tanulmányok

143/1983.

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

MODELLELMÉLETI ÉS UNIVERZÁLIS ALGEBRAI ESZKÖZÖK A TERMÉSZETES ÉS FORMÁLIS NYELVEK SZEMANTIKAELMÉLETÉBEN

Írta:

Márkusz Zsuzsanna

Tanulmányok 143/1983

A kiadásért felelős

Dr. Vámos Tibor

Osztályvezető

Dr. Bach Iván

ISBN 963 311 152 8

ISSN 0324-2951

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS

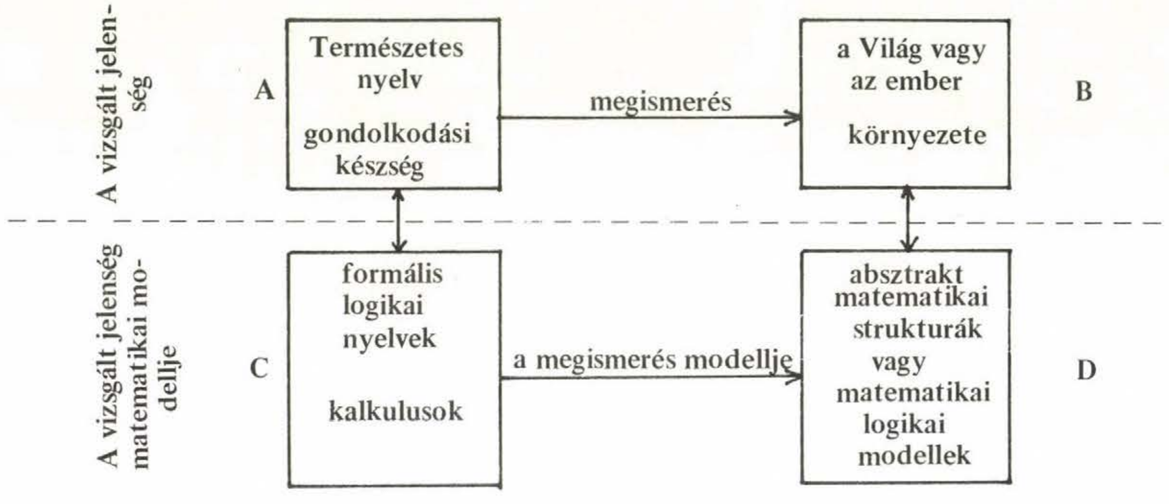
A korszerű számitástudomány fejlődésével egyidejűleg sok tudományos központban megindultak a kutatások az un. mesterséges intelligencia problémák területén is. Ezek a problémák egyre több elméleti matematikai kérdést vetettek és vetnek fel, többek között az algebra és a matematikai logika körében. Jelen dolgozatban éppen ilyen kérdéskörrel szeretnénk foglalkozni – a természetes nyelvi fragmentumok és a formális logikai nyelvek univerzális algebrai vizsgálatával. Egy nevezetes mesterséges intelligencia probléma, a computer által történő természetes nyelv megértése keltette fel az érdeklődést ezen a területen. Sok elméletileg megalapozatlan próbálkozás után Richard Montague amerikai matematikus – a 70-es évek elején – szigorú univerzális algebrai és halmazelméleti alapokon épülő elméletével, az Univerzális Grammatikával [1] olyan matematikai keretet adott ennek a problémakörnek, amelynek megértése és alkalmazása komoly eredményekre vezethet.

Hogy megértsük az Univerzális Grammatika tárgyát, nézzük meg, hogy mit is jelent a természetes nyelv megértése?

Az ember, aki természetes intelligenciával rendelkezik, képes megismerni az őt körülvevő világot, megfigyeléseiből, tapasztalataiból következtetéseket képes levonni – gondolkodik. Ha magát a gondolkodási folyamatot modellezni szeretnénk valamilyen mesterséges szerkezettel, pl. számitógépen vagy roboton, pontosan tudnunk kéne, hogy az ember hogyan gondolkodik. Azonban a gondolkodás folyamata nem ismert tudományos egzaktsággal sem fiziológiai, sem biokémiai, sem pszichológiai szinten, ezért ha mégis képet akarunk alkotni róla, a gondolkodás termékeit, eredményeit kell megvizsgálnunk. A gondolkodás eredménye lehet az elmondott, vagy leírt természetes nyelvű szöveg, az ember viselkedésmódja, cselekedetei. Kézenfekvőnek látszik megvizsgálni a természetes nyelvű szövegeket, hiszen a természetes nyelv a maga gazdagságával is tükrözi az emberi gondolkodást. Tehát adott az ember, a "természetes intelligencia", aki rendelkezik egy természetes nyelvvel és gondolkodik. Gondolkodásának tárgya önmaga és az őt körülvevő világ megismerése. Itt ebben a dolgozatban figyelmen kivül hagyjuk a gondolkodási folyamat ama aspektusát, amellyel az ember önmagát szeretné megismerni, és az ember és a környező világ kapcsolatával foglalkozunk.

Ha a természetes intelligenciát modellezni szeretnénk (azaz a vizsgálat szempontjából a leglényegesebb aspektusokat megragadni, elvonatkoztatni és általánositani szeretnénk), modelleznünk kell a természetes nyelvet – ezt valamilyen formális matematikai logikai nyelv segitségével reprezentálhatjuk, modelleznünk kell a világot – a világot absztrakt matematikai strukturákkal reprezentálhatjuk, és természetesen modelleznünk kell eme kettő kapcsolatát is. Az így kapott séma lesz az emberi intelligencia modellje, amelyet, ha mesterséges szerkezeten realizálunk, mesterséges intelligenciának hivunk.

Tekintsük a következő ábrát:



A fent mondottakból kitűnik, hogy A→B modellje a C→D, a külön-külön A-nak modellje a C és a B-nek modellje a D is.

Nagyon érdekes problémát vet fel a B-D kapcsolat, nevezetesen azt, hogy a végtelenül gazdag világ bizonyos aspektusait milyen matematikai strukturákkal reprezentálhatjuk. Minél többet akarunk a világból "megfogni", annál gazdagabb és bonyolultabb struktúrákat kell választanunk annak modellezésére. E célból jöttek létre a nem klasszikus modellelméletek, például a Hayes-féle cselekvési logika [10], a Kripke-féle modális modellelmélet [9] vagy az R.Montague-féle intenzionális logika [2]. Mindegyik logika modelljei olyan matematikai struktúrák, amelyek valamilyen új aspektusból többet formalizálnak a végtelenül gazdag világból, mint a klasszikus modellelméletek.

Jelen dolgozat tárgya az A–C–D kapcsolat elemzése, tehát az, hogy milyen matematikai keret adható a természetes nyelvi fragmentumok és a formális logikai nyelvek egységes kezelésére. Ebből az A–C kapcsolat vizsgálatával foglalkozott Chomsky' munkássága, aki a nyelvek szintaktikájának vizsgálata terén sok értékes eredményt ért el, de a szemantika problémáit figyelmen kivül hagyta.

R.Montague látta meg elsőnek, hogy a nyelvek összehasonlitó vizsgálata csak a szintaktika és szemantika egyidejü figyelembevételével vezethet eredményre, és igy munkássága nagyrészt modellelméleti kérdések felvetéséből és megoldásából állt. Ha az előbbi ábránkat tekintjük, akkor azt mondhatjuk, hogy a Montague-féle Univerzális Grammatika tulajdonképpen az A–C–D egységek együttes vizsgálatát jelenti, tehát a természetes nyelvi fragmentumok és a formális logikai nyelvek kapcsolatát, a világot reprezentáló matematikai struktúrák (a logikai értelemben vett modellek) lényegi figyelembevételével.

Az Univerzális Grammatika létrehozásához R.Montague-nak az a felismerése adta az alapötletet, hogy nincs fontos elméleti különbség a természetes nyelvek és a mesterséges logikai nyelvek között. Mindkét fajta nyelv szintaxisát és szemantikáját reprezentálni lehet egyetlen természetes és matematikailag preciz elméletben. Az e célból kidolgozott Univerzális Grammatika sok természetes nyelvi kategóriának (pl. az egyértelmü, többértelmü kifejezések, erős és gyenge szinonima) ad preciz matematikai formalizációt – először az irodalomban. Az Univerzális Grammatika a modellelmélet és az univerzális algebra matematikai eszközeit használja, a cikkben kimondott állitások az univerzális algebra tárgykörébe tartozó tételek.

Több kutatócsoport jutott arra a következtetésre, hogy az univerzális algebra hasznos eszköz a szemantika vizsgálatához. R.Montague itt ismertetésre kerülő munkájához hasonló szellemű univerzális algebrai közelitésmódot találunk például Goguen és társai [6], illetve Andréka-Gergely-Németi [5] munkáiban.

R.Montague elméletének alátámasztására cikkében két nyelv, egy angol nyelvi fragmentum, és egy általa konstruált új nem-klasszikus logikai nyelv, az intenzionális logika nyelvét közli az Univerzális Grammatikába beágyazva. Az intenzionális logikát éppen abból a célból hozta létre, hogy bizonyos természetes nyelvi problémákat könnyebben lehessen formalizálni. S mivel az Univerzális Grammatika forditáselmélete preciz matematikai alapokat ad két nyelvnek egymásra való forditására, a tanulmánynak ez a része nagy segitséget nyújthat a természetes nyelv számitógép által történő megértéséhez.

Azonban az Univerzális Grammatika éppen ilyen jól alkalmazható több formális logikai nyelv egységes vizsgálatára is. (Itt a Barwise, Makowski stb. által létrehozott un. "absztrakt modellelmélet" vagy "soft model theory" céljaira gondolunk [11].

Ebben a dolgozatban a klasszikus első, másod és omega rendü logikákat az Univerzális Grammatikában leirt módszerrel adjuk meg, és azonkivül bemutatunk egy ezektől eltérő szerkezetü új – parciális algebrákon alapuló – logikát [3], szintén az Univerzális Grammatikába beágyazva. Egy ALGOL tipusu programozási nyelv hasonló eszközökkel történő megadásával egy külön cikkben foglalkozunk [13]. A dolgozat második részében a R.Montague cikkében bizonyitás nélkül szereplő tételek preciz kimondását, helyenként élesitését és bizonyitásait közöjük.

I. UNIVERZÁLIS GRAMMATIKA

1. *ALAPFOGALMAK*

Az 1-5 részekben az 'α' 'β' 'ξ' 'η' a rendszámokat jelöli. Egy β argumentumú reláció (az A halmaz elemein), az A halmaz elemein β tipusú sorozatainak halmaza.

Egy β argumentumú operáció (az A-n) az egy (β+1) argumentumú F reláció (A elemei között) úgy, hogy valahányszor $<a_\xi>_{\xi<\beta}$ az A elemeinek β tipusú sorozata, létezik pontosan egy olyan x objektum (az A-ban), hogy az $<a_\xi>_{\xi<\beta}$ után írva az egytagú $<x>$ sorozatot, $<<a>_{\xi<\beta}, x>>\epsilon F$.

Ezt így jelöljük:

$$F\ (<a_\xi>_{\xi<\beta}) = x$$

F egy operáció (az A-n) akkor és csak akkor, ha F egy β argumentumú operáció az A-n valamely β rendszámra.

Egy függvény egy-argumentumú operáció; ha f egy függvény, akkor

$$f(x) = f(<x>)\ .$$

Egy algebra egy $<A,F_\gamma>_{\gamma\epsilon\Gamma}$ rendszer, ahol A egy nemüres halmaz, Γ tetszőleges halmaz, és minden F_γ ($\gamma\epsilon\Gamma$-ra) egy operáció az A-n. Ha A egy tetszőleges halmaz, x tetszőleges eleme A-nak és $\alpha<\beta$, akkor

$I_{\alpha,\beta,A}$ – β argumentumú α-edik vetitő operáció Az A-n;

$C_{x,\beta,A}$ – β argumentumú konstans operáció az A-n x értékkel;

azok a β argumentumú operációk az A-n, hogy

$$I_{\alpha,\beta,A}\,(a) = a_\alpha \quad \text{és} \quad C_{x,\beta,A}\,(a) = x$$

minden A elemeiből alkotott a β tipusú sorozatra.

Ha G egy α argumentumú operáció egy nemüres A halmazon és $<H_\xi>_{\xi<\alpha}$ β argumentumú operációk α tipusú sorozata az A-n, akkor $G^A<H_\xi>_{\xi<\alpha}$ – azaz egy G operációnak a $<H_\xi>_{\xi<\alpha}$ operáció sorozattal alkotott kompoziciója az A-ra vonatkozóan az egy β argumentumú operáció az A-n úgy, hogy

$$G^A <H_\xi>_{\xi<\alpha}(a) = G(<H_\xi(a)>_{\xi<\alpha})$$

minden a β tipusú sorozatra.

Ha $<A, F_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ egy algebra, akkor az $<A, F_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ feletti polinom operációk osztálya az a legkisebb K osztály, amelyre

(1) $F_\gamma \in K$ minden $\gamma\in\Gamma$-ra;

(2) $I_{\alpha,\beta,A} \in K$ minden α, β rendszámra úgy, hogy $\alpha<\beta$;

(3) $C_{x,\beta,A} \in K$ valahányszor $x\in A$ és β egy rendszám;

(4) minden α és β rendszámra és α argumentumú G operációra az A-n és minden α tipusú β argumentumú $<H_\xi>_{\xi<\alpha}$ operációk sorozatára az A-n
ha $G \in K$ és $H_\xi \in K$ minden $\xi<\alpha$-ra, akkor $G^A<H_\xi>_{\xi<\alpha} \in K$.

Ha $<A, F_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ és $<B, G_\gamma>_{\gamma\in\Delta}$ algebrák, akkor h homorfizmus $<A, F_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ -ból $<B, G_\gamma>_{\gamma\in\Delta}$ -ba akkor és csak akkor, ha

(1) $<A, F_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ és $<B, G_\gamma>_{\gamma\in\Delta}$ hasonlóak (abban az értelemben, hogy $\Gamma = \Delta$ és minden $\gamma\in\Gamma$-ra F_γ és G_γ ugyanannyi argumentumú operációk);

(2) h egy függvény, melynek értelmezési tartománya A és az értékkészlete B-ben van,

(3) valahányszor $\gamma\in\Gamma$ és $<a_\xi>_{\xi<\beta}$ az F_γ értelmezés tartományában egy sorozat,

$$h(F_\gamma(<a_\xi>_{\xi<\beta})) = G_\gamma(<h(a_\xi)>_{\xi<\beta}$$

Azt mondjuk, hogy a h homomorfizmus $<A, F_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ -ból a $<B, G_\gamma>_{\gamma\in\Delta}$ -ra, ha azonkivül B megegyezik a h értékkészletével.

1. Tétel: Ha $<A, F_\gamma>_{\gamma\epsilon\Gamma}$ egy algebra, h egy homomorfizmus $<A, F_\gamma>_{\gamma\epsilon\Gamma}$-ból valamely algebrára, és minden $\gamma\epsilon\Delta$-ra G_γ egy polinom operáció az $<A, F_\gamma>_{\gamma\epsilon\Gamma}$ felett, akkor létezik pontosan egy $<B, H_\gamma>_{\gamma\epsilon\Delta}$ algebra, hogy h homomorfizmus $<A, G_\gamma>_{\gamma\epsilon\Delta}$-ból $<B, H_\gamma>_{\gamma\epsilon\Delta}$-ra.

Bizonyítás a II.fejezetben.

2. *SZINTAXIS*

Egy egyértelműsített nyelv az egy $<A, F_\gamma, X_\delta, S, \delta_o>_{\substack{\gamma\epsilon\Gamma \\ \delta\epsilon\Delta}}$ rendszer, ahol

(1) $<A, F_\gamma>_{\gamma\epsilon\Gamma}$ egy algebra*,

(2) minden $\delta\epsilon\Delta$-ra, X_δ az A egy részhalmaza;

(3) A az a legkisebb halmaz, amely részhalmazként tartalmazza az összes X_δ-t $\delta\epsilon\Delta$-ra és zárt az összes F_γ operációra nézve (minden $\gamma\epsilon\Gamma$-ra);

(4) X_δ és az F_γ értékkészlete diszjunkt valahányszor $\delta\epsilon\Delta$ és $\gamma\epsilon\Gamma$;

(5) Legyen $\gamma,\gamma'\epsilon\Gamma$; a F_γ értelmezési tartományából egy sorozat, a' $F_{\gamma'}$ értelmezési tartományából egy sorozat. Akkor minden γ, γ'-ra és a, a'-re ha $F_\gamma(a) = F_{\gamma'}(a')$ akkor $\gamma = \gamma'$ és $a = a'$;

(6) S a következő formájú sorozatok halmaza $<F_\gamma, <\delta_\xi>_{\xi<\beta}, \varepsilon>$, ahol $\gamma\epsilon\Gamma$, β az F_γ operáció argumentumszáma, $\delta_\xi\epsilon\Delta$ minden $\xi<\beta$ és $\varepsilon\,\epsilon\Delta$.

Megjegyzés:
- az X_δ halmazok az egyértelműsített nyelv elemi kifejezéseinek halmazai;
- F_γ a strukturális operációk;
- az A halmaz a nyelv összes (nem feltétlenül értelmes) kifejezéseinek halmaza (azaz azok a kifejezések, amelyek az alapkifejezésekből kaphatók a

---

* Ha kikötnénk, hogy $<A, F_\gamma>_{\gamma\epsilon\Gamma}$ heterogén algebra legyen az (6) pontban lévő szabályoknak megfelelően, akkor nem kéne külön bevezetni például a szintaktikus kategória fogalmát. Az Univerzális Grammatika heterogén algebrákon épülő változatát egy későbbi munkában fogjuk közölni.

strukturális operációk ismételt alkalmazásaival);

– S a szintaktikus szabályok halmaza. Ezeknek a szerepét a szintaktikus kategóriák alábbi definiciója fogja megvilágítani;

– δ_o a kifejezendő mondatok kategóriájának indexe.

* * *

2. Tétel A fenti (1)–(5) feltételek teljesülnek akkor és csak akkor, ha $<A, F_\gamma>_{\gamma\epsilon\Gamma}$ egy úgynevezett szabad algebra, a vele hasonló algebrák között, melyet az $\bigcup_{\delta\epsilon\Delta} X_\delta$ szabadon generál.

Bizonyítás a II.fejezetben (2.tétel).

Ha $\mathfrak{A} = <A, F_\gamma, X_\delta, S, \delta_o>_{\gamma\epsilon\Gamma, \delta\epsilon\Delta}$ egy egyértelmüsített nyelv, akkor $\mathfrak{A}$ a szintaktikus kategóriák C családját generálja, akkor és csak akkor, ha

(1) ha $C = \{C_\delta\}_{\delta\epsilon\Delta}$ A részhalmazainak egy Δ-val indexelt rendszere;

(2) $X_\delta \subseteq C_\delta$ minden $\delta\epsilon\Delta$-ra;

(3) valahányszor $<F_\gamma, <\delta_\xi>_{\xi<\beta}, \varepsilon>\epsilon S$ és $a_\xi \epsilon C_{\delta_\xi}$ minden $\xi<\beta$-ra

$$F(<a_\xi>_{\xi<\beta}) \epsilon C_\varepsilon ;$$

(4) valahányszor C' kielégiti (1)–(3)-t, $C_\delta \subseteq C'_\delta$ minden $\delta\epsilon\Delta$-ra.

$\bigcup_{\delta\epsilon\Delta} C_\delta$ az $\mathfrak{A}$ egyértelműsitett nyelv értelmes kifejezéseinek halmaza.

3. Tétel: Ha $\mathfrak{A}$ tetszőleges egyértelműsített nyelv, akkor $\mathfrak{A}$ pontosan egy szintaktikus kategória-családot generál.

Bizonyítás a II. fejezetben.

A nyelv az egy pár

$$<<A, F_\gamma, X_\delta, S, \delta_o>_{\gamma\in\Gamma,\ \delta\in\Delta}, R>$$

úgy, hogy

$$<A, F_\gamma, X_\delta, S, \delta_o>_{\gamma\in\Gamma,\ \delta\in\Delta}$$

egy egyértelmüsített nyelv és R egy bináris reláció, amelynek az értelmezési tartománya az A-ban van.

Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A} = <A, F_\gamma, X_\delta, S, \delta_o>_{\gamma\in\Gamma,\ \delta\in\Delta}$ és $L = <\mathfrak{A}, R>$.

Akkor $\underline{PE_L}$ (vagy az L helyes* (proper) kifejezéseinek halmaza) az R értékkészlete ;

$\underline{OI_L}$ (vagy az L operációs indexeinek halmaza) a Γ;

$\underline{CI_L}$ (vagy az L kategória indexeinek halmaza) az Δ;

$\underline{SR_L}$ (vagy az L szintaktikus szabályainak halmaza) az S;

$BS_{\delta,L}$ (az L δ-ik alaphalmaza) a ζ objektumok olyan halmaza, hogy $\zeta' R \zeta$ valamely $\zeta' \in X_\delta$ -ra; azaz $BS_{\delta,L} = \{\zeta : (\exists \zeta' \in X_\delta)\, \zeta' R \zeta\}$;

$Cat_{\delta,L}$ (az L δ-dik szintaktikus kategóriája) az a ζ objektumok olyan halmaza, hogy $\zeta' R \zeta$ valamely $\zeta' \in C_\delta$ -ra, ahol C_δ egy szintaktikus kategória család, melyet az $\mathfrak{A}$ generál.

$\underline{ME_L}$ (az L értelmes kifejezéseinek halmaza) az a $\bigcup_{\delta\in\Delta} Cat_{\delta,L}$;

$\underline{DS_L}$ (az L kijelentő mondatainak halmaza) az a $Cat_{\delta_o,L}$

Emlékeztetni szeretnénk arra, hogy

$$S \subseteq \{<F_\gamma, <\delta_\xi>_{\xi<\beta}, \varepsilon> \ : \ \gamma\in\Gamma\}.$$

S tulajdonképpen egy parciális algebra a Δ felett, azaz $<\Delta, M_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$, ahol

$$M_\gamma = \{ <<\delta_\xi>_{\xi<\beta}, \varepsilon> \ : <F_\gamma, <\delta_\xi>_{\xi<\beta}, \varepsilon> \in S \}$$

A $<\Delta, M_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ algebra feletti polinom operációkat származtatott szintaktikus szabályoknak nevezzük.

---

* Nem minden helyes kifejezés értelmes kifejezés, azaz $\bigcup_{\delta\in\Delta} C_\delta$ általában valódi része A-nak.

Részletesebben:

Az L származtatott szintaktikus szabályainak osztálya az a legkisebb K osztály, amelyre

(1) $S \subseteq K$;

(2) ha α, β rendszámok, $\alpha < \beta$ és $<\delta_\xi>_{\xi<\beta}$ egy Δ elemeiből álló β tipusú sorozat, akkor $<I_{\alpha,\beta,A}, <\delta_\xi>_{\xi<\beta}, \delta_\alpha> \in K$;

(3) ha β rendszám, $<\delta_\xi>_{\xi<\beta}$, a Δ elemeiből álló β tipusú sorozat, $\varepsilon \in \Delta$, $x \in X_\delta$, akkor $<C_{x,\beta,A}, <\delta_\xi>_{\xi<\beta}, \varepsilon> \in K$;

(4) ha α, β rendszámok, $<G, <\delta_\xi>_{\xi<\alpha}, \varepsilon> \in K$ és $<H_\xi>_{\xi<\alpha}$ egy sorozat úgy, hogy $<H_\xi, <\gamma_\eta>_{\eta<\beta}, \delta_\xi>$ minden $\xi<\alpha$-ra, akkor $<G^A<H_\xi>_{\xi<\alpha}, <\gamma_\eta>_{\eta<\beta}, \varepsilon> \in K$.

Ha $\zeta \in ME_L$, akkor ζ szintaktikailag többértelmü az L-ben akkor és csak akkor, ha van legalább két $\zeta' \in \bigcup_{\delta\in\Delta} C_\delta$ objektum úgy, hogy ζ' R ζ, ahol C az $\mathfrak{A}$ által generált szintaktikus kategória-család.

Egy L nyelv szintaktikailag többértelmü akkor és csak akkor, ha van egy értelmes kifejezés az L-ben, amely szintaktikailag többértelmü.

4. Tétel: Ha L egy nyelv, $L = <\mathfrak{A}, R>$ és $<H, <\delta_\xi>_{\xi<\beta}, \varepsilon>$ az L származtatott szintaktikus szabálya, C az L által generált szintaktikus kategória család és $a_\xi \in C_{\delta_\xi}$ minden $\xi<\beta$-ra, akkor $H(<a_\xi>_{\xi<\beta}) \in C_\varepsilon$.

Bizonyítás a II. fejezetben.

3. *SZEMANTIKA: JELENTÉSELMÉLET*

Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A} = \langle A, F_\gamma, X_\delta, S, \delta_0 \rangle_{\gamma\in\Gamma, \delta\in\Delta}$ és $L = \langle \mathfrak{A}, R \rangle$ egy nyelv.

Az L egy interpretációja egy $\langle B, G_\gamma, f \rangle_{\gamma\in\Gamma}$ hármas rendszer úgy, hogy $\langle B, G_\gamma \rangle_{\gamma\in\Gamma}$ egy algebra, hasonló $\langle A, F_\gamma \rangle_{\gamma\in\Gamma}$-hoz és f egy függvény $\bigcup_{\delta\in\Delta} X_\delta$-ból B-be.

(Itt B-t úgy tekintjük, mint az interpretáció által előírt jelentések halmazát G_γ az F_γ strukturális operációnak megfelelő szemantikus operáció, az f jelentést rendel a nyelv alapkifejezéseihez.)

Tegyük fel, hogy $\mathfrak{B} = \langle B, G_\gamma, f \rangle_{\gamma\in\Gamma}$. Akkor a $\mathfrak{B}$ által meghatározott L-re vonatkozó jelentés hozzárendelés az egy g homomorfizmus $\langle A, F_\gamma \rangle_{\gamma\in\Gamma}$-ből $\langle B, G \rangle_{\gamma\in\Gamma}$-ba úgy, hogy $f \subseteq g$ (1.ábra). Ilyen g leképezés létezik, és csak egy létezik.

Továbbá, ha $\zeta \in ME_L$, ζ b-t jelenti az L-ben $\mathfrak{B}$ szerint, akkor és csak akkor, ha van olyan $\zeta' \in \bigcup_{\delta\in\Delta} C_\delta$, hogy $\zeta' R \zeta$ és $g(\zeta') = b$, ahol C egy $\mathfrak{A}$ által generált szintaktikus kategória-család és g az L-re vonatkozó jelentés hozzárendelés, melyet a $\mathfrak{B}$ határoz meg.

ζ szemantikailag többértelmű az L-ben a $\mathfrak{B}$-re vonatkozóan akkor és csak akkor, ha ζ legalább két különböző dolgot jelent az L-ben a $\mathfrak{B}$-re vonatkozóan (2.ábra).

ζ erősen szinonim θ-val az L-ben a $\mathfrak{B}$-re vonatkozóan akkor és csak akkor, ha $\zeta, \theta \in ME_L$ és minden $\delta\in\Delta$-ra

$$\{g(\zeta') : \zeta' \in C_\delta \text{ és } \zeta' R \zeta\} = \{g(\theta) : \theta' \in C_\delta \text{ és } \theta' R \theta\}$$

ahol C és g a fentiek;

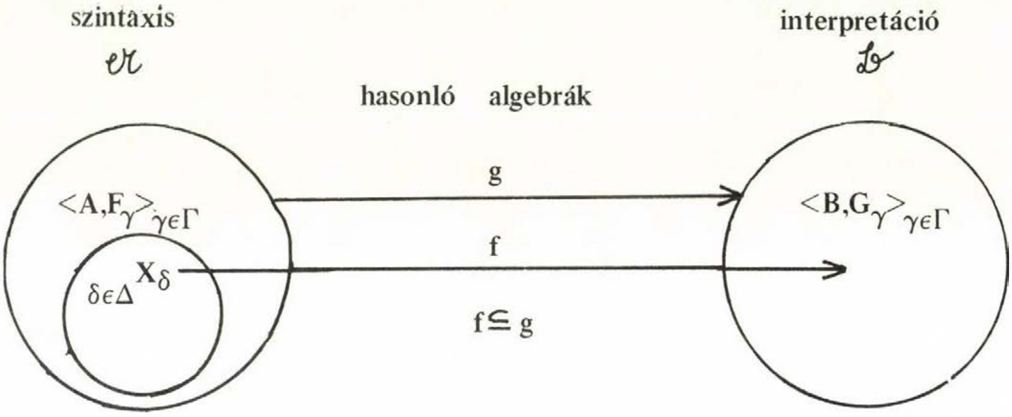
(Ha minden kategóriára külön-külön mind a kettő ugyanazokat a dolgokat jelenti. 3.ábra)

ζ gyengén szinonim θ-val az L-ben a $\mathfrak{B}$-re vonatkozóan akkor és csak akkor, ha $\zeta, \theta \in ME_L$ és

$$\{ b:\ \zeta \text{ b-t jelenti az L-ben a } \mathfrak{B}\text{-re vonatkozóan} \} =$$
$$= \{ b:\ \theta \text{ b-t jelenti az L-ben a } \mathfrak{B}\text{-re vonatkozóan} \}.$$

(Ha mind a kettő ugyanazokat a dolgokat jelenti, de nem feltétlenül kategóriánként. 4.ábra.)

A jelentéselmélet algebráinak kapcsolata:



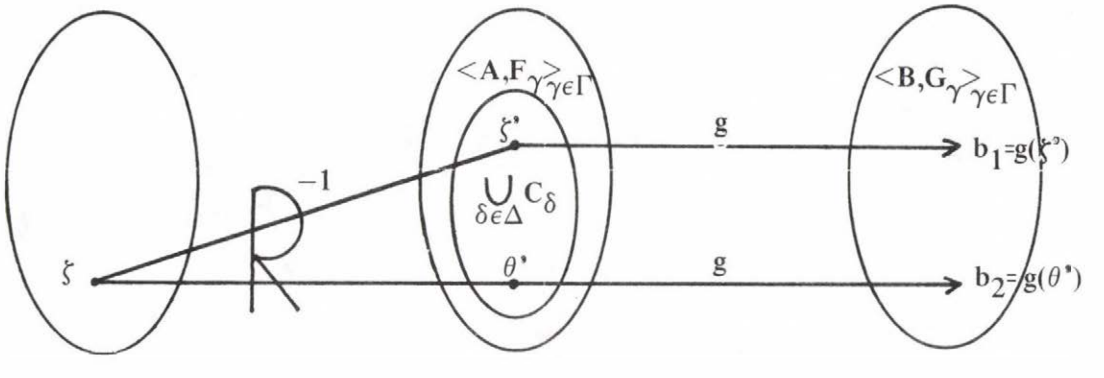
ahol

A	–	az egyértelmüsített nyelv összes kifejezéseinek halmaza;
F_γ	–	szintaktikus operációk;
$\bigcup_{\delta \in \Delta} X_\delta$	–	az egyértelmüsített nyelv alapkifejezései;
B	–	jelentések halmaza
G_γ	–	szemantikus operációk;
f	–	függvény, amely jelentéseket rendel a nyelv alapkifejezéseihez;
g	–	jelentés hozzárendelés, az f függvény egyetlen kiterjesztése homomorfizmussá $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.

1. ábra

Szemantikailag többértelmü kifejezés

A nyelv $L = \langle \mathfrak{A}, R \rangle$ Egyértelmüsített nyelv $\mathfrak{A}$ Interpretáció $\mathfrak{B}$

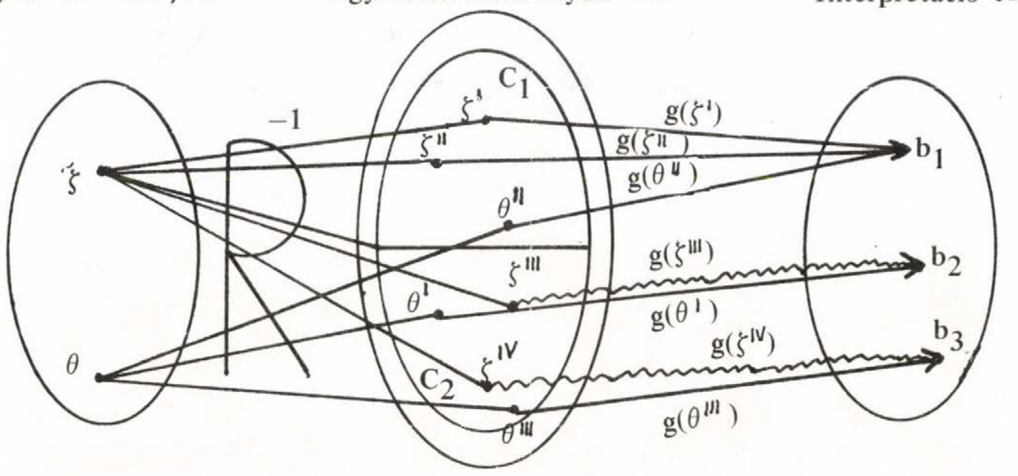


$\zeta' R \zeta$ és $\theta' R \theta$; g jelentés hozzárendelés.

2. ábra

Erősen szinonim kifejezések

A nyelv $L = \langle \mathfrak{A}, R \rangle$ Egyértelmüsített nyelv $\mathfrak{A}$ Interpretáció $\mathfrak{B}$

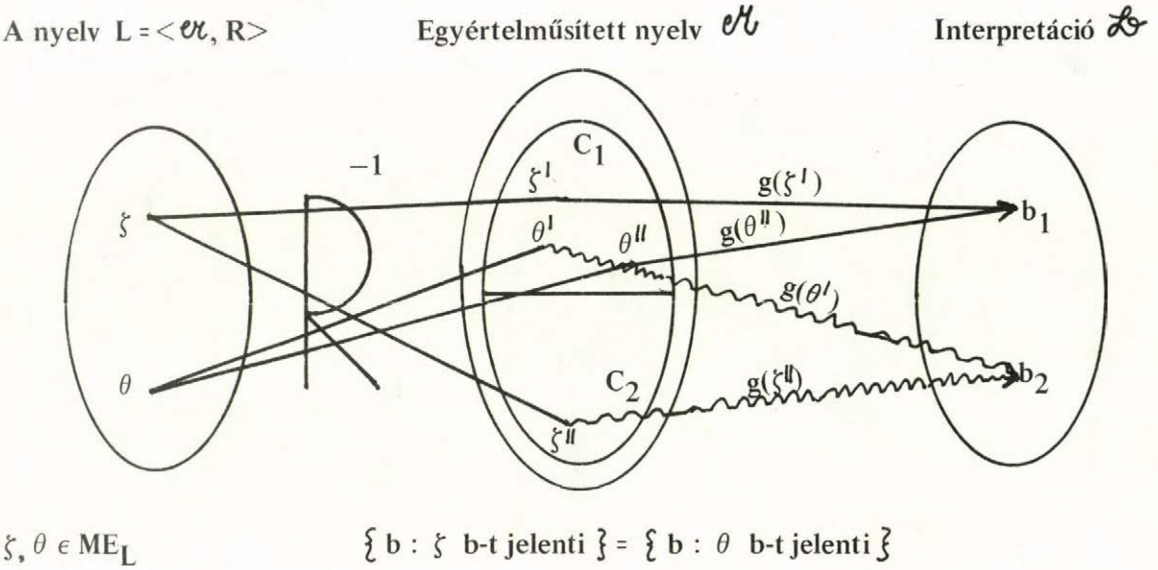


$\zeta, \theta \in ME_L$ és minden $\delta \in \Delta$ -ra

$\{ g(\zeta'), \zeta' \in C_\delta$ és $\zeta' R \zeta \} = \{ g(\theta) : \theta' \in C_\delta$ és $\theta' R \theta \}$.

3. ábra

Gyengén szinonim kifejezések



4. ábra

Tegyük fel pótlólag a fenti feltevésekhez, hogy L' szintén egy nyelv és $\mathfrak{B}'$ egy interpretáció az L-re. Akkor ζ nyelvek közöttien szinonim ζ'-vel (L, $\mathfrak{B}$, L', $\mathfrak{B}'$-re vonatkozóan) akkor és csak akkor, ha $\zeta \in ME_L$ és $\zeta' \in ME_{L'}$,

$$\{ b : \zeta \text{ jelenti b-t az L-ben } \mathfrak{B} \text{-re vonatkozóan} \} =$$
$$= \{ b : \zeta' \text{ jelenti b-t az L'-ben } \mathfrak{B}' \text{-re vonatkozóan} \} .$$

(Legyen B és B' a két interpretáció tartóhalmaza. A nyelvek közötti szinonim kifejezések jelentése $B \cap B'$ halmazba esik.)

4. *SZEMANTIKA : REFERENCIAELMÉLET*

Legyen e, t, s három különböző objektum, egyik sem rendezett pár.

A tipusok halmaza az a legkisebb T halmaz, amelyre igaz

(1) e, t T-beliek. (e a létező dolgok vagy entitások tipusa, t az igazságértékek tipusa).

(2) valahányszor $\sigma, \tau \in T$ a $<\sigma,\tau>$ rendezett pár is T-beli (ez olyan függvények tipusa,

amelyek σ tipusú objektumokból τ tipusú objektumokba mennek).

(3) valahányszor $\tau \in T$, az $<s, \tau>$ rendezett pár is T-beli (ez a τ tipusú objektumok "értelmeinek" (sense) tipusa).

Legyen E és I tetszőleges két halmaz, és $\tau \in T$. Definiáljuk a $D_{\tau,E,I}$ -t, azaz a lehetséges τ tipusú denotációk halmazát, amely az E halmazon (az entitások vagy lehetséges individumok halmazán) és az I halmazon (a lehetséges világok halmazán) alapul, a következőképpen:

$$D_{e,E,I} = E$$

$$D_{t,E,I} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \text{ ahol } \emptyset,$$

mint általában, az üres halmaz, és $\emptyset$ a "hamis", $\{\emptyset\}$ az "igaz" igazságértéknek felel meg;

ha $\sigma, \tau \in T$, akkor

$$D_{<\sigma,\tau>E,I} = (D_{\tau,E,I})^{D_{\sigma,E,I}}$$

(ahol A^B általában azon függvények halmaza, melyeknek értelmezési tartománya B, és az értékkészlete az A-ban van).

Ha $\tau \in T$, akkor

$$D_{<s,\tau>,E,I} = (D_{\tau,E,I})^{I}.$$

Legyen J egy halmaz. Ekkor $M_{\tau,E,I,J}$ a τ tipusú lehetséges jelentések halmaza, amely az E entitás halmazon és az I lehetséges világok halmazán van értelmezve, és a J halmaz a használat kontextusa:

$$M_{\tau,E,I,J} = (D_{\tau,E,I})^{IxJ}$$

(IxJ -n az $<i, j>$ rendezett párok halmazát értjük, amelyre

$$i \in I \quad \text{és} \quad j \in J$$

Az $<i, j>$ párt hivatkozási pontnak nevezzük.)

Tehát a jelentések kétargumentumú függvények – a lehetséges világok és a használat kontextusának függvényei.*

---

* A J-re azért van szükség, hogy a természetes nyelveknél a mutatónévmásokat, az egyes szám első és második személyű személyes névmásokat stb. kezelni tudjuk. Logikai nyelveknél pedig J a szabad változók kiértékelő függvényeinek halmaza lesz.

Másfelől az <u>értelmek</u> csak egy argumentumú függvények, amelyek a lehetséges világok halmazán vannak értelmezve. Az $<s,\tau>$ tipusú denotációkat a τ tipusú denotációk értelmeinek nevezzük.

A következő bekezdés elolvasása a dolgozat matematikai részének megértéséhez nem szükséges.

A jelentés és az értelem közti intuitiv különbség a következő:

<u>A jelentések</u> azok az entitások, amelyek a kifejezések interpretációjául szolgálnak (és így, ha egy összetett kifejezés interpretációja mindig alkotórészei interpretációinak függvénye, akkor nem lehet azonosítani egyedül a lehetséges világok függvényeivel), mig az

<u>értelmek</u> olyan intenzionális entitások, amelyeket kifejezések jelölnek.

Frege [8] munkájában nem volt szükség ilyen megkülönböztetésre, mert az indexikus lokúciók kezelését szándékosan elkerülte.

Legyen L egy nyelv, és

$$L = \langle\langle A, F_\gamma, X_\delta, S, \delta_o\rangle_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ \delta\in\Delta}}, R\rangle$$

Egy tipus hozzárendelés az L-re az egy σ függvény Δ-ból a T-be úgy, hogy $\sigma(\delta_o) = t$.

Egy <u>Fregei interpretáció</u> az L-re az egy $\langle B, G_\gamma, f\rangle_{\gamma\in\Gamma}$ az L-re úgy, hogy valamely nem üres E, I, J halmazokra és L-re vonatkozó σ tipushozzárendelésre;

(1) $B \subseteq {}_{\tau\in T} M_{\tau,E,I,J}$;

(2) Valahányszor $\delta\in\Delta$ és $\zeta \in X_\delta$

$f(\zeta) \in M_{\sigma(\delta),E,I,J}$;

(3) Valahányszor $\langle F_\gamma, \langle\delta_\xi\rangle_{\xi<\beta}, \varepsilon\rangle \in S$ és $b \in M_{\sigma(\delta),E,I,J}$ minden $\xi < \beta$ -re, akkor $G_\gamma(\langle b_\xi\rangle_{\xi<\beta}) \in M_{\sigma(\varepsilon),E,I,J}$.

Megjegyzés: A Fregei interpretáció annyival gazdagabb, mint a 3.pontban definiált interpretáció, hogy a referencia elmélet összes fogalmát magába foglalja.

A definiciókból az adódik, hogy az A-beli nem értelmes kifejezéseknek ($A \setminus \bigcup_{\delta \in \Delta} C_\delta$ elemeinek) is van jelentése. Felmerül a kérdés, hogyha valamilyen értelmes módon megkonstruáljuk a $\mathcal{L}$ interpretációt, akkor hogyan vegyük föl benne ezeknek a nem értelmes kifejezéseknek a jelentését.

Pontosabban a kérdés úgy hangzik, hogy az $\bigcup_{\tau \in T} M_{\tau,E,I,J}$ heterogén algebrát hogyan terjesszük ki (to expand) totális algebrává, azaz hogyan értelmezzük a müveleteket olyan argumentumokra, melyek nem teljesítik az S szintaktikai szabályokat. Egy lehetséges válasz a kérdésre az, hogy tetszőleges módon.

Igy a nem értelmes kifejezések jelentése tetszőleges, de rögzített elem lesz. Montague cikkében erről a kérdésről nem beszél, de ez a megoldás összhangban van munkájával, és ezért a jelen dolgozatban ezt a megoldást fogadjuk el.

Abban a heterogén algebrai közelítésben, amelyen most dolgozunk, ez a probléma nem merül fel.

* * *

Egy Fregei interpretáció hivatkozási pontjainak halmaza egy egyértelmü meghatározott $I \times J$.

Egy L-re vonatkozó E, I, J és σ -val kapcsolatos Fregei interpretáció egy $\langle B, G_\gamma, f \rangle_{\gamma \in \Gamma}$ interpretáció az L-re úgy, hogy a fenti (1)–(3) teljesül.

Az L egy modellje egy $\langle \mathfrak{B}, \langle i, j \rangle \rangle$ pár úgy, hogy $\mathfrak{B}$ egy Fregei interpretáció az L-re és $\langle i, j \rangle$ a $\mathfrak{B}$ egy hivatkozási pontja. (Itt az i és j rendre az aktuális világ és az aktuális használat kontextusa, amelyeket a modell specifikál.)

Tegyük fel, hogy $\langle \mathfrak{B}, \langle i, j \rangle \rangle$ L egy modellje. Ekkor az L-re vonatkozó $\langle \mathfrak{B}, \langle i, j \rangle \rangle$ által determinált denotáció hozzárendelés egy h függvény A domain-nal úgy, hogy minden

$\zeta \in A$-ra $h(\zeta) = g(\zeta)(i, j)$, ahol g egy $\mathfrak{B}$ szerinti jelentés hozzárendelés az L-re.

Továbbá, η denotációja x (L és $<\mathfrak{B}, <i, j>>$ szerint (csak akkor, ha van egy olyan b, hogy η b-t jelenti az L-ben a $\mathfrak{B}$ -re vonatkozóan, és

$$b(i, j) = x.$$

Továbbá φ L egy igaz mondata a $<\mathfrak{B}, <i, j>>$ -re és a φ' analizisre vonatkozóan akkor és csak akkor, ha

$$\varphi' \in C_{\delta_0};$$

$$\varphi' R \varphi \text{ és}$$

$$h(\varphi') = \{\emptyset\},$$

ahol C egy szintaktikus kategória-család, melyet az

$$<A, F_\gamma, X_\delta, S, \delta_0>_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \delta\in\Delta}}$$

generált, és h az L-re vonatkozó denotáció hozzárendelés a $<\mathfrak{B}, <i, j>>$ által meghatározva.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel – még az utolsó paragrafus feltevéseihez –, hogy L egy szintaktikusan egyértelmü nyelv. Ez esetben az igazság feltételeket ezután nem kell a mondat valamelyik analiziséhez képest meghatározni.

φ igaz mondata az L-nek a $<\mathfrak{B}, <i, j>>$ modellre vonatkozóan akkor és csak akkor, ha $\varphi \in DS_L$ és φ' igaz mondata az L-nek, a $<\mathfrak{B}, <i, j>>$ -re és φ' analizisre vonatkozóan, ahol $\varphi' C_{\delta_0}$ egyetlen tagja úgy, hogy $\varphi' R \varphi$ és C olyan, mint az utolsó bekezdésben.

Adjuk még hozzá azt a feltevést, hogy K egy L-re vonatkozó modellek osztálya. (A legfontosabb esetek azok, amelyekben K az L logikailag lehetséges modelljeinek osztálya; a K-t jellemző feltételek között lehet az a követelmény, hogy az L "logikai operáció" és "logikai szavai" a szokásos interpretációkat kapják.)

Ekkor φ K-érvényes az L-ben akkor és csak akkor, ha φ az L igaz mondata K minden tagjára vonatkozóan. (Ha K-t pont a jelzett módon értjük, ez a fogalom a logikai validitást jelenti.)

Ha $\zeta, \eta \in ME_L$, akkor ζ K-ekvivalens η-val az L-ben akkor és csak akkor, ha

(1) $\zeta, \eta \in Cat_{\delta,L}$ valamely $\delta \in CI_L$ -re;

(2) valahányszor $\langle \mathfrak{B}, \langle i, j \rangle\rangle \in K$, a ζ denotációja az L-re és a $\langle \mathfrak{B}, \langle i, j\rangle\rangle$ -re vonatkozóan ugyanaz, mint az η denotációja az L-re és az $\langle \mathfrak{B}, \langle i, j\rangle\rangle$ -re vonatkozóan.

Jelen fejezet hátralévő részének elolvasása a dolgozat matematikai részének megértéséhez nem szükséges.

L egy példánya ("token") alatt egy $\langle\zeta, p\rangle$ pár értendő úgy, hogy $\zeta \in PE_L$ és p bármilyen rendezett pár az I xJ-ből. (Itt a p-t egy lehetséges hivatkozási pontnak tekintjük.) Az alábbiakban a PE_L elemeit mondat tipusoknak nevezzük.

Az a hasznos ötlet, hogy a példányt egy mondat tipusból és egy hivatkozási pontból álló párként fogjuk fel Bar-Hilleltől ered. (Szokásos a következményt (vagy logikai konzekvenciát) mondat tipusok közötti relációnak tekinteni: egyet a mondat tipusok, és egyet a mondat példányok között.) Ez utóbbi fogalom az, amelyik felmerül, amikor azt mondjuk, hogy az "én éhes vagyok"-ból – ha Jones mondja Smith-nek – következik a "te éhes vagy", amikor ugyanazon alkalommal Smith mondja John-nak. Pontosabban, tegyük fel, hogy a szóban forgó nyelv csak olyan indexikus kifejezéseket tartalmaz, mint az "én" és "te" névmások. Ekkor a használat kontextusa értelemszerüen személyek rendezett párjaként fogható fel, figyelembe véve a beszélőt, azt a személyt, akihez fordult, és a szituációt le lehet írni a következőkkel: minden i-re annak a példánynak, hogy $\langle$"én éhes vagyok" $\langle i, \langle$Jones, Smith$\rangle\rangle\rangle$ a következménye a következő példány $\langle$"te éhes vagy", $\langle i, \langle$Smith, Jones$\rangle\rangle\rangle$.

A pontos megfogalmazás a következő: ha $\langle\varphi, p\rangle$ és $\langle\psi, q\rangle$ példányok az L-ben, akkor $\langle\varphi, p\rangle$ -ből K-következik $\langle\psi, q\rangle$ az L-ben akkor és csak akkor, ha $\varphi, \psi \in DS_L$, és L minden $\mathfrak{B}$ Fregei interpretációjára abból, hogy $\langle \mathfrak{B}, p\rangle$ K-beli és φ az L egy igaz mondata a $\langle \mathfrak{B}, p\rangle$-re vonatkozóan, következik, hogy $\langle \mathfrak{B}, q\rangle$ K-beli, és ψ az L igaz mondata a $\langle \mathfrak{B}, q\rangle$ -ra vonatkozóan.

Ha $\varphi, \psi \in DS_L$, akkor egy φ mondat tipusból K-következik egy ψ mondat tipus az L-ben akkor és csak akkor, ha $\langle\varphi, p\rangle$ -ből K-következik $\langle\psi, p\rangle$ minden p rendezett párra.

(Világos, hogy a φ K-ekvivalens ψ-vel az L-ben akkor és csak akkor, ha a φ és ψ bármelyikétől K-következik a másik az L-ben.)

Hasonlóképp, az összes logikailag lehetséges interpretációra vonatkozó szinonima implikálja a logikai ekvivalenciát – de megforditva ez nem áll. Kissé pontosabban: ha

(i) az utolsó két bekezdés feltételei teljesülnek;

(ii) ζ, η az L értelmes kifejezései és az L ugyanazon szintaktikus kategóriájához tartoznak;

(iii) ζ gyengén szinonim η-val az L-ben minden $\mathfrak{B}$ interpretációra vonatkozóan úgy, hogy bármelyik i-re és j-re $<\mathfrak{B}, <i, j>> \in K$, akkor

(iv) ζ K-ekvivalens η-val az L-ben.

5. *FORDITÁSELMÉLET*

Tegyük fel, hogy ebben az egész fejezetben L és L' nyelvek

$$L = <\mathfrak{A}, R> \qquad L' = <\mathfrak{A}', R'>$$

ahol

$$\mathfrak{A} = <A, F_\gamma, X_\delta, S, \delta_0>_{\gamma\in\Gamma,\ \delta\in\Delta}$$

$$\mathfrak{A}' = <A', F'_\gamma, X'_\delta, S', \delta_0>_{\gamma\in\Gamma',\ \delta\in\Delta'}.$$

L-ből L'-be való fordítás bázison a következő rendszer értendő:

$$<g, H_\gamma, j>_{\gamma\in\Gamma},$$

úgy, hogy

(1) g egy függvény a Δ-ból a Δ'-be;

(2) j egy függvény, melynek domain-je $\bigcup_{\delta\in\Delta} X_\delta$;

(3) valahányszor $\delta\epsilon\Delta$ és $\zeta\epsilon X_\delta$ $j(\zeta) \in C'g(\delta)$ – ahol C' az $\mathfrak{A}'$ által generált szintaktikus kategória-család;

(4) minden $\gamma\epsilon\Gamma$-ra H_γ egy $<A', F'_\gamma>_{\gamma\epsilon\Gamma}$, algebra feletti polinom operáció ugyanolyan argumentum számú, mint F_γ ;

(5) valahányszor $<F_\gamma, <\delta_\xi>_{\xi<\beta}, \varepsilon> \in S$, $<H_\gamma, <g(\delta_\xi)>_{\xi<\beta}\, g(\varepsilon)>$ az L' egy származtatott szintaktikus szabálya;

(6) $g(\delta_0) = \delta'_0$.

Ha τ egy ilyen forditási bázis, akkor a τ által meghatározott, L-ből L'-be menő forditási függvény az az egyetlen k homomorfizmus az $<A, F_\gamma>_{\gamma\epsilon\Gamma}$ -ból a $<A', H_\gamma>_{\gamma\epsilon\Gamma}$, -ba, amelyre

$$j \subseteq k ;$$

és ζ' a ζ egy forditása az L-ből az L'-be a τ bázison akkor és csak akkor, ha van olyan η, η', amelyre $\eta\, R\, \zeta$, $\eta' R' \zeta$, $\eta \in \bigcup_{\delta\epsilon\Delta} C_\delta$, $\eta' \in \bigcup_{\delta\epsilon\Delta} C'_\delta$ $k(\eta) = \eta'$ ahol C és C' szintaktikus kategória-családok, melyek rendre az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{A}'$ által vannak generálva, és k a τ által meghatározott forditó függvény L-ből L'-be. A forditás legfontosabb használata szemantikai használat, az interpretációk létrehozásának szemantikai használata. Valóban, hogyha megadunk egy forditási bázist L-ből L'-be egy interpretációval együtt, mely a már ismert L' nyelvre vonatkozik, akkor az L egy interpretációja természetes módon determinált, ahogy a továbbiakban előírjuk.

Tegyük fel, hogy a fejezet hátralévő részére

$\tau = <g, H_\gamma, j>_{\gamma\epsilon\Gamma}$ egy forditási bázis L-ből L'-be, és hogy

$\mathfrak{B}' = <B', G'_\gamma, f'>_{\gamma\epsilon\Gamma}$, egy interpretáció L'-re.

Ekkor L-nek az L', $\mathfrak{B}$ és τ által indukált interpretációja az a $<B, G_\gamma, f>_{\gamma\epsilon\Gamma}$ interpretáció az L-re, amelyre

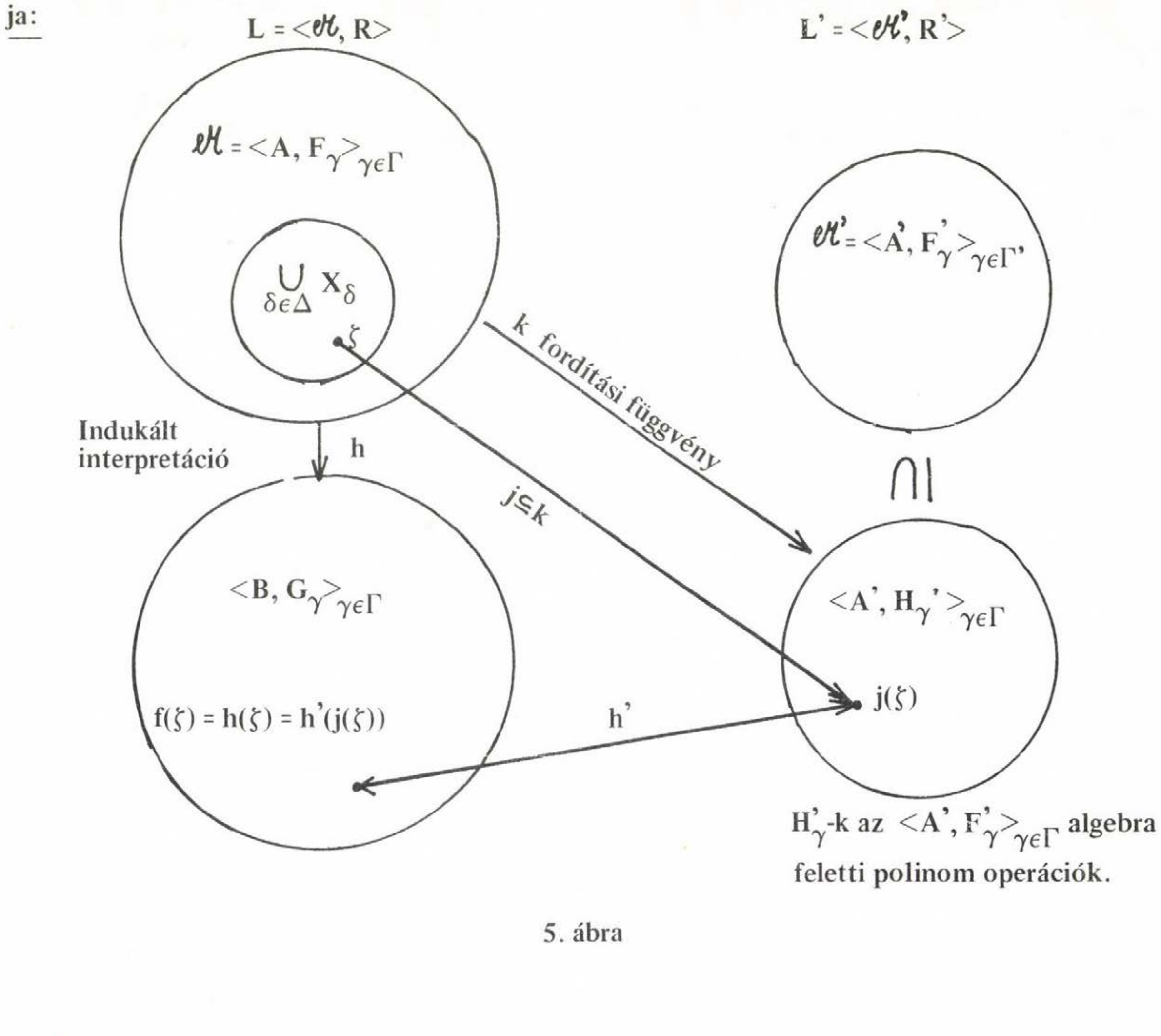
(1) $<B, G_\gamma>_{\gamma\epsilon\Gamma}$ az az egyetlen algebra, hogy h' egy homomorfizmus $<A', H_\gamma>_{\gamma\epsilon\Gamma}$ -ból $<B, G_\gamma>_{\gamma\epsilon\Gamma}$ -ra, ahol h' egy jelentéshozzárendelés az L'-re valamely $\mathfrak{B}'$ által determinált;

(2) minden $\zeta \in \bigcup_{\delta\epsilon\Delta} X_\delta$ -ra $f(\zeta) = h'(j(\zeta))$, ahol h' olyan, mint (1)-ben, (5.ábra).

Abból a célból, hogy biztositsuk egy olyan algebra létezését, amely kielégíti az (1) feltételt, megköveteljük a forditási bázis definiciójában azt, hogy a H_γ operációk polinomoperációk legyenek az $\langle A', F'_\gamma \rangle_{\gamma\in\Gamma}$ felett, vessük egybe az 1.fejezet végén lévő 1.tétellel.

<u>5. Tétel:</u> Tegyük föl, hogy $\mathcal{B}$ az L-nek L', $\mathcal{B}'$ és τ által indukált interpretációja. Ha (1) $\mathcal{B}'$ egy Fregei interpretáció az L'-re, akkor $\mathcal{B}$ egy Fregei interpretáció az L-re. Ha (2) h egy jelentéshozzárendelés az L-re a $\mathcal{B}$ által determinálva, és h' egy jelentéshozzárendelés az L'-re a $\mathcal{B}'$ által determinálva, és k forditófüggvény az L-ből az L'-be a τ által determinálva, akkor h relativ szorzata a k-nak és a h'-nak.

<u>Egy nyelvnek egy másik nyelv, és a két nyelv közötti forditási bázis által indukált interpretáció-ja:</u>



5. ábra

II. TÉTELEK ÉS BIZONYITÁSAIK

1. Tétel: Ha $<A, F_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ egy algebra, h egy homomorfizmus $<A, F_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ -ből valamely algebrára és minden $\gamma\in\Delta$ -ra G_γ egy polinom operáció az $<A, F_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ felett, akkor létezik pontosan egy olyan $<B, H_\gamma>_{\gamma\in\Delta}$ algebra, hogy h homomorfizmus $<A, G_\gamma>_{\gamma\in\Delta}$ -ból $<B, H_\gamma>_{\gamma\in\Delta}$ -ra.

A bizonyítás két részből fog állni, A. és B. állítás bizonyitásából a következőképpen:

A. Állítás: tetszőleges $<A, F_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ algebrára és $h:A \twoheadrightarrow B$ leképzésre igaz, hogy legfeljebb egy olyan $<B, G_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ algebra van, amelyre h homomorfizmus $<A, F_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ és $<B, G_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ között.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy két különböző ilyen algebra van. Az algebrák legfeljebb az operációkban különbözhetnek, mivel a $h : A \twoheadrightarrow B$ leképzés adott.

Legyen ez a két algebra $<B, G_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ és $<B, G'_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$. Belátjuk, hogy minden $\gamma\in\Gamma$-ra $G_\gamma = G'_\gamma$. Bármely A-beli $<a_\xi>_{\xi<\beta}$ sorozatra, ha $<a_\xi>_{\xi\leqslant\beta} \in F_\gamma$, a homomorfizmus definiciójából következik, hogy $<h(a_\xi)>_{\xi\leqslant\beta} \in G_\gamma$ és $<h(a_\xi)>_{\xi\leqslant\beta} \in G'_\gamma$.

Belátjuk, hogy bármely $<b_\xi>_{\xi\leqslant\beta}$ sorozatra, amelyre $<b_\xi>_{\xi\leqslant\beta} \in G_\gamma$, fennáll $<b_\xi>_{\xi\leqslant\beta} \in G'_\gamma$ is.

Ha $<b_\xi>_{\xi\leqslant\beta} \in G_\gamma$ akkor $h : A \twoheadrightarrow B$ miatt mindegyik $b_\xi \in B$-hez van olyan $a_\xi \in A$, hogy $h(a_\xi) = b_\xi$. $<A, F_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ egy algebra, tehát minden $<a_\xi>_{\xi<\beta}$-hoz $\exists\,!\, f$, hogy $<<a_\xi>_{\xi<\beta}, f> \in F_\gamma$. h homomorfizmus definiciója miatt $<<h(a_\xi)>_{\xi<\beta}, h(f)> \in G_\gamma$, tehát $h(f) = b_\beta$ (hiszen $<b_\xi>_{\xi\leqslant\beta} \in G_\gamma$, $\forall\, \xi<\beta$ $b_\xi = h(a_\xi)$ és G_γ egyértelmü).

A homomorfizmus definiciója miatt $<<h(a_\xi)>_{\xi<\beta}, h(f)> \in G'_\gamma$, és ezért $<b_\xi>_{\xi\leq\beta} \in G'_\gamma$ (hiszen láttuk, hogy $h(f) = b_\beta$).

Ezzel beláttuk, hogy

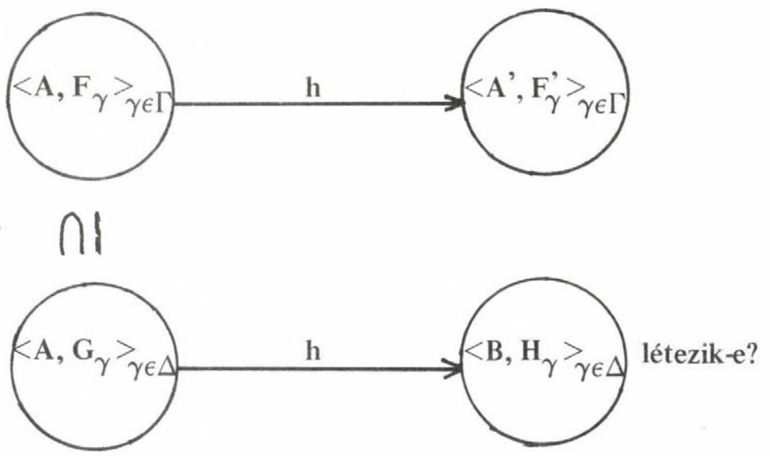
$$G_\gamma \subseteq G'_\gamma .$$

Fordítva ugyanígy:

$$G'_\gamma \subseteq G_\gamma .$$

Tehát $G_\gamma = G'_\gamma$ bármely $\gamma\in\Gamma$ -re.

B. Állítás: Ha $<A, F_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ egy algebra, és h homomorfizmus $<A, F_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ -ról valamely $<A', F'_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ algebrára, és $<A, G_\gamma>_{\gamma\in\Delta}$ olyan algebra, hogy mindegyik G_γ polinom operáció $<A, F_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ felett, akkor létezik olyan $<B, H_\gamma>_{\gamma\in\Delta}$ algebra, amelyre az adott h homomorfizmus az $<A, G_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ algebráról.



Bizonyítás: Be fogjuk bizonyítani, hogy minden $\gamma\in\Delta$ -hoz létezik olyan H_γ, hogy h homomorfizmus $<A, G_\gamma>$ -ról $<B, H_\gamma>$ -ra. Ebből következik az is, hogy h homomorfizmus $<A, G_\gamma>_{\gamma\in\Delta}$ -ról $<B, H_\gamma>_{\gamma\in\Delta}$ -ra is.

(1) Legyen $G_\gamma \in \{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Ekkor a tételben szereplő feltétel miatt van egy $<A', F'>$ algebra, amelyre h homomorfizmus

$<A, G_\gamma>$ -ról.

(2) Legyen G_γ vetitő operáció, azaz valamely $\alpha<\beta$ -ra $G_\gamma = I_{\alpha,\beta,A}$.

Legyen $I'_{\alpha,\beta,A'}$ olyan operáció az A' -n, hogy minden $<a_\xi>_{\xi\leq\beta} \in I_{\alpha,\beta,A}$ esetén $<h(a_\xi)>_{\xi\leq\beta} \in I'_{\alpha,\beta,A'}$ azaz $I'_{\alpha,\beta,A'}(<h(a_\xi)>_{\xi<\beta}) = h(a_\alpha)$.

Világos, hogy $I'_{\alpha,\beta,A'} = I_{\alpha,\beta,A'}$, ami a szokásos vetitő operáció az A'-n.

Minden $I_{\alpha,\beta,A}$ vetitő operációhoz az A-n hozzárendeljük a megfelelő $I_{\alpha,\beta,A'}$ vetitő operációt az A'-n. Láttuk, hogy az így kapott bővitett $<A', F'_\gamma \cup \{I_{\alpha,\beta,A'}\}>_{\gamma\in\Gamma}$ algebra is homomorf marad az eredeti $<A, F_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ -val.

(3) Legyen G_γ konstans operáció. Az eljárás hasonló, mint a vetitő operációkra.

Minden $C_{x,\beta,A}$ konstans operációhoz az A-n hozzárendeljük a megfelelő $C_{h(x),\beta,A'}$ konstans operációt az A'-n

$$C_{x,\beta,A}<a_\xi>_{\xi<\beta} = x$$

$$C_{h(x),\beta,A'}<h(a_\xi)>_{\xi<\beta} = h(x) .$$

(4) Kompozicióval nyert operációk esete:

Ez a kompozicióra vonatkozó teljes indukcióval történik. A bizonyitás úgy történik, hogy abból a feltevésből, hogy G-hez és minden H_η-hoz $\eta<\beta$ már van megfelelő G' és H'_η operáció, konstruálunk minden $G^A<H_\xi>$ operációhoz egy $G^{A'}<H_\xi>'$ operációt úgy, hogy az algebrák homomorfizmusa megmaradjon.

Indukciós feltevés: minden G α-argumentumu és H_η β-argumentumu operációhoz az A-n létezik G' és H'_η operáció az A'-n, hogy

$$\langle a_\xi \rangle_{\xi \leq \beta} \in H_\eta \Longrightarrow \langle h(a_\xi) \rangle_{\xi \leq \beta} \in H'_\eta$$

és

$$\langle a_\xi \rangle_{\xi \leq \alpha} \in G \Longrightarrow \langle h(a_\xi) \rangle_{\xi \leq \alpha} \in G' .$$

Állítás: Létezik olyan $G^{A'} \langle H_\xi \rangle'$ operáció, hogy minden $\langle a_\xi \rangle_{\xi \leq \beta} \in G^A \langle H_\xi \rangle$ esetén

$$\langle h(a_\xi) \rangle_{\xi \leq \beta} \in G^{A'} \langle H_\xi \rangle' .$$

Bizonyítás: G' és H'_ξ -operációk kompoziciója éppen ilyen lesz:

$$G'(\langle H'_\eta(h(a_\xi))_{\xi<\eta} \rangle_{\eta<\alpha}) = G'^{A'} \langle H'_\eta \rangle_{\eta<\alpha} \langle h(a_\xi) \rangle_{\xi<\beta}$$

a kompozició definiciója szerint.

Legyen $\langle a_\xi \rangle_{\xi \leq \beta} \in G^A \langle H_\eta \rangle_{\eta<\alpha}$. Ekkor

$$G(\langle H_\eta (a_\xi)_{\xi<\beta} \rangle_{\eta<\alpha}) = a_\alpha .$$

Az indukciós feltevés miatt

$$h(H_\eta \langle a_\xi \rangle_{\xi<\beta}) = H'_\eta \langle h(a_\xi) \rangle_{\xi<\beta}$$

és

$$h(G \langle H_\eta (a_\xi)_{\xi<\beta} \rangle_{\eta<\alpha} = G' \langle h(H_\eta \langle a_\xi \rangle_{\xi<\beta}) \rangle_{\eta<\alpha} .$$

Tehát

$$h(G^A \langle H_\eta \rangle_{\eta<\alpha} (\langle a_\xi \rangle_{\xi<\beta})) = G'^{A'} \langle H'_\eta \rangle_{\eta<\alpha} (\langle h(a_\xi)_{\xi<\beta} \rangle) ,$$

ami elégséges ahhoz, hogy h homomorfizmus legyen

$$\langle A, G^A \langle H_\eta \rangle_{\eta<\alpha} \rangle \text{ -ról } \langle A', G'^{A'} \langle H'_\eta \rangle_{\eta<\alpha} \rangle \text{ -ba.}$$

QED .

* * *

A 2.tétel kimondásához szükséges két definició a következő:

<u>2.1 Definició:</u> Egy $\langle A, F_\gamma \rangle_{\gamma\in\Gamma}$ algebra <u>szabad</u> a vele hasonló algebrák K osztályára vonatkozóan, pontosabban $\langle A, F_\gamma \rangle_{\gamma\in\Gamma}$ algebrák $X \subset A$ szabadon generálja a K -ra vonatkozóan, ha bármely $\langle B, G_\gamma \rangle_{\gamma\in\Gamma} = \mathcal{B}$ $\mathcal{B} \in K$ algebrára és $f : X \to B$ leképzésre f mindig kiterjeszthető egy g homomorfizmussá, és ez a kiterjesztés egyértelmü.

<u>2.2 Definició:</u> Egy egyértelmüsített nyelv az egy $\langle A, F_\gamma, X_\delta, S, \delta_0 \rangle_{\gamma\in\Gamma,\, \delta\in\Delta}$ rendszer, ahol

(1) $\langle A, F_\gamma \rangle_{\gamma\in\Gamma}$ egy algebra;

(2) minden $\delta\in\Delta$ -ra X_δ az A egy részhalmaza;

(3) A az a legkisebb halmaz, amely részhalmazként tartalmazza az összes X_δ -t és zárt az összes F_γ operációra nézve;

(4) X_δ és F_γ értékkészlete diszjunkt minden $\delta\in\Delta$ és $\gamma\in\Gamma$ -ra;

(5) Legyen γ, $\gamma' \in \Gamma$

a F_γ értelmezési tartományában egy sorozat,

a' $F_{\gamma'}$ értelmezési tartományában egy sorozat,

akkor minden γ, γ' -re a, a' -re ha $F_\gamma(a) = F_{\gamma'}(a')$ akkor $\gamma = \gamma'$ és $a = a'$.

<u>2. Tétel:</u> A 2.2 definicióban szereplő (1)–(5) feltételek akkor és csak akkor teljesülnek, ha $\langle A, F_\gamma \rangle_{\gamma\in\Gamma}$ algebrát $\bigcup_{\gamma\in\Delta} X_\delta$ szabadon generálja a vele hasonló algebrákra vonatkozóan.

<u>Bizonyítás:</u> I. (1)–(5) feltételekből $\Rightarrow \langle A, F_\gamma \rangle_{\gamma\in\Gamma}$ szabad algebra; ez a kifejezések bonyolultságára vonatkozó, egyszerü indukcióval bizonyítható.

II. $\langle A, F_\gamma \rangle_{\gamma\in\Gamma}$ algebra $\Rightarrow$ (1)–(5) feltételek teljesülnek.

(1) $<A, F_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ algebra – a feltétel szerint. .

(2) $X = \bigcup_{\delta\in\Delta} X_\delta$ generálja a szabad algebrát a feltétel szerint, tehát $X_\delta \subseteq A$ minden $\delta\in\Delta$-ra.

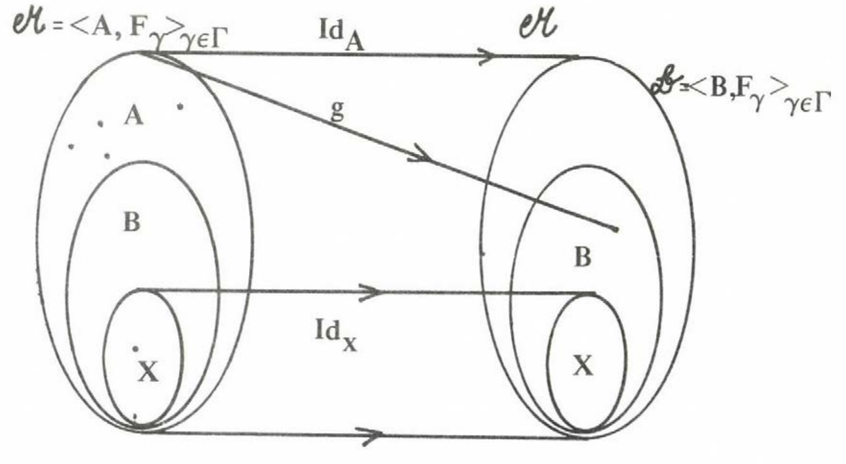
(3) Be kell látni, hogy $\forall$ a $\in$ A-ra vagy

a) $a \in X_\delta$ valamilyen $\delta\in\Delta$ -re, vagy

b) a előállítható $\bigcup_{\delta\in\Delta} X_\delta$ -ból az F_γ -k ismételt alkalmazásával.

Bizonyítás: indirekt

Legyen $\mathfrak{A} = <A, F_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ egy szabad algebra. ($X \subset A$). Tegyük fel, hogy vannak olyan A-beli elemek, amelyek nem kaphatók meg X-ből az F_γ -k ismételt alkalmazásával. Legyen $B \subset A$ olyan, hogy B minden eleme előállítható legyen ily módon X-ből.



Legyen $f : Id_X : X \longrightarrow X$. $\mathfrak{B} = <B, F_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ $\mathfrak{A}$-val hasonló algebra. A szabad algebraság miatt f egyértelmüen kiterjeszthető g homomorfizmusa a $\mathfrak{A}$-ról a $\mathfrak{B}$-be.

$\mathfrak{A} \xrightarrow{g} \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ miatt $\mathfrak{A} \xrightarrow{g} \mathfrak{A}$ is igaz, de $Id_A : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ is egy jó kiterjesztése Id_X -nek.

Mivel $g : A \longrightarrow B$ és $Id_A : A \longrightarrow A$ és $B \neq A$, $g \neq Id_A$; két különböző homomorfizmussá terjesztettük ki Id_X -et . $\lightning$

(4) Be kell látni, hogy X_δ és F_γ range-e diszjunkt minden $\delta\epsilon\Delta$-ra és $\gamma\epsilon\Gamma$-ra.

Bizonyítás: indirekt

Tegyük fel, hogy van egy olyan a elem és F_γ, hogy $F_\gamma(x_1, x_2) = a$ és $a \epsilon \bigcup_{\delta\epsilon\Delta} X_\delta$.

Legyen $\mathfrak{B} = <B, G_\gamma>_{\gamma\epsilon\Gamma}$ $\mathfrak{A}$-val hasonló algebra.

Tekintsünk egy f leképzést az $\bigcup_{\delta\epsilon\Delta} X_\delta$-ról a $\mathfrak{B}$ algebrába, mégpedig olyat, hogy

$$f(a) = b \neq G_\gamma(f(x_1), f(x_2)),$$

ahol G_γ az F_γ-nak megfelelő operáció a B-n. Ez az f leképzés nem terjeszthető ki homomorfizmussá az A-n.

(5) Belátandó, hogy ha a két sorozatra két strukturális operációt alkalmazva ugyanazt az elemet kapjuk; akkor a két sorozat és a két operáció megegyezik.

Bizonyítás: indirekt

Tegyük fel, hogy $a, a' \epsilon A$ $a \neq a'$ vagy $F \neq F'$, de $F_\gamma(a) = F_{\gamma'}(a')$.

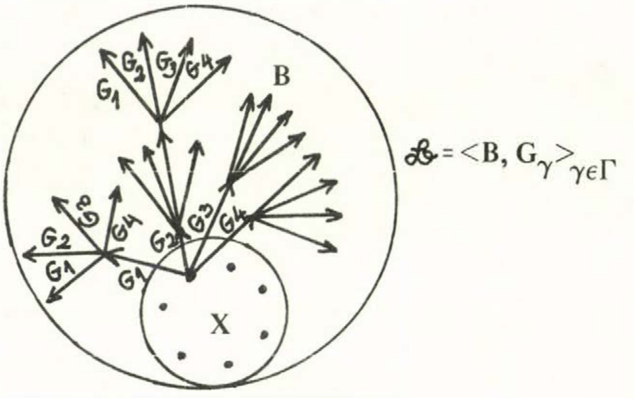
Tegyük fel, hogy $a \neq a'$.

$\mathfrak{A} = <A, F_\gamma>_{\gamma\epsilon\Gamma}$ szabadalgebra, melyet $X \subseteq A$ generál. Konstruálni fogunk egy olyan $\mathfrak{B} = <B, G_\gamma>_{\gamma\epsilon\Gamma}$ $\mathfrak{A}$-val hasonló algebrát, és $f: X \longrightarrow B$ leképzést, hogy f-et nem lehet kiterjeszteni $g: A \longrightarrow B$ homomorfizmussá.

Legyen $\mathfrak{B} = <B, G_\gamma>_{\gamma\epsilon\Gamma}$ olyan, hogy $G_\gamma(b) \neq G_{\gamma'}(b')$

minden b, b' $\in$ B sorozatra, ahol $b \neq b'$.

Az alábbi ábrán szemléltetni szeretnénk egy ilyen algebra felépítését a következő esetre: $\Gamma = \{1, 2, 3, 4\}$, és a G_γ operációk minden $\gamma \in G_\gamma$ -ra egyargumentumúak.

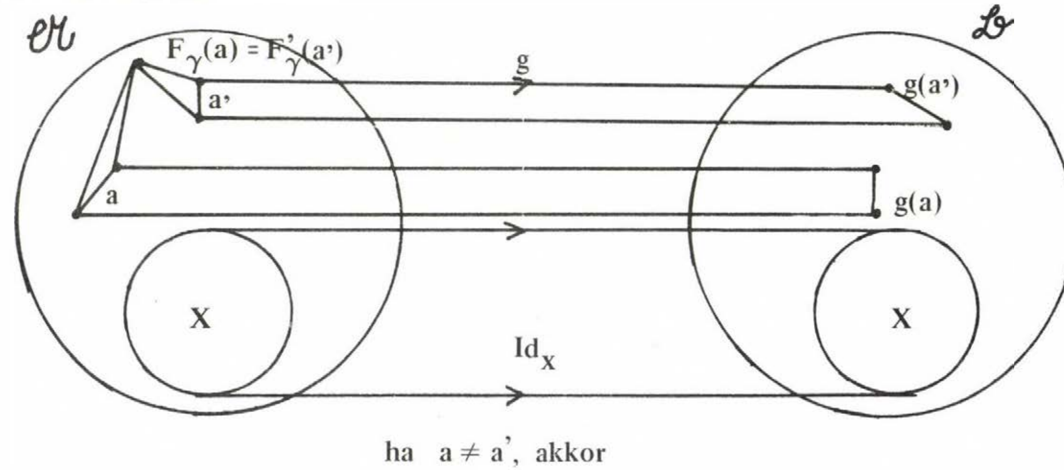


Ilyen algebrát nem nehéz szerkeszteni.

Például legyen

$$(\forall a \in X^n)\ (\forall \gamma \in \Gamma)\ F_\gamma(a) = \langle \gamma, a, X \rangle\ .$$

Legyen f az X-en az identitás:



ha $a \neq a'$, akkor
$g(a) \neq g(a')$.

Bebizonyítjuk, hogy ha $a \neq a' \Longrightarrow g(a) \neq g(a')$ bármely a, a' $\in$ A-ra.

A bizonyítás indukcióval történik.

Legyen

$$A_o = X;$$

$$A_n = A_{n-1} \cup \{F_\gamma(a) : a \in A_{n-1}, \gamma\in\Gamma\}$$

$$\bigcup_{n<\omega} A_n = A \text{ mert } <A, F_\gamma>_{\gamma\in\Gamma} \text{ szabadalgebra és (3) állítás fennáll.}$$

$\underline{A_o\text{-ra}}$: Ha $a \neq a'$ $a, a' \in A_o \Rightarrow g(a) \neq g(a')$, mert g identitás az A_o-n.

Indukciós hipotézis:

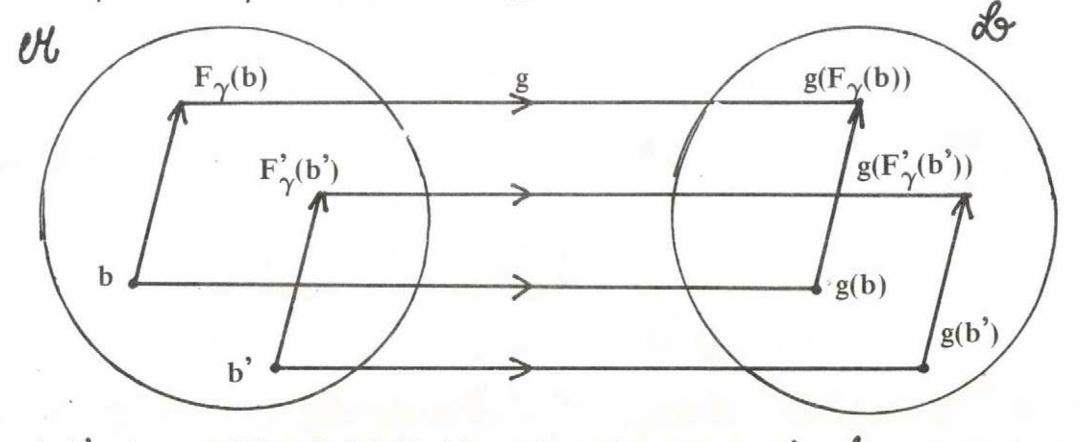
$$a, a' \in A_{n-1} \Rightarrow g(a) \neq g(a').$$

$\underline{A_n\text{-re}}$: Ha $a, a' \in A_n$, akkor $A_n = A_{n-1} \cup \{F_\gamma(a) : a \in A_{n-1}, \gamma\in\Gamma\}$

Három eset lehetséges:

(1) $a, a' \in A_{n-1}$; $g(a) \neq g(a')$ az indukciós hipotézis miatt;

(2) $a = F_\gamma(b)$, $a' = F'_\gamma(b')$, ahol $b, b' \in A_{n-1}$



$b, b' \in A_{n-1}$, tehát az indukciós hipotézis szerint $g(b) \neq g(b')$. $\mathcal{B}$-n a müveleteket úgy vettük fel, hogy $F_\gamma(g(b)) \neq F'_\gamma(g(b'))$. A homomorfizmus definiciója miatt:

$$g(a) = g(F_\gamma(b)) = F_\gamma(g(b))$$

$$g(a') = g(F'(b')) = F'_\gamma(g(b'))$$

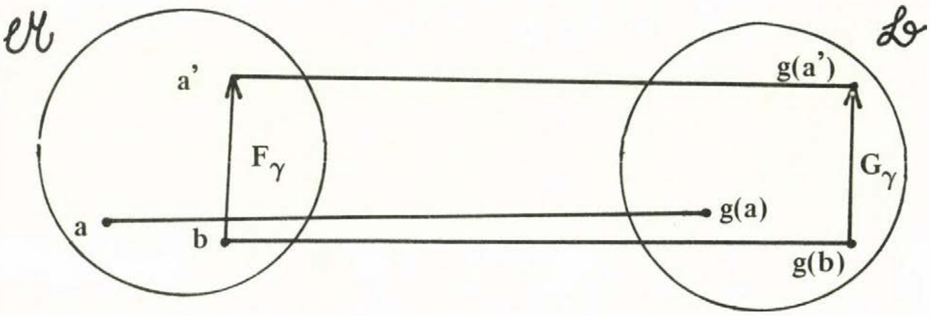
tehát

$$g(a) \neq g(a').$$

(3) $$a \in A_{n-1} ,$$

$$a' = F_\gamma(b)$$

ahol $$b \in A_{n-1} ;$$



$g(a) \neq g(b)$, mivel $a, b \in A_{n-1}$ az indukciós hipotézis miatt.

Lehet-e $g(a') = G_\gamma(g(b)) = g(a)$ -val?

Ha a egy olyan elem, amelyet valamilyen F'_γ alkalmazásával kaptuk, azaz

$$a = F_\gamma\ (c) ,$$

ahol $$c \in A_{n-2} ,$$

akkor

homomorf definiciója miatt

$$g(a) = g(F'_\gamma(c)) = G'_\gamma(g(c)) \neq G_\gamma(g(b))$$

$\mathcal{B}$ algebra szerkesztése miatt .

Ha $a \in X$, azaz a generáló elem , akkor

$$g(a) \in X ,$$

mivel g Id az X-en, azaz g(a) a $\mathcal{B}$ algebra generáló eleme; de

$$g(a') = G_\gamma(g(b)) ,$$

tehát generált elem.

A generáló és generált elemek halmaza diszjunkt a $\mathcal{B}$ algebra választása miatt.

Tehát

$$g(a') \neq g(a) .$$

Idáig tehát beláttuk, hogy bármely $a, a' \in A$-ra

$$g(a') \neq g(a) .$$

Az indirekt feltevés az volt, hogy $a, a' \in A$, $a \neq a'$, de

$$F_\gamma(a) = F'_\gamma(a') .$$

Beláttuk, hogy ha

$$a \neq a' \Rightarrow g(a) \neq g(a') .$$

Legyen G_γ és $G_{\gamma'}$ a $\mathcal{B}$ algebrán értelmezett F_γ és $F_{\gamma'}$-nek megfelelő operációk. Mivel $\mathcal{A}$ szabadalgebra, melyet $X \subseteq A$ generál, az $f : X \longrightarrow B$ leképzés kiterjeszthető $g : A \longrightarrow B$ homomorfizmussá.

A homomorfizmus definiciója miatt

$$G_\gamma (g(a)) = g(F_\gamma(a)) ,$$

$$G_{\gamma'}(g(a')) = g(F_{\gamma'}(a')) .$$

$F_\gamma(a) = F_{\gamma'}(a')$ az indirekt feltevés miatt tehát

$$g (F_\gamma(a)) = g(F_{\gamma'}(a')) ,$$

mivel g függvény és így egyértékü, de

$$G_\gamma(g(a)) \neq G_{\gamma'}(g(a')) ,$$

mivel $g(a) \neq g(a')$ és a $\mathcal{B}$ algebrát így adtuk meg. $\lightning$

QED .

* * *

A 3.tétel kimondásához emlékeztetőül közöljük a következő definiciót:

3.1 Definició : Ha $\mathfrak{A} = <A, F_\gamma, X_\delta, S, \delta_o>_{\gamma\epsilon\Gamma,\ \delta\epsilon\Delta}$ egy egyértelműsített nyelv, akkor $\mathfrak{A}$ a szintaktikus kategóriák $C = \{C_\delta\}_{\delta\epsilon\Delta}$ családját generálja akkor és csak akkor

(1) ha C A részhalmazainak egy rendszere Δ-val indexelve;

(2) $X_\delta \subseteq C_\delta$ minden $\delta\epsilon\Delta$ -re;

(3) valahányszor $<F_\gamma, <\delta_\xi>_{\xi<\beta}, \varepsilon> \epsilon S$ és $b_\xi \epsilon C_{\delta_\xi}$ minden $\xi<\beta$ -ra $F_\gamma(<b_\xi>_{\xi<\beta}) \epsilon C_\varepsilon$;

(4) valahányszor C' kielégíti (1)–(3)-t $C_\delta \subseteq C'_\delta$ minden $\delta\epsilon\Delta$ -re.

3. Tétel: Ha $\mathfrak{A}$ tetszőleges egyértelműsített nyelv, akkor $\mathfrak{A}$ pontosan egy szintaktikus kategória-családot generál.

Bizonyítás : két lépésben fog történni.

A. Állítás: Létezik $\mathfrak{A}$ által generált szintaktikus kategória-család

B. Állítás: Csak egy létezik.

A bizonyítást véges argumentumszámú operációk esetére adjuk meg, azaz minden $\gamma\epsilon\Gamma$, F_γ operáció argumentumszáma $\beta<\omega$.

A. Konstruálunk egy $\mathfrak{A}$ által generált szintaktikus kategória-családot indukcióval:

Legyen
$$C_\delta^o = X_\delta \ .$$

Tegyük fel, hogy $C = C_\delta^n$ már kész.

$$C_\delta^{n+1} = C_\delta^n \cup \{a : F_\gamma(<b_\xi>_{\xi<\beta}) = a\} ,$$

ahol $a \epsilon A$, F_γ és $<b_\xi>_{\xi<\beta}$ olyanok, hogy

$$<F_\gamma, <\delta_\xi>_{\xi<\beta}, \delta> \in S,$$

$b_\xi \in C^m_{\delta_\xi}$ minden $\xi<\beta$ -ra; $0 \leq m \leq n$.

Ekkor

$$C_\delta = \bigcup_{n<\omega} C^n_\delta .$$

Legyen $C = \{C_\delta\}_{\delta\in\Delta}$. Belátjuk, hogy C kielégíti a 3.1 Definició (1)–(4) feltételeit.

(1) C A részhalmazainak rendszere Δ-val indexelve, mivel a C-t A-beli elemekből konstruáltuk.

(2) $X_\delta \subseteq C$ minden $\delta\in\Delta$ -ra, mivel $X_\delta = C^o_\delta$.

(3) Belátjuk, hogy C zárt a strukturális operációkra nézve.

Tekintsünk egy tetszőleges F_γ operációt valamely $\gamma\in\Gamma$ -ra és $<b_\xi>_{\xi<\beta}$ A-beli sorozatot úgy, hogy

$$<F_\gamma, <\delta_\xi>_{\xi<\beta}, \varepsilon> \in S$$

és minden $\xi<\beta$ -ra $b_\xi \in C_{\delta_\xi}$.

Mivel $C_{\delta_\xi} = \bigcup_{n_\xi<\omega} C^{n_\xi}_{\delta_\xi}$ minden $\xi<\beta$ -ra, ezért minden $\xi<\beta$ -ra van egy n_ξ, hogy

$$b_\xi \in C^{n_\xi}_{\delta_\xi},$$

$$<n_\xi>_{\xi<\beta} \in \omega^\beta .$$

Mivel bizonyitásunkat véges argumentumszámú operációkra végezzük, azaz $\beta<\omega$, van egy olyan K természetes szám, hogy minden $\xi<\beta$ -ra $n_\xi \leq K$. Ekkor

$$F_\gamma(<b_\xi>_{\xi<\beta}) \in C^{K+1}_\varepsilon ,$$

mivel minden $\xi<\beta$ -ra $b_\xi \in C^{n_\xi}_{\delta_\xi}$, és $n_\xi \leq K$ és C^{K+1}_ε halmazt éppen úgy konstruáltuk, hogy ezeket a feltételeket kielégítő

$$F_\gamma(<b_\xi>_{\xi<\beta} = a$$

elemek legyenek benne.

Továbbá $C_{\varepsilon} = \bigcup_{K<\omega} C^K$, ezért

$$F_\gamma(\langle b_\xi \rangle_{\xi<\beta}) \in C_{\varepsilon}$$

(4) Belátjuk, hogyha $C' = \bigcup_{\delta\in\Delta} C'_\delta$ kielégíti (1)–(3)-at, akkor $C_\delta \subseteq C'_\delta$ minden $\delta\in\Delta$-ra.

Tehát be kell látni, hogy ha $a \in C_\delta \Rightarrow a \in C'_\delta$. Mivel $C_\delta = \bigcup_{n<\omega} C^n_\delta$, ha $a \in C_\delta$, akkor van egy olyan $K<\omega$, hogy $a \in C^K_\delta$. A bizonyítást K-ra vonatkozó indukcióval végezzük. Ha K=0, akkor $a \in C^0_\delta = X_\delta$.

A 3.1 Definició (2) pontja szerint $X_\delta \subseteq C'_\delta$, tehát $a \in C'_\delta$. Ha $K>0$, akkor

$$C^K_\delta = C^{K-1}_\delta \cup \{a : F_\gamma(\langle b_\xi \rangle_{\xi<\beta}) = a\},$$

ahol F_γ és $\langle b_\xi \rangle_{\xi<\beta}$ olyanok, hogy

$$\langle F_\gamma, \langle \delta_\xi \rangle_{\xi<\beta}, \delta \rangle \in S$$

és minden $\xi<\beta$-ra $b_\xi \in C^m_{\delta_\xi}$, $m < K$, (C_δ konstrukciója szerint).

Indukciós feltevés:

Minden $m < K$-ra $a \in C^m_\delta \Rightarrow a \in C'_\delta$. Ha $a \in C^K_\delta$, akkor

(1) $a \in C^{K-1}_\delta$ vagy

(2) van olyan F_γ és $\langle b_\xi \rangle_{\xi<\beta}$, hogy amennyiben $b_\xi \in C^m_{\delta_\xi}$, $m < K$, minden $\xi<\beta$-ra, $F_\gamma(\langle b_\xi \rangle_{\xi<\beta}) = a$.

Ha (1) állítás igaz, akkor $a \in C'_\delta$ az indukciós feltevés miatt.

Ha (2) állítás igaz, akkor az indukciós feltevés és a 3.1 definició (3) pontja miatt

$$F_\gamma(\langle b_\xi \rangle_{\xi<\beta}) \in C'_\delta$$

Mivel C kielégíti a 3.1 Definició (1)–(4) feltételeit, $C = \{C_\delta\}_{\delta\in\Delta}$

a kivánt $\mathfrak{A}$ által generált szintaktikus kategória-család.

B. Tegyük fel, hogy létezik két $\mathfrak{A}$ által generált szintaktikus kategória-család: C és C'. Ekkor legalább egy $\delta \epsilon \Delta$ -ra $C_\delta \neq C'_\delta$.

A 3.1 Definició (4) pontja teljesül C_δ -ra:

$$C_\delta \subseteq C'_\delta \; .$$

De ugyanez a feltétel teljesül C'_δ -re is:

$$C'_\delta \subseteq C_\delta \; .$$

Tehát

$$C_\delta = C'_\delta \; . \quad ↯$$

QED .

★★★

A 4.Tétel kimondásához emlékeztetőül közöljük a következő definiciót:

<u>4.1 Definició</u>: <u>Az L származtatott szintaktikus szabályainak osztálya</u> az a legkisebb K osztály, amelyre:

(1) $S \subseteq K$;

(2) ha α, β rendszámok, $\alpha < \beta$ és $<\delta_\xi>_{\xi<\beta}$ vagy Δ elemeiből álló β tipusú sorozat, akkor

$$<I_{\alpha,\beta,A}, <\delta_\xi>_{\xi<\beta}, \delta_\alpha> \in K \; ;$$

(3) ha β rendszám $<\delta_\xi>_{\xi<\beta}$ a Δ elemeiből álló β tipusú sorozat, $\varepsilon \in \Delta$, $x \in X_\varepsilon$, akkor

$$<C_{x,\beta,A}, <\delta_\xi>_{\xi<\beta}, \varepsilon> \in K \; ;$$

(4) ha α, β rendszámok, $<G, <\delta_\xi>_{\xi<\alpha}, \varepsilon> \in K$ és $<H_\xi>_{\xi<\alpha}$ egy

sorozat úgy, hogy $<H_\xi, <\gamma_\eta>_{\eta<\beta}, \delta_\xi> \in K$ minden $\xi<\alpha$ -ra, akkor az is fennáll, hogy

$$<G^A <H_\xi>_{\xi<\alpha}, <\gamma_\eta>_{\eta<\beta}, \varepsilon> \in K .$$

<u>4. Tétel:</u> Ha L egy nyelv, $L = <\mathfrak{A}, R>$ és $<H, <\delta_\xi>_{\xi<\beta}, \varepsilon>$ az L származtatott szintaktikus szabálya, C az L által generált szintaktikus kategória-család és $a_\xi \in C_{\delta_\xi}$ minden $\xi<\beta$ -ra, akkor

$$H(<a_\xi>_{\xi<\beta}) \in C_\varepsilon .$$

<u>Bizonyítás:</u>

(1) Ha $H \in S$, akkor H az egyértelműsített nyelv egyik strukturális operációja (az $<A, F_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ algebra egy F_γ operációja valamely $\gamma\in\Gamma$ -ra) és így a tételben kimondott állítás a szintaktikus kategória-család 3.1 Definiciója (3) pontja szerint fennáll, azaz ha $H = F_\gamma$ valamely $\gamma\in\Gamma$ -ra és $<F_\gamma, <\delta_\xi>_{\xi<\beta}, \varepsilon> \in K$, $a_\xi \in C_{\delta_\xi}$ minden $\xi<\beta$ -ra, akkor

$$F_\gamma(<a_\xi>_{\xi<\beta}) \in C_\varepsilon .$$

(2) Ha $H = I_{\alpha,\beta,A}$, azaz vetitő operáció az A-n, akkor $I_{\alpha,\beta,A}$ definiciója szerint

$$I_{\alpha,\beta,A}(<a_\xi>_{\xi<\beta}) = a_\alpha ,$$

ahol $\alpha<\beta$. És mivel $<I_{\alpha,\beta,A}, <\delta_\xi>_{\xi<\beta}, \delta_\alpha> \in K$ -ra $a_\xi \in C_{\delta_\xi}$ minden $\xi<\beta$ miatt $a_\alpha \in C_{\delta_\alpha}$ is fennáll. Tehát

$$I_{\alpha,\beta,A}(<a_\xi>_{\xi<\beta}) \in C_{\delta_\alpha} .$$

(3) Ha $H = C_{x,\beta,A}$, azaz konstans operáció az A-n, akkor $C_{x,\beta,A}$ definiciója szerint

$$C_{x,\beta,A}(<a_\xi>_{\xi<\beta}) = x .$$

4.1 Definició (3) pontja miatt ha $C_{x,\beta,A}$ egy származtatott szintaktikus szabály, akkor $x \in X_\varepsilon$; ekkor $x \in C_\varepsilon$, mivel a szintaktikus kategória-család

3.1 Definiciója (2) pontja szerint $X_{\varepsilon} \subseteq C_{\varepsilon}$, tehát $\langle C_{X,\beta,A}, \langle\delta_\xi\rangle_{\xi<\beta}, \varepsilon\rangle \in K$ -ra

$$C_{X,\beta,A}(\langle a_\xi\rangle_{\xi<\beta}) \in C_{\varepsilon} .$$

(4) Ha $H = G \overset{A}{} \langle H_\xi\rangle_{\xi<\alpha}$, azaz H a G α-argumentumú és $\langle H_\xi\rangle_{\xi<\alpha}$ β-argumentumú operációk kompoziciójából nyert operáció, akkor a bizonyítást indukcióval fogjuk végrehajtani.

Tegyük fel, hogy minden $\xi<\alpha$ -ra

$$\langle H_\xi, \langle\gamma_\eta\rangle_{\eta<\beta}, \delta_\xi\rangle \in K \text{ -ra },$$

ha $a_\eta \in C_{\gamma_\eta}$ minden $\eta<\beta$ -ra, akkor

$$H_\xi(\langle a_\eta\rangle_{\eta<\beta}) = b_\xi \in C_{\delta_\xi} .$$

Továbbá tegyük fel, hogy

$$\langle G, \langle\delta_\xi\rangle_{\xi<\alpha}, \varepsilon\rangle \in K \text{ -ra}$$

ha $b_\xi \in C_{\delta_\xi}$ minden $\xi<\alpha$ -ra, akkor

$$G(\langle b_\xi\rangle_{\xi<\alpha}) = y \in C_{\varepsilon} .$$

Tegyük fel, hogy minden $\eta<\beta$ -ra $a_\eta \in C_{\gamma_\eta}$. Mivel az operáció kompozició definiciója szerint

$$G \overset{A}{} \langle H_\xi\rangle_{\xi<\alpha}(\bar{a}) \overset{d}{=} G(\langle H_\xi(\bar{a})\rangle_{\xi<\alpha} ,$$

tehát

$$G \overset{A}{} \langle H_\xi\rangle_{\xi<\alpha} \langle a_\eta\rangle_{\eta<\beta} = G(\langle H_\xi\langle a_\eta\rangle_{\eta<\beta}\rangle_{\xi<\alpha}) = G(\langle b_\xi\rangle_{\xi<\alpha}) = y \in C_{\varepsilon} .$$

Beláttuk tehát, hogy $\langle G \overset{A}{} \langle H_\xi\rangle_{\xi<\alpha} , \langle\gamma_\eta\rangle_{\eta<\beta} , \varepsilon\rangle \in K$ -ra

$$G \overset{A}{} \langle H_\xi\rangle_{\xi<\alpha} (\langle a_\eta\rangle_{\eta<\beta}) \in C_{\varepsilon}$$

ha $a_\eta \in C_{\gamma_\eta}$ minden $\eta<\beta$ -ra.

QED .

III. KLASSZIKUS LOGIKAI NYELVEK MEGADÁSA AZ UNIVERZÁLIS GRAMMATIKA ESZKÖZEIVEL

1. ELSŐRENDŰ LOGIKA (PREDIKATUM KALKULUS)

1.1 *Az elsőrendű logika (L_1) tipusai*

$$T = \{e, t, \langle n, e, e\rangle, \langle n, e, t\rangle : 0 < n < \omega\}$$

ahol

e	–	a létező dolgok vagy entitások tipusa;
t	–	igazságértékek tipusa;
$\langle n, e, e\rangle$	–	n-argumentumú függvények tipusai;
$\langle n, e, t\rangle$	–	n-argumentumú relációk tipusai;
e, t	–	különböző halmazok, és egyik sem rendezett pár.

1.2 *Szintaxis (L_1 primitiv szimbólumai)*

$V_{n,e}$ $0 < n < \omega$	–	megszámlálható sok e tipusú változójel;
$C_{n,e}$ $0 < n < \omega$	–	megszámlálható sok e tipusú konstans jel;
f_i $i \in H_\eta$ $0 < n < \omega$	–	n-argumentumú függvényjelek;
P_i $i \in M_\eta$ $0 < n < \omega$	–	n-argumentumú relációjelek;
$\uparrow$	–	igaz jele;
$\neg$	–	negáció jel;
$\vee$	–	logikai vagy jele;
$\exists$	–	egzisztenciális kvantor;
(,)	–	zárójelek .

Vezessük be a következő rövidítéseket:

Var	–	az összes e tipusú változó jelek halmaza;
Con	–	az összes e tipusú konstans jelek halmaza;
$Füg_n$	–	az összes n argumentumú függvény jelek halmaza;
Pr_n	–	az összes n argumentumú relációjelek halmaza;

$$X = Var \cup Con \bigcup_{n<\omega} (Füg_n \cup Pr_n) \cup \{\uparrow\}.$$

Legyenek $J_{<o,n>}$, $J_{<1,n>}$, J_2, J_3, J_4 minden $0<n<\omega$ -ra olyan operációk, melyek rendre n+1, n+1, 1, 2, 2 argumentumúak, és a primitiv szimbólumok sorozatain vannak értelmezve. Legyenek ζ, θ, η_i $0<i\leq n$, δ, ρ primitiv szimbólumok sorozatai:

Ekkor:

$$J_{<0,n>}(\zeta, \eta_1, ..., \eta_n) = \zeta(\eta_1, ..., \eta_n),$$
$$J_{<1,n>}(\theta, \eta_1, ..., \eta_n) = \theta(\eta_1, ..., \eta_n);$$
$$J_2(\delta) = \neg\delta;$$
$$J_3(\delta, \rho) = \delta \vee \rho;$$
$$J_4(\eta, \rho) = \exists \eta \rho.$$

L_1, azaz az elsőrendü logika nyelve egy

$$<<A, F_\gamma, X_\delta, S, t>_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \delta\in\Delta}}, R>$$

rendszer, ahol

(1) A az a legkisebb halmaz, amelyre $X \subset A$, és zárt az összes $J_{<0,n>}, J_{<1,n>}, J_2, J_3, J_4$ operációkra nézve minden $0<n<\omega$ -ra;

(2) $\Gamma = \{<0,n>, <1,n>, 2, 3, 4 : 0<n<\omega\}$;

(3) F_γ minden $\gamma\in\Gamma$ -ra J_γ megszoritása az A-ra;

(4) $\Delta = T \cup \{<T, e>\}$; ($\Delta$ a szintaktikus kategóriák indexhalmaza);

(5) X_e = Var $\cup$ Con;

X_t = $\{\uparrow\}$

$X_{<n,e,e>}$ = $Füg_n$; minden n természetes számra

$X_{<n,e,t>}$ = Pr_n; minden n természetes számra

$X_{<T,e>}$ = Var;

(Megjegyzés: $<T,e>$ kategóriát a kötött változók megkülönböztetésére vezettük be.)

(6) S egy halmaz, amely az összes következő sorozatokat tartalmazza:

$$<F_{<0,n>}, <n,e,e>, \overbrace{e,\ldots,e}^{n\ db}, e> \quad 0 < n < \omega \ ;$$

$$<F_{<1,n>}, <n,e,t>, \overbrace{e,\ldots,e}^{n\ db}, t> \quad 0 < n < \omega \ ;$$

$$<F_2, t, t> \ ;$$

$$<F_3, t, t, t> \ ;$$

$$<F_4, <T, e> \quad , t, t>$$

(7) R az identitás reláció az A-n.

Ezek a kikötések az I.fejezetben lévő egyértelműsített nyelv definiciója értelmében definiálnak egy egyértelműsített nyelvet.

L_1 szintaktikailag egyértelmü nyelv.

Megjegyzés:

(1) Con $\cup$ Var $\subseteq Cat_{e,\, L_1}$;

(2) Ha $\zeta \in Cat_{<n,e,e>,\, L_1}$ és $\eta_i \in Cat_{e,\, L_1}$ minden $0 < i \leqslant n$ -re, akkor $\zeta(\eta_1, \ldots, \eta_n) \in Cat_{e,\, L_1}$.

(3) Ha $\zeta \in Cat_{<n,e,t>,\, L_1}$ és $\eta_i \in Cat_{e,\, L_1}$ minden $0 < i \leqslant n$ -re, akkor $\zeta(\eta_1, \ldots, \eta_n) \in Cat_{t,\, L_1}$.

(4) Ha $\zeta \in Cat_{t,\, L_1}$, akkor $\neg\zeta \in Cat_{t,\, L_1}$.

(5) Ha $\zeta, \eta\ Cat_{t,\, L_1}$, akkor $\zeta \vee \eta \in Cat_{t,\, L_1}$.

(6) Ha $\zeta \in Cat_{<T,e>,\, L_1}$ és $\eta \in Cat_{t,\, L_1}$, akkor $\exists \zeta \eta \in Cat_{t,\, L_1}$.

★ ★ ★

1.3 *Szemantika*

Legyen E az entitások tetszőleges halmaza.

Legyen I a lehetséges világok halmaza egyelemü;

$$I = \{ i_o \} .$$

Legyen J az E-re vonatkozó értékhozzárendelések halmaza, ahol minden $j \in J$ kiértékelő függvény csak e tipusú változókat értékel ki, tehát

$$j(n,e) \in E \quad \text{azaz} \quad = J = E^{\mathrm{Var} \times \{e\}}$$

$j_x^{n,e}$ az egy j' függvény, ahol

(1) $j'(n,e) = x \in E$;

(2) $j'(m,e) = j(m,e)$ minden (n,e)-től különböző (m,e) párra.

Meghatározzuk a $\tau \in T$ -re E-re és I -re vonatkozó denotációk halmazát:

$$D_{e,E,I} = E\,;$$
$$D_{t,E,I} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\,,$$

ahol $\{\emptyset\}$ az igazat, és $\emptyset$ a hamisat jelöli.

$$D_{<n,e,e>,\,E,\,I} = E^{(E^n)}$$

$$D_{<n,e,t>,\,E,\,I} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}^{(E^n)}$$

σ_1 tipus hozzárendelő függvény a kategóriákon van értelmezve és tipusokat ad értékül:

$$\sigma_1(\tau) = \tau\,,$$

ha $\tau \in T$, és

$$\sigma_1(<T,e>) = e$$

A jelentések halmaza

$$B = \bigcup_{\tau \in T} M_{\tau,E,I,J}\,,$$

ahol

$$M_{\tau,E,I,J} = D_{\tau,E,I}{}^{J}$$

J – az értékhozzárendelések halmaza,

$D_{\tau,E,I}$ – a τ tipusú denotációk halmaza.

Az L_1 nyelv modelljeinek K_1 osztálya

L_1 modelljei:

$$<<B, G_\gamma, f>_{\gamma\in\Gamma}, <i_o, j_o>> ,$$

ahol a nemüres E, I, J halmazokra:

(1) $<B, G_\gamma>_{\gamma\in\Gamma}$ egy Fregei interpretáció az L_1-re az E,I,J -re és σ_1 -re vonatkozóan;

(2) J az E-re vonatkozó értékhozzárendelések halmaza, $I = \{i_o\}$ egyelemű ;

(3) mivel I egyelemű, a referencia pontot a szokásos $<i, j>$ pár helyett csak j-vel fogjuk jelölni;

(4) Megadjuk az f függvényt: valahányszor $C_{n,e} \in Con$, és $j, j' \in J$, akkor

$$f(C_{n,e})(j) = f(C_{n,e})(j')$$

valahányszor $V_{n,e} \in Var$, $j \in J$, n természetes szám, és $e \in T$, akkor

$$f(V_{n,e})(j) = j(n,e) \in E .$$

(5) Szemantikus operációk:

(a) Ha $a \in M_{<n,e,e>, E,I,J}$ és $b_1, \ldots, b_n \in M_{e,E,I,J}$

$$G_{<0,n>}(a, b, \ldots, b_n)(j) = a(j)(b_1(j), \ldots, b_n(j))$$

minden n természetes számra.

(b) Ha $a \in M_{<n,e,t>, E,I,J}$ és $b_1, \ldots, b_n \in M_{e,E,I,J}$

$$G_{<1,n>}(a, b_1, \ldots, b_n)(j) = a(j)(b_1(j), \ldots, b_n(j))$$

minden természetes számra.

(c) $$G_2(a)(j) = \{\emptyset\}$$

akkor és csak akkor, ha $(\neg a)(j) = \emptyset$

(d) $$G_3(a,b)(j) = \{\emptyset\}$$

akkor és csak akkor, ha vagy $a(j) = \{\emptyset\}$, vagy $b(j) = \{\emptyset\}$;

(e) $$G_4(a,b)(j) = \{0\}$$

akkor és csak akkor, ha van egy olyan $x \in D_{e,E,I}$ és $j_x^{n,e}$, hogy

$$b(j_x^{n,e}) = \{\emptyset\}.$$

Megjegyzés:

Legyen $< \mathcal{B}, <i_o, j_o>> \in K_1$, E,I,J a fent definiált nemüres halmazok, σ_1 a tipus hozzárendelő függvény, $\mathcal{B}$ egy Fregei interpretáció az E,I,J-re és σ_1-re vonatkozóan; g egy jelentés hozzárendelés az L_1-re a $\mathcal{B}$-re vonatkozóan, h egy a $< \mathcal{B}, <i_o, j_o>>$ által meghatározott denotáció hozzárendelés, n természetes szám.

Ekkor:

(1) Ha $\zeta \in Con$, akkor $h(\zeta) \in D_{e,E,I}$ és $g(\zeta)(j) = g(\zeta)(j')$ minden $j, j' \in J$-re ;

(2) Ha $\zeta \in Var$, akkor $h(\xi) \in D_{e,E,I}$;

(3) Ha $\zeta \in Cat_{<n,e,e>, L_1}$ és $\eta_i \in Cat_{e, L_1}$ minden $0 < i \leq n$-re, akkor $h(\zeta(\eta_1, \dots, \eta_n)) = h(\zeta)(h(\eta_1), \dots, h(\eta_n))$;

(4) Ha $\zeta \in Cat_{t, L_1}$, akkor $h(\neg\zeta) = \{\emptyset\}$ akkor és csak akkor, ha $h(\zeta) = \emptyset$;

(5) Ha $\zeta, \eta \in Cat_{t, L_1}$, akkor $h(\zeta \vee \eta) = \{\emptyset\}$ akkor és csak akkor, ha $h(\zeta) = \{\emptyset\}$, vagy $h(\eta) = \{\emptyset\}$;

(6) Ha $\zeta \in Cat_{<T,e>, L_1}$ és $\eta \in Cat_{t, L_1}$, akkor $h(\exists \zeta\eta) = \{\emptyset\}$ akkor és csak akkor, ha van olyan $x \in D_{e,E,I}$, hogy $g(\eta)(j_o^{n,e}\ x) = \{\emptyset\}$.

* * *

1.4 *Igazság*

(1) φ L_1 egy igaz mondata a $<\mathcal{B}, <i_o, j_o>>$ modellre vonatkozóan akkor és csak akkor, ha

$$\varphi \in C_t \quad \text{és} \quad h(\varphi) = \{\emptyset\},$$

ahol C szintaktikus kategória család, melyet $<A, F_\gamma, X_\delta, S, t>_{\gamma\in\Gamma, \delta\in\Delta}$ generált, és h egy L_1-re vonatkozó denotáció hozzárendelés.

(2) φ K_1 – érvényes az L_1-ben akkor és csak akkor, ha φ igaz mondat a K_1 modell-osztály minden tagjára vonatkozóan.

1.5 *Rövidítések*

Legyen $a \in Cat_{<T,e>}$ és $\zeta, \eta \in Cat_{t,L_1}$

$\Downarrow = \neg\Uparrow$;

$\forall a\eta = \neg\exists a(\neg\eta)$;

$\zeta \wedge \eta = \neg(\neg\zeta \vee \neg\eta)$;

$\zeta \rightarrow \eta = \neg\zeta \vee \eta$;

$\zeta \leftrightarrow \eta = (\neg\zeta \vee \eta) \wedge (\neg\eta \vee \zeta)$.

2. *MÁSODRENDŰ LOGIKA (L_2)*

2.1 *Típusok*

A másodrendű logika tipusainak halmaza megegyezik az L_1 nyelv tipusainak halmazával.

2.2 *Szintaxis*

Primitiv szimbólumok:

L_2 szimbólumainak halmaza tartalmazza az összes L_1-beli szimbólumot, és azonkivül:

$v_{k,<n,e,e>}$ – megszámlálható sok n argumentumú függvényváltozó jelet;

$v_{k,<n,e,t>}$ – megszámlálható sok n argumentumú relációváltozó jelet.

Rövidítések

Var_τ – az összes τ tipusú változójel halmaza, ahol $\tau \in T \setminus \{t\}$;

Con_τ – az összes τ tipusú konstans jelek halmaza,

$\tilde{X} = (\bigcup_{\tau \in T \setminus \{t\}} Var_\tau) \cup (\bigcup_{\tau \in T} Con_\tau)$ – L_2 alapkifejezések halmaza.

Szintaktikus operációk

Az L_2 primitiv szimbólumok sorozatain értelmezett $J_{<0,n>}, J_{<1,n>}, J_2, J_3, J_4$ operációk ugyanazok, mint az L_1 nyelvben.

L_2, azaz a másodrendű logika nyelve egy

$$<<A, F_\gamma, X_\delta, S, t>_{\gamma\in\Gamma,\ \delta\in\Delta}, R>$$

rendszer, ahol

(1) A az a legkisebb halmaz, amelyre $\tilde{X} \subset A$, és zárt az összes $J_{<0,n>}, J_{<1,n>}, J_2, J_3, J_4$ operációkra nézve minden n természetes számra;

(2) $\Gamma = \{<0,n>, <1,n>, 2, 2, <n, \tau> : 0<n<\omega$ és $\tau \in T \setminus \{t\}\}$

(3) F_γ - k ugyanazok, mint az L_1 nyelvben, kivéve azt, hogy F_4 helyett L_2 a következő szintaktikus operációkat tartalmazza:

$$F_{<4,\tau>} (\zeta_\tau , \theta) = \exists\, \zeta_{<T,e>}\, \theta$$

minden $\tau \in T \setminus \{t\}$, ahol

ζ_τ — τ tipusú változó

$\zeta_{<T,\tau>}$ — τ tipusú kötött változó

θ — τ tipusú kifejezés ;

(4) $\Delta = T \cup (\{T\} \times (T \setminus \{t\}))$;

(5) $X_\tau = Var_\tau \cup Con_\tau \quad \tau \in T \setminus \{t\}$

$X_t = Con_t = \{\uparrow\}$

$X_{<T,\tau>} = Var_\tau \quad \tau \in T \setminus \{t\}$

Megjegyzés:

<T,e>	kategória a kötött entitás változókat ,
<T, <n,e,e>>	kategória a kötött függvény változókat,
<T, <n,e,t >>	kategória a kötött reláció változókat

tartalmazza.

(6) S az egy halmaz, amely az összes következő sorozatokat tartalmazza:

$$<F_{<0,n>} <n,e,e> , \overbrace{e, \dots , e}^{n\ db}, e >$$

minden n természetes számra;

$$<F_{<1,n>}, <n,e,t>, \overbrace{e, \dots , e}^{n\ db}, t>$$

minden n természetes számra ;

$$<F_2, t, t>$$

$$<F_3, t, t, t >$$

$$<F_{<4,\tau>}, <T, \tau>, t, t>$$

minden $\tau \in T \setminus \{t\}$ tipusra.

(7) R az identitás reláció az A-n.

L_2 szintaktikailag egyértelmű nyelv.

2.3 Szemantika

E és I halmazok, valamint a denotációk halmazai ugyanazok, mint az L_1 esetében.

J az E-re vonatkozó értékhozzárendelések halmaza, ahol $j \in J$ egy olyan függvény, melynek értelmezési tartománya (n, τ) rendezett párok halmaza, ahol n természetes szám, $\tau \in T \setminus \{t\}$ tipus és valahányszor (n, τ) egy ilyen rendezett pár,

$$j(n, \tau) \in D_{\tau,E,I} ;$$

$j_x^{n,\tau}$ az egy j' függvény, ahol

(1) $j'(n,\tau) = x$, ahol $x \in D_{\tau,E,I}$;

(2) $j'(m,\sigma) = j(m,\sigma)$ minden (n,τ) -tól különböző (m,σ) párra, ahol $\sigma \in T \setminus \{t\}$.

σ_2 tipus hozzárendelő függvény

$$\sigma_2(\tau) = \tau \quad , \text{ ha } \tau \in T$$

$$\sigma_2(\langle T,t\rangle) = \tau \ , \text{ ha } \tau \in T \setminus \{t\}.$$

B a jelentések halmaza ugyanaz, mint L_1 esetében.

Az L_2 nyelv modelljeinek K_2 osztálya:

L_2 modelljei

$$\langle\langle B, G_\gamma, f\rangle_{\gamma\in\Gamma}, \langle i_o, j_o\rangle\rangle ,$$

ahol a nemüres E, I, J halmazokra

(1) $\langle B, G_\gamma, f\rangle_{\gamma\in\Gamma}$ egy Fregei interpretáció az L_2-re E, I, J -re és σ_2 -re vonatkozóan,

(2) I ugyanolyan, mint L_1 esetében: $I = \{i_o\}$; J az E-re vonatkozó értékhozzárendelések halmaza.

(3) A referencia pontot itt is a szokásos $<i, j>$ pár helyett csak j-val fogjuk jelölni.

(4) Valahányszor $C_{n,\tau} \in Con_\tau$ és $j, j' \in J$, akkor

$$f(C_{n,\tau})(j) = f(C_{n,\tau})(j') .$$

Valahányszor $V_{n,\tau} \in Var_\tau$, $j \in J$, n természetes szám és $\tau \in T \setminus \{t\}$

$$f(V_{n,\tau})(j) = j(n,\tau) \in D_{\tau,E,I} .$$

(5) A $G_{<0,n>}, G_{<1,n>}, G_2, G_3$ szemantikus operációk j referencia pontnál való kiértékelése hasonló módon történik, mint az L_1 -ben.

$$G_{<4,\tau>}(a,b)\,(j) = \{\emptyset\}$$

akkor és csak akkor, ha van egy olyan $j_x^{n,\tau}$, hogy

$$b\,(j_x^{n,\tau}) = \{\emptyset\},$$

ha $a \in M_{<T,\tau>,E,I,J}$, $b \in M_{t,E,I,J}$ és $\tau \in T \setminus \{t\}$.

2.4 Igazság

L_2 igaz mondatának, és K_2 érvényes mondatának definiciói az L_1 nyelvben leírt módon adhatók meg.

3. *OMEGA RENDŰ LOGIKA* (L_ω)

Az omega rendű logikát a λ-kalkulus segítségével fogjuk felépíteni.

3.1 L_ω *típusai*

L_ω tipusainak halmaza az a legkisebb T halmaz, amelyre

(1) e, t $\in$ T;

(2) ha $\alpha, \beta \in$ T, akkor $<\alpha, \beta> \in$ T ; ahol e, t különböző entitások, és egyik sem rendezett pár.

3.2 *Szintaxis*

L_ω primitiv szimbólumai:

$[,], \equiv, \lambda_\tau, V_{n,\tau}, C_{n,\tau}$ minden n természetes számra és $\tau \in$ T tipusra.

λ_τ – függvény absztraktor;

$V_{n,\tau}$ – n-edik τ tipusú változó;

$C_{n,\tau}$ – n-edik τ tipusú konstans .

Szintaktikus operációk

Legyenek $J_0, J_1, J_{<2,\tau>}$ $\tau \in$ T -re azok az operációk, melyek mindegyike két argumentumú. Ezek a primitiv szimbólumok sorozatain vannak értelmezve:

$$J_0(\zeta, \eta) = [\zeta\ \eta] \ ;$$

$$J_1(\zeta, \eta) = [\zeta \equiv \eta] \ ,$$

$$J_{<2,\tau>}(\zeta, \eta) = [\lambda_\tau\ \zeta\ \eta] \ .$$

Rövidítések

Var_τ – az összes τ tipusú változójelek halmaza;

Con_τ – az összes τ tipusú konstans jelek halmaza.

X_τ – $Con_\tau \cup Var_\tau$

L_ω, azaz az omega rendü logika nyelve egy

$$<<A, F_\gamma, X_\delta, S, t>_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ \delta\in\Delta}}, R>$$

rendszer, ahol

(1) A az a legkisebb halmaz, amely tartalmaz minden X_τ $\tau \in T$ halmazt, és zárt a $J_o, J_1, J_{<2,\tau>}$ operációkra nézve;

(2) $\Gamma = \{0, 1, <2,\tau> : \tau \in T\}$;

(3) F_γ-k a J_γ-k megszoritása az A-ra;

(4) $\Delta = T \cup (\{T\} \times T)$;

(5) minden $\tau \in T$-re $X_\tau = Con_\tau$ Var_τ és $X_{<T,\tau>} = Var_\tau$

(6) S egy halmaz, mely az összes következő sorozatokat tartalmazza:

$$<F_o, <\sigma,\tau>, \sigma, \tau>$$
$$<F_1, \tau, \tau, t>$$
$$<F_{<2,\sigma>}, <T,\sigma>, \tau, <\sigma,\tau>>,$$

ahol $\sigma, \tau \in T$.

(7) R az identitás reláció az A-n.

3.3 *Szemantika*

Az E és I halmazok ugyanazok, mint az L_1 és L_2 nyelvekben.

Az E, I és τ tipussal kapcsolatos denotációk halmaza:

$$D_{e,E,I} = E;$$

$$D_{t,E,I} = \{ \emptyset, \{\emptyset\} \};$$

és ha $\sigma, \tau \in T$, akkor

$$D_{<\sigma,\tau>,E,I} = (D_{\tau,E,I})^{D_{\sigma,E,I}}.$$

Az E-re vonatkozó érték hozzárendelések J halmaza olyan j függvényeket tartalmaz, hogy $\tau \in T$-re és (n,τ) párra

$$j(n,\tau) \in D_{\tau,E,I}.$$

$j_x^{n,\tau}$ érték hozzárendelés az L_2-ben ismertetett módon definiált.

$$B = \bigcup_{\tau \in T} M_{\tau,E,I,J}$$

jelentések halmaza; σ_ω tipus hozzárendelő függvény:

$$\sigma_\omega(\tau) = \sigma_\omega(<T,\tau>) = \tau.$$

L_ω – nyelv modelljeinek K_ω osztálya

L_ω modelljei:

$$<B, G_\gamma, f>_{\gamma \in \Gamma}, <i_o, j_o>>,$$

ahol a nemüres E, I, J halmazokra

(1) $<B, G_\gamma, f>_{\gamma \in \Gamma}$ egy Fregei interpretáció az L_ω-ra, E, I, J -re és σ_ω-ra vonatkozóan;

(2) J az E-re vonatkozó érték hozzárendelések halmaza ;

(3) A referencia pontot itt is a szokásos $<i, j>$ pár helyett csak j-vel fogjuk jelölni;

(4) Valahányszor $C_{n,\tau} \in Con_\tau$ és $j, j' \in J$, akkor $f(C_{n,\tau})(j) = f(C_{n,\tau})(j')$; valahányszor $V_{n,\tau} \in Var_\tau$ $j \in J$, $0<n<\omega$ és $\tau \in T$,

$$f(V_{n,\tau}) = j(n,\tau) \in D_{\tau,E,I};$$

(5) Minden $a, b \in B$, $j \in J$, $\sigma, \tau \in T$, $0<n<\omega$ esetén

$$G_o(a,b)(j) = a(j)(b(j)),$$

ha $a \in M_{<\sigma,\tau>,E,I,J}$ és $b \in M_{\sigma,E,I,J}$;

$$G_1\ (a,b)\ (j) = \{\emptyset\}$$

akkor és csak akkor, ha $a(j) = b(j)$;

$$G_{<2,\tau>}(a,b)(j)$$

az egy p függvény a $D_{\tau,E,I}$ -n úgy, hogy minden $x \in D_{\tau,E,I}$ -re

$$p\,(x) = b\,(j_x^{n,\tau})\ .$$

Megjegyzés:

Legyen $< \mathfrak{B}\ <i_o, j_o>> \in K_\omega$ mint fent.

Legyen g egy jelentés hozzárendelés az L_ω-ra;
h egy denotáció hozzárendelés az L_ω-ra.

Ekkor:

(1) Ha $\zeta \in Con_\tau$, akkor $h(\zeta) \in D_{\tau,E,I}$ és $g(\zeta)(j) = g(\zeta)(j')$ minden $j, j' \in J$ -re;

(2) Ha $\zeta \in Var_\tau$, akkor $h(\zeta) \in D_{\tau,E,I}$;

(3) Ha $\zeta \in Cat_{<\sigma,\tau>,\,L_\omega}$ és $\zeta \in Cat_{\sigma,L_\omega}$, akkor $h([\zeta\ \eta]) = h(\zeta)(h(\eta))$;

(4) Ha $\zeta, \eta \in Cat_{\tau,L_\omega}$, akkor $h([\zeta \equiv \eta]) = \{\emptyset\}$, akkor és csak akkor, ha $h(\zeta) = h(\eta)$;

(5) Ha $\zeta \in Cat_{\tau,L_\omega}$, akkor $h(\lambda_\sigma\ V_{n,\sigma}\,\zeta)$ az egy p függvény a $D_{\sigma,E,I}$ -n úgy, hogy minden $x \in D_{\sigma,E,I}$ -re $p(x) = g(\zeta)(j_x^{n,\sigma})$.

Rövidítések:

$x \in \bigcup_{\tau \in T} Var_\tau$; $\varphi, \psi \in Cat_{t,L_\omega}$; $\sigma, \tau \in T$;

$\forall\, x\,\varphi = [\lambda\, x\,\varphi \equiv \lambda\, x\,[x \equiv x]]$;

$\neg\,\varphi = [\varphi \equiv \forall\,\beta\,\beta]$, ahol $\beta = V_{o,t}$;

$\varphi \wedge \psi = \forall\,\beta\,[\psi \equiv [[\beta\,\varphi] \equiv [\beta\,\psi]]]$, ahol $\beta = V_{o,<t,t>}$;

$\varphi \rightarrow \psi = \neg\,(\varphi \wedge \neg\,\psi)$;

$\varphi \vee \psi = \neg \varphi \rightarrow \psi$;

$\exists x\, \varphi = \neg \forall x \neg \varphi$.

3.4 *Igazság*

L_ω igaz mondatai és K_ω érvényes mondatai ugyanúgy definiálhatók, mint az L_1 nyelvben.

IV. EGY PARCIÁLIS ALGEBRÁN ALAPULÓ LOGIKAI NYELV

A programozási nyelvek általában rendelkeznek azzal a sajátossággal, hogy az operátorok nem mindenütt vannak értelmezve. Ezért ha matematikai logikai eszközökkel akarjuk a programozási nyelvek szemantikáját leírni, akkor a parciális függvényeket is kezelni tudó logikára lenne szükség.

Ilyen parciális algebrákon alapuló logikával foglalkozik Németi I. a "Parciális algebrák és absztrakt modellelmélet" cimü tanulmányában [3]. Az itt közölt parciális algebrákon alapuló logikai nyelv egy fragmentumát fogjuk az univerzális grammatika eszközeivel megadni.

A logikai nyelv megadása előtt két új fogalom definiálása szükséges:

Egy n-argumentumú parciális függvény az A-n egy olyan ϕ leképzés, hogy

$$(\exists H \subseteq A^n)\, \phi : H \rightarrow A,$$

ahol A egy tetszőleges nemüres halmaz.

Egy parciális algebra az egy $\langle A, \phi_\gamma \rangle_{\gamma \in \Gamma}$ rendszer, ahol A egy nem üres halmaz, Γ tetszőleges halmaz, és minden $\gamma \in \Gamma$ -ra ϕ_γ egy parciális függvény az A-n.

Egy parciális algebrákon alapuló logikai nyelv jele: L_p

1. *AZ L_p TÍPUSAI*

$$T = \{ e; t \langle n,e,e \rangle : 0 < n < \omega \},$$

ahol

e	–	létező dolgok, vagy entitások tipusa;
t	–	igazságértékek tipusa;
$\langle n,e,e \rangle$	–	n-argumentumú parciális függvények tipusa;
e,t	–	különböző halmazok, egyik sem rendezett pár.

2. *SZINTAXIS*

2.1 *L_p primitiv szimbólumai*

$V_{n,e}$ – $0<n<\omega$ megszámlálható sok e tipusú változójel;

$C_{n,e}$ – $0<n<\omega$ megszámlálható sok e tipusú konstansjel;

ϕ_i $i \in H_n$ – n-argumentumú parciális függvény jelek;

$\neg$ – negáció jele;

$\vee$ – logikai vagy jele;

$\exists$ – egzisztenciális kvantor;

$\exists\!\!\!|$ – egy olyan szimbólum, amely azt jelöli, hogy az utána lévő kifejezés "értelmezve van", azaz létezik ilyen kifejezés;

$\equiv$ – azonosság reláció jele;

$\uparrow$ – igaz jele.

2.2 *Rövidítések*

Var – az összes e tipusú változók halmaza;

Con – az összes e tipusú konstans halmaza;

PF_n – az összes n argumentumú parciális függvény halmaza;

Az L_p nyelv alapkifejezéseinek halmaza

$$X = \mathrm{Var} \cup \mathrm{Con} \bigcup_{n<\omega} PF_n \cup \{\uparrow\}$$

2.3 *Operációk*

Legyenek $J_{<0,n>}, J_1, J_2, J_3, J_4, J_5$ minden $0<n<\omega$ -ra azok az operációk, melyek rendre n+1, 2, 1, 2, 1, 2 argumentumúak. Ezek a primitiv szimbólumok sorozatain vannak értelmezve, és olyanok, hogy valahányszor $\theta, \tau, \sigma, \zeta, \rho, \eta_i$ $0<i\leq n$ primitiv szimbólumok sorozatai:

$J_{<0,n>}(\theta, \eta_1, \ldots, \eta_n) = \theta(\eta_1, \ldots, \eta_n)$;

$J_1(\tau, \sigma) = \tau \equiv \sigma$;

$J_2(\tau) = \exists\!\!\exists\, \tau$:

$J_3(\zeta, \rho) = \zeta \vee \rho$;

$J_4(\zeta) = \neg\, \zeta$;

$J_5(\eta, \zeta) = \exists\, \eta\, \zeta$.

2.4 L_p, *azaz a parciális algebrákon alapuló logika nyelve* az egy

$$<<A, F_\gamma, X_\delta, S, t>_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ \delta\in\Delta}}, R>$$

rendszer, ahol

(1) A az a legkisebb halmaz, amelyre $X \subset A$ és zárt az összes $J_{<0,n>}, J_1, J_2, J_3, J_4, J_5$ operációkra nézve minden $0<n<\omega$ -ra;

(2) $\Gamma = \{ <0,n>, 1, 2, 3, 4, 5, : 0<n<\omega \}$;

(3) F_γ minden $\gamma\in\Gamma$ -ra J_γ megszoritása az A-ra;

(4) $\Delta = \{ T, <T, e> \}$, ahol Δ a szintaktikus kategóriák indexhalmaza;

(5) $X_e = Var \cup Con$;

$X_t = \{ \uparrow \}$;

$X_{<n,e,e>} = PF_n$ minden $0<n<\omega$ -ra

$X_{<T,e>} = Var$

(A $<T, e>$ kategóriát a kötött változók megkülönböztetésére vezettük be.)

(6) S egy halmaz, amely az összes következő sorozatot tartalmazza:

$$<F_{<0,n>}, <n,e,e> \overbrace{e, .., e}^{n\ db}, e> ,$$

$$<F_1, e, e, t> ,$$

$$<F_2, e, t> ,$$

$$<F_3, t, t, t> ,$$

$$<F_4, t, t> ,$$

$$<F_5, <T, e>, t, t> ;$$

(7) R az identitás reláció az A-n .

Ezek a kikötések az I.fejezetben lévő egyértelműsített nyelv definiciója értelmében definiálnak egy egyértelműsített nyelvet.

L_p szintaktikailag egyértelmü nyelv.

2.5 *Megjegyzés*

(1) $Con \cup Var \subseteq Cat_{e,\, L_p}$;

(2) Ha $\zeta \in Cat_{<n,e,e>,\, L_p}$ és. $\eta_i \in Cat_{e,\, L_p}$ minden $0<i<n$ -ra, akkor

$$\zeta(\eta_1, \ldots, \eta_n) \in Cat_{e,\, L_p} ;$$

(3) Ha $\tau, \sigma \in Cat_{e,\, L_p}$, akkor

$$\tau \equiv \sigma \in Cat_{t,\, L_p} ;$$

(4) Ha $\tau \in Cat_{e,\, L_p}$, akkor

$$\exists!\, \tau \in Cat_{t,\, L_p} ;$$

(5) Ha $\zeta, \rho \in Cat_{t,\, L_p}$, akkor

$$\zeta \vee \rho \in Cat_{t,\, L_p} ;$$

(6) Ha $\zeta \in Cat_{t,\, L_p}$, akkor

$$\neg \zeta \in Cat_{t,\, L_p} ;$$

(7) Ha $\eta \in Cat_{<T,\, e>,\, L_p}$ és $\zeta \in Cat_{t,\, L_p}$, akkor

$$\exists\, \eta\, \zeta \in Cat_{t,\, L_p}$$

3. SZEMANTIKA

Legyen E az entitások halmaza.

Legyen I a lehetséges világok halmaza egyelemű.

$$I = \{ i_o \} .$$

Legyen J az E-re vonatkozó értékhozzárendelések halmaza ugyanolyan, mint az L_1 esetében, azaz

$$J = E^{\omega \times \{e\}} .$$

A σ_p tipus hozzárendelő függvény és a B jelentések halmaza ugyanolyan módon definiált, mint L_1 esetében.

Megadjuk a $\tau \epsilon T$ -re, E-re és L-re vonatkozó denotációk halmazát:

$$D_{e,E,I} = E ;$$

$$D_{t,E,I} = \{ \emptyset , \{ \emptyset \} \} ;$$

$$D_{<n,e,e>,E,I} = \bigcup_{H \epsilon \mathcal{P}(E^n)} E^H$$

Az L_p nyelv modelljeinek K_p osztálya

L_p modelljei:

$<<B, G_\gamma, f>, <i_o, j_o>>$ modellek, ahol a nem üres E, I, J halmazokra

(1) $<B, G_\gamma, f>_{\gamma \epsilon \Gamma}$ egy Fregei interpretáció az L_p -re az E, I, J-re és σ_p -re vonatkozóan ;

(2) J, E, I a fent definiáltak;

(3) mivel I egy elemű, a referencia pontot a szokásos $<i, j>$ pár helyett csak j-vel fogjuk jelölni.

(4) Megadjuk az f függvényt:
ha $C_{n,e} \epsilon$ Con, minden $j, j' \epsilon$ J-re

$$f(C_{n,e})(j) = f(C_{n,e})(j') \;;$$

ha $V_{n,e} \in Var$ $j \in J$, és n természetes szám,

$$f(V_{n,e})(j) = j(n,e) \in E.$$

(5) Szemantikus operációk

(a) Ha $a \in M_{<n,e,e>,E,I,J}$ és $b_1, \ldots, b_n \in M_{e,E,I,J}$, akkor

$$G_{<0,n>}(a, b_1, \ldots, b_n)(j) = a(j)(b_1(j), \ldots, b_n(j)) \;;$$

(b) Ha $a, b \in M_{e,E,I,J}$, akkor

$$G_1(a,b)(j) = \{\emptyset\}$$

akkor és csak akkor, ha $a(j)$ és $b(j)$ létezik és $a(j) = b(j)$;

(c) Ha $a \in M_{e,E,I,J}$, akkor

$$G_2(a)(j) = \{\emptyset\}$$

akkor és csak akkor, ha $a(j)$ létezik ;

(d) Ha $a, b \in M_{t,E,I,J}$, akkor

$$G_3(a,b)(j) = \{\emptyset\}$$

akkor és csak akkor, ha vagy $a(j) = \{\emptyset\}$, vagy $b(j) = \{\emptyset\}$;

(e) Ha $a \in M_{t,E,I,J}$, akkor

$$G_4(a)(j) = \{\emptyset\}$$

akkor és csak akkor, ha $a(j) = \emptyset$;

(f) Ha $a \in M_{e,E,I,J}$ és $b \in M_{t,E,I,J}$, akkor

$$G_5(a,b)(j) = \{\emptyset\}$$

akkor és csak akkor, ha van egy olyan $j_x^{n,e}$ és $x \in D_{e,E,I}$, hogy

$$b(j_x^{n,e}) = \{\emptyset\}.$$

4. *IGAZSÁG*

L_p igaz mondatai és K_p érvényes mondatai ugyanúgy definiálhatók, mint az L_1 nyelvben.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] R. Montague: Universal Grammar. Theoria 36:373–98 (1970)

[2] R. Montague: The Proper Treatment of Quantification in Ordinary English
Approaches to Natural Language: Proceeding of the 1970 Stanford
Workshop on Grammar and Semantics (1973)

[3] Németi I.: Parciális algebrák és absztrakt modellelmélet (1976)

[4] H.Andreka, T.Gergely, I.Németi: Easily comprehensible mathematical logic and its
model theory (1975)

[5] H.Andreka, T.Gergely, I.Németi: On Universal algebraic construction of logics.
Studia Logica. 1977
Ugyanez megjelent még: BANACH Center for Math. 1973.
Logis Semster'73

[6] J.A.Goguen, J.B.Thatcher, E.G.Wagner, J.B.Wright: Some Fundamentals of Order-
-Algebraic Semantics (June 1976) UCLA

[7] J.A.Goguen: Initial Algebra Semantics and Continuous Algebras (1977) JACH

[8] G.Frege: Uber Sinn und Bedeutung. Zeitschrift fur Philosophie und philosophische
Kritik 100:25-50 (1982)

[9] S.A.Kripke: Semantical analysis of modal logic. I.Normal modal propositional calculi,
ZMLGM 9. (1963)

[10] P.J.Hayes: Logic of actions, Machine Intelligence N.6. N.Y. (1971)

[11] J.A.Makowski: On the axiomatic theory of modeltheoretic languages
Logic Semester'73 BANACH Center for Math. (1973)

[12] P.M.Cohn: Universal Algebra (1975)

[13] Z.Márkusz, M.Szöts: On semantics of programming languages defined by universal algebraic tools
Mathematical Logic in Computer Science, Salgótarján, Hungary (1978)

A TANULMÁNYSOROZATBAN 1982-BEN MEGJELENTEK

130/1982 Barabás Miklós - Tőkés Szabolcs: A lézer printer képalkotás hibái és optikai korrekciójuk

131/1982 RG-II/KNVVT "Szisztemü upravlenija bazani dannüh i informacionnüe szisztemü" Szbornik naucsno-iszszledovatel'szkih rabot rabocsej gruppü RG-II KNVVT, Bp. 1979. T o m I.

132/1982 RG-II/KNVVT T o m II.

133/1982 RG-II KNVVT T o m III.

134/1982 Knuth Előd - Rónyai Lajos: Az SDLA/SLT adatbázis lekérdező nyelv alapjai /orosz nyelven/

135/1982 Néhány feladat a tervezés-automatizálás területéről. Örmény-magyar közös cikkgyüjtemény

136/1982 Somló János: Forgácsoló megmunkálások folyamatainak optimálási és irányitási problémái

137/1982 KGST I-15.1. Szakbizottság 1979. és 80. évi előadásai

138/1982 Kovács László: Számitógép-hálózati protokollok formális specifikálása és verifikálása

139/1982 Operációs rendszerek elmélete 7. visegrádi téli iskola

A TANULMÁNYSOROZATBAN 1983-BAN MEGJELENTEK

140/1983 Operation Research Software Descriptions (Vol.1.) Szerkesztette: Prékopa András és Kéri Gerzson

141/1983 Ngo The Khanh: Prefix-mentes nyelvek és egyszerü determinisztikus gépek

142/1983 Pikler Gyula: Dialógussal vezérelt interaktiv gépészeti CAD rendszerek elméleti és gyakorlati megfogalmazása