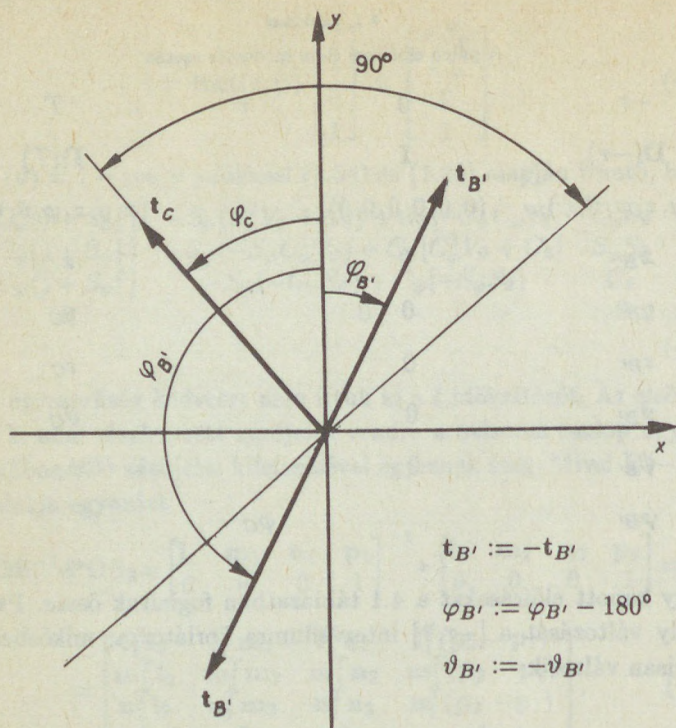
$-\tau$	0	$\tau$	$T$
$D(-\tau)$	<b>I</b>		$D(T)$
$(x, y, z, \varphi, \vartheta, \psi)_{B'}$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)$		$(x, y, z, \varphi, \vartheta, \psi)_C$
$x_{B'}$	0		$x_C$
$y_{B'}$	0		$y_C$
$z_{B'}$	0		$z_C$
$\vartheta_{B'}$	0		$\vartheta_C$
$\psi_{B'}$	0		$\psi_C$
$\varphi_{B'}$		$\varphi_C$	

Az így kapott előírásokat a 4.1 táblázatban foglaltuk össze. Paul a  $t$  tengely változását a  $[-\tau, \tau]$  intervallumra korlátozza, miközben  $\varphi(t)$  lineárisan változik:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_{B'} + \frac{\varphi_C - \varphi_{B'}}{2\tau}(t + \tau), & \text{ha } t \in [-\tau, \tau], \\ \varphi_C, & \text{ha } t > \tau. \end{cases} \quad (4.104)$$

A többi változót, nevezetesen az  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ ,  $\vartheta(t)$ ,  $\psi(t)$  függvényeket a 4.3. pont módszerével tervezi meg. A pálya ezek ismeretében (4.96), (4.89) és (4.84) alapján számítható.

Ha  $|\varphi_C - \varphi_{B'}| > 90^\circ$ , akkor célszerű  $\mathbf{t}_{B'}$  helyett  $\mathbf{t}_{B'} := -\mathbf{t}_{B'}$ -re áttérni. Ekkor azonban (1.44) szerint a  $\mathbf{Rot}(\mathbf{t}_{B'}, \vartheta_{B'})$  transzformáció értékének megőrzése érdekében el kell végezni még a  $\vartheta_{B'} := -\vartheta_{B'}$  helyettesítést is (lásd 4.9. ábra).



4.9. ábra  
 Korrekció  $|\varphi_C - \varphi_{B'}| > 90^\circ$  esetén

### 4.5.3. A szögsebesség és a szöggyorsulás számítása a pálya mentén

Intelligensebb szabályozási algoritmusok (pl. RMAC; hibrid pozíció- és erőirányítás) a szabályozás hibáját Descartes-koordinátákban képzik. Ilyen esetekben a  $T_{0,m}(t)$  alapjel mellett szükség lehet még a sebesség, gyorsulás, szögsebesség, szöggyorsulás értékekre is a pálya mentén a szabályozási algoritmusokhoz.

#### 4.1. Példa: A kinematikai mennyiségek álló conveyor és Euler-szögek esetén

Ha a  $T_{0,m}$  sarokpontokat  $(p_x, p_y, p_z, \varphi, \vartheta, \psi)$  értékekké konvertáltuk és ezekhez koordinátánként terveztünk pályát, akkor a  $K_0$  keretben  $\mathbf{v} = \mathbf{p}'(t)$  és  $\mathbf{a} = \mathbf{p}''(t)$  analitikusan adott, míg  $\omega$  és  $\varepsilon$  (2.91) és (2.100) felhasználásával számítható  $q_4 = \varphi(t)$ ,  $q_5 = \vartheta(t)$  és  $q_6 = \psi(t)$  helyettesítéssel.

#### 4.2. Példa: A $\text{Rot}(\mathbf{t}(t), \vartheta(t))$ transzformációhoz tartozó szögsebesség

Ekkor (1.44), (B.9),  $\|\mathbf{t}\|^2 = 1$  és  $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}' \rangle = 0$  miatt

$$\mathbf{A} = C_\vartheta \mathbf{I} + (1 - C_\vartheta)[\mathbf{t} \circ \mathbf{t}] + S_\vartheta[\mathbf{t} \times], \quad (4.105)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' = & -S_\vartheta \dot{\vartheta} \mathbf{I} + S_\vartheta \dot{\vartheta}[\mathbf{t} \circ \mathbf{t}] + (1 - C_\vartheta)[\mathbf{t} \circ \mathbf{t}' + \mathbf{t}' \circ \mathbf{t}] + \\ & + C_\vartheta \dot{\vartheta}[\mathbf{t} \times] + S_\vartheta[\mathbf{t}' \times], \end{aligned} \quad (4.106)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = C_\vartheta \mathbf{I} + (1 - C_\vartheta)[\mathbf{t} \circ \mathbf{t}] - S_\vartheta[\mathbf{t} \times], \quad (4.107)$$

$$\begin{aligned} [\omega \times] = \mathbf{A}' * \mathbf{A}^{-1} = & [\mathbf{t} \dot{\vartheta} \times] + (1 - C_\vartheta)[-\mathbf{t} \circ \mathbf{t}' + \mathbf{t}' \circ \mathbf{t}] + S_\vartheta[\mathbf{t}' \times] = \\ = & [\mathbf{t} \dot{\vartheta} \times] + (1 - C_\vartheta)[(\mathbf{t} \times \mathbf{t}') \times] + S_\vartheta[\mathbf{t}' \times], \end{aligned} \quad (4.108)$$

$$\omega = \mathbf{t} \dot{\vartheta} + (1 - C_\vartheta)(\mathbf{t} \times \mathbf{t}') + S_\vartheta \mathbf{t}'. \quad (4.109)$$

#### 4.3. Példa: A $\text{Rot}(\mathbf{t}(t), \vartheta(t)) * \text{Rot}(z, \psi(t))$ transzformációhoz tartozó szögsebesség és szöggyorsulás

Paul módszerénél (1.31) és (4.90) alapján

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} -S_\varphi \\ C_\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}' = \begin{bmatrix} -C_\varphi \\ -S_\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}, \quad (4.110)$$

ezért (4.109) alapján

$$\begin{aligned}\omega_{11} &= \begin{bmatrix} -S_\varphi \\ C_\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\vartheta} + (1 - C_\vartheta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\varphi} + S_\vartheta \begin{bmatrix} -C_\varphi \\ -S_\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi} = \\ &= \begin{bmatrix} -C_\varphi S_\vartheta & -S_\varphi \\ -S_\varphi S_\vartheta & C_\varphi \\ 1 - C_\vartheta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (4.111)$$

$$\omega_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\psi},\quad (4.112)$$

$$\begin{aligned}\omega_{12} &= \mathbf{Rot}(\mathbf{t}, \vartheta) \omega_{22} = \begin{bmatrix} * & * & S_\vartheta C_\varphi \\ * & * & S_\vartheta S_\varphi \\ * & * & C_\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\psi} = \\ &= \begin{bmatrix} C_\varphi S_\vartheta \\ S_\varphi S_\vartheta \\ C_\vartheta \end{bmatrix} \dot{\psi},\end{aligned}\quad (4.113)$$

$$\omega_1 = \omega_{11} + \omega_{12} = \begin{bmatrix} -C_\varphi S_\vartheta & -S_\varphi & C_\varphi S_\vartheta \\ -S_\varphi S_\vartheta & C_\varphi & S_\varphi S_\vartheta \\ 1 - C_\vartheta & 0 & C_\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix},\quad (4.114)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 = \omega'_1 &= \begin{bmatrix} -C_\varphi S_\vartheta & -S_\varphi & C_\varphi S_\vartheta \\ -S_\varphi S_\vartheta & C_\varphi & S_\varphi S_\vartheta \\ 1 - C_\vartheta & 0 & C_\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\vartheta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} S_\varphi S_\vartheta \dot{\varphi} - C_\varphi C_\vartheta \dot{\vartheta} & -C_\varphi \dot{\varphi} & -S_\varphi S_\vartheta \dot{\varphi} + C_\varphi C_\vartheta \dot{\vartheta} \\ -C_\varphi S_\vartheta \dot{\varphi} - S_\varphi C_\vartheta \dot{\vartheta} & -S_\varphi \dot{\varphi} & C_\varphi S_\vartheta \dot{\varphi} + S_\varphi C_\vartheta \dot{\vartheta} \\ S_\vartheta \dot{\vartheta} & 0 & -S_\vartheta \dot{\vartheta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (4.115)$$

#### 4.4. Példa: A kinematikai mennyiségek számítása Paul pályatervezési módszeréhez

A (4.84) és (4.89) egyenlet alapján

$$\mathbf{T}_{0,m}(t) = \mathbf{COORD}(s(t)) * \mathbf{POS}_{BC} * \mathbf{D}(t) * \mathbf{TOOL}_C^{-1}, \quad (4.116)$$

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{Trans}(\mathbf{p}(t)) * \mathbf{Rot}(\mathbf{t}(t), \vartheta(t)) * \mathbf{Rot}(z, \psi(t)). \quad (4.117)$$

Legyen  $\mathbf{e}_{CONV} \in K_B$  a conveyormozgás iránya, akkor

$$\mathbf{T}_{B,CONV} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{B,CONV} & \mathbf{b}_{CONV} + \mathbf{e}_{CONV}s(t) \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.118)$$

Például, ha a conveyor síkja és mozgási iránya párhuzamos a bázis  $[\mathbf{x}_B, \mathbf{y}_B]$  síkjával, akkor

$$\mathbf{A}_{B,CONV} = \mathbf{Rot}(z, \varphi_{CONV}), \quad (4.119)$$

$$\mathbf{e}_{CONV} = \begin{bmatrix} C_{\varphi_{CONV}} \\ S_{\varphi_{CONV}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.120)$$

fix értékek, és

$$\mathbf{v}_{CONV} = \mathbf{e}_{CONV}s'(t), \quad (4.121)$$

$$\mathbf{a}_{CONV} = \mathbf{e}_{CONV}s''(t). \quad (4.122)$$

Ekkor (4.2) alapján az  $\mathbf{A}_{COORD}$  orientáció is állandó. Vezessük be a

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{Rot}(\mathbf{t}, \vartheta) * \mathbf{Rot}(z, \psi) [-\mathbf{A}_{TOOL}^T \mathbf{p}_{TOOL}] \quad (4.123)$$

jelölést. Akkor a pálya mentén mozgó  $K_m$  keret kinematikai jellemzői a  $K_0$  koordinátarendszerben a 4.3. példa jelöléseit megtartva a következők:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}_{B,0}^T \mathbf{e}_{CONV}s'(t) + \mathbf{A}_{COORD} \{ \mathbf{p}'(t) + \boldsymbol{\omega}_1(t) \times \mathbf{p}_1 \}, \quad (4.124)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}_{B,0}^T \mathbf{e}_{CONV}s''(t) + \mathbf{A}_{COORD} * \{ \mathbf{p}''(t) + \boldsymbol{\varepsilon}_1(t) \times \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\omega}_1(t) \times (\boldsymbol{\omega}_1(t) \times \mathbf{p}_1) \}, \quad (4.125)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}_{COORD} \boldsymbol{\omega}_1(t), \quad (4.126)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}_{COORD} \boldsymbol{\varepsilon}_1(t). \quad (4.127)$$

## 5. A ROBOT SZABAD MOZGÁSÁNAK IRÁNYÍTÁSA

Sok robotalkalmazásnál a feladat két részre osztható. A robot megfog egy tárgyat, és szabadon halad a célpont felé, majd a célpontot elérve kontaktusba kerül a környezettel (például a csapot behelyezi a furatba). Az első feladat (szabad mozgás) megoldható pozícióirányítással, míg a második esetben rendszerint hibrid pozíció- és erőirányítást célszerű alkalmazni. Ebben a fejezetben a szabad mozgás irányítására szolgáló algoritmusokat tárgyaljuk.

Megvizsgáljuk az ipari robotok körében elterjedt decentralizált szervohajtásokat (nem foglalkozván a realizáció szempontjából fontos teljesítményelektronikával). Ezután olyan intelligensebb algoritmusokat ismertetünk, mint a nemlineáris szétcsatolás, csúszószabályozás és az RMAC. Foglalkozunk a perturbált mozgás irányításával, általánosított PID-szabályozókkal. A függelékben ezért összefoglaltuk a lineáris rendszerek kompenzálásának megtervezésére szolgáló fontosabb időtartománybeli és frekvenciatartománybeli módszereket is.

### 5.1. A ROBOT ÉS A BEAVATKOZÓ SZERV EGYÜTTES MODELLJE

A robot és a beavatkozó szerv mechanikai kapcsolatát a 3.5. pontban tárgyaltuk. A beavatkozó szerv által kifejtett nyomaték azonban az alkalmazott segédenergiától függően nem mechanikai mennyiségektől is függ. Például egyenáramú motor esetén a mechanikai mennyiségek (a csuklókoordináta és deriváltjai:  $q_i$ ,  $\dot{q}_i$ ,  $\ddot{q}_i$ ), a meghajtónyomaték ( $F_i$ ) és a villamos mennyiségek ( $u_i$  kapcsolófeszültség és  $i_{r_i}$  rotoráram) egymás-

sal összefüggenek. Ha a rotor induktivitása ( $L_{ri}$ ) nem hanyagolható el, akkor a beavatkozó szerv állapotvektora  $\mathbf{x}^i = (q_i, \dot{q}_i, i_{ri})^T$  lehet, míg elhanyagolható rotorinduktivitás esetén  $\mathbf{x}^i = (q_i, \dot{q}_i)^T$ . A robot mechanikai modelljében az első esetben  $i_{ri}$  közvetlenül nem (hanem csak az  $F_i$  nyomatékon keresztül) játszik szerepet.

Általában (villamos, hidraulikus és pneumatikus motor esetén egyaránt) a beavatkozó szerveket az áttételekkel és a robotot állapotterben a következő modellel jellemezhetjük [ $N_i(u_i)$  nemlineáris jelleggörbe]:

$S_i$  beavatkozó szerv és áttétel,  $i = 1, \dots, m$ :

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{A}^i \mathbf{x}^i + \mathbf{b}^i N_i(u_i) + \mathbf{d}^i F_i. \quad (5.1)$$

$S_R$  robot:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F}. \quad (5.2)$$

A beavatkozó szerv állapotváltozói közül  $q_i$  és  $\dot{q}_i$  kiszelektálható megfelelően választott  $\tau_1^i$  és  $\tau_2^i$  szelekciós mátrixszal (amelynek csak egy eleme 1, a többi nulla). Bevezetve a

$$q_i = \tau_1^{iT} \mathbf{x}^i, \quad \dot{q}_i = \tau_2^{iT} \mathbf{x}^i, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{1T}, \dots, \mathbf{x}^{mT})^T, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\mathbf{A}^i), \quad (5.5)$$

$$\mathbf{B} = \text{diag}(\mathbf{b}^i), \quad (5.6)$$

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{d}^i), \quad (5.7)$$

$$\tau_1 = \text{diag}(\tau_1^{iT}), \quad (5.8)$$

$$\tau_2 = \text{diag}(\tau_2^{iT}), \quad (5.9)$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}) = \text{diag}(N_i(u_i)\mathbf{I}^i), \quad (5.10)$$

jelöléseket (ahol "diag" mátrixok esetén blokkdiagonális, vektorok esetén lépcsősen illeszkedő diagonális mátrixot jelent), írható, hogy

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{N}(\mathbf{u}) + \mathbf{D}\mathbf{F}, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}\{\tau_1(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{N} + \mathbf{D}\mathbf{F}) + \mathbf{h}. \quad (5.12)$$

A második egyenletből kifejezhető  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} = (\mathbf{I} - \mathbf{H}\tau_1\mathbf{D})^{-1} \{ \mathbf{H}\tau_1(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{N}) + \mathbf{h} \}. \quad (5.13)$$

Behelyettesítve  $\mathbf{F}$  értékét a beavatkozó szervek állapotegyenletébe, az eredő rendszer állapotegyenletét kapjuk.

$S_\Sigma$  eredő:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = & \{ \mathbf{A} + \mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{H}\tau_1\mathbf{D})^{-1} [\mathbf{H}\tau_1\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{h}] \} + \\ & + \{ \mathbf{B} + \mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{H}\tau_1\mathbf{D})^{-1} \mathbf{H}\tau_1\mathbf{B} \} \mathbf{N}(\mathbf{u}) = \\ = & \overset{jel}{\hat{\mathbf{A}}}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x})\mathbf{N}(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (5.14)$$

A bevezetett  $\hat{\mathbf{A}}$  és  $\hat{\mathbf{B}}$  mátrixok azért függenek az  $\mathbf{x}$  állapotvektortól, mert  $\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \mathbf{H}(\tau_1\mathbf{x})$  és  $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{h}(\tau_1\mathbf{x}, \tau_2\mathbf{x})$  alakú. A motoroknál csak az  $N_i(u_i)$  telítés jellegű nemlinearitást vettük figyelembe, amelyet például a szervoverősítő indokol. Ez a feltevés hidraulikus motorok esetén is megengedhető.

Az  $S_\Sigma$  eredő rendszer egy nagyméretű (large scale), dinamikusan is nemlineáris rendszer, ezért irányítása vagy szimulálása bonyolult feladatot jelent. Például egyenáramú motor,  $L_{r_i} \approx 0$  és  $m = 6$  esetén  $\dim \mathbf{x} = 12$ .

## 5.2. ROBOTIRÁNYÍTÁS DECENTRALIZÁLT SZERVOKKAL

Mivel az eredő rendszer egy bonyolult nemlineáris rendszer, a beavatkozó szerv pedig [eltekintve az  $N_i(u_i)$  telítés jellegű statikus nemlinearitástól] egy egyszerű lineáris tag, ezért kézenfekvő egy ilyen tagot önállóan szabályozni és más tagok csatoló hatását zavaró jelnek tekintve a szabályozás révén kiküszöbölni. Másrészt viszont a robot által emelt teher és a többi szegmens csatoló hatása a robot pályája mentén jelentősen változó zavaró jellemzőt eredményez, melyek eliminálása csak közelítőleg lehetséges a pálya mentén. Ezért az egyszerű lokális (decentralizált) szervohajtás nem szükségképpen elégíti ki a robot alkalmazásánál megkövetelt pontossági előírásokat.

### 5.2.1. A csatoló hatás domináns részének leválasztása

Feltételezzük, hogy a beavatkozó szerv **egyenáramú motor**. A jelek egyszerűsítése érdekében az  $i$  indexet csak ott írjuk ki, ahol ez feltétlenül szükséges. Az  $r$  index a rotorra utal,  $\Theta$  a rotor tehetetlenségi nyomatéka,  $f_m$  a viszkózus súrlódása,  $\varphi$  a szögelfordulása,  $\nu$  az áttétel. A villamos és elektromechanikus hatások közül  $c_1$  a belső feszültség együtthatója,  $R_r$  és  $L_r$  a rotorköri ellenállás és induktivitás,  $c_2$  arányossági tényező a rotorra ható nyomaték ( $M_r$ ) és a rotoráram ( $i_r$ ) között. Az áttételben ébredő súrlódás együtthatója  $f_{\text{áttétel}}$ . Az áttétel a motor fordulatszámát a csukló felé az áttétel ( $\nu$ ) értékével leosztja, míg a nyomatékot az áttétel értékével felszorozza. Mivel az áttételben jelentkező súrlódás jelentős (és nemlineáris), ezért terjednek az áttétel nélküli közvetlen hajtások a robotokban, melyeknél azonban a motornak nagy nyomatékot kell leadnia (speciális motorok). Áttétel esetén a nyomaték megnövelése érdekében  $\nu = 10 - 100$  egy jellegzetes tartomány.

**Az egyenáramú motor és az áttétel modellje** (minden nyomatékot a csukló felőli oldalra képzelve):

$$F_i + \nu f_m \dot{\varphi} + f_{\text{áttétel}} \dot{q} = \nu M_r, \quad (5.15)$$

$$N(u) - c_1 \dot{\varphi} = R_r i_r + L_r \frac{di_r}{dt}, \quad (5.16)$$

$$M_r = c_2 i_r, \quad (5.17)$$

$$\varphi = \nu q. \quad (5.18)$$

**A robot terhelő hatása** (zavaró jellemző):

$$F_i = \{D_{ii}(q) + \nu^2 \Theta\} \ddot{q} + \dots = \bar{F}_i + F_i^*, \quad (5.19)$$

ahol  $\bar{F}_i(t)$  átlagérték a  $q(t)$  pálya mentén, melyet a szabályozó tervezésénél figyelembe fogunk venni, míg  $F_i^* = F_i - \bar{F}_i$  a tervezésnél figyelembe nem vett csatoló hatás (zavarás), melyet a szabályozásnak ki kell küszöbölnie. Világos, hogy

$$F_i = \sum_{j=1}^m D_{ij} \ddot{q}_j + h_i, \quad (5.20)$$

$$\bar{F}_i = (\bar{D}_{ii} + \nu^2 \Theta) \ddot{q}_i(t), \quad (5.21)$$

$$\bar{D}_{ii} = \bar{D}_{ii}(\mathbf{q}(t)), \quad (5.22)$$

$$F_i^* = F_i - \bar{F}_i = F_i - (\bar{D}_{ii} + \nu^2 \Theta) \ddot{q}_i(t). \quad (5.23)$$

Az  $\bar{F}_i = (\bar{D}_{ii} + \nu^2 \Theta) \ddot{q}_i$  erő a benne szereplő  $\bar{D}_{ii}$  miatt függ a  $\mathbf{q}(t)$  pályától (alapjeltől) és a megfogó által tartott tehetőtől.

Vezessük be a

$$\Theta^* = \frac{\bar{D}_{ii} + \nu^2 \Theta}{\nu^2} = \Theta + \frac{\bar{D}_{ii}}{\nu^2}, \quad (5.24)$$

$$f = f_m + \frac{f_{\text{áttétel}}}{\nu^2}, \quad (5.25)$$

jelölést, akkor

$$(\bar{D}_{ii} + \nu^2 \Theta) \ddot{q} + F_i^* + \nu^2 f_m \dot{q} + f_{\text{áttétel}} \dot{q} = \nu M_r, \quad (5.26)$$

és  $\nu$ -vel való osztás után

$$\Theta^* \nu \ddot{q} + f \nu \dot{q} = c_2 i_r - \frac{1}{\nu} F_i^*, \quad (5.27)$$

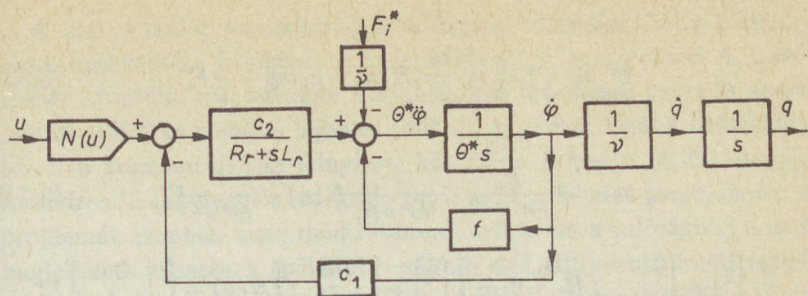
$$N(u) - c_1 \nu \dot{q} = R_r i_r + L_r \frac{di_r}{dt} \quad (5.28)$$

keletkezik. Innen felírható az állapotegyenlet és mátrixalakja:

$$\ddot{q} = -\frac{f}{\Theta^*} \dot{q} + \frac{c_2}{\Theta^* \nu} i_r - \frac{1}{\Theta^* \nu^2} F_i^* \quad (5.29)$$

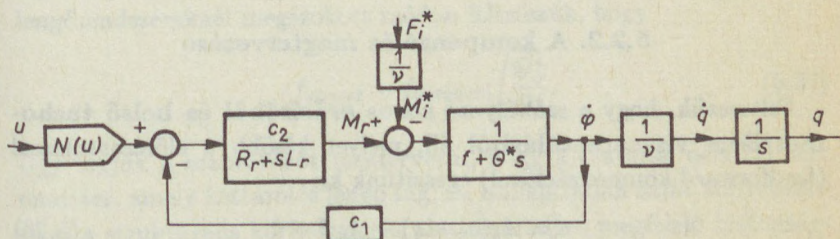
$$\frac{di_r}{dt} = -\frac{c_1 \nu}{L_r} \dot{q} - \frac{R_r}{L_r} i_r + \frac{1}{L_r} N(u), \quad (5.30)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \\ i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{f}{\Theta^*} & \frac{c_2}{\Theta^* \nu} \\ 0 & -\frac{c_1 \nu}{L_r} & -\frac{R_r}{L_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \\ i_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_r} \end{bmatrix} N(u) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\Theta^* \nu^2} \\ 0 \end{bmatrix} F_i^*. \quad (5.31)$$



5.1. ábra

A kompenzálatlan rendszer blokkvázlata



5.2. ábra

A kompenzálatlan rendszer átalakított blokkvázlata

A blokkvázlat az egyenletekből kapható és tovább egyszerűsíthető (5.1. és 5.2. ábra). A kompenzálatlan felnyitott kör átviteli függvénye ( $u$  bemenetre és telítés nélkül):

$$W_1(s) = \frac{\frac{c_2}{R_r + sL_r} \cdot \frac{1}{f + \theta^* s} \cdot \frac{1}{\nu s}}{1 + c_1 \frac{c_2}{R_r + sL_r} \cdot \frac{1}{f + \theta^* s}} = \frac{c_2}{c_1 c_2 + (R_r + sL_r)(f + \theta^* s)} \cdot \frac{1}{\nu s} \quad (5.32)$$

Ha a rotor inductivitása elhanyagolható, akkor a blokkvázlatban  $L_r = 0$  helyettesíthető és bevezethető az  $A_m = c_2/R_r$  átviteli tényező ( $\text{Nm/A}$ ), míg az állapotegyenlet közvetlenül felírható, mivel  $i_r$  kifejezhető az (5.28) egyenletből:

$$\Theta^* \nu \ddot{q} + f \nu \dot{q} = \frac{c_2}{R_r} [N(u) - c_1 \nu \dot{q}] - \frac{1}{\nu} F_i^*, \quad (5.33)$$

$$\ddot{q} = -\frac{f + \frac{c_1 c_2}{R_r}}{\Theta^*} \dot{q} + \frac{c_2}{\Theta^* \nu R_r} N(u) - \frac{1}{\Theta^* \nu^2} F_i^*, \quad (5.34)$$

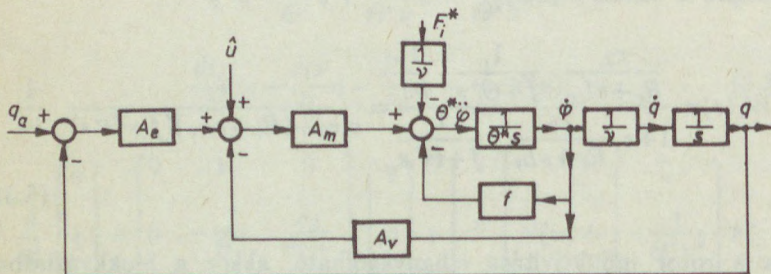
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{f R_r + c_1 c_2}{\Theta^* R_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{c_2}{\Theta^* \nu R_r} \end{bmatrix} N(u) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\Theta^* \nu^2} \end{bmatrix} F_i^*. \quad (5.35)$$

### 5.2.2. A kompenzálás megtervezése

Feltesszük, hogy a szabályozó soros erősítőből és belső tachometrikus visszacsatolásból áll, melyet később  $\hat{u}$  előrecsatolással (feedforward kompenzációval) egészítünk ki:

$$u = A_e(q_a - q) - A_v \dot{\varphi} + \hat{u}. \quad (5.36)$$

Itt  $q_a$  az alapjel. Mivel  $c_1$  és  $A_v$  párhuzamos hatások, ezért az  $A_e$ ,  $A_v$  szabályozóbeállítás tervezésekor feltesszük, hogy elvégeztük az  $A_v := c_1 + A_v$  összevonást, amit természetesen a szabályozó realizálásakor  $A_v := A_v - c_1$  révén fel kell számolni. A szabályozási kör blokkvázlatát az 5.3. ábra tartalmazza.



5.3. ábra

A szabályozási kör tachometrikus visszacsatolással

A kompenzálás tervezésénél arra fogunk törekedni, hogy a zavaró hatás csökkentése érdekében a körerősítés nagy legyen (amit  $A_e$  növelésével érhetünk el), valamint a szabályozás tranziense gyors és aperiódikus (túllövés mentes) legyen (amit  $A_v$  értékével fogunk beállítani). Mivel a kompenzálatlan felnyitott kör  $L_r = 0$  esetén (5.32) alapján másodrendű (egytárolós integráló tag), ezért a feladat megoldható. A problémát azonban kissé módosítanunk kell, mert a valóságban a nem modellezett jelenségek (például rugalmas alakváltozások) miatt rezgések lépnek fel a valós robot működése során. Jelölje ezek közül a legkisebb ilyen rezgés frekvenciáját az  $f_{struct}$  (strukturális) frekvencia. Ez a frekvencia terhelésfüggő. Ha kísérleti úton a névleges tehernél (névleges  $\Theta_0^*$ ) meghatároztuk  $f_{struct}$  értékét, akkor más tehernél ( $\Theta^*$ ) a lineáris lengőrendszereknél megszokott módon feltesszük, hogy

$$f_{struct} = f_{0struct} \sqrt{\frac{\Theta_0^*}{\Theta^*}}. \quad (5.37)$$

Úgy fogjuk a szabályozót megtervezni, hogy a (zavarás nélküli) zárt rendszer, amely kéttárolós lengő tag,  $\omega_0$  csillapítatlan saját-körfrekvenciája a strukturális körfrekvencia alatt maradjon megfelelő biztonsággal:

$$\omega_0 \leq 0.5\omega_{struct} = 0.5\omega_{0struct} \sqrt{\frac{\Theta_0^*}{\Theta^*}}. \quad (5.38)$$

Végezzük el a tervezést. A tachometrikus belső visszacsatolás következtében a motor időállandója lecsökken  $\Theta^*/f$  értékről

$$T_v = \frac{\Theta^*}{f + A_v A_m} \quad (5.39)$$

értékre, mivel eredője

$$\begin{aligned} W_2(s) &= \frac{\frac{A_m}{f + \Theta^* s}}{1 + A_v \frac{A_m}{f + \Theta^* s}} = \frac{A_m}{f + A_v A_m + \Theta^* s} \\ &= \frac{A_m}{f + A_v A_m} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\Theta^* s}{f + A_v A_m} s}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

A felnyitott kör  $W_0(s)$  átviteli függvénye:

$$W_0(s) = \frac{A_e A_m}{(f + A_v A_m + \Theta^* s) \nu_i s} = \frac{K}{s(1 + sT_v)}, \quad (5.41)$$

ahol  $K$  a körerősítés ( $s^{-1}$ ):

$$K = \frac{A_e A_m}{\nu(f + A_v A_m)}. \quad (5.42)$$

A zárt rendszer (zavaró jellemző nélküli)  $W(s)$  átviteli függvénye:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{W_0}{1 + W_0} = \frac{A_e A_m}{A_e A_m + \nu(f + A_v A_m)s + \nu\Theta^* s^2} = \\ &= \frac{1}{1 + 2\xi T s + T^2 s^2} \end{aligned} \quad (5.43)$$

alakú, ahol a  $\xi$  csillapítás és az  $\omega_0 = 1/T$  csillapítatlan saját-körfrekvencia értéke:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{A_e A_m}{\nu_i \Theta^*}}, \quad (5.44)$$

$$\xi = \frac{\nu(f + A_v A_m)}{2\sqrt{\frac{\nu\Theta^*}{A_e A_m}}} = \frac{f + A_v A_m}{2\sqrt{\frac{\Theta^* A_e A_m}{\nu}}}. \quad (5.45)$$

Az előírások szerint gyors tranziens ( $\omega_0 \rightarrow \max$ ) és aperiodikus határeset ( $\xi = 1$ ) a cél. Az aperiodikus határeset a leggyorsabb működés mellett biztosítja a túllövésmentes tranzienset. A túllövés elkerülése azért szükséges, hogy a tranziens során a robot ne ütközzék a környezetében lévő tárgyakkal, jól megtervezett pálya esetén a tranziens hibák következtében. A kielégítendő feltételek:

$$\omega_0 = 0.5\omega_{0struct} \Rightarrow \sqrt{\frac{A_e A_m}{\nu\Theta^*}} = 0.5\omega_{0struct} \sqrt{\frac{\Theta_0^*}{\Theta^*}}, \quad (5.46)$$

$$\xi = 1 \Rightarrow \frac{f + A_v A_m}{2\sqrt{\frac{\Theta^* A_e A_m}{\nu}}}, \quad (5.47)$$

melyek megoldása:

$$A_e = 0.25\omega_{0struct}^2 \frac{\nu\Theta_0^*}{A_m} = \pi^2 f_{0struct}^2 \frac{\nu\Theta_0^*}{A_m}, \quad (5.48)$$

$$f + A_v A_m = 2\pi f_{0struct} \sqrt{\Theta_0^*} \sqrt{\Theta^*}. \quad (5.49)$$

Vezessük be a

$$G = \frac{f + A_v A_m}{\sqrt{\Theta_0^*}} = 2\pi f_{0struct} \sqrt{\Theta_0^*} \quad (5.50)$$

jelölést, akkor  $A_v$  alakja:

$$A_v = \frac{G\sqrt{\Theta^*} - f}{A_m}. \quad (5.51)$$

A szabályozóban  $A_e$  beállítható az (5.48) szerinti, terheléstől független maximális értékre. A csillapított tranziens biztosítása érdekében vagy a pályától ( $\bar{D}_{ii}$ ) és a tehertől függően utánállítjuk  $A_v$  értékét (5.51) szerint ( $\xi = 1$ ; aperiodikus határeset), vagy fixen beállítjuk  $A_v$  értékét a  $\Theta_{max}^*$  érték alapján. Utóbbi esetben kisebb terhelésnél a tranziens túlcillapított és lassúbb lesz a kellenénél.

### 5.2.3. A követési tulajdonságok javítása

Az előző alpontban megtervezett szabályozóbeállítás (zavaró jellemző mentes esetben) stabilis működést és kedvező tranziens eredményez **ugrás alakú alapjelváltás** esetén (pont-pont vezérlés csuklókoordinátákban). A következőkben a követési tulajdonságok javítására nem ugrás alakú alapjel esetén előreccatolást (feedforward kompenzációt) fogunk alkalmazni. A szuperpozíció elvét alkalmazva külön-külön vizsgáljuk a sebességugrás és a gyorsulásugrás alakú alapjel esetét.

**Sebességugrás alakú alapjel** esetén a  $\dot{q}_a(t) = \text{const.}$  jelet kell állandósult állapotban hibamentesen követni. Ehhez olyan  $\hat{u}_v$  jelet vezetünk be, hogy az 5.3. ábra szerinti hatásvázlatban az  $1/(\Theta^* s)$  integrátor kimenetén állandósult állapotban  $\dot{q}_a/\nu$  konstans jel legyen, vagyis

az integrátor bemenetén nulla legyen:

$$-\nu \dot{q}_a f - \nu \dot{q}_{ia} A_v A_m + \hat{u}_v A_m = 0, \quad (5.52)$$

$$\hat{u}_v(t) = \nu \left[ \frac{f}{A_m} + A_v \right] \dot{q}_a(t). \quad (5.53)$$

**Gyorsulásugrás alakú alapjel** esetén  $\ddot{q}_a = \text{const.}$  jelet kell állandósult állapotban hibamentesen követni. Ehhez az  $1/(\Theta^* s)$  integrátor bemenetén  $\Theta^* \nu \ddot{q}_a$  jelnek kell lennie, amelynek biztosításához  $\hat{u}_v$  mellett még egy  $\hat{u}_a$  jelet is be kell vezetni:

$$\hat{u}_a A_m = \nu \ddot{q}_a \Theta^*, \quad (5.54)$$

$$\hat{u}_a(t) = \frac{\nu \Theta^*}{A_m} \ddot{q}_a(t). \quad (5.55)$$

A követési tulajdonságokat jelentősen le tudja rontani a **Coulomb-súrlódás**. Ha kísérletileg meghatároztuk értékét álló helyzetben indításkor ( $M_{stat}$ ) és mozgáskor ( $M_{dyn}$ ), akkor tovább javítható a követési tulajdonság egy  $\hat{u}_{cb}$  jel hozzávételével, amely álló helyzetben egy impulzust, mozgás közben egy állandó jelet biztosít:

$$u_{cb} = \begin{cases} \frac{M_{stat}}{A_m \Delta t} \text{sign}(q_a - q) \{1(t) - 1(t + \Delta t)\} & \text{álló helyzetben,} \\ \frac{M_{dyn}}{A_m} \text{sign}(\dot{q}) & \text{mozgás közben.} \end{cases} \quad (5.56)$$

A követési tulajdonságok javítása érdekében bevezetett  $\hat{u}_v + \hat{u}_a + \hat{u}_{cb}$  korrekció igényli az  $f$ ,  $\Theta^*$ ,  $\nu$ ,  $A_m$ ,  $M_{stat}$  és  $M_{dyn}$  paraméterek kielégítő pontosságú ismeretét a szabályozó számára. Az ezek alapján bevezetett korrekció akár hibanövelő hatású is lehet, ha a paraméterek értékét pontatlanul ismerjük.

#### 5.2.4. A terhelés kompenzálás előreccsatolással

A terhelés és más szegmensek csatoló hatásának kiküszöbölése érdekében előre ismert  $\mathbf{q}_a(t)$  pálya és teher esetén  $F_i^*$  előre (off-line) kiszámítható az (5.20)–(5.23) egyenletek alapján, háttértárolón tárolható, majd onnan visszajátszható (on-line) a robot mozgása során. Ha a terhelés a névlegeshez képest lényegesen megváltozik, vagy a pálya nem ismert előre (például egy látórendszer adataiból on-line számítják), akkor  $F_i^*$  számítását on-line kell elvégezni, amely már nem végezhető el csuklónként önállóan (lokálisan, decentralizáltan) hanem csak centralizáltan (az összes érzékelő adata és az összes robotparaméter alapján). Ha  $F_i$  képletszerűen ismert, akkor a számítás decentralizálható, de a hozzáférést a közös adatokhoz ekkor is biztosítani kell. A csatoló hatás kiküszöbölésére az  $\hat{u}^*$  pótlólagos jelet kell bevezetni:

$$\hat{u}^*(t) = \frac{1}{\nu A_m} F_i^*(t). \quad (5.57)$$

Mivel a tranziens hibák következtében a  $\mathbf{q}_a(t)$  pálya és a  $\mathbf{q}(t)$  trajektória eltérnek egymástól, ezért jobb eredményre vezet, ha  $F_i^*(t)$  értékét a  $\mathbf{q}(t)$  trajektória mentén számítjuk. Ez azonban csak on-line végezhető el. Végeredményben az összes korrekció hatását kell alkalmazni:

$$\hat{u} = \hat{u}_v + \hat{u}_a + \hat{u}_{cb} + \hat{u}^*. \quad (5.58)$$

Bár  $F_i^*$  számítása erősen gépidőigényes, gyakorlati tapasztalatok alapján a tipikus ipari robotoknál 30–60 ms időközönkénti kiszámítása célszerű.

#### 5.2.5. Decentralizált PID-szabályozás stabilitása és robusztussága

Az előzőekben tárgyalt soros erősítővel és tachometrikus visszacsatolással történő szabályozás egy soros PD- jellegű kompenzációnak felel meg. Felvetődik a kérdés, hogyan viselkednek a robothajtások, ha az általánosabb soros PID-kompenzálást alkalmazzuk.

**Pont-pont irányítás** esetén Arimoto és Miyazaki [5] részletesen vizsgálták DC-szervohajtások stabilitását és robusztusságát a robot paramétereinek (tömeg, tehetetlenségi nyomaték, teher) változásakor PID-szabályozás mellett. A vizsgálathoz Ljapunov direkt módszerét, speciálisan LaSalle tételét (Függelék C) használták.

A DC-szervohajtásokat célszerű két csoportra osztani.

**Áramszabályozott DC-szervomotorok** esetén a bemenő nyomaték arányos az árammal, amely gyors visszacsatolással szabályozható megfelelő teljesítményelektronikával és az érzékelők jeleinek gyors digitális feldolgozásával. A gyors szabályozás miatt a beavatkozó szerv dinamikája elhanyagolható.

**Feszültség szabályozott DC-motorok** esetén a bemenő nyomaték csak közvetve, a motorban fellépő elektromechanikus csatolás révén realizálódik, ezért ajánlott figyelembe venni a beavatkozó szerv dinamikáját is.

Arimoto és Miyazaki bebizonyították, hogy **áramszabályozott DC-szervomotorok** esetén az

$$M_i = a_i(q_{i0} - q_i) + b_i \int_0^t (q_{i0} - q_i) dt - c_i \dot{q}_i \quad (5.59)$$

lokális PID-szabályozás aszimptotikusan stabilis a névleges robotparaméterek környezetében, ha  $a_i, b_i, c_i > 0$ . Ez azt jelenti, hogy

$$\dot{q}_i(t) \rightarrow 0 \text{ és } q_i(t) \rightarrow q_{i0}, \text{ ha } t \rightarrow \infty. \quad (5.60)$$

**Feszültség szabályozott DC-szervomotorok** esetén a PID-szabályozást a  $g_i(\mathbf{q})$  gravitációs hatás előre csatolt kompenzálásával kiegészítve, az

$$u_i = \frac{1}{A_{mi}} \{ a_i(q_{i0} - q_i) + b_i \int_0^t (q_{i0} - q_i) dt - c_i \dot{q}_i + g_i(\mathbf{q}) \} \quad (5.61)$$

szabályozási törvény eredményez aszimptotikusan stabilis és robusztus szabályozást. A bizonyítás kihasználja, hogy a  $T_i = L_{r_i}/R_{r_i}$  elektromos

időállandó kicsi (tipikusan 0.001–0.0001 s; a bázis szegmensnél 0.01–0.001 s), ezért a  $T_i = 0$  esetén fennálló stabilitásból a szingulárisan perturbált rendszerek [7] elmélete szerint következik a valódi rendszer stabilitása.

### 5.1. Példa: Stabilitásvizsgálat Ljapunov direkt módszerével

Igazoljuk LaSalle tételével (Függelék C), hogy az  $F_i = a_i(q_{i0} - q_i) + b_i \int_0^t (q_{i0} - q_i) dt - c_i \dot{q}_i$  nyomatókkal a robot pont-pont irányítása stabilizálható.

A robot Lagrange-egyenletéből indulunk ki. Felhasználjuk, hogy a robot kinetikai energiája a csuklókoordináta-deriváltaknak kvadratikus alakja:

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (5.62)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F}. \quad (5.63)$$

Vezessük be a

$$\mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (5.64)$$

jelölést. A potenciális energia hatása mellett vegyük figyelembe a sűrűsödést, a paraméterek pontatlan ismeretét stb. egy függvénnyel, melyet állandósult értékre és attól való eltérésre bontunk. Mivel

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p}, \quad (5.65)$$

ezért a függvényt  $\dot{\mathbf{q}}$  és  $\mathbf{q}$  helyett a  $\mathbf{p}$  és  $\mathbf{q}$  változóban írjuk fel:

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{q}_0) + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{p}, \mathbf{q} - \mathbf{q}_0). \quad (5.66)$$

Feltesszük, hogy a változásra egy bizonyos tartományban teljesül, hogy

$$\|\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{p}, \mathbf{q} - \mathbf{q}_0)\| \leq k_1 \|\mathbf{p}\| + k_2 \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0\|. \quad (5.67)$$

Bevezetve az

$$\mathbf{A} = \text{diag}(a_i), \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_i), \quad \mathbf{C} = \text{diag}(c_i), \quad (5.68)$$

$$\boldsymbol{\xi} = \int_0^t (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) dt + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{f}(0, \mathbf{q}_0) \quad (5.69)$$

jelöléseket, a szabályozás (robot+szabályozó) dinamikus egyenleteit az  $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q} - \mathbf{q}_0, \boldsymbol{\xi})$  állapotváltozókkal az alábbi alakban kapjuk:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{p}, \mathbf{q} - \mathbf{q}_0) - \mathbf{A}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) - \mathbf{C}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{p} - \mathbf{B}\boldsymbol{\xi}, \quad (5.70)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{p}, \quad (5.71)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0. \quad (5.72)$$

Válasszuk Ljapunov-függvényként a

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} [\mathbf{p}^T \quad \mathbf{q}^T - \mathbf{q}_0^T \quad \boldsymbol{\xi}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{-1} & \alpha \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \alpha \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} & \alpha \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{p} + \alpha \mathbf{p}^T (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^T \mathbf{A} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) + \\ &+ (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^T \mathbf{B} \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2} \alpha \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{B} \boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

kifejezést. Akkor a Ljapunov-függvény deriváltja az idő szerint:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \mathbf{p}^T \mathbf{H}^{-1} \dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \frac{d(\mathbf{H}^{-1})}{dt} \mathbf{p} + \alpha \dot{\mathbf{p}}^T (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) + \\ &+ \alpha \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \boldsymbol{\xi} + (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^T \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\xi}} + \\ &+ \alpha \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\xi}}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

A (B.19) deriválási szabály felhasználásával

$$\frac{d(\mathbf{H}^{-1})}{dt} = -\mathbf{H}^{-1} \frac{d\mathbf{H}}{dt} \mathbf{H}^{-1} = -\mathbf{H}^{-1} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} \right) \mathbf{H}^{-1}, \quad (5.75)$$

ahonnan következik, hogy

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \frac{d(\mathbf{H}^{-1})}{dt} \mathbf{p} &= -\frac{1}{2} \sum_i \dot{q}_i \{ \mathbf{p}^T \mathbf{H}^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{p} \} = \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \{ \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}} \} = -\frac{1}{2} \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial K}{\partial q_i} = \\
 &= -\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{H}^{-1} \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}}. \quad (5.76)
 \end{aligned}$$

Behelyettesítve  $\dot{V}(x)$  kifejezésébe az így kapott összefüggést és  $\dot{\mathbf{p}}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\xi$  értékét (a megfelelő differenciálegyenletek jobb oldalát), az egymást kiejtő tagok figyelembevétele után a következő alakhoz jutunk:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x) &= \alpha(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^T \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{p}^T (\mathbf{H}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{H}^{-1} - \alpha \mathbf{H}^{-1}) \mathbf{p} - \\
 &\quad - (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^T (\alpha \mathbf{A} - \mathbf{B}) \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 - (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^T \alpha \mathbf{C} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{p} - \\
 &\quad - \mathbf{p}^T \mathbf{H}^{-1} \tilde{\mathbf{f}} - \alpha(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^T \tilde{\mathbf{f}}. \quad (5.77)
 \end{aligned}$$

Annak érdekében, hogy a  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  feltételt (legalább egy korlátos tartományban az egyensúlyi pont körül) igazolni tudjuk, szükség van néhány átalakításra:

$$1. \quad (\sqrt{\mathbf{C}} \mathbf{a} + \sqrt{\mathbf{C}} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{b})^2 \geq 0 \Rightarrow \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned}
 -2 < \sqrt{\mathbf{C}} \mathbf{a}, \sqrt{\mathbf{C}} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{b} > \leq < \sqrt{\mathbf{C}} \mathbf{a}, \sqrt{\mathbf{C}} \mathbf{a} > + \\
 < \sqrt{\mathbf{C}} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{b}, \sqrt{\mathbf{C}} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{b} >, \quad (5.79)
 \end{aligned}$$

$$-2 < \mathbf{a}, \mathbf{C} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{b} > \leq < \mathbf{a}, \mathbf{C} \mathbf{a} > + < \mathbf{b}, \mathbf{H}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{b} >, \quad (5.80)$$

$$\begin{aligned}
 -\alpha(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^T \mathbf{C} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{p} &\leq \frac{\alpha}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^T \mathbf{C} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) + \\
 &\quad + \frac{\alpha}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{p}; \quad (5.81)
 \end{aligned}$$

$$2. \quad \alpha(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^T \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\alpha}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{H}^{-1} \left\{ \sum_i (q_i - q_{i0}) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} \right\} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{p}. \quad (5.82)$$

Az így kapott összefüggések felhasználásával írható, hogy

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) \leq & -\mathbf{p}^T \mathbf{H}^{-1} \left\{ \mathbf{C} - \alpha \mathbf{H} - \frac{\alpha}{2} \mathbf{C} + \frac{\alpha}{2} \sum_i (q_i - q_{i0}) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} \right\} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{p} - \\ & - (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^T \left\{ \alpha \mathbf{A} - \mathbf{B} - \frac{\alpha}{2} \mathbf{C} \right\} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) - \\ & \mathbf{p}^T \mathbf{H}^{-1} \tilde{\mathbf{f}} - \alpha (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^T \tilde{\mathbf{f}}. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Válasszuk meg a szabályozó paramétereit úgy, hogy

$$\mathbf{A} > \mathbf{C} + 2\alpha^{-1} \mathbf{B} \Rightarrow \quad (5.84)$$

$$\alpha \mathbf{A} - \mathbf{B} - \frac{\alpha}{2} \mathbf{C} > \alpha \mathbf{C} + 2\mathbf{B} - \mathbf{B} - \frac{\alpha}{2} \mathbf{C} = \mathbf{B} + \frac{\alpha}{2} \mathbf{C} \quad (5.85)$$

teljesüljön, akkor elég kis  $\alpha > 0$  és  $\tilde{\mathbf{f}}$ -hoz választott  $r > 0$  esetén az

$$\Omega = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q} - \mathbf{q}_0, \boldsymbol{\xi}) : \|\mathbf{p}\| < r, \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0\| < r\} \quad (5.86)$$

halmazon

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{p} - \frac{1}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^T \mathbf{B} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0). \quad (5.87)$$

A LaSalle-tétel második következményének feltételei teljesülnek  $\mathbf{y} = (\mathbf{p}, \mathbf{q} - \mathbf{q}_0)$  és  $\mathbf{z} = \boldsymbol{\xi}$  választás mellett. Ezért a szabályozás aszimptotikusan stabilis az  $\mathbf{A} > \mathbf{C} + 2\alpha^{-1} \mathbf{B}$  szabályozóbeállítás mellett, ha a kezdeti feltételekre  $\|\mathbf{p}(0)\| < r$  és  $\|\mathbf{q}(0) - \mathbf{q}_0\| < r$  teljesül.

Vegyük észre, hogy az  $r$  érték növelhető, ha  $\tilde{\mathbf{f}}$  (vagy  $\mathbf{f}$ ) értékét becsüljük és bevonjuk a szabályozási algoritmusba (előreecsatolás, feedforward kompenzáció). Lényeges hangsúlyozni, hogy csak az aszimptotikus stabilitásról szól az állítás, ezen belül a tranziens jószágáról, a dinamikus minőségi jellemzőkről (túllövés, szabályozási idő) nincs információnk. Ezekhez az információkhoz szimuláció révén juthatunk.

### 5.3. A KISZÁMÍTOTT NYOMATÉK (NEMLINEÁRIS SZÉTCSATOLÁS) MÓDSZERE

Mivel a robot egy bonyolult, nemlineáris, csatolt rendszer, ezért kézenfekvő úgy irányítani, hogy a különböző szegmensek egymáshatását megszüntessük (a rendszert szétcsatoljuk). Ez a robot dinamikus modelljének ismeretében a meghajtónyomaték speciális alakban történő előállításával lehetséges:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F}, \quad (5.88)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{u} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (5.89)$$

Az eredmény az, hogy a rendszer szétcsatolt kettős integrátorokra bomlik, mivel  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  pozitív definit és ezért invertálható:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{u}. \quad (5.90)$$

A szétcsatolt kettős integrátorok PID-szabályozókkal szabályozhatók:

$$u_i = \ddot{q}_{ai} + k_{Pi}(q_{ai} - q_i) + k_{Ii} \int_0^t (q_{ai} - q_i) dt + k_{Di}(\dot{q}_{ai} - \dot{q}_i). \quad (5.91)$$

A pályatervezés révén az alapjel és deriváltjai ( $q_{ai}$ ,  $\dot{q}_{ai}$ ,  $\ddot{q}_{ai}$ ) mint időfüggvények adottak.

A  $q_{di} = q_{ai} - q_i$  szabályozási hiba kielégíti a

$$q_{di}''' + k_{Di}q_{di}'' + k_{Pi}q_{di}' + k_{Ii}q_{di} = 0 \quad (5.92)$$

differenciálegyenletet, amely exponenciálisan lecsengő  $q_{di}(t)$  szabályozási hibát eredményez, ha a PID-szabályozók paramétereit kedvezően választottuk meg. Felfüggesztve az  $i$  index kiírását, ez a

$$s^3 + k_D s^2 + k_P s + k_I = 0 \quad (5.93)$$

karakterisztikus egyenlet gyökeinek alkalmas megválasztásával befolyásolható. Aperiodikus tranzienszt feltételezve választható például

$$s^3 + k_D s^2 + k_P s + k_I = (s+a)(s+b)^2 = s^3 + (a+2b)s^2 + (2ab+b^2)s + ab^2,$$

amelyhez a szabályozóbeállításnak a következő feltételeket kell betartania:

$$\begin{aligned} a + 2b &= k_D, \\ 2ab + b^2 &= k_P, \\ ab^2 &= k_I. \end{aligned} \quad (5.94)$$

Problémát jelent, hogy a rendelkezésre álló robotmodell paramétereit a valós robotétól eltérhetnek (például a tehetetlenségi mátrix elemei csak pontatlanul ismertek, a teher eltér a névlegestől, a súrlódási együttható pontatlanul ismert stb.) Legyenek a szabályozótervezés alapjául szolgáló modell paramétereit  $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q})$  és  $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , akkor a rendszer működését leíró egyenlet:

$$\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h} = \hat{\mathbf{H}}\mathbf{u} + \hat{\mathbf{h}}, \quad (5.95)$$

ahonnan rendezéssel következik, hogy

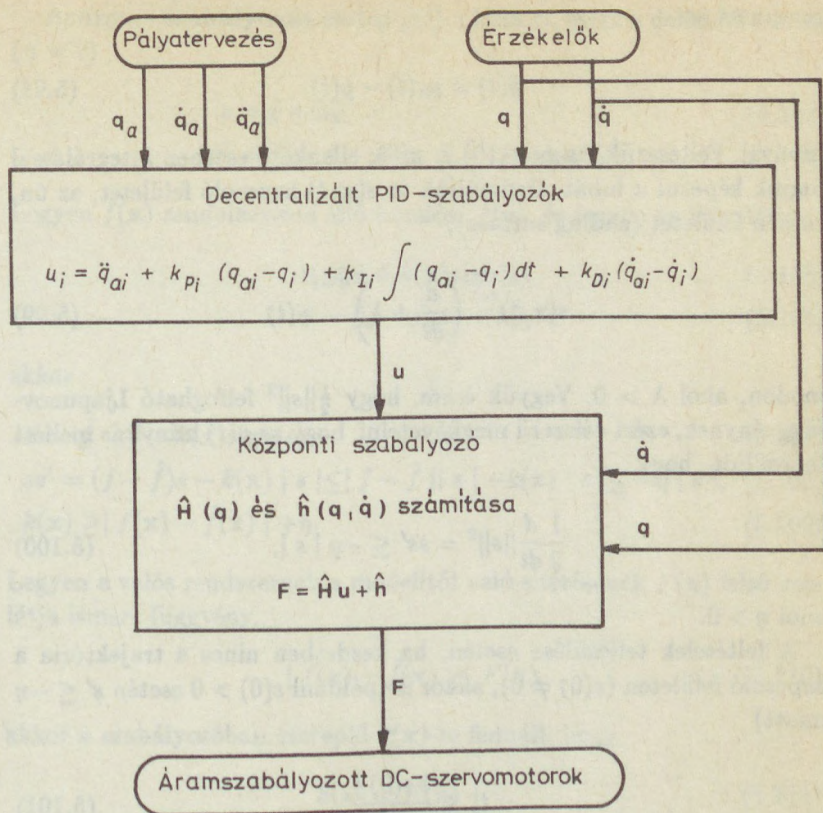
$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}(\mathbf{q})^{-1} \{ \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\mathbf{u} + \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \}. \quad (5.96)$$

A szabályozási kör szimulációjával kell ellenőrizni, hogy a választott szabályozás mennyire viseli el a paraméterek leírásának pontatlanságát. A szabályozót áramszabályozott DC-szervomotorokkal realizálhatjuk (5.4. ábra).

A gyakorlatban erre a szabályozási stratégiára mind a kiszámított nyomatékok módszere (computed torque method), mind a nemlineáris szétcsatolás (nonlinear decoupling; inverse dynamics) elnevezés elterjedt.

## 5.4. VÁLTOZÓ STRUKTÚRÁJÚ IRÁNYÍTÁS

A változó struktúrajú rendszerek a robusztus irányítási stratégiák egyik lényeges területét alkotják [9]. Egyik fontos változó struktúrajú irányítási elv a csúszószabályozás (sliding control). Ennek alkalmazását robotirányításra különösen kiemeli az a tény, hogy a szabályozó nem igényli a pontos modell valós idejű számítását, hanem megelégszik egy egyszerűsített modell és a hibák felső korlátjának számításával [10].



5.4. ábra

A kiszámított nyomaték (nemlineáris szétcsatolás) módszere szerinti szabályozó

### 5.4.1. A csúszó felület alapján történő szabályozás elve

Tekintsük az  $\mathbf{x} = (y, y', \dots, y^{(n-1)})^T$  állapotváltozó mellett az egy-változós

$$y^{(n)}(t) = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u \quad (5.97)$$

rendszer az

$$\tilde{y}(t) = y_a(t) - y(t) \quad (5.98)$$

hibával. Feltesszük, hogy  $\mathbf{x}_a(0) = \mathbf{x}(0)$ ; ellenkező esetben integrálással fogjuk képezni a hibát. Defináljuk az  $s(\mathbf{x}, t)$  kapcsoló felületet, az ún. csúszó felületet (sliding surface),

$$s(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{y}(t) \quad (5.99)$$

módon, ahol  $\lambda > 0$ . Vegyük észre, hogy  $\frac{1}{2} \|s\|^2$  felfogható Ljapunov-függvénynek, ezért célszerű megkövetelni, hogy az  $u(t)$  irányítás mellett teljesüljön, hogy

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|s\|^2 = ss' \leq -\eta |s|, \quad (5.100)$$

ahol  $\eta > 0$ .

A feltételek teljesülése esetén, ha kezdetben nincs a trajektória a kapcsoló felületen ( $s(0) \neq 0$ ), akkor is (például  $s(0) > 0$  esetén  $s' \leq -\eta$  miatt)

$$t_s \leq \frac{|s(0)|}{\eta} \quad (5.101)$$

idő alatt a trajektória biztosan rákerül az  $s(\mathbf{x}, t) = 0$  csúszó felületre, amelyen azután a hiba exponenciálisan lecsengve nullához tart (csúszó üzemmód, sliding mód). A csúszó felület megközelítésének ideje  $\eta$  értékével, míg a lecsengés sebessége a csúszó felületen  $\lambda$  értékével befolyásolható.

## 5.2. Példa: Csúszóirányítás másodrendű rendszer esetén

Legyen az irányítandó rendszer alakja

$$\ddot{y} = f(\mathbf{x}) + u. \quad (5.102)$$

**Arányos szabályozás** esetén  $\tilde{y}(t)$  a hibajel, ezért a definíció szerint ( $n = 2$ )

$$s = \dot{\tilde{y}} + \lambda \tilde{y}, \quad (5.103)$$

$$s' = \ddot{y}_a - \ddot{y} + \lambda \dot{\tilde{y}} = \ddot{y}_a - f - u + \lambda \dot{\tilde{y}}. \quad (5.104)$$

Legyen  $f(\mathbf{x})$  rendelkezésre álló becslése  $\hat{f}(\mathbf{x})$ , és legyen az irányítás

$$u = \hat{u} + k(\mathbf{x})\text{sign}(s), \quad (5.105)$$

$$\hat{u} = \ddot{y}_a - \hat{f}(\mathbf{x}) + \lambda \dot{\tilde{y}}, \quad (5.106)$$

akkor

$$s' = \hat{f} - f - k(\mathbf{x})\text{sign}(s), \quad (5.107)$$

$$ss' = (f - \hat{f})s - k(\mathbf{x}) |s| \leq |f - \hat{f}| |s| - k(\mathbf{x}) |s| \leq -\eta |s|, \quad (5.108)$$

$$k(\mathbf{x}) \geq |f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})| + \eta. \quad (5.109)$$

Legyen a valós rendszernek a modelltől való eltéréseinek  $F(\mathbf{x})$  felső korlátja ismert függvény,

$$|f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})| \leq F(\mathbf{x}), \quad (5.110)$$

akkor a szabályozóban szereplő  $k(\mathbf{x})$ -re fennáll, hogy

$$k(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + \eta. \quad (5.111)$$

**Integráló szabályozás** esetén az  $\int \tilde{y} dt$  hibajelintegrálból indulunk ki, amire nézve  $n = 3$ , ezért a definíció szerint

$$s = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \int \tilde{y} dt = \dot{\tilde{y}} + 2\lambda \tilde{y} + \lambda^2 \int \tilde{y} dt, \quad (5.112)$$

$$s' = \ddot{y}_a - \ddot{y} + 2\lambda \dot{\tilde{y}} + \lambda^2 \tilde{y} = \ddot{y}_a - f - u + 2\lambda \dot{\tilde{y}} + \lambda^2 \tilde{y}, \quad (5.113)$$

ezért a korábbi esethez hasonlóan az irányítás:

$$u = \hat{u} + k(\mathbf{x})\text{sign}(s), \quad (5.114)$$

$$\hat{u} = \ddot{y}_a - \hat{f}(\mathbf{x}) + 2\lambda \dot{\tilde{y}} + \lambda^2 \tilde{y}, \quad (5.115)$$

$$k(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + \eta. \quad (5.116)$$

Integráló szabályozással az  $s(0) = 0$  feltétel betartható, ha az

$$s = \dot{\tilde{y}} + 2\lambda\tilde{y} + \lambda^2 \int_0^t \tilde{y}(\tau) d\tau - \dot{\tilde{y}}(0) - 2\lambda\tilde{y}(0) \quad (5.117)$$

választással élünk.

Az eddigiekben az amplitúdóerősítés ( $b = 1$ ) ismert volt. Tegyük fel, hogy az erősítés előjelét biztosan, az **állapotfüggő erősítést** pedig pontatlanul ismerjük. Ekkor az irányítandó rendszer:

$$\ddot{y} = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u, \quad (5.118)$$

a becült ( $\hat{b}$ ) és a valós ( $b$ ) amplitúdó hányadosára teljesüljön a

$$\beta^{-1} \leq \frac{\hat{b}}{b} \leq \beta \quad (5.119)$$

alsó és felső becslés. Csak az arányos szabályozás esetét vizsgáljuk, mert az integráló esetben csak  $\hat{u}$  módosul. A definíció szerint

$$s = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right) \tilde{y} = \dot{\tilde{y}} + \lambda\tilde{y}, \quad (5.120)$$

$$s' = \ddot{y}_a - \ddot{y} + \lambda\dot{\tilde{y}} = \ddot{y}_a - f - bu + \lambda\dot{\tilde{y}}. \quad (5.121)$$

Legyen a szabályozó alakja

$$u = \hat{b}^{-1} \{ \hat{u} + k(\mathbf{x}) \text{sign}(s) \}, \quad (5.122)$$

$$\hat{u} = \ddot{y}_a - \hat{f}(\mathbf{x}) + \lambda\dot{\tilde{y}}, \quad (5.123)$$

akkor visszahelyettesítve  $u(t)$  alakját  $s'$  kifejezésébe, átalakítások után írható, hogy

$$s' = \hat{f} - f + (1 - \hat{b}\hat{b}^{-1})\hat{u} - \hat{b}\hat{b}^{-1}k(\mathbf{x})\text{sign}(s), \quad (5.124)$$

$$ss' \leq |f - \hat{f}| |s| + |1 - \hat{b}\hat{b}^{-1}| |\hat{u}| |s| - \hat{b}\hat{b}^{-1}k(\mathbf{x}) |s| \leq -\eta |s|, \quad (5.125)$$

$$k(\mathbf{x}) \geq \hat{b}\hat{b}^{-1} |f - \hat{f}| + |\hat{b}\hat{b}^{-1} - 1| |\hat{u}| + \hat{b}\hat{b}^{-1}\eta. \quad (5.126)$$

A  $\hat{b}b^{-1}$  értékére vonatkozó becslés alapján választható, hogy

$$k(\mathbf{x}) = \beta(F + \eta) + (\beta - 1) |\hat{u}|. \quad (5.127)$$

Sok esetben az erősítésre vonatkozó becslés

$$b_{\min} \leq b \leq b_{\max} \quad (5.128)$$

alakban áll rendelkezésre, amelyről egyszerű módon lehet az előző alakra áttérni:

$$\hat{b} := \sqrt{b_{\max} \cdot b_{\min}}, \quad (5.129)$$

$$\beta := \sqrt{\frac{b_{\max}}{b_{\min}}}, \quad (5.130)$$

$$\beta^{-1} \leq \frac{\hat{b}}{b} \leq \beta. \quad (5.131)$$

A csúszószabályozás realizálásának van egy kellemetlen problémája. Mivel  $k(\mathbf{x})$  a csúszó felületen általában nem nulla és

$$\text{sign}(s) = \begin{cases} +1, & \text{ha } s > 0, \\ 0, & \text{ha } s = 0, \\ -1, & \text{ha } s < 0, \end{cases} \quad (5.132)$$

ezért az irányítás a kapcsoló felület pontjaiban nem folytonos, az ugrás értéke  $\pm k(\mathbf{x})$ . Amikor a trajektória eléri az  $s(\mathbf{x}, t) = 0$  csúszó felületet, az irányításnak **nulla idő alatt**  $\pm k(\mathbf{x})$  értékű ugrást kellene produkálnia, ami képtelenség. A trajektória ezért kissé átlép a csúszó felület másik oldalára, majd onnan fordul vissza ismét a csúszó felülethez, amikor is a csúszó felület előző oldalára csap át. Közben a felület két oldala között  $\pm 2k(\mathbf{x})$  értékű az irányításváltozás, ezért csúszó módban az irányítás nagy amplitúdóval "csattog" (control chattering). Ha az irányított rendszerben ez a nagyfrekvenciás jelváltozás káros, akkor módosítani kell az irányítási elven. Robotok esetén a nem modellezett strukturális körfrekvencia ( $\omega_{struct}$ ) miatt mindig ez a helyzet.

### 5.4.2. Az irányítás nagyfrekvenciás komponenseinek kiküszöbölése

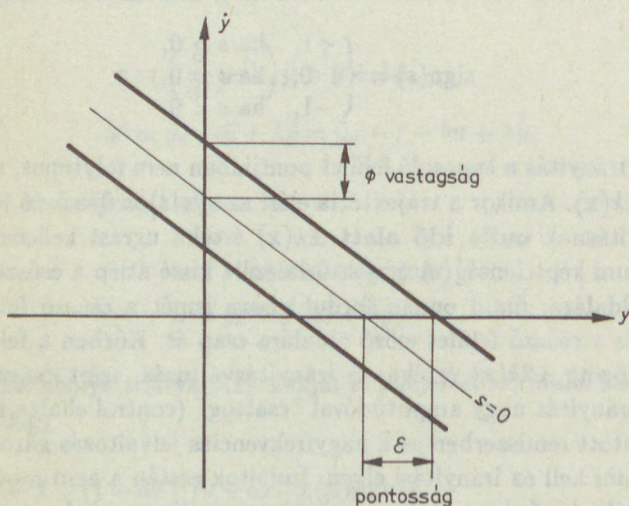
A baj oka a  $\text{sign}(s)$  függvény ugráshelye, ezt kell megszüntetni. Kézenfekvő a  $\text{sat}(s/\phi)$  telítésfüggvénnyel próbálkozni:

$$\text{sat}(s/\phi) = \begin{cases} 1, & \text{ha } s > \phi, \\ s/\phi, & \text{ha } -\phi \leq s \leq \phi, \\ -1, & \text{ha } s < -\phi, \end{cases} \quad (5.133)$$

Ennek ára az, hogy a csúszó felület köré egy **határréteget** képezünk (boundary layer neighboring):

$$B(\mathbf{x}, t) = \{\mathbf{x} : |s(\mathbf{x}, t)| \leq \phi\}. \quad (5.134)$$

A határrétegen kívül megtartjuk az eddigi irányítást, míg a határrétegen belül  $u$  értékét  $\text{sat}(s/\phi)$  segítségével interpoláljuk. Például ismert erősítés, arányos szabályozás és  $y_a = \text{const.}$  esetén az  $s = -\dot{y} + \lambda(y_a - y)$  csúszó felületet körülvevő határréteget a  $\phi$  vastagság és az  $\varepsilon = \phi/\lambda$  pontosság jellemzi (5.5. ábra).



5.5. ábra

A határréteg  $n=2$  esetén

Egy elvi fontosságú tulajdonság, hogy  $\tilde{y}$  és  $\tilde{y}^{(i)}$  korlátos a határrétegben. Ez egyszerűen látható be  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  esetén, míg  $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$  esetén aszimptotikusan lesz igaz. Jelölje ugyanis itt  $p$  a Laplace-transzformáció változóját, akkor

$$\tilde{y} = \frac{1}{(p + \lambda)^{n-1}} s, \quad (5.135)$$

$$\tilde{y}^{(i)} = \frac{p^i}{(p + \lambda)^{n-1}} = \frac{1}{(p + \lambda)^{n-1-i}} \left(1 - \frac{\lambda}{p + \lambda}\right)^i s, \quad (5.136)$$

és többször alkalmazva a konvolúciós tételből következő

$$\left| \int_0^t e^{-\lambda\tau} s(t - \tau) d\tau \right| \leq \phi \int_0^t e^{-\lambda\tau} d\tau \leq \frac{\phi}{\lambda}, \quad (5.137)$$

$$\left| s(t) - \int_0^t e^{-\lambda\tau} s(t - \tau) d\tau \right| \leq \phi + \lambda \frac{\phi}{\lambda} = 2\phi \quad (5.138)$$

becsléseket kapjuk, hogy

$$|\tilde{y}| \leq \frac{\phi}{\lambda^{n-1}} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon, \quad (5.139)$$

$$|\tilde{y}^{(i)}| \leq \frac{1}{\lambda^{n-1-i}} 2^i \phi = (2\lambda)^i \frac{\phi}{\lambda^{n-1}} = (2\lambda)^i \varepsilon. \quad (5.140)$$

Ezért a határréteg belsejében  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_a$  korlátos,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_a + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (5.141)$$

Tekintsük ezután a szabályozó tervezését határréteg esetén. A határréteg vastagságát ( $\phi$ ) időben változó értékűre fogjuk választani, hogy ezáltal a követési pontosságot ( $\tilde{y}$ ) kedvezően tudjuk befolyásolni. Módosítjuk az  $\frac{1}{2} \|s\|^2$  deriváltjára vonatkozó feltételt:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|s\|^2 = ss' \leq (\dot{\phi} - \eta) |s|. \quad (5.142)$$

Ez azt jelenti, hogy szigorúbb feltételt támasztunk  $\dot{\phi} < 0$  esetén mint  $\dot{\phi} > 0$  esetén.

### 5.3. Példa: Kapcsolási sáv tervezése másodrendű rendszer esetén

Először az ismert erősítésű esetet ( $b = 1$ ) tekintjük. Nyilvánvalóan  $\dot{\phi}$  és  $\eta$  ellentétes hatású, ezért ha  $k(\mathbf{x})$  tartozik határréteg nélkül  $\eta$ -hoz, akkor határréteggel

$$\tilde{k}(\mathbf{x}) = k(\mathbf{x}) - \dot{\phi}, \quad (5.143)$$

$$u = \hat{u} + \tilde{k}(\mathbf{x})\text{sat}(s/\phi) \quad (5.144)$$

szükséges. A határréteg belsejében akkor

$$s' = \hat{f} - f - \tilde{k}(\mathbf{x})s/\phi \quad (5.145)$$

teljesül, amiből  $\mathbf{x}$  korlátossága miatt következik, hogy

$$s' = -\tilde{k}(\mathbf{x}_a)s/\phi + \Delta f(x_a) + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (5.146)$$

Ezért  $s'$  úgy viselkedik mint egy egytárolós tag az előirt  $\mathbf{x}_a(t)$  trajektória mentén, amelyet egy korlátos zavarás ér. Válasszuk az időállandót  $\lambda$  értékűre, akkor a

$$\frac{\tilde{k}(\mathbf{x}_a) s'}{\phi} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \quad (5.147)$$

mérlegfeltétel alakhoz (balance condition) jutunk. Innen (5.143) figyelembevételével a határréteg változtatására

$$\dot{\phi} + \lambda\phi = k(\mathbf{x}_a) \quad (5.148)$$

következik.

Tekintsük most az állapotfüggő erősítés esetét. Ekkor (5.126) és  $\eta := \eta - \dot{\phi}$  alapján következik, hogy

$$\tilde{k}(\mathbf{x}) \geq k(\mathbf{x}) - \frac{\hat{b}}{b} \dot{\phi}, \quad (5.149)$$

$$\dot{\phi} > 0 : \tilde{k}(\mathbf{x}) \geq k(\mathbf{x}) - \left(\frac{\hat{b}}{b}\right)_{\min} \dot{\phi} = k(\mathbf{x}) - \beta^{-1} \dot{\phi}, \quad (5.150)$$

$$\tilde{k}(\mathbf{x}_a) = k(\mathbf{x}_a) - \beta^{-1} \dot{\phi}, \quad (5.151)$$

$$\dot{\phi} < 0 : \tilde{k}(\mathbf{x}) \geq k(\mathbf{x}) + \left(\frac{\hat{b}}{b}\right)_{\max} (-\dot{\phi}) = k(\mathbf{x}) - \beta \dot{\phi}, \quad (5.152)$$

$$\tilde{k}(\mathbf{x}_a) = k(\mathbf{x}_a) - \beta \dot{\phi}, \quad (5.153)$$

Írjuk elő, hogy változó erősítés esetén teljesüljön a

$$\frac{\tilde{k}(\mathbf{x}_a)}{\phi} \beta \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \quad (5.154)$$

mérlegfeltétel, ekkor a határreteg változtatására kapjuk, hogy

$$\dot{\phi} > 0 : \frac{\phi \lambda}{\beta} = k(\mathbf{x}_a) - \beta^{-1} \dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} + \lambda \phi = \beta k(\mathbf{x}_a), \quad (5.155)$$

$$\dot{\phi} < 0 : \frac{\phi \lambda}{\beta} = k(\mathbf{x}_a) - \beta \dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} + \frac{\lambda}{\beta^2} \phi = \frac{1}{\beta} k(\mathbf{x}_a). \quad (5.156)$$

### 5.4.3. Robot változó struktúrájú irányítása

Alkalmazzuk a csúszó módusú (integráló) irányítás elvét robotra:

$$\text{Robot :} \quad \mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h} = \mathbf{F}. \quad (5.157)$$

$$\text{Szabályozó :} \quad \mathbf{F} = \hat{\mathbf{H}}\mathbf{u} + \hat{\mathbf{h}}, \quad (5.158)$$

$\mathbf{u} = ?$  csúszó módusú.

$$\text{Rendszer :} \quad \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}^{-1}(\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h}) + \mathbf{H}^{-1}\hat{\mathbf{H}}\mathbf{u}. \quad (5.159)$$

Elvárható, hogy a becslések vannak annyira jók, hogy  $\mathbf{H}^{-1}\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{I} + \mathbf{H}^{-1}(\hat{\mathbf{H}} - \mathbf{H})$  miatt a főátlóban pozitív elemek állnak (ismert az erősítés előjele). Jelölje  $\mathbf{H}^{-1}$   $i$ -edik sorát  $(\mathbf{H}^{-1})_{i-\text{edik sor}}$ . Legyen  $\Delta \mathbf{h} = \hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h}$ , és tetszőleges  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  vektor esetén  $\mathbf{x}^+ = (|x_1|, \dots, |x_n|)^T$ . Az  $i$ -edik csatolt alrendszerre alkalmazzuk a csúszóirányítás elvét:

$$\ddot{q}_i = (\mathbf{H}^{-1})_{i-\text{edik sor}} \cdot \Delta \mathbf{h} + (\mathbf{H}^{-1}\hat{\mathbf{H}})_{ii} u_i + \sum_{i \neq j} (\mathbf{H}^{-1}\hat{\mathbf{H}})_{ij} u_j, \quad (5.160)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{i,\min} &\leq (\mathbf{H}^{-1}\hat{\mathbf{H}})_{ii} \leq b_{i,\max} \\ \beta_i &= \sqrt{\frac{b_{i,\max}}{b_{i,\min}}} \\ G_i &= \hat{b}_i^{-1} = 1/\sqrt{b_{i,\max} \cdot b_{i,\min}} \end{aligned} \right\} \text{függvényei } \mathbf{q} \text{-nak.} \quad (5.161)$$

Akkor a csúszószabályozó algoritmusa (5.115), (5.117) és (5.126) szerint

$$u_i = G_i(\mathbf{q})\{\hat{u}_i + \tilde{k}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\text{sat}(s_i/\phi_i)\}, \quad (5.162a)$$

$$\hat{u}_i = \ddot{q}_{ai} + 2\lambda\dot{\tilde{q}}_i + \lambda^2\tilde{q}_i, \quad (5.162b)$$

$$s_i = \tilde{q}_i + 2\lambda\dot{\tilde{q}}_i + \lambda^2 \int_0^t \tilde{q}_i(\tau) d\tau - \tilde{q}_i(0) - 2\lambda\dot{\tilde{q}}_i(0), \quad (5.162c)$$

$$k_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \geq \beta_i \{(1 - \beta_i^{-1}) |\hat{u}_i| + (\mathbf{H}^{-1})_{i-\text{edik sor}}^+ \Delta h^+ + \sum_{j \neq i} G_j |\ddot{q}_{aj}| |(\mathbf{H}^{-1}\hat{\mathbf{H}})_{ij}| + \eta_i\}. \quad (5.162d)$$

Vegyük észre, hogy  $k_i$  számításánál az  $u_j \approx G_j \ddot{q}_{aj}$  közelítéssel éltünk. Ellenkező esetben egyenletrendszerek megoldása válik szükségessé (lásd [10], pp. 179–183). A  $\tilde{k}_i$  és  $\phi_i$  számítására az (5.150)–(5.156) egyenleteket kell használni.

## 5.5. SZABÁLYOZÁS DESCARTES-KOORDINÁTÁKBAN

Ha a pályát Descartes-koordinátákban terveztük meg, akkor kézenfekvő lenne a szabályozási stratégiát is Descartes-koordinátákban (pozícióban és orientációban) megfogalmazni. Célszerű lenne a pozíciót és orientációt közvetlenül mérni és nem a geometriai modellből visszszámítani, mivel csak a közvetlen mérés lesz érzékeny a modell által nehezen kezelhető rugalmas alakváltozások figyelembevételére. Sajnos manapság az ilyen érzékelők rendkívül drágák, vagy a kielégítő pontosságú méréshez hosszú feldolgozási idő szükséges. Ezért megelégszünk a csuklókoordináták és deriváltjaik mérésével ( $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ ) és a geometriai vagy kinematikai modell használatával.

### 5.5.1. A pozíció- és orientációhiba számítása

A robot geometriai modellje alapján  $\mathbf{q}_a$  és  $\mathbf{q}$  ismeretében számítható a robot jellegzetes pontjára (rendszerint a szerszámközeppontra, TCP) az alapjel és a szabályozott jellemző  $\mathbf{T}_a$  és  $\mathbf{T}$  homogén transzformációja

a  $K_B$  és  $K_E$  keretek között (a  $B$ ,  $E$  indexeket nem fogjuk kiírni):

$$\mathbf{T}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_a & \mathbf{m}_a & \mathbf{n}_a & \mathbf{p}_a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{l} & \mathbf{m} & \mathbf{n} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.163)$$

Ezért a  $K_B$  keretben közvetlenül felírható a  $\mathbf{p}_a - \mathbf{p}$  pozícióhiba. Az orientációhíbat úgy választjuk meg, hogy deriváltjai közvetlen kapcsolatban álljanak a kinematikai mennyiségek hibáival. Ehhez célszerű az orientációhíbat  $\mathbf{t}\varphi$  tengely körüli forgatásnak felfogni úgy, hogy egy  $\mathbf{t}$  tengely körüli  $\varphi$  forgatás az érzékelő által mért ortonormált  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  vektorokat rendre az alapjel  $\mathbf{l}_a$ ,  $\mathbf{m}_a$ ,  $\mathbf{n}_a$  vektoraiba forgassa be:

$$[\mathbf{l}_a \quad \mathbf{m}_a \quad \mathbf{n}_a] = \mathbf{Rot}(\mathbf{t}, \varphi) [\mathbf{l} \quad \mathbf{m} \quad \mathbf{n}], \quad (5.164)$$

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{t}, \Delta\varphi) = [\mathbf{l}_a \quad \mathbf{m}_a \quad \mathbf{n}_a][\mathbf{l} \quad \mathbf{m} \quad \mathbf{n}]^{-1}. \quad (5.165)$$

A  $\mathbf{t}$  tengelyt és  $\varphi$  szöget meghatározhatjuk az (1.55)–(1.59) összefüggések alapján. Kínálkozik azonban egy **gyorsabb közelítő számítás** is, mivel kis orientációs hibát feltételezve

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{t}, \varphi) \approx \mathbf{I} + \varphi[\mathbf{t} \times], \quad (5.166)$$

$$\mathbf{l}_a = \mathbf{l} + \varphi \mathbf{t} \times \mathbf{l}, \quad (5.167a)$$

$$\mathbf{m}_a = \mathbf{m} + \varphi \mathbf{t} \times \mathbf{m}, \quad (5.167b)$$

$$\mathbf{n}_a = \mathbf{n} + \varphi \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \quad (5.167c)$$

ahonnan következik, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \times \mathbf{l}_a &= \varphi \mathbf{l} \times (\mathbf{t} \times \mathbf{l}) = \varphi \{ \mathbf{t} \langle \mathbf{l}, \mathbf{l} \rangle - \mathbf{l} \langle \mathbf{t}, \mathbf{l} \rangle \} = \\ &= \varphi (\mathbf{t} - \langle \mathbf{t}, \mathbf{l} \rangle \mathbf{l}), \end{aligned} \quad (5.168a)$$

$$\mathbf{m} \times \mathbf{m}_a = \varphi (\mathbf{t} - \langle \mathbf{t}, \mathbf{m} \rangle \mathbf{m}), \quad (5.168b)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{n}_a = \varphi (\mathbf{t} - \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}). \quad (5.168c)$$

Adjuk össze az utolsó három egyenletet és vegyük figyelembe, hogy  $\langle \mathbf{t}, \mathbf{l} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{t}, \mathbf{m} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle$  rendre  $\mathbf{t}$  komponensei az  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  ortonormált irányokban, ezért

$$\mathbf{t}\varphi = \frac{\mathbf{l} \times \mathbf{l}_a + \mathbf{m} \times \mathbf{m}_a + \mathbf{n} \times \mathbf{n}_a}{2}. \quad (5.169)$$

Válasszuk a szabályozás hibájául (error) az

$$\mathbf{x}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_a - \mathbf{P} \\ t\varphi \end{bmatrix} \stackrel{jel}{=} \mathbf{e} \quad (5.170)$$

vektort, amelyet a  $K_B$  keretben határoztunk meg. Akkor  $\mathbf{x}_d$  deriváltjai a kinematikai mennyiségek hibájával fognak kapcsolatban állni:

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_a - \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega}_a - \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{x}}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_a - \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_a - \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (5.171)$$

### 5.5.2. Gyorsulásirányítás (RMAC)

A gyorsulásirányítás (resolved motion acceleration control, RMAC) [8] felfogható (5.92) analogonjának Descartes-koordináták esetén. Követeljük meg ugyanis, hogy a szabályozás  $\mathbf{x}_d$  hibája az

$$\ddot{\mathbf{x}}_d + k_1 \dot{\mathbf{x}}_d + k_2 \mathbf{x}_d = \mathbf{0} \quad (5.172)$$

referenciamodell alapján exponenciálisan lecsengve és aperiodikusan tartson nullához. Ehhez az  $s^2 + k_1 s + k_2 = 0$  karakterisztikus egyenlet  $s_{1,2}$  gyökeinek ki kell elégítenie a  $\text{Re } s_{1,2} < 0$  és  $\text{Im } s_{1,2} = 0$  feltételt, ami

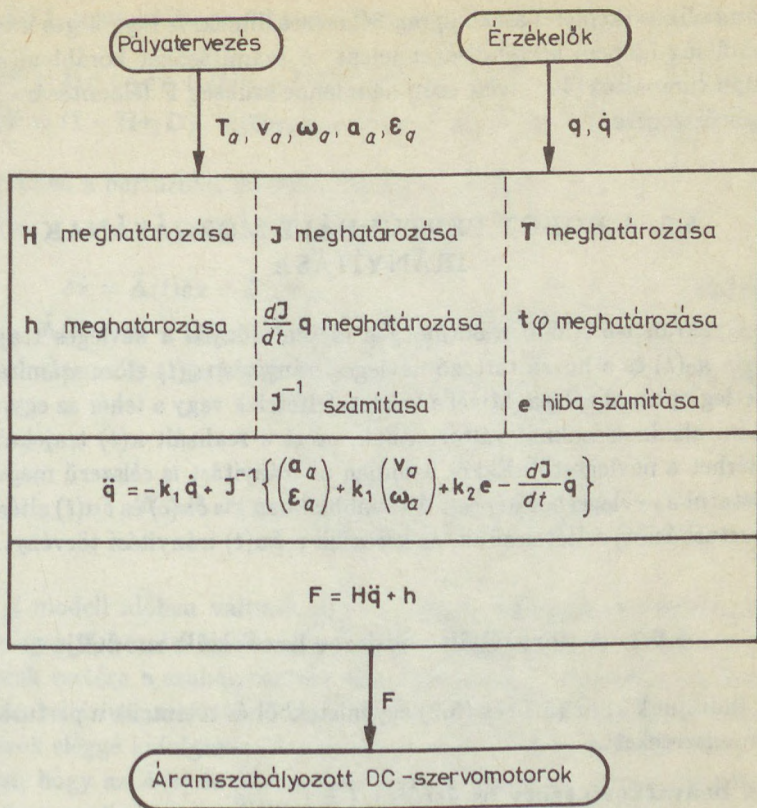
$$k_1 > 0, \quad k_2 > 0, \quad k_1^2 - 4k_2 \geq 0 \quad (5.173)$$

esetén teljesül. Jelölje  $\mathbf{J}$  a szerszámközépponthoz (TCP) tartozó Jacobi-mátrixot, amelyet a  $K_B$  keretben írtunk fel (mivel  $\mathbf{x}_d = \mathbf{e}$  értékét is a  $K_B$  keretben határoztuk meg). Akkor (2.102) alapján az előírt referenciamodellből következik, hogy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_a \\ \boldsymbol{\varepsilon}_a \end{bmatrix} - \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{J}}{dt}\dot{\mathbf{q}} + k_1 \begin{bmatrix} \mathbf{v}_a \\ \boldsymbol{\omega}_a \end{bmatrix} - k_1 \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} + k_2 \mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad (5.174)$$

és **invertálható** Jacobi-mátrix esetén

$$\ddot{\mathbf{q}} = -k_1 \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{a}_a \\ \boldsymbol{\varepsilon}_a \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} \mathbf{v}_a \\ \boldsymbol{\omega}_a \end{bmatrix} + k_2 \mathbf{e} - \frac{d\mathbf{J}}{dt} \dot{\mathbf{q}} \right\}. \quad (5.175)$$



5.6. ábra

Az RMAC algoritmus szerinti szabályozó

Megjegyezzük, hogy  $J$  és  $\frac{dJ}{dt}\dot{q}$  (2.97) szerint rekurzívan is számíthatók  $\Gamma, \Phi, \Omega, \Theta$  meghatározásával, de a számítás végén át kell számítani értéküket a  $K_B$  keretbe. A számított  $\ddot{q}$  és mért  $q, \dot{q}$  alapján képezni kell az  $F$  meghajtónyomatékot a servomotorok számára:

$$F = H(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}). \quad (5.176)$$

A szabályozó sémáját az 5.6. ábra tartalmazza. Az egyes téglalapokban behatárolt funkciók önálló processzorokkal realizálhatók. A vízszintes irányú párhuzamosítás mindig lehetséges, ha a megfelelő képletek

szimbolikus (képlet-) alakban rendelkezésre állnak. A függőleges irányú tagoltság időbeni sorrendiséget jelent. A számításokat korábban már mind tárgyaltuk. Itt kivételesen nem lenne szükség  $\mathbf{F}$  felbontására  $\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}}$  és  $\mathbf{h}$  összegére.

## 5.6. A ROBOT PERTURBÁLT MOZGÁSÁNAK IRÁNYÍTÁSA

Gyakran ismétlődő robotmozgás esetén előnyös a névleges trajektória  $\mathbf{x}_0(t)$  és a hozzá tartozó névleges irányítás  $\mathbf{u}_0(t)$  előre számítása, esetleg optimalizálása. Mivel a kezdeti feltételek vagy a teher az egymás utáni alkalmazásoknál változhatnak, ezért a realizált  $\mathbf{x}(t)$  trajektória eltérhet a névlegestől. Ekkor azonban az irányítást is célszerű megváltoztatni a névlegeshez képest. A továbbiakban kis  $\delta\mathbf{x}(t)$  és  $\delta\mathbf{u}(t)$  eltérést (perturbációt) feltételezünk, és keressük a  $\delta\mathbf{u}(t)$  irányítási törvényt.

### 5.6.1. A perturbált rendszer linearizált modellje

Induljunk ki az (5.1) és (5.2) egyenletekből és tekintsük a perturbált alrendszereket:

$\delta S_i$  beavatkozó szerv és áttétel,  $i = 1, \dots, m$ :

$$\delta\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{A}^i \delta\mathbf{x}^i + \mathbf{b}^i \delta\mathbf{u}_i + \mathbf{d}^i \delta F_i. \quad (5.177)$$

$\delta S_R$  robot:

$$\sum_k \{ H_{ik} \delta\ddot{q}_k + \sum_j \frac{\partial H_{ik}}{\partial q_j} \ddot{q}_k \delta q_j \} + \sum_j \{ \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial h_i}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \} = \delta F_i, \quad (5.178)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}_0) \delta\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}_V(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) \delta\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}_P(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, \ddot{\mathbf{q}}_0) \delta\mathbf{q} = \delta\mathbf{F}, \quad (5.179a)$$

$$H_{Vij} := \frac{\partial h_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad (5.179b)$$

$$H_{Pij} := \frac{\partial h_i}{\partial q_j} + \sum_k \frac{\partial H_{ik}}{\partial q_j} \ddot{q}_k. \quad (5.179c)$$

Az 5.1. pont jelöléseivel következik, hogy

$$\delta \mathbf{F} = \mathbf{H}_{\tau_1}(\mathbf{A}\delta \mathbf{x} + \mathbf{B}\delta \mathbf{u} + \mathbf{D}\delta \mathbf{F}) + \mathbf{H}_V \tau_1 \delta \mathbf{x} + \mathbf{H}_P \tau_2 \delta \mathbf{x}, \quad (5.180)$$

$$\delta \mathbf{F} = (\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\tau_1} \mathbf{D})^{-1} \{[\mathbf{H}_{\tau_1} \mathbf{A} + \mathbf{H}_V \tau_1 + \mathbf{H}_P \tau_2] \delta \mathbf{x} + \mathbf{H}_{\tau_1} \mathbf{B} \delta \mathbf{u}\}, \quad (5.181)$$

és innen a perturbált rendszer lineáris modellje:

$\delta S_{\Sigma}$  :

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{A}}(t) \delta \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{B}}(t) \delta \mathbf{u}, \quad (5.182a)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(t) = \mathbf{A} + \mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\tau_1} \mathbf{D})^{-1} (\mathbf{H}_{\tau_1} \mathbf{A} + \mathbf{H}_V \tau_1 + \mathbf{H}_P \tau_2), \quad (5.182b)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(t) = \mathbf{B} + \mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\tau_1} \mathbf{D})^{-1} \mathbf{H}_{\tau_1} \mathbf{B}. \quad (5.182c)$$

### 5.6.2. A perturbált lineáris rendszer irányítása

A modell időben változó, mert az argumentumokban megjelenik a névleges  $\mathbf{x}(t)$  trajektóriához tartozó  $\mathbf{q}_0(t)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_0(t)$  és  $\ddot{\mathbf{q}}_0(t)$ . Az ilyen rendszerek esetére a szabályozótervezési módszerek – eltekintve a kvadratikus kritérium szerinti optimalizálástól [39] (lásd Függelék G) – nincsenek eléggé kidolgozva. A perturbált rendszer  $\delta S_{\Sigma}$  modellje lehetővé teszi, hogy az  $\tilde{\mathbf{A}}(t)$  és  $\tilde{\mathbf{B}}(t)$  mátrixokat off-line, még a tervezési periódusban analizáljuk és az időtengelyt olyan részintervallumokra osszuk, amelyekben a mátrixok elemei már konstansokkal approximálhatók, és minden időintervallumhoz tartozó autonóm rendszerhez egy-egy többváltozós szabályozást tervezzünk. Erre a célra használhatók az autonóm többváltozós rendszerek időtartománybeli [11], [15], [38] (Függelék D) vagy frekvenciatartománybeli [12], [13], [14] (Függelék E) szabályozótervezési módszerei. Ezek az állapot-visszacsatolást alkalmazó szabályozások képezni tudják az állapot becsült értékét is a determinisztikus Luenberger-megfigyelővel vagy a sztochasztikus Kalman-szűrővel (Függelék H). Egy másik lehetséges módszer a  $\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \delta \mathbf{x} + \mathbf{B}(t) \delta \mathbf{u}$  rendszer **approximálása** egy lineáris, időinvariáns modellel ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  konstans mátrixok) valamilyen identifikációs módszer segítségével, és a szabályozótervezés alapjául az időben "átlagolt" rendszert

lehet választani. Ehhez az átlagolt rendszerhez tervezhetünk egy  $\delta \mathbf{u} = -\mathbf{K}\delta \mathbf{x}$  állapot-visszacsatolást pólusáthelyezéssel, szétcsatolással vagy egy jól megválasztott kvadratikus kritérium optimalizálásával. A szabályozó implementálható egy minimális  $\dim(\mathbf{x}) - \dim(\mathbf{y})$  rendű Luenberger-féle

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Fz} + \mathbf{G}_1\delta \mathbf{y} + \mathbf{G}_2\delta \mathbf{u}, \quad (5.183a)$$

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_1\delta \mathbf{y} + \mathbf{Q}_2\delta \mathbf{z} \quad (5.183b)$$

állapotmegfigyelővel ( $\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$  a mérhető kimenet) vagy Kalman-szűrőn alapuló állapotmegfigyelővel. Az állapot-visszacsatolás  $\delta \mathbf{u} = -\mathbf{K}\delta \mathbf{x}$  alakban realizálható a becsült állapot visszavezetésével.

Egy másik lehetőség az, hogy meghatározzuk

$$(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{K})\mathbf{X}_r = \mathbf{X}_r\mathbf{A}_r \quad (5.184)$$

megoldásait, ahol  $\mathbf{X}_r$  és  $\mathbf{A}_r$  rendje a zárt rendszer sajátvektorainak és sajátértékeinek részhalmazai, és

$$\delta \mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{X}_r(\mathbf{C}\mathbf{X}_r)^{-1}\delta \mathbf{y}$$

alakú **projektív irányítást** alkalmazunk. Szerencsétlenségre ekkor a zárt rendszer spektruma nemcsak  $\mathbf{A}_r$ -ből, hanem  $\mathbf{A}(\mathbf{A}_r)$  reziduális spektrumából is áll, ahol

$$\mathbf{A}_r = [-\mathbf{N} \quad \mathbf{I}]\tilde{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (5.185a)$$

$$[-\mathbf{N} \quad \mathbf{I}]\mathbf{X}_r = \mathbf{0}. \quad (5.185b)$$

Ha  $\mathbf{A}(\mathbf{A}_r)$  nem kielégítő tulajdonságú szabályozástechnikai szempontból, akkor a projektív irányítás ebben az alakban nem alkalmazható. A módszer általánosítható többváltozós PI- és PID-szabályozók tervezésére [15]. Ha spektrumuk nem kielégítő, akkor választhatunk egy általánosított PID-szabályozót, amelynek alakja

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{Fz}_1 + \mathbf{G}_1 \int \delta \mathbf{y} dt + \mathbf{G}_2\delta \mathbf{y}, \quad (5.186a)$$

$$\delta \mathbf{u} = -\mathbf{K}_P\delta \mathbf{y} - \mathbf{K}_I \int \delta \mathbf{y} dt - \mathbf{K}_2\mathbf{z}_1. \quad (5.186b)$$

A tervezés lépéseit Függelék D.5. tartalmazza.

## 6. ERŐIRÁNYÍTÁSI MÓDSZEREK

Ha a robot kontaktusba kerül a környezetével (például egy szerelési feladatnál), akkor ennek során rugalmas alakváltozás és kontaktuserők léphetnek fel. A robot feladatára vonatkozó előírások erről közvetve (a megkívánt engedékenységi alakjában) rendelkeznek. Ezek az előírások nem lehetnek ellentmondásban a robot előírt mozgásával.

Célszerű lenne a szerelési feladatot is pozícióirányítással megoldani, ehhez azonban speciális (RCC) megfogók szükségesek ([26], pp.439-471), és ezeknek is vannak korlátaik. Megvizsgáljuk ezért, hogy milyen erőirányítási módszerek alkalmazására célszerű, és ezek milyen irányítási algoritmussal realizálhatók. Foglalkozunk az engedékenységi centrum és az általánosított centroid fogalmával, az implicit impedanciairányítással és a hibrid pozíció-erő irányítás különféle módjaival.

### 6.1. AZ IRÁNYÍTÁSI MÓDSZEREK OSZTÁLYOZÁSA

A villamos és mechanikai rendszerek között

$$L \frac{di}{dt} + R_i + \frac{1}{C} \int i dt = L \left( \int i dt \right)'' + R \left( \int i dt \right)' + \frac{1}{C} \int i dt = u,$$

$$mx'' + Dx' + \frac{1}{C_r} x = F \quad (6.1)$$

alapján analógia áll fenn:

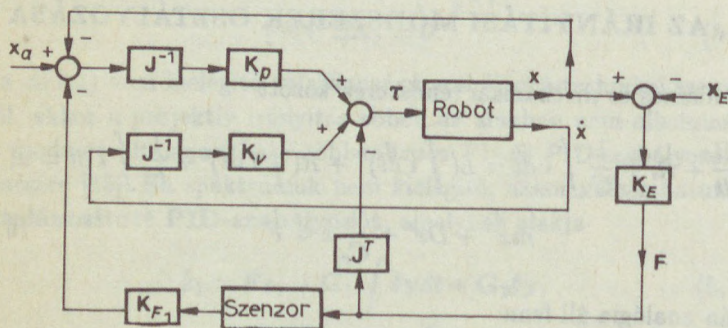
$\int i dt$	$i$	$u$	$L$	$R$	$C$
$x$	$x'$	$F$	$m$	$D$	$C_r$

(6.2)

Ennek alapján induktivitásnak tömeg (inercia), ellenállásnak csillapítás és kapacitásnak engedékenység (compliance) felel meg. Az engedékenység a  $K_r$  merevség (stifness) reciproka. Whitney [16] annak alapján osztályozza a robotirányításokat, hogy a szabályozási algoritmusba bevont hibajelek milyen mechanikai mennyiségekkel súlyozva adnak erőt, illetve ezeknek mik a villamos analógjai. Így beszélhetünk:

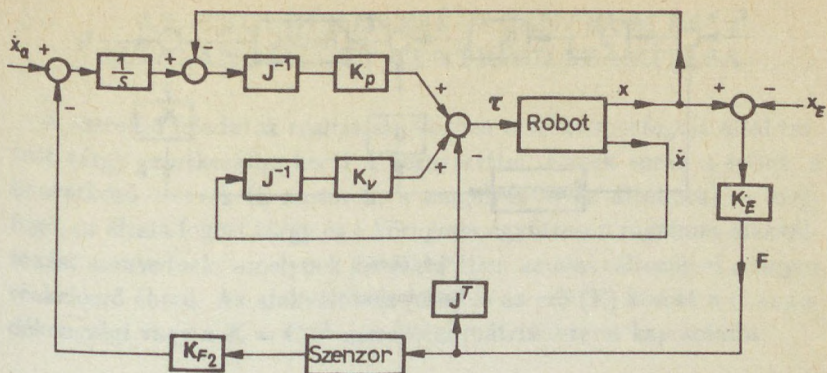
- merevségirányításról ( $x_a - x$ ;  $K_r$ ),
- csillapításirányításról ( $\dot{x}_a - \dot{x}$ ;  $D$ ),
- impedanciairányításról ( $x_a - x$ ,  $\dot{x}_a - \dot{x}$ ;  $K_r = 1/C_r$ ,  $D$ ; analógja  $R + 1/Cs$  operátoros impedancia),
- erőirányításról,
- hibrid pozíció- és erőirányításról.

Ha a megfogó által tartott tárgy rugalmas alakváltozás következtében benyomul a környezetbe ( $\mathbf{x}$ ), miközben a környezet eredeti helyzetéhez ( $\mathbf{x}_E$ ) képest fellép egy  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_E$  alakváltozás, és így egy  $\mathbf{K}_E(\mathbf{x} - \mathbf{x}_E)$  reakcióerő a környezet és a tárgy érintkezési helyén ( $\mathbf{K}_E$  a merevségi mátrix), akkor erő/nyomaték érzékelőt is feltételezve az egyes irányítási stratégiák **elvi** hatásvázlatai a 6.1.–6.5. ábrákon láthatóak ( $\mathbf{J}$  a Jacobi-mátrix:  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$ ).

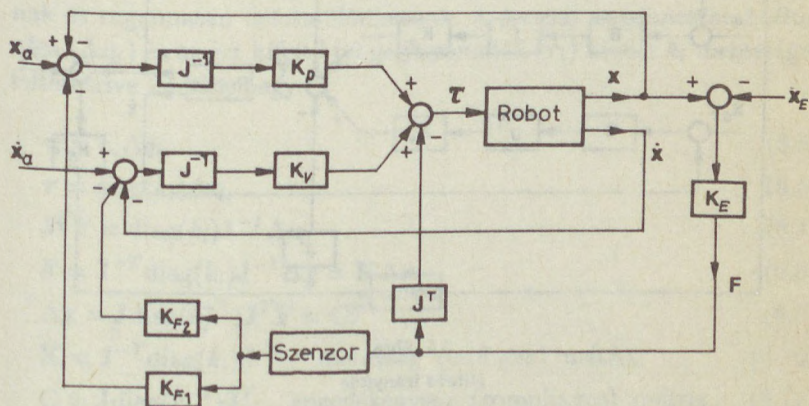


6.1. ábra

Merevségirányítás

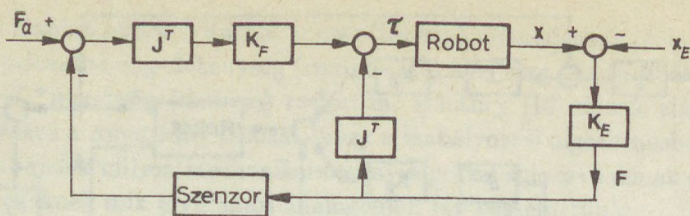


6.2. ábra  
Csillapításirányítás

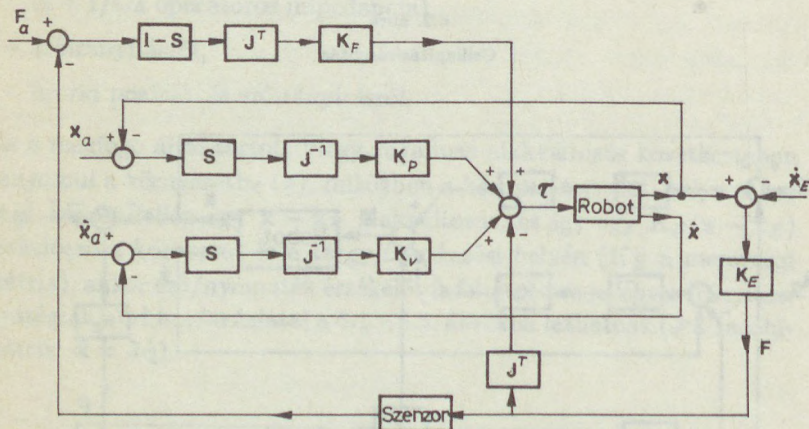


6.3. ábra  
Impedanciairányítás

A hibrid irányítás elvi vázlatában szereplő  $S = \text{diag}(s_i)$  mátrix a feladattérben ( $x$ ) az egymásra ortogonális altérbe eső erő- és nyomatékirányítási ( $s_i = 0$ ), illetve pozíció- és sebességirányítási ( $s_i = 1$ ) irányokat jelöli ki. Egy irányban csak egyfajta (vagy csak erő-, vagy csak pozíció-) irányítás lehetséges.



6.4. ábra  
Erőirányítás



6.5. ábra  
Hibrid irányítás

Mind a merevségirányítás, mind az impedanciairányítás realizálható erő/nyomaték érzékelő nélkül is (implicit erőirányítás). Ekkor a feladathoz egy megfelelő eredő merevségi és csillapítási mátrixot **tervezünk**, melyet a pozíciószabályozási algoritmussal kísérelünk meg realizálni. A továbbiakban részletesebben vizsgáljuk az implicit merevség-(engedékenység-) irányítást, valamint a hibrid irányítást.

## 6.2. ENGEDÉKENYSÉGI CENTRUM ÉS ÁLTALÁNOSÍTOTT CENTROID SZÁMÍTÁSA

A szerelési feladatok realizálása közben a robot megfogója által tartott tárgy érintkezésbe kerül a környezettel. Ennek során a robot, a beavatkozó szervek (a motorok, a tengelyek és az áttételek), a megfogó, az általa fogott tárgy és a környezet együttesen rugalmas alakváltozást szenvednek, amelynek következtében az alakváltozással arányos reakcióerő ébred. Az alakváltozás ( $\Delta \mathbf{x}$ ) és az erő ( $\mathbf{F}$ ) között a  $\mathbf{C}$  engedékenységi vagy a  $\mathbf{K} = \mathbf{C}^{-1}$  merevségi mátrix teremt kapcsolatot:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{F}, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\Delta \mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}\Delta \mathbf{x}. \quad (6.4)$$

A reakcióerő tovább terjed a robot tengelyeire, amelyek megszorulhatnak és rugalmasan deformálódhatnak. A tengely rugalmas alakváltozása ( $\Delta \mathbf{q}_i$ ) és az ezt kifejtő tengelynyomaték ( $\tau_i$ ) között  $k_i$  merevséget feltételezve fennáll, hogy

$$\tau_i = k_i \Delta q_i, \quad (6.5)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \text{diag}(k_i) \Delta \mathbf{q}, \quad (6.6)$$

$$\mathbf{J}^T \mathbf{F} = \text{diag}(k_i) \mathbf{J}^{-1} \Delta \mathbf{x}, \quad (6.7)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{J}^{-T} \text{diag}(k_i) \mathbf{J}^{-1} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{x}, \quad (6.8)$$

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{J} \text{diag}(k_i^{-1}) \mathbf{J}^T \mathbf{F} = \mathbf{C}\mathbf{F}, \quad (6.9)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{J}^{-T} \text{diag}(k_i) \mathbf{J}^{-1} \quad \text{merevség (stiffness) mátrix}, \quad (6.10)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{J} \text{diag}(k_i^{-1}) \mathbf{J}^T \quad \text{engedékenység (compliance) mátrix}. \quad (6.11)$$

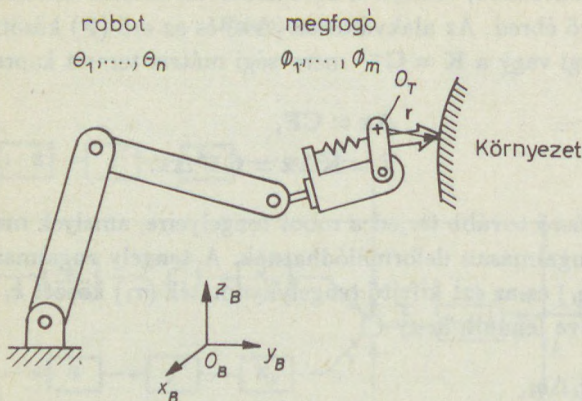
A kifejezésekben szereplő  $\mathbf{J}$  Jacobi-mátrix a roboton kívül függ a megfogótól és a tárgytól is, továbbá a kontaktus "helyétől",  $\mathbf{x}$ -től. Itt  $\mathbf{x}$  egy absztrakt információ, amely a kontaktus geometriai helyét ( $\mathbf{p}$ ) és a megfogó által tartott tárgy orientációját is magában foglalja. Mivel tetszőleges orientációba el lehet jutni a Rodrigues-képlet szerint egy  $\mathbf{t}$  egységvektor körüli  $\phi$  forgatás révén, ezért  $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{t}\phi \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

alakúnak választható. Ekkor azonban  $\dot{\mathbf{x}}$  a kontaktuspont pillanatnyi sebességéből ( $\mathbf{v}$ ) és pillanatnyi szögsebességéből ( $\boldsymbol{\omega}$ ) tevődik össze:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

A robot, a megfogó, a tárgy és a környezet egy eléggé általános sémája a 6.6. ábrán látható.



6.6. ábra

Robot és környezetének kölcsönhatása

A megfogó tartalmazhat aktív vagy passzív szabadságfokokat. Relatív helyzete a megfogó felerősítési helyéhez képest a  $\Phi_1, \dots, \Phi_m$  általánosított koordinátákkal jellemezhető. A robot helyzete a bázishoz képest a  $\Theta_1, \dots, \Theta_n$  általánosított koordinátákkal jellemezhető. Az együttes rendszer a

$$\mathbf{q} = (\Theta_1, \dots, \Theta_n, \Phi_1, \dots, \Phi_m)^T \quad (6.14)$$

általánosított koordinátákkal írható le. Legyen a megfogó kitüntetett pontjának (például a szerszámközepnek, TCP) sebessége és szögsebessége  $\mathbf{v}_0$  és  $\boldsymbol{\omega}_0$ , az együttes rendszer erre a pontra vonatkozó Jacobi mátrixa  $\mathbf{J}$ , akkor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \boldsymbol{\omega}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{J}_2 \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

Tekintsünk egy tetszőleges  $\mathbf{r}$  pontot  $O_T$ -től mérve, akkor (merevséget feltételezve):

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}_0 = (\mathbf{J}_1 - [\mathbf{r} \times] \mathbf{J}_2) \dot{\mathbf{q}}, \quad (6.16)$$

$$\boldsymbol{\omega}_r = \boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{J}_2 \dot{\mathbf{q}}, \quad (6.17)$$

ahol  $[\mathbf{r} \times]$  a vektorszorzás mátrixa:

$$[\mathbf{r} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Ezért az  $\mathbf{r}$  ponthoz tartozó Jacobi-mátrix alakja:

$$\mathbf{J}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 - [\mathbf{r} \times] \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}_2 \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

Legyen az  $O_T$  ponthoz tartozó engedékenységi mátrix:

$$\mathbf{C} = \mathbf{J} \text{diag}(k_i^{-1}) \mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{12}^T & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix}, \quad (6.20)$$

akkor az  $\mathbf{r}$  ponthoz tartozó engedékenységi mátrix:

$$\mathbf{C}_r = \mathbf{J}_r \text{diag}(k_i^{-1}) \mathbf{J}_r^T = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 - [\mathbf{r} \times] \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}_2 \end{bmatrix} \text{diag}(k_i^{-1}) [\mathbf{J}_1^T - \mathbf{J}_2^T [\mathbf{r} \times]^T \quad \mathbf{J}_2^T], \quad (6.21)$$

$$\mathbf{C}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} - [\mathbf{r} \times] \mathbf{C}_{12}^T - \mathbf{C}_{12} [\mathbf{r} \times]^T + [\mathbf{r} \times] \mathbf{C}_{22} [\mathbf{r} \times]^T & \mathbf{C}_{12} - [\mathbf{r} \times] \mathbf{C}_{22} \\ \mathbf{C}_{12}^T - \mathbf{C}_{22}^T [\mathbf{r} \times]^T & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Ha az  $\mathbf{r}_c$  pont megválasztható úgy, hogy

$$\mathbf{C}_{12} - [\mathbf{r}_c \times] \mathbf{C}_{22} = \mathbf{0} \quad (6.23)$$

teljesül (amihez például invertálható  $\mathbf{C}_{22}$  esetén az  $[\mathbf{r}_c \times] = \mathbf{C}_{12} \mathbf{C}_{22}^{-1}$  mátrixnak **vektorszorzás alakúnak** is kell lennie), akkor  $\mathbf{C}_{r_c}$  blokk-diagonális alakú lesz:

$$\mathbf{C}_{r_c} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} - [\mathbf{r}_c \times] \mathbf{C}_{12}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} - [\mathbf{r}_c \times] \mathbf{C}_{22} [\mathbf{r}_c \times]^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

Ezt az  $\mathbf{r}_c$  pontot az engedékenység centrumának (compliance center) nevezik. Az engedékenységi mátrix korábbi  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{CF}$  értelmezése szerint, ha egy  $\mathbf{f}_c$  erő átmegey az engedékenységi centrumon, akkor az csak translációt okoz. Hasonlóan, ha az  $\mathbf{N}_c$  nyomaték átmegey az engedékenységi centrumon, akkor ez csak az engedékenységi centrum körüli rotációt eredményez.

Az engedékenységi központ nem mindig létezik. Ha azonban a megfogó mozgása egy síkra korlátozódik, akkor a  $\mathbf{v}_0$  sebességnek csak ebben a síkban, míg az  $\boldsymbol{\omega}_0$  szögsebességnek csak az erre merőleges irányban vannak komponensei. Válasszunk olyan bázis koordinátarendszert, melynek két egymásra merőleges tengelye a síkban van és harmadik tengelye a sík normálisa, akkor

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} * & \text{---} & * \\ * & \text{---} & * \\ 0 & \text{---} & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.25)$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \text{---} & 0 \\ 0 & \text{---} & 0 \\ * & \text{---} & * \end{bmatrix}, \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{12} &= \mathbf{J}_1 \text{diag}(k_i^{-1}) \mathbf{J}_2^T = \begin{bmatrix} * & \text{---} & * \\ * & \text{---} & * \\ 0 & \text{---} & 0 \end{bmatrix} \text{diag}(k_i^{-1}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ | & | & | \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} * & \text{---} & * \\ * & \text{---} & * \\ 0 & \text{---} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ | & | & | \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{22} &= \mathbf{J}_2 \text{diag}(k_i^{-1}) \mathbf{J}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & \text{---} & 0 \\ 0 & \text{---} & 0 \\ * & \text{---} & * \end{bmatrix} \text{diag}(k_i^{-1}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ | & | & | \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}, \quad (6.28) \end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{12} - [\mathbf{r}_c \times] \mathbf{C}_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & a - cr_y \\ 0 & 0 & b + cr_x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \implies r_y = a/c, \quad r_x = -b/c, \quad (6.29) \end{aligned}$$

és így síkra korlátozott mozgás esetén mindig létezik engedékenységi centrum.

Ha  $\mathbf{r}$  a kontaktuspont, akkor  $\mathbf{C}_r$  nem szükségképpen blokk-diagonális. Ha a szerelési feladatban a kontaktuspontban egy  $\mathbf{n}$  egységvektor által adott irányban speciális előírásokat kell betartani, akkor az  $\mathbf{r}$  kontaktuspontban az  $\mathbf{n}$  irányban definiálható egy skalárértékű  $c_r$  virtuális engedékenység a

$$\mathbf{C}_{11,r} = \mathbf{C}_{11} - [\mathbf{r} \times] \mathbf{C}_{12}^T - \mathbf{C}_{12} [\mathbf{r} \times]^T + [\mathbf{r} \times] \mathbf{C}_{22} [\mathbf{r} \times]^T, \quad (6.30)$$

$$c_r = \mathbf{n}^T \mathbf{C}_{11,r} \mathbf{n} \quad (6.31)$$

összefüggések alapján. Az előírások gyakran vezetnek a következő optimumproblémára:

$$c_r(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \rightarrow \text{extrémum}, \quad (6.32a)$$

$$\|\mathbf{n}\| = 1 \quad (\text{korlátozás}). \quad (6.32b)$$

Mivel a skalárszorzat  $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  jelölése mellett

$$\begin{aligned} c_r(\mathbf{n}, \mathbf{r}) &= \langle \mathbf{C}_{11,r} \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \\ &= \langle \mathbf{C}_{11} \mathbf{n} - [\mathbf{r} \times] \mathbf{C}_{12}^T \mathbf{n} - \mathbf{C}_{12} [\mathbf{r} \times]^T \mathbf{n} + [\mathbf{r} \times] \mathbf{C}_{22} [\mathbf{r} \times]^T \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \\ &= \langle \mathbf{C}_{11} \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{C}_{12}^T \mathbf{n}, \mathbf{r} \times \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{r} \times \mathbf{n}, \mathbf{C}_{12}^T \mathbf{n} \rangle + \\ &\quad + \langle \mathbf{C}_{22} (\mathbf{r} \times \mathbf{n}), \mathbf{r} \times \mathbf{n} \rangle = \\ &= \langle \mathbf{C}_{11} \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle + \langle -2[\mathbf{n} \times] \mathbf{C}_{12}^T \mathbf{n} + [\mathbf{n} \times]^T \mathbf{C}_{22} [\mathbf{n} \times] \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle, \quad (6.33) \end{aligned}$$

ezért az optimumfeladat megoldásának feltételei:

$$\mathbf{C}_{11,r} \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}, \quad (6.34a)$$

$$\|\mathbf{n}\| = 1, \quad (6.34b)$$

$$-[\mathbf{n} \times] \mathbf{C}_{12}^T \mathbf{n} + [\mathbf{n} \times]^T \mathbf{C}_{22} [\mathbf{n} \times] \mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (6.34c)$$

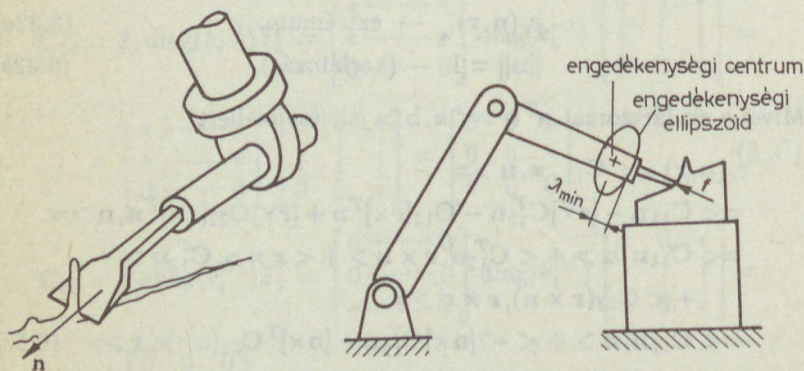
Az egyenletek alapján  $\mathbf{n}$  egységnyi normájú sajátvektora  $\mathbf{C}_{11,r}$ -nek. Az utolsó egyenlet azt mondja ki, hogy  $c_r$ -nek az  $r$  szerinti deriváltja nulla. Ha maximális engedékenységet a cél, akkor a  $\lambda_{max}$ , ha pedig minimális engedékenységet kell biztosítani, akkor a  $\lambda_{min}$  sajátérték és a hozzá tartozó  $\mathbf{n}$  sajátvektor választandó a szerelési feladatban a kitüntetett iránynak.

**Speciálisan, ha van engedékenységi centrum, akkor  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_c$**  egy optimális megoldás, mert az optimumprobléma harmadik feltétele mindig felírható

$$-\mathbf{[n \times]}\{\mathbf{C}_{12}^T - \mathbf{C}_{22}[\mathbf{r \times}]^T\}\mathbf{n} = 0 \quad (6.35)$$

alakban, ami az engedékenységi centrumra mindig teljesül. Az  $\mathbf{n}$  irány a szerelési feladathoz optimális (maximális vagy minimális) engedékenységet eredményező  $\lambda_{opt}$  sajátértékhez tartozó sajátirány. A sajátértéket a  $\mathbf{C}_{11,r} = \mathbf{C}_{11} - [\mathbf{r}_c \times] \mathbf{C}_{22} [\mathbf{r}_c \times]^T$  mátrixhoz kell meghatározni.

**Példaként** tekintsünk három feladatot az eredmények alkalmazására:



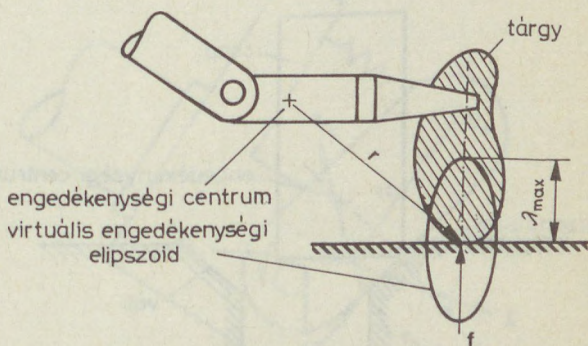
6.7. ábra

Sorjázás vésővel [17]

1. Vésővel történő sorjázás (deburring using a chipper) esetén a cél minimális engedékenység (maximális merevség) biztosítása a ha-

tásirányban. Ehhez meg kell határozni az engedékenységi centrum helyét, és itt hatásirányként a  $\lambda_{min}$  sajátértékhez tartozó  $\mathbf{n}_{min}$  sajátirányt kell választani. A sajátértékeket a 6.7. ábrán az engedékenységi ellipszoid főtengelyei alkotják.

**2. Kemény felülettel való kontaktus** (hard surface contact) esetén, miközben kis ütköző erő biztosítása a cél, maximális engedékenységet kell biztosítani a hatásirányban. Ehhez meghatározandó az engedékenységi centrum helye és az  $\mathbf{r}$  kontaktusponthoz tartozó  $\lambda_{max}$  sajátérték és  $\mathbf{n}_{max}$  sajátirány, amely a hatásirány lesz. A sajátértékeket a 6.8. ábrán a virtuális engedékenységi ellipszoid adják.

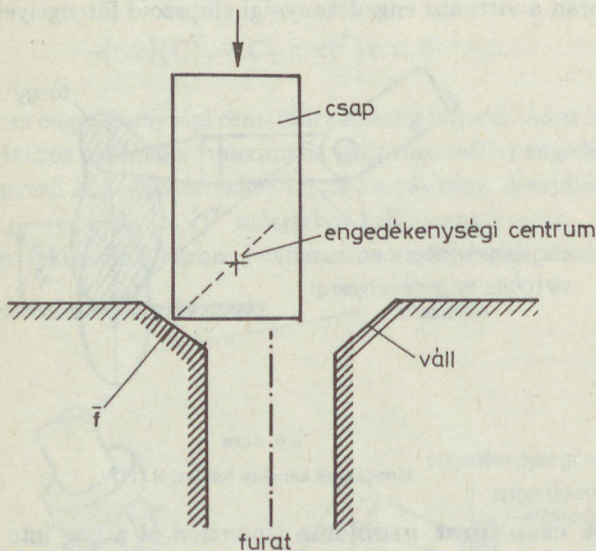


6.8. ábra

Kontaktus kemény felülettel [17]

**3. A csap-furat probléma** (insertion of a peg into a hole) esetén a csap ütközik a furat vállával, aminek következtében a sebességtől függő nagyságú ütköző erő (impact force) keletkezik. A csapnak ekkor a furat középvonala felé kell elmozdulnia anélkül, hogy a furatban megszorulna. Annak érdekében, hogy a csap elmozdulhasson orientációjának megtartása mellett, az engedékenységi centrumnak az ütköző erő hatásvonalán kell elhelyezkednie. Az engedékenységi centrum az a pont, amelyben a transláció és a rotáció szét vannak csatolva a ható erő és a nyomaték tekintetében. Ha a csap a váll másik oldalára csapódik, az ütköző erő hatásvonala átvált a csap középvonalának túlsó oldalára. Azért, hogy az engedékenységi centrum mindkét hatásvonalra rákerüljön, az engedékenységi centrumnak a csap középvonalán, a csap

csúcsának közelében kell elhelyezkednie. Az engedékenységi centrum meglétét és elhelyezkedését befolyásolhatjuk megfelelő elasztikus tulajdonságokkal felruházott megfogó alkalmazásával, amely passzív mechanikai elemekből (rugókból) áll. Az ilyen megfogó neve: remote center of compliance berendezés, míg az így biztosított engedékenység a passzív engedékenység (passive compliance), lásd például Loncaric [18]. Egy másik lehetőség az engedékenységet (vagy inverzét, a merevséget) a szabályozási algoritmus révén aktív módon befolyásolni (active compliance).



6.9. ábra.

Csap-furat probléma [17]

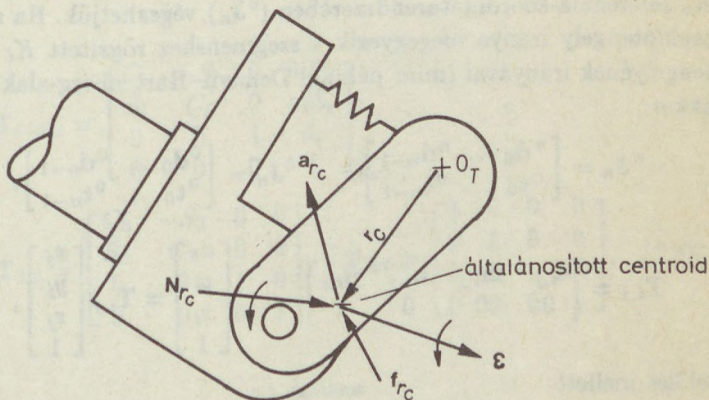
Nagy sebességgel végrehajtott szerelési feladatok esetére Asada és Ogawa [17] az engedékenység statikus szemlélete helyett az **inverz inerciamátrixot** ( $G$ ) és az **általánosított centroidot** javasolja a szerelési hatásirány megválasztásába bevonni. Ezekhez a jellemzőkhöz nagy sebességek esetén az engedékenységnél megismert gondolatmenettel analóg módon lehet eljutni. A lényeges eltérés az, hogy  $\text{diag}(k_i^{-1})$  helyett a robot dinamikus modelljében szereplő  $H(q)$  inerciamátrix in-

vezét kell használni. Az általánosított centroid helyén a  $\mathbf{G} = \mathbf{J}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{J}^T$  inverz inerciamátrix blokk-diagonális, és a mozgásegyenletek dekomponáltak:

$$\mathbf{G}_{r_c} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} - [\mathbf{r}_c \times] \mathbf{G}_{22} [\mathbf{r}_c \times]^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix}, \quad (6.36)$$

$$\mathbf{a}_{r_c} = (\mathbf{G}_{11} - [\mathbf{r}_c \times] \mathbf{G}_{22} [\mathbf{r}_c \times]) \mathbf{f}_{r_c} + \mathbf{h}_1, \quad (6.37)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{G}_{22} \mathbf{N}_{r_c} + \mathbf{h}_2. \quad (6.38)$$



6.10. ábra

Az általánosított centroid [17]

A 6.1. táblázatban felsorolt analógiák figyelembevételével általánosított centroid létezése esetén [ha a centripetális és Coriolis-erők ( $\mathbf{h}_1$ ,  $\mathbf{h}_2$ ) elhanyagolhatók, akkor] a transláció és a rotáció a centroidon átmenő erő vagy nyomaték esetén dekomponálható. A hatásirány megválasztására ugyanolyan típusú optimumfeladatot kell megoldani a  $\mathbf{G}_{11,r}$  mátrixra az  $\|\mathbf{n}\| = 1$  korlátozás mellett, mint  $\mathbf{C}_{11,r}$  esetén kellett. Minimális erők biztosítására  $\lambda_{max}$ , míg maximális erők esetén  $\lambda_{min}$  és hatásirányként a hozzá tartozó sajátirány választandó.

Az engedékenységi centrum (és az általánosított centroid) meghatározásánál az első lépés a Jacobi-mátrix meghatározása. A számításokat a megfogóhoz rögzített mozgó  $K_n$  keretben ( ${}^n\mathbf{J}_n$ ) vagy a robot

Engedékenység (C)	Inverz inerciamátrix (G)
$\text{diag}(k_i^{-1})$	$H(q)$
$C = J \text{diag}(k_i^{-1}) J^T$	$G = JH^{-1} J^T$
virtuális engedékenység ( $c_r$ )	inverz virtuális tömeg ( $\hat{m}_r$ )
virtuális merevség ( $c_r^{-1}$ )	virtuális tömeg ( $\hat{m}_r^{-1}$ )
engedékenységi centrum	általánosított centroid

$K_0$  referencia-koordinátarendszerében ( ${}^0J_n$ ) végezhetjük. Ha az  $i$ -edik csuklótengely iránya megegyezik a szegmenshez rögzített  $K_i$  keret  $z_i$  tengelyének irányával (mint például Denavit–Hartenberg-alak esetén), akkor

$${}^nJ_n = \begin{bmatrix} {}^n d_0 & \dots & {}^n d_{n-1} \\ {}^n t_0 & \dots & {}^n t_{n-1} \end{bmatrix}, \quad {}^0J_n = \begin{bmatrix} {}^0 d_0 & \dots & {}^0 d_{n-1} \\ {}^0 t_0 & \dots & {}^0 t_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (6.39)$$

$$T_{i,j} = \begin{bmatrix} l_{i,j} & m_{i,j} & n_{i,j} & p_{i,j} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = T_{i,j} \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6.40)$$

jelölés mellett

– rotációs csukló esetén:

$$\begin{aligned} {}^n t_{i-1,x} &= l_{i-1,n,z}, & {}^n d_{i-1,x} &= -l_{i-1,n,x} p_{i-1,n,y} + l_{i-1,n,y} p_{i-1,n,x}, \\ {}^n t_{i-1,y} &= m_{i-1,n,z}, & {}^n d_{i-1,y} &= -m_{i-1,n,x} p_{i-1,n,y} + m_{i-1,n,y} p_{i-1,n,x}, \\ {}^n t_{i-1,z} &= n_{i-1,n,z}, & {}^n d_{i-1,z} &= -n_{i-1,n,x} p_{i-1,n,y} + n_{i-1,n,y} p_{i-1,n,x}, \\ {}^0 t_{i-1} &= \mathbf{n}_{0,i-1}, & {}^0 d_{i-1} &= \mathbf{n}_{0,i-1} \times (\mathbf{p}_{0,n} - \mathbf{p}_{0,i-1,n}); \end{aligned} \quad (6.41)$$

– translációs csukló esetén:

$$\begin{aligned} {}^n t_{i-1} &= \mathbf{0}, & {}^n d_{i-1,x} &= l_{i-1,n,x}, \\ & & {}^n d_{i-1,y} &= m_{i-1,n,y}, \\ & & {}^n d_{i-1,z} &= n_{i-1,n,z}, \\ {}^0 t_{i-1} &= \mathbf{0}, & {}^0 d_{i-1} &= \mathbf{n}_{0,i-1}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

## 6.1. Példa: Scara szerelőrobot engedékenységi mátrixa

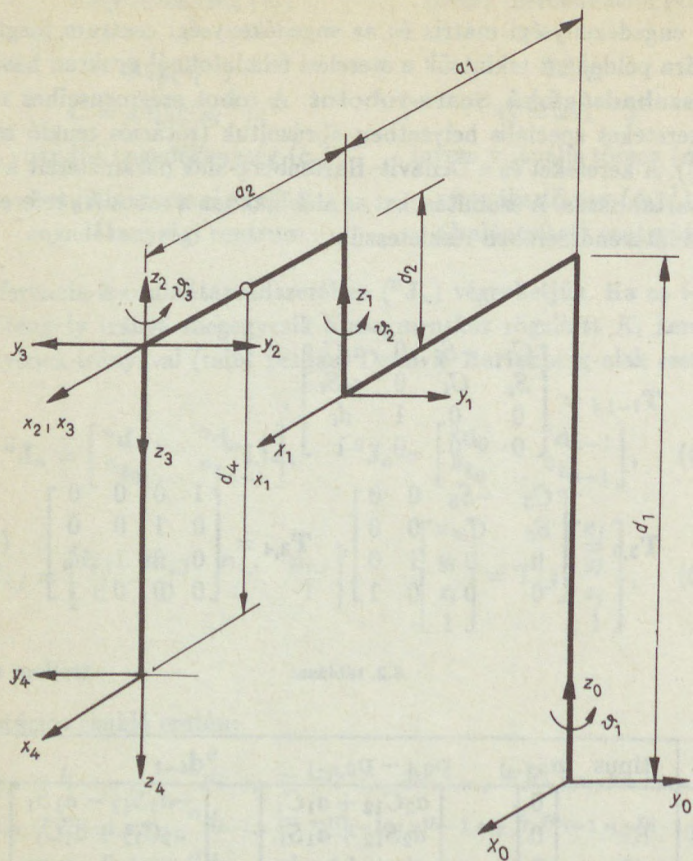
Az engedékenységi mátrix és az engedékenységi centrum meghatározására példaként tekintünk a szerelési feladatoknál gyakran használt **négyszabadságfokú Scara-robotot**. A robot szegmenseihez rögzített kereteket speciális helyzetben ábrázoltuk (rotációs csukló esetén  $q_i \neq 0$ ). A kereteket és a Denavit–Hartenberg-alak paramétereit a 6.11. ábra tartalmazza. A számításokat az alábbiakban a robot  $K_0$  referencia-koordinátarendszerében részletezzük:

$$T_{i-1,i} = \begin{bmatrix} C_i & -S_i & 0 & a_i C_i \\ S_i & C_i & 0 & a_i S_i \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{i=1,2},$$

$$T_{2,3} = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & 0 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{3,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.43)$$

6.2. táblázat

i	típus	$n_{0,i-1}$	$p_{0,4} - p_{0,i-1}$	${}^0d_{i-1}$
1	R	0 0 1	$a_2 C_{12} + a_1 C_1$ $a_2 S_{12} + a_1 S_1$ $d_1 + d_2 - d_4$	$-a_2 S_{12} - a_1 S_1$ $a_2 C_{12} + a_1 C_1$ 0
2	R	0 0 1	$a_2 C_{12}$ $a_2 S_{12}$ $d_2 - d_4$	$-a_2 S_{12}$ $a_2 C_{12}$ 0
3	R	0 0 1	0 0 $-d_4$	0 0 0
4	T	0 0 -1	*	0 0 -1



$i$	$a_i$	$\psi_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$\psi_1$	$\psi_1$	$d_1$	$a_1$	$0^\circ$
2	$\psi_2$	$\psi_2$	$d_2$	$a_2$	$0^\circ$
3	$\psi_3$	$\psi_3$	0	0	$180^\circ$
4	$d_4$	$0^\circ$	$d_4$	0	$0^\circ$

6.11. ábra.

Négyszabadságfokú Scara-robot Denavit-Hartenberg-alakja

$$\mathbf{T}_{0,2} = \mathbf{T}_{0,1} * \mathbf{T}_{1,2} = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & a_2 C_{12} + a_1 C_1 \\ S_{12} & C_{12} & 0 & a_2 S_{12} + a_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.44)$$

$$\mathbf{T}_{0,3} = \mathbf{T}_{0,2} * \mathbf{T}_{2,3} = \begin{bmatrix} C_{123} & S_{123} & 0 & a_2 C_{12} + a_1 C_1 \\ S_{123} & -C_{123} & 0 & a_2 S_{12} + a_1 S_1 \\ 0 & 0 & -1 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.45)$$

$$\mathbf{T}_{0,4} = \mathbf{T}_{0,3} * \mathbf{T}_{3,4} = \begin{bmatrix} C_{123} & S_{123} & 0 & a_2 C_{12} + a_1 C_1 \\ S_{123} & -C_{123} & 0 & a_2 S_{12} + a_1 S_1 \\ 0 & 0 & -1 & d_1 + d_2 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.46)$$

$${}^0\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} -a_2 S_{12} - a_1 S_1 & -a_2 S_{12} & 0 & 0 \\ a_2 C_{12} + a_1 C_1 & a_2 C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.47)$$

$${}^0\mathbf{C} = {}^0\mathbf{J}_4 \text{diag}(k_i^{-1}) {}^0\mathbf{J}_4^T =$$

$$= \begin{bmatrix} k_1^{-1}(-a_2 S_{12} - a_1 S_1) & k_2^{-1}(-a_2 S_{12}) & 0 & 0 \\ k_1^{-1}(a_2 C_{12} + a_1 C_1) & k_2^{-1} a_2 C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1^{-1} & k_2^{-1} & k_3^{-1} & 0 \end{bmatrix} *$$

$$* \begin{bmatrix} -a_2 S_{12} - a_1 S_1 & a_2 C_{12} + a_1 C_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_2 S_{12} & a_2 C_{12} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.48)$$

$${}^0\mathbf{C}_{11} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ * & C & 0 \\ 0 & 0 & k_4^{-1} \end{bmatrix},$$

$${}^0\mathbf{C}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_1^{-1}(-a_2S_{12} - a_1S_1) + k_2^{-1}(-a_2S_{12}) \\ 0 & 0 & k_1^{-1}(a_2C_{12} + a_1C_1) + k_2^{-1}(a_2C_{12}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$${}^0\mathbf{C}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1^{-1} + k_2^{-1} + k_3^{-1} \end{bmatrix}, \quad (6.49a)$$

$$A = k_1^{-1}(a_2S_{12} + a_1S_1)^2 + k_2^{-1}(a_2S_{12})^2,$$

$$B = -k_1^{-1}(-a_2S_{12} - a_1S_1)(a_2C_{12} + a_1C_1) - k_2^{-1}(a_2S_{12})(a_2C_{12}), \quad (6.49b)$$

$$C = k_1^{-1}(a_2C_{12} + a_1C_1)^2 + k_2^{-1}(a_2C_{12})^2.$$

A transláció és a rotáció szétcsatlóságának feltétele  ${}^0\mathbf{C}_{12} = \mathbf{0}$ , ahonnan következik, hogy

$$S_{12} = S_1C_2 + C_1S_2 = -\frac{k_1^{-1}a_1}{(k_1^{-1} + k_2^{-1})a_2}S_1, \quad (6.50a)$$

$$C_{12} = C_1C_2 - S_1S_2 = -\frac{k_1^{-1}a_1}{(k_1^{-1} + k_2^{-1})a_2}C_1, \quad (6.50b)$$

Az  $S_2, C_2$  változókból lineáris egyenletrendszer megoldása:

$$S_2 = 0, \quad (6.51a)$$

$$C_2 = -\frac{k_1^{-1}a_1}{(k_1^{-1} + k_2^{-1})a_2} = \pm 1, \quad (6.51b)$$

amely csak a csuklók engedékenységére vonatkozó

$$\frac{a_1}{a_2} = \pm \left(1 + \frac{k_2^{-1}}{k_1^{-1}}\right) \Rightarrow \frac{k_2^{-1}}{k_1^{-1}} = -1 \pm \frac{a_1}{a_2} \quad (6.51c)$$

feltétel teljesülése esetén lehetséges, amikor is

$$\vartheta_2 = k\pi, \quad (6.52a)$$

$$a_2S_{12} + a_1S_1 = -\frac{k_2^{-1}}{k_1^{-1}}a_2S_{12}, \quad (6.52b)$$

$$a_2C_{12} + a_1C_1 = -\frac{k_2^{-1}}{k_1^{-1}}a_2C_{12}. \quad (6.52c)$$

A valódi engedékenységi centrum létezésének feltétele még:

$$B = 0, \quad (6.53a)$$

$$A = C = k_4^{-1}. \quad (6.53b)$$

A  $B = 0$  feltételből következik, hogy

$$\begin{aligned} & -k_1^{-1} \left( \frac{k_2^{-1}}{k_1^{-1}} \right)^2 a_2^2 S_{12} C_{12} - k_2^{-1} a_2^2 S_{12} C_{12} = \\ & = -\frac{1}{2} k_2^{-1} a_2^2 \left( 1 + \frac{k_2^{-1}}{k_1^{-1}} \right) \sin 2(\vartheta_1 + \vartheta_2) = 0, \end{aligned} \quad (6.54a)$$

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = l \frac{\pi}{2}, \quad (6.54b)$$

az  $A = C$  feltételből pedig

$$k_1^{-1} \left( \frac{k_2^{-1}}{k_1^{-1}} \right)^2 a_2^2 S_{12}^2 + k_2^{-1} a_2^2 S_{12}^2 = k_1^{-1} \left( \frac{k_2^{-1}}{k_1^{-1}} \right)^2 a_2^2 C_{12}^2 + k_2^{-1} a_2^2 C_{12}^2, \quad (6.55a)$$

$$k_2^{-1} a_2^2 \left( 1 + \frac{k_2^{-1}}{k_1^{-1}} \right) (S_{12}^2 - C_{12}^2) = 0, \quad (6.55b)$$

$$S_{12} = \pm C_{12}, \quad (6.55c)$$

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{\pi}{4} + m \frac{\pi}{2}. \quad (6.55d)$$

A valódi engedékenységi centrum összes feltétele nem teljesíthető egyidejűleg, mivel (6.54b) és (6.55d) egyszerre nem lehet igaz.

A szétcsatolás feltétele álló ( $K_0$ ) és mozgó ( $K_4$ ) koordinátarendszerben ugyanaz.  $C_{11}$  diagonális voltának feltétele a két koordinátarendszerben eltérő, kivéve azt az esetet, amikor minden elem azonos a diagonálisban (valódi engedékenységi centrum). Ennek oka az, hogy

$${}^0 C_{ij} = \mathbf{A}_{0,4} {}^4 C_{ij} \mathbf{A}_{0,4}^T, \quad (6.56)$$

ahol

$$\mathbf{A}_{0,4} = [l_{0,4} \quad m_{0,4} \quad n_{0,4}] \quad (6.57)$$

az orientáció leírása a  $\mathbf{T}_{0,4}$  homogén transzformációban.

### 6.3. IMPLICIT MEREVSÉG- ÉS IMPEDANCIAIRÁNYÍTÁS

A robot irányításának egyik lehetséges módja szerelési feladatoknál, ha alapvetően megtartjuk a pozícióirányítás elvét. Ekkor az alapjel a pozíció-idő (és sebesség-idő) függvény, a hiba az ettől való eltérés, de a szabályozó úgy avatkozik be, hogy a beavatkozás egy előírt eredő **engedékenységet** (esetleg **csillapítást** is) eredményezzen a szerelési előírások megvalósításához. Az irányítás implicit abban az értelemben, hogy nem alkalmaz erő/nyomaték érzékelőt. Ilyenkor a szereléskor létrejövő  $\Delta \mathbf{x}$  rugalmas alakváltozás (elhajlás és elcsavarodás), valamint az ezt kiváltó általánosított  $\mathbf{F}$  (erő és nyomaték) közötti kapcsolatot a szerelési feladat előírásainak megfelelően  $\mathbf{K}_p$  merevséggé kell átfogalmazni. Hasonlóan egy  $\mathbf{K}_v$  csillapítássá kell átfogalmazni a  $\Delta \dot{\mathbf{x}}$  és  $\mathbf{F}$  közötti kapcsolatot is. A merevséget és a csillapítást fizikai jellegének megfelelően pozitív elemű diagonális mátrix alakjában célszerű előírni, ahol az elemek számszerű értéke és nagyságrendje megfelel a szerelési feladat követelményeinek:

$$\mathbf{K}_p = \text{diag}(k_{pi}), \quad (6.58a)$$

$$\mathbf{K}_v = \text{diag}(k_{vi}), \quad (6.58b)$$

Olyan számítási algoritmust kell tehát választani, amely biztosítja az előírt eredő merevséget. Ennek során abból kell kiindulni, hogy a kontaktpontban ható  $\mathbf{F}$  általánosított erő kifejtéséhez a meghajtómotorokban  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{F}$  általánosított nyomatékot (transzlációs csukló esetén  $\tau_i$  erőt, rotációs csukló esetén  $\tau_i$  nyomatékot) kell biztosítani. Másrészt a robot dinamikai modelljének alakja

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}, \quad (6.59)$$

ahol

$\mathbf{H} = (H_{ij})$  szimmetrikus pozitív definit inerciamátrix,

$\mathbf{h} = (h_i) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}_g(\mathbf{q})$ ,

$\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}$  a centripetális és Coriolis-hatás,

$\mathbf{h}_g$  a gravitációs tér hatása,

$C_s = \text{diag}(c_{s,i})$  a súrlódás pozitív definit mátrixa,

$\tau$  a meghajtómotorok nyomatéka.

Tételezzük fel, hogy a szerelés kis sebességgel történik, és a gravitációs tér  $\hat{\mathbf{h}}_g(\mathbf{q})$  hatásának becslése kielégítő pontossággal ismert. Akkor irányítási algoritmusként választható

– merevségirányítás:

$$\tau = \hat{\mathbf{h}}_g(\mathbf{q}) + \mathbf{J}^T \mathbf{K}_p (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}) \quad (6.60)$$

– impedanciairányítás:

$$\tau = \hat{\mathbf{h}}_g(\mathbf{q}) + \mathbf{J}^T \{ \mathbf{K}_p (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}) + \mathbf{K}_v (\dot{\mathbf{x}}_a - \dot{\mathbf{x}}) \}. \quad (6.61)$$

A szabályozással szemben alapvető követelmény az **aszimptotikus stabilitás**. Elegendő az impedanciairányítást vizsgálni, mert a merevségirányítás ennek speciális  $\mathbf{K}_v = \mathbf{0}$  esete. Az aszimptotikus stabilitás belátásához Ljapunov direkt módszerét használhatjuk. Legyen a Ljapunov-függvény a robot kinetikai és az eredő rúgó potenciális energiájának összege:

$$V = \frac{1}{2} \langle \mathbf{H}\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{K}_p (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}), \mathbf{x}_a - \mathbf{x} \rangle, \quad (6.62)$$

akkor  $V$  pozitív definit, mert  $\mathbf{H}$  és  $\mathbf{K}_p$  pozitív definit. Másrészt  $V$  deriváltja az idő szerint, konstans  $\mathbf{x}_a$  pozíció-alapjel esetén:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \{ \langle \dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle + \langle \mathbf{H}\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \rangle + \langle \mathbf{K}_p (-\dot{\mathbf{x}}), \mathbf{x}_a - \mathbf{x} \rangle + \\ &\quad + \langle \mathbf{K}_p (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}), (-\dot{\mathbf{x}}) \rangle \} = \\ &= \langle \mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle - \langle \mathbf{K}_p (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}), \dot{\mathbf{x}} \rangle. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Ezért,  $\mathbf{h}_g(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{h}}_g(\mathbf{q})$  feltételezése mellett, a robot dinamikai modellje és az impedanciairányítás miatt teljesül, hogy

$$\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}_s\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}^T \{ \mathbf{K}_p (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}) - \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{x}} \}, \quad (6.64)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}, \quad (6.65)$$

ahonnan következik, hogy a trajektória mentén

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \left\langle \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}_s\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}^T \{ \mathbf{K}_p(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}) - \mathbf{K}_v\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle - \\ &\quad - \left\langle \mathbf{K}_p(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}), \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C})\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle - \left\langle \mathbf{C}_s\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle - \left\langle \mathbf{K}_v(\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}), \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \right\rangle. \quad (6.66) \end{aligned}$$

Függelék J szerint  $\left\langle (\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C})\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle = 0$ , ezért  $\dot{V}$  negatív definit, és így az implicit merevség- és impedanciairányítások **aszimptotikusan stabilisak** feltéve, hogy  $\mathbf{J}^T\mathbf{K}_p$  invertálható. A figyelembe nem vett hatások ( $\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q})$  pontatlan becslése, álló súrlódás, nemkonstans  $\mathbf{x}_a$ ) instabilitást, például határciklust eredményezhetnek.

Már ez a viszonylag egyszerű irányítási stratégia sem realizálható a megszokott decentralizált analóg szervohajtásokkal, hiszen a csuklókoordináták és deriváltjaik megmért  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$  értékéből

$\mathbf{x}$  (pozíció és orientáció) a robot geometriai modelljéből,

$\mathbf{x}_a - \mathbf{x}$  (pozíció- és orientációhiba) a Rodrigues-képlet alapján,

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$  a robot Jacobi-mátrixából,

$\hat{\mathbf{h}}_g(\mathbf{q})$  a robot geometriai modelljéből és a szegmensek tömegéből és tömegközéppontjából

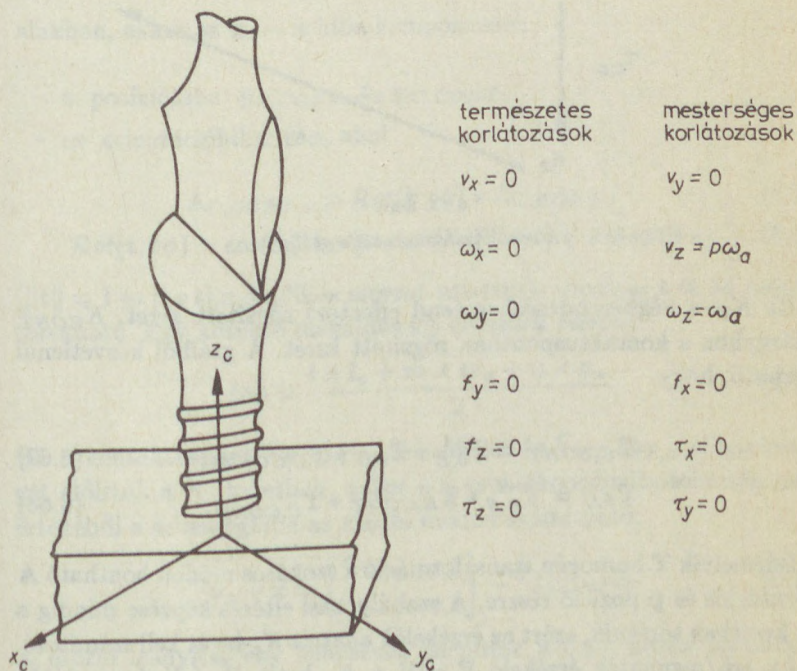
határozható meg jelentős számítási ráfordítással valós időben.

## 6.4. HIBRID POZÍCIÓ-ERŐ IRÁNYÍTÁS

Az alapvető hibrid irányítási elv egy olyan irányítási architektúra, amely a feladat korlátozásainak megfelelően az erő-visszacsatolást bevonja a szabályozási algoritmusba. A feladat korlátozásai Raibert és Craig (1981) eredeti cikkében egy  $K_c$  **engedékenységi keretben** (compliance frame) adottak. Általában, minden feladathoz definiálható egy  $N$ -szabadságfokú általánosított felület a korlátozások terében, amelynek normálisa mentén pozíció-, míg érintője mentén erő- (nyomaték-) korlátozások vannak előírva. Ezek a **természetes korlátozások** (natural constraints), amelyek a megfogó mozgásának szabadságfokait particionálják két ortogonális halmazra, amelyeket eltérő

kritériumok alapján kell irányítani. A mesterséges korlátozásoknak (artificial constraints) nevezett pótlólagos feltételek vezethetők be ezekkel a kritériumokkal kapcsolatban, amelyek az előirt pozícióról és erőről rendelkeznek a feladat során. Ha tehát a tervező előír egy trajektóriát a pozícióra vagy az erőre, akkor egy mesterséges korlátozást definiál. Ezek a korlátozások is a felület normálisa és érintője mentén adottak, de a természetes korlátozásokkal ellentétben, a mesterséges erőkorlátozások a felület normálisa, a mesterséges pozíciókorlátozások pedig a felület érintője mentén vannak előírva (6.12. ábra).

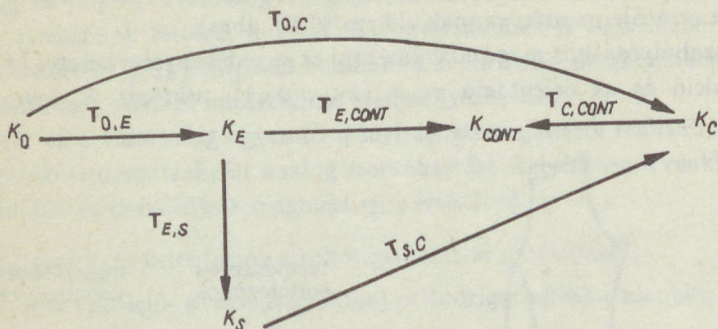
A szabályozáshoz meg kell választani az engedékenységi keretet ( $K_c$ ), a pozíció és az orientáció  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$  vektorát  $K_c$ -ben, az



6.12. ábra.

Csavarhúzó forgatása ([26], p.421) ( $\omega_a$  szögsebesség,  $p$  csavar menetemelkedése)

$S = \text{diag}(s_1, \dots, s_N)$  szelekciós mátrixot a feladat korlátozásainak megfelelően ( $s_i = 1$ , ha  $x_i$  irányban pozíciószabályozás szükséges;  $s_i = 0$ , ha  $x_i$  irányban erőirányítás szükséges). Figyelembe kell venni, hogy az erő/nyomaték érzékelő  $K_s$  koordináta-rendszere eltér  $K_c$ -től. A szabályozási hiba képzéséhez a szabályozott jellemzőket a  $K_c$  keretbe kell át számítani. Ehhez felhasználható a robot transzformációs gráfja (6.13. ábra).



6.13. ábra.

A robot transzformációs gráfja

Itt  $K_E$  a végberendezéshez (end effector) rögzített keret,  $K_{CONT}$  a tárgyhoz a kontaktuspontban rögzített keret. A gráfból közvetlenül felírható, hogy

$$\mathbf{T}_{E,CONT} = \mathbf{T}_{0,E}^{-1} * \mathbf{T}_{0,C} * \mathbf{T}_{C,CONT}, \quad (6.67)$$

$$\mathbf{T}_{S,C} = \mathbf{T}_{E,S}^{-1} * \mathbf{T}_{E,CONT} * \mathbf{T}_{C,CONT}^{-1}. \quad (6.68)$$

Bármelyik  $\mathbf{T}$  homogén transzformáció a szokásos módon bontható  $\mathbf{A}$  orientációs és  $\mathbf{p}$  pozíció részre. A szabályozási eltérés képzése mindig a  $K_c$  keretben történik, ezért az érzékelők adatait  $K_c$ -be át kell számítani.

Az erő/nyomaték érzékelő  $\mathbf{F}$  jelét a  $K_c$  keret  $\mathbf{F}_c$  jelévé az alábbi módon számíthatjuk át:

$$\mathbf{F}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{S,C}^T & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{S,C}^T[\mathbf{p}_{S,C} \times] & \mathbf{A}_{S,C}^T \end{bmatrix} \mathbf{F}. \quad (6.69)$$

A kontaktuspont sebessége és szögsebessége a  $K_c$  keretben a  ${}^C \mathbf{J}_{CONT}$  Jacobi-mátrixszal fejezhető ki:

$${}^C \mathbf{J}_{CONT} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{c,CONT}^T & \mathbf{A}_{E,CONT}^T & -\mathbf{A}_{c,CONT}^T \mathbf{A}_{E,CONT}^T [\mathbf{P}_{E,CONT} \times] \\ 0 & & \mathbf{A}_{c,CONT}^T \mathbf{A}_{E,CONT}^T \end{bmatrix} \mathbf{E} \mathbf{J}_E. \quad (6.70)$$

Ha a kontaktuspont pozícióját és orientációját a  $K_c$  keretben előírtuk a  $\mathbf{T}_{C,CONT,a}$  alapjel révén, továbbá a  $\mathbf{q}$  csuklókoordináta mért értékéből és a geometriai modelltől kiszámítottuk aktuális értékét

$$\mathbf{T}_{C,CONT} = \mathbf{T}_{0,C}^{-1} * \mathbf{T}_{0,E}(\mathbf{q}) * \mathbf{T}_{E,CONT} \quad (6.71)$$

alakban, akkor az  $\mathbf{x}_a - \mathbf{x}$  hiba komponensei:

- a pozícióhiba:  $\mathbf{p}_{C,CONT,a} - \mathbf{p}_{C,CONT}$ ,
- az orientációhiba:  $t\delta\phi$ , ahol

$$\mathbf{A}_{C,CONT,a} = \mathcal{R}ot(\mathbf{t}, \delta\phi) * \mathbf{A}_{C,CONT}, \quad (6.72)$$

$$\mathcal{R}ot(\mathbf{t}, \delta\phi) = \cos(\delta\phi)\mathbf{I} + [1 - \cos(\delta\phi)][\mathbf{t} \circ \mathbf{t}] + \sin(\delta\phi)[\mathbf{t} \times] \quad (6.73)$$

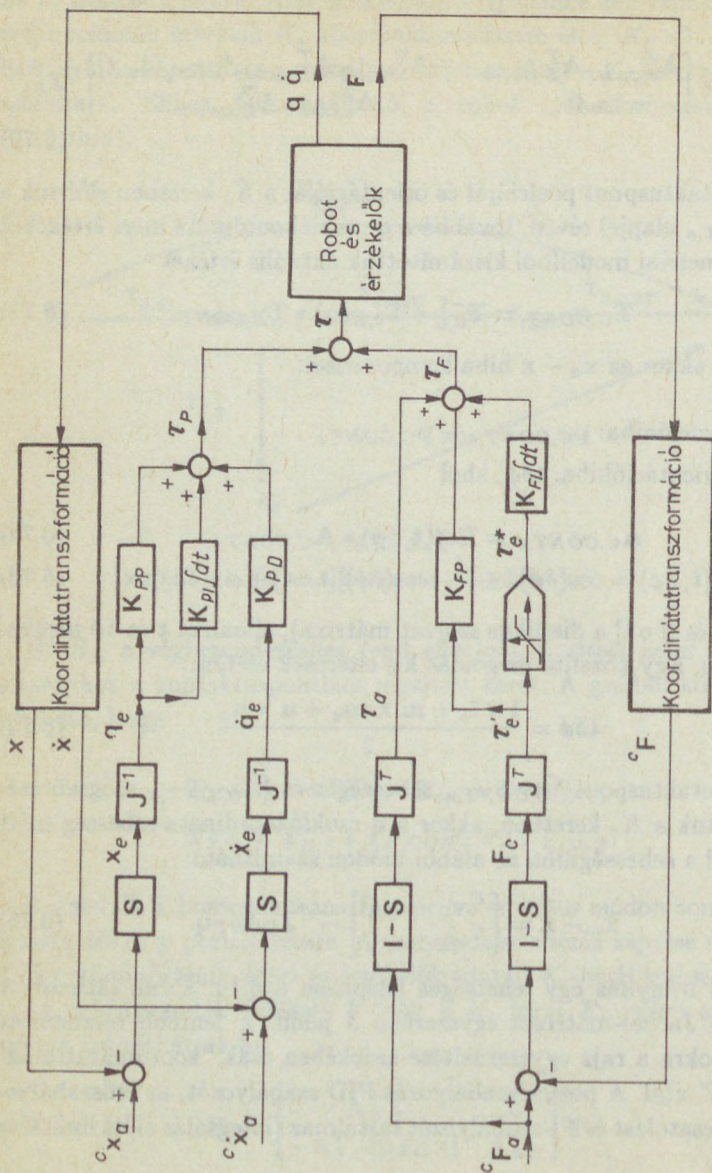
( $\|\mathbf{t}\| = 1$  és  $[\mathbf{t} \circ \mathbf{t}]$  a diadikus szorzat mátrixa), ahonnan  $\mathbf{t}$  és  $\delta\phi$  meghatározható. Egy közelítő megoldás kis eltérések esetén:

$$t\delta\phi = \frac{\mathbf{l} \times \mathbf{l}_a + \mathbf{m} \times \mathbf{m}_a + \mathbf{n} \times \mathbf{n}_a}{2}. \quad (6.74)$$

Ha a kontaktuspont  ${}^C \mathbf{v}_{CONT,a}$  sebességét és  ${}^C \boldsymbol{\omega}_{CONT,a}$  szögsebességét előírtuk a  $K_c$  keretben, akkor a  $\dot{\mathbf{q}}$  csuklókoordináta-sebesség mért értékéből a sebességhiba az alábbi módon számítható:

$$\dot{\mathbf{x}}_a - \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} {}^C \mathbf{v}_{CONT,a} \\ {}^C \boldsymbol{\omega}_{CONT,a} \end{bmatrix} - {}^C \mathbf{J}_{CONT} \dot{\mathbf{q}}. \quad (6.75)$$

A hibrid irányítás egy lehetséges felépítése a 6.14. ábrán látható. A  ${}^C \mathbf{J}_{CONT}$  Jacobi-mátrixot egyszerűen  $\mathbf{J}$  jelöli. A fentebb részletezett számításokra a rajz egyszerűsítése érdekében csak "koordinátatranszformáció" utal. A pozíciószabályozás PID-szabályozót, az erőszabályozás előreccatolást és PI-szabályozót tartalmaz (integrálás előtt limitálva a hibát).



6.14. ábra.

Hibrid pozíció-erőirányítás felépítése

## 6.5. AZ OPERÁCIÓS TÉR MÓDSZER

A hibrid irányítási módszert Khatib [20] továbbfejlesztette redundáns robotok és szinguláris konfigurációk esetére a végberendezés térelével azonos operációs térben.

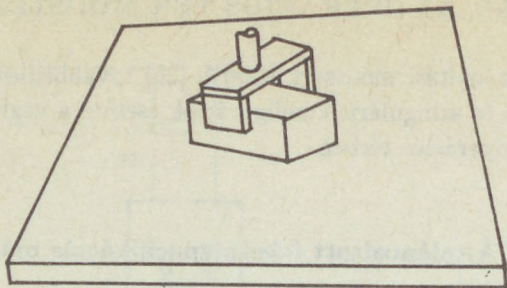
### 6.5.1. Általánosított feladatspecifikációs mátrixok

A végberendezés (end effector) mozgása és a kontakt erők fontos részét alkotják a robotok szerelő operációi tervezésének, leírásának és irányításának. A végberendezés konfigurációja leírható  $m$  paraméterrel:  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , amelyek definiálják pozícióját és orientációját a referenciakeretben. Szabad mozgású operációk esetén, a végberendezés  $m_0$  szabadságfoka azoknak a független paramétereknek a száma, amelyek a  $K_0$  referenciakeretben teljes mértékben definiálják a végberendezés pozícióját és orientációját. Ezek a független paraméterek az operációs koordináták egy rendszerét alkotják.

Korlátozott mozgású operációk esetén a végberendezés elmozdulása és elfordulása geometriai korlátozásoknak tesz eleget. A korlátozások a végberendezés mozgásának (elmozdulásának és elfordulásának) szabadságfokát lecsökkentik. A geometriai korlátozások csak a végberendezés mozgásának szabadságfokára hatnak, mivel ezeken a korlátozásokon még statikus erők és nyomatékok alkalmazhatók. A korlátozásnak alávetett végberendezés szabadságfoka egyenlő  $m_0$  és a korlátozásokat definiáló független egyenletek számának különbségével, feltéve, hogy a korlátozások holonómok. A 6.15. ábrán például egy háromszabadságfokú esetet ábrázoltunk.

A végberendezés irányítása szempontjából két információ szükséges a feladat specifikálásához: az erő és nyomaték, amelyeket a korlátozás kielégítése érdekében ki kell fejteni, továbbá a végberendezés mozgásának szabadságfoka és irányai.

Legyen  $f_a$  egy egységvektor a  $K_0$  keretben a végberendezés által kifejtendő erő irányában. A pozicionálási szabadság, ha létezik, akkor az  $f_a$ -ra merőleges altérben lesz. Egy alkalmas koordinátarendszer a korlátozott mozgású operációkat tartalmazó feladatok leírásához lehet egy



6.15. ábra.

Háromszabadságfokú korlátozott mozgás

$K_f$  koordinátarendszer, amelyet  $K_0$ -ból olyan  $A_f$  rotációval nyerünk, amely a  $z_f$  tengely irányát  $f_a$ -val teszi egyenlővé. Ha a feladat csak egy  $f_a$ -ra merőleges elmozdulást enged meg, akkor az  $x_f$  és  $y_f$  tengelyek egyike ebbe az irányba mutat (6.16. ábra).

Definiáljuk a pozícióspecifikus mátrixot

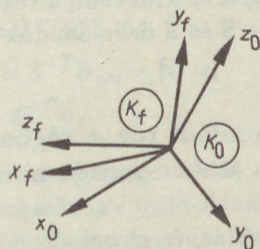
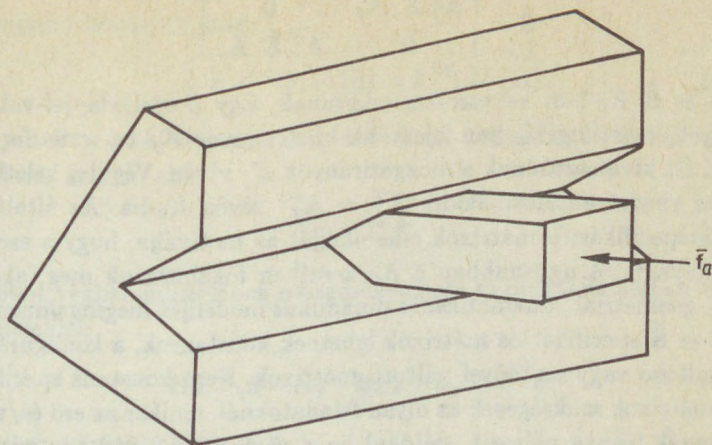
$$\Sigma_f = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (6.76)$$

alakban, ahol  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  0 vagy 1 értékű számok, és rendre akkor 1 értékűek, ha szabad mozgás lehetséges az  $x_f, y_f, z_f$  tengely irányában, különben nulla az értékük. Egy nem nulla  $\sigma_z$  teljes szabadságként értelmezendő a végberendezés pozíciója számára (korlátozás nélküli pozicionálás,  $K_f = K_0$ ). Az erőszabályozás irányait

$$\tilde{\Sigma}_f = I - \Sigma_f \quad (6.77)$$

definiálja ( $I$   $3 \times 3$ -as egységmátrix).

Tekintsük most azt az esetet, amikor a végberendezésre vonatkozó feladat korlátozást tartalmaz a rotációra, és nyomatékot kell kifejtetni. Legyen  $\tau_a$  egy egységvektor a  $K_0$  keretben a végberendezés által kifejtendő nyomaték irányában. Legyen  $K_\tau$  az a keret, amelyet  $K_0$ -ból olyan  $A_\tau$  rotációval kapunk, amely a  $z_\tau$  tengelyt  $\tau_a$ -val teszi egyirányúvá.



6.16. ábra.

Egyszabadságfokú mozgás

$K_\tau$ -ban a szabad rotáció alterét  $\{x_\tau, y_\tau\}$  feszítik ki. A végberendezés rotációját és a kifejtendő nyomatékot specifikáló feladat számára az előzőekhez hasonló módon bevezetjük a rotáció- és nyomaték-specifikációs mátrixokat:  $\Sigma_\tau$  és  $\tilde{\Sigma}_\tau$ .

Általános feladatok esetére, amelyek a végberendezés mozgásáról (pozíciójáról és orientációjáról) és a kontakt erőről (erőről és nyomatékról) rendelkeznek a  $K_0$  referenciakeretben, definiáljuk az **általánosított feladatspecifikációs mátrixokat**:

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f^T \Sigma_f \mathbf{A}_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_\tau^T \Sigma_\tau \mathbf{A}_\tau \end{bmatrix}, \quad (6.78a)$$

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f^T \tilde{\Sigma}_f \mathbf{A}_f & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_\tau^T \tilde{\Sigma}_\tau \mathbf{A}_\tau \end{bmatrix}, \quad (6.78b)$$

Itt  $\mathbf{S}$  és  $\tilde{\mathbf{S}}$   $K_0$ -beli vektorokon operálnak. Egy pozícióalapjel-vektor, amelyet eredetileg  $K_0$ -ban fejeztünk ki,  $\mathbf{A}_f$  révén  $K_f$ -be transzformálódik. Itt kiválasztódnak a mozgásirányok  $\Sigma_f$  révén. Végül a keletkező vektor visszatranszformálódik  $\mathbf{A}_f^T = \mathbf{A}_f^{-1}$  révén  $K_0$ -ba. Az általános feladatspecifikációs mátrixok eme alakját az motiválja, hogy a szelekciós folyamatot ugyanabban a  $K_0$  keretben fogalmazzuk meg, ahol a robot geometriai, kinematikai és dinamikus modelljét megfogalmazzuk. Az  $\mathbf{S}$  és  $\tilde{\mathbf{S}}$  specifikációs mátrixok lehetnek konstansok, a konfigurációval változó vagy az idővel változó mátrixok. Nem konstans specifikációs mátrixok szükségesek az olyan feladatoknál, amikor az erő és/vagy nyomaték iránya változik, például ha a végberendezéssel egy görbült felületen kell konstans normális erőt kifejteni.  $\mathbf{S}$  és  $\tilde{\mathbf{S}}$  a  $K_0$  referencia-keretben adott. Ha a feladat specifikálása a végberendezéshez rögzített  $K_E$  keretben adott, akkor  $\mathbf{S}$  és  $\tilde{\mathbf{S}}$  definiálhatók ebben a keretben is.

### 6.5.2. Nemredundáns robot végberendezésének szabad mozgása

Ha a robot nemredundáns, és mozgása nincs korlátozásoknak alávetve, akkor  $\dim \mathbf{q} = \dim \mathbf{x} = m_0$ . Feltesszük, hogy a robot mozgása során nem kerül szinguláris pozícióba [ $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  invertálható]. A robot mozgásegyenlete csuklókoordinátákban:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}_{ccgs}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (6.78)$$

( $\mathbf{h}_{ccgs}$  a centripetális, Coriolis, gravitációs és súrlódó hatás), vagy részletesebben:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}_{ccs}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{h}_g(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}. \quad (6.79)$$

Mivel a robot nemredundáns és nonszinguláris, ezért

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}, \quad (6.80)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (6.81)$$

ahonnan következik, hogy

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\ddot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{J}^{-1}(\ddot{\mathbf{x}} - \alpha). \quad (6.82)$$

Legyen  $\mathbf{F}$  a csuklónyomatékkal ekvivalens általánosított erő a végberendezés helyén, akkor

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{F}. \quad (6.83)$$

A robot végberendezésének mozgásegyenlete az operációs térben ennek megfelelően

$$\mathbf{H}\mathbf{J}^{-1}(\ddot{\mathbf{x}} - \alpha) + \mathbf{h}_{ccs} + \mathbf{h}_g = \mathbf{J}^T \mathbf{F}, \quad (6.84)$$

ahonnan következik, hogy

$$\mathbf{H}^*(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{h}_{ccs}^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{h}_g^*(\mathbf{x}) = \mathbf{F}, \quad (6.85a)$$

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{H} \mathbf{J}^{-1}, \quad (6.85b)$$

$$\mathbf{h}_{ccs}^* = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{h}_{ccs} - \mathbf{H}^* \alpha, \quad (6.85c)$$

$$\mathbf{h}_g^* = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{h}_g. \quad (6.85d)$$

Egy hatékony algoritmus a nagyméretű, dinamikusan nemlineáris és kapcsolt rendszer mozgásának (pozíciójának és orientációjának) irányítására a **nemlineáris dinamikus szétcsatolás**, amely feltételezi a dinamikus modellben szereplő és a pálya mentén változó paraméterek megfelelően jó becslésének ismeretét:  $\hat{\mathbf{H}}^*(\mathbf{x})$ ,  $\hat{\mathbf{h}}_{ccs}^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ ,  $\hat{\mathbf{h}}_g^*(\mathbf{x})$ . A "megfelelően jót" abban az értelemben használjuk, hogy alkalmasnak kell lennie a szabályozás jóságának (stabilitás; tranzienst és statikus hibák) megítélésére a valódi robot számára is (nemcsak a modell számára). A nemlineáris szétcsatolás **algoritmus**a operációs térben a következő ( $\mathbf{F}_{mozg}^*$  és  $\ddot{\mathbf{x}}$  azonos dimenziójúak):

$$\mathbf{F} := \hat{\mathbf{H}}^*(\mathbf{x})\mathbf{F}_{mozg}^* + \hat{\mathbf{h}}_{ccs}^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{h}}_g^*(\mathbf{x}). \quad (6.86)$$

Ha a végberendezés pályája definiált, például a pályatervezés révén analitikusan adott, akkor egy célszerű választás lehet

$$\mathbf{F}_{mozg}^* := \ddot{\mathbf{x}}_a + \mathbf{K}_P(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}) + \mathbf{K}_V(\dot{\mathbf{x}}_a - \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{K}_I \int (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}) dt, \quad (6.87)$$

ahol  $\mathbf{K}_P$ ,  $\mathbf{K}_V$ ,  $\mathbf{K}_I$  a megkívánt tranzienshez alkalmasan választott **diagonális** mátrixok. Ekkor, ha a paraméterek megegyeznek becsléseikkel, akkor a végberendezés mozgása szétcsatolt az operációs térben, és a realizált trajektória az előírt trajektória közelében halad:

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = \ddot{\mathbf{x}}_{ia} + k_{Pi}(\mathbf{x}_{ia} - \mathbf{x}_i) + k_{Vi}(\dot{\mathbf{x}}_{ia} - \dot{\mathbf{x}}_i) + k_{Ii} \int (\mathbf{x}_{ia} - \mathbf{x}_i) dt. \quad (6.88)$$

**Ha csak a célpozíció definiált** (nagy mozgás; large motion to a goal position), akkor választható

$$\mathbf{F}_{mozg}^* := \mathbf{K}_V(\eta \dot{\mathbf{x}}_a - \dot{\mathbf{x}}), \quad (6.89)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_a := \mathbf{K}_P \mathbf{K}_V^{-1}(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}), \quad (6.90)$$

$$\eta := \min\left\{1, \frac{v_{max}}{\|\dot{\mathbf{x}}_a\|}\right\}, \quad (6.91)$$

ahol  $\mathbf{K}_P$  és  $\mathbf{K}_V$  alkalmasan választott diagonális mátrixok. Pontos becslés esetén ekkor a szétcsatolt trajektória egyenlete a következő lesz:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}_i &= k_{Vi} \{ \eta k_{Pi} k_{Vi}^{-1} (\mathbf{x}_{ai} - \mathbf{x}_i) - \dot{\mathbf{x}}_i \} \Rightarrow \\ \ddot{\mathbf{x}}_i + k_{Vi} \dot{\mathbf{x}}_i + \eta k_{Pi} \mathbf{x}_i &= \eta k_{Pi} \mathbf{x}_{ai}. \end{aligned} \quad (6.92)$$

Az algoritmus (értelmes  $k_{Vi}$  és  $k_{Pi}$  választás esetén) biztosítja a végberendezés egyenes vonalú mozgását maximális  $v_{max}$  sebességgel. Az  $\dot{\mathbf{x}}$  sebességet a célpozíció felé irányítjuk, miközben abszolút értéke nem lépi túl  $v_{max}$  értékét.

### 6.5.3. Nemredundáns robot végberendezésének korlátozott mozgása

Az  $\mathbf{S}$  mátrix definiálja a  $K_0$  keretben a végberendezés mozgásának (elmozdulásának és elfordulásának) irányait. A kifejtendő erők és nyomatékok irányai, melyeket  $\tilde{\mathbf{S}}$  definiál, ortogonálisak a mozgásirányokra.

Figyelembe kell azonban vennünk, hogy a  $\Sigma_\tau$  és  $\tilde{\Sigma}_\tau$  mátrixokban specifikált tengelyek a rotáció, illetve a kifejtendő nyomaték számára csak az orientációnak a pillanatnyi tengelykörüli forgáson alapuló leírásával összeegyeztethetők. Ezért a végberendezés orientációs hibáját egy

t tengely körüli  $\delta\phi$  elfordulással jellemezzük (lásd hibrid irányítás). Az orientáció reprezentációjához tartozó paraméterek idő szerinti deriváltjai egyszerű kapcsolatban állnak a szögsebességgel. Ha a végberendezés lineáris sebessége és szögsebessége a végberendezés Jacobi-mátrixától

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_E(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (6.93)$$

alakban függ, és a végberendezés orientációjának operációs térbeli reprezentációja  $\mathbf{x}_{repr}$ , akkor a reprezentációhoz tartozó Jacobi-mátrix alakja

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \mathbf{E}_{x_{repr}} \mathbf{J}_E(\mathbf{q}), \quad (6.94)$$

ahol  $\mathbf{E}_{x_{repr}}$  egyszerűen csak  $x_{repr}$  függvénye. A továbbiakban feltételezzük, hogy a végberendezés mozgása az  $x, y, z$  derékszögű koordinátákkal és a pillanatnyi szögelfordulással lett specifikálva a  $K_0$  keretben, ezért  $\mathbf{J} = {}^0\mathbf{J}_E$ . A kontaktpontban előírt  $\mathbf{F}_a$  általánosított erőt át kell helyezni a  $K_E$  keret origójába, vagy a  $K_E$  keret origóját kell a kontaktpontba képzelni.

A nemlineáris dinamikus szétcsatolási algoritmus a végberendezés korlátozott mozgására és aktív erő- (erő és nyomaték) irányítására is kiterjeszhető:

$$\mathbf{F} := \mathbf{F}_{mozg} + \mathbf{F}_{aktiv} + \mathbf{F}_{ccgs}, \quad (6.95)$$

ahol  $\mathbf{F}_{mozg}$ ,  $\mathbf{F}_{aktiv}$ ,  $\mathbf{F}_{ccgs}$  operációs térbeli erővektorok. a mozgás, aktív erőirányítás, továbbá a centripetális, Coriolis, gravitációs és súrlódó hatás számára, melyek alakja:

$$\mathbf{F}_{mozg} := \hat{\mathbf{H}}^*(\mathbf{x})\mathbf{S}\mathbf{F}_{mozg}^*, \quad (6.96)$$

$$\mathbf{F}_{aktiv} := \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{aktiv}^* + \hat{\mathbf{H}}^*(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{csill}^*, \quad (6.97)$$

$$\mathbf{F}_{ccgs} := \hat{\mathbf{h}}_{ccs}^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{h}}_g^*(\mathbf{x}). \quad (6.96)$$

Itt  $\mathbf{F}_{csill}^*$  a végberendezés sebességszabályozása érdekében szerepel, amely a specifikált erő irányában hat ( $\mathbf{F}_{csill}^*$  és  $\ddot{\mathbf{x}}$  azonos dimenziójúak).  $\mathbf{F}_{aktiv}^*$  az aktív erő- (erő és nyomaték) irányítás komponense:

$$\mathbf{F}_{csill}^* = -\mathbf{K}_{vf}\dot{\mathbf{x}}, \quad (6.99)$$

$$\mathbf{F}_{aktiv}^* = \mathbf{F}_a + \mathbf{K}_{pf}(\mathbf{F}_a - \mathbf{F}) + \mathbf{K}_{If} \int (\mathbf{F}_a - \mathbf{F}) dt, \quad (6.100)$$

ahol  $\mathbf{K}_{vf}$ ,  $\mathbf{K}_{Pf}$ ,  $\mathbf{K}_{Jf}$  alkalmasan választott diagonális mátrixok. A szabályozó által kifejtendő csuklónyomaték:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\{\hat{\mathbf{H}}^*(\mathbf{q})[\mathbf{S}\mathbf{F}_{mozg}^* + \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{csill}^*] + \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{aktiv}^*\} + \\ & + \hat{\mathbf{h}}_{ccs}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \hat{\mathbf{h}}_g(\mathbf{q}) - \mathbf{J}^T\hat{\mathbf{H}}^*(\mathbf{q})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \end{aligned} \quad (6.101)$$

Az irányítási architektúrát a 6.17. ábra mutatja. A szabályozó paramétereit ( $\mathbf{K}_p, \dots, \mathbf{K}_{Jf}$ ) célszerű szimulációs vizsgálatokkal megtervezni. Ennek során figyelmet kell fordítani a megfogó által tartott tárgy és a környezet kölcsönhatásának modellezésére is.

A csuklónyomaték egy másik felírási módja, amely az előzőből következik:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\{\mathbf{S}\mathbf{F}_{mozg}^* + \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{csill}^* - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\} + \\ & + \mathbf{J}^T\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{aktiv}^* + \hat{\mathbf{h}}_{ccs}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \hat{\mathbf{h}}_g(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (6.102)$$

Egy hatékony stratégia a végberendezés irányítása számára a szabad mozgástól a korlátozott mozgásig vezető tranziens folyamán alapulhat az energia tiszta disszipációján az ütközéskor. Az ütközési tranziens alatt az operációs parancs vektor lehet  $\mathbf{F}_a = \hat{\mathbf{H}}^*(\mathbf{q})\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{csill}^*$ . Az ütközési tranziens időtartama függ a  $k_{vf}$  csillapítástól és az ütközési sebességtől (tipikusan néhány 10ms).

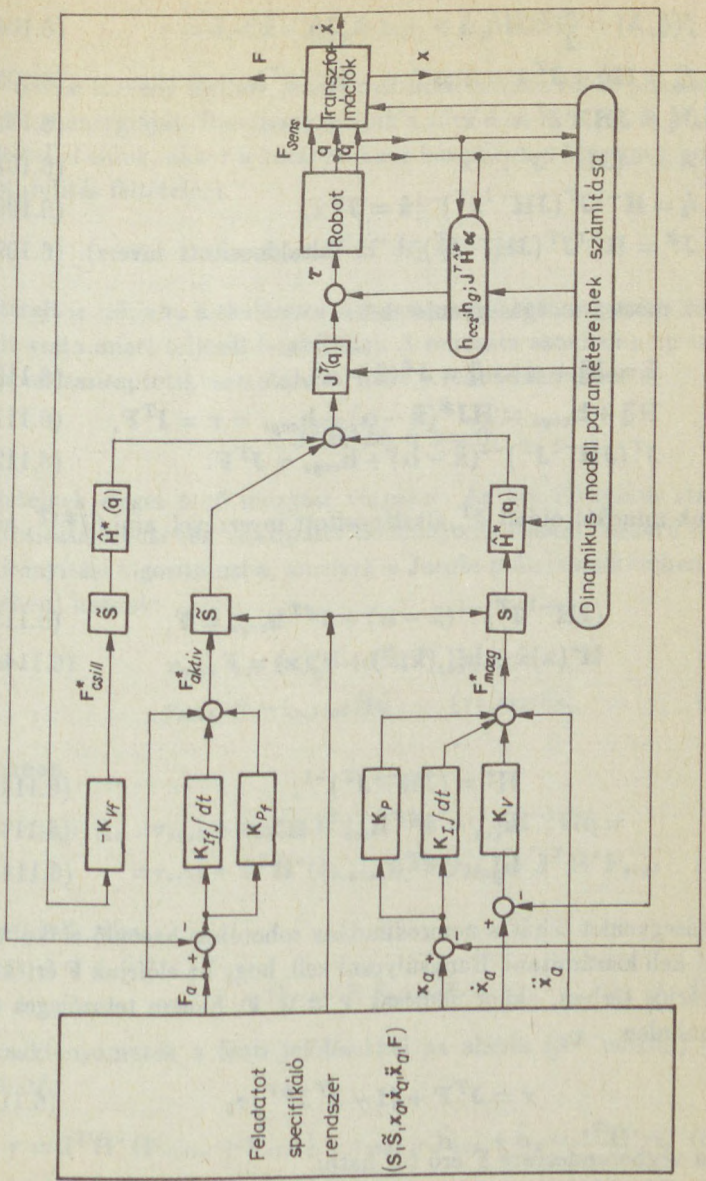
#### 6.5.4. Redundáns robotok irányítása

Bár az összetett redundáns rendszer dinamikus viselkedése nem jellemezhető csupán a végberendezés koordinátaival, a végberendezés dinamikus viselkedése továbbra is jellemezhető az operációs térben megfelelően felírt mozgásegyenletekkel.

Mivel a robot redundáns, ezért  $\dim(\mathbf{q}) > \dim(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{J}$  nem négyzetes és így nincs közönséges inverze. Határozzuk meg  $\mathbf{J}$  általánosított inverzét ( $\mathbf{J}^\#$ ) úgy, hogy a robot kinetikus energiája minimális legyen, miközben  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$  kielégül. Ehhez a korlátozások melletti alábbi optimumproblémát kell megoldani:

$$\frac{1}{2} \langle \mathbf{H}\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle = K(\dot{\mathbf{q}}) \rightarrow \min, \quad (6.103a)$$

$$\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{x}}. \quad (6.103b)$$



6.17. ábra.

Az operációs tér módszer irányítási struktúrája

Alkalmazzuk a Lagrange-multiplikátor szabályt:

$$f(\dot{\mathbf{q}}, \lambda) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{H}\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle + \langle \lambda, \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{x}} \rangle, \quad (6.104)$$

$$f'_{\dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{H}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}^T \lambda = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{J}^T \lambda, \quad (6.105)$$

$$\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}\mathbf{H}^{-1} \mathbf{J}^T \lambda = \dot{\mathbf{x}}, \quad (6.106)$$

$$\lambda = -(\mathbf{J}\mathbf{H}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} \dot{\mathbf{x}}, \quad (6.107)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{H}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}^{\#} \dot{\mathbf{x}}, \quad (6.108)$$

$$\mathbf{J}^{\#} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{H}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} \quad (\text{általánosított inverz}). \quad (6.109)$$

Tekintsük most a mozgásegyenleteket:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \alpha \Rightarrow \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{\#} (\ddot{\mathbf{x}} - \alpha), \quad (6.110)$$

$$\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}_{ccgs} = \mathbf{H}\mathbf{J}^{\#} (\ddot{\mathbf{x}} - \alpha) + \mathbf{h}_{ccgs} = \tau = \mathbf{J}^T \mathbf{F}, \quad (6.111)$$

$$\mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{H}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} (\ddot{\mathbf{x}} - \alpha) + \mathbf{h}_{ccgs} = \mathbf{J}^T \mathbf{F}. \quad (6.112)$$

Szorozzuk mindkét oldalt  $\mathbf{J}^T$  általánosított inverzével, ami  $(\mathbf{J}^{\#})^T$ , akkor

$$(\mathbf{J}\mathbf{H}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} (\ddot{\mathbf{x}} - \alpha) + \mathbf{J}^{\#T} \mathbf{h}_{ccgs} = \mathbf{F}, \quad (6.113)$$

$$\mathbf{H}^*(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{h}_{ccs}^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{h}_g^*(\mathbf{x}) = \mathbf{F}, \quad (6.114a)$$

ahol

$$\mathbf{H}^* = (\mathbf{J}\mathbf{H}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1}, \quad (6.114b)$$

$$\mathbf{h}_{ccs}^* = \mathbf{J}^{\#T} \mathbf{h}_{ccs} - \mathbf{H}^* \alpha, \quad (6.114c)$$

$$\mathbf{h}_g^* = \mathbf{J}^{\#T} \mathbf{h}_g. \quad (6.114d)$$

A mozgásegyenlet tehát a nemredundáns robotéhoz hasonló alakú, de másként kell kiszámítani. Hangsúlyozni kell, hogy ha előírjuk  $\mathbf{F}$  értékét az operációs térben, akkor nemcsak  $\tau = \mathbf{J}^T \mathbf{F}$ , hanem tetszőleges  $\tau_0$  esetén minden

$$\tau = \mathbf{J}^T \mathbf{F} + \{\mathbf{I} - \mathbf{J}^T \mathbf{J}^{\#T}\} \tau_0 \quad (6.115)$$

esetén a végberendezésre  $\mathbf{F}$  erő fog hatni.

Tekintsük most a szabadon mozgó redundáns robotot

$$\tau = \mathbf{J}^T \hat{\mathbf{H}}^* \mathbf{F}_{mozg} + \hat{\mathbf{h}}_{ccs} + \hat{\mathbf{h}}_g - \mathbf{J}^T \hat{\mathbf{H}}^* \alpha \quad (6.116)$$

irányítási törvény mellett, amely minimalizálja a robot pillanatnyi kinetikus energiáját. Ha elhanyagoljuk a súrlódást és  $\mathbf{K}_I = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{K}_V = k_v \mathbf{I}$  feltétellel élünk, akkor a korábbiakhoz hasonlóan a Ljapunov-kritérium a stabilitás feltételéül

$$-k_v < \mathbf{J}^T \hat{\mathbf{H}}^* \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} > \leq 0 \quad (6.117)$$

feltételt ír elő, ami a skalárszorzatban szereplő mátrix pozitív szemidefinit volta miatt teljesül (stabilitás). A rendszer azonban nem szükségképpen aszimptotikusan stabilis, mert a redundáns robot a

$$< \mathbf{J}^T \hat{\mathbf{H}}^* \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} > = 0 \quad (6.118)$$

feltételnek eleget tevő mozgást végezhet. Az aszimptotikus stabilitás biztosítása érdekében disszipatív csuklónyomatékokat célszerű bevonni az irányítási algoritmusba, amelyek a Jacobi-mátrix nullterében (magterében) hatnak:

$$\tau_{null,stab} := \{\mathbf{I} - \mathbf{J}^T \mathbf{J}^{\#T}\} \tau_{stab}, \quad (6.119)$$

$$\tau_{stab} := -k_{v,stab} \hat{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{választás}), \quad (6.120)$$

ahonnan

$$\begin{aligned} \tau_{null,stab} &= \tau_{stab} + k_{v,stab} \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \hat{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{J} \hat{\mathbf{H}}^{-1} \hat{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{q}} = \\ &= \tau_{stab} + \mathbf{J}^T \hat{\mathbf{H}}^* (k_{v,stab} \dot{\mathbf{x}}) = \tau_{stab} + \mathbf{J}^T \hat{\mathbf{H}}^* \mathbf{F}_{stab} \end{aligned} \quad (6.121)$$

következik, ahol

$$\mathbf{F}_{stab} := k_{v,stab} \dot{\mathbf{x}}. \quad (6.122)$$

A csuklónyomaték a fenti jelölésekkel az alábbi ( $\mathbf{J}^{\#}$  nélküli) alakra hozható:

$$\tau = \mathbf{J}^T \hat{\mathbf{H}}^* \{\mathbf{F}_{mozg} + \mathbf{F}_{stab}\} + \tau_{stab} + \hat{\mathbf{h}}_{ccs} + \hat{\mathbf{h}}_g - \mathbf{J}^T \hat{\mathbf{H}}^* \alpha. \quad (6.123)$$

A korrekció révén a  $\tau$ -ban tartalmazott disszipatív erő alakja módosult:

$$\tau_{dissz} = -\mathbf{D}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (6.124)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) = -(\mathbf{k}_v - \mathbf{k}_{v,stab})\mathbf{J}^T\hat{\mathbf{H}}^*\mathbf{J} - \mathbf{k}_{v,stab}\hat{\mathbf{H}} \quad (6.125)$$

alakúra, ezért  $\hat{\mathbf{H}}$  pozitív definit volta miatt  $\mathbf{D}$  negatív definitté tehető, és így a Ljapunov-kritérium alapján

$$\langle \mathbf{D}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle \leq 0 \quad (6.126)$$

miatt a rendszer már aszimptotikusan stabilis lesz.

Tekintsük most a **korlátozásnak alávetett redundáns robot mozgását**, akkor a korábbi eredmények kiterjeszthetők erre az esetre is. Az irányítási törvény alakja:

$$\begin{aligned} \tau = & \mathbf{J}^T \{ \hat{\mathbf{H}}^* [\mathbf{S}\mathbf{F}_{moz}^* + \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{csill}^* + \mathbf{F}_{stab}] + \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{F}_a^* \} + \\ & + \tau_{stab} + \hat{\mathbf{h}}_{ccs} + \hat{\mathbf{h}}_g - \mathbf{J}^T \hat{\mathbf{H}}^* \alpha. \end{aligned} \quad (6.127)$$

### 6.5.5. Szinguláris konfigurációk

Szinguláris konfiguráción olyan  $\mathbf{q}$  csuklókonfigurációt értünk, amelyben a Jacobi-mátrix oszlopai lineárisan függökké válnak (a mátrix nem maximális rangú). A végberendezés a szinguláris konfigurációban elveszíti képességét, hogy mozogjon vagy forogjon a tér bizonyos irányában. A szingularitás vagy ellentettje, a mobilitás, például a Jacobi-mátrix determinánsával jellemezhető. Minden szinguláris konfigurációhoz tartozik egy szinguláris irány, amely mentén a végberendezés végtelen tömeget vagy inercianyomatékot reprezentál, míg az arra merőleges altérben mozgása szabad marad. Valójában ez a tulajdonság a szinguláris konfiguráció egy környezetére terjed ki:

$$\mathcal{D}_\epsilon := \{ \mathbf{q} : |\det \mathbf{J}(\mathbf{q})| \leq \epsilon \}. \quad (6.128)$$

Egy  $\mathbf{q}$  szinguláris konfiguráció  $\mathcal{D}_\epsilon$  környezetében a robotot egy redundáns mechanizmusnak tekinthetjük, a végberendezés mozgása szempontjából, a szinguláris irányra merőleges altérben. A végberendezés

mozgatását ebben az altérben úgy irányítjuk mint egy redundáns mechanizmusét. A nulltérben (magtérben) szelektált csuklónyomatékokat használunk a végberendezés szinguláris irányban történő mozgásának irányítására. Ha kifelé kell mozogni a szingularitásból, akkor ez elérhető a  $\det \mathbf{J}(\mathbf{q})$  változási sebességének irányításával, annak az értéknek megfelelően, amely  $|\det \mathbf{J}(\mathbf{q})| = \varepsilon$ -hoz tartozik. Kiszelektálván  $\det \mathbf{J}(\mathbf{q})$  kívánt sebességének előjelét, lehetővé válik a robot helyzetének irányítása a két konfiguráció valamelyike felé, amely rendszerint választható, ha kifelé mozgunk a szingularitásból. Egy  $\det \mathbf{J}(\mathbf{q})$ -tól függő pozícióhiba tagot alkalmazhatunk az irányítási vektorban olyan feladatok esetén, amelyeknél a mozgás célpozíciója egy szinguláris konfiguráció vagy annak környezete.

## 7. ROBOTOK ADAPTÍV IRÁNYÍTÁSA

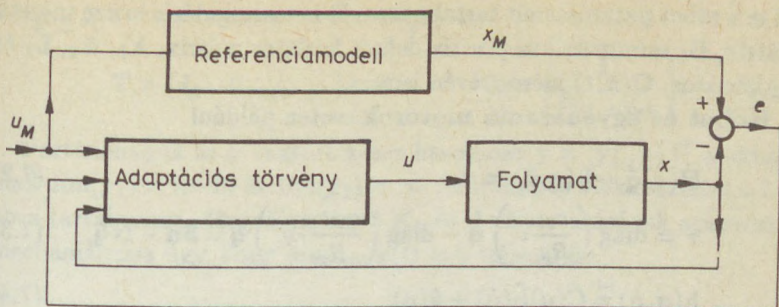
A robot irányításakor arra kell számítanunk, hogy az irányítási algoritmusok alapjául szolgáló dinamikus modellben bizonyos paraméterek (a szegmensek, motorok és a teher tömege, tömegközéppontja, tehetetlenségi nyomatéka) pontatlanul ismertek (például változó teher esetén) vagy akár teljességgel ismeretlenek, mert összeépítésük előtt a mechanika gyártója nem mérte meg értéküket, újra szétszerelni pedig kockázatos lenne.

Ezért fontosak azok az irányító algoritmusok, amelyek alkalmazkodni tudnak a paraméterek változásához anélkül, hogy az irányítás hatékonysága lényegesen módosulna. Az ilyen adaptív szabályozások között különösen lényegesek a modellreferenciás és az önhangoló adaptív irányítások, melyek közül néhányat ismertetünk a robot szabad és korlátozott mozgásának irányítására.

### 7.1. A SZABAD MOZGÁS MODELLREFERENCIÁS ADAPTÍV IRÁNYÍTÁSA

A modellreferenciás adaptív irányítás (model reference adaptive control, MRAC) általános sémáját a 7.1. ábra tartalmazza.

Esetünkben a folyamat a robot. A referenciabemenet  $u_M$  a realizálandó pálya. A tervező a realitások betartása mellett felveszi a kielégítő tranziens tulajdonságokat biztosító referenciamodellt. Megválasztja az adaptációs törvényt, és úgy állítja be az adaptációs törvény szabad paramétereit, hogy az  $e = x_M - x$  adaptációs hiba aszimptotikusan nullához tartson, továbbá az  $e(t)$  hiba a tranziens folyamán is kielégítően alakuljon. A stabilitás feltétele  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , aminek garantá-



7.1. ábra

A modellreferenciás adaptív irányítás (MRAC) általános sémája

lásához célszerű a nemlineáris szabályozások elméletének eredményeit figyelembe venni. A robot bonyolultsága miatt a tranzien্স hiba kedvező befolyásolását szimulációs vizsgálatokkal célszerű kikísérletezni. A továbbiakban Nicosia és Tomei [21] eredményeit ismertetjük, amelyek a hiperstabilitás elméletén alapulnak. Hasznos eredményeket tartalmaz még Cat [35] munkája.

Legyen a folyamat állapotvektora  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T]^T$  alakban particionálva, amikor is az állapotegyenlet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t, \alpha)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t, \alpha)\mathbf{R}\mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \alpha) \quad (7.1a)$$

alakú, ahol  $n = \dim(\mathbf{x})$ ,  $m = \dim(\mathbf{x}_2) = \dim(\mathbf{u})$  jelöléssel

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-m} \\ \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t, \alpha) & \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, t, \alpha) \end{bmatrix}, \quad (7.1b)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-m) \times n} \\ \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t, \alpha) \end{bmatrix}, \quad (7.1c)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-m} \\ \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t, \alpha) \{ \mathbf{L}_1(\mathbf{x}, t, \alpha) \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{L}_2(\mathbf{x}, t, \alpha) \} \end{bmatrix} = \quad (7.1d)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-m} \\ \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, t, \alpha) \end{bmatrix}. \quad (7.1d)$$

Itt  $\alpha$  a robot paramétereit tartalmazza,  $\mathbf{R}$  nemszinguláris  $m \times m$  méretű mátrix,  $\mathbf{B}_1$  szimmetrikus pozitív definit korlátos mátrix,  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{L}_1$  és  $\mathbf{L}_2$  korlátos,  $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$  mérés révén ismert.

**Robot és egyenáramú motorok esetén például**

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (7.2)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \text{diag} \left( \frac{c_{2i}}{R_{ri}} \nu_i \right) \mathbf{u} - \text{diag} \left( \frac{c_{1i} c_{2i}}{R_{ri}} \nu_i^2 \right) \dot{\mathbf{q}} \stackrel{\text{je1}}{=} \mathbf{S}\mathbf{u} - \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}}, \quad (7.3)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \stackrel{\text{je1}}{=} \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q})\hat{\mathbf{h}}(\dot{\mathbf{q}}) + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}), \quad (7.4)$$

$$\hat{\mathbf{h}}(\dot{\mathbf{q}}) = (\dot{q}_1 \dot{q}_1, \dot{q}_1 \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{m-1} \dot{q}_m, \dot{q}_m \dot{q}_m)^T, \quad (7.5)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{S}\mathbf{u} + \mathbf{H}^{-1} \{-\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{g}}\}, \quad (7.6)$$

ezért választható  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T)^T$ , és

$$\mathbf{A}_1 = 0, \quad \mathbf{A}_2 = 0, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{S}, \quad (7.7a)$$

$$\mathbf{L}_1 = [-\hat{\mathbf{C}} \quad -\mathbf{N}], \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = -\hat{\mathbf{g}}. \quad (7.7b)$$

Legyen a megválasztott **referenciamodell**

$$\dot{\mathbf{x}}_M = \mathbf{A}_M \mathbf{x}_M + \mathbf{B}_M \mathbf{u}_M, \quad (7.8)$$

ahol

$$\mathbf{A}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-m} \\ \mathbf{A}_{M_1} & \mathbf{A}_{M_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-m) \times p} \\ \mathbf{B}_{M_1} \end{bmatrix}, \quad (7.8b)$$

$$n = \dim(\mathbf{x}_M) = \dim(\mathbf{x}), \quad p = \dim(\mathbf{u}_M). \quad (7.8c)$$

Válasszuk az **adaptációs törvényt**

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}_M(t) - \mathbf{x}(t), \quad (7.9a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{J}\mathbf{e}(t), \quad (7.9b)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{R}^{-1} \{ \mathbf{K}_u(\mathbf{y}, t) [\mathbf{u}_M(t) - \mathbf{T}\mathbf{x}(t)] + \mathbf{d}(\mathbf{y}, t) \} \quad (7.9c)$$

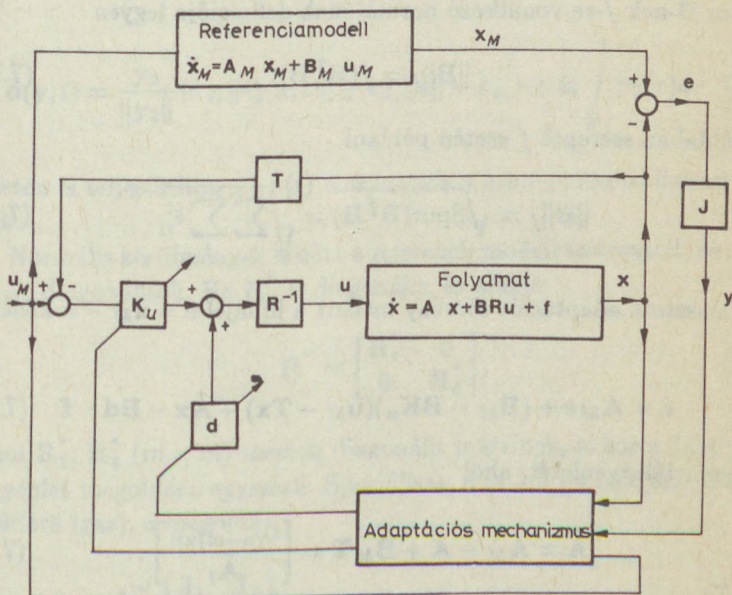
alakúnak, ahol

$$p \leq n:$$

$$p \geq n:$$

$$\mathbf{T} = [\mathbf{I}_p \quad \mathbf{0}_{p \times (n-p)}], \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{0}_{(p-n) \times n} \end{bmatrix}. \quad (7.9d)$$

Partícionáljuk az  $\mathbf{y}$  vektort  $\mathbf{x}$ -hez hasonlóan  $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T]^T$  alakban, ahol  $\dim(\mathbf{y}_1) = n-m$  és  $\dim(\mathbf{y}_2) = m$ . Az irányítás blokkvázlatát a 7.2. ábra tartalmazza. Megválasztható  $\mathbf{K}_u$  és  $d$  változtatásának adaptációs mechanizmusa úgy, hogy  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  teljesüljön.



7.2. ábra

Az MRAC irányítás blokkvázlata

**Adaptációs mechanizmusként** egységvektor-irányítási törvényt választunk, ahol az  $\mathbf{y}_2$  vektor a beavatkozás irányát jelöli ki az irányítási térben:

$$\mathbf{K}_u(\mathbf{y}, t) = \frac{\mathbf{y}_2}{\|\mathbf{y}_2\|} \cdot \frac{(\mathbf{u}_M - \mathbf{T}\mathbf{x})^T}{\|\mathbf{u}_M - \mathbf{T}\mathbf{x}\|} \mathbf{P}_u, \quad (7.10a)$$

$$\mathbf{d}(\mathbf{y}, t) = \frac{\mathbf{y}_2}{\|\mathbf{y}_2\|} (k_{d_1} \|\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\| + k_{d_2} \|\mathbf{x}\| + k_{d_3}). \quad (7.10b)$$

Az adaptációs törvény szabad paramétereit a szimmetrikus pozitív definit  $(p \times p)$  méretű  $\mathbf{P}_u$  mátrix és a  $k_{d_1}$ ,  $k_{d_2}$ ,  $k_{d_3}$  számok. A vektorok normája az euklideszi norma.

Tisztázandók a stabilitás feltételei, melyek a hiperstabilitás-elmélet segítségével vezethetők le. A feltételek megfogalmazásához szükség van a mátrixnorma általánosítására. Legyen  $\mathbf{B}$  egy  $n \times m$  méretű mátrix és  $f: M_{m \times m} \rightarrow R^1$  egy tetszőleges (közönséges értelemben vett) **mátrixnorma** a szimmetrikus mátrixok felett, például  $f(M) = \sqrt{\text{Spur}(M)}$ . Akkor  $\mathbf{B}$ -nek  $f$ -re vonatkozó normájának definíciója legyen

$$\|\mathbf{B}\|_f = f(\mathbf{B}^T \mathbf{B}). \quad (7.11)$$

A példában szereplő  $f$  esetén például

$$\|\mathbf{B}\|_f = \sqrt{\text{Spur}(\mathbf{B}^T \mathbf{B})} = \sqrt{\sum_i \sum_j b_{ij}^2}. \quad (7.12)$$

A választott adaptációs törvény mellett a hibajel  $\mathbf{e} = \mathbf{x}_M - \mathbf{x}$  kielégíti az

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_M \mathbf{e} + (\mathbf{B}_M - \mathbf{B} \mathbf{K}_u)(\mathbf{u}_M - \mathbf{T} \mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{x} - \mathbf{B} \mathbf{d} - \mathbf{f} \quad (7.13)$$

differenciálegyenletet, ahol

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_M - \mathbf{A} + \mathbf{B}_M \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-m) \times n} \\ \tilde{\mathbf{A}}_1 \end{bmatrix}. \quad (7.14)$$

A **stabilitás feltételeit** [21] bizonyítja. Eszerint ha  $\mathbf{R}^*$  tetszőleges,  $p \times p$  méretű, szimmetrikus, pozitív definit konstans mátrix, és  $\mathbf{J}$  kielégíti a

$$\mathbf{J} \mathbf{A}_M + \mathbf{A}_M^T \mathbf{J} = -\mathbf{R}^* \quad (7.15)$$

Ljapunov-egyenletet, akkor tetszőleges  $\mathbf{e}(0)$  kezdeti hiba, az adaptációs folyamat alatt nem változó  $\alpha$  paraméterek és szakaszonként folytonos

$\mathbf{u}_M(t)$  bemenő jel esetén  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \mathbf{0}$  feltéve, hogy teljesülnek a következő feltételek:

$$\frac{1}{f^2(\mathbf{P}_u^{-1})} \geq \max\{f(\mathbf{B}_1^{-1})\}^2 \|\mathbf{B}_{M_1}\|_f, \quad (7.16a)$$

$$k_{d_1} \geq \max\{f(\mathbf{B}_1^{-1})\}^2 \max\|\mathbf{B}_1 \mathbf{L}_1\|_f, \quad (7.16b)$$

$$k_{d_2} \geq \max\{f(\mathbf{B}_1^{-1})\}^2 \max\|\tilde{\mathbf{A}}_1\|_f, \quad (7.16c)$$

$$k_{d_3} \geq \max\{f(\mathbf{B}_1^{-1})\}^2 \max\|\mathbf{B}_1 \mathbf{L}_2\|_f. \quad (7.16d)$$

Ha még ezen kívül  $\mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t, \alpha)$  pozitív definit is, akkor tetszőleges  $k_i \geq 0$  és

$$\mathbf{d}(\mathbf{y}, t) = \frac{\mathbf{y}_2}{\|\mathbf{y}_2\|} \{k_{d_1} \|\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\| + k_{d_2} \|\mathbf{x}\| + k_{d_3}\} + k_i \int_0^t \mathbf{y}_2(\tau) d\tau \quad (7.17)$$

esetén is teljesül  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \mathbf{0}$ , vagyis a hiba aszimptotikusan eltűnik.

Normális körülmények között a referenciamodell szétcsatolt, és  $\mathbf{A}_{M_1}$ ,  $\mathbf{A}_{M_2}$  diagonálisok. Ha  $\mathbf{R}^*$  is diagonális, és alakja

$$\mathbf{R}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_4^* \end{bmatrix}, \quad (7.18)$$

ahol  $\mathbf{R}_1^*$ ,  $\mathbf{R}_4^*$  ( $m \times m$ ) méretű diagonális mátrixok, akkor a Ljapunov-egyenlet megoldása egyszerű. Speciálisan  $n = 2m$  esetén (ami a robot példára igaz), a megoldás

$$\mathbf{J}^{jet} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_4 \end{bmatrix}, \quad (7.19a)$$

$$\mathbf{J}_1 = \frac{1}{2} (\mathbf{A}_{M_2}^{-1} - \mathbf{A}_{M_2} \mathbf{A}_{M_1}^{-1}) \mathbf{R}_1^* - \frac{1}{2} \mathbf{A}_{M_1} \mathbf{A}_{M_2}^{-1} \mathbf{R}_4^*, \quad (7.19b)$$

$$\mathbf{J}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{A}_{M_1}^{-1} \mathbf{R}_1^*, \quad (7.19c)$$

$$\mathbf{J}_4 = \frac{1}{2} \mathbf{A}_{M_2}^{-1} (\mathbf{R}_4^* - \mathbf{A}_{M_1}^{-1} \mathbf{R}_1^*). \quad (7.19d)$$

A robotra alkalmazás szempontjából különösen lényeges két eset:

i)  $\mathbf{u}_M(t) = \mathbf{q}_a(t)$ , amely a fent leírt módszerrel kezelhető. Itt a referenciamodell megválasztható.

ii)  $\mathbf{u}_M(t) = [\mathbf{q}_a(t)^T, \dot{\mathbf{q}}_a(t)^T, \ddot{\mathbf{q}}_a(t)^T]^T$ , amely esetén  $\dim(\mathbf{u}_M) = p > \dim(\mathbf{u}) = m$ . Ekkor a referenciamodell kiadódik:

$$\mathbf{x}_M = (\mathbf{q}_a^T, \dot{\mathbf{q}}_a^T)^T, \quad (7.20a)$$

$$\mathbf{A}_{M_1} = \mathbf{A}_{M_2} = -\mathbf{I}_m, \quad (7.20b)$$

$$\mathbf{B}_{M_1} = [\mathbf{I}_m \quad \mathbf{I}_m \quad \mathbf{I}_m]. \quad (7.20c)$$

Az adaptív szabályozó paramétereinek meghatározásakor  $\mathbf{P}_u = k_u \mathbf{I}_p$  választható. Ezután a  $k_u, \dots, k_i$  paraméterek az egyenlőtlenségekből és a robottól függő  $\|\mathbf{H}\|$ ,  $\|\dot{\mathbf{C}}\|$ ,  $\|\dot{\mathbf{h}}\|$  és  $\|\mathbf{g}\|$  felső becslésekből számíthatók. Mivel azonban a hiperstabilitás elégséges feltétel, ezért szimulációs kísérletekkel a számított paramétereknél kedvezőbb értékek is meghatározhatók. Ez különösen megfontolandó, ha a számított paraméterek nagy erősítést (nagy nyomatókat) eredményeznének, melyek már nem lennének megvalósíthatók.

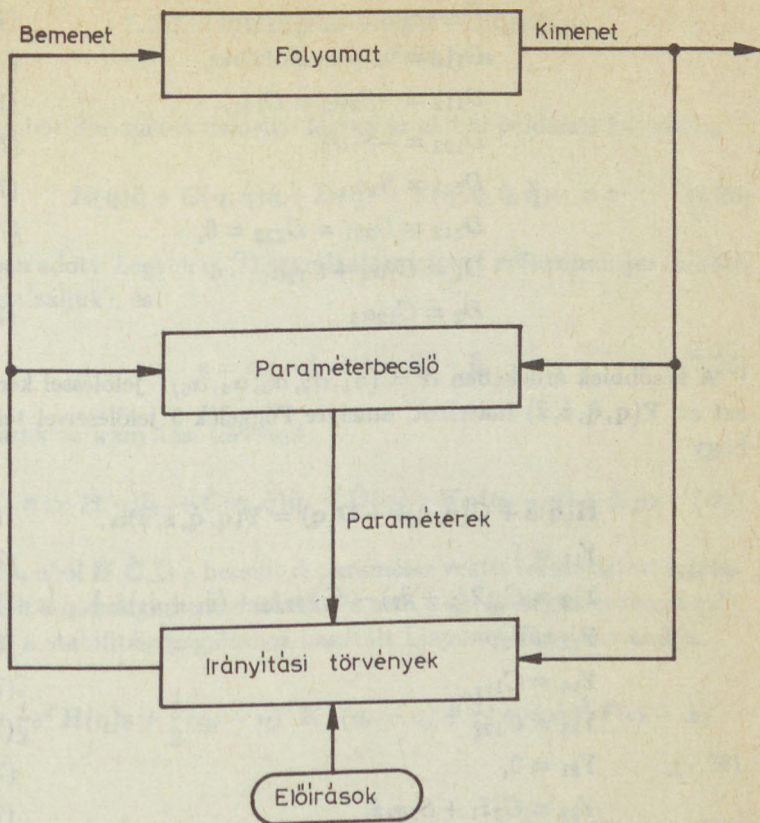
## 7.2. A SZABAD MOZGÁS ÖNHANGOLÓ ADAPTÍV IRÁNYÍTÁSA

Az önhangoló adaptív irányítás (selftuning adaptive control) elvi sémája a 7.3. ábrán látható. Jellegzetessége, hogy a paraméterbecslő online módosítja az irányítási törvényt.

Ha ismert a robot dinamikus modellje szimbolikus (képletszerű) alakban, beleértve a geometriai és inerciaparamétereket (tömeget, tehetetlenségi nyomatékot) is, választhatók olyan  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  független paraméterek, amelyekben a dinamikus modell lineáris lesz. Tekintsük példaként a 2.3. ábra szerinti kétszabadságfokú kart. Akkor a 3.2. példa eredményei alapján paraméterként

$$\alpha_1 = m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2) + I_1 + I_2, \quad (7.21a)$$

$$\alpha_2 = m_2 l_1 l_{c2}, \quad (7.21b)$$



7.3. ábra

Önhangoló adaptív irányítás elvi sémája

$$\alpha_3 = m_2 l_{c2}^2 + I_2, \quad (7.21c)$$

$$\alpha_4 = g(m_1 l_{c1} + m_2 l_1), \quad (7.21d)$$

$$\alpha_5 = gm_2 l_{c2} \quad (7.21e)$$

választható, amelyek segítségével írható, hogy

$$D_{11} = \alpha_1 + 2C_2\alpha_2, \quad (7.22a)$$

$$D_{12} = \alpha_3 + C_2\alpha_2, \quad (7.22b)$$

$$D_{22} = \alpha_3, \quad (7.22c)$$

$$D_{111} = 0, \quad (7.22d)$$

$$D_{112} = -S_2\alpha_2 = D_{121}, \quad (7.22e)$$

$$D_{122} = -S_2\alpha_2, \quad (7.22f)$$

$$D_{211} = S_2\alpha_2, \quad (7.22g)$$

$$D_{212} = D_{221} = D_{222} = 0, \quad (7.22h)$$

$$D_1 = C_1\alpha_4 + C_{12}\alpha_5, \quad (7.22i)$$

$$D_2 = C_{12}\alpha_5. \quad (7.22j)$$

A későbbiek érdekében  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)^T$  jelöléssel keressük azt az  $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}})$  mátrixot, amelyre Függelék J jelöléseivel teljesül, hogy

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{D}(\mathbf{q}) = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}})\alpha, \quad (7.23)$$

$$Y_{11} = \ddot{z}_1, \quad (7.24a)$$

$$Y_{12} = C_2(2\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2) - S_2\{\dot{q}_2\dot{z}_1 + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{z}_2\}, \quad (7.24b)$$

$$Y_{13} = \ddot{z}_2, \quad (7.24c)$$

$$Y_{14} = C_1, \quad (7.24d)$$

$$Y_{15} = C_{12}, \quad (7.24e)$$

$$Y_{21} = 0, \quad (7.24f)$$

$$Y_{22} = C_2\ddot{z}_1 + S_2\dot{q}_1\dot{z}_1, \quad (7.24g)$$

$$Y_{23} = \ddot{z}_1 + \ddot{z}_2, \quad (7.24h)$$

$$Y_{24} = 0, \quad (7.24i)$$

$$Y_{25} = C_{12}, \quad (7.24j)$$

$$\mathbf{Y} = (Y_{ij})_{2 \times 5}. \quad (7.24k)$$

Az  $\alpha_i$  paraméterek a geometriai, tömeg- és inerciaparaméterek speciális szorzatösszegei.

### 7.2.1. Önhangoló adaptív irányítás csuklókoordinátákban

A robot dinamikus modellje legyen az előbbi példához hasonlóan

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\mathbf{q}) = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\tau} \quad (7.25)$$

alakban adott. Legyen  $\mathbf{q}_r(t)$  egy általánosított referenciajel (később konkretizáljuk), és

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}} \Rightarrow \dot{\mathbf{s}} = \ddot{\mathbf{q}}_r - \ddot{\mathbf{q}}. \quad (7.26)$$

Válasszuk az irányítási törvényt

$$\boldsymbol{\tau} := \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_P(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}) + \mathbf{K}_D\mathbf{s} \quad (7.27)$$

alakúra, ahol  $\hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}$  a becsült  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$  paraméter vektorral számított értékeket jelöli a  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$  argumentumoknál (és nem a  $\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r$  argumentumoknál). Legyen a stabilitásvizsgálathoz használt Ljapunov-függvény alakja

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{s}^T\mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{s} + \frac{1}{2}(\mathbf{q}_r - \mathbf{q})^T\mathbf{K}_P(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}})^T\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}), \quad (7.28)$$

ahol a szabályozóban és a Ljapunov-függvényben szereplő  $\mathbf{K}_P, \mathbf{K}_D$  és  $\boldsymbol{\Gamma}$  szimmetrikus, pozitív definit mátrixok. Képezzük a Ljapunov-függvény idő szerinti deriváltját a trajektória mentén:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}^T\dot{\mathbf{H}}\mathbf{s} + \frac{1}{2}\mathbf{s}^T\dot{\mathbf{H}}\mathbf{s} + (\dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}})^T\mathbf{K}_P(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}) + (\boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}})^T\boldsymbol{\Gamma}(\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}) = \\ &= \mathbf{s}^T\{\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_P(\mathbf{q}_r - \mathbf{q})\} + \frac{1}{2}\mathbf{s}^T\dot{\mathbf{H}}\mathbf{s} + (\boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}})^T\boldsymbol{\Gamma}(\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}). \end{aligned} \quad (7.29)$$

Fejezzük ki a  $\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}}$  mennyiséget a zárt rendszer mozgásegyenletéből:

$$\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{H}}\ddot{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{D}} + \mathbf{K}_P(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}) + \mathbf{K}_D\mathbf{s} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{D}. \quad (7.30)$$

Egészítsük ki a jobb oldalt a nullával egyenlő  $C\dot{\mathbf{q}}_r - \hat{C}\dot{\mathbf{q}}_r$  taggal, és az így kapott kifejezést helyettesítsük be  $\dot{V}$  képletébe, akkor

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \mathbf{s}^T \{(\mathbf{H} - \hat{\mathbf{H}})\ddot{\mathbf{q}}_r + (\mathbf{C} - \hat{\mathbf{C}})\dot{\mathbf{q}}_r + (\mathbf{D} - \hat{\mathbf{D}}) - \mathbf{K}_D \mathbf{s} - \mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}})\} + \\ & \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{H}} \mathbf{s} + (\boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}})^T \boldsymbol{\Gamma}(\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}) = \\ = & \mathbf{s}^T \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r)(\boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}) - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_D \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T (\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}) \mathbf{s} + \\ & + (\boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}})^T \boldsymbol{\Gamma}(\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}). \end{aligned} \quad (7.31)$$

Mivel Függelék J szerint  $\mathbf{s}^T [\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \mathbf{s}$  nulla, ezért

$$\dot{V} = -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_D \mathbf{s} + (\boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}})^T [\mathbf{Y}^T \mathbf{s} + \boldsymbol{\Gamma}(\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}})]. \quad (7.32)$$

Az adaptációs folyamat alatt a valódi  $\boldsymbol{\alpha}$  paraméterek nem változnak, ezért  $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{0}$ . Válasszuk a paraméterbecslés adaptációs törvényét  $\mathbf{Y}^T \mathbf{s} - \boldsymbol{\Gamma} \dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} = \mathbf{0}$  alakúra, akkor

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\alpha}}}{dt} = \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{s}; \quad (7.33)$$

$$\dot{V} = -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_D \mathbf{s} \leq 0. \quad (7.34)$$

1. eset:

$$\mathbf{q}_r = \mathbf{q}_a, \quad (7.35a)$$

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{q}}, \quad (7.35b)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_a + \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_a + \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_P(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}) + \mathbf{K}_D(\dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{q}}), \quad (7.35c)$$

$$\dot{V} = -(\dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{q}})^T \mathbf{K}_D(\dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{q}}) \leq 0. \quad (7.35d)$$

Az egyensúlyi pontban  $\dot{V} = 0$  miatt  $\dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ , ezért a rendszer globálisan stabilis, de a  $\mathbf{q}_a$  és  $\mathbf{q}$  között lehetséges maradó eltérés miatt nem szükségképpen aszimptotikusan stabilis.

2. eset:

$$\mathbf{q}_r = \mathbf{q}_a + \Lambda \int_0^t (\mathbf{q}_a - \mathbf{q}) dt, \quad (7.36a)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{A}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}), \quad (7.36b)$$

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}} = (\dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{A}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}), \quad (7.36c)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_P(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}) + \mathbf{K}_D(\dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}}), \quad (7.36d)$$

$$\dot{V} = -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_D \mathbf{s} \leq 0. \quad (7.36e)$$

Az egyensúlyi állapotban  $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ . Válasszuk meg a  $\mathbf{A}$  mátrixot úgy, hogy  $\det(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A}) = 0$  gyökei ( $-\mathbf{A}$  sajátértékei) a komplex sík bal oldalán helyezkedjenek el, akkor a trajektória az

$$\mathbf{s} = (\dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{A}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (7.37)$$

csúszó felülethez konvergál, majd azon a hiba  $\mathbf{q}_a - \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{0}$  exponenciálisan. Ezért a szabályozás a paraméterbecsléssel globálisan aszimptotikusan stabilis.

Az eredmények a következő algoritmusban foglalhatók össze:

**Előírások:**  $\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a, \ddot{\mathbf{q}}_a$ .

**Szenzoradatok:**  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ .

**Megválasztható paraméterek:**  $\mathbf{A}, \mathbf{K}_P$  (lehet nulla),  $\mathbf{K}_D, \Gamma$ .

**Irányítási törvény:**

$$\mathbf{q}_r = \mathbf{q}_a + \mathbf{A} \int (\mathbf{q}_a - \mathbf{q}) dt, \quad (7.38a)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{A}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}), \quad (7.38b)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_r = \ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{A}(\dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{q}}), \quad (7.38c)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_P(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}) + \mathbf{K}_D(\dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}}). \quad (7.38d)$$

**Paraméterbecslő:**  $\dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} = \Gamma^{-1} \mathbf{Y}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}_r)(\dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}}). \quad (7.39)$

Az algoritmus **implementálása** tekintetében Slotine és Li [22] a csúszó felület alapján történő szabályozást javasolja. A paraméterek becsülendő  $\boldsymbol{\alpha}_E$  és nem becsülendő  $\boldsymbol{\alpha}_{NE}$  csoportokra oszthatók. A nem mérhető zavarás  $\mathbf{d}$ . Az általánosság rovása nélkül feltehető, hogy

$\alpha = (\alpha_E^T, \alpha_{NE}^T)^T$  és  $\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_E \mid \mathbf{Y}_{NE}]$ . Legyen  $\alpha_{NE} - \hat{\alpha}_{NE}$ , és a  $\mathbf{d}$  zavarás felső becslése adott:

$$|\alpha_{NE,j} - \hat{\alpha}_{NE,j}| \leq A_j, \quad j = n_E + 1, \dots, n, \quad (7.40)$$

$$|d_i(t)| \leq \hat{d}_i(t), \quad i = 1, \dots, m. \quad (7.41)$$

A csúszószabályozó alakja ekkor a következő:

$$k_i = \sum_{j=n_E+1}^m |Y_{ij}| A_j + \hat{d}_i + \eta_i, \quad (7.42a)$$

$$\begin{aligned} \tau = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_P(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}) + \mathbf{K}_D(\dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}}) + \\ + \text{diag}\{k_i \text{sign}(s_i)\}. \end{aligned} \quad (7.42b)$$

Legyen a Ljapunov-függvény alakja

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \frac{1}{2} (\mathbf{q}_r - \mathbf{q})^T \mathbf{K}_P (\mathbf{q}_r - \mathbf{q}) + \frac{1}{2} (\alpha_E - \hat{\alpha}_E)^T \Gamma_E (\alpha_E - \hat{\alpha}_E), \quad (7.43)$$

akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}}_r - \tau + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \\ = (\mathbf{H} - \hat{\mathbf{H}})\ddot{\mathbf{q}}_r + (\mathbf{C} - \hat{\mathbf{C}})\dot{\mathbf{q}}_r + (\mathbf{D} - \hat{\mathbf{D}}) - \text{diag}\{k_i \text{sign}(s_i)\} - \\ - \mathbf{K}_P(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}) - \mathbf{K}_D \mathbf{s} - \mathbf{d} = \\ = \mathbf{Y}_E(\alpha_E - \hat{\alpha}_E) + \mathbf{Y}_{NE}(\alpha_{NE} - \hat{\alpha}_{NE}) - \text{diag}\{k_i \text{sign}(s_i)\} - \\ - \mathbf{K}_P(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}) - \mathbf{K}_D \mathbf{s} - \mathbf{d}, \end{aligned} \quad (7.44)$$

ahonnan következik, hogy

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq \sum_{i=1}^m |s_i| \{ |\hat{d}_i| + \sum_{j=n_E+1}^n |Y_{ij}| A_j - k_i \} - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_D \mathbf{s} + \\ + (\alpha_E - \hat{\alpha}_E)^T \{ \mathbf{Y}_E^T \mathbf{s} - \Gamma_E \dot{\alpha}_E \} \leq \\ \leq - \sum_{i=1}^m \eta_i |s_i| - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_D \mathbf{s} \leq 0, \end{aligned} \quad (7.45)$$

ha a paraméterbecslő

$$\dot{\hat{\alpha}}_E = \Gamma_E^{-1} \mathbf{Y}_E^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{s}. \quad (7.46)$$

A realizálásban a szabályozó csattogásának elkerülése érdekében  $\text{sign}(s_i)$  helyett  $\text{sat}(s_i/\phi_i)$  választása célszerű, ahol a kapcsolósáv  $\phi_i$  szélessége dinamikusan változtatható. Az  $|s_i| \leq \phi_i$  kapcsolósávba kerülve az  $\hat{\alpha}_E$  paraméterek változtatását célszerű felfüggeszteni.

## 7.2.2. Önhangoló adaptív irányítás Descartes-koordinátákban

A csuklókoordinátákra megismert irányítási elv kiterjeszhető Descartes-koordinátákra is [23], mivel a Függelék J-ben levezetett összefüggés derékszögű koordinátákban is igaz marad. A mozgásegyenleteket

$$\mathbf{H}^*(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \quad (7.47)$$

alakban feltételezve az első pont 2. esete továbbra is érvényben marad, csupán az (általánosított)  $\mathbf{F}$  erőt kell  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}$  alapján csuklónyomatékká átszámolni, továbbá  $\mathbf{F} = \mathbf{Y}^* \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{Y} \boldsymbol{\alpha}$ .

**Előírások:**  $\mathbf{x}_a$  (pozíció és pillanatnyi tengelykörű forgás),  
 $\dot{\mathbf{x}}_a$  (sebesség, szögsebesség),  
 $\ddot{\mathbf{x}}_a$  (gyorsulás, szöggyorsulás).

**Irányítási törvény:**

$$\mathbf{x}_r = \mathbf{x}_a + \Lambda \int (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}) dt, \quad (7.48a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \dot{\mathbf{x}}_a + \Lambda(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}), \quad (7.48b)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_r = \ddot{\mathbf{x}}_a + \Lambda(\dot{\mathbf{x}}_a - \dot{\mathbf{x}}), \quad (7.48c)$$

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{H}}^*(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}}_r + \hat{\mathbf{C}}^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}}_r + \hat{\mathbf{D}}^*(\mathbf{x}) + \mathbf{K}_P(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}) + \mathbf{K}_D(\dot{\mathbf{x}}_r - \dot{\mathbf{x}}) \quad (7.48d)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F} = & \mathbf{H}\mathbf{J}^{-1}\ddot{\mathbf{x}}_r + (\mathbf{C}\mathbf{J}^{-1} - \mathbf{H}\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\mathbf{J}^{-1})\dot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{D} + \\ & + \mathbf{J}^T\{\mathbf{K}_P(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}) + \mathbf{K}_D(\dot{\mathbf{x}}_r - \dot{\mathbf{x}})\} = \\ = & \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\{\ddot{\mathbf{x}}_r - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})[\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}_r]\} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})[\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}_r] + \\ & + \mathbf{D}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\{\mathbf{K}_P(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}) + \mathbf{K}_D(\dot{\mathbf{x}}_r - \dot{\mathbf{x}})\}. \end{aligned} \quad (7.48e)$$

$$\text{Paraméterbecslő: } \dot{\hat{\alpha}} = \Gamma^{-1} \mathbf{Y}^{*T}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}_r, \ddot{\mathbf{x}}_r)(\dot{\mathbf{x}}_r - \dot{\mathbf{x}}). \quad (7.49)$$

A szabályozás imlementálásakor gondolnunk kell  $\tau$  és  $\mathbf{Y}^*$  egyszerű számítására, lehetőleg a csuklókoordinátákban könnyebben képezhető dinamikus modell adataiból. Ezért bevezetjük a fiktív  $\dot{\mathbf{q}}_r$  és  $\ddot{\mathbf{q}}_r$  változókat, és más  $\tilde{\tau}$  nyomatékot választunk, melyekkel a feladat visszavezethető az előző pontban tárgyalt esetre:

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}_r, \quad \ddot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\{\ddot{\mathbf{x}}_r - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r\}, \quad (7.50a)$$

$$\mathbf{Y}^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}_r, \ddot{\mathbf{x}}_r)\alpha = \mathbf{H}^*(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{C}^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{D}^*(\mathbf{x}) = \\ = \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r)\alpha, \quad (7.50b)$$

$$\tilde{\tau} = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) + \tilde{\mathbf{K}}_P(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}) + \tilde{\mathbf{K}}_D(\dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}}) + \\ + \text{diag}\{k_i \text{ sat}(\tilde{s}_i/\phi_i)\}, \quad (7.50c)$$

$$\tilde{s} = \dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_a \quad \text{és} \quad \dot{\hat{\alpha}}_E = \tilde{\Gamma}_E^{-1} \mathbf{Y}_E^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r)\tilde{s}. \quad (7.50d)$$

### 7.3. A KORLÁTOZOTT MOZGÁS ÖNHANGOLÓ ADAPTÍV IRÁNYÍTÁSA

Válasszuk a végberendezéshez rögzített  $K_E$  keret origójának a kontaktuspontot, ahol  $\mathbf{f}_a$  erőt és  $\tau_a$  nyomatékot kell kifejezni. Toljuk el a robot  $K_0$  referenciakeretének egy példányát is a kontaktuspontba, és definiáljuk az  $\mathbf{A}_f$  és  $\mathbf{A}_\tau$  tengely körüli forgatásokat az operációs tér módszernél megismert módon:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{K_f, K_0} \mathbf{f}_a^{jcl} = \mathbf{A}_f \mathbf{f}_a, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{K_\tau, K_0} \tau_a^{jcl} = \mathbf{A}_\tau \tau_a. \quad (7.51)$$

Vezessük be az

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_\tau^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{K_0, K_f} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{K_0, K_\tau} \end{bmatrix} \quad (7.52)$$

jelölést. Akkor ha a végberendezés kontaktuspontjának előírt sebessége és szögsebessége rendre  $\mathbf{v}_f$  és  $\omega_\tau$  a  $K_f$  és  $K_\tau$  keretben, akkor ezek értéke a kontaktuspontba eltolt  $K_0$  keretben  $\mathbf{v}$  és  $\omega$ ,

továbbá fennáll, hogy

$$\dot{\mathbf{x}}_c^{jel} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_f \\ \boldsymbol{\omega}_\tau \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}^{jel} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}, \quad (7.53a)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{x}}_c, \quad (7.53b)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{R}\ddot{\mathbf{x}}_c + \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{x}}_c. \quad (7.53c)$$

A dinamikus modell ennek megfelelően a következő:

$$\mathbf{H}^*(\mathbf{x})(\mathbf{R}\ddot{\mathbf{x}}_c + \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{x}}_c) + \mathbf{C}^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\mathbf{R}\dot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{D}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{F}, \quad (7.54)$$

$$\mathbf{H}_c^*\ddot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{C}_c^*\dot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{D}_c^* = \mathbf{F}_c, \quad (7.55a)$$

$$\mathbf{H}_c^* = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{R}, \quad (7.55b)$$

$$\mathbf{C}_c^* = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}^*\mathbf{R} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\dot{\mathbf{R}}, \quad (7.55c)$$

$$\mathbf{D}_c^* = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^*, \quad (7.55d)$$

$$\mathbf{F}_c^* = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}. \quad (7.55e)$$

Határozzuk meg határozottan balról jobbfelé haladó sorrendben az első  $\dim(\mathbf{x})$  darab lineárisan független oszlopát a szelekciós mátrixokból képzett

$$\overrightarrow{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_f & \mathbf{0} & \mathbf{I} - \boldsymbol{\Sigma}_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_\tau & \mathbf{0} & \mathbf{I} - \boldsymbol{\Sigma}_\tau \end{bmatrix}} \rightarrow \mathbf{P} \quad (7.56)$$

mátrixnak, és ezeket vegyük fel a  $\mathbf{P}$  mátrixba. Végezzük el az  $\mathbf{R} := \mathbf{R}\mathbf{P}^T$  helyettesítést (permutáljuk az eredeti bázisvektorokat a  $\mathbf{P}$  szerinti sorrendben), akkor az új  $\dot{\mathbf{x}}_c$ -ban elől fognak állni azok az  $\dot{\mathbf{x}}_{CP}$  komponensek, melyekre pozíciószabályozás lehetséges, míg az új  $\mathbf{F}_c$ -ben a hátul álló komponensekben fog jelentkezni a kölcsönhatásból származó erő és nyomaték:

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{CP} \\ \dot{\mathbf{x}}_{CF} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{CP} \\ \mathbf{F}_{CF} \end{bmatrix}. \quad (7.57)$$

Feltesszük, hogy a robot a szerszámmal és a kontakt felület merevek, ezért a végberendezés mozgása elhanyagolható a korlátozások irányában:

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{CP} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (7.58)$$

Partícionáljuk a mozgásegyenleteket  $\dot{\mathbf{x}}_{CP}$  és  $\dot{\mathbf{x}}_{CF}$  szerint, és éljünk az  $\dot{\mathbf{x}}_{CF} = \mathbf{0}$  feltevéssel:

$$\mathbf{H}_{C11}^*(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}}_{CP} + \mathbf{C}_{C11}^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}}_{CP} + \mathbf{D}_{C1}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_{CP}, \quad (7.59a)$$

$$\mathbf{H}_{C21}^*(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}}_{CP} + \mathbf{C}_{C21}^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}}_{CP} + \mathbf{D}_{C2}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_{CF}. \quad (7.59b)$$

A feladat  $\mathbf{F}_{CP}$  és  $\mathbf{F}_{CF}$  megtervezése. Kihaszználjuk, hogy teljesül

$$\dot{\mathbf{H}}_{C11}^* - 2\mathbf{C}_{C11}^* = \mathbf{0}. \quad (7.60)$$

Ezért az 7.2.2. pont alapján a következő irányítási és adaptációs törvény választható:

$$\mathbf{x}_{CPr} = \mathbf{x}_{CPa} + \mathbf{A}_P \int (\mathbf{x}_{CPa} - \mathbf{x}_{CP}) dt, \quad (7.61a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{CPr} = \dot{\mathbf{x}}_{CPa} + \mathbf{A}_P (\mathbf{x}_{CPa} - \mathbf{x}_{CP}), \quad (7.61b)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_{CPr} = \ddot{\mathbf{x}}_{CPa} + \mathbf{A}_P (\dot{\mathbf{x}}_{CPa} - \dot{\mathbf{x}}_{CP}), \quad (7.61c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{CP} = & \hat{\mathbf{H}}_{C11}^*(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}}_{CPr} + \hat{\mathbf{C}}_{C11}^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}}_{CPr} + \hat{\mathbf{D}}_{C1}^*(\mathbf{x}) + \\ & + \mathbf{K}_{P1}(\mathbf{x}_{CPr} - \mathbf{x}_{CP}) + \mathbf{K}_{D1}(\dot{\mathbf{x}}_{CPr} - \dot{\mathbf{x}}_{CP}), \end{aligned} \quad (7.61d)$$

$$\dot{\hat{\alpha}} = \mathbf{\Gamma}_P^{-1} \mathbf{Y}_P^T(\mathbf{x}_{CP}, \dot{\mathbf{x}}_{CP}, \dot{\mathbf{x}}_{CPr}, \ddot{\mathbf{x}}_{CPr})(\dot{\mathbf{x}}_{CPr} - \dot{\mathbf{x}}_{CP}). \quad (7.62)$$

Az erő- és nyomatékirányítási irányokban Slotine és Li [23] előrecsatolás és PD erőszabályozás alkalmazását javasolja:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{CF} = & \hat{\mathbf{H}}_{C21}^*(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}}_{CPr} + \hat{\mathbf{C}}_{C21}^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}}_{CPr} + \hat{\mathbf{D}}_{C2}^*(\mathbf{x}) + \\ & + \mathbf{F}_{CFa} + \mathbf{K}_{P2}(\mathbf{F}_{CFa} - \mathbf{F}_{CF}) - \mathbf{K}_{V2}\dot{\mathbf{x}}_{CF}. \end{aligned} \quad (7.63)$$

Itt  $\mathbf{F}_{CFa}$  és  $\mathbf{F}_{CF}$  az előírt és mért erő/nyomaték a **korlátozási irányokban**,  $\mathbf{K}_{V2}\dot{\mathbf{x}}_{CF}$  a sebességfüggő csillapítás. A  $\mathbf{K}_{V2}$  mátrix pozitív definit, amely választható konstansnak, vagy a

$$\mathbf{K}_{V2} = k_0 \hat{\mathbf{H}}_{C22}^*(\mathbf{x}) \quad (7.64)$$

szabály szerint változónak, ahol  $k_0$  pozitív állandó. A kontaktuspontban kifejtendő nyomaték

$$\mathbf{F}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{CP} \\ \mathbf{F}_{CF} \end{bmatrix}, \quad (7.65)$$

amelyhez a meghajtómotoroknak

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{R}\mathbf{F}_i \quad (7.66)$$

nyomatékot kell kifejteni. Az algoritmus nem adaptív a kontaktfelület merevsége és a robotkar rugalmassága tekintetében.

## 8. SZERELŐROBOTOK IRÁNYÍTÁSÁNAK REAL-TIME ASPEKTUSAI

A szerelőrobotok irányítására szolgáló algoritmusok bonyolultak. Megvalósításuknál különösen az okozza a problémát, hogy a beavatkozószervek által kiadandó nyomatékok kiszámítását a szabályozónak a szokásos sebességek esetén kb. 1 ms-onként el kell végezni. Ezért az irányítási algoritmust többprocesszoros architektúrán, gyors aritmetikai processzorok használatával, párhuzamos számítással célszerű megvalósítani. Az architektúra legtöbbször kompromisszumot jelent a gyártó elvárásai és pénzügyi lehetőségei között. Itt félretesszük ezeket az ellentmondásos szempontokat és azt vizsgáljuk, milyen architektúra lenne célszerű a feladathoz.

### 8.1. AZ IRÁNYÍTÁSOK BONYOLULTSÁGI FOKA

A szerelési feladat irányításának megvalósítására a korábban részletezett erőirányítási módszerek jöhetnek számításba:

- **passzív engedékenység** biztosítása speciális RCC megfogókkal,
- **aktív engedékenység** biztosítása **engedékenység- vagy impedanciairányítással**,
- **hibrid erő- és pozícióirányítás**,
- **operációs tér módszerrel** történő irányítás.

A módszerek két csoportra oszthatók. **Az első csoportba** tartozik a passzív engedékenység biztosítása RCC megfogókkal. Ez a módszer a problémát a megfogóval igyekszik megoldani anélkül, hogy módosítani kellene a meglévő pozícióirányításon. Alapvető hibája, hogy nem tud

kezelni olyan feladatfüggő előírásokat, mint szerelési erő és nyomaték, engedékenység, merevség, csillapítás. Ezért hamar jelentkeznek korlátai konkrét feladatoknál.

**A második csoportba** a másik három felsorolt módszer tartozik. Alapvető jellemzőjük, hogy az elterjedt pozícióirányítású struktúrát (belső áramszabályozás, előle rendelt fordulatszám-szabályozás és előle rendelt szögfordulás-szabályozás, melyek tengelyenként önállóak és függetlenek egymástól) fel kell adni, és közvetlenül biztosítani kell, hogy a szabályozási algoritmus a **meghajtónyomatékot** közvetlenül tudja befolyásolni. Ehhez közvetlenül hozzá kell tudni férni az áramszabályozott (nyomatékszabályozott) szervomotorok áram (nyomaték) alapjéhez. Előnyös, ha a motorok áttétel nélkül is nagy nyomatékot tudnak leadni (közvetlen hajtások), mert ekkor az erőirányításoknál gyakran fellépő káros jelenségek (nem lebecsülendő amplitúdójú periodikus lengések) fizikai eszközökkel is csökkenthetők. A második csoportba sorolt három módszer nem egyforma bonyolultságú az irányítási algoritmus és annak realizációja (hardware architektúra és software) tekintetében. Mindegyik közülük hierarchikus irányítási struktúrát igényel, de az egyes hierarchiaszinteken nem egyforma a megvalósításhoz szükséges ráfordítás.

## 8.2. A FELADATOK MEGOSZTÁSA ÉS KOORDINÁLÁSA

Célszerű megtartani a következő tagolódást:

- host gép,
- szenzor és szenzorprocesszor (S, SP),
- centralizált irányító processzorok (a továbbiakban robotprocesszorok = RP),
- decentralizált irányító processzorok (a továbbiakban szervokontrollerek = SC),
- decentralizált motor/belső érzékelők interface (IF).

A **host gépre** mindenképpen szükség van, mivel a szerelési feladatok felhasználói szintű megfogalmazására egy könnyen kezelhető és intelli-

gens számítógép (pl. DEC VAX-11/750 vagy PS-2/60) szolgáltatásai előnyösek. Erre kerülhet egy szenzorcsatolt robotprogramozási nyelv és később egy szerelésorientált szakértői rendszer.

A **szenzorok és processzorok** a szerelési erők és nyomatékok érzékelését és előfeldolgozását, valamint szükség esetén a látást végzik. Célszerű hat komponensű erő/nyomatékmérőt alkalmazni. Látórendszerként 2D (intenzitáskép) vagy 3D (távolságkép) feldolgozó rendszerek jöhetnek számításba. Első lépésként megfontolandó a kameraképen (2D) alapuló látórendszer használata.

A **robotprocesszorok** az irányítási algoritmus számításiigényes központi részeit végzik el. Feladatuk és a realizáláshoz szükséges számítás-technikai architektúra bonyolultsága attól függ, hogy a második csoportba tartozó melyik algoritmust választjuk. Célszerű három robot-processzor között megosztani a számításokat. Az **első** feladata a pályatervezés ( $\mathbf{x}_a, \dot{\mathbf{x}}_a, \ddot{\mathbf{x}}_a, \mathbf{F}_a$ ) a host gép előírásai alapján, a szenzorjelek továbbfeldolgozása és transzformálása ( $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{F}$ ) és a szabályozási hibák képzése ( $\mathbf{x}_a - \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_a - \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{F}_a - \mathbf{F}$ ). A **második** feladata az irányítási algoritmusban használt robormodell paramétereinek számítása. Ennek bonyolultsága a második csoportba tartozó három lehetséges algoritmusnál más és más. Merevség- vagy impedanciairányítás esetén csak a gravitációs hatást ( $\mathbf{h}_g$ ) és a Jacobi-mátrixot ( $\mathbf{J}^T$ ) kell a belső érzékelők ( $\mathbf{q}$  és  $\dot{\mathbf{q}}$ ) adatából számítani. Hibrid pozíció- és erőirányítás esetén ehhez hozzájön a Jacobi-mátrix invertálása ( $\mathbf{J}^{-1}$ ). Bonyolultabb a helyzet az operációs tér módszer esetén, amikor is szükséges az inercia, centripetális, Coriolis, súrlódó és gravitációs hatás ( $\mathbf{H}, \mathbf{h}_{ccs}, \mathbf{h}_g$ ), a Jacobi-mátrix ( $\mathbf{J}$ ) és deriváltja (vagy  $\alpha$ ), a Jacobi-mátrix inverze ( $\mathbf{J}^{-1}$ ) és ezekből a nyomaték ( $\tau$ ) számításához szükséges további összetett mennyiségek ( $\mathbf{H}^*, \mathbf{h}_{ccs}^*, \mathbf{h}_g^*$ ) valós időben történő számítása. A **harmadik** robot-processzor feladata a meghajtónyomaték ( $\tau$ ) számítása, amely szintén attól függően történik, hogy melyik irányítási algoritmust választottuk. A bonyolultság az engedékenység- vagy impedanciairányítástól az operációs tér módszer felé haladva itt is nő.

A **szervokontrollerek** feladata a meghajtónyomaték ( $\tau_i$ ) realizálása a motortengelyeken szabályozás révén. Célszerű erre a célra áram-(nyomaték-) szabályozást alkalmazni, továbbá a motort túlterhelés és melegedés ellen védeni. További feladatok még a belső érzékelők jeleinek

$(q_i, \bar{q}_i)$  fogadása és előfeldolgozása. Egy szervokontroller több tengelyt  $(2 - 4)$  is kiszolgálhat.

A robotirányítási architektúra egy **többprocesszoros rendszer**, amelyben az egyes processzorok irányítási részfeladatokat látnak el, és egymással valós időben (real-time) kommunikálnak. Az együttműködésre a processzorok között a következő okok miatt van szükség:

- **szinkronizáció**: aktív processzek együttfutásának koordinálása időben,
- **információcsere**: az aktív processzek együttfutásának koordinálása az adatok területén,
- **kölcsönös kizárás**: a rendszer fizikai vagy logikai erőforrásai használatának megosztása a processzek között.

Az együttműködés koordinálására több eszköz terjedt el:

- szemaforelv (Dijkstra, 1968),
- üzenetforgalom,
- kommunikáló szekvenciális processzek, CSP (Hoare, 1978).

A **szemafor** kétállapotú osztott változó (logikaiértéke TRUE vagy FALSE), amelyet ütemező jelek cseréjére használnak a konkurens processzek között. Legyen A és B a két processz, amelyek a szemaforon értelmezett két operáció  $P(S)$  és  $V(S)$  révén kommunikálhatnak:

$P(S)$ : Ha az  $S$  szemafor már TRUE, akkor a processz blokkolódik, különben  $S:=TRUE$  és a processz folytatódik.

$V(S)$ : Ha processzek vannak blokkolva valamilyen  $P$  operáció következtében, akkor egy közülük folytathatja a végrehajtást, különben  $S:=FALSE$ .

Kölcsönös kizárás a szemaforokkal könnyen realizálható, ha megköveteljük, hogy egy osztott erőforrás használatának megkezdése előtt minden processz előbb  $P$  operációt hajt végre, majd az erőforrás használatát  $V$  operációval fejezi be. A szemaforok realizálását támogatja a processzorok TEST AND SET utasítása (MOTOROLA 68000) vagy LOCK utasítás (INTEL 8086, 80286, 80386).

**Üzenetbázisú** (message-based) rendszerek az információcserét üzenetek forgalmazásával végzik. A processz képes üzenetet küldeni a pro-

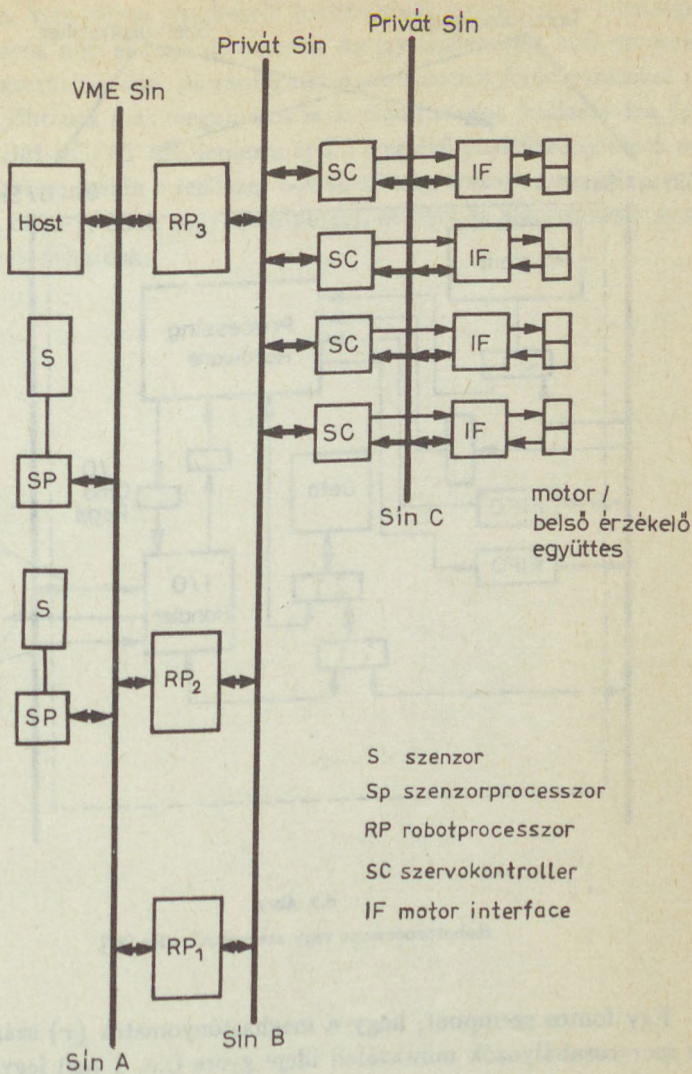
cesszekhez vagy üzeneteket fogadni a processzektől. Realizálása leggyakrabban csökkenti a kommunikációs sávszélességet.

**Kommunikáló szekvenciális processzek (CSP)** esetén a szinkronizáció és a kommunikáció input/output utasítások segítségével történik. Ha processz A adatot küld processz B-hez, akkor processz A output utasítást kezdeményez, és ha processz B kész az input utasításra, akkor megtörténik az adatcsere. Ha azonban az egyik processz nem kész a kívánt input vagy output utasítás végrehajtására, akkor a másik processz blokkolódik. A kölcsönös kizárás automatikusan teljesül, mert a processzek egyszerre csak egyetlen másik processszel tudnak együttműködni. Ezt az elvet használja az OCCAM programozási nyelv, mely a transputer programozásának egy eszköze.

### 8.3. AZ IRÁNYÍTÓ BERENDEZÉS ARCHITEKTÚRÁJA

Az irányító berendezés egy lehetséges **architektúrájának** vázlatát [27] a 8.1. ábra tartalmazza. A "három rendszersín" (three-system-bus) struktúra biztosítja a gyakori sínütközések elkerülését. A sínkommunikáció egyszerűsítése érdekében olyan protokollt választottunk, ahol a sín bal oldala a master és jobb oldala a slave. Memory mapping képezi le a slave processzor memóriáját a master processzor memóriájába, ami egyszerű és hatékony kommunikációt tesz lehetővé például szemaforok segítségével. Az I/O alrendszerek feladata, hogy mentesítsék a processzorokat a sín transzfer operációktól, és ezáltal növeljék a processzorokban a számítások céljára rendelkezésre álló időt.

A processzáló hardware megvalósítása során figyelembe veendő, hogy az egyes processzorokban különféle számítási feladatokat kell elvégezni, melyek különféle aritmetikákat igényelnek. A választott feladatmegosztás szerint a harmadik robotprocesszor (RP<sub>3</sub>) és a szervokontrollerek (SC) nem használnak trigonometrikus műveleteket és invertálást, ezért elvben gyors RISC processzorokkal vagy transputerrel is realizálhatók. Az első és második robotprocesszor (RP<sub>1</sub>, RP<sub>2</sub>) esetében célszerű aritmetikai koprocesszort alkalmazni a trigonometrikus függvények és a fixpontos tartományban rosszul realizálható mátrixinvertálások miatt. Erre a célra 32-bites Motorola vagy Intel processzorok előnyösek.



8.1. ábra

Az irányítási rendszer konfigurációja [27]



formában, valamilyen listakezelő programmal, amelyben a lehetséges összevonások már el vannak végezve. Az így előkészített alak nemcsak hogy egyszerűsítve van, de támogatja a párhuzamos feldolgozásokat is.

Szóba jöhetnek más megoldások is az algoritmusok realizálására. Így például IBM-PC/AT alaplemeze épülő meglévő pozícióirányítások továbbfejlesztése esetén a rendszer bővíthető négytransputeres célkártyával (IMS B003-1/T800 vagy Quadputer), mellyel az algoritmusok szintén megvalósíthatóak.

## FÜGGELÉK A.

### AZ $AC_\alpha + BS_\alpha = D$ EGYENLET MEGOLDÁSAI

Rendezzük az egyenletet és alkalmazzuk az  $S_\alpha^2 + C_\alpha^2 = 1$  azonosságot:

$$A^2 C_\alpha^2 = D^2 - 2BDS_\alpha + B^2 S_\alpha^2 \qquad B^2 S_\alpha^2 = D^2 - 2DAC_\alpha + A^2 C_\alpha^2 \qquad (A.1)$$

$$C_\alpha^2 = 1 - S_\alpha^2, \qquad S_\alpha^2 = 1 - C_\alpha^2, \qquad (A.2)$$

$$S_\alpha^2 - 2 \frac{DB}{A^2 + B^2} S_\alpha + \frac{D^2 - A^2}{A^2 + B^2} = 0, \qquad C_\alpha^2 - 2 \frac{DA}{A^2 + B^2} C_\alpha + \frac{D^2 - B^2}{A^2 + B^2} = 0, \qquad (A.3)$$

$$S_\alpha = \frac{DB + \delta_\alpha A \sqrt{A^2 + B^2 - D^2}}{A^2 + B^2}, \qquad C_\alpha = \frac{DA + \gamma_\alpha B \sqrt{A^2 + B^2 - D^2}}{A^2 + B^2}, \qquad (A.4)$$

$$\delta_\alpha = \pm 1, \qquad \gamma_\alpha = \pm 1. \qquad (A.5)$$

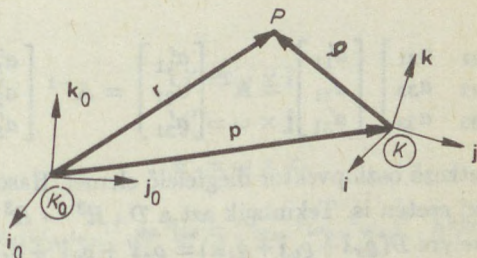
Innen következik, hogy a  $S_\alpha^2 + C_\alpha^2 = 1$  azonosság teljesülése érdekében teljesülnie kell a

$$(\delta_\alpha, \gamma_\alpha) = (+1, -1) \text{ és } (\delta_\alpha, \gamma_\alpha) = (-1, +1) \qquad (A.6)$$

feltételnek, ezért csak két  $(S_\alpha, C_\alpha)$  megoldás van. Mivel  $(S_\alpha, C_\alpha)$  meghatározza a síknyedet is, ezért csak két  $\alpha \in [0, 2\pi]$  megoldás van.

# FÜGGELÉK B. DERIVÁLÁSI SZABÁLYOK MOZGÓ KOORDINÁTARENDSZERBEN

Legyen  $K_0$  egy álló és  $K$  egy mozgó derékszögű koordinátarendszer (B.1. ábra).



B.1. ábra

$K_0$  álló és  $K$  mozgó keret

Fejezzük ki a  $K$  keret egységvektorait a  $K_0$  keret egységvektoraival:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= a_{11}\mathbf{i}_0 + a_{21}\mathbf{j}_0 + a_{31}\mathbf{k}_0, \\ \mathbf{j} &= a_{12}\mathbf{i}_0 + a_{22}\mathbf{j}_0 + a_{32}\mathbf{k}_0, \\ \mathbf{k} &= a_{13}\mathbf{i}_0 + a_{23}\mathbf{j}_0 + a_{33}\mathbf{k}_0. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Differenciáljunk az idő szerint és vegyük figyelembe, hogy  $K_0$  álló keret, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= a'_{11}\mathbf{i}_0 + a'_{21}\mathbf{j}_0 + a'_{31}\mathbf{k}_0, \\ \mathbf{j}' &= a'_{12}\mathbf{i}_0 + a'_{22}\mathbf{j}_0 + a'_{32}\mathbf{k}_0, \\ \mathbf{k}' &= a'_{13}\mathbf{i}_0 + a'_{23}\mathbf{j}_0 + a'_{33}\mathbf{k}_0. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Mivel  $\mathbf{A}_{K_0K} \stackrel{def}{=} \mathbf{A}$  és  $\mathbf{A}_{K_0K} = \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ , ezért (1.8) alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_0 &= a_{11}\mathbf{i} + a_{12}\mathbf{j} + a_{13}\mathbf{k}, \\ \mathbf{j}_0 &= a_{21}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{23}\mathbf{k}, \\ \mathbf{k}_0 &= a_{31}\mathbf{i} + a_{32}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k}, \end{aligned} \tag{B.3}$$

ahonnan következik, hogy

$$\begin{aligned}
 \mathbf{i}' &= a'_{11}(a_{11}\mathbf{i} + a_{12}\mathbf{j} + a_{13}\mathbf{k}) + a'_{21}(a_{21}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{23}\mathbf{k}) + \\
 &\quad + a'_{31}(a_{31}\mathbf{i} + a_{32}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k}) = \\
 &= (a'_{11}a_{11} + a'_{21}a_{21} + a'_{31}a_{31})\mathbf{i} + \\
 &\quad + (a'_{11}a_{12} + a'_{21}a_{22} + a'_{31}a_{32})\mathbf{j} + \\
 &\quad + (a'_{11}a_{13} + a'_{21}a_{23} + a'_{31}a_{33})\mathbf{k}.
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Vegyük észre, hogy az  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  előtt álló tagok rendre az

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{11} \\ a'_{21} \\ a'_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} a'_{11} \\ a'_{21} \\ a'_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} a'_{11} \\ a'_{21} \\ a'_{31} \end{bmatrix} \tag{B.5}$$

szorzással keletkező oszlopvektor megfelelő elemei. Hasonló összefüggés áll fenn  $\mathbf{j}'$  és  $\mathbf{k}'$  esetén is. Tekintsük azt a  $\mathcal{D}: R^3 \rightarrow R^3$  lineáris transzformációt, amelyre  $\mathcal{D}(\varrho_x\mathbf{i} + \varrho_y\mathbf{j} + \varrho_z\mathbf{k}) \stackrel{\text{def}}{=} \varrho_x\mathbf{i}' + \varrho_y\mathbf{j}' + \varrho_z\mathbf{k}'$ . Akkor (B.2) és (B.5) alapján a B.2. ábrához jutunk ( $\mathcal{I}$  az identikus leképezés).

$$\begin{array}{ccccccc}
 R^3 & \xrightarrow{\mathbf{A}^{-1}} & R^3 & \xrightarrow{\mathbf{A}'} & R^3 & \xrightarrow{\mathbf{A}^{-1}} & R^3 \\
 \left\{ \begin{array}{c} i_0 \\ j_0 \\ k_0 \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} i \\ j \\ k \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} i_0 \\ j_0 \\ k_0 \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} i \\ j \\ k \end{array} \right\} \\
 R^3 & \xrightarrow{\mathcal{I}} & R^3 & \xrightarrow{\mathcal{D}} & R^3 & \xrightarrow{\mathcal{I}} & R^3
 \end{array}$$

$${}^o\omega_x i_0 + {}^o\omega_y j_0 + {}^o\omega_z k_0 = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$$

$$[\omega_x] = \mathbf{A}' \mathbf{A}^{-1}$$

$$[\omega_x] = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}'$$

B.2. ábra

A  $\mathcal{D}$  lineáris transzformáció mátrixai

Másrészt az  $\mathbf{i} + d\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j} + d\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k} + d\mathbf{k}$  keret orientációjára az  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  bázisban teljesül az (1.44) Rodrigues-képlet. Jelölje  $\mathbf{t}$  a tengelyt,  $d\varphi$  a

szögelfordulást a képletben, és vegyük figyelembe, hogy a  $d\varphi$  infinitezimális, ezért  $\sin(d\varphi) = d\varphi$ ,  $\cos(d\varphi) = 1$ , akkor például  $\dot{\mathbf{i}}$  esetén

$$\dot{\mathbf{i}} + d\dot{\mathbf{i}} = \dot{\mathbf{i}} + d\varphi \mathbf{k} \times \mathbf{i}, \quad (B.6)$$

ahonnan a szögsebesség

$$\frac{d\varphi}{dt} \mathbf{k} = \boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} = {}^0\omega_x \mathbf{i}_0 + {}^0\omega_y \mathbf{j}_0 + {}^0\omega_z \mathbf{k}_0 \quad (B.7)$$

jelölésével

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{i}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}, \\ \dot{\mathbf{j}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}, \\ \dot{\mathbf{k}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (B.8)$$

Legyen  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$  és  ${}^0\boldsymbol{\omega} = ({}^0\omega_x, {}^0\omega_y, {}^0\omega_z)^T$ , akkor

$$[\boldsymbol{\omega} \times] = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}'; \quad [{}^0\boldsymbol{\omega} \times] = \mathbf{A}' \mathbf{A}^{-1}. \quad (B.9)$$

Tekintsünk most egy  $P$  pontot a B.1. ábrának megfelelően, akkor

$$r_x \mathbf{i}_0 + r_y \mathbf{j}_0 + r_z \mathbf{k}_0 = \varrho_x \mathbf{i} + \varrho_y \mathbf{j} + \varrho_z \mathbf{k} + p_x \mathbf{i}_0 + p_y \mathbf{j}_0 + p_z \mathbf{k}_0, \quad (B.10)$$

$$\begin{aligned} r'_x \mathbf{i}_0 + r'_y \mathbf{j}_0 + r'_z \mathbf{k}_0 &= \varrho'_x \mathbf{i} + \varrho'_y \mathbf{j} + \varrho'_z \mathbf{k} + \varrho_x \dot{\mathbf{i}} + \varrho_y \dot{\mathbf{j}} + \varrho_z \dot{\mathbf{k}} + \\ &+ p'_x \mathbf{i}_0 + p'_y \mathbf{j}_0 + p'_z \mathbf{k}_0, \end{aligned} \quad (B.11)$$

$$\begin{aligned} r''_x \mathbf{i}_0 + r''_y \mathbf{j}_0 + r''_z \mathbf{k}_0 &= \varrho''_x \mathbf{i} + \varrho''_y \mathbf{j} + \varrho''_z \mathbf{k} + 2(\varrho'_x \dot{\mathbf{i}} + \varrho'_y \dot{\mathbf{j}} + \varrho'_z \dot{\mathbf{k}}) + \\ &+ \varrho_x \ddot{\mathbf{i}} + \varrho_y \ddot{\mathbf{j}} + \varrho_z \ddot{\mathbf{k}} + p''_x \mathbf{i}_0 + p''_y \mathbf{j}_0 + p''_z \mathbf{k}_0. \end{aligned} \quad (B.12)$$

Vezessük be az

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}' = \begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \end{bmatrix}; \quad \dots; \quad \mathbf{r}'' = \begin{bmatrix} p''_x \\ p''_y \\ p''_z \end{bmatrix} \quad (B.13)$$

jelöléseket, akkor (B.10)–(B.12) felírható az

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\boldsymbol{\rho} + \mathbf{p}, \quad (\text{B.14})$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{A}\boldsymbol{\rho}' + \mathbf{A}'\boldsymbol{\rho} + \mathbf{p}', \quad (\text{B.15})$$

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{A}\boldsymbol{\rho}'' + 2\mathbf{A}'\boldsymbol{\rho}' + \mathbf{A}''\boldsymbol{\rho} + \mathbf{p}'' \quad (\text{B.16})$$

alakban is. Itt a vessző vektor esetén a koordinátánkénti, mátrix esetén az elemenkénti deriválást jelöli. Vegyük észre, hogy  $\mathbf{r}$  és  $\mathbf{p}$  a  $K_0$  bázisában, míg  $\boldsymbol{\rho}$  a  $K$  bázisában lett felírva.

Mivel

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}, \quad (\text{B.17})$$

ezért

$$\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1})' = \mathbf{0}, \quad (\text{B.18})$$

$$(\mathbf{A}^{-1})' = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1}, \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\omega} \times]' &= (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}')' = (\mathbf{A}^{-1})'\mathbf{A}' + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'' = \\ &= -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}' + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'' = \\ &= -[\boldsymbol{\omega} \times][\boldsymbol{\omega} \times] + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'', \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\omega}' &= \omega'_x \mathbf{i} + \omega'_y \mathbf{j} + \omega'_z \mathbf{k} + \omega_x \mathbf{i}' + \omega_y \mathbf{j}' + \omega_z \mathbf{k}' = \\ &= \omega'_x \mathbf{i} + \omega'_y \mathbf{j} + \omega'_z \mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i}' + \omega_y \mathbf{j}' + \omega_z \mathbf{k}', \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

ahol  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\omega}'$  a szöggyorsulás. Fejezzük ki a sebességet ( $\mathbf{r}'$ ) és a gyorsulást ( $\mathbf{r}''$ ) a mozgó  $K$  keretben, akkor (B.14)–(B.16) alapján

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}, \quad (\text{B.22})$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}' = \boldsymbol{\rho}' + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'\boldsymbol{\rho} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}' = \boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}', \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}'' &= \boldsymbol{\rho}'' + 2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'\boldsymbol{\rho}' + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}''\boldsymbol{\rho} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}'' = \\ &= \boldsymbol{\rho}'' + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}''. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Jelölje  $\mathbf{v}_K \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}'$ ,  $\mathbf{a}_K \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}''$ ,  $\boldsymbol{\omega}_K \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\omega}$  és  $\boldsymbol{\varepsilon}_K \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varepsilon}$  rendre a  $K$  keret origójának sebességét, gyorsulását, szögsebességét és szöggyorsulását, akkor a  $P$  pont  $\mathbf{v}_\rho$  sebességére és  $\mathbf{a}_\rho$  gyorsulására (B.23) és (B.24)

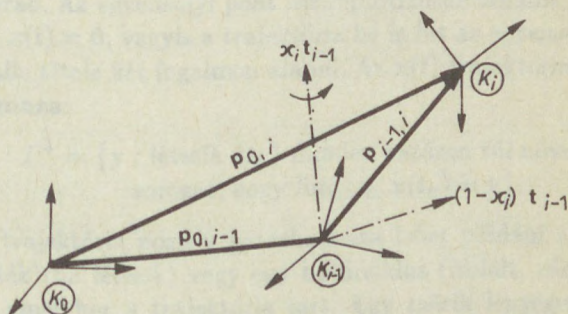
szerint teljesül, hogy

$$\mathbf{v}_\rho = \mathbf{v}_K + \boldsymbol{\omega}_K \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}', \quad (B.25)$$

$$\mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_K + \boldsymbol{\varepsilon}_K \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}_K \times (\boldsymbol{\omega}_K \times \boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\rho}'' + 2\boldsymbol{\omega}_K \times \boldsymbol{\rho}'. \quad (B.26)$$

Ha  $P$  egy merev test pontja és  $K$  a merev testhez rögzített keret, akkor  $\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho}'' = \mathbf{0}$ , továbbá  $\boldsymbol{\omega}_\rho = \boldsymbol{\omega}_K$  és  $\boldsymbol{\varepsilon}_\rho = \boldsymbol{\varepsilon}_K$ . Itt minden vektor koordinátái a  $K$  keretben értendők, és a deriváltak a koordinátánkénti deriváltak. Ez a nevezetes **deriválási szabály mozgó koordináta-rendszerben**.

Tekintsük most a B.3. ábra szerinti összetett esetet, amely a **kinematikai mennyiségek rekurzív számításának alapját képezi**.



B.3. ábra

$K_0$  álló és  $K_{i-1}, K_i$  mozgó koordináta-rendszerek

Legyen  $K_{i-1}$  és  $K_i$  egy nyílt láncú merev robot két szomszédos szegmenséhez rögzített keret. Legyen  $\kappa_i \mathbf{t}_{i-1}$  a rotációs csukló vagy  $(1 - \kappa_i) \mathbf{t}_{i-1}$  a translációs csukló tengely irányú egységvektora, melynek koordinátáit a  $K_{i-1}$  keretben fejeztük ki;  $\kappa_i = 1$  rotációs és  $\kappa_i = 0$  translációs csukló esetén. Akkor (B.25) és (B.26) szerint  $\boldsymbol{\rho} := \mathbf{p}_{i-1,i}$  választással teljesül, hogy

$$\boldsymbol{\rho}' = (1 - \kappa_i) \mathbf{t}_{i-1} \dot{q}_i + \kappa_i \mathbf{t}_{i-1} \dot{q}_i \times \mathbf{p}_{i-1,i} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{d}_{i-1} \dot{q}_i, \quad (B.27)$$

$$\boldsymbol{\rho}'' = \mathbf{d}_{i-1} \ddot{q}_i + \kappa_i \mathbf{t}_{i-1} \dot{q}_i \times \mathbf{d}_{i-1} \dot{q}_i, \quad (B.28)$$

$${}^{i-1}\mathbf{v}_i = {}^{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{p}_{i-1,i} + \mathbf{d}_{i-1}\dot{q}_i, \quad (B.29)$$

$${}^{i-1}\mathbf{a}_i = {}^{i-1}\mathbf{a}_{i-1} + {}^{i-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1} \times \mathbf{p}_{i-1,i} + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times ({}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{p}_{i-1,i}) + \mathbf{d}_{i-1}\ddot{q}_i + \kappa_i t_{i-1}\dot{q}_i \times \mathbf{d}_{i-1}\dot{q}_i + 2{}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{d}_{i-1}\dot{q}_i, \quad (B.30)$$

$${}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_i = {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} + \kappa_i t_{i-1}\dot{q}_i, \quad (B.31)$$

$$\begin{aligned} {}^{i-1}\boldsymbol{\varepsilon}_i &= {}^{i-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1} + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \kappa_i t_{i-1}\dot{q}_i + \kappa_i t_{i-1}\ddot{q}_i = \\ &= {}^{i-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1} + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_i \times \kappa_i t_{i-1}\dot{q}_i + \kappa_i t_{i-1}\ddot{q}_i. \end{aligned} \quad (B.32)$$

Itt például az  ${}^{i-1}\mathbf{v}_i$  jelölés arra utal, hogy a  $K_i$  keret origójának sebességét írtuk fel a  $K_{i-1}$  keret bázisában.

## FÜGGELÉK C.

### LASALLE STABILITÁSTÉTELE [6]

LaSalle stabilitástétele az  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  rendszer  $\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{0})$  egyensúlyi pontjának stabilitásáról szóló Ljapunov direkt módszerének általánosítása. Az egyensúlyi pont **Ljapunov-értelemben stabilis**, ha tetszőleges  $\varepsilon > 0$  értékhez megadható  $\delta > 0$ , hogy  $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta$  esetén teljesül  $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ . Más szóval, ha a kezdeti feltétel az egyensúlyi ponttól kicsit tér el, akkor az egész trajektória az egyensúlyi pont környezetében marad. Az egyensúlyi pont aszimptotikusan stabilis, ha stabilis és  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ , vagyis a trajektória be is fut az egyensúlyi pontba.

LaSalle tétele két fogalmon alapul. Az  $\mathbf{x}(t)$  trajektória **pozitív határhalmaza**:

$$\Gamma^+ = \{ \mathbf{y} : \text{létezik } \{t_n\} \text{ minden határon túl növekvő sorozat, hogy } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t_n) = \mathbf{y} \}. \quad (\text{C.1})$$

A  $\mathbf{x}(t)$  trajektória pozitív határhalmaza lehet például a  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t)$  határérték (ha létezik) vagy egy határciklus (izolált, zárt, periodikus görbe), amelyhez a trajektória tart. Egy másik lényeges fogalom az  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  rendszerre vonatkozó **invariáns halmaz** fogalma. Az  $M$  halmaz invariáns, ha bármelyik pontján átmenő trajektória (annak bal oldali és jobb oldali fele is) teljes egészében a halmazban fekszik. Ehhez elvben a halmaz pontja mint kezdeti feltétel körül a differenciálegyenlet megoldását pozitív és negatív időértékekre is meg kell határozni. Ha egy  $E$  halmaz nem invariáns, akkor beszélhetünk az  $E$  által tartalmazott maximális invariáns halmazról:

$$M = \max \{ H \subset E : \mathbf{x}(0) \in H \Rightarrow \forall t : \mathbf{x}(t) \in H \}. \quad (\text{C.2})$$

Egy korlátos  $\mathbf{x}(t)$  trajektória pozitív határhalmaza  $\Gamma^+$  mindig nemüres, kompakt (korlátos és zárt) és invariáns halmaz.

**LaSalle tétele:** Legyen az  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  rendszernek  $\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{0})$  egyensúlyi pontja és  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  folytonosan differenciálható. Létezzen  $V(\mathbf{x})$  Ljapunov-

függvény, amely kielégíti a következő feltételeket rögzített  $r > 0$  esetén az  $\{\mathbf{x} : |V(\mathbf{x})| < r\} \subset \Omega_r$  korlátos és nyílt halmazon:

$$\text{i) } V(\mathbf{x}) \text{ pozitív definit : } V(\mathbf{x}) \geq 0, \quad (C.3)$$

$$V(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (C.4)$$

$$\text{ii) } \dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T \text{grad}V \leq 0 \text{ (negatív szemidefinit),} \quad (C.5)$$

iii)  $V(\mathbf{x})$  folytonosan differenciálható.

Legyen az  $E = \{\mathbf{x} \in \Omega_r : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$  halmaz maximális invariáns halmaza  $M$ . Akkor tetszőleges  $\mathbf{x}(0) \in \Omega_r$  kezdeti feltételt kielégítő  $\mathbf{x}(t)$  trajektória aszimptotikusan tart az  $M$  halmazhoz.

Ez részletesebben azt jelenti, hogy tetszőleges  $\varepsilon > 0$  esetén létezik  $T$ , hogy minden  $t > T$  esetén  $\mathbf{x}(t)$  az  $M$  halmaz  $\varepsilon$ -környezetében marad:

$$\text{létezik } \mathbf{y}(t, \varepsilon) \in M + \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| < \varepsilon\}, \text{ hogy } \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}\| < \varepsilon. \quad (C.6)$$

**Következmény:** Ha az  $E = \{\mathbf{x} \in \Omega_r : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$  halmaz maximálisan invariáns halmaza  $M = \{\mathbf{0}\}$ , akkor tetszőleges  $\mathbf{x}(0) \in \Omega_r$  esetén az  $\mathbf{x}(t)$  trajektória aszimptotikusan tart a  $\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{0})$  egyensúlyi ponthoz.

**Következmény:** Legyen  $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z})$  és teljesüljenek a LaSalle-tétel feltételein kívül még:

$$\text{i) } \dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \implies \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (C.7)$$

$$\text{ii) } \dot{\mathbf{y}} = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \text{ alakú és } \varphi(\mathbf{0}, \mathbf{z}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{z} = \mathbf{0}. \quad (C.8)$$

Akkor az  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$  egyensúlyi pont aszimptotikusan stabilis. Nyilvánvaló ugyanis, hogy az i) feltétel és  $E$  definíciója miatt az  $M \subset E$  halmaz minden pontjában  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ . Innen következik az  $M$  halmaz invarianciája alapján  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$  minden  $M$ -ben futó  $\mathbf{x}(t)$  trajektória esetén, és így ii) alapján  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ . Ezért  $M$  egyetlen pontból áll.

## FÜGGELÉK D.

# TÖBBVÁLTOZÓS AUTONÓM SZABÁLYOZÁSI RENDSZER TERVEZÉSE IDŐTARTOMÁNYBAN (ÁLLAPOTTÉR MÓDSZER) [11],[38]

Legyen a  $\mathbf{u} \in R^r$  bemenő jel,  $\mathbf{y} \in R^m$  a kimenő jel és  $\mathbf{x} \in R^n$  az állapotváltozó, akkor a **folytonos idejű** lineáris rendszer (szakasz, tag, zárt rendszer) állapotegyenlete

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (D.1a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (D.1b)$$

alakú, ahol az  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  mátrixok mérete rendre  $(n \times n)$ ,  $(n \times r)$ ,  $(m \times n)$ ,  $(m \times r)$ .

Ha a rendszer **diszkrét idejű**,  $T$  a mintavételezési idő, és a bemenő jel lépcsős (a tartószerv a bemeneten nulladrendű), akkor az állapotegyenlet alakja:

$$\mathbf{x}([k+1]T) = \tilde{\mathbf{A}}_k \mathbf{x}(kT) + \tilde{\mathbf{B}}_k \mathbf{u}(kT), \quad (D.2a)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \tilde{\mathbf{C}}_k \mathbf{x}(kT) + \tilde{\mathbf{D}}_k \mathbf{u}(kT). \quad (D.2b)$$

Ha a mátrixok konstansok, akkor a rendszer autonóm (időben nem változó). A továbbiakban csak autonóm rendszereket vizsgálunk.

Az autonóm rendszereket (folytonos időben a Laplace-transzformáció, diszkrét esetben a  $\mathcal{Z}$ -transzformáció segítségével) jellemezhetjük az átviteli függvény mátrixszal (a továbbiakban a mátrixot az egyszerűség kedvéért elhagyjuk az elnevezésben).

Folytonos időben az átviteli függvény alakja:

$$\mathbf{W}(s) = \left[ W_{ij}(s) \right]_{m \times r} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}, \quad (D.3a)$$

$$W_{ij}(s) = \frac{y_i(s)}{u_j(s)} = \frac{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (D.3b)$$

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{W}(s)\mathbf{u}(s), \quad (D.3c)$$

ahol  $\mathbf{y}(s)$  és  $\mathbf{u}(s)$  a Laplace-transzformáltak.

**Diszkrét időben** a  $z$ -átviteli függvényt diszkrét idejű átviteli függvénynek fogjuk nevezni, melynek alakja:

$$\mathbf{W}(z) = \left[ W_{ij}(z) \right]_{m \times r} = \tilde{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{D}}, \quad (D.4a)$$

$$W_{ij}(z) = \frac{y_i(z)}{u_j(z)} = \frac{b_n z^n + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0}, \quad (D.4b)$$

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{W}(z)\mathbf{u}(z), \quad (D.4c)$$

ahol  $\mathbf{y}(z)$  és  $\mathbf{u}(z)$  a  $\mathcal{Z}$ -transzformáltak.

A továbbiakban vizsgált eljárások változtatás nélkül alkalmazhatók folytonos és diszkrét idejű rendszerek esetén. Egyedüli megszorítás, hogy diszkrét időben az  $\tilde{\mathbf{A}}$  mátrixnak nonszingulárisnak kell lenni, vagy diszkrét idejű átviteli függvényben gondolkozva  $W_{ij}(z)$  pólusai között nem szerepelhet nulla. Ez azt jelenti, hogy ha ismeretes a kezdeti állapot és a bemenő jel, akkor a trajektória csökkenő időkre is számítható, azaz a rendszer reverzibilis. A hasonlóság miatt elegendő folytonos idejű rendszereket vizsgálni.

## D.1. LUENBERGER-FÉLE IRÁNYÍTHATÓ ÉS MEGFIGYELHETŐ NORMÁLALAK

Egy lineáris rendszert akkor nevezünk **irányíthatónak**, ha minden  $\mathbf{x}(t_0)$  kezdeti állapothoz és minden  $\mathbf{x}$  végállapothoz létezik a bemenő jel olyan  $\mathbf{u}(t)$  időfüggvénye, amellyel a rendszert **véges idő alatt** az előírt kezdeti állapotról az előírt végállapotba hozhatjuk. Az irányíthatóság szükséges és elégséges feltétele autonóm rendszerek esetén, hogy az

$$\mathbf{L} = (\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) \quad (D.5)$$

irányítási mátrix rangja maximális ( $n$ ) legyen.

Az irányíthatóság duális párja a megfigyelhetőség. Egy lineáris rendszert akkor nevezünk megfigyelhetőnek, ha a bemenő jel  $\mathbf{u}(t)$  és a kimenő jel  $\mathbf{y}(t)$  időfüggvényeinek ismerete a  $[t_0, t]$  időtartományban elegendő a rendszer  $\mathbf{x}(t_0)$  kezdeti állapotának meghatározásához. Autonóm rendszerek esetén a megfigyelhetőség szükséges és elégséges feltétele, hogy az

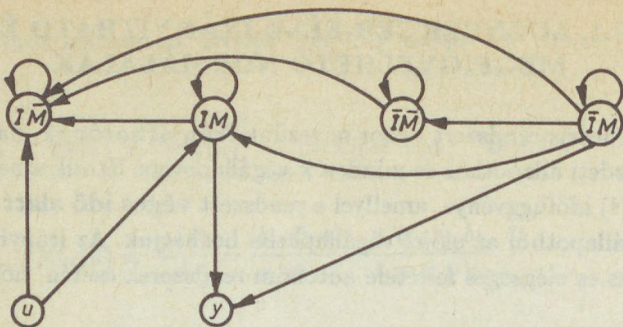
$$\mathbf{L} = (\mathbf{C}^T \mid \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \mid \dots \mid (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T) \quad (D.6)$$

mátrix rangja maximális ( $n$ ) legyen.

Tetszőleges autonóm lineáris rendszer ( $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ ) felbontható egy-egy

- irányítható és megfigyelhető (IM),
- irányítható, de nem megfigyelhető ( $\overline{\text{IM}}$ ),
- nem irányítható, de megfigyelhető ( $\overline{\text{IM}}$ ),
- nem irányítható és nem megfigyelhető ( $\overline{\overline{\text{IM}}}$ )

alrendszerre, amelyben az állapotok, a bemenet és a kimenet kapcsolata lineáris, és egymásra hatásuk a D.1. ábrán adott funkcionális sémával jellemezhető (Kálmán-féle normálalak). Az átviteli függvény nem jellemzi a teljes rendszert, hanem csak a teljesen irányítható és megfigyelhető (IM) alrendszert. Így például nem ad felvilágosítást a többi alrendszer esetleg meglévő (rejtett) instabilitásáról. Ha a rendszer irá-



D.1. ábra

Autonóm lineáris rendszer Kálmán-féle felbontása

nyítható és megfigyelhető, akkor  $\bar{IM}$ ,  $\bar{IM}$ ,  $\bar{IM}$  csak  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ -ból áll, ezért elhagyható.

A pólusát helyezési (pole assignment) feladat egy jellegzetes irányítástechnikai feladat. Ennek során előírjuk a zárt rendszer pólusait, és keressük a realizáláshoz szükséges szabályozót. A feladat egyszerűen megoldható, ha egy  $\mathbf{T}$  koordinátatranszformációval az állapotegyenletet

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{A}_{c\bar{c}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}, \quad (D.7a)$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{C}_c \quad \mathbf{C}_{\bar{c}}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}}, \quad (D.7b)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{x}, \quad (D.7c)$$

alakra hozzuk, ahol  $\mathbf{A}_c$  és  $\mathbf{B}_c$  a pólusát helyezéshez választott kedvező struktúrájú ( $\mathbf{B}_c$  felső háromszögmátrix).

**A Luenberger-féle irányítható normálalak meghatározásának algoritmus:**

1. Az  $L = (\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B})$  irányítási mátrixból szigorúan balról jobbfelé haladva megkeressük az előzőektől lineárisan független vektorokat (lásd a Gram-Schmidt-féle ortogonalizálási eljárást). Az újonnan sorra került vektort megtartjuk, ha lineárisan független az előzőektől, ellenkező esetben elhagyjuk. Ha  $\mathbf{A}^i \mathbf{b}_j$  lineárisan függ az előzőektől, akkor  $\mathbf{A}^k \mathbf{b}_j$  figyelmen kívül hagyható  $k > i$  esetén, ahol  $\mathbf{b}_j$  a  $\mathbf{B}$  mátrix  $j$ -edik oszlopa.

2. Ha a lineárisan függetlennek talált vektorok száma kisebb mint  $n$ , akkor a kiválasztott vektorokat kiegészítjük rájuk merőleges vektorokkal bázissá  $(\mathbf{g}_{\sigma_r-1}, \dots, \mathbf{g}_n)$ . Ezt úgy is el lehet végezni, hogy  $L$  oszlopait kiegészítjük az  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  ortonormált egységvektorokkal, és addig folytatjuk az 1. lépést, amíg  $n$  lineárisan független vektorhoz jutunk.

3. A kapott vektorrendszert átrendezve felépítjük a  $\mathbf{P}$  mátrixot:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A}^{d_1-1}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r, \dots, \mathbf{A}^{d_r-1}\mathbf{b}_r, \mathbf{g}_{\sigma_r+1}, \dots, \mathbf{g}_n). \quad (D.8)$$

Meghatározzuk  $\mathbf{P}$  inverzét ( $\mathbf{P}^{-1}$ ) valamilyen numerikusan stabilis módszerrel, például a Hausholder-módszerrel:

$$4. \quad \sigma_k := \sum_{i=1}^k d_i, \quad (D.9)$$

$$\mathbf{q}_i^T := \mathbf{P}^{-1} \text{ mátrix } \sigma_i\text{-edik sora, } i = 1, \dots, r, \quad (D.10)$$

$$\mathbf{T} := \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \mathbf{A}^{d_1-1} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_1^T \mathbf{A}^{d_r-1} \\ \mathbf{q}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_1^T \mathbf{A}^{d_1-2} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_r^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_r^T \mathbf{A}^{d_r-2} \\ \mathbf{g}_{\sigma_r+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{g}_n^T \end{bmatrix}. \quad (D.11)$$

5. Elvégezzük a  $\mathbf{T}$  koordinátatranszformációt:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}, \quad (D.12a)$$

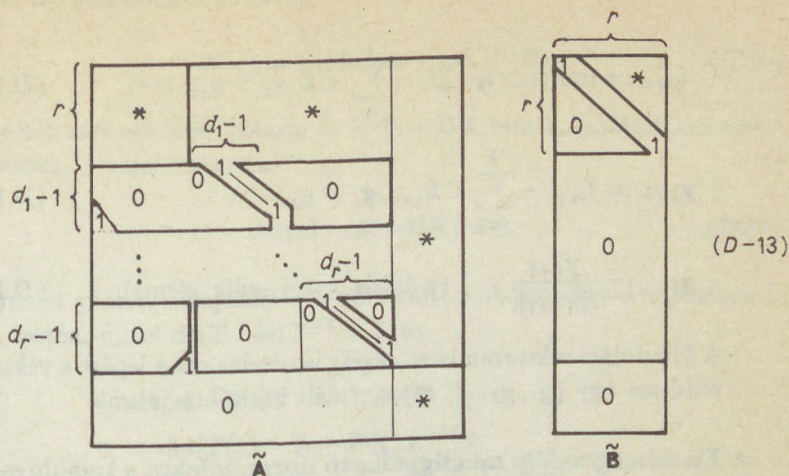
$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \quad (D.12b)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\mathbf{B}, \quad (D.12c)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}, \quad (D.12d)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D}. \quad (D.12e)$$

Az algoritmus elvégzése után  $\tilde{\mathbf{A}}$  és  $\tilde{\mathbf{B}}$  Luenberger-normálalakban áll elő (felül állnak az általános elemek):



A Gram-Schmidt-féle ortogonalizálási eljárás az  $\{f_1, \dots, f_m\}$  vektorrendszer ( $f_i \in R^n$ ) egy ortonormált bázisát határozza meg a következőképpen:

1. Megkeressük a kiindulási vektorrendszerben balról jobbra haladva az első nem nulla vektort, és ezt felvesszük a bázis első elemeként:

$$i_1 := \min\{i : \|f_i\| > \epsilon\}, \quad (D.14)$$

$$y_1 := f_{i_1}, \quad (D.15)$$

$$g_1 := \frac{y_1}{\|y_1\|} \quad (\text{a bázis első eleme}). \quad (D.16)$$

2. A vektorrendszerben balról jobbra tovább haladva megkeressük az első olyan elemet, amely lineárisan független az eddig felépített bázistól, majd ennek a vektornak a bázisra merőleges vetületét hozzátesszük a bázishoz:

$$i_{k+1} := \min\{i > i_k : \|\mathbf{f}_i - \sum_{j=1}^k \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_j \rangle \mathbf{g}_j\| > \epsilon\}, \quad (D.17)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} := \mathbf{f}_{i_{k+1}} - \sum_{j=1}^k \langle \mathbf{f}_{i_{k+1}}, \mathbf{g}_j \rangle \mathbf{g}_j, \quad (D.18)$$

$$\mathbf{g}_{k+1} := \frac{\mathbf{y}_{k+1}}{\|\mathbf{y}_{k+1}\|} \quad (\text{a bázis } k+1\text{-edik eleme}). \quad (D.19)$$

A kiindulási vektorrendszer végéig ismételve ezt a lépést a vektorrendszer egy  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots\}$  ortonormált bázisához jutunk.

**A Luenberger-féle megfigyelhető normálalakot** a korábbi esetre visszavezetve úgy határozhatjuk meg, hogy a valós  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  rendszerről áttérünk a fiktív  $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T)$  rendszerre. Meghatározzuk a fiktív rendszer **irányítható** normálalakját  $(\tilde{\mathbf{A}}^T, \tilde{\mathbf{C}}^T, \tilde{\mathbf{B}}^T)$ , majd transzponáljuk és visszarendezzük a mátrixokat  $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$ :

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) \rightarrow (\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T) \xrightarrow{\mathbf{T}} (\tilde{\mathbf{A}}^T, \tilde{\mathbf{C}}^T, \tilde{\mathbf{B}}^T) \rightarrow (\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}). \quad (D.20)$$

## D.2. KOMPENZÁLÁS ÁLLAPOT-VISSZACSATOLÁSSAL ELŐÍRT PÓLUSOK ESETÉN

Ha a szabályozót lineáris állapot-visszacsatolással (linear state variable feedback=l.s.v.f.) realizáljuk, amelynek alakja ( $\mathbf{v}$  az alapjel):

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{L}\mathbf{v}, \quad (D.21)$$

akkor a zárt rendszer állapotegyenlete

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{L}\mathbf{v}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{L}\mathbf{v}, \quad (D.22a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (D.22b)$$

lesz, átviteli függvénye pedig

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{BL}. \quad (D.23)$$

Ezért a zárt rendszer pólusai és az  $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$  mátrix sajátértékei megegyeznek. A sajátértékek a

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK}) = 0 \quad (D.24)$$

egyenlet gyökei. A sajátértékek nem változnak koordinátatranszformáció esetén, mivel  $\det \mathbf{T} \cdot \det \mathbf{T}^{-1} = 1$ , és

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{TAT}^{-1} - \mathbf{TBKT}^{-1}) &= \\ &= \det[\mathbf{T}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{T}^{-1}] = \\ &= \det \mathbf{T} \cdot \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK}) \cdot \det \mathbf{T}^{-1} = \\ &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK}) = \det(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}), \end{aligned} \quad (D.25)$$

ahol  $\tilde{\mathbf{K}} = [\tilde{\mathbf{K}}_c \quad \tilde{\mathbf{K}}_{\bar{c}}] = \mathbf{KT}^{-1}$ . Figyelembe véve (D.7a) alakját, a zárt rendszer karakterisztikus egyenlete:

$$\det(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}) = \det(s\mathbf{I}_{\sigma_r} - \mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c\tilde{\mathbf{K}}_c)\det(s\mathbf{I}_{n-\sigma_r} - \mathbf{A}_{\bar{c}}), \quad (D.26)$$

ahol

$$\det(s\mathbf{I}_{\sigma_r} - \mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c\tilde{\mathbf{K}}_c) = \varphi_c(s) \quad \text{sajátértékei változtathatók,} \quad (D.27)$$

$$\det(s\mathbf{I}_{n-\sigma_r} - \mathbf{A}_{\bar{c}}) = \varphi_{\bar{c}}(s) \quad \text{sajátértékei fixek.} \quad (D.28)$$

Az irányítható alrendszer  $\varphi_c(s)$  karakterisztikus egyenlete tetszőlegesen megválasztható, a nem irányítható altér  $\varphi_{\bar{c}}(s)$  karakterisztikus egyenletének gyökei pedig nem mozdíthatók ki, vagyis nem kompenzálhatók. Ha az irányítható alrendszerre a

$$\varphi_c(s) = s^{\sigma_r} + a_{\sigma_r-1}s^{\sigma_r-1} + \dots + a_0 \quad (D.29)$$

karakterisztikus egyenletet írjuk elő, akkor a polinom  $\mathbf{A}_{\varphi_c}$  kísérő mátrixát is előírhatjuk eredő állapotmátrixként:

$$\mathbf{A}_{\varphi_c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{\sigma_r-1} \end{bmatrix}_{\sigma_r \times \sigma_r}, \quad (D.30)$$

$$\det(s\mathbf{I}_{\sigma_r} - \mathbf{A}_{\varphi_c}) = \varphi_c(s). \quad (D.31)$$

Bár az  $\mathbf{A}_{\varphi_c}$  mátrix struktúrája sokban hasonlít a Luenberger-féle irányítható normálalak mátrixának struktúrájához, szükség van a bázisvektorok felcserélésére az állapot térben, hogy a kívánt alakhoz jussunk. Ez azt jelenti, hogy a bázisvektorok sorrendjét úgy kell megválasztani, hogy az  $\mathbf{A}_{\varphi_c}$  mátrix  $\sigma_1, \dots, \sigma_{r-1}, \sigma_r$  sorában álló  $\mathbf{e}_{\sigma_1+1}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma_{r-1}+1}, (-a_0, \dots, -a_{\sigma_r-1})$  sorvektorok az első  $r$  sorba mozduljanak el. A báziscsere (koordinátatranszformáció) a karakterisztikus polinomot nem változtatja meg. Jelölje  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_{\sigma_r}\}$  a bázisok felcserélését leíró permutációt, akkor ( $\sigma_0 = 0$  induló érték mellett)  $i = 1, \dots, r$  esetén a permutáció elemeit a következőképpen számíthatjuk:

$$p_{\sigma_i} := i, \quad (D.32a)$$

$$p_{\sigma_{i-1}+1}, \dots, p_{\sigma_{i-1}+d_i-1} := r-i+1+\sigma_{i-1}+1, \dots, r-i+1+\sigma_{i-1}+d_i-1 \quad (D.32b)$$

Legyen  $\mathbf{v}$  egy tetszőleges sorvektor, és jelölje  $P(\mathbf{v})$  azt a műveletet, amely  $\mathbf{v}$  koordinátáin elvégzi a  $P$  permutációt. Képezzük az  $(r \times \sigma_r)$  méretű  $\mathbf{A}_{\varphi_c}^*$  mátrixot a következő módon:

$$\mathbf{A}_{\varphi_c}^* = \begin{bmatrix} P(\mathbf{e}_{\sigma_1+1}) \\ \vdots \\ P(\mathbf{e}_{\sigma_{r-1}+1}) \\ P(-a_0, \dots, -a_{\sigma_r-1}) \end{bmatrix}_{r \times \sigma_r}. \quad (D.33)$$

Vezessük be az

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{LUE} \\ * \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{LUE} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (D.34)$$

jelöléseket, ahol  $\mathbf{A}_{LUE}$  ( $r \times \sigma_r$ ) méretű és  $\mathbf{B}_{LUE}$  ( $r \times r$ ) méretű mátrixok a Luenberger-féle irányítható normálalak első  $r$  sorában, akkor az állapot-visszacsatolás

$$\tilde{\mathbf{K}}_c = \mathbf{B}_{LUE}^{-1}(\mathbf{A}_{\varphi_c}^* - \mathbf{A}_{LUE}), \quad (D.35)$$

$$= [\tilde{\mathbf{K}}_c \quad \mathbf{0}] \mathbf{T} \quad (D.36)$$

alapján számítható. A szabályozóban szereplő  $\mathbf{L}$  mátrix megválasztható úgy is, hogy a rendszer alapjel ugráskor statikusan szétcsatolt legyen:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{C}(-\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}]^{-1}, \quad (D.37a)$$

$$\mathbf{y}(\infty) = \mathbf{v}(\infty). \quad (D.37b)$$

### D.3. MINIMÁLIS RENDŰ ÁLLAPOTMEGFFIGYELŐ TERVEZÉSE

Mivel nem szükségképpen minden  $x_i$  állapotváltozó mérhető, ezért az  $\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{v}$  állapot-visszacsatolás realizálásához a szabályozóban szükség van az állapot  $\hat{\mathbf{x}}$  becslésének számítására a szabályozóban. Keressük az aszimptotikus állapotmegfigyelőt

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{G}\mathbf{y} + \mathbf{H}\mathbf{u}, \quad (D.38)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix}] = \mathbf{0}, \quad (D.39)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (D.40)$$

alakban. Ha  $\mathbf{z} \in R^p$ , akkor  $\mathbf{T} : R^m \times R^p \rightarrow R^n$  és  $\mathbf{T} : R^n \rightarrow R^p$  lineáris transzformációk. Ekkor

$$\mathbf{x}(t) - T \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + T \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{0}, \quad (D.41)$$

ezért az aszimptotikus állapotmegfigyelőnek ki kell elégítenie az

$$\mathbf{I}_n - T \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (D.42)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \mathbf{0} \quad (D.43)$$

feltételt. Mivel a rangfeltétel szerint

$$\begin{aligned} \text{rang} \left[ T_{n \times (m+p)} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix}_{(m+p) \times n} \right] &= \text{rang } \mathbf{I}_n = n \leq \\ &\leq \min \{ \text{rang } T, \text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} \} \leq \end{aligned} \quad (D.44)$$

$$\leq \min(n, m+p) \leq m+p,$$

és  $p < n - m$  esetén  $n \leq m+p < m+n-m = n$  ellentmondás, ezért

$$p_{\min} \geq n - m. \quad (D.45)$$

**p-edrendű állapotmegfigyelő esetén:**

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{T}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) + \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{F}(\mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{e}) + \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{u}, \quad (D.46)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{u} + \dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{F}\mathbf{T} + \mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{e}, \quad (D.47)$$

ezért teljesülnie kell a

$$\mathbf{T}\mathbf{A} - \mathbf{F}\mathbf{T} - \mathbf{G}\mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad (D.48a)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{B} = \mathbf{H}, \quad (D.48b)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{F}\mathbf{e} \text{ és } \mathbf{F} \text{ sajátértékei negatív valósrésztűek} \quad (D.48c)$$

feltételnek.

Teljesrendű állapotmegfigyelő esetén:

$$p = n, \quad (D.49a)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{I}_n, \quad (D.49b)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{GC}, \quad (D.49c)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}. \quad (D.49d)$$

Itt  $\mathbf{G}$  legyen olyan, hogy  $\mathbf{F}$  sajátértékei negatív valósrésztűek legyenek, és  $e(t) \rightarrow \mathbf{0}$  gyorsabban, mint a szabályozás tranziensének ideje.

Ezek után megkonstruáljuk a  $p_{min} = n - m$  rendű állapotmegfigyelőt.

Válasszunk olyan

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{S}\mathbf{y} \quad (D.50)$$

koordinátatranszformációkat, hogy

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{TAT}^{-1}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (D.51a)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{SCT}^{-1}\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{I}_m \quad \mathbf{0}_{n-m})\boldsymbol{\xi} \quad (D.51b)$$

teljesüljön. Akkor  $\boldsymbol{\xi}$  és a rendszer felírható

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\zeta} \end{bmatrix}, \quad (D.52a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{A}_{11}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{A}_{12}\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{B}_1\mathbf{u}, \quad (D.52b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{A}_{21}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{A}_{22}\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad (D.52c)$$

alakban. Mivel  $\mathbf{y}$  és  $\mathbf{u}$  mérhető, ezért  $\boldsymbol{\eta}$  és (elvben)  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  is számítható, ahonnan következik  $\mathbf{A}_{12}\boldsymbol{\zeta}$  számíthatósága. Tekinthető tehát az  $\mathbf{A}_{21}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}$  bemenő jelű és  $\mathbf{A}_{12}\boldsymbol{\zeta}$  kimenő jelű

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{A}_{22}\boldsymbol{\zeta} + (\mathbf{A}_{21}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}), \quad (D.53a)$$

$$\mathbf{A}_{12}\boldsymbol{\zeta} \quad \text{megfigyelés} \quad (D.53b)$$

rendszer, melyhez konstruálható ( $\mathbf{G}$  helyett  $\mathbf{L}$  jelöléssel) teljes dim  $\boldsymbol{\zeta} = n - m$  rendű állapotmegfigyelő:

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12})\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{L}(\dot{\boldsymbol{\eta}} - \mathbf{A}_{11}\boldsymbol{\eta} - \mathbf{B}_1\mathbf{u}) + (\mathbf{A}_{21}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}). \quad (D.54)$$

Legyen

$$\mathbf{z} \stackrel{def}{=} -\mathbf{L}\boldsymbol{\eta} + \hat{\boldsymbol{\zeta}}, \quad (D.55)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{L}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\hat{\boldsymbol{\zeta}}}, \quad (D.56)$$

akkor kiesik  $-\mathbf{L}\dot{\boldsymbol{\eta}}$ , és fennáll, hogy

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} = & (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12})\mathbf{z} + [(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12})\mathbf{L} + \mathbf{A}_{21} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{11}]\mathbf{S}\mathbf{y} + \\ & + (\mathbf{B}_2 - \mathbf{L}\mathbf{B}_1)\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (D.57)$$

Az állapotmegfigyelő tervezésénél ezért  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{S}$  és  $\mathbf{L}$  meghatározására kell koncentrálnunk. Legyen a rendszer megfigyelhető, és határozzuk meg Luenberger-féle megfigyelhető normálalakját:

$$\dot{\mathbf{x}}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}_o + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (D.58a)$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{0}_{n-m}] \mathbf{x}_o, \quad (D.58b)$$

$$\mathbf{x}_o = (\mathbf{T}_{LUE}^{-1})^T \mathbf{x} \quad \text{koordinátatranszformáció}, \quad (D.58c)$$

$$d_1, d_2, \dots, d_m \quad \text{megfigyelhetőségi indexek}. \quad (D.58d)$$

Akkor választható:

$$\mathbf{S} := \mathbf{C}_1^{-1}, \quad (D.59a)$$

$$\mathbf{T} := \mathbf{I}, \quad (D.59b)$$

$$\mathbf{F} := \mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12}, \quad (D.59c)$$

$$\mathbf{G} := [(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12})\mathbf{L} + \mathbf{A}_{21} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{11}]\mathbf{C}_1^{-1}, \quad (D.59d)$$

$$\mathbf{H} := \mathbf{B}_2 - \mathbf{L}\mathbf{B}_1, \quad (D.59e)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{G}\mathbf{y} + \mathbf{H}\mathbf{u}; \quad \dim \mathbf{z} = n - m, \quad (D.59f)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_{LUE}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \hat{\boldsymbol{\zeta}} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{LUE}^T \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{-1} & \mathbf{0}_{n-m} \\ \mathbf{L}\mathbf{C}_1^{-1} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \stackrel{def}{=} \hat{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}.$$

$$(D.59g)$$

Hátra van még  $\mathbf{L}$  megválasztása. Legyen az állapotmegfigyelő megválasztott dinamikája

$$\det (s\mathbf{I} - \mathbf{F}) = P_{d_1-1}(s) \dots P_{d_m-1}(s), \quad (D.60a)$$

$$P_{d_i-1}(s) = s^{d_i-1} + g_{i,d_i-2}s^{d_i-2} + \dots + g_{i,0}, \quad (D.60b)$$

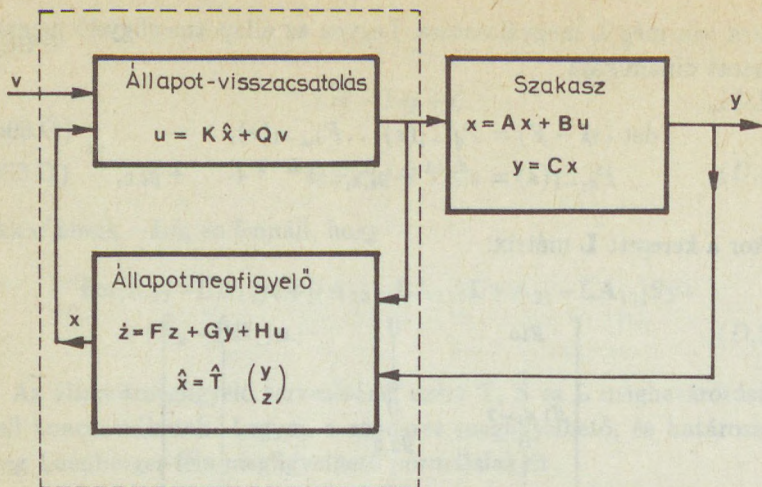
akkor a keresett  $\mathbf{L}$  mátrix:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} g_{10} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & & 0 \\ g_{1,d_1-2} & 0 & & 0 \\ 0 & g_{2,0} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{2,d_2-2} & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & g_{m,0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_{m,d_m-2} \end{bmatrix}_{(n-m) \times m} \quad (D.60c)$$

Az állapot-visszacsatolásból és állapotmegfigyelőből álló szabályozóval irányított rendszer blokkvázlata a D.2. ábrán található.

#### D.4. SZÉTCSATOLÁS ÉS KOMPENZÁLÁS ÁLLAPOT-VISSZACSATOLÁSSAL (GILBERT-MÓDSZER)

Azonos bemenet és kimenet számú ( $m = r$ ) többváltozós rendszert akkor nevezünk szétcsatoltnak, ha eredő átviteli függvénye diagonális és nonsinguláris. A szétcsatolást és a kompenzálást állapot-visszacsatolással  $\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{L}\mathbf{v}$  szabályozási törvénnyel kívánjuk realizálni. Feltesszük, hogy a szétcsatolandó rendszer megfigyelhető és irányítható. Az algoritmus alapja Gilbert módszere.



D.2. ábra

Szabályozás állapot-visszacsatolással és  
állapotmegfigyelővel

## 1. A szétcsatolhatóság ellenőrzése

A jelölések egyszerűsítése érdekében a továbbiakban  $C_i$  a  $C$  mátrix  $i$ -edik sora. Képezzük a  $d_i$  egészeket és a  $D_i$  sorvektorokat:

$$d_i := \begin{cases} 0, & \text{ha } C_i B \neq 0, \\ \max \{l \leq n-1 : C_i A^k B = 0 \ \forall k = 0, 1, \dots, l-1\}, & \end{cases} \quad (D.61a)$$

$$D_i := C_i A^{d_i} B. \quad (D.61b)$$

A rendszer szétcsatolható állapot-visszacsatolással akkor és csakis akkor, ha a Gilbert-mátrix

$$D = \begin{bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_m \end{bmatrix}_{m \times m} \quad \text{maximális rangú } (m). \quad (D.61c)$$

## 2. Szétcsatolás integrátor értelemben

Állapot-visszacsatolás révén  $d_i$  és  $\mathbf{D}_i$  egyszerű módon változik:

$$d_i(\mathbf{K}, \mathbf{L}) = d_i, \quad \mathbf{D}_i(\mathbf{K}, \mathbf{L}) = \mathbf{D}_i \mathbf{L}. \quad (D.62a)$$

Az állapot-visszacsatolás révén keletkező  $\tilde{\Sigma} = (\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$  rendszert integrátor értelemben szétcsatoltnak nevezjük, ha

$$\tilde{\mathbf{D}} = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \text{ nemszinguláris,} \quad (D.62b)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_i \tilde{\mathbf{A}}^{d_i+1} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (D.62c)$$

Ez akkor és csakis akkor teljesül, ha

$$\tilde{\mathbf{W}}(s) = \text{diag} \left( \frac{\gamma_1}{s^{d_1+1}}, \dots, \frac{\gamma_m}{s^{d_m+1}} \right). \quad (D.62d)$$

Ezt elérhetjük, ha

$$\mathbf{A}^* := \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{d_1+1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_m \mathbf{A}^{d_m+1} \end{bmatrix}, \quad (D.62e)$$

$$\mathbf{K}_1 := -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^*, \quad (D.62f)$$

$$\mathbf{L}_1 := \mathbf{D}^{-1}, \quad (D.62g)$$

amikor is  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K}_1$ ,  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B} \mathbf{L}_1$  és  $\Sigma_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C})$  integrátor értelemben szétcsatolt.

## 3. Áttérés kanonikusan szétcsatolt alakra

Legyen  $\mathbf{B}_k^1 := \mathbf{B}_1$   $k$ -adik oszlopa. Jelölje  $\text{Span}$  a kifeszített alteret és  $\mathcal{L}^\perp$  az  $\mathcal{L}$  alterre merőleges alteret. Ezeket adott vektorrendszer esetén Gram-Schmidt-módszerrel meg lehet határozni. Végezzük el  $i = 1, \dots, m$  esetén a következő konstrukciót:

$$\mathcal{L}_i := \text{Span} \{ \mathbf{A}_1^j \mathbf{B}_k^1 : j = 0, \dots, n-1, \quad (D.63a) \\ k = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m \},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i &:= \mathcal{L}_i^\perp \text{ egy bázisának meghatározása} = \\ &= \text{Span}\{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{p_i}\}, \quad p_i = \dim \mathcal{L}_i^\perp, \end{aligned} \quad (D.63b)$$

$$\mathbf{C}_i, \mathbf{C}_i \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{C}_i \mathbf{A}_1^{d_i}, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{p_i} \text{ első } p_i \text{ lineárisan} \\ \text{független vektorának meghatározása}, \quad (D.63c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i &= \text{Span}\{\mathbf{C}_i, \mathbf{C}_i \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{C}_i \mathbf{A}_1^{d_i}, \mathbf{q}_{d_i+2}, \dots, \mathbf{q}_{p_i}\} = \\ &= \mathbf{Q}_i \text{ a fenti vektorokkal oszlopvektorként}, \end{aligned} \quad (D.63d)$$

$$\mathcal{L} := \text{Span}\{\mathbf{Q}_i, \dots, \mathbf{Q}_m \text{ oszlopai}\}, \quad (D.63e)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{m+1} &:= \mathcal{L}^\perp \text{ egy bázisának meghatározása} = \\ &= \text{Span}\{\mathbf{q}_1^*, \dots, \mathbf{q}_{p_{m+1}}^*\}, \quad \dim \mathcal{M}_{m+1} = p_{m+1} \\ &= \mathbf{Q}_{m+1} \text{ a fenti vektorokkal oszlopvektorként}, \end{aligned} \quad (D.63f)$$

$$\mathbf{T} := (\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_m, \mathbf{Q}_{m+1})^T \text{ koordinátatranszformáció}, \quad (D.63g)$$

$$\mathbf{A}_2 := \mathbf{T} \mathbf{A}_1 \mathbf{T}^{-1}, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{T} \mathbf{B}_1, \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{C} \mathbf{T}^{-1}, \quad (D.63h)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0}_{p_1 \times p_m} & \mathbf{0}_{p_1 \times p_{m+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{p_m \times p_1} & \mathbf{A}_m & \mathbf{0}_{p_m \times p_{m+1}} \\ \underbrace{\mathbf{A}_1^c}_{p_1} & \dots & \underbrace{\mathbf{A}_m^c}_{p_m} & \underbrace{\mathbf{A}_{m+1}^c}_{p_{m+1}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{0}_{p_1} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{p_m} & \mathbf{b}_m \\ \mathbf{b}_1^c & \dots & \mathbf{b}_m^c \end{bmatrix}, \quad (D.63i)$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{c}_1}^{p_1} & \overbrace{\mathbf{0}_{p_m}^T}^{p_m} & \overbrace{\mathbf{0}_{p_{m+1}}^T}^{p_{m+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{p_1}^T & \mathbf{c}_m & \mathbf{0}_{p_{m+1}}^T \end{bmatrix}, \quad (D.63j)$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{d_i} & \mathbf{I}_{d_i} & \mathbf{0}_{d_i \times r_i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{d_i}^T & \mathbf{0}_{r_i}^T \\ & \mathbf{Y}_i & \mathbf{\Phi}_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{d_i} \\ \gamma_i \\ \beta_i \end{bmatrix}, \quad (D.63k)$$

$$\mathbf{c}_i = [1 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times p_i}, \quad r_i = p_i - d_i - 1. \quad (D.63l)$$

#### 4. Szétcsatolás és kompenzálás

$$\mathbf{L}_2 := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m), \quad (D.64a)$$

$$\mathbf{K}_2 := \begin{bmatrix} \vartheta_1 & & \mathbf{0}_{p_m}^T & \mathbf{0}_{p_{m+1}}^T \\ & \ddots & & \\ \underbrace{\mathbf{0}_{p_1}^T}_{\rho_1} & & \underbrace{\vartheta_m^T}_{\rho_m} & \underbrace{\mathbf{0}_{p_{m+1}}^T}_{\rho_{m+1}} \end{bmatrix}, \quad (D.64b)$$

$$\mathbf{W}(s, \mathbf{K}_2, \mathbf{L}_2) =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 (s\mathbf{I}_{p_1} - \mathcal{A}_1 - \mathbf{b}_1 \vartheta_1)^{-1} \mathbf{b}_1 \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \mathbf{c}_m (s\mathbf{I}_{p_m} - \mathcal{A}_m - \mathbf{b}_m \vartheta_m)^{-1} \mathbf{b}_m \lambda_m & \end{bmatrix}. \quad (D.64c)$$

A fenti választás mellett a rendszer szétcsatolt (ne feledjük, hogy  $\mathbf{c}_i$  sorvektor,  $\mathbf{b}_i$  oszlopvektor és  $\vartheta_i$  sorvektor). A zárt rendszer karakterisztikus egyenlete  $\varphi(s, \mathbf{K}_2)$ :

$$\varphi(s, \mathbf{K}_2) = \prod_{i=1}^m \psi_i(s, \sigma_i) \cdot \alpha_{m+1}(s), \quad (D.64d)$$

$$\psi_i(s, \sigma_i) = \det(s\mathbf{I}_{p_i} - \mathcal{A}_i - \mathbf{b}_i \vartheta_i), \quad (D.64e)$$

$$\alpha_{m+1}(s) = \det(s\mathbf{I}_{m+1} - \mathcal{A}_{m+1}^c). \quad (D.64f)$$

Látható, hogy  $\alpha_{m+1}(s)$  gyökei **nem mozdíthatók ki**, ezért  $p_{m+1} \neq 0$  esetén érdemben beleszólnak a stabilitásba és a tranziensbe, akár instabilitást is okozhatnak.

A kompenzálást  $i = 1, \dots, m$  esetén az alábbi lépésekben végezzük el:

$$\alpha_i(s) = \det(s\mathbf{I}_{r_i} - \Phi_i) = s^{r_i} - \alpha_{i1}s^{r_i-1} - \dots - \alpha_{i,r_i}$$

számítása,

$$\pi_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{i,r_i}, 0, \dots, 0) \text{ sorvektor,} \quad (D.64g)$$

$$\psi_i(s, \sigma_i) = s^{p_i} - \sigma_{i1}s^{p_i-1} - \dots - \sigma_{i,p_i} \text{ megválasztása,}$$

$$\sigma_i = (\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{i,p_i}) \text{ sorvektor,} \quad (D.64h)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{i1} &:= \mathbf{b}_i, \\ \delta_{i2} &:= \mathcal{A}_i \delta_{i1} - \alpha_{i1} \mathbf{b}_i, \\ &\vdots \\ \delta_{i,p_i} &:= \mathcal{A}_i \delta_{i,p_i-1} - \underbrace{\alpha_{i,p_i-1}}_{j>r_i \text{ esetén nullák}} \mathbf{b}_i, \end{aligned} \right\} \quad (D.64i)$$

$$\Delta_i := (\delta_{i1}, \dots, \delta_{i,p_i}), \quad (D.64j)$$

$$\vartheta_i := (\sigma_i - \pi_i) \Delta_i^{-1} \text{ sorvektor,} \quad (D.64k)$$

$$\lambda_i \text{ megválasztása: } W_{ii}(s, \mathbf{K}_2, \mathbf{L}_2) = \frac{\alpha_i(s) \lambda_i}{\psi_i(s, \sigma_i)}. \quad (D.64l)$$

## 5. Az eredő állapot-visszacsatolás

$$\mathbf{K} := \mathbf{D}^{-1}(-\mathbf{A}^* + \mathbf{K}_2 \mathbf{T}), \quad (D.65a)$$

$$\mathbf{L} := \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}_2. \quad (D.65b)$$

## D.5. AZ ÁLLAPOT-VISSZACSATOLÁS REALIZÁLÁSA ÁLTALÁNOSÍTOTT PID SZABÁLYOZÓVAL [15]

Ebben a pontban feltételezzük, hogy a rendszer

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (D.66a)$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{I}_m \ 0]\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (D.66b)$$

alakban adott. Ilyen alakot például a minimális realizáció Luenberger-féle megfigyelhető alakjából kaphatunk. Legyen továbbá az állapot-visszacsatolás

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (D.67)$$

mátrixa már valamilyen tervezési módszerrel (pólusáthelyezés, optimalizálás) meghatározva. Akkor a zárt rendszer

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} \stackrel{def}{=} \mathbf{F}\mathbf{x}, \quad (D.68a)$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{I}_m \ 0]\mathbf{x} \quad (D.68b)$$

lesz, amelynek  $\mathbf{x}_i$  sajátvektorai és  $\lambda_i$  sajátértékei az

$$\mathbf{F}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i \quad (D.69)$$

feltételből meghatározhatók. Válasszunk ezek közül  $m$  összetartozó sajátvektort és sajátértéket, melyeket egy-egy mátrixba rendezünk:  $\mathbf{X}_m, \mathbf{A}_m$  (az utóbbi diagonális).

Feltesszük, hogy a sajátértékek egyszeresek. A számítások egyszerűsítése érdekében konjugált komplex sajátértékpárok esetén az  $\mathbf{x}_i$  és  $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i^*$  sajátvektorok helyett a valós  $(\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i+1})/2$  és  $(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1})/(2j)$  vektorokat szerepeltetjük. Legyen  $\mathbf{x}_i = \mathbf{u}_i + j\mathbf{v}_i$  és  $\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i$ , akkor

$$\boldsymbol{\tau}_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \quad (D.70a)$$

jelöléssel teljesül, hogy

$$[\mathbf{u}_i \quad \mathbf{v}_i] = [\mathbf{x}_i \quad \mathbf{x}_{i+1}] \boldsymbol{\tau}_i, \quad (D.70b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}[\mathbf{u}_i \quad \mathbf{v}_i] &= \mathbf{F}[\mathbf{x}_i \quad \mathbf{x}_{i+1}] \boldsymbol{\tau}_i = \\ &= [\mathbf{x}_i \quad \mathbf{x}_{i+1}] \boldsymbol{\tau}_i \boldsymbol{\tau}_i^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_{i+1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_i = \end{aligned} \quad (D.70c)$$

$$= [\mathbf{u}_i \quad \mathbf{v}_i] \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}, \quad (D.70d)$$

ezért a valós  $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$  vektorokra áttérve a sajátvektoroknál a  $\Lambda_m$  mátrixban a blokkdiagonálisban a sajátértékek helyett az  $\alpha_i, \beta_i$  számokból álló  $2 \times 2$  méretű blokkot kell szerepeltetni:

$$[\mathbf{u}_i \quad \mathbf{v}_i] \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}. \quad (D.70e)$$

Alkalmazzunk állapot-visszacsatolás helyett kimeneti visszacsatolást **projektív irányítás** alakjában (Medanic,15):

$$\mathbf{u} = -\mathbf{KX}_m(\mathbf{CX}_m)^{-1}\mathbf{y} = -\mathbf{KX}_m(\mathbf{CX}_m)^{-1}\mathbf{Cx}. \quad (D.71)$$

Akkor a zárt rendszer állapotmátrixa

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{BKX}_m(\mathbf{CX}_m)^{-1}\mathbf{C} \quad (D.72)$$

lesz. Mivel

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{X}_m = \mathbf{AX}_m - \mathbf{BKX}_m = \mathbf{FX}_m = \mathbf{X}_m\Lambda_m, \quad (D.73)$$

ezért az  $\mathbf{X}_m$  oszlopai által kifeszített tér invariáns altér, és a projektív irányítás megőrzi a korábban megtervezett állapot-visszacsatolás  $m$  sajátvektorát és  $m$  sajátértékét (pólusát). Koordinátatranszformációval a zárt rendszer speciális alakra hozható:

$$\begin{array}{ccccccc}
 R^n & \xrightarrow{i} & R^n & \xrightarrow{A} & R^n & \xrightarrow{i} & R^n \\
 \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ e_{m+1} \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ e_{m+1} \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}
 \end{array} \quad (D.74a)$$

$$R^n \xrightarrow{T^{-1}} R^n \xrightarrow{A} R^n \xrightarrow{T} R^n$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} & 0_m \\ X_m & \\ & I_{n-m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & 0 \\ V & I \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} U^{-1} & 0 \\ -VU^{-1} & I \end{bmatrix}, \quad (D.74b)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} &= TAT^{-1} = \begin{bmatrix} U^{-1} & 0 \\ -VU^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & 0 \\ V & I \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & * \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad (D.75)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_{22} &= [-VU^{-1} \quad I] \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = A_{22} - VU^{-1}A_{12} \stackrel{jet}{=} \\
 &\stackrel{jet}{=} A_{22} - NA_{12} \stackrel{jet}{=} A_r, \quad (D.76)
 \end{aligned}$$

$$[-VU^{-1} \quad I] \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \stackrel{jet}{=} [-N \quad I] X_m = 0. \quad (D.77)$$

A feltételekből  $N$  és  $A_r$  meghatározható. Következik  $\tilde{A}$  alakjából, hogy

$$\det(sI_{n-m} - A_r) = 0 \quad (D.78)$$

gyökei a zárt rendszer projektív irányítás mellett kiadódó pólusai lesznek, melyek a **reziduális spektrumot** alkotják. Ha ez a spektrum szabályozástechnikai szempontból lényegtelen (például stabilis és nemdomináns), akkor a projektív irányítás alkalmazható, ellenkező esetben nem.

Ha a reziduális spektrum rossz tulajdonságú, akkor **dinamikus szabályozóval** próbálkozhatunk :

$$\dot{z} = Hz + Dy = Hz + DCx, \quad (D.79a)$$

$$u = -[0_p \quad K_m \quad K_{n-m}] P_{p+m} \begin{bmatrix} z \\ y \\ * \end{bmatrix}. \quad (D.79b)$$

Itt  $\dim(z) = p$  és  $P_{p+m}$  alkalmasan választott projekció, melynek meghatározását ki kell dolgozni. Tekintsük először a kiegészített rendszert:

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & DC \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u, \quad (D.80a)$$

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix}. \quad (D.80b)$$

Legyen  $x_1 = [z^T \ x^T]^T$  az új állapotvektor, akkor leolvashatók az állapot-egyenlet  $A_1, B_1, C_1$  mátrixai. Ha a kompenzálást az  $u = -[0 \ K]x_1$  állapot-visszacsatolás alakjában realizálnánk, akkor a zárt rendszer

$$\dot{x}_1 = F_1 x_1, \quad (D.81a)$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} H & DC \\ 0 & F \end{bmatrix} \quad (D.81b)$$

alakú lenne. Tekintsük  $F_1$  sajátértékeit és sajátvektorait:

$$F_1 x_1 = \lambda x_1 \implies Hz + DCx = \lambda z, \quad (D.82a)$$

$$Fx = \lambda x. \quad (D.82b)$$

Két eset lehetséges:

$$a) \lambda = \lambda_H : \quad Hz = \lambda_H z \text{ és } x = 0, \quad (D.82c)$$

$$b) \lambda = \lambda_F : \quad Fx = \lambda_F x \text{ és } z = (\lambda I - H)^{-1} DCx. \quad (D.82d)$$

Válasszunk ezután  $\mathbf{F}_1$  sajátvektorai és sajátértékei közül úgy  $p + m$  darabot, hogy minden sajátérték  $\mathbf{F}$ -hez tartozzon:

$$\text{sajátvektorok : } \mathbf{X}_{p+m} \subset \mathbf{X}_1, \quad (D.83a)$$

$$\text{diszjunkt sajátértékek : } \mathbf{A}_p, \mathbf{A}_m \subset \mathbf{A}_F. \quad (D.83b)$$

Legyen a projekció  $\mathbf{P}_{p+m}$  és az irányítás  $\mathbf{u}$  a következő:

$$\mathbf{P}_{p+m} = \mathbf{X}_{p+m} (\mathbf{C}_1 \mathbf{X}_{p+m})^{-1} \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_p & \mathbf{N}_m & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (D.84)$$

$$\mathbf{u} = -[\mathbf{0}_p \quad \mathbf{K}_m \quad \mathbf{K}_{n-m}] \mathbf{P}_{p+m} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \\ * \end{bmatrix} =$$

$$= -[\mathbf{0}_p \quad \mathbf{K}_m \quad \mathbf{K}_{n-m}] \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{N}_p \mathbf{z} + \mathbf{N}_m \mathbf{y} \end{bmatrix}, \quad (D.85a)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_{n-m} \mathbf{N}_p \mathbf{z} - (\mathbf{K}_m + \mathbf{K}_{n-m} \mathbf{N}_m) \mathbf{y}. \quad (D.85b)$$

Arra keresünk választ, hogyan lehet a reziduális spektrumot  $\mathbf{H}$  és  $\mathbf{D}$  révén befolyásolni. Ennek érdekében bontsuk  $\mathbf{X}_{p+m}$ -et komponensekre. Jellemezzük a reziduális spektrumot a komponensekkel, és a felismerések alapján tervezzünk kedvező tulajdonságú  $\mathbf{H}$  és  $\mathbf{D}$  mátrixokat. A spektrális jellemzőkre teljesül, hogy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_p & \mathbf{W}_m \\ \mathbf{U} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{V} & \mathbf{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_p & \mathbf{W}_m \\ \mathbf{U} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{V} & \mathbf{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_m \end{bmatrix}, \quad (D.86)$$

ahonnan következik, hogy

$$\mathbf{H} \mathbf{W}_p + \mathbf{D} \mathbf{U} = \mathbf{W}_p \mathbf{A}_p, \quad (D.87)$$

$$\mathbf{H} \mathbf{W}_m + \mathbf{D} \mathbf{Y} = \mathbf{W}_m \mathbf{A}_m, \quad (D.88)$$

$$\begin{aligned}
 P_{p+m} &= \\
 &= \begin{bmatrix} W_p & W_m \\ U & Y \\ V & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_p & W_m \\ U & Y \\ V & Z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ N_p & N_m & 0 \end{bmatrix}, \quad (D.89)
 \end{aligned}$$

$$[N_p \quad N_m] = [V \quad Z] \begin{bmatrix} W_p & W_m \\ U & Y \end{bmatrix}^{-1}. \quad (D.90)$$

Mivel hipermátrixok inverzére teljesül az

$$\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + E\Delta^{-1}F & -E\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}F & \Delta^{-1} \end{bmatrix}, \quad (D.91a)$$

$$\Delta = B - CA^{-1}D \quad (\text{Schur - komplement}), \quad (D.91b)$$

$$E = A^{-1}D, \quad (D.91c)$$

$$F = CA^{-1}, \quad (D.91d)$$

összefüggés ([11], p.656), ezért bevezetve a

$$W_m = W_p L \Rightarrow L = W_p^{-1} W_m \quad (D.92)$$

jelölést, következik, hogy

$$\begin{bmatrix} I & L \\ U & Y \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I + L(Y - UL)^{-1}U & -L(Y - UL)^{-1} \\ -(Y - UL)^{-1}U & (Y - UL)^{-1} \end{bmatrix}, \quad (D.93)$$

$$N_m = -VL(Y - UL)^{-1} + Z(Y - UL)^{-1}, \quad (D.94)$$

$$N_p = \{V + VL(Y - UL)^{-1}U - Z(Y - UL)^{-1}U\}W_p^{-1}. \quad (D.95)$$

Tekintsük a korábbi

$$[-N \quad I] \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow N = ZY^{-1}, \quad (D.96)$$

$$A_r = A_{22} - NA_{12} \quad (D.97)$$

mátrixokat, akkor  $N_m$  és  $N_p$  átalakítható, mivel

$$\begin{aligned} Z(Y - UL)^{-1} &= Z\{(I - ULY^{-1})Y\}^{-1} = \\ &= ZY^{-1}\{I + UL(-UL + Y)^{-1}\} = \\ &= N + NUL(Y - UL)^{-1}, \end{aligned} \quad (D.98)$$

$$N_m = N - (V - NU)L(Y - UL)^{-1} \stackrel{jel}{=} N - B_0P_0, \quad (D.99)$$

$$N_p = (V - N_m U)W_p^{-1} = B_0(I + P_0U)W_p^{-1}, \quad (D.100)$$

$$B_0 := V - NU; \quad P_0 := L(Y - UL)^{-1}, \quad (D.101)$$

$$\begin{aligned} A_{r1} \stackrel{jel}{=} \tilde{F}_{22} &= A_{22} - N_m A_{12} = (A_{22} - NA_{12}) + B_0P_0A_{12} = \\ &= A_r + B_0P_0A_{12}. \end{aligned} \quad (D.102)$$

Lehetséges tehát  $A_r$  kedvezőtlen reziduális halmazát  $A_{r1} = A_r + B_0P_0A_{12}$  kedvezőbb reziduális halmazára lecserélni, ha a  $P_0$  mátrix elemeit alkalmasan választjuk meg. Ehhez el kell végezni a fiktív  $\hat{X} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}) = (A_r, B_0, A_{12})$  rendszer pólusainak áthelyezését az  $\hat{u} = P_0\hat{y}$  statikus kimeneti visszacsatolás segítségével.  $P_0$  ismeretében a szabályozó  $L, H, D$  paraméterei az alábbi módon határozhatók meg ( $N_p$  és  $N_m$  számítását már részleteztük):

$$L := (I + P_0U)^{-1}P_0Y, \quad (D.103)$$

$$H \stackrel{jel}{=} W_p H_0 W_p^{-1} \Rightarrow HW_p = W_p H_0$$

$$H_0 + D_0U = A_p,$$

$$D \stackrel{jel}{=} W_p D_0 \Rightarrow DU = W_p D_0 U \quad (D.104)$$

$$W_p(A_p - D_0U)W_p^{-1}W_m + W_p D_0Y = W_m A_m \Rightarrow \quad (D.105)$$

$$D_0 := (LA_m - A_p L)(Y - UL)^{-1}, \quad (D.106)$$

$$\mathbf{H}_0 := \mathbf{A}_p - \mathbf{D}_0 \mathbf{U}, \quad (D.107)$$

$$\mathbf{H} := \mathbf{W}_p \mathbf{H}_0 \mathbf{W}_p^{-1}, \quad (D.108)$$

$$\mathbf{D} := \mathbf{W}_p \mathbf{D}_0. \quad (D.109)$$

$$\text{Szabályozó : } \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{H}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{y}, \quad (D.110a)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_{n-m} \mathbf{N}_p \mathbf{z} - (\mathbf{K}_m + \mathbf{K}_{n-m} \mathbf{N}_m) \mathbf{y}. \quad (D.110b)$$

PI szabályozás esetén  $\mathbf{u} = -\mathbf{A}_p \mathbf{y} - \mathbf{A}_I \int \mathbf{y} dt$ , ezért választható  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{y}$ , de nem befolyásolható  $\mathbf{H} = \mathbf{0}$  és  $\mathbf{D} = \mathbf{I}$  a tervezéskor. Ezért tekinthető a kiegészített

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (D.111)$$

rendszer, és ehhez tervezhető

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_1 \mathbf{x}_1 \quad (D.112)$$

állapot-visszacsatolás, melyet projektív irányítással közelíthetünk. Ehhez  $\tilde{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1$  spektrumából  $2m$  darab sajátvektort és sajátértéket betarthatunk, a reziduális spektrum azonban nem befolyásolható az

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\mathbf{K}_1 \mathbf{P}_1 \mathbf{y}_1 = -\mathbf{K}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 = \\ &= -[\mathbf{K}_z \quad \mathbf{K}_y \quad \mathbf{K}_{n-m}] \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{N}_z \mathbf{z} + \mathbf{N}_y \mathbf{y} \end{bmatrix} = \\ &= -(\mathbf{K}_z + \mathbf{K}_{n-m} \mathbf{N}_z) \mathbf{z} - (\mathbf{K}_y + \mathbf{K}_{n-m} \mathbf{N}_y) \mathbf{y} \end{aligned} \quad (D.113)$$

projektív irányítással, amely azonos a PI szabályozással:

$$\mathbf{A}_p = \mathbf{K}_y + \mathbf{K}_{n-m} \mathbf{N}_y, \quad \mathbf{A}_I = \mathbf{K}_z + \mathbf{K}_{n-m} \mathbf{N}_z. \quad (D.114)$$

PID szabályozás esetén  $u = -A_P y - A_I \int y dt - A_D \dot{y}$ , ezért választható  $\dot{z} = y$ , de nem befolyásolható most sem  $H = 0$  és  $D = I$  a tervezéskor. Ezért tekinthető ugyan  $\dot{y} = C\dot{x} = C(Ax + Bu) = CAx + CBu$  miatt a kiegészített

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} z \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} z \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & 0 \\ 0 & \mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{CA} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{CB} \end{bmatrix} \quad (D.115)$$

rendszer, és ehhez tervezhető

$$\mathbf{u} = -\tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{y}_1 \quad (D.116)$$

kimeneti visszacsatolás, amely

$$\mathbf{u} = -\tilde{\mathbf{K}}_1 (\mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1 \mathbf{u}) \Rightarrow \mathbf{u} = -(\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{D}_1)^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 \quad (D.117)$$

miatt ekvivalens az

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_1 \mathbf{x}_1 \quad (D.118)$$

állapot-visszacsatolással, ahol az áttérés

$$\mathbf{K}_1 = (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{D}_1)^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{C}_1 \leftrightarrow \tilde{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{K}_1 (\mathbf{C}_1 - \mathbf{D}_1 \mathbf{K}_1)^{-1} \quad (D.119)$$

alapján lehetséges. Tervezhető tehát egy  $-\mathbf{K}_1 \mathbf{x}_1$  állapot-visszacsatolás, amely közelíthető projektív irányítással. Feltesszük, hogy  $\mathbf{A}_1 := \mathbf{T} \mathbf{A}_1 \mathbf{T}^{-1}$ ,  $\mathbf{B}_1 := \mathbf{T} \mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{C}_1 := \mathbf{C} \mathbf{T}^{-1}$  transzformációval elértük, hogy  $\mathbf{C}_1 = [\mathbf{I}_{3m} \ 0]$  teljesül, és az állapot-visszacsatolást ezután terveztük meg. Meghatározzuk a zárt rendszer  $\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1$  állapotmátrixának spektrumát és sajátvektorait. Ebből  $3m$  darabot az

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_1 \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_1 = -\mathbf{K}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3m} & 0 \\ \mathbf{N} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 = -\hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{y}_1 \quad (D.120)$$

projektív irányítással betarthatunk, míg a reziduális spektrum kiadódó helyre kerül. A PID szabályozó paramétereit az

$$[\mathbf{A}_I \quad \mathbf{A}_P \quad \mathbf{A}_D] = \hat{\mathbf{K}}_1(\mathbf{I}_{3m} - \mathbf{D}_1\hat{\mathbf{K}}_1)^{-1} \quad (D.121)$$

feltételből határozhatjuk meg.

Általánosított PID szabályozó esetén a PI szabályozó  $\mathbf{y}_1 = (\mathbf{z}^T, \mathbf{y}^T)^T$  kimenetéhez képest tovább bővítjük a kimenetek számát  $\mathbf{z}_1$ -gyel, ahol  $\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{H}\mathbf{z}_1 + \mathbf{D}\mathbf{y}_1$ . A szabályozó algoritmus:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{A}_P\mathbf{y} - \mathbf{A}_I \int \mathbf{y} dt - \mathbf{A}_z\mathbf{z}_1. \quad (D.122)$$

A szabályozó  $\mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{A}_P, \mathbf{A}_I$  és  $\mathbf{A}_z$  paramétereinek megválasztására alkalmazhatjuk az előzőekben már részletezett módszert. Ehhez elegendő a PI szabályozásnál szereplő kiegészített rendszerből kiindulni, és az  $\mathbf{x} := \mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{y} := \mathbf{y}_1$  és  $\mathbf{z} := \mathbf{z}_1$  helyettesítéseket elvégezni. Legyen  $p = \dim(\mathbf{z}_1)$ , akkor a tervezést  $p = 1$  választással célszerű indítani és szükség esetén addig növelni, amíg a reziduális spektrum megfelelő helyre kerül. Ennek során figyelembe kell venni, hogy  $\mathbf{P}_0$  révén csak  $\text{rang}[\mathbf{B}_0] + \text{rang}[\mathbf{A}_{12}] - 1$  pólus helyezhető tetszőleges helyre kimeneti visszacsatolással. Itt  $\text{rang}[\mathbf{B}_0]$  növelhető  $p = \dim(\mathbf{z}_1)$  növelésével.

## D.6. PÓLUSÁTHELYEZÉS KIMENETI VISSZACSATOLÁSSAL [41]

Legyen  $S = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  irányítható és megfigyelhető rendszer, melyet a kimenő jel  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{y}$  statikus visszacsatolásával akarunk úgy kompenzálni, hogy a zárt rendszer  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}$  állapotmátrixának sajátértékei (a zárt rendszer pólusai) előírt helyre kerüljenek. Feltesszük, hogy  $\mathbf{A}$  sajátértékei egyszeresek (vagy egy előzetes kimeneti visszacsatolással egyszeressé lettek téve), és  $\mathbf{B}, \mathbf{C}$  maximális rangú ( $r$  és  $m$ ). A kimeneti visszacsatolást  $\mathbf{K}_i = \mathbf{q}_i\mathbf{k}_i^T$  alakban egységnyi rangú kimeneti visszacsatolásokból építjük fel két szinten, majd  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2$  alakban realizáljuk. Az első szint  $r - 1$  sajátértéket helyez el előírt helyre, majd a második szint ezeket megőrizve további  $m$  darabot helyez el.

**1.szint:**  $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$  sajátértékek elhelyezése.

Felhasználjuk a

$$\mathbf{c}^T (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \frac{\det(\mathbf{sI} - \mathbf{A} + \mathbf{bc}^T) - \det(\mathbf{sI} - \mathbf{A})}{\det(\mathbf{sI} - \mathbf{A})} \quad (D.123)$$

azonosságot ([11], p.651). Legyen  $\mathbf{b} = \mathbf{Bq}_i$  és  $\mathbf{c}^T = \mathbf{k}_i^T \mathbf{C}$ , akkor

$$P_0(s) = \det(\mathbf{sI} - \mathbf{A}), \quad (D.124a)$$

$$P_1(s) = \det(\mathbf{sI} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}_1 \mathbf{C}), \quad (D.124b)$$

$$\mathbf{M}_0(s) = \mathbf{B} \operatorname{adj}(\mathbf{sI} - \mathbf{A}) \mathbf{C} \quad (D.124c)$$

jelöléssel következik, hogy

$$P_1(s) = P_0(s) + \mathbf{k}_1^T \mathbf{M}_0(s) \mathbf{q}_1. \quad (D.125)$$

Legyenek az előirt sajátértékek különbözők, akkor betartásuk feltétele:

$$P_1(\lambda_i) = P_0(\lambda_i) + \mathbf{k}_1^T \mathbf{M}_0(\lambda_i) \mathbf{q}_1 = 0, \quad i = 1, \dots, r-1. \quad (D.126)$$

Itt  $\mathbf{k}_1^T$  tetszőlegesre választható [azon belül, hogy  $(\mathbf{A}, \mathbf{k}_1^T \mathbf{C})$  megfigyelhető maradjon]. Ha előírjuk  $\mathbf{q}_1$  egyik koordinátáját, akkor a maradék  $r-1$  koordinátája a (D.126) lineáris egyenletrendszerből meghatározható.

**2.szint:**  $\lambda_r, \dots, \lambda_{r+m-1}$  sajátértékek elhelyezése.

Az előző szint ötlete folytatható az  $S = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_1 \mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  rendszerre. Legyen

$$P_2(s) = \det(\mathbf{sI} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}_1 \mathbf{C} + \mathbf{BK}_2 \mathbf{C}), \quad (D.127a)$$

$$\mathbf{M}_1(s) = \mathbf{C} \operatorname{adj}(\mathbf{sI} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}_1 \mathbf{C}) \mathbf{B}, \quad (D.127b)$$

akkor

$$P_2(s) = P_1(s) + \mathbf{k}_2^T \mathbf{M}_1(s) \mathbf{q}_2. \quad (D.128)$$

Ha meg akarjuk őrizni az első  $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$  sajátértéket, akkor elegendő biztosítani

$$\mathbf{M}_1(\lambda_i)\mathbf{q}_2 = 0, \quad i = 1, \dots, r-1 \quad (D.129)$$

teljesülését. Mivel az  $\mathbf{M}_1(\lambda_i)$  mátrixnak mindig csak egy lineárisan független  $\mathbf{w}_i^T$  sora van, ezért  $\mathbf{q}_2$  egyik koordinátája megválasztható, és a maradék  $r-1$  meghatározható a

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{q}_2 = 0, \quad i = 1, \dots, r-1 \quad (D.130)$$

lineáris egyenletrendszerből. Ezután  $\mathbf{k}_2$  meghatározható a

$$P_2(\lambda_i) = P_1(\lambda_i) + \mathbf{q}_2^T \mathbf{M}_1(\lambda_i)^T \mathbf{k}_2, \quad i = r, \dots, r+m-1 \quad (D.131)$$

lineáris egyenletrendszerből.

# FÜGGELÉK E.

## TÖBBVÁLTOZÓS AUTONÓM SZABÁLYOZÁSI KÖRÖK TERVEZÉSE FREKVENCIA- TARTOMÁNYBAN [12],[14]

### E.1. AZ ÁTVITELI FÜGGVÉNY MÁTRIX MINIMÁLIS ALAKJA

A többváltozós lineáris autonóm rendszer olyan  $\mathbf{W}(s)$  átviteli függvény mátrixszal jellemezhető, amelynek  $w_{ij}(s) = r_{ij}(s)/p_{ij}(s)$  elemei racionális törtfüggvények (polinomok hányadosai). Az átviteli függvény **proper** (szigorúan proper), ha minden  $t_{ij}(s)$  esetén a számláló polinom fokszáma kisebb vagy egyenlő (szigorúan kisebb) mint a nevező polinom fokszáma.

Jelölje  $\partial$  a polinomfokszámot. Legyen  $\mathbf{R}(s)$  egy  $(p \times m)$  típusú polinommátrix. A polinommátrix fokszáma  $\partial[\mathbf{R}(s)]$  az elemek fokszámának maximuma. Mivel a polinommátrix oszlopai és sorai speciális mátrixok, ezért ebben az értelemben beszélhetünk a  $j$ -edik oszlop (column)  $\partial c_j[\mathbf{R}(s)]$  vagy az  $i$ -edik sor (row)  $\partial r_i[\mathbf{R}(s)]$  fokszámáról. A polinommátrix kifejezhető **oszlopfokszám szerint**:

$$l := \max\{\partial c_j\}, \quad (E.1a)$$

$$\mathbf{S}_{l-i} = \text{diag}(s^{\partial c_1 - i}, \dots, s^{\partial c_m - i}), \quad (E.1b)$$

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{R}_l \mathbf{S}_l(s) + \mathbf{R}_{l-1} \mathbf{S}_{l-1}(s) + \dots + \mathbf{R}_0, \quad (E.1c)$$

ahol  $\mathbf{R}_i$   $(p \times m)$ -típusú konstans mátrix, amelynek negatív  $s$ -hatványokhoz tartozó elemei nullák. Az  $\mathbf{R}(s)$  polinommátrix **oszlop-proper** (column proper), ha

$$\Gamma_c[\mathbf{R}(s)] := \mathbf{R}_l \text{ maximális rangú.} \quad (E.2)$$

Hasonlóan lehetséges a **sor-fokszám szerinti felírás**:

$$h := \max\{r_i\}, \quad (E.3a)$$

$$\mathbf{R}(s) = \tilde{\mathbf{S}}_h(s) \tilde{\mathbf{R}}_h + \tilde{\mathbf{S}}_{h-1}(s) \tilde{\mathbf{R}}_{h-1} + \dots + \tilde{\mathbf{R}}_0, \quad (E.3b)$$

$$\Gamma_r[\mathbf{R}(s)] := \tilde{\mathbf{R}}_h. \quad (E.3c)$$

Speciálisan, ha  $\mathbf{R}(s)$  ( $m \times m$ )-típusú (kvadratikus), akkor lehetséges a

$$q := \partial[\mathbf{R}(s)], \quad (E.4a)$$

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{R}_q s^q + \mathbf{R}_{q-1} s^{q-1} + \dots + \mathbf{R}_0 \quad (E.4b)$$

felírás, és  $\mathbf{R}(s)$  proper, ha  $\mathbf{R}_q$  maximális rangú. A determináns-fokszám:  $n = \partial \det[\mathbf{R}(s)]$ . Ha a mátrix oszlop- (sor-) proper, akkor  $n = \sum \partial c_j$  ( $n = \sum \partial r_i$ ). Az  $\mathbf{R}(s)$  mátrix **unimoduláris**, ha determinánsa nem nulla és konstans ( $n = 0$ ).

Az  $\mathbf{R}(s)$  polinommatrix **elemi oszloptranzformációinak** nevezük:

- két oszlop ( $i$  és  $j$ ) felcserélését,
- egy oszlop ( $i$ ) szorzását egy nem nulla skalárral,
- egy oszlop ( $i$ ) helyettesítését önmagának és egy másik oszlop ( $j$ ) polinomszorosának összegével.

Minden unimoduláris mátrix elemi tranzformációkkal egységmátrixszá redukálható (egységmátrixból nyerhető). Hasonlóan beszélhetünk **elemi sortranzformációkról**.

Két azonos oszlopszámú polinommatrix  $\mathbf{R}(s)$  és  $\mathbf{P}(s)$  legnagyobb jobb oldali közös osztója (greatest common right divisor, GCRD) olyan jobb oldali osztó polinom mátrixa mindkettőnek, amelynél nincs "nagyobb", vagyis amely bal oldali többszöröse minden más közös osztó polinommatrixnak (common right divisor, CRD). Ha  $\mathbf{G}_R(s)$  a GCRD, akkor

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{R}_1(s)\mathbf{G}_R(s) \text{ és } \mathbf{P}(s) = \mathbf{P}_1(s)\mathbf{G}_R(s), \quad (E.5a)$$

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{R}_2(s)\mathbf{G}(s) \text{ és } \mathbf{P}(s) = \mathbf{P}_2(s)\mathbf{G}(s) \Rightarrow \mathbf{G}_R(s) = \mathbf{M}(s)\mathbf{G}(s). \quad (E.5b)$$

Hasonló értelemben beszélhetünk legnagyobb bal oldali közös osztóról (greatest common left divisor, GCLD). A skalároktól eltérően GCRD (vagy GCLD) csak egy unimoduláris szorzó erejéig egyértelmű.

Két polinommatrix **relatív jobb oldali prím** (relative right prime, RRP), ha GCRD-jük unimoduláris. Két polinommatrix **relatív bal oldali prím** (relative left prime, RLP), ha GCLD-jük unimoduláris.

Legyenek  $\mathbf{D}(s)$  és  $\mathbf{N}(s)$  tetszőleges  $(m \times m)$  és  $(p \times m)$  méretű polinommátrixok. Keressünk elemi sortranszformációkat (vagy ami ekvivalens, egy  $\mathbf{U}(s)$  unimoduláris mátrixot), hogy a jobb oldalon legalább  $p$  sor nulla legyen:

$$\begin{matrix} m \\ p \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \overbrace{\left[ \begin{matrix} \mathbf{U}_{11}(s) & \mathbf{U}_{12}(s) \\ \mathbf{U}_{21}(s) & \mathbf{U}_{22}(s) \end{matrix} \right]}^{\substack{m \\ p}} \\ \mathbf{U}(s) \end{matrix} \right\} \begin{matrix} m \\ p \end{matrix} \left[ \begin{matrix} \mathbf{D}(s) \\ \mathbf{N}(s) \end{matrix} \right] = \begin{matrix} m \\ p \end{matrix} \left[ \begin{matrix} \mathbf{R}(s) \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right] \quad (E.6)$$

Akkor az  $\mathbf{R}(s)$  négyzetes mátrix  $\mathbf{D}(s)$  és  $\mathbf{N}(s)$  egy GCRD-je.

Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy  $\mathbf{D}(s)$  és  $\mathbf{N}(s)$  RRP legyen, többféleképpen is megadható [11]:

**Bezout egyenlőség:** Létezik  $\mathbf{X}(s)$  és  $\mathbf{Y}(s)$  polinommátrix, hogy

$$\mathbf{X}(s)\mathbf{N}(s) + \mathbf{Y}(s)\mathbf{D}(s) = \mathbf{I}_m. \quad (E.7)$$

**Rang feltétel:** Minden  $s$  érték esetén a  $[\mathbf{D}^T(s) \ \mathbf{N}^T(s)]^T$  mátrix maximális rangú (más elnevezéssel **irreducibilis**). Ezzel ekvivalens, hogy  $\mathbf{N}(s)$  és  $\mathbf{D}(s)$  sajátértékei között nincsenek közösek.

**Általánosított Sylvester rezultáns mátrix:** Létezik  $\mathbf{A}(s)$  és  $\mathbf{B}(s)$  relatív bal oldali prím (RLP) polinommátrix, hogy

$$\partial \det[\mathbf{D}(s)] = \partial \det[\mathbf{A}(s)]^{\text{jet}} = n, \quad (E.8a)$$

$$\mathbf{A}(s)\mathbf{N}(s) + \mathbf{B}(s)\mathbf{D}(s) = \mathbf{0}_m. \quad (E.8b)$$

Legyen  $\mathbf{N}(s) = \mathbf{N}_0 s^L + \mathbf{N}_1 s^{L-1} + \dots + \mathbf{N}_L$ , és bontsuk fel hasonló módon az  $\mathbf{A}(s)$ ,  $\mathbf{B}(s)$ ,  $\mathbf{D}(s)$  polinommátrixokat is, majd képezzük az  $\mathbf{S}_k$  általánosított Sylvester-mátrixokat:

$$S_k = \left[ \begin{array}{cccc} N_0 & N_1 & \dots & N_L \\ D_0 & D_1 & \dots & D_L \\ 0 & N_0 & \dots & N_{L-1} & N_L \\ 0 & D_0 & \dots & D_{L-1} & D_L \\ & & \vdots & & \\ & & N_0 & \dots & N_L \\ & & D_0 & \dots & D_L \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} 2k \text{ blokk sor, (E.9a)}$$

$$[A_0 B_0 A_1 B_1 \dots A_{k-1} B_{k-1}] S_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (E.9b)$$

Definiáljuk a következő mennyiségeket:

$$r_0 = 0, \quad r_i = \text{rang}(S_i), \quad (E.9c)$$

$$\alpha_0 = m + p, \quad \alpha_i = r_i - r_{i-1}. \quad (E.9d)$$

- i) Akkor  $\alpha_i$  nemnövekvő függvénye  $i$ -nek.  
 ii)  $n = r_\nu - m\nu$ , ahol  $\nu$  az első olyan egész, amelyre  $\alpha_{\nu+1} = m$  teljesül.

Az utóbbi jellemzés lehetőséget ad a GCRD számítására **számelemű mátrixokon** végzett elemi transzformációk segítségével. Ehhez előbb bevezetjük a **sor-echelon alak** fogalmát:

- i) a sor vezető eleme 1, kivéve ha a sor nulla,  
 ii) minden olyan oszlopban, amelyik valamelyik sor nem nulla vezető elemét tartalmazza, ez alatt az elem alatt már csak nullákat tartalmaz,  
 iii) ha sor  $i$  és  $j$  nem nullák és  $i < j$ , akkor az  $i$ -edik sor vezető nem nulla eleme balra van a  $j$ -edik sor vezető nem nulla elemétől,  
 iv) a nulla sorok a nem nulla sorok alatt helyezkednek el.

### Algoritmus a GCRD meghatározására:

1. Legyen  $L := \max\{\partial[N(s)], \partial[D(s)]\}$  a maximális fokszám. Képezzük az  $S_1$  általánosított Sylvester-mátrixot. Hozzuk  $S_1$ -et (számon végzett) elemi sortranszformációkkal az  $\mathcal{E}_1$  sor-echelon alakra.

Legyen  $r_1 := \text{rang}(\mathcal{E}_1)$ . Ha  $r_1 < m$ , akkor csak triviális (végtelen fokszámú) GCRD létezik, ezért stop. Ellenkező esetben legyen  $\mathcal{F} := \mathcal{E}_1$ , és  $k := 1$ .

2. Legyen  $k := k + 1$ . Egészítsük ki  $\mathcal{F}$ -et egy új  $k$ -adik blokkal úgy, hogy  $\mathcal{E}_{k-1}$ -et (a kezdeti első oszlophoz képest)  $m(k-1)$  oszloppal jobbra eltolva  $\mathcal{F}$  alá helyezzük.
3. Redukáljuk  $\mathcal{F}$   $k$ -adik blokkját az  $\mathcal{E}_k$  sor-echelon alakra. Ennek során az első  $k-1$  blokkból való elemi sortranszformációkkal elérjük, hogy a bővítés után is minden, az első  $k-1$  blokkból való sor vezető 1 eleme alatt nullák álljanak. Az így módosított  $k$ -adik blokkot ezután a  $k$ -adik blokkon belüli elemi sortranszformációkkal az  $\mathcal{E}_k$  sor-echelon alakra hozzuk. Legyen  $r_k := \text{rang}(\mathcal{F})$  és  $\alpha_k := r_k - r_{k-1}$ . Ha  $\alpha_k \neq m$ , akkor ugrás 2-re.
4. Legyen  $\nu = k$ . Az első  $m$  nem nulla sor  $\mathcal{E}_\nu$ -ből definiálja a GCRD együttható mátrixait csökkenő hatványok szerint rendezve a

$$\mathbf{G}_R(s) = \mathbf{G}_0 s^L + \mathbf{G}_1 s^{L-1} + \dots + \mathbf{G}_L \quad (E.10)$$

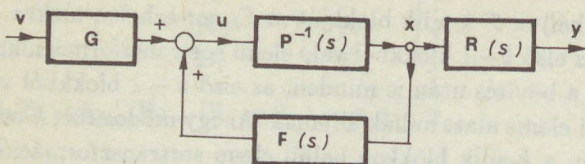
alakban (például  $\mathbf{G}_L$  helye  $\mathcal{E}_\nu$ -ben az utolsó  $m$  oszlopban van).

Az átviteli függvény mátrix faktorizációi és a rendszer irányíthatósága és megfigyelhetősége között szoros összefüggés van. Legyen  $\mathbf{W}(s)$  szigorúan proper, akkor a polinommatrixokkal történő faktorizációkra fennáll:

- i)  $\mathbf{W}(s) = \mathbf{R}(s)\mathbf{P}^{-1}(s)$  irányítható, ha  $\mathbf{P}(s)$  oszlop-proper,
- ii)  $\mathbf{W}(s) = \mathbf{Q}^{-1}(s)\mathbf{L}(s)$  megfigyelhető, ha  $\mathbf{Q}(s)$  sor-proper,
- iii)  $\mathbf{W}(s) = \mathbf{R}(s)\mathbf{P}^{-1}(s)$  minimális (irányítható és megfigyelhető), ha  $\mathbf{R}(s)$  és  $\mathbf{P}(s)$  irreducibilis (RRP),
- iv)  $\mathbf{W}(s) = \mathbf{Q}^{-1}(s)\mathbf{L}(s)$  minimális (irányítható és megfigyelhető), ha  $\mathbf{Q}(s)$  és  $\mathbf{L}(s)$  irreducibilis (RLP).

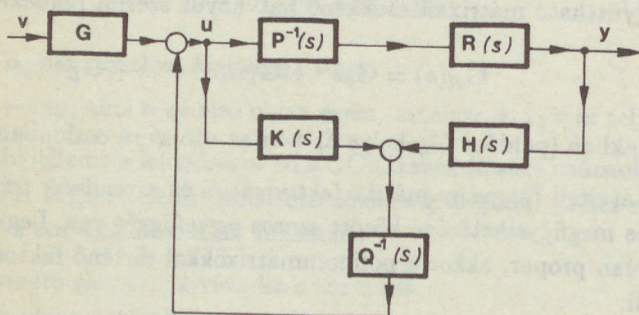
## E.2. ÁLLAPOT-VISSZACSATOLÁS ÉS ÁLLAPOTMEGFIGYELŐ TERVEZÉSE FREKVENCIATARTOMÁNYBAN

Az 1.s.v.f. alakja frekvenciatartományban  $u(s) = F(s)x(s) + Gv$  (lásd E.1. ábra).



E.1. ábra

Az 1.s.v.f. alakja frekvenciatartományban



E.2. ábra

Az 1.s.v.f. és állapotmegfigyelő alakja frekvenciatartományban

Mivel  $x = P^{-1}(Gv + Fx)$ , ezért  $y = R(P - F)^{-1}Gv$ , ahonnan leolvasható az eredő átviteli függvény. Wolovich az állapot-visszacsatolás és az állapotmegfigyelő együttes realizálására az

$$u = Q^{-1}(s)\{K(s)u(s) + H(s)y(s)\} + Gv \quad (E.11)$$

kompenzátort javasolja (lásd E.2. ábra).

Mivel

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{v}, \quad (E.12a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}\{\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}\}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{v} = \\ &= \mathbf{R}\{\mathbf{P} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{P} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{R}\}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{v}, \end{aligned} \quad (E.12b)$$

ezért teljesülnie kell a

$$\mathbf{Q}\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{P} + \mathbf{H}\mathbf{R} \quad (E.13)$$

feltételnek. Nyilvánvalóan  $\mathbf{Q}^{-1}(s)$ -nek stabilisnak és gyors tranziensűnek kell lennie. Megköveteljük, hogy  $\mathbf{T}(s) = \mathbf{R}(s)\mathbf{P}^{-1}(s)$  irányítható és megfigyelhető legyen. Hogy irányítható maradjon is, előírjuk a

$$\partial c_j[\mathbf{F}(s)] < \partial c_j[\mathbf{P}(s)] \quad (E.14)$$

feltételt. A kompenzálás megtervezésénél fontos szerepet játszik az  $\mathbf{M}_{ek}$  (konstans elemekből álló)  $k$ -adrendű elimináns mátrix, melynek mérete  $k = (m + p) \times (n + mk)$  és definíciója:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}(s) \\ s\mathbf{R}(s) \\ \vdots \\ s^{k-1}\mathbf{R}(s) \\ \mathbf{P}(s) \\ s\mathbf{P}(s) \\ \vdots \\ s^{k-1}\mathbf{P}(s) \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{ek} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ s & 0 & & \\ \vdots & 0 & & \\ s^{d_1+k-1} & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & s & & \\ \vdots & \vdots & & \\ s^{d_2+k-1} & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \\ \dots & \dots & & 1 \\ & & & s \\ & & & \vdots \\ & & & s^{d_m+k-1} \end{bmatrix}, \quad (E.15a)$$

ahol

$$n = \max\{\partial c[\mathbf{R}(s)], \partial c[\mathbf{P}(s)]\}, \quad (E.15b)$$

$$d_i = \max\{\partial c_i[\mathbf{R}(s)], \partial c_i[\mathbf{P}(s)]\}. \quad (E.15c)$$

**Algoritmus az állapot-visszacsatolás és az állapotmegfigyelő tervezésére frekvenciatartományban:**

1. Meghatározandó  $\mathbf{W}(s) = \mathbf{R}(s)\mathbf{P}^{-1}(s)$  minimális (RRP és oszlop-proper) faktorizációja.

2.

a) Ha  $\text{entier}(n/m) \cdot m = n$ , akkor  $k := n/m$ , különben  $k := \text{entier}(n/m) + 1$ .

b) Megkonstruálandó a  $k$ -adrendű elimináns mátrix  $\mathbf{M}_{ek}$ , és  $r_k := \text{rang}(\mathbf{M}_{ek})$ .

c) Ha  $r_k = n + mk$ , akkor a megfigyelhetőségi index  $\nu := k$ , és  $\mathbf{M}_{e\nu} := \mathbf{M}_{ek}$ , majd ugrás 3-ra. Különben  $k := k + 1$ . Ha  $k < n$ , akkor ugrás b)-re. Ellenkező esetben  $\mathbf{R}(s)$  és  $\mathbf{P}(s)$  nem RRP, és stop.

3. Meghatározandó és elhagyandó  $\mathbf{M}_{e\nu}$ -ből az  $n - \nu p$  lineárisan összefüggő sor. A megmaradó invertálható  $(n + m\nu) \times (n + m\nu)$  méretű mátrixot jelölje  $\hat{\mathbf{M}}_{e\nu}$ .

4.

a) Válasszuk meg a zárt rendszer  $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{F}$  miatt kieső, stabilis,  $m(\nu - 1)$  darab  $p_i$  pólusát, és határozzuk meg a  $q(s) = \det[\mathbf{Q}(s)]$  polinomot, melynek ugyanezek a gyökei:

$$q(s) = q_1 + q_2s + \dots + q_{m(\nu-1)}s^{m(\nu-1)-1} + s^{m(\nu-1)}. \quad (E.16)$$

A továbbiakban feltesszük, hogy minden  $p_i$  különböző.

b) A kompenzáló tag  $\mathbf{Q}(s)$  polinommátrixa:

$$\mathbf{Q}(s) := \begin{bmatrix} s^{\nu-1} & 0 & \dots & 0 & q_{1m}(s) \\ -1 & s^{\nu-1} & & 0 & q_{2m}(s) \\ 0 & -1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & s^{\nu-1} & \\ 0 & 0 & \dots & -1 & s^{\nu-1} + q_{mm}(s) \end{bmatrix},$$

(E.17a)

ahol

$$q_{im}(s) = \sum_{k=0}^{\nu-2} q_{(i-1)(\nu-1)+k} s^k. \quad (E.17b)$$

5. Megválasztandó az  $\mathbf{F}(s)$  állapot-visszacsatolás, és meghatározandó az állapotmegfigyelőhöz

$$[\hat{\mathbf{H}}(s) \quad \hat{\mathbf{K}}(s)] = \mathbf{Q}(s)\mathbf{F}(s)\hat{\mathbf{M}}_{e\nu}^{-1}. \quad (E.18)$$

Ezek után  $[\mathbf{H}(s) \quad \mathbf{K}(s)]$  úgy kapható, hogy beszúrunk  $n - \nu p$  nulla oszlopot azokon a helyeken, amelyek az  $\mathbf{M}_{e\nu}$ -ből elhagyott sorokkal találkoznának.

6. Ha stabilis szabályozó elérése a cél, akkor ellenőrizendő, hogy  $\det[\mathbf{Q}(s) - \mathbf{K}(s)] = 0$  gyökei stabilisak-e. Ellenkező esetben más kieső  $\{p_i\}$  pólusok választandók. Ez a feltétel abból következik, hogy

$$\mathbf{u}(s) = [\mathbf{Q}(s) - \mathbf{K}(s)]^{-1} \{ \mathbf{H}(s)\mathbf{y}(s) + \mathbf{Q}(s)\mathbf{G}\mathbf{v}(s) \}. \quad (E.19)$$

### E.3. A SZÉTCSATOLÁS MEGTERVEZÉSE FREKVENCIATARTOMÁNYBAN

Feltesszük, hogy a kimenetek száma ( $p$ ) nem nagyobb a bemenetek számánál ( $m$ ), azaz fennáll  $p \leq m$ . A  $(p \times m)$  méretű  $\mathbf{W}(s)$  átviteli függvényű rendszert **szétcsatoltnak** nevezzük, ha léteznek  $j_1, j_2, \dots, j_p$  (mind különböző) egész számok, hogy  $\mathbf{W}(s) = [w_{ij}(s)]$  jelölés mellett

$$w_{ij}(s) = \begin{cases} \text{nem nulla,} & \text{ha } j = j_i, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases} \quad (E.20)$$

Ilyenkor az  $i$ -edik kimenetet pontosan a  $j_i$ -edik bemenet befolyásolja.

Legyen  $\mathbf{W}(s) = \mathbf{R}(s)\mathbf{P}^{-1}(s)$  minimális mátrix faktorizációja a szakasznak és  $\mathbf{W}(s)$  maximális ( $p$ ) rangú. Legyenek a lineárisan független oszlopok  $j_1, j_2, \dots, j_p$ . Képezzük a következő konstans mátrixot:

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{0}^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_2^T \\ \vdots \end{bmatrix}_{m \times p} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ j_1 \\ \downarrow \\ j_2 \end{array} \quad (E.21)$$

Akkor  $(\mathbf{W}(s)\tilde{\mathbf{G}})_{p \times p}$  invertálható. **Soros  $\mathbf{W}_c(s)$  kompenzátor**, amely szétcsatolja a rendszert, könnyen tervezhető:

$$[\mathbf{W}(s)\tilde{\mathbf{G}}]_{p \times p} = \tilde{\mathbf{R}}(s)\tilde{\mathbf{P}}^{-1}(s) \text{ minimális faktorizáció,} \quad (E.22a)$$

$$\mathbf{W}(s)\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{W}_c(s) = \mathbf{R}_d(s)\mathbf{P}_d(s) \text{ előírt szétcsatolt alak,} \quad (E.22b)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}(s) = \tilde{\mathbf{R}}_{diag}(s)\hat{\mathbf{R}}(s), \text{ ahol } \tilde{\mathbf{R}}_{diag}(s) \text{ diagonális mátrix,} \quad (E.22c)$$

mely  $\hat{\mathbf{R}}(s)$  megfelelő sorának legnagyobb közös tényezőit tartalmazza és 1 vezető együtthatójú,

$$\mathbf{W}_c(s) = \tilde{\mathbf{P}}(s)\hat{\mathbf{R}}^{-1}(s)\tilde{\mathbf{R}}_{diag}^{-1}(s)\mathbf{R}_d(s)\mathbf{P}_d^{-1}(s), \quad (E.22d)$$

$$\mathbf{R}_d(s) := \tilde{\mathbf{R}}_{diag}(s) \text{ speciális választás,} \quad (E.22e)$$

$$\mathbf{W}(s)\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{W}_c(s) = \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{R}}^{-1}\tilde{\mathbf{R}}_{diag}^{-1}\mathbf{R}_d\mathbf{P}_d^{-1}. \quad (E.22f)$$

$$\mathbf{W}_c(s)$$

Vegyük észre, hogy az eredő csak akkor lesz precízen  $\mathbf{R}_d\mathbf{P}_d^{-1}$  és szétcsatolt, ha a  $\mathbf{W}_c$  kompenzátor tervezésekor a szakasz paramétereit pontosan ismertük. Pontatlanságok miatt

$$\frac{\text{GCD}\{\det\mathbf{P}, \det\tilde{\mathbf{P}}\}}{\text{GCD}\{\det\mathbf{P}, \det\tilde{\mathbf{P}}\}} \cdot \frac{\det\hat{\mathbf{R}}}{\det\tilde{\mathbf{R}}} \quad (E.23)$$

egzakt kiejtésre nem számíthatunk, ezért már stabilis szakasz esetén is  $\det[\hat{\mathbf{R}}(s)] = 0$  jobbfélsíkon lévő gyökei instabilitást okozhatnak.

Vizsgáljuk most az **állapot-visszacsatolással** történő szétcsatolást. A Gilbert-mátrix megfelelője egy olyan

$$\mathbf{B}^*[\mathbf{W}(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{D}(s)\mathbf{W}(s) \quad (E.24)$$

végés, nem nulla sorú,  $(p \times m)$ -méretű mátrix, ahol

$$\mathbf{D}(s) = \text{diag}(s^{f_1}, s^{f_2}, \dots, s^{f_p}).$$

Az állapot-visszacsatolással történő szétcsatolás akkor és csakis akkor lehetséges, ha  $\mathbf{B}^*[\mathbf{T}(s)]$  maximális  $(p)$  rangú. Ilyenkor van  $\tilde{\mathbf{G}}_{m \times p}$  konstans mátrix, hogy

$$(\mathbf{B}^*[\mathbf{W}(s)]\tilde{\mathbf{G}})_{p \times p} \text{ invertálható.} \quad (E.25)$$

Legyen

$$\mathbf{W}(s)\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{R}}(s)\tilde{\mathbf{P}}^{-1}(s) = \tilde{\mathbf{R}}_{diag}(s)\hat{\mathbf{R}}(s)\mathbf{P}^{-1}(s) \quad (E.26)$$

és válasszunk tetszőleges

$$\tilde{\mathbf{P}}_d(s) = \text{diag}(P_{d_1}(s), \dots, P_{d_p}(s)) \quad (E.27a)$$

mátrixot, amelynek elemeire teljesül, hogy

$$\partial P_{d_i}(s) = f_i + \partial c_i[\tilde{\mathbf{R}}_{diag}(s)]. \quad (E.27b)$$

Jelölje a  $\tilde{\mathbf{P}}_d(s)$  legmagasabb kitevőjű hatványaiból álló mátrixot  $[\tilde{\mathbf{P}}_d]_h$  akkor  $\mathbf{D}(s)$  helyett választható

$$[\tilde{\mathbf{P}}_d]_h^{-1}\tilde{\mathbf{P}}_d(s)\tilde{\mathbf{R}}_{diag}^{-1}(s) \quad (E.28)$$

is, ahonnan következik, hogy

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{D}(s)\mathbf{W}(s)\tilde{\mathbf{G}} = \lim_{s \rightarrow \infty} [\tilde{\mathbf{P}}_d]_h^{-1}\tilde{\mathbf{P}}_d\tilde{\mathbf{R}}_{diag}^{-1}\tilde{\mathbf{R}}_{diag}\hat{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{P}}^{-1} \stackrel{jel}{=} \tilde{\mathbf{B}}^* \quad (E.29)$$

véges, nonsinguláris mátrix. Ezért  $\tilde{\mathbf{P}}_d \hat{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{P}}^{-1}$  proper. Mivel  $\tilde{\mathbf{P}}$  oszlop-proper, ezért  $\tilde{\mathbf{P}}_d \hat{\mathbf{R}}$  is oszlop-proper, továbbá

$$\partial c_i[\tilde{\mathbf{P}}_d \hat{\mathbf{R}}] = \partial c_i[\tilde{\mathbf{P}}]. \quad (E.30)$$

Az a cél, hogy teljesüljön

$$(\tilde{\mathbf{P}}_d \hat{\mathbf{R}})^{-1} = (\tilde{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{F}})^{-1} \mathbf{G} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{P}}_d \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{G}^{-1}(\tilde{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{F}}), \quad (E.31)$$

mert akkor

$$\tilde{\mathbf{P}}_{diag} \hat{\mathbf{R}} (\tilde{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{F}})^{-1} \mathbf{G} = \tilde{\mathbf{P}}_{diag} \hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_d^{-1} = \tilde{\mathbf{R}}_{diag} \tilde{\mathbf{P}}_d^{-1} \quad (E.32)$$

szétcsatolt, és pólusai a  $\tilde{\mathbf{P}}_d(s)$  által lettek megválasztva. Ehhez meg kell határozni a  $\mathbf{G}$  konstans mátrixot és az  $\tilde{\mathbf{F}}(s)$  állapot-visszacsatolást:

$$\begin{aligned} \Gamma_c[\tilde{\mathbf{P}}_d \hat{\mathbf{R}}] &= [\tilde{\mathbf{P}}_d]_h \tilde{\mathbf{B}}^* \Gamma_c[\tilde{\mathbf{P}}] = \mathbf{G}^{-1} \Gamma_c[\tilde{\mathbf{P}}] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{G} = \tilde{\mathbf{B}}^{*-1} [\tilde{\mathbf{P}}_d]_h^{-1}, \end{aligned} \quad (E.33)$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{G} \tilde{\mathbf{P}}_d \hat{\mathbf{R}} \Rightarrow \tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{B}}^{*-1} [\tilde{\mathbf{P}}_d]_h^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_d \hat{\mathbf{R}}. \quad (E.34)$$

Mivel a szakasz paraméterei ritkán ismertek pontosan, ezért a szabályozó tervezésekor figyelembe vett névleges  $\hat{\mathbf{R}}(s)$  és a szakaszban szereplő valódi  $\hat{\mathbf{R}}(s)$  nem ejtik ki egzaktul egymást  $\hat{\mathbf{R}}(s) \hat{\mathbf{R}}^{-1}(s)$  helyén. Ezért  $\det[\hat{\mathbf{R}}(s)] = 0$  jobbfélsíkon lévő esetleges gyökei **instabilis**, ún. nem megfigyelhető szétcsatolási zérusokat (non observable decoupling zeros) eredményezhetnek. Az algoritmus tehát nem alkalmazható, ha

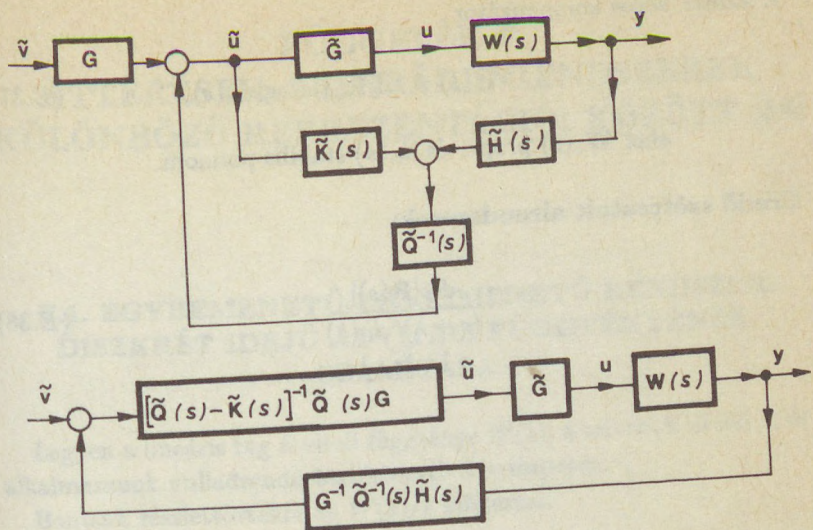
- i)  $\mathbf{B}^*$  nem maximális ( $p$ ) rangú,
- ii)  $\hat{\mathbf{R}}(s)$  rendelkezik instabilis, nem megfigyelhető szétcsatolási zérusokkal.

Minden más esetben a szabályozást az E.3. ábra alapján realizálhatjuk.

Vegyük észre, hogy  $\tilde{\mathbf{Q}}(s)$  megválasztásától függően stabilis zárt rendszer esetén is instabilis szabályozóhoz juthatunk, ha

$$\det[\tilde{\mathbf{Q}}(s) - \tilde{\mathbf{K}}(s)] = 0$$

rendelkezik jobbfélsíkon lévő gyökkel.



E.3. ábra

A szétcsatolás realizálása (elvi és gyakorlati alak)

Ha  $\mathbf{B}^*$  nem maximális rangú, akkor választható olyan soros  $\mathbf{W}_c(s)$  prekompenzátor, hogy  $\mathbf{B}^*[\mathbf{W}(s) \mathbf{W}_c(s)]$  már maximális rangú, és a sorosan kompenzált rendszer is irányítható és megfigyelhető (Moness-Lantos, [13]). Ha  $\hat{\mathbf{R}}(s)$  rendelkezik instabilis nem megfigyelhető szétcsatolási zérussal, akkor alkalmazható Wolovich [12] háromszintű szabályozót eredményező módszere vagy Moness [14] triangularizáció és prekompenzátoron alapuló módszere.

**Wolovich módszere** (az egyszerűség kedvéért) az invertálható  $p = m$  esetben a következő:

1. szint: soros kompenzátor

$$\mathbf{W}(s)\mathbf{W}_c(s) = \mathbf{R}(s)\mathbf{P}^{-1}(s)\mathbf{P}_{c1}^{-1}(s) \stackrel{\text{jel}}{=} \mathbf{R}(s)\mathbf{P}_1^{-1}(s), \quad (E.35a)$$

$$\mathbf{P}_1(s) \text{ oszlop - proper, } \forall \partial c_i[\mathbf{P}_1(s)] = \nu \text{ (egyforma)}. \quad (E.35b)$$

2. szint:  $l.s.v.f \Rightarrow \mathbf{R}(s) \frac{1}{(s + \lambda)^\mu}$  eredő. (E.36)

### 3. szint: soros kompenzátor

$$\mathbf{W}_c(s) = \text{adj}\mathbf{R}(s)\text{diag}(d_{ii}(s))^{-1}, \quad (E.37)$$

ahol  $\mathbf{W}_c(s)$  proper és  $d_{ii}(s)$  stabilis polinom.

**Eredő szétcsatolt alrendszerek:**

$$\frac{\det[\mathbf{R}(s)]}{(s + \lambda)^\mu d_{ii}(s)}. \quad (E.38)$$

## FÜGGELÉK F.

### ÁTTÉRÉSEK A LINEÁRIS RENDSZEREK KÜLÖNBÖZŐ REPRESENTÁCIÓI KÖZÖTT [38]

#### F.1. EGYBEMENETŰ-EGYKIMENETŰ RENDSZER DISZKRÉT IDEJŰ ÁTVITELI FÜGGVÉNYÉNEK SZÁMÍTÁSA

Legyen a lineáris tag átviteli függvénye  $W(s)$ , a mintavételi idő  $\tau$ , és alkalmazzunk nulladrendű tartószervet a bemeneten.

Bontsuk részlettörtekre az  $W(s)/s$  kifejezést:

$$\frac{W(s)}{s} \stackrel{jel}{=} \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{\prod_i (s - s_i)^{\nu_i}}, \quad (F.1)$$

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \sum_i \left\{ \frac{b_{i,-\nu_i}}{(s - s_i)^{\nu_i}} + \frac{b_{i,-\nu_i+1}}{(s - s_i)^{\nu_i-1}} + \dots + \frac{b_{i,-1}}{s - s_i} \right\}, \quad (F.2)$$

$$A_i(s) = \prod_{j \neq i} (s - s_j)^{\nu_j}, \quad (F.3)$$

$$\varphi(s) \stackrel{jel}{=} \frac{B(s)}{A_i(s)}, \quad (F.4)$$

$$b_{i,-\nu_i+k} = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k \varphi(s)}{ds^k} \right|_{s_i}, \quad k = 0, 1, \dots, \nu_i - 1, \quad (F.5)$$

$$\varphi^{(k)}(s_i) = \{B^{(k)}(s_i) - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \varphi^{(j)}(s_i) A_i^{(k-j)}(s_i)\} \frac{1}{A_i(s_i)}. \quad (F.6)$$

Mivel  $B(s)$  és  $A_i(s)$  polinomok, ezért deriváltjaik egyszerűen számíthatók, és ezek ismeretében  $\varphi^{(k)}$  és  $b_{i,-\nu_i+k}$  rekurzíven számítható. Az

$1/(s - s_i)^k$  tag  $\mathcal{Z}$ -transzformáltja

$$(1 - z^{-1}) \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial s_i^{k-1}} \frac{z}{z - e^{s_i \tau}} = \frac{z-1}{z} \frac{P_k(z)}{(z - e^{s_i \tau})^{k+1}}, \quad (F.7)$$

ahol

$$\hat{P}_k(z) = \alpha_{k,k} z^k + \alpha_{k,k-1} z^{k-1} + \dots + \alpha_{k,1} z, \quad (F.8a)$$

$$\alpha_{k+1,k+1} = \alpha_{k,k}, \quad (F.8b)$$

$$\alpha_{k+1,j} = (k+2-j)\alpha_{k,j-1} + j\alpha_{k,j}, \quad j = k-1, \dots, 2, \quad (F.8c)$$

$$\alpha_{k+1,1} = \alpha_{k,1}, \quad (F.8d)$$

$$\alpha_{0,1} = 1, \quad (F.8e)$$

és  $\hat{P}_k(z)$ -ből szisztematikus áttéréssel képezhető  $P_k(z)$ , például

$$\hat{P}_0(z) = z, \quad P_0(z) = z, \quad (F.9a)$$

$$\hat{P}_1(z) = z, \quad P_1(z) = \tau e^{s_i \tau} z, \quad (F.9b)$$

$$\hat{P}_2(z) = z^2 + z, \quad P_2(z) = \tau^2 \{e^{s_i \tau} z^2 + e^{2s_i \tau} z\}, \quad (F.9c)$$

$$\hat{P}_3(z) = z^3 + 4z^2 + z, \quad P_3(z) = \tau^3 \{e^{s_i \tau} z^3 + 4e^{2s_i \tau} z^2 + e^{3s_i \tau} z\}. \quad (F.9d)$$

Az azonos  $s_i$  pólusokhoz tartozó tagok közös nevezőre hozhatók:

$$B_i(s_i, z) = b_{i,-\nu_i} P_{\nu_i-1}(s_i, z) + b_{i,-\nu_i+1} P_{\nu_i-2}(s_i, z)(z - e^{s_i \tau}) + \dots + b_{i,-1} P_0(s_i, z)(z - e^{s_i \tau})^{\nu_i-1}, \quad (F.10)$$

$$\sum_i \frac{B_i(s_i, z)}{(z - e^{s_i \tau})^{\nu_i}} = \frac{\sum_i B_i(s_i, z) \prod_{j \neq i} (z - e^{s_j \tau})^{\nu_j}}{\prod_i (z - e^{s_i \tau})^{\nu_i}} \stackrel{j \in i}{=} \frac{Q(z)}{R(z)}. \quad (F.11)$$

Ily módon a  $\mathcal{Z}$ -átviteli függvény a következő algoritmussal számítható:

$$W(s) \rightarrow \frac{W(s)}{s} = \frac{B(s)}{A(s)} \rightarrow \frac{Q(z)}{R(z)} \xrightarrow{*(1-z^{-1})} \frac{(z-1) \frac{Q(z)}{z}}{R(z)}. \quad (F.12)$$

Az algoritmus egyszerűen programozható.

## F.2. ÁTTÉRÉS ÁTVITELI FÜGGVÉNYRŐL ÁLLAPOTEGYENLETRE

Legyen  $\mathbf{W}(s) = (W_{ij}(s))_{m \times r}$  a többváltozós rendszer átviteli függvénye, ahol

$$W_{ij}(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}. \quad (F.13)$$

1.  $W_{ij}(s)$  megfigyelhető alakjának képzése:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad \mathbf{b}_{ij} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad (F.14)$$

$$\mathbf{c}_{ij} = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]_{1 \times n}.$$

2. A  $j$ -edik bemenet (oszlop) megfigyelhető alakjának képzése:

$$\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1j} & & & 0 \\ & \mathbf{A}_{2j} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{A}_{mj} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix}, \quad (F.15)$$

$$\mathbf{C}_j = \begin{bmatrix} c_{1j} & & & 0 \\ & c_{2j} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_{mj} \end{bmatrix}.$$

### 3. A $j$ -edik oszlop minimális realizációjának képzése:

$$\Sigma_j = (\mathbf{A}_j, \mathbf{b}_j, \mathbf{C}_j) \xrightarrow{\text{Luenberger ir.norm.alak}} \tilde{\Sigma}_j = (\tilde{\mathbf{A}}_j, \tilde{\mathbf{b}}_j, \tilde{\mathbf{C}}_j).$$

megfigyelhető  
alrendszer

irányítható (F.16)  
alrendszer

### 4. Az irányítható realizáció képzése:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_1 & & & 0 \\ & \tilde{\mathbf{A}}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tilde{\mathbf{A}}_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1 \\ & \tilde{\mathbf{b}}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{\mathbf{b}}_r \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [\tilde{\mathbf{C}}_1 \quad \tilde{\mathbf{C}}_2 \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{C}}_r],$$

(F.17)

### 5. A minimális realizáció képzése:

$$\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) \xrightarrow{\text{Luenberger megf.norm.alak}} \tilde{\Sigma} = (\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}).$$

irányítható  
alrendszer

megfigyelhető (F.18)  
alrendszer

## F.3. ÁTTÉRÉS ÁLLAPOTEGYENLETRŐL ÁTVITELI FÜGGVÉNYRE

Az állapotegyenlet mátrixaival kifejezhető az átviteli függvény:

$\mathbf{W}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ . A Leverrier-Faddajeva-képlet szerint

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n - q_1 s^{n-1} - \dots - q_{n-1} s - q_n, \quad (\text{F.19})$$

$$\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^{n-1}\mathbf{I} + s^{n-2}\mathbf{R}_1 + \dots + s\mathbf{R}_{n-2} + \mathbf{R}_{n-1}, \quad (\text{F.20})$$

$$\mathbf{R}_0 := \mathbf{I},$$

$$\mathbf{R}_i := \mathbf{A}\mathbf{R}_{i-1},$$

$$q_i := \frac{1}{i} \text{Spur } \mathbf{R}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (\mathbf{R}_n = \mathbf{0}), \quad (F.21)$$

$$\mathbf{R}_i := \mathbf{R}_i - q_i \mathbf{I}.$$

Ezért

$$\mathbf{W}(s) = \frac{s^{n-1} \mathbf{C}\mathbf{B} + s^{n-2} \mathbf{C}\mathbf{R}_1 \mathbf{B} + \dots + \mathbf{C}\mathbf{R}_{n-1} \mathbf{B}}{s^n - q_1 s^{n-1} - \dots - q_{n-1} s - q_n}$$

alapján számítható. A számítást elvégezhetjük alrendszerként is:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij} = (\mathbf{A}, \mathbf{b}_j, \mathbf{c}_i) &\longrightarrow \tilde{\Sigma}_{ij} \text{ minimális realizáció} \\ &(\text{irányítható és megfigyelhető}) \\ &\downarrow \\ &W_{ij}(s) \text{ redukált átviteli függvény} \end{aligned} \quad (F.22)$$

#### F.4. ÁTTÉRÉS FOLYTONOS ÉS DISZKRÉT IDEJŰ RENDSZEREK KÖZÖTT ÁLLAPOTTÉR BEN

Legyen a  $\tau$  időközönként mintavételezett rendszer állapotegyenlete lépcsős bemenet (nulladrendű tartószerv) esetén

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k, \quad (F.23a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k, \quad (F.23b)$$

és legyen a folytonos idejű rendszer (amelyet mintavételeztek)  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ , akkor

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}\tau}, \quad (F.24a)$$

$$\mathbf{B} = e^{\mathbf{A}\tau} \left( \int_0^\tau e^{-\mathbf{A}\tau} d\vartheta \right) \mathbf{B} = (e^{\mathbf{A}\tau} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}, \quad (F.24b)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}. \quad (F.24c)$$

Ha ellenben a diszkrét idejű  $\mathcal{S} = (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$  rendszer adott, akkor a folytonos idejű megfelelő:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\tau} \ln \mathcal{A}, \quad (F.25a)$$

$$\mathbf{B} = \left( \int_0^{\tau} e^{-\frac{x}{\tau} \ln \mathcal{A}} d\vartheta \right)^{-1} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B} = \frac{1}{\tau} \ln \mathcal{A} (\mathcal{A} - \mathbf{I})^{-1} \mathcal{B}, \quad (F.25b)$$

$$\mathbf{C} = \mathcal{C}. \quad (F.25c)$$

A mátrixfüggvényeket a sajátértékek ismeretében a Hermit-módszerrel, azok ismerete nélkül pedig a következőképpen számíthatjuk:

$$1) \text{ sorfejtéssel: } e^{\mathbf{A}\tau} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i \tau^i}{i!}, \quad (F.26)$$

$$2) f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0 \Rightarrow x_{n+1} = x_n - f'(x_n)^{-1} f(x_n) \quad (F.27)$$

mintájára :

$$\ln a = x \Rightarrow e^x - a = f(x) = 0, \quad (F.28)$$

$$x_{n+1} = x_n - e^{-x_n} (e^{x_n} - a) = x_n - 1 + e^{-x_n} a, \quad (F.29)$$

$$\ln \mathcal{A} = \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n - \mathbf{I} + e^{-\mathbf{X}_n} \mathcal{A}. \quad (F.30)$$

# FÜGGELÉK G.

## OPTIMÁLIS IRÁNYÍTÁS KVADRATIKUS KRITÉRIUM SZERINT [39]

### G.1. FOLYTONOS IDEJŰ FELADAT

Tekintsük az általánosabb feladatot rögzített  $[t_0, t_f]$  időintervallum esetén:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (G.1a)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (G.1b)$$

$$F_0 = \phi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \rightarrow \min. \quad (G.1c)$$

Legyen  $\lambda(t)$  a (vektor) Lagrange-multiplikátor, és alkalmazzuk a Lagrange-multiplikátor és az  $\int uv' dt = uv - \int u'v dt$  szabályt, akkor

$$F = \phi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \{L + \langle \lambda, \mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}} \rangle\} dt \rightarrow \min, \quad (G.2)$$

$$\begin{aligned} F &= \phi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \{L + \langle \lambda, \mathbf{f} \rangle + \langle \dot{\lambda}, \mathbf{x} \rangle\} dt - \langle \lambda, \mathbf{x} \rangle \Big|_{t_0}^{t_f} = \\ &= \phi(\mathbf{x}(t_f)) - \langle \lambda, \mathbf{x}(t_f) \rangle + \langle \lambda, \mathbf{x}(t_0) \rangle + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} \{H + \langle \dot{\lambda}, \mathbf{x} \rangle\} dt, \end{aligned} \quad (G.3)$$

ahol

$$H = L + \langle \lambda, \mathbf{f} \rangle \quad (G.4)$$

a Hamilton-függvény. Az optimális megoldás helyén  $F$  (kezdeti feltételt kielégítő) minden variációja nulla:

$$\begin{aligned} \delta F = & \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} - \lambda, \delta \mathbf{x} \right\rangle \Big|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\lambda}, \delta \mathbf{x} \right\rangle dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}, \delta \mathbf{u} \right\rangle dt = 0, \end{aligned} \quad (G.5)$$

ahonnan következik, hogy

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{t_f} = \lambda(t_f), \quad (G.6a)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\dot{\lambda}, \quad (G.6b)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0. \quad (G.6c)$$

Speciálisan, ha a rendszer lineáris, és az optimalizálási kritérium kvadratikus ( $\mathbf{Q}$  pozitív szemidefinit,  $\mathbf{R}$  pozitív definit,  $t_0 = 0$ ), akkor

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (G.7a)$$

$$F_0 = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{ \langle \mathbf{Q}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{R}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \} dt, \quad (G.7b)$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \{ \langle \mathbf{Q}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{R}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \} + \langle \lambda, \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{Q}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{R}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{A}^T \lambda, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{B}^T \lambda, \mathbf{u} \rangle, \end{aligned} \quad (G.8)$$

ezért az optimum feltételei a következők:

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}, \quad (G.9a)$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{A}^T \lambda = -\dot{\lambda}, \quad (G.9b)$$

$$\mathbf{R}\mathbf{u} + \mathbf{B}^T \lambda = 0. \quad (G.9c)$$

Az utolsó egyenletből kifejezhető az optimális  $\mathbf{u}(t)$ , melyet behelyettesíthetünk az állapotegyenletbe:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \lambda, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (G.10a)$$

$$\dot{\lambda} = -\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \lambda, \quad \lambda(t_f) = 0. \quad (G.10b)$$

Egy kevert határfeltételű differenciálegyenlethez jutottunk, melynek mátrixalakja:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad (G.11a)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \lambda(t_f) = 0. \quad (G.11b)$$

Keressük a  $\lambda(t)$  megoldást  $\lambda(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$  alakban, akkor a Riccati-féle mátrix-differenciálegyenlethez jutunk:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \dot{\mathbf{P}}\mathbf{x} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{P}}\mathbf{x} + \mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}) = \\ &= -\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{x} \Rightarrow \end{aligned} \quad (G.12)$$

$$\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0, \quad (G.13a)$$

$$\mathbf{P}(t_f) = 0. \quad (G.13b)$$

Ha  $t_f = \infty$ , akkor  $\mathbf{P}$  konstans, az optimális irányítás konstans állapotvisszacsatolás, és  $\mathbf{P}$  az algebrai Riccati-egyenlet megoldása:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}, \quad (G.14a)$$

$$\mathbf{K} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}, \quad (G.14b)$$

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0. \quad (G.14c)$$

A Riccati-egyenletet megoldhatjuk úgy is, hogy visszafelé haladva meghatározzuk a (G.11a) egyenlet állandósult megoldását.

Legyen ugyanis

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix}, \quad (\text{G.15})$$

$$e^{-\mathbf{A}\Delta T} \stackrel{\text{je}t}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix}, \quad (\text{G.16})$$

akkor

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{11}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{F}_{12}\boldsymbol{\lambda}_{k+1} \Rightarrow \mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{F}_{11} + \mathbf{F}_{12}\mathbf{P}_{k+1})^{-1}\mathbf{x}_k, \quad (\text{G.17a})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{F}_{21}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{F}_{22}\boldsymbol{\lambda}_{k+1} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda}_k = (\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{22}\mathbf{P}_{k+1})\mathbf{x}_{k+1}, \quad (\text{G.17b})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_k = (\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{22}\mathbf{P}_{k+1})(\mathbf{F}_{11} + \mathbf{F}_{12}\mathbf{P}_{k+1})^{-1}\mathbf{x}_k, \quad (\text{G.17c})$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{22}\mathbf{P}_{k+1})(\mathbf{F}_{11} + \mathbf{F}_{12}\mathbf{P}_{k+1})^{-1}. \quad (\text{G.18})$$

Célszerű minden lépés után a  $\mathbf{P}_k$  mátrixot szimmetrizálni a számítási pontatlanságok miatt. A konvergenciára a mátrixnyom relatív változásának

$$\left| \frac{\text{Spur}(\mathbf{P}_k) - \text{Spur}(\mathbf{P}_{k+1})}{\text{Spur}(\mathbf{P}_{k+1})} \right| \quad (\text{G.19})$$

értékéből lehet következtetni.

Az optimális irányítás mellett az  $F_0$  optimalizálási kritérium értéke véges, ha  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  irányítható. Legyen  $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$  (például  $\mathbf{C} = \sqrt{\mathbf{Q}}$ ). Az optimális irányítás mellett a zárt rendszer stabilis, ha  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  megfigyelhető.

## G.2. DISZKRÉT IDEJŰ FELADAT

A folytonos idejű (G.1a-c) feladat megfelelője diszkrét időben  $\tau$  mintavételi idő esetén a  $[0, N\tau]$  időintervallumon:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad (\text{G.20a})$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (G.20b)$$

$$F_0 = \phi(\mathbf{x}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \rightarrow \min. \quad (G.20c)$$

Legyen  $\lambda_{k+1}$  a Lagrange-multiplikátor, akkor a Lagrange-multiplikátor szabály szerint a feladat

$$F = \phi(\mathbf{x}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \langle \lambda_{k+1}, \mathbf{f}_k - \mathbf{x}_{k+1} \rangle \rightarrow \min. \quad (G.21)$$

Mivel

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \langle \lambda_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1} \rangle &= \sum_{j=1}^N \langle \lambda_j, \mathbf{x}_j \rangle = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \langle \lambda_j, \mathbf{x}_j \rangle - \langle \lambda_0, \mathbf{x}_0 \rangle + \langle \lambda_N, \mathbf{x}_N \rangle, \end{aligned} \quad (G.22)$$

ezért a feladat a

$$H_k = L_k + \langle \lambda_{k+1}, \mathbf{f}_k \rangle \quad (G.23)$$

jelöléssel az alábbi alakra hozható:

$$\begin{aligned} F = \phi(\mathbf{x}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} \{ H_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \lambda_{k+1}, \lambda_k) - \langle \lambda_k, \mathbf{x}_k \rangle \} + \\ + \langle \lambda_0, \mathbf{x}_0 \rangle - \langle \lambda_N, \mathbf{x}_N \rangle \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (G.24)$$

Az optimum helyén  $F$  (kezdeti feltételt kielégítő) minden variációja nulla, ezért

$$\begin{aligned} \delta F = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_N} - \lambda_N, \delta \mathbf{x}_N \right\rangle + \sum_{k=0}^{N-1} \{ \langle \partial H_k \partial \mathbf{x}_k - \lambda_k, \delta \mathbf{x}_k \rangle + \\ + \langle \frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{u}_k}, \delta \mathbf{u}_k \rangle \} = 0, \end{aligned} \quad (G.25)$$

ahonnan következnek:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_N} = \lambda_N, \quad (G.26a)$$

$$\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{x}_k} = \lambda_k, \quad (G.26b)$$

$$\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{u}_k} = 0. \quad (G.26c)$$

Speciálisan lineáris rendszer és kvadratikus kritérium esetén ( $\mathbf{Q}_k$  pozitív szemidefinit,  $\mathbf{R}_k$  pozitív definit) a feladat:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (G.27a)$$

$$F_0 = \frac{1}{2} \left\{ \langle \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N, \mathbf{x}_N \rangle + \sum_{k=0}^{N-1} (\langle \mathbf{Q}_k \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \rangle + \langle \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle) \right\} \rightarrow \min, \quad (G.27b)$$

az optimum feltétele pedig:

$$\lambda_N = \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N, \quad (G.28a)$$

$$\mathbf{Q}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{A}_k^T \lambda_{k+1} - \lambda_k = 0, \quad (G.28b)$$

$$\mathbf{R}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{B}_k^T \lambda_{k+1} = 0. \quad (G.28c)$$

Innen az optimális irányítás alakja:

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{B}_k^T \lambda_{k+1}, \quad (G.29)$$

amit visszahelyettesítve a következő feltételhez jutunk:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k & -\mathbf{B}_k \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{B}_k^T \\ \mathbf{Q}_k & \mathbf{A}_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix}, \quad (G.30a)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \lambda_N = \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N. \quad (G.30b)$$

Keressük a  $\lambda_k$  megoldást  $\lambda_k = P_k x_k$  alakban. Akkor

$$x_{k+1} = A_k x_k - B_k R_k^{-1} B_k^T P_{k+1} x_{k+1} \Rightarrow \quad (G.31)$$

$$x_{k+1} = (I + B_k R_k^{-1} B_k^T P_{k+1})^{-1} A_k x_k. \quad (G.32)$$

Felhasználván az

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(DA^{-1}B + C^{-1})^{-1}DA^{-1} \quad (G.33)$$

összefüggést,  $A := I$ ,  $B := B_k$ ,  $C := R_k^{-1}$ ,  $D := B_k^T P_{k+1}$  választás mellett kapjuk, hogy

$$(I + B_k R_k^{-1} B_k^T P_{k+1})^{-1} = I - B_k (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k^T P_{k+1}, \quad (G.34)$$

$$x_{k+1} = \{A_k - B_k (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k^T P_{k+1} A_k\} x_k, \quad (G.35)$$

$$\lambda_k = P_k x_k = Q_k x_k + A_k^T P_{k+1} x_{k+1}, \quad (G.36)$$

$$P_k = Q_k + A_k^T P_{k+1} A_k - A_k^T P_{k+1} B_k (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k^T P_{k+1} A_k. \quad (G.37)$$

Az utóbbi a diszkrét idejű Riccati-egyenlet.

Tekintsük az optimális irányítást, akkor  $x_{k+1}$  kifejezhető  $x_k$  segítségével, ezért

$$u_k = -K_k x_k, \quad (G.38)$$

$$\begin{aligned} K_k &= R_k^{-1} B_k^T P_{k+1} \{I - B_k (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k^T P_{k+1}\} A_k = \\ &= \{R_k^{-1} - R_k^{-1} B_k^T P_{k+1} B_k (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k)^{-1}\} B_k^T P_{k+1} A_k. \end{aligned} \quad (G.39)$$

Használjuk a (G.33) mátrixazonosságot  $A := R_k$ ,  $B := B_k^T P_{k+1} B_k$  és  $C := D := I$  választás mellett, akkor  $K_k$  tovább egyszerűsíthető, és segítségével a Riccati-egyenlet is áttekinthetőbb alakra hozható:

$$K_k = (R_k + B_k^T P_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T P_{k+1} A_k, \quad (G.40)$$

$$\begin{aligned} P_k &= (A_k - B_k K_k)^T P_{k+1} A_k + Q_k = \\ &= (A_k - B_k K_k)^T P_{k+1} (A_k - B_k K_k) + Q_k + K_k^T R_k K_k, \end{aligned} \quad (G.41a)$$

$$P_N = Q_N. \quad (G.41b)$$

# FÜGGELÉK H.

## DISZKRÉT IDEJŰ KALMAN-SZŰRŐ

Tekintsük a zajokkal terhelt diszkrét idejű lineáris rendszert:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{x}(0), \quad (H.1a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{z}_k. \quad (H.1b)$$

Itt  $\mathbf{u}_k$  determinisztikus jel. A  $\mathbf{v}_k$  és  $\mathbf{z}_k$  zajokra és az  $\mathbf{x}(0)$  kezdeti állapotról a következő sztochasztikus hipotézis legyen érvényes:

$$\mathbf{x}(0) \text{ független } \mathbf{v}_k\text{-től és } \mathbf{z}_k\text{-től}, \quad (H.2a)$$

$$E\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad E[(\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0)(\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0)^T] = \mathbf{\Sigma}_0 \quad (H.2b)$$

$$E\mathbf{v}_k = \mathbf{0}, \quad E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] = \mathbf{Q}_k, \quad (H.2c)$$

$$E\mathbf{z}_k = \mathbf{0}, \quad E[\mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T] = \mathbf{R}_k, \quad (H.2d)$$

$$E[\mathbf{v}_k \mathbf{z}_k^T] = \mathbf{S}_k, \quad (H.2e)$$

ahol  $\mathbf{\Sigma}_0$  és  $\mathbf{Q}_k$  pozitív szemidefinit,  $\mathbf{R}_k$  pozitív definit. Keressük azt a lineáris szűrőt, amely az  $\mathbf{u}_k$  és  $\mathbf{y}_k$  mérési eredményekből az

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{y}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{u}_k \quad (H.3a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(0) \quad (H.3b)$$

algorithmus alapján az  $\mathbf{x}_k$  állapot optimális  $\hat{\mathbf{x}}_k$  becslését adja abban az értelemben, hogy

$$E(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) = \mathbf{0} \text{ minden } k \text{ esetén}, \quad (H.4)$$

$$E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T] \rightarrow \text{infimum}. \quad (H.5)$$

Az infimum az  $M_{n \times n}$  mátrixok (kvadratikus alak révén definiált) részben rendezése szerint értendő [31], az  $\hat{\mathbf{x}}(0)$ ,  $\mathbf{F}_k$ ,  $\mathbf{G}_k$  függvényében. Az optimális megoldás a kovarianciamátrix összes sajátértékét egyszerre

teszi minimálissá. A továbbiakban az egyszerűsítések érdekében csak a jeleknél írjuk ki a  $k$  indexet.

A feltételek alapján teljesülnie kell, hogy

$$E\hat{\mathbf{x}}(0) \stackrel{jei}{=} \hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0 \Rightarrow E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T] = \Sigma_0. \quad (H.6)$$

Képezzük a futó hibát  $k+1$  esetén:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{x}_k - \mathbf{G}\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\mathbf{u}_k = \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{x}_k - \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_k + (\mathbf{B} - \mathbf{H})\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{G}\mathbf{z}_k. \end{aligned} \quad (H.7)$$

A hiba várható értékére vonatkozó feltétel szerint

$$E(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C} = \mathbf{F} \text{ és } \mathbf{B} = \mathbf{H}, \quad (H.8)$$

ezért

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \stackrel{jei}{=} \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{G}\mathbf{z}_k. \quad (H.9)$$

Képezzük a hiba kovarianciamátrixát a feltételek szerint

$$\begin{aligned} \Sigma_{k+1} \stackrel{jei}{=} E[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^T] &= (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\Sigma_k(\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})^T + \mathbf{Q} + \mathbf{G}\mathbf{R}\mathbf{G}^T - \\ &\quad - \mathbf{S}\mathbf{G}^T - \mathbf{G}\mathbf{S}^T. \end{aligned} \quad (H.10)$$

Mivel  $\Sigma_{k+1}$  jobb oldalát infimummá kell tenni, ezért a  $\mathbf{G}$  szerinti deriválnak a  $\mathcal{O}(\cdot)$  transzformációt kell adni. Képezzük ezért a  $G$  szerinti differenciált:

$$\begin{aligned} &-d\mathbf{G}\mathbf{C}\Sigma_k(\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})^T - (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\Sigma_k\mathbf{C}^T d\mathbf{G}^T - \\ &-d\mathbf{G}\mathbf{S}^T - \mathbf{S}d\mathbf{G}^T + d\mathbf{G}\mathbf{R}\mathbf{G}^T + \mathbf{G}\mathbf{R}d\mathbf{G}^T = \mathcal{O}(d\mathbf{G}). \end{aligned} \quad (H.11)$$

Vezessük be az  $U(\cdot)$  és  $T(\cdot)$  transzformációkat:

$$U(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{X}^T, \quad (H.12)$$

$$T(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T. \quad (H.13)$$

A differenciált átírhatjuk az

$$U\{[-(\mathbf{A} - \mathbf{GC})\boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{C}^T - \mathbf{S} + \mathbf{GR}]T(d\mathbf{G})\} = \mathcal{O}(d\mathbf{G}) \quad (\text{H.14})$$

alakba, ahonnan következik az infimum alábbi feltétele operátor alakban:

$$U\{[-(\mathbf{A} - \mathbf{GC})\boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{C}^T - \mathbf{S} + \mathbf{GR}]T(\cdot)\} = \mathcal{O}(\cdot). \quad (\text{H.15})$$

Tetszőleges rögzített  $\mathbf{X}$  esetén teljesül, hogy

$$U\{\mathbf{X}T(\cdot)\} = \mathcal{O}(\cdot) \iff \quad (\text{H.16})$$

$$U\{\mathbf{X}T(\mathbf{Y})\} = \mathbf{0} \text{ minden } \mathbf{Y} \text{ esetén} \iff \mathbf{X} = \mathbf{0}. \quad (\text{H.17})$$

[Például, ha  $\mathbf{Y}$ -nak csak az  $y_{kl} = 1$  eleme nem nulla, akkor  $T(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}^T$ -nak csak az  $\tilde{y}_{lk} = 1$  eleme nem nulla, és  $\mathbf{X}T(\mathbf{Y})$ -nak csak a  $k$ -adik oszlopa nem nulla, és pedig pontosan megegyezik  $\mathbf{X}$   $l$ -edik oszlopával. Ezért  $U\{\mathbf{X}T(\mathbf{Y})\}$ -nak csak a  $k$ -adik sora és a  $k$ -adik oszlopa nem nulla, és ezek elemei (egy kivételével) megegyeznek  $\mathbf{X}$   $l$ -edik oszlopának elemeivel (egy pedig 2-vel szorozódik)  $\Rightarrow$   $\mathbf{X}$   $l$ -edik oszlopa nulla].

Az infimum feltétele ezért

$$-(\mathbf{A} - \mathbf{GC})\boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{C}^T - \mathbf{S} + \mathbf{GR} = \mathbf{0} \Rightarrow \quad (\text{H.18})$$

$$\mathbf{G} = (\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{C}^T + \mathbf{S})(\mathbf{C}\boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}. \quad (\text{H.19})$$

Mivel (H.15) alapján

$$\begin{aligned} & -\mathbf{GC}\boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{A}^T - \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{C}^T \mathbf{G}^T - \mathbf{S}\mathbf{G}^T - \mathbf{G}\mathbf{S}^T = \\ & U\{-\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{C}^T - \mathbf{S}\}T(\mathbf{G}) = -U\{[\mathbf{GC}\boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{C}^T + \mathbf{GR}]T(\mathbf{G})\} = \\ & = -U\{\mathbf{GC}\boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{C}^T \mathbf{G}^T + \mathbf{GR}\mathbf{G}^T\} = -2\{\mathbf{GC}\boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{C}^T \mathbf{G}^T + \mathbf{GR}\mathbf{G}^T\}, \end{aligned} \quad (\text{H.20})$$

ezért (H.10) alapján írható, hogy

$$\boldsymbol{\Sigma}_{k+1} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{A}^T + \mathbf{Q} - \mathbf{G}(\mathbf{C}\boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{C}^T + \mathbf{R})\mathbf{G}^T. \quad (\text{H.21})$$

Miután meghatároztuk  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  és  $\mathbf{H}$  értékét, az állapotbecslő Kalman-szűrő néven ismert alakjához jutunk:

$$\mathbf{G}_k = (\mathbf{A}_k \boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{C}_k^T + \mathbf{S}_k)(\mathbf{C}_k \boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}, \quad (\text{H.22a})$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{k+1} = \mathbf{A}_k \boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_k - \mathbf{G}_k \{\mathbf{C}_k \boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k\}^{-1} \mathbf{G}_k^T, \quad (\text{H.22b})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{G}_k \{\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k\}, \quad (\text{H.22c})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0. \quad (\text{H.22d})$$

## FÜGGELÉK J.

### AZ INERCIAMÁTRIX TULAJDONSÁGAI

A robot kinetikus energiája  $K$ , a tetszőleges általánosított koordináta ( $\mathbf{x}$ ) és a hozzá tartozó inerciamátrix ( $\mathbf{M}$ ) között a kapcsolat:  $K = 1/2 \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle$ . Az általánosított erőkből a kinetikus energia hatása operátoros alakban:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} \right] (\cdot) &= \frac{d}{dt} \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}, \cdot \rangle - \frac{1}{2} \langle \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{x}} (\cdot) \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle = \\ &= \langle \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}, \cdot \rangle + \langle \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{x}}, \cdot \rangle - \frac{1}{2} \langle \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{x}} (\cdot) \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle = \\ &= \langle \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}, \cdot \rangle + \langle \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{x}} (\dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}}, \cdot \rangle - \frac{1}{2} \langle \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{x}} (\cdot) \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle, \end{aligned} \quad (J.1)$$

ahol az utolsó két tag hatása részletesen:

$$\mathbf{M}^{jet} [\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_n] = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{m}_n^T \end{bmatrix}, \quad (J.2)$$

$$\langle \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{x}}, \cdot \rangle = \langle \sum_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_j} \dot{x}_j \dot{\mathbf{x}}, \cdot \rangle = \langle \sum_j \dot{x}_j \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{m}_1^T}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{m}_n^T}{\partial x_j} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}, \cdot \rangle =$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{m}_1^T}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{m}_1^T}{\partial x_n} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{m}_n^T}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{m}_n^T}{\partial x_n} \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{n \times 1}, \dot{\mathbf{x}} \right\rangle, \quad (J.3)$$

$$\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{x}}(\cdot) \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \sum_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i}(\cdot) \dot{x}_i, \dot{\mathbf{x}} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i (\cdot)_i \left\langle \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_1} \dot{\mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_n} \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix}_{n \times 1}, \dot{\mathbf{x}} \right\rangle. \quad (J.4)$$

Innen következnek, hogy a kinetikus energia hatása az általánosított erőben:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{x}} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_1} \dot{\mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_n} \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \stackrel{je1}{=} \mathbf{M}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}}, \quad (J.5)$$

$$C = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^T \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{m}_1^T}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{m}_1^T}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{m}_1^T}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{m}_1^T}{\partial x_1} \end{array} \right] \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}^T \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{m}_n^T}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{m}_1^T}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{m}_n^T}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{m}_n^T}{\partial x_n} \end{array} \right] \end{bmatrix} \quad (J.6)$$

Mivel a  $C\dot{\mathbf{x}}$  vektor minden eleme helyén egy kvadratikus alak áll, ezért a benne szereplő  $C_i = (D_{ijk})$  mátrix szimmetrikusnak választható. Legyen  $M = (D_{ij})$ , akkor

$$D_{ijk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial D_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial D_{jk}}{\partial x_i} \right\}, \quad (J.7)$$

$$\begin{aligned} C_{ik} &= \dot{\mathbf{x}}^T \begin{bmatrix} D_{iik} \\ \vdots \\ D_{ink} \end{bmatrix} = \sum_j D_{ijk} \dot{x}_j = \\ &= \frac{1}{2} \sum_j \left\{ \frac{\partial D_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial D_{jk}}{\partial x_i} \right\} \dot{x}_j, \end{aligned} \quad (J.8)$$

$$\frac{dD_{ik}}{dt} = \sum_j \frac{\partial D_{ik}}{\partial x_j} \dot{x}_j, \quad (J.9)$$

$$\begin{aligned} (\dot{M} - 2C)_{ik} &= \sum_j \frac{\partial D_{ik}}{\partial x_j} \dot{x}_j - \sum_j \left\{ \frac{\partial D_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial D_{jk}}{\partial x_i} \right\} \dot{x}_j = \\ &= \sum_j \left\{ \frac{\partial D_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k} \right\} \dot{x}_j, \end{aligned} \quad (J.10)$$

ahonnan  $D_{jk} = D_{kj}$  és  $D_{ij} = D_{ji}$  miatt következik, hogy

$$(\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C})_{ii} = 0, \quad (J.11a)$$

$$(\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C})_{ki} = \sum_j \left\{ \frac{\partial D_{ji}}{\partial x_k} - \frac{\partial D_{kj}}{\partial x_i} \right\} \dot{x}_j = -(\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C})_{ik}. \quad (J.11b)$$

Összefoglalva megállapítható, hogy szimmetrikussá tett  $\mathbf{C}_i$  esetén

$$\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C} \text{ ferdeszimmetrikus.} \quad (J.12)$$

Ez a tény számos adaptív irányítási algoritmus stabilitásának alapját képezi. Tehát nemcsak a (J.1) egyenletből azonnal következő

$$\langle (\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C})\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle \equiv 0 \quad (J.13)$$

azonosság igaz, hanem a (J.1) egyenletből  $\dot{\mathbf{z}} \neq \dot{\mathbf{x}}$  esetén közvetlenül nem következő

$$\langle (\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C})\dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{z}} \rangle \equiv 0 \quad (J.14)$$

azonosság is fennáll a kvadratikus alak  $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  mátrixának ferdeszimmetrikus volta miatt.

Az alkalmazásokban két eset lényeges:

1.  $\dot{\mathbf{x}} := \dot{\mathbf{q}}$  és  $\mathbf{M} := \mathbf{H}$ ,
2.  $\dot{\mathbf{x}} := \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$  és  $\mathbf{M} := (\mathbf{J}^{-1})^T \mathbf{H} \mathbf{J}^{-1}$ .

A második esetben lényeges még a dinamikus modellek közötti kapcsolat:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (J.15)$$

$$\mathbf{H}^*(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{F}, \quad (J.16a)$$

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{H} \mathbf{J}^{-1}, \quad (J.16b)$$

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{C} \mathbf{J}^{-1} - \mathbf{J}^{-T} \mathbf{H} \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} \mathbf{J}^{-1}, \quad (J.16c)$$

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{D}, \quad (J.16d)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{J}^{-T} \boldsymbol{\tau}. \quad (J.16e)$$

Ezekkel a mennyiségekkel is igaz lesz, hogy  $\dot{\mathbf{H}}^* - 2\mathbf{C}^*$  ferdeszimmetrikus, mivel

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}}^* - 2\mathbf{C}^* &= \dot{\mathbf{J}}^{-T} \mathbf{H} \mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}^{-T} \dot{\mathbf{H}} \mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}^{-T} \mathbf{H} \dot{\mathbf{J}}^{-1} - \\ &\quad - 2\mathbf{J}^{-T} \mathbf{C} \mathbf{J}^{-1} + 2\mathbf{J}^{-T} \mathbf{H} \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} \mathbf{J}^{-1} = \\ &= \mathbf{J}^{-T} (\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}) \mathbf{J}^{-1} + \dot{\mathbf{J}}^{-T} \mathbf{H} \mathbf{J}^{-1} - \mathbf{J}^{-T} \mathbf{H} \dot{\mathbf{J}}^{-1} \quad (J.17)\end{aligned}$$

miatt

$$\begin{aligned}\langle (\dot{\mathbf{H}}^* - 2\mathbf{C}^*) \dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{z}} \rangle &= \langle (\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}) \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{z}} \rangle + \\ &+ \langle \mathbf{H} \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{J}}^{-1} \dot{\mathbf{z}} \rangle - \langle \dot{\mathbf{J}}^{-1} \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{H} \dot{\mathbf{J}}^{-1} \dot{\mathbf{z}} \rangle = 0, \quad (J.18)\end{aligned}$$

hiszen  $\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}$  ferdeszimmetrikus, a másik két tag pedig ellentétes előjelű és kiegyenlíti egymást.

# IRODALOMJEGYZÉK

1. **Paul, R.P.:** "Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control". MIT Press, Cambridge, M.A., London, 1982.
2. **Ránczy, P.G. – Ho, C.Y.:** "Robot Modelling. Control and Application with Software". Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.
3. **Denavit, J. – Hartenberg, R.S.:** "A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices". ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 22 (1955) pp. 215-221.
4. **Lee, C.S.G. – Gonzalez, R.C. – Fu, K.S.:** "Tutorial on Robotics". IEEE Computer Society Press/ North-Holland, Amsterdam, 1983.
5. **Arimoto, S. – Miyazaki, F.:** "Stability and Robustness of PID Feedback Control for Robot manipulators of Sensory Capability". The First International Symposium of Robotics Research, New Hampshire (1983). MIT Press, Cambridge, M.A., London, 1984, pp. 783-799.
6. **La Salle, J.P. – Lefschetz, S.:** "Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications". Academic Press, New York, 1961.
7. **Kokotovic, P.V. – O'Malley, R.E. – Sannuti, P.:** "Singular Perturbation and Order Reduction in Control Theory – an Overview". Automatica, Vol. 12 (1976) pp. 123-132.
8. **Luh, L.Y. – Walker, M.W. – Paul, R.P.:** "Resolved - Acceleration Control of Mechanical Manipulators". IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-25 (1980) pp. 468-474.
9. **Utkin, V.I.:** "Variable Structure Systems with Sliding Mode: a Survey". IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-22 (1977) pp. 212-222.

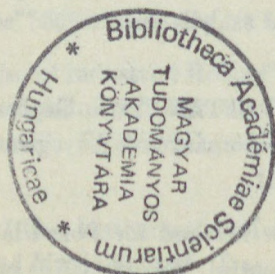
10. **Asada, H. – Slotine, J.E.:** "Robot Analysis and Control". Wiley, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1986, pp. 140–171.
11. **Kailath, T.:** "Linear Systems". Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.Y., 1980.
12. **Wolovich, W.A.:** "Linear Multivariable Systems". Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1974.
13. **Moness, M. – Lantos, B.:** "A Precompensator Design to Achieve the Decoupling Condition in the Frequency-Domain". *Int. J. Control*, Vol. 39 (1984) pp. 189–200.
14. **Moness, M.:** "Some New Investigation on Decoupling of Linear, Continuous, Time-Invariant Multivariable Systems Using the Frequency-Domain Approach". Candidate (Ph.D.) thesis, Budapest, 1982.
15. **Medanic, J. – Uskokovic, Z.:** "The Design of Optimal Output Regulators for Linear Multivariable Systems with Constant Disturbances". *Int. J. Control*, Vol. 37 (1983) pp. 809–830.
16. **Whitney, D.E.:** "Historical Perspective and State of the Art in Robot Force Control". *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 6 (1987) pp. 3–14.
17. **Asada, H. – Ogawa, K.:** "On the Dynamic Analysis of a Manipulator and Its End Effector Interacting with the Environment". *Proceedings of the 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Raleigh, pp. 751–756.
18. **Loncaric, J.:** "Normal Form of Stiffness and Compliance Matrices". *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol. RA-3 (1987) pp. 567–572.
19. **Raibert, M.H. – Craig, J.J.:** "Hybrid Position/Force Control of Manipulators". *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, Vol. 102 (1981) pp. 126–133.

20. **Khatib, O.:** "A Unified Approach for Motion and Force Control of Robot Manipulators: the Operational Space Formulation". *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol. RA-3 (1987) pp. 43-53.
21. **Nicosia, S. – Tomei, P.:** "Model Reference Adaptive Control Algorithms for Industrial Robots". *Automatica*, Vol. 20 (1984) pp. 635-644.
22. **Slotine, J.E. – Li, W.:** "Adaptive Manipulator Control: A Case Study". *IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, Raleigh, 1987, pp. 1392-1400.
23. **Slotine, J.E. – Li, W.:** "Adaptive Strategies in Constrained Manipulation". *IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, Raleigh, 1987, pp. 595-601.
24. **Vukobratovic, M. – Potkonjak, V.:** "Dynamics of Manipulation Robots". Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.
25. **Vukobratovic, M. – Kircanski, N.:** "Real-Time Dynamics of Manipulation Robots". Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1985.
26. **Brady, M. – Hollerbach, J.M. – Johnson, T.L. – Lozano – Perez, T. – Mason, M.T.:** "Robot Motion: Planning and Control". MIT Press, Cambridge, M.A., London, 1982.
27. **Wang, Y. – Buthner, S.E.:** "A New Architecture for Robot Control". *IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, Raleigh, 1987, pp. 664-670.
28. **Desoyer, K. – Kopacek, P. – Troch, I.:** "Industrieroboter und Handhabungsgeräte". R. Oldenbourg V, München, Wien, 1985.
29. "Production and Use of Industrial Robots". Part 1.: Trends in Manufacture and Use of Industrial Robots. United Nations Economic and Social Council. ECE/ENG. AUT/12, 15 August 1983, pp. 6-14.
30. **Whitney, D.E.:** "The Mathematics of Coordinated Control of Prosthetic Arms and Manipulators". *Trans. ASME, Journal of Dy-*

dynamic Systems, Measurement, and Control. December 1972, pp. 303–309.

31. **Lantos B.:** "A funkcionálanalízis egy alkalmazása az irányítástechnikában". MTA Kandidátusi értekezés, Budapest, 1976. Válasz az opponensi véleményekre részben: "A Kalman – Bucy szűrési algoritmus bevezetése egy mátrix kritérium szerinti optimalizálási feladatból".
32. **Siegler A.:** "Robot irányítási modellek". LSI ATSZ, Budapest, 1987.
33. **Báthor M.:** "Számítógépes grafikai módszerek a tárgyfelismerés eljárásainak fejlesztéséhez". BME műszaki doktori értekezés, Budapest, 1979.
34. **Somló J. (szerk.):** "SCARA típusú robotok alkalmazástechnikája". G/6-II.10.135/87 tanulmány, BME, Budapest, 1988.
35. **Cat, Ph. Th.:** "Robotok robosztus adaptív irányítása". MTA doktori értekezés, Budapest, 1988.
36. **Marth G.:** "Robotirányítás szimulációs vizsgálata". Diplomaterv, BME Folyamatszabályozási Tanszék, Budapest, 1987.
37. **Csala P.:** "Robotmodell generálása szimbólikus alakban". Diplomaterv, BME Folyamatszabályozási Tanszék, Budapest, 1989.
38. **Koczka L.:** "Centralizált és decentralizált többváltozós szabályozási rendszerek számítógéppel támogatott néhány tervezési módszere". BME műszaki doktori értekezés, Budapest, 1984.
39. **Csáki F.:** "Korszerű szabályozásemélet". Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.
40. **Sályi J. (főszerk.):** PATTANTYÚS. Gépész és villamosmérnökök kézikönyve. 1. Alaptudományok - Anyagismeret. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1961.
41. **Seraji, H.:** "A New Method for Pole Placement Using Output Feedback". Int. J. Control, Vol. 28 (1978) pp. 147–155.

42. **Luh, J.Y. – Walker, M.W. – Paul, R.P.:** "On Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators". Trans. ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Vol. 102 (1980) pp. 69–76.
43. **Renaud, M.:** "Quasi-Minimal Computation of the Dynamic Model of a Robot Manipulator Utilizing the Newton–Euler Formalism and the Notion of Augmented Body". IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, Raleigh, 1987, pp. 1677–1682.
44. **Vukobratovic, M. – Potkonjak, V.:** "Applied Dynamics and CAD of Manipulation Robots". Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1985.
45. **Siegler, A. – Báthor, M. – Déri, G.:** "3-Dimensional Computer Animations System with Robotic Applications". Robotica, Vol. 5 (1987) pp. 281–290.



*A sorozatban jelent meg*

DALLOS GYÖRGY-SZABÓ CSABA

**HÍRKÖZLŐ CSATORNÁK  
VÉLETLEN HOZZÁFÉRÉSI  
MÓDSZEREI**

LENDVAI ÖDÖN

**FÉLVEZETŐ LÉZEREK**

GAÁL JÓZSEF

**ELEKTRONIKUS ÁRAMKÖRÖK  
STATISZTIKUS ANALÍZISE  
ÉS SZINTÉZISE  
MONTE-CARLO MÓDSZERREL**

ÁLLÓ GÉZA-HEGEDŰS GY. CSABA-  
KELEMEN DEZSŐ-SZABÓ JÓZSEF

**A DIGITÁLIS KÉPFELDOLGOZÁS  
ALAPPROBLÉMÁI**

KATALIN TARNAY

**PROTOCOL SPECIFICATION  
AND TESTING**

HELLER KRISZTINA-NÁDASDI FERENC (SZERK.)

**A TÁVKÖZLÉS TÁRSADALMI ÉS  
GAZDASÁGI ÖSSZEFÜGGÉSEI**

*Előkészületben*

NEMETZ TIBOR-VAJDA ISTVÁN

## ALGORITMUSOS ADATVÉDELEM

NÉMETH GÁBOR-HORVÁTH LÁSZLÓ

## SZÁMÍTÓGÉP-ARCHITEKTÚRÁK

---

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó  
és Nyomda Vállalat igazgatója

A nyomdai munkálatokat az Akadémiai Kiadó  
és Nyomda Vállalat végezte

Felelős vezető: Zöld Ferenc  
Budapest, 1991

Nyomdai táskaszám: 20509

Felelős szerkesztő: Sente László — Műszaki szerkesztő: Merkly László

A fedélterv Bogdán Hajnal munkája

Kiadványszám: I./12.

Megjelent: 22 (A/5) iv terjedelemben

HU ISSN 0236-6312

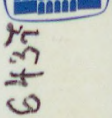


A nagy pontosságú, gyors működésű robotok a korszerű gyártórendszerek fontos részét alkotják. Irányításuk szükségessé teszi a szabályozástechnika és a számítástechnika eredményeinek alkalmazását.

A könyv a merev, nyílt láncú, elágazás nélküli robotok modelljeinek (geometriai, kinematikus, dinamikus) meghatározásával, pályatervezéssel, robotirányítási algoritmusokkal és azok megvalósításának kérdéseivel foglalkozik. Részletesen vizsgálja a szabad mozgás (pozícióirányítás), a korlátozott mozgás (hibrid pozíció- és erőirányítás) és az adaptív irányítás kérdéseit, továbbá a megvalósításukhoz szükséges algoritmusokat. Feldolgozza, egységes szempontból összefoglalja és néhány területen továbbfejleszti a robotirányítás elméleti és gyakorlati alapjait. Kidolgozza a korszerű robotirányítási módszerek algoritmusait, és foglalkozik valós idejű (real time) realizálásuk kérdésével is. A mű megértését részletesen kidolgozott példák segítik. A függelék összefoglalja a mechanikai alapokat és a szabályozástechnika fontosabb idő- és frekvenciatartománybeli tervezési módszereit.

A szerző „Robotok irányítása” címmel 1986-tól tart előadásokat a Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki Karán (műszer- és irányítástechnika szak, informatika szak robotirányítási ágazat), e könyv ezen előadások alapján jött létre. Ezekon a szakokon és más egyetemeken, főiskolák hasonló szakterületein tankönyvként is használható. Haszonnal forgathatják a robotika és a szabályozástechnika iránt érdeklődő mérnökök, informatikusok és kutatók is.

086437



LANTOSAARI

ROBOTOIKI  
YHTÄISYYS

