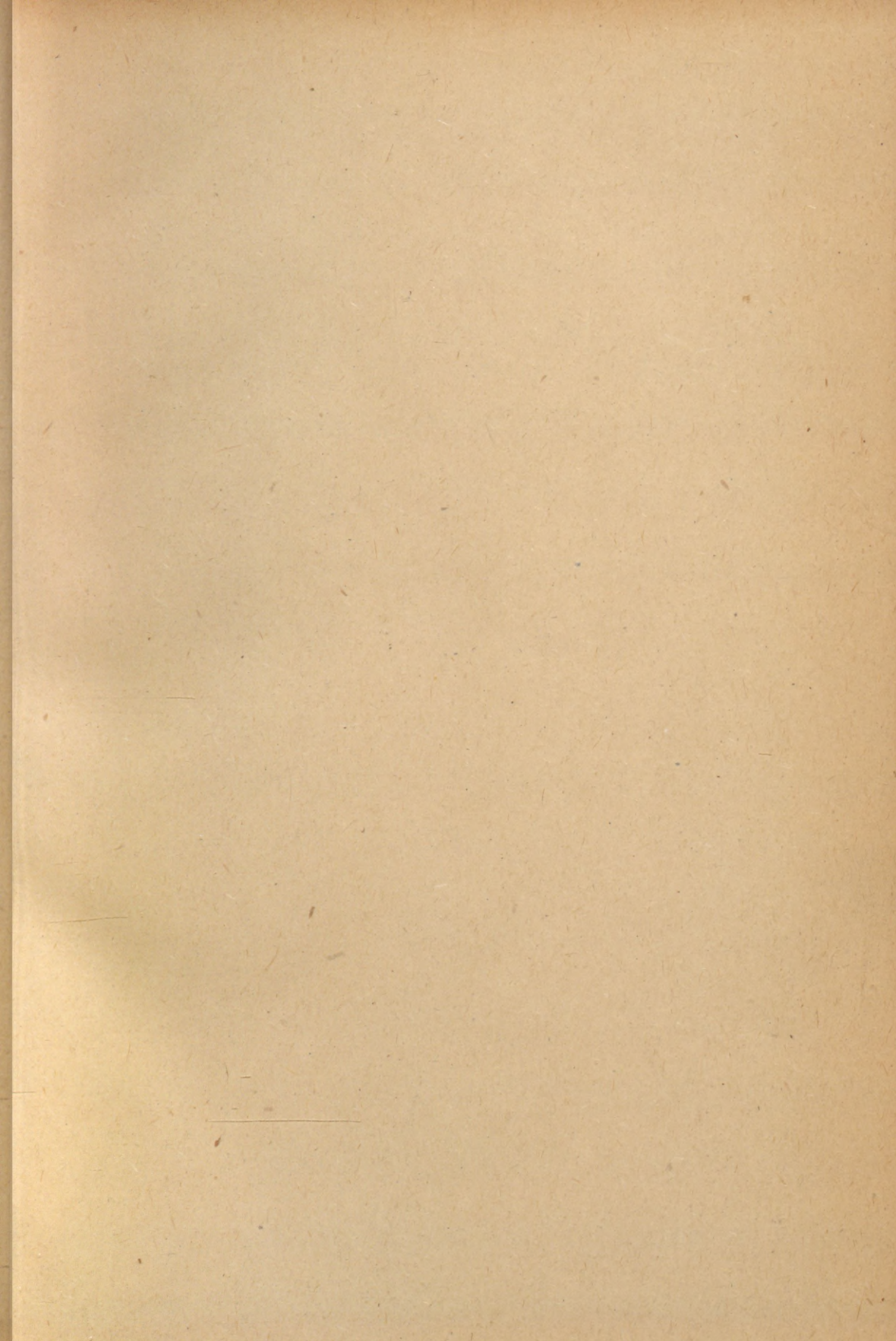


121474

L. G. PETROVSZKIJ

ELŐADÁSOK
A KÖZÖNSÉGES
DIFFERENCIÁLEGYENLETEK
ELMÉLETÉRŐL





579485

I. G. PETROVSZKIJ

ELŐADÁSOK
A KÖZÖNSÉGES
DIFFERENCIÁLEGYENLETEK
ELMÉLETÉRŐL

MTA
KIK



1951

121474

A mű eredeti címe

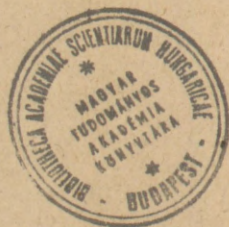
И. Г. Петровский:

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИИ
GOSZTECHIZDAT MOSZKVA, LENINGRAD, 1949

A fordítás

KONCZ KÁROLY

munkája



Szerkesztő

VARGA OTTÓ

Akadémiai Kiadó (Budapest, V., Alkotmány-u. 21). Felelős: Mestyán János

3221 — Egyetemi Nyomda, Budapest (Felelős: Erdős László)

ELŐSZÓ A MAGYAR KIADÁSHOZ

I. G. Petrovskij akadémikus könyve a közönséges differenciálegyenletek elméletének alapvonalait tartalmazza. A tárgyalt elmélet lényegében megoldások existencia-tételei, valamint ezeknek a kezdő feltételektől való függése köré csoportosul. Speciális típusú differenciálegyenletek közül csupán a lineáris rendszereket tárgyalja igen részletesen. Elemi bevezető könyvekkel szemben a szerző nemcsak arra az esetre szorítkozik, amikor a Lipschitz-feltételek a megoldások egyértelműségét biztosítják. Ez magával hozza, hogy itt az elméletnek finomabb tételei is tárgyalásra kerülnek. Különösen tanulságos és a szakember számára is érdekes az iterációs elméletre vonatkozó Tyihonov—Caccioppoli-féle kontrakciós elv, amely a szukcesszív approximáció alapjain nyugvó összes existencia-bizonyítások magvát alkotja. Az elsőrendű parciális differenciálegyenleteket röviden tárgyaló függelék csupán a közönséges differenciálegyenletek elméletéhez kapcsolódó egyik alkalmazásnak tekintendő. Ennek a messzeágazó elméletnek rendszeres bevezetését a szerző e mű második kötetében adja, amely a parciális differenciál egyenletek elméletének van szentelve. A második kötet magyarnyelvű kiadására egyébként hamarosan szintén sor kerül.

Az itt felsorolt néhány megjegyzésből kiviláglik, hogy a szerző főfeladatának tekintette az elmélet gerincének bemutatását anélkül, hogy az olvasót ennek az elméletnek számos speciális kérdéseivel fárasssa.

Ezeket a szakmai megjegyzéseken kívül nem mulaszthatjuk el, hogy ne hívjuk fel a figyelmet a könyv kitűnő didaktikai módszerére is. Minden új fogalom bevezetése és minden nehéz bizonyítás elé megfelelő példákat iktat, továbbá ezeket a legapróbb részletekig a legmesszebbmenő gondnal dolgozza ki. Ilyen előkészítés után könnyen érthetővé válnak a sokszor tömör bizonyítások.

Reméljük, hogy ennek az értékes könyvnek megjelenése e tudományág művelését, amelynek úgy elméleti szempontból, mint pedig a matematika gyakorlati alkalmazásai tekintetében igen nagy jelentősége van, hazánkban elő fogja mozdítani és új érdeklődőket fog a tárgynak megnyerni.

Debrecen, 1951. augusztus 24.

Varga Ottó

ELŐSZÓ AZ ELSŐ KIADÁSHOZ

Ezeket az előadásokat az 1936—37-es tanévben tartottam a szarlatovi állami egyetemen és (kisebb változtatásokkal) a moszkvai állami egyetemen. Nem arra törekedtem, hogy a lehető legtöbbet mutassak be azon integrációs módszerek közül, melyek a különböző speciális típusú differenciálegyenletekre alkalmazhatók, hiszen oroszul jónéhány olyan tankönyv van már, mely ezeket kielégítő részletességgel ismerteti. Arra sem törekedtem, hogy a közönséges differenciálegyenletek elméletének minden területéről szóljak. Az egész elméletből csupán néhány kérdést ragadtam ki, viszont ahhoz ragaszkodtam, hogy ezeket a lehető legteljesebben és legszigorúbban tárgyaljam — ahogy ma a matematikai diszciplínák többségét tárgyalják. Hallgatóságomnál nem tételeztem fel az analitikai függvények elméletének ismeretét, azért az ebből az elméletből szükséges levezetéseket vagy magam is tárgyalom, vagy pontosan utalok arra, hogy ezek hol találhatók meg.

Köszönetet mondok A. I. Barabanovnak, kinek jegyzetei az első 21 paragrafus elkészítésénél alapul szolgáltak, V. V. Sztjepanovnak, Sz. A. Halpernnek és A. D. Miskisznak, akik teljes kéziratomat átnézték, és ahhoz számos értékes megjegyzést fűztek.

1939. évben.

I. G. Petrovszkij

ELŐSZÓ A HARMADIK KIADÁSHOZ

A harmadik kiadásban az adjungált egyenletekről szóló paragrafust helyettesítettem a másodrendű, lineáris, homogén egyenletek zérushelyeiről szóló résszel. A. D. Miskisz a harmadik kiadáshoz számos feladatot fűzött.

1949. február 15-én.

I. G. Petrovszkij

I. RÉSZ

AZ ELSŐRENDŰ, EGY ISMERETLEN FÜGGVÉNYES DIFFERENCIÁLEGYENLET

I. FEJEZET

ALAPFOGALMAK

1. §. Definíciók, példák

Közönséges n -edrendű differenciálegyenleten az $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ vonatkozást értjük, ahol x a független változó, y ennek függvénye, $y', \dots, y^{(n)}$ pedig az y -nak x szerinti differenciálhányadosait az n -edikig bezárólag jelentik. Az $y = \varphi(x)$ függvényt¹⁾ ezen differenciálegyenlet megoldásának nevezzük, ha y helyébe $\varphi(x)$ -et, y' helyébe $\varphi'(x)$ -et \dots , $y^{(n)}$ helyébe $\varphi^{(n)}(x)$ -et helyettesítve vonatkozásunk azonosságba megy át. A továbbiakban, hacsak külön nem kötünk ki mást, mindig feltesszük, hogy a tekintetbe vett mennyiségek valóságok.

Ilymódon — a közönséges differenciálegyenletekben az ismeretlen függvény csak egy változótól függ. Ezzel szemben a *parciális differenciálegyenletek* olyanok, melyekben az ismeretlen függvények több független változótól függenek. A továbbiakban differenciálegyenletről szólva mindig csak közönséges differenciálegyenletre gondolunk, hacsak nem teszünk külön megjegyzést.

Sok olyan kérdése van a természettudományoknak, melyek közönséges differenciálegyenletekre vezetnek. Ennek illusztrálására tekintsük az alábbi két példát.

1. P é l d a. Tegyük fel, hogy egy az OX tengelyen mozgó pont sebességét minden pillanatban ismerjük; legyen ez $f(t)$, ahol $f(t)$ az időnek folytonos és korlátos függvénye. Feltesszük még, hogy ismeretes a pont abcisszája x_0 egy meghatározott $t = t_0$ pillanatban. Keresendő ezen pont mozgástörvénye, azaz a mozgó pont abcisszájának az időtől való függése. Ez a feladat a

$$\frac{dx}{dt} = f(t)$$

differenciálegyenlet oly megoldásának keresésére vezet, mely $t = t_0$ -nál x_0 értékű. Az integrálszámításból tudjuk, hogy ilyen megoldást

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

szolgáltatót.

¹⁾ Mindig egyértékű függvényt tételezünk fel.

2. P é l d a. Ismeretes, hogy a *rádium bomlási sebessége* tömegével egyenesen arányos. Tegyük fel, hogy t_0 pillanatban R_0 g rádiumunk volt. Határozzuk meg a rádium R tömegét egy tetszőleges t pillanatban.

Há c ($c > 0$) az arányossági tényező, akkor a feladat a

$$\frac{R}{dt} = -cR$$

differenciálegyenlet azon megoldásának keresésére vezet, mely $t = t_0$ -nál az R_0 értéket veszi fel. Ilyen megoldás az

$$R = R_0 e^{-c(t-t_0)}$$

függvény.

A most tekintett példákból nyilvánvaló, hogy ugyanazt a differenciálegyenletet igen sok függvény elégítheti ki. Ezért az ismeretlen függvény meghatározására nemcsak a differenciálegyenletet adtuk meg, melyet ki kell elégítenie, hanem egy bizonyos meghatározott argumentumnál felvett értékét is (kezdeti értékét). Példáinkban a kezdeti értékek egyértelműen meghatározták a differenciálegyenletek azoknak megfelelő megoldásait.

A differenciálegyenletek elméletének alapfeladata adott differenciálegyenlet összes megoldásainak keresése és ezen megoldások sajátosságainak vizsgálata. A differenciálegyenlet megoldásainak megkeresését az egyenlet *integrálásának* nevezzük.

2. §. Geometriai interpretáció. A feladat általánosítása

Tekintsük az

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

differenciálegyenletet, ahol az $f(x, y)$ függvényt az (x, y) sík egy G tartományában¹⁾ értelmezzük. Ez az egyenlet a tartomány minden egyes pontjához megadja annak az iránytényezőnek az értékét, mellyel az (1) megoldása által előállított görbe érintője abban a pontban rendelkezik. Ha G tartomány minden (x, y) pontjában az $f(x, y)$ érték által meghatározott érintő irányát egy szakasszal²⁾ ábrázoljuk, akkor egy *iránymezőt* nyerünk. Ezek után a differenciálegyenlet megoldásának megkeresését követelő előbbi feladatunk így fogalmazható: Keresendő az az $y = \varphi(x)$ görbe, mely minden pontjában az (1) egyenlet által meghatározott érintővel rendelkezik, vagy másszóval, melynek irányát az (1) egyenlet adja meg.

A feladatnak e geometriai szempont szerinti megfogalmazása szinte természetessé teszi az alábbi követelményeket:

1. Legyen a G tartomány bármely (x, y) pontjában az iránytényező $f(x, y)$ de kizárjuk az OY tengellyel párhuzamos irányokat.³⁾

¹⁾ *Tartománynak* nevezzük a következő két tulajdonsággal rendelkező, nem üres G ponthalmazt: 1. G minden pontja *belső pont*, azaz minden pontnak van oly környezete, mely teljesen G -hez tartozik; 2. A G halmaz összefüggő, azaz bármely két teljesen G belsejében fekvő pont véges számú vonaldarabból összetett törtvonallal köthető össze.

Határpontnak nevezzük azt a pontot, amely a tartomány pontjainak sűrűsödési helye, de nem tartozik a tartományhoz. Mindezen pontok összessége a tartomány *határa*.

G -t *zárt tartomány*nek nevezzük, ha a G tartományhoz határpontjait hozzávesszük.

²⁾ Ezek az egyenes szakaszokon nem különböztetünk meg irányokat.

³⁾ Mindenütt csak véges mennyiségeket veszünk figyelembe.

2. Csak azokat a görbéket vesszük tekintetbe, melyek az x változó valamilyen függvényének grafikonjai; azonban még ezek közül is kizárjuk azokat, amelyek egy, az x -tengelyre merőleges egyenesről egynél többször metszenek.

Most egy kissé általánosítjuk feladatunk előbbi megfogalmazását. Nevezetesen megengedjük, hogy az iránymező irányai bizonyos pontokban párhuzamosak legyenek az OY tengellyel. Azokban a pontokban pedig, ahol az OX tengelyre vonatkoztatott iránytényező nem értelmezhető, helyettük az OY tengelyre vonatkoztatott iránytényezőt vesszük. Ennek megfelelően az (1) differenciálegyenlettel együtt a

$$\frac{dx}{dy} = f_1(x, y) \quad (1')$$

differenciálegyenletet is tekintetbe vesszük, ahol $f_1(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}$, ha $f(x, y) \neq 0$.

Ahol az első egyenlet nincsen értelmezve, az utóbbit használjuk. Differenciálegyenletünk integrálásának feladata ezek után így fogalmazható: *keresendők a G tartomány mindazon vonalai,¹⁾ melyek minden pontban az (1) és (1') egyenletekkel meghatározott irányúak.*²⁾ E vonalakat (görbéket) az (1) és (1') egyenletek, vagy az ezen egyenletekkel meghatározott iránymező *integrálvonalainak* (-görbéinek) nevezzük. Az „(1) és (1') egyenletek“ kifejezésben a többszám helyett gyakran egyszámot fogunk használni: „(1), (1') egyenlet“. Világos, hogy az (1) egyenlet minden megoldásának grafikonja az „(1), (1') egyenletnek“ is integrálgörbéje, de az „(1), (1') egyenletnek“ nem minden integrálgörbéje lesz (1) egyenlet egy megoldásának grafikonja. A továbbiakban, ha kifejezetten megmondjuk, hogy

$$f(x, y) = \frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

akkor a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad (2)$$

egyenlettel együtt nem írjuk ki a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{N(x, y)}{M(x, y)} = f_1(x, y) \quad (2')$$

egyenletet. Ezeket az egyenleteket néha az x és y -ra nézve szimmetrikusabb

$$M dx - N dy = 0 \quad (3)$$

alakban írjuk.

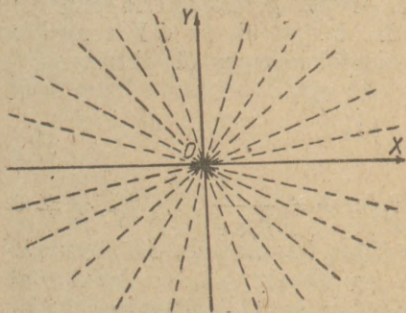
¹⁾ Vonalon itt azt a ponthalmazt értjük, amelyet a $P(x, y)$ pont ír le az $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ egyenletek alapján, míg t befut egy (a, b) intervallumot, ez speciálisan $a = -\infty$, $b = \infty$ is lehet. Feltesszük, hogy a $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ függvények deriváltjai folytonosak, valamint, hogy bármely t -re $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$. Ilyen vonal minden $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$ pontja olyan vonaldarabon fekszik, mely az y -nak az x -től, vagy x -nek az y -től való grafikus vagy funkcionális függését határozza meg. Valóban $\varphi'(t_0)$ és $\psi'(t_0)$ közül legalább egyik nem nulla. Legyen például $\varphi'(t_0) \neq 0$. Ekkor $\varphi'(t)$ folytonossága miatt van t -nek olyan $t_0 - \varepsilon$ -től, $t_0 + \varepsilon$ -ig terjedő intervalluma, melyben $\varphi'(t)$ előjele változatlan. Ezért az $x = \varphi(t)$ egyenlet ezekre a t értékekre nézve megoldható. Legyen $t = t(x)$. E t értéket az $y = \psi(t)$ egyenletbe behelyettesítve $y = \psi[t(x)]$ -et kapjuk, azaz y függvénye az x -nek.

²⁾ Az iránymezőt néha nemcsak G -n belül adjuk meg, hanem még G határa egy részén, vagy G egész határán is. Ekkor lehetséges, hogy az integrálvonalak G határának egy részén is futnak, nemcsak G belsejében.

1. Példa. A

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (4)$$

egyenlet a koordináta-rendszer kezdőpontjának kivételével mindenütt megadja az iránymezőt. Ezt ábrázoljuk vázlatosan az 1. ábrán. A mező minden iránya átmegy az origón. Világos, hogy az



1. ábra

Természetes azonban, hogy (5) és (6) csak az origó kivételével integrálja mindenütt (4)-nek, minthogy (4) az origóban az iránymezőt egyáltalán nem határozza meg. Ezért helyesebb azt mondanunk, hogy (4) integrárvonalai nem az origón átmenő egyenesek, hanem az origóból kiinduló félegyenesek.

$$y = kx \quad (5)$$

függvények k bármely értékénél megoldásai a (4) egyenletnek. Ezen egyenlet összes integrárvonalainak összességét az

$$ax + by = 0 \quad (6)$$

vonatkozás adja, ahol a és b tetszőleges, de egyszerre nem nullával egyenlő konstánssok. Az OY tengely is integrárvonala (4)-nek, bár egyetlen megoldásának sem grafikonja.

2. Példa. A

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (7)$$

egyenlet az origó kivételével mindenütt meghatározza az iránymezőt. Ezt ábrázoljuk vázlatosan a 2. ábrán.

Egy (x, y) pontban a (4) és (7) egyenletek által meghatározott irányok egymásra merőlegesek. Világos, hogy a (7) egyenletnek minden olyan kör integrálgörbéje, melynek középpontja az origó. Tehát ezen egyenlet megoldásai az

$$y = +\sqrt{R^2 - x^2} \\ = -\sqrt{R^2 - x^2} \quad (-R < x < R)$$



2. ábra

függvények.

Állapodjunk meg a következő terminológiában:

1. Néha a rövidség kedvéért e kifejezés helyett „a megoldás grafikonja átmegy az (x_0, y_0) ponton” ezt mondjuk: „a megoldás átmegy az (x_0, y_0) ponton”.

2. A $\varphi(x, C_1, \dots, C_n)$ függvényt akkor nevezzük a differenciálegyenlet általános megoldásának a G tartományban, ha e függvény a C_1, \dots, C_n konstansok megfelelő választásával az egyenlet oly tetszőleges megoldásába megy át, melynek grafikonja G -ben fekszik.¹⁾

3. Az (1), (1') egyenlet egy integrálgörbéjének $\Phi(x, y) = 0$ egyenletét az (1), (1') differenciálegyenlet integráljának nevezzük.

¹⁾ Sem ez, sem a 4. alatti definíció nem egyezik meg a szokásossal.

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

egyenletet akkor nevezük a megadott differenciálegyenlet G tartományban való *általános integráljának*, ha ez a C_1, \dots, C_n konstánsok megfelelő választásával megadja egyenletünk *tetszőleges* G tartományban futó integrálgörbéjét.

Pl. az 1. példában az (5) vonatkozás a (4) egyenlet általános megoldását adta meg az egész (x, y) síkban, az OY tengely kivételével; a (6) egyenlet pedig ezen egyenlet általános integrálját az egész (x, y) síkban, az origó kivételével. A 2. példában az

$$y = + \sqrt{R^2 - x^2}$$

egyenlet adta az általános megoldást az $y > 0$ teljes félsíkban, az

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (7')$$

egyenlet pedig az általános integrált az egész (x, y) síkban, az origó kivételével. Azt, hogy (4), illetőleg (7) egyenletnek a (6), illetve (7') vonalakon kívül más integrálgörbéi nincsenek, az 5. §-ban mutatjuk meg.

Feladatok. 1. Mely siktartománynak nincsen határa?

2. Rajzoljuk meg a következő egyenletek integrálvonalait:

$$a) \frac{dy}{dx} = \frac{xy}{|xy|}, \quad b) \frac{dy}{dx} = \frac{|x+y|}{x+y}, \quad c) \frac{dy}{dx} = -\frac{x+|x|}{y+|y|},$$

$$d) \frac{dy}{dx} = \begin{cases} 0, & \text{ha } y \neq x \\ 1, & \text{ha } y = x \end{cases}, \quad e) \frac{dy}{dx} = \begin{cases} 1, & \text{ha } y \neq x \\ 0, & \text{ha } y = x \end{cases}$$

Jelöljük meg azokat a tartományokat, ahol ezen egyenletek az iránymezőt meghatározzák.

3. Legyen adva egy $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $a < t < b$ görbe, ahol $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ kielégítik a 9. oldal lábjegyzetében szabott feltételeket. Legyen továbbá $a < a' < b' < b$. Igazoljuk a következő állításokat:

a) az $a' \leq t \leq b'$ szakaszt feloszthatjuk véges számú egymáshoz csatlakozó szakaszra úgy, hogy a megadott görbe megfelelő részei vagy egy egyértékű, folytonosan differenciálható $y = y(x)$ függvény grafikonjai, vagy egy ugyanilyen tulajdonságú $x = x(y)$ függvény grafikonjai;

b) van olyan $\varepsilon > 0$ konstáns, hogy bármely t' ($a' \leq t' \leq b'$) kiválasztása után a $t' \leq t \leq t' + \varepsilon$ szakasznak megfelelő vonalдарab nem metszi át önmagát;

c) a $t = t_1$ és $t = t_2$ ($a' \leq t_1 < t_2 \leq b'$) paraméterértékekhez tartozó végpontokkal rendelkező ív hosszának a $t_2 - t_1$ -hez való viszonya korlátos és nagyobb egy pozitív konstansnál.

4. Függetlenek-e egymástól ezen követelmények:

a) az iránymező ne tartalmazzon az OY tengellyel párhuzamos irányokat;

b) minden integrálgörbe az x független változó valamely függvényének grafikonja legyen?

II. FEJEZET

A LEGEGYSZERŰBB DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

3. §. A $\frac{dy}{dx} = f(x)$ alakú egyenlet

Első eset. Legyen az $f(x)$ $a < x < b$ -ben folytonos. Ekkor, mint ismeretes, e differenciálegyenlet egy megoldása az

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$$

függvény (ahol x_0 és x az (a, b) intervallumhoz tartoznak); minden más megoldás ettől csak egy additív konstansban különbözik. Ez azt jelenti, hogy az összes integrálgörbék egyből származtathatók az OY tengelymenti párhuzamos eltolás révén. Itt az általános megoldás az

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi + C$$

függvény. Amennyiben megadjuk azt az (x_0, y_0) pontot az $a < x < b$ sávban, melyen az integrálgörbe áthalad, a C konstánst egyértelműen meghatároztuk $C = y_0$ értékkel. Ez azt jelenti, hogy az említett sáv minden (x_0, y_0) pontján egy és csak egy integrálgörbe megy át, nevezetesen az

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi.$$

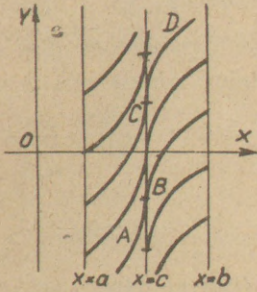
Második eset. Tartson $f(x)$ a ∞ -hez, míg $x \rightarrow c$ ($a < c < b$) az (a, b) intervallum többi pontjaiban pedig legyen $f(x)$ folytonos. Az iránymezőt adjuk meg az $x = c$ helyen a $\frac{dx}{dy} = 0$ egyenlettel.

Ekkor az iránymező mind meredekebbé válik, ha csak közeledünk az $x = c$ egyeneshez. Azonban ekkor az $a < x < c$ és $c < x < b$ nyílt sávokban ugyanaz lesz a helyzet, mint amilyen az előbbi esetben volt: ha pl. az (x_0, y_0) pont az első sávban fekszik, akkor rajta egy és csak egy e sávban futó integrálgörbe megy át. Ezt az

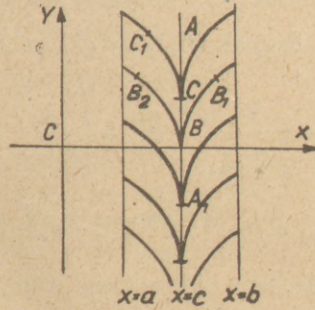
$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$$

egyenlet adja meg.

Ha az $\int_0^x f(\xi) d\xi$ integrál konvergens, míg $x \rightarrow c - 0$, akkor e görbe az $x = c$ egyenes meghatározott pontjához közeledik, míg $x \rightarrow c - 0$ (3. ábra). Ellenkező esetben az $y = y(x)$ görbe aszimptotikusan közeledik az $x = c$ egyeneshez, míg $x \rightarrow c - 0$ (4. ábra).



3. ábra



3a. ábra

Az integrálgörbék viselkedését analóg módon vizsgálhatjuk a $c < x < b$ sávban. A 3. és 4. ábrákon két olyan lehetőséget mutatunk be, melyeknél feltettük, hogy úgy az

$$\int_{x_0}^x f(\xi) d\xi, \quad a < x_0 < c \quad (8)$$

integrál konvergens (divergens), ha $x \rightarrow c - 0$, mint az

$$\int_{x_0}^x f(\xi) d\xi, \quad c < x_0 < b \quad (9)$$

integrál is konvergens (illetve divergens), ha $x \rightarrow c + 0$, továbbá $f(x) \rightarrow +\infty$, ha $x \rightarrow c$.

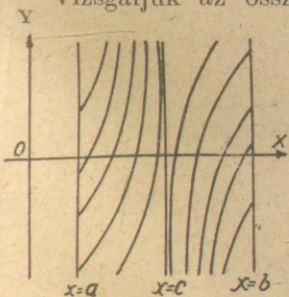
Az $x = c$ egyenes is egy integrálgörbe.

Vizsgáljuk az összes görbéknek az $a < x < b$ sávba eső részét. Akkor ugyanazon az $A(x_0, y_0)$ ponton végtelen sok integrálgörbe megy át, ha csak a (8) és (9) integrálok konvergensnek, míg $x \rightarrow c$. Legyen pl. $a < x_0 < c$. Akkor bármely $ABCD$ vonal valóban integrálgörbe (3. ábra).

Az integrálgörbék menetét abban az esetben, mikor a (8) és (9) integrálok ugyan konvergensnek, míg $x \rightarrow c \pm 0$, azonban:

$$f(x) \rightarrow +\infty, \quad \text{ha } x \rightarrow c + 0;$$

$$f(x) \rightarrow -\infty, \quad \text{ha } x \rightarrow c - 0$$



4. ábra

a 3a. ábrán ábrázoltuk. Ekkor az $x = c$ egyenes bármely A pontján végtelen sok integrálgörbe megy át: $AA_1, ABB_1, ACC_1, \dots$. Azonban ez esetben az $a < x < c$ vagy a $c < x < b$ sávban fekvő bármely ponton (pl. a B_1 ponton) csak egy integrálgörbe megy

át (B_1BA). A B_1BB_2 típusú görbéket a 9. oldalon tett¹⁾ megjegyzésünk értelmében nem vehetjük integrálgörbének, minthogy a B -ben töréspontjuk van.

A (8) és (9) integrálok divergenciája esetén az $a < x < b$ sáv minden pontján egy és csak egy integrálgörbe megy át. Azon eset taglalását, amikor a (8) és (9) integráloknak csak egyike konvergens, az olvasóra bízunk.

Feladatok. 1. Milyen esetek lehetségesek, ha $f(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$, $\varphi(c) = 0$ és $\varphi'(c)$ létezik? Tegyük fel, hogy $\varphi(x)$ mindenütt folytonos és $\varphi(x) \neq 0$, ha $x \neq c$.

2. Ábrázoljuk a következő egyenletek integrálvonalainak viselkedését:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x}}, \quad \frac{dy}{dx} = e^{\frac{1}{x}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}},$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{1}{x}} \sin \frac{1}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = x^a \sin \frac{1}{x} \text{ különböző } a \text{ értékeknél}$$

Vizsgáljuk különösen akkor ezen integrálvonalak menetét, ha $x \rightarrow 0$.

4. §. A $\frac{dy}{dx} = f(y)$ alakú egyenlet

Ez az egyenlet a 3. §-ban tárgyalttól csak abban különbözik, hogy x és y szerepet cseréltek. Ha $f(y)$ folytonos az $a < y < b$ intervallumban, és ebben nem válik zérussá, akkor egyenletünk a $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$ alakba írható át. Ebből világos, hogy először is: az $a < y < b$ sáv minden (x_0, y_0) pontján egyetlen integrálgörbe, az

$$x = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{f(\eta)}$$

megy át; másodszor: az összes integrálgörbék egy meghatározottból keletkeznek az OX tengellyel párhuzamos eltolás révén.

Legyen most $f(y)$ folytonos, azonban az (a, b) intervallum egyetlen $y = c$ értékénél váljék zérussá. Ekkor a következő esetek lehetségesek:

1. ha az $\int_{y_0}^y \frac{d\eta}{f(\eta)}$ divergál, míg $y \rightarrow c \pm 0$, akkor az $y = a$ és $y = b$ egyenesek

közti sáv minden pontján egy és csak egy integrálgörbe megy át: az $y = c$ egyenes, mely maga is integrálgörbe, az összes integrálgörbék aszimptotája;

2. ha az $\int_{y_0}^y \frac{d\eta}{f(\eta)}$ konvergál, míg $y \rightarrow c \pm 0$, továbbá az $f(x)$ függvény nem

vált jelet, míg az x átfut az $x = c$ értéken, akkor az említett sáv minden pontján végtelen sok integrálgörbe megy át;

3. ha az $\int_{y_0}^y \frac{d\eta}{f(\eta)}$ konvergál, míg $y \rightarrow c \pm 0$, továbbá az $f(x)$ függvény jelet

vált, míg x átfut az $x = c$ értéken, akkor az $y = c$ egyenes minden pontján végtelen sok integrálgörbe megy át, ugyanekkor azonban az $a < y < c$ és a $c < y < b$ sávok minden pontján egy és csak egy integrálgörbe megy át.

Ezek a következtetések a 3. § folyamányai. A 3., 3a. és 4. ábrákat most tárgyalt esetünk szemléltetésére is használhatjuk, ha ezekben a koordináta tengelyek szerepét felcseréljük.

F e l a d a t o k. 1. Milyen esetek lehetségesek, ha $f'(c)$ létezik?

2. Ábrázoljuk az alábbi egyenletek inregrálgörbéit:

$$\frac{dy}{dx} = |y|, \quad \frac{dy}{dx} = \sin y, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \frac{1}{y}.$$

3. Legyen $f(c) = 0$, és tekintsük $y = c$ bármilyen kis környezetében fekvő y értékeket, akkor mind $y < c$, mind $y > c$ esetén létezzenek olyan y értékek, amelyekre $f(y) < 0$, valamint $f(y) > 0$. Igazoljuk, hogy ekkor az $y = c$ az $y' = f(y)$ egyenletnek egyetlen olyan megoldása, mely egy tetszőleges $P(x_0, c)$ ponton megy át. $f(y)$ folytonos!

5. §. Szeparábilis differenciálegyenletek

A

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y) \quad (10)$$

alakú egyenletekről szokás azt mondani, hogy változói szétválaszthatók vagy szeparábilisok.

Tétel. Legyenek $f_1(x)$ és $f_2(y)$ folytonosak, hacsak $a < x < b$, $c < y < d$ és $f_2(y)$ seholse váljék zérussá. Akkor a jelzett Q téglalapnak minden egyes (x_0, y_0) pontján a (10) egyenletnek egy és csak egy megoldása megy át.

Bizonyítás. Egyelőre tegyük fel, hogy létezik oly $\varphi(x)$ függvény, mely kielégíti a (10) egyenletet és x_0 -nál y_0 értékű. Akkor a

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f_1(x) f_2(\varphi(x))$$

azonosságot kapjuk, mely, hacsak $f_2(y) \neq 0$, így írható:

$$\frac{d\varphi(x)}{f_2(\varphi(x))} = f_1(x) dx.$$

Mindkét oldalt x szerint az x_0 és x határok közt integrálva kapjuk, hogy

$$\int_{\varphi(x_0)=y_0}^{\varphi(x)} \frac{d\tau(\xi)}{f_2(\varphi(\xi))} = \int_{x_0}^x f_1(\xi) d\xi.$$

Jelölje $F_2(y)$ az $\frac{1}{f_2(y)}$, $F_1(x)$ az $f_1(x)$ valamely primitív függvényét, akkor egyenlőségünk így írható át:

$$F_2(\varphi(x)) - F_2(y_0) = F_1(x) - F_1(x_0). \quad (11)$$

Mivel $F_2(y)$ monoton függvény ($F_2'(y) = \frac{1}{f_2(y)} \neq 0$ miatt), a (11) egyenlőség egyértelműen megoldható a $\varphi(x)$ -re nézve:

$$\varphi(x) = F_2^{-1}[F_2(y_0) + F_1(x) - F_1(x_0)]^1 \quad (12)$$

Tehát feltételezve azt, hogy a (10) egyenletnek létezik oly megoldása, mely x_0 -nál y_0 értékű, igazoltuk, hogy ez a megoldás (12) alakú, továbbá, hogy ily megoldás csak egy létezik. A (12) egyenlőség jobboldalán szereplő függvényeket pusztán a megadott differenciálegyenlet és a kezdeti feltételek alapján határoztuk meg.

Könnyen ellenőrizhetjük azt, hogy a (12) egyenlőség által meghatározott $\varphi(x)$ függvény valóban a (10) egyenlet megoldását adja, valamint hogy x_0 -nál az y_0 értéket veszi fel. Ugyanis a (11) egyenlőséget x szerint differenciálva azt kapjuk, hogy

$$\frac{dF_2(\varphi(x))}{d\varphi(x)} \varphi'(x) = F_1'(x),$$

ahonnan

$$\frac{1}{f_2(\varphi(x))} \varphi'(x) = f_1(x),$$

azaz a $\varphi(x)$ függvény kielégíti a (10) differenciálegyenletet. Ez a kezdeti feltételt is teljesíti, mert

$$\varphi(x_0) = F_2^{-1}[F_2(y_0)] = y_0$$

Végül megjegyezzük, hogy az $f_2(y)$ -nak eltűnése egy bizonyos $y = y_1$ helyen megdöntheti a megoldás unicitását, attól függően, hogy az

$$\int_{y_0}^y \frac{d\eta}{f_2(\eta)} \quad (13)$$

konvergál vagy divergál, ha y közeledik az y_1 -hez. Az első esetben Q téglalap bármely pontján végtelen sok integrálgörbe megy át, s ezek mind érintik azt az $y = y_1$ egyenest, melynél $f_2(y) = 0$; ha pedig a (13) integrál divergál, míg $y \rightarrow y_1 \pm 0$, akkor az (x_0, y_0) ponton mindig csak egy megoldás megy át.²⁾ Természetesen feltesszük, hogy $f_1(x)$ nem azonosan zéró. Ellenkező esetben Q minden egyes pontján egy és csak egy integrálgörbe megy át.

F e l a d a t o k. 1. Ábrázoljuk a következő egyenletek integrálgörbéit:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\sin y}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{\sin x}, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{\frac{x}{y}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{\frac{y}{x}}, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{\frac{\sin x}{\sin y}}, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{\frac{\sin y}{\sin x}}.$$

¹⁾ F_2^{-1} jelöli F_2 függvény inverzét.

²⁾ Az unicitás csak akkor dőlhet meg, ha val mely $y = \varphi(x)$ integrálgörbe a Q téglalap belső (x_1, y_1) pontjában érinti az $y = c$ integrálegyenest. Ez azonban lehetetlen, ha a (13) integrál divergál, míg $y \rightarrow y_1$. Hiszen ekkor a (11) egyenlőség baloldala végtelenné válnék, míg $x \rightarrow x_1$, ugyanekkor viszont jobboldala korlátos maradna.

2. Tekintsük a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(y)}{\varphi(x)}$$

egyenletet, ahol $f(y)$ és $\varphi(x)$ függvények folytonosak és minden nem negatív argumentumra értelmezettek; $\varphi(0) = f(0) = 0$.

A) Legyen $\varphi(x) \cdot f(y) < 0$ a $G(0 < x < \infty, 0 < y < \infty)$ tartományban. Vizsgáljuk a fenti egyenlet integrálgörbéinek menetét abból a szempontból, hogy

$$\int_0^1 \frac{dy}{f(y)}, \int_1^\infty \frac{dy}{f(y)}, \int_0^1 \frac{dx}{\varphi(x)}, \int_1^\infty \frac{dx}{\varphi(x)}$$

integrálok konvergensek vagy divergensek-e.

B) Legyen a $G(0 < x < \infty, 0 < y < \infty)$ tartományban $\varphi(x) \cdot f(y) > 0$. Igazoljuk, hogy ekkor a G tartomány bármely pontján áthaladó integrálgörbe minden határon túl megközelíti az origót az x esökkenő irányában. Ha még azt is megköveteljük, hogy $\varphi'(0) \neq 0$ és $f'(0) \neq 0$, továbbá $\varphi''(t)$ és $f''(t)$ folytonosak a $0 \leq t < \varepsilon$ intervallumban, akkor minden integrálgörbe meghatározott irányból közelíti meg az origót. Ha $\varphi'(0) \neq f'(0)$, akkor az $x = 0$ értéknél mind érintik az egyik koordinátatengelyt (melyiket?). Ha $\varphi'(0) = f'(0)$, akkor az integrálgörbék minden irányból közelednek az origóhoz (úgy, mint az $y = kx$ egyeneseknél).

6. §. Homogén egyenletek

Homogénnek nevezzük a

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (14)$$

alakú differenciálegyenletet.

Ha $f(u)$ függvény $a < u < b$ -ben értelmezett, akkor $f\left(\frac{y}{x}\right)$ olyan szögterekben értelmezett, melyeknek (x, y) pontjaira nézve $a < \frac{y}{x} < b$. E két szögtér alkotta tartományt jelöljük G -vel.

Tétel. Ha $f(u)$ függvény folytonos az $a < u < b$ -ben, és ezen intervallumban mindenütt $f(u) \neq u$, akkor G minden (x_0, y_0) pontján egy és csak egy integrálgörbe megy át.

Bizonyítás. Az $y = ux$ helyettesítéssel a (14) egyenlet így írható át:

$$xu' + u = f(u).$$

Ebből a

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x} \quad (15)$$

szeparábilis egyenletet kapjuk, erre pedig alkalmazhatjuk az 5. §-ban igazolt tételt, mely állításunkat igazolja.

A (15) egyenletből kapjuk, hogy

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{f(u) - u},$$

ahonnan

$$\ln |x| = \Phi \left(\frac{y}{x} \right) + C, \quad (16)$$

ahol $\Phi(u)$ az $\frac{1}{f(u) - u}$ valamely primitív függvénye. A (16) egyenletből az is világos, hogy a homogén differenciálegyenlet összes integrálgörbéi egymáshoz hasonlóak, valamint, hogy a hasonlóság középpontja az origó. Ugyanis, ha c_1 -et megfelelően választjuk, akkor a

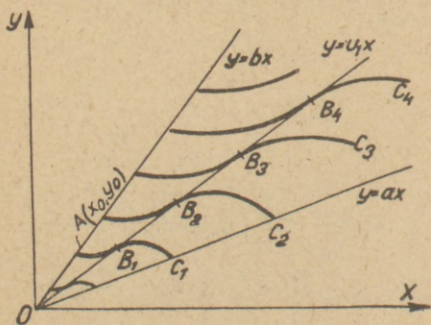
$$\ln |x| = \Phi \left(\frac{y}{x} \right)$$

görbét az x és y megfelelő c_1x , illetve c_1y helyettesítésével átvihetjük a (16) sereg bármely görbéjébe.

Az $f(u) \equiv u$ kizárt esetet a 2. § 1. példájában tárgyaltuk. Ha egyes u_1, \dots, u_n pontokban $f(u) = u$, akkor G bármely (x_0, y_0) pontján sok integrálgörbe mehet át.

Ez akkor következik be, ha az $\int_c^u \frac{d\xi}{f(\xi) - \xi}$ konvergál, ha u az u_1, \dots, u_n számok valamelyikéhez (pl. u_1 -hez) közeledik.

Az 5. ábra az integrálgörbék ez esetben való viselkedését tünteti fel. Pl. az



5. ábra

A ponton $AB_1C_1, AB_1B_2C_2, AB_1B_3C_3, \dots$ integrálgörbék mennek át. Mindezek érintik az $y = u_1 x$ egyenest.

Fé l a d a t o k. 1. Ábrázoljuk a következő egyenletek integrálgörbéinek viselkedését:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{e^y}, \quad \frac{dy}{dx} = e^x, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

2. Igazoljuk, hogy ha egy egyenlet összes integrálgörbéi hasonlóak egymáshoz, s e hasonlóság középpontja az origó, akkor ez a differenciálegyenlet homogén.

7. §. Lineáris egyenletek

Lineáris, elsőrendű differenciálegyenletnek nevezzük a

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x) \quad (17)$$

alakú egyenletet.

Tétel. *Hogyha az $a(x)$ és $b(x)$ függvények az $a < x < b$ intervallumban folytonosak, akkor az $x = a$ és $x = b$ egyenesek által határolt sáv minden pontján a (17) egyenlet egy és csak egy olyan integrálgörbéje megy át, mely az (a, b) intervallum minden x értékére értelmezett.*

Bizonyítás. Vegyük először a

$$\frac{dy}{dx} = a(x) y$$

ú. n. *homogén, lineáris* egyenletnek jóval egyszerűbb esetét.

Ez az egyenlet, az előzőnek olyan speciális esete, amikor $b(x) \equiv 0$ miatt változói szétválaszthatók. A (18) egyenletnek egy (x_0, y_0) ponton egyetlen megoldása megy át, minthogy az $\int_c^y \frac{d\eta}{\eta}$ divergens, ha $y \rightarrow 0$. Könnyű belátnunk, hogy megoldását az

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x a(\xi) d\xi}$$

képlet adja meg.

Most térjünk vissza az eredeti (17) egyenletre. Alkalmazzuk az *állandók variálásának* nevezett módszert. Az egyenlet megoldását az

$$y(x) = z e^{\int_{x_0}^x a(\xi) d\xi} \quad (19)$$

alakban keressük, ahol z nem állandóan y_0 értékű, mint előbb, hanem x -nek valamilyen függvénye. Egyszerű számításokkal igazolhatjuk, ahhoz, hogy (19) a (17) egyenlet megoldása legyen, az szükséges és elegendő, hogy $z(x)$ differenciálható legyen, és kielégítse a

$$\frac{dz}{dx} = b(x) e^{-\int_{x_0}^x a(\xi) d\xi}$$

egyenletet. (19)-ből nyilvánvaló, hogy $y(x_0) = y_0$ fennállásához szükséges és elegendő, hogy $z(x_0) = y_0$. Ezért az utóbbi egyenletből azt kapjuk, hogy

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^x b(s) e^{-\int_{x_0}^s a(\xi) d\xi} ds.$$

Tehát

$$y = z(x) \cdot e^{\int_{x_0}^x a(\xi) d\xi} = e^{\int_{x_0}^x a(\xi) d\xi} \left[y_0 + \int_{x_0}^x b(s) e^{-\int_{x_0}^s a(\xi) d\xi} ds \right]$$

függvény a (17) egyenlet egyetlen olyan megoldása, mely $x = x_0$ -nál y_0 értékű.

Feladatok. 1. Igazoljuk, hogy a

$$\frac{dy}{dx} = a(x) y + b(x) y^n$$

ú. n. Bernoulli-féle egyenletet, ha $n \neq 1$, a $z = y^{1-n}$ helyettesítéssel z -re nézve lineáris egyenletbe vihetjük át. Hogyan oldjuk meg a Bernoulli-féle egyenletet, ha $n = 1$?

8. §. Exakt egyenletek

A 2. §-ban már említettük, hogy az (1) differenciálegyenletet gyakran kényelmesebb az

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (20)$$

alakban írni (N előjelei itt és a (3) egyenletben ellenkezőek). Előfordulhat az az eset, hogy a baloldal az x és y változók egy függvényének teljes differenciálja. Ebben az esetben a (20) egyenletet *exaktnak* nevezzük.

Tegyük fel, hogy az $M(x, y)$ és $N(x, y)$ függvények első deriváltja folytonos. Akkor, mint ahogyan a differenciál és integrálszámításból ismeretes, a szükséges és elegendő feltétel ahhoz, hogy (20) baloldala teljes differenciál legyen az, hogy

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (21)$$

hacsak M és N értelmezési tartománya G egyszeresen összefüggő (azaz korlátos és egyetlen folytonos vonal határolja).

Az ilyen egyenletekre érvényes a következő:

Tétel. Az

$$a < x < b, \quad c < y < d$$

egyenlőtlenségekkel meghatározott Q téglalapban legyenek $M(x, y)$ és $N(x, y)$ függvények, valamint elsőrendű parciális deriváltjaik folytonosak, továbbá (21) feltétel teljesüljön Q -ban mindenütt és $N(x, y)$ ne váljék zérussá.

Akkor a Q téglalap minden (x_0, y_0) pontján a (20) egyenlet egy és csak egy integrálgörbéje megy át.¹⁾

Bizonyítás. Előbb rámutattunk, hogy Q -ban létezik oly $z(x, y)$ függvény, melynek teljes differenciálja (20) baloldala (N előjelének változatlanúsága itt lényegtelen). Megmutatjuk, hogy a

$$z(x, y) = z(x_0, y_0) \quad (22)$$

egyenlet oly $y = \varphi(x)$ függvényt határoz meg, mely $x = x_0$ -nál y_0 értékű, s mely kielégíti az

$$M(x, y) + N(x, y) y' = 0 \quad (23)$$

(20)-szal ekvivalens egyenletet.

Valóban, minthogy $\frac{\partial z}{\partial y} \equiv N(x, y)$ seholsem válik zérussá és folytonos, azért a (22) egyenletből az implicit függvény existenciátétele alapján $y = \varphi(x)$ az egyetlen megoldás, mely x -ben differenciálható és $x = x_0$ -nál az y_0 értéket veszi fel. Ezért a (22) egyenlőséget deriválva x szerint (mialatt y -t az x függvényének tekintjük) ezt kapjuk:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} y' = 0,$$

de

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv M, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \equiv N.$$

¹⁾ Minthogy a (20) egyenletből az M és N -re vonatkozó feltételek alapján az következik, hogy $\frac{dy}{dx}$ a Q téglalapban seholsem válik zérussá, ezért a (20) egyenlet minden Q belsejében futó integrálgörbéjének x függvény grafikonjának kell lennie.

Következésképen a $\varphi(x)$ függvény kielégíti a (23) egyenlőséget.

Most megmutatjuk, hogy a (23) egyenletnek más oly megoldása nincsen, mely $x = x_0$ -nál y_0 értékű. Tegyük fel, hogy a (23) egyenletnek a most talált $\varphi(x)$ megoldáson kívül van még egy megoldása, $\varphi_1(x)$, mely $x = x_0$ -nál szintén y_0 értékű. Ezt $z(x, y)$ -ban y helyére behelyettesítve és x szerint deriválva a

$$\frac{dz(x, \varphi_1(x))}{dx} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y=\varphi_1(x)} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y=\varphi_1(x)} \cdot \varphi_1'(x) = M(x, \varphi_1(x)) + N(x, \varphi_1(x)) \varphi_1'(x)$$

kifejezést nyerjük. Ez a kifejezés azonosan zéró, minthogy feltettük, hogy $\varphi_1(x)$ kielégíti a (23) egyenletet. Ezért a $z(x, \varphi_1(x))$ függvény állandóan megtartja azon értékét, melyet $x = x_0$ -nál vesz fel, azaz:

$$z(x, \varphi_1(x)) = z(x_0, y_0).$$

Azonban az implicit függvényre vonatkozó tétel alapján a bizonyítandó

$$\varphi_1(x) \equiv \varphi(x),$$

következik.

Példa. Adjuk meg az iránymezőt a

$$d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \equiv x dx + y dy = 0$$

egyenlettel azon G sávban, mely két olyan négyzet közt terül el, melynek középpontja az origó, oldalai a koordinátatengelyekkel párhuzamosak, oldalhosszuk 2 illetve 4 egység. Az imént igazolt tétel nem alkalmazható egyszerűen az egész G sávban, mert $N(x, y) \equiv y$ az OX tengelyen zérussá válik. De az a tétel alkalmazható egyenként a következő téglalapokra:

$$\begin{array}{ll} Q_1 & -2 < x < 2 & 1 < y < 2, \\ Q_2 & -2 < x < 2 & -2 < y < -1, \\ Q_3 & 1 < x < 2 & -2 < y < 2, \\ Q_4 & -2 < x < -1 & -2 < y < 2. \end{array}$$

Ez utóbbi két esetben az előbbi tételt úgy kell alkalmaznunk, hogy x és y szerepét felcseréljük. Ekkor egyesítve az egyes esetekben nyert részeredményeket arra jutunk, hogy egyenletünknek egy és csak egy megoldása megy át a G tartomány minden pontján. Ilyen görbe lesz az a kör (vagy körrész), mely átmegy az illető ponton és középpontja az origó.

F e l a d a t o k. 1. Teljes differenciálja lesz-e az

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$$

valamely függvénynek az előbbi példa egész tartományában?

2. Ugyanezt a kérdést vizsgáljuk meg az

$$\frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$$

kifejezés esetében.

9. §. Az integráló tényező

Ha a (20) egyenlet baloldala teljes differenciál, akkor a (22) egyenlőséget teljesítő $z(x, y)$ függvény meghatározása két kvadraturához vezet (ahogyan ez a differenciál- és integrálszámításból bizonyára ismeretes is). Azonban, ha a (21) azonosság nem teljesül, a (20) egyenlet akkor is aránylag egyszerűen visszavezethető arra az esetre, amikor (20) baloldala teljes differenciál. Ez az ú. n. *integráló tényező* $[\mu(x, y)]$ segítségével történik — ez az x, y változók olyan függvénye, mellyel való szorzás révén (20) egyenlet baloldala teljes differenciállá válik. Ha $M(x, y)$, $N(x, y)$ és $\mu(x, y)$ függvények folytonos deriváltakkal rendelkeznek, akkor kell, hogy a $\mu(x, y)$ integráló tényező a

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

feltételnek eleget tegyen, azaz:

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right). \quad (24)$$

(24) egy lineáris, elsőrendű, parciális differenciálegyenlet. Ahhoz, hogy (20) baloldalát teljes differenciállá változtassuk, elég tudnunk a (24) egyenlet egyetlen speciális megoldását¹⁾; általában a (24) egyenletnek végtelen sok ilyen megoldása lehet (lásd a „Függelék”-et). Tehát ugyanannak a közönséges differenciálegyenletnek végtelen sok integráló tényezője lehet.

Tegyük fel, hogy a (20) egyenletnek van olyan $\mu(x, y)$ integráló tényezője, mellyel való szorzás révén (20) baloldala valamely $z(x, y)$ függvény teljes differenciáljává válik. Ekkor könnyen beláthatjuk, hogy

$$\mu f(z(x, y))$$

is integráló tényezője a (20) egyenletnek, ahol $f(z)$ a z tetszőleges, folytonos függvénye.

Ugyanis:

$$\mu f(z) (M dx + N dy) = f(z) dz = dF(z),$$

ahol $F(z)$ az $f(z)$ valamely primitív függvénye.

Kimutatjuk az alábbi tételt, mely az imént mondottaknak bizonyos mértékben ellenkezője.

Tétel. *Tegyük fel, hogy a (20) egyenlet $M(x, y)$ és $N(x, y)$ függvényei folytonosak, s hogy $N(x, y)$ a Q négyszögben seholsem válik zérussá. Létezzék továbbá a (20) egyenlet két olyan folytonos integráló tényezője, $\mu_1(x, y)$ és $\mu_2(x, y)$, mely Q -ban seholsem válik zérussá (tehát mely Q -ban nem vált jelet). A megfelelő függvényeket $z_1(x, y)$ és $z_2(x, y)$ -vel jelölve:*

$$dz_1 = \mu_1 (M dx + N dy) \quad (25)$$

$$dz_2 = \mu_2 (M dx + N dy). \quad (26)$$

Állítjuk, hogy Q minden (x_0, y_0) pontjának van olyan környezete, ahol a $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ hányados csak a z_1 függvénye.

¹⁾ Nyilvánvaló, hogy (24) triviális, azonosan eltűnő megoldása egyáltalán nem jöhet számításba.

1. Megjegyzés. A tétel megfogalmazásában $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ helyett $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ -t is vehetünk volna, hasonlóképpen z_1 helyett z_2 -t, mivel z_1 és z_2 szerepe teljesen azonos

Bizonyítás. I. Mindenekelőtt kimutatjuk a Q négyszög bármely (x_0, y_0) pontjára nézve, hogy az (x_0, y_0) ponton áthaladó

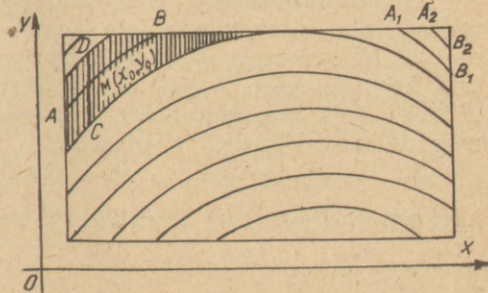
$$z_1(x, y) = z_1(x_0, y_0) \quad (27)$$

$$z_2(x, y) = z_2(x_0, y_0) \quad (28)$$

görbék kicsiny szakaszai egybeesnek. Ugyanis a (25) és (26)-ból következik, hogy

$$dz_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} dz_1. \quad (29)$$

Mint hogy $\mu_1(x, y)$ és $\mu_2(x, y)$ Q belsejében seholsem válnak zérussá, ezért (29) miatt dz_1 és dz_2 csakis egyidejűen válhatnak zérussá. Vegyük most a (27) vonalnak olyan szakaszát, melyen az (x_0, y_0) pont rajta van. Míg az (x, y) pont ezen mozog, $dz_1 = 0$. Innen (29) alapján az következik, hogy az említett szakaszon dz_2 is zérus. Tehát ezen a szakaszon a $z_2(x, y)$ is megtartja azt az értéket, melyet az (x_0, y_0) pontban vett fel, azaz az említett (27) szakasz egyúttal a (28) vonalon is rajta van. Pontosan ugyanígy igazolhatjuk, hogy a Q téglalap bármely (x_0, y_0) pontján átmenő (28)-as szakasz rajta van a (27) vonalon is.



6. ábra

Megjegyezzük, hogy ha a (27) és (28) vonalak több darabból állnak, akkor nem kell minden darabjuknak egybeesni. A 6. ábrán egy ilyen példát mutatunk be. A

$$z_1(x, y) = z_1(x_0, y_0)$$

vonal álljon az AB, A_1B_1 darabokból, a

$$z_2(x, y) = z_2(x_0, y_0)$$

vonal pedig az AB, A_2B_2 darabokból.

2. Vegyük fel Q téglalap belsejében egy függőleges CD szakaszt (6. ábra), melyen belül rajta van az $M(x_0, y_0)$ pont. Jelölje G azt a tartományt, melyet a (27) vonalsereg borít, míg az (x_0, y_0) pont végigfut a CD szakaszon. Ezt a tartományt rajzunkon bevonaltuk. Azt állítjuk, hogy ebben $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ a z_1 függvénye. Ennek igazolására a

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} = \mu_1 N$$

azonosságot használjuk fel. Mint hogy μ_1 és N seholsem tűnik el, a (27) vonalsereg G -ben haladó különböző vonalain a z különböző értékeket veszi fel. Ezért egy megadott z_1 értékkel teljesen meghatározzuk a (27) vonalsereg egy vonalát a G tartományban. Ez a görbe azonban egyúttal (28) vonalseregnek is vonala,

s minthogy ennek mentén viszont $z_2(x, y)$ egy bizonyos konstáns értéket vesz fel, ezért a $z_2(x, y)$ a G tartományban csak a $z_1(x, y)$ -nak függvénye, azaz

$$z_2(x, y) = \varphi(z_1(x, y)).$$

Innen következik, hogy

$$dz_2 = \varphi'(z_1) dz_1, \quad (30)$$

ebben pedig $\varphi'(z_1)$ létezik, mert $\frac{\partial z_2}{\partial y}$ és $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ léteznek, és $\frac{\partial z_1}{\partial y} \neq 0$. Egybevetve a (29) és (30) egyenlőséget, azt kapjuk, hogy:

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \varphi'(z_1), \quad (31)$$

azaz a $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ arány valóban csak a z_1 -nek függvénye.

Ha igazolnánk, hogy $\varphi'(z_1)$ a z_1 monoton függvénye, akkor (31)-ből meghatározhatnánk a z_1 -et, mint x és y függvényét.

2. Megjegyzés. A 6. ábra szemléletesen azt mutatja, hogy a z_2 nem kell, hogy az egész Q téglalapon függvénye legyen a z_1 -nek. Ugyanis, ha z_1 az AB és A_1B_1 vonaldarabokon ugyanazt az értéket veszi is fel, azért z_2 ezeken még különböző értékeket vehet fel.

3. Megjegyzés. Ha a Q téglalapon $z_1(x, y)$ és $z_2(x, y)$ függvények folytonos első parciális deriváltakkal rendelkeznek, $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ seholsem válik zérussá, és a Jacobi-féle determináns

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

akkor a Q téglalap tetszőleges (x_0, y_0) pontjának eléggé kis környezetében a z_2 a z_1 függvénye.

Ugyanis a tett feltételek mellett a fenti Jacobi-féle determináns második sorának elemei arányosak az első sor elemeivel. Ezért:

$$dz_2 = \frac{\frac{\partial z_2}{\partial y}}{\frac{\partial z_1}{\partial y}} dz_1,$$

tehát az előbbi eredményeket itt alkalmazhatjuk. A 6. ábra ismét azt az esetet mutatja, mikor a z_2 nem az egész Q téglalapon függvénye z_1 -nek.

Ezzel az elsőrendű, közönséges differenciálegyenletek elemi integrálási módjainak tárgyalását befejezzük. Más elemi integrálási módszerek pl. V. Sztyepanov és Goursat könyveiben találhatók. Tulajdonképpen ezek a módszerek a különböző differenciálegyenleteket az itt elemzett típusok valamelyikére vezetik vissza.

III. FEJEZET

AZ ÁLTALÁNOS ELMÉLET

Kevés az olyan differenciálegyenlet, melynek integráljai elemi módszerekkel megállapíthatók. Liouville¹⁾ kimutatta, hogy már a $\frac{dy}{dx} = a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x)$ alakú ú. n. Riccati-féle differenciálegyenlet integrálása sem vezethető vissza kvadratúrákra. Ezért nagy a jelentősége a differenciálegyenletek közelítő megoldási módszerének, mely a differenciálegyenletek igen széles osztályára alkalmazható. Mielőtt azonban rátérünk a megoldások közelítő keresésére, meg kell győződnünk arról, hogy ezek valóban léteznek, azaz léteznek az, amit közelítően ki akarunk számítani. E fejezet kezdetét is ilyen existenciátételeknek szenteljük. Érdekes, hogy ezen tételek igazolásai gyakran a közelítő megoldások keresésére is módszerül szolgálnak (pl. 10. §., 14. §., 15. § és 18. §).

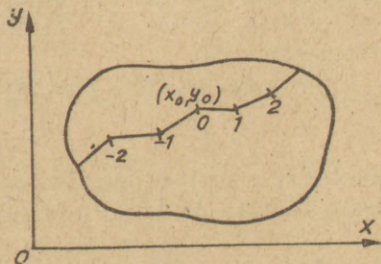
10. §. Az Euler-féle törtvonalak

Vegyük a

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

differenciálegyenletet. Legyen G az $f(x, y)$ függvény értelmezési tartománya. Azt már tudjuk, hogy (1) G -ben iránymezőt határoz meg, s hogy ennek irányai integrálvonalat adhatnak.

Vegyünk fel G -ben egy (x_0, y_0) pontot. Ennek olyan egyenes felel meg, mely ezen átmegy és iránytényezője $f(x_0, y_0)$. Válasszuk ki ezen az egyenesen a G tartomány egy (x_1, y_1) pontját (ezt a 7. ábrán 1-gyel jelöljük). Az (x_1, y_1) ponton oly egyenest fektetünk át, melynek iránytényezője $f(x_1, y_1)$, ezen meg kijelöljük G tartomány (x_2, y_2) pontját, (ezt a 7. ábrán 2-vel jelöljük). Ezután az (x_2, y_2) pontnak megfelelő egyenesen kijelöljük az (x_3, y_3) pontot, és így tovább. Legyen $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ (e sorozat felépítése persze a csökkenő x -ek irányában is folytatható). Ezáltal egy törtvonalat kapunk, ez az ú. n. *Euler-féle törtvonal*. Természetesen tartjuk azt, hogy ha ennek az Euler-féle törtvonalnak szakaszai elég rövidek, akkor ez



7. ábra

¹⁾ Journal des mathématiques, t. 6 (1841).

mintegy az (x_0, y_0) ponton átmenő integrálgörbéről ad valamilyen képet, és hogyha az Euler-féle törtvonalak szakaszainak hosszát egyre csökkentjük, azok ehhez az integrálgörbéhez közelednek; ha ugyan létezik egyáltalán ilyen integrálgörbe. Valóban, alább ki is mutatjuk, hogy ha az $f(x, y)$ függvény folytonos, kiválaszthatunk olyan Euler-féle törtvonalsorozatot, mely konvergál ahhoz az integrálgörbéhez. Az unicitás azonban itt már általában nem áll fenn, azaz különböző Euler-féle törtvonalsorozatok képezhetők, melyek különböző, ugyanazon az (x_0, y_0) ponton átmenő integrálgörbékhez konvergálnak. M. A. Lavrentjev olyan (1) típusú differenciálegyenletet konstruált, melynél a G tartomány minden pontjának tetszőleges környezetében magán a ponton nem egy, hanem legalább két integrálgörbe fut át, noha az $f(x, y)$ függvény folytonos¹⁾. Ahhoz, hogy az (x_0, y_0) ponton *csak egy* integrálgörbe fusson át, az $f(x, y)$ függvénynek még más feltételeket is teljesítenie kell.

Alább tárgyaljuk annak bizonyítását, hogy az (1) differenciálegyenletnek valóban létezik olyan integrálgörbéje, mely átmegy az (x_0, y_0) ponton. Ez a bizonyítás Arzela tételén alapul és tulajdonképpen Peanótól származik. Nyilván minden ilyen görbe az (1) differenciálegyenlet egy *megoldásának grafikonja*.

Feladat. Az $f(x, y)$ függvény értelmezési tartománya legyen az

$$a \leq x \leq a', \quad -\infty < y < \infty, \quad a < a'$$

által meghatározott sáv, amelyben $f(x, y)$ folytonos és korlátos. Igazoljuk, hogy az (1) egyenletnek az (a, b) pontból kiinduló Euler-féle törtvonalainak összessége fedi azt az E halmazt, melynek felső határvonala az alulról konvex $y = \varphi_1(x)$ ($a \leq x \leq a'$) görbe, alsó határvonala pedig az alulról konkáv $y = \varphi_2(x)$ ($a \leq x \leq a'$) görbe, jobbról az $x = a'$ egyenes. Továbbá tudjuk még, hogy

$$\varphi_1(a) = \varphi_2(a) = b, \quad \varphi_1'(a) = \varphi_2'(a) = f(a, b);$$

és hogy a $\varphi_1(x)$ függvény jobb- és baloldali differenciálhányadosainak értéke semilyen x pontban sem kisebb, mint az $f(x, \varphi_1(x))$ érték, a $\varphi_2(x)$ jobb- és baloldali differenciálhányadosainak értéke pedig nem nagyobb, mint $f(x, \varphi_2(x))$. A $\varphi_1(x)$ és $\varphi_2(x)$ vonalak akár részben, akár egészben az E -hez tartozhatnak.

11. §. Arzela tétele

Legyen adva az $(a, b)^2$ intervallumban egy olyan $\{f(x)\}$ függvényhalmaz, mely végtelen sok egyenletesen korlátos és egyenlő mértékben folytonos $f(x)$ függvényből áll. Akkor ezen halmazból kiválasztható egy végtelen, egyenletesen konvergens függvény sorozat.

Az egyenletes korlátosság ezt jelenti: létezik olyan M konstáns, hogy

$$|f(x)| < M,$$

ahol $f(x)$ a halmaz tetszőleges függvénye, x pedig az (a, b) intervallum tetszőleges száma. Az egyenlő mértékű folytonosság pedig ezt jelenti: bár-

¹⁾ Sur une équation différentielle du premier ordre. Math. Zeitschrift B. 23. (1925), 197–209. l.

²⁾ z mindegy, hogy ez az intervallum zárt-e vagy nyílt, azaz hozzávesszük-e végpontjait vagy sem.

hogyan is adunk meg előre egy $\varepsilon > 0$ számot, mindig található olyan, csak az ε -tól függő η szám, hogy a tekintett halmaz minden $f(x)$ függvényére:

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

az (a, b) intervallum tetszőleges x'' és x' helyeire, ha csak

$$|x'' - x'| < \eta.$$

Bizonyítás.¹⁾ A vizsgált halmaz egyenletes korlátossága miatt összes függvényeinek grafikonjai oly $ABCD$ téglalapban foglaltatnak, melynek oldala $2M$ és $b - a$ (8. ábra).

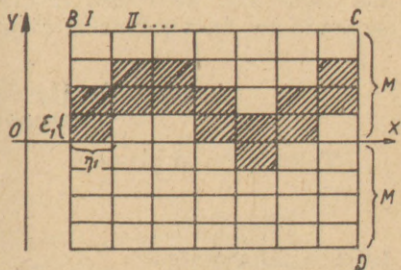
Vegyük a következő végtelen számsorozatot

$$\varepsilon_1 = \frac{M}{2^{\alpha+1}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{M}{2^{\alpha+2}}, \quad \dots, \quad \varepsilon_k = \frac{M}{2^{\alpha+k}}, \quad \dots,$$

ahol α tetszőleges pozitív, egész szám vagy zéró. Az egyenlő mértékű folytonosság definíciója alapján minden ε_k -nak megfelel egy $\eta_k = \eta(\varepsilon_k)$ szám.

Az $ABCD$ téglalap függőleges oldalát osszuk fel ε_1 hosszúságú szakaszokra; vízszintes oldalát pedig olyan szakaszokra, melyek mindegyikének hossza az η_1 számnál kisebb vagy azzal egyenlő.

Húzzunk az így nyert pontokon át párhuzamosokat a koordinátatengelyekkel. Ílymódon a teljes $ABCD$ téglalapot kisebb téglalapokra bontottuk. Az ezekből álló vertikális sávokat I, II, III, ... római számokkal jelöljük. Minthogy $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon_1$ ha csak $|x'' - x'| < \eta_1$, azért az $\{f(x)\}$ halmaz bármely függvényének grafikonja bármely ilyen sávban legfeljebb két szomszédos téglalapocskában haladhat; így pl. az I sávban is. Azonban az I sávban véges számú téglalappár van, tehát benne legalább egy olyan szomszédos téglalappár van, melyen a vizsgált halmaz végtelen sok függvényének grafikonja megy át. Ezt a téglalappárt a 8. ábrán (ahol $a = 1$) beárnyékoltuk. Most csak azokat a függvényeket tekintjük, melyek képe I sáv beárnyékoltt téglalapjain megy át. Ilyen függvény végtelen sok van. Könnyen beláthatjuk, hogy e függvények képei a II sávnak négy téglalapocskájában haladhatnak, minden egyes ilyen függvény grafikonja pedig legfeljebb két szomszédos kis téglalapban haladhat.



8. ábra

Tehát a II sávban van két olyan szomszédos téglalap, melyen az $\{f(x)\}$ végtelen sok függvényének grafikonja megy át, s mindezek olyanok, hogy már az I sávnak is csak beárnyékoltt téglalapocskájában haladhatnak. A II sáv e téglalapjait is beárnyékoljuk. Analóg okoskodva tovább, nyerünk egy a teljes (a, b) intervallum „fölötti” olyan $2\varepsilon_1$ szélességű sávot, melyen az $\{f(x)\}$ halmaz végtelen sok függvényének grafikonja megy át. Ezt az s_1 sávot beárnyékoljuk. Ezen grafikonok közül válasszunk ki egyet, tartozzék ez az $f_1^*(x)$ függvényhez. Az s_1 -en áthaladó többi függvények halmazát $\{f_1(x)\}$ -szel jelöljük.

Ismételjük most meg az $\{f_1(x)\}$ halmazra azt az eljárást, melyet fentebb az $\{f(x)\}$ halmazra alkalmaztunk, azzal a változtatással, hogy ε_1 helyett most vegyünk ε_2 -t, η_1 helyett pedig η_2 -t. Ezáltal egy olyan s_1 -ben fekvő, $2\varepsilon_2$ széles-

¹⁾Ezt a bizonyítást L. A. Ljusztjerynyik közölte velem.

ségű s_2 sávot kapunk, melyen az $\{f_1(x)\}$ végtelen sok függvényének grafikonja megy át. Ezen függvények egyikét jelölje $f_2^*(x)$, a végtelen halmaz többi függvényét $\{f_2(x)\}$. Folytatva ezt az okoskodást az

$$f_1^*(x), f_2^*(x) \dots$$

végtelen függvénsorozatot nyerjük. Az $f_k^*(x)$ függvénytől kezdve e függvények grafikonja egy $\frac{M}{2^{k+\alpha-1}}$ szélességű s_k sávban fekszik. Tehát ez a sorozat egyenletesen konvergens. Qu. e. d.

F e l a d a t o k. 1. Igazoljuk példákon, hogy az Arzela-tétel megfogalmazásában mind az egyenletes korlátosság, mind az egyenlő mértékű folytonosság feltételezése lényeges: s ha ezeknek csak egyikéről is lemondunk, a tétel nem igaz.

2. Fogalmazzuk meg és igazoljuk Arzela tételét többváltozós függvényekre (a változók legyenek egymástól függetlenek)!

3. Igaz-e az Arzela-tétel, ha megfogalmazásában a tekintett függvények végtelen intervallumban adottak?

4. Igazoljuk, hogy az Arzela-tétel megfogalmazásában tekintett függvényeknek nem kell az egész intervallumban egyenletesen korlátosoknak lenniök, elegendő az, ha a tekintett függvényhalmaz csak egy pontban korlátos.

12. §. Az (1) differenciálegyenlet megoldásának Peano-féle existenciabizonyítása

Tekintsük adottnak a

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

differenciálegyenletet.

Tétel. Ha az $f(x, y)$ függvény a G tartományban folytonos és korlátos, akkor az (1) egyenletnek e tartomány minden belső (x_0, y_0) pontján legalább egy integrálgörbéje megy át.

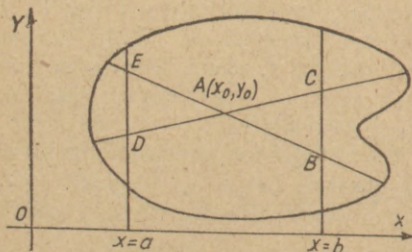
Bizonyítás. Legyen

$$|f(x, y)| < M.$$

A G tartomány egy (x_0, y_0) pontján egy M és egy $-M$ irányítványozó egyenest fektetünk át. Továbbá húzzuk meg úgy az OY tengellyel párhuzamos $x = a$ és $x = b$ ($a < x_0 < b$) egyeneseket, hogy a keletkezett közös (x_0, y_0) csúcsponttal rendelkező két egyenlőszárú háromszög mindegyike egészen a G tartományban fekdjék. Szerkesszük most meg az (x_0, y_0) ponton áthaladó Euler-féle törtvonalaknak $L_1, L_2, \dots, L_k, \dots$ végtelen sorozatát a 10. §-ban jelezett módon, úgy, hogy az L_k vonal leghosszabb szakasza zérushoz tartson, míg $k \rightarrow \infty$. Minden törtvonal x egy folytonos függvényét ábrázolja, mert egy, az OY tengellyel párhuzamos egyenes mindegyiket csak egy pontban metszi. Legyen az L_k a $\varphi_k(x)$ függvény grafikonja. A

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x), \dots \quad (32)$$

függvények rendelkezzenek az alábbi tulajdonságokkal:



9. ábra

1. Mindegyik ugyanabban a véges, zárt $[a, b]^1$ intervallumban van értelmezve. Ugyanis a $\varphi_k(x)$ függvényről csak akkor mondhatnánk, hogy nincsen az egész intervallumra értelmezve, ha a neki megfelelő Euler-féle törtvonal az $[a, b]$ intervallum „fölött” kinyúlna G tartományból. Ez azonban lehetetlen, mert az Euler-féle törtvonalak nem juthatnak ki az ABC és ADE háromszögekből a BE illetve DC szakaszokon keresztül, hiszen szakaszainak irányítványozója abszolút értékben nem nagyobb M -nél.

2. Ezek egyenletesen korlátosak, mert grafikonjaik az ABC és ADE háromszögekben helyezkednek el.

3. A

$$\varphi_k(x'') - \varphi_k(x') = \int_{x'}^{x''} \varphi_k'(\xi) d\xi$$

különbség abszolút értékére

$$|\varphi_k(x'') - \varphi_k(x')| \leq M |x'' - x'|$$

áll fenn.

Ebből következik, hogy a (32) függvényhalmaz egyenlő mértékben folytonos. Ezért az Arzela-tétel alapján a (32) függvényhalmazból kiválaszthatunk egy az egész $[a, b]$ zárt intervallumban egyenletesen konvergens részsorozatot. Legyen ez

$$\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \dots, \varphi^{(k)}(x), \dots$$

E sorozat határfüggvényét jelöljük $\varphi(x)$ -szel.

Nyilvánvaló, hogy ez kielégíti a $\varphi(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt.

Most megmutatjuk, hogy a $\varphi(x)$ függvény kielégíti az (1) differenciálegyenletet az (x_0, b) intervallum belsejében [az (a, x_0) intervallumra analóg megfontolásokat alkalmazhatunk]. E célból vegyünk fel tetszőlegesen egy x' pontot az (x_0, b) intervallum belsejében. Megmutatjuk, hogy tetszőleges pozitív ε -ra

$$\left| \frac{\varphi(x'') - \varphi(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi(x')) \right| < \varepsilon, \quad (33)$$

hacsak $|x'' - x'|$ eléggé kicsi. (33) igazolására elegendő megmutatnunk, hogy ha k elég nagy

$$\left| \frac{\varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi(x')) \right| < \varepsilon, \quad (34)$$

hacsak az x'' az x' -hez elég közel van, mert

$$\varphi^{(k)}(x') \rightarrow \varphi(x') \quad \text{és} \quad \varphi^{(k)}(x'') \rightarrow \varphi(x''),$$

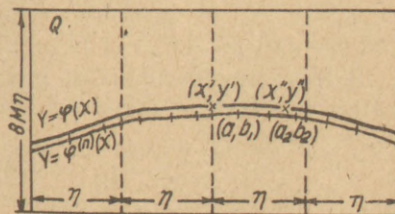
míg $k \rightarrow \infty$.

Mivel az $f(x, y)$ függvény folytonos a G tartományban, tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz tartozik oly $\eta > 0$, hogy mindig

$$f(x', y') - \varepsilon < f(x, y) < f(x', y') + \varepsilon, \quad [y' = \varphi(x')]$$

hacsak

$$|x - x'| < 2\eta, \quad |y - y'| < 4M\eta.$$



10. ábra

¹⁾ Az intervallum zártságát szokásos zárójellel jelöljük, a gömbölyű zárójelet nyílt intervallumok jelölésére tartjuk fenn.

A Q téglalappal ábrázoljuk a G tartomány mindazon (x, y) pontjainak összességét, melyek az utóbbi két egyenlőtlenséget kielégítik (10. ábra). Válasszuk K -t oly nagyra, hogy

$$|\varphi(x) - \varphi^{(k)}(x)| < M\eta$$

az (a, b) intervallumban, ha csak $k > K$; és legyen az L_k vonal minden szakasza

η -nál rövidebb. Akkor minden $y = \varphi^{(k)}(x)$ Euler-féle törtvonal teljesen a Q téglalapon fekszik, ha csak $k > K$ és $|x - x'| < 2\eta$.

Másrészt

$$\varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(x') = \int_{x'}^{x''} \frac{d\varphi^{(k)}(x)}{dx} dx$$

Az előbbiek alapján $\frac{d\varphi^{(k)}(x)}{dx}$ az $f(x', y') - \varepsilon$ és $f(x', y') + \varepsilon$ között van, ha csak $|x'' - x'| < \eta^1$. Innen az $x'' > x'$ feltevés mellett az

$$[f(x', y') - \varepsilon](x'' - x') < \varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(x') < [f(x', y') + \varepsilon](x'' - x')$$

eredményt kapjuk. Q_u . e. d.

1. Megjegyzés. Ha a fenti megfontolásokat az (x_0, b) intervallumra az $x' = x_0$ esetben alkalmazzuk, azt kapjuk, hogy a $\varphi(x)$ jobboldali deriváltja az $x = x_0$ pontban

$$\lim_{x'' \rightarrow x_0 + 0} \frac{\varphi(x'') - \varphi(x_0)}{x'' - x_0} = f(x_0, \varphi(x_0)).$$

A fenti megfontolásokat ugyanígy alkalmazhatjuk az (x_0, b) intervallumra az $x' = b$ esetben, s akkor azt kapjuk, hogy a $\varphi(x)$ baloldali deriváltja az $x = b$ pontban

$$\lim_{x'' \rightarrow b - 0} \frac{\varphi(x'') - \varphi(b)}{x'' - b} = f(b, \varphi(b)).$$

Analóg állításokat kapunk az (a, x_0) intervallum végpontjaira.

2. Megjegyzés. A fenti okoskodásokkal oly $\varphi(x)$ függvényt szerkesztettünk, mely $x = x_0$ -nál y_0 értékű, azonban az (1) feltételt csak az $[a, b]$ intervallumban teljesíti. Tekintsük az $y = \varphi(x)$ vonaldarab egyik (mondjuk jobboldali) végpontját. Ha az (x_0, y_0) pont helyett e végpontot választjuk kiindulásnak, és tőle jobbra szerkesztjük meg az Euler-féle törtvonalakat, fenti okoskodásaink igazak maradnak, mivel a végpont G belső pontja. Ily módon az integrálgörbe megszerkesztett darabjának folytatását kapjuk.

Azzal, hogy az éppen megszerkesztett vonaldarab jobboldali végpontját vesszük egy újabb darab szerkesztési kiindulásának, az eljárás tetszőlegesen folytatható. Az ily módon nyert integrálgörbe tetszőlegesen megközelíti G határát, ha csak G korlátos. Ha ugyanis az eljárásunk során nyert ABC vagy ADE háromszögláncban végtelen sok olyan lenne, melynek szára $\varepsilon > 0$ nagyságú,

¹⁾A Q téglalap meghatározásánál azért vettünk $|x - x'| < 2\eta$ -t $|x - x'| < \eta$ helyett, hogy az $x = x' - \eta$ és $x = x' + \eta$ egyenesek között haladó törtvonalnak balra (illetve jobbra) fekvő legszélső szakaszainak iránytényezőjét is meghatározhassuk, ha ezek kezdőpontja az (x', y') ponttól jobbra (balra) van. Nem biztos, hogy ezeknek a szakaszoknak kezdőpontja az utóbbi intervallumban fekszik, csak az, hogy a szakasz az $x = x' - 2\eta$ és $x = x' + 2\eta$ egyenesek közt van, ha csak a szakasz hossza elég kicsi.

akkor így az integrálgörbét az OX tengely tetszőlegesen nagy intervallumára kapnánk meg, ami G korlátossága folytán lehetetlen. Tehát az ABC vagy ADE típusú háromszögek G határát tetszőlegesen kell, hogy közelítsék.

3. M e g j e g y z é s. Tételünk igaz marad, ha az $f(x, y)$ függvénytől a G -ben csak a folytonosságot követeljük meg, hiszen minden ilyen függvény korlátos, bármely határával együtt G -ben fekvő G' tartományban. Az olvasó ebből kiindulva azt is könnyen beláthatja, hogy a második megjegyzés ebben az esetben is érvényes.

F e l a d a t o k. 1. Legyen a G tartomány az $a < x < a'$ sáv, s f ebben folytonos és korlátos. Igazoljuk a következőket: amennyiben a tartomány egy (x_0, y_0) pontján az (1) egyenletnek egynél több integrálgörbéje megy át, akkor ezek közül két kitüntetett $y = \varphi_1(x)$ és $y = \varphi_2(x)$ integrálvonal (a Montel-féle legnagyobb és legkisebb megoldások) létezik, melyek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek: 1. $\varphi_2(x) \leq \varphi_1(x)$, $a < x < a'$, 2. A G sávnak az $y = \varphi_1(x)$ és $y = \varphi_2(x)$ vonalak közti részét teljesen befedi az (x_0, y_0) ponton áthaladó integrálvonalak, e síkrészen kívül azonban egyetlen e ponton áthaladó integrálvonal sem fut át.

2. Igazoljuk egyenletünk megoldásának existenciátételét az alábbi módon (Perron-féle módszer). Nevezzük az (x_0, b) -ben felső függvénynek minden olyan folytonosan differenciálható $\varphi(x)$ függvényt, melyre (9. ábra)

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x) > f(x, \varphi(x)), \quad x_0 \leq x \leq b.$$

Akkor: a) felső függvények léteznek, b) a felső függvények összességének alsó határa az (1) egyenletnek egy az (x_0, y_0) ponton áthaladó integrálvonala (nevezetesen az első feladatban említett legnagyobb megoldás). Analóg definiálhatjuk az alsó függvényeket és vehetjük azok felső határát. Analóg járhatunk el, ha $x < x_0$.

3. A G tartományban értelmezett $f(x, y)$ és $F(x, y)$ korlátos függvényekre teljesüljön

$$F(x, y) \geq f(x, y).$$

Tegyük fel, hogy az $F(x, y)$, ill. $f(x, y)$ függvény felülről, illetve alulról félig folytonos. Ez azt jelenti, hogy

$$F(x, y) = \limsup_{\substack{t \rightarrow x \\ s \rightarrow y}} F(t, s)$$

illetve

$$f(x, y) = \liminf_{\substack{t \rightarrow x \\ s \rightarrow y}} f(t, s).$$

Akkor a tekintett tartomány bármely (x_0, y_0) pontján legalább egy olyan $y = \varphi(x)$ görbe megy át, melynek bármely pontjában a

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$

tört összes limeszei (míg $\Delta x \rightarrow 0$) az $F(x, y)$ és $f(x, y)$ érték közé esnek. Általában minden (x_0, y_0) ponton több ilyen görbe megy át, azonban ezek között (az 1. feladatban említett értelemben) van legkisebb és legnagyobb.

13. §. Az Osgood-féle unicitás-tétel

T é t e l. Ha az $f(x, y)$ függvény a G tartomány bármely két pontjára kielégíti az

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq \varphi(|y_2 - y_1|) \quad (35)$$

1) Ezen folytonos deriválttal rendelkező függvényt értünk.

feltételt, ahol $\varphi(u) > 0$ és folytonos a $0 < u \leq a$ -ban, valamint az $\int_{\varepsilon}^a \frac{du}{\varphi(u)} \rightarrow \infty$,

míg $\varepsilon \rightarrow 0$, akkor az (1) egyenletnek legfeljebb egy integrálgörbéje megy át a G tartomány minden (x_0, y_0) pontján.

Ilyen $\varphi(u)$ típusú függvények pl. a következők

$$Ku, \quad Ku \cdot |\ln u|, \quad Ku \cdot |\ln u| \cdot \ln |\ln u|, \quad Ku \cdot |\ln u| \cdot \ln |\ln u| \cdot \ln \ln |\ln u|$$

és így tovább. K itt egy pozitív konstans jelöl.

Ezen unicitástételt igen gyakran használják a $\varphi(u) \equiv Ku$ helyettesítéssel. Ebben az esetben a (35) feltételt így írhatjuk át:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K |y_2 - y_1|. \quad (36)$$

Ez az úgynevezett Lipschitz-feltétel a y -ra nézve. Speciálisan, ha a G tartomány az y -ra nézve konvex,¹⁾ akkor ennek a feltételnek eleget tesznek az y -szerint korlátos parciális deriválttal rendelkező függvények. Ugyanis, ha ebben az esetben a Lagrange-tételt alkalmazzuk, az

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |f'_y(x, y_1 + \mathcal{O}(y_2 - y_1))| |y_2 - y_1| \leq K |y_2 - y_1|$$

egyenlőtlenséget kapjuk.

Itt a K az $|f'_y|$ értékének felső határát jelöli.

Bizonyítás. Létezzék két olyan $y_1(x)$ és $y_2(x)$ megoldás, hogy

$$y_1(x_0) = y_2(x_0) = \bar{y}_0.$$

Feltehetjük, hogy $x_0 = 0$, ellenkező esetben ez az $x = x' + x_0$ helyettesítéssel elérhető. Legyen

$$y_2(x) - y_1(x) = z(x).$$

Van olyan x_1 , melynél $z(x_1) \neq 0$, mert $y_2(x) \neq y_1(x)$. Feltehetjük, hogy $z(x_1) > 0$, mert ellenkező esetben az $y_1(x) - y_2(x)$ különbséget jelölnénk $z(x)$ -szel. Az általánosság korlátozása nélkül azt is feltehetjük, hogy $x_1 > 0$, mert ellenkező esetben az $x = -x'$ helyettesítést végezhetjük. Megjegyezzük még, hogy

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(y_2 - y_1)}{dx} = f(x, y_2) - f(x, y_1) \leq \varphi(|y_2 - y_1|) < 2\varphi(|y_2 - y_1|), \quad (37)$$

hacsak $|y_2 - y_1| > 0$.

Vizsgáljuk most a

$$\frac{dy}{dx} = 2\varphi(y)$$

egyenletnek azt az $y(x)$ megoldását, mely $x = x_1$ -nél az $z(x_1) = z_1$ értéket veszi fel. Ilyen megoldás egy és csak egy van (lásd a 4. §-t). E megoldás grafikonja aszimptotikusan közeledik az OX tengely negatív részéhez, de azt sehol sem metszi.

A $z(x)$ és $y(x)$ görbék az (x_1, z_1) pontban metszik egymást. A

$$z'(x_1) < 2\varphi(z_1) = 2\varphi(y(x_1)) = y'(x_1)$$

¹⁾ A G tartományt akkor mondjuk y -ra nézve konvexnek, ha bármely az y tengellyel párhuzamos AB szakasz, melynek A és B végpontja a G -hez tartozik, teljesen G belsejében fekszik.

egyenlőtlenségből azonnal következik, hogy $\varepsilon > 0$ mellett van olyan $(x_1 - \varepsilon, x_1)$ intervallum, melyben

$$z(x) > y(x).$$

De kell, hogy ez az egyenlőtlenség mindig teljesüljön, hacsak az ε -ra $0 < \varepsilon \leq x_1$, mert ha az ε -nak valamilyen más felső határt szabunk, akkor azonnal ellentmondásra jutunk. Ugyanis ekkor $x_1 - \varepsilon = x_2$ értéknél azt kapnánk, hogy

$$z'(x_2) \geq y'(x_2) = 2\varphi(y(x_2)) = 2\varphi(z(x_2)),$$

mert

$$z(x) > y(x),$$

ha

$$x > x_2.$$

Másrészt a (37) folyományaként a

$$z'(x_2) < 2\varphi(z(x_2)),$$

kapjuk, ami az előzőnek ellentmond.

Ez azt jelenti, hogy

$$z(x) > y(x) > 0;$$

hacsak $0 \leq x < x_1$; speciálisan $z(0) > 0$, azonban ez ellentmond kezdeti feltételünknek.

F e l a d a t o k. 1. Ha $\varphi(0) = 0$ és $\varphi'(0) = 0$, és a G tartomány y -ra konvex, akkor a (35) feltételt kielégítő $f(x, y)$ függvény y -ra nézve konstáns. Ez speciálisan $\varphi(u) = u^p$, $p > 1$ esetén is igaz.

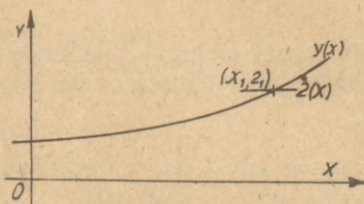
2. Ha olyan $\varphi(u)$ függvényt választunk, melynek grafikonja felülről konvex, akkor az e paragrafusban igazolt tétel fennállásának az $\int_0^\varepsilon \frac{du}{\varphi(u)}$ divergens volta nemcsak elegendő, de szükséges feltétele is.

3. Ha $\varphi(0) = 0$ és $\varphi'(0)$ létezik, akkor $\int_0^\varepsilon \frac{du}{\varphi(u)} = \infty$, azaz a $\varphi(u)$ függvény kielégíti az e paragrafusban tárgyalt tétel feltételeit.

4. Ha az e paragrafusban tárgyalt tételnél egymásután a Ku , $Ku |\ln u|$, ... és így tovább függvényeket vesszük $\varphi(u)$ függvény gyanánt, akkor az $f(x, y)$ függvényre egyre gyengébb korlátokat, azaz egyre élesebb tételeket kapunk. Igazoljuk, hogy lehetetlen egy legélesebb tételt kapni. Más szóval igazoljuk, hogy ha $\varphi(u)$ egy olyan függvény, mely a szóbanforgó tétel feltételeit kielégíti, akkor mindig van oly $\varphi_1(u)$ függvény, mely azokat szintén kielégíti, s melyre

$$\frac{\varphi_1(u)}{\varphi(u)} \rightarrow \infty, \text{ míg } u \rightarrow 0.$$

5. Ismeretes az analízisből, hogy a G tartományban értelmezett $f(x, y)$ függvény folytonossága az x és y változókra nem biztosítja a folytonosságot (x, y) -ra. Igazoljuk azt, hogy ha f folytonos az x -re és a (35) feltételt kielégíti,



11. ábra

melyben $\varphi(u) \rightarrow 0$, míg $u \rightarrow 0$, akkor az f a G tartományban az (x, y) -ra is folytonos. Igaz-e ez az állítás oly függvényekre, melyek értelmezési tartománya a határával lezárt háromszög, négyzet, kör?

6. Legyenek az $y(x)$, $z(x)$, $u(x)$ függvények az (x_0, b) intervallumban értelmezve és

$$y(x_0) = z(x_0) = u(x_0) = y_0.$$

Tartozzék az (x_0, y_0) pont egy olyan G tartományhoz, melyben az $f(x, y)$ folytonos függvény értelmezve van. Tételezzük fel továbbá, hogy az (x_0, b) intervallumban

$$y'(x) = f(x, y), \quad z'(x) > f(x, z), \quad u'(x) \geq f(x, u)$$

teljesül, akkor $z(x) > y(x)$ ha csak $x > x_0$. Ha még azt is feltesszük, hogy az $y(x)$ görbe minden pontjában egyetlen megoldása az (1) egyenletnek, akkor

$$u(x) \geq y(x),$$

ha $x > x_0$. Igaz-e ez a vonatkozás akkor is, ha nem tesszük fel, hogy az $y(x)$ görbe minden pontjában egyetlen megoldása az (1) egyenletnek?

7. Legyen az $Y_n(x)$ legnagyobb megoldása az (1) egyenletnek, melynek jobb oldala folytonos, és tegyen eleget a következő határfeltételnek: $x = x_0$, $Y_n(x_0) = y_0 + a_n$, ahol $a_n > 0$ és $a_n \rightarrow 0$, míg $n \rightarrow \infty$, az (x_0, y_0) pedig a G belső-pontja. Legyen az (1) egyenletnek az (x_0, y_0) ponton átmenő legnagyobb megoldása az $y = Y(x)$ ($x_0 \leq x \leq x_1$), és ennek görbéje essék G belsejébe. Akkor az egész $[x_0, x_1]$ szakaszon létezik $Y_n(x)$, ha csak n elég nagy, és ez intervallumban $Y_n(x)$ egyenletesen konvergál az $Y(x)$ -hez, míg $n \rightarrow \infty$ (lásd a 12. § 1. feladatát).

8. Legyen $y_n(x)$ a

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) + \varphi_n(x, y)$$

egyenlet megoldása, ahol $\varphi_n(x, y) > 0$, és a $\varphi_n(x, y)$ -nak a G tartományban vett felső határa tartson zérushoz, míg $n \rightarrow \infty$. Továbbá legyen $y(x_0) = y_0$. Legyen $(x_0, y_0) \in G$ valamint $f(x, y)$ és $\varphi_n(x, y)$ folytonos. Az $y = Y(x)$ -et ugyanúgy definiáljuk, mint az előző feladatban. Akkor $y_n(x)$ az $[x_0, x_1]$ szakaszban egyenletesen konvergál $Y(x)$ -hez, míg $n \rightarrow \infty$.

14. §. Az Euler-féle törtvonalakról szóló kiegészítés

Tétel. *Ha a folytonos jobboldallal rendelkező (1) egyenletnek csak egy az (x_0, y_0) ponton átmenő $\varphi(x)$ megoldása van, akkor az (x_0, y_0) pontból kiinduló minden Euler-féle törtvonalasorozat (azaz azon függvények sorozata, melyek grafikonjai e törtvonalak), melyben a maximális hosszal rendelkező szakasz zérushoz tart, egyenletesen konvergál az $[a, b]$ zárt intervallumban (melyről a 12. §-ban volt szó) ehhez az egyetlen megoldáshoz.*

Bizonyítás. E tétel igazolására nyilván elegendő azt kimutatnunk, hogy tetszőleges pozitív ε választása mellett a sorozatban véges azon törtvonalak száma, melyek nem fekszenek teljesen az $y = \varphi(x) + \varepsilon$ és $y = \varphi(x) - \varepsilon$ vonalak között, ha csak $a \leq x \leq b$. Utóbbi állításunkat indirekt módon könnyen igazolhatjuk. Tegyük fel, hogy valóban igaz az, hogy az (x_0, y_0) ponton áthaladó törtvonalasorozatban végtelen sok olyan törtvonal van, melyeknél a szakaszok növekedésével a maximális hosszal rendelkező szakasz zéróhoz tart s melyek közül egy sem fekszik egészen az $y = \varphi(x) \pm \varepsilon$ vonalak között. Akkor a 12. §-ban foglalt

okoskodások segítségével találhatunk olyan Euler-féle törtvonalsorozatot, mely egyenletesen konvergál egy, az (x_0, y_0) ponton átmenő olyan integrálgörbéhez, mely az $y = \varphi(x)$ vonaltól különbözik. Ez azonban lehetetlen, mert feltettük, hogy az (1) egyenletnek csak egy az (x_0, y_0) ponton áthaladó integrálgörbéje van.

15. §. A szukcesszív approximáció módszere

Tétel. Az $f(x, y)$ függvény legyen az (x, y) sík zárt \bar{G} tartományában korlátos, az x változóra nézve folytonos és elégítse ki az

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K |y_2 - y_1|$$

y -ra vonatkozó Lipschitz-feltételt.¹⁾

Akkor a G tetszőleges (x_0, y_0) pontjához találhatunk az OX tengelyen olyan zárt és az x_0 pontot belsejében tartalmazó $[a, b]$ intervallumot, melyben az (1) differenciálegyenletnek egy és csak egy olyan megoldása van, mely $x = x_0$ -nál az y_0 értéket veszi fel.²⁾

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy ilyen megoldás feltevésével az

$$y'(\xi) = f(\xi, y(\xi))$$

azonosságnak az x_0, x határok közötti integrálásával az,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y(\xi)) d\xi \quad (38)$$

összefüggést kapjuk.

Itt az integráljel alatt ξ -nek folytonos függvénye áll, minthogy $y(\xi)$ differenciálhatóságától folytonossága is következik.

Egy olyan (38) alakú vonatkozást, melyben az $y(\xi)$ ismeretlen függvény az integráljel alatt szerepel, *integrálegyenletnek* nevezünk. Ily módon az (1) egyenlet minden olyan megoldása kielégíti a (38) integrálegyenletet, mely $x = x_0$ -nál az y_0 értéket veszi fel. Viszont a (38) egyenlet minden folytonos $y(x)$ megoldása kielégíti az (1) differenciálegyenletet és az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt. Ez utóbbi nyilvánvaló. Azt pedig könnyen igazolhatjuk, hogy a (38) egyenletet kielégítő minden folytonos³⁾ megoldásának ki kell elégítenie az (1) egyenletet

¹⁾ Az $f(x, y)$ függvény folytonos az (x, y) -ra nézve a G tartományban, mert az x -re nézve folytonos és egy az y -ra vonatkozó Lipschitz-feltételnek tesz eleget. Induljunk ki az

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = [f(x_2, y_2) - f(x_2, y_1)] + [f(x_2, y_1) - f(x_1, y_1)]$$

egyenlethől, melynek jobboldalán az első különbség a Lipschitz-feltétel alapján abszolút értékben nem nagyobb, mint $K |y_2 - y_1|$. Tehát az tetszőleges kicsi lesz, hacsak az (x_2, y_2) pont az (x_1, y_1) ponthoz eléggé közel van. A második különbség pedig azért válik tetszőleges kicsivé, mert feltettük, hogy az $f(x, y)$ függvény az (x_1, y_1) pontban az x -re nézve folytonos.

²⁾ Minthogy a nyílt G tartományon belül fekvő minden (x_0, y_0) ponthoz rendelkezünk olyan G^* zárt tartományt, mely G -n belül fekszik, és belsejében tartalmazza az (x_0, y_0) pontot, ezért tételünk úgy is igaz marad, ha fogalmazásában a \bar{G} tartományt nyílttal helyettesítjük. A G zártságát kivételesen azért tettük fel, mert így a bizonyítás kényelmesebb (lásd a 16. § 1. megjegyzését). f korlátossága szintén a bizonyítás kényelmesebb volta miatt van; a tétel úgy is igaz marad, ha ezt nem követeljük meg.

³⁾ Itt pusztán azért beszélünk a (38) integrálegyenlet megoldásainak folytonosságáról, hogy kikerüljünk a nem folytonos függvények integrálásánál felmerülő nehézségeket.

is. Ehhez (38) mindkét oldalát differenciálnunk kell az x szerint. Az, hogy szabad differenciálnunk, a következőkből nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy a (38) egyenletben y ennek az egyenletnek egy folytonos megoldása, akkor az azonosság jobboldala x szerint differenciálható, következésképpen baloldala is, azaz az $y(x)$ függvény is differenciálható x szerint.

Ezért ahelyett, hogy azt igazolnánk, hogy az (1) differenciálegyenletnek egy és csak egy olyan megoldása van az $[a, b]$ zárt intervallumban, mely $x = x_0$ -nál ($a < x_0 < b$) az y_0 értéket veszi fel, azt fogjuk igazolni, hogy a (38) integrálegyenletnek egy és csak egy folytonos megoldása van.

Legyen M az $f(x, y)$ függvény felső határa. Az (x_0, y_0) ponton át fektessük a DC , illetve BE egyeneseket $+M$ illetve $-M$ iránytényezővel. Továbbá fektessünk két az OY tengellyel párhuzamos egyenest oly módon, hogy ezek a DC és BE egyenesekkel két teljesen a \bar{G} -ban fekvő egyenlőszárú háromszöget alkossanak (9. ábra). Legyen az ED egyenes egyenlete $x = a$, a CB -é $x = b$. Később majd még arra a feltevésre is szükségünk lesz, hogy az a és b számok az x_0 -hoz eléggé közel vannak.

Vegyünk most fel teljesen önkényesen az $[a, b]$ zárt intervallumban egy olyan folytonos $\varphi_0(x)$ függvényt, melynek grafikonja nem lép ki a \bar{G} tartományból. Helyettesítsük ezt be a (38) jobboldalába. Ezzel a jobboldal az x -nek egy bizonyos meghatározott függvényévé válik. Jelöljük ezt $\varphi_1(x)$ -szel:

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \varphi_0(\xi)) d\xi.$$

Világos, hogy ez a függvény az $a \leq x \leq b$ intervallumban értelmezett és folytonos, valamint az $x = x_0$ helyen y_0 értéket veszi fel. Könnyen igazolhatjuk, hogy ha $a \leq x \leq b$, akkor e függvény grafikonja nem lép ki az EAD és ABC háromszögekből. Evégből elegendő azt megjegyeznünk, hogy

$$|f(\xi, \varphi_0(\xi))| \leq M,$$

és ezért

$$|\varphi_1(x) - y_0| \leq M |x - x_0|.$$

Továbbá legyen:

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \varphi_1(\xi)) d\xi.$$

A $\varphi_1(x)$ függvény fentebb megállapított tulajdonságai alapján ennek az egyenlőségnek a jobboldalán álló integrál létezik. Ezért a $\varphi_2(x)$ függvény is értelmezett $[a, b]$ -ben, s rendelkezik mindazon tulajdonságokkal, melyeket fentebb a $\varphi_1(x)$ függvényre megállapítottunk. Analóg szerkeszthetjük a

$$\left. \begin{aligned} \varphi_3(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \varphi_2(\xi)) d\xi, \\ \varphi_4(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \varphi_3(\xi)) d\xi, \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi)) d\xi. \end{aligned} \right\} (38')$$

függvényeket.

E $\varphi_n(x)$ függvények szerkesztése vég nélkül folytatható, e függvényeket *szukcesszíven approximáló megoldásoknak nevezzük*. Ilyen módon a

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (39)$$

végtelen függvénysorozatot nyerjük.

Azt állítjuk, hogy ez a sorozat $[a, b]$ zárt intervallumban egyenletesen konvergál a (38) egyenlet egy folytonos megoldásához. Ugyanis $\varphi_n(x)$ így írható:

$$\varphi_n(x) = \varphi_1(x) + [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] + [\varphi_3(x) - \varphi_2(x)] + \dots + [\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)].$$

Ezért a (39) sorozat egyenletes konvergenciájának kimutatására elegendő igazolnunk a

$$\varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_3 - \varphi_2) + \dots + (\varphi_n - \varphi_{n-1}) + \dots \quad (40)$$

végtelen sor egyenletes konvergenciáját.

Becsüljük evégből a $\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)$ különbséget. A Lipschitz-feltételt kihasználva következik, hogy

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(\xi, \varphi_n(\xi)) - f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))] d\xi \right| \leq \\ &\leq K \left| \int_{x_0}^x |\varphi_n(\xi) - \varphi_{n-1}(\xi)| d\xi \right| \leq K \max_{a \leq \xi \leq b} |\varphi_n(\xi) - \varphi_{n-1}(\xi)| (b - a). \end{aligned} \quad (40')$$

Ha c egy olyan konstáns, hogy $|\varphi_1(x)| \leq c$ és $|\varphi_2(x)| \leq c$ és $K(b - a) = m$, akkor a (40) sor tagjai nem nagyobbak a

$$c + 2c + 2cm + 2cm^2 + 2cm^3 + \dots$$

sor megfelelő tagjainál; ez a sor pedig konvergens, ha $m < 1$. Az (a, b) intervallumot oly kicsire vesszük, hogy $K(b - a) = m < 1$. Ekkor a (40) sor egyenletesen konvergens és ennek $\varphi(x)$ összege az $[a, b]$ zárt intervallumban folytonos. $\varphi(x)$ grafikonja nem lép ki az EAD és ABC háromszögekből. Következésképpen

az $\int_{x_0}^x f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi$ integrálnak van értelme. Minthogy

$$\left| \int_{x_0}^x [f(\xi, \varphi(\xi)) - f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))] d\xi \right| \leq K \left| \int_{x_0}^x |\varphi(\xi) - \varphi_{n-1}(\xi)| d\xi \right|,$$

ezért a (38') egyenlőség akkor is igaz marad, ha mindkét oldal határértékét vesszük, míg $n \rightarrow \infty$; ezért $\varphi(x)$ függvény kielégíti a (38) egyenletet.

Azt, hogy a (38) egyenletnek csak egy olyan megoldása van, mely az $[a, b]$ zárt intervallumban folytonos (és ezért egyúttal korlátos is), indirekt módon igazoljuk. Tegyük fel, hogy volna két ilyen $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ megoldás. Akkor:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi$$

és

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \psi(\xi)) d\xi.$$

Ebből a

$$|\psi(x) - \varphi(x)| = \left| \int_{x_0}^x [f(\xi, \psi(\xi)) - f(\xi, \varphi(\xi))] d\xi \right| \leq K(b-a) \max_{a \leq x \leq b} |\psi(x) - \varphi(x)|$$

miatt

$$\max_{a \leq x \leq b} |\psi(x) - \varphi(x)| \leq K(b-a) \max_{a \leq x \leq b} |\psi(x) - \varphi(x)|$$

következik. Mivel $K(b-a) < 1$, ez csak úgy lehetséges, ha $\max |\psi(x) - \varphi(x)| = 0$, azaz, ha a $\psi(x)$ azonos a $\varphi(x)$ -szel.

1. Megjegyzés. Bárhogyan is választunk kiindulásul egy folytonos $\varphi_0(x)$ függvényt, amelynek grafikonja \bar{G} -ben fekszik, a (39) sorozat mindig ugyanahhoz a függvényhez konvergál az $[a, b]$ intervallumban. Ez a fenti bizonyítás alapján valóban így van, hiszen ez a sorozat tetszőleges $\varphi_0(x)$ függvény mellett a (38) egyenlet egy folytonos és korlátos megoldásához konvergál, s azt is belátuk, hogy ilyen csak egy van.

2. Megjegyzés. A 12. § végéhez fűzött megjegyzések most is érvényesek.

3. Megjegyzés. A $\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)$ pontosabb becslésével azt is igazolhatjuk, hogy a (40) sor nemcsak az $[a, b]$ intervallumban konvergens. Ugyanis a (40') egyenlőtlenségek élesítésével az

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| = \left| \int_{x_0}^x [f(\xi, \varphi_1(\xi)) - f(\xi, \varphi_0(\xi))] d\xi \right| \leq \left| \int_{x_0}^x 2MK dx \right| = \frac{|x - x_0|}{1} \cdot 2MK;$$

$$|\varphi_3(x) - \varphi_2(x)| \leq \left| K \int_{x_0}^x |\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)| d\xi \right| = \frac{|x - x_0|^2}{1 \cdot 2} 2MK$$

nyerjük és általában

$$|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| \leq \frac{|x - x_0|^k}{k!} 2MK \quad (40'')$$

oly tetszőleges (A, B) intervallumra, melyre $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$ grafikonja nem lép ki \bar{G} -ből, ha $A < x < B$. Az

$$\frac{|x - x_0|}{1!} 2MK + \frac{|x - x_0|^2}{2!} 2MK + \dots + \frac{|x - x_0|^k}{k!} 2MK + \dots$$

sor minden $|x - x_0|$ mellett konvergens. Ezért a (40) sor is minden olyan véges intervallumban egyenletesen konvergens, melyben a $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ függvények léteznek. Tehát a korábban tett $K(b-a) < 1$ feltétel lényegtelen.

Ha a

$$\varphi(x) = \varphi_n(x) + [\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)] + [\varphi_{n+2}(x) - \varphi_{n+1}(x)] + \dots$$

vonatkozást használjuk fel, és alkalmazzuk a (40'') becslést, a

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| \leq 2MK |x - x_0|^n \left[\frac{1}{n!} + \frac{|x - x_0|}{(n+1)!} + \frac{|x - x_0|^2}{(n+2)!} + \dots \right].$$

becslést kapjuk. Ez lehetőséget ad annak megállapítására, hogy az n -edik közelítő megoldás a még ismeretlen pontos megoldást mekkora hibával közelíti.

Feladat. Legyen $f(x, y)$ és $\varphi_0(x)$ k -szor folytonosan deriválható. Ekkor $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ $(k+1)$ -szer folytonosan deriválható. A $\varphi_n(x)$ deriváltjaiból alkotott sorozat pedig (a $(k+1)$ -edik rendig bezárólag) egyenletesen konvergál a $\varphi(x)$ megfelelő deriváltjához azon intervallumban, melyben egy bizonyos n -től kezdve minden $\varphi_n(x)$ létezik.

16. §. A kontrakciós elv

Az előző paragrafusokban tárgyalt szukcesszív approximációs módszer nemcsak a differenciálegyenletek megoldásának egzisztenciabizonyítására alkalmazható, hanem az analízis számos más problémájára is. Ezért nem éreketlen, ha megvilágítjuk alkalmazhatóságának általános feltételeit. Ha ugyanis ezeket megállapítjuk, nem kell minden egyes esetben újra végiggondolnunk az egész eljárást, hanem elegendő arról meggyőződnünk, vajjon teljesülnek-e alkalmazhatóságának feltételei.

A kontrakciós elv (Tyihonov—Caccioppoli-tétel). Legyen $\{\varphi\}$ oly függvények nem üres halmaza, melyek mindegyike ugyanazon a (tetszőleges) \mathfrak{M} halmazon értelmezett, s melyek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

1. Mindegyik függvényhez tartozik egy korlát úgy, hogy

$$|\varphi| \leq M_\varphi$$

2. A $\{\varphi\}$ halmaz bármely egyenletesen konvergens sorozatának határfüggvénye is függvénye a $\{\varphi\}$ halmaznak.

3. A $\{\varphi\}$ halmazra vonatkozóan az $A(\varphi)$ operátort úgy definiáljuk, hogy e halmaz minden függvényét ugyanezen halmaz függvényébe vigye át.

4. E függvényhalmaz bármely φ_1, φ_2 függvénypárjára legyen

$$|A(\varphi_2) - A(\varphi_1)| \leq m \sup |\varphi_2 - \varphi_1|,$$

ahol $0 \leq m < 1$. Itt $\sup |\varphi_2 - \varphi_1|$ a $\|\varphi_2 - \varphi_1\|$ \mathfrak{M} halmazban felvett értékeinek felső határát jelöli.

Akkor a

$$\varphi = A(\varphi) \tag{41}$$

egyenletnek a tekintett függvényhalmaz elemei között egy és csak egy megoldása van.

Mielőtt e tétel bizonyítására térünk, bemutattunk néhány példát alkalmazására.

1. Példa. Mindenekelőtt megmutatjuk azt, hogyan alkalmazhatjuk a kontrakciós elvet a (38) integrálegyenlet folytonos megoldásának egzisztencia- és unicitásbizonyítására, vagy ami ugyanaz, az (1) differenciálegyenlet olyan megoldásának egzisztencia- és unicitásbizonyítására, amely $x = x_0$ -nál az y_0 értéket veszi fel.

\mathfrak{M} halmaznak vegyük az előző paragrafusban szóbanforgó zárt $a \leq x \leq b$ intervallumot. $\{\varphi\}$ függvényhalmaznak vegyük azoknak a folytonos függvényeknek összességét, melyek grafikonja az előző paragrafusban szóbanforgó $x = a$ és $y = b$ egyenesek között elterülő zárt \bar{G} tartományban halad (9. ábra). E függvények nyilván kielégítik a kontrakciós elv 1. és 2. feltételét.¹⁾ Tegyük fel továbbá, hogy

$$A(\varphi) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi.$$

¹⁾ Itt, azért tételeztünk fel \bar{G} zárt tartományt, hogy a 2. feltételt kielégítsük.

Az előző paragrafusban láttuk, hogy ez az operátor kielégíti a 3. és 4. feltételt, ha az (a, b) intervallum elég kicsi. Ez a kontrakciós elv alapján azt jelenti, hogy a (38) egyenletnek a $\{\varphi\}$ függvényhalmazban egy és csak egy megoldása van, tehát egy és csak egy folytonos megoldása az $a \leq x \leq b$ intervallumban.

2. Példa. A

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$$

integrálegyenletnek — melyben az $f(x)$ az $a \leq x \leq b$ mellett folytonos, a $K(x, \xi)$ függvény (az ú. n. mag) pedig szintén folytonos az $a \leq x \leq b$ és $a \leq \xi \leq b$ mellett — elég kicsi λ konstáns mellett egy és csak egy olyan $\varphi(x)$ megoldása van, mely az $a \leq x \leq b$ intervallumban folytonos.

A kontrakciós elv alkalmazása végett \mathfrak{M} halmaznak vegyük az $[a, b]$ zárt intervallumot, $\{\varphi\}$ halmaznak pedig az ebben az intervallumban folytonos függvények összességét. Ekkor a kontrakciós elv 1. és 2. feltétele nyilván teljesül. Az A operátort a

$$A(\varphi) \equiv f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$$

értelmezze.

Erre nyilván teljesül a 3. feltétel. Minthogy

$$\begin{aligned} |A(\varphi_2) - A(\varphi_1)| &= \left| \lambda \int_a^b K(x, \xi) [\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)] d\xi \right| \leq \\ &\leq |\lambda| M \max_{a \leq \xi \leq b} |\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)| (b - a), \end{aligned}$$

ezért a 4. feltétel is teljesül, ha csak $(b - a) |\lambda| M < 1$. Itt az M a $|K(x, \xi)|$ értékeinek felső határa.

3. Példa. Az

$$x = f(x)$$

egyenlet egy és csak egy megoldással rendelkezik, ha $f(x)$ minden valós x -nél értelmezett és differenciálható, és ha mindenütt $|f'(x)| \leq m < 1$.

Hogy itt tételünket alkalmazhassuk, az \mathfrak{M} -et egyetlen pontból álló halmaznak választjuk. Így bármely függvény \mathfrak{M} -n csak egy értéket vesz fel. Tehát a $\{\varphi\}$ függvényhalmaz az összes valós számokból áll. Ezért a kontrakciós elv 1. és 3. feltétele teljesül. A operátornak vegyük az f függvényt. A feltétel értelmében ez minden valós x -re értelmezett, s minden valós számhoz valós számot rendel, azaz nyilván a 3. feltétel is teljesül. A 4. feltétel is teljesül, minthogy

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(x_1 + \Theta(x_2 - x_1))| \cdot |x_2 - x_1| \leq m |x_2 - x_1|.$$

4. Példa. Az *implicit függvény tétele*. Legyen az $f(x, y)$ függvény értelmezve az $a \leq x \leq b$ intervallumban tetszőleges y értékekre, legyen x szerint folytonos és rendelkezék mindenütt oly y szerinti korlátos deriválttal, mely mindig meghalad egy $m > 0$ konstánst. Akkor az

$$f(x, y) = 0 \tag{42}$$

egyenlet az $a \leq x \leq b$ zárt intervallumban egy és csak egy folytonos $y(x)$ megoldással bír.

Tételünk alkalmazása végett vegyük M halmaznak az $[a, b]$ zárt intervallumot, $\{\varphi\}$ halmaznak pedig az ebben az intervallumban folytonos függvények összességét. Ekkor a kontrakciós elv 1. és 2. feltétele nyilván teljesül. Továbbá tegyük fel, hogy

$$A(\varphi) \equiv \varphi - \frac{1}{M} f(x, \varphi),$$

ahol az M az $f'_y(x, y)$ értékek felső határa. Ez az operátor nyilván kielégíti a 3. feltételt. Másrészt minthogy

$$\begin{aligned} |A(\varphi_2) - A(\varphi_1)| &= \left| \varphi_2 - \frac{1}{M} f(x, \varphi_2) - \left(\varphi_1 - \frac{1}{M} f(x, \varphi_1) \right) \right| = \\ &= \left| (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{f'_y(x, \varphi_1 + \Theta(\varphi_2 - \varphi_1))}{M} (\varphi_2 - \varphi_1) \right| \leq |\varphi_2 - \varphi_1| \left(1 - \frac{m}{M} \right), \end{aligned}$$

azért a 4. feltétel is teljesül. Ez azt jelenti, hogy a

$$\varphi = \varphi - \frac{1}{M} f(x, \varphi),$$

vagy ami ugyanaz, a (42) egyenlet egy és csak egy folytonos megoldással rendelkezik.

A kontrakciós elv bizonyítása. Vegyünk a megadott függvényhalmazból egy φ_0 függvényt és szerkesszük ezzel a

$$\varphi_1 = A(\varphi_0)$$

függvényt, s nevezzük ezt a (41) egyenlet keresett megoldása „első közelítésének”. Az operátor 3. tulajdonsága miatt φ_1 is $\{\varphi\}$ -hez tartozik, ezért szerkeszthetjük a

$$\varphi_2 = A(\varphi_1)$$

ú. n. „második közelítés”-t.

A φ_2 függvény is $\{\varphi\}$ -hez tartozik. Tehát ez az eljárás vég nélkül folytatható. Így nyerjük a

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n, \dots \quad (43)$$

függvénysorozatot, melyben $\varphi_n = A(\varphi_{n-1})$; ha csak $n \geq 1$. Most igazoljuk, hogy a (43) sorozat egyenletesen konvergens. Evégből tekintsük a

$$\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \dots \quad (44)$$

sort (lásd a 15. §-t). Ha $|\varphi_0| \leq M_0$, $|\varphi_1| \leq M_1$ (1. tulajdonság!), akkor

$$|\varphi_1 - \varphi_0| \leq M_0 + M_1 = M.$$

A 4. tulajdonságból következik, hogy

$$|\varphi_{n+1} - \varphi_n| = |A(\varphi_n) - A(\varphi_{n-1})| \leq m \cdot \sup |\varphi_n - \varphi_{n-1}|.$$

Ezért a (44) sor tagjai abszolút értékben nem nagyobbak, mint az

$$M_0 + M + Mm + Mm^2 + \dots$$

konvergens, pozitív tagú sor megfelelő tagjai és emiatt a (43) sorozat, melyet a (44) sor részletösszegei alkotnak, egyenletesen konvergál egy φ függvényhez. A 2. feltétel alapján ez is $\{\varphi\}$ -hez tartozik, és így az $A(\varphi)$ operáció értelmezve van, és 4. alapján

$$|A(\varphi) - A(\varphi_{n-1})| \leq m \cdot \sup |\varphi - \varphi_{n-1}|.$$

Mínhogy $|\varphi - \varphi_{n-1}| \rightarrow 0$ míg $n \rightarrow \infty$, azért az $A(\varphi_{n-1})$ egyenletesen konvergál $A(\varphi)$ -hez, míg $n \rightarrow \infty$. Ennek alapján a $\varphi_n = A(\varphi_{n-1})$ egyenlőségből határátmenettel a

$$\varphi = A(\varphi)$$

egyenletet kapjuk.

Ha a (41) egyenlet két a $\{\varphi\}$ halmazhoz tartozó φ_1 és φ_2 megoldással rendelkezne, akkor

$$|\varphi_2 - \varphi_1| = |A(\varphi_2) - A(\varphi_1)| \leq m \cdot \sup |\varphi_2 - \varphi_1|,$$

tehát

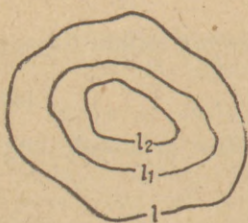
$$\sup |\varphi_2 - \varphi_1| \leq m \cdot \sup |\varphi_2 - \varphi_1|,$$

amely az $m < 1$ miatt csakis úgy lehetséges, ha $\varphi_2 \equiv \varphi_1$.

17. §. A kontrakciós elv geometriai interpretációja

A $\{\varphi\}$ függvényhalmaz függvényeit most egy Φ halmaz pontjaiként tekintjük. A φ_1 és φ_2 „pontok“ között „távolságnak“ a $\sup |\varphi_2 - \varphi_1|$ -et vesszük. Akkor a 2. feltételt így interpretálhatjuk: Φ halmaz végucelen „pont“-sorozatának minden „sűrűsödési helye“ is a Φ -hez tartozik, másszóval a Φ halmaz zárt. A 3. feltétel abban áll, hogy az A operátor egy a Φ -hez tartozó „pontot“ szintén a Φ -hez tartozó „pontba“ visz át. Végül a 4. feltétel azt jelenti, hogy ha az A operátor a φ_1 „pontot“ a φ_1^* „pontba“, a φ_2 „pontot“ φ_2^* „pontba“ viszi át, akkor a φ_1^* és φ_2^* közötti „távolság“ nem nagyobb, mint a φ_1 és φ_2 közötti „távolság“ m -ed része ($m < 1$). A (41) egyenlet megoldását megtalálni a $\{\varphi\}$ függvényhalmazban annyit jelent, mint megtalálni a Φ halmaznak azt a „pontját“, mely az A operátorral szemben fixpont.

Egy ilyen „pont“ létezésének szükségessége geometriai úton nyilvánvalóvá válik, ha feltesszük, hogy a Φ halmaz korlátos. Ekkor a „pontjai“ közötti „távolságoknak“ van felső határuk. Ezt a felső határt a Φ halmaz *átmérőjének* nevezzük. Legyen ennek az átmérőnek hossza d . A Φ halmazt egy zárt tartománnyal ábrázoljuk, melyet az l vonal határol (12. ábra). Az A operátornak e halmaz összes „pontjaira“ való alkalmazása folytán oly Φ_1 halmazt nyerünk, mely a 3. feltétel szerint teljesen a Φ -ben foglaltatik. A Φ_1 halmazt ábránkon az l_1 vonal határolja. A 4. feltétel szerint Φ_1 átmérőjének hossza legfeljebb md . Alkalmazzuk most az A operátort a Φ_1 halmaz „pontjaira“. Ennek folytán oly Φ_2 halmazt nyerünk, mely teljesen a Φ_1 -ben foglaltatik; ugyanis Φ_1



12. ábra

„pontjait“ éppen A -nak Φ -re való alkalmazásával nyertük, ezért A -nak a Φ_1 -re, azaz Φ részhalmazára való alkalmazása nyilván nem adhat mást, mint Φ_1 „pontjait“. A Φ_2 átmérőjének hossza a 4. feltétel alapján legfeljebb m^2d . Ábránkon Φ_2 -t az l_2 vonal határolja. Ezen eljárás folytatásával az egymásba skatulyázott $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots$ zárt halmazok oly végtelen sorozatát nyerjük, melyeknek átmérőiből alkotott sorozat zérushoz tart. Ezért e halmazok közös része olyan pont, mely az A operátorral szemben fixpont.

Olyan „pont“ azonban legfeljebb egy létezhet, mert ha kettő létezne, akkor „távolságuk“ az A operátor alkalmazásával változatlan pozitív megnyitóság lenne, ez azonban a 4. feltételnek ellentmondana.

F e l a d a t o k. 1. Legyen az F az n -dimenziós tér egy zárt, korlátos részhalmaza, melyet egy φ operátorral úgy képezünk le önmagára, hogy

$$\varrho[\varphi(A), \varphi(B)] < \varrho[A, B] \quad (*)$$

Itt $\varrho[A, B]$ az A és B pontok távolságát jelöli. Igazoljuk, hogy ennek folytán pontosan egy fixpont létezik. Igaz-e ez nyílt korlátos halmazokra? Zárt, nem korlátos halmazokra?

2. Igazoljuk, hogy ha a (*) egyenlőtlenséget a

$$\varrho[\varphi(A), \varphi(B)] \leq m \varrho[A, B], \quad 0 \leq m < 1$$

egyenlőtlenséggel pótoljuk, akkor a fixpont létezéséről szóló tétel tetszőleges zárt halmazokra is igaz (nem korlátosakra is). Igaz-e nyílt korlátos halmazokra is?

3. Helyettesítsük a (*) egyenlőtlenséget a

$$\varrho[\varphi(A), \varphi(B)] \leq \varrho[A, B]$$

egyenlőtlenséggel. Igazoljuk, hogy a fixpont létezéséről szóló tétel abban az esetben is igaz, ha az F egyenes szakasz, vagy derékszögű egyenlőszárú háromszög kerülete, de nem igaz akkor, ha F kör kerülete. Ha ϱ a kerületen mért legkisebb távolságot jelöli, akkor a tétel már az egyenlőszárú derékszögű háromszög kerületére sem igaz.

18. §. Cauchy tétele

a holomorf jcbboldalú $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ alakú differenciálegyenletről

Ha az $f(x, y)$ függvény az (x_0, y_0) pont környezetében holomorf, akkor a

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (45)$$

differenciálegyenletnek egy és csak egy olyan megoldása van, mely maga is holomorf az x_0 környezetében, s melyre $y(x_0) = y_0$.

Az $F(x_1, \dots, x_n)$ függvényt akkor nevezük *holomorf*nak az (x_1^0, \dots, x_n^0) pont

$$|x_i - x_i^0| < r, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

környezetének minden argumentumára, ha azt ezen környezetben az

$$(x_1 - x_1^0), \dots, (x_n - x_n^0)$$

szerint haladó hatványsorba fejthetjük.

Most az argumentumok, valamint a függvény nemcsak valós értékeket vehetnek fel, hanem komplexeket is. A holomorf $F(x_1, \dots, x_n)$ függvénynek az x_k komplex argumentum szerinti deriváltján azon sor által előállított függvényt értjük, melyet az $F(x_1, \dots, x_n)$ -t előállító sor tagonkénti differenciálásával

nyerünk. Az így nyert sor konvergenciasugara legalább akkora, mint az $F(x_1, \dots, x_n)$ -t előállító soré. (Г. М. Фихтенгольк, Курс диф. и инт. исчисления, Гостехиздат 1948 II. к., 471 о.) Ha az $F(x_1, \dots, x_n)$ és x_1, \dots, x_n csak valós értékeket vesznek fel, akkor az így definiált derivált ugyanaz, mint a közönséges. Az összeg, szorzat, közvetett függvény, stb. deriválására vonatkozó szabályok az új definíció mellett is érvényben maradnak. E paragrafus tárgyalása során tehát teljesen mindegy az, vajjon a vizsgált mennyiségek komplex értékeket vesznek-e fel, vagy sem.

Cauchy tételének bizonyítása történetileg az első olyan existenciá- és unicitásbizonyítása a megoldásnak, mely eléggé általános típusú differenciálegyenletről szól. Nem szorítkozhatunk csak erre a bizonyításra, mert a követelmény, hogy a tekintett függvény holomorf legyen, gyakran igen mesterkelt. A fizikának igen sok problémája vezet olyan differenciálegyenletekre, melyek jobboldala nem holomorf.

Cauchy tételének bizonyítása. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $x_0 = y_0 = 0$, mert az általános eset az $x - x_0 = x^*, y - y_0 = y^*$ helyettesítésekkel erre vezethető vissza.

Tegyük fel először, hogy az adott egyenletnek valóban van olyan holomorf megoldása, mely $x = 0$ -nál zérussá válik. Állítsa azt elő az

$$y_0 = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$$

végtelen sor, amelyből nyilvánvaló, hogy $C_0 = y(0) = 0$. Ha ezt a sort a (45) egyenletbe y helyébe helyettesítjük, az így nyert azonosság mindkét oldalát ismételten az x szerint deriváljuk, s az így nyert azonosságok értékeit az $x = y = 0$ helyen tekintjük, akkor a C_i koefficiensekre rendre a következő

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= y'(0) = f(0,0), \\ 2C_2 &= y''(0) = f_x(0,0) + f_y(0,0) \cdot y'(0) = f_x(0,0) + f_y(0,0) \cdot C_1, \\ 2 \cdot 3 \cdot C_3 &= y'''(0) = f_{xx}(0,0) + 2f_{xy}(0,0) y'(0) + f_{yy}(0,0) y'^2(0) + \\ &+ f_y(0,0) y''(0) = f_{xx}(0,0) + 2f_{xy}(0,0) C_1 + f_{yy}(0,0) C_1^2 + f_y(0,0) 2C_2, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

stb. egyenleteket nyerjük.

Ebből nyilvánvaló, hogy a C_i koefficiensek egyértelműen meghatározhatók, következésképpen egyenletünknek nem lehet egynél több olyan holomorf megoldása, mely az $x = 0$ értéknél zérussá válik. A továbbiakhoz még azt is fontos megjegyeznünk, hogy az $y(x)$ megoldást előállító hatványsor C_i koefficiensét az $f(x, y)$ függvény x és y szerinti hatványsorának koefficienséből, valamint, C_1, C_2, \dots, C_{i-1} -ből fejezhetjük ki. Kiemeljük, hogy C_i -nek e meghatározásához elegendő az összeadás és szorzás műveletének alkalmazása.

A (45) egyenlet megoldásának existenciabizonyítására képezzünk formálisan a (46) egyenlőségekből meghatározható C_i -kel egy x szerinti hatványsort. Ha ez a sor, melyet az I római számmal jelölünk, konvergens, akkor nyilván előállítja a kívánt megoldást. Ugyanis, ha a (45) egyenletben szereplő y helyébe e sort tesszük, s annak jobboldalát is az x szerinti hatványsorba fejtjük, akkor a különböző oldalakon álló, egyenlő hatványon előforduló x -nek koefficiensai egyenlők lesznek. E sor konvergenciájának igazolására tekintsük a

$$\frac{dz}{dx} = F(x, z) \quad (47)$$

segédegyenletet, melynek jobboldala szintén holomorf a $(0, 0)$ környezetében, s ahol az $F(x, z)$ sorfejtésének együtthatói olyan pozitív számok, melyek az $f(x, y)$ sorfejtésben megfelelő együtthatóknál abszolút értékben nem kisebbek. Ekkor azt mondjuk, hogy a (47) egyenlet *majoránsa* a (45)-nek, az $F(x, z)$ függvény pedig *majoránsa* az $f(x, y)$ függvénynek. Ha az $f(x, y)$ holomorf a $(0, 0)$ hely

$$|x| < r, \quad |y| < r$$

környezetében, akkor pl. úgy választhatjuk, hogy

$$F(x, z) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r'}\right) \left(1 - \frac{z}{r'}\right)}$$

legyen, ahol $0 < r' < r$, az M pedig egy pozitív konstáns (lásd: Goursat Cours d'analyse II. (1933) 183. paragrafusát). Ha a (45) egyenletnek olyan $z(x)$ holomorf megoldását találjuk, mely $x = 0$ -nál a zéró értéket veszi fel, akkor következik, hogy az I. sor konvergens. Ugyanis fentebb tett megjegyzésünk értelmében a $z(x)$ hatványsorfejtésében az x^i -nek C_i^* együtthatóját is csak összeadással és szorzással számítjuk ki az $F(x, z)$ függvény x és z szerinti hatványsorának együtthatóiból és a $C_1^*, C_2^*, \dots, C_{i-1}^*$ együtthatókból. Ezért

$$C_i^* \geq |C_i|.$$

A $z(x)$ diszkussziójánál nyilván elegendő, ha x valós értékeire szorítkozunk. Ha x valós, akkor a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r'}\right) \left(1 - \frac{z}{r'}\right)}$$

egyenletet a változók szétválasztásával egyszerűen integrálhatjuk:

$$\int_0^z \left(1 - \frac{u}{r'}\right) du = \int_0^x \frac{M d\xi}{1 - \frac{\xi}{r'}}.$$

Innen

$$z - \frac{z^2}{2r'} = -r' M \ln \left(1 - \frac{x}{r'}\right).$$

E másodfokú egyenletnek megoldása a

$$z(x) = r' - r' \sqrt{1 + 2M \ln \left(1 - \frac{x}{r'}\right)}$$

függvény, mely $x = 0$ -nál zérussá válik, s mely az x holomorf függvénye, ha csak

$$|x| < r' \left(1 - e^{-\frac{1}{2M}}\right).$$

Ezzel az $y(x)$ formálisan képzett sorának elég kis $|x|$ melletti konvergenciáját igazoltuk. Összege a (45) differenciálegyenlet holomorf megoldása.

Következmény. Ha az (1) differenciálegyenlet jobboldala holomorf¹⁾ és valós az x meg y bizonyos valós értelmezési tartományában, akkor ennek az egyenletnek minden olyan valós megoldása holomorf, melynek grafikonja e tartományban fekszik. Ugyanis ennek az egyenletnek jobboldala e tartományban holomorf, ezért e tartomány bármely (x_0, y_0) pontjának van oly környezete, melyben a jobboldal az y -szerinti Lipschitz feltételnek tesz eleget. Akkor pedig e környezetben egy és csak egy oly megoldás van, mely az $x = x_0$ -nál az y_0 értéket veszi fel. Ennek a megoldásnak azonban azonosnak kell lennie az imént szerkesztett holomorf megoldással.

Megjegyzés. Ha a (45) egyenlet jobboldala az y -ra nézve lineáris, akkor kedvezőbb becslést adhatunk arra a tartományra, melyben az egyenlet megoldása létezik, mint az általános esetben. Ugyanis egyenletünk most (17) alakú, az $a(x)$ és $b(x)$ pedig az x -nek holomorf függvényei, ha csak $|x| < r$. Akkor a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{M}{1 - \frac{x}{r}} (z + 1)$$

egyenletet vesszük majoráns egyenletnek, melyben a $(z + 1)$ együtthatója az $a(x)$ és $b(x)$ függvények közös majoránsa. Ez az egyenlet az $|x| < r$ mellett a holomorf

$$z = \left(1 - \frac{x}{r}\right)^{-Mr} - 1$$

megoldással rendelkezik, mely $x = 0$ -nál zérussá válik.

Ebből az általános esettel analóg módon kimutathatjuk, hogy a lineáris egyenlet az $|x| < r$ intervallumban olyan holomorf megoldással rendelkezik, mely az $x = 0$ -nál zérussá válik.

19. §. A differenciálegyenlet megoldásának símasági foka

Tétel. Ha az $f(x, y)$ függvény a p -edik ($p \geq 0$) rendig bezárólag folytonosan deriválható az x és y szerint, akkor az (1) egyenlet összes megoldásai folytonosan deriválhatók az x szerint a $(p + 1)$ -edik rendig bezárólag. Zérórendű deriválton magát a függvényt értjük.

Bizonyítás. Legyen az $y(x)$ függvény az (1) egyenlet egy megoldása. Akkor szükségképen igaz az alábbi azonosság

$$y'(x) = f(x, y(x)). \quad (48)$$

Mint hogy az $y(x)$ függvény kielégíti az (1) egyenletet, azért az x szerint mindenütt deriválható, s ezért folytonos is. Tehát ha az $f(x, y)$ függvény az x és y szerint folytonos, akkor (48) jobboldala folytonos az x szerint. Ez azt jelenti, hogy az $y'(x)$ függvény folytonos.

Tegyük most fel, hogy $p \geq 1$, akkor a (48) jobboldala az x szerint folytonosan deriválható. Ez azt jelenti, hogy ennek az azonosságnak baloldala az x szerint folytonosan deriválható. Ez pedig azt jelenti, hogy az $y(x)$ függvény folytonos másodrendű deriválttal rendelkezik. Ha (48)-at az x szerint deriváljuk, az

$$y''(x) = f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x)) y'(x)$$

azonosságot kapjuk. Ha erre az azonosságra a $p \geq 2$ esetben azokhoz analóg megfontolásokat alkalmazunk, mint a (48) azonosság esetén, akkor következik, hogy $y(x)$ háromszor folytonosan deriválható, és így tovább.

¹⁾ Egy függvényt akkor nevezünk a G tartományban holomorfnek, ha az a G tartomány minden pontjának bizonyos környezetében holomorf.

20. §. A megoldás, mint a kezdeti értékek függvénye

Eddig azzal a kikötéssel vizsgáltuk a differenciálegyenlet megoldását, hogy annak egy rögzített (x_0, y_0) ponton kell átmennie. Ha azonban az (x_0, y_0) pontot változtatjuk, akkor változik a megoldás is. Felvetődik az a kérdés — mely különösen az alkalmazások szempontjából fontos, — *hogyan* változik a megoldás. Ennek a kérdésnek — ahogyan arra Hadamard mutatott rá — elvi jelentősége is nagy. Ha ugyanis valamely fizikai feladat egy differenciálegyenlet bizonyos feltételeket kielégítő megoldásának keresésére vezet, akkor e kezdeti feltételeket általában tapasztalati mérések alapján állapítják meg. Azonban a mérésektől nem remélhetünk abszolút pontosságot. Az alkalmazásck szempontjából igen kevésbé volna érdekes a differenciálegyenletnek az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltétel alapján talált megoldása, ha az az y_0 mérésében elkövetett kicsiny hiba hatására jelentősen változnék. Alább igazoljuk, hogy bizonyos feltételek mellett a differenciálegyenlet megoldása folytonosan függ a kezdeti értékektől.

Tétel. *Ha a G tartományban értelmezett $f(x, y)$ függvény abban folytonos, korlátos és a tartomány minden (x_0, y_0) belső pontján a*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

differenciálegyenletnek csak egy megoldása megy át, akkor a megoldás folytonosan függ az (x_0, y_0) ponttól.¹⁾

Bizonyítás. Legyen M az $|f(x, y)|$ értékek felső korlátja. Tekintsük azt az

$$|x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq 2Ma$$

téglalapot, mely teljesen a G -ben fekszik.

Legyen $y_0(x)$ az (1) egyenletnek egy az (x_0, y_0) ponton átmenő megoldása, $y_k(x)$ pedig olyan megoldása, mely az (x_0, y_0) ponthoz eléggé közeli (x_k, y_k) ponton megy át. Akkor mind az $y_0(x)$ mind az $y_k(x)$ függvény az egész $|x - x_0| \leq a$ intervallumban értelmezve van. Kimutatjuk, hogy bármely pozitív ε -ra

$$|y_k(x) - y_0(x)| < \varepsilon \quad (+)$$

az egész intervallumban, ha csak az (x_k, y_k) pont az (x_0, y_0) ponthoz eléggé közel van. Ugyanis tegyük fel azt, hogy ez az egyenlőtlenség nem igaz. Akkor kell lennie oly pozitív ε számnak, továbbá az (x_0, y_0) ponthoz konvergáló oly (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ... pontsorozatnak, hogy

$$|y_k(x_k) - y_0(x_k)| \geq \varepsilon, \quad (*)$$

ha csak $k \geq 1$ és x_k az $|x - x_0| \leq a$ intervallum egy értéke.²⁾

¹⁾ A 22. §-ban is igazoljuk, hogy a megoldás a kezdeti értékek folytonos függvénye; s ezt függetlenül tesszük a most kissé erősebb feltételek mellett megfogalmazott tétel bizonyításától. Ezért az olvasó az alábbi bizonyítást akár el is hagyhatja.

²⁾ A (+) egyenlőtlenség azt az állítást tartalmazza, hogy tetszőleges pozitív ε -hoz tartozik egy pozitív δ úgy, hogy minden az $|x_k - x_0| < \delta$, $|y_k - y_0| < \delta$ egyenlőtlenségeket kielégítő (x_k, y_k) kezdőértékekkel meghatározott $y_k(x)$ integrálgörbe eleget tesz (+)-nek. Legyen (x_k, y_k) egy az (x_0, y_0) ponthoz konvergáló s az előbbi δ környezetben fekvő (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ... pontsorozatnak k -adik pontja és jelölje $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... a megfelelő integrálgörbéket. Akkor (+) egyenlőtlenségünk állítása e görbeekre is vonatkozik. Ha a (+) egyenlőtlenség állítása nem igaz, akkor a k -adik ($k=1, 2, \dots$) görbénél kell, hogy legalább egy, az $|x - x_0| \leq a$ intervallumhoz tartozó x_k érték létezzon, úgy, hogy a (*) egyenlőtlenség fennálljon.

Legyen $\alpha < x < \beta$ oly intervallum, melyben az $y_0(x)$ görbe szigorúan a G belsejében halad. Ha a teljesen G -ben fekvő és az

$$|x - x_0^{(v)}| \leq a_k, \quad |y - y_0^{(v)}| \leq 2M a_k$$

$$\text{ahol } x_0^{(v)} = x_0^{(v-1)} \pm a_{k-1}, \quad y_0^{(v)} = y_0(x_0^{(v)})$$

egyenlőtlenségekkel meghatározott Q_k téglalapokat választjuk, akkor a Q_1 -re alkalmazott okoskodás ismétlésével tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon > 0$ -nál is igazolhatjuk azt, hogy az $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$ intervallumban az (1) egyenlet megoldása folytonosan függ az (x_0, y_0) -hoz közeli kezdeti értékektől. Evégből elegendő véges számú téglalapot szerkeszteniünk. (Miért?) Ebből pedig már következik tételünk.

M e g j e g y z é s. Ha az $f(x, y)$ függvény értelmezve van a G tartományban, abban folytonos és korlátos, továbbá, ha a tartomány *valamely* belső (x_0, y_0) pontján az (1) egyenletnek csak egy megoldása megy át, akkor ezen egyenlet minden az (x'_0, y'_0) ponton áthaladó megoldása egyenletesen konvergál ehhez a megoldáshoz, ha csak $x'_0 \rightarrow x_0, y'_0 \rightarrow y_0$. Tételünk bizonyításánál lényegében csak ezt használtuk fel.

Sokszor nemcsak azt szükséges megállapítanunk, hogy a megoldás a kezdeti értékektől folytonosan függ, hanem azt is igazolnunk kell, hogy a megoldás a kezdeti értékek szerint differenciálható.

Ehhez a következőket jegyezzük meg. Legyenek a kezdeti értékek: $y = y_0$, ha $x = x_0$. Jelölje a

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

differenciálegyenlet azoknak megfelelő megoldását $y(x, x_0, y_0)$, és vezessünk be egy új

$$z = y(x, x_0, y_0) - y_0$$

függvényt és egy új

$$t = x - x_0$$

független változót. Akkor az $x = x_0, y = y_0$ értékeknek a $t = 0, z = 0$ értékek felelnek meg. A z függvényt így írhatjuk:

$$z = y(t + x_0, x_0, y_0),$$

s az (1) differenciálegyenlet a

$$\frac{dz}{dt} = f(t + x_0, z + y_0) \quad (**)$$

egyenletbe megy át.

Ha tehát az (1) differenciálegyenlet megoldásának a kezdeti értékektől való függését akarjuk vizsgálni, tulajdonképpen a (**) differenciálegyenlet megoldásainak azoktól a paramétereiktől való függését kell vizsgálnunk, melyek e differenciálegyenlet jobboldalán szerepelnek. Ezzel a feladattal Poincaré foglalkozott, megoldását az Hadamard-féle lemmára kell építenünk, melyet előbb igazolunk.

F e l a d a t. Tekintsük az

$$y'(x) = y(x - h)$$

egyenletet, ahol h állandó. Ezt az egyenletet a *hiszterézis differenciálegyenletének* nevezzük. Lássuk be, hogy ennek az egyenletnek megoldásai minden valós x -re értelmezve vannak. Könnyű azt is belátnunk, hogy

egy ilyen megoldásnak valamely h hosszúságú intervallumon való ismerete azt mindenütt meghatározza. Igazoljuk, hogy ha $h > 0$, akkor tetszőleges $A > 0$ és $\varepsilon > 0$ számokhoz találhatunk oly $\delta > 0$ számot, hogy $|y(x)| < \varepsilon$ a $0 \leq x \leq A$ intervallumban, ha $|y(x)| < \delta$, míg $-h < x < 0$.

Ha viszont $h < 0$, akkor egy tetszőleges $A > 0$ -hoz van oly $y_n(x)$ megoldás-sorozat, mely a $-\infty < x < 0$ intervallumban (a tetszőleges rendű deriváltjából képzett sorozattal együtt) egyenletesen konvergál a zérushoz, ha pedig $0 < x < A$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{0 < x < A} |y_n(x)| \right] = \infty.$$

Utóbbi állításunk igazolásánál a hystero-differenciálegyenlet megoldásául vegyünk $y = e^{\alpha x} \sin \beta x$ alakú függvényeket, ahol α és β alkalmasan választott konstánsok.

21. §. A Hadamard-féle lemma

Rendelkezzék az $F(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m)$ függvény az x_1, \dots, x_n -re nézve folytonos deriváltakkal a $p > 0$ rendig bezárólag az $(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m)$ tér egy oly G tartományában, mely az x_1, \dots, x_n -re nézve konvex.¹⁾

Akkor található n számú oly függvény

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_m) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

mely az $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ szerint folytonosan deriválható a $(p-1)$ -edik rendig bezárólag,²⁾ úgyhogy

$$\begin{aligned} & F(y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_m) - F(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m) = \\ & = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_m) (y_i - x_i). \end{aligned}$$

Bizonyítás.³⁾ Induljunk ki az

$$\begin{aligned} & F(y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_m) - F(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m) = \\ & = \int_0^1 F'(x_1 + t[y_1 - x_1], \dots, x_n + t[y_n - x_n]; z_1, \dots, z_m) dt \end{aligned}$$

egyenlőségből, mely G -nek az x_1, \dots, x_n szerinti konvexitásának feltételezése alapján igaz. Ha az F_i -t F -nek az

$$x_1 + t[y_1 - x_1], x_2 + t[y_2 - x_2], \dots, x_n + t[y_n - x_n]$$

szerinti deriváltjával fejezzük ki, melyeket F_1, F_2, \dots, F_n -nel jelölünk, akkor

$$\begin{aligned} & F(y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_m) - F(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m) = \\ & = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \int_0^1 F_i(x_1 + t[y_1 - x_1], \dots, x_n + t[y_n - x_n]; z_1, \dots, z_m) dt \end{aligned}$$

egyenlőséget kapjuk. Ennek az egyenlőségnek jobboldalán álló integrálok nyilván felfoghatók oly φ_i függvényekként, melyekről szó van a Hadamard-féle lemmában; mivel azokkal a tulajdonságokkal rendelkeznek, melyeket tőlük a lemma megkíván.

¹⁾ A G tartományt akkor nevezzük az x_1, \dots, x_n -re nézve konvexnek, ha a G -hez tartozó bármely $(x_1^*, \dots, x_n^*; z_1, \dots, z_m)$ és $(x_1^{**}, \dots, x_n^{**}; z_1, \dots, z_m)$ pontot összekötő egyenes szakasz is G -hez tartozik.

²⁾ Zérusrendű deriválton magát a függvényt értjük.

³⁾ E bizonyítás M. A. Krejnyesztől származik.

22. §. A megoldásnak a paramétereiktől való függéséről szóló tétel

Legyen adva a

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu_1, \dots, \mu_n) \quad (49)$$

differenciálegyenlet.

Legyen a \overline{G}_{xy} az (x, y) síknak egy zárt tartománya, és jelentse G azoknak az $(x, y, \mu_1, \dots, \mu_n)$ pontoknak halmazát, melyekre,

- a) az (x, y) pont a \overline{G}_{xy} -hoz tartozik,
 b) $|\mu_i| \leq \mu_i^0$ ($i = 1, \dots, n$), ahol μ_i^0 pozitív konstánsokat jelöl. E jelölések felhasználásával a következő tételt mondhatjuk ki:

1. Ha az $f(x, y, \mu_1, \dots, \mu_n)$ folytonos és korlátos a \overline{G} minden értékére, s ha ott az y -ra vonatkozó

$$|f(x, y_2, \mu_1, \dots, \mu_n) - f(x, y_1, \mu_1, \dots, \mu_n)| \leq K |y_2 - y_1|$$

Lipschitz-féle feltétel teljesül (ahol K nem függ az x, y és μ változóktól), akkor a \overline{G}_{xy} belsejében fekvő (x_0, y_0) ponthoz találhatunk az OX tengelyen olyan, az x_0 pontot a belsejében tartalmazó, zárt $[a, b]$ intervallumot, melyben a (49) differenciálegyenlet x_0, y_0 kezdeti feltételekkel rendelkező megoldása az (x, μ_1, \dots, μ_n) argumentumra nézve folytonos.

2. Ha az f függvénynek az y és a μ -k szerinti deriváltjai a p -edik rendig bezárólag folytonosak és korlátosak az $(x, y_1, \mu_1, \dots, \mu_n)$ argumentum szerint, akkor az

$$y(x, \mu_1, \dots, \mu_n)$$

megoldás μ -k szerinti deriváltjai a p -edik rendig bezárólag folytonosak az (x, μ_1, \dots, μ_n) argumentumra nézve, ha csak x a tétel első részében megadott zárt $[a, b]$ intervallumban van, s ha $|\mu_i| < \mu_i^0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) és $p \geq 1$.

Mind az első, mind a második állítás igazolásánál a

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu) \quad (50)$$

esetre szorítkozunk, amikor egyenletünk jobboldala csak egy paramétert tartalmaz. Az általános esetben a bizonyítás ehhez analóg.

1. A szukcesszív approximáció módszerével megkeressük az (50) egyenletnek azt a megoldását, mely az $x = x_0$ -nál az y_0 értéket veszi fel. Ez a módszer itt most így alakul:

$$\varphi_1(x, \mu) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \varphi_0(\xi), \mu) d\xi,$$

$$\varphi_2(x, \mu) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \varphi_1(\xi, \mu), \mu) d\xi,$$

és így tovább.

Könnyen beláthatjuk, hogy az összes $\varphi_i(x, \mu)$ függvény mindkét argumentumára nézve folytonos, ha csak x egy bizonyos (a 15. §-ban említett) zárt $[a, b]$ intervallumban változik és $|\mu| < \mu_0$. A 15. §-ban végzett megfontolások ismétlésével beláthatjuk azt is, hogy a $\varphi_i(x, \mu)$ sorozat az x és μ -re nézve egyenletesen konvergens, ha csak az x az x_0 pontot belsejében tartalmazó $[a, b]$ zárt

intervallumban változik és $|\mu| < \mu_0$. Tehát a $\varphi(x, \mu)$ határfüggvény az egyetlen olyan megoldás, amely átmegy az (x_0, y_0) ponton, s az (x, μ) argumentumra nézve folytonos, ha csak $a \leq x \leq b$ és $|\mu| < \mu_0$.

2. Ha tételünk 2. pontjának feltételei értelmében feltesszük, hogy az f az y és μ szerint első rendben folytonosan deriválható, akkor a $\varphi(x, \mu)$ megoldás folytonosan deriválható a μ szerint az x és μ -nak az 1. pontban jelzett értéktartományában.

Vegye fel a $\varphi(x, \mu)$ és a $\varphi(x, \mu + \Delta\mu)$ függvény az $x = x_0$ -nál az y_0 értékét. Az első elégítse ki az (50), a második a

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu + \Delta\mu) \quad (51)$$

egyenletet. Ha a függvényeket az (50), illetve (51) egyenletbe helyettesítjük, kivonással a

$$\frac{d[\varphi(x, \mu + \Delta\mu) - \varphi(x, \mu)]}{dx} = f(x, \varphi(x, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(x, \varphi(x, \mu), \mu)$$

egyenletet kapjuk. A Hadamard-lemmának a jobboldalra való alkalmazásával és a $\varphi(x, \mu + \Delta\mu) - \varphi(x, \mu) = \Delta\varphi$ jelöléssel egyenletünket így írhatjuk:

$$\frac{d\Delta\varphi}{dx} = \Delta\varphi\Phi_1 + \Delta\mu\Phi_2,$$

ahol Φ_1 és Φ_2 az $x, \varphi(x, \mu), \varphi(x, \mu + \Delta\mu), \mu$ és $\mu + \Delta\mu$ folytonos függvénye következképpen tételünk első részének értelmében az x és $\Delta\mu$ folytonos függvénye. Ezen egyenlőség $\Delta\mu$ -vel való végigosztásával a $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ meghatározására a

$$\frac{d\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}\right)}{dx} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}\Phi_1 + \Phi_2 \quad (52)$$

lineáris egyenletet nyerjük.

A $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ kifejezést eddig csak a $\Delta\mu \neq 0$ kikötéssel értelmeztük. Határozzuk meg $\Delta\mu = 0$ -nál éppen úgy, hogy kielégítse az (52) egyenletet, és $x = x_0$ -nál zérussá váljék. Az (52) egyenlet jobboldala folytonos az x és $\Delta\mu$ szerint (ezek a Φ_1 és Φ_2 -ben szerepelnek), s a $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ szerint korlátos deriválttal rendelkezik. Ez utóbbi abból

következik, hogy az előző paragrafusban kimutattuk azt, hogy Φ_1 , a $\frac{\partial f}{\partial y}$ függvény határozott integrálja, már pedig a $\frac{\partial f}{\partial y}$ korlátos. $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} = 0$ minden $\Delta\mu$ -re $x = x_0$ -nál. Ezért ezen paragrafus 1. pontjában igazoltak értelmében az (52) egyenlet $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ megoldása folytonos a $\Delta\mu$ szerint, ha csak $|\Delta\mu|$ eléggé kicsiny. Ezért, ha a $\Delta\mu \rightarrow 0$, akkor a $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ mennyiség egy meghatározott határértékhez tart. Ez pedig azt jelenti, hogy $\varphi(x, \mu)$ függvénynek a μ szerinti deriváltja létezik.

$$\Phi_1 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad \Phi_2 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \mu}$$

ha $\Delta \mu \rightarrow 0$, ezért a $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$ derivált a

$$\frac{d \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right)}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial \mu} \quad (53)$$

differenciálegyenletnek tesz eleget.

Tehát ha ezen egyenletre alkalmazzuk a jelen paragrafusunk 1. pontjában igazolt tételt, akkor azt kapjuk, hogy $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$ folytonos az (x, μ) argumentumra nézve.

3. Ha az f a p -edik rendig bezárólag folytonosan deriválható az y és μ szerint (ahol $p \geq 2$), akkor az (53) egyenletre alkalmazzuk ugyanazokat a megfontolásokat, melyeket a paragrafus 2. pontjában az (50) egyenletre alkalmaztunk, csak hogy φ helyett $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$ -t veszünk. Így azt kapjuk, hogy $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2}$ létezik és az (x, μ) argumentum szerint folytonos. Ezt a gondolatmenetet folytatva teljesen igazolhatjuk az e paragrafus kezdetén megfogalmazott tételt.

M e g j e g y z é s. A (49) differenciálegyenlet megoldásának μ_1, \dots, μ_n -től való folytonos függését vagy e paraméterek szerinti differenciálhatóságát x -nek nemcsak az $[a, b]$ intervallumban fekvő értékeire igazolhatjuk, hanem az $[a, b]$ -nél nagyobb intervallumra is. Ennek igazolása a 20. §-ban mondottakhoz volna hasonló.

K ö v e t k e z m é n y. Ha az (50) egyenletre igazolt tételt a 20. § (**) egyenletre alkalmazzuk, a következő eredményhez jutunk.

Ha a

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

egyenlet jobboldala az x és y szerint a p -edik rendig bezárólag folytonosan deriválható, akkor az az $y(x, x_0, y_0)$ függvény is a p -edik rendig bezárólag folytonosan deriválható x_0 és y_0 szerint, mely ezt az egyenletet kielégíti és az $x = x_0$ -nál az y_0 értéket veszi fel ($p \geq 1$).

F e l a d a t o k. 1. Legyen adva az $y' = \sin(x, y)$ egyenlet és az $x_0 = 0, y_0 = 0$ kezdeti feltétel. Keressük $\frac{\partial y}{\partial x_0}$ és $\frac{\partial y}{\partial y_0}$ deriváltakat tetszőleges x -nél az (53) egyenlet segítségével.

2. Legyen adva az $y' = x^2 + y^2$ egyenlet és az $x_0 = 0, y_0 = 0$ kezdeti feltétel. Állapítsuk meg 0,0001 pontossággal, hogy mekkora $\frac{\partial y}{\partial y_0}$ az $x = 1$ -nél.

Az $y(x)$ kiszámításánál használhatjuk pl. a szukcesszív approximáció módszerét.

3. Igazoljuk, hogy ha az (1) egyenletben az f folytonosan deriválható, akkor

$$\frac{\partial y(x, x_0, y_0)}{\partial x_0} + f(x_0, y_0) \frac{\partial y(x, x_0, y_0)}{\partial y_0} \equiv 0.$$

4. Legyen a (20) egyenletben szereplő M és N folytonosan deriválható és $M^2(x_0, y_0) + N^2(x_0, y_0) \neq 0$ az (x_0, y_0) pedig G tartomány egy pontja. Akkor a (20) egyenletnek van folytonos integráló tényezője az (x_0, y_0) bizonyos környezetében.

23. §. A szinguláris pontok

Definíció. Legyen P annak a G tartománynak belső pontja, melyben a már a 2. §-ban említett

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \frac{dx}{dy} = f_1(x, y) \quad (54)$$

differenciálegyenletet vizsgáljuk (P lehet a G határán is, mivel az (54) egyenlet ott szintén értelmezve lehet).

1. Ha a P pontnak van olyan \mathcal{U} környezete¹⁾, melyben az $f(x, y)$ az x szerint folytonos és y szerint korlátos deriválttal rendelkezik, vagy amelyben az $f_1(x, y)$ az y szerint folytonos, s az x szerinti deriváltja korlátos, akkor P -t az (54) egyenlet *közönséges pontjának* nevezzük. Ezen \mathcal{U} környezet minden pontján e környezetben egy és csak egy integrálgörbe megy át²⁾.

2. A G tartomány minden nem közönséges pontját, továbbá határának minden pontját is *szinguláris pontoknak* nevezzük.

3. Ha a P pontnak nincsen oly \mathcal{U} környezete, melynek minden pontján e környezetben egy és csak egy integrálgörbe megy át, s melyben az $f(x, y)$ és $f_1(x, y)$ függvényeknek legalább egyike folytonos volna, akkor a pontot *lényegesen szingulárisnak* mondjuk. Innen beláthatjuk, hogy \bar{G} határának minden pontja lényegesen szinguláris az (54) egyenletre vonatkozóan. Azonban többféle szinguláris és lényegesen szinguláris pont is van. Lássunk néhány példát.

1. Az

$$\begin{aligned} y' &= y \ln |y|, \text{ ha } |y| > 0 \\ &= 0, \text{ ha } y = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

egyenletre nézve az x -tengely minden pontja szinguláris, de nem lényegesen szinguláris.

2. A (4) és (7) egyenletekre nézve az origó lényegesen szinguláris.

Az *izolált szinguláris pont* (azaz az olyan szinguláris pont, melynek bizonyos környezetében nincsen más szinguláris pont) igen gyakran előfordul az alkalmazásokban a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

alakú differenciálegyenlet vizsgálatánál, ahol $M(x, y)$ és $N(x, y)$ oly függvények, melyek az x és y szerint elegendő sokszor folytonosan deriválhatók. Könnyű belátnunk, hogy a szóbanforgó tartománynak minden olyan belső pontja közönséges pont, ahol $M(x, y) \neq 0$ vagy $N(x, y) \neq 0$. Tekintsünk most egy oly (x_0, y_0) pontot, melyben $M(x, y) = 0$ és $N(x, y) = 0$. Az írásmód egyszerűsítése végett tegyük fel, hogy $x_0 = 0$ és $y_0 = 0$. Ha az $M(x, y)$ és $N(x, y)$ függvényt

¹⁾ A P pont környezetén mindig *teljes* környezetet értünk, s nemcsak a G -hez tartozó részét. Az ilyen környezetet kicsiny sugarú körnek képzelhetjük, melynek P a középpontja.

²⁾ Természetesen ahhoz, hogy P a közönséges pont ezen utóbbi tulajdonságával rendelkezék, nem kell követelnünk, hogy környezetében a szóbanforgó függvény deriváltja korlátos legyen. Elegendő volna csak azt követelni, hogy egy Lipschitz-feltételnek tegyen eleget. Azonban a közönséges pont oly definícióját szándékoztam adni, mely könnyen lehetővé teszi annak felismerését.

az x és y szerint haladó hatványsorba fejtjük egészen a másodfokú tagokig, akkor a $(0,0)$ pont környezetében

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M'_x(0,0)x + M'_y(0,0)y + O(x^2 + y^2)}{N'_x(0,0)x + N'_y(0,0)y + O(x^2 + y^2)} \quad 1) \quad (56)$$

kapjuk.

Ez az egyenlet az $x = 0, y = 0$ pontban nem határozza meg $\frac{dy}{dx}$ -et. Látni fogjuk, hogy ha

$$\begin{vmatrix} M'_x(0,0) & M'_y(0,0) \\ N'_x(0,0) & N'_y(0,0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

akkor az origó differenciálegyenletünkre nézve szinguláris hely lesz.

*Perro*²⁾ kimutatta azt, hogy ha csak a

$$\begin{vmatrix} \lambda - M'_y(0,0) & -N'_y(0,0) \\ -M'_x(0,0) & \lambda - N'_x(0,0) \end{vmatrix} = 0.$$

egyenlet mindkét gyökének valós része nem zéró, akkor az integrálgörbék az izolált szinguláris pont körüli viselkedésének jellegére a számlálóban és nevezőben szereplő $O(x^2 + y^2)$ tagok semmiféle befolyással nincsenek. Hogy e viselkedésről némi elképzelésünk legyen, tanulmányozzuk a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy} \quad \left(\text{ahol } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \right)$$

egyenlet integrálgörbéinek menetét az origó körül.

Kimutathatjuk, hogy az

$$\begin{cases} x = k_{11}\xi + k_{12}\eta \\ y = k_{21}\xi + k_{22}\eta \end{cases} \quad (57)$$

nem szinguláris, lineáris transzformáció (melyben k_{ij} valós számok), ezt az egyenletet az alábbi három típus valamelyikébe viszi át:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \frac{d\eta}{d\xi} &= k \frac{\eta}{\xi} \quad (k \neq 0), \\ 2) \quad \frac{d\eta}{d\xi} &= \frac{\xi + \eta}{\xi}, \\ 3) \quad \frac{d\eta}{d\xi} &= \frac{\xi + k\eta}{k\xi - \eta} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

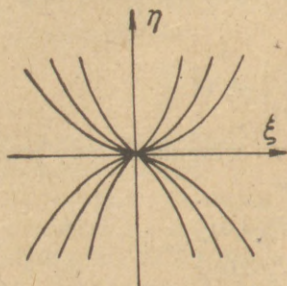
(a továbbiakat lásd a 49. §-ban). Vizsgáljuk meg közelebbről mindhárom esetet. Előzetesen megjegyezzük a következőket: a $\xi O \eta$ koordinátarendszernek nem kell feltétlenül derékszögűnek lennie, akkor sem ha az XOY koordinátarendszer derékszögű volt. Mi csak a rajz egyszerűsítése céljából vesszük a $\xi O \eta$ rendszert derékszögűnek.

1. E s e t. Az általános integrál $a\eta + |b\xi|^k = 0$. Az integrálgörbéknek ez esetben való viselkedését mutatjuk be a 14., 15. és 1. ábrán.

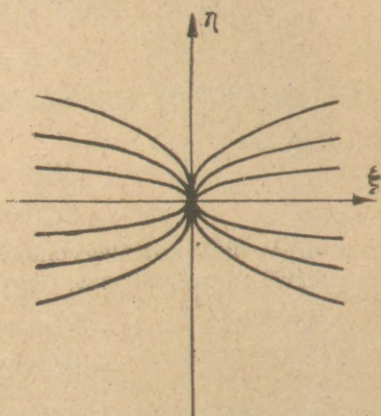
¹⁾ Az $O(x^2 + y^2)$ oly mennyiséget jelöl, melynek az $(x^2 + y^2)$ -hez való aránya korlátos.

²⁾ Math. Zeitschrift Bd. 15 (1922) és Bd. 16 (1923). Lásd még Bendixson és Frommer cikkeit Успехи математических наук 1941 IX. füzetében.

A 14. ábra arra az esetre vonatkozik, amikor $k > 1$. Ekkor az összes integrálgörbék az O pontban érintik az $O\xi$ tengelyt, kivéve a két $O\eta$ féltengelyt. Az $O\xi$ és $O\eta$ tengelyek maguk is integrálgörbék minden helyen, kivéve az O pontot, melyben az (58₁) egyenlet nem határoz meg irányt.



14. ábra



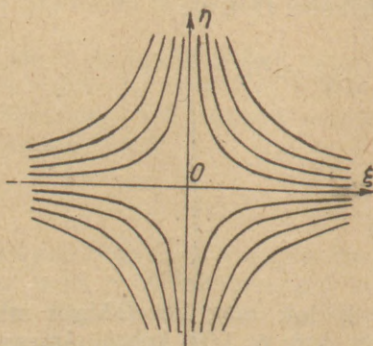
15. ábra

A $k = 1$ esetet már a bevezetésben letárgyaltuk (lásd az 1. ábrát).

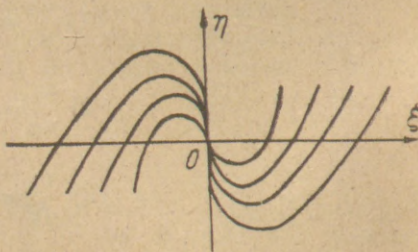
A $0 < k < 1$ esetben (15. ábra) minden integrálgörbe érinti az $O\eta$ tengelyt, kivéve a két $O\xi$ féltengelyt.

Látjuk tehát, hogy ha csak $k > 0$, akkor minden integrálgörbe meghatározott irányból közeledik az O -hoz, más szóval O -ban meghatározott érintője van.

Általában, ha az O olyan, hogy minden integrálgörbe meghatározott irányból tetszőlegesen közelíti, akkor O -t *csomópontnak* mondjuk. Ez azt jelenti, hogy ha $k > 0$, akkor az O az (58₁) egyenlet integrálgörbéinek csomópontja.



16. ábra



17. ábra

Az $\eta\xi^{-k} = c$ alakú egyenlet viselkedését a 16. ábrán ábrázoltuk ($k < 0$). Ez esetben az O ponthoz a következő négy integrálgörbe juthat tetszőlegesen közel: a két $O\xi$ féltengely és a két $O\eta$ féltengely. Minden más integrálgörbe „megközelíti” az O -t, azután eltávolodik tőle. Ekkor O -t *nyeregpontnak* nevezzük. Ugyanis a térképen két hegy közötti hágónak (nyeregnek) szintvonalait ez integrálgörbékhez hasonlóan ábrázolják.

2. Eset. Most az általános integrált a $b_{\eta} = \xi(a + b \ln |\xi|)$ egyenlet adja meg (17. ábra). Az összes integrálgörbék az O pontban metszik az O_{η} tengelyt. A koordinátatengelyek közül csak az O_{η} lesz integrálgörbe. Az O pont most is esomópont, mint ahogyan az 1. esetben, amikor $k > 0$ volt.

3. Eset. Az (58₃) egyenletet igen egyszerűen integrálhatjuk, ha áttérünk polár-koordinátákra. Legyen:

$$\xi = \rho \cos \varphi$$

$$\eta = \rho \sin \varphi.$$

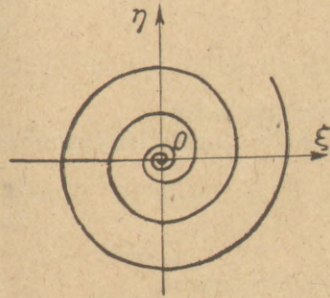
Akkor rövid számítással ezt kapjuk:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = k\rho, \quad (59)$$

tehát

$$\rho = c e^{k\varphi}.$$

Ha $k > 0$ minden integrálgörbe közeledik az O ponthoz, míg $\varphi \rightarrow -\infty$, s azt végtelen sokszor körülkerüli (18. ábra). Ha $k < 0$, akkor ugyanez történik, míg $\varphi \rightarrow +\infty$. Ezen esetekben az O -t *fókusz*nak nevezzük. Ha $k = 0$, akkor az (58₃) egyenlet integrálgörbéinek összessége O középponttal rendelkező körsereg. Általában, ha az O pont bizonyos környezetét teljesen kitöltik oly zárt integrálgörbék, melyek O -t belsejükben tartalmazzák, akkor az O -t *centrum*nak mondjuk. A centrum igen könnyen fókusszá változtatható, ha csak az (56) egyenlet jobboldalának számlálójához és nevezőjéhez egy magasabbfokú tagot hozzáírunk: ez esetben tehát az integrálgörbéknek az O körüli viselkedését nem határozzák meg az elsőfokú tagok. A 49. §-ban majd belátjuk, hogy k csak akkor válik zérussá, ha a



18. ábra

$$\begin{vmatrix} \lambda - b & -a \\ -d & \lambda - c \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet λ gyökeinek valós része nulla.

A szinguláris pontok itt elmondott osztályozása *Poincaré*tól ered.

Feladatok. Ábrázoljuk az alábbi egyenletek integrálgörbéinek viselkedését a szinguláris helyek közelében:

$$y' = \frac{y}{x^2}; \quad y' = \frac{x}{y^2}; \quad y' = \frac{x^2}{y^2}; \quad y' = \frac{y^2}{x^2}.$$

24. §. A szinguláris vonalak

Definíció. 1. *Szingulárisnak* nevezzünk olyan vonalat, melynek minden pontja szinguláris pont az (54) egyenletre vonatkozóan.

2. *Lényegesen szinguláris vonalnak* nevezzünk olyan vonalat, melynek minden pontja lényegesen szinguláris az (54) egyenletre vonatkozóan.

3. Ha a szinguláris (illetve lényegesen szinguláris) vonal egyúttal integrálgörbéje is az (54) egyenletnek, akkor azt ennek az egyenletnek *szinguláris* (illetve *lényegesen szinguláris*) integrálvonalának nevezzük.

Példák. Az $y = C$ vonal szinguláris (de nem lényegesen szinguláris és nem integrálvonal) a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(y)}{\varphi(x)}$$

egyenletre vonatkozóan, ha az $f(y)$ és $\varphi(x)$ függvények folytonosak, egy pozitív konstansnál mindig nagyobbak, és ha semilyen intervallumban sem rendelkeznek korlátos deriválttal (lásd az 5. §-t).

Példa lényegesen szinguláris, de nem integrálvonalra a

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

egyenlet minden nem integrálvonalá, ha az $f(x, y)$ a M. A. Lavrentyev által szerkesztett függvényt jelöli (lásd a 10. §-t).

Az x tengely szinguláris, de nem lényegesen szinguláris integrálvonal a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y \ln |y|, \quad \text{ha } y \neq 0 \\ &= 0, \quad \text{ha } y = 0 \end{aligned}$$

egyenletre nézve.

Az x tengely lényegesen szinguláris integrálvonal a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y \ln^2 |y|, \quad \text{ha } y \neq 0 \\ &= 0, \quad \text{ha } y = 0 \end{aligned}$$

egyenletre nézve

Az (54) egyenletnek minden olyan vonala lényegesen szinguláris, mely a G tartomány határának oly része, melyen az $f(x, y)$ és $f_1(x, y)$ függvények valamelyike értelmezve van. Előfordulhat, hogy e vonal egyúttal integrálvonal is, ha az (54) egyenlet a G határán is meg van adva.

25. §. Az integrálgörbe menete — egészben

Sokszor fontos az, hogy az integrálgörbék egész viselkedésének rajzát megszerkesszük az iránymező által megadott teljes értelmezési tartományban (miközben nem kell törekednünk feltétlenül a hosszegység megtartására). A 14—18. ábrákon az integrálgörbéknek az izolált szinguláris pontok körüli viselkedését ábrázoltuk. Ha a G tartomány, melyben az (1) differenciálegyenlet jobb oldala értelmezve van, egyszeresen összefüggő és minden pontja közönséges, akkor az integrálgörbék vázlatosan egy párhuzamos egyenesekből álló vonalsereggel ábrázolhatók, mert ebben az esetben minden pontján csak egy integrálgörbe megy át, és így kettő nem metszheti egymást. Az (54)-nél általánosabb alakú egyenleteknél, melyek szinguláris pontokkal és vonalakkal is rendelkeznek, az integrálgörbék struktúrája jóval bonyolultabb lehet.¹⁾ A differenciálegyenletek

¹⁾ И. Бендиксон: О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Успехи математических наук, 1941., IX. füzet 191. l.

elméletének egyik alapvető feladata éppen az, hogy a lehető legegyszerűbb módszert nyújtsa adott differenciálegyenlet integrálgörbeseregének a teljes értelmezési tartományban való ábrázolására — azaz, hogy az integrálgörbék viselkedését „egészben” tanulmányozza. Ez a feladat még távolról sincsen megoldva, pl. még az oly

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

alakú egyenletre sem, melyben $M(x, y)$ és $N(x, y)$ kettőnél magasabb fokú polinomok. E kérdés kapcsán szólnék pár szót az ú. n. „határciklus”-okról.

Tekintsük a

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho - 1 \tag{60}$$

differenciálegyenletet, ahol ρ és φ az (x, y) sík polárkoordinátái.¹⁾ Ennek az egyenletnek általános integrálja

$$\rho = 1 + C e^{\varphi},$$

ahol C tetszőleges konstáns (ha $C < 0$, akkor $\varphi \leq -\log |C|$ biztosítja, hogy ρ sem negatív).

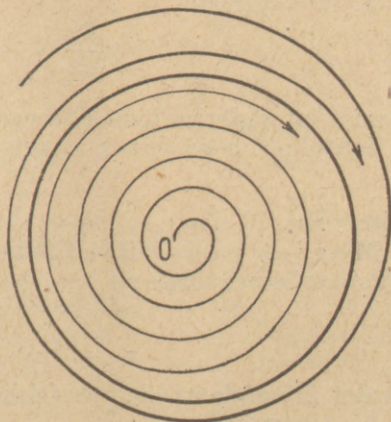
Az integrálgörbesereg a következőkből áll (19. ábra).

- 1) a $\rho = 1$ körből ($C = 0$),
- 2) oly spirálisokból, melyek az O origóból indulnak ki, s belülről közelítik a fenti kört, míg $\varphi \rightarrow -\infty$ ($C < 0$),
- 3) végtelen spirálisokból, melyek kívülről közelítik a fenti kört, míg $\varphi \rightarrow -\infty$ ($C > 0$).

A $\rho = 1$ kört a (60) egyenlet határciklusának nevezzük. Általában az L zárt integrálgörbét határciklusnak nevezzük, ha van oly, az L -et tartalmazó sáv, melynek minden pontja közöséges pont, s mely teljesen be van fedve az L -hez aszimptotikusan közeledő integrálgörbékkel. E határciklusok megkeresésének a fizikában igen nagy jelentősége van. Erre mindmáig általános eljárás nincsen.

Megjegyezzük, hogy a $\rho = 1$ kör minden pontja a (60) egyenletnek közöséges pontja. Erről könnyen meggyőződhetünk, ha a polárkoordinátákról Descartes-féle koordinátákra térünk át. Ez azt jelenti, hogy a határciklus kicsiny szakasza semmiben sem különbözik a többi integrálgörbétől.

F e l a d a t o k. 1. Igazoljuk, hogy annak szükséges és elegendő feltétele, hogy a G tartományban a (2) és (2') egyenletekkel (melyekben M és N folytonos és egyidejűleg nem zéró) előállíthassunk egy iránymezőt az, hogy G minden pont-



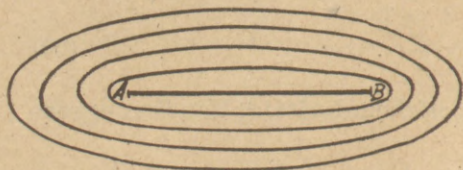
19. ábra

¹⁾ (60) derékszögű koordinátákban

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+y)\sqrt{x^2+y^2}-y}{(x-y)\sqrt{x^2+y^2}-x}$$

jához hozzárendelhesünk egy olyan egységvektort, mely mindenütt egybeesik a mező irányával és folytonosan függ a mező pontjától. A mező irányát minden pontban egy szakasszal adtuk meg, melyen a két irány közül egyiket sem tüntettük ki. Most azonban minden pontban ki kell választanunk a két irány valamelyikét, úgy, hogy az folytonosan függjön a ponttól. Mutassunk példát olyan iránymezőre, mely egy körgyűrűre van értelmezve, melyet azonban nem állíthatunk elő oly (2), (2') egyenletekkel, melyekben M , N folytonosak és nem válnak egyidejűen zérussá.

3. Mutassunk példát oly, a síkgyűrűn értelmezett iránymezőre, mely nem állítható elő az egész gyűrűben a (20) egyenlettel, (melyben M és N folytonosak és egyidőben nem válnak zérussá), s mely mégis az egész gyűrűben folytonos. Most az iránymezőt szakasszal adjuk meg, melynek egyik irányát sem tüntetjük ki. Az iránymező folytonosságán a gyűrűben azt értjük, hogy a szakasz folytonosan változik. Adhatunk-e analóg példát egyszerűen összefüggő síktartományra?



20. ábra

2. A (2) és (2') egyenlet integrálgörbéit a 20. ábrán ábrázoltuk.

Igazoljuk, hogy ha M és N folytonosak, akkor értékük az AB szakaszon mindenütt nulla.

4. Igazoljuk, hogy a (2), (2') egyenlet izolált szinguláris pontjához csak páros számú integrálgörbe közeledhet meghatározott irányból. Ha valamely integrálgörbe végtelen sokszor csavarodó spirálisként közeledik ehhez a ponthoz, akkor az összes többi integrálgörbe is végtelen sokszor csavarodó spirálisként közeledik e ponthoz. Közelítheti-e az izolált szinguláris pontot pontosan két ilyen spirális?

5. Ábrázoljuk a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} + x^2 + y^2 - 1$$

egyenlet integrálvonalainak az egész síkban való viselkedését.

Igazoljuk, hogy ennek az origó fókusza, és az

$$x^2 + y^2 = 1$$

határciklusa.

M e g j e g y z é s. Hasonlítsuk össze ugyanabban a pontban ezen egyenlet integrálgörbéinek hajlását a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

egyenlet integrálgörbéinek hajlásával.

6. Ábrázoljuk a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y - x} + (y - x)^2 + (x - 1)^2 + \frac{2}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{3}$$

egyenlet integrálgörbéinek viselkedését az egész síkban. Igazoljuk, hogy két szinguláris helye van: a (0,0) nyeregpont és az (1,1) fókusz.

M e g j e g y z é s. Hasonlítsuk össze ugyanabban a pontban ezen egyenlet integrálgörbéinek hajlását a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y - x}$$

egyenlet integrálgörbéinek hajlásával, mely az $x = \xi + 1$, $y = \eta + 1$ helyettesítések révén kvadraturákkal integrálható.

7. Ha az L zárt, csak közönséges pontokból álló integrálvonalat oly sávba tudjuk foglalni, mely nem tartalmaz más zárt integrálgörbét, akkor az L határciklus.

8. Ha az L zárt lényegesen szinguláris pontot nem tartalmazó integrálgörbét kívülről és belülről egy-egy integrálgörbe aszimptotikusan közelíti, akkor L határciklus.

9. Mutassunk példát oly L zárt, lényegesen szinguláris pont nélküli integrálgörbére, mely nem határciklus; úgy, hogy L semilyen környezete sincs teljesen fedve csupa zárt integrálgörbékkel.

10. Legyen L oly zárt, folytonosan változó érintővel rendelkező integrálgörbe, melynek sem belsejében, sem körülétén nincs a mezőnek lényegesen szinguláris pontja. Igazoljuk, hogy akkor az L vonal pontjaiban a mező irányai legalább kétszer egybeesnek L érintőinek irányával, és legalább kétszer egybeesnek L normálisának irányával.

26. §. A deriváltat implice tartalmazó egyenletek

Ilyen egyenletre példa a

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0. \quad (61)$$

Könnyen beláthatjuk, hogy ez ekvivalens a

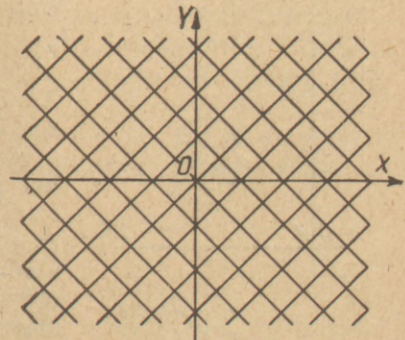
$$\frac{dy}{dx} = +1 \quad (62_1)$$

és

$$\frac{dy}{dx} = -1 \quad (62_2)$$

egyenletekkel.

Az első egyenlet oly mezőt ad meg, melynek irányai 45° alatt hajlanak az OX tengelyhez, a második pedig olyat, melynek irányai 135° alatt hajlanak az OX tengelyhez. A (61) egyenlet által megadott iránymezőt a (62₁) és (62₂) egyenletek által előállított mezők összetevésével nyerjük. Az (x, y) sík minden pontján egy és csak egy a (62₁) egyenlettel meghatározott egyenes megy át, mely 45° alatt hajlik az OX -hez, valamint egy és csak egy a (62₂) által meghatározott egyenes, mely az OX tengelyhez 135° alatt hajlik. Azaz az (x, y) sík minden pontján két és csak két oly integrálvonal megy át, melyeket a (61) egyenlet határoz meg.¹⁾



21. ábra

¹⁾ Az analízisben kimutatják, hogy ha a $\Phi(x)$ függvény az (a, b) intervallumban mindenütt differenciálható és deriváltja $\varphi(x)$, továbbá, ha a $\varphi(x)$ az x_1 illetve x_2 ($a < x_1 < x_2 < b$) helyeken y_1 illetve y_2 értéket vesz fel, akkor a $\varphi(x)$ függvény az (x_1, x_2) intervallumban az y_1 és y_2 minden közbenső értékét felveszi (lásd pl. Г. М. Фихтенгольц: Курс дифференциального и интегрального исчисления, Гостехиздат, 1947). I. k. 283.

Ezért nincsen oly $y(x)$ differenciálható függvény, melynek olyan deriváltja lenne, mely minden x -nel csak a $+1$, vagy a -1 értéket veszi fel (úgy hogy egyes helyeken e derivált $+1$, másutt -1 értékű).

Igazolni fogjuk a következő általános tételt:

Tétel. Legyen adva az

$$F(x, y, y') = 0 \quad (63)$$

egyenlet, ahol az $F(x, y, y')$ függvény a következő három tulajdonsággal rendelkezik:

1. Legyen az $F(x, y, y')$ függvény az (x, y, y') tér zárt és korlátos G tartományában értelmezve, melyben folytonos.

2. Rendelkezzen a (63.) egyenlet az (x, y) sík bármely (x_0, y_0) pontjában y' -re nézve m és csak m számú b_1, b_2, \dots, b_m ($m > 0$) megoldással, ahol m véges szám.

3. Feküdjék minden (x_0, y_0, b_i) , $i = 1, \dots, m$ pont G belsejében, és legyen e pontok bizonyos R_i ¹⁾ környezetében az $F(x, y, y')$ az y és az y' szerint folytonosan deriválható, úgy hogy az y' szerinti derivált az egész R_i környezetében abszolút értékben egy pozitív konstansnál nagyobb.

Akkor az (x, y) síkban fekvő (x_0, y_0) pontnak van oly \mathcal{U} környezete, melyben a (63) egyenletnek minden ponton m és csak m megoldása megy át.

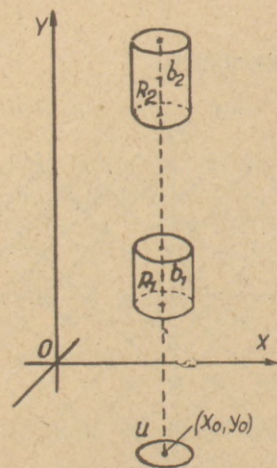
Bizonyítás. Fenti feltételek mellett az implicit függvényről szóló tétel értelmében az (x, y, y') tér minden (x_0, y_0, b_i) pontjának van oly R_i környezete, melyben a (63) egyenletnek egy és csak egy

$$y' = f_i(x, y), \quad i = 1, \dots, m \quad (64)$$

alakú megoldása van, ahol az $f_i(x, y)$ függvények x szerint folytonosak, továbbá az y szerinti deriváltjuk

$$-\frac{F'_y(x, y, f_i)}{F'_{f_i}(x, y, f_i)}$$

Az F függvényre vonatkozó feltételeink értelmében e törtek korlátosak. Az R_i ($i = 1, \dots, m$) környezeteket gondolhatjuk oly hengereknek, melyek alkotója az OY' tengellyel párhuzamos, s melyek vetülete az (x, y) sík (x_0, y_0) pontjának környezetét képezi (a 22. ábrán $m = 2$). Ezt az \mathcal{U} környezetet választhatjuk oly kicsinyre, hogy a (63) felületnek sem felette, sem alatta ne legyen olyan (x, y, y') pontja, mely ne tartoznék a (64) felületek valamelyikéhez. Nyilván, ha ilyen pontok léteznek, úgy azok az előbbieken alapján az R_i ($i = 1, \dots, m$) hengereken kívül helyezkednek el. Tehát ha ily pontok bármely tetszőlegesen kicsiny \mathcal{U}



22. ábra

környezetben is volnának, akkor ezek a G korlátossága és zárttsága, valamint $F(x, y, y')$ függvény folytonossága miatt az

$$x = x_0, \quad y = y_0$$

egyenesen is az R_i hengereken kívül lennének. Ez azonban azt jelentené, hogy így az $F(x_0, y_0, y') = 0$ egyenletnek y' -re nézve m számúnál több megoldása volna, ez pedig feltételünknek ellentmond.

Így az $F(x, y, y')$ függvényre vonatkozó feltételek alapján azt találtuk, hogy az (x, y) sík (x_0, y_0) pontjának van oly \mathcal{U} környezete, melyben a (63) egyenletnek m és csak m (64) alakú különböző megoldása van. Az $f_i(x, y)$ függvények x -re nézve folytonosak és y szerinti korlátos deriválttal rendelkeznek, következé-

¹⁾ R_i környezetén az (x, y, y') térben fekvő (x_0, y_0, b_i) pont teljes környezetét értjük.

képen az \mathcal{U} környezet minden P pontján a (64) egyenletek mindegyikének egy és csak egy integrárvonala megy át az \mathcal{U} környezetben. Minthogy \mathcal{U} tartományban az összes y' érték különböző, ezért a megfelelő integrálgörbék is különbözők, és nem érintik egymást. Ezért az \mathcal{U} tartomány minden pontján a (63) egyenlet m és csakis m integrálgörbéje megy át¹⁾; s éppen ezt kellett igazolnunk.

Nyilván a (63) egyenlettel jellemzett mezőnek nincsen az OY tengellyel párhuzamos iránya. Tehát ezen egyenlet integrálgörbéi egyikének sincsen az OY tengellyel párhuzamos érintője. Azért, hogy ne kelljen kizárnunk az OY tengellyel párhuzamos irányokat sem, sokszor — analóg a deriváltra nézve explicit egyenletnél követett eljárásunkhoz — az

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (65)$$

egyenlettel egyidejűleg az

$$F_1\left(x, y, \frac{dx}{dy}\right) = 0 \quad (65')$$

egyenletet is tekintjük.

Az $F_1\left(x, y, \frac{dx}{dy}\right)$ függvényt itt úgy kell meghatározni, hogy a (65) és (65') egyenletek, ne legyenek ellentmondásban egymással. A (65) és (65') egyenleteket a kényelmesebb írásmód kedvéért néha egy egyenletté foglaljuk össze differenciálok segítségével (lásd alább az 1. példát). A 2. §-hoz hasonlóan a (65) egyenlet integrálgörbéivel egyidejűen a (65), (65') egyenlet integrálgörbéit is tekintetbe vesszük.

Definíciók. Legyen értelmezve az $F(x, y, y')$ [illetve $F_1[(x, y, y')]$] függvény az (x, y, y') [illetve (x, y, x')] tér G_{xyy} , (illetve G_{xyx}) tartományában és határának egy részén. Legyen $P(x_0, y_0)$ az (x, y) sík oly G_{xy} tartományának belső pontja vagy határpontja, ahol a (65), (65') egyenletek meghatároznak bizonyos irányokat.

1. A P pontot a (65), (65') egyenletek *közönséges pontjának* nevezük, ha teljesíti az alábbi feltételeket:

a). A $P(x_0, y_0)$ -nak van oly zárt $\overline{\mathcal{U}}_{xy}$ környezete, melybe egy oly \overline{G}_{xyy}^* , (illetve \overline{G}_{xyx}^*) halmaz (x, y) síkra való korlátos és zárt vetülete esik, mely halmazban az $F(x, y, y')$ (illetve az $F_1(x, y, x')$) függvény értelmezve van és folytonos. Avégből, hogy a \overline{G}_{xyx}^* , (illetve \overline{G}_{xyy}^*) korlátos maradjon, bármilyen nagy is az y' (illetve x') értéke — kikötjük, hogy a (65), illetve (65') egyenletet csak akkor használjuk, amikor $|y'|$ (illetve $|x'|$) nem nagyobb egy bizonyos konstánsnál. Nem szükséges, hogy e konstáns abszolút értékben az $F(x_0, y_0, y') = 0$ (illetve $F_1(x_0, y_0, x') = 0$) egyenlet valamely y' (illetve x') gyökével legyen egyenlő.

b). A $P(x_0, y_0)$ pontban a (65), (65') egyenlet által meghatározott integrálgörbék irányainak a száma véges.

c). Az (x_0, y_0) pontban a (65) [illetve (65')] egyenlettel megadott minden iránynál az $F(x, y, y')$ [illetve $F_1(x, y, x')$] függvényre teljesül az imént bizonyított tétel 3. feltétele, [az $F_1(x, y, x')$ függvényre e 3. feltételben x helyett y, y' helyett x' értendő].

2. Ellenkező esetben e pontot *szingulárisnak* nevezük.

3. A $P(x_0, y_0)$ pontot a (65), (65') egyenletek *lényegesen szinguláris pontjának* nevezük, ha az (x, y) síkban nincsen oly \mathcal{U} környezet, melynek minden pontján

¹⁾ Hasonlítsuk ezt össze a 61. o. lábjegyzetével.

véges és ugyanannyi integrálgörbe megy át e környezetben, ahol a jelzett véges szám a (65) és (65') egyenletek által a P ponthoz rendelt irányok száma.

4. E definíciók segítségével ugyanúgy határozzuk meg a *szinguláris és lényegesen szinguláris vonal, és a szinguláris valamint lényegesen szinguláris integrálvonal fogalmát*, mint ahogyan a szinguláris és lényegesen szinguláris pont fogalmának segítségével meghatároztuk e vonalakat a 24. §-ban.

Azok a példák, melyeket a 23. és 24. §-ban felsoroltunk a szinguláris és lényegesen szinguláris pontokra, vonalakra és integrálvonalakra, itt is helytállók. Ezeket kívül még bemutatjuk az alábbi példákat.

1. Példa.

$$y'^2(1-x^2) - x^2 = 0 \quad (66_1)$$

$$(1-x^2) - x^2 x' = 0 \quad (66_2)$$

vagy szimmetrikusabb formában

$$(1-x^2) dy^2 - x^2 dx^2 = 0. \quad (67)$$

A (66) egyenlet csakis az $|x| \leq 1$ sávban határoz meg iránymezőt. A (66₁) egyenlet baloldala e sávban mindenütt folytonos, és az y és y' szerint folytonos deriváltakkal rendelkezik. Az y' szerinti deriváltja

$$2y'(1-x^2).$$

Láthatjuk, hogy ez zérussá válik, ha: 1) $x = \pm 1$, 2) $y' = 0$. A (66₁) egyenlet értelmében az utóbbi csak az $x = 0$ egyenes mentén következik be. A (66₂) baloldalának az x' szerinti deriváltja ugyanezeknek az egyenesek mentén válik zérussá. Azaz a (66) egyenletnek három szinguláris vonala van

$$x = +1, \quad x = -1, \quad x = 0.$$

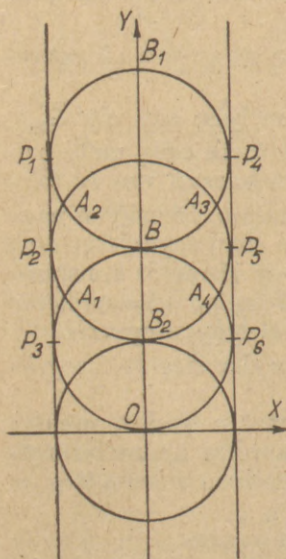
Az $x = \pm 1$ egyenesek lényegesen szinguláris vonalak, mert annak a tartománynak határán fekszenek, melyben egyenleteink irányokat határoznak meg. A (66₂) egyenletből láthatjuk, hogy ezek integrálvonalak.

Kimutatjuk, hogy az $x = 0$ egyenes is lényegesen szinguláris vonal, de nem integrálvonal. Mindenekelőtt megjegyezzük a következőket. A (66) egyenletből következik:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ebből adódik, hogy a (66) egyenlet integrálvonalai olyan egység sugarú körök, melyeknek középpontjai az OY tengely pontjait alkotják (23. ábra), s melyek az $x = \pm 1$ egyeneseket érintik.

Most már könnyen beláthatjuk, hogy az $x = 0$ egyenes szinguláris. Ugyanis ennek az egyenesnek mentén a (66₁) egyenletből y' -re csak egy értéket, zérót kapunk, a (66₂) egyenlet pedig itt az x' -re semilyen értéket sem ad meg. Azonban az OY tengely egyetlen B pontjának sincs olyan környezete, melynek



23. ábra

minden pontján egy és csak egy integrálgörbe megy át e környezetben, mert már magán a B ponton is négy integrál-vonal megy át e környe-

zetben: A_1BA_4 , A_2BA_3 , A_2BA_4 és A_1BA_3 (23. ábra). Azaz az y tengely valóban lényegesen szinguláris vonal, de nem integrálvonal. A $-1 < x < +1$ sáv minden pontjának — kivéve az y tengely pontjait — van oly környezete, melynek minden pontján e környezetben két és csak két integrálvonal megy át.

Megjegyezzük, hogy a most felsorolt integrálvonalakon kívül egyenletünknek még ilyen integrálvonalai is vannak:

$$P_1B_1P_4P_5B_2P_2P_1, \quad P_1B_1P_4BP_3OP_6BP_1$$

stb.

2. Példa. A *Clairaut-féle egyenlet*. Clairaut-féle egyenletnek nevezzük az

$$F(x, y, y') \equiv y - xy' - f(y') = 0 \quad (68)$$

alakú egyenletet. Feltesszük, hogy az $a \leq y' \leq b$ zárt intervallumban az $f(y')$ értelmezve van, és első két deriváltjával együtt folytonos, s hogy az $f''(y')$ ebben mindenütt megtartja pl. negatív előjelét.

Akkor a (68) egyenletnek az x és y bármely értéke mellett y' -re nézve legfeljebb két gyöke van (miért?). Ezért könnyű belátnunk, hogy az (x_0, y_0) pont ennek az egyenletnek közönséges pontja, ha

1) az

$$y_0 - x_0y' - f(y') = 0 \quad (68')$$

egyenletet sem az $y' = a$, sem az $y' = b$, nem elégíti ki, hanem legalább egy az (a, b) intervallum belsejében felvett y' érték,

2)

$$F'_{y'}(x_0, y_0, y') = -x_0 - f'(y') \neq 0,$$

ahol y' a (68') egyenlet valamely gyökét jelöli.

A 2. feltételt nem teljesítő pontok valamely görbén fekszenek. Ha az y' értéket paraméternek fogjuk fel és p -vel jelöljük, e vonal egyenletét az

$$y = xp + f(p), \quad x = -f'(p) \quad (69)$$

vagy

$$y = -f'(p)p + f(p), \quad x = -f'(p) \quad (70)$$

alakban írhatjuk. Ezek az egyenletek meghatározzák az y -t, mint az x függvényét. Erről könnyen meggyőződhetünk, ha a második egyenletet p -re megoldjuk [ez lehetséges, mert $f''(p)$ jeltartó], s az így nyert értéket az elsőbe helyettesítjük. Könnyen beláthatjuk azt is, hogy a (70) vonal integrálvonal. Ugyanis a (70) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} dy &= [-f''(p)p - f'(p) + f'(p)] dp = -pf''(p) dp, \\ dx &= -f''(p) dp. \end{aligned}$$

Tehát

$$\frac{dy}{dx} = p.$$

s ezért a (70) vonal — illetve a vele ekvivalens (69) vonal — a (68) egyenletet kielégíti.

Mint hogy $\frac{dy}{dx} = p$, ezért a p növekedésével $\frac{dy}{dx}$ is növekszik. A (70) egyenlet szerint $\frac{dx}{dp} > 0$, ha

$$f''(p) < 0.$$

Ezért ebben az esetben a (70) görbe alulról konvex [a 24. ábrán a (70) görbét az AQB vonal ábrázolja].

Könnyen verifikálhatjuk azt, hogy az

$$y = cx + f(c)$$

(c egy tetszőleges konstáns, melyre a $a \leq c \leq b$) egyenes integrálvonal. Ez az egyenes nyilván az

$$y = -f'(c)c + f(c)$$

$$x = -f(c)$$

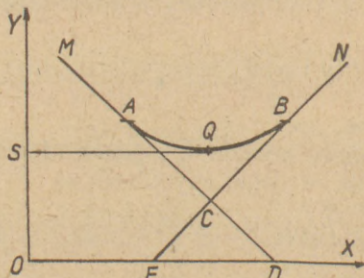
pontban érinti a (70) vonalat. Ezért a (68') egyenletnek pontosan annyi gyöke van az y' -re nézve, ahány érintő fektethető az (x_0, y_0) pontból az AQB ívhez.

Húzzuk meg a (70) vonal A és B végpontjához az $MACD$ és $NBCE$ érintőket. Ezek a (70) görbével együtt az (x, y) síkot a következő öt

$$MACE, NBCD, AQBCA, ECD, MAQBN$$

tartományra osztják.

A $MACE$ és $NBCD$ szögterek mindegyik belső pontjából egy és csak egy érintő húzható az AB ívhez, és ezekben a pontokban a (68') egyenletnek egy és csak egy megoldása van az y' -re nézve, mely a -tól és b -től különböző. Ezek tehát a (68) egyenletnek közös pontjai. Ez azt jelenti, hogy minden ilyen pontnak van olyan környezete, melyben a ponton (68)-nak annyi integrálgörbéje megy át, ahány gyöke van e pontban az y' -re nézve: azaz egy; s ez az egyetlen integrálgörbe éppen az e pontból az AB ívig húzott érintőszakasz. Analóg azt találjuk, hogy az $AQBCA$ tartomány minden belső pontja is közös a (68) egyenletre



24. ábra

nézve. Mindegyiknek van olyan környezete, melynek minden pontján kettő és csak kettő integrálvonal megy át; ezek a pontból az AB ívig fektetett érintőszakaszok. Az $MAQBN$ és ECD tartományok egyetlen belső pontján sem megy át a (68) egyenletnek integrálgörbéje. E pontok sem a közös, sem a szinguláris pontok közé nem sorolhatók.

Az (x, y) síknak azon pontjai közül, melyekben a (68) egyenlet megoldható az y' -re nézve, csak a $MACD$, $NBCE$ egyenesek pontjai nem teljesítik a 65. oldal 1) — az AQB vonal pontjai pedig a 2) feltételét: e vonalak szinguláris integrálvonalak. Könnyen beláthatjuk, hogy e vonalak nemcsak szingulárisak, de lényegesen szingulárisak is, s mellesleg a (68) egyenletnek integrálvonalai.

Végül megjegyezzük, hogy a (68) egyenletnek vannak még másfajta integrálvonalai is az említettekén kívül, ilyenek pl. az $SQBN$ típusú vonalak, melyek egy AB ívdarabból és a hozzá tartozó érintőszakaszokból állanak.

Feladatok. 1. Milyenek a következő egyenletek integrálgörbéi

$$\sin y' = 0, \quad \sin y' = x.$$

2. Tekintsük az

$$F(x, y') = 0$$

egyenletet.

Ha az $F(x, z) = 0$ görbének az $x = x_0, z = z_0$ -nál oly függőleges érintője van, mely nem metszi át a görbét, akkor bármely (x_0, y) ponton megy át egyenletünknek integrálgörbéje úgy, hogy e pont csúcspont lesz. Mi felel meg ebben az értelemben az $F(x, z) = 0$ görbe maximumpontjainak? Csúcspontjainak? Önmagát átmetszési helyeinek? Függőleges aszimptótáinak? Tekintsük az

$$(x^2 + y'^2)^2 = a^2(x^2 - y'^2),$$

$$x(1 + y'^6) = y'^4$$

egyenleteket!

27. §. A burkoló görbe

Tegyük fel, hogy egy differenciálegyenletnek integrálgörbéit az

$$F(x, y, C) = 0 \tag{71}$$

görbesereg adja meg, mely az (x, y) sík egy zárt \bar{G} tartományát oly módon fedi, hogy e tartomány minden pontján a seregnek legalább egy görbéje megy át. Keresendő oly a \bar{G} -ban fekvő L görbe, mely minden pontjában érintkezik a (71) sereg valamely görbéjével, s mely bármely szakaszán a sereg végtelen sok görbéjével érintkezik¹⁾. Az ilyen L vonalat a (71) sereg burkoló görbéjének nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a (63) egyenlet integrálvonalaiból álló sereg burkolója is integrálvonala ennek az egyenletnek, mivel az minden egyes pontjában érintkezik valamely integrálgörbével, és így ott a mező irányával is egyirányú. Az $F(x, y, C)$ függvényről fel kell tennünk, hogy mindegyik változója szerint folytonosan deriválható (erre vonatkozóan teszünk még más feltételeket is, melyek közül alább néhányat — dőlt betűvel szedve — felsorolunk). —

Feltesszük, hogy a keresett görbe létezik. Minthogy minden (x, y) pontjában érintkezik valamely L_C görbével [ahol a C index a C paraméternek azt az értékét jelenti, melynél a (71) általános egyenletből e vonal egyenletét kapjuk meg], azért koordinátái eleget tesznek az $F(x, y, C(x, y)) = 0$ egyenletnek, ahol C most már nem konstáns, hanem az L vonal minden pontjában felvesz bizonyos értéket (nevezetesen egyenlőt azzal a C értékkel, mely az L_C görbének felel meg). Az L görbének csak azt a részét tekintjük, ahol az y az x differenciálható függvénye. (Ugyanúgy tekinthetnénk azt a részét is, ahol az x az y differenciálható függvénye). Akkor az előbbi egyenletben szereplő C csak az x függvénye, s az egyenlet így az

$$F(x, y, C(x)) = 0 \tag{72}$$

alakba írható.

Tegyük fel, hogy $C(x)$ ismert és differenciálható függvény. Akkor ebből az egyenletből megkaphatjuk az öt kielégítő $y(x)$ függvénynek y' deriváltját, ha az egyenletet az x szerint deriváljuk. Ezt az

$$F'_x + F'_y y' + F'_C C_x' = 0$$

egyenlet adja.

¹⁾ Feltesszük, hogy a (71) seregben különböző C értékekhez különböző görbék tartoznak.

Másrészt, ha a (71) seregnek ugyanazon az (x, y) ponton átmenő L_C görbéjére nézve határoznánk meg, y' -t, azt kapnánk, hogy

$$F'_x + F'_{yy} = 0.$$

Ahhoz, hogy e két egyenletből meghatározható y' értékek (természetesen y' ezekből az egyenletekből csak akkor határozható meg, ha $F'_y \neq 0$) egymással egyenlők legyenek [azaz, hogy a jelzett pontban a (71) egy vonala és a (72) vonal közös érintővel rendelkezzen] az szükséges, hogy $F'_C C'_x = 0$.

Ahhoz pedig, hogy e szorzat nulla legyen az kell, hogy legalább egyik tényezője eltűnjön. Ha $C'_x = 0$ egy bizonyos intervallumban, az azt jelenti, hogy C állandó, s így megkapjuk a (71) sereg egy vonalának valamely szakaszát. Ezért a burkolóra nézve kell hogy

$$F'_C = 0 \tag{73}$$

legyen.

Könnyen beláthatjuk a fentiek megfordítását is, nevezetesen azt, hogy ha az $F(x, y, C)$ -re tett kikötések mellett a (72) és (73) egyenletek az $y(x)$ -et és $C(x)$ -et az x differenciálható függvényeként határozzák meg, s a $C(x)$ *semilyen x értéktartományra sem konstáns*, akkor az $y = y(x)$ a (71) sereg burkológörbéje.

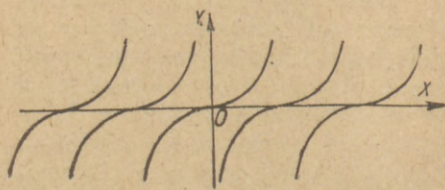
M e g j e g y z é s e k. 1. Minthogy a feladat feltevésében az x és y szerepe teljesen megegyező, a megoldásban is felcserélhető szerepük.

2. Az elsőrendű differenciálegyenlet integrálgörbeseregének burkolója mindig lényegesen szinguláris integrálvonal, mert minden pontjából egy irányba legalább két integrálgörbe indul ki.

1. P é l d a. Az egész (x, y) síkon legyen adva az

$$F(x, y, C) \equiv y - (x + C)^3 = 0 \tag{74}$$

görbesereg. Ez oly harmadfokú parabolákból áll, melyeket az $y = x^3$ parabolának az OX tengellyel párhuzamos eltolása révén nyerünk.



25. ábra

A (73) egyenlet e példában a $-3(x + C)^2 = 0$ képlethez vezet, amiből $C = -x$ következik. Ha ezt behelyettesítjük a sereg egyenletébe, az $y = 0$ vonalat kapjuk, mely nyilvánvalóan a (74) sereg burkológörbéje (25. ábra).

M e g j e g y z é s. Ha a görbesereg egyenletét az

$$F(x, y, C) \equiv y^{\frac{1}{3}} - (x + C) = 0$$

alakba íránk át, akkor $F'_C = -1$ lenne, s módszerünk nem adná meg a burkológörbét, mely pedig létezik. Ez azért van így, mert most F'_y az $y = 0$ értéknél nem létezik.

2. P é l d a. Az egész (x, y) síkon legyen adva az

$$F(x, y, C) \equiv y^5 - (x + C)^3 = 0 \tag{75}$$

görbesereg.

A (73) egyenlet itt $-3(x+C)^2 = 0$ lesz, amiből $C = -x$ következik. Ezt behelyettesítve a (75) egyenletbe az $y = 0$ egyenletet kapjuk.

Azonban egyszerűen beláthatjuk, hogy az x tengely a (75) seregnek nem burkolója (26. ábra). Ez azért van így, mert $y = 0$ -nál

$$F'_y = 5y^4 = 0.$$

3. Példa. Az

$$F(x, y, C) \equiv x^2 + (y + C)^2 - 1 = 0 \quad (76)$$

körsereg fedi az $x = \pm 1$ egyenesek közt elterülő sávot. Itt a (73) a $2(y+C) = 0$ -t adja, tehát $C = -y$.

Ezt a sereg egyenletében szereplő C helyébe helyettesítve az $x = \pm 1$ egyenletet kapjuk.

E két egyenes valóban burkolója a (76) seregnek (lásd a 23. ábrát).

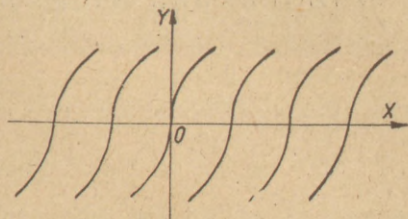
4. Példa. Az

$$y - C^3 x^2 + 2C^2 x - C = 0$$

egyenlet, mely az

$$y - C^3 \left(x - \frac{1}{C} \right)^2 = 0$$

alakba írható, hacsak $C \neq 0$, oly parabolák seregét határozza meg, melyek tengelye párhuzamos az OY tengellyel, s melyek csúcsa az OX tengelyen van. Nyilván e seregnek az OX tengely burkolója, holott maga is hozzátartozik a sereghez; egyenletét akkor kapjuk meg a sereg egyenletéből, ha $C = 0$.



26. ábra

A KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETRENDSZEREK

IV. FEJEZET

AZ ÁLTALÁNOS ELMÉLET

28. §. Tetszőleges rendszer redukciója elsőrendű rendszerre

Legyen adva a

$$\Phi_i \left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{d^{m_1} y_1}{dx^{m_1}}, \dots, y_n, \frac{dy_n}{dx}, \dots, \frac{d^{m_n} y_n}{dx^{m_n}} \right) = 0, \quad i, \dots, n \quad (77)$$

rendszer.

Ennek a rendszernek minden egyenletében a következő mennyiségek szerepelnek: a független x változó, ennek n számú keresett függvénye y_1, y_2, \dots, y_n és ezeknek az x szerinti deriváltjai, mégpedig az y_i függvény deriváltjai az m_i -edik rendig bezárólag.

Avégből, hogy e rendszert redukáljuk elsőrendű rendszerre, legyen $y_i = y_i^{(0)}$,

$$\frac{dy_i^{(k)}}{dx} = y_i^{(k+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, m_i - 2. \quad (78)$$

Ezzel a (77) rendszert a

$$\Phi_i \left(x, y_1^{(0)}, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(m_1-1)}, \frac{dy_1^{(m_1-1)}}{dx}; \dots, y_n^{(0)}, \dots, y_n^{(m_n-1)}, \frac{dy_n^{(m_n-1)}}{dx} \right) = 0 \quad (79)$$

$$i = 1, \dots, n$$

alakba írhatjuk át.

Így a (77) rendszert kielégítő n számú $y_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) függvényből egy $y_i^{(k)}(x)$ függvényrendszert kaptunk, mely most már a (78) és (79) egyenletekből álló elsőrendű differenciálegyenletrendszernek tesz eleget.

Visszont, ha adva van egy oly $y_i^{(k)}(x)$ függvényrendszer, mely kielégíti a (78) és (79) egyenleteket, akkor igazolhatjuk, hogy az $y_i^{(0)}(x)$ ($i = 1, \dots, n$) függvények a (77) rendszernek tesznek eleget. Ugyanis, ha a (78) egyenletben k rendre a $0, 1, \dots, m_i - 2$ értékeket veszi fel, azt találjuk, hogy

$$y_i^{(k+1)} = \frac{d^{k+1} y_i^{(0)}}{dx^{k+1}}$$

s így a (79) egyenletek ekvivalensek a (77) egyenletekkel.

A továbbiakban főként elsőrendű differenciálegyenletrendszerekkel fogunk foglalkozni, éspedig olyanokkal, melyek a deriváltakat explicite tartalmazzák.

F e l a d a t. Igazoljuk, hogy az

$$f_i(x_1, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

elsőrendű differenciálegyenletrendszer sorozatos deriválások és a fölösleges változók kiiktatása révén „általában”, egy egy ismeretlen függvényt tartalmazó n -edrendű differenciálegyenletre redukálható úgy, hogy ha ezt az egyenletet megoldjuk, a többi ismeretlen függvényt további integrálások nélkül kaphatjuk meg. Az „általában” itt azt jelenti, hogy megoldhatónak tételezünk fel minden itt előforduló, véges (nem differenciál-) egyenletrendszert, ha abban az egyenletek és ismeretlenek száma egyenlő. Feltesszük, hogy az f_i függvények eléggé magas rendben deriválhatók.

29. §. Geometriai interpretáció. Definíciók

Legyen adva a

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (80)$$

differenciálegyenletrendszer, ahol az $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ függvények a (x, y_1, \dots, y_n) tér G tartományában értelmezve vannak. Az

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) \quad (81)$$

függvényrendszert akkor nevezzük a (80) rendszer *megoldásának*, ha e függvények kielégítik annak egyenleteit. Az

$$y_i = y_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (82)$$

egyenletek egy görbét határoznak meg az $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ térben. E görbét a (80) rendszer *integrálgörbéjének* nevezzük. A továbbiakban sűrűn elő fog fordulni e kifejezés: a (82) görbe vagy a (81) *megoldás* „*átmegy*” az $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ *ponton*; ezen azt értjük, hogy

$$y_i(x_0) = y_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Azt a tényt, hogy az $y_i(x)$ függvények az $x = x_0$ -nál kielégítik a (80) rendszert, geometriailag így interpretálhatjuk: az

$$\frac{y_i - y_i(x_0)}{x - x_0} = f_i(x_0, y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)),$$

(ahol x és y_i változó koordináták) egyenletű L egyenes, mely nem párhuzamos az $x = 0$ síkkal, a (82) integrálvonal érintője az $(x_0, y_1(x_0), \dots, y_n(x_0))$ pontban. Ezért a (80) rendszer megoldását geometriailag a következő módon interpretálhatjuk.

Az (x, y_1, \dots, y_n) tér egy G tartományában meg van adva egy „iránymező”, azaz e tartomány minden pontjában meg van adva egy irány, melyet — hasonlóan könyvünk bevezetőjében egy megadott differenciálegyenletre alkalmazott eljárásunkhoz — ezen a ponton átmenő kis egyenes szakasznak gondolhatunk (e szakaszon itt sem tüntetünk fel irányítást). A (80) rendszer integrálgörbéjének megkeresése oly vonalnak a meghatározását jelenti, melynek minden pontban az érintője az ott megadott irány.

Az

$$y_i = y_i(x, C_1, C_2, \dots, C_m) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

függvényrendszert akkor nevezzük a (80) rendszer *általános megoldásának* a G tartományban, ha belőle a C_1, C_2, \dots, C_m konstánsok alkalmas választásával e tartományban fekvő bármelyik megoldást megkaphatjuk. Igen sokszor $m = n$.

A (80) rendszer által megadott iránymezőnek azonban egyetlen iránya sem lehet párhuzamos az $x = 0$ síkkal. Ez a korlátozás azonban sokszor igen mesterkéltnek látszik. Ezért tekinthetünk egy tetszőleges iránymezőt, és kereshetjük azokat a görbéket, melyeknek minden pontjában az érintő iránya a mezőnek ugyanazon ponthoz tartozó irányával egyező. Az ilyen vonalakat a *mező integrálvonalainak* nevezzük. Ezeknek egyenletei általában már nem írhatók fel a (82) alakban, ahol $y_i (i = 1, 2, \dots, n)$ -re megoldott egyenletek vannak, mert az OX tengelyre merőleges sík e vonalakat többször is metszheti, sőt bizonyos szakaszaikat tartalmazhatja is. Az ilyen vonalak differenciálegyenletei (vagy ami ugyanaz, a nekik megfelelő iránymező) úgy írhatók fel, hogy az x és y_i függvényeket e vonalak mentén egy t paraméter eléggé síma (például deriváltjaival együtt folytonos) függvényeként állítjuk elő. E paraméter lehet pl. az integrálgörbe ívhossza; vagy az az idő, ami az integrálgörbén egy fix pontból a tetszőleges (x, y_1, \dots, y_n) pontig való eljutáshoz szükséges; a görbe egyes részein esetleg az y_i vagy az x koordináták valamelyike is választható paraméternek. E vonalak differenciálegyenletei tehát

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= f_i^*(x, y_1, \dots, y_n) \cdot p(t, x, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \frac{dx}{dt} &= f^*(x, y_1, \dots, y_n) \cdot p(t, x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Itt a $p(t, x, y_1, \dots, y_n)$ sohasem válhat zérussá, az f_i^* és f^* függvények pedig ugyanabban az (x, y_1, \dots, y_n) pontban mind nem válhatnak zérussá. Az (x, y_1, \dots, y_n) térben a (83) egyenletekkel meghatározott iránymező a következő egyenletekkel is meghatározható:

$$\frac{dy_1}{f_1^*(x, y_1, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{f_n^*(x, y_1, \dots, y_n)} = \frac{dx}{f^*(x, y_1, \dots, y_n)}. \quad (84)$$

Ha $f_k^*(x, y_1, \dots, y_n)$ egy G tartományban nem nulla, akkor ezek az egyenletek ott megoldhatók a $\frac{dy_i}{dy_k} (i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n)$ és $\frac{dx}{dy_k}$ szerint; ez azt jelenti, hogy ott paramétereknek választhatjuk az y_k változót. Ha az $f^*(x, y_1, \dots, y_n)$ egy G tartományban mindenütt különbözik zérustól, akkor a (84) egyenletek megoldhatók $\frac{dy_i}{dx}$ szerint; most x -et választhatjuk paraméternek.

A

$$\Phi_i(x, y_1, \dots, y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

egyenletrendszert a (84) rendszer *integráljának* nevezzük, ha az általa meghatározott görbék a (84) rendszer integrárvonalai.

A

$$\Phi_i(x, y_1, \dots, y_n, C_1, \dots, C_m) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

egyenletrendszert a (84) rendszer *általános integráljának* nevezzük az (x, y_1, \dots, y_n) tér G tartományában, ha a C_1, C_2, \dots, C_m konstánsok alkalmas választásával a rendszernek bármely a G -ben ha'adó integrálgörbéjét megkaphatjuk. Minthogy a (83) rendszer a (80)-nak speciális esete, bár a független változók száma eggyel több, azért a továbbiakban csak a (80) alakú rendszerek vizsgálatára szorítkozunk. Az ilyen rendszerekre sok oly tétel helytálló, mely könyvünk I. részének III. fejezetében igazoltakkal teljesen analóg; ezeket ugyanazon a módon igazolhatjuk, mint ahogyan ott tettük. Ezért nem is fogjuk mindezeket a tételeket ismét részletesen bizonyítani. Csak Osgood tételét és a kontrakciós elvet igazoljuk, a többi tételt csak megfogalmazzuk.

Feladatok. 1. Szerkesszünk oly két elsőrendű differenciálegyenletből álló (80) alakú rendszert, melyben y és z az ismeretlen függvények úgy, hogy annak integrárvonala minden h emelkedésű és OX tengelyű jobbsodrású csavarvonal. Hogyan általánosíthatjuk e feladatot több dimenzióra?

2. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a G tartományban az iránymezőt olyan (84) alakú egyenletekkel jellemezhessek, melyekben a nevezők folytonosak és egyidejűleg nem válnak zérussá?

30. §. Az alaptételek megfogalmazása

Exisztenciátétel (Peano). *Ha az $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ függvények az (x, y_1, \dots, y_n) tér G tartományában folytonosak, akkor e tartomány minden belső pontján a (80) rendszernek legalább egy integrárvonala megy át.*

E tétel igazolására először az Euler-féle törtvonalakat ugyanúgy kellene szerkesztenünk, ahogyan ez a 10. §-ban történt. Azután ezeket határátmenetnek kell alávetnünk, az Arzela-tétel kihasználásával.

Unicitástétel (Osgood). *Elégítsék ki az $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ függvények a G tartományban az*

$$|f_i(x, y_1^{**}, \dots, y_n^{**}) - f_i(x, y_1^*, \dots, y_n^*)| \leq \varphi \left(\sum_{\nu=1}^n |y_\nu^{**} - y_\nu^*| \right) \quad (85)$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

vonatkozásokat, ahol a $\varphi(\eta)$ oly folytonos függvény, mely:

1) pozitív η értékeknél pozitív értékű,

$$2) \quad \lim_{c \rightarrow +0} \int_0^c \frac{dn}{\varphi(\eta)} = \infty \quad (c > 0).$$

Akkor a G tartomány bármely belső pontján a (80) rendszernek legfeljebb egy megoldása megy át. Speciálisan lehet

$$\varphi(\nu) \equiv K\nu,$$

ahol K egy pozitív konstáns. Akkor a (85) feltétel

$$|f_i(x, y_1^*, \dots, y_n^*) - f_i(x, y_1^{**}, \dots, y_n^{**})| \leq K \sum_{\nu=1}^n |y_\nu^{**} - y_\nu^*|$$

alakú lesz, ezt az f_i függvényekre vonatkozó y_1, \dots, y_n szerinti *Lipschitz-feltételnek* nevezzük. Ha ez a feltétel teljesül, és az f_i függvények minden argumentumukra nézve folytonosak, akkor az existenciá- és unicitástétel a szukcesszív approximáció módszerével igazolható (lásd a 31–32. §-t).

Az Osgood-féle unicitástétel igazolása differenciálegyenletrendszerre kissé komplikáltabb, mint egy differenciálegyenletre. Azért e bizonyítást részletesen tárgyaljuk.

Ismét indirekt módon fogunk bizonyítani. Tegyük fel, hogy a (80) rendszernek létezik két megoldása

$$y_1^*(x), y_2^*(x), \dots, y_n^*(x)$$

és

$$y_1^{**}(x), y_2^{**}(x), \dots, y_n^{**}(x),$$

úgy, hogy

$$y_i^*(x_0) = y_i^{**}(x_0), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Mint hogy feltesszük, hogy az $y_i^*(x)$ és $y_i^{**}(x)$ különbözők, van oly x_1 , hogy

$$\sum_{i=1}^n |y_i^{**}(x_1) - y_i^*(x_1)| > 0.$$

Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $x_1 > x_0$; ugyanis az ezzel ellenkező esetet is erre vezethetjük vissza, ha x -et $-x$ -szel helyettesítjük.

Ámbár mind az $y_i^*(x)$, mind az $y_i^{**}(x)$, tehát az $y_i^{**}(x) - y_i^*(x)$ függvény is mindenütt deriválható, mégis lesznek oly helyek, melyekben e különbség abszolút értéke nem deriválható. Ezek a helyek azok, ahol

$$y_i^{**}(x) - y_i^*(x) = 0, \quad \text{de} \quad \frac{d}{dx}[y_i^{**}(x) - y_i^*(x)] \neq 0.$$

Ezért e különbségek differenciálhányadosa helyett csak a „jobboldali” vagy „baloldali” differenciálhányadost fogjuk tekinteni. A $z(x)$ függvénynek az x helyen való jobboldali (illetve baloldali) differenciálhányadosának nevezzük a

$$\frac{z(x+h) - z(x)}{h}$$

tört határértékét, míg a h pozitív (illetve negatív) számokon át tart zérushoz. A $z(x)$ függvény x helyen vett jobboldali (illetve baloldali) deriváltját jelölje $D_j z(x)$ [illetve $D_b z(x)$]. Ha nem fontos az, hogy e két differenciálhányados közül melyikről van szó, akkor a D mellől elhagyjuk az indexet. Könnyen beláthatjuk, hogy ha a $z(x)$ függvény mindenütt differenciálható, akkor mind $D_j |z(x)|$ mind $D_b |z(x)|$ létezik, és mindig igaz, hogy

$$|D_j |z(x)|| = |D_b |z(x)|| = |z'(x)|,$$

vagy rövidebben:

$$|D |z(x)|| = |z'(x)|.$$

Mindezt tekintetbe véve, a

$$\begin{aligned} \frac{dy_i^*(x)}{dx} &= f_i(x, y_1^*(x), \dots, y_n^*(x)) \\ \frac{dy_i^{**}(x)}{dx} &= f_i(x, y_1^{**}(x), \dots, y_n^{**}(x)) \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

azonosságokból (85) alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |D |y_i^{**}(x) - y_i^*(x)| &\equiv |f_i(x, y_1^{**}(x), \dots, y_n^{**}(x)) - f_i(x, y_1^*(x), \dots, y_n^*(x))| \\ &\leq \varphi \left(\sum_{v=1}^n |y_v^{**}(x) - y_v^*(x)| \right). \end{aligned}$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left| D \sum_{i=1}^n |y_i^{**}(x) - y_i^*(x)| \right| &\leq n \varphi \left(\sum_{v=1}^n |y_v^{**}(x) - y_v^*(x)| \right) < \\ &< (n+1) \varphi \left(\sum_{v=1}^n |y_v^{**}(x) - y_v^*(x)| \right). \end{aligned} \quad (85')$$

Ez utóbbi átalakítást csak akkor végezhetjük el, ha

$$\sum_{v=1}^n |y_v^{**}(x) - y_v^*(x)| > 0.$$

Speciálisan, a fentebbi feltételek értelmében ezt megtehetjük, ha $x = x_1$.

Legyen

$$\sum_{i=1}^n |y_i^{**}(x) - y_i^*(x)| = z(x) \quad \text{és} \quad z(x_1) = z_1.$$

Rajzoljuk meg a

$$\frac{dy}{dx} = (n+1) \varphi(y)$$

egyenlet azon megoldásának grafikonját, mely $x = x_1$ -nél a z_1 értéket veszi fel.

Ilyen megoldás egy és csak egy van (4. §!). Ennek grafikonja aszimptotikusan közelíti az OX tengely negatív részét, azonban azt sohasem metszi. Az (x_1, z_1) pontban a $z(x)$ és $y(x)$ görbék metszik egymást. A

$$|D_b z(x_1)| < (n+1) \varphi(z_1) = (n+1) \varphi(y(x_1)) = y'(x_1)$$

egyenlőtlenségből azonnal következik oly $(x_1 - \varepsilon, x_1)$, $\varepsilon > 0$ intervallum létezése, melyben

$$z(x) > y(x).$$

Azt állítjuk, hogy ez az egyenlőtlenség igaz minden $\varepsilon > 0$ -ra, mely nem nagyobb, mint $x_1 - x_0$, mert ellenkező esetben $-\varepsilon$ -nak véve ennek legnagyobb értékét — azonnal ellentmondásra jutnánk. Ugyanis, ha $x = x_1 - \varepsilon = x_2$, egyrészt azt kapnánk, hogy

$D_j z(x_2) \geq y'(x_2) = (n+1) \varphi(y(x_2)) = (n+1) \varphi(z(x_2))$,
 minthogy az x_2 ponttól jobbra

$$z(x) > y(x).$$

Másrészt ugyanazon megfontolások folytán, melyek a (85')-höz vezettek minket, azt kapjuk, hogy mivel $\varphi(z(x_2)) > 0$,

$$D z(x_2) < (n+1) \varphi(z(x_2)),$$

ami az előzőnek ellentmond. Ez azt jelenti, hogy ha $x_0 \leq x < x_1$, akkor

$$z(x) > y(x) > 0,$$

speciálisan $z(x_0) > 0$, ez pedig ellentmond eredeti feltevésünknek.

Következő eredmény magasabbrendű egyenletrendszerekre. Legyen adva a

$$\frac{d^{m_i} y_i}{dx^{m_i}} = f_i \left(x, y_1, \dots, \frac{d^{m_1-1} y_1}{dx^{m_1-1}}, \dots, y_n, \dots, \frac{d^{m_n-1} y_n}{dx^{m_n-1}} \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (86)$$

differenciálegyenletrendszer, mely meg van oldva minden ismeretlen függvény legmagasabbrendű deriváltjára nézve. Ha az f_i függvények az

$$\left(x_0, y_1^0, \dots, \left(\frac{d^{m_1-1} y_1}{dx^{m_1-1}} \right)^0, \dots, y_n^0, \dots, \left(\frac{d^{m_n-1} y_n}{dx^{m_n-1}} \right)^0 \right)$$

pont bizonyos környezetében folytonosak, továbbá ott a másodiktól kezdve minden argumentumukra nézve kielégítenek egy Lipschitz-feltételt, akkor egy az x_0 pontot tartalmazó (a, b) intervallumban egy és csak egy oly

$$y_1(x), \dots, y_n(x)$$

függvényrendszer létezik, mely a (86) rendszernek eleget tesz, s mely az $x=x_0$ helyen megfelelő deriváltjaival együtt az

$$y_1^0, \dots, \left(\frac{d^{m_1-1} y_1}{dx^{m_1-1}} \right)^0, \dots, y_n^0, \dots, \left(\frac{d^{m_n-1} y_n}{dx^{m_n-1}} \right)^0$$

értékrendszert veszi fel. [†]

Ez a következmény közvetlenül adódik a fentebb megfogalmazott tételekből, ha a 28. §-ban mondottakat tekintetbe vesszük. Ez az (\bar{a}, b) intervallumban kapott megoldás mindkét irányba folytatható, ahogyan azt a 12. §-ban tettük.

Cauchy tétele. Ha az $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ függvények a G tartományban minden változójukra nézve holomorfozok, akkor a tartomány minden belső pontján a (80) rendszernek egy és csak egy az x -re nézve holomorf megoldása megy át (ahol \bar{u} a megoldást jelentő rendszer minden függvénye holomorf).

Következő eredmény. Az olyan (80) alakú rendszernek minden valós megoldása holomorf, melynél a jobboldalak minden változóra nézve holomorfozok, és valós értéket vesznek fel argumentumaik valós értékénél.

A megoldások simaságáról szóló tétel. Ha az $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ függvények az x és az y_k szerint a p -edik ($p \geq 0$) rendig bezárólag folytonosan deriválhatók, akkor a (80) rendszer minden megoldása az x szerint folytonosan deriválható a $(p+1)$ -edik rendig bezárólag.

A megoldásoknak a paramétereiktől való függéséről szóló tétel. Legyen adva

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n, \mu_1, \dots, \mu_m), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (87)$$

rendszer. Ha az f_i függvények, valamint minden y_i és μ_k szerinti parciális deriváltjuk a p -edik rendig bezárólag minden változó szerint folytonos és korlátos, ha az (x, y_1, \dots, y_n) pont a G tartományban van, és

$$|\mu_k| < C, \quad k = 1, \dots, m,$$

ahol C egy pozitív szám, akkor a G tartomány minden $(x_0^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ belső pontjához tartozik olyan az x_0 pontot belsejében tartalmazó (a, b) intervallum, hogy benne bármely tekintett μ_k értékekhez egy és csak egy olyan

$$y_i = \varphi_i(x, \mu_1, \dots, \mu_m), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

rendszer tartozik, melynek függvényei kielégítik a (87) rendszert, mindegyik μ_k szerinti deriváltjuk — a p -edik rendig bezárólag — folytonos, s $x = x_0$ -nál rendre y_i^0 ($i = 1, \dots, n$) értékűek. Ez a tétel igaz lesz $p = 0$ -ra is, ha az f_i függvények oly y_i szerinti Lipschitz-feltételnek tesznek eleget, melynek koefficiense μ -tól független.

Következmény. Ha a (80) rendszer jobboldalai az x és minden y_i szerint a p -edik rendig bezárólag folytonosan deriválhatók, akkor a (80) rendszert kielégítő $y_i(x, x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$, ($i = 1, \dots, n$) függvények, melyek $x = x_0$ -nál rendre az y_i^0 értéket veszik fel az x_0 és y_i^0 szerint folytonosan deriválhatók a p -edik ($p \geq 1$) rendig bezárólag. Ez az állítás igaz a $p = 0$ -ra is, ha csak az f_i függvények biztosítják az $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ ponton átmenő megoldás unicitását (lásd a 20. §-t és az ahhoz fűzött megjegyzéseket).

31. §. Az operátoregyletrendszerre vonatkozó kontrakciós elv.

Legyen adva a φ „görbék” S nem üres halmaza, s az egyes görbéket írjuk le a

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

függvényrendszerrel, melynek minden függvénye ugyanabban az M halmazban van értelmezve. A φ görbék rendelkezzenek a következő tulajdonságokkal:

1. Minden φ_i függvény legyen korlátos (esetleg mindegyik más-más konstáns korláttal).

2. Minden az S -hez tartozó, φ görbékből álló, egyenletesen konvergens görbesorozat határgörbéje is tartozzék S -hez.

A

$$\varphi^{(k)} = (\varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(k)}, \dots, \varphi_n^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots$$

görbesorozatról akkor mondjuk, hogy egyenletesen konvergál a

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$$

görbéhez, ha mindegyik $\varphi_i^{(k)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) függvénysorozat egyenletesen konvergál a φ_i függvényhez.

3. Legyen a φ görbékéből álló S halmazra egy A operátor úgy értelmezve, hogy az az S halmaz minden $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ görbéjét ugyanannak a halmaznak $A\varphi = (A_1\varphi, \dots, A_n\varphi)$ görbéjébe vigye át.

4. Az S halmaz bármely két $\varphi^* = (\varphi_1^*, \dots, \varphi_n^*)$ és $\varphi^{**} = (\varphi_1^{**}, \dots, \varphi_n^{**})$ görbéjére minden i -re $|A_i\varphi^* - A_i\varphi^{**}| \leq m [\sup |\varphi_1^* - \varphi_1^{**}| + \dots + \sup |\varphi_n^* - \varphi_n^{**}|]$ állion fenn, ahol m egy az $\frac{1}{n}$ -nél kisebb nem negatív konstáns szám.

Az 1–4 alapján az S halmazban egy és csak egy oly

$$\begin{aligned} \varphi &= (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \\ \text{görbe van, melyre} \\ \varphi &= A\varphi, \end{aligned}$$

ami kissé részletesebben írva azt jelenti, hogy

$$\varphi_i = A_i\varphi, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (88)$$

Bizonyítás. Válasszuk ki az S -nek egy

$$\varphi^0 = (\varphi_1^0, \dots, \varphi_n^0)$$

görbét. Alkalmazzuk erre az A operátort, s legyen

$$\varphi^{(1)} = A\varphi^0.$$

A 3. tulajdonság alapján $\varphi_1 \in S$,¹⁾ s így a

$$\varphi^{(1)} = (\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(1)})$$

görbére — melyet a (88) rendszer megoldása „első közelítésének” nevezünk — alkalmazhatjuk az A operációt. Ezt elvégezve, kapjuk a „második közelítést”.

$$\varphi^{(2)} = A\varphi^{(1)}.$$

Ismét a 3. tulajdonság alapján: $\varphi^{(2)} \in S$. Ez az eljárás vég nélkül folytatható.

Így a

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)} &= (\varphi_1^{(0)}, \dots, \varphi_n^{(0)}), \\ \varphi^{(1)} &= (\varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(1)}), \\ \varphi^{(2)} &= (\varphi_1^{(2)}, \dots, \varphi_n^{(2)}), \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

függvényrendszerek végtelen sorozatát nyerjük.

Kimutatjuk, hogy a $\varphi^{(k)}$ görbesorozat az M halmazban egyenletesen konvergens, míg $k \rightarrow \infty$. Evégből nyilván elegendő azt kimutatnunk (lásd a 15. §-t), hogy a

$$\varphi_i^{(0)} + (\varphi_i^{(1)} - \varphi_i^{(0)}) + (\varphi_i^{(2)} - \varphi_i^{(1)}) + \dots \quad (89)$$

sor az M halmazban bármely i -re egyenletesen konvergens. Ha az 1. tulajdonság alapján

$$|\varphi_i^{(0)}| \leq M_i^{(0)}, \quad |\varphi_i^{(1)}| \leq M_i^{(1)},$$

¹⁾ A $\varphi \in S$ szimbólum azt jelenti, hogy φ az S halmazhoz tartozik.

akkor

$$|\varphi_i^{(1)} - \varphi_i^{(0)}| \leq M_i^{(1)} + M_i^{(0)} = M_i.$$

A 4. tulajdonság alapján azt találjuk, hogy

$$|\varphi_i^{(k+1)} - \varphi_i^{(k)}| = |A_i \varphi^{(k)} - A_i \varphi^{(k-1)}| \leq m \sum_{v=1}^n \sup |\varphi_v^{(k)} - \varphi_v^{(k-1)}|,$$

hacsak $k \geq 1$. Ezért

$$\sup |\varphi_i^{(k+1)} - \varphi_i^{(k)}| \leq m \sum_{v=1}^n \sup |\varphi_v^{(k)} - \varphi_v^{(k-1)}|,$$

s így

$$\sum_{i=1}^n \sup |\varphi_i^{(k+1)} - \varphi_i^{(k)}| \leq m n \sum_{v=1}^n \sup |\varphi_v^{(k)} - \varphi_v^{(k-1)}|.$$

Következésképen a (89) sor tagjai abszolút értékben nem nagyobbak, mint az

$$M + M + m n M + m^2 n^2 M + m^3 n^3 M + \dots$$

konstáns és pozitív tagú sor megfelelő tagjai. Itt $M = \sum_{i=1}^n M_i$. Minthogy feltet-

tük, hogy $m < \frac{1}{n}$, azért e sor konvergens, tehát a (89) sor egyenletesen konvergens az \mathfrak{M} halmazban bármely i -re, következésképen a $\varphi_i^{(k)}$ ($i = 1, \dots, n$) sorozat is egyenletesen konvergens az \mathfrak{M} halmazban.

Legyen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_i^{(k)} = \varphi_i \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

A 2. feltétel alapján

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in S.$$

Tehát az $A\varphi$ operáció értelmezve van. Kimutatjuk, hogy

$$A_i \varphi = \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Évégből megjegyezzük, hogy a 4. tulajdonság szerint

$$|A_i \varphi^{(k)} - A_i \varphi| \leq m \sum_{i=1}^n \sup |\varphi_i^{(k)} - \varphi_i|.$$

Ha $k \rightarrow \infty$, $\varphi_i^{(k)}$ egyenletesen konvergál φ_i -hez, azért a

$$\varphi_i^{(k+1)} = A_i \varphi^{(k)} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

egyenletek mindkét oldalán határmenetet végezhetünk, s így a (88) egyenlet követelményének eleget teszünk.

Most kimutatjuk, hogy csak egy $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ függvényrendszer létezik, mely a (88) egyenleteket kielégíti, s melyre $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in S$. Tegyük fel, hogy két ilyen $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ és $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ megoldás létezik, akkor teljesülnek a

$$\begin{aligned} \varphi_i &= A_i \varphi, & i &= 1, 2, \dots, n \\ \psi_i &= A_i \psi, & i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

egyenlőségek. Ha kivonjuk egymásból tagonként a megfelelő egyenlőségeket, a 4. tulajdonság alapján:

$$|\varphi_i - \psi_i| = |A_i \varphi - A_i \psi| \leq m \sum_{i=1}^n \sup |\varphi_i - \psi_i|.$$

Tehát

$$\sum_{i=1}^n \sup |\varphi_i - \psi_i| \leq m n \sum_{i=1}^n \sup |\varphi_i - \psi_i|.$$

Mint hogy $mn < 1$, az utóbbi vonatkozás csak úgy lehet igaz, ha

$$\sum_{i=1}^n \sup |\varphi_i - \psi_i| = 0,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\varphi_i = \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

1. Megjegyzés. E tétel megfogalmazásán a 4. feltételt gyengíthetjük, nevezetesen követelhetjük azt is, hogy bármely $\varphi^* = (\varphi_1^*, \dots, \varphi_n^*) \in \mathcal{S}$ és $\varphi^{**} = (\varphi_1^{**}, \dots, \varphi_n^{**}) \in \mathcal{S}$ teljesítse a

$$\sum_{i=1}^n \sup |A_i \varphi^* - A_i \varphi^{**}| \leq C \sum_{i=1}^n \sup |\varphi_i^* - \varphi_i^{**}|$$

vonatkozást, ahol C egy nem negatív egynél kisebb konstáns.

A tétel bizonyítása e gyengébb 4. feltétel mellett nem sokban különbözik a fentebbitől.

2. Megjegyzés. Az e paragrafusban mondottakat ugyanúgy interpretálhatjuk geometriailag, mint azt a 17. §-ban az $n=1$ esetre tettük, csak hogy most „pont“ alatt φ görbét kell értenünk, a $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ és $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ két „pont“ „távolsága“ alatt pedig a

$$\sum_{i=1}^n \sup |\varphi_i - \psi_i|$$

értéket.

32. §. A kontrakciós elv alkalmazása differenciálegyenletrendszerre

Tétel. Az (x, y_1, \dots, y_n) tér egy zárt \bar{G} tartományában legyenek az $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ ($i = 1, \dots, n$) függvények korlátosak, az x szerint folytonosak, s elégszenek ki egy az y_k szerinti Lipschitz-feltételt. Akkor a G tartomány bármely belső $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ pontjához találhatunk oly, az x_0 helyet belsejében tartalmazó zárt $[a, b]$ intervallumot, melyben az

$$(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$$

ponton a (80) rendszernek egy és csak egy megoldása megy át.

Bizonyítás. 1. Megjegyezzük, hogy ha előre feltesszük azt, hogy ilyen megoldás létezik, akkor a

$$\frac{dy_i(\xi)}{d\xi} = f_i(\xi, y_1(\xi), \dots, y_n(\xi)), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

azonosságnak x_0 -tól x -ig való integrálásával¹⁾ az

$$y_i(x) = y_i^0 + \int_{x_0}^x f_i(\xi, y_1(\xi), \dots, y_n(\xi)) d\xi, \quad i = 1, \dots, n \quad (90)$$

egyenletet kapjuk.

Ezért a (80) rendszernek minden az $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ ponton átmenő megoldása kielégíti a (90) integrálegyenletrendszert is.

Fordítva, tegyük most fel, hogy létezik n oly folytonos²⁾ függvény $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, mely eleget tesz a (90) rendszernek. Helyettesítsük be e függvényeket a (90) rendszer mindegyik egyenletébe, s deriváljuk az így kapott azonosságok mindkét oldalát.³⁾ Azt kapjuk, hogy az $y_i(x)$ függvények kielégítik a (80) rendszert is. Másrészt, ha az $y_i(x)$ függvények kielégítik a (90) rendszert, akkor nyilván

$$y_i(x_0) = y_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ezért annak igazolása helyett, hogy a (80) rendszernek egy és csak egy az $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ ponton áthaladó megoldása van az $[a, b]$ zárt intervallumban, elegendő azt igazolnunk, hogy a (90) integrálegyenletrendszernek egy és csak egy folytonos megoldása van ebben az intervallumban.

2. Ennek az állításnak igazolására használjuk fel a kontrakciós elvet. Nevezetesen tegyük fel, hogy a $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ függvények értelmezve vannak az $a \leq x \leq b$ ($a < x_0 < b$) zárt intervallumban, úgy, hogy

1) e függvények ott folytonosak,

2) az $y_i = \varphi_i(x)$ -szel ($i = 1, \dots, n, a \leq x \leq b$) jellemzett $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ görbék nem jutnak ki egy olyan \bar{G} zárt tartományból, melyben az f_i függvények értelmezve vannak. Akkor ezekre a kontrakciós elv alkalmazhatóságának első két feltétele teljesül. \bar{G} zártsága a 2. feltétel teljesítéséhez szükséges. Legyen továbbá

$$A_i \varphi \equiv y_i^0 + \int_{x_0}^x f_i(\xi, \varphi_1(\xi), \dots, \varphi_n(\xi)) d\xi, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (91)$$

Kimutatjuk, hogy az így definiált operátorok teljesítik a 3. feltételt, ha csak az $[a, b]$ intervallum elég kicsiny.

Legyen M az $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ ($i = 1, \dots, n$) függvények értékeinek felső határa. Az $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ ponton át fektessünk $2n$ számú

$$y_i - y_i^0 = \pm M(x - x_0), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (92)$$

¹⁾ Az integrálás lehetőségét a 15. §-hoz analóg igazolhatjuk.

²⁾ Itt csak azért beszélünk folytonos megoldásokról, hogy kikerüljünk azokat a nehézségeket, melyeket a szakadásos függvények integrálása okozna.

³⁾ A deriválás lehetőségét a 15. §-hoz analóg módon igazolhatjuk.

síkot. Továbbá felvesszük még az

$$x = a \quad \text{és} \quad x = b \quad (a < x_0 < b)$$

két síkot úgy, hogy a (92) síkokkal együtt két oly P_1 és P_2 gúlát képezzenek, melyek csúcsa az $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ pont, s amelyek egészen a \bar{G} -ban fekszenek. Alább majd még azt is fel kell tennünk, hogy az a és b számok az x_0 -hoz elég közel vannak. Vegyünk most fel teljesen önkényesen n számú, az $[a, b]$ -ben folytonos

$$\varphi_1^{(0)}(x), \dots, \varphi_n^{(0)}(x) \quad (93)$$

függvényt, úgy, hogy a $\varphi_i = \varphi_i^{(0)}(x)$, $i = 1, \dots, n$, $a \leq x \leq b$ görbe egészen \bar{G} -ban fekdjék. Helyettesítsük be a (93) függvényeket a (90) egyenletek jobboldalaiba. Így a jobboldalak az $a \leq x \leq b$ intervallumban az x -nek folytonos függvényei lesznek. Legyen

$$\varphi_i^{(1)}(x) = y_i^0 + \int_{x_0}^x f_i(\xi, \varphi_1^{(0)}(\xi), \dots, \varphi_n^{(0)}(\xi)) d\xi, \quad i = 1, \dots, n.$$

Világos, hogy e függvények valóban értelmezve vannak az $a \leq x \leq b$ intervallumban, s hogy

$$\varphi_i^{(1)}(x_0) = y_i^0.$$

Továbbá azt állítjuk, hogy az

$$y_i = \varphi_i^{(1)}(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad a \leq x \leq b$$

görbék nem jutnak ki a P_1 és P_2 gúlákból, következésképpen teljesen a \bar{G} -ban fekszenek. Ugyanis

$$|f_i(x, \varphi_1^{(0)}(x), \dots, \varphi_n^{(0)}(x))| \leq M,$$

s ezért

$$|\varphi_i^{(1)}(x) - y_i^0| \leq M|x - x_0|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Végül kimutatjuk, hogy ha az f_i függvény kielégít egy az y_1, \dots, y_n szerinti Lipschitz-feltételt, s ha az $[a, b]$ intervallum elég kicsiny, akkor a (91) egyenletek által definiált $A\varphi$ operátor eleget tesz a kontrakciós elv alkalmazhatósága utolsó feltételének. Ugyanis

$$\begin{aligned} & \left| \left[y_i^0 + \int_{x_1}^x f_i(\xi, \varphi_1^{**}(\xi), \dots, \varphi_n^{**}(\xi)) d\xi \right] - \left[y_i^0 + \int_{x_0}^x f_i(\xi, \varphi_1^*(\xi), \dots, \varphi_n^*(\xi)) d\xi \right] \right| = \\ & = \left| \int_{x_0}^x K \sum_{v=1}^n |\varphi_v^{**}(\xi) - \varphi_v^*(\xi)| d\xi \right| \leq K(b-a) \sum_{v=1}^n \max |\varphi_v^{**} - \varphi_v^*| = \\ & = m \sum_{v=1}^n \max |\varphi_v^{**} - \varphi_v^*|, \end{aligned}$$

ahol

$$m = K(b-a).$$

Tehát, ha $b-a$ elég kicsiny, $m < \frac{1}{n}$.

A 12. § végén tett megjegyzések most is érvényben maradnak.

A 15. § 3. megjegyzéséhez analóg módon, könnyen kimutathatjuk, hogy a közelítések sorozata nemcsak a fentebb kiválasztott $[a, b]$ intervallumban egyenletesen konvergens, hanem bármely olyan intervallumban is, ahol e közelítések mind léteznek.

Nem foglalkozunk a differenciálegyenletrendszerek szinguláris pontjainak, vonalainak és felületeinek vizsgálatával — mint ahogyan azt könyvünk első részében *egy* egyenletre tettük — hanem áttérünk a lineáris egyenletekből álló rendszerek vizsgálatára.

A LINEÁRIS RENDSZEREK ÁLTALÁNOS ELMÉLETE

33. §. Definíciók. A differenciálegyenletrendszerek általános elméletének egyes következményei

Lineáris differenciálegyenletrendszernek nevezünk olyan egyenletrendszert, melyben az ismeretlen függvények és azok deriváltjai legfeljebb első fokon fordulnak elő. Korábban kimutattuk, hogy minden differenciálegyenletrendszer ekvivalens oly rendszerrel, melyben csak elsőrendű deriváltak szerepelnek. Éppen ezért főként elsőrendű egyenletrendszerekkel foglalkozunk, s ezek közül is arra az esetre szorítkozunk, amikor a rendszer egyenletei a deriváltakra nézve meg vannak oldva. Ilyen rendszer általános alakja

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) y_j + f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (94)$$

Ha az

$$L_i(y) \equiv \frac{dy_i}{dx} - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) y_j$$

jelöléseket vezetjük be, akkor a (94) rendszert így írhatjuk:

$$L_i(y) = f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (95)$$

A továbbiakban mindenütt feltesszük, hogy az $a_{ij}(x)$ és $f_i(x)$ függvények bizonyos $a < x < b$ intervallumban *folytonosak*. Lehetséges, hogy vagy $a = \infty$, vagy $b = \infty$, vagy mind a kettő. Az ilyen rendszer jobboldalai mindegyik y_i szerint korlátosan deriválhatók, s ezért minden olyan $[a_1, b_1]$ zárt intervallumban kielégítenek egy Lipschitz-feltételt, mely teljesen az $[a, b]$ belsejében fekszik. Ezért a 31., 32. §-ban igazolt tételekből következik, hogy az (x, y_1, \dots, y_n) tér minden, az $a < x < b$ sávban választott $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ pontján a (94) rendszernek egy és csak egy integrálgörbéje megy át.

Ugyanis bármely véges a és b esetén e tétel az

$$a + \varepsilon \leq x \leq b - \varepsilon, \quad -M \leq y_i \leq M, \quad i = 1, \dots, n,$$

— ahol ε tetszőlegesen kicsiny pozitív, M tetszőlegesen nagy pozitív szám — parallelepipedonra közvetlenül alkalmazható. Ebből pedig már következik a tétel az egész

$$a < x < b$$

sávra is.

Könnyen beláthatjuk, hogy a (94) rendszert kielégítő $y_1(x), \dots, y_n(x)$ függvények közül egyik sem válik végtelenné, míg az x az (a, b) intervallum valamely belső pontjához közeledik, s ezért minden nem a teljes (a, b) intervallumra értelmezett megoldás az egészre folytatható.

Ugyanis szorozzuk meg a (94) rendszer i -edik egyenletét $2y_i$ -vel, és összegezzük az így kapott egyenlőségeket az i szerint 1-től n -ig. Akkor ezt kapjuk:

$$\frac{d}{dx} \sum_i y_i^2 = 2 \sum_{i,j} a_{ij} y_i y_j + 2 \sum_i f_i y_i \leq \sum_{i,j} |a_{ij}| (y_i^2 + y_j^2) + \sum_i (f_i^2 + y_i^2).$$

Legyen $[a_1, b_1]$ az (a, b) belsejében választott tetszőleges intervallum ($a_1 < x_0 < b_1$). S legyen

$$|a_{ij}(x)| \leq M, \quad \text{ha } i, j = 1, \dots, n, \quad a_1 \leq x \leq b_1,$$

$$|f_i(x)| \leq M, \quad \text{ha } i = 1, \dots, n, \quad a_1 \leq x \leq b_1,$$

$$y_i(x_0) = y_i^0 \quad \text{ha } i = 1, \dots, n.$$

Akkor a fentebbi vonatkozásokból következik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sum_i y_i^2 &\leq M \sum_{i,j} (y_j^2 + y_i^2) + n M^2 + \sum_i y_i^2 = (2 M n + 1) \sum_i y_i^2 + n M^2 \leq \\ &\leq M_1 \sum_{i=1}^n y_i^2 + M_1, \end{aligned}$$

ahol M_1 egy konstáns. Ezért a $\sum_i y_i^2(x)$, ha $x \geq x_0$, nem nagyobb egy olyan $z(x)$ függvényénél, mely $x = x_0$ -nál a $\sum_i (y_i^0)^2$ értéket veszi fel és a

$$\frac{dz}{dx} = M_1(z + 1)$$

egyenletnek tesz eleget, ha csak $x \geq x_0$; azaz ha $x \geq x_0$.

$$\sum_i y_i^2(x) \leq (\sum_i (y_i^0)^2 + 1) \cdot e^{M_1(x-x_0)} - 1.$$

Analóg becslések érvényesek, ha $x < x_0$.

Ha minden $f_i(x) \equiv 0$, akkor a (94) rendszert *homogénnek* nevezzük — ellenkező esetben *inhomogénnek*.

Feladatok. 1. Ha a (80) rendszer meg van adva az $a \leq x \leq b$, $-\infty \leq y_i < \infty$, $i = 1, 2, \dots, n$ rétegben, s mindegyik f_i folytonos az x szerint, és eleget tesz egy, az összes y -ok szerinti Lipschitz-feltételnek, akkor az e rétegben fekvő és tetszőleges kezdeti feltételeket kielégítő megoldás az egész szakaszra folytatható.

1) Erről könnyen meggyőződhetünk, ha belátjuk, hogy

$$\frac{d(e^{-M_1 x} \sum_i y_i^2)}{dx} = -M_1 e^{-M_1 x} \sum_i y_i^2 + e^{-M_1 x} \frac{d \sum_i y_i^2}{dx} \leq M_1 e^{-M_1 x}$$

és

$$\frac{d(e^{-M_1 x} z)}{dx} = -M_1 e^{-M_1 x} z + e^{-M_1 x} \frac{dz}{dx} = M_1 e^{-M_1 x}$$

Definíció. A (97) rendszer n számú lineárisan független megoldását alaprendszernek nevezzük.

4. Tétel. A (97) differenciálegyenletrendszernek van alaprendszere.

Bizonyítás. Vegyünk fel n^2 számú $b_i^{(k)}$ számot úgy, hogy

$$\begin{vmatrix} b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & \dots & b_n^{(1)} \\ b_1^{(2)} & b_2^{(2)} & \dots & b_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1^{(n)} & b_2^{(n)} & \dots & b_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

E feltételt pl. úgy elégíthetjük ki, hogy ha

$$\begin{aligned} b_i^{(k)} &= 0, & \text{ha } i &\neq k \\ b_i^{(k)} &= 1, & \text{ha } i &= k. \end{aligned}$$

Szerkesszük most meg a (97) rendszer $m = n$ számú (96) megoldásait, melyek eleget tesznek az

$$y_i^{(k)}(x_0) = b_i^{(k)}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n$$

feltételeknek, ahol az x_0 az (a, b) intervallumnak egy száma. Akkor nyilvánvaló hogy e megoldásrendszer Wronski-féle determinánsa az $x = x_0$ helyen különbözik zérustól, emiatt a 2. tétel értelmében e megoldások egymástól lineárisan függetlenek.

5. Tétel. Ha a (98) függvények a (97) rendszer n számú egymástól lineárisan független megoldását szolgáltatják, akkor e rendszer bármelyik megoldása előállítható ezeknek lineáris kombinációjaként, alkalmasan választott konstáns együtthatók segítségével, az

$$y_i(x) = \sum_{k=1}^n C_k y_i^{(k)}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

alakban.

Az általános megoldás és alaprendszer fogalmának felhasználásával 5. tételünket így is megfogalmazhatjuk:

A homogén, lineáris rendszer általános megoldása előállítható az alaprendszer tetszőleges konstáns együtthatókkal való lineáris kombinációjával.

Az 5. tétel bizonyítása. Legyen a (97) rendszer valamely megoldása

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x).$$

E függvények $x = x_0$ -nál rendre vegyék fel az

$$y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$$

értékeket.

Tekintsük az n számú

$$y_i^0 = \sum_{k=1}^n C_k y_i^{(k)}(x_0), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (99)$$

egyenleteket, melyekben a C_k együtthatók ismeretlenek.

Mint hogy a (98) függvények n lineárisan független megoldást adnak, azért az előbbi tétel alapján Wronski-féle determinánsuk sehol sem válik zérussá. Speciálisan $x = x_0$ -nál sem válik zérussá, ezért a (99) rendszer C_1, \dots, C_n -re megoldható. Tegyük fel, hogy megoldásképpen a

$$C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*$$

számokat kapjuk.

Szerkesszünk ezek segítségével n számú

$$y_i^*(x) = \sum_{k=1}^n C_k^* y_i^{(k)}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

függvényt. Az 1. tétel szerint ezek kielégítik a (97) rendszert. Másrészt e függvények az $x = x_0$ -nál ugyanazokat az értékeket veszik fel, mint az $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ függvények. Ez az unicitástétel szerint azt jelenti, hogy

$$y_i(x) \equiv \sum_{k=1}^n C_k y_i^{(k)}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

qu. e. d.

Megjegyzés. Ha a (98) függvények nem egy folytonos együtthatójú (97) alakú rendszernek megoldásai, akkor rájuk nem mondható ki egy a 3. tételhez hasonló állítás. Ezt mutatja be az alábbi példa. Az

$$\begin{aligned} x & 0 \\ x^2 & 0 \end{aligned}$$

függvények Wronski-féle determinánsa azonosan zéró, s a sorok egymástól mégis lineárisan függetlenek.

Feladat. Keressük meg az

$$xy_1' = 2y_1 - y_2; \quad xy_2' = 2y_1 - y_2$$

rendszer összes megoldásait.

Mutassuk meg, hogy mindegyik megoldása egyértelműen folytatható az egész valós x tengelyen, ha csak a megoldást szolgáltató függvényektől megköveteljük, hogy $x = 0$ -nál deriváltjuk létezzék. Mutassuk meg, hogy bármely két lineárisan független megoldásra a Wronski-féle determináns értéke Cx , ahol $C \neq 0$. Hogyan egyeztethető össze a 3. tétellel, hogy itt a Wronski-féle determináns csak egy pontban nulla?

35. §. Liouville tétele

Ha a (98) függvények a (97) homogén, lineáris rendszer n számú megoldását szolgáltatják, akkor a Wronski-féle determinánssuknak, W -nek az x_0 és x helyen felvett értékei között a

$$W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^x [a_{11}(\xi) + \dots + a_{nn}(\xi)] d\xi} \quad (100)$$

összefüggés áll fenn.

Bizonyítás. A determináns deriválási szabálya szerint

$$W'(x) = \begin{vmatrix} \frac{dy_1^{(1)}}{dx}, & y_2^{(1)}, & \dots, & y_n^{(1)} \\ \frac{dy_1^{(2)}}{dx}, & y_2^{(2)}, & \dots, & y_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dy_1^{(n)}}{dx}, & y_2^{(n)}, & \dots, & y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1^{(1)}, & \frac{dy_2^{(1)}}{dx}, & \dots, & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)}, & \frac{dy_2^{(2)}}{dx}, & \dots, & y_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)}, & \frac{dy_2^{(n)}}{dx}, & \dots, & y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} y_1^{(1)}, & y_2^{(1)}, & \dots, & \frac{dy_n^{(1)}}{dx} \\ y_1^{(2)}, & y_2^{(2)}, & \dots, & \frac{dy_n^{(2)}}{dx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, & \dots, & \frac{dy_n^{(n)}}{dx} \end{vmatrix}.$$

A (97) egyenletek miatt a $W(x)$ -ben szereplő

$$\frac{dy_i^{(k)}}{dx} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

kifejezéseket helyettesíthetjük a $\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^{(k)}$ kifejezésekkel.

Ha továbbá felhasználjuk azt, hogy a determináns értéke nem változik, ha valamely oszlopához hozzáadunk valamely másik oszlopával arányos mennyiségeket, akkor:

$$W'(x) = \begin{vmatrix} a_{11} y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots, y_n^{(1)} \\ a_{11} y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \dots, y_n^{(2)} \\ \dots \\ a_{11} y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots, a_{nn} y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \dots, a_{nn} y_n^{(2)} \\ \dots \\ y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, a_{nn} y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

vagy

$$W'(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(x) W(x)$$

egyenletet kapjuk. E differenciálegyenlet integrálásával (100)-at kapjuk.

Következő lépésben. A (100) egyenletből ismét beláthatjuk, hogy ha a (97) rendszer (98) megoldásrendszerének Wronski-féle determinánsa csak egyetlen pontban is zérussá válik, akkor azonosan egyenlő zérussal.

36. §. A homogén, lineáris rendszer előállítására adott megoldásrendszere alapján

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy nem minden egyszer folytonosan deriválható n^2 számú $y_i^{(k)}(x)$ függvény alrendszerére valamely (97) alakú folytonos együtthatójú rendszernek. A 3. tétel szerint ehhez az szükséges, hogy determinánsuk seholyse válják zérussá. Kimutatjuk, hogy e feltétel egyúttal elegendő is, ha csak e függvények deriváltjaikkal együtt folytonosak.

Ugyanis szerkesszük ekkor az $y_1(x), \dots, y_n(x)$ függvényekre vonatkozó alábbi n homogén, lineáris differenciálegyenletet:

$$\begin{vmatrix} y_1, y_2, \dots, y_n, \frac{dy_i}{dx} \\ y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots, y_n^{(1)}, \frac{dy_i^{(1)}}{dx} \\ \dots \\ y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_n^{(n)}, \frac{dy_i^{(n)}}{dx} \end{vmatrix} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (101)$$

Könnyen beláthatjuk, hogy ezeknek az egyenleteknek a (98) soraiban szereplő függvények eleget tesznek. Minthogy feltételünk szerint a (98) függvényekből összeállított determináns seholyse válják zérussá, azért a (101) egyenleteket megoldhatjuk a

$$\frac{dy_i}{dx} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

mennyiségekre nézve. Az így kapott rendszer teljesíti az összes követelményeket.

Kimutatjuk továbbá, hogy csak egy oly (97) alakú rendszer van, mely megadott alaprendszerrel rendelkezik.¹⁾ Ugyanis a 34. § 5. tétele alapján (97) összes megoldásait meghatározza az alaprendszere. De ha a (97) rendszer összes integrálgörbéit meghatároztuk, ezzel magát e rendszert is nyilván meghatároztuk, mert az összes integrálgörbék ismeretében az iránymező annál inkább ismeretes.

37. §. Következmények az n-edrendű differenciálegyenletre

A 28. §-ban mondottak alapján a

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}(x) \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y \quad (102)$$

lineáris, homogén egyenlet ekvivalens a

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_0}{dx} &= && y_1 \\ \frac{dy_1}{dx} &= && y_2 \\ \dots &= && \dots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= a_0(x)y_0 + a_1(x)y_1 + a_2(x)y_2 + \dots + a_{n-1}(x)y_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

lineáris, homogén rendszerrel.

Itt y_0 az előbbi y -t jelöli, y_k pedig az y k -adik deriváltját.

1. A 33. §-ból azt következtethetjük, hogy ha az $a_i(x)$ függvények folytonosak az $a < x < b$ intervallumban, akkor ennek az intervallumnak bármely x_0 számához és bármely $y_0^0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0$ számszámrendszerhez a (102) egyenletnek egy és csak egy oly megoldása tartozik, melynek i -edik rendű deriváltja ($i = 0, 1, \dots, n-1$) az $x = x_0$ helyen az y_i^0 értéket veszi fel. Ez a megoldás az egész (a, b) intervallumban létezik.

2. Ha az

$$y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \dots, y^{(m)}(x)$$

függvények kielégítik a (102) rendszert, akkor ezek bármely konstáns koefficiensek segítségével képzett

$$\sum_{k=1}^m C_k y^{(k)}(x) \quad (104)$$

lineáris kombinációja is kielégíti ezt az egyenletet.

¹⁾ Ez az állítás egyszerűen így is bizonyítható: Ha (97)-be behelyettesítjük (98) alaprendszerét, akkor

$$\frac{dy_i^{(s)}}{dx} = \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k^{(s)}$$

rögzített i mellett az n számú a_{i1}, \dots, a_{in} -re egy egyenletrendszert alkot, amely a $W(x) = |y_k^{(i)}| \neq 0$ feltétel miatt azokat egyértelműen határozza meg.

$$y_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^n, \quad y_2(x) = 0, \quad \text{ha } \frac{1}{2} \leq x < 1,$$

ahol n 1-nél nagyobb, egyébként tetszőleges szám. Világos, hogy e függvények lineárisan függetlenek, Wronski-féle determinánsuk mégis azonosan tűnik el.

Feladatok. 1. Igazoljuk, hogyha

$$y_{i+1}^{(k)}(x) = \frac{d^i y^{(k)}}{dx^i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

akkor a 36. §-ban szerkesztett rendszer ekvivalens egyetlen n -edrendű egyenlettel.

2. Legyen $a < a_1 < b_1 < b$, és a (102) egyenlet $y(x)$ megoldása rendelkezék az $[a_1, b_1]$ intervallumban végtelen sok zérushellyel. Igazoljuk, hogy akkor $y(x) \equiv 0$ az (a, b) intervallumban.

3. Oldjuk meg az

$$y'' + xy = 0$$

egyenletet az y Mac-Laurin-sorba fejtésével. Igazoljuk e sor konvergenciáját (v. ö. a 33. § 2. feladatával!).

4. Mekkora a konvergenciarádiusza az

$$(1 + x^2) y'' + y \sin x = 0$$

egyenlet megoldásait előállító x szerinti hatványsoroknak? (V. ö. a 33. § 2. feladatával!)

38. §. A lineáris, homogén differenciálegyenletek rendjének redukálása

Tegyük fel, hogy ismerjük a folytonos koefficiensekkel rendelkező (102) egyenlet

$$y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \dots, y^{(m)}(x) \quad (107)$$

m számú lineárisan független megoldását az (a, b) intervallumban. Legyen az x_0 ennek az intervallumnak oly helye, melyen $y^{(1)}(x) \neq 0$. Minthogy az $y^{(1)}(x)$ folytonos, van oly az x_0 helyet belsejében tartalmazó (a_1, b_1) intervallum, melyben

$$|y^{(1)}(x)| > 0.$$

Alakítsuk át a (102) egyenlet ismeretlen függvényét az

$$y(x) = y^{(1)}(x) z(x)$$

helyettesítéssel. Könnyű belátnunk, hogy ekkor a $z(x)$ függvény kielégíti a

$$\frac{d^n z}{dx^n} = a_{n-1}^*(x) \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + a_{n-2}^*(x) \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} + \dots + a_1^*(x) \frac{dz}{dx} + a_0^*(x) z$$

egyenletet, ahol az $a_i^*(x)$ koefficiensek az (a_1, b_1) intervallumban folytonosak. Minthogy a (102) egyenletet az $y_1(x)$ függvény kielégíti, azért a fenti egyenletet a

$$z(x) \equiv 1$$

függvénynek ki kell elégítenie, és ezért $a_0^*(x) \equiv 0$. Legyen most

$$\frac{dz}{dx} = y^*.$$

Akkor az y^* függvény már a

$$\frac{d^{n-1}y^*}{dx^{n-1}} = a_{n-1}^*(x) \frac{d^{n-2}y^*}{dx^{n-2}} + a_{n-2}^*(x) \frac{d^{n-3}y^*}{dx^{n-3}} + \dots + a_1^*(x) y^* \quad (108)$$

$(n-1)$ -edrendű, lineáris, homogén, folytonos együtthatókkal rendelkező egyenletnek tesz eleget. Ezt az egyenletet az

$$y_i^*(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{y^{(i+1)}(x)}{y^{(i)}(x)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, m-1. \quad (108')$$

függvények elégtik ki az (a_1, b_1) intervallumban.

Kimutatjuk, hogy ezek egymástól lineárisan függetlenek. Ugyanis tegyük fel, hogy vannak oly C_1, C_2, \dots, C_{m-1} konstansok, melyek nem mind zérusok, úgyhogy az (a_1, b_1) intervallumban fennáll a

$$\sum_{i=1}^{m-1} C_i \frac{d}{dx} \left(\frac{y^{(i+1)}(x)}{y^{(i)}(x)} \right) \equiv 0$$

azonosság. Akkor ebben az intervallumban kell, hogy

$$\sum_{i=1}^{m-1} C_i y^{(i+1)}(x) + C y^{(1)}(x) \equiv 0$$

legyen, ahol C egy bizonyos új konstáns. Következésképpen a (107) függvények egymástól lineárisan függőek az (a_1, b_1) intervallumban. Innen a 34. § 2. és 3. tétele alapján következik, hogy e függvények az egész (a, b) intervallumban is egymástól lineárisan függenek. Ez azonban ellentmond kiinduló feltevésünknek, mely szerint az $y_i(x)$ függvények az (a, b) -ben egymástól lineárisan függetlenek.

Válasszuk ki a (108) egyenlet $m-1$ lineárisan független megoldását, ezekkel ugyanazt végezhetjük, amit fentebb a (102) egyenlettel.¹⁾ Akkor az (a_1, b_1) bizonyos (a_2, b_2) részintervallumában egy $(m-2)$ -edrendű egyenletet nyerünk. Ugyanígy okoskodva tovább, végül is egy $(n-m)$ -edrendű lineáris, homogén egyenletet kapunk bizonyos (a_m, b_m) intervallumban.

F e l a d a t o k. 1. Igazoljuk, hogy e paragrafus feltételei mellett bármely (\bar{a}, \bar{b}) intervallum — melyre $a < \bar{a} < \bar{b} < b$ — felbontható véges számú oly nyílt intervallumra, melyek mindegyikében egyenletünk $(n-m)$ -edrendűre redukálódik.

2. Keressük meg az

$$(x^4 + 3x^3 - 2x) y'' - (x^3 + 4) y' - 6xy = 0$$

egyenlet általános megoldását, ha ismeretes, hogy egy bizonyos megoldása x polinomja.

¹⁾ Ha van a lineáris, homogén, n -edrendű és folytonos együtthatókkal rendelkező egyenletnek olyan megoldása, mely összes deriváltjaival együtt az $(n-1)$ -edik rendig bezárólag egy bizonyos pontban a zéró értéket veszi fel, akkor ez — az unicitástétel értelmében — azonosan eltűnik. Ezért a (107) és (108) alatt szereplő függvények közül egyik sem lehet azonosan zéró az (a, b) intervallum valamely belső részintervallumában.

39. §. A másodrendű, lineáris, homogén egyenletek megoldásainak zérus-helyeiről

E paragrafusban olyan

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (109)$$

egyenleteket fogunk vizsgálni, melyekben $a(x)$, $a'(x)$, $b(x)$ folytonosak és korlátosak. Most azzal, az alkalmazások szempontjából nagyjelentőségű kérdéssel fogunk foglalkozni, hogy a szóbanforgó egyenlet megoldása milyen gyakran válik zérussá. Az

$$y(x) = z(x) e^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x a(\xi) d\xi}$$

helyettesítéssel a (109) egyenlet a

$$z''(x) + B(x)z(x) = 0 \quad (110)$$

egyenletbe megy át, ahol

$$B = -\frac{a^2}{4} - \frac{a'}{2} + b,$$

és következtetésképpen folytonos és korlátos. Az $a(x)$ függvény korlátossága miatt az $y(x)$ és $z(x)$ függvények csakis egyszerre válhatnak zérussá.

Alapvető jelentőségű itt az ú. n. *Sturm-tétel*. Legyen adva a két egyenlet

$$z_1''(x) + B_1(x)z_1(x) = 0, \quad z_2''(x) + B_2(x)z_2(x) = 0,$$

ahol a $B_1(x)$ és $B_2(x)$ függvények az egész zárt $a \leq x \leq b$ intervallumban folytonosak és

$$B_2(x) \geq B_1(x). \quad (111)$$

Akkor az első egyenlet minden $z_1(x)$, nem azonosan eltűnő megoldásának bármely két szomszédos¹⁾ x_1 és x_2 ($a \leq x_1 < x_2 \leq b$) zérus-helyei között van a második egyenlet bármely $z_2(x)$ megoldásának legalább egy zérushelye, ha ugyan $z_2(x)$ nem válik zérussá az x_1 és x_2 értékekre. Ezt a tényt röviden úgy szokás kifejezni, hogy a második egyenlet megoldásai nem oszcillálnak ritkábban, mint az első egyenlet megoldásai.

Bizonyítás. Helyettesítsük be az összehasonlítandó $z_1(x)$ és $z_2(x)$ megoldásainkat a megfelelő egyenletekbe. Az így kapott első azonosságot szorozzuk végig $z_2(x)$ -szel, a másodikat $z_1(x)$ -szel, s vonjuk le a másodikat az elsőből. Ez a

$$z_1(x)z_2(x) - z_1(x)z_2''(x) = [B_2(x) - B_1(x)]z_1(x)z_2(x). \quad (112)$$

egyenletet adja.

Mínthogy

$$z_1'(x)z_2(x) - z_1(x)z_2'(x) = [z_1'(x)z_2(x) - z_1(x)z_2'(x)]'$$

a (112) azonosságnak az x_1 -től x_2 -ig való integrálásával, valamint a $z_1(x_1) = z_1(x_2) = 0$ feltételek felhasználásával azt kapjuk, hogy

¹⁾ Nem nehéz bebizonyítani, hogy ha $z_1(x)$ az $[a, b]$ zárt intervallumban végtelen sok zérushellyel rendelkezne, akkor abban szükségképpen volna olyan pont, melyben $z_1(x)$ és $z_1'(x)$ is zérussá válnék, s ezért $z_1(x) \equiv 0$ lenne. (V. ö. a 37. §. 2. feladatával)

$$z_1'(x_2) z_2(x_2) - z_1'(x_1) z_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [B_2(x) - B_1(x)] z_1(x) z_2(x) dx. \quad (113)$$

Minthogy feltettük, hogy x_1 és x_2 a $z_1(x)$ szomszédos zérushelyei, azért $z_1(x)$ x_1 és x_2 között nem vált jelet.

Mivel a $z_1(x)$ és $-z_1(x)$ függvények mindegyike megoldása ugyanannak a lineáris, homogén egyenletnek, azért az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $z_1(x)$ az x_1 és x_2 között pozitív. Mivel $z_1'(x_1)$ és $z_1'(x_2)$ nem lehetnek zérusok, hacsak $z_1(x)$ nem azonosan zérus, azért $z_1(x)$ -nek az (x_1, x_2) -ben való pozitívitásából az következik, hogy $z_1'(x_1) > 0$ és $z_1'(x_2) < 0$. A (111) szerint pedig

$$B_1(x) - B_2(x) \leq 0.$$

Ezért, ha bizonyítandó tételünk nem volna igaz, akkor léteznék oly $z_2(x)$ megoldás, mely sem az (x_1, x_2) nyílt intervallum belsejében nem válik zérussá, sem pedig az (x_1, x_2) mindkét végpontjában. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy az az egész intervallumban negatív, de akkor a (113) egyenlőség baloldala negatív volna, a jobb pedig nem negatív. Így tehát abból a feltevésből, hogy tételünk nem igaz, ellentmondásra jutottunk.

Következmények. 1. A (110) egyenlet megoldása semilyen véges (a, b) intervallumban sem válhat egynél többször zérussá, hacsak az egész intervallumban $B(x) \leq 0$.

Ugyanis, ha ennek az egyenletnek valamely $z(x)$ megoldása az $x = x_1$ és $x = x_2$ ($a < x_1 < x_2 < b$) helyen is zérussá válnék, akkor a most igazolt tétel értelmében a $z''(x) \equiv 0$ egyenlet minden megoldása legalább egyszer zérussá válnék az $[x_1, x_2]$ zárt intervallumban, ami nyilván nem igaz.

2. Ha x_1 és x_2 a (109) egyenlet valamely megoldásának két szomszédos zérushelye, akkor ennek az egyenletnek bármely más megoldása az (x_1, x_2) intervallumban pontosan egy zérushellyel rendelkezik, hacsak e két megoldás nem konstáns. Ennek az állításnak igazolására a Sturm-tételt használjuk fel, ahol: $B_1(x) \equiv B_2(x)$.

Feladatok. 1. Hasonlítsuk össze a

$$z''(x) + \left(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) z = 0$$

Bessel-féle egyenlet megoldásait az $y'' + y = 0$ vagy az $y'' + (1 - \varepsilon^2) y = 0$ egyenlet megoldásaival, s igazoljuk, hogy ha $0 \leq n < \frac{1}{2}$, akkor a $z(x)$ szomszédos zérushelyeinek távolsága π -nél kisebb, azonban eléggé nagy x -ekre tetszőlegesen megközelíti a π értéket.

2. Igazoljuk, hogy az

$$y'' + xy = 0$$

egyenlet bármely megoldásának szomszédos zérushelyei az x korlátlan növekedésével minden határon túl közelítik egymást.

3. Igazoljuk, hogy ha a (111) vonatkozás az (x_1, x_2) intervallumnak csak egyetlen pontjára is a $>$ jellel teljesül, s ha

$$z_1(x_1) = z_2(x_1) = 0,$$

akkor a $z_2(x)$ -nek x_1 -re következő zérushelye az x_2 -től balra van.

40. §. Az elsőrendű, lineáris, inhomogén egyenletrendszer

Tétel. A

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$$

függvények szolgáltatassák a (94) inhomogén rendszer valamely partikuláris megoldását. Akkor e rendszer minden megoldása az

$$y_i(x) = v_i(x) + \varphi_i(x), \quad i = 1, \dots, n$$

alakba írható, ahol a $v_i(x)$ a (97) homogén rendszer valamely megoldása. Megfordítva: bármely ilyen alakú $y_i(x)$ függvényrendszer kielégíti a (94) rendszert.

Állításunkat igazolja, hogy

$$L_i(v) \equiv L_i(y) - L_i(\varphi) = f_i(x) - f_i(x) = 0,$$

qu. e. d. Tételünk megfordítása analóg módon bizonyítható.

Következmény. Az inhomogén rendszer minden megoldása az

$$y_i = \varphi_i + \sum_k C_k y_i^{(k)}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n$$

alakban állítható elő, ahol $y_i^{(k)}$ a megfelelő homogén rendszer alaprendszerét szolgáltatja, a C_k számok pedig e megoldásra nézve egyértelműen meghatározható konstánsok. Megfordítva: az $y_i + \sum_k C_k y_i^{(k)}$ függvények tetszőleges C_1, \dots, C_n konstánsokkal megoldásai a (94) rendszernek.

Másszóval rövidebben ugyanezt így fejezhetjük ki: az inhomogén, lineáris rendszer általános megoldása e rendszer partikuláris és a megfelelő homogén rendszer általános megoldásának összege. Ez azt jelenti, hogy a lineáris, inhomogén rendszer általános megoldásának meghatározását — a megfelelő homogén rendszer alaprendszerének ismeretében — visszavezettük az inhomogén rendszer egy partikuláris megoldása felkutatásának feladatára. E feladat megoldását — mint ahogyan az egy elsőrendű, lineáris egyenlet esetében is tettük (lásd a 7. §-t) — az állandók variálásának módszerével végezzük el.

Az állandók variálásának módszere. Szolgáltassák az $y_i^{(k)}(x)$ függvények a (97) egyenleteknek egy alaprendszerét. Kísérjük meg a (94) rendszer kielégítését az

$$y_i(x) = \sum_{k=1}^n C_k(x) y_i^{(k)}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (114)$$

függvényekkel, ahol a $C_k(x)$ -ek nem konstánsok, mint előbb, hanem az x valamely

deriválható függvényei. Ezeknek az y_i kifejezéseknek (94)-be való helyettesítésével a

$$\sum_k C'_k(x) y_i^{(k)}(x) + \sum_k C_k(x) y_i^{(k)'}(x) - \sum_j \sum_k a_{ij}(x) C_k(x) y_j^{(k)}(x) = \sum_k C'_k(x) y_i^{(k)}(x) + \sum_k C_k(x) [y_i^{(k)'} - \sum_j a_{ij}(x) y_j^{(k)}(x)] = \sum_k C'_k y_i^{(k)} = f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

egyenlőségeket nyerjük.

A

$$\sum_k C'_k(x) y_i^{(i)}(x) = f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (115)$$

egyenletrendszer lineáris és inhomogén a $C'_k(x)$ ismeretlenekre nézve. Ezeknek az ismeretleneknek együtthatóiból alkotott determináns éppen az $y_i^{(k)}(x)$ függvények Wronski-féle determinánsa, ezért különbözik zérustól. Ez azt jelenti, hogy a (115) rendszert a $C'_k(x)$ -ekre nézve egyértelműen megoldhatjuk. Legyen

$$C'_k(x) = \psi_k(x).$$

Ebből integrálással kapjuk, hogy

$$C_k(x) = \int \psi_k(x) dx + C_k = \Psi_k(x) + C_k, \quad (115')$$

ahol C_k -k tetszőleges konstánsok. Mivel elegendő megtalálnunk a (94) rendszer egyetlen partikuláris mego'dását, azért a konstánsokat pl. zérusnak is vehetjük, és akkor a keresett partikuláris mego'dás az

$$y_i(x) = \sum_k \psi_k(x) y_i^{(i)}(x) \quad i = 1, \dots, n$$

kifejezés. Ha a C_k konstánsokat tetszőlegesenek hagyjuk meg, akkor (115')-nek a (114)-be való helyettesítésével a (94) rendszer általános megoldását nyerjük

F e l a d a t. Az $y_i^{(k)}(x, \xi)$, ($i, k = 1, \dots, n$) függvények elégítsenek ki bármely meghatározott k mellett egy (97) rendszert az x szerint, s ha $x = \xi$ tyeenek eleget az

$$y_i^{(k)}(\xi, \xi) = 1, \quad \text{ha} \quad i = k \\ = 0, \quad \text{ha} \quad i \neq k$$

feltételeknek.

Igazoljuk, hogy az

$$y_i(x) = \int_{x_0}^x \sum_k f_k(\xi) y_i^{(k)}(x, \xi) d\xi$$

függvények kielégítik a (94) rendszert itt x_0 annak az intervallumnak tetszőleges helye, melyben a (94) egyenleteket vizsgáljuk (C a u c h y).

41. §. Az n -edrendű, lineáris, inhomogén egyenletre vonatkozó következmények

A

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}(x) \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y + f(x)$$

lineáris, inhomogén egyenlet ekvivalens a

$$\frac{dy_0}{dx} = y_1$$

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2$$

.....

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = a_0(x) y_0 + a_1(x) y_1 + a_2(x) y_2 + \dots + a_{n-1}(x) y_{n-1} + f(x)$$

lineáris rendszerrel. A (115) rendszer most így alakul:

$$C'_1(x) y^{(1)}(x) + C'_2(x) y^{(2)}(x) + \dots + C'_n(x) y^{(n)}(x) = 0.$$

$$C'_1(x) \frac{dy^{(1)}}{dx} + C'_2(x) \frac{dy^{(2)}}{dx} + \dots + C'_n(x) \frac{dy^{(n)}}{dx} = 0$$

.....

$$C'_1(x) \frac{d^{n-1} y^{(1)}}{dx^{n-1}} + C'_2(x) \frac{d^{n-1} y^{(2)}}{dx^{n-1}} + \dots + C'_n(x) \frac{d^{n-1} y^{(n)}}{dx^{n-1}} = f(x).$$

Az y_i függvények közül most nyilván csak az $y_0(x) \equiv y(x)$ függvény érdekel bennünket, s ezért az innen kiszámított $C'_i(x)$ -eket csak az $y_0(x) = \sum_{k=1}^n C_k(x) y_0^{(k)}(x)$ egyenlőségbe kell behelyettesítenünk.

VI. FEJEZET

ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS LINEÁRIS RENDSZEREK

42. §. Előzetes megjegyzések

E fejezetben oly lineáris differenciálegyenletrendszerekkel fogunk foglalkozni, melyekben az ismeretlent nem tartalmazó tagok és az együtthatók komplexek, a független változó azonban valós. Legyen

$$\varphi'(x) = \varphi^*(x) + i \varphi^{**}(x),$$

ahol $\varphi^*(x)$ és $\varphi^{**}(x)$ valós. A $\varphi(x)$ differenciálhányadosát a

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi^*(x + \Delta x) - \varphi^*(x)}{\Delta x} + \\ &+ i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi^{**}(x + \Delta x) - \varphi^{**}(x)}{\Delta x} = \varphi^{*'}(x) + i \varphi^{**'}(x) \end{aligned}$$

egyenlettel értelmezzük.

Itt természetesen feltesszük, hogy $\varphi^{*'}(x)$ és $\varphi^{**'}(x)$ léteznek. Ebből világos, hogy komplex C_j és $\varphi_j(x)$ mellett

$$[\sum C_j \varphi_j(x)]'_x = \sum C_j \varphi_j'(x),$$

ugyanúgy, mint valós C_j és $\varphi_j(x)$ mellett. Analóg módon igazolhatjuk, hogy komplex függvények szorzatának deriválására is érvényben marad a jól ismert differenciálási szabály.

E fejezet alapvető tétele lesz, hogy bármely állandó együtthatós lineáris rendszer állandó együtthatós, nem szinguláris lineáris transzformációval „kanonikus alak”-ra hozható.

A lineáris transzformációt akkor nevezzük *nem szingulárisnak*, ha az együtthatóiból képzett determináns zérustól különböző. Világos, hogy két egymásután végzett nem szinguláris transzformáció szintén nem szinguláris transzformációt alkot.

A rendszer kanonikus alakján pedig a következő alakot értjük:

$$\begin{aligned}
 \frac{dz_1}{dx} &= \lambda_1 z_1 && + f_1^*(x) \\
 \frac{dz_2}{dx} &= \alpha_1 z_1 + \lambda_1 z_2 && + f_2^*(x) \\
 \frac{dz_3}{dx} &= \alpha_2 z_2 + \lambda_1 z_3 && + f_3^*(x) \\
 &\dots && \dots \\
 \frac{dz_{n_1}}{dx} &= \alpha_{n_1-1} z_{n_1-1} + \lambda_1 z_{n_1} && + f_{n_1}^*(x) \\
 \frac{dz_{n_1+1}}{dx} &= \lambda_2 z_{n_1+1} && + f_{n_1+1}^*(x) \\
 \frac{dz_{n_1+2}}{dx} &= \beta_1 z_{n_1+1} + \lambda_2 z_{n_1+2} && + f_{n_1+2}^*(x) \\
 \frac{dz_{n_1+3}}{dx} &= \beta_2 z_{n_1+2} + \lambda_2 z_{n_1+3} && + f_{n_1+3}^*(x) \\
 &\dots && \dots \\
 \frac{dz_{n_1+n_2}}{dx} &= \beta_{n_2-1} z_{n_1+n_2-1} + \lambda_2 z_{n_1+n_2} && + f_{n_1+n_2}^*(x) \\
 &\dots && \dots \\
 &\dots && \dots \\
 \frac{dz_{n-n_k+1}}{dx} &= \lambda_k z_{n-n_k+1} && + f_{n-n_k+1}^*(x) \\
 \frac{dz_{n-n_k+2}}{dx} &= \omega_1 z_{n-n_k+1} + \lambda_k z_{n-n_k+2} && + f_{n-n_k+2}^*(x) \\
 \frac{dz_{n-n_k+3}}{dx} &= \omega_2 z_{n-n_k+2} + \lambda_k z_{n-n_k+3} && + f_{n-n_k+3}^*(x) \\
 &\dots && \dots \\
 \frac{dz_n}{dx} &= \omega_{n_k-1} z_{n-1} + \lambda_k z_n && + f_n^*(x) \quad (116)
 \end{aligned}$$

Itt $\lambda_i, \alpha_i, \beta_i, \dots, \omega_i$ bizonyos konstáns komplex számok; $\alpha_i, \beta_i, \dots, \omega_i$ tetszőleges zérustól különböző számoknak választhatók, speciálisan vehetjük

ezeket abszolút értékben bármilyen kicsinyeknek. A λ_i számokat az adott rendszer teljesen meghatározza.

Ha a rendszer már kanonikus alakban van, roppant egyszerűen integrálhatjuk. Ugyanis a kanonikus rendszer első egyenlete csak egy ismeretlen függvényt tartalmaz, $z_1(x)$ -et. Ennek az első egyenletből való meghatározása és a másodikba való behelyettesítése után oly lineáris egyenletet kapunk, melyben szintén egy ismeretlen függvény szerepel: a $z_2(x)$, és így tovább. (V. ö. a 46. §-sal!)

F e l a d a t. Igazoljuk, hogy a Lagrange-féle középértéktétel valós független változójú komplex függvényekre már nem feltétlenül teljesül. Mégis az $a \leq x \leq b$ intervallumban differenciálható $f(x)$ függvényekre az alábbi formula érvényes:

$$\lambda[f(b) - f(a)] = \mu f'(\xi),$$

ahol $a < \xi < b$, λ és μ pedig bizonyos valós számok, melyek általában a , b és f -től függenek, úgy hogy $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$.

43. §. A kanonikus alak előállítása

Tétel. *Legyen adva a*

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j + f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (117)$$

állandó együtthatós, lineáris rendszer. Mindig létezik oly

$$y_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} z_j$$

lineáris transzformáció, melyben C_{ij} együtthatók olyan konstánsok, hogy $|C_{ij}| \neq 0$ s mely transzformáció a (117) rendszert a (116) kanonikus alakba viszi át. Az új rendszerben szerepő $f_i^(x)$ függvények az $f_i(x)$ függvények állandó együtthatókka való lineáris kombinációi.*

Bizonyítás. Az $n = 1$ esetre e tétel nyilvánvalóan igaz. Most tegyük fel, hogy igaz $(n - 1)$ számú egyenletre, s igazoljuk, hogy ebből következik, hogy n számú egyenletre is igaz.

Szorozzuk meg a (117) rendszer i -edik egyenletét k_i -vel, ahol k_i később meghatározandó konstánsokat jelöl. Összegezve az így nyert egyenleteket, ezt kapjuk:

$$\frac{d \sum_i k_i y_i}{dx} = \sum_{ij} a_{ij} k_i y_j + \sum_i k_i f_i(x).$$

Most határozzuk meg a k_i számokat úgy, hogy y_j -re nézve

$$\sum_{ij} a_{ij} k_i y_j \equiv \lambda \sum_i k_i y_i \equiv \lambda \sum_j k_j y_j$$

legyen, ahol λ egy valós vagy komplex konstáns. Ehhez nyilván az szükséges és elegendő, hogy y_j együtthatói ezen azonosság mindkét oldalán egyenlőek legyenek, azaz hogy

$$\lambda k_j = \sum_i a_{ij} k_i, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Ily módon a k_i számok meghatározására n lineáris, homogén egyenletet nyertünk n ismeretlennel. Ahhoz, hogy e rendszernek legyen nem triviális megoldása — nyilván csak ez érdekel bennünket — szükséges és elegendő, hogy az együtthatóiból alkotott determináns zérus legyen. E feltételt így is írhatjuk:

$$|\lambda E - \|a_{ij}\|| = 0, \quad (118)$$

ahol E az egységmátrixot jelöli. A (118)-at „szekuláris egyenlet”-nek nevezik, ez igen nagy jelentőséggel bír a matematika, fizika és asztronómia sok kérdésében. A $\lambda E - \|a_{ij}\|$ mátrixot a (117) rendszer *karakterisztikus mátrixának* nevezzük.

Legyen λ_1 a (118) egyenlet valamely gyöke. k_{1i} ($i = 1, \dots, n$) jelölje azt a nem csupa zéróból álló számrendszert, mely kielégíti a

$$\lambda_1 k_{1j} = \sum_i a_{ij} k_{1i}$$

egyenletrendszert. Kössük ki, hogy $k_{11} \neq 0$. Ez az általánosságot nyilván semmi-
ben sem korlátozza, mivel ezt az y_i átszámozásával — ami egy nem szinguláris
transzformációt jelent — mindig elérhetjük. Legyen továbbá

$$z_1 = \sum_j k_{1j} y_j. \quad (119)$$

E függvény kielégíti a

$$\frac{dz_1}{dx} = \lambda_1 z_1 + f_1^*(x)$$

egyenletet, ahol $f_i^*(x) = \sum_i k_{1i} f_i(x)$. Írjuk be ezt az egyenletet a (117) rendszer
első egyenletének helyébe. A többi egyenletet pedig annyiban változtassuk meg,
hogy y_1 helyébe annak a (119)-ből nyert kifejezését — ami $k_{11} \neq 0$ miatt lehet-
séges — írjuk. A (117*) jelölje az így kapott rendszert. Ez ilyen alakú:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= \lambda_1 z_1 && + f_1^*(x), \\ \frac{dy_2}{dx} &= a_{21}^* z_1 + a_{22}^* y_2 + a_{23}^* y_3 + \dots + a_{2n}^* y_n + f_2(x), \\ \frac{dy_3}{dx} &= a_{31}^* z_1 + a_{32}^* y_2 + a_{33}^* y_3 + \dots + a_{3n}^* y_n + f_3(x), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}^* z_1 + a_{n2}^* y_2 + a_{n3}^* y_3 + \dots + a_{nn}^* y_n + f_n(x). \end{aligned} \right\} \quad (117^*)$$

Feltevésünk szerint a bizonyítandó tétel $(n - 1)$ egyenletre igaz. Alkal-
mazzuk ezt arra a rendszerre, melyet a (117*) első egyenletének elhagyásával
kapunk. A $z_1(x)$ -et tekintjük teljesen úgy, mint a többi ismeretlen $f_i(x)$ függ-
vényt. Akkor létezik oly

$$y_i(x) = \sum_{j=2}^n k_{ij} y_j^*(x), \quad i = 2, 3, \dots, n$$

lineáris, nem szinguláris transzformáció, mely a (117*) rendszert ilyen alakba viszi át:

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= \lambda_1 z_1 + f_1^*(x) \\ \frac{dy_2^*}{dx} &= b_2 z_1 + \lambda_2 y_2^* + \widetilde{f}_2(x) \\ \frac{dy_3^*}{dx} &= b_3 z_1 + \alpha_1 y_2^* + \lambda_2 y_3^* + \widetilde{f}_3(x) \\ \frac{dy_4^*}{dx} &= b_4 z_1 + \alpha_2 y_3^* + \lambda_2 y_4^* + \widetilde{f}_4(x) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_{n_1+1}^*}{dx} &= b_{n_1+1} z_1 + \alpha_{n_1-1} y_{n_1}^* + \lambda_2 y_{n_1+1}^* + \widetilde{f}_{n_1+1}(x) \\ \frac{dy_{n_1+2}^*}{dx} &= b_{n_1+2} z_1 + \lambda_3 y_{n_1+2}^* + \widetilde{f}_{n_1+2}(x) \\ \frac{dy_{n_1+3}^*}{dx} &= b_{n_1+3} z_1 + \beta_1 y_{n_1+2}^* + \lambda_3 y_{n_1+3}^* + \widetilde{f}_{n_1+3}(x) \\ \frac{dy_{n_1+4}^*}{dx} &= b_{n_1+4} z_1 + \beta_2 y_{n_1+3}^* + \lambda_3 y_{n_1+4}^* + \widetilde{f}_{n_1+4}(x) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_{n_1+n_2+1}^*}{dx} &= b_{n-n_k+1} z_1 + \beta_{n_2-1} y_{n_1+n_2}^* + \lambda_3 y_{n_1+n_2+1}^* + \widetilde{f}_{n_1+n_2+1}(x) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_{n-n_k+1}^*}{dx} &= b_{n-n_k+1} z_1 + \lambda_{k+1} y_{n-n_k+1}^* + \widetilde{f}_{n-n_k+1}(x) \\ \frac{dy_{n-n_k+2}^*}{dx} &= b_{n-n_k+2} z_1 + \omega_1 y_{n-n_k+1}^* + \lambda_{k+1} y_{n-n_k+2}^* + \widetilde{f}_{n-n_k+2}(x) \\ \frac{dy_{n-n_k+3}^*}{dx} &= b_{n-n_k+3} z_1 + \omega_2 y_{n-n_k+2}^* + \lambda_{k+1} y_{n-n_k+3}^* + \widetilde{f}_{n-n_k+3}(x) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\frac{dy_n^*}{dx} = b_n z_1 + \omega_{n_k-1} y_{n-1}^* \lambda_{k+1} y_n^* + \widetilde{f}_n(x) \quad (117^{**})$$

Ahhoz, hogy e rendszert kanonikus alakra hozzuk, már csak a b_i számoktól kellene megszabadulnunk. Minthogy a 2-től az $(n_1 + 1)$ -ig, az $(n_1 + 2)$ -től az $(n_1 + n_2 + 1)$ -ig, . . . , s az $(n - n_k + 1)$ -től az n -ig terjedő egyenletcsoportokban ugyanolyan a helyzet, ezért csak azt mutatjuk meg, hogyan szabadulhatunk meg a $b_2, b_3, \dots, b_{n_1+1}$ konstánsoktól. Két esetet kell megkülönböztetnünk: 1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 2) $\lambda_1 = \lambda_2$

1. eset: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Legyen $z_2 = y_2^* + Kz_1$. Akkor

$$\begin{aligned} \frac{dz_2}{dx} &= \frac{dy_2^*}{dx} + K \frac{dz_1}{dx} = b_2 z_1 + \lambda_2 y_2^* + K \lambda_1 z_1 + f_2^*(x) = b_2 z_1 + \lambda_2 z_2 - \\ &- K \lambda_2 z_1 + K \lambda_1 z_1 + f_2^*(x) = \lambda_2 z_2 + [b_2 + K(\lambda_1 - \lambda_2)] z_1 + f_2^*(x). \end{aligned}$$

Itt $f_2^*(x)$ az $f_1^*(x)$ és $\widetilde{f}_2(x)$ bizonyos lineáris kombinációja. Válasszuk meg a K -t úgy, hogy

$$b_2 + K(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$$

legyen. Ez lehetséges, minthogy feltevésünk szerint $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Az így adódó

$$\frac{dz_2}{dx} = \lambda_2 z_2 + f_2^*(x)$$

egyenlet azt jelenti, hogy a második egyenletből a b_2 számot már kiküszöböltük.

Térjünk most rá a harmadikra. Írjuk ezt először úgy át, hogy y_2^* helyébe annak z_1 és z_2 -ben való kifejezését tesszük. Akkor

$$\frac{dy_3^*}{dx} = (b_3 - \alpha_1 K) z_1 + \alpha_1 z_2 + \lambda_2 y_3^* + \widetilde{f}_3(x).$$

Legyen most $z_3 = y_3^* + K_1 z_1$. Akkor

$$\begin{aligned} \frac{dz_3}{dx} &= \frac{dy_3^*}{dx} + K_1 \frac{dz_1}{dx} = b_3 z_1 + \alpha_1 y_2^* + \lambda_2 y_3^* + K_1 \lambda_1 z_1 + f_3^*(x) = \\ &= (b_3 - \alpha_1 K + K_1 \lambda_1 - K_1 \lambda_2) z_1 + \alpha_1 z_2 + \lambda_2 z_3 + f_3^*(x). \end{aligned}$$

Itt $f_3^*(x)$ az $f_1^*(x)$ és $\widetilde{f}_3(x)$ bizonyos lineáris kombinációja. Válasszuk meg a K_1 számot úgy, hogy $b_3 - \alpha_1 K = K_1(\lambda_2 - \lambda_1)$ legyen. Ezt tehetjük, mivel $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Akkor ezt kapjuk:

$$\frac{dz_3}{dx} = \alpha_1 z_2 + \lambda_2 z_3 + f_3^*(x).$$

Teljesen ugyanígy küszöbölhetjük ki a többi b_i számokat az első csoport többi egyenleteiből.

2. eset: $\lambda_1 = \lambda_2$. Ekkor legyen

$$y_{n_1+1}^* = z_{n_1+1}^*, \quad b_{n_1+1} z_1 + \alpha_{n_1-1} y_{n_1}^* = \alpha_{n_1}^* z_{n_1}^*,$$

ahol $\alpha_{n_1}^*$ a zérustól különböző tetszőleges szám. Ez utóbbi egyenlet megoldható az $y_{n_1}^*$ és $z_{n_1}^*$ -re nézve, mivel α_{n_1-1} és $\alpha_{n_1}^*$ különbözők zérustól. Akkor az $(n_1 + 1)$ -edik és az n_1 -edik egyenleteket így írhatjuk át:

$$\begin{aligned} \frac{dz_{n_1+1}}{dx} &= \alpha_{n_1}^* z_{n_1} + \lambda_2 z_{n_1+1} + f_{n_1+1}^*(x), \\ \frac{dz_{n_1}}{dx} &= \frac{b_{n_1+1}}{\alpha_{n_1}^*} \frac{dz_1}{dx} + \frac{\alpha_{n_1-1}}{\alpha_{n_1}^*} \frac{dy_{n_1}^*}{dx} = \frac{b_{n_1+1}}{\alpha_{n_1}^*} \lambda_1 z_1 + \frac{\alpha_{n_1-1} b_{n_1} z_1}{\alpha_{n_1}^*} + \\ &+ \frac{\alpha_{n_1-1} \alpha_{n_1-2}}{\alpha_{n_1}^*} y_{n_1-1}^* + \frac{\alpha_{n_1-1}}{\alpha_{n_1}^*} \lambda_2 y_{n_1}^* + f_{n_1}^*(x) = \\ &= \frac{b_{n_1+1} \lambda_1}{\alpha_{n_1}^*} z_1 + \frac{\alpha_{n_1-1} b_{n_1}}{\alpha_{n_1}^*} z_1 + \frac{\alpha_{n_1-1} \alpha_{n_1-2}}{\alpha_{n_1}^*} y_{n_1-1}^* + \frac{\alpha_{n_1}^* z_{n_1} - b_{n_1+1} z_1}{\alpha_{n_1}^*} \lambda_2 + f_{n_1}^*(x) = \\ &= \frac{\alpha_{n_1-1} b_{n_1}}{\alpha_{n_1}^*} z_1 + \frac{\alpha_{n_1-1} \alpha_{n_1-2}}{\alpha_{n_1}^*} y_{n_1-1}^* + \lambda_2 z_{n_1} + f_{n_1}^*(x). \end{aligned}$$

Legyen $\alpha_{n_1-1}^* z_{n_1-1} = \frac{\alpha_{n_1-1} b_{n_1}}{\alpha_{n_1}^*} z_1 + \frac{\alpha_{n_1-1} \alpha_{n_1-2}}{\alpha_{n_1}^*} y_{n_1-1}^*$, ahol $\alpha_{n_1-1}^*$ egy zérustól különböző tetszőleges szám. Akkor az n_1 -edik egyenletet a

$$\frac{dz_{n_1}}{dx} = \alpha_{n_1}^* z_{n_1-1} + \lambda_2 z_{n_1} + f_{n_1}^*(x)$$

alakba írhatjuk át.

Analóg módon járunk el az első csoport többi egyenleteivel is. Így kiküszöböljük a $b_{n_1+1}, b_{n_1}, \dots, b_2, b_3$ számokat. A b_2 nem küszöbölhető ki, ha egyébként is nem zéró, ezt azonban a $\lambda_1 = \lambda_2$ esetben a kanonikusakra hozás nem is követeli meg. Egyébként, ha $b_2 \neq 0$, akkor a $z_1 = Kz_1^*$ helyettesítéssel mindig átváltoztathatjuk azt zérustól különböző tetszőleges számmá. Itt $f_i^*(x)$ mindenütt

az $f_1^*(x)$ és $\tilde{f}_i(x)$ valamely lineáris kombinációját jelölte.

Legyen λ_2 -ön kívül még egy λ , pl. $\lambda_3 = \lambda_1$. Akkor ugyanezen a módon kiküszöbölhetjük a $b_{n_1+3}, \dots, b_{n_1+n_2+1}$ számokat. Avégből, hogy ne kelljen új jelöléseket bevezetnünk, tegyük fel, hogy már a (117**) egyenletekben:

$$b_3 = b_4 = \dots = b_{n_1+1} = b_{n_1+3} = \dots = b_{n_1+n_2+1} = 0.$$

Azonban b_2 és b_{n_1+2} zérustól különbözők lehetnek. Ha $b_2 = 0$, akkor a λ_2 és λ_3 -nak megfelelő egyenletcsoportok helyeit felcserélhetjük, s így a kanonikus alakra hozás nem kívánja meg b_{n_1+2} eltüntetését, ha az nem egyenlő zéróval. Ha azonban $b_2 \neq 0$ és $b_{n_1+2} \neq 0$, akkor feltéve, hogy $n_1 \geq n_2$ — mely a λ_2 és λ_3 -nak megfelelő egyenletcsoportok helycseréjével mindig elérhető — a $z_{n_1+2} = y_{n_1+2}^* + K_1 y^*$ behelyettesítést végezzük. Ebből következik:

$$\frac{dz_{n_1+2}}{dx} = \frac{dy_{n_1+2}^*}{dx} + K_1 \frac{dy_2^*}{dx} = b_{n_1+2} z_1 + \lambda_3 y_{n_1+2}^* + K_1 b_2 z_1 + K_1 \lambda_2 y_2^* +$$

$$+ f_{n_1+2}^*(x) = b_{n_1+2} z_1 + \lambda_3 z_{n_1+2} - \lambda_3 K_1 y_2^* + K_1 b_2 z_1 + K_1 \lambda_2 y_2^* + f_{n_1+2}^*(x).$$

Mivel feltettük, hogy $b_2 \neq 0$, azért K_1 mindig kiválasztható úgy, hogy $K_1 b_2 = b_{n_1+2}$, és mivel $\lambda_2 = \lambda_3$, ezért

$$\frac{dz_{n_1+2}}{dx} = \lambda_3 z_{n_1+2} + f_{n_1+2}^*(x).$$

Ha az ezután következő egyenletben az $y_{n_1+2}^* = z_{n_1+2} - K_1 y_2^*$ helyettesítést végezzük, ezt kapjuk:

$$\frac{dy_{n_1+3}^*}{dx} = -\beta_1 K_1 y_2^* + \beta_1 z_{n_1+2} + \lambda_3 y_{n_1+3}^* + \tilde{f}_{n_1+3}(x).$$

Ebben az egyenletben a $z_{n_1+3} = y_{n_1+3}^* + K_2 y_2^*$ helyettesítéssel megszüntülhetünk az y_2^* -os tagtól. E transzformációk folytatásával végül is a rendszer kanonikus alakjára jutunk.

Végül megjegyezzük, hogy a kanonikus alakra hozás végett itt alkalmazott összes lineáris transzformációk egyértelműen megfordíthatók voltak, azaz az új változók mindig oly lineáris összefüggésben voltak a régiekkel, hogy ezek által mind az új változók a régiekből, mind a régiek az újakból egyértelműen kifejezhetők voltak. Ezért az y_i -nek a z_i -be való transzformációja is lineáris és egyértelműen megfordítható, tehát nem szinguláris.

A (117) rendszer itt ismert etett kanonikus alakra hozási módszere gyakorlatban roppant nehézkes. Ezért kívánatos volna oly módszert találni, mely gyorsabban adja meg a rendszer kanonikus alakját: a λ_i számokat, s a λ_i -knek megfelelő egyenletek számát. A most következő paragrafusokban megkíséreljük ily módszerek ismertetését.

44. §. A lineáris transzformáció invariánsai

Tegyük fel, hogy a

$$\frac{dz_i}{dx} = \sum_{j=1}^n b_{ij} z_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

állandó együtthatós lineáris rendszert a

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

rendszerből kaptuk a

$$z_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} y_j \quad i = 1, 2, \dots, n$$

lineáris, nem szinguláris transzformáció által.¹⁾

¹⁾ Avégből, hogy írásmódunk ne legyen komplikált, a paragrafusban mindenütt csak homogén rendszerekről szólnunk, holott természetesen az ebben igazolt tételek inhomogén rendszerekre is érvényesek.

Akkor igaz az alábbi két tétel.

1. Tétel. Legyen

$$\|a_{ij}\| = A, \quad \|b_{ij}\| = B, \quad \|k_{ij}\| = K$$

E jelölje az n -edrendű egységmátrixot. Akkor

$$\lambda E - B = K(\lambda E - A)K^{-1}. \quad (120)$$

Bizonyítás. Helyettesítsük be B rendszerben z_i helyébe annak y_1, \dots, y_n által való kifejezését. Ez a

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} \frac{dy_j}{dx} = \sum_{j=1}^n b_{ij} \sum_{s=1}^n k_{js} y_s$$

egyenleteket adja. Az (A) rendszer felhasználásával pedig ebből

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} \sum_{s=1}^n a_{js} y_s = \sum_{j,s=1}^n k_{ij} a_{js} y_s = \sum_{j,s=1}^n b_{ij} k_{js} y_s.$$

Mint hogy e vonatkozásoknak az y_s -re nézve azonosságot kell adniuk, ezért bármely i és s számra $\sum_j k_{ij} a_{js} = \sum_j b_{ij} k_{js}$, ez pedig azt jelenti, hogy

$$KA = BK \quad \text{vagy} \quad B = KAK^{-1}.$$

Ez utóbbi egyenlőség pedig ekvivalens (120)-szal, mint hogy

$$E = KEK^{-1}.$$

2. Tétel. $A \lambda E - B$ és $\lambda E - A$ λ -mátrixok¹⁾ összes l -edrendű ($l = 1, 2, \dots, n$) minorainak legnagyobb közös osztói.²⁾ — a konstáns szorzóktól eltekintve — megegyeznek.

Ebből azonnal következik, hogy a $\lambda E - A$ és $\lambda E - B$ mátrixok determinánsainak azonosoknak kell lenniük.

Bizonyítás. Mivel az (A) -ról a (B) -re való áttérés megfordítható, ezért elegendő azt kimutatnunk, hogy az l -edrendű minorok legnagyobb közös osztója az (A) -ról a (B) -re való áttérés folytán nem csökken.³⁾ Ebből már következik, hogy az nem is növekedhet, mert ellenkező esetben a (B) -ről az (A) -ra való áttérés folytán csökkenne.

Előző tételünk alapján tehát elegendő azt igazolnunk, hogy a $\lambda E - A$ mátrix szóbanforgó közös osztói nem csökkennek annak egy K mátrixszal való baloldali vagy jobboldali szorzása folytán. Kimutadjuk azt a K -val balról való szorzásról. Evégből megjegyezzük a következőket. A $K(\lambda E - A)$ mátrix bármely l -edrendű minora a $\lambda E - A$ λ -mátrix bizonyos l -edrendű minorainak, valamint a K elemeinek szorzataiból alkotott összeg. Ezért a $\lambda E - A$ összes l -edrendű minorainak összes közös osztóit a $K(\lambda E - A)$ mátrix minden l -edrendű minora is tartalmazza, ebből pedig az következik, hogy a $K(\lambda E - A)$ mátrix összes l -edrendű minorainak legnagyobb közös osztója osztható a $\lambda E - A$ mátrix összes l -edrendű minorainak legnagyobb közös osztójával, qu. e. d.

1) λ -mátrixnak nevezzünk olyan mátrixot, melynek elemei λ -ra nézve polinomok.

2) Ezeknek az l -edrendű minoroknak legnagyobb közös osztóját úgy állapítjuk meg, mintha e minorok egységei λ polinomjai volnának.

3) Ezen azt értjük, hogy a $\lambda E - A$ mátrix összes l -edrendű minorainak legnagyobb közös osztója a $\lambda E - B$ mátrix minden l -edrendű minorának is osztója lesz.

Itt az M_1, M_2, \dots, M_k négyzeteken kívüli elemek, valamint az M_s mátrix ki nem írt elemei zérusok, az $\varepsilon_{s1}, \varepsilon_{s2}, \dots, \varepsilon_{sn_s-1}$ számok mind különbözők zérustól; a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ számok közül pedig bizonyosak egymással egyenlők is lehetnek. Az M mátrix — az átló körüli elemek jelölésétől eltekintve — megegyezik a (117) differenciálegyenletrendszer (116) kanonikus alakjának karakterisztikus mátrixával.

Először végezzük el a számításokat az $l = n = \sum_{s=1}^k n_s$ esetben, azaz állapítsuk meg az M -mátrix determinánsát. Ez nyilván az összes M_s mátrixok determinánsainak szorzata, azaz

$$|M| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}.$$

S minthogy az előző paragrafus tétele alapján ennek azonosnak kell lennie a $\lambda E - \|a_{ij}\|$ mátrix determinánsával, azért a következőket kapjuk:

K ö v e t k e z m é n y. A (116) egyenletekben álló összes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ számok a (117) rendszer karakterisztikus mátrixának gyökei.

Térjünk most át az M mátrix összes $(n-1)$ -edrendű minorai legnagyobb közös osztójának meghatározására. Evégből jobb először pontosan kiírunk, hogy a $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ számok milyen értékeket vehetnek fel. Legyen ezek között

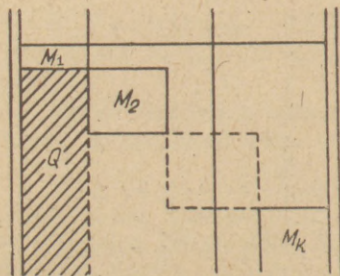
$$\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(m)}, \quad (m \leq k)$$

m számú egymástól különböző szám.

Továbbá megjegyezzük, hogy az összes l -edrendű minorok közös osztói az egész M mátrix determinánsának is osztói. Ezért az M mátrix összes l -edrendű minorai legnagyobb közös $D_l(\lambda)$ osztójának a konstáns szorzótól eltekintve

$$D_l(\lambda) = (\lambda - \lambda^{(1)})^{p_1} (\lambda - \lambda^{(2)})^{p_2} \dots (\lambda - \lambda^{(m)})^{p_m}$$

alakúnak kell lennie, ahol a p_i nem negatív, egész számokat jelöl. Az M mátrixból most hagyjunk el egy olyan sort és oszlopot, melyek az M_s négyzeteken kívül metszik egymást, úgy ahogyan azt a 28. ábra mutatja. Akkor visszamarad egy olyan $(n-1)$ -edrendű M' mátrix, melyben van egy olyan



28. ábra.

esupa zérusból álló Q téglalap, melynek szélességéből és hosszúságából a kötött összeg pontosan n (ezt a téglalapot a rajzon besraffoztuk). Ezért az előző lemma alapján az M' mátrix determinánsa nulla. Tehát, ha az M mátrix összes $(n-1)$ -edrendű minorainak $D_{n-1}(\lambda)$ legnagyobb közös osztóját akarjuk megtudni, akkor elegendő azoknak az M mátrixoknak a determinánsát tekintetbe vennünk, melyek az M -ből egymást valamely M_s (pl. M_{s_1}) négyzet belsejében metsző sor és oszlop kihagyásával keletkeznek. Ahhoz, hogy ilyen M' mátrix determinánsát megkapjuk, az M_{s_1} -ből egy sor és egy oszlop kihagyásával keletkezett M'_{s_1} mátrix determinánsát kell megszoroznunk az összes többi M_s mátrixok determinánsaival. Ahhoz, hogy az összes $(n-1)$ -edrendű $|M'|$ minor legnagyobb közös osztóját megkapjuk, nyilván azok a minorok érdekelnek bennünket, melyek a

$$(\lambda - \lambda^{(1)}), (\lambda - \lambda^{(2)}), \dots, (\lambda - \lambda^{(m)})$$

menyiségek lehető legalacsonyabb hatványait tartalmazzák.

függvények is m egymástól lineárisan független sort alkotnak, ha csak

$$|k_{ij}| \neq 0.$$

Bizonyítás. Tegyük fel állításunk ellenkezőjét, nevezetesen azt, hogy léteznek oly C_1, C_2, \dots, C_m nem csupa zéróból álló számok, úgy hogy

$$\sum_{s=1}^m C_s y_i^{(s)}(x) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Szorozzuk meg rendre (121) egyenleteit C_s -sel, és összegezzünk s szerint 1-től m -ig, akkor a

$$\sum_{s=1}^m C_s y_i^{(s)} = \sum_{j=1}^n k_{ij} \sum_{s=1}^m C_s z_j^{(s)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

összefüggéseket kapjuk.

Innen nyilvánvaló, hogy ha

$$\sum_s C_s y_i^{(s)} \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

akkor

$$\sum_s C_s z_j^{(s)} \equiv 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

A megelőző paragrafusban láttuk, hogy a $\lambda E - \|a_{ij}\|$ mátrix $(\lambda - \lambda_s)^p$ elemi osztójának a kanonikus rendszerben a következő homogén egyenletcsoport felel meg:

$$\frac{dz_{k+1}}{dx} = \lambda_s z_{k+1}$$

$$\frac{dz_{k+2}}{dx} = \varepsilon_1 z_{k+1} + \lambda_s z_{k+2}$$

$$\frac{dz_{k+3}}{dx} = \varepsilon_2 z_{k+2} + \lambda_s z_{k+3}$$

.....

$$\frac{dz_{k+p_s}}{dx} = \varepsilon_{p_s-1} z_{k+p_s-1} + \lambda_s z_{k+p_s},$$

ahol $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{p_s-1}$ bizonyos zérustól különböző számok. Változtassuk át az ismeretlen függvényt a

$$z_{k+l} = z_{k+l}^* e^{\lambda_s x}$$

helyettesítéssel.

Ha $\lambda_s = \lambda_s^* + i \lambda_s^{**}$ alakú komplex szám (ahol λ_s^* és λ_s^{**} valósak), akkor $e^{\lambda_s x}$ alatt az

$$e^{\lambda_s^* x} (\cos \lambda_s^{**} x + i \sin \lambda_s^{**} x)$$

kifejezést értjük (Euler-formula). E kifejezésnek az x szerinti deriváltja:

$$\begin{aligned} \lambda_s^* e^{\lambda_s^* x} (\cos \lambda_s^{**} x + i \sin \lambda_s^{**} x) + e^{\lambda_s^* x} (-\lambda_s^{**} \sin \lambda_s^{**} x + i \lambda_s^{**} \cos \lambda_s^{**} x) = \\ = (\lambda_s^* + i \lambda_s^{**}) e^{\lambda_s^* x} (\cos \lambda_s^{**} x + i \sin \lambda_s^{**} x) = \lambda_s e^{\lambda_s x}. \end{aligned}$$

Ezért az említett helyettesítéssel ezt kapjuk:

$$\frac{dz_{k+1}^*}{dx} = 0$$

$$\frac{dz_{k+2}^*}{dx} = \varepsilon_1 z_{k+1}^*$$

$$\frac{dz_{k+3}^*}{dx} = \varepsilon_2 z_{k+2}^*$$

.....

$$\frac{dz_{k+p_s}^*}{dx} = \varepsilon_{p_s-1} z_{k+p_s-1}^*$$

Az első egyenletből következik, hogy

$$z_{k+1}^* = C_1 = C_0^{(1)}.$$

Ezt a másodikba helyettesítve integrálással kapjuk, hogy

$$z_{k+2}^* = C_1 \varepsilon_1 x + C_2 = C_1^{(2)} x + C_0^{(2)}.$$

Ha ezt a harmadik egyenletbe helyettesítjük, integrálással kapjuk, hogy

$$z_{k+3}^* = \frac{C_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} x^2 + C_2 \varepsilon_2 x + C_3 = C_2^{(3)} x^2 + C_1^{(3)} x + C_0^{(3)},$$

és így tovább. Végül is

$$z_{k+p_s}^* = \frac{C_1^{(p_s)}}{p_s-1} x^{p_s-1} + \frac{C_1^{(p_s)}}{p_s-2} x^{p_s-2} + \dots + C_1^{(p_s)} x + C_0^{(p_s)}.$$

Itt a különböző indexű C -k bizonyos valós vagy komplex konstánsokat jelölnek.

Visszatérve a $z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_{k+p_s}$ függvényekre a

$$\left. \begin{aligned} z_{k+1} &= e^{\lambda x} C_0^{(1)} \\ z_{k+2} &= e^{\lambda x} (C_1^{(2)} x + C_0^{(2)}) \\ z_{k+3} &= e^{\lambda x} (C_2^{(3)} x^2 + C_1^{(3)} x + C_0^{(3)}) \\ &\dots \\ z_{k+p_s} &= e^{\lambda x} (C_{p_s-1}^{(p_s)} x^{p_s-1} + C_{p_s-2}^{(p_s)} x^{p_s-2} + \dots + C_1^{(p_s)} x + C_0^{(p_s)}) \end{aligned} \right\} (122)$$

egyenleteket kapjuk.

A (122) egyenletek adják meg differenciálegyenleteink szóbanforgó csoportjának általános megoldását. A 34. §. 4. tételét e csoportra alkalmazva azt kapjuk, hogy ennek van p_s számú egymástól lineárisan független (122) alakú megoldása. Az egész homogén kanonikus rendszert úgy elégíthetjük ki, ha feltesszük, hogy a (122)-őn kívüli összes z_i függvények azonosan eltűnnek. Minthogy az y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) a z_i ($i = 1, 2, \dots, n$)-vel lineárisan fejezhető ki, az imént igazolt lemma

alapján azt kapjuk, hogy a $\lambda E - \|a_{ij}\|$ mátrix minden $(\lambda - \lambda_s)^{p_s}$ elemi osztójához olyan p_s számú egymástól lineárisan független megoldás tartozik, melyek mindegyik

$$y_i = e^{\lambda_s x} \sum_{j=0}^{p_s-1} C_j^{*(i)} x^j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

alakú.

Könnyű belátnunk azt, hogy a p_s számú megoldás közül az elsőről feltehetjük, hogy benne mindegyik $C_j^{*(i)} = 0$, ha $j > 0$, ez megfelel $z_{k+1} \equiv \dots \equiv z_{k+p_s-1} \equiv 0$, ha csak $\sum_{i=1}^n |C_0^{*(i)}| > 0$; a másodikról pedig, hogy benne $C_j^{*(i)} = 0$, ha $j > 1$, ez megfelel a $z_{k+1} \equiv \dots \equiv z_{k+p_s-2} \equiv 0$, ha csak $\sum_{i=1}^n |C_1^{*(i)}| > 0$, és így tovább.

Ha a $\lambda E - \|a_{ij}\|$ mátrixnak oly elemi osztói vannak, melyek a $(\lambda - \lambda^{(l)})$ bizonyos hatványai, pl.

$$(\lambda - \lambda^{(1)})^{m^{(1)}}, (\lambda - \lambda^{(1)})^{m^{(2)}}, \dots, (\lambda - \lambda^{(k)})^{m^{(k)}},$$

akkor a

$$\frac{dy_i}{dx} - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (123)$$

rendszer $m^{(1)} + m^{(2)} + \dots + m^{(k)}$ számú

$$y_i = e^{\lambda^{(l)} x} \sum_{j=0}^{M-1} C_j^{(i)} x^j \quad (124)$$

egymástól lineárisan független megoldással rendelkezik, ahol az M az $m^{(1)}, m^{(2)}, \dots, m^{(k)}$ számok legnagyobbikát jelöli. Ahhoz, hogy megtaláljuk e megoldásokat, csak a $C_j^{(i)}$ koefficienseket kell meghatároznunk. Ezt a határozatlan koefficiensek módszerével tehetjük, mely abban áll, hogy (123)-ban y_i helyébe behelyettesítjük a (124) kifejezéseket, s $e^{\lambda^{(l)} x}$ -szel való rövidítés után az egyenlő kitevőjű x -ek együtthatóit egyenlővé tesszük. E megoldások lineárisan függetlenek lesznek azoktól a megoldásoktól, melyeket más $(\lambda - \lambda^{(p)})$ hatványaiból álló elemi osztókból képzünk, mert ezekhez az osztókhöz a kanonikus rendszerben más és más egyenletesoportok tartoznak.

Megjegyzés. Ha a szóbanforgó homogén rendszerünk koefficiensei valósak, akkor e rendszer bármely komplex megoldásának valós és imaginárius része külön-külön is megoldása a rendszernek. Az $y_j^*(x) + iy_j^{**}(x)$ megoldás valós (illetve komplex) részének az $y_j^*(x)$ (illetve $y_j^{**}(x)$) függvényeket nevezzük, ahol $j = 1, 2, \dots, n$.

Ha

$$y_j^{(k)}(x) = y_j^*(x) + iy_j^{**}(x), \quad k, j = 1, 2, \dots, n$$

n egymástól lineárisan független sort alkot, akkor az

$$y_1^{*(k)}(x), y_2^{*(k)}(x), \dots, y_n^{*(k)}(x),$$

$$y_1^{**}(x), y_2^{**}(x), \dots, y_n^{**}(x)$$

megoldás, ahol $\lambda_s = \alpha_s + i \beta_s$. Ezért ugyanazt az egyenletet kielégítik az

$$\frac{y_1(x) + \bar{y}_1(x)}{2} = x^k e^{\alpha_s x} \cos \beta_s x, \quad \frac{y_1(x) - \bar{y}_1(x)}{2i} = x^k e^{\alpha_s x} \sin \beta_s x$$

valós függvények is. Így megkaptuk a (102) állandó együtthatós rendszer n valós, egymástól lineárisan független megoldását. (Miért?)

F e l a d a t. Mutassuk ki, hogy elsőrendű egyenletrendszer esetén az elemi osztó fentebb dőlt betűvel szedett szerkezete elegendő feltétel ahhoz, hogy a rendszer nem szinguláris, lineáris transzformációval arra az állandó együtthatós (103) alakra legyen hozható, mely egyetlen n -edrendű egyenlettel ekvivalens. Pymódon rendelkezésünkre áll annak szükséges és elegendő feltétele, hogy n elsőrendű, lineáris, állandó együtthatós egyenletből álló rendszer (az imént jelzett értelemben) egyetlen n -edrendű, lineáris, állandó együtthatós egyenlettel legyen ekvivalens.

F e l a d a t. Keressük meg az

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + x^{n-1} a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + x a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

egyenlet általános megoldását, ahol mindegyik a konstáns (Euler-féle egyenlet.)

Útmutatás: Az x független változóról térjünk át a t független változóra az $x = e^t$ helyettesítéssel.

48. §. Az inhomogén rendszer partikuláris megoldásainak meghatározásáról

Csak azt az esetet fogjuk tárgyalni, amikor a (117) rendszerben

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^m C_i^{(k)} e^{\alpha_k x} x^{\beta_k},$$

ahol α_k és $C_i^{(k)}$ akár valós, akár komplex számok lehetnek, β_k pedig nem negatív egész szám. Nyilván elegendő az $m = 1$ esettel foglalkoznunk, mert az általános esetben a partikuláris megoldás ehhez a speciális esethez tartozó megoldások összegéből áll. Tehát tegyük fel, hogy

$$f_i(x) = C_i e^{\alpha x} x^{\beta}.$$

Írjuk fel a (116) rendszer oly egyenletcsoportját, mely a karakterisztikus mátrix egy M_s négyzetéhez tartozik. Legyen ez:

$$\frac{dz_{k+1}}{dx} = \lambda_s z_{k+1} + C_{k+1}^* x^{\beta} e^{\alpha x}$$

$$\frac{dz_{k+2}}{dx} = \varepsilon_1 z_{k+1} + \lambda_s z_{k+2} + C_{k+2}^* x^{\beta} e^{\alpha x}$$

$$\frac{dz_{k+3}}{dx} = \varepsilon_2 z_{k+2} + \lambda_s z_{k+3} + C_{k+3}^* x^{\beta} e^{\alpha x}$$

.....

$$\frac{dz_{k+p_s}}{dx} = \varepsilon_{p_s-1} z_{k+p_s-1} + \lambda_s z_{k+p_s} + C_{k+p_s}^* x^\beta e^{\alpha x}$$

Itt a C_i^* bizonyos új konstánsokat jelöl. Vezessük be új ismeretlenek a z_i^* függvényeket a

$$z_i = z_i^* e^{\lambda_s x}, \quad i = k+1, k+2, \dots, k+p_s$$

helyettesítéssel. Akkor ezt kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_{k+1}^*}{dx} &= & + C_{k+1}^* x^\beta e^{(\alpha-\lambda_s)x} \\ \frac{dz_{k+2}^*}{dx} &= \varepsilon_1 z_{k+1}^* & + C_{k+2}^* x^\beta e^{(\alpha-\lambda_s)x} \\ \frac{dz_{k+3}^*}{dx} &= \varepsilon_2 z_{k+2}^* & + C_{k+3}^* x^\beta e^{(\alpha-\lambda_s)x} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{dz_{k+p_s}^*}{dx} &= \varepsilon_{p_s-1} z_{k+p_s-1}^* & + C_{k+p_s}^* x^\beta e^{(\alpha-\lambda_s)x} \end{aligned} \right\} (127)$$

E rendszer integrálásánál két esetet kell megkülönböztetnünk, aszerint, amint α egyenlő vagy nem egyenlő λ_s -sel.

1. eset: $\lambda_s \neq \alpha$.

A (127) rendszer egyenleteinek egymásutáni integrálásával azt kapjuk, hogy

$$z_i^* = M_i^{(\beta)}(x) e^{(\alpha-\lambda_s)x}, \quad i = k+1, \dots, k+p_s,$$

ahol $M_i^{(\beta)}(x)$ az x -nek legfeljebb β -fokú polinomja.¹⁾ Innen

$$z_i = M_i^{(\beta)}(x) e^{\alpha x}, \quad i = k+1, \dots, k+p_s.$$

Ha egyetlen λ_s szám sem egyenlő α -val, akkor mindegyik z_i ($i = 1, \dots, n$)

$$z_i = M_i^{(\beta)}(x) e^{\alpha x}$$

alakú, s ezért az y_i partikuláris megoldás is

$$y_i = M_i^{*(\beta)}(x) e^{\alpha x} \quad (128)$$

alakú lesz. Az $M_i^{*(\beta)}(x)$ polinomok együtthatóit úgy állapíthatjuk meg, hogy a (117)

¹⁾ Az analitikai függvények elméletében igazolják, hogy az $x^\beta e^{(\alpha-\lambda_s)x}$ valós $\alpha - \lambda_s$ mellett történő integrálásával kapott képletek akkor is érvényesek, ha $\alpha - \lambda_s$ komplex. Ezt közvetlenül is verifikálhatjuk.

egyenletbe behelyettesítjük y_i (128) alatti kifejezéseit, s az így nyert egyenletekben $e^{\alpha x}$ -szel rövidítve x egyenlő hatványainak együtthatóit egyenlővé tesszük

2. eset: $\lambda_s = \alpha$.

Ekkor a (127) rendszer

$$\begin{aligned} \frac{dz_{k+1}^*}{dx} &= && + C_{k+1}^* x^\beta \\ \frac{dz_{k+2}^*}{dx} &= \varepsilon_1 z_{k+1}^* && + C_{k+2}^* x^\beta \\ &\dots && \dots \\ \frac{dz_{k+p_s}^*}{dx} &= && \varepsilon_{p_s-1} z_{k+p_s-1}^* + C_{k+p_s}^* x^\beta \end{aligned}$$

alakú.

Ezeknek az egyenleteknek egymásutáni integrálásával

$$z_{k+i}^*(x) = M_{k+i}^{(i)}(x) x^\beta, \quad i = 1, 2, \dots, p_s$$

alakú partikuláris megoldásokat kapjuk, ahol $M_{k+i}^{(i)}$ x -nek legfeljebb i fokú polinomja. Innen

$$z_{k+i}(x) = x^\beta M_{k+i}^{(i)}(x) e^{\alpha x}, \quad i = 1, 2, \dots, p_s$$

Tehát a (117) rendszernek az

$$y_i(x) = M_i^{*(\beta+p)}(x) e^{\alpha x}, \quad i = 1, 2, \dots, n^1$$

a partikuláris megoldása, ahol $M_i^{*(\beta+p)}(x)$ x -nek legfeljebb $(\beta+p)$ -fokú polinomja, p pedig a $\lambda E - \|a_{ij}\|$ mátrix $(\lambda - \alpha)^\delta$ alakú elemi osztói közül a legmagasabb fokúnak a kitevője.

Következő mény az n -edrendű egyenletre. Ha a

$$\lambda^n - a_{n-1} \lambda^{n-1} - a_{n-2} \lambda^{n-2} - \dots - a_1 \lambda - a_0$$

polinomnak az α p -szeres gyöke ($p \geq 0$), akkor a

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y + C x^\beta e^{\alpha x}$$

egyenletnek van

$$y(x) = M^{(\beta+p)}(x) e^{\alpha x}$$

alakú partikuláris megoldása, ahol $M^{(\beta+p)}(x)$ egy legfeljebb $(\beta+p)$ -fokú polinom. Ebből kivonva a homogén egyenlet (126) alakú megoldását, megkapjuk az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását az

$$y(x) = M^{(\beta)}(x) x^p e^{\alpha x}$$

alakban.

¹⁾ Helytelen volna azt gondolnunk, hogy a (117) rendszernek feltétlenül van $y_i = x^\beta M_i^{*(p)}(x) e^{\alpha x}$ alakú partikuláris megoldása, mert a $\lambda_s = \alpha$ -nak megfelelő egyenletcsoportokon kívül lehetnek más csoportok is, melyekben $\lambda_s \neq \alpha$.

49. §. A $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy}$ egyenlet kanonikus előállítására

A

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy} \quad (129)$$

egyenlet ekvivalens a

$$\frac{dx}{dt} = cx + dy, \quad \frac{dy}{dt} = ax + by \quad (129)$$

rendszerrel, ahol t egy paraméter. Legyenek az a , b , c és d koefficiensek valóságosak.

A

$$\left\| \begin{array}{cc} \lambda - c & -d \\ -a & \lambda - b \end{array} \right\| \quad (130)$$

λ mátrix elemi osztóitól függően a (129) rendszer kanonikus alakra hozásánál az alábbi esetek lehetségesek.

1. eset. *Az elemi osztók elsőfokúak és valóságosak.* Akkor a kanonikus előállítás fentebb bizonyított tételéből következik, hogy létezik oly lineáris, nem szinguláris, valós koefficiensekkel történő

$$x^* = k_{11}x + k_{12}y, \quad y^* = k_{21}x + k_{22}y \quad (131)$$

transzformáció, mely a (129) rendszert a

$$\frac{dx^*}{dt} = \lambda_1 x^*, \quad \frac{dy^*}{dt} = \lambda_2 y^* \quad (132)$$

alakba viszi át. Ha a

$$\left| \begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \right| \neq 0, \quad (133)$$

akkor a λ_1 és λ_2 számok egyike sem zéró, s így a (129') egyenlet a (131) transzformáció végrehajtása folytán a

$$\frac{dy^*}{dx^*} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{y^*}{x^*}$$

alakba megy át.

2. eset. *A (130) mátrix $(\lambda - \lambda_1)$ és $(\lambda - \lambda_2)$ elemi osztói komplexek.* Mivel a , b , c és d kikötésünk szerint valóságosak, azért most λ_1 és λ_2 egymásnak konjugáltjai. A (131) transzformáció a (129) rendszert most is a (132) alakba viszi át. A k_{21} illetve k_{22} koefficiensekről feltehetjük, hogy ezek konjugáltjai a k_{11} , illetve k_{12} számoknak. Ugyanis mivel $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, azért x^* kielégíti a

$$\frac{dy^*}{dt} = \lambda_2 y^*$$

egyenletet, s így

$$y^* = \overline{x^*}.$$

Legyen

$$k_{11} = k_1^* + i k_1^{**}, \quad k_{12} = k_2^* + i k_2^{**}.$$

Legyen:

$$\xi = k_1^* x + k_2^* y, \quad \eta = k_1^{**} x + k_2^{**} y, \quad \lambda_1 = \alpha + i\beta \quad (\beta \neq 0).$$

Akkor a (132) rendszer valós és képzetes részeinek szétválasztásával a

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha \xi - \beta \eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = \beta \xi + \alpha \eta$$

egyenletekből következik:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\beta \xi + \alpha \eta}{\alpha \xi - \beta \eta}.$$

Megjegyezzük, hogy a lineáris transzformáció, amely az x és y változókat a ξ és η változóba átviszi, nem szinguláris, mert különben

$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} = 0$$

volna.

3. eset. A (130) mátrixnak egyetlen $(\alpha - \alpha_1)^2$ elemi osztója van. Ekkor van oly lineáris, nem szinguláris, valós együtthatós (131) alakú transzformáció, mely a (129) rendszert a

$$\frac{dx^*}{dt} = \lambda_1 x^*, \quad \frac{dy^*}{dt} = \varepsilon x^* + \lambda_1 y^* \quad (134)$$

alakba viszi át. (V. ö. a 43. §-sal!)

Ha a (133) determináns különbözik zérustól, akkor $\lambda_1 \neq 0$. S mivel az a, b, c és d valósak, azért a λ_1 is valós. Az ε egy zérus-tól különböző szám; ha feltételezzük, hogy valós, akkor a k_{ij} számokról is tudjuk a 43. § alapján, hogy valósak. Legyen pl. $\varepsilon = \lambda_1$. Akkor a (134) egyenleteiből azt kapjuk, hogy

$$\frac{dy^*}{dx^*} = \frac{\lambda_1 x^* + \lambda_1 y^*}{\lambda_1 x^*} = \frac{x^* + y^*}{x^*}.$$

50. §. A megoldások stabilitása

Adjuk meg a kezdeti feltételeket $x = x_0$ -nál. A

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (135)$$

rendszer

$$y_i = y_i^0(x), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

megoldását *Ljapunov szerint akkor mondjuk stabilisnak, míg $x \rightarrow +\infty$, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz találhatunk oly $\eta(\varepsilon)$ számot, hogy e rendszer bármely $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ megoldására nézve minden $x \geq x_0$ -nál és minden i -re*

$$|y_i(x) - y_i^0(x)| < \varepsilon,$$

hacsak

$$|y_i(x_0) - y_i^0(x_0)| < \eta(\varepsilon)$$

fennált minden i -re.

Itt természetesen feltesszük, hogy az $y_i^0(x)$ függvények értelmezve vannak minden $x \geq x_0$ értéknél, s hogy a (135) rendszer értelmezve van az $y_i = y_i^0(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) görbe bizonyos

$$|y_i - y_i^0(x)| < M, \quad x \geq x_0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

környezetében.

Nyilvánvaló, hogy vizsgálatainkat mindig visszavezethetjük arra az esetre, amikor

$$y_i^0(x) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ha az $y_i(x)$ függvény helyébe új ismeretlen függvénynek az

$$y_i(x) - y_i^0(x)$$

függvényt tesszük. Az f_i függvényeket, y_i -t és x -et valósaknak tételezzük fel.

A differenciálegyenletek megoldásának stabilitására vonatkozó alapvető vizsgálatok A. M. Ljapunovtól,¹⁾ a neves orosz matematikustól származnak.

Tétel. A (135) rendszernek az

$$y_i(x) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

megoldása stabilis, míg $x \rightarrow +\infty$, ha

$$f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j + F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

és a_{ij} oly állandók, hogy az

$$|\| a_{ij} \| - \lambda E | = 0 \quad (136)$$

egyenlet minden λ gyökének valós része negatív, és bármely $x > x_0$ -ra és eléggé kicsi $|y_i|$ -re

$$|F_i(x, y_1, \dots, y_n)| \leq M [|y_1|^{1+\alpha} + \dots + |y_n|^{1+\alpha}], \quad (137)$$

ahol α és M pozitív konstánsok. Továbbá $y_i(x) \rightarrow 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), míg $x \rightarrow \infty$, ha az összes $|y_i(x_0)|$ értékek eléggé kicsik.

Speciálisan tételünk feltételei teljesülnek, ha a (135) egyenlet jobboldalán álló f_i függvények nem függenek az x -től, s az origó bizonyos környezetében a második rendig bezárólag folytonosan deriválhatók, a (136) egyenlet összes gyökének valós részei pedig negatívak. Ugyanis ekkor e függvényekre alkalmazhatjuk a Taylor-formulát és ezt kapjuk

$$f_i(x, y_1, \dots, y_n) = \sum a_{ij} y_j + O(\sum y_j^2). \quad 2)$$

A tétel bizonyítása. Alkalmazzunk a (135) rendszerre oly lineáris, nem szinguláris, állandó együtthatós transzformációt, mely a

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

rendszeret a kanonikus alakba viszi át.

¹⁾ A. M. Ляпунов: Общая задача об устойчивости движения, ОНТИ, 1935.

²⁾ Lásd az 55. o. 1. lábjegyzetét.

Tekintsük az így nyert egyenletek oly csoportját, mely az $\|a_{ij}\| - \lambda E$ mátrix valamely elemi osztójához — mondjuk $(\lambda - \lambda_1)^{n_1}$ -hez — tartozik;

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= \lambda_1 z_1 && + F_1^*(x, z_1, \dots, z_n) \\ \frac{dz_2}{dx} &= \beta_1 z_1 + \lambda_1 z_2 && + F_2^*(x, z_1, \dots, z_n) \\ &\dots\dots\dots && \dots\dots\dots \\ \frac{dz_{n_1}}{dx} &= && \beta_1 z_{n_1-1} + \lambda_1 z_{n_1} + F_{n_1}^*(x, z_1, \dots, z_n) \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

Itt λ_1 a (136) egyenlet valamely gyöke, β_1 pedig egy zérustól különböző, egyébként tetszőleges szám.

Ha az F_i^* függvények kielégítik a (137) feltételt, akkor az F_i^* függvények kielégítik az

$$|F_i^*(x, z_1, \dots, z_n)| \leq M^* [|z_1|^{1+\alpha} + \dots + |z_n|^{1+\alpha}] \quad (139)$$

egyenlőtlenséget, ahol M^* bizonyos új konstánst jelöl. Ugyanis az $F_i^*(x, z)$ függvények az $F_i(x, y)$ függvények állandó együtthatós, lineáris kombinációi, tehát

$$|F_i^*(x, z)| \leq M_1 \sum_j |F_j(x, y)| \leq M_2 [|y_1|^{1+\alpha} + \dots + |y_n|^{1+\alpha}].$$

Abból, hogy az y_i és z_i változók egy lineáris, állandó együtthatós transzformációval függenek össze, következik, hogy

$$|y_i|^{1+\alpha} \leq M_3 (\max |z_j|)^{1+\alpha} \leq M_3 [|z_1|^{1+\alpha} + \dots + |z_n|^{1+\alpha}]$$

minden i -re. Itt az M_1, M_2, M_3 konstánsok, $\max |z_j|$ pedig a $|z_1|, \dots, |z_n|$ számok legnagyobbikát jelöli.

Mivel az a_{ij} koefфициensek valóságosak, az $\|a_{ij}\| - \lambda E$ mátrix minden $(\lambda - \lambda_1)^{n_1}$ elemi osztójához hozzátartozik a $(\lambda - \bar{\lambda}_1)^{n_1}$ elemi osztó is. Nyilván feltehetjük, hogy a kanonikus alakban a $(\lambda - \bar{\lambda}_1)^{n_1}$ elemi osztónak a

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{z}_1}{dx} &= \bar{\lambda}_1 \bar{z}_1 && + F_1^{**}(x, z_1, \dots, z_n) \\ \frac{d\bar{z}_2}{dx} &= \bar{\beta}_1 \bar{z}_1 + \bar{\lambda}_1 \bar{z}_2 && + F_2^{**}(x, z_1, \dots, z_n) \\ \frac{d\bar{z}_{n_1}}{dx} &= && \bar{\beta}_1 \bar{z}_{n_1-1} + \bar{\lambda}_1 \bar{z}_{n_1} + F_{n_1}^{**}(x, z_1, \dots, z_n) \end{aligned} \right\} \quad (140)$$

egyenletscsoport felel meg. Ha λ_1 valós, akkor e csoport nyilván azonos a (138) csoporttal.

A (138) és (140) egyenletekből $i > 1$ -re a

$$\begin{aligned} \frac{d|z_i|^2}{dx} &= \bar{z}_i \frac{dz_i}{dx} + z_i \frac{d\bar{z}_i}{dx} = \lambda_1 z_i \bar{z}_i + \bar{\lambda}_1 \bar{z}_i z_i + \beta_1 z_{i-1} \bar{z}_i + \\ &+ \bar{\beta}_1 \bar{z}_{i-1} z_i + \bar{z}_i F_i^* + z_i F_i^{**} \end{aligned} \quad (141)$$

egyenleteket kapjuk. $i = 1$ -re ugyanezt kapjuk, csak hogy akkor kiesnek a β és β számokat tartalmazó tagok. Legyen λ_1 valós része a_1 , akkor (141)-ből a (139) becslések felhasználásával

$$\frac{d|z_i|^2}{dx} \leq 2 a_1 |z_i|^2 + |\beta_1| [|z_i|^2 + |z_{i-1}|^2] + M_1^* [|z_1|^{1+\alpha} + \dots + |z_n|^{1+\alpha}] \cdot \max |z_j|, \quad (i = 2, \dots, n), \quad (141')$$

$$\frac{d|z_1|^2}{dx} \leq 2 a_1 |z_1|^2 + M_1^* [|z_1|^{1+\alpha} + \dots + |z_n|^{1+\alpha}] \cdot \max |z_j|. \quad (141'')$$

De

$$M_1^* [|z_1|^{1+\alpha} + \dots + |z_n|^{1+\alpha}] \cdot \max |z_j| \leq M_1^* n [\max |z_j|^2]^{1+\frac{\alpha}{2}} \leq M_1^* n [|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2]^{1+\frac{\alpha}{2}}.$$

Ezért a (141'') és (141') egyenlőtlenségeknek i szerint 1-től n -ig való összegezése, valamint az összes λ_i -k valós része legnagyobbikának (mely feltevésünk alapján negatív) — a -val való jelölése után

$$\frac{d}{dx} \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \leq -2 a \sum_{i=1}^n |z_i|^2 + 2 B \sum_{i=1}^n |z_i|^2 + M_1^* n^2 \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{1+\frac{\alpha}{2}} \quad (142)$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ahol B a $|\beta_i|$ számok legnagyobbika. Minthogy a β_i számokat zérustól különböztöknék, de egyébként tetszőlegeseknek vehetjük, azért választhatjuk őket úgy is, hogy

$$B < \frac{a}{4}.$$

Továbbá feltesszük, hogy az összes y_i változók, s következésképpen a z_i változók is abszolút értékben oly kicsinyek, hogy

$$\left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} < \frac{a}{2 M_1^* n^2}. \quad (143)$$

Ezeknek alapján

$$\frac{d}{dx} \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \leq -a \sum_{i=1}^n |z_i|^2.$$

Legyen most

$$\sum_{i=1}^n |z_i|^2 = e^{-a(x-x_0)} z,$$

akkor ebből következik, hogy

$$\frac{dz}{dx} \leq 0.$$

Innen láthatjuk, hogy z és ezért a $\sum_{i=1}^n |z_i|^2$ is csökken az x növekedésével. Ha tehát a (143) egyenlőtlenség $x = x_0$ -nál érvényben volt, akkor minden $x > x_0$ -ra is érvényben marad, ezért a z mindig csökken, a $\sum_{i=1}^n |z_i|^2$ pedig monoton csökkenően tart zérushoz.

Mint hogy az y_i és z_i között fennálló transzformáció nem szinguláris volt, következik, hogy

$$y_i(x) \rightarrow 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \text{míg } x \rightarrow \infty,$$

hacsak minden $|y_i(x_0)|$ eléggé kicsi volt. Továbbá mindegyik $|z_i(x_0)|$ tetszőlegesen kicsi lesz, ha $|y_i(x_0)|$ eléggé kicsiny volt, ámde akkor ez a $\sum_{i=1}^n |z_i^2(x_0)|$ -re is igaz.

Ezért a fentebb bizonyítottak alapján

$$\sum_{i=1}^n |z_i^2(x)| < \sum_{i=1}^n |z_i^2(x_0)| \quad (x > x_0)$$

S innen ugyancsak az y_i és z_i között fennálló transzformáció nem lineáris voltából következik az $y_i(x) \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) megoldás stabilitása.

M e g j e g y z é s. Ha a (135) rendszerre az áll fenn, hogy az $y_i(x) = y_i^0(x)$, $x \geq x_0$, ($i = 1, \dots, n$) görbe tetszőleges pontján csak egy megoldás megy át, akkor a stabilitás nem függ az x_0 megválasztásától. Más szóval, ha egy tetszőleges fix x_0 ($\geq x_0$)-nál megadjuk a kezdeti értékeket, úgy a (135) rendszer $y_i = y_i^0(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) megoldása akkor és csak akkor lesz stabilis, ha az az $x = x_0$ -nál megadott kezdeti értékeknél stabilis volt. Ez rögtön következik a megoldásnak a véges $x_0 \leq x \leq x_0$ intervallumban a kezdeti értékektől való folytonos függéséből (lásd a 20. és 30. §-t, különösen pedig a 20. § tételéhez fűzött megjegyzést).

F e l a d a t o k. 1. Igazoljuk, hogy ha az F_i függvényekre teljesülnek feltevéseink, de ha a (136) egyenlet egyetlen gyökének is van pozitív valós része, akkor a zérus megoldás nem stabilis. *Utaldás.* A rendszer kanonikus előállítás után a z_1, z_2, \dots, z_m függvényeknek feleljenek meg oly $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ számok, melyek pozitív valós része nagyobb, mint egy $\delta > 0$ szám; a többi z -nek feleljen meg nem pozitív valós részű λ . Akkor

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\sum_{i=1}^m |z_i|^2 - \sum_{i=m+1}^n |z_i|^2 \right] e^{-\frac{\delta}{2}x} &= \frac{d}{dx} \left[\sum_{i=1}^m z_i \bar{z}_i - \sum_{i=m+1}^n z_i \bar{z}_i \right] e^{-\frac{\delta}{2}x} > \\ &> \varepsilon \sum_{i=1}^n |z_i|^2 e^{-\frac{\delta}{2}x} \geq \varepsilon \left[\sum_{i=1}^m |z_i|^2 - \sum_{i=m+1}^n |z_i|^2 \right] e^{-\frac{\delta}{2}x}, \end{aligned}$$

ahol ε egy pozitív szám.

2. Szerkesszünk példát oly (135) rendszerre, melynek csak egy stabilis megoldása van, s melynek tetszőleges kezdeti értékeknél egy és csakis egy minden x -re korlátos megoldás van.

3. A (135) rendszer tetszőleges kezdeti értékekhez tartozó megoldása tartson aszimptotikusan az $y_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) megoldáshoz. Akkor az utóbbi megoldásnak nem kell stabilisnak lennie. (Mutassunk erre példát.) — Legyen ismeretes az, hogy az $y_i \equiv 0$ ($i = 1, \dots, n$) megoldás stabilis. Szükséges-e, hogy ekkor bármely eléggé közeli kezdeti értékekkel megadott megoldás is stabilis legyen? Válasszuk szét az $n = 1$ és $n > 1$ esetet!

4. Ha minden olyan megoldás, melyre

$$|y_i(x_0)| < M \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (*)$$

egyenletesen és aszimptotikusan tart az $y_i \equiv 0$ megoldáshoz, akkor minden olyan megoldás stabilis, mely a (*) egyenlőtlenséget teljesíti.

51. §. Egy fizikai példa

Mozogjon az $m > 0$ tömegű anyagi pont az x tengelyen. Jelöljük abszcisszáját x -szel. E pontra hasson a sebességgel arányos

$$-a \frac{dx}{dt}$$

közegellenállási erő, valamint a

$$-bx$$

erő, mely a pontot az origó felé húzza. a és b oly konstánsok, hogy $a \geq 0$, $b > 0$. Az ilyen mozgást fizikailag oly anyagi pont közegben — mondjuk folyadékban vagy gázban — való mozgásának képzelhetjük, melyre egy rúgó ruga massági ereje a Hooke-féle törvény szerint hat. E törvény azt mondja ki, hogy a rugalmassági erő a pont egyensúlyi helyzete felé hat, s hogy nagysága arányos az egyensúlyi helyzettől való kitéréssel. Tegyük fel még azt, hogy anyagi pontunkra hat az x tengely irányában még egy periodikus erő is, mely minden t pillanatban

$$A \cos \omega t$$

nagyságú, ahol A és ω valós konstánsok ($\omega > 0$). Akkor e mozgás differenciál-egyenlete

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = A \cos \omega t. \quad (144)$$

Vizsgáljuk először az $A = 0$ esetet. Akkor mozgó pontunkra egyáltalán nem hat külső erő. A pontnak e mozgását *saját rezgésnek* nevezzük. Az

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = 0 \quad (145)$$

homogén egyenlet általános megoldását ekkor — feltéve, hogy $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — az

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (146)$$

képlet szolgáltatja, ahol λ_1 és λ_2 az

$$m \lambda^2 + a \lambda + b = 0 \quad (147)$$

egyenlet két gyöke, azaz

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2m} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4m} - \frac{b}{m}}.$$

Ha $a > 0$, akkor λ_1 és λ_2 valós részei negatívak. Ekkor a (145) egyenlet minden megoldása zéróhoz tart, míg $t \rightarrow +\infty$. Ugyanígy a (145) egyenletnek megfelelő

$$\frac{dx}{dt} = x_1, \quad m \frac{dx_1}{dt} = -ax_1 - bx \quad (148)$$

rendszer minden $[x(t), x_1(t)]$ megoldása is tart e rendszer $x(t) \equiv 0, x_1(t) \equiv 0$ megoldásához, míg $t \rightarrow +\infty$. Könnyen beláthatjuk azt is, hogy e rendszer $x(t) \equiv 0, x_1(t) \equiv 0$ megoldása stabilis, míg $t \rightarrow +\infty$.

Ha $a = 0$, akkor a (145) egyenlet összes valós megoldásait az

$$x(t) = C_1 \sin \sqrt{\frac{b}{m}} t + C_2 \cos \sqrt{\frac{b}{m}} t = C \sin \left(\sqrt{\frac{b}{m}} t + v \right)$$

képlet adja meg, ahol

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad C_1 = C \cos v, \quad C_2 = C \sin v.$$

Innen

$$x_1(t) = \frac{dx}{dt} = C \sqrt{\frac{b}{m}} \cos \left(\sqrt{\frac{b}{m}} t + v \right).$$

Tehát az $[x(t), x_1(t)]$ pont az (x, x_1) sík olyan ellipszise mentén mozog, melynél a főtengelyek iránya a koordináta-tengelyekkel egybeesik, s melynél a féltengely-hosszak aránya állandó és $\sqrt{\frac{b}{m}}$. Az origó ekkor a (148) rendszer középpontja.

Az $x(t)$ pont az x tengelyen a $\sqrt{\frac{m}{b}} 2\pi$ periódussal rezeg, s ez a periódus a (145) rendszer minden megoldására ugyanaz.

Vizsgáljuk meg közelebbről a mozgást, ha $a > 0$. Itt a következő esetek lehetségesek:

1. eset: $a^2 > 4bm$. Ekkor a (147) karakterisztikus egyenlet mindkét gyöke valós és negatív. Az origó pedig a (148) rendszer csomópontja lesz (lásd a 23. § 14. és 15. ábráját.) A valós C_1 és C_2 konstánsok mellett a (146) formula által megadott $x(t)$ függvény és annak deriváltja is legfeljebb egy t értéknél válik zérussá. Tehát az $x(t)$ függvénynek legfeljebb egy maximuma vagy minimuma lehet.

2. eset: $a^2 = 4bm$. Ekkor a (145) egyenlet általános megoldását az

$$x = e^{-\frac{at}{2m}} (C_1 + C_2 t)$$

képlet adja meg. Az $x(t)$ és $x_1(t)$ függvények legfeljebb egy t értéknél válhatnak zérussá. A valós (x_1, x_2) sík origója a (148) rendszernek csomópontja (lásd a 17. ábrát!)

3. eset: $a^2 < 4bm$. Akkor a (147) egyenlet gyökeinek képzetes része nem nulla. Legyen

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\beta, \quad \beta > 0, \quad \alpha > 0.$$

Akkor az (x_1, x_2) valós sík origója a (148) rendszernek fókusza. A (145) egyenlet valós megoldásait pedig az

$$x = e^{-\alpha t} (C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t) = C e^{-\alpha t} \sin(\beta t + v)$$

képlet adja meg. Ekkor a pont az x tengely mentén oly rezgést végez, melynek állandó $\frac{2\pi}{\beta}$ periódusa a (145) rendszer minden megoldására ugyanaz, amplitúdója pedig a $C e^{-\alpha t}$ csökkenő mennyiség.

Vegyük most azt az esetet, amikor a (144) egyenletben $A \neq 0$. Kényelmesebb, ha a (144) egyenlet helyett az

$$m \frac{d^2z}{dt^2} + a \frac{dz}{dt} + bz = A e^{i\omega t} \quad (149)$$

egyenletet vizsgáljuk. Ezen egyenlet minden megoldásának valós része kielégíti a (144) egyenletet, és viszont a (144) egyenlet minden megoldása a (149) egyenlet valamely megoldásának valós része (miért?)

Ha a (147) egyenlet mindkét gyöke különbözik $i\omega$ -tól és $\lambda_1 \neq \lambda_2$, akkor a (149) egyenlet általános megoldását a

$$z = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{A e^{i\omega t}}{m(i\omega)^2 + a(i\omega) + b}$$

képlet adja meg, továbbá ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, akkor a

$$z = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} + \frac{A e^{i\omega t}}{m(i\omega)^2 + a(i\omega) + b}$$

A képletekben az első két tag a (145) homogén egyenlet általános megoldása. Ez minden $t > t_0$ -ra korlátos. Az utolsó tag a (149) egyenlet partikuláris megoldása, melyet a 48. § végén közölt szabállyal állapíthatunk meg. Ha $a > 0$, akkor a képletekben az első két összeadandó zérushoz tart, míg $t \rightarrow +\infty$, tehát a (149) egyenlet megoldása ezalatt az

$$\frac{A e^{i\omega t}}{m(i\omega)^2 + a(i\omega) + b}$$

felé tart. Rögzített A mellett a függvény modulusa annál nagyobb lesz, minél kisebb az $m(i\omega)^2 + a(i\omega) + b$ modulusa.

Ha $m(i\omega)^2 + a(i\omega) + b = 0$, ami csak $a = 0$ -nál következhet be — akkor a (149) egyenlet általános megoldása

$$z = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} + \frac{A t e^{i\omega t}}{2m(i\omega) + a}$$

Ezen összeg első két tagja a (149) egyenlet homogén alakjának általános megoldása, mely mindig korlátos marad: a harmadik tag pedig a (149) egyenletnek — a 48. § alapján tehát — partikuláris megoldása, melynek modulusa végtelenné válik, míg $t \rightarrow +\infty$. A (144) egyenlet megoldását szolgáltatató $x(t)$ függvény ez esetben is rezgést ír le, melynek amplitudója azonban végtelen nagygyá válik. A fizikában e jelenséget az anyagi pont saját rezgése és a külső erő közötti *rezonanciának* nevezik.

A fentiekből láthatjuk, hogy ez akkor lép fel, amikor az anyagi pont saját rezgése és a külső erő periódusa megegyezik. A fizikai valóságban a rezonancia fellépése az anyagi pont kilengéseit gyakran oly nagygyá teheti, hogy adott pillanatban a rendszer széttörik. Ezért igen fontos előre látnunk a rezonancia fellépésének lehetőségét.

F e l a d a t. Vizsgáljuk meg közelebbről az $a < 0$ esetet — azaz a negatív súrlódással végbemenő rezgéseket, melyek a fizikában sokszor fellépnek akkor, ha a rendszer kívülről energiát vesz fel.

AZ ELSŐRENDŰ, PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Ezeknek az egyenleteknek elméletében alapvető tény az, hogy megoldásuk visszavezethető közönséges differenciálegyenletrendszer integrálásának feladatára. Az alábbi paragrafusokban azt tárgyaljuk, hogyan történik e visszavezetés.

52. §. Majdnem lineáris egyenletek

E paragrafusban a lineárisaknál általánosabb egyenleteket vizsgálunk, nevezetesen

$$\sum_{k=1}^n a_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_k} + b(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0 \quad (150)$$

alakúakat. Megengedjük azt is, hogy u az ismeretlen függvény $b(x_1, \dots, x_n, u)$ -ban ne lineárisan forduljon elő. Az $a_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ együtthatók legyenek az (x_1, x_2, \dots, x_n) tér valamely G tartományában minden argumentumuk szerint első rendben folytonosan deriválhatók, s legyen e tartományban

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 > 0.$$

A $b(x_1, \dots, x_n, u)$ -ról feltesszük, hogy értelmezve van, ha $|u| < M$, és az (x_1, \dots, x_n) pont a G tartományban van, s hogy ott minden argumentuma szerint első rendben folytonosan differenciálható. Speciálisan, a $b(x_1, \dots, x_n, u)$ -ra vonatkozó feltételeink teljesülnek akkor, ha a $b(x_1, \dots, x_n, u)$ az u -nak oly együtthatókkal kifejezett, lineáris függvénye, melyek az összes x_k -k szerint első rendben folytonosan deriválhatók; ebben az esetben a (150) egyenletet *lineárisnak* nevezzük.

Írjuk fel a

$$\frac{dx_k}{ds} = \frac{a_k(x_1, \dots, x_n)}{\sqrt{\sum_{m=1}^n a_m^2(x_1, \dots, x_n)}}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (151)$$

közönséges differenciálegyenletrendszert.

Az a_k -ra vonatkozó feltételeink értelmében ezeknek az egyenleteknek jobboldalai mindegyik x_k szerint folytonosan deriválhatók. Ezért G tartomány minden pontján e rendszernek egy és csak egy integrálgörbéje megy át (s egy paraméter). E görbékét a (150) egyenlet *karakterisztikáinak* nevezzük.

Unicitástétel. *Ha az $u(x_1, \dots, x_n)$ függvény a G tartományban kielégíti a (150) egyenletet, és folytonos elsőrendű deriváltakkal rendelkezik, akkor bármely H karakterisztika oly részére, melyre $|u| < M$, az összes értékeit meghatározhatjuk a rész egyetlen (x_1^0, \dots, x_n^0) pontjában felvett értéke által.*

Bizonyítás. Osszuk el a (150) egyenlet mindkét oldalát a $\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$ kifejezéssel. Akkor a (151) egyenletek tekintetbe vételével azt kapjuk, hogy

$$\sum_k \frac{a_k}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} \frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{b}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} = \sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{dx_k}{ds} + \frac{b}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} = \frac{du}{ds} + \frac{b}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} = 0. \quad (152')$$

A $\sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{dx_k}{ds}$ pótlása $\frac{du}{ds}$ -sel azért lehetséges, mert feltettük az u első deriváltjainak folytonosságát ¹⁾. A H karakterisztika menjen át a G tartomány valamely (x_1^0, \dots, x_n^0) pontján, s legyen $|u(x_1^0, \dots, x_n^0)| < M$. E karakterisztika mentén legyen

$$x_k = \varphi_k(s, x_1^0, \dots, x_n^0), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

ahol φ_k összes első deriváltjaival együtt az s és minden x_i^0 folytonos függvénye. x_k e kifejezéseit a $\frac{b}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$ -be helyettesítve azt kapjuk, hogy az u függvény a H mentén kielégíti a

$$\frac{du}{ds} = \psi(s, u, x_1^0, \dots, x_n^0) \quad (152)$$

közönséges differenciálegyenletet, ahol a ψ minden argumentuma szerint folytonos első deriváltakkal rendelkezik. Ezért az u függvény értékeit a H oly részének minden pontjában, ahol $|u| < M$, meghatározhatjuk e rész egyetlen pontjában — speciálisan az (x_1^0, \dots, x_n^0) pontban — felvett értéke által.

Existenciátétel. *Tegyük fel, hogy az S oly a G tartományban fekvő $(n-1)$ dimenziós felület, mely folytonosan változó érintősikkal rendelkezik. Továbbá tegyük fel, hogy az S a (150) rendszer egyetlen karakterisztikáját sem érinti.*

Adjunk meg az S felületen egy tetszőleges f függvényt, mely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. Értékei abszolút értékben kisebbek M -nél.
2. Az S felület minden pontjának van olyan környezete, melyben az f függvényt az x_1, \dots, x_n koordináták közül $(n-1)$ számúnak oly függvényképen állíthatjuk elő, mely ezen $(n-1)$ koordináta szerint első rendben folytonosan deriválható. Akkor azt állítjuk, hogy az S felületnek van oly R_0 környezete, ahol létezik a következő tulajdonságú $u(x_1, \dots, x_n)$ függvény:

- 1) mindegyik x_k szerint folytonos első deriváltja van,
- 2) eleget tesz a (150) egyenletnek,
- 3) S -en az f értékeit veszi fel.

Az e feltételeket kielégítő $u(x_1, \dots, x_n)$ függvény keresését a (150) egyenletre vonatkozó *Cauchy-féle feladatnak* nevezzük.

A (150) egyenletre vonatkozó Cauchy-féle feladat megoldásának existenciabizonyítása. Határozzuk meg, az u függvényt az S -et átmetsző minden H karakterisztika mentén úgy, hogy azon kielégítse a (152) egyenletet és hogy a karakterisztika és az S felület metszéspontjában az f függvény ott megadott értékét vegye fel. Általában az u függvényt ilymódon nem határozhatjuk meg az egész H karakterisztika mentén,

¹⁾ Lásd Г. М. Фихтенгольц: Курс диф. и инт. исчисления. Гостехиздат, 1947 I к. 462 о.

mert előfordulhat az, hogy az u a H mentén kilép azon értékkészletéből, mely a $b(x_1, \dots, x_n, u)$ értelmezési tartományába esik; vagy az, hogy még egyszer átmetszi az S -et, azonban e feltételeket mindig kielégíthetjük a H karakterisztika S -et környező bizonyos részén. Könnyen beláthatjuk, hogy az u függvényt így meghatározhatjuk az S felület bizonyos R_0 környezetében az S felületen felvett értékeiből. Ezután már csak azt kell bebizonyítanunk, hogy az így szerkesztett $u(x_1, \dots, x_n)$ függvény valóban mindegyik x_k szerint elsőrendű deriválttal rendelkezik; akkor ugyanis az R_0 -ban fennáll

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{dx_k}{ds} = \frac{du}{ds}$$

vonatkozás, s ezért az u nemcsak a (152) illetve az ezzel ekvivalens (152') egyenletet elégíti ki, hanem a (150) egyenletet is.

Mielőtt még bebizonyítanánk azt, hogy az u x_1, \dots, x_n szerinti parciális deriváltjai az R_0 tartomány valamely $A^*(x_1^*, \dots, x_n^*)$ pontjában léteznek és folytonosak, vezessünk be e tartományban görbevonalú koordinátákat az alábbi módon. Jelölje H^* az A^* ponton átmenő karakterisztika R_0 -ban fekvő részét.

Messe e karakterisztika S -et az $A_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ pontban. Tegyük fel, hogy az S felületnek az A_0 pontjához tartozó érintősíkja nem párhuzamos az $-Ox_n$ tengellyel (alábbi megfontolásaink akkor is érvényben maradnak, ha itt az Ox_n tengely helyett bármely más koordinátatengelyt választjuk ki). Akkor az S felületnek az A_0 pont közelébe eső darabját az

$$x_n = F(x_1, \dots, x_{n-1})$$

egyenlettel jellemezhetjük, ahol az F összes argumentumai szerint folytonosan deriválható. Másrészt, mivel a $\varphi_k(s, x_1^0, \dots, x_n^0)$, $k = 1, \dots, n$ függvények az s szerint (az S felületen legyen $s = 0$) és az x_1, \dots, x_n^0 szerint (30. §) folytonosan deriválhatók, azért a

$$\varphi_k[s, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, F(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)] \equiv \psi_k(s, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0) \quad k = 1, \dots, n$$

függvények folytonosan deriválhatók az s és x_1^0, \dots, x_{n-1}^0 szerint. Válasszuk $s, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0$ -t új koordinátáknak. Kimutatjuk, hogy az $x_k = \psi_k(s, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$ függvényrendszer Jacobi-féle determinánsa zérustól különböző. Evégből megjegyezzük, hogy ezek a függvények kielégítik a (151) közöséges differenciálegyenletrendszeret. A rövideg kedvéért ezeket az egyenleteket a

$$\frac{dx_k}{ds} = \Phi_k(x_1, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

alakban írjuk. Helyettesítsük be ide az x_k helyébe a ψ_k függvényeket. Akkor az $s, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0$ -ra nézve a

$$\frac{d\psi_k(s, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)}{ds} \equiv \Phi_k[\psi_1(s, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0), \dots, \psi_n(s, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)], \quad (153)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

azonosságokat nyerjük. Mivel a ψ_k és Φ_k függvények parciálisan folytonosan deriválhatók mindegyik argumentumuk szerint, azért ezeknek az azonosságoknak jobboldalai folytonosan deriválhatók az $s, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0$ szerint. Ez azt jelenti, hogy a baloldal is folytonosan deriválható ezen argumentumok szerint. Ezért a (153) egyenletek mindkét oldalának az $s, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0$ szerinti deriválásával

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial \psi_k}{\partial s} \right] = \sum_{r=1}^n \frac{\partial \Phi_k}{\partial \psi_r} \frac{\partial \psi_r}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial \psi_k}{\partial x_p^0} \right] = \sum_{r=1}^n \frac{\partial \Phi_k}{\partial \psi_r} \frac{\partial \psi_r}{\partial x_p^0}, \quad p = 1, 2, \dots, n-1$$

egyenleteket kapjuk.¹⁾

Ezek azt mutatják, hogy $\frac{\partial \psi_k}{\partial s}$ és $\frac{\partial \psi_k}{\partial x_p^0}$ a

$$\frac{dy_k}{ds} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial \Phi_k}{\partial \psi_r} y_r, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

ugyanazt a homogén, lineáris differenciálegyenletrendszerrel elégítik ki. Ezért ahhoz, hogy a függvények Jacobi-féle determinánsa az egész H^* -on különböző legyen zérustól szükséges és elegendő, hogy az az S felület és e karakterisztika A_0 metszéspontjában különbözzék zérustól.

De ebben a pontban

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1^0}, \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2^0}, \dots, \frac{\partial \psi_1}{\partial x_{n-1}^0}, \frac{\partial \psi_1}{\partial s} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1^0}, \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2^0}, \dots, \frac{\partial \psi_2}{\partial x_{n-1}^0}, \frac{\partial \psi_2}{\partial s} \\ \dots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1^0}, \frac{\partial \psi_n}{\partial x_2^0}, \dots, \frac{\partial \psi_n}{\partial x_{n-1}^0}, \frac{\partial \psi_n}{\partial s} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1, 0, \dots, 0, \frac{\partial \psi_1}{\partial s} \\ 0, 1, \dots, 0, \frac{\partial \psi_2}{\partial s} \\ \dots \\ \frac{\partial F}{\partial x_1^0}, \frac{\partial F}{\partial x_2^0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}^0}, \frac{\partial \psi_n}{\partial s} \end{vmatrix} = -\frac{\partial F}{\partial x_1^0} \frac{\partial \psi_1}{\partial s} - \dots - \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}^0} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial s} + \frac{\partial \psi_n}{\partial s}.$$

Utóbbi kifejezés arányos az S felületnek az A_0 pontjához tartozó normálisa és a H^* karakterisztikának az A_0 pontjához húzott érintője által bezárt szög cosinusával. E cosinus feltételünk alapján különbözik zérustól. Ez azt jelenti, hogy a Jacobi-féle determináns az egész H^* mentén különbözik zérustól.

Így az implicit függvényről szóló tétel alapján azt látjuk, hogy az

$$x_k = \psi_k(s, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0), \quad k = 1, \dots, n$$

egyenletrendszerrel az R_0 tartományban egyértelműen megoldhatjuk $s, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0$ -ra nézve. Mint hogy a ψ_k függvények mindegyik argumentumuk szerint folytonosan deriválhatók, azért az $s, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0$ mennyiségek is foly-

¹⁾ Itt az analíziskurzusokból jól ismert következő tételt alkalmazzuk: ha adva van (x, y) sik G tartományában egy f függvény, mely folytonos f'_x, f'_y, f''_{xy} deriváltakkal rendelkezik, akkor f''_{yx} G -ben mindenütt létezik és egyenlő f''_{xy} -nal.

tonosan deriválhatók az x_1, \dots, x_n argumentumok szerint. Ezért annak bizonyítására, hogy az R_0 -ban megszerkesztett u függvény mindegyik x_k argumentum szerint folytonosan deriválható az R_0 -ban, elegendő azt igazolnunk, hogy ha u -t e tartományban $s, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0$ függvényének tekintjük, akkor folytonosan differenciálható lesz az $s, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0$ argumentumok szerint. E célból megjegyezzük a következőket.

A (152) egyenlet jobboldalán x_n^0 helyébe az $F(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$ függvényt helyettesítve azt kapjuk, hogy az u függvény eleget tesz egy

$$\frac{du}{ds} = \Psi(s, u, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$$

egyenletnek, ahol a Ψ függvény mindegyik argumentuma szerint folytonosan deriválható. Ezen kívül feltételeink szerint az u függvény kezdeti értékei $s = 0$ -nál (azaz az S felületen) folytonosan deriválhatók az x_1^0, \dots, x_{n-1}^0 argumentumok szerint. Tehát a 22. § tételének alkalmazásával azt kapjuk, hogy az általunk szerkesztett u függvény az R_0 tartományban valóban folytonos deriváltakkal rendelkezik az $s, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0$ argumentumok szerint.

Megjegyzés. Ha nem tesszük fel, hogy a (150) egyenlet baloldalában előforduló a_k és b függvények folytonosan deriválhatók, akkor ennek az egyenletnek egyetlen oly megoldása sem lehet, mely csupa folytonos parciális deriválttal rendelkezik. Erre példa a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = b(x - y) \quad (154)$$

egyenlet, ahol $b(z)$ oly, folytonos, Weierstrass-féle függvény, mely a z szerint sehohsem deriválható (N. M. Gjunter). Ahhoz, hogy állításunkat igazoljuk, vezessük be x és y helyett a t és z új független változókat, az $x + y = t$, $x - y = z$ helyettesítésekkel.

Tegyük fel, hogy az (x, y) sík bizonyos tartományában létezik a (154) egyenletnek oly $u(x, y)$ megoldása¹⁾, mely az x és y szerint folytonosan deriválható. Akkor u -nak az x és y szerinti deriváltjait u -nak a t és z szerinti deriváltjaival kifejezve ezt kapjuk:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} b(z).$$

Ennek az egyenletnek összes megoldásait az

$$u(t, z) = \frac{1}{2} b(z)t + c(z) \quad (155)$$

képlet adja meg, ahol $c(z)$ a z tetszőleges függvénye. Azaz

$$u(x + y, x - y) = u^*(x, y) = \frac{1}{2} (x + y) \cdot b(x - y) + c(x - y).$$

¹⁾ A (154) egyenlet megoldásának tekintjük azon $u(x, y)$ függvényt, melynek x és y szerinti deriváltjai az illető tartományban eleget tesznek ennek az egyenletnek.

Azonban könnyen beláthatjuk azt, hogy az (x, y) síkban nincsen olyan tartomány, ahol az így megadott u^* függvény x és y szerinti deriváltakkal rendelkezne. Ugyanis, ha e deriváltak léteznének az (x, y) és $(x + \varepsilon, y + \varepsilon)$ pontokban, akkor az

$$u^*(x + \varepsilon, y + \varepsilon) - u^*(x, y) = \varepsilon b(x - y)$$

függvénynek is léteznének a szóbanforgó deriváltjai az (x, y) pontban, ami pedig lehetetlen. Ez azt jelenti, hogy az $u^*(x, y)$ függvény nem elégítheti ki a (154) egyenletet, azaz eredeti feltételünk nem lehet igaz.

Kimutatható,¹⁾ hogy ha a (154) egyenletnek csak folytonos és x és y szerinti deriválható megoldása lenne, az is (155) alakú lenne. Ebből ismét ellenmondáshoz jutunk, s így következik, hogy a (154) egyenletnek semilyen tartományban nincsen folytonos és x és y szerint deriválható megoldása.

F e l a d a t o k. 1. Ha a kezdeti értékeket megadjuk a karakterisztikán, akkor a (150) egyenletnek vagy egyetlen megoldása sincs, vagy végtelen sok van. Mikor következik be az első, s mikor a második eset?

2. Igazoljuk, hogy ha $n = 2$, s a tartomány egyszerűen összefüggő, akkor a megoldás folytatható bármely egészen a G belsejében fekvő, zárt \bar{G} tartományra. Ha a tartomány nem egyszerűen összefüggő, akkor ez nem mindig lehetséges (adjunk erre példát). Megjegyezzük, hogy ha $n > 2$, akkor ez még egyszerűen összefüggő tartományra sem mindig lehetséges.

53. §. A közönséges differenciálegyenletrendszer első integráljai

A fentiekből következik, hogy a (151) közönséges differenciálegyenletekből

$$\frac{du}{ds} + \frac{b}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} = 0$$

egyenletből álló rendszer az (x_1, \dots, x_n, u) térben oly integrálgörbék seregét határozza meg, melynek görbéi a (150) egyenlet

$$u = u(x_1, \dots, x_n)$$

integrálfelületeit alkotják (s paraméter). Írjuk fel e közönséges differenciálegyenleteket a

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{-b} \quad (156)$$

szimmetrikus formában.

Sok esetben könnyű találunk oly nem azonosan konstáns

$$q(x_1, \dots, x_n, u)$$

függvényeket, melyek a (156) rendszer minden integrálgörbéje mentén állandó értéket vesznek fel. Az ilyen függvényeket nevezzük e rendszer *első integráljainak*.

¹⁾ Baire: Sur les fonctions de variables réelles, *Annali di mathematica* (3), t. 3, 1899, 101–121. old.

Tegyük fel, hogy valahogyan megtaláltuk a (156) rendszer n számú

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_n, u), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

első integrálját, s hogy a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}, \frac{\partial \varphi_n}{\partial u} \end{vmatrix}$$

mátrixnak az (x_1, \dots, x_n, u) tér egy G_u tartományának bármely pontjában legalább egy n -edrendű minora nem nulla. Akkor a

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_n, u) = \varphi_k(x_1^0, \dots, x_n^0, u^0), \quad k = 1, \dots, n \quad (157)$$

egyenletrendszer a G_u tartományban valamilyen L görbét határoz meg, mert az e tartomány minden pontjában előállítja valamely n koordinátát, mint az $(n+1)$ -edik koordináta függvényét. Általában a görbe állhat több darabból, hasonlóan ahhoz, ahogyan a 9. §-ban volt (lásd a 6. ábrát). Ezért feltesszük, hogy a szóbanforgó G_u tartományban a (157) görbék mindegyike csak egy darabból áll. Az első integrál definíciója szerint a $\varphi_k(x_1, \dots, x_n, u)$ függvények mindegyike a $\varphi_k(x_1^0, \dots, x_n^0, u^0)$ állandó értéket veszi fel a (156) rendszer $(x_1^0, \dots, x_n^0, u^0)$ ponton átmenő integrálgörbéje mentén. Ezért ez az integrálgörbe a G_u tartományban teljesen egybeesik a (157) görbével. Ebből rögtön következik, hogy a

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_n, u) = C_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (158)$$

egyenletrendszer a (156) rendszernek a G_u tartományra vonatkozó általános integrálját adja meg, mivel belőle a (156) rendszernek a G_u tartomány bármely $(x_1^0, \dots, x_n^0, u^0)$ pontján átmenő megoldását megkaphatjuk, ha C_k konstánsnak a $\varphi_k(x_1^0, \dots, x_n^0, u^0)$ értéket választjuk: azaz így megkaphatjuk a (156) rendszer tetszőleges integrálgörbéjét.

Tűzzük most ki feladatunknak azt, hogy az x_1, \dots, x_n, u koordinátákkal rendelkező $n+1$ dimenziós térben a (150) egyenletnek azt az n -dimenzió integrálfelületét keressük, mely az

$$x_k = \psi_k(v_1, \dots, v_{n-1}), \quad k = 1, \dots, n \quad (159)$$

$$u = \psi(v_1, \dots, v_{n-1})$$

$(n-1)$ dimenziós felületen megy át.

Feltesszük, hogy

1) az összes ψ_k függvény és a ψ mindegyik v szerint folytonos parciális deriválttal rendelkezik,

2) a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial \psi_1}{\partial v_{n-1}}, a_1(\psi_1, \dots, \psi_n) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial \psi_2}{\partial v_{n-1}}, a_2(\psi_1, \dots, \psi_n) \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial \psi_n}{\partial v_{n-1}}, a_n(\psi_1, \dots, \psi_n) \end{vmatrix}$$

determináns mindig különbözik zérustól. Geometriailag ez utóbbi annak feltétele, hogy az (x_1, \dots, x_n) térben fekvő

$$x_k = \psi_k(v_1, \dots, v_{n-1}), \quad k = 1, \dots, n$$

felület a (150) egyenlet karakterisztikáit sehol sem érintse.

Akkor jelen paragrafusunk alaptétele szerint a (159) felület bizonyos környezetében a (150) egyenletnek egy és csak egy oly integrálfelülete létezik, mely átmegy a (159) $(n - 1)$ dimenziós felületen. Minthogy az előzőek alapján ez az integrálfelület a (156) rendszernek a (159) felület pontjain átmenő integrálgörbéiből áll, azért a keresett integrálfelület paraméteres egyenletét úgy kaphatjuk meg, hogy a (157) egyenletek jobboldalán álló x_1^0, \dots, x_n^0, u^0 helyébe rendre behelyettesítjük a $\psi_1(v_1, \dots, v_{n-1}), \dots, \psi_n(v_1, \dots, v_{n-1}), \psi(v_1, \dots, v_{n-1})$ függvényeket, akkor ezt kapjuk:

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_n, u) = \varphi_k(\psi_1, \dots, \psi_n, \psi) = \Phi_k(v_1, \dots, v_{n-1}), \quad k = 1, \dots, n.$$

A φ_i függvények mátrixáról tett feltételek alapján ezek az egyenletek G_u -ban bizonyos n változók szerint, pl. x_1, \dots, x_n szerint megoldhatók. Ha a szimmetria kedvéért a $v_n = u$ jelölést vezetjük be, akkor az

$$x_i = g_i(v_1, \dots, v_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$u = g(v_n)$$

megoldások egyszersmind a keresett integrálfelület paraméteres előállítását adják

Megjegyzés. A G_n tartományban a (156) rendszernek minden $\varphi(x_1, \dots, x_n, u)$ első integrálja a $\varphi_k(x_1, \dots, x_n, u)$, $k = 1, \dots, n$ függvénye. Ugyanis a $\varphi(x_1, \dots, x_n, u)$ első integrál definíciója értelmében állandó értéket kell, hogy felvegyen e rendszer minden integrálvonalára mentén. A fentebb mondottak szerint pedig minden ilyen vonalat teljesen meghatároznak a $\varphi_k(x_1, \dots, x_n, u)$, $k = 1, \dots, n$ függvények rajta felvett értékei.

Példa. Keressük meg a

$$2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + 3 \frac{\partial u}{\partial x_2} + 5 = 0 \quad (150')$$

egyenlet azon integrálfelületét, mely átmegy az

$$x_1 = a_1 v, \quad x_2 = a_2 v, \quad u = a_3 v$$

vonalon, ahol a_1, a_2, a_3 konstánsokat úgy választjuk meg, hogy

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2 \\ a_2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (160)$$

A (156) rendszer most

$$\frac{dx_1}{2} = \frac{dx_2}{3} = \frac{du}{-5} \quad (156')$$

alakú. A

$$\frac{dx_1}{2} = \frac{dx_2}{3}$$

és

$$\frac{dx_1}{2} = \frac{du}{-5}$$

egyenletek integrálásával a (156') rendszer

$$\varphi_1 \equiv 3x_1 - 2x_2, \quad \varphi_2 \equiv 5x_1 + 2u$$

első integráljait kapjuk. Minthogy

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

azért a (156') rendszer általános integrálját a

$$3x_1 - 2x_2 = C_1, \quad 5x_1 + 2u = C_2 \quad (158')$$

egyenletek adják az egész (x_1, x_2, u) térben. A (158') rendszer tetszőleges C_1 és C_2 konstánsok mellett egyetlen darabból álló görbéket határoz meg. Ezért a (150') egyenlet általunk keresett integrálfelületének egyenletét így írhatjuk:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 3a_1 v - 2a_2 v \\ 5x_1 + 2u &= 5a_1 v + 2a_3 v. \end{aligned}$$

Ezekből az egyenletekből kiküszöbölhetjük a v -t. Evégből elegendő megoldanunk az első egyenletet v szerint, mely a (160) feltétel miatt lehetséges, s v -nek így nyert értékét behelyettesítenünk a második egyenletbe.

Feladat. Igazoljuk, hogy k számú egymással függvénykapcsolatban nem álló első integrál ismerete általában lehetővé teszi azt, hogy a (80) rendszer ismeretlen függvényeinek számát k -ra redukáljuk.

54. §. Kvázilineáris egyenletek

Kvázilineárisnak mondjuk a

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x_1, \dots, x_n, u) = 0 \quad (161)$$

alakú egyenleteket. Ezen egyenletek az u parciális deriváltjaira nézve lineárisak, magára az u függvényre nézve azonban nem. Feltesszük, hogy $a_i(x_1, \dots, x_n, u)$ és $b(x_1, \dots, x_n, u)$ az (x_1, \dots, x_n, u) tér valamely tartományában mindegyik argumentumuk szerint folytonosan deriválhatók, s hogy

$$\sum_{i=1}^n a_i^2(x_1, \dots, x_n, u) > 0.$$

Tegyük fel, hogy ismerjük ennek az egyenletnek olyan $u(x_1, \dots, x_n)$ megoldását, mely folytonos első parciális deriváltakkal rendelkezik. Állítsuk fel a

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{a_i(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n))}{\sqrt{\sum_j a_j^2(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n))}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (162)$$

közönséges differenciálegyenletrendszer, ahol s egy paraméter. Helyettesítsük be az $u(x_1, \dots, x_n)$ megoldást a (161) egyenletbe, s osszuk végig az így nyert azonosságot mindkét oldalát a

$$\sqrt{\sum_j a_j^2(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n))}$$

kifejezéssel.

Akkor a

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i(x_1, \dots, x_n, u)}{\sqrt{\sum_j a_j^2(x_1, \dots, x_n, u)}} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{b(x_1, \dots, x_n, u)}{\sqrt{\sum_j a_j^2(x_1, \dots, x_n, u)}} = \sum \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} + \frac{b(x_1, \dots, x_n, u)}{\sqrt{\sum_j a_j^2(x_1, \dots, x_n, u)}} = \frac{du}{ds} + \frac{b(x_1, \dots, x_n, u)}{\sqrt{\sum_j a_j^2(x_1, \dots, x_n, u)}} = 0$$

egyenletet kapjuk.

A $\sum_i \frac{a_i}{\sqrt{\sum_j a_j^2}} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}$ abban az esetben is előállítható tehát u valamely irányba való deriváltjaképen, ha a_i függ az u -tól — csakhogy most maga ez az irány nemcsak x_1, \dots, x_n -től függ, hanem az u -tól is.

A (161) egyenletre vonatkozó Cauchy-féle feladatot ugyanúgy fogalmazhatjuk meg, mint a (150) egyenletre vonatkozót: *keressük meg a (161) egyenletnek azon megoldását, mely az (x_1, \dots, x_n) tér $(n-1)$ dimenziós S felületén megadott értékeket vesz fel.* Ez kissé általánosabb fogalmazásban így szól: *fektessük át az (x_1, \dots, x_n, u) tér $(n-1)$ dimenziós S^* felületén a (161) egyenlet valamely n dimenziós T integrálfelületét.¹⁾*

Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy a szóbanforgó megoldás az egyetlen az S^* felület eléggé kis közelségében, ha csak feltesszük, hogy az S^* -nak nincs oly érintő egyenese, melynek vetülete az $u = 0$ síkon a (162) egyenletek által meghatározott iránycosinusokkal rendelkezne (ezen egyenletek jobboldalainak értékét az S^* felületen úgy kapjuk meg, hogy behelyettesítjük az érintési pont koordinátáit). Evégből megmutatjuk azt az eljárást, mely a Cauchy-féle feladat megoldását egyértelműen meghatározza, ha feltesszük, hogy annak megoldása egyáltalán létezik. Már igazoltuk, hogy a (161) egyenlet minden folytonos deriváltakkal rendelkező megoldása kielégíti a

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{a_i(x_1, \dots, x_n, u)}{\sqrt{\sum_j a_j^2(x_1, \dots, x_n, u)}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \frac{du}{ds} = - \frac{b(x_1, \dots, x_n, u)}{\sqrt{\sum_j a_j^2(x_1, \dots, x_n, u)}} \quad (163)$$

¹⁾ Itt már lehetséges az, hogy T -t az (x_1, \dots, x_n) egy nem egyértékű függvénye jellemzi. Mégis T bármely pontjának eléggé kis környezetében T -t egy oly $u(x_1, \dots, x_n)$ függvénynek kell jellemezni, mely egyértelmű, differenciálható, s kielégíti a (161) egyenletet. Pl. T lehet oly csavarfelület, melynek tengelye Ou , s melyet e tengely bizonyos környezetén kívül tekintünk.

egyenleteket. Az x_i és u kezdeti értékeit ismerjük az S^* felület minden $(x_1^0, \dots, x_n^0, u^0)$ pontjában. A (163) rendszer e kezdeti értékeknek alapján egyértelműen meghatározza u -t és mindegyik x_i -t, mint az s függvényét. Az

$$x_i = x_i(s, x_1^0, \dots, x_n^0, u^0), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$u = u(s, x_1^0, \dots, x_n^0, u^0)$$

görbét a (161) egyenlet *karakterisztikájának* nevezzük. Így az u -t egyértelműen meghatároztuk az S^* bármely elég kicsi darabjának az (x_1, \dots, x_n) síkra való vetülete azon környezetében, melyet az S^* -ot átmetsző karakterisztikáknak a vetülete borít. A környezet bármely belső pontjának vetülete a vetített környezetnek belső pontja lesz. Ugyanis:

1) S^* -nak nincsen oly érintő egyenese, mely párhuzamos az Ou tengellyel.

Ez azonnal következik a feltételünk szerint létező $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ($i = 1, \dots, n$) deriváltaknak a T felületen való véges voltából (lásd a 8. o. 3. lábjegyzetét).

2) S^* -nak nincsen olyan érintő egyenese, melynek az $u = 0$ síkon való vetülete a (162) egyenletek által megadott iránycosinusokkal rendelkeznek. Valóban ezt külön kikötöttük.

Tehát az S^* -on átmenő tetszőleges két integrálfelület az S^* bizonyos környezetében egybeesik.

A (161) egyenletre vonatkozó Cauchy-féle feladat megoldásának az imént dőlt betűvel írt feltételek melletti exisztenciáját akkor bizonyítanánk be, ha kimutatnánk, hogy a kezdeti feltételeink alapján szerkesztett u függvény valóban folytonos elsőrendű deriváltakkal rendelkezik. Evégből fel kell tennünk azt, hogy az S^* felület, illetve a feladat első fogalmazásában szereplő S felület, valamint a rajta megadott u függvény eléggé sima. E bizonyítást itt nem közöljük, mert alább egy ennél általánosabb tételt részletesen bizonyítunk.

55. §. Nem lineáris egyenletek

Tekintsük az

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (164)$$

egyenletet, s tegyük fel, hogy az F függvény a $2n + 1$ dimenziós tér egy bizonyos tartományában mindegyik argumentuma szerint folytonos parciális deriváltakkal rendelkezik a második rendig bezárólag, és hogy

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\}} \right]^2 > 0. \quad (165)$$

Az írásmód rövidsége kedvéért alább a

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = X_i, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = U, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial F}{\partial p_i} = P_i$$

jelöléseket fogjuk használni. A (164) egyenletre nem fogalmazzuk meg még egyszer a Cauchy-féle feladatot, hanem rögtön rátérünk a megoldás unicitás problémájának vizsgálatára. Ez egyúttal a Cauchy-féle feladat megoldásának gyakorlati módszerét is meg fogja adni.

Tegyük fel, hogy az $u(x_1, \dots, x_n)$ függvény a (164) egyenletnek oly megoldása, mely folytonos másodrendű parciális deriváltakkal rendelkezik. Helyettesítsük be e megoldást a (164) egyenletbe, s az így nyert azonosságot deriváljuk mindegyik x_k ($k = 1, \dots, n$) szerint. Akkor kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + X_k + U p_k = \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + X_k + U p_k = 0. \quad (166)$$

Ezek az egyenletek a p_k -ra nézve kvázilineárisak. Szerkesszük meg az (x_1, \dots, x_n) térben a

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{P_i}{\sqrt{\sum P_k^2}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (167)$$

rendszer integrálvonalait, ahol a jobboldalban szereplő u és p , mennyiségek helyébe a kiválasztott $u(x_1, \dots, x_n)$ megoldást, valamint ennek megfelelő parciális deriváltjait helyettesítjük. Akkor a (166) egyenletet a

$$\frac{dp_i}{ds} = - \frac{X_i + U p_i}{\sqrt{\sum P_k^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (168)$$

alakba írhatjuk át. S végül az $u(x_1, \dots, x_n)$ függvény azon irányba való deriváltjára nézve, melyet a (167) egyenletek határoznak meg azt kapjuk, hogy

$$\frac{du}{ds} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = \sum_{i=1}^n \frac{P_i p_i}{\sqrt{\sum P_k^2}} \quad (169)$$

A (167), (168) és (169) egyenletekből álló rendszer egyértelműen meghatározza az x_i , p_i , u mennyiségeket az s függvényeképpen, ha csak megadjuk ezek kezdeti értékeit.

Jellemezzük azt az S felületet, melyen az u függvény kezdeti értékeit előre megadjuk az

$$x_i = x_i(v_1, \dots, v_{n-1}) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

egyenletekkel. Akkor az S -en előre megadott u függvényt is a v_1, \dots, v_{n-1} függvényének foghatjuk fel.

Feltesszük azt, hogy az $x_i(v_1, \dots, v_{n-1})$ és $u(v_1, \dots, v_{n-1})$ függvények v_1, \dots, v_{n-1} szerinti parciális deriváltjaikkal együtt folytonosak a második rendig bezárólag, valamint, hogy a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial v_1} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial v_{n-1}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial v_{n-1}} \end{vmatrix}$$

mátrixnak van az S felület minden egyes pontjában legalább egy oly $(n-1)$ -edrendű minora, mely zérustól különböző.

Tekintsük az S felület tetszőleges A pontját. Vezessünk be olyan új koordinátarendszert, melynek origója az A pont. Legyen az új Ox'_1 tengely az S -hez húzott normális, a többi Ox_k ($k = 2, \dots, n$) tengely pedig feküdjék az S felület

A ponthoz tartozó érintősíkjában. Tekintsük most a (164) egyenletnek eleget tevő u függvényt az A pont környezetében. Ez az egyenlet az új koordinátákban

$$F^* \left(x'_1, \dots, x'_n, u, \frac{\partial u}{\partial x'_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x'_n} \right) = 0 \quad (170)$$

alakú. A $\frac{\partial u}{\partial x'_k}$, $k = 2, \dots, n$ deriváltaknak az A pontban felvett értékeit meghatározhatjuk az u függvénynek csakis az S -en felvett értékeiből: nevezetesen ezek e függvény azon irányok menti deriváltjaival egyeznek meg, melyek az S -ben fekszenek, s érintik az Ox'_k ($k = 2, \dots, n$) tengelyeket. A (170) egyenletből $\frac{\partial u}{\partial x'_1}$ -re nézve általában több értéket kaphatunk.

Az összes $\frac{\partial u}{\partial x'_k}$ deriváltak A pontban való ismeretében meghatározhatjuk e pontban az összes $\frac{\partial u}{\partial x'_k}$ deriváltakat is. Tegyük fel, hogy a megadott $u(x_1, \dots, x_n)$ függvényre nézve az S felület minden A pontjában:

$$\frac{\partial F^*}{\partial \left\{ \frac{\partial u}{\partial x'_1} \right\}} \neq 0. \quad (171)$$

Legyen az $u_1(x_1, \dots, x_n)$ a (164) egyenlet egy másik folytonosan deriválható oly megoldása, mely S -en $u(x_1, \dots, x_n)$ -nel azonos, és S valamely pontjában $\frac{\partial u_1}{\partial x'_1} = \frac{\partial u}{\partial x'_1}$. Akkor a $\frac{\partial u_1}{\partial x'_1}$ az S -en mindenütt azonos $\frac{\partial u}{\partial x'_1}$ -vel, mivel az implicit függvényről szóló tétel értelmében (170)-nek egyetlen folytonos $\frac{\partial u}{\partial x'_1}$ megoldása van. Következésképpen az S felületen mindegyik $\frac{\partial u}{\partial x'_k}$ azonos a megfelelő $\frac{\partial u_1}{\partial x'_k}$ -val.

A (171) feltételt geometriailag a következő módon interpretálhatjuk. Az A pontban

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial u}{\partial x'_k} \frac{\partial x'_k}{\partial x_j},$$

ezért

$$\frac{\partial F^*}{\partial \left\{ \frac{\partial u}{\partial x'_1} \right\}} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F^*}{\partial \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\}} \cdot \frac{\partial x'_1}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n P_j \frac{\partial x'_1}{\partial x_j} = \sqrt{\sum_{k=1}^n P_k^2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial x'_1}{\partial x_j} \frac{dx_j}{ds}.$$

Ez utóbbi összeg arányos annak a szögnek a cosinusával, melyet az (x_1^0, \dots, x_n^0) koordinátájú A pontban az S felülethez húzott normális, valamint az $[x_1^0, \dots, x_n^0, u(x_1^0, \dots, x_n^0)]$ pontból kiinduló karakterisztikának az (x_1, \dots, x_n) síkra való vetületének iránya zár be. Következésképpen a (171) feltétel azt jelenti, hogy e szög sehohsem lehet derékszög.

Tehát az $x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n$ -nek az értékei az S -en mindenütt rendre megegyeznek az $u_1(x_1, \dots, x_n)$ -nél megfelelően fellépő értékekkel. S így a

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{P_i}{\sqrt{\sum P_k^2}} \quad (172_1)$$

$$\frac{du}{ds} = \frac{\sum_k P_k p_k}{\sqrt{\sum P_k^2}}, \quad (172_2)$$

$$\frac{dp_i}{ds} = -\frac{X_i + Up_i}{\sqrt{\sum P_k^2}} \quad (172_3)$$

egyenletrendszer azt bizonyítja, hogy $u(x_1, \dots, x_n) \equiv u_1(x_1, \dots, x_n)$ az S bizonyos környezetében. Ugyanis mivel feltettük, hogy az F függvény mindegyik argumentuma szerint a második rendig bezárólag folytonosan deriválható, azért a (165) feltétel miatt a (172) egyenletek jobboldalai mindegyik argumentumuk szerint első rendben folytonosan deriválhatók, ez pedig biztosítja a (172) rendszer megoldásának unicitását.

A (172) rendszernek integrálgörbéit az $(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n)$ térben a (164) egyenlet *karakterisztikáinak* nevezzük.¹⁾

Most rátérünk a Cauchy-féle feladat megoldásának existenciabizonyítására, s feltesszük, hogy az S és a rajta megadott u függvény kielégíti a 138. oldalon dőlt betűvel szedett feltételt, valamint, hogy az S -en a $\frac{\delta u}{\delta x_1}$ -t úgy választjuk meg, hogy az S -en mindenütt teljesítse a (170) és (171) feltételeket.

Ahhoz, hogy a megoldás e feltételek melletti existenciáját bizonyítsuk, elegendő azt igazolnunk, hogy a (172) rendszerből a kezdeti feltételek alapján nyert

$$x_i(s, v_1, \dots, v_{n-1}), \quad u(s, v_1, \dots, v_{n-1}), \quad p_i(s, v_1, \dots, v_{n-1})$$

megoldás rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. Az

$$x_i = x_i(s, v_1, \dots, v_{n-1}), \quad i = 1, \dots,$$

egyenletrendszer az s, v_1, \dots, v_{n-1} -re nézve egyértelműen megoldható az S felület bizonyos környezetében úgy, hogy e megoldások x_1, \dots, x_n szerint folytonosan deriválhatók. Akkor az s, v_1, \dots, v_{n-1} mennyiségeket az S szóban forgó környezetében görbevonalú koordinátáknak tekinthetjük. Mivel pedig feltettük, hogy az S -en megadott $x_i(v_1, \dots, v_{n-1})$ és $u(v_1, \dots, v_{n-1})$ függvények mindegyik v_i szerint a második rendig bezárólag folytonosan deriválhatók, s mivel a (172) egyenletek jobboldalai is mindegyik argumentumuk szerint folytonosan deriválhatók, azért az általunk szerkesztett megoldás is deriválható az s, v_1, \dots, v_{n-1} szerint. Ezért ha u -nak az s, v_1, \dots, v_{n-1} változóiban nyert alakjában s, v_1, \dots, v_{n-1} helyébe ezek x_1, \dots, x_n -nel való kifejezéseit helyettesítjük, akkor u -t az x_1, \dots, x_n mennyiségek oly függvényeképpen kapjuk meg, mely x_1, \dots, x_n szerint első rendben folytonosan differenciálható.

¹⁾ E vonalaknak az (x_1, \dots, x_n) -vagy az (x_1, \dots, x_n, u) -térre való vetületeit is nevezik néha karakterisztikáknak.

2. Az $x_i(s, v_1, \dots, v_{n-1})$, $u(s, v_1, \dots, v_{n-1})$ és $p_i(s, v_1, \dots, v_{n-1})$ függvények S szóbanforgó környezetében mindenütt kielégítik az

$$F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (173)$$

egyenletet.

3.

$$p_i \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Ahhoz, hogy első állításunkat bebizonyítsuk, elegendő azt igazolnunk hogy a

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial v_k} \right|, \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad (174)$$

determináns s -nek minden eléggé kicsiny értékére különbözik zérustól (úgy vesszük, hogy S -en $s = 0$, és hogy $v_n \equiv s$). Mivel pedig e determináns elemei folytonosak az s, v_1, \dots, v_{n-1} változóiban, azért elegendő azt igazolnunk, hogy e determináns magán az S felületen különbözik zérustól; ez utóbbi pedig egyszerűen abból következik, hogy az S felület valamely pontjához húzott és az s, v_1, \dots, v_{n-1} koordinátavonalak irányába mutató vektorok által alkotott parallelepipedon térfogata — (171) feltételünk szerint — nem nulla.

Második állításunk magán az S felületen nyilvánvalóan igaz, hiszen p_1, \dots, p_n kezdeti értékeit éppen úgy választottuk meg, hogy azok a (173) egyenletet kielégítsék. Annak bizonyítására tehát, hogy e vonatkozás nemcsak S -en teljesül — azaz nemcsak $s = 0$ -ra, hanem s minden elég kicsiny értékére is — azt kell kimutatnunk, hogy ha a (173) egyenlet baloldalán előforduló x_i, u, p_i helyébe a (172) rendszer $x_i(s, v_1, \dots, v_{n-1}), u(s, v_1, \dots, v_{n-1}), p_i(s, v_1, \dots, v_{n-1})$ megoldását helyettesítjük be, akkor a helyettesítés eredménye független lesz az s -től. Ugyanis

$$\frac{dF}{ds} = \sum_i X_i \frac{dx_i}{ds} + \sum P_i \frac{dp_i}{ds} + U \frac{du}{ds}$$

Ha pedig itt $\frac{dx_i}{ds}, \frac{dp_i}{ds}, \frac{du}{ds}$ helyébe a (172) egyenlet jobboldalait helyettesítjük, valóban nullát kapunk.

Harmadik állításunk $\left(p_i \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$ bizonyítása céljából kimutatjuk először azt, hogy S tekintett környezetében mindenütt

$$\frac{\partial u}{\partial v_k} = \sum_i p_i \frac{\partial x_i}{\partial v_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (v_n \equiv s). \quad (175)$$

$k = n$ -re ennek helyessége abból következik, hogy a (172₁) egyenlet szerint

$$\frac{\partial x_i}{\partial v_n} \equiv \frac{P_i}{\sqrt{\sum P_k^2}} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

s így a (175) megfelelő egyenlete megegyezik a (172₂) egyenlettel. A (175) többi ($k = 1, \dots, n-1$) egyenleteiről egyelőre még csak azt tudjuk, hogy $s = 0$ -nál helytállanak: ugyanis az S -en éppen úgy választottuk meg a p_i kezdeti értékeit, hogy

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial u}{\partial v_k} = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial v_k}$$

legyen. Annak igazolására, hogy ezek az egyenletek más s -eknél is fennállnak, legyen

$$U_k \equiv \frac{\partial u}{\partial v_k} - \sum_i p_i \frac{\partial x_i}{\partial v_k},$$

és állapítsuk meg a $\frac{dU_k}{ds}$ kifejezést.

U_k az s szerint differenciálható. Ez abból következik, hogy a (172) rendszer általunk szerkesztett megoldásai — mint ahogyan már említettük — az s, v_1, \dots, v_{n-1} változók szerint folytonosan deriválhatók. Ha e megoldásokat a (172_{1, 2}) egyenleteibe helyettesítjük, akkor az így nyert azonosságok jobboldala a v_k ($k = 1, \dots, n$) szerint folytonosan differenciálható lesz. Ez azt jelenti, hogy a baloldalak is folytonosan deriválhatók lesznek ezen argumentumok szerint, tehát azt, hogy a

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial s \partial v_k}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial v_k}, \quad k = 1, \dots, n - 1$$

deriváltak léteznek és folytonosak.

Tehát

$$\frac{dU_k}{ds} = \frac{\partial^2 u}{\partial v_k \partial s} - \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial s} \frac{\partial x_i}{\partial v_k} - \sum_i p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v_k \partial s}. \quad (176)$$

Differenciáljuk most a v_k szerint a

$$\frac{\partial u}{\partial s} - \sum_i p_i \frac{\partial x_i}{\partial s} \equiv 0$$

azonosságot, melyről éppen az előbb mutattuk ki, hogy s, v_1, \dots, v_{n-1} minden szóbanforgó értékére igaz, akkor következik:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial v_k} - \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial v_k} \frac{\partial x_i}{\partial s} - \sum_i p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial s \partial v_k} \equiv 0. \quad (177)$$

(177)-nek a (176)-ból való tagonkénti kivonásával adódik:

$$\frac{dU_k}{ds} = \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial v_k} \frac{\partial x_i}{\partial s} - \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial s} \frac{\partial x_i}{\partial v_k}.$$

A (172₁) és (172₃) egyenlőségek felhasználásával ezt a legutóbb nyert vonatkozást a

$$\frac{dU_k}{ds} = \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial v_k} \frac{P_i}{\sqrt{\sum P_s^2}} + \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial v_k} \frac{X_i + U p_i}{\sqrt{\sum P_s^2}} \quad (178)$$

alakba írhatjuk át. Ha a fentebb igazolt

$$F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) \equiv 0$$

azonosságot a v_k szerint deriváljuk, a

$$\sum X_i \frac{\partial x_i}{\partial v_k} + \sum_i P_i \frac{\partial p_i}{\partial v_k} + U \frac{\partial u}{\partial v_k} = 0$$

egyenleteket nyerjük. Ha ennek mindkét oldalát elosztjuk $\sqrt{\sum P_s^2}$ -tel és kivonjuk (178)-ból, akkor

$$\frac{dU_k}{ds} = -\frac{U}{\sqrt{\sum P_s^2}} \left(\frac{\partial u}{\partial v_k} - \sum_i p_i \frac{\partial x_i}{\partial v_k} \right) = -\frac{UU_k}{\sqrt{P_s^2}}$$

Következésképpen

$$U_k(s) = U_k(0) e^{-\int_0^s \frac{U}{\sqrt{\sum P_s^2}} ds},$$

és mivel $U_k(0) = 0$, azért minden más s -re $U_k(s) = 0$.

Tehát kimutattuk azt, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial v_k} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial v_k} \quad (k = 1, \dots, n)$$

az S szóbanforgó teljes környezetében. Most pedig kimutatjuk, hogy

$\frac{\partial u}{\partial x_k} \equiv p_k$. Evégből megjegyezzük, hogy $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial u}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$. Ha ide behelyettesítjük

$\frac{\partial u}{\partial v_k}$ -nak az előző egyenlőségből nyert értékét, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k,s=1}^n p_s \frac{\partial x_s}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \sum_s p_s \frac{\partial x_s}{\partial x_i} = p_i,$$

mert

$$\frac{\partial x_s}{\partial x_i} = 0, \text{ ha } i \neq s \text{ és } \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1.$$

Megjegyzés. A karakterisztika (x_1, \dots, x_n) síkba való vetületének hossza helyett vehetnénk új paraméternek azt a t -t is, mely s -sel a

$$ds = \sqrt{\sum P_k^2} dt$$

vonatkozásban van. Akkor pl. a (172) egyenleteket így írhatnánk: $\frac{\partial x_i}{\partial t} = P_i$, és így tovább.

Példa. Keressük meg a

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 - 1 = 0 \quad (179)$$

egyenletnek az $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $u = 0$ körön átmenő megoldását.

A v paraméter bevezetésével a kör egyenletét így írhatjuk:

$$x_1 = \sin v, \quad x_2 = \cos v, \quad u = 0. \quad (180)$$

A (172) egyenletek itt ilyen alakúak

$$\frac{dx_1}{2p_1} = \frac{dx_2}{2p_2} = \frac{du}{2(p_1^2 + p_2^2)} = \frac{dp_1}{0} = \frac{dp_2}{0} = dt. \quad (181)$$

Az utolsó két egyenletből azt kapjuk, hogy

$$p_1 = C_1, \quad p_2 = C_2,$$

ahol C_1 és C_2 bizonyos konstánsok. Ezt az első három egyenletbe helyettesítve az

$$x_1 = 2C_1 t + C_3, \quad x_2 = 2C_2 t + C_4, \quad u = 2(C_1^2 + C_2^2)t + C_5$$

egyenleteket kapjuk, ahol C_3, C_4, C_5 szintén bizonyos konstánsok.

Ahhoz, hogy kielégítsük a megadott differenciálegyenletet, kell, hogy

$$C_1^2 + C_2^2 = 1. \quad (182)$$

Ezért $u = 2t + C_5$.

Ahhoz pedig, hogy $t = 0$ -nál az

$$x_1 = 2C_1 t + C_3, \quad x_2 = 2C_2 t + C_4, \quad u = 2t + C_5$$

vonalt átmenjen azon a ponton, melyet a v paraméter a (180) körön határoz meg, kell, hogy

$$C_3 = \sin v, \quad C_4 = \cos v, \quad C_5 = 0$$

legyen. Akkor a (179) egyenlet (180) körön átmenő integrálfelületének egyenletét az

$$x_1 = 2C_1 t + \sin v, \quad x_2 = 2C_2 t + \cos v, \quad u = 2t$$

alakba írhatjuk, ahol t és v paraméterek. Ahhoz, hogy $t = 0$ -nál

$$\frac{\partial u}{\partial v} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial v}$$

legyen szükséges, hogy

$$0 = p_1 \cos v - p_2 \sin v \quad \text{vagy} \quad C_1 \cos v = C_2 \sin v$$

legyen. Tekintetbe véve, a (182) egyenletet, azt kapjuk, hogy

$$C_1 = \varepsilon \sin v, \quad C_2 = \varepsilon \cos v,$$

ahol $\varepsilon = \pm 1$.

Innen folytonossági okokból következik, hogy ε az egész görbe mentén állandó. Végül is azt kapjuk, hogy ennek az integrálfelületnek paraméteres egyenlete

$$x_1 = (2t\varepsilon + 1) \sin v, \quad x_2 = (2t\varepsilon + 1) \cos v, \quad u = 2t.$$

Ebből a t és v kiküszöbölésével az

$$x_1^2 + x_2^2 = (1 \pm u)^2 \quad (183)$$

egyenletet kapjuk.

Ily módon a (179) egyenlet két oly integrálfelületét találtuk meg, mely átmege a (180) körön. Ez két az (x_1, x_2, u) térben elhelyezkedő olyan körkúp,

melyek közös alapja a (180) kör, s melyek közös tengelye az Ou tengellyel egybeesik.

M e g j e g y z é s. Az előbbi példából láthatjuk, hogy az a kikötés, melyet a (174) determinánsról a 141 oldalon említettünk, a dolog lényegéből folyik, t. i. hogy az az S felület közelében zérustól különböző legyen. Nem szabad azt gondolnunk, hogy a (172) rendszernek az S^* (54. § jelölésévei) felületen átmenő integrálgörbéinek az (x_1, \dots, x_n, u) térre való

$$x_i = x_i(s, x_1^0, \dots, x_n^0), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad u = u(s, x_1^0, \dots, x_n^0)$$

vetületei tetszőlegesen nagy s (illetve t) értékeknél síma felületet alkotnak. S annak ellenére, hogy e rendszer tetszőlegesen nagy t értékek mellett is meghatározza a (181) rendszer integrálvonalait, mégsem folytathatjuk a (179) egyenlet (180) körön átmenő integrálfelületeit akármeddig, anélkül, hogy szinguláris pontra bukkánánk. Így a mi esetünkben szinguláris pontok lesznek a (183) kúpok csúcsai.

56. §. A Pfaff-féle egyenlet

Az (x, y, z) -térben Pfaff-félének nevezzük a

$$P dx + Q dy + R dz = 0 \quad (184)$$

egyenletet, ahol P , Q és R az x , y és z függvénye.

Ezeket az egyenleteket kétféle módon tárgyalhatjuk. Az egyiknél az x , y és z változókat egyetlen t paraméter függvényének vesszük. Ha az x , y és z változók közül kettőt megadunk e paraméter függvényeképen, akkor a harmadiknak meghatározására egy közöséges differenciálegyenlethez jutunk. Jelölje az x , y és z változók között ily módon fennálló vonatkozást

$$\Phi(x, y, z) = 0. \quad (185)$$

Tekintsük itt az x , y és z mennyiségeket a t paraméter függvényének, s deriváljuk (185) mindkét oldalát t szerint, akkor

$$\Phi'_x dx + \Phi'_y dy + \Phi'_z dz = 0. \quad (186)$$

A (185) és (186) egyenleteket — a Φ , Q , P és R függvényekre vonatkozó igen általános feltételek mellett megoldhatjuk a dx , dy , dz differenciálok közül kettőnek

a harmadikhoz való arányára nézve, pl. $\frac{dz}{dx}$ és $\frac{dy}{dx}$ -ra nézve. Akkor a z -nek és y -

nek az x függvényképen való meghatározására egy két egyenletből álló közöséges differenciálegyenletrendszerrel kapunk. A (185) feltétel miatt általában egy önkényes konstáns kerül az általános megoldásba.

A Pfaff-féle egyenlet másik tárgyalásában a változók egyikét — pl. a z -t — a másik kettő függvényének tekintjük. Feltesszük, hogy a szóbanforgó tartományban $R \neq 0$. Akkor a (184) egyenletből ezt kapjuk:

$$dz = P_1 dx + Q_1 dy, \quad (187)$$

ahol

$$P_1 = -\frac{P}{R}, \quad Q_1 = -\frac{Q}{R}.$$

Innen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P_1(x, y, z), \quad (187_1), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Q_1(x, y, z). \quad (187_2)$$

Feltesszük, hogy a z az x és y szerint a második rendig bezárólag folytonos parciális deriváltakkal rendelkezik, valamint hogy P_1 és Q_1 mindegyik változója szerint folytonos első parciális deriválttal bír. Akkor szükségképpen

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial P_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

vagy

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial P_1}{\partial z} Q_1 = \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial z} P_1, \quad (188)$$

mivel kell, hogy

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

legyen. A P_1 és Q_1 , x és y szerinti deriválásánál nemcsak azt vettük tekintetbe, hogy ezek explicite az x és y függvényei, hanem azt is, hogy z közvetítésével is, mert z feltételünk szerint szintén az x és y függvénye. (188) feltételünket a

$$P \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + Q \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0 \quad (189)$$

alakba írhatjuk át.

Tegyük most fel, hogy a (189) egyenlet — vagy a vele ekvivalens (188) egyenlet — az (x, y, z) tér szóbanforgó G tartományában *azonosan* teljesül, valamint azt, hogy a P_1 , Q_1 függvények minden változójuk szerint a második rendig bezárólag folytonosan deriválhatók. Akkor minden ilyen G -n a (187) rendszernek — illetve az ezzel ekvivalens (184) egyenletnek — egy és csak egy integrálfelülete megy át.

Bizonyítás. Kimutatjuk mindenekelőtt a (187) rendszer azon megoldásának unicitását, mely egy megadott $A(x_0, y_0, z_0)$ ponton megy át. Evégből megjegyezzük a következőket. Ha a (187₁) egyenletben az y állandó és egyenlő y_0 -val, akkor az egyetlen az $y = y_0$ síkban fekvő és az $A(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó L integrálgörbét határozza meg. Ugyanígy, ha a (187₂) egyenletben az x értéke állandó, akkor az egyetlen oly az $x = \text{const.}$ síkban fekvő $l(y)$ integrálgörbét határozza meg, mely átmegy az L görbe e síkban fekvő pontján. S így az L görbe minden egyes pontjában meghúzott $l(y)$ görbék összessége egyértelműen határozza meg a (187) rendszernek az (x_0, y_0, z_0) ponton átmenő S integrálfelületét.

Most kimutatjuk azt, hogy az imént szerkesztett felület valóban integrálfelülete a (187) rendszernek. A felület szerkesztéséből evidens, hogy minden pontjában teljesül a (187₂) egyenlet. Azt kell tehát még kimutatnunk, hogy a (187₁) egyenlet is teljesül annak minden pontjában. Az, hogy az általunk szerkesztett

$$z = z(x, y)$$

függvény az x szerint valóban mindenütt folytonos deriválttal rendelkezik — az 52. § megfontolásaiból következik (128—131. oldal), melyek most is érvényben maradnak. Még csak azt kell kimutatnunk, hogy $\frac{\partial z}{\partial x}$ kielégíti a (187₁) egyenletet.

Évégből megjegyezzük azt, hogy ez az egyenlet az S felület szerkesztése miatt $y = y_0$ -nál teljesül. Annak igazolására, hogy ez más y -okra is teljesül, legyen

$$\frac{\partial z}{\partial x} - P_1(x, y, z) = F,$$

és állapítsuk meg $\frac{\partial F}{\partial y}$ -t. Az, hogy a z függvénynek létezik a $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ -deriváltja, abból következik, hogy e függvény kielégíti a (187₂) egyenletet, melynek jobb-oldala pedig az x, y és z szerint folytonosan deriválható. Így:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) - \frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial P_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial P_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial z} P_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial z} F - \frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial P_1}{\partial z} Q_1. \end{aligned} \quad (190)$$

Itt az átalakításoknál felhasználtuk, hogy

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \text{ és } \frac{\partial z}{\partial y} = Q_1.$$

Q_1 -nek y szerinti deriválásakor figyelembe vettük azt is, hogy az z közvetítésével is előfordul. A (190) egyenletet a (188) azonosság felhasználásával a

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial z} F$$

alakba írhatjuk át. Innen

$$F(x, y) = F(x, y_0) e^{\int_{y_0}^y \frac{\partial Q_1}{\partial z} dy}$$

Ebből látszik, hogy az $F(x, y)$ minden szóbanforgó y -ra nulla, valahányszor $y = y_0$ -nál nulla, qu. e. d.

Geometriailag a Pfaff-féle egyenlet megoldásának az első tárgyalása a tér megadott iránymezőjére ortogonális görbék megszerkesztését jelenti (az irányt minden (x, y, z) pontban a vektor P, Q, R komponenseivel adjuk meg). A második tárgyalásnál az ugyanarra a mezőre ortogonális felületeket határoztuk meg, vagy ami ezzel ekvivalens, azokat a felületeket, melyek a tér minden pontjában adott érintősíkkal rendelkeznek.

NÉV- ÉS TÁRGYMUTATÓ

- Alaprendszer 88, 111
 Árzela tétele 26, 29
 Állandók variálásának módszere 19, 97
 Általános integrál 11, 73
 Általános megoldás 10, 72
 Átmérő 42

 Baire 133
 Belső pont 8
 Bernoulli-féle differenciálegyenlet 19
 Bessel-féle egyenlet 96
 Burkológörbe 67

 Cauchy 98
 Cauchy-féle feladat 129, 137, 138
 Cauchy tétele 43, 76
 Centrum 57
 Clairaut-féle differenciálegyenlet 65
 Csomópont 56

 Egyenletes korlátosság 26
 Egyenlő mértékű folytonosság 26
 Egyszeresen összefüggő 20
 Elemi osztó 111
 Első integrál 133
 Elsőrendű, homogén rendszer 86
 Elsőrendű, lineáris, inhomogén rendszer 97
 Euler-féle egyenlet 116
 Euler-féle törtvonal 25, 34
 Euler formula 112
 Exakt differenciálegyenlet 20

 Félig folytonosság 31
 Filthyengőlc 61, 129
 Folytonosan differenciálhatóság 31
 Fókusz 57

 Gjunter N. M. 132
 Hadamard-féle lemma 49, 50
 Határciklus 59
 Határpont 8
 Holomorf 43
 Homogén egyenletek 17
 Homogén differenciálegyenletrendszer 85
 Homogén, lineáris differenciálegyenlet 19
 Hooke-féle törvény 125
 Hysterézis differenciálegyenlete 49

 Implicit függvény tétele 40
 Implicit differenciálegyenlet 61
 Inhomogén differenciálegyenletrendszer 85

 Integrálás 8
 Integrál 10, 73
 Integrálegyenlet 40, 35
 Integráló tényező 22
 Integrálvonal 9, 71
 Invariáns (lineáris transzformációnál) 107
 Iránymező 8
 Izolált szinguláris pont 54
 Jacobi-féle függvénydetermináns 24
 Jobb- és baloldali differenciálhányados 30, 74

 Kanonikus alak 101
 Kanonikus alak előállítás 102

 Karakterisztika 128, 138, 141
 Karakterisztikus mátrix 103
 Kezdeti érték 8
 Kezdeti értékektől való függés 47
 Kontrakciós elv 39, 42, 77
 Konvex (tartomány) 32
 Közönséges n-edrendű differenciálegyenlet 7
 Közönséges differenciálegyenletrendszer 70
 Közönséges pont 54, 63
 Krejnyesz 50
 Kvázilineáris differenciálegyenlet 136

 Lagrange tétele 32
 Lavrentyev 26
 Legegyszerűbb differenciálegyenletek
 $\frac{dy}{dx} = f(x)$ 12
 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 14
 $\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$ 15
 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 17
 $\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)$ 18
 $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ 20
 Legkisebb megoldás 31
 Legnagyobb megoldás 31
 Lényeges szinguláris integrálvonal 58
 Lényegesen szinguláris pont 54, 63
 Lényegesen szinguláris vonal 57
 Lineáris függőség 86, 92
 Lineáris egyenlet 18
 Lineáris, elsőrendű, parciális differenciálegyenlet 128

- Lineáris, homogén differenciálegyenlet
rendjének redukálása 93
Lineáris kombináció 86
Lineáris rendszer 84
Liouville tétele 89, 92
Lipschitz-feltétel 32, 35, 74
Ljapunov 119, 121
Ljusztjerynyik 27
- Mag 40
Majdnem lineáris egyenletek 128
Majoráns 45
Megoldás 7, 71
Mező integrálvonalai 72
Montel-féle megoldások 31
Mozgásegyenlet 7
- n-edrendű differenciálegyenlet 91
n-edrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet 98
Nem lineáris, parciális differenciálegyenlet 138
Nem szinguláris, lineáris transzformáció 101
Nyeregpont 56
Nyílt intervallum 26, 29
- Osgood unicitás tétele 31, 73
- Parciális differenciálegyenlet 7
Peano egzisztenciabizonyítása 28, 73
Perron 31, 55
- Perron egzisztenciabizonyítása
Pfaff-féle egyenlet 146
Poincaré 49, 57
- Rádium bomlási sebessége 8
Redukció elsőrendű rendszerre 70
Rezonancia 127
Riccati-féle differenciálegyenlet 25
- Saját rezgés 125
Simaság 46
Stabilitás 120
Sturm tétele 95
Sup 39
Sylvester 109
Szekuláris egyenlet 103
Szeperábilis differenciálegyenletek 15
Szinguláris integrálvonal 58
Szinguláris pont 54, 63
Szinguláris vonal 57
Szukcesszív approximáció 35
Szukcesszív approximáló megoldás 37
- Tartomány 8
Tyihonov-Caccioppoli-tétel 39
- Vonal 9
Wronski-féle determináns 87, 92
- Zárt intervallum 26, 29
Zárt tartomány 8
Zérushely 95

TARTALOMJEGYZÉK

	Oldal
Előszó a magyar kiadáshoz	3
Előszó az első kiadáshoz	5
Előszó a harmadik kiadáshoz	5

I. RÉSZ

Az elsőrendű, egy ismeretlen függvényes differenciálegyenlet

I. Fejezet	
Alapfogalmak	7
1. §. Definíciók, példák	7
2. §. Geometriai interpretáció. A feladat általánosítása	8
II. Fejezet.	
A legegyszerűbb differenciálegyenletek	12
3. §. A $\frac{dy}{dx} = f(x)$ egyenlet	12
4. §. A $\frac{dy}{dx} = f(y)$ egyenlet	14
5. §. Szeparábilis differenciálegyenletek	15
6. §. Homogén egyenletek	17
7. §. Lineáris egyenletek	18
8. §. Exakt egyenletek	20
9. §. Az integráló tényező	22
III. Fejezet	
Az általános elmélet	25
10. §. Az Euler-féle törtvonalak	25
11. §. Arzela tétele	26
12. §. Az (1) differenciálegyenlet megoldásának Peano-féle existenciabizonyítása	28
13. §. Az Osgood-féle unicitástétel	31
14. §. Az Euler-féle törtvonalakról szóló kiegészítés	34
15. §. A szukcesszív approximáció módszere	35
16. §. A kontrakciós elv	39
17. §. A kontrakciós elv geometriai interpretációja	42
18. §. Cauchy tétele a holomorf jobboldalú $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ alakú differenciál- egyenletről	43
19. §. A differenciálegyenletek megoldásának símasági foka	46
20. §. A megoldás, mint a kezdeti értékek függvénye	47
21. §. Az Hadamard-féle lemma	50
22. §. A megoldásnak a paramétereiktől való függéséről szóló tétel	51
23. §. A szinguláris pontok	54
24. §. A szinguláris vonalak	57
25. §. A integrálgörbe menete — egészben	58
26. §. A deriváltat impliciten tartalmazó egyenletek	61
27. §. A burkológörbe	67

II. RÉSZ

A közönséges differenciálegyenletrendszerek

	Oldal
IV. Fejezet	
<i>Az általános elmélet</i>	70
28. §. Tetszőleges rendszer redukciója elsőrendű rendszerre	70
29. §. Geometriai interpretáció. Definíciók	71
30. §. Az alaptételek megfogalmazása	73
31. §. Az operátoregyenletrendszerekre vonatkozó kontrakciós elv	77
32. §. A kontrakciós elv alkalmazása differenciálegyenletrendszerekre	80
V. Fejezet	
<i>A lineáris rendszerek általános elmélete</i>	84
33. §. Definíciók. A differenciálegyenletrendszerek általános elméletének egyes következményei	84
34. §. Az elsőrendű, homogén rendszerekre vonatkozó alaptételek	86
35. §. Liouville tétele	89
36. §. A homogén, lineáris rendszer előállítására adott megoldásrendszere alapján	90
37. §. Következmények az n -edrendű differenciálegyenletre	91
38. §. A lineáris, homogén differenciálegyenletek rendjének redukálása	93
39. §. A másodrendű, lineáris, homogén egyenletek megoldásainak zérushelyeiről	95
40. §. Az elsőrendű, lineáris, inhomogén egyenletrendszer	97
41. §. Az n -edrendű, lineáris, inhomogén egyenletre vonatkozó következmények	98
VI. Fejezet	
<i>Állandó együtthatós lineáris rendszerek</i>	100
42. §. Előzetes megjegyzések	100
43. §. A kanonikus alak előállítása	102
44. §. A lineáris transzformáció invariánsai	107
45. §. Elemi osztók	109
46. §. A homogén egyenletrendszer alaprendszerének meghatározása	111
47. §. Az n -edrendű, homogén differenciálegyenletre való alkalmazás	115
48. §. Az inhomogén rendszer partikuláris megoldásainak meghatározásáról	116
49. §. A $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy}$ egyenlet kanonikus előállítása	119
50. §. A megoldások stabilitása	120
51. §. Egy fizikai példa	125

F Ü G G E L É K

Az elsőrendű, egy ismeretlen függvényes, parciális differenciálegyenletek

52. §. Majdnem lineáris egyenletek	128
53. §. A közönséges differenciálegyenletrendszer első integráljai	133
54. §. Kvázilineáris egyenletek	136
55. §. Nem lineáris egyenletek	138
56. §. A Pfaff-féle egyenlet	146

