

108 082.

RÓZSA PÉTER

REKURSÍVE
FUNKTIONEN

AKADÉMIAI KIADÓ
BUDAPEST

300 133

REKURSIVE FUNKTIONEN

VON

RÓZSA PÉTER

MTAK



0 00002 94886 7

AKADÉMIAI KIADÓ + AKADEMISCHER VERLAG

BUDAPEST, 1951

108082



Akadémiai Kiadó (Budapest, VI., Sztálin-út 31). — Felelős: Mestyan János

Budapest nyomda, Gerlóczy-utca 2. — 7953/50. — Felelős vezető: ifj. Puskás Ferenc

VORWORT

Die Theorie der rekursiven Funktionen gehört eigentlich zur Zahlentheorie: hier handelt es sich ja sozusagen um die Funktionenlehre der Zahlentheorie. Der Stoff kann also das Interesse aller Mathematiker erwecken. Sogar für die Naturwissenschaften ist er nicht ohne Interesse. Durch den Begriff der rekursiven Funktion werden solche Funktionen abgegrenzt, deren Werte sich an allen konkreten Stellen effektiv berechnen lassen; und in den Naturwissenschaften sind eben solche Funktionen brauchbar. Die Variablen der rekursiven Funktionen durchlaufen zwar nicht sämtliche reelle Zahlen, nur die natürlichen, doch operiert sowohl die Wahrscheinlichkeitsrechnung, als auch die Quantentheorie mit Funktionen dieser Art; und unlängst begann die Anwendung der rekursiven Funktionen auch in der Analysis.

Eben darum wurde dieses Buch so geschrieben, dass es auch von in der mathematischen Logik Unkundigen ohne Schwierigkeiten gelesen werden könne. Die Behandlung des Stoffes ist nicht formalistisch. Obwohl sich der axiomatische Aufbau der rekursiven Zahlentheorie als ein Teil des Systems der ganzen Zahlentheorie¹ oder für gewisse Untersuchungen selbständig² nützlich erwiesen hat, scheint jedoch sogar für die Forscher der mathematischen Grundlagen eine Behandlungsweise erwünschter, die sich auf die unmittelbare Einsicht beruft. Es hat ja einerseits die Auftauchung der mengentheoretischen Antinomien den Wunsch erweckt: möglichst weite Gebiete der Mathematik sich auf die keinen Widerspruch zulassende, unmittelbare Evidenz berufend aufzubauen; andererseits können in der Untersuchung der bedenklichen Gebiete zu Widerspruchsfreiheitsbeweisen nur solche, sich auf die unmittelbare Einsicht berufende Mitteln benutzt werden.

Das Buch trachtet überall auch den Weg zu zeigen, der zum angewandten Verfahren führt. Die Behandlungsweise ist vollständig elementar. Aus den berührten Gebieten (elementare Zahlentheorie, Analysis, Mengenlehre, besonders transfinite Ordnungszahlen) wird nur die Kenntnis der ersten Elemente vorausgesetzt. Statt komplizierte allgemeine Beweise zu geben, werden die Methoden möglichst an Beispielen gezeigt; dabei wird es angegeben, in welchen Arbeiten die allgemeinen Beweise zu finden sind.

¹) HILBERT-BERNAYS [1].

²) CURRY [1] und [2].

Die Anwendungen der rekursiven Funktionen werden in diesem Buch nur kurz erwähnt. Es gehören ja unter die Anwendungen die wichtigsten Kapitel der mathematischen Grundlagenforschung; ihre ausführliche Behandlung würde selbständige Bände erfordern.

Die Zergliederung der einzelnen Kapitel ist im Inhaltsverzeichnis zu finden; hier kann man einen Überblick des ganzen behandelten Stoffes gewinnen. Von den oft benutzten primitiv-rekursiven Funktionen (und auch von ihrem Aufbau) gibt die Tabelle am Ende des § 2 einen Überblick.

Zum Schluss möchte ich Herrn Professor Dr. L. Kalmár in Szeged meinen Dank aussprechen dafür, dass er das Manuskript sorgfältig durchgelesen und mich, wie in meiner ganzen Arbeit, auch im Verfassen dieses Buches mit seinen wertvollen Ratschlägen unterstützt hat. Herrn E. Hódi in Budapest bin ich für sorgfältige Mithilfe an der Korrektur zum Dank verpflichtet.

Dem Ungarischen Akademie der Wissenschaften schulde ich besonderen Dank. Dieses Buch wurde nämlich ursprünglich als ein Band der internationalen Serie »Studies in Logic« (Amsterdam) geschrieben. Aber als es schon nahe zur Beendigung war, wurden mir gegen Übereinkommen unannehmbare neue Bedingungen gestellt. Da kam mir die Ungarische Akademie der Wissenschaften zu Hilfe, und war bereit das Buch ohne Verzögerung in deutscher Sprache herauszugeben.

Budapest, den 15-ten Oktober 1950.

Rózsa Péter

§ 1. DIE ÜBLICHE DEFINITION VON ZAHLENTHEORETISCHEN FUNKTIONEN, DURCH ÜBERGANG VON n AUF $n + 1$.

1. Man erhält die natürlichen Zahlen, wenn man von 0 oder von 1 ausgeht (in diesem Buch immer von 0), und immer wieder um 1 weiterzählt. Darum ist in der Wissenschaft der natürlichen Zahlen, in der elementaren Zahlentheorie, dieses »um 1 Weiterzählen« eine der wichtigsten Methoden. Die Aussagen über natürliche Zahlen lassen sich meistens so beweisen, dass man von n auf $n + 1$ schliesst; und es ist üblich, zahlentheoretische Funktionen so zu definieren, dass der Funktionswert an der Stelle 0, und ausserdem die Art angegeben wird, wie der für $n + 1$ angenommene Funktionswert aus an vorherigen Stellen angenommenen Funktionswerten gewonnen werden kann.

2. Die einfachste der vier Spezies: die Addition einer natürlichen Zahl zu einer anderen natürlichen Zahl a kann so ausgeführt werden, dass man die Einheiten der betreffenden Zahl einzeln zu a hinzuzählt. Die Addition von $n + 1$ kann daher so geschehen, dass zum Ergebnis $a + n$ der Addition von n noch eine 1 addiert wird. Das heisst, wenn die Summe $a + n$ mit $\varphi(n, a)$ bezeichnet wird, so ist

$$\varphi(0, a) = a$$

$$\varphi(n + 1, a) = \varphi(n, a) + 1 .$$

Hier wurde also die Funktion $\varphi(n, a) = a + n$ mit Hilfe der einfacheren Funktion $\beta(a) = a + 1$ wie folgt definiert:

$$\varphi(0, a) = a$$

$$\varphi(n + 1, a) = \beta(\varphi(n, a)) .$$

Obzwar die Operation des Weiterzählens β ein Spezialfall der Addition, nämlich $\beta(a) = \varphi(1, a)$ ist, betrachtet man diese Operation mit Recht einfacher als die Addition; nicht nur, da sie einstellig, die Addition dagegen zweistellig ist, sondern auch, weil sie auch geschichtlich der Addition vorangeht. Auch das Kind, bevor es noch addieren kann, weiss, dass 10 auf 9 folgt (und auch nachher berechnet es nicht durch Addition von 1: welche Zahl auf 9 folgt). Man kann natürlich die Definition der Addition auch wie folgt schreiben:

$$\varphi(0, a) = a$$

$$\varphi(\beta(n), a) = \beta(\varphi(n, a)) ;$$

und ähnliches gilt weiter unten für die Definitionen anderer Funktionen.

In analoger Weise bedeutet die Multiplikation von a mit den Zahlen 1, 2, 3, ... dass a 1-mal, 2-mal, 3-mal, ... addiert wird; bei dem Multiplizieren

mit $n + 1$ wird also noch ein a zum Ergebnis $n \cdot a$ des Multiplizierens mit n addiert. Das heisst, wird jetzt das Produkt $n \cdot a$ mit $\varphi(n, a)$ bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned}\varphi(0, a) &= 0 \\ \varphi(n + 1, a) &= \varphi(n, a) + a.\end{aligned}$$

Ähnlich sieht man ein, dass der Potenzwert a^{n+1} vom Wert a^n durch Multiplizieren mit noch einem a zustande kommt; ist also in diesem Fall $\varphi(n, a) = a^n$, so ist

$$\begin{aligned}\varphi(0, a) &= 1 \\ \varphi(n + 1, a) &= \varphi(n, a) \cdot a.\end{aligned}$$

(Hier wurde der Wert von $\varphi(0, a)$ für alle a als 1 angegeben; so ist in der Definition auch das Übereinkommen enthalten, dass unter dem sonst unbestimmten Wert 0^0 hier 1 verstanden wird.)

3. Da wir im Gebiete der nicht-negativen ganzen Zahlen bleiben wollen, können wir nicht unbeschränkt die Differenz zweier Zahlen definieren. Statt dessen können wir eine Funktion $a \dot{-} n$ gut gebrauchen, worunter für $a \geq n$ die Differenz $a - n$, und für $a < n$ (in welchem Fall $a - n$ negativ sein würde) 0 verstanden wird. ($a \dot{-} n$ ist also allgemein der »positive Teil« von $a - n$, wobei unter dem positiven Teil einer positiven Zahl oder von 0 die Zahl selbst, unter dem positiven Teil einer negativen Zahl aber 0 verstanden wird.)

Auch dieses modifizierte Subtrahieren einer Zahl kann so geschehen, dass man die in der Zahl enthaltenen Einheiten einzeln abzieht, aber nur so lange, bis man zu 0 kommt; von hier an wird diese neuartige Differenz immer 0 sein. So ergibt das Abziehen von $n + 1$ aus a um 1 weniger, als das Abziehen von n — angenommen, dass nach Abziehen von n noch wenigstens 1 geblieben ist; wenn nicht, so ist das Ergebnis dasselbe, nämlich 0. Daher ist das Ergebnis bei dieser »arithmetischen« Subtraktion von $n + 1$ nicht $(a \dot{-} n) - 1$, sondern $(a \dot{-} n) \dot{-} 1$; das heisst, ist $\varphi(n, a) = a \dot{-} n$, so ist

$$\begin{aligned}\varphi(0, a) &= a \\ \varphi(n + 1, a) &= \varphi(n, a) \dot{-} 1.\end{aligned}$$

In dieser Definition wurde die »arithmetische« Subtraktion von 1 benutzt. $n \dot{-} 1$ bedeutet die Differenz $n - 1$, solange $n \geq 1$ ist, und wird zu 0, wenn $n = 0$ ist. Daher, wird $\varphi(n) = n \dot{-} 1$ gesetzt, so ist

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 0 \\ \varphi(n + 1) &= n.\end{aligned}$$

4. Eine Summe mit beliebig vielen Gliedern und ein Produkt mit beliebig vielen Faktoren kann ebenfalls leicht durch Übergang von n zu $n + 1$ definiert werden. Ist zum Beispiel eine Funktion $\alpha(n, a_1, \dots, a_r)$ von beliebig vielen Variablen bereits bekannt, so erhält man, indem man die Funktionswerte für $n = 0, 1, 2, \dots$ addiert bzw. multipliziert

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^0 \alpha(i, a_1, \dots, a_r) &= \alpha(0, a_1, \dots, a_r) \\ \sum_{i=0}^{n+1} \alpha(i, a_1, \dots, a_r) &= \left\{ \sum_{i=0}^n \alpha(i, a_1, \dots, a_r) \right\} + \alpha(n + 1, a_1, \dots, a_r),\end{aligned}$$

bzw.

$$\prod_{i=0}^0 \alpha(i, a_1, \dots, a_r) = \alpha(0, a_1, \dots, a_r)$$

$$\prod_{i=0}^{n+1} \alpha(i, a_1, \dots, a_r) = \left\{ \prod_{i=0}^n \alpha(i, a_1, \dots, a_r) \right\} \cdot \alpha(n+1, a_1, \dots, a_r).$$

$\sum_{i=a}^b$ und $\prod_{i=a}^b$ sind für $b < a$ nicht definiert. Ich werde unter einer solchen Summe 0, und unter einem solchen Produkt 1 verstehen. Mit diesem Übereinkommen kann die Summe zwischen beliebigen Grenzen definiert werden:

$$\sum_{i=m}^n \alpha(i, a_1, \dots, a_r) = \begin{cases} 0, & \text{falls } m > n \\ \sum_{i=0}^n \alpha(i, a_1, \dots, a_r), & \text{falls } m = 0 \\ \sum_{i=0}^n \alpha(i, a_1, \dots, a_r) - \sum_{i=0}^{m-1} \alpha(i, a_1, \dots, a_r), & \text{falls } 0 < m \leq n. \end{cases}$$

Freilich könnte auch das Produkt zwischen beliebigen Grenzen in analoger Weise definiert werden, nur übernimmt dann die Rolle der Subtraktion die Division, von welcher erst später die Rede sein wird.

5. Die Trennung der einzelnen Fälle muss nicht in Worten geschehen. $m > n$, $m = 0$ und $0 < m \leq n$ sind sich gegenseitig ausschliessende Möglichkeiten, aber eine von diesen gilt immer, wie man auch m und n angibt. Es ist leicht die «charakteristischen Funktionen» dieser Beziehungen anzugeben; das heisst, solche Funktionen $\beta_1(m, n)$, $\beta_2(m, n)$ und $\beta_3(m, n)$, dass

$$\beta_1(m, n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } m > n \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \beta_2(m, n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } m = 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\beta_3(m, n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 < m \leq n \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

und mit diesen kann $\sum_{i=m}^n \alpha(i, a_1, \dots, a_r)$ so aufgeschrieben werden, dass die in den einzelnen Fällen angenommenen Werte mit Hilfe der entsprechenden charakteristischen Funktionen multipliziert und dann addiert werden.

Betrachten wir erst näher die betreffenden charakteristischen Funktionen. $m > n$ ist mit $m \geq n + 1$ und dies mit $(n + 1) \div m = 0$ äquivalent. $\beta_1(m, n)$ ist also eine solche Funktion, die für $(n + 1) \div m = 0$ den Wert 1, und sonst 0 annimmt. $\beta_1(m, n)$ hängt also sozusagen vom »Vorzeichen« der Funktion $(n + 1) \div m$ ab. Es ist nämlich unter den Zahlen mit Vorzeichen die folgende signum-Funktion gebräuchlich:

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a \text{ positiv ist} \\ 0, & \text{« } a = 0 \\ -1, & \text{« } a \text{ negativ ist.} \end{cases}$$

Hier kommen aber negative Zahlen nicht in Betracht, so lautet hier die Definition der entsprechenden Funktion (die wir zur Unterscheidung mit sg bezeichnen):

$$\begin{aligned} sg(0) &= 0 \\ sg(n+1) &= 1. \end{aligned}$$

Aber $\beta_1(m, n)$ verhält sich $sg((n + 1) \div m)$ entgegengesetzt: sein Wert ist 1 falls dies 0 ist und umgekehrt. Wird die Funktion, die sich entgegen-

Diese in vielen Worten erzählte Definition lässt sich wieder ohne ein einziges Wort aufschreiben. Erstens ist die Aussage, dass der Nachfolger von i mit n multipliziert eine Zahl grösser als a ergibt, das heisst, dass $(i + 1) n > a$ ist, mit $(i + 1) n \geq a + 1$ und dies mit

$$(a + 1) \div (i + 1) n = 0$$

gleichbedeutend. Ferner ist nach Nr. 7 der Wert

$$\text{sg} \left(\prod_{j=0}^k ((a + 1) \div (j + 1) n) \right)$$

gleich 0 oder 1, je nachdem es zwischen 0 und k (die Grenzen inbegriffen) ein j mit $(a + 1) \div (j + 1) n = 0$ gibt oder nicht. Daher sind die Werte von

$$\text{sg} \left(\prod_{j=0}^0 ((a + 1) \div (j + 1) n) \right), \quad \text{sg} \left(\prod_{j=0}^1 ((a + 1) \div (j + 1) n) \right),$$

$$\text{sg} \left(\prod_{j=0}^2 ((a + 1) \div (j + 1) n) \right), \dots$$

solange gleich 1, bis man zur kleinsten Zahl i gelangt, für welche $(a + 1) \div (i + 1) n = 0$ ist; von hier an sind alle Werte

$$\text{sg} \left(\prod_{j=0}^i ((a + 1) \div (j + 1) n) \right), \quad \text{sg} \left(\prod_{j=0}^{i+1} ((a + 1) \div (j + 1) n) \right), \dots,$$

$$, \text{sg} \left(\prod_{j=0}^a ((a + 1) \div (j + 1) n) \right)$$

gleich 0. Unter den aufgezählten Werten kommt also 1 für $j = 0, 1, 2, \dots, i-1$, also eben i -mal vor. Werden daher diese Werte summiert, so ergeben sie i -mal 1, das heisst:

$$i = \sum_{k=0}^a \text{sg} \left(\prod_{j=0}^k ((a + 1) \div (j + 1) n) \right).$$

Dieses i war aber eben die kleinste Zahl, deren Nachfolger mit n multipliziert mehr als a ergibt; für $n \neq 0$ ist daher $i = \left[\frac{a}{n} \right]$. Mit 0 kann man freilich nicht

dividieren; es sei nach Übereinkommen $\left[\frac{a}{0} \right] = 0$. Das kann auch in die vorherige Definition einbezogen werden: wenn man mit $\text{sg}(n)$ multipliziert, so ergibt sich 0 für $n = 0$; für alle andere n lässt das Multiplizieren mit $\text{sg}(n) = 1$ das Ergebnis unverändert. Also ist

$$\left[\frac{a}{n} \right] = \text{sg}(n) \cdot \sum_{k=0}^a \text{sg} \left(\prod_{j=0}^k ((a + 1) \div (j + 1) n) \right).$$

So wurde $\left[\frac{a}{n} \right]$ mit Hilfe von sg , Σ , \prod und \div ausgedrückt; diese sind aber alle durch Übergang von n auf $n + 1$ definiert worden.

Mit Hilfe von $\left[\frac{a}{n} \right]$ kann man jetzt auch das Produkt zwischen beliebigen Grenzen definieren; man erhält nämlich in analoger Weise wie für die Summe

$$\begin{aligned} \prod_{i=m}^n \alpha(i, a_1, \dots, a_r) &= \overline{\text{sg}}(n+1 \div m) \cdot 1 + \\ &+ \overline{\text{sg}}(m) \cdot \prod_{i=0}^n \alpha(i, a_1, \dots, a_r) + \\ &+ \overline{\text{sg}}((1 \div m) + (m \div n)) \cdot \left[\frac{\prod_{i=0}^n \alpha(i, a_1, \dots, a_r)}{\prod_{i=0}^{m-1} \alpha(i, a_1, \dots, a_r)} \right]. \end{aligned}$$

9. Allgemein sieht man ein, genau so, wie im in der vorigen Nummer betrachteten Fall, dass falls $\alpha(n, a_1, \dots, a_r)$ eine bereits bekannte Funktion ist, für welches es zu einem beliebigen r -tupel a_1, \dots, a_r , eine Zahl i unter den Zahlen bis zu einer Schranke n gibt, für welche $\alpha(i, a_1, \dots, a_r) = 0$ ist, so die kleinste sogenannte Zahl i als Funktion von a_1, \dots, a_r folgendermassen aufgeschrieben werden kann:

$$\sum_{k=0}^n \text{sg} \left(\prod_{j=0}^k \alpha(j, a_1, \dots, a_r) \right).$$

10. Der Rest der Division $\frac{a}{n}$, das heisst, die kleinste von a und n abhängige nichtnegative Zahl r , zu welcher es ein q gibt, so dass

$$a = qn + r,$$

lässt sich nun folgendermassen aufschreiben. Es ist

$$a = \left[\frac{a}{n} \right] n + r, \text{ also } r = a - \left[\frac{a}{n} \right] n;$$

hier kann der Subtrahend nicht grösser als der Minuend sein, die Differenz kann also durch die arithmetische Differenz ersetzt werden. Wird daher der Rest r als Funktion von a und n mit $\text{res}(a, n)$ bezeichnet, so ist

$$\text{res}(a, n) = a - \left[\frac{a}{n} \right] n.$$

(Für $n = 0$ ist $\text{res}(a, 0) = a \div 0 = a$).

Es ist klar, dass für $n \neq 0$ die Zahl a durch n teilbar oder nicht teilbar ist, je nachdem der Rest der Division 0 ist oder nicht:

$$\text{sg}(\text{res}(a, n)) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a \text{ durch } n \text{ teilbar ist} \\ 1 & \text{sonst;} \end{cases}$$

und so ist $\overline{\text{sg}}(\text{res}(a, n))$ die charakteristische Funktion der Teilbarkeit einer Zahl a durch n .

11. Mit Hilfe des Begriffes der Teilbarkeit lassen sich auch die mit dem Primzahlbegriff zusammenhängenden zahlentheoretischen Funktionen definieren.

Das Primzahlsein von n kann auf verschiedene Arten ausgedrückt werden. Zum Beispiel dadurch, dass die Teileranzahl der betreffenden Zahl 2 ist. Die Teiler einer Zahl n können so aufgesucht werden, dass man alle Zahlen von 1 bis n untersucht, ob sie n teilen, das heisst, ob $\overline{\text{sg}}(\text{res}(n, i))$ den Wert 1 beträgt. Wird 1 sovielmals addiert, wieviele Teiler gefunden worden sind, so erhält man die Anzahl der Teiler; also ist die Anzahl der Teiler von n :

$$S(n) = \sum_{i=1}^n \overline{\text{sg}}(\text{res}(n, i)) .$$

Darin ist auch das Übereinkommen $\varphi(0) = 0$ enthalten, der Wert von $\sum_{i=1}^0$ ist ja 0.

(Wenn nicht nach der Teileranzahl, sondern nach der Teilersumme gefragt wird, so werden nicht Einsen addiert, so oft ein Teiler i von n das heisst eine solche Zahl gefunden wird, für welche $\overline{\text{sg}}(\text{res}(n, i)) = 1$ ist; sondern diese Zahlen i selber. Daher erhält man die Teilersumme von n , indem man die Glieder der obigen Summe mit diesen Zahlen i multipliziert:

$$\sum_{i=1}^n i \cdot \overline{\text{sg}}(\text{res}(n, i)) .$$

Es ist nun n dann und nur dann eine Primzahl, wenn $S(n) = 2$, das heisst $|S(n) - 2| = 0$ ist. Es ist also die charakteristische Funktion der Primzahlbeschaffenheit einer Zahl n

$$\overline{\text{sg}}(|S(n) - 2|) .$$

Die Anzahl $\pi(n)$ der Primzahlen bis einer Zahl n kann wieder so erhalten werden, dass sovielmals 1 gezählt wird, wieviele Primzahlen bis n vorhanden sind. Der Wert von $\overline{\text{sg}}(|S(i) - 2|)$ ist eben 1, wenn i eine Primzahl, und 0, wenn i keine Primzahl ist; so ist die Anzahl der Primzahlen bis n (n inbegriffen)

$$\pi(n) = \sum_{i=2}^n \overline{\text{sg}}(|S(i) - 2|) .$$

12. In der vorigen Nummer wurde der absolute Betrag einer Differenz benutzt. Das kann aber leicht mit Hilfe der arithmetischen Differenz aufgeschrieben werden:

$$|a - b| = (a \dot{-} b) + (b \dot{-} a) ;$$

es ist ja an der rechten Seite der Wert jenes Gliedes, worin der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, gleich 0; und im anderen Glied wird aus der grösseren (bzw. nicht kleineren) Zahl die andere abgezogen.

13. Die Primzahlbeschaffenheit von n kann auch damit charakterisiert werden, dass $n \geq 2$ ist, und unter n nicht zwei Zahlen zu finden sind, deren Produkt n wäre. $n \geq 2$ ist mit $2 \dot{-} n = 0$ gleichbedeutend. Die andere Behauptung ist für $n \geq 2$ damit gleichbedeutend, dass $(n - 1)!^2$ nicht durch n teilbar ist, das heisst, dass

$$\overline{\text{sg}}(\text{res}((n - 1)!^2, n)) = 0$$

gilt; die hier vorkommende Differenz ist der arithmetischen Differenz gleich, und so erhält man — unter Benutzung, was am Anfang von Nr. 7 hervorgehoben wurde — dass n dann und nur dann eine Primzahl ist, wenn

$$(2 \dot{-} n) + \overline{\text{sg}}(\text{res}((n \dot{-} 1)!^2, n)) = 0$$

gilt. Die charakteristische Funktion der Primzahlbeschaffenheit von n (die 1 ist, falls n eine Primzahl, und 0, falls n keine Primzahl ist) kann also auch folgendermassen aufgeschrieben werden:

$$\overline{\text{sg}}((2 \div n) + \overline{\text{sg}}(\text{res}((n \div 1)!^2, n))) .$$

14. Für $n \geq 2$ lässt sich aber mit Hilfe der bisher definierten Funktionen auch unmittelbar aufschreiben, dass es zwischen 2 und $n-1$ keine Zahlen a und b gibt, deren Produkt n wäre, das heisst, für welche $|ab - n| = 0$ wäre. Dass es solche Zahlen a und b gibt, kann nach Nr. 7 durch

$$\prod_{a=2}^{n-1} \prod_{b=2}^{n-1} |ab - n| = 0$$

ausgedrückt werden (für $n = 2$ wird ja unter diesen Produkten 1 verstanden, und sonst ist das Produkt dann und nur dann 0, wenn irgendeiner der Faktoren 0 ist). Ist also das Produkt auf der linken Seite nicht 0, das heisst (da hier $n-1 = n \div 1$ ist), gilt

$$\overline{\text{sg}}\left(\prod_{a=2}^{n-1} \prod_{b=2}^{n-1} |ab - n|\right) = 0 ,$$

so gibt es keine solche Zahlen a und b ; daher ist n eine Primzahl.

15. Geht man endlich von jener Charakterisierung der Primzahlbeschaffenheit von n aus, dass für alle a und b aus $ab = n$ entweder $a = 1$ oder $b = 1$ folgt, so muss man zuerst bedenken, dass nicht sämtliche natürliche Zahlen zu untersuchen sind (das wäre auch nicht möglich): als Faktor von n kommt ja keine Zahl grösser als n in Betracht. Dann kann die Aussage: »aus $ab = n$ folgt $a = 1$ oder $b = 1$ « auch folgenderweise formuliert werden: »entweder gilt $ab = n$ nicht, oder gilt eine der Behauptungen $a = 1, b = 1$ «. Hier ist $ab = n$ mit

$$|ab - n| = 0$$

gleichbedeutend; daher kann die Behauptung $ab \neq n$ durch

$$\overline{\text{sg}}(|ab - n|) = 0$$

ausgedrückt werden. Dass eine der Behauptungen $a = 1, b = 1$ gilt, ist mit

$$|a - 1| \cdot |b - 1| = 0$$

gleichbedeutend; das Produkt ist ja dann und nur dann 0, wenn einer seiner Faktoren 0 ist. Es kann also die Aussage: »aus $ab = n$ folgt $a = 1$ oder $b = 1$ « folgendermassen aufgeschrieben werden:

$$\overline{\text{sg}}(|ab - n|) \cdot |a - 1| \cdot |b - 1| = 0 .$$

Und dass diese Behauptung für alle a und b zwischen 1 und n gilt (die Grenzen inbegriffen), ist nach Nr. 7 der Aussage

$$\sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n \overline{\text{sg}}(|ab - n|) \cdot |a - 1| \cdot |b - 1| = 0$$

äquivalent; die Summe ist ja dann und nur dann gleich 0, wenn ein jedes Glied gleich 0 ist.

16. Mit Hilfe der bisher definierten Funktionen kann auch die n -te Primzahl als Funktion von n aufgeschrieben werden. Die n -te Primzahl wird im allgemeinen durch p_n bezeichnet; aber um p_n auch für $n = 0$ als eine Primzahl zu definieren, ist es zweckmässig $p_0 = 2$ zu setzen, und für $n \neq 0$ unter p_n die

n -te ungerade Primzahl zu verstehen (so dass allgemein p_n die $n + 1$ -te Primzahl ist). Die $n + 1$ -te Primzahl ist nun die erste unter den Zahlen, bis welchen genau $n + 1$ Primzahlen in der Zahlenreihe zu finden sind. Da die Anzahl der Primzahlen bis i mit $\pi(i)$ bezeichnet wird, kann die Aussage, dass es bis i (i inbegriffen) genau $n + 1$ Primzahlen gibt, folgenderweise aufgeschrieben werden:

$$\pi(i) = n + 1, \quad \text{das heisst} \quad |n + 1 - \pi(i)| = 0.$$

Die kleinste Zahl i dieser Art könnte freilich wieder nicht aus allen natürlichen Zahlen herausgesucht werden; sie kann aber bekanntlich gewisse Schranken nicht überschreiten: man kann z. B. elementar beweisen, dass³

$$p_n < 2^{2^{n+1}}$$

gilt.

Nach Nr. 9 ist daher die kleinste Zahl der gewünschten Art bis zur Schranke $2^{2^{n+1}}$:

$$\sum_{k=0}^{2^{n+1}} \text{sg} \left(\prod_{j=0}^k |n + 1 - \pi(j)| \right).$$

Es ist also

$$p_n = \sum_{k=0}^{2^{n+1}} \text{sg} \left(\prod_{j=0}^k |n + 1 - \pi(j)| \right).$$

17. Auch die Primfaktorenzerlegung einer Zahl n kann in analoger Weise behandelt werden. Mit welchem Exponenten wird darin p_a teilnehmen? Gewiss mit dem grössten Exponenten, auf welche p_a erhoben noch einen Teiler von n ergibt. Dieser grösste Exponent kann als die erste Zahl i aufgesucht werden, für welche n durch p_a^{i+1} schon nicht teilbar ist, für welche also $\text{res}(n, p_a^{i+1}) \neq 0$, das heisst $\text{sg}(\text{res}(n, p_a^{i+1})) = 0$ ist. Und dieser Exponent i kann freilich nicht beliebig gross sein: die Schranke n kann er nicht überschreiten. Nach Nr. 9 ist die kleinste solche Zahl i :

$$\sum_{k=0}^n \text{sg} \left(\prod_{j=0}^k \text{sg}(\text{res}(n, p_a^{j+1})) \right).$$

Es soll der Exponent von p_a in der Primfaktorenzerlegung von n mit $\text{exp}_a(n)$ bezeichnet werden. Von der Primfaktorenzerlegung von $n = 0$ kann man nicht reden; nach Übereinkommen sei

$$\text{exp}_a(0) = 0.$$

Dieses Übereinkommen kann derart in die vorherige Definition einbezogen werden, dass man einen Faktor hinzunimmt, der für $n = 0$ gleich 0, und in allen anderen Fällen gleich 1 ist. Aber $\text{sg}(n)$ wurde eben derart definiert; es ist also allgemein

$$\text{exp}_a(n) = \text{sg}(n) \cdot \sum_{k=0}^n \text{sg} \left(\prod_{j=0}^k \text{sg}(\text{res}(n, p_a^{j+1})) \right).$$

18. Man kann auch die Frage stellen, welcher der grösste Primfaktor einer Zahl $n > 1$ sei? Wenn in die Primzahlpotenzenzerlegung von n bis zum grössten Primfaktor sämtliche Glieder der Primzahlenfolge — eventuell mit

³) Siehe z. B. G. PÓLYA und G. SZEGŐ: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*. (1925) Abschnitt VIII. Kapitel 2, Aufgabe 94, S. 133., Lösung S. 342.

dem Exponenten 0 — aufgenommen werden, so ist der Index des grössten Primfaktors sozusagen das Mass der »Länge« dieser Zerlegung; darum bezeichnen wir diesen Index mit $\text{long}(n)$. Dieser grösste Index kann als ein gewisser kleinster Index aufgesucht werden: als der kleinste solche Index i , über den schon alle Primzahlen mit dem Exponenten 0 in der Zerlegung von n teilnehmen. Freilich braucht man dazu die übrigen Primzahlen nicht bis in die Unendlichkeit untersuchen: es sind nicht alle Zahlen Primzahlen, daher ist die n -te Primzahl schon sicher grösser als n , und so hat n über p_n schon gewiss keine Primfaktoren. Dass die Primzahl p_i für alle Indizes l von i bis n mit einem Exponenten 0 in der Primfaktorenzerlegung von n teilnimmt, kann mit Hilfe der in der vorigen Nummer eingeführten Funktion folgendermassen aufgeschrieben werden:

$$\sum_{l=i+1}^n \exp_l(n) = 0.$$

Und die kleinste Zahl i , für welche dies gilt (unter $n > 1$ gibt es freilich immer eine solche Zahl i) ist nach Nr. 9

$$\text{long}(n) = \sum_{k=0}^n \text{sg} \left(\prod_{j=0}^k \left(\sum_{l=j+1}^n \exp_l(n) \right) \right).$$

Da für ein jedes l

$$\exp_l(0) = \exp_l(1) = 0$$

ist, so ist nach der Definition für $n \leq 1$

$$\text{long}(n) = 0.$$

19. Es ist üblich gewisse zahlentheoretische Funktionen mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung zu definieren. Wenn zum Beispiel $\varphi(n)$ die Eulersche φ -Funktion, das heisst, die Anzahl der zu n relativ-primen Zahlen unter n bedeutet, so ist nach Übereinkommen $\varphi(0) = \varphi(1) = 1$, und wenn die Primfaktorenzerlegung einer Zahl $n > 1$

$$n = q_1^{a_1} q_2^{a_2} \dots q_r^{a_r}$$

ist, so gilt, wie bekannt,

$$\varphi(n) = \left(\frac{q_1^{a_1} - q_1^{a_1-1}}{q_1 - q_1} \right) \left(\frac{q_2^{a_2} - q_2^{a_2-1}}{q_2 - q_2} \right) \dots \left(\frac{q_r^{a_r} - q_r^{a_r-1}}{q_r - q_r} \right).$$

Wie bereits hervorgehoben wurde, ist die n -te Primzahl grösser als n , und die Primfaktoren von n sind unter ihr zu suchen. Dass n durch p_i teilbar ist, kann durch $\text{res}(n, p_i) = 0$ ausgedrückt werden. Wird daher

$$p(i) = \begin{cases} \frac{\exp_i(n) - \exp_i(n)-1}{p_i - p_i} = \frac{\exp_i(n) - \exp_i(n)-1}{p_i - p_i}, & \text{falls } \text{res}(n, p_i) = 0 \\ 1 & \text{sonst (das heisst falls } \overline{\text{sg}}(\text{res}(n, p_i)) = 0) \end{cases}$$

gesetzt, so ist, da » $n = 0$ oder $n = 1$ « mit $n \cdot |n - 1| = 0$ gleichbedeutend ist,

$$\varphi(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \cdot |n - 1| = 0, \\ \prod_{i=0}^n p(i) & \text{sonst (das heisst falls } \overline{\text{sg}}(n \cdot |n - 1|) = 0). \end{cases}$$

20. Der grösste gemeinsame Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen lassen sich auch auf Grund der Primfaktorenzerlegung definieren;

es treten ja in diesen dieselben Primfaktoren als in den beiden Zahlen auf, und zwar mit dem kleineren (richtiger nicht-grösseren), bzw. grösseren (nicht-kleinere) Exponenten. Die nicht-grössere der Zahlen a und b ist:

$$\min(a, b) = \begin{cases} a, & \text{falls } a \leq b, \text{ das heisst } a \div b = 0 \\ b, & \text{falls } a > b, \text{ das heisst } a \geq b + 1, \text{ das heisst } b + 1 \div a = 0. \end{cases}$$

Nach Nr. 6 kann diese Definition auch folgendermassen aufgeschrieben werden:

$$\min(a, b) = a \cdot \overline{\text{sg}}(a \div b) + b \cdot \overline{\text{sg}}(b + 1 \div a).$$

Ganz ähnlich lässt sich mit bereits eingeführten Funktionen auch die nicht-kleinere der Zahlen a und b definieren:

$$\max(a, b) = a \cdot \overline{\text{sg}}(b \div a) + b \cdot \overline{\text{sg}}((a + 1) \div b).$$

(Man kann aus diesen natürlich auch das Minimum oder Maximum von mehreren Zahlen erhalten; es ist ja zum Beispiel

$$\min(a, b, c) = \min(\min(a, b), c) \quad . \quad)$$

21. Der grösste gemeinsame Teiler zweier Zahlen kann aber auch ohne Benutzung der Primfaktorenzerlegung charakterisiert werden. Das Aufsuchen des grössten gemeinsamen Teilers zweier grossen Zahlen kann dadurch erleichtert werden, dass auch in der Differenz und Summe der betreffenden Zahlen alle ihre gemeinsamen Teiler aufgehen; dies ermöglicht ja statt des grössten gemeinsamen Teilers der grossen Zahlen, den grössten gemeinsamen Teiler ihrer Differenz und der kleineren Zahl zu bestimmen. In 0 gehen alle Zahlen auf; wird also der grösste gemeinsame Teiler von m und n mit $\text{dv}(m, n)$ bezeichnet, und 0 unter $\text{dv}(0, 0)$ verstanden, so ist

$$\text{dv}(0, n) = n; \quad \text{dv}(m + 1, 0) = m + 1$$

und

$$\text{dv}(m + 1, n + 1) = \begin{cases} \text{dv}(m + 1 - (n + 1), n + 1), & \text{falls } m \geq n, \text{ das heisst } n \div m = 0 \\ \text{dv}(m + 1, n + 1 - (m + 1)), & \ll n \div m \neq 0. \end{cases}$$

(Hier ist freilich $m + 1 - (n + 1) = m - n$ und $n + 1 - (m + 1) = n - m$.)

Da nach den Definitionen in Nr. 5

$$\overline{\text{sg}}(n \div m) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \div m = 0 \\ 0, & \ll n \div m \neq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \text{sg}(n \div m) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \div m \neq 0 \\ 0, & \ll n \div m = 0, \end{cases}$$

kann der letzte Fall der Definition (die Differenzen durch die mit ihnen übereinstimmenden arithmetischen Differenzen ersetzt) auf folgende Form gebracht werden:

$$\text{dv}(m + 1, n + 1) = \overline{\text{sg}}(n \div m) \cdot \text{dv}(m \div n, n + 1) + \text{sg}(n \div m) \cdot \text{dv}(m + 1, n \div m).$$

Hier werden die Werte der zweistelligen Funktion $\text{dv}(m, n)$ mit Hilfe von Werten bestimmt, welche an Stellen mit kleinerem ersten und unverändertem zweiten Argument, oder mit unverändertem ersten und kleinerem zweiten Argument angenommen werden. Da so die Berechnung von $\text{dv}(m, n)$ allmählich auf Funktionswerte an solchen Stellen zurückgeführt wird, wo das eine oder das andere Argument durch immer kleinere Zahlen vertreten wird, gelangt man

in endlich vielen Schritten zu Stellen, wo das eine Argument 0 ist, und da ist der Funktionswert dem anderen Argument gleich.

Im Besitz des grössten gemeinsamen Teilers kann man das kleinste gemeinsame Vielfache von m und n erhalten, indem man ihr Produkt durch ihren grössten gemeinsamen Teiler teilt; der geht darin natürlich auf, und so ist das kleinste gemeinsame Vielfache von m und n :

$$\left[\frac{mn}{\text{dv}(m, n)} \right].$$

22. Man begegnet andere zahlentheoretische Funktionen z. B. in der Kombinatorik. Die Anzahl der möglichen Vertauschungen, Permutationen von n Elementen lässt sich bekanntlich mit Übergang von n auf $n+1$ bestimmen: ist die Anzahl der Permutationen von n Elementen P_n , so kann in den Permutationen von $n+1$ Elementen ein jedes dieser $n+1$ Elemente sovielmal als erstes Element auftreten, auf wieviele Arten die anderen n Elemente untereinander vertauscht werden können, das heisst P_n -mal; so ist

$$P_{n+1} = (n+1)P_n.$$

Hier geht man gewöhnlich nicht von 0, sondern von 1 aus. Ein einziges Element kann freilich nur in eine einzige Reihenfolge gebracht werden; so lautet die vollständige Definition:

$$P_1 = 1 \\ P_{n+1} = (n+1)P_n.$$

Damit wir auch hier von 0 ausgehen können, sei nach Übereinkommen $P_0 = 1$. Das stört hier nichts, denn wird in der zweiten Definitionsgleichung 0 für n eingesetzt, so ergibt sich daraus

$$P_1 = 1 \cdot P_0 = 1.$$

Daher kann die Definition von P_n auch folgendermassen lauten:

$$P_0 = 1 \\ P_{n+1} = (n+1) \cdot P_n.$$

Bedenken wir an dieser Definition, wie sich der Funktionswert an einer beliebig gegebenen Stelle auf Grund des Überganges von n auf $n+1$ bestimmen lässt. Es sei zum Beispiel $n=3$. Wird in der zweiten Definitionsgleichung 2, dann zur Berechnung des auftretenden P_2 -Wertes 1, endlich um P_1 berechnen zu können, 0 für n eingesetzt, so gewinnt man der Reihe nach:

$$P_3 = 3 \cdot P_2, \\ P_2 = 2 \cdot P_1, \text{ also } P_3 = 3 \cdot 2 \cdot P_1, \\ P_1 = 1 \cdot P_0, \text{ also } P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot P_0.$$

Der Wert von P_0 ist aber nach der ersten Definitionsgleichung 1; so ist endlich

$$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3.$$

Ähnlich sieht man ein, dass man auch an anderen Stellen n Schritt für Schritt zurückgehend — deshalb wird eine solche Definition »Rekursion« genannt —

$$P_n = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$$

erhält; und dieses Produkt wird kürzer als $n!$ bezeichnet.

23. Mit Verwendung von $n!$ lassen sich auch andere in der Kombinatorik benutzte Funktionen ausdrücken. Solche Funktionen können aber auch

selbständig definiert werden. Die Zahl $\binom{n}{a}$ gibt zum Beispiel an, auf wieviele Arten a Elemente aus n Elementen ausgewählt werden können. Dieser Wert lässt sich mit Übergang von n auf $n+1$ folgendermassen bestimmen: ist $0 < a \leq n+1$, und will man a Elemente aus $n+1$ Elementen auswählen, so sei eines der $n+1$ Elemente ausgezeichnet. Es kann unter a ausgewählten Elementen das ausgezeichnete vorkommen oder nicht. Nicht-ausgezeichnete Elemente der Anzahl a können aus den übrigen n Elementen auf $\binom{n}{a}$ Weisen ausgewählt werden; und neben das ausgezeichnete Element noch $a-1$ nicht-ausgezeichnete auf $\binom{n}{a-1}$ Weisen. Daher ist

$$\binom{n+1}{a} = \binom{n}{a} + \binom{n}{a-1}.$$

Da nach Annahme $a > 0$ ist, so ist hier $a-1 = a \dot{-} 1$. Nach Übereinkommen ist $\binom{n}{0} = 1$ für alle n ; für $a = 0$ gilt also $\binom{n+1}{a} = \binom{n}{a} = 1$. So kann man den Fall $a = 0$ damit in das vorherige Ergebnis einbeziehen, dass man das Glied $\binom{n}{a-1}$ mit 0 multipliziert, falls $a = 0$, und mit 1 falls $a \neq 0$; das heisst, dieses Glied ist mit $\overline{\text{sg}}(a)$ zu multiplizieren. Ferner ist nach Übereinkommen $\binom{n}{a} = 0$ für $a > n$. Da

$$\overline{\text{sg}}(a \dot{-} n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a \leq n \\ 0, & \text{« } a > n \end{cases}$$

st, hat man zur Berücksichtigung des Falls $a > n+1$ noch einen Faktor $\overline{\text{sg}}(a \dot{-} (n+1))$ zum Ausdruck von $\binom{n+1}{a}$ zu fügen. Dazu kommt noch, dass nach unserem Übereinkommen

$$\binom{0}{a} = \begin{cases} 1, & \text{falls } a = 0 \\ 0, & \text{« } a \neq 0, \end{cases}$$

also $\binom{0}{a} = \overline{\text{sg}}(a)$ ist. So lautet die vollständige Definition:

$$\binom{0}{a} = \overline{\text{sg}}(a)$$

$$\binom{n+1}{a} = \overline{\text{sg}}(a \dot{-} (n+1)) \cdot \left(\binom{n}{a} + \overline{\text{sg}}(a) \cdot \binom{n}{a \dot{-} 1} \right).$$

In dieser Definition schliesst man vom Funktionswert an der Stelle n auf den Funktionswert an der Stelle $n+1$, das andere Argument bleibt aber dabei nicht unverändert: zur Berechnung von $\binom{n+1}{a}$ wird nicht nur für dasselbe

a angenommene Wert $\binom{n}{a}$, sondern auch $\binom{n}{a \div 1}$ verwendet. Bekanntlich taugt diese Definition doch zur Berechnung von $\binom{n}{a}$ an allen Stellen (die Bildung des »Pascalschen Dreiecks« beruht darauf).

24. In verschiedenen Gebieten der Mathematik spielt die »Folge von Fibonacci«

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

eine Rolle. Vom dritten an ist ein jedes Glied dieser Folge die Summe der beiden vorherigen Glieder. Wird das erste Glied als der Wert einer Funktion an der Stelle 0, das $n + 1$ -te Glied als der Wert dieser Funktion an der Stelle n betrachtet, so lässt sich die betreffende Funktion $\text{Fib}(n)$ durch

$$\text{Fib}(0) = 0$$

$$\text{Fib}(n + 1) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ \text{Fib}(n - 1) + \text{Fib}(n) & \text{sonst} \end{cases}$$

definieren. Hier ist $n - 1 = n \div 1$; wenn man noch die Definitionen von $\text{sg}(n)$ und von $\overline{\text{sg}}(n)$ in Nr. 5 in Betracht nimmt, so kann die Definition auch auf die Form

$$\text{Fib}(0) = 0$$

$$\text{Fib}(n + 1) = \overline{\text{sg}}(n) + \text{sg}(n) \cdot (\text{Fib}(n \div 1) + \text{Fib}(n))$$

gebracht werden.

Dass diese Definition an einer jeden Stelle die Berechnung des Wertes $\text{Fib}(n)$ ermöglicht, das sieht ein jeder, der sich daran macht, die Folge von Fibonacci beliebig weitgehend aufzuschreiben. In der Definition geschieht der Übergang nicht eben von n auf $n + 1$, es werden aber jedenfalls die Funktionswerte an grösseren Stellen aus an kleineren Stellen angenommenen Funktionswerten bestimmt.

25. Auch solche zahlentheoretische Funktionen können eine Rolle spielen, die vom Analysis geliefert werden. $a \div n$ und $\left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor$ waren bereits solche Funk-

tionen: in diesen wurden bloss die nicht-negativen ganzen Werte der im Analysis gebrauchten Differenz- und Quotient-Funktionen in Betracht genommen. Statt \sqrt{n} kann im Gebiete der nicht-negativen ganzen Zahlen ähnlich $[\sqrt{n}]$ (das heisst, die in \sqrt{n} enthaltene grösste ganze Zahl) benutzt werden. Dies ist für eine Quadratzahl n gleich \sqrt{n} ; von hier an ändert sich der Wert von $[\sqrt{n}]$ bis zur nächsten Quadratzahl nicht. Wenn man zur nächsten Quadratzahl $([\sqrt{n}] + 1)^2$ gelangt, so wächst der Funktionswert um 1. Es ist also

$$[\sqrt{n+1}] = \begin{cases} [\sqrt{n}], & \text{falls } n + 1 \neq ([\sqrt{n}] + 1)^2 \\ [\sqrt{n}] + 1, & \text{falls } n + 1 = ([\sqrt{n}] + 1)^2. \end{cases}$$

$n + 1 = ([\sqrt{n}] + 1)^2$ ist gleichbedeutend damit, dass $|n + 1 - ([\sqrt{n}] + 1)^2| = 0$; und der Wert von $\overline{\text{sg}}(|n + 1 - ([\sqrt{n}] + 1)^2|)$ ist 0 oder 1, je nachdem $n + 1$ ungleich oder gleich $([\sqrt{n}] + 1)^2$ ist. Daher ist

$$[\sqrt{n+1}] = [\sqrt{n}] + \overline{\text{sg}}(|n+1 - ([\sqrt{n}] + 1)^2|);$$

und dazu muss noch hinzugenommen werden, dass

$$[\sqrt{0}] = 0.$$

So kann auch $[\sqrt{n}]$ mit Übergang von n auf $n+1$, das heisst, durch Rekursion definiert werden.

Mit Benutzung von $[\sqrt{n}]$ kann die Quadratzahlbeschaffenheit einer Zahl charakterisiert werden. Die zu n am nächsten liegende nicht-grössere Quadratzahl ist $[\sqrt{n}]^2$. Es sei die Abweichung von n von dieser Quadratzahl

$$\text{quadres}(n) = n - [\sqrt{n}]^2.$$

n ist dann und nur dann eine Quadratzahl, wenn

$$\text{quadres}(n) = 0$$

ist. Und die charakteristische Funktion der Quadratzahlbeschaffenheit von n ist

$$\text{quad}(n) = \overline{\text{sg}}(\text{quadres}(n));$$

der Wert dieser Funktion ist ja 1 oder 0, je nachdem n eine Quadratzahl ist oder nicht.

26. Als ein anderes Beispiel einer zahlentheoretischen Funktion, die vom Analysis geliefert wird, kann z. B. die in $e \cdot n$ enthaltene grösste ganze Zahl

$$[e \cdot n]$$

untersucht werden, wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen ist.

Es werden die ersten $n+1$ Glieder der Reihe von e auf gemeinsamen Nenner gebracht, so findet man

$$\begin{aligned} e &= \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots\right) = \\ &= \frac{n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{n!}}{n!} + \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots\right) = \\ &= \frac{S_n}{n!} + R_n, \end{aligned}$$

wobei

$$S_n = n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{n!} \quad \text{und} \quad R_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots\right)$$

ist. Die Werte von S_n sind natürlich ganze Zahlen. Man kann von S_n auf S_{n+1} folgendermassen übergehen:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= (n+1)! + \frac{(n+1)!}{1!} + \frac{(n+1)!}{2!} + \dots + \frac{(n+1)!}{n!} + \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \\ &= (n+1) \left(n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{n!}\right) + 1 = (n+1) S_n + 1. \end{aligned}$$

Ausserdem ist $S_0 = 0$; die vollständige Definition von S_n lautet also

$$S_0 = 0$$

$$S_{n+1} = (n+1)S_n + 1$$

Für $n > 0$ ist ferner $n+1 \geq 2$, und $n+2, n+3, \dots$ sind alle grösser als 2, also ist

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right) < \\ &< \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \dots \right) = \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{n!}, \end{aligned}$$

und so gilt

$$n R_n < n \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

Daher ist für $n \neq 0$

$$e \cdot n = \frac{n S_n}{n!} + n R_n = \frac{S_n}{(n-1)!} + n R_n,$$

und hier

$$n R_n < \frac{1}{(n-1)!}$$

Sind nun in der Division $\frac{S_n}{(n-1)!}$ der ganzzahlige Quotient und Rest q_n und r_n , das heisst, ist

$$S_n = q_n (n-1)! + r_n$$

wo q_n und r_n nicht-negative ganze Zahlen sind, und

$$r_n < (n-1)!,$$

so ist

$$\frac{S_n}{(n-1)!} = q_n + \frac{r_n}{(n-1)!},$$

und hier ist der Wert des echten Bruchs $\frac{r_n}{(n-1)!}$ höchstens

$$\frac{(n-1)! - 1}{(n-1)!}.$$

So ist

$$\left[\frac{S_n}{(n-1)!} \right] = q_n,$$

und es müsste zu $\frac{S_n}{(n-1)!}$ wenigstens $\frac{1}{(n-1)!}$ addiert werden, damit sich

sein ganzer Teil ändert. Wir sahen aber, dass $n \cdot R_n$ weniger als $\frac{1}{(n-1)!}$ beträgt; so ist für $n > 0$

$$[e \cdot n] = \left[\frac{S_n}{(n-1)!} + n \cdot R_n \right] = \left[\frac{S_n}{(n-1)!} \right].$$

So lautet die Definition von $[e \cdot n]$:

$$[e \cdot 0] = 0$$

$$[e \cdot (n+1)] = \left[\frac{S_{n+1}}{n!} \right].$$

$[e \cdot n]$ kann daher ebenfalls mit Hilfe von Rekursionen definiert werden.

27. Es soll endlich ein Beispiel einer zahlentheoretischen Funktion betrachtet werden, welche der Mengenlehre entnommen wurde.

Wenn man beweisen will, dass die Mächtigkeit der Menge der rationalen Zahlen mit der Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen übereinstimmt, dann ordnet man die Zahlenpaare in eine Folge. Das kann für nicht-negative Zahlen so geschehen, dass die Zahlenpaare in endliche Folgen geordnet, und diese Folgen aneinander gereiht werden. Nehmen wir an, dass $(0, 0)$ das 0-te Paar ist. In die n -te Gruppe können z. B. jene Zahlenpaare kommen, die aus n und aus einer nicht grösseren Zahl als n bestehen. n wird zuerst mit 0, dann mit 1, mit 2 gepaart, usw. ganz bis n . Ein Paar verschiedener Zahlen kann in zweierlei Reihenfolgen geschrieben werden; hier werden die betreffenden Zahlen erst wachsend, und gleich danach abnehmend nacheinander gesetzt. Die Folge beginnt also mit

$$(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (0, 2), (2, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 2), \dots$$

Das wievielte Glied dieser Folge wird das Zahlenpaar (a, b) sein?

Wenn $a > b$, so kommt dieses Zahlenpaar in der a -ten Gruppe vor; wenn $a \leq b$, so in der b -ten Gruppe. Die 0-te Gruppe besteht aus einem Paar, die erste Gruppe aus 3 Paaren, die zweite Gruppe aus 5 Paaren; allgemein besteht die $k-1$ -te Gruppe aus $2k-1$ Paaren; es stehen also vor der k -ten Gruppe insgesamt

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$$

Paare. Jetzt muss man noch nachschauen, an wievielter Stelle in seiner eigenen Gruppe das Paar (a, b) steht. Ist $a > b$, so handelt es sich um die a -te Gruppe. Darin stehen vor dem Paar (a, b) die Paarungen von a mit den Zahlen $0, 1, 2, \dots, (b-1)$, und diese kommen alle doppelt vor, somit ist ihre Anzahl $2b$; ausserdem steht auch (b, a) vor (a, b) . Es ist also für $a > b$ das Paar (a, b) das $a^2 + 2b + 1$ -te Glied der Folge (da $(0, 0)$ als 0-tes Glied betrachtet wurde). Ist nun $b \geq a$, so kommt (a, b) in der b -ten Gruppe vor, darin stehen vor (a, b) die Paarungen von b mit den Zahlen $0, 1, \dots, a-1$, und diese treten alle doppelt auf, somit ist ihre Anzahl $2a$; daher ist für $b \geq a$ das Paar (a, b) das $b^2 + 2a$ -te Glied der Folge. Da nach Nr. 5

$$\text{sg}(a \dot{-} b) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a > b \\ 0, & \text{« } b \geq a \end{cases} \quad \text{und} \quad \overline{\text{sg}}(a \dot{-} b) = \begin{cases} 1, & \text{falls } b \geq a \\ 0, & \text{« } a > b \end{cases}$$

gilt, so ist, wenn die Stellenzahl des Paares (a, b) in der Folge mit $\sigma(a, b)$ bezeichnet wird,

$$\sigma(a, b) = \text{sg}(a \dot{-} b) (a^2 + 2b + 1) + \overline{\text{sg}}(a \dot{-} b) (b^2 + 2a).$$

Falls $a = b = 0$, so ist der Faktor $\text{sg}(a \dot{-} b)$ im ersten, und der Faktor $b^2 + 2a$ im zweiten Glied der rechten Seite gleich 0; demnach ist in dieser Definition enthalten, dass $(0, 0)$ das 0-te Glied der Folge ist.

Umgekehrt, wie können die Glieder des n -ten Paares der Folge als Funktionen von n aufgeschrieben werden?

Sei $\sigma_1(n)$ das erste Glied, $\sigma_2(n)$ das zweite Glied des n -ten Paares. Wir wissen, dass

$$\sigma_1(0) = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_2(0) = 0$$

ist. Ist bereits das n -te Paar $(\sigma_1(n), \sigma_2(n))$ bekannt, so kann man daraus leicht auch das $n+1$ -te Paar bestimmen: ist $\sigma_1(n) < \sigma_2(n)$, so entsteht das nächste Paar durch Vertauschung der Glieder als $(\sigma_2(n), \sigma_1(n))$; ist $\sigma_1(n) > \sigma_2(n)$, so wird das erste Glied des nächsten Paares $\sigma_2(n) + 1$, und das zweite $\sigma_1(n)$ sein; ist endlich $\sigma_1(n) = \sigma_2(n)$, so übergeht man zum ersten Paar $(0, \sigma_1(n) + 1)$ der nächsten Gruppe. Es ist also

$$\sigma_1(n+1) = \begin{cases} \sigma_2(n), & \text{falls } \sigma_1(n) < \sigma_2(n) \\ \sigma_2(n) + 1, & \text{« } \sigma_1(n) > \sigma_2(n) \\ 0, & \text{« } \sigma_1(n) = \sigma_2(n), \end{cases}$$

und

$$\sigma_2(n+1) = \begin{cases} \sigma_1(n), & \text{falls } \sigma_1(n) \neq \sigma_2(n) \\ \sigma_1(n) + 1, & \text{« } \sigma_1(n) = \sigma_2(n). \end{cases}$$

Da nach Nr. 5

$$\overline{\text{sg}}((\sigma_1(n) + 1) \div \sigma_2(n)) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sigma_1(n) < \sigma_2(n) \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\overline{\text{sg}}((\sigma_2(n) + 1) \div \sigma_1(n)) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sigma_1(n) > \sigma_2(n) \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\text{sg}(|\sigma_1(n) - \sigma_2(n)|) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sigma_1(n) \neq \sigma_2(n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\overline{\text{sg}}(|\sigma_1(n) - \sigma_2(n)|) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sigma_1(n) = \sigma_2(n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt, können die gefundenen Definitionen auf die Form:

$$\sigma_1(0) = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_2(0) = 0$$

$$\sigma_1(n+1) = \overline{\text{sg}}((\sigma_1(n) + 1) \div \sigma_2(n)) \cdot \sigma_2(n) + \overline{\text{sg}}((\sigma_2(n) + 1) \div \sigma_1(n)) \cdot (\sigma_2(n) + 1)$$

und

$$\sigma_2(n+1) = \text{sg}(|\sigma_1(n) - \sigma_2(n)|) \cdot \sigma_1(n) + \overline{\text{sg}}(|\sigma_1(n) - \sigma_2(n)|) \cdot (\sigma_1(n) + 1)$$

gebracht werden.

Hier wurden zwei Funktionen simultan durch Rekursion definiert; man kann den Wert beider Funktionen an der Stelle $n+1$ berechnen, wenn man bereits den Wert von beiden an der Stelle n kennt.

§ 2. REKURSIVE FUNKTIONEN UND BEZIEHUNGEN

1. Im vorigen Kapitel wurden mannigfaltige Definitionen solcher Funktionen angegeben, die in der elementaren Zahlentheorie eine Rolle spielen, wobei darauf geachtet wurde, dass die Definition die Berechnung des Funktionswertes an einer jeden konkreten Stelle tatsächlich ermögliche (also, dass sie

nicht die Auswahl einer Zahl mit gewissen Eigenschaften aus allen natürlichen Zahlen fordere; und sich nicht darauf berufe, dass sämtliche natürliche Zahlen eine gewisse Eigenschaft haben). SKOLEM⁴ hat es als erster dargelegt, dass sich die elementare Zahlentheorie in diesem Sinne konstruktiv aufbauen lässt. Es hat sich herausgestellt, dass ein Teil der betreffenden Definitionen eine Art Rekursion ist, das heisst, eine solche Definition, welche den Wert der definierten Funktion an gewissen Anfangsstellen angibt, und vorschreibt, wie die übrigen Funktionswerte aus Funktionswerten an vorangehenden Stellen zu berechnen sind. Die anderen Funktionen wurden aus bereits bekannten Funktionen durch Substitutionen aufgebaut (unsere erste durch Substitutionen aufgebaute Funktion war $\beta_1(m, n)$ in Nr. 5 des § 1.: $\beta_1(m, n)$ ist so entstanden, dass in der Funktion $a \div n$ erst n zu m umbenannt und $n+1$ für a eingesetzt, dann die so gebildete Funktion $(n+1) \div m$ in $\overline{\text{sg}}(n)$ an Stelle von n substituiert wurde).

Man beruft sich nicht nur bei der Substitution auf bereits bekannte Funktionen, sondern auch in der rekursiven Definition; es beruht ja z. B. die Definition von $[\sqrt{n}]$ in Nr. 25 des § 1:

$$[\sqrt{0}] = 0$$

$$[\sqrt{n+1}] = [\sqrt{n}] + \overline{\text{sg}}(|n+1 - ([\sqrt{n}] + 1)^2|)$$

auf der Annahme, dass die Konstante 0, und die aus $n+1, n^2, |a-b|, \overline{\text{sg}}(n)$ und $a+n$ durch Substitution aufgebaute Funktion

$$a + \overline{\text{sg}}(|n+1 - (a+1)^2|)$$

bereits bekannt sind.

Die verwendeten bekannten Funktionen lassen sich ähnlich aus anderen bekannten Funktionen aufbauen. Werden die Definitionen im § 1 rückwärts verfolgt, so stellt es sich heraus, dass sämtliche dort definierte Funktionen durch Substitutionen und Rekursionen aufgebaut werden können, von den Konstanten und von den Funktionen n und $n+1$ ausgehend. Sogar n muss nicht als Grundfunktion genommen werden; man kann ja die Funktion $\varphi(n) = n$ mit Hilfe von 0 und $n+1$ durch die Rekursion

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi(n+1) = n+1$$

definieren (hier hängt $\varphi(n+1)$ eigentlich gar nicht vom an der vorangehenden Stelle angenommenen Funktionswert $\varphi(n)$, bloss von der Stelle ab; das gleiche gilt aber auch für die Definition der Funktionen $n \div 1, \text{sg}(n)$ und $\overline{\text{sg}}(n)$). Und von den Konstanten genügt es 0 als Grundfunktion zu nehmen; denn geht man von $n+1$ aus, und substituiert man für n immer wieder $n+1$, so erhält man die Funktionen

$$n+1, \quad (n+1)+1 = n+2, \quad (n+1)+2 = n+3, \dots;$$

aus diesen ergeben sich aber, wenn man 0 für n einsetzt, der Reihe nach die Konstanten

$$1, 2, 3, \dots$$

So genügt es für die Definitionen im § 1 als Ausgangsfunktionen 0 und $n+1$ zu nehmen.

⁴) SKOLEM [1].

Unter «Zahlen» werde ich in den Folgenden immer nicht-negative ganze Zahlen, unter «Funktionen» solche Funktionen verstehen, deren Variablen die nicht-negativen ganzen Zahlen durchlaufen, und deren Werte ebenfalls nicht-negative ganze Zahlen sind.

Man nennt die Funktionen, die aus gewissen Ausgangsfunktionen durch eine endliche Anzahl von Substitutionen und Rekursionen aufgebaut werden können, rekursiv. Ich bezeichne die *rekursiven Funktionen* entweder mit kleinen griechischen Buchstaben, oder auf eine solche Art, die auf ihre Bedeutung erinnert.

Der Aufbau der rekursiven Funktionen in endlich vielen Schritten aus den Ausgangsfunktionen ermöglicht, dass man unter den Funktionen der elementaren Zahlentheorie, sozusagen in der Funktionenlehre der elementaren Zahlentheorie, ähnliche Schlussweisen als in der Lehre der natürlichen Zahlen gebraucht. Dass die natürlichen Zahlen eine gewisse Eigenschaft haben, kann so bewiesen werden, dass man zeigt: die 0 besitzt die betreffende Eigenschaft, und diese «vererbt sich» von vorangehenden Zahlen auf die nachfolgenden. Ähnlich können die Eigenschaften der rekursiven Funktionen damit bestätigt werden, dass man zeigt: die Ausgangsfunktionen besitzen die betreffende Eigenschaft, und diese «vererbt sich» von beliebigen Funktionen auch auf jene Funktionen, die aus ihnen durch Substitution oder durch Rekursion entstehen.

2. Der Begriff der Rekursion muss aber noch präzisiert werden. Im § 1 waren die meisten Rekursionen von folgender Form: eine Funktion einer Variablen, kurz eine einstellige Funktion, wurde aus einer Konstanten k und aus einer Funktion $\beta(n, a)$ durch die Gleichungen

$$\varphi(0) = k$$

$$\varphi(n+1) = \beta(n, \varphi(n))$$

aufgebaut; oder allgemein: eine $r+1$ -stellige Funktion $\varphi(n, a_1, \dots, a_r)$ wurde aus einer r -stelligen Funktion $\alpha(a_1, \dots, a_r)$ und aus einer $r+2$ -stelligen Funktion $\beta(n, a_1, \dots, a_r, a_{r+1})$ aufgebaut, durch Gleichungen der Form:

$$\varphi(0, a_1, \dots, a_r) = \alpha(a_1, \dots, a_r)$$

$$\varphi(n+1, a_1, \dots, a_r) = \beta(n, a_1, \dots, a_r, \varphi(n, a_1, \dots, a_r)).$$

Hier ist n die Rekursionsvariable; a_1, \dots, a_r sind Parameter.

Eine solche Rekursion wird eine *primitive Rekursion* genannt, und die Funktionen, die von 0 und $n+1$ ausgehend durch endlich viele Substitutionen und primitive Rekursionen definiert werden können, *primitiv-rekursive Funktionen*.

Zum Beispiel wurde in Nr. 22 des § 1 die Anzahl P_n der Permutationen, als einstellige Funktion der Elementenzahl n durch die Rekursion

$$P_0 = 1$$

$$P_{n+1} = (n+1) \cdot P_n$$

definiert. Hier ist $k=1$, und die Funktion $\beta(n, a)$ ist $(n+1) \cdot a$. In der Definition

$$\varphi(0, a) = a$$

$$\varphi(n+1, a) = \varphi(n, a) + 1$$

der zweistelligen Funktion $a+n$ (§ 1 Nr. 2) ist

$$\alpha(a_1) = a_1 \quad \text{und} \quad \beta(n, a_1, a_2) = a_2 + 1.$$

(Es ist freilich gleichgültig, wie die Variablen bezeichnet werden: in unserer Definition steht a statt a_1 .) Wie man auch hier sieht: β muss nicht tatsächlich

von all seinen Variablen abhängen; es wird immer die Hinzunahme fiktiver Variablen zugelassen, von welchen die Funktion nicht tatsächlich abhängt. Wäre das nicht erlaubt, so könnte man von der Konstanten 0 und von der einstelligen Funktion $n + 1$ (die hier durch Umbenennung der Variablen die Form $a_2 + 1$ angenommen hat) ausgehend, gar keine mehrstellige Funktion erhalten; unser Beispiel zeigt aber, dass man mit Hilfe der als dreistellig betrachteten Funktion $n + 1$ eine echte zweistellige Funktion definieren kann.

3. Es wurden aber im § 1 auch vier solche Rekursionen verwendet, die nicht in das Schema der primitiven Rekursion passen:

1) in Nr. 24 die Definition

$$\begin{aligned} \text{Fib } (0) &= 0 \\ \text{Fib } (n + 1) &= \overline{\text{sg}} (n) + \text{sg } (n) \cdot (\text{Fib } (n - 1) + \text{Fib } (n)) \end{aligned}$$

der Folge von Fibonacci, wo zur Berechnung des Funktionswertes an der Stelle $n + 1$ nicht nur der unmittelbar vorangehende Wert benutzt wird, sondern auch ein früher angenommener;

2) in Nr. 27 die Definition

$$\begin{aligned} \sigma_1 (0) &= 0 \text{ und } \sigma_2 (0) = 0 \\ \sigma_1 (n + 1) &= \overline{\text{sg}} ((\sigma_1 (n) + 1) - \sigma_2 (n)) \cdot \sigma_2 (n) + \overline{\text{sg}} (\sigma_2 (n) + 1) - \sigma_1 (n) \cdot (\sigma_2 (n) + 1) \end{aligned}$$

und

$$\sigma_2 (n + 1) = \text{sg} (|\sigma_1 (n) - \sigma_2 (n)|) \cdot \sigma_1 (n) + \overline{\text{sg}} (|\sigma_1 (n) - \sigma_2 (n)|) \cdot (\sigma_1 (n) + 1)$$

der Glieder des n -ten Paares in der angegebenen Anordnung der Zahlenpaare, wo die Werte zweier Funktionen simultan aus früher angenommenen Werten beider Funktionen berechnet werden;

3) in Nr. 23 die Definition

$$\binom{0}{a} = \overline{\text{sg}} (a)$$

$$\binom{n + 1}{a} = \overline{\text{sg}} (a - (n + 1)) \left(\binom{n}{a} + \text{sg } (a) \cdot \binom{n}{a - 1} \right)$$

der Anzahl der Kombinationen a -ter Klasse aus n Elementen, wo a nicht die Rekursionsvariable und doch kein unveränderter Parameter ist: es wird auch $a - 1$ für a eingesetzt;

4) in Nr. 21 die Definition

$$\begin{aligned} \text{dv } (0, n) &= n, & \text{dv } (m + 1, 0) &= m + 1 \\ \text{dv } (m + 1, n + 1) &= \overline{\text{sg}} (n - m) \text{dv } (m - n, n + 1) + \\ &+ \text{sg } (n - m) \text{dv } (m + 1, n - m) \end{aligned}$$

des grössten gemeinsamen Teilers von m und n , wo die Rekursion zugleich nach beiden Variablen verläuft: der Wert an der Stelle $(m + 1, n + 1)$ wird aus Werten an solchen Stellen aufgebaut, wo entweder das erste Argument, oder bei unverändertem ersten Argument das zweite Argument verkleinert wird.

Es wird sich aber in den folgenden Paragraphen herausstellen, dass man die genannten vier nicht-primitiven Rekursionen durch primitive Rekursionen und Substitutionen ersetzen kann. So kann man sich in der Definition der gebräuchlichen Funktionen der elementaren Zahlentheorie auf Verwendung von primitiven Rekursionen beschränken.

4. Im § 1 ist es öfters vorgekommen, dass in der Definition einer Funktion gewisse Fälle zu unterscheiden waren, und zwar darnach, ob gewisse Beziehungen zwischen den Argumenten bestehen. Es wurden z. B. in Nr. 4 in der

Definition von $\sum_{i=m}^n \alpha(i, a_1, \dots, a_r)$ die Fälle $m > n$, $m = 0$ und $0 < m \leq n$ unterschieden. Diese Relationen wurden in Nr. 5 durch die »charakteristischen Funktionen« $\beta_1(m, n)$, $\beta_2(m, n)$, $\beta_3(m, n)$ charakterisiert. Diese betragen 1, wenn unter den Argumenten die betreffende Relation besteht, und 0, wenn dies nicht der Fall ist. Die genannten Beziehungen können aber ebensogut mit $\overline{\text{sg}}(\beta_1(m, n))$, $\overline{\text{sg}}(\beta_2(m, n))$ und $\overline{\text{sg}}(\beta_3(m, n))$ charakterisiert werden: diese Funktionen werden dann und nur dann zu 0, wenn die betreffende Beziehung zwischen m und n besteht.

Ich werde Relationen allgemein mit grossen griechischen Buchstaben bezeichnen. Eine Beziehung $B(a_1, \dots, a_r)$ heisst rekursiv, wenn es eine rekursive Funktion $\beta(a_1, \dots, a_r)$ gibt, welche dann und nur dann verschwindet, wenn unter a_1, \dots, a_r die Beziehung B besteht. Ist hier β eine primitiv-rekursive Funktion, so ist B eine primitiv-rekursive Beziehung.⁵

Bereits im § 1 kamen viele primitiv-rekursive Beziehungen zur Verwendung.

Wie es schon soeben vergegenwärtigt wurde, ist

$$a > b$$

eine solche Relation; diese ist ja mit $a \geq b + 1$ gleichbedeutend, und dies besteht dann und nur dann, wenn

$$(b + 1) \div a = 0$$

ist. $(b + 1) \div a$ ist aber eine primitiv-rekursive Funktion, da sie durch Substitution (und Umbenennung der Variablen) aus $n + 1$ und $a \div n$ aufgebaut wird.

Natürlich ist auch die Beziehung

$$a = b$$

primitiv-rekursiv, denn sie besteht dann und nur dann, wenn

$$|a - b| = 0,$$

und $|a - b|$ ist nach Nr. 12 des § 1 primitiv-rekursiv.

Nach Nr. 10 des § 1 ist auch die Teilbarkeit von a durch b für $b \neq 0$ primitiv-rekursiv, dies ist ja mit

$$\text{res}(a, b) = 0$$

gleichbedeutend.

Aus Nr. 11—13—14—15 des § 1 kann auf verschiedene Weisen eingesehen werden, dass die Primzahlbeschaffenheit, und aus Nr. 25 des § 1, dass auch die Quadratzahlbeschaffenheit einer Zahl primitiv-rekursiv ist.

5. Haben sich bereits gewisse Beziehungen als primitiv-rekursiv erwiesen, so kann man daraus schliessen, dass gewisse Verknüpfungen dieser Beziehungen auch primitiv-rekursiv sind.

Ich werde in diesem Kapitel jene primitiv-rekursive Funktion, von der behauptet wird, dass sie dann und nur dann verschwindet, wenn eine primitiv-rekursive Beziehung $B(a_1, \dots, a_r)$ bzw. $B_i(a_1, \dots, a_r)$ besteht, mit $\beta(a_1, \dots, a_r)$ bzw. $\beta_i(a_1, \dots, a_r)$ bezeichnen.

Ist nun $B(a_1, \dots, a_r)$ eine primitiv-rekursive Beziehung, so gilt das auch für ihre Negation, die mit $\overline{B}(a_1, \dots, a_r)$ bezeichnet wird. Denn

verschwindet dann und nur dann, wenn

$$\overline{\text{sg}}(\beta(a_1, \dots, a_r))$$

$$\beta(a_1, \dots, a_r) \neq 0$$

ist, das heisst, wenn $B(a_1, \dots, a_r)$ nicht besteht.

So sind die Beziehungen: $a \neq b$, » b teilt nicht a «, ferner » a ist eine zusammengesetzte Zahl«, sämtlich primitiv-rekursiv.

6. In Nr. 5 des § 1 hatte man zu bedenken, dass die Behauptung

$$\text{»}1 \dot{-} m = 0 \text{ und } m \dot{-} n = 0\text{«}$$

dann und nur dann wahr ist, wenn

$$(1 \dot{-} m) + (m \dot{-} n) = 0$$

gilt; es ist ja die Summe von nicht-negativen Zahlen dann und nur dann gleich 0, wenn alle Glieder verschwinden.

Genau so sieht man allgemein ein, dass samt $B_1(a_1, \dots, a_r)$, $B_2(a_1, \dots, a_r), \dots, B_k(a_1, \dots, a_r)$ auch die Aussage $B_1(a_1, \dots, a_r)$ und $B_2(a_1, \dots, a_r)$ und ... und $B_k(a_1, \dots, a_r)$ « welche etwas kürzer in der Form

$B_1(a_1, \dots, a_r) \& B_2(a_1, \dots, a_r) \& \dots \& B_k(a_1, \dots, a_r)$ geschrieben werden kann, primitiv-rekursiv ist: diese ist ja mit $\beta_1(a_1, \dots, a_r) + \beta_2(a_1, \dots, a_r) + \dots + \beta_k(a_1, \dots, a_r) = 0$ gleichbedeutend. (Natürlich ist samt der zweigliedrigen Summe auch die mehrgliedrige Summe primitiv-rekursiv; z. B. kann $a + b + c$ aus $a + b$ durch Einsetzen der zweigliedrigen Summe $b + c$ für b erhalten werden.)

7. In Nr. 15 des § 1 kam zur Verwendung, dass die Aussage

$$\text{»} |a - 1| = 0 \text{ oder } |b - 1| = 0\text{«}$$

welche man kürzer in der Form

$$|a - 1| = 0 \vee |b - 1| = 0$$

aufzeichnet, dann und nur dann wahr ist, wenn

$$|a - 1| \cdot |b - 1| = 0;$$

ein Produkt ist ja dann und nur dann 0, wenn einer seiner Faktoren 0 ist. (Hier bedeutet das Wörtchen »oder« genauer, dass wenigstens eine der Aussagen wahr ist; wobei die Möglichkeit, dass beide wahr sind, nicht ausgeschlossen wird.)

Genau so sieht man allgemein ein, dass samt $B_1(a_1, \dots, a_r)$, $B_2(a_1, \dots, a_r)$, ..., $B_k(a_1, \dots, a_r)$ auch die Aussage

$$B_1(a_1, \dots, a_r) \vee B_2(a_1, \dots, a_r) \vee \dots \vee B_k(a_1, \dots, a_r)$$

primitiv-rekursiv ist; diese ist ja mit

$\beta_1(a_1, \dots, a_r) \cdot \beta_2(a_1, \dots, a_r) \cdot \dots \cdot \beta_k(a_1, \dots, a_r) = 0$ gleichbedeutend. (Es ist freilich auch das mehrgliedrige Produkt primitiv-rekursiv, es kann ja durch Substitutionen aus zweigliedrigen Produkten aufgebaut werden.)

8. Es kam ebenfalls in Nr. 15 des § 1 zur Verwendung, dass die Aussage

»Aus $|ab - n| = 0$ folgt $|a - 1| |b - 1| = 0$ « die kürzer mit

$$|ab - n| = 0 \rightarrow |a - 1| |b - 1| = 0$$

bezeichnet werden kann, damit gleichbedeutend betrachtet wird, dass entweder $|ab - n| = 0$ nicht besteht, oder es besteht auch $|a - 1| |b - 1| = 0$. Dies kann aber nach der vorherigen Nummer folgendermassen aufgezeichnet werden:

$$|ab - n| \neq 0 \vee |a - 1| |b - 1| = 0;$$

und dies ist eine primitiv-rekursive Beziehung.

Genau so sieht man allgemein ein, dass samt $B_1(a_1, \dots, a_r)$ und $B_2(a_1, \dots, a_r)$ auch

$$B_1(a_1, \dots, a_r) \rightarrow B_2(a_1, \dots, a_r)$$

eine primitiv-rekursive Beziehung ist.

9. Auch in Nr. 7 des § 1 haben wir uns auf jene Eigenschaften der Summe und des Produktes berufen, die in den vorherigen Nummern benutzt wurden. Auf Grund der dort Durchdachten, aber auch unabhängig sieht man leicht ein, dass die Aussage:

»Für alle i zwischen 0 und n (die Grenzen inbegriffen) besteht $B(i, a_1, \dots, a_r)$ «

die (den Ausdruck »für alle i « mit »(i)« abgekürzt) in der Form

$$(i) [i \leq n \rightarrow B(i, a_1, \dots, a_r)]$$

geschrieben werden kann, mit

$$\sum_{i=0}^n \beta(i, a_1, \dots, a_r) = 0$$

gleichbedeutend, also samt $B(i, a_1, \dots, a_r)$ primitiv-rekursiv ist. Und die Aussage:

»Es gibt ein i zwischen 0 und n (die Grenzen inbegriffen), für welches $B(i, a_1, \dots, a_r)$ besteht«,

die (den Ausdruck »es gibt ein i für welches« mit »(Ei)« abgekürzt) in der Form

$$(Ei) [i \leq n \& B(i, a_1, \dots, a_r)]$$

geschrieben werden kann, ist mit

$$\prod_{i=0}^n \beta(i, a_1, \dots, a_r) = 0$$

gleichbedeutend, also ebenfalls samt $B(i, a_1, \dots, a_r)$ primitiv-rekursiv.

Die Zeichen für »alle« und für »es gibt« werden auch Quantoren genannt. Die in ihnen auftretenden Variablen sind »gebunden«: die betreffende Beziehung hängt von diesen nicht mehr ab. Es hängt ja der Wert von

$$\sum_{i=0}^n \beta(i, a_1, \dots, a_r) \quad \text{und} \quad \prod_{i=0}^n \beta(i, a_1, \dots, a_r)$$

nicht von i ab: diese Werte sind vollständig bestimmt, wenn die Funktion β , ferner der Wert von a_1, \dots, a_r und n angegeben wird.

Natürlich liefern Kombinationen solcher mit Quantoren versehenen primitiv-rekursiven Beziehungen wieder primitiv-rekursive Relationen. Z. B. ist bei primitiv-rekursiver $B(a, b)$ die Aussage:

»Für alle i_1 zwischen 0 und n_1 gibt es ein i_2 zwischen 0 und n_2 , so dass $B(i_1, i_2)$ besteht«,

kürzer:

$$(i_1) [i_1 \leq n_1 \rightarrow (E i_2) [i_2 \leq n_2 \& B(i_1, i_2)]] ,$$

mit

$\alpha + 1 \leq (i + 1) \cdot 0$ wäre, und wenn es kein solches i gibt, so ist der Wert von μ_i für $n = 0$ gleich 0.

Ähnlich ist

und
$$p_{n+1} = \mu_i [i \leq 2^{n+2} \ \& \ \pi(i) = n + 2],$$

$$\text{exp}_a(n) = \mu_i [i \leq n \ \& \ \text{res}(n, p_a^{i+1}) \neq 0].$$

Wenn es bis n nur ein einziges i gibt, für welches eine primitiv-rekursive Beziehung $B(i, a_1, \dots, a_r)$ besteht, so ergibt μ_i dieses einzige i . So lässt sich auch *das grösste i bis n für welches $B(i, a_1, \dots, a_r)$ besteht*, falls ein solches i überhaupt existiert, ebenfalls als ein gewisses kleinstes i , also mit μ_i aufschreiben: als das kleinste (das einzige) solche i , für welches $B(i, a_1, \dots, a_r)$ besteht, wobei für grössere $k \leq n$ $\bar{B}(k, a_1, \dots, a_r)$ besteht (ähnliches wurde schon in Nr. 18 des § 1 getan). Wird das betrachtete grösste i mit μ'_i bezeichnet, so ist daher

$$\begin{aligned} & \mu'_i [i \leq n \ \& \ B(i, a_1, \dots, a_r)] = \\ = & \mu_i [i \leq n \ \& \ B(i, a_1, \dots, a_r) \ \& \ (k)[k \leq n \rightarrow (k > i \rightarrow \bar{B}(k, a_1, \dots, a_r))]]. \end{aligned}$$

Mit Benutzung von μ'_i lässt sich z. B. die Definition von $\text{long}(n)$ in Nr. 18 des § 1 auf folgende Form bringen:

$$\text{long}(n) = \mu'_i [i \leq n \ \& \ \text{exp}_i(n) \neq 0].$$

12. Nun werde ich die wichtigsten primitiv-rekursiven Funktionen, indem ich auf die Reihenfolge ihrer Aufbau von den Ausgangsfunktionen

$$0 \quad \text{und} \quad n + 1$$

achte, in einer Tabelle zusammenfassen. Dabei lege ich kein Gewicht auf eine reine Systematisierung, bloss auf die Brauchbarkeit der Tabelle. Die leeren Spalten sind für uns uninteressant. Die mit einem * bezeichneten Funktionen werden bloss durch Substitutionen aufgebaut. Die ebenfalls primitiv-rekursiven konstanten Zahlen kommen nicht in die Tabelle. α, α_i bedeuten bereits definierte primitiv-rekursive Funktionen; B_i eine bereits definierte primitiv-rekursive Beziehung, und β_i eine solche primitiv-rekursive Funktion, welche dann und nur dann verschwindet, wenn B_i besteht.

Die Funktionen, die in der Tabelle auf eine Art, die auf ihre Bedeutung erinnert, bezeichnet werden, setze ich in den Folgenden als bekannt voraus (auch μ_i und μ'_i). Die Bezeichnungen anderer Funktionen betrachte ich nicht als gebunden; ich werde in verschiedenen Nummern verschiedene Funktionen nach Bedarf mit denselben griechischen Buchstaben bezeichnen.

§ 3. DIE WERTVERLAUFSREKURSION.⁶

1. Nun werde ich zeigen, dass sich die in Nr. 24 des § 1 angegebene Definition

$$\text{Fib}(0) = 1$$

$$\text{Fib}(n + 1) = \overline{\text{sg}}(n) + \text{sg}(n) (\text{Fib}(n - 1) + \text{Fib}(n))$$

für die Folge

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

⁶) PÉTER [2] § 1. und [4] § 2.

Tabelle für die gebräuchlichsten primitiv-rekursiven Funktionen und Beziehungen.

	Die Funktion	$\varphi(0, \dots)$ (für $n=0$)	$\varphi(n+1, \dots)$, bzw. die explizite Definition von $\varphi(n, \dots)$	Die Bedingung von $\varphi(n) = 0$	Die darauf gebauten Beziehungen	Bemerkungen
1.	n	0	$n+1$			
2.	$a+n$	a	$(a+n)+1$			
3.	$n \cdot a$	0	$n \cdot a + a$	$a=0$ und $n=0$	$B_1 \& B_2 \& \dots \& B_k$	
4.	$n!$	1	$(n+1) \cdot n!$	$n=0$ oder $a=0$	$B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_k; B_1 \rightarrow B_2$	
5.	a^n	1	$a^n \cdot a$			$0! = 1$
6.	$n \div 1$	0	n			$0^0 = 1$
7.	$a \div n$	a	$(a \div n) \div 1$	$a \leq n$	$a \leq n; a < n$ als $a+1 \leq n$	$n-1$ für $n > 0$
8.	$ a-b $ *		$(a \div b) + (b \div a)$	$a=b$	$a=b$	$a-n$ für $a \geq n$
9.	$sg(n)$	0	1	$n=0$		
10.	$\overline{sg(n)}$	1	0	$n \neq 0$	\overline{B} (Negation von B)	
11.	$\max(a, b)$ *		$a \overline{sg}(b \div a) + b \overline{sg}((a+1) \div b)$			
12.	$\min(a, b)$ *		$a \overline{sg}(a \div b) + b \overline{sg}(b \div a)$			
13.	$[\sqrt{n}]$	0	$[\sqrt{n}] + \overline{sg}(n+1 - ([\sqrt{n}] + 1)^2)$			
14.	$\text{quadres}(n)$ *		$n \div [\sqrt{n}]^2$	n ist ein Quadrat	n ist eine Quadratzahl	Abweichung vom nächsten Quadrat.
15.	$\text{quad}(n)$ *		$\overline{sg}(\text{quadres}(n))$	n ist kein Quadrat		Charakt. Funktion des Quadratseins.
16.	$\varphi = \begin{cases} \alpha_1, & \text{falls } B_1 \text{ besteht} \\ \dots \\ \alpha_k, & \text{falls } B_k \text{ besteht} \end{cases}$ *		$\alpha_1 \overline{sg}(\beta_1) + \dots + \alpha_k \overline{sg}(\beta_k)$			Überall gilt genau eines von B_1, \dots, B_k .
17.	Durch eine »zusammengeflochtene« Rekursion definierte $\varphi(n, \dots)$	$\alpha_0(\dots)$	$\alpha_1(n, \dots, \varphi(n, \dots))$, falls $B_1(n, \dots, \varphi(n, \dots))$ gilt $\alpha_{k-1}(n, \dots, \varphi(n, \dots))$, « $B_{k-1}(n, \dots, \varphi(n, \dots))$ » $\alpha_k(n, \dots, \varphi(n, \dots))$ sonst			B_1, \dots, B_{k-1} schliessen sich aus.
18.	$\sum_{i=0}^n \alpha(i, a_1, \dots, a_r)$	$\alpha(0, \dots)$	$\left\{ \sum_{i=0}^n \alpha(i, \dots) \right\} + \alpha(n+1, \dots)$	für alle $i \leq n$ gilt $\alpha(i, \dots) = 0$	$(i) [i \leq n \rightarrow B(i, \dots)]$	Die Relation: für alle i bis n gilt $B(i, \dots)$.
19.	$\prod_{i=0}^n \alpha(i, a_1, \dots, a_r)$	$\alpha(0, \dots)$	$\left\{ \prod_{i=0}^n \alpha(i, \dots) \right\} \cdot \alpha(n+1, \dots)$	es gibt ein $i \leq n$, so dass $\alpha(i, \dots) = 0$	$(Ei) [i \leq n \& B(i, \dots)]$	Die Relation: es gibt ein i bis n für das $B(i, \dots)$ gilt.
20.	$\sum_{i=m}^n \alpha(i, a_1, \dots, a_r)$ *		$\begin{cases} 0, & \text{falls } m > n \\ \sum_{i=0}^n \alpha(i, \dots), & \text{falls } m = 0 \\ \sum_{i=0}^n \alpha(i, \dots) \div \sum_{i=0}^{m-1} \alpha(i, \dots) & \text{sonst} \end{cases}$			0, falls $m > n$.
21.	$\prod_{i=m}^n \alpha(i, a_1, \dots, a_r)$ *		$\begin{cases} 1, & \text{falls } m > n \\ \prod_{i=0}^n \alpha(i, \dots), & \text{falls } m = 0 \\ \left[\frac{\prod_{i=0}^n \alpha(i, \dots)}{\prod_{i=0}^{m-1} \alpha(i, \dots)} \right] & \text{sonst} \end{cases}$			1, falls $m > n$.
22.	$\mu i [i \leq n \& B(i, a_1, \dots, a_r)]$ *		$\begin{cases} 0, & \text{falls } (i) [i \leq n \rightarrow \overline{B}(i, \dots)] \\ \prod_{k=0}^n \overline{sg} \left(\prod_{j=0}^k \beta(j, \dots) \right) & \text{sonst} \end{cases}$			Das kleinste i bis n , für welches $B(i, \dots)$ gilt, und 0, wenn es kein solches i gibt.
23.	$\mu i^i [i \leq n \& B(i, a_1, \dots, a_r)]$ *		$\mu i [i \leq n \& B(i, \dots) \& (k) [k \leq n \rightarrow (k > i \rightarrow \overline{B}(i, \dots))]]$			Das grösste i bis n , für das $B(i, \dots)$ gilt, und 0, wenn es kein solches i gibt.
24.	$\left[\frac{a}{n} \right]$ *		$\mu i [i \leq a \& a+1 \leq (i+1)n]$			$\left[\frac{a}{0} \right] = 0$
25.	$\text{res}(a, n)$ *		$a \div \left[\frac{a}{n} \right] n$	a ist teilbar durch n	a ist teilbar durch n	Der Rest von a (mod n), für $n \neq 0$. $\text{res}(a, 0) = a$
26.	$S(n)$ *		$\sum_{i=1}^n \overline{sg}(\text{res}(n, i))$		(aus $S(n) = 2$) n ist eine Primzahl	Die Teileranzahl von n .
27.	$\pi(n)$ *		$\sum_{i=2}^n \overline{sg} S(i) - 2 $			Die Anzahl der Primzahlen bis n .
28.	p_n *		$\mu i [i \leq 2^{2^{n+1}} \& \pi(i) = n+1]$			p_n ist die $n+1$ -te Primzahl.
29.	$\text{exp}_a(n)$ *		$\mu i [i \leq n \& p_a^{i+1} \text{ teilt nicht } n]$		(aus $\text{exp}_a(n) = k$) n ist genau durch die k -te Potenz von p_a teilbar	$\text{exp}_a(0) = 0$. Für $\text{exp}_a(n) \neq 0$ ist $\text{exp}_a(n) \leq p_a \leq n$ und $\text{exp}_a(n) \leq p_a^{\text{exp}_a(n)} \leq n$; für $n > 0$ ist sogar $\text{exp}_a(n) < n$.
30.	$\text{long}(n)$ *		$\mu i^i [i \leq n \& p_i \text{ geht in } n \text{ auf}]$			Für $n > 1$ der Index des grössten Primteilers von n (die »Länge« der Primfaktorenzerlegung).
31.	S_n	0	$(n+1)S_n + 1$			$n!$ -mal die n -te Teilsumme der Reihe von e .
32.	$[en]$	0	$\left[\frac{S_{n+1}}{n!} \right]$			

von Fibonacci, durch eine primitive Rekursion und Substitutionen ersetzen lässt.

Die Definition kann etwas kürzer geschrieben werden, wenn

$$\beta(n, a, b) = \overline{sg}(n) + sg(n)(a + b)$$

gesetzt wird; denn so ist

$$\text{Fib}(0) = 1$$

$$\text{Fib}(n + 1) = \beta(n, \text{Fib}(n - 1), \text{Fib}(n)).$$

Diese Definition ist jedenfalls eine Rekursion, denn sie bestimmt den Wert $\text{Fib}(n + 1)$ mit Hilfe von Funktionswerten, die an kleineren Stellen als $n + 1$ angenommen werden.

Ich werde gleich allgemeiner zeigen: hat man mit einer solchen Rekursion zu tun, welche den Funktionswert an der Stelle $n + 1$ mit Benutzung von beliebig vielen (eventuell von allen) Gliedern des unter $n + 1$ genommenen Wertevorrats der definierten Funktion angibt, so kann man diese (den ganzen Wertverlauf benutzende) Definition auf eine primitive Rekursion und Substitutionen zurückführen.

Dass der Wert $\varphi(n + 1)$ einer Funktion φ von vor $n + 1$ angenommenen Funktionswerten abhängt, kann auch so ausgedrückt werden, dass er vom Ausdruck

$$\varphi^{(0)} \cdot \varphi^{(1)} \cdot \dots \cdot \varphi^{(n)}$$

das heisst, von

$$\psi(n) = \prod_{i=0}^n \varphi^{(i)}$$

abhängt, worin ja all diese Werte enthalten sind. Die Definition

$$\varphi(0) = k$$

$$\varphi(n + 1) = \gamma\left(n, \prod_{i=0}^n \varphi^{(i)}\right) = \gamma(n, \psi(n))$$

kann *allgemeine Wertverlaufsrekursion* genannt werden. (Man kann natürlich auch eine mehrstellige Funktion durch eine Wertverlaufsrekursion der Form

$$\varphi(0, a_1, \dots, a_r) = \alpha(a_1, \dots, a_r)$$

$$\varphi(n + 1, a_1, \dots, a_r) = \gamma\left(n, a_1, \dots, a_r, \prod_{i=0}^n \varphi^{(i, a_1, \dots, a_r)}\right)$$

definieren; die folgenden Folgerungen lassen sich ohne weiteres auch auf mehrstellige Funktionen übertragen.) Man erhält hier an einer beliebigen Stelle a zwischen 0 und n den Wert $\varphi(a)$ als den Exponent von p_a

$$\varphi(a) = \exp_a(\psi(n))$$

in der Primfaktorenzerlegung

$$\varphi(n) = p_0^{\varphi^{(0)}} \cdot p_1^{\varphi^{(1)}} \cdot \dots \cdot p_n^{\varphi^{(n)}}$$

So ist für $\varphi(n) = \text{Fib}(n)$

$$\text{Fib}(n - 1) = \exp_{n-1}(\psi(n)) \quad \text{und} \quad \text{Fib}(n) = \exp_n(\psi(n)),$$

und daher ist die Definition von $\text{Fib}(n)$ jener einfache Spezialfall der allgemeinen Wertverlaufsrekursion, wobei

$$k = 1 \quad \text{und} \quad \gamma(n, a) = \beta(n, \exp_{n-1}(a), \exp_n(a))$$

(γ ist freilich eine primitiv-rekursive Funktion).

2. Nun lassen sich die Werte von

$$\psi(n) = \prod_{i=0}^n p_i^{\varphi(i)}$$

mit Benutzung der Wertverlaufsrekursion für $\varphi(n)$, folgendermassen berechnen :

$$\psi(0) = p_0^{\varphi(0)} = 2^k$$

$$\psi(n+1) = \psi(n) \cdot p_{n+1}^{\varphi(n+1)} = \psi(n) \cdot p_{n+1}^{\gamma(n, \psi(n))}$$

Die Definition

$$\psi(0) = 2^k$$

$$\psi(n+1) = \psi(n) \cdot p_{n+1}^{\gamma(n, \psi(n))}$$

ergibt aber den Wert $\psi(n+1)$ mit Hilfe von $\psi(n)$; das ist also eine primitive Rekursion. Und, wie bereits erwähnt, $\varphi(n)$ ergibt sich durch die einfache Substitution

$$\varphi(n) = \exp_n(\psi(n))$$

aus $\psi(n)$. Daher führt die Verwendung von Wertverlaufsrekursionen aus der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen nicht hinaus; insbesondere ist auch die Funktion $\text{Fib}(n)$, welche die Folge von Fibonacci angibt, primitiv-rekursiv.

§ 4. DIE SIMULTANE REKURSION?

1. Kehren wir jetzt zur Definition

$$\sigma_1(0) = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_2(0) = 0,$$

$$\sigma_1(n+1) = \overline{\text{sg}}((\sigma_1(n)+1) \dot{-} \sigma_2(n)) \cdot \sigma_2(n) + \overline{\text{sg}}((\sigma_2(n)+1) \dot{-} \sigma_1(n)) \cdot (\sigma_2(n)+1)$$

und

$$\sigma_2(n+1) = \text{sg}(|\sigma_1(n) - \sigma_2(n)|) \cdot \sigma_1(n) + \overline{\text{sg}}(|\sigma_1(n) - \sigma_2(n)|) \cdot (\sigma_1(n)+1)$$

zurück, die in Nr. 27 des § 1 bei der Anordnung der Zahlenpaare in eine Folge entstanden ist. Diese Definition kann eine *simultane Rekursion* der Funktionen $\sigma_1(n)$ und $\sigma_2(n)$ genannt werden. Um dies kürzer aufschreiben zu können, setzen wir

$$\beta_1(a, b) = \overline{\text{sg}}((a+1) \dot{-} b) \cdot b + \overline{\text{sg}}((b+1) \dot{-} a) \cdot (b+1)$$

und

$$\beta_2(a, b) = \text{sg}(|a-b|) \cdot a + \overline{\text{sg}}(|a-b|) \cdot (a+1)$$

Dann lautet die Definition

$$\sigma_1(0) = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_2(0) = 0$$

$$\sigma_1(n+1) = \beta_1(\sigma_1(n), \sigma_2(n)) \quad \text{und} \quad \sigma_2(n+1) = \beta_2(\sigma_1(n), \sigma_2(n));$$

wobei freilich $\beta_1(a, b)$ und $\beta_2(a, b)$ primitiv-rekursiv sind.

⁷⁾ HILBERT-BERNAYS [1] Band I. S. 320—321. und 328—329.

Die simultane Rekursion der beiden Funktionen kann auf die Definition einer solchen Funktion $\varphi(n)$ zurückgeführt werden, welche an geraden Stellen die Werte von $\sigma_1(n)$, an ungeraden Stellen die Werte von $\sigma_2(n)$ annimmt. Diese Funktion $\varphi(n)$ wird also folgenderweise aufgebaut :

$$\varphi(0) = \sigma_1(0) = 0,$$

$$\varphi(1) = \sigma_2(0) = 0,$$

$$\varphi(2) = \sigma_1(1) = \beta_1(\sigma_1(0), \sigma_2(0)) = \beta_1(\varphi(0), \varphi(1)),$$

$$\varphi(3) = \sigma_2(1) = \beta_2(\sigma_1(0), \sigma_2(0)) = \beta_2(\varphi(0), \varphi(1)),$$

$$\varphi(4) = \sigma_1(2) = \beta_1(\sigma_1(1), \sigma_2(1)) = \beta_1(\varphi(2), \varphi(3)),$$

$$\varphi(5) = \sigma_2(2) = \beta_2(\sigma_1(1), \sigma_2(1)) = \beta_2(\varphi(2), \varphi(3)),$$

.....

Zusammengefasst :

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi(n+1) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ \beta_1(\varphi(n-1), \varphi(n)), & \text{falls } n > 0 \text{ und ungerade ist} \\ \beta_2(\varphi(n-2), \varphi(n-1)), & \text{falls } n > 0 \text{ und gerade ist.} \end{cases}$$

Hier können wegen der Bedingungen die Differenzen auch als arithmetische Differenzen geschrieben werden. $n > 0$, das heisst $n \geq 1$ ist mit $1 \dot{-} n = 0$ gleichbedeutend ; und dass dabei n gerade ist, mit $\text{res}(n, 2) = 0$. Es ist also

$$\overline{\text{sg}}((1 \dot{-} n) + \text{res}(n+1, 2)) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n > 0 \text{ und ungerade ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\overline{\text{sg}}((1 \dot{-} n) + \text{res}(n, 2)) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n > 0 \text{ und gerade ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daher kann $\varphi(n)$ durch die folgende Rekursion definiert werden :

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi(n+1) = \overline{\text{sg}}((1 \dot{-} n) + \text{res}(n+1, 2)) \cdot \beta_1(\varphi(n \dot{-} 1), \varphi(n)) + \overline{\text{sg}}((1 \dot{-} n) + \text{res}(n, 2)) \cdot \beta_2(\varphi(n \dot{-} 2), \varphi(n \dot{-} 1)).$$

Hier wird $\varphi(n+1)$ mit Hilfe lauter rekursiver Funktionen aus an vorangehenden Stellen angenommenen Werten, also durch eine Wertverlaufsrekursion definiert. So ist nach Nr. 2 des § 3 $\varphi(n)$ primitiv-rekursiv, und somit sind auch $\sigma_1(n)$ und $\sigma_2(n)$ primitiv-rekursive Funktionen, da man sie durch die Substitutionen

$$\sigma_1(n) = \varphi(2n) \quad \text{und} \quad \sigma_2(n) = \varphi(2n+1)$$

erhalten kann.

2. Es führt auch die simultane Rekursion von mehreren Funktionen nicht aus der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinaus ; es kann ja die allgemeine simultane Rekursion von k Funktionen :

$$\begin{aligned} \sigma_1(0, a_1, \dots, a_r) &= \alpha_1(a_1, \dots, a_r) \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_k(0, a_1, \dots, a_r) &= \alpha_k(a_1, \dots, a_r) \\ \sigma_1(n+1, a_1, \dots, a_r) &= \beta_1(n, a_1, \dots, a_r, \sigma_1(n, a_1, \dots, a_r), \dots, \sigma_k(a_1, \dots, a_r)) \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_k(n+1, a_1, \dots, a_r) &= \beta_k(n, a_1, \dots, a_r, \sigma_1(n, a_1, \dots, a_r), \dots, \sigma_k(a_1, \dots, a_r)) \end{aligned}$$

ganz ähnlich wie im betrachteten Fall auf die Wertverlaufsrekursion einer solchen Funktion $\varphi(n, a_1, \dots, a_r)$ zurückgeführt werden, welche die Werte $\sigma_1(n, a_1, \dots, a_r), \sigma_2(n, a_1, \dots, a_r), \dots, \sigma_k(n, a_1, \dots, a_r)$ annimmt, je nachdem n bei der Teilung durch k den Rest $0, 1, \dots, k-1$ ergibt.

§ 5. REKURSION, WOBEI AN STELLE DER PARAMETER EINSETZUNGEN ERFOLGEN.⁸

1. Es soll nun die in Nr. 23 des § 1 angegebene Definition

$$\begin{aligned} \binom{0}{a} &= \overline{\text{sg}}(a) \\ \binom{n+1}{a} &= \overline{\text{sg}}(a \div (n+1)) \cdot \left(\binom{n}{a} + \text{sg}(a) \binom{n}{a-1} \right) \end{aligned}$$

von $\binom{n}{a}$ untersucht werden.

Der kürzeren Schreibweise halber sei

$$\begin{aligned} \alpha(a) &= \overline{\text{sg}}(a), \\ \gamma(a) &= a \div 1 \end{aligned}$$

und

$$\beta(n, a, b, c) = \overline{\text{sg}}(a \div (n+1)) \cdot (b + \text{sg}(a) \cdot c);$$

dann lautet die Definition

$$\begin{aligned} \binom{0}{a} &= \alpha(a) \\ \binom{n+1}{a} &= \beta(n, a, \binom{n}{a}, \binom{n}{\gamma(a)}). \end{aligned}$$

In dieser Definition wird nicht nur $\binom{n}{a}$, sondern auch $\binom{n}{\gamma(a)}$ zur Berechnung von $\binom{n+1}{a}$ verwendet. Daher genügt es nicht zur Berechnung von $\binom{n+1}{a}$ den Wert $\binom{n}{a}$ zu kennen: es muss die Funktion $\binom{n}{a}$ als Funktion von a bekannt sein (um darin auch $\gamma(a)$ für a setzen zu können). Ich werde aber zeigen, dass man auch eine solche Definition auf primitive Rekursion und Substitution

⁸) Péter [2], [4], [7]. Siehe noch CSILLAG [1] (darin muss die Definition der Funktion $\psi(n, a)$ etwas modifiziert werden).

zurückführen kann. Am vorliegenden einfachen Beispiel wäre das sehr leicht durchzuführen; ich werde aber eine solche Methode anwenden, die auch allgemein brauchbar ist.

Die Zurückführung kann so geschehen, dass man die Schritte einzeln untersucht, die beim Aufbau von $\binom{n}{a}$ von $\binom{0}{a}$ ausgehend allmählich gemacht werden müssen; dann eine Funktion definiert, deren Werte die dabei gefundenen «Bausteine» sind. Beobachten wir den Aufbau einiger Anfangswerte:

$$\binom{0}{a} = \alpha(a);$$

$$\binom{1}{a} = \beta\left(0, a, \binom{0}{a}, \binom{0}{\gamma(a)}\right) = \beta\left(0, a, \alpha(a), \alpha(\gamma(a))\right);$$

daraus wird $\binom{1}{\gamma(a)}$, wenn für a überall $\gamma(a)$ gesetzt wird; es ist also

$$\begin{aligned} \binom{2}{a} &= \beta\left(1, a, \binom{1}{a}, \binom{1}{\gamma(a)}\right) = \\ &= \beta\left(1, a, \beta\left(0, a, \alpha(a), \alpha(\gamma(a))\right), \beta\left(0, \gamma(a), \alpha(\gamma(a)), \alpha(\gamma(\gamma(a)))\right)\right); \end{aligned}$$

.....

Man sieht, dass diese Werte mit Einsetzungen, «Ineinanderschachtelungen» von α, β, γ zustande kommen; dabei erfolgt in der ersten Leerstelle von β niemals eine Einsetzung: dort kommt beim Aufbau von $\binom{n}{a}$ immer eine kleinere Zahl

als n vor; alle andere Leerstellen unserer Funktionen werden entweder mit a besetzt, oder es erfolgen dort Einschachtelungen. Als Hilfsfunktion, welche die Bausteine von $\binom{n}{a}$ annimmt, hat man daher eine solche Funktion $\psi(n, a)$ zu

definieren, welche erstens den Wert a annimmt (zum Beispiel für $n = 0$); und dann samt bereits angenommenen Werten auch jene Werte annimmt, die aus deren Einschachtelungen in α, γ und in die zweite, dritte und vierte Leerstelle von β entstehen. Die Definition von $\psi(n, a)$ wird daher so gewählt, dass

$$\psi(0, a) = a,$$

ferner für beliebiges m_1 mit geeignetem n_1 und n_2

$$\psi(n_1, a) = \alpha(\psi(m_1, a)),$$

$$\psi(n_2, a) = \gamma(\psi(m_1, a)),$$

endlich für beliebige m_0, m_1, m_2 und m_3 mit geeignetem n

$$\psi(n, a) = \beta(m_0, \psi(m_1, a), \psi(m_2, a), \psi(m_3, a))$$

ist.

2. Diese Forderungen lassen noch eine grosse Freiheit in der Definition von $\psi(n, a)$ zu. Es können z. B. die drei Fälle, wobei ψ durch Einschachtelung in α, γ oder β zustande kommt, darnach getrennt werden, ob $n (> 0)$ ungerade,

oder genau durch die erste Potenz von 2, oder mit einer höheren Potenz von 2 teilbar ist. Der Exponent von 2 in der Primfaktorenzerlegung von n wurde mit $\exp_0(n)$ bezeichnet; in diesem Fall hat also die Definition von $\psi(n, a)$ die Struktur:

$$\psi(0, a) = a$$

und für $n > 0$

$$\psi(n, a) = \begin{cases} \alpha(\psi(m_1, a)), & \text{falls } \exp_0(n) = 0 \\ \gamma(\psi(m_1, a)), & \text{« } \exp_0(n) = 1 \\ \beta(m_0, \psi(m_1, a), \psi(m_2, a), \psi(m_3, a)) & \text{sonst;} \end{cases}$$

und hier kann noch m_0, m_1, m_2, m_3 auf vielerlei Weise gewählt werden. Um eine rekursive Definition zu gewinnen, hat man m_0, m_1, m_2 und m_3 so zu wählen, dass sie für $n > 0$ kleiner als n ausfallen. Zum Beispiel entsprechen die Exponenten von 3, 5, 7 und 11 in der Primfaktorenzerlegung von n dieser Forderung. Es sei also

$$m_0 = \exp_1(n), \quad m_1 = \exp_2(n), \quad m_2 = \exp_3(n) \quad \text{und} \quad m_3 = \exp_4(n);$$

so lautet die Definition von $\psi(n, a)$

$$\psi(0, a) = a$$

und für $n > 0$

$$(D) \quad \psi(n, a) = \begin{cases} \alpha(\psi(\exp_2(n), a)), & \text{falls } \exp_0(n) = 0 \\ \gamma(\psi(\exp_2(n), a)), & \text{« } \exp_0(n) = 1 \\ \beta(\exp_1(n), \psi(\exp_2(n), a), \psi(\exp_3(n), a), \psi(\exp_4(n), a)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die so definierte Funktion $\psi(n, a)$ genügt tatsächlich den Forderungen. Zum Beispiel ist $(5^{m_1}, a)$ eine Stelle, wo sie den Wert $\alpha(\psi(m_1, a))$ annimmt, da der Exponent von 2 und von 5 in der Primfaktorenzerlegung von 5^{m_1}

$$\exp_0(5^{m_1}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \exp_2(5^{m_1}) = m_1$$

ist, und so nach (D)

$$\psi(5^{m_1}, a) = \alpha(\psi(m_1, a)) .$$

Ähnlich sieht man ein, dass $(2 \cdot 5^{m_1}, a)$ eine solche Stelle ist, wo die ψ -Funktion den Wert $\gamma(\psi(m_1, a))$, und dass $(2^2 \cdot 3^{m_0} \cdot 5^{m_1} \cdot 7^{m_2} \cdot 11^{m_3}, a)$ eine solche Stelle ist, wo sie den Wert $\beta(m_0, \psi(m_1, a), \psi(m_2, a), \psi(m_3, a))$ annimmt:

$$\psi(2 \cdot 5^{m_1}, a) = \gamma(\psi(m_1, a)) ,$$

$$\psi(2^2 \cdot 3^{m_0} \cdot 5^{m_1} \cdot 7^{m_2} \cdot 11^{m_3}, a) = \beta(m_0, \psi(m_1, a), \psi(m_2, a), \psi(m_3, a)) .$$

Der kürzeren Schreibweise halber sei

$$\xi(m, n, a, b, c) = \begin{cases} \alpha(a) & \text{falls } m = 0 \\ \gamma(a) & \text{« } m = 1 \\ \beta(n, a, b, c) & \text{sonst;} \end{cases}$$

dann ist die aus primitiv-rekursiven Funktionen «zusammengeflickte» Funktion ξ primitiv-rekursiv, und mit ihr kann die Definition von $\psi(n, a)$ auf folgende Form gebracht werden:

$$\psi(0, a) = a$$

$$\psi(n+1, a) = \xi(\exp_0(n+1), \exp_1(n+1), \psi(\exp_2(n+1), a),$$

$$, \psi(\exp_3(n+1), a), \psi(\exp_4(n+1), a)) .$$

Man sieht — und ich werde mich darauf berufen — dass

$\xi(m, m_0, \psi(m_1, a), \psi(m_2, a), \psi(m_3, a)) = \psi(2^m \cdot 3^{m_0} \cdot 5^{m_1} \cdot 7^{m_2} \cdot 11^{m_3}, a)$;
 es sind ja in der Primfaktorenzerlegung von

$$n + 1 = 2^m \cdot 3^{m_0} \cdot 5^{m_1} \cdot 7^{m_2} \cdot 11^{m_3}$$

die Exponenten von 2, 3, 5, 7 und 11 der Reihe nach m, m_0, m_1, m_2 und m_3 .

$\psi(n, a)$ entsteht durch eine Wertverlaufsrekursion aus primitiv-rekursiven Funktionen (es gehören ja $\psi(\exp_2(n+1), a)$, $\psi(\exp_3(n+1), a)$ und $\psi(\exp_4(n+1), a)$ zum Wertevorrat vor der Stelle $(n+1, a)$ der Funktion ψ); und so ist sie auch selber primitiv-rekursiv.

3. Die Werte von $\psi(n, a)$ sind die Bausteine, die im Aufbau von $\binom{n}{a}$ allmählich gebraucht werden. Unter den Bausteinen kommen auch die Werte $\binom{0}{a}$, $\binom{1}{a}$, $\binom{2}{a}$, ... vor. Wie können diese aus den Werten von $\psi(n, a)$ herausgehoben werden?

Ich werde zeigen, dass es eine primitiv-rekursive Funktion $\varkappa(n)$ gibt, für welche

$$\binom{n}{a} = \psi(\varkappa(n), a).$$

Zum Beweis benutze ich eine interessante Eigenschaft der ψ -Funktion: nämlich, dass die eingeschachtelten Ausdrücke $\psi(n, \psi(s, a))$ auch als uneingeschachtelte ψ -Werte ausgedrückt werden können (es kamen ja durch Ineinander-schachtelung der Bausteine von $\binom{n}{a}$ neue Bausteine zustande); genauer: es gibt eine primitiv-rekursive Funktion $\nu(n, s)$, so dass

$$\psi(n, \psi(s, a)) = \psi(\nu(n, s), a).$$

Nach der ersten Definitionsgleichung von ψ gilt nämlich

$$\psi(0, \psi(s, a)) = \psi(s, a).$$

Angenommen, dass es bereits zu einem beliebigen s für $i = 1, 2, \dots, n$ solche von i und s abhängige Zahlen $\nu(i, s)$ gibt, dass

$$\psi(i, \psi(s, a)) = \psi(\nu(i, s), a),$$

so gibt es auch zu $i = n + 1$ eine derartige Zahl $\nu(n + 1, s)$; denn nach der zweiten Definitionsgleichung von ψ ist

$$\begin{aligned} \psi(n+1, \psi(s, a)) &= \xi(\exp_0(n+1), \exp_1(n+1), \psi(\exp_2(n+1), \psi(s, a)), \\ &\quad \psi(\exp_3(n+1), \psi(s, a)), \psi(\exp_4(n+1), \psi(s, a))) = \\ &= \xi(\exp_0(n+1), \exp_1(n+1), \psi(\nu(\exp_2(n+1), s), a), \\ &\quad \psi(\nu(\exp_3(n+1), s), a), \psi(\nu(\exp_4(n+1), s), a)), \end{aligned}$$

und dies ist — nach der Bemerkung am Ende der vorigen Nummer — gleich

$$\psi(2^{\exp_0(n+1)}, 3^{\exp_1(n+1)}, 5^{\nu(\exp_2(n+1), s)}, 7^{\nu(\exp_3(n+1), s)}, 11^{\nu(\exp_4(n+1), s)}, a).$$

Wird also $\nu(n, s)$ durch die Wertverlaufsrekursion

$$\nu(0, s) = s$$

$\nu(n+1, s) = 2^{\exp_2(n+1)} \cdot 3^{\exp_3(n+1)} \cdot 5^{\nu(\exp_5(n+1), s)} \cdot 7^{\nu(\exp_7(n+1), s)} \cdot 11^{\nu(\exp_{11}(n+1), s)}$
 definiert, so ist $\nu(n, s)$ primitiv-rekursiv, und für alle n gilt

$$\varphi(n, \varphi(s, a)) = \varphi(\nu(n, s), a).$$

4. Nun kann man beweisen, dass es zu einem jeden n eine Zahl $\kappa(n)$ gibt, für welche

$$\binom{n}{a} = \varphi(\kappa(n), a)$$

gilt. Erstens kann man von der ursprünglichen Definition (D) von $\varphi(n, a)$ und von der Definition in Nr. 1 dieses Kapitels für $\binom{n}{a}$ herauslesen, dass

$$\varphi(1, a) = \varphi(2^0 \cdot 5^0, a) = a(\varphi(0, a)) = a(a) = \binom{0}{a},$$

das heisst

$$\binom{0}{a} = \varphi(1, a)$$

ist. Angenommen, dass es zu irgendeinem n bereits eine Zahl $\kappa(n)$ gibt, für welche bei beliebigem a

$$\binom{n}{a} = \varphi(\kappa(n), a)$$

gilt, werde ich zeigen, dass es auch zu $n+1$ eine der entsprechenden Forderung genügende Zahl $\kappa(n+1)$ gibt. Es ist nämlich nach der Definition von $\binom{n}{a}$ und nach der Annahme

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{a} &= \beta(n, a, \binom{n}{a}, \binom{n}{\gamma(a)}) = \\ &= \beta(n, a, \varphi(\kappa(n), a), \varphi(\kappa(n), \gamma(a))). \end{aligned}$$

Hier kann nach der Definition (D) für a auch $\varphi(0, a)$ und für $\gamma(a) = \gamma(\varphi(0, a))$ auch

$$\varphi(2^1 \cdot 5^0, a) = \varphi(2, a)$$

gesetzt werden; es ist also

$$\binom{n+1}{a} = \beta(n, \varphi(0, a), \varphi(\kappa(n), a), \varphi(\kappa(n), \varphi(2, a))).$$

Es ist nach der vorigen Nummer

$$\varphi(\kappa(n), \varphi(2, a)) = \varphi(\nu(\kappa(n), 2), a)$$

und so

$$\binom{n+1}{a} = \beta(n, \varphi(0, a), \varphi(\kappa(n), a), \varphi(\nu(\kappa(n), 2), a)).$$

Endlich ist nach der Definition (D)

$$\begin{aligned} &\beta(n, \varphi(0, a), \varphi(\kappa(n), a), \varphi(\nu(\kappa(n), 2), a)) = \\ &= \varphi(2^2 \cdot 3^n \cdot 5^0 \cdot 7^{\kappa(n)} \cdot 11^{\nu(\kappa(n), 2)}, a); \end{aligned}$$

also ist

$$\binom{n+1}{a} = \psi(2^2 \cdot 3^n \cdot 5^0 \cdot 7^{\kappa(n)} \cdot 11^{\nu(\kappa(n), 2)}, a);$$

und so ist es tatsächlich gelungen auch zu $n+1$ eine der Forderung genügende Zahl zu finden.

Wird daher $\kappa(n)$ durch die primitive Rekursion

$$\begin{aligned} \kappa(0) &= 1 \\ \kappa(n+1) &= 2^2 \cdot 3^n \cdot 7^{\kappa(n)} \cdot 11^{\nu(\kappa(n), 2)} \end{aligned}$$

definiert, so ist

$$\binom{n}{a} = \psi(\kappa(n), a),$$

also entsteht $\binom{n}{a}$ durch Substitution aus primitiv-rekursiven Funktionen. So hat

sich auch $\binom{n}{a}$ als primitiv-rekursiv erwiesen.

5. Ähnlich sieht man auch allgemein ein, dass die Rekursion der Form

$$\varphi(0, a) = \alpha(a)$$

$$\varphi(n+1, a) = \beta(n, a, \varphi(n, \gamma_1(n, a)), \varphi(n, \gamma_2(n, a)), \dots, \varphi(n, \gamma_k(n, a))),$$

und auch die Definition

$$\varphi(0, a_1, \dots, a_r) = \alpha(a_1, \dots, a_r)$$

$$\varphi(n+1, a_1, \dots, a_r) = \beta(n, a_1, \dots, a_r,$$

$$, \varphi(n, \gamma_{11}(n, a_1, \dots, a_r), \dots, \gamma_{1r}(n, a_1, \dots, a_r)),$$

$$, \varphi(n, \gamma_{21}(n, a_1, \dots, a_r), \dots, \gamma_{2r}(n, a_1, \dots, a_r)), \dots,$$

$$, \varphi(n, \gamma_{k1}(n, a_1, \dots, a_r), \dots, \gamma_{kr}(n, a_1, \dots, a_r)))$$

einer beliebig vielstelligen Funktion nicht von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinausführt. Im § 10 komme ich darauf zurück, dass sich das hier benutzte Verfahren auch auf eine noch viel allgemeinere Definitionsart anwenden lässt.

§ 6. REKURSION NACH MEHREREN VARIABLEN.*

1. Man hat noch die in Nr. 21 des § 1 angegebene Definition

$$dv(0, n) = n; \quad dv(m+1, 0) = m+1$$

$$\begin{aligned} dv(m+1, n+1) &= \overline{\text{sg}(n \dot{-} m)} dv(m \dot{-} n, n+1) + \\ &+ \text{sg}(n \dot{-} m) dv(m+1, n \dot{-} m) \end{aligned}$$

des grössten gemeinsamen Teilers von m und n zu untersuchen, wo zur Berechnung des Funktionswertes an der Stelle $(m+1, n+1)$ nicht nur ein Funktions-

*) PÉTER [5] § 3.

wert mit kleinerem ersten Argument gebraucht wird, sondern auch ein Funktionswert mit unverändertem ersten, aber kleinerem zweiten Argument.

Der einfacheren Schreibweise halber sei

$$\beta(m, n, a, b) = \overline{\text{sg}}(n \dot{-} m) \cdot a + \text{sg}(n \dot{-} m) \cdot b$$

und

$$\gamma(m, n) = m \dot{-} n;$$

so kann die Definition auch in der Form

$$\begin{aligned} dv(0, n) &= n, & dv(m+1, 0) &= m+1 \\ dv(m+1, n+1) &= \beta(m, n, dv(\gamma(m, n), n+1), dv(m+1, \gamma(n, m))) \end{aligned}$$

geschrieben werden, wobei

$$\gamma(m, n) < m+1 \quad \text{und} \quad \gamma(n, m) < n+1$$

gilt. Hier steht neben dem ersten Argument $\gamma(m, n)$, das kleiner als $m+1$ ist, das unveränderte zweite Argument $n+1$; und dies erleichtert die Zurückführung der Definition auf primitive Rekursion und Substitution. Ich werde das aber in den Folgenden nicht ausnutzen, um einen solchen Weg zu zeigen, der auch allgemein gangbar ist.

Die vorliegende Definition ist eine Wertverlaufsrekursion nach beiden Variablen: das auftretende kleinere erste Argument als $m+1$ ist nicht das unmittelbar vorstehende m , und das auftretende kleinere zweite Argument als $n+1$ ist nicht das unmittelbar vorangehende n . Ich verwende auf die beiden Variablen einzeln die Methode, die zur Auflösung der Wertverlaufsrekursion im § 3 eingeführt wurde.

Erstens sei bei gegebenem n die Funktion, welche den Wertevorrat unter $m+1$ charakterisiert

$$\psi_1(m, n) = \prod_{i=0}^m p_i^{dv(i, n)},$$

und so für beliebige a, b und $u \geq a$

$$dv(a, b) = \exp_a(\psi_1(u, b)).$$

Dann ist nach der Definition von $dv(m, n)$ wegen $\gamma(m, n) \leq m$

$$\psi_1(0, n) = p_0^{dv(0, n)} = 2^n$$

$$\psi_1(m+1, 0) = \prod_{i=0}^{m+1} p_i^{dv(i, 0)} = \prod_{i=0}^{m+1} p_i^i,$$

$$\begin{aligned} \psi_1(m+1, n+1) &= \psi_1(m, n+1) \cdot p_{m+1}^{dv(m+1, n+1)} \\ &= \psi_1(m, n+1) \cdot p_{m+1}^{\beta(m, n, dv(\gamma(m, n), n+1), dv(m+1, \gamma(n, m)))} \\ &= \psi_1(m, n+1) \cdot p_{m+1}^{\beta(m, n, \exp_{\gamma(m, n)}(\psi(m, n+1)), \exp_{m+1}(\psi(m+1, \gamma(n, m)))} \end{aligned}$$

Es sei der einfacheren Schreibweise halber

$$\alpha^2(m, n) = \begin{cases} 2^n, & \text{falls } m = 0 \\ \prod_{i=0}^m p_i^i & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\beta'(m, n, a, b) = a \cdot p_{m+1}^{\beta(m, n, \exp_{\gamma(m, n)}(a), \exp_{m+1}(b))},$$

dann sind α' und β' primitiv-rekursive Funktionen, und mit ihrer Hilfe kann die Definition von $\psi_1(m, n)$ auf die Form

$$\psi_1(m, n) = \alpha'(m, n), \text{ falls } m \cdot n = 0$$

$$\psi_1(m+1, n+1) = \beta'(m, n, \psi_1(m, n+1), \psi_1(m+1, \gamma(n, m)))$$

gebracht werden.

2. Jetzt sei bei gegebenem m die Funktion, welche den Wertevorrat von ψ_1 unter $n+1$ charakterisiert:

$$\psi_2(m, n) = \prod_{i=0}^n p_i^{\psi_1(m, i)},$$

so dass für beliebige a, b und $u \geq b$

$$\psi_1(a, b) = \exp_b(\psi_2(a, u))$$

gilt. (Diese Wertverlaufsfunktion würde ich aus Gründen, die zu Beginn der nächsten Nummer erörtert werden, auch dann einführen, wenn die Rekursion nach n keine Wertverlaufrekursion wäre.) Dann ist nach der Definition von $\psi_1(m, n)$, wegen $\gamma(n, m) \leq n$

$$\psi_2(0, n) = \prod_{i=0}^n p_i^{\psi_1(0, i)} = \prod_{i=0}^n p_i^{\alpha'(0, i)},$$

$$\psi_1(m+1, 0) = \alpha'(m+1, 0)$$

$$\psi_2(m+1, 0) = p_0$$

$$\begin{aligned} \psi_2(m+1, n+1) &= \psi_2(m+1, n) \cdot p_{n+1}^{\psi_1(m+1, n+1)} \\ &= \psi_2(m+1, n) \cdot p_{n+1}^{\beta'(m, n, \psi_1(m, n+1), \psi_1(m+1, \gamma(n, m)))} \\ &= \psi_2(m+1, n) \cdot p_{n+1}^{\beta'(m, n, \exp_{n+1}(\psi_2(m, u)), \exp_{\gamma(n, m)}(\psi_2(m+1, n)))}, \end{aligned}$$

wenn nur $u \geq n+1$ ist.

Sei der einfacheren Schreibweise halber

$$\alpha''(m, n) = \begin{cases} \prod_{i=0}^n p_i^{\alpha'(0, i)}, & \text{falls } m = 0 \\ p_0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$\beta''(m, n, a, b) = b \cdot p_{n+1}^{\beta'(m, n, \exp_{n+1}(a), \exp_{\gamma(n, m)}(b))},$$

so sind α'' und β'' primitiv-rekursive Funktionen, und mit ihnen kann die Definition von $\psi_2(m, n)$ in der Form

$$\psi_2(m, n) = \alpha''(m, n), \quad \text{falls } m \cdot n = 0$$

$$\psi_2(m+1, n+1) = \beta''(m, n, \psi_2(m, u), \psi_2(m+1, n))$$

geschrieben werden, wobei $u \geq n+1$ beliebig ist.

3. Hier könnte freilich einfach $n+1$ für u gesetzt werden. Unser Ziel ist aber, die Definition auf eine Rekursion nach einer einzigen Variablen zurückzuführen. Das kann man so erreichen, dass man in n schrittweise rückwärts schreitend den Aufbau von $\psi_2(m+1, n+1)$ aus vorangehenden Funktionswerten wieder abbaut, bis $\psi_2(m+1, 0) = \alpha''(m+1, 0)$ an die Stelle von $\psi_2(m+1, n)$ kommt. Unterdessen kommen aber bei einem jeden Schritt andere Werte in das zweite Argument von $\psi_2(m, \cdot)$; und so kommt man zu einem Ausdruck, der von einer von n abhängigen Anzahl verschiedener $\psi_2(m, \cdot)$ -Werte abhängt. Das kann durch das Einsetzen eines solchen u vermieden werden, das grösser ist, als alle auftretenden zweiten Argumente. (Dies ist der Nutzen der Verwendung einer Wertverlaufsfunktion.)

Der erste Schritt des Abbaues ist: für $n \neq 0$ gilt

$$\psi_2(m+1, n+1) = \beta''(m, n, \psi_2(m, u), \psi_2(m+1, n)) =$$

$$= \beta''(m, n, \psi_2(m, u), \beta''(m, n-1, \psi_2(m, u), \psi_2(m+1, n-1))),$$

wenn nur $u \geq n+1$ und $u \geq n$ ist (das letztere folgt freilich aus dem ersteren). Wegen $n \neq 0$ ist hier $n-1 = n \div 1$. Sei

$$\beta_1(m, n, a, b) = \beta''(m, n, a, \beta''(m, n \div 1, a, b)),$$

so ist β_1 primitiv-rekursiv, und für $n > 0$, $u \geq n+1$

$$\psi_2(m+1, n+1) = \beta_1(m, n, \psi_2(m, n), \psi_2(m+1, n-1)).$$

Angenommen, dass für ein $v < n$ bereits eine primitiv-rekursive Funktion $\beta_v(m, n, a, b)$ gefunden wurde, für welche bei $u \geq n+1$

$$\psi_2(m+1, n+1) = \beta_v(m, n, \psi_2(m, u), \psi_2(m+1, n-v))$$

gilt, so gibt es auch zu $v+1$ eine primitiv-rekursive Funktion von ähnlicher Beschaffenheit. Denn es gilt nach der Annahme und nach der Definition von $\psi_2(m, n)$, da $n-v > 0$ ist, für $u \geq n+1$ (woraus freilich auch $u \geq n-v$ folgt)

$$\psi_2(m+1, n+1) = \beta_v(m, n, \psi_2(m, u), \psi_2(m+1, n-v)) =$$

$$= \beta_v(m, n, \psi_2(m, u), \beta''(m, n-v-1, \psi_2(m, u), \psi_2(m+1, n-v-1))).$$

Wegen $n-v > 0$ ist hier $n-v-1 = n-(v+1) = n \div (v+1)$; wird also

$$\beta_{v+1}(m, n, a, b) = \beta_v(m, n, a, \beta''(m, n \div (v+1), a, b))$$

gesetzt, so ist β_{v+1} eine primitiv-rekursive Funktion, und für $u \geq n+1$ ist

$$\psi_2(m+1, n+1) = \beta_{v+1}(m, n, \psi_2(m, u), \psi_2(m+1, n-(v+1))).$$

Wird daher die Funktion β_v als Funktion des Index v betrachtet, so kann diese aus lauter primitiv-rekursiven Funktionen durch folgende primitive Rekursion definiert werden:

$$\beta_0(m, n, a, b) = \beta''(m, n, a, b)$$

$$\beta_{v+1}(m, n, a, b) = \beta_v(m, n, a, \beta''(m, n \div (v+1), a, b));$$

und es gilt für $v \leq n$

$$\psi_2(m+1, n+1) = \beta_v(m, n, \psi_2(m, u), \psi_2(m+1, n-v)),$$

wenn nur $u \geq n+1$ ist.

Für $v = n$ und $u = n+1$ ergibt sich daraus nach der Definition von $\psi_2(m, n)$ für $m \cdot n = 0$

$$\begin{aligned} \psi_2(m+1, n+1) &= \beta_n(m, n, \psi_2(m, n+1), \psi_2(m+1, 0)) = \\ &= \beta_n(m, n, \psi_2(m, n+1), \alpha''(m+1, 0)). \end{aligned}$$

So kann $\psi_2(m, n)$ auch wie folgt definiert werden:

$$\psi_2(0, n) = \alpha''(0, n)$$

$$\psi_2(m+1, n) = \begin{cases} \alpha''(m+1, 0), & \text{falls } n = 0 \\ \beta_{n-1}(m, n-1, \psi_2(m, n), \alpha''(m+1, 0)) & \text{sonst;} \end{cases}$$

und das ist eine aus primitiv-rekursiven Funktionen aufgebaute primitive Rekursion nach der einzigen Variablen m .

4. Folglich ist $\psi_2(m, n)$ eine primitiv-rekursive Funktion, und so auch die Funktion $\psi_1(m, n)$ (deren Wertevorrat durch $\psi_2(m, n)$ dargestellt wurde): wie am Anfang von Nr. 2 dieses Kapitels hervorgehoben wurde, entsteht ja $\psi_1(m, n)$ durch die folgende Substitution aus ihrer «Wertverlaufsfunktion»:

$$\psi_1(m, n) = \exp_n(\psi_2(m, n)).$$

$\psi_1(m, n)$ selbst ist aber die Wertverlaufsfunktion von $dv(m, n)$; und so kann $dv(m, n)$, wie in Nr. 1 dieses Kapitels hervorgehoben wurde, durch folgende Substitution aus ihr erhalten werden:

$$dv(m, n) = \exp_m(\psi_1(m, n)).$$

Daher ist auch $dv(m, n)$ primitiv-rekursiv; es ist gelungen ihre Rekursion nach beiden Variablen auf gewöhnliche primitive Rekursionen und Substitutionen zurückzuführen.

5. Ähnlich sieht man ein, dass die ebenfalls nach zwei Variablen laufende Rekursion

$$\varphi(0, n) = \alpha_1(n)$$

$$\varphi(m+1, 0) = \alpha_2(m)$$

$$\varphi(m+1, n+1) = \beta(m, n, \varphi(m, \gamma(m, n)), \varphi(m+1, n)),$$

und allgemeiner, die nach k Variablen laufende Rekursion

$$\varphi(0, n_2, \dots, n_k) = \alpha_1(n_2, \dots, n_k)$$

$$\varphi(n_1+1, 0, n_3, \dots, n_k) = \alpha_2(n_1, n_3, \dots, n_k)$$

.....

$$\varphi(n_1+1, \dots, n_{k-1}+1, 0) = \alpha_k(n_1, \dots, n_{k-1})$$

$$\varphi(n_1+1, n_2+1, \dots, n_k+1) = \beta(n_1, n_2, \dots, n_k, \varphi_1, \dots, \varphi_k),$$

wo für $i = 1, 2, \dots, k$

$$\varphi_i = \varphi(n_1 + 1, \dots, n_{i-1} + 1, n_i, \gamma_1^{(i)}(n_1, \dots, n_k), \dots, \gamma_{k-i}^{(i)}(n_1, \dots, n_k))$$

ist, nicht von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinausführt: man hat nur für u — das bis zum Schluss der vorherigen Überlegung unbestimmt gelassen wurde — statt $n + 1$ allgemein einen von gewissen γ -Werten abhängigen Ausdruck einzusetzen.

Statt des langwierigen Beweisverfahrens im vorigen Kapitel hätte ich auch dort die kürzere Methode dieses Kapitels anwenden können; diese liesse sich aber auf die erwähnte Verallgemeinerung im § 10 nicht übertragen.

§ 7. REDUKTIONEN.

1. In den vorherigen Kapiteln hat es sich herausgestellt, dass die Definitionen der gebräuchlichsten Funktionen der elementaren Zahlentheorie auf primitive Rekursionen und Substitutionen zurückgeführt werden können; diese Funktionen lassen sich also von 0 und $n + 1$ ausgehend mit endlich vielen Substitutionen und primitiven Rekursionen der Form

$$\varphi(n, a_1, \dots, a_r) = \alpha(a_1, \dots, a_r)$$

$$\varphi(n + 1, a_1, \dots, a_r) = \beta(n, a_1, \dots, a_r, \varphi(n, a_1, \dots, a_r))$$

aufbauen (wobei die Umbenennung der Variablen und die Einführung von fiktiven Variablen erlaubt ist).

Es erhebt sich die Frage, ob sich die primitive Rekursion nicht noch weiter reduzieren lässt.

Man bemerkt, dass in unserem Rekursionschema auch die Substitution sozusagen eingekleidet ist; die zweite Definitionsgleichung ergibt ja für $n = 0$

$$\varphi(1, a_1, \dots, a_r) = \beta(0, a_1, \dots, a_r, \varphi(0, a_1, \dots, a_r));$$

und daraus ergibt sich mit Verwendung der ersten Definitionsgleichung

$$\varphi(1, a_1, \dots, a_r) = \beta(0, a_1, \dots, a_r, \alpha(a_1, \dots, a_r)).$$

Es kann also in der Funktion $\beta(0, a_1, \dots, a_r, a_{r+1})$ die Funktion $\alpha(a_1, \dots, a_r)$ auch so für a_{r+1} eingesetzt werden, dass mit Verwendung von α und β eine primitive Rekursion aufgeschrieben, und in der damit definierten Funktion $\varphi(n, a_1, \dots, a_r)$ für n die Zahl 1 eingesetzt wird. So kann eine jede Substitution auf das Einsetzen von 1 und auf primitive Rekursionen zurückgeführt werden. Will man z. B. durch Einsetzen der Funktionen $\alpha(a)$ und $\beta(a, b, c)$ in die Funktion $\gamma(d, e)$ die dreistellige Funktion

$$\gamma(\alpha(a), \beta(a, b, c))$$

erhalten, so kann die Substitution auch durch folgende zwei Schritte durchgeführt werden: Zur Substitution von $\beta(a, b, c)$ wird mit den durch Einführung fiktiver Variablen entstehenden Funktionen

$$\beta_1(a, b, c, d) = \beta(a, b, c)$$

und

$$\gamma_1(n, a, b, c, d, e) = \gamma(d, e)$$

die primitive Rekursion

$$\varphi(0, a, b, c, d) = \beta_1(a, b, c, d)$$

$$\varphi(n+1, a, b, c, d) = \gamma_1(n, a, b, c, d, \varphi(n, a, b, c, d))$$

aufgeschrieben; so erhält man durch Einsetzen von 1 für n :

$$\varphi(1, a, b, c, d) = \gamma_1(0, a, b, c, d, \beta_1(a, b, c, d)) = \gamma(d, \beta(a, b, c)) .$$

Dann werden zur Substitution von $a(a)$ wieder durch Hinzunahme fiktiver Variablen die Funktionen

$$\alpha_1(a, b, c) = a(a)$$

$$\gamma_2(n, a, b, c, d) = \varphi(1, a, b, c, d)$$

definiert, und mit deren Hilfe durch primitive Rekursion eine Funktion $\psi(n, a, b, c)$:

$$\psi(0, a, b, c) = \alpha_1(a, b, c)$$

$$\psi(n+1, a, b, c) = \gamma_2(n, a, b, c, \psi(n, a, b, c)) .$$

Wird in $\psi(n, a, b, c)$ für n die Zahl 1 eingesetzt, so erhält man das Ergebnis der gewünschten Substitution:

$$\begin{aligned} \psi(1, a, b, c) &= \gamma_2(0, a, b, c, \alpha_1(a, b, c)) = \varphi(1, a, b, c, \alpha_1(a, b, c)) = \\ &= \gamma(\alpha_1(a, b, c), \beta(a, b, c)) = \gamma(\alpha(a), \beta(a, b, c)) . \end{aligned}$$

2. Die Reduktion aller Substitutionen auf die einfache Substitution von 1 ist uns darum gelungen, weil in das Rekursionschema bereits auch die Substitution eingekleidet war. Andererseits kann das Rekursionschema davon auch gereinigt werden: werden wieder alle Substitutionen zugelassen, so kann man sich auf Rekursionen der Form

$$\psi(0, a_1, \dots, a_{r+1}) = a_{r+1}$$

$$\psi(n+1, a_1, \dots, a_{r+1}) = \gamma(n, a_1, \dots, a_{r+1}, \psi(n, a_1, \dots, a_{r+1}))$$

beschränken. Es ist klar, dass eine beliebige, durch das ursprüngliche Schema

$$\varphi(0, a_1, \dots, a_r) = \alpha(a_1, \dots, a_r)$$

$$\varphi(n+1, a_1, \dots, a_r) = \beta(n, a_1, \dots, a_r, \varphi(n, a_1, \dots, a_r))$$

(α, β primitiv-rekursiv) erzeugte Funktion $\varphi(n, a_1, \dots, a_r)$ durch eine Substitution aus einer mit dem neuen Schema definierten Funktion $\psi(n, a_1, \dots, a_{r+1})$ erhalten werden kann: wird die Funktion γ des neuen Schemas durch Hinzunahme der fiktiven Variablen a_{r+1} aus β erhalten, das heisst, ist

$$\gamma(n, a_1, \dots, a_r, a_{r+1}, b) = \beta(n, a_1, \dots, a_r, b),$$

so gilt für die damit definierte Funktion ψ

$$\varphi(n, a_1, \dots, a_r) = \psi(n, a_1, \dots, a_r, \alpha(a_1, \dots, a_r)) .$$

Das gilt nämlich für $n=0$, denn es ist

$$\varphi(0, a_1, \dots, a_r) = \alpha(a_1, \dots, a_r) = \psi(0, a_1, \dots, a_r, \alpha(a_1, \dots, a_r)) ;$$

und wenn es für ein n bereits gilt, so vererbt sich diese Beschaffenheit auch auf $n+1$, denn es ist nach der Annahme (da für eine fiktive Variable Beliebiges eingesetzt werden kann)

$$\begin{aligned}
\varphi(n+1, a_1, \dots, a_r) &= \beta(n, a_1, \dots, a_r, \varphi(n, a_1, \dots, a_r)) = \\
&= \beta(n, a_1, \dots, a_r, \psi(n, a_1, \dots, a_r, \alpha(a_1, \dots, a_r))) = \\
&= \gamma(n, a_1, \dots, a_r, \alpha(a_1, \dots, a_r), \psi(n, a_1, \dots, a_r, \alpha(a_1, \dots, a_r))) = \\
&= \varphi(n+1, a_1, \dots, a_r, \alpha(a_1, \dots, a_r)) .
\end{aligned}$$

3. Das neue primitive Rekursionschema der vorigen Nummer ist insofern einfacher als das ursprüngliche, dass der Wert der durch das neue Schema definierten Funktion an der Stelle $n=0$ einfach des Argumenten a_{r+1} gleich ist. Diese Vereinfachung ist aber auf Kosten der Vermehrung der Variablenanzahl geschehen. Die Frage liegt an der Hand: könnte eine primitive Rekursion, die eine mehrstellige Funktion definiert, auf die rekursive Definition einer wenigerstelligen Funktion und auf Substitutionen zurückgeführt werden?

Betrachten wir z. B. die Definition

$$\varphi(0, a, b) = a(a, b)$$

$$\varphi(n+1, a, b) = \beta(n, a, b, \varphi(n, a, b))$$

einer dreistelligen Funktion $\varphi(n, a, b)$. Es sollen darin die beiden Parameter a und b durch einen einzigen Parameter ersetzt werden. Das kann durch Zuordnung einer einzigen Zahl zum Zahlenpaar (a, b) leicht geschehen. Wir hatten schon zwei Beispiele für eine solche Zuordnung. In der Wertverlaufsrekursion ebenso, wie in Nr. 2 des § 5 wurde die eindeutige Primfaktorenzerlegung zur Zuordnung einer einzigen Zahl zu mehreren Zahlen benutzt. So könnte auch hier dem Zahlenpaar (a, b) die Zahl

$$n = 2^a \cdot 3^b$$

zugeordnet werden; und davon könnte man die einzelnen Glieder des Paares durch

$$a = \exp_0(n), \quad b = \exp_1(n)$$

zurückbekommen.¹⁰ Und in Nr. 27 des § 1 wurde bei der Anordnung der Zahlenpaare in eine Folge, eine Zahl

$$n = \sigma(a, b)$$

der Zahlenpaar (a, b) zugeordnet; und hier lieferten

$$a = \sigma_1(n), \quad b = \sigma_2(n)$$

die Glieder des zu n gehörigen Paares.

Die Zahlenpaare und die Zahlen können freilich auf vielerlei Weise auch anders einander zugeordnet werden. Es sei in einer solchen Zuordnung die zum Paar (a, b) gehörige Zahl

$$n = \iota(a, b);$$

und die Glieder des zu n gehörigen Paares seien

$$a = \kappa(n), \quad b = \lambda(n);$$

wobei ι, κ, λ primitiv-rekursive Funktionen sind. Ich lasse diese Funktionen einstweilen noch unbestimmt, bloss soviel vorbehalten, dass

$$\kappa(\iota(a, b)) = a \quad \text{und} \quad \lambda(\iota(a, b)) = b$$

seien.¹¹

¹⁰) PÉTER [2] Nr. 11 und [4] Nr. 17. Mit dieser Methode werden in PÉTER [3] §1 die Parameter ganz ausgeschaltet; dies geschieht auf Kosten der Hinzunahme von neuen Ausgangsfunktionen.

¹¹) Von hier an wird im ganzen Kapitel das Verfahren von ROBINSON [1] verfolgt.

Nun kann, statt der vorhin definierten dreistelligen Funktion $\varphi(n, a, b)$, die zweistellige Funktion

$$\psi(n, a) = \varphi(n, \kappa(a), \lambda(a))$$

folgendermassen eingeführt werden:

$$\psi(0, a) = \varphi(0, \kappa(a), \lambda(a)) = \alpha(\kappa(a), \lambda(a)),$$

und

$$\begin{aligned} \varphi(n+1, a) &= \varphi(n+1, \kappa(a), \lambda(a)) = \beta(n, \kappa(a), \lambda(a), \varphi(n, \kappa(a), \lambda(a))) = \\ &= \beta(n, \kappa(a), \lambda(a), \psi(n, a)). \end{aligned}$$

Die Definition

$$\psi(0, a) = \alpha(\kappa(0), \lambda(0))$$

$$\psi(n+1, a) = \beta(n, \kappa(a), \lambda(a), \psi(n, a))$$

ist eine primitive Rekursion, die aus lauter primitiv-rekursiven Funktionen aufgebaut wird. Aus der so erhaltenen zweistelligen primitiv-rekursiven Funktion $\psi(n, a)$ kann man, nach dem Vorbehalt über ι , κ und λ die Funktion $\varphi(n, a, b)$ durch die Substitution

$$\begin{aligned} \varphi(n, a, b) &= \varphi(n, \kappa(\iota(a, b)), \lambda(\iota(a, b))) = \\ &= \psi(n, \iota(a, b)) \end{aligned}$$

erhalten.

Mit derselben Methode kann eine primitive Rekursion, die eine beliebig vielstellige Funktion $\varphi(n, a_1, \dots, a_r)$ definiert, schrittweise auf eine primitive Rekursion, die eine Funktion mit einem einzigen Parameter definiert, und auf Substitutionen zurückgeführt werden: es werden erst zwei Parameter zu einem einzigen zusammengezogen, dann wieder zwei, usw. Die dabei verwendeten Funktionen ι , κ , λ sind ein- bzw. zweistellig. Werden diese so gewählt (es wird sich herausstellen, dass dies möglich ist), dass zu ihrem Aufbau aus 0 und $n+1$ bloss Rekursionen, die höchstens zweistellige Funktionen definieren, zu verwenden sind, so kommt man auf das Ergebnis, dass alle primitiv-rekursive Funktionen von 0 und $n+1$ ausgehend durch endlich viele Substitutionen und primitive Rekursionen der Form

$$\varphi(0, a) = \alpha(a)$$

$$\varphi(n+1, a) = \beta(n, a, \varphi(n, a))$$

aufgebaut werden können.

Einstweilen sollen aber noch die Funktionen ι , κ , λ unbestimmt bleiben. Wählt man diese geeignet, so gelingt sogar das Zusammenziehen der im neuen Schema noch hintergebliebenen zwei Variablen zu einem. Das geht nicht ganz einfach, da eine von diesen kein Parameter, sondern die Rekursionsvariable selbst ist.

4. Erst soll die dreistellige Funktion β , die im neuen Schema auftritt, durch eine zweistellige ersetzt werden. Man kann zeigen, dass es genügt, primitive Rekursionen der Form

$$\varphi_1(0, a) = \alpha_1(a)$$

$$\varphi_1(n+1, a) = \beta_1(n, \varphi_1(n, a))$$

zuzulassen. Wird nämlich die dem Paar aus a und aus einer durch das Schema zum Schluss der vorigen Nummer definierten beliebigen Funktion $\varphi(n, a)$ zugeordnete Zahl $\iota(a, \varphi(n, a))$, als Funktion von n und a , mit $\varphi_1(n, a)$ bezeichnet:

$$\varphi_1(n, a) = \iota(a, \varphi(n, a)),$$

so kann man daraus, nach dem Vorbehalt über ι , κ und λ , die Glieder des Paares durch

$$a = \kappa(\varphi_1(n, a)) \quad \text{und} \quad \varphi(n, a) = \lambda(\varphi_1(n, a))$$

zurückbekommen. So kann in $\beta(n, a, \varphi(n, a))$ sowohl an die Stelle von a , als auch an die Stelle von $\varphi(n, a)$ eine primitiv-rekursive Funktion von $\varphi_1(n, a)$ geschrieben werden; und $\varphi_1(n, a)$ lässt sich folgendermassen definieren:

$$\varphi_1(0, a) = \iota(a, \varphi(0, a)) = \iota(a, \alpha(a))$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_1(n+1, a) &= \iota(a, \varphi(n+1, a)) = \iota(a, \beta(n, a, \varphi(n, a))) = \\ &= \iota(\kappa(\iota(a, \varphi(n, a))), \beta(n, \kappa(\iota(a, \varphi(n, a))), \lambda(\iota(a, \varphi(n, a)))) = \\ &= \iota(\kappa(\varphi_1(n, a)), \beta(n, \kappa(\varphi_1(n, a)), \lambda(\varphi_1(n, a)))) . \end{aligned}$$

Wird daher

$$\alpha_1(a) = \iota(a, \alpha(a))$$

$$\beta_1(n, a) = \iota(\kappa(a), \beta(n, \kappa(a), \lambda(a)))$$

gesetzt, so sind α_1 und β_1 primitiv-rekursive Funktionen, und es gilt tatsächlich

$$\varphi_1(0, a) = \alpha_1(a)$$

$$\varphi_1(n+1, a) = \beta_1(n, \varphi_1(n, a)) .$$

5. Dieses Schema wird noch einfacher, wenn auf die rechte Seite der ersten Gleichung einfach die Variable a geschrieben wird. Und man kann sich tatsächlich auf primitive Rekursionen von dieser Form beschränken (und zwar jetzt, da β_1 nicht von a abhängt, ohne Vermehrung der Anzahl der Variablen); ist nämlich

$$\varphi_2(0, a) = a$$

$$\varphi_2(n+1, a) = \beta_1(n, \varphi_2(n, a)) ,$$

so ergibt die Funktion $\varphi_1(n, a)$ aus der so definierten Funktion $\varphi_2(n, a)$ die Substitution

$$\varphi_1(n, a) = \varphi_2(n, \alpha_1(a)) .$$

Es ist ja

$$\varphi_1(0, a) = \alpha_1(a) = \varphi_2(0, \alpha_1(a)) ;$$

und gilt die Behauptung bereits für ein n , so vererbt sich diese Beschaffenheit auch auf $n+1$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(n+1, a) &= \beta_1(n, \varphi_1(n, a)) = \beta_1(n, \varphi_2(n, \alpha_1(a))) = \\ &= \varphi_2(n+1, \alpha_1(a)) . \end{aligned}$$

6. Nun kann man aus dem einfachen Schema der vorigen Nummer den Parameter a vollständig ausschalten. Das gelingt auch so, dass auch das Zahlenpaar (n, a) durch eine einzige Zahl vertreten werden kann, wenn nur die Funktionen κ und λ geeignet gewählt werden.

Dem Zweck entsprechend wird zu einer beliebigen primitiv-rekursiven Funktion $\varphi_2(n, a)$, welche durch das Schema der vorigen Nummer definiert wurde, die Definition von

$$\psi(n) = \varphi_2(\kappa(n), \lambda(n))$$

angegeben. Es ist

$$\psi(0) = \varphi_2(\kappa(0), \lambda(0)),$$

und so wird die erste Definitionsgleichung von $\psi(n)$ ganz einfach, wenn

$$\kappa(0) = \lambda(0) = 0$$

ist; denn in diesem Fall ist nach der ersten Definitionsgleichung von φ_2

$$\psi(0) = \varphi_2(0, 0) = 0.$$

Ferner ist nach der zweiten Definitionsgleichung von φ_2

$$\psi(n+1) = \varphi_2(\kappa(n+1), \lambda(n+1)) = \begin{cases} \lambda(n+1), & \text{falls } \kappa(n+1) = 0 \\ \beta_1(\kappa(n+1)-1, \varphi_2(\kappa(n+1)-1, \lambda(n+1))) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da wir zur Definition von $\psi(n)$ eine primitive Rekursion erhalten wollen, werden wir die Funktionen κ und λ so wählen, dass

$$\text{für } \kappa(n+1) \neq 0$$

$$\kappa(n+1) - 1 = \kappa(n) \quad \text{und} \quad \lambda(n+1) = \lambda(n)$$

sei. In diesem Fall ist nämlich für $\kappa(n+1) \neq 0$

$$\varphi_2(\kappa(n+1) - 1, \lambda(n+1)) = \varphi_2(\kappa(n), \lambda(n)) = \psi(n);$$

wird also

$$\beta_2(n, a) = \begin{cases} \lambda(n+1), & \text{falls } \kappa(n+1) = 0 \\ \beta_1(\kappa(n+1) - 1, a) & \text{sonst} \end{cases}$$

gesetzt, so ist $\beta_2(n, a)$ eine primitiv-rekursive Funktion, und die Definition von ψ lautet:

$$\psi(0) = 0$$

$$\psi(n+1) = \beta_2(n, \psi(n)).$$

In diesem Schema treten tatsächlich keine Parameter auf; und $\varphi_2(n, a)$ kann nach dem Vorbehalt über die Funktionen ι , κ und λ durch die Substitution

$$\begin{aligned} \varphi_2(n, a) &= \varphi_2(\kappa(\iota(n, a)), \lambda(\iota(n, a))) = \\ &= \psi(\iota(n, a)) \end{aligned}$$

definiert werden.

7. Es sollen endlich die Funktionen ι , κ und λ , die den Forderungen

$$\kappa(\iota(a, b)) = a, \quad \lambda(\iota(a, b)) = b, \quad \kappa(0) = \lambda(0) = 0,$$

$$\kappa(n+1) - 1 = \kappa(n) \quad \text{und} \quad \lambda(n+1) = \lambda(n) \quad \text{für } \kappa(n+1) \neq 0$$

genügen sollen, definiert werden.

Wenn man unter den bisher definierten Funktionen solche sucht, die der letzten Forderung genügen, so bemerkt man, dass gewisse Funktionen, die mit der Quadratzahl-Beschaffenheit von $n+1$ zusammenhängen, zum Zweck

geeignet sind. Ist $n + 1$ keine Quadratzahl, so ist $[\sqrt{n+1}] = [\sqrt{n}]$, und die Abweichung von n von der nächsten nicht-grösseren Quadratzahl, $\text{quadres}(n)$, ist eben um 1 kleiner als $\text{quadres}(n+1)$; denn in diesem Fall ist

$$\begin{aligned} \text{quadres}(n) &= n \div [\sqrt{n}]^2 = n - [\sqrt{n}]^2 = n - [\sqrt{n+1}]^2 = \\ &= n + 1 - [\sqrt{n+1}]^2 - 1 = (n+1) \div [\sqrt{n+1}]^2 - 1 = \\ &= \text{quadres}(n+1) - 1 . \end{aligned}$$

Dass $n + 1$ keine Quadratzahl ist, kann eben durch

$$\text{quadres}(n+1) \neq 0$$

charakterisiert werden. Wird also $\text{quadres}(n)$ für $\varkappa(n)$ und irgendein nur von $[\sqrt{n}]$ abhängiger Ausdruck für $\lambda(n)$ gewählt, so gilt für $\varkappa(n+1) \neq 0$ in der Tat

$$\varkappa(n+1) - 1 = \varkappa(n) \quad \text{und} \quad \lambda(n+1) = \lambda(n) .$$

Wenn man die Funktion $\iota(a, b)$ folgendermassen bestimmt:

$$\iota(a, b) = (a + b)^2 + b^2 + a ,$$

so ist die Abweichung von $\iota(a, b)$ von der nächsten nicht-grösseren Quadratzahl eben a (da $(a + b)^2 + b^2 + 1)^2 = (a + b)^2 + b^2 + 2(a + b)^2 + 2b + 1 > (a + b)^2 + b^2 + a$ gilt):

$$a = \text{quadres}(\iota(a, b)) = \varkappa(\iota(a, b)) ;$$

und b ist eben die Abweichung von $[\sqrt{\iota(a, b)}]$ von der nächsten nicht-grösseren Quadratzahl (es ist ja schon

$$(a + b + 1)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b) + 1 > (a + b)^2 + b^2 ,$$

und so, wenn

$$\lambda(n) = \text{quadres}([\sqrt{n}])$$

gesetzt wird,

$$b = \text{quadres}([\sqrt{\iota(a, b)}]) = \lambda(\iota(a, b)) .$$

Ferner ist auch klar, dass

$\varkappa(0) = \text{quadres}(0) = 0$ und $\lambda(0) = \text{quadres}([\sqrt{0}]) = \text{quadres}(0) = 0$ ist; ι , \varkappa und λ sind also bei der Wahl

$$\begin{aligned} \iota(a, b) &= (a + b)^2 + b^2 + a , \\ \varkappa(n) &= \text{quadres}(n) \quad \text{und} \quad \lambda(n) = \text{quadres}([\sqrt{n}]) \end{aligned}$$

solche primitiv-rekursive Funktionen, die allen gestellten Forderungen genügen. In der Tabelle zum Schluss des § 2 kann man nachsehen, dass im Aufbau dieser Funktionen aus 0 und $n + 1$ bloss die höchstens zweistelligen Funktionen

$$(A_1) \quad a + n, \quad n \cdot a, \quad n^2, \quad a \div n, \quad \text{sg}(n), \quad \overline{\text{sg}}(n), \quad [\sqrt{n}]$$

zu verwenden sind. Daher kann das Ergebnis zum Schluss der vorigen Nummer so formuliert werden, dass alle primitiv-rekursiven Funktionen mit endlich vielen Substitutionen und Rekursionen der Form

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ \varphi(n+1) &= \beta(n, \varphi(n)) \end{aligned}$$

aufgebaut werden können, wenn man zu den Ausgangsfunktionen 0 und $n + 1$ die vorhin aufgezählten Funktionen hinzunimmt.

8. Diese einfache Rekursion lässt sich sogar noch weiter reduzieren, wenn man die in Nr. 4 dieses Kapitels gebrauchte Idee noch einmal verwendet: man kann die zweistellige Funktion $\beta(n, a)$, die im Schema auftritt, durch eine einstellige Funktion $\beta(a)$ ersetzen.

Es sei

$$\varphi_1(n) = \iota(n, \varphi(n));$$

dann können davon die Glieder des Paares $(n, \varphi(n))$ durch

$$n = \kappa(\varphi_1(n)) \quad \text{und} \quad \varphi(n) = \lambda(\varphi_1(n))$$

erhalten werden.

So kann $\varphi_1(n)$ folgendermassen definiert werden:

$$\varphi_1(0) = \iota(0, \varphi(0)) = \iota(0, 0) = 0$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_1(n+1) &= \iota(n+1, \varphi(n+1)) = \iota(n+1, \beta(n, \varphi(n))) = \\ &= \iota(\kappa(\varphi_1(n)) + 1, \beta(\kappa(\varphi_1(n)), \lambda(\varphi_1(n)))) . \end{aligned}$$

Wird also die einstellige Funktion

$$\beta(a) = \iota(\kappa(a) + 1, \beta(\kappa(a), \lambda(a)))$$

gesetzt, so lautet die Definition von $\varphi_1(n)$:

$$\varphi_1(0) = 0$$

$$\varphi_1(n+1) = \beta(\varphi_1(n)) .$$

Und man gewinnt $\varphi(n)$ aus $\varphi_1(n)$ durch die Substitution:

$$\varphi(n) = \lambda(\varphi_1(n)) .$$

Geht man daher von 0, $n+1$ und von den Funktionen (A_1) aus, so kann eine jede primitiv-rekursive Funktion durch endlich viele Substitutionen und Rekursionen der Form

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi(n+1) = \beta(\varphi(n))$$

definiert werden.

Diese Rekursion ist eigentlich die Iteration der Funktion $\beta(a)$ an der Stelle $a=0$:

$$\varphi(0) = 0,$$

$$\varphi(1) = \beta(\varphi(0)) = \beta(0) ,$$

$$\varphi(2) = \beta(\varphi(1)) = \beta(\beta(0)) ,$$

$$\varphi(3) = \beta(\varphi(2)) = \beta(\beta(\beta(0))) ,$$

.....

Wird also die n -te Iteration der Funktion $\beta(a)$ an der Stelle a mit $\beta^n(a)$ bezeichnet, so ist

$$\varphi(n) = \beta^n(0) .$$

9. Es ist in die Augen springend, dass zu viele neue Ausgangsfunktionen aufgenommen wurden. Z. B. lässt sich $sg(n)$ durch eine Rekursion der erlaubten Form

$$sg(0) = 0$$

$$sg(n+1) = 1$$

definieren; aus dieser Funktion und aus $a \dot{-} n$ ergibt sich $\overline{\text{sg}}(n)$ durch die Substitution

$$\overline{\text{sg}}(n) = 1 \dot{-} \text{sg}(n).$$

n^2 kann freilich aus $n.a$ durch Substitution hergeleitet werden; aber auch der verkehrte Weg ist gangbar: die Definition von $n.a$ mit Verwendung von n^2 ; es ist ja

$$n.a = \left[\frac{(a + n^2 \dot{-} a^2) \dot{-} n^2}{2} \right].$$

Darin kommt zwar auch die Funktion $\left[\frac{n}{2} \right]$ zur Verwendung, aber diese ist jedenfalls eine einstellige Funktion; und durch sie wird die zweistellige Funktion $n.a$ überflüssig.

Ich werde zeigen: legt man bloss die Funktionen

$$(A_2) \quad n + 1, \quad a + n, \quad \text{quadres}(n)$$

zu Grunde, so können sämtliche primitiv-rekursive Funktionen durch Substitutionen und durch Iterationen einstelliger Funktionen an der Stelle 0 aufgebaut werden.

Die Konstante 0 muss deshalb nicht unter die Ausgangsfunktionen aufgenommen werden, weil man sie durch erlaubte Iteration definieren kann. Erstens wird $\varphi(n) = n$ durch die erlaubte Iteration

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ \varphi(n+1) &= \varphi(n) + 1 \end{aligned}$$

definiert; dann ist die 0 die beliebigvielte Iteration von $\varphi(n) = n$ an der Stelle 0:

$$0 = \varphi^n(0).$$

Da es gelungen ist, $\text{sg}(n)$ durch eine erlaubte Iteration zu definieren, und da $n.a$ nach der vorherigen Bemerkung durch Substitution aus den Funktionen

$a + n$, $a \dot{-} n$, $\left[\frac{n}{2} \right]$ und n^2 definiert werden kann, so bleibt nur noch übrig zu zeigen, dass man die Funktionen

$$a \dot{-} n, \quad \left[\frac{n}{2} \right], \quad n^2 \quad \text{und} \quad [\sqrt{n}]$$

auf die erlaubte Art aus den neuen Ausgangsfunktionen aufbauen kann, wobei man auch $\text{sg}(n)$ verwenden darf.

10. $a \dot{-} n$ brauchen wir eigentlich gar nicht; bloss eine beliebige Funktion, die für $a \geq n$ mit $a - n$ gleich ist (in diesem Kapitel und in der Tabelle zum Schlusse des § 2 kann man nachsehen, dass im Aufbau der Funktionen, die zur Definition von ι , \varkappa und λ verwendet wurden, $a \dot{-} n$ bloss im Fall $a \geq n$ benutzt wurde). Und eine solche Funktion kann man z. B. so erhalten, dass man zur Quadratzahl

$$(a + n + 1)^2 = (a + n)^2 + 2a + 2n + 1$$

$a - n$ addiert, und dann die Abweichung der entstandenen Zahl

$$(a + n)^2 + 3a + n + 1$$

von der nächsten nicht-grösseren Quadratzahl nimmt: für $a \geq n$ ergibt

$$a \div n = \text{quadres } ((a + n)^2 + 3a + n + 1)$$

eben $a - n$. Da $3a = a + a + a$ ist, so wurde $a \div n$ auf erlaubte Weise aufgebaut. Auch das ist klar, dass $a \div n$ dann und nur dann 0 ist, wenn $a = n$. (Für $a < n$ ist ja $a \div n = 3a + n + 1$, da in diesem Fall $(a + n + 1)^2 = (a + n)^2 + 2a + 2n + 1 > (a + n)^2 + 3a + n + 1$ gilt.)

Da $1 \geq \overline{\text{sg}}(n)$, und $\overline{\text{sg}}(n) = 1 - \text{sg}(n)$ ist, so kann $\overline{\text{sg}}(n)$ auf erlaubte Weise durch

$$\overline{\text{sg}}(n) = 1 \div \text{sg}(n)$$

definiert werden.

11. Da die Funktion $\left[\frac{n}{2} \right]$ der Reihe nach die Werte

$$0, 0, 1, 1, 2, 2, \dots$$

annimmt, hat man zu ihrer Definition eine derartige Funktion zu verwenden, die sich auf je zwei aufeinander folgenden Stellen ähnlich benimmt, dann aber einen »Sprung« macht. Man kann auch durch erlaubte Iteration leicht eine Funktion definieren, welche auf je zwei aufeinander folgenden Stellen sich immer wiederholende Werte annimmt: wenn man die Funktion $\overline{\text{sg}}(n)$ iteriert, die ja auf erlaubte Weise definiert wurde, so nimmt die durch die Iteration

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi(n+1) = \overline{\text{sg}}(\varphi(n))$$

definierte Funktion der Reihe nach die Werte

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

an. Und die mit Verwendung von diesem $\varphi(n)$ durch

$$\psi(0) = 0$$

$$\psi(n+1) = \psi(n) + \varphi(n)$$

definierte Funktion wird schon die gewünschten Werte

$$0, 0, 1, 1, 2, 2, \dots$$

annehmen. Die Definition von $\psi(n)$ ist aber keine Iteration.

Da hilft der folgende Umweg: es wird eine Funktion definiert, die an der Stelle 0 den Wert 0, und dann die Werte

$$1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, \dots$$

annimmt. Wird aus bereits zugelassenen Funktionen durch Substitution

$$\beta(a) = \overline{\text{sg}}(a) + 2\overline{\text{sg}}(a \div 1)$$

definiert, so ist

$$\beta(a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a = 0 \\ 2, & \text{,, } a = 1 \\ 0, & \text{,, } a > 1 \end{cases}$$

und so sind die der Reihe nach angenommenen Werte der durch die erlaubte Iteration

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi(n+1) = \beta(\varphi(n))$$

definierten Funktion eben die vorher aufgezählten Zahlen. Wird jetzt durch erlaubte Iteration der Funktion $a+1+\varphi(a)$, also durch

$$\psi(0) = 0$$

$$\psi(n+1) = \psi(n) + 1 + \varphi(\psi(n))$$

eine Funktion $\psi(n)$ gebildet, so addiert das Glied φ in der Definition zu den von 0 an sich aufbauenden Werten von $\psi(n)$ stets 0 oder 1: den Wert 2 niemals, diese Möglichkeit wird immer übersprungen. Wenn nämlich $\varphi(\psi(n)) = 0$ ist, so ist

$$\psi(n+1) = \psi(n) + 1;$$

in solchen Fällen ist

$$\varphi(\psi(n+1)) = \varphi(\psi(n) + 1) = 1$$

(da in der Folge der Werte von φ auf 0 der Wert 1 folgt); es ist daher $\psi(n+2) = \psi(n+1) + 2$ und so

$$\varphi(\psi(n+2)) = \varphi(\psi(n+1) + 2) = 0$$

(da in der Folge der Werte von φ um zwei Stellen nach 1 der Wert 0 folgt).

Die Funktion $\varphi(n)$ nimmt für $n=0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ der Reihe nach die Werte

$$0, 1, 3, 4, 6, 7, \dots$$

an. In dieser Folge kommen immer zwei unmittelbar aufeinander folgende Zahlen nacheinander, dann folgt ein Sprung um 1. Wird der Reihe nach 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... abgezogen, so erhält man die gewünschte Folge:

$$0, 0, 1, 1, 2, 2, \dots$$

Es ist daher

$$\left[\frac{n}{2} \right] = \psi(n) \div n.$$

12. Da

$$(n+1)^2 = (n^2 + 2n) + 1$$

ist, so genügt es zur Definition von n^2 die Funktion

$$\varphi(n) = n + 2 \left[\sqrt{n} \right]$$

zu definieren; daraus ergibt sich ja n^2 durch die erlaubte Iteration

$$0^2 = 0$$

$$(n+1)^2 = \varphi(n^2) + 1.$$

Zur Definition von dieser Funktion $\varphi(n)$ bedenke man, dass

$$\varphi(n+1) = n + 2 \left[\sqrt{n+1} \right] + 1$$

und hier

$$\left[\sqrt{n+1} \right] = \begin{cases} \left[\sqrt{n} \right] + 1 & \text{ist, falls } n+1 \text{ eine Quadratzahl ist, und} \\ \left[\sqrt{n} \right] & \text{sonst;} \end{cases}$$

so dass

$\varphi(n+1) = n + 2[\sqrt{n}] + 2 \text{quad}(n+1) + 1 = \varphi(n) + 2 \text{quad}(n+1) + 1$
gilt, wobei

$$\text{quad}(n+1) = \overline{\text{sg}}(\text{quadres}(n+1))$$

eine auf erlaubte Weise definierte Funktion ist.

Damit man zu einer Iteration kommt, hat man auch die Quadratzahl-Beschaffenheit von $n+1$ durch $\varphi(n)$ auszudrücken. $n+1$ ist dann und nur dann eine Quadratzahl, wenn n in der Form

$$n = m^2 + 2m,$$

und somit $\varphi(n) = n + 2[\sqrt{n}]$ in der Form

$$\varphi(n) = m^2 + 2m + 2m = m^2 + 4m$$

geschrieben werden kann (zur Umkehrung sieht man nämlich leicht ein, dass man aus $\varphi(n) = n + 2[\sqrt{n}] = m^2 + 4m$ auf $m^2 \leq n < (m+1)^2$, also auf $[\sqrt{n}] = m$ schliessen kann; daraus folgt aber $n + 2m = m^2 + 4m$, und so $n = m^2 + 2m$); das ist aber gleichbedeutend damit, dass

$$\varphi(n) + 4$$

eine Quadratzahl ist. So ist

$$\text{quad}(n+1) = \text{quad}(\varphi(n) + 4),$$

und daher lässt sich $\varphi(n)$ durch folgende erlaubte Iteration definieren:

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi(n+1) = \varphi(n) + 2 \text{quad}(\varphi(n) + 4) + 1.$$

13. Endlich lässt sich $[\sqrt{n}]$ mit Verwendung der in der vorigen Nummer definierten Funktion

$$\varphi(n) = n + 2[\sqrt{n}]$$

durch folgende Substitution definieren:

$$[\sqrt{n}] = \left[\frac{\varphi(n) \div n}{2} \right].$$

14. $a \div n$, aber auch die zur Ausgangsfunktion genommene Funktion $a + n$ lässt sich auch durch $|a - n|$ ersetzen. Denn gelingt uns auf erlaubte Weise, aber statt $a + n$ die Funktion $|a - n|$ als Grundfunktion genommen, eine solche Funktion $\varphi(n, a)$ zu definieren, für welche

$$\varphi(n, a) \geq a + n$$

gilt, so ist

$$a + n = \varphi(n, a) - ((\varphi(n, a) - a) - n),$$

also

$$a + n = |\varphi(n, a) - | \varphi(n, a) - a | - n|.$$

Und eine geeignete Funktion $\varphi(n, a)$ kann z. B. folgendermassen definiert werden: $2n$ kann auch ohne Verwendung der Summe, durch die Iteration

$$2 \cdot 0 = 0$$

$$2(n+1) = (2n+1) + 1$$

definiert werden ($n + 1$ gehört auch jetzt zu den Ausgangsfunktionen). Dann kann eine Summe als ein Faktor der Differenz zweier Potenzen mit geraden Exponenten erhalten werden. Erst kann man $2^n - 1$ durch die erlaubte Iteration

$$2^0 - 1 = 0$$

$$2^{n+1} - 1 = 2(2^n - 1) + 1$$

definieren. Samt $2^n - 1$ ist freilich auch $2^n = (2^n - 1) + 1$ eine zugelassene Funktion. Nun sieht man, dass

$$\varphi(n, a) = |2^{2^a} - 2^{2^{n+2}}| = |2^{2 \cdot 2^a} - 2^{(2 \cdot 2^{n+1}) + 1}|$$

aus zugelassenen Funktionen durch Substitution entsteht, und wegen

$$|2^{2^a} - 2^{2^{n+1}}| \neq 0 \text{ ist}$$

$$\varphi(n, a) = |2^{2^a} - 2^{2^{n+1}}|. (2^{2^a} + 2^{2^{n+1}}) \geq 2^{2^a} + 2^{2^{n+1}} > a + n.$$

Wird die Ausgangsfunktion $a + n$ durch $|a - n|$ ersetzt, so kann die Ausgangsfunktion $\text{quadres}(n)$ durch $\text{quad}(n)$ ersetzt werden. Man sieht nämlich aus den beiden vorherigen Nummern, dass in der Definition von n^2 und $[\sqrt{n}]$ nicht $\text{quadres}(n)$, sondern eben $\text{quad}(n)$ eine Rolle hat; und mit Verwendung von $[\sqrt{n}]$ kann $\text{quadres}(n)$ durch

$$\text{quadres}(n) = |n - [\sqrt{n}]^2|$$

definiert werden.

15. Aus den vorherigen folgt, dass man von den Funktionen

$$(A_2) \quad n + 1, \quad a + n, \quad \text{quadres}(n)$$

oder von den Funktionen

$$(A_3) \quad n + 1, \quad |a - n|, \quad \text{quad}(n)$$

ausgehend sämtliche primitiv-rekursive Funktionen durch endlich viele Substitutionen und Iterationen der Form $\beta^n(0)$, ausführlicher der Form

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi(n + 1) = \beta(\varphi(n))$$

aufbauen kann.

Nehmen wir jetzt an, dass wir uns erst auf die Definition einstelliger Funktionen beschränken. Danach können sämtliche beliebigviestellige primitiv-rekursive Funktionen aus einstelligen primitiv-rekursiven Funktionen, und aus der einzigen zweistelligen Funktion $a + n$ mit blosser Verwendung von Substitutionen aufgebaut werden.

Man sieht ja, wenn man wieder die in diesem Kapitel eingeführte Funktionen ι , \varkappa und λ verwendet, dass samt der zweistelligen Funktion $\varphi(a, b)$ auch die einstellige Funktion

$$\psi(n) = \varphi(\varkappa(n), \lambda(n))$$

primitiv-rekursiv ist; und daraus erhält man $\varphi(a, b)$ durch folgende Substitution:

$$\varphi(a, b) = \varphi(\varkappa(\iota(a, b)), \lambda(\iota(a, b))) = \psi(\iota(a, b)).$$

Bloss zu diesem Zweck hätte man die Funktion $\iota(a, b)$ auch einfacher wie bisher definieren können (zum Beispiel als $(a + b)^2 + a$); aber auch die bisher angewandte Funktion

$$\iota(a, b) = (a + b)^2 + b^2 + a$$

wird aus $a + n$ und aus der einstelligen Funktion n^2 durch Substitutionen aufgebaut.

Von einer mehrstelligen primitiv-rekursiven Funktion kann auf dieselbe Art, schrittweise immer je zwei Variablen zusammenfassend, gezeigt werden, dass sie aus $a + n$ und aus einstelligen primitiv-rekursiven Funktionen aufgebaut werden kann.

16. Man könnte noch glauben, dass es unter den einstelligen primitiv-rekursiven Funktionen solche gibt, deren Aufbau auch der Definition von mehrstelligen Funktionen bedarf. Das ist aber nicht der Fall. *Die erlaubte Iteration erzeugt aus einer einstelligen Funktion wieder eine einstellige: und will man bloss einstellige Funktionen erhalten, so hat man auch durch Substitution bloss einstellige Funktionen zu definieren.*

Ist man zum Beispiel durch folgenden Umweg zur einstelligen Funktion $\varphi(n)$ gelangt:

$$\psi(a, b) = \gamma(\alpha(a), \beta(a, b)),$$

und

$$\varphi(n) = \psi(n, n),$$

so kann man statt $\psi(a, b)$ zu definieren, erst durch Substitution die einstellige Funktion

$$\beta_1(n) = \beta(n, n),$$

dann durch Substitution von $\alpha(n)$ und von dieser Funktion die ebenfalls einstellige Funktion

$$\varphi(n) = \gamma(\alpha(n), \beta_1(n))$$

bilden (die Umbenennung der Variablen ist freilich erlaubt).

Unter den Ausgangsfunktionen (A_2) oder (A_3) gibt es eine einzige zwei-stellige Funktion: $a + n$ bzw. $|a - n|$. Macht man also keine Umwege, so kann als Substitution nichts anderes in Frage kommen, als dass aus einstelligen Funktionen $\alpha(n)$ und $\beta(n)$ eine der ebenfalls einstelligen Funktionen

$\beta(\alpha(n))$ oder $\alpha(n) + \beta(n)$ bzw. $|\alpha(n) - \beta(n)|$ gebildet wird.

Geht man also von den Ausgangsfunktionen

$$(A_4) \quad n + 1 \text{ und } \text{quadres}(n)$$

bzw.

$$(A_5) \quad n + 1 \text{ und } \text{quad}(n)$$

aus, so können sämtliche einstelligen primitiv-rekursiven Funktionen durch endlich vieler Verwendung der folgenden Definitionsschemata aufgebaut werden:

$$\varphi(n) = \alpha(n) + \beta(n), \quad \varphi(n) = \beta(\alpha(n)), \quad \varphi(n) = \beta^n(0),$$

bzw.

$$\varphi(n) = |\alpha(n) - \beta(n)|, \quad \varphi(n) = \beta(\alpha(n)), \quad \varphi(n) = \beta^n(0);$$

wobei α und β schon früher definierte Funktionen sind, und $\varphi(n) = \beta^n(0)$ ausführlicher die Definition

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 0 \\ \varphi(n+1) &= \beta(\varphi(n))\end{aligned}$$

bedeutet.

§ 8. ELEMENTARE FUNKTIONEN.

1. Im vorigen Kapitel ist es gelungen, die primitive Rekursion auf ihren einfachsten Spezialfall: auf die Iteration zurückzuführen. Es erhebt sich die Frage, ob man die Rekursion nicht vollkommen ausschalten kann. Man könnte sich ja vorstellen, dass die primitiv-rekursiven Funktionen einfach durch Anwendung der vier Spezies aufgebaut werden können; wobei man sich freilich auf »arithmetische« Subtraktion und Division beschränkt, die immer auf nicht-negative ganze Ergebnisse führen.

Es können in der Zahlentheorie solche Funktionen »elementar« genannt werden, die aus nicht-negativen Zahlen und aus Variablen durch endlich viele Additionen, arithmetische Subtraktionen — darunter wird hier die Bildung von $|a - b|$ verstanden — Multiplikationen, arithmetische Divisionen der Form $\left[\frac{a}{b}\right]$ (für $b \neq 0$), Summen- und Produktbildungen zustande kommen. Von den Zahlen genügt es die 1 zu Grunde zu legen, denn es sind

$$0 = |1 - 1|, \quad 2 = 1 + 1, \quad 3 = (1 + 1) + 1, \dots$$

Natürlich ist auch die bisherige Ausgangsfunktion $n + 1$, als Summe einer Variablen mit 1, eine elementare Funktion. Aber es erweist sich auch eine ganze Reihe der gebräuchlichsten Funktionen der elementaren Zahlentheorie elementar.¹²

Zum Beispiel kann $sg(n)$ auch so aufgefasst werden, als die nicht-grössere der Zahlen n und 1:

$$sg(n) = \min(n, 1);$$

dies ist ja 0, wenn $n = 0$ ist, und sonst 1. Und die hier auftretende Funktion $\min(a, b)$ kann folgendermassen definiert werden: ist $a \leq b$, so ist

$$a + b - |a - b| = a + b - (b - a) = 2a;$$

daher ist

$$\min(a, b) = \left[\frac{|(a + b) - |a - b||}{2} \right].$$

Aus $sg(n)$ kann man leicht auch $\overline{sg}(n)$ erhalten:

$$\overline{sg}(n) = |1 - sg(n)|.$$

$a \leq b$ ist mit $\min(a, b) = a$, das heisst mit

$$|\min(a, b) - a| = 0$$

gleichbedeutend. Daher ist die charakteristische Funktion der Beziehung $a \leq b$:

$$\overline{sg}(|\min(a, b) - a|);$$

und wird das benutzt, so kann unsere Funktion $a \div n$, für welche

¹²) KALMÁR [2] Nr. 1.

$$a \div n = \begin{cases} |a - n|, & \text{falls } n \leq a \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

folgendermassen definiert werden:

$$a \div n = |a - n| \overline{\text{sg}}(|\min(a, b) - a|).$$

Der Rest der Division $\frac{a}{n}$ ist

$$\text{res}(a, n) = |n - n \cdot \left[\frac{a}{n} \right]|;$$

und dadurch lässt sich die charakteristische Funktion der Teilbarkeit von a durch n als

$$\overline{\text{sg}}(\text{res}(a, n))$$

aufschreiben. Das ermöglicht auch die Definition solcher zahlentheoretischen Funktionen, die sich an den Teilbarkeitsbegriff knüpfen.

So könnte man glauben, dass die Klasse der elementaren Funktionen mit der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen identisch ist, und so auch der einfachste Fall der Rekursion: die Iteration, im Aufbau dieser Funktionenklasse entbehrlich ist.

2. Es soll untersucht werden, ob dies tatsächlich der Fall sei.

Was ist das Neue, das die Zulassung der Iteration mit sich bringen könnte?

Es ist bekannt, dass das Iterieren das Wachsen einer Funktion sehr beschleunigt. Können auch bei der Bildung von elementaren Funktionen ebenso schnell zunehmende Funktionen zustande kommen?

Die Potenz, die Iteration des Multiplizierens, kommt nicht unter den erwähnten elementaren Funktionen vor; sie ist aber eine elementare Funktion, da man sie durch die Produktbildung

$$a^n = \prod_{i=1}^n a$$

definieren kann.

Ist auch die Iteration $\psi(n, a)$ des Potenzierens eine elementare Funktion?

Es sei genauer erörtert

$$\psi(0, a) = a, \psi(1, a) = a^a, \psi(2, a) = a, \psi(3, a) = a, \dots$$

Diese rasch anwachsenden Werte werden durch die primitive Rekursion

$$\begin{aligned} \psi(0, a) &= a \\ \psi(n+1, a) &= a^{\psi(n, a)} \end{aligned}$$

geliefert.

Unter den Operationen, die auf elementare Funktionen führen, ist es von der Produktbildung zu erwarten, dass durch sie die am stärksten zunehmenden Funktionen erzeugt werden. Kann nun das Anwachsen von $\psi(n, a)$ durch Produktbildungen eingeholt werden?

Sehen wir erst heuristisch nach : gehen wir von Funktionen α und β aus, die nach all ihren Variablen monoton wachsen, und schätzen wir das Produkt

$$\varphi(a_1, \dots, a_r) = \frac{\beta(a_1, \dots, a_r)}{\prod_{i=1}^r 1} \alpha(a_1, \dots, a_r, i)$$

ab. Setzen wir

$$a = \max(a_1, \dots, a_r);$$

so ist

$$\varphi(a_1, \dots, a_r) < \frac{\beta(a, \dots, a)}{\prod_{i=1}^r 1} \alpha(a, \dots, a, \beta(a, \dots, a)) = (\alpha(a, \dots, a, \beta(a, \dots, a)))^{\beta(a, \dots, a)}$$

Daher wird das Anwachsen durch die Iteration des Potenzierens stärker als durch die Produktbildung beschleunigt, wenn es zu jedem n_1, n_2 und n_3 ein m gibt, so dass für $a > 1$

$$\psi(m, a) \geq (\psi(n_1, \psi(n_2, a)))^{\psi(n_3, a)}$$

besteht. Ist das der Fall, dann werden sämtliche elementare Funktionen von der Funktion $\psi(n, a)$ »majorisiert«; und so kann $\psi(n, a)$ selbst keine elementare Funktion sein.

3. Nun machen wir uns daran, die heuristisch Durchdachten allmählich zu beweisen.¹³ Wir suchen zu den gegebenen Zahlen n_1 und n_2 Schritt für Schritt solche von ihnen abhängige Zahlen m_1, m_2, m_3, m_4 , dass für $a > 1$

$$\psi(m_1, a) \geq \psi(n_1, a) + \psi(n_2, a),$$

$$\psi(m_2, a) \geq \psi(n_1, a) \cdot \psi(n_2, a),$$

$$\psi(m_3, a) \geq \psi(n_1, a)^{\psi(n_2, a)}$$

und bestehe.

$$\psi(m_4, a) \geq \psi(n_1, \psi(n_2, a))$$

Ich schicke voraus : es ist aus der Definition von $\psi(n, a)$ klar, dass

$$\psi(n, a) \geq a,$$

und so für $a \geq 1$

$$\psi(n, a) \geq 1$$

ist ; ferner, dass $\psi(n, a)$ in a , und für $a > 1$ auch in n monoton wächst. Es gilt ja für $a > 1$

$$\psi(n+1, a) = a^{\psi(n, a)} > \psi(n, a).$$

Ferner wächst $\psi(0, a) = a$ freilich monoton in a ; und angenommen, dass für ein n sich $\psi(n, a)$ bereits in a monoton wachsend erwiesen hat, so vererbt sich diese Eigenschaft wegen

$$\begin{aligned} \psi(n+1, a+1) &= (a+1)^{\psi(n, a+1)} > a^{\psi(n, a+1)} \geq a^{\psi(n, a)} \\ &= \psi(n+1, a) \end{aligned}$$

auch auf $n+1$.

Nun wollen wir das gewünschte m_1 suchen. Es ist für $a > 1$

¹³) Der Satz und sein Beweis stammt von ILONA BERECKZI (Szeged); sie hat mir das den 19. VII. 1949. brieflich mitgeteilt.

$$\psi(n_1, a) + \psi(n_2, a) \leq 2\psi(\max(n_1, n_2), a).$$

Es gilt allgemein

$$2b \leq 2^b;$$

denn diese Ungleichung gilt für $b = 0$ und $b = 1$; wenn sie aber bereits für ein $b > 0$ gilt, so vererbt sich diese Eigenschaft auch auf $b + 1$:

$$2(b + 1) \leq 2(b + b) = 2 \cdot 2b \leq 2 \cdot 2^b = 2^{b+1}.$$

So gilt für $a > 1$ auch

$$\begin{aligned} 2 \cdot \psi(\max(n_1, n_2), a) &\leq 2^{\psi(\max(n_1, n_2), a)} \leq a^{\psi(\max(n_1, n_2), a)} = \\ &= \psi(\max(n_1, n_2) + 1, a). \end{aligned}$$

Wird daher

$$m_1 = \mu_1(n_1, n_2) = \max(n_1, n_2) + 1$$

gesetzt, so ist

$$\psi(\mu_1(n_1, n_2), a) \geq \psi(n_1, a) + \psi(n_2, a).$$

4. m_2 kann genau so wie m_1 gewählt werden. Davon überzeugt man sich folgendermassen: für $a > 1$ gilt

$$\psi(n_1, a) \cdot \psi(n_2, a) \leq (\psi(\max(n_1, n_2), a))^2.$$

Jetzt sei erst $\max(n_1, n_2) \geq 1$. Dann erhält man für $a > 1$, wenn wieder die Ungleichung $2b \leq 2^b$ benutzt wird, dass

$$\begin{aligned} (\psi(\max(n_1, n_2), a))^2 &= (a^{\psi(\max(n_1, n_2) - 1, a)})^2 = \\ &= a^{2\psi(\max(n_1, n_2) - 1, a)} \leq a^{2^{\psi(\max(n_1, n_2) - 1, a)}} \leq \\ &\leq a^a = a^{\psi(\max(n_1, n_2) - 1, a) + \psi(\max(n_1, n_2), a)} = \\ &= \psi(\max(n_1, n_2) + 1, a), \end{aligned}$$

und so

$$\psi(n_1, a) \cdot \psi(n_2, a) \leq \psi(\max(n_1, n_2) + 1, a)$$

gilt. Es ist klar, dass diese Ungleichung auch für $\max(n_1, n_2) = 0$, das heisst für $n_1 = 0, n_2 = 0$ besteht: es steht ja in diesem Fall auf der linken Seite

$$\psi(0, a) \cdot \psi(0, a) = a \cdot a = a^2;$$

und für $a > 1$ ist die rechte Seite

$$\psi(1, a) = a^a \geq a^2.$$

Daher kann als ein solches m_2 für welches bei $a > 1$

$$\psi(m_2, a) \geq \psi(n_1, a) \cdot \psi(n_2, a)$$

gilt, tatsächlich

$$m_2 = \mu_2(n_1, n_2) = \max(n_1, n_2) + 1 = \mu_1(n_1, n_2)$$

gewählt werden.

5. In der Untersuchung von $\psi(n_1, a)^{\psi(n_2, a)}$ beschränken wir uns erst auf den Fall $n_1 > 0$. In diesem Fall ist für $a > 1$ nach der vorigen Nummer

$$\begin{aligned} \psi(n_1, a)^{\psi(n_2, a)} &= \left(a^{\psi(n_1-1, a)} \right)^{\psi(n_2, a)} = a^{\psi(n_1-1, a) \cdot \psi(n_2, a)} \leq \\ &\leq a^{\psi(\mu_2(n_1-1, n_2), a)} = a^{\psi(\max(n_1-1, n_2) + 1, a)} = \\ &= \psi(\max(n_1 - 1, n_2) + 2, a) = \psi(\max(n_1 + 1, n_2 + 2), a). \end{aligned}$$

So ist für $n_1 > 0, a > 1$

$$\psi(n_1, a)^{\psi(n_2, a)} \leq \psi(\max(n_1 + 1, n_2 + 2), a).$$

Es ist klar, dass diese Ungleichung auch für $n_1 = 0$ besteht; denn in diesem Fall ist der Wert der linken Seite

$$\psi(0, a)^{\psi(n_2, a)} = a^{\psi(n_2, a)} = \psi(n_2 + 1, a),$$

und der Wert der rechten Seite ist grösser als $\psi(n_2 + 1, a)$ (da $\psi(n, a)$ in n monoton zunimmt).

Daher kann als solches m_3 , für welches bei $a > 1$

$$\psi(m_3, a) \geq \psi(n_1, a)^{\psi(n_2, a)}$$

gilt,

$$m_3 = \mu_3(n_1, n_2) = \max(n_1 + 1, n_2 + 2)$$

gewählt werden.

6. Es ist etwas umständlicher m_4 zu finden.

Soviel lässt sich jedenfalls leicht feststellen, dass

$$\psi(0, \psi(n_2, a)) = \psi(n_2, a)$$

ist, und wenn es zu einem n_1 bereits ein m gibt, für welches

$$\psi(m, a) \geq \psi(n_1, \psi(n_2, a))$$

gilt, so findet man zu $n_1 + 1$ nach der vorigen Nummer, für $a > 1$, folgenderweise eine geeignete Zahl m' :

$$\begin{aligned} \psi(n_1 + 1, \psi(n_2, a)) &= \psi(n_2, a)^{\psi(n_1, \psi(n_2, a))} \leq \\ &\leq \psi(n_2, a)^{\psi(m, a)} \leq \psi(\mu_3(n_2, m), a) = \\ &= \psi(\max(n_2 + 1, m + 2), a) = \psi(m', a). \end{aligned}$$

So wird die gesuchte Funktion $m_4 = \mu_4(n_1, n_2)$ durch die folgende Rekursion geliefert:

$$\begin{aligned} \mu_4(0, n_2) &= n_2 \\ \mu_4(n_1 + 1, n_2) &= \max(n_2 + 1, \mu_4(n_1, n_2) + 2). \end{aligned}$$

Diese Definition kann aber auch leicht auf eine explizite Form gebracht werden. Es gilt nämlich augenscheinlich für alle n_1

$$\mu_4(n_1, n_2) \geq n_2,$$

das heisst

$$\mu_4(n_1, n_2) + 2 \geq n_2 + 2 > n_2 + 1,$$

und so

$$\max(n_2 + 1, \mu_4(n_1, n_2) + 2) = \mu_4(n_1, n_2) + 2.$$

Es ist daher

$$\mu_4(n_1 + 1, n_2) = \mu_4(n_1, n_2) + 2;$$

so werden die Werte von $\mu_4(n_1, n_2)$ vom für $n_1 = 0$ angenommenen Wert n_2 ausgehend so aufgebaut, dass immer wieder 2 addiert wird. Folglich ist

$$\mu_4(n_1, n_2) = n_2 + 2n_1;$$

und vorher hat es sich herausgestellt, dass

$$\psi(\mu_4(n_1, n_2), a) \geq \psi(n_1, \psi(n_2, a))$$

ist.

7. Mit all diesen Ungleichungen versehen, kann man nun beweisen, dass jede elementare Funktion durch die Funktion $\psi(n, a)$ »majorisiert« wird. Genauer formuliert: es gibt zu jeder elementaren Funktion $\varphi(a_1, \dots, a_r)$ ein solches m , dass für $\max(a_1, \dots, a_r) > 1$

$$\varphi(a_1, \dots, a_r) < \psi(m, \max(a_1, \dots, a_r))$$

gilt.

Das gilt erstens für 1 und für die Variablen a_i , die im Aufbau der elementaren Funktionen als Ausgangsfunktionen gewählt worden sind. Es gilt ja für $a > 1$

$$1 < a = \psi(0, a);$$

wird also 1 in Abhängigkeit von beliebigen Variablen a_1, \dots, a_r betrachtet so gilt für $\max(a_1, \dots, a_r) > 1$

$$1 < \psi(0, \max(a_1, \dots, a_r));$$

und wird auch a_i in Abhängigkeit von der aufgezählten Variablen betrachtet, so gilt für $\max(a_1, \dots, a_r) > 1$

$$\begin{aligned} a_i &\leq \max(a_1, \dots, a_r) < \max(a_1, \dots, a_r)^{\max(a_1, \dots, a_r)} = \\ &= \psi(1, \max(a_1, \dots, a_r)). \end{aligned}$$

Danach kann man der Reihe nach beweisen, dass falls die betrachtete Behauptung bereits für die elementaren Funktionen α und β gilt, sich diese Eigenschaft auch auf jene Funktionen vererbt, die aus ihnen durch Addition, arithmetische Subtraktion (worunter hier die Bildung von $|a - b|$ zu verstehen ist), Multiplikation, arithmetische Division, Summen- und Produktbildung erzeugt werden. Daraus folgt, dass die Behauptung für alle elementaren Funktionen gilt.

8. Nehmen wir also an, dass wir bereits solche Zahlen k und l zu den Funktionen α und β gefunden haben, dass für $a = \max(a_1, \dots, a_r) > 1$

$$\alpha(a_1, \dots, a_r) < \psi(k, a)$$

und

$$\beta(a_1, \dots, a_r) < \psi(l, a)$$

gilt. (α und β brauchen freilich nicht von gleich vielen Variablen abhängen; es ändert aber nichts, wenn wir sie durch Einführung fiktiver Variablen als von denselben Variablen abhängig betrachten.) Dann ist

$$(1) \quad \alpha(a_1, \dots, ar) + \beta(a_1, \dots, ar) < \psi(k, a) + \psi(l, a) \leq \\ \leq \psi(\mu_1(k, l), a) = \\ = \psi(\max(\max(k, l) + 1, a)) .$$

Wird daher

$$m = \max(k, l) + 1$$

gesetzt, so ist

$$\alpha(a_1, \dots, ar) + \beta(a_1, \dots, ar) < \psi(m, a) .$$

(2) Wegen

$$|\alpha(a_1, \dots, ar) - \beta(a_1, \dots, ar)| \leq \max(\alpha(a_1, \dots, ar), \beta(a_1, \dots, ar))$$

ist

$$|\alpha(a_1, \dots, ar) - \beta(a_1, \dots, ar)| < \psi(\max(k, l), a);$$

hier kann also m als

$$m = \max(k, l)$$

gewählt werden.

$$(3) \quad \alpha(a_1, \dots, ar) \cdot \beta(a_1, \dots, ar) < \psi(k, a) \cdot \psi(l, a) \leq \\ \leq \psi(\mu_2(k, l), a) = \psi(\max(k, l) + 1, a);$$

wird daher

$$m = \max(k, l) + 1$$

gesetzt, so ist

$$\alpha(a_1, \dots, ar) \cdot \beta(a_1, \dots, ar) < \psi(m, a) .$$

$$(4) \quad \left[\frac{\alpha(a_1, \dots, ar)}{\beta(a_1, \dots, ar)} \right] \leq \alpha(a_1, \dots, ar) < \psi(k, a_1, \dots, ar);$$

also kann hier einfach k als m gewählt werden.

9. Jetzt nehmen wir an, dass es zu den elementaren Funktionen α und β bereits solche Zahlen k und l gibt, dass für $a = \max(a_1, \dots, ar)$ und $\max(i, a_1, \dots, ar) = \max(i, a) > 1$

$\alpha(i, a_1, \dots, ar) < \psi(k, \max(i, a_1, \dots, ar)) = \psi(k, \max(i, a))$
und für $a > 1$

$\beta(a_1, \dots, ar) < \psi(l, a)$ das heisst $\beta(a_1, \dots, ar) \leq \psi(l, a) - 1$
besteht.

Dann ist

$$(5) \quad \sum_{i=0}^{\beta(a_1, \dots, ar)} \alpha(i, a_1, \dots, ar) < \sum_{i=0}^{\psi(l, a)-1} \psi(k, \max(i, a)) .$$

Hier ist der grösste Wert, den i annehmen kann

$$\psi(l, a) - 1 < \psi(l, a);$$

ferner ist $\psi(l, a) \geq a$, und so

$$\max(i, a) \leq \psi(l, a),$$

folglich, wegen der Monotonität der Funktion ψ

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\psi(l, a)-1} \psi(k, \max(i, a)) &\leq \sum_{i=0}^{\psi(l, a)-1} \psi(k, \psi(l, a)) = \psi(l, a) \cdot \psi(k, \psi(l, a)) \leq \\
&\leq \psi(l, a) \cdot \psi(\mu_4(k, l, a)) = \psi(l, a) \cdot \psi(l + 2k, a) \leq \\
&\leq \psi(\mu_2(l, l + 2k), a) = \psi(\max(l, l + 2k) + 1, a) = \\
&= \psi(l + 2k + 1, a).
\end{aligned}$$

Wird daher

$$m = l + 2k + 1$$

gesetzt, so ist

$$\sum_{i=0}^{\beta(a_1, \dots, a_r)} \alpha(i, a_1, \dots, a_r) < \psi(m, a).$$

(6) Endlich ergeben ähnliche Folgerungen wie vorhin, dass für $a > 1$

$$\begin{aligned}
\frac{\beta(a_1, \dots, a_r)}{\downarrow \downarrow} \alpha(i, a_1, \dots, a_r) &< \frac{\psi(l, a) - 1}{\downarrow \downarrow} \psi(k, \max(i, a)) \leq \frac{\psi(l, a) - 1}{\downarrow \downarrow} \psi(k, \psi(l, a)) = \\
&= \psi(k, \psi(l, a))^{\psi(l, a)} \leq \psi(\mu_4(k, l, a))^{\psi(l, a)} = \psi(l + 2k, a)^{\psi(l, a)} \leq \\
&\leq \psi(\mu_3(l + 2k, l, a)) = \psi(\max(l + 2k + 1, l + 2), a)
\end{aligned}$$

ist. Wird daher

$$m = \max(l + 2k + 1, l + 2)$$

gewählt, so ist

$$\frac{\beta(a_1, \dots, a_r)}{\downarrow \downarrow} \alpha(i, a_1, \dots, a_r) < \psi(m, a).$$

10. Damit hat es sich vollkommen erwiesen, dass es zu einer beliebigen elementaren Funktion $\varphi(a_1, \dots, a_r)$ ein m gibt, so dass für $\max(a_1, \dots, a_r) > 1$

$$\varphi(a_1, \dots, a_r) < \psi(m, \max(a_1, \dots, a_r))$$

gilt. Daraus folgt aber, dass $\psi(n, a)$ selber keine elementare Funktion sein kann. Denn wäre sie elementar, so liesse sich auch zu ihr ein m finden, so dass für $\max(n, a) > 1$

$$\psi(n, a) < \psi(m, \max(n, a))$$

wäre. Dann gäbe es auch ein solches m , das grösser als 1 ist ($\psi(n, a)$ wächst ja für $a > 1$ in n monoton). Daraus würde sich aber für $n = a = m$

$$\psi(m, m) < \psi(m, m),$$

also eine Unmöglichkeit ergeben.

Es gibt also eine sehr einfache primitiv-rekursive Funktion: die Iteration des Potenzierens, welche von der Klasse der elementaren Funktionen hinausführt. Die Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen ist weiter als die Klasse der elementaren Funktionen.

§ 9. BEISPIEL EINER NICHT PRIMITIV-REKURSIVEN ZAHLENTHEORETISCHEN FUNKTION.

1. Die Iteration des Potenzierens hat wegen ihrer starken Zunahme von der Klasse der elementaren Funktionen hinausgeführt. Wird jetzt diese Funktion iteriert, so erhält man eine noch rascher anwachsende Funktion. Wird das immer wieder wiederholt, so kann man erwarten, dass man zu Funktionen kommt, die nicht nur den elementaren Funktionen, sondern auch allen primitiv-rekursiven Funktionen über den Kopf wachsen.

Bereits die Potenz ist eine Iteration: die Iteration des Multiplizierens; und das Produkt ist die Iteration des Addierens. Tatsächlich kann man beweisen, dass falls

$$\psi_0(n, a) = a + n,$$

$$\psi_1(n, a) = a \cdot n,$$

$$\psi_2(n, a) = a^n,$$

$\psi_3(n, a)$ die n -te Iteration des Potenzierens ist, das heisst

$$\psi_3(0, a) = a$$

$$\psi_3(n+1, a) = a^{\psi_3(n, a)} = \psi_2(\psi_3(n, a), a),$$

und allgemein $\psi_{m+1}(n, a)$ für $m \geq 2$ die Iteration der Funktion $\psi_m(n, a)$, das heisst

$$\psi_{m+1}(n+1, a) = \psi_m(\psi_{m+1}(n, a), a)$$

(mit geeignetem Anfangswert): so wird für genügend grosse Werte der Variablen eine beliebige primitiv-rekursive Funktion von einer dieser Funktionen majorisiert.

Um die Abhängigkeit von $\psi_m(n, a)$ vom Index hervorzuheben, kann diese Funktion auch in der Form

$$\psi(m, n, a) = \psi_m(n, a)$$

geschrieben werden. So sieht man klar, dass $\psi(m, n, a)$ durch eine Rekursion nach zwei Variablen, durch eine sogenannte »zweifache« Rekursion

$$\psi(m+1, n+1, a) = \psi(m, \psi(m+1, n, a), a)$$

aufgebaut wird. Zur Berechnung von $\psi(m+1, n+1, a)$ muss man Werte der ψ -Funktion an solchen Stellen benutzen, wo das erste Argument um 1 kleiner ist (wobei sich das zweite in einer Weise, die von ψ selbst abhängt, verändert), oder das erste Argument dasselbe, dafür das zweite um 1 kleiner ist.¹⁴

2. Zum Majorisieren der primitiv-rekursiven Funktionen braucht man aber nicht eine dreistellige Funktion verwenden. Es genügt zu diesem Zweck eine zweistellige »Majorante« $\psi(m, n)$ so zu definieren, dass

$$\psi(m+1, n+1) = \psi(m, \psi(m+1, n))$$

sei.¹⁵

Im Beweis der Majoranten-Beschaffenheit von $\psi(m, n)$ werde ich benutzen, dass

$$\psi(m, n) > n$$

¹⁴) Durch diese Definition hat ACKERMANN [1] das erste Beispiel für eine nicht primitiv-rekursive Funktion angegeben.

¹⁵) PÉTER [3], und etwas einfacher ROBINSON [2].

ist (damit dies von Anfang an gilt, wird $\psi(0, n) = n + 1$ zum Ausgang genommen); ferner, dass $\psi(m, n)$ eine monoton wachsende Funktion beider Variablen ist, und zwar reagiert sie auf das Wachsen von m (das heisst auf die Vermehrung der Anzahl der angewandten Iterationen) wenigstens so empfindlich, wie auf das Wachsen von n :

$$\psi(m + 1, n) \geq \psi(m, n + 1).$$

Damit auch diese Ungleichung vom Anfang an bestche, werde ich den für $n = 0$ angenommenen Funktionswert so definieren, dass

$$\psi(m + 1, 0) = \psi(m, 1)$$

gelten soll.

So lautet die zweifach-rekursive Definition von ψ

$$\psi(0, n) = n + 1$$

$$\psi(m + 1, 0) = \psi(m, 1)$$

$$\psi(m + 1, n + 1) = \psi(m, \psi(m + 1, n)).$$

3. Die so definierte Funktion $\psi(m, n)$ verfügt über die gewünschten Eigenschaften.

$$(1) \quad \psi(m, n) > n, \quad \text{das heisst} \quad \psi(m, n) \geq n + 1.$$

Das gilt nämlich nach der ersten Definitionsgleichung bei beliebigem n für $m = 0$. Und gilt bereits für ein m bei beliebigem n

$$\psi(m, n) \geq n + 1,$$

so vererbt sich diese Eigenschaft auch auf $\psi(m + 1, 0)$; denn dann ist nach der zweiten Definitionsgleichung

$$\psi(m + 1, 0) = \psi(m, 1) \geq 1 + 1 > 0 + 1.$$

Wird endlich noch angenommen, dass für dasselbe m und für ein gewisses n

$$\psi(m + 1, n) \geq n + 1$$

gilt, so vererbt sich diese Eigenschaft auch auf $\psi(m + 1, n + 1)$, denn in diesem Fall ist nach der dritten Definitionsgleichung

$$\psi(m + 1, n + 1) = \psi(m, \psi(m + 1, n)) \geq \psi(m + 1, n) + 1 \geq (n + 1) + 1.$$

So hat es sich herausgestellt, dass falls die betreffende Behauptung für irgendein m bei beliebigem n bereits gilt, so gilt sie auch für $m + 1$ bei beliebigem n , und so gilt sie (da sie für $m = 0$ bei beliebigem n gilt) für alle m bei beliebigem n .

4. Es folgt unmittelbar aus der eben bewiesenen Eigenschaft von $\psi(m, n)$, dass $\psi(m, n)$ in n monoton zunimmt. Das gilt nämlich für $\psi(0, n) = n + 1$; und ist das erste Argument von 0 verschieden, so kann es in der Form $m + 1$ geschrieben werden, es gilt also nach der dritten Definitionsgleichung:

$$\psi(m + 1, n + 1) = \psi(m, \psi(m + 1, n)) > \psi(m + 1, n).$$

5. Dass $\psi(m, n)$ auch in m monoton wächst, wird natürlich eine Folge von

$$(2) \quad \psi(m + 1, n) \geq \psi(m, n + 1)$$

sein; es ist ja nach der vorigen Nummer

$$\psi(m, n + 1) > \psi(m, n),$$

und das ergibt samt (2)

$$\psi(m + 1, n) > \psi(m, n).$$

Man hat also nur noch (2) zu beweisen. Für $n = 0$ gilt (2) nach der zweiten Definitionsgleichung von ψ . Und gilt (2) bereits für ein n , so vererbt sich diese Eigenschaft auch auf $n + 1$. Denn es ist dann nach der dritten Definitionsgleichung

$$\psi(m + 1, n + 1) = \psi(m, \psi(m + 1, n)) \geq \psi(m, \psi(m, n + 1)),$$

und hier ist nach (1)

$$\psi(m, n + 1) \geq (n + 1) + 1 = n + 2,$$

also gilt nach der vorigen Nummer

$$\psi(m, \psi(m, n + 1)) \geq \psi(m, n + 2),$$

und so

$$\psi(m + 1, n + 1) \geq \psi(m, n + 2).$$

6. So ausgerüstet, machen wir uns nun an den Beweis, dass eine jede einstellige primitiv-rekursive Funktion von $\psi(m, n)$ majorisiert wird. Dies wird zugleich ein gutes Beispiel dafür liefern, was in Nr. 1 des § 2 als ein Nutzen der Abgrenzung des Begriffes der rekursiven Funktion hervorgehoben wurde: dass sich die rekursiven Funktionen aus einigen Ausgangsfunktionen durch einige festgesetzte Definitionsarten aufbauen lassen, ermöglicht, dass man die für all diese Funktionen gültigen Behauptungen ähnlich wie die Behauptungen über natürliche Zahlen beweist. Nämlich so, dass man zeigt: die Behauptung stimmt »im Anfang«, das heisst für die Ausgangsfunktionen, und das vererbt sich Schritt für Schritt auf die »späteren«, das heisst aus bereits definierten Funktionen auf eine erlaubte Art aufgebauten Funktionen.

Ich werde jene Form des Ergebnisses am Ende des § 7 benutzen, dass von den Funktionen

$$n + 1 \text{ und } \text{quad}(n)$$

ausgehend alle einstelligen primitiv-rekursiven Funktionen durch Verwendung der Schemata

$$\psi(n) = \left. \begin{array}{l} \alpha(n) - \beta(n) \\ \alpha(n) = \beta(\alpha(n)), \quad \varphi(0) = 0 \\ \varphi(n + 1) = \beta(\varphi(n)) \end{array} \right\}$$

erhalten werden können, wobei α und β bereits definierte Funktionen sind.

7. Erst zeige ich, dass es ein m gibt, für welches

$$n + 1 < \psi(m, n)$$

und

$$\text{quad}(n) < \psi(m, n)$$

gilt. Da $\text{quad}(n)$ bloss die Werte 0 und 1 annimmt, so ist für jedes n

$$\text{quad}(n) \leq n + 1 = \psi(0, n) < \psi(1, n).$$

Unsere Ausgangsfunktionen werden also für ein jedes n durch $\psi(1, n)$ majorisiert.

Angenommen, dass es zu den primitiv-rekursiven Funktionen $\alpha(n)$ und $\beta(n)$ bereits solche Zahlen k und l gibt, dass

$$\alpha(n) < \psi(k, n)$$

und

$$\beta(n) < \psi(l, n)$$

gelten, so erhält man folgendermassen die Majoranten der Funktionen, die aus α und β durch die zugelassenen Schemata aufgebaut werden:

$$I. \quad |\alpha(n) - \beta(n)| \leq \max(\alpha(n), \beta(n)) < \psi(\max(k, l), n).$$

Ferner ergibt sich, die Monotonität von ψ benutzend,

$$II. \quad \begin{aligned} \beta(\alpha(n)) &< \psi(l, \alpha(n)) < \psi(l, \psi(k, n)) < \\ &< \psi(\max(k, l), \psi(\max(k, l) + 1, n)) = \\ &= \psi(\max(k, l) + 1, n + 1). \end{aligned}$$

Es ist aber nach der Ungleichung (2) der vorigen Nummer

$$\psi(\max(k, l) + 1, n + 1) \leq \psi(\max(k, l) + 2, n),$$

also

$$\beta(\alpha(n)) < \psi(\max(k, l) + 2, n).$$

III. Sei $\varphi(n)$ die durch die Iteration

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi(n + 1) = \beta(\varphi(n))$$

definierte Funktion. So ist $\varphi(0) = 0$ kleiner als alle Werte von $\psi(n, a)$; es ist ja nach (1) von Nr. 3 dieses Kapitels

$$\psi(n, a) \geq n + 1 > 0.$$

Es wird eine solche Zahl m gesucht, für welche bei beliebigem n

$$\varphi(n) < \psi(m, n)$$

besteht; man sieht, dass für $n = 0$ ein jedes m diesem Zweck entspricht. Ist nun für ein n bereits

$$\varphi(n) < \psi(m, n),$$

so gilt nach der zweiten Definitionsgleichung von

$$\varphi(n + 1) = \beta(\varphi(n)) < \psi(l, \varphi(n)) < \psi(l, \psi(m, n)).$$

Man sieht, dass es zweckmässig ist, $l + 1$ für m zu wählen, denn dann ergibt sich nach der zweiten Definitionsgleichung von ψ :

$$\psi(l, \psi(m, n)) = \psi(l, \psi(l + 1, n)) = \psi(l + 1, n + 1)$$

und so

$$\varphi(n + 1) < \psi(l + 1, n + 1);$$

also vererbt sich die Eigenschaft, dass $\varphi(n)$ von $\psi(l + 1, n)$ majorisiert wird, von n auf $n + 1$. So gilt für ein jedes n

$$\varphi(n) < \psi(l + 1, n).$$

8. In der vorigen Nummer hat es sich herausgestellt, dass es zu einer jeden einstelligen primitiv-rekursiven Funktion $\varphi(n)$ ein solches m gibt, für welches

$$\varphi(n) < \psi(m, n)$$

besteht. Daraus folgt aber, dass $\psi(m, n)$ keine primitiv-rekursive Funktion ist. Denn mit ihr wäre auch die durch Substitution aus ihr entstehende einstellige

Funktion $\varphi(n, n)$ primitiv-rekursiv, und daher gäbe es auch zu dieser Funktion ein m , so dass bei beliebigem n

$$\varphi(n, n) < \varphi(m, n)$$

wäre. Daraus würde sich aber für $n = m$

$$\varphi(m, m) < \varphi(m, m),$$

also eine Unmöglichkeit ergeben.

9. Es ist auch leicht zu zeigen, dass alle beliebigviel-stelligen primitiv-rekursiven Funktionen von $\varphi(m, n)$ majorisiert werden; in jenem Sinn, dass es zu jeder primitiv-rekursiven Funktion ein m gibt, so dass für alle Werte von a_1, \dots, a_r

$$\varphi(a_1, \dots, a_r) < \varphi(m, \max(a_1, \dots, a_r))$$

gilt. Das sieht man daraus leicht ein, dass nach Nr. 16 des § 7 alle mehrstelligen primitiv-rekursiven Funktionen durch blosse Verwendung von Substitutionen aus einstelligen primitiv-rekursiven Funktionen und aus $a + n$ aufgebaut werden können.

Es gibt ja nach den Vorherigen zu einer jeden einstelligen primitiv-rekursiven Funktion $\varphi(n)$ ein solches m , dass

$$\varphi(n) < \varphi(m, n)$$

ist; ferner gilt

$$a + n \leq 2 \max(a, n),$$

und ist m die Zahl zur einstelligen Funktion $2n$, für welche

$$2n < \varphi(m, n)$$

gilt, so ist

$$2 \max(a, n) < \varphi(m, \max(a, n)).$$

Und wenn es bereits zu den Funktionen $\alpha_1(a_1, \dots, a_r), \dots, \alpha_s(a_1, \dots, a_r)$ (diese brauchen nicht von denselben Variablen abhängen, aber können durch Einführung fiktiver Variablen immer so hingestellt werden) solche Zahlen m_1, \dots, m_s gibt, und zur Funktion $\beta(a_1, \dots, a_s)$ eine solche Zahl m_0 , dass für alle Werte der Variablen

$$\alpha_1(a_1, \dots, a_r) < \varphi(m_1, \max(a_1, \dots, a_r)),$$

.....

$$\alpha_s(a_1, \dots, a_r) < \varphi(m_s, \max(a_1, \dots, a_r)),$$

und

$$\beta(a_1, \dots, a_s) < \varphi(m_0, \max(a_1, \dots, a_r))$$

gelten: so gibt es auch zur Funktion, die durch Substitution der a_i in β entsteht, eine Zahl m , so dass

$$\beta(\alpha_1(a_1, \dots, a_r), \dots, \alpha_s(a_1, \dots, a_r)) < \varphi(m, \max(a_1, \dots, a_r))$$

gilt.

Es ist nämlich nach der Annahme, ferner nach der Definition und nach der Monotonität von ψ

$$\begin{aligned} \beta(a_1(a_1, \dots, a_r), \dots, a_s(a_1, \dots, a_r)) &< \psi(m_0, \max(a_1(a_1, \dots, a_r), \dots, a_s(a_1, \dots, a_r))) < \\ &< \psi(m_0, \max(\psi(m_1, \max(a_1, \dots, a_r)), \dots, \psi(m_s, \max(a_1, \dots, a_r)))) = \\ &= \psi(m_0, \psi(\max(m_1, \dots, m_s), \max(a_1, \dots, a_r))) < \\ &< \psi(\max(m_0, m_1, \dots, m_s), \psi(\max(m_0, m_1, \dots, m_s) + 1, \max(a_1, \dots, a_r))) = \\ &= \psi(\max(m_0, m_1, \dots, m_s) + 1, \max(a_1, \dots, a_r) + 1). \end{aligned}$$

Nach der Eigenschaft (2) der Funktion ψ , die in Nr. 5 dieses Kapitels bewiesen wurde, ist

$$\begin{aligned} \psi(\max(m_0, m_1, \dots, m_s) + 1, \max(a_1, \dots, a_r) + 1) &\leq \\ &\leq \psi(\max(m_0, m_1, \dots, m_s) + 2, \max(a_1, \dots, a_r)); \end{aligned}$$

wird also

$$m = \max(m_0, m_1, \dots, m_s) + 2$$

gesetzt, so ist

$$\beta(a_1(a_1, \dots, a_r), \dots, a_s(a_1, \dots, a_r)) < \psi(m, \max(a_1, \dots, a_r)).$$

So vererbt sich die betreffende Eigenschaft von den einstelligen primitiv-rekursiven Funktionen und von $a + n$ auch auf die Funktionen, die aus ihnen durch Substitution entstehen. Daher gibt es tatsächlich zu einer jeden primitiv-rekursiven Funktion ein m , so dass für alle Werte von a_1, \dots, a_r

$$\varphi(a_1, \dots, a_r) < \psi(m, \max(a_1, \dots, a_r))$$

besteht.

§ 10. DIE EINGESCHACHELTE REKURSION.

1. Es hat sich im vorigen Kapitel herausgestellt, dass die Funktion $\psi(m, n)$, welche durch die zweifache Rekursion

$$\begin{aligned} \psi(0, n) &= n + 1 \\ \psi(m + 1, 0) &= \psi(m, 1) \\ \psi(m + 1, n + 1) &= \psi(m, \psi(m + 1, n)) \end{aligned}$$

definiert wird, nicht primitiv-rekursiv ist. Worin unterscheidet sich denn diese Rekursion von der ebenfalls zweifachen Rekursion

$$\begin{aligned} \varphi(0, n) &= \alpha_1(n) \\ \varphi(m + 1, n) &= \alpha_2(m) \\ \varphi(m + 1, n + 1) &= \beta(m, n, \varphi(m, \gamma(m, n)), \varphi(m + 1, n)), \end{aligned}$$

von der zum Schluss des § 6 behauptet wurde, dass sie nicht von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinausführt?

Augenscheinlich besteht der wesentliche Unterschied darin, dass an der rechten Seite der Definition von φ bloss eine bekannte Funktion für eine Variable von φ eingesetzt wird; auf der rechten Seite der Definition von ψ treten dafür

auch »eingeschachtelte« ψ -Werte auf. Zur Berechnung des Funktionswertes an der Stelle $(m + 1, n + 1)$ hat man in beiden Definitionen auch einen Funktionswert, der zu einem um 1 kleineren ersten Argument gehört, zu verwenden; wie gross aber dabei das zweite Argument ist, das wird in der Definition von φ durch die bekannte Funktion γ , in der Definition von ψ durch die zu definierende Funktion ψ selbst angegeben. Die Definition von ψ kann eine *eingeschachtelte zweifache Rekursion* genannt werden.

Nach den Vorherigen führt die *uneingeschachtelte zweifache Rekursion nicht von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinaus, aber die eingeschachtelte zweifache Rekursion führt bereits hinaus von dieser Klasse.*

2. Wir haben auch schon unter den einfachen Rekursionen mit einer solchen Definition zu tun gehabt, welche eine zweistellige Funktion $\varphi(n, a)$ derart angegeben hat, dass zur Berechnung des Wertes $\varphi(n + 1, a)$ die Funktion $\varphi(n, a)$, als Funktion von a , bei verschiedenen Werten von a verwendet wurde. Es war die Definition am Ende des § 5:

$$\varphi(0, a) = \alpha(a)$$

$$\varphi(n + 1, a) = \beta(n, a, \varphi(n, \gamma_1(n, a)), \varphi(n, \gamma_2(n, a)), \dots, \varphi(n, \gamma_k(n, a)))$$

eine solche. Das ist jedenfalls eine einfache Rekursion nach der Variablen n . Hier könnte auch statt einiger $\gamma_i(n, a)$ der Ausdruck $\gamma_i(n, a, \varphi(n, a))$, oder gar $\varphi(n, \gamma_i(n, a, \varphi(n, a)))$ stehen; es könnten ja auch beliebig vielfach eingeschachtelte Funktionswerte auftreten. Man könnte glauben, dass bereits die einfache eingeschachtelte Rekursion von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinausführt.

Das ist aber nicht der Fall. Genau auf jene Weise, wie im § 5 mit $\binom{n}{a}$ verfahren wurde, lässt sich auch die eingeschachtelte einfache Rekursion auf primitive Rekursion und Substitution zurückführen.

Betrachten wir z. B. den einfachen Spezialfall

$$\varphi(0, a) = \alpha(a)$$

$$\varphi(n + 1, a) = \beta(n, \varphi(n, \gamma(n, a, \varphi(n, a)))) .$$

Auch hier können die Schritte einzeln untersucht werden, durch welche von $\varphi(0, a) = \alpha(a)$ ausgehend die Werte von $\varphi(n, a)$ allmählich aufgebaut werden; und man kann eine Funktion $\psi(n, a)$ definieren (diese darf jetzt nicht mit der im vorigen Kapitel behandelten, und auch zu Beginn dieses Kapitels erwähnten Funktion $\psi(m, n)$ verwechselt werden), deren Werte die im Aufbau von $\varphi(n, a)$ benutzten Bausteine sind. Der Anfang des Aufbaues lautet:

$$\varphi(0, a) = \alpha(a),$$

$$\varphi(1, a) = \beta(0, \varphi(0, \gamma(0, a, \varphi(0, a)))) = \beta(0, \alpha(\gamma(0, a, \alpha(a)))) ,$$

$$\begin{aligned} \varphi(2, a) &= \beta(1, \varphi(1, \gamma(1, a, \varphi(1, a)))) = \\ &= \beta(1, \beta(0, \alpha(\gamma(0, \gamma(1, a, \beta(0, \alpha(\gamma(0, a, \alpha(a))))))) , \\ &\quad , \alpha(\gamma(1, a, \beta(0, \alpha(\gamma(0, a, \alpha(a))))))))) , \end{aligned}$$

.....

Man sieht, dass diese Werte durch die Ineinanderschachtelung von α, β und γ zustande kommen; dabei erfolgt im ersten Argument von β und γ nie eine Einschachtelung, sondern es stehen da beim Aufbau von $\varphi(n, a)$ stets Zahlen

kleiner als n ; in einem jeden anderen Argument steht entweder a oder es erfolgt dort eine Einschachtelung. Man hat also als Hilfsfunktion, welche die Bausteine des Aufbaues von $\varphi(n, a)$ annimmt, eine solche Funktion $\psi(n, a)$ zu definieren, die erstens den Wert a (z. B. an der Stelle 0) annimmt; dann mit beliebigen bereits angenommenen Werten auch jene Werte, die aus deren Einschachtelungen in α , in die zweite Leerstelle von β und in die zweite und dritte Leerstelle von γ entstehen. Die Funktion $\psi(n, a)$ genügt gewiss diesen Forderungen, wenn sie durch

$$\psi(0, a) = a$$

und für $n > 0$

$$\psi(n, a) = \begin{cases} \alpha(\psi(\exp_2(n), a)), & \text{falls } \exp_0(n) = 0 \\ \beta(\exp_1(n), \psi(\exp_2(n), a)), & \text{« } \exp_0(n) = 1 \\ \gamma(\exp_1(n), \psi(\exp_2(n), a), \psi(\exp_3(n), a)) & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert wird. Das ist eine Wertverlaufsrekursion, die sich durch die im § 3 angewandte Methode auf primitive Rekursion und Substitution zurückführen lässt. Und da auch die Werte $\varphi(1, a), \varphi(2, a), \varphi(3, a), \dots$ unter den von $\psi(n, a)$ angenommenen Bausteinen vorkommen, kann man diese aus den Werten von $\psi(n, a)$ herausfischen. Genau so, wie in § 5 im Fall $\varphi(n, a) = \binom{n}{a}$, kann auch hier eine primitiv-rekursive Funktion $\varkappa(n)$ angegeben werden, für welche

$$\varphi(n, a) = \psi(\varkappa(n), a)$$

gilt. So erweist sich $\varphi(n, a)$ als primitiv-rekursiv.

Ähnlich sieht man ein¹⁶, dass auch die verwickelteste eingeschachtelte *einfache* Rekursion nicht von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinausführt.

3. Will man denselben Gedankengang auf die zweifache, oder allgemeiner, auf die nach mehreren Variablen laufende »mehrfache« Rekursion anwenden, so muss er notwendigerweise versagen; wir wissen ja, dass die mehrfache eingeschachtelte Rekursion von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinausführt. Später wird es sich tatsächlich ergeben, dass in der Definition einer Funktion ψ , welche die »Bausteine« einer durch mehrfacher eingeschachtelter Rekursion definierten Funktion annimmt, notwendigerweise auch eingeschachtelte ψ -Werte auftreten, die sich nicht weiter auflösen lassen. Es ist dennoch keine verlorene Mühe denselben Gedankengang auch auf mehrfache Rekursionen anzuwenden: es gelingt nämlich in dieser Weise die am verwickeltesten eingeschachtelten Definitionen auf die einfachsten zurückzuführen, in welchen bloss einmalige Einschachtelungen auftreten.

4. Eine weitere Vereinfachung der mehrfachen Rekursion kann dadurch bewirkt werden, dass die »Anfangswerte« (die bei dem Wert 0 einer der Variablen angenommenen Werte) beliebig gewählt werden können; so kann ein jeder Anfangswert als 0 oder 1 gewählt werden.¹⁷ Die Reduktion auf eine Rekursion mit solchen »normierten« Anfangswerten kann z. B. bei der zweifachen Rekursion

$$\begin{aligned} \psi(0, n) &= n + 1 \\ \psi(m + 1, 0) &= \psi(m, 1) \\ \psi(m + 1, n + 1) &= \psi(m, \psi(m + 1, n)), \end{aligned}$$

¹⁶) Ein ausführlicher Beweis ist in PÉTER [2] und [4] zu finden.

¹⁷) PÉTER [5] § 1.

die auch zu Beginn dieses Kapitels aufgeschrieben wurde, folgendermassen durchführt werden :

Man hat bloss eine Funktion $\xi(m, n)$ zu definieren, für welche

$$\xi(m+1, n+1) = \psi(m, n)$$

gilt. Da die Anfangswerte der Funktion $\xi(m, n)$ durch diese Forderung nicht gebunden werden, können sie beliebig, z. B. als 0 gewählt werden.

Zur Erleichterung der Definition von $\xi(m, n)$ ist es zweckmässig, die Definition von $\psi(m, n)$ auf folgende Form zu bringen :

$$(1) \quad \psi(0, n) = n + 1,$$

$$(2) \quad \psi(m, 0) = \psi(m-1, 1), \quad \text{falls } m \neq 0$$

$$(3) \quad \psi(m, n) = \psi(m-1, \psi(m, n-1)), \quad \ll m \neq 0 \text{ und } n \neq 0.$$

Hält man diese Gleichungen vor Augen, so erhält man die Definition von $\xi(m, n)$ folgendermassen :

$\xi(0, n) = 0$ und $\xi(m+1, 0) = 0$, das heisst : $\xi(m, n) = 0$ für $m \cdot n = 0$;

ferner

$$(1) \quad \xi(1, n+1) = n + 1,$$

$$(2) \quad \xi(m+1, 1) = \xi(m, 2), \quad \text{falls } m \neq 0,$$

$$(3) \quad \xi(m+1, n+1) = \xi(m, \xi(m+1, n)), \quad \ll m \neq 0, n \neq 0.$$

Es gilt darin tatsächlich für alle m und n

$$\psi(m, n) = \xi(m+1, n+1) .$$

Dies gilt nämlich erstens bei beliebigem n für $m = 0$, denn nach den Definitionsgleichungen (1) gilt

$$\psi(0, n) = n + 1 = \xi(1, n+1) .$$

Gilt ferner bei beliebigem n für ein $m \neq 0$

$$\psi(m-1, n) = \xi(m, n+1) ,$$

so kann man daraus unmittelbar auf $\psi(m, 0)$ weiter schliessen : werden die Definitionsgleichungen (2) benutzt, so ergibt sich aus der obigen Annahme, dass

$$\psi(m, 0) = \psi(m-1, 1) = \xi(m, 2) = \xi(m+1, 1)$$

ist. Wird ferner noch angenommen, das für dasselbe m und für ein von 0 verschiedenes n

$$\psi(m, n-1) = \xi(m+1, n)$$

gilt, so ergibt sich mit Verwendung der Definitionsgleichungen (3), dass

$$\begin{aligned} \psi(m, n) &= \psi(m-1, \psi(m, n-1)) = \xi(m, \xi(m+1, n)) = \\ &= \xi(m+1, n+1) \end{aligned}$$

ist. Zusammenfassend : gilt die Behauptung bei beliebigem n für irgendein m , so gilt sie auch für $m+1$ bei beliebigem n ; da sie aber für $m = 0$ bei beliebigem n gilt, gilt sie für alle m bei beliebigem n .

5. Die Definition von $\xi(m, n)$ kann auch in der Form

$$\xi(m, n) = 0, \text{ falls } m \cdot n = 0$$

$$\xi(m+1, n+1) = \begin{cases} n+1, & \text{falls } m = 0 \\ \xi(m, 2), & \text{« } m \neq 0 \text{ und } n = 0 \\ \xi(m, \xi(m+1, n)) & \text{sonst} \end{cases}$$

aufgeschrieben werden. Sei der kürzeren Schreibweise halber

$$\beta(m, n, a, b) = \begin{cases} n+1, & \text{falls } m = 0 \\ a, & \text{« } m \neq 0 \text{ \& } n = 0 \\ b & \text{sonst;} \end{cases}$$

so ist klar, dass β eine primitiv-rekursive Funktion ist, und die Definition von $\xi(m, n)$ kann damit auf folgende einfache Form gebracht werden:

$$\xi(m, n) = 0, \text{ falls } m \cdot n = 0$$

$$\xi(m+1, n+1) = \beta(m, n, \xi(m, 2), \xi(m, \xi(m+1, n))) .$$

Aus dieser Funktion mit normierten Anfangswerten erhält man dann $\varphi(m, n)$ durch die Substitution

$$\varphi(m, n) = \xi(m+1, n+1) .$$

6. Durch die Normierung der Anfangswerte nebst dem Verfahren, das im Reduzieren der einfachen eingeschachtelten Rekursion angewandt wurde, lässt sich die allgemeine k -fache eingeschachtelte Rekursion auf die folgende »Normalform« zurückführen:

$$\varphi(n_1, \dots, n_k) = 0, \text{ falls } n_1 \cdot n_2 \dots n_k = 0$$

$$\varphi(n_1, \dots, n_{k+1}) = \beta(n_1, \dots, n_k, \varphi_1, \dots, \varphi_k),$$

wobei für $i = 1, 2, \dots, k$

$$\varphi_i = \varphi(n_1 + 1, \dots, n_{i-1} + 1, n_i, \gamma_1^{(i)}(n_1, \dots, n_k, \varphi(n_1 + 1, \dots, n_{k-1} + 1, n_k)), \dots, \gamma_{k-i}^{(i)}(n_1, \dots, n_k, \varphi(n_1 + 1, \dots, n_{k-1} + 1, n_k)))$$

ist. Hier lassen sich die Funktionen β und $\gamma_j^{(i)}$ für $i = 1, 2, \dots, k-1$; $j = 1, 2, \dots, k-i$ aus den in der ursprünglichen Definition angewandten Funktionen durch primitive Rekursionen und Substitutionen aufbauen; man sagt, dass sie *in den genannten bekannten Funktionen primitiv-rekursiv* sind.

In diesem Schema kommen bloss einmalige Einschachtelungen vor.

Wird für $k > 1$ eine höchstens k -stellige Funktion durch eine Rekursion, die nach weniger als k Variablen läuft, definiert, so kann sie auch durch k -fache Rekursion in Normalform und Substitution definiert werden. Ergibt z. B. die Iteration

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi(n_1 + 1) = \beta(\varphi(n_1))$$

die Funktion $\varphi(n_1)$, so kann man mit

$$\beta(n_1, \dots, n_k, a_1, \dots, a_k) = \beta(a_1),$$

den Spezialfall $\gamma_j^{(i)}(n_1, \dots, n_k, a_1, \dots, a_{k-1}) = n_1$ für $j = 1, 2, \dots, k-1$,

$$\varphi(n_1, \dots, n_k) = 0 \text{ falls } n_1 \cdot n_2 \dots n_k = 0$$

$$\varphi(n_1 + 1, \dots, n_k + 1) = \beta(\varphi(n_1, n_1, \dots, n_1))$$

der Normalform der k -fachen Rekursion aufschreiben; und daraus entsteht $\varphi(n_1)$ durch die Einsetzung:

$$\varphi(n_1) = \varphi(n_1, n_1, \dots, n_1).$$

Das gilt ja für $n_1 = 0$, und man sieht aus den Definitionen leicht, dass sich diese Eigenschaft von n_1 auf $n_1 + 1$ vererbt.

Die Funktionen, die aus 0 und $n + 1$ durch endlich viele Substitutionen und mehrfache Rekursionen aufgebaut werden können, werden *mehrfach-rekursive Funktionen* genannt; wenn dabei höchstens k -fache Rekursionen angewandt werden, heißen sie *k-rekursiv*. (Die primitiv-rekursiven Funktionen können daher auch 1-rekursiv genannt werden.) Die Behauptung vorhin (zu ihrem Beweis¹⁸ werde ich noch zurückkommen) kann auch folgendermassen formuliert werden: alle k -rekursiven Funktionen können aus primitiv-rekursiven Funktionen durch Substitutionen und k -fachen Rekursionen in Normalform aufgebaut werden. Man hat aber gar nicht alle primitiv-rekursive Funktionen zu Grunde zu legen. Nach Nr. 16 des § 7 lassen sich ja alle primitiv-rekursive Funktionen aus den Funktionen $n + 1$, *quadres*(n) und $a + n$ durch Substitutionen und Iterationen einstelliger Funktionen (an der Stelle 0) aufbauen; die letzte Definitionsart lässt sich aber für alle k auf k -fache Rekursion in Normalform und Substitution zurückführen. So kann man sämtliche k -rekursive Funktionen aus den Ausgangsfunktionen

$$n + 1, \quad \text{quadres}(n), \quad a + n$$

durch endlich viele Substitutionen und k -fache Rekursionen in Normalform erhalten.

§ 11. DAS DIAGONALVERFAHREN UND DIE MEHRFACHEN REKURSIONEN.

1. Auch ohne das Aufzeigen eines Beispiels, bereits aus Mächtigkeitsgründen kann man wissen, dass es nicht-primitiv-rekursive zahlentheoretische Funktionen geben muss. Die Menge der primitiv-rekursiven Funktionen ist ja abzählbar: man erhält aus den endlich vielen Ausgangsfunktionen durch einmalige Anwendung der endlich vielen zugelassenen Definitionsweisen endlich viele neue Funktionen; werden die Definitionsschemata noch einmal angewandt, so entstehen wieder endlich viele Funktionen, und so fort; und abzählbarmal endlich ist abzählbar. Die Menge aller zahlentheoretischen Funktionen ist aber bekanntlich von der Mächtigkeit des Kontinuums. Es bilden bereits die zahlentheoretischen Funktionen der Form

$$[\tau n]$$

eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums, wenn τ alle nicht-negativen reellen Werte durchläuft. So gibt es bereits unter diesen einfach gebildeten zahlentheoretischen Funktionen notwendigerweise nicht-primitiv-rekursive.

Für ein rationales $\tau = \frac{p}{q}$ ist $\left[\frac{p}{q} n\right] = \left[\frac{pn}{q}\right]$ primitiv-rekursiv; und in Nr. 26 des

§ 1 hat sich für die Basis e der natürlichen Logarithmen auch $[en]$ als primitiv-rekursiv erwiesen. Ähnlich der dort angewandten Schlussweise kann man

¹⁸⁾ PÉTER [5] § 2.

beweisen : für ein irrationales τ ist $[\tau n]$ dann und nur dann primitiv-rekursiv, wenn in der Faktoriellenentwicklung

$$\tau = a_0 + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_2}{2!} + \dots + \frac{a_n}{n!} + \dots$$

wo die Koeffizienten a_n nicht-negative Zahlen sind, und für $n = 1, 2, 3, \dots$

$$a_n \leq n - 1$$

gilt (es ist bekannt, und auch in Nr. 5—6 des § 24 dieses Buches wird gezeigt werden, dass alle nicht-negativen reellen Zahlen τ in solcher Form geschrieben werden können, und zwar für irrationales τ eindeutig), a_n eine primitiv-rekursive Funktion von n ist.

2. Im Beweis ist es entscheidend, dass es für ein irrationales τ über alle Grenzen ein solches n gibt, dass a_n entschieden kleiner als $n - 1$ ist : es ist nämlich für beliebiges N

$$\begin{aligned} \tau &\leq a_0 + \frac{a_1}{1!} + \dots + \frac{a_N}{N!} + \frac{N+1-1}{(N+1)!} + \frac{N+2-1}{(N+2)!} + \dots = \\ &= a_0 + \frac{a_1}{1!} + \dots + \frac{a_N}{N!} + \frac{1}{N!} - \frac{1}{(N+1)!} + \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!} + \dots = \\ &= a_0 + \frac{a_1}{1!} + \dots + \frac{a_N}{N!} + \frac{1}{N!}, \end{aligned}$$

das heisst

$$\tau \leq a_0 + \frac{a_1}{1!} + \dots + \frac{a_N}{N!} + \frac{1}{N!};$$

und hier gilt das Gleichheitszeichen nur dann, wenn für $n > N$ stets $a_n = n - 1$ gilt ; in diesem Fall ist aber τ als Summe endlich vieler Brüche rational. Ist τ irrational, so gilt für alle N die Ungleichheit, und so ist

$$\tau \cdot n = \left(a_0 + \frac{a_1}{1!} + \dots + \frac{a_n}{n!} \right) \cdot n + r_n,$$

mit

$$r_n < n \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

(für $n > N$ ist ja $n > 0$). Der Teil vor r_n ist, auf gemeinsamen Nenner gebracht, gleich

$$\frac{a_0 n! + \frac{a_1 n!}{1!} + \dots + \frac{a_n n!}{n!}}{(n-1)!},$$

und dazu muss wenigstens $\frac{1}{(n-1)!}$ addiert werden, um den ganzen Teil zu ändern ; es ist daher

$$[\tau n] = \left[\frac{s_n}{(n-1)!} \right],$$

wobei

$$s_n = a_0 n! + \frac{a_1 n!}{1!} + \dots + \frac{a_n n!}{n!}$$

notwendig ganz ist, und — da s_{n+1} eben um

$$\frac{a_{n+1} (n+1)!}{(n+1)!} = a_{n+1}$$

grösser als $(n+1) \cdot s_n$ ist — durch

$$s_0 = a_0$$

$$s_{n+1} = (n+1) s_n + a_{n+1}$$

definiert werden kann. Daher ist samt a_n auch s_n , und so auch $[\tau n]$ primitiv-rekursiv.

Umgekehrt, wenn $[\tau n]$ für irgendein irrationales τ primitiv-rekursiv ist, und die Faktoriellenentwicklung von τ

$$\tau = a_0 + \underbrace{\frac{a_1}{1!} + \dots + \frac{a_n}{n!}}_{s_n} + \underbrace{\frac{a_{n+1}}{(n+1)!} + \dots}_{r_n}$$

ist, dann gilt nach den Vorherigen

$$r_n' < \frac{1}{n!}$$

und so

$$\tau n! = n! s_n' + n! r_n',$$

wobei

$$n! s_n' = a_0 n! + a_1 \frac{n!}{1!} + \dots + a_n \frac{n!}{n!} = s_n$$

offenbar ganz, und

$$n! r_n' < 1,$$

also

$$[n! \tau] = s_n$$

ist. Daraus, und aus der rekursiven Definition von s_n ergibt sich

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= s_{n+1} - (n+1) s_n = s_{n+1} \div (n+1) s_n = \\ &= [(n+1)! \tau] \div (n+1) [n! \tau] \end{aligned}$$

und

$$a_0 = s_0 = [0! \tau] = [\tau \cdot 1].$$

Daher ist samt $[\tau n]$ auch a_n primitiv-rekursiv.

Folglich ist $[\tau n]$ für irrationales τ tatsächlich dann und nur dann primitiv-rekursiv, wenn die Koeffizienten a_n in der Faktoriellenentwicklung von τ die Werte einer primitiv-rekursiven Funktion sind.

3. Da natürlich auch die Menge der einstelligen primitiv-rekursiven Funktionen abzählbar ist, so liegt es an der Hand, eine nicht-primitiv-rekursive ein-

stellige Funktion mittels des CANTORSchen Diagonalverfahrens zu konstruieren. Diese Methode kann hier folgendermassen angewandt werden¹⁹. Sei

$$\varphi_0(n), \varphi_1(n), \varphi_2(n), \dots$$

eine effektive Aufzählung der einstelligen primitiv-rekursiven Funktionen. Die zum Index m gehörige Funktion, als Funktion von m und n sei

$$\varphi_m(n) = \varphi(m, n).$$

Dann kann die zweistellige Funktion $\varphi(m, n)$ nicht primitiv-rekursiv sein, denn samt der daraus durch Substitution entstehenden »Diagonalfunktion« $\varphi(n, n)$ (diese nimmt die Werte in der »Diagonale« der Tabelle

$$\varphi_0(0), \varphi_0(1), \varphi_0(2), \dots$$

$$\varphi_1(0), \varphi_1(1), \varphi_1(2), \dots$$

$$\varphi_2(0), \varphi_2(1), \varphi_2(2), \dots$$

.....

an) wäre auch $\varphi(n, n) + 1$ primitiv-rekursiv, und müsste so, als Funktion einer Variablen, mit irgendeinem Index m in unserer Folge vorkommen. Wäre aber

$$\varphi(n, n) + 1 = \varphi_m(n) = \varphi(m, n),$$

so würde sich daraus für $n = m$

$$\varphi(m, m) + 1 = \varphi(m, m),$$

also eine offenbare Unmöglichkeit ergeben.

Derselbe Gedankengang lässt sich freilich auch dann anwenden, wenn in der betreffenden Folge die einstelligen primitiv-rekursiven Funktionen auch mehrfach auftreten; die Hauptsache ist, dass sie sämtlich in der Folge vorkommen sollen.

4. Zur effektiven Abzählung der einstelligen primitiv-rekursiven Funktionen werde ich jene Form des zum Schluss des § 7 formulierten Satzes benutzen, dass sich diese Funktionen sämtlich von den Funktionen

$$n + 1 \quad \text{und} \quad \text{quadres}(n)$$

ausgehend, durch endlich viele Anwendungen der Definitionsschemata

$$\varphi(0) = 0$$

$$(1) \varphi(n) = \alpha(n) + \beta(n), \quad (2) \varphi(n) = \beta(\alpha(n)), \quad (3) \varphi(n+1) = \beta(\varphi(n))$$

aufbauen lassen (auf bereits gewonnene Funktionen $\alpha(n)$ und $\beta(n)$).

Unsere Folge wird also mit

$$\varphi_0(n) = n + 1, \quad \varphi_1(n) = \text{quadres}(n)$$

beginnen; und für $m > 1$ gebe ich durch Rekursion in Bezug auf den Index m an, was $\varphi_m(n)$ sein soll. Man hat drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $\varphi_m(n)$ durch das Schema (1), (2) oder (3) aus früheren Gliedern der Folge entsteht. Diese drei Fälle können z. B. darnach getrennt werden, ob m genau durch die 0-te, 1-te, oder eine grössere Potenz von 2 teilbar ist, (das heisst, ob der Wert von $\exp_0(m)$ eben 0, 1 oder grösser als 1 ist). Die früheren Funktionen, aus welchen $\varphi_m(n)$ aufgebaut wird, können z. B. die Indizes $\exp_1(m)$ und $\exp_2(m)$ erhalten (diese sind ja für $m > 0$ kleiner als m). Sei also

¹⁹) PÉTER [3] § 2. Siehe noch ROBINSON [2] Nr. 3.

$$\varphi_m(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{falls } m = 0 \\ \text{quadres}(n), & \text{falls } m = 1 \\ \varphi_{\text{exp}_0(m)}(n) + \varphi_{\text{exp}_1(m)}(n), & \text{falls } m > 1 \text{ und } \text{exp}_0(m) = 0 \\ \varphi_{\text{exp}_0(m)}(\varphi_{\text{exp}_1(m)}(n)), & \text{falls } m > 1 \text{ und } \text{exp}_0(m) = 1 \\ 0, & \text{falls } m > 1, \text{exp}_0(m) > 1 \text{ und } n = 0 \\ \varphi_{\text{exp}_0(m)}(\varphi_m(n-1)), & \text{falls } m > 1, \text{exp}_0(m) > 1 \text{ und } n \neq 0. \end{cases}$$

5. Ich zeige nun, dass eine beliebige primitiv-rekursive Funktion für ein geeignetes m (es tut nichts, dass auch für mehrere m) mit $\varphi_m(n)$ identisch ist.

Dies gilt nämlich erstens für die Ausgangsfunktionen, denn es ist

$$n + 1 = \varphi_0(n)$$

und

$$\text{quadres}(n) = \varphi_1(n).$$

Gilt ferner die Behauptung für die primitiv-rekursiven Funktionen $\alpha(n)$ und $\beta(n)$, und zwar ist

$$\alpha(n) = \varphi_k(n) \quad \text{und} \quad \beta(n) = \varphi_l(n),$$

so gilt sie auch für die Funktionen, welche aus diesen durch eines der zugelassenen Definitionsschemata entstehen.

Man gelangt zur Funktion, welche durch das Schema (1) aus α und β aufgebaut wird, wenn man die Primfaktorenzerlegung von m so wählt, dass $\text{exp}_0(m)=0$, $\text{exp}_1(m) = k$, $\text{exp}_2(m) = l$ sei, und zur Sicherung von $m > 1$ auch ein Primfaktor auf wenigstens 1-ten Potenz auftritt. Sei z. B.

$$m = 2^0 \cdot 3^k \cdot 5^l \cdot 7.$$

Dann ist wegen $m > 1$ und $\text{exp}_0(m) = 0$, nach der Definition

$$\begin{aligned} \varphi_m(n) &= \varphi_{2^0 \cdot 3^k \cdot 5^l \cdot 7}(n) = \varphi_{\text{exp}_1(m)}(n) + \varphi_{\text{exp}_2(m)}(n) = \\ &= \varphi_k(n) + \varphi_l(n) = \alpha(n) + \beta(n). \end{aligned}$$

Ganz ähnlich sieht man ein, dass man z. B. für

$$m = 2^1 \cdot 3^k \cdot 5^l$$

jene Funktion erhält, die aus α und β durch das Schema (2) aufgebaut wird. Hier wird bereits durch den Faktor 2^1 gesichert, dass $m > 1$ ist; und aus $m > 1$ und $\text{exp}_0(m) = 1$ folgt nach der Definition

$$\begin{aligned} \varphi_m(n) &= \varphi_{2^1 \cdot 3^k \cdot 5^l}(n) = \varphi_{\text{exp}_0(m)}(\varphi_{\text{exp}_1(m)}(n)) = \varphi_l(\varphi_k(n)) = \\ &= \beta(\alpha(n)). \end{aligned}$$

Endlich führt die Wahl

$$m = 2^2 \cdot 5^l$$

zur Funktion, die durch das Schema (3) aus β aufgebaut wird. In diesem Fall ist nämlich wegen $m > 1$ und $\text{exp}_0(m) = 2 > 1$ nach der Definition

$$\varphi_m(n) = \varphi_{2^2 \cdot 5^l}(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ \varphi_{\text{exp}_0(m)}(\varphi_m(n-1)) = \varphi_l(\varphi_m(n-1)) = \\ = \beta(\varphi_m(n-1)), & \text{falls } n \neq 0. \end{cases}$$

So ist

$$\varphi_m(0) = 0$$

$$\varphi_m(n+1) = \beta(\varphi_m(n)) ;$$

das ist aber tatsächlich die Anwendung vom Schema (3) auf β .

So gibt es in der Tat zu einer jeden einstelligen primitiv-rekursiven Funktion $\varphi(n)$ ein solches m , dass

$$\varphi(n) = \varphi_m(n)$$

besteht; es kann also nach den vorausgeschickten Betrachtungen die zweistellige Funktion $\varphi(m, n) = \varphi_m(n)$ und die daraus durch Substitution entstehende »Diagonalfunktion« $\varphi(n, n)$ nicht primitiv-rekursiv sein.

6. Betrachten wir näher die Definition von

$$\varphi_m(n) = \varphi(m, n) .$$

Darin wird ein Wert aus solchen — in einzelnen Fällen eingeschachtelten — φ -Werten aufgebaut, in welchen entweder das erste Argument kleiner als m (nicht notwendig eben die unmittelbar davor kommende Zahl) und das zweite Argument nicht kleiner als n , oder das erste Argument gleich m , aber das zweite Argument kleiner als n ist. Das ist also eine eingeschachtelte zweifache Rekursion (zugleich auch eine Wertverlaufsrekursion, sie kann aber durch die Methode des § 3, welche in Nr. 1 und 2 des § 6 auch auf eine zweifache Rekursion angewandt wurde, auf eine gewöhnliche zweifache Rekursion zurückgeführt werden). Somit haben wir also ein neues Beispiel dafür, dass die zweifache Rekursion von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinausführt.

7. Nach Nr. 16 des § 7 kann ganz ähnlich auch eine $r+2$ -stellige Funktion $\varphi(m, n, a_1, \dots, a_r)$ definiert werden, die für geeignete Werte von m mit einer beliebigen $r+1$ -stelligen primitiv-rekursiven Funktion identisch wird. Zum Beispiel kann eine dreistellige Funktion $\varphi(m, n, a)$, welche sämtliche zweistellige primitiv-rekursive Funktionen umfasst, etwas abweichend von der vorigen Definition von $\varphi(m, n)$ mit Rücksicht darauf definiert werden, dass im Aufbau der zweistelligen Funktionen ausser den Ausgangsfunktionen 0 und $n+1$ auch $a+n$ zu Grunde gelegt wird (siehe Nr. 16 des § 7); eben darum hat man in diesem Fall $\varphi(n) = a(n) + \beta(n)$ nicht unter die Definitionsschemata aufzunehmen; dafür ist aber hier auch das Substitutionschema

$$\varphi(n, a) = \beta(\alpha_1(n, a), \alpha_2(n, a))$$

für zweistellige Funktionen anzuwenden.

8. Das Diagonalverfahren kann bei beliebigem k auch auf die k -rekursiven Funktionen angewandt werden. Man kann ja auf Grund von Nr. 6 des vorigen Kapitels, ähnlich wie am Anfang dieses Kapitels für die primitiv-rekursiven Funktionen durchgedacht wurde, leicht einsehen, dass die Menge der k -rekursiven Funktionen bei beliebigem k abzählbar ist. Werden die k -stelligen k -rekursiven Funktionen in eine Folge

$$\varphi_1(n_1, \dots, n_k), \varphi_2(n_1, \dots, n_k), \dots$$

geordnet, so kann die $k+1$ -stellige Funktion

$$\varphi(m, n_1, \dots, n_k) = \varphi_m(n_1, \dots, n_k)$$

nicht k -rekursiv sein. Denn dann wäre auch die aus ihr durch Substitution entstehende Funktion $\varphi(n_1, n_1, n_2, \dots, n_k)$ von k Variablen k -rekursiv, und auch

die Funktion, die durch Addieren von 1 aus dieser entsteht; so müsste auch diese letztere Funktion in der obigen Folge vorkommen. So gäbe es ein m , für welches bei allen Werten von n_1, \dots, n_k die Gleichheit

$$\varphi(n_1, n_1, n_2, \dots, n_k) + 1 = \varphi(m, n_1, n_2, \dots, n_k)$$

bestehen würde. Daraus würde aber für $n_1 = n_2 = \dots = n_k = m$

$$\varphi(m, m, \dots, m) + 1 = \varphi(m, m, \dots, m),$$

also eine Unmöglichkeit folgen.

Die effektive Abzählung der k -stelligen k -rekursiven Funktionen nach Muster der oben Durchgeführten, bedeutet keine prinzipiellen Schwierigkeiten;²⁰ und die Definition der abzählenden Funktion erweist sich eine $k + 1$ -fache Rekursion. Es gilt also nicht nur für $k = 1$, sondern für ein jedes k der Satz: *die $k + 1$ -fache eingeschachtelte Rekursion führt von der Klasse der k -rekursiven Funktionen hinaus* (wir wissen dagegen, dass die uneingeschachtelte nicht einmal von der Klasse der 1-rekursiven Funktionen hinausführt).

§ 12. TRANSFINITE REKURSIONEN.

1. Wir sind zum Begriff der k -rekursiven Funktion gekommen, als wir ein Beispiel für eine nicht primitiv-rekursive Funktion gesucht haben. Aber besser nachgedacht, wäre es jedenfalls eine sehr willkürliche Abgrenzung gewesen, wenn wir uns auf die einfachen Rekursionen beschränkt hätten. Die rekursive Definition einer Funktion bedeutet ja, dass die Funktionswerte aus an vorangehenden Stellen angenommenen Werten aufgebaut werden. Handelt es sich z. B. um die Definition einer zweistelligen Funktion $\varphi(m, n)$, so sind die Stellen, die in Frage kommen:

$$\begin{array}{cccccc} (0, 0), & (0, 1), & (0, 2), \dots, & (0, n), & (0, n + 1), \dots & \\ (1, 0), & (1, 1), & (1, 2), \dots, & (1, n), & (1, n + 1), \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ (m, 0), & (m, 1), & (m, 2), \dots, & (m, n), & (m, n + 1), \dots & \\ (m + 1, 0), & (m + 1, 1), & (m + 1, 2), \dots, & (m + 1, n), & (m + 1, n + 1), \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

Es ist sehr willkürlich, nur jene Stellen als Vorgänger von $(m + 1, n + 1)$ zu betrachten, die *in früheren Reihen* vorkommen (das heisst wo das erste Argument kleiner als $m + 1$ ist), wie dies bei der einfachen Rekursion nach m der Fall war. Es ist viel natürlicher auch die vorangehenden Stellen $(m + 1, 0)$, $(m + 1, 1)$, \dots , $(m + 1, n)$ *derselben Reihe* als Vorgänger von $(m + 1, n + 1)$ zu betrachten. So kommt man aber zu einer solchen Rekursion, in welcher der Wert $\varphi(m + 1, n + 1)$ aus endlich vielen solchen φ -Werten aufgebaut wird, in welchen entweder das erste Argument kleiner als $m + 1$ ist (diese stehen in vorangehenden Reihen), oder das erste Argument $m + 1$, dafür aber das zweite kleiner als $n + 1$ ist (diese stehen in derselben Reihe vor $(m + 1, n + 1)$). Das ist aber eine zweifache Rekursion (sogar eine zweifache Wertverlaufs-

²⁰) PÉTER [5] § 4.

rekursion, da in ihr nicht nur die *unmittelbar* vor $(m+1, n+1)$ stehende Reihe, und in derselben Reihe nicht nur der *unmittelbare* Vorgänger $(m+1, n)$ dieser Stelle eine Rolle spielt).

Bei Zugrundelegung einer solchen Anordnung der Stellen ist eine Folge von Stellen, in der jedes Glied den Gliedern mit kleineren Indizes vorangeht, notwendig endlich; denn in derselben Reihe wie ein beliebiges Glied der Folge stehen nur endlich viele Stellen davor; und geht man von dieser Reihe auf eine beliebig entfernte Stelle der vorherigen Reihe über, so stehen auch vor dieser nur endlich viele Stellen in ihrer eigenen Reihe; usw. Auf Grund dieser Tatsache kann man leicht einsehen, dass die zweifach-rekursive Definition von $\varphi(m, n)$, die auf einer solchen Anordnung der Stellen beruht, die Zurückführung der Berechnung des Funktionswertes an einer beliebigen Stelle auf den Wert $\varphi(0, 0)$ in endlich vielen Schritten ermöglicht. Da in der Definition der Anfangswert $\varphi(0, 0)$ angegeben wird, so ist damit der Wert von $\varphi(m, n)$ an einer jeden Stelle bestimmbar.

2. Wird allgemein eine Funktion der Variablen $n_1, \dots, n_k, a_1, \dots, a_r$ durch eine k -fache Rekursion nach n_1, \dots, n_k definiert, so wird die Stelle $(m_1, \dots, m_k, b_1, \dots, b_r)$ als Vorgänger einer Stelle $(n_1, \dots, n_k, a_1, \dots, a_r)$ betrachtet, falls von links das erste vom entsprechenden n_i verschiedene m_i kleiner als dieses n_i ist; das heisst, wenn es ein i mit

$$1 \leq i \leq k$$

und

$$m_1 = n_1, \dots, m_{i-1} = n_{i-1}, m_i < n_i$$

gibt.

Bekanntlich hat eine solche Anordnung der Stellen den Ordnungstypus ω^k ; daher bietet sich zum Beweis eines Satzes über eine durch k -fache Rekursion definierte Funktion die transfinite Induktion vom Typus ω^k . Der Satz der transfiniten Induktion lässt sich z. B. für ω^2 so formulieren, dass falls eine Behauptung für die Stelle $(0, 0)$ gilt, und daraus, dass sie für alle Vorgänger der Stelle (m, n) in der oben genannten Anordnung gilt, auch auf die Stelle (m, n) folgt: sie für alle Stellen (m, n) gilt. Dieser Satz lässt sich aber bekanntlich²¹ auch mittels gewöhnlicher vollständiger Induktion beweisen; so wie auch die (Anwendung der transfiniten Rekursion fordernde) Beweise in Nr. 3 des § 9 und in Nr. 4 des § 10 auf gewöhnliche vollständige Induktionen aufgelöst wurden.

3. Nicht nur die Zahlenpaare, sondern auch die Zahlen selber lassen sich nach dem Typus ω^2 (und auch nach anderen Ordnungstypen der zweiten Zahlenklasse) anordnen. Das kann z. B. so geschehen, dass erst die ungeraden Zahlen der Grösse nach aufgezählt werden; dann die durch 2 teilbaren, aber durch 2^2 nicht teilbaren Zahlen; dann die durch 2^2 teilbaren, aber durch 2^3 nicht teilbaren Zahlen, usw.:

$$1, 3, 5, 7, \dots, \quad 2, 6, 10, 14, \dots, \quad 4, 12, 20, 28, \dots; \dots$$

Damit auch die 0 vorkommt, ziehen wir von allen Zahlen 1 ab:

$$0, 2, 4, 6, \dots, \quad 1, 5, 9, 13, \dots, \quad 3, 11, 19, 27, \dots; \dots$$

Dass a in dieser Anordnung vor b kommt, kann durch

$$a < b \\ \omega^2$$

bezeichnet werden.

²¹⁾ Siehe z. B. HILBERT-BERNAYS [1], Band II. § 5. Nr. 5c.

Es ist klar, dass in dieser Anordnung eine jede Zahl vorkommt, das heisst eine jede Zahl in der Form $2^m (2n + 1) - 1$ geschrieben werden kann. Die Beziehung

$$a < b \\ \omega^2$$

ist gleichbedeutend damit, dass

$$a = 2^{m_1} (2n_1 + 1) - 1, \quad b = 2^{m_2} (2n_2 + 1) - 1,$$

und entweder

$$m_1 < m_2,$$

oder

$$m_1 = m_2 \text{ und } n_1 < n_2$$

gilt.

4. In dieser Anordnung erhielt die Darstellung der Zahlen in der Form

$$r = 2^m (2n + 1) - 1$$

eine Rolle. Es ist klar, dass dabei die Differenz durch die arithmetische Differenz ersetzt werden kann, und dass

$$\sigma(m, n) = 2^m (2n + 1) \div 1$$

eine primitiv-rekursive Funktion ist. m und n sind ebenfalls primitiv-rekursive Funktionen von r :

$$m = \exp_0(r + 1)$$

und

$$n = \frac{\frac{r + 1}{2^m} - 1}{2};$$

wird also

$$e_0(r) = \exp_0(r + 1) \text{ und } e_1(r) = \left[\frac{\frac{r + 1}{2^{\exp_0(r + 1)}} - 1}{2} \right]$$

gesetzt, so ist

$$m = e_0(r) \text{ und } n = e_1(r).$$

Nach der Bedeutung dieser Funktionen ist

$$(1) \quad \sigma(e_0(r), e_1(r)) = r,$$

und

$$(2) \quad e_0(\sigma(m, n)) = m, \quad e_1(\sigma(m, n)) = n.$$

Da $\exp_0(1) = 0$ ist, so ist nach der Definition von e_0 und e_1

$$e_0(0) = 0 \text{ und } e_1(0) = 0;$$

und daraus folgt nach (1) wegen

$$\sigma(0, 0) = \sigma(e_0(0), e_1(0)):$$

$$(3) \quad \sigma(0, 0) = 0.$$

Die primitiv-rekursiven Funktionen $\sigma(m, n)$, $e_0(r)$ und $e_1(r)$ können die »charakterisierenden« Funktionen der Anordnung ω^2 genannt werden. Nach ihrer Bedeutung gilt nämlich

$$a \underset{\omega^2}{<} b$$

dann und nur dann, wenn entweder

$$e_0(a) < e_0(b)$$

oder

$$e_0(a) = e_0(b) \quad \text{und} \quad e_1(a) < e_1(b)$$

besteht.

5. Es ist naheliegend, auch dann von einer rekursiven Definition einer Funktion $\varphi(n)$ zu sprechen, wenn im Aufbau der Werte von φ nicht die kleineren Zahlen als Vorgänger einer Stelle n betrachtet werden, sondern jene Zahlen, die in einer Anordnung nach einem transfiniten Ordnungstypus, z. B. in der eben betrachteten Anordnung vom Typus ω^2 vor n stehen. Eine solche »transfiniten« Rekursion²² ist z. B.

$$\varphi(0) = 1$$

$$\varphi(r+1) = \beta(r, \varphi(\gamma(r+1))),$$

wobei $\beta(r, a)$ primitiv-rekursiv ist, und

$$\gamma(r) = \begin{cases} \sigma(e_0(r), e_1(r) \div 1), & \text{falls } \exp_0(e_0(r)) = 0 \text{ und } e_1(r) \neq 0 \\ \sigma(e_0(r) \div 1, (e_1(r))^2) & \text{sonst, d. h. falls } \exp_0(e_0(r)) \neq 0 \text{ oder } e_1(r) = 0; \end{cases}$$

da

$$\gamma(r+1) \underset{\omega^2}{<} r+1$$

gilt. Das gilt nämlich für $\exp_0(e_0(r+1)) = 0$ und $e_1(r+1) \neq 0$, da in diesem Fall

$$\gamma(r+1) = \sigma(e_0(r+1), e_1(r+1) \div 1),$$

und so nach (2)

$$e_0(\gamma(r+1)) = e_0(r+1) \quad \text{und} \quad e_1(\gamma(r+1)) = e_1(r+1) \div 1 < e_1(r+1)$$

ist. Und wenn $\exp_0(e_0(r+1)) \neq 0$ oder $e_1(r+1) = 0$ ist, so ist

$$\gamma(r+1) = \sigma(e_0(r+1) \div 1, (e_1(r+1))^2).$$

Hier ist $e_0(r+1) \neq 0$, denn das gilt natürlich für $\exp_0(e_0(r+1)) \neq 0$; und wenn bei $e_1(r+1) = 0$ auch $e_0(r+1) = 0$ wäre, so würde sich daraus nach (1) und (3)

$$r+1 = \sigma(e_0(r+1), e_1(r+1)) = \sigma(0, 0) = 0$$

ergeben, obwohl $r+1$ nicht 0 sein kann. Ist aber $e_0(r+1) \neq 0$, so kommt man durch Verwendung von (2) zu

$$e_0(\gamma(r+1)) = e_0(r+1) \div 1 < e_0(r+1),$$

und so ist auch in diesem Fall tatsächlich

$$\gamma(r+1) \underset{\omega^2}{<} r+1.$$

²²) Dieser Begriff wurde in ACKERMANN [2] § 6 eingeführt (mit anderer Benennung). In diesem Kapitel wird PÉTER [9] verfolgt.

6. Es kommt vor, dass in der Definition von $\varphi(r)$ ein Funktionswert mittels eines an grösserer Stelle angenommenen Funktionswertes angegeben wird. So ist z. B.

$$\varphi(27) = \beta(26, \varphi(\gamma(27))) .$$

Da nach der Definition der charakterisierenden Funktionen und nach der in Nr. 5. angegebenen Definition von γ

$e_0(27) = \exp_0(27 + 1) = \exp_0(28) = \exp_0(2^2 \cdot 7) = 2$ und $\exp_0(2) = 1 \neq 0$,
und daher

$$\gamma(27) = \sigma(e_0(27) \div 1, (e_1(27))^2) ,$$

und hier wegen

$$e_1(27) = \frac{28 - 1}{2} = 3$$

$\sigma(e_0(27) \div 1, (e_1(27))^2) = \sigma(1, 9) = 2^1 \cdot (2 \cdot 9 + 1) - 1 = 37$
ist, so ergibt die Definition den Wert von $\varphi(27)$ mittels $\varphi(37)$:

$$\varphi(27) = \beta(26, \varphi(37)) .$$

Dennoch kann der Wert $\varphi(27)$ in endlich vielen Schritten berechnet werden. Es ist nämlich

$$\varphi(37) = \beta(36, \varphi(\gamma(37))) .$$

Hier ist

ferner $e_0(37) = \exp_0(38) = \exp_0(2 \cdot 19) = 1$ und $\exp_0(1) = 0$,

$$e_1(37) = \frac{\frac{38}{2} - 1}{2} = 9 \neq 0 ,$$

also

und so $\gamma(37) = \sigma(e_0(37), e_1(37) \div 1) = \sigma(1, 8) = 2^1 \cdot (2 \cdot 8 + 1) - 1 = 33$,

$$\varphi(37) = \beta(36, \varphi(33)) .$$

Genau so berechnet man, dass

$$\varphi(33) = \beta(32, \varphi(29)) ,$$

$$\varphi(29) = \beta(28, \varphi(25)) ,$$

$$\varphi(25) = \beta(24, \varphi(21)) ,$$

$$\varphi(21) = \beta(20, \varphi(17)) ,$$

$$\varphi(17) = \beta(16, \varphi(13)) ,$$

$$\varphi(13) = \beta(12, \varphi(9)) ,$$

$$\varphi(9) = \beta(8, \varphi(5))$$

ist, bis man zu

$$\varphi(5) = \beta(4, \varphi(1))$$

gelangt. Bedenkt man jetzt noch, dass

$$\varphi(1) = \beta(0, \varphi(\gamma(1))),$$

ferner $e_0(1) = \exp_0(2) = 1$ und $\exp_0(0) = 0,$

$$e_1(1) = \frac{\frac{2}{2} - 1}{2} = 0$$

ist, und so nach (3)

$$\gamma(1) = \sigma(e_0(1) \div 1, (e_1(1))^2) = \sigma(0, 0) = 0,$$

so kann man endlich auf den Wert

$$\varphi(1) = \beta(0, \varphi(0)) = \beta(0, 1)$$

die Berechnung von $\varphi(27)$ zurückführen.

(Ist hier speziell

$$\beta(r, a) = r + a,$$

so ergibt die obige Berechnung

$$\begin{aligned} \varphi(37) &= 36 + \varphi(33) = \\ &= 36 + 32 + \varphi(29) = \\ &= 36 + 32 + 28 + \varphi(25) = \\ &= \dots\dots\dots = \\ &= 36 + 32 + 28 + \dots + 4 + 0 + \varphi(1) = \\ &= 180 + \varphi(1), \end{aligned}$$

ferner

$$\varphi(1) = 0 + 1 = 1 \quad \text{und} \quad \varphi(27) = 26 + \varphi(37);$$

also ist in diesem Fall

$$\varphi(27) = 26 + 180 + 1 = 207 .)$$

Und geht man von einer beliebigen solchen Stelle aus, deren Nachfolger durch eine Potenz von 2 mit geradem Exponenten teilbar ist, so wird der Nachfolger der in der Berechnung zuerst benutzten Stelle durch eine Potenz mit einem um 1 kleineren, also ungeraden Exponenten von 2 teilbar sein; und von hier an bleibt in den Primfaktorenzerlegungen der Nachfolger der benutzten Stellen die Potenz von 2 unverändert, und der damit multiplizierte ungerade Teil vermindert sich bei jedem Schritt um 2, bis er gleich 1 wird. So kommt man zu einer Stelle, deren Nachfolger eine Potenz von 2 ist; die Nachfolger der von hier an benutzten Stellen sind Potenzen von 2 mit bei jedem Schritt um 1 kleineren Exponenten. So kommt man endlich zu $\varphi(1)$; und darüber wissen wir schon Bescheid:

$$\varphi(1) = \beta(0, 1) .$$

Ähnlich lassen sich auch die Werte anderer transfiniten Rekursionen in endlich vielen Schritten berechnen; es können ja in einer Wohlordnung der Zahlen von einer gegebenen Zahl ausgehend nur endlich viele Schritte rückwärts getan werden.

7. Die rekursive Definition vom Typus ω^2 der Funktion $\varphi(n)$ lässt sich mit Hilfe der charakterisierenden Funktionen auf eine gewöhnliche zweifache Rekursion zurückführen. Ich schreibe nochmals die spezielle Definition

$$\varphi(0) = 1$$

$$\varphi(n+1) = \beta(n, \varphi(\gamma(n)) + 1)$$

auf. Sei

$$\psi(m, n) = \varphi(\sigma(m, n)),$$

also nach der Eigenschaft (1) der charakterisierenden Funktionen

$$\varphi(r) = \varphi(\sigma(e_0(r), e_1(r))) = \psi(e_0(r), e_1(r)).$$

So wird $\varphi(r)$ durch Substitution aus ψ und aus primitiv-rekursiven Funktionen aufgebaut. $\psi(m, n)$ lässt sich aber ebenfalls aus primitiv-rekursiven Funktionen durch eine zweifache Rekursion aufbauen.

Es ist nämlich vor allem nach (3)

$$\psi(0, 0) = \varphi(\sigma(0, 0)) = \varphi(0) = 1.$$

Da aber allgemein

$$\sigma(a, b) = 2^a(2b + 1) - 1$$

nur dann gleich 0 ist, wenn a und b beide gleich 0 sind, und so speziell $\sigma(0, n+1) \neq 0$ ist, so gilt

$$\psi(0, n+1) = \varphi(\sigma(0, n+1)) = \beta(\sigma(0, n+1) \div 1, \varphi(\gamma(\sigma(0, n+1)))) .$$

Hier ist, da nach (2)

$e_0(\sigma(0, n+1)) = 0$ (und freilich $\exp_0(0) = 0$) und $e_1(\sigma(0, n+1)) = n+1 \neq 0$ besteht, nach der Definition von γ

$$\gamma(\sigma(0, n+1)) = \sigma(0, (n+1) \div 1) = \sigma(0, n),$$

also

$$\begin{aligned} \psi(0, n+1) &= \beta(\sigma(0, n+1) \div 1, \varphi(\sigma(0, n))) = \\ &= \beta(\sigma(0, n+1) \div 1, \psi(0, n)). \end{aligned}$$

Ähnlich sieht man ein, dass $\sigma(m+1, 0) \neq 0$ und so

$$\psi(m+1, 0) = \varphi(\sigma(m+1, 0)) = \beta(\sigma(m+1, 0) \div 1, \varphi(\gamma(\sigma(m+1, 0))))$$

ist; hier erhält man, da nach (2)

$$e_1(\sigma(m+1, 0)) = 0$$

gilt, mit Verwendung des sich ebenfalls aus (2) ergebenden Wertes

$$e_0(\sigma(m+1, 0)) = m+1,$$

dass

$$\gamma(\sigma(m+1, 0)) = \sigma(m+1, 0^2) = \sigma(m, 0),$$

und so

$$\begin{aligned} \psi(m+1, 0) &= \beta(\sigma(m+1, 0) \div 1, \varphi(\sigma(m, 0))) = \\ &= \beta(\sigma(m+1, 0) \div 1, \psi(m, 0)) \end{aligned}$$

ist.

Endlich gilt

$$\sigma(m+1, n+1) \neq 0,$$

und damit

$$\Psi(m+1, n+1) = \varphi(\sigma(m+1, n+1)) = \beta(\sigma(m+1, n+1) \div 1, \varphi(\gamma(\sigma(m+1, n+1))));$$

hier ist nach (2)

$$\varrho_0(\sigma(m+1, n+1)) = m+1 \quad \text{und} \quad \varrho_1(\sigma(m+1, n+1)) = n+1,$$

also nach der Definition von γ , für $\exp_0(m+1) \neq 0$

$$\gamma(\sigma(m+1, n+1)) = \sigma(m+1) \div 1, (n+1)^2 = \sigma(m, (n+1)^2)$$

und so

$$\Psi(m+1, n+1) = \beta(\sigma(m+1, n+1) \div 1, \varphi(\sigma(m, (n+1)^2))) = \beta(\sigma(m+1, n+1) \div 1, \psi(m, (n+1)^2));$$

und für $\exp_0(m+1) = 0$

$$\gamma(\sigma(m+1, n+1)) = \sigma(m+1, (n+1) \div 1) = \sigma(m+1, n)$$

und so

$$\Psi(m+1, n+1) = \beta(\sigma(m+1, n+1) \div 1, \varphi(\sigma(m+1, n))) = \beta(\sigma(m+1, n+1) \div 1, \psi(m+1, n)).$$

8. Werden die Ergebnisse

$$\psi(0, 0) = 1$$

und

$$\psi(0, n+1) = \beta(\sigma(0, n+1) \div 1, \psi(0, n))$$

der vorigen Nummer zusammengefasst, so sieht man, dass diese eigentlich eine primitive Rekursion liefern, welche die Funktion $\psi(0, n)$ als eine selbständige einstellige Funktion definiert. Ein solches Schema

$$\alpha_1(0) = 1$$

$$\alpha_1(n+1) = \beta(\sigma(0, n+1) \div 1, \alpha_1(n))$$

bestimmt eindeutig die Funktion $\alpha_1(n)$; und so muss diese mit $\psi(0, n)$ identisch sein. Es ist ja

$$\psi(0, 0) = 1 = \alpha_1(0),$$

und wenn bereits für ein n

$$\psi(0, n) = \alpha_1(n)$$

gilt, so vererbt sich das wegen

$$\psi(0, n+1) = \beta(\sigma(0, n+1) \div 1, \psi(0, n)) = \beta(\sigma(0, n+1) \div 1, \alpha_1(n)) = \alpha_1(n+1)$$

auch auf $n+1$. Es gilt also

$$\psi(0, n) = \alpha_1(n)$$

tatsächlich für alle n .

Genau so ergibt sich auch

$$\psi(m, 0) = \alpha_2(m)$$

aus den Ergebnissen der vorigen Nummer, wobei die Funktion $\alpha_2(m)$ durch die primitive Rekursion

$$\alpha_2(0) = 1$$

$$\alpha_2(m+1) = \beta(\sigma(m+1, 0) \div 1, \alpha_2(m))$$

definiert wird. Wird noch der einfacheren Schreibweise halber die primitiv-rekursive Funktion

$$\beta_1(m, n, a, b) = \begin{cases} \beta(\sigma(m+1, n+1) \dot{-} 1, a), & \text{falls } \exp_0(m+1) \neq 0 \\ \beta(\sigma(m+1, n+1) \dot{-} 1, b), & \text{« } \exp_0(m+1) = 0 \end{cases}$$

eingeführt, so kann die in der vorigen Nummer auf viele Fälle getrennte Definition von $\psi(m, n)$ zu

$$\psi(0, n) = \alpha_1(n)$$

$$\psi(m+1, 0) = \alpha_2(m+1)$$

$$\psi(m+1, n+1) = \beta_1(m, n, \psi(m, (n+1)^2), \psi(m+1, n))$$

zusammengefasst werden. Das ist aber augenscheinlich eine aus primitiv-rekursiven Funktionen aufgebaute zweifache Rekursion.

Ganz ähnlich lassen sich auch alle andere transfiniten Rekursionen vom Typus ω^2 auf gewöhnliche zweifache Rekursionen zurückführen.

9. Auch der umgekehrte Weg ist gangbar: die Zurückführung der zweifachen Rekursion auf eine einfache transfiniten Rekursion vom Typus ω^2 . Das soll z. B. an der eingeschachtelten zweifachen Rekursion

$$\psi(m, n) = 1, \quad \text{falls } m \cdot n = 0$$

$$\psi(m+1, n+1) = \beta(m, n, \psi(m, \psi(m+1, n)))$$

durchgeführt werden.

Sei

$$r = \sigma(m, n),$$

also

$$m = \varrho_0(r),$$

$$n = \varrho_1(r).$$

Dann kann man eine Funktion $\varphi(r)$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(r) = \varphi(\sigma(m, n)) = \psi(m, n) = \psi(\varrho_0(r), \varrho_1(r))$$

folgendermassen definieren:

$$\varphi(r) = \psi(\varrho_0(r), \varrho_1(r)) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \varrho_0(r) \cdot \varrho_1(r) = 0 \\ & \text{und sonst} \\ \beta(\varrho_0(r) \dot{-} 1, \varrho_1(r) \dot{-} 1, \psi(\varrho_0(r) \dot{-} 1, \psi(\varrho_0(r), \varrho_1(r) \dot{-} 1))) = \\ = \beta(\varrho_0(r) \dot{-} 1, \varrho_1(r) \dot{-} 1, \varphi(\sigma(\varrho_0(r) \dot{-} 1, \\ \varrho_1(r) \dot{-} 1, \varphi(\sigma(\varrho_0(r), \varrho_1(r) \dot{-} 1))))). \end{cases}$$

Das enthält auch den Anfangswert

$$\varphi(0) = 1,$$

es ist ja

$$\varrho_0(0) \cdot \varrho_1(0) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Es sei der Kürze halber

$$\beta'(r, a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \varrho_0(r+1) \cdot \varrho_1(r+1) = 0 \\ \beta(\varrho_0(r+1) \dot{-} 1, \varrho_1(r+1) \dot{-} 1, a) & \text{sonst;} \end{cases}$$

so ist β' in β primitiv-rekursiv, und die Definition von $\varphi(r)$ kann in der Form

$$\varphi(0) = 1$$

$$\varphi(r+1) = \beta'(r, \varphi(\sigma(\varrho_0(r+1) \dot{-} 1, \varphi(\sigma(\varrho_0(r+1), \varrho_1(r+1) \dot{-} 1))))))$$

geschrieben werden. Da $\beta'(r, a)$ nur für $e_0(r+1) \neq 0$ und $e_1(r+1) \neq 0$ wahrhaftig von der zweiten Variablen a abhängt, kann das leicht auf die Form einer transfiniten Rekursion vom Typus ω^2 gebracht werden. Wird zum Beispiel

$$\gamma(r, a) = \begin{cases} \sigma(e_0(r+1) \div 1, a), & \text{falls } e_0(r+1) \neq 0, \quad e_1(r+1) \neq 0 \\ 0, & \text{falls } e_0(r+1) \cdot e_1(r+1) = 0 \end{cases}$$

und

$$\delta(r) = \begin{cases} \sigma(e_0(r+1) \cdot e_1(r+1) \div 1), & \text{falls } e_0(r+1) \neq 0, \quad e_1(r+1) \neq 0 \\ 0, & \text{falls } e_0(r+1) \cdot e_1(r+1) = 0 \end{cases}$$

gesetzt, so gestaltet sich die zweite Definitionsgleichung von φ — da der Wert von $\beta'(r, a)$ für $e_0(r+1) \cdot e_1(r+1)$ von a unabhängig (nämlich 1) ist — folgendermassen:

$$\varphi(r+1) = \beta'(r, \varphi(\gamma(r, \varphi(\delta(r))))).$$

Darin werden aber zum Aufbau des Wertes $\varphi(r+1)$ solche Funktionswerte verwendet, die für 0, oder im Fall $e_0(r+1) \neq 0, e_1(r+1) \neq 0$ für Argumente der Form

$$r_1 = \sigma(e_0(r+1) \div 1, \dots) \text{ und } r_2 = \sigma(e_0(r+1), e_1(r+1) \div 1)$$

angenommen werden. Nun gilt sicher

$$0 < r+1 \\ \omega^2$$

und für $e_0(r+1) \neq 0, e_1(r+1) \neq 0$

nach der Eigenschaft (2) der charakterisierenden Funktionen

$$e_0(r_1) = e_0(r+1) \div 1 < e_0(r+1),$$

ferner

$$e_0(r_2) = e_0(r+1) \quad \text{und} \quad e_1(r_2) = e_1(r+1) \div 1 < e_1(r+1);$$

also

$$r_1 < r+1 \quad \text{und} \quad r_2 < r+1. \\ \omega^2 \qquad \qquad \omega^2$$

So ist die Definition von $\varphi(r)$ tatsächlich eine transfiniten Rekursion vom Typus ω^2 , und man erhält $\psi(m, n)$ aus $\varphi(r)$ durch Substitution einer primitivrekursiven Funktion:

$$\psi(m, n) = \varphi(\sigma(m, n)).$$

10. Die Zahlen können natürlich auch nach dem Ordnungstypus ω^3 geordnet werden. Werden die nacheinander folgenden gewöhnlichen Folgen der in Nr. 3 dieses Kapitels untersuchten Anordnung vom Typus ω^2

$$0, 2, 4, 6, \dots, \quad 1, 5, 9, 13, \dots, \quad 3, 11, 19, 27, \dots$$

nach demselben Prinzip umgeordnet, so ergibt die Folge vom Typus ω der erhaltenen nach Typus ω^2 geordneten Mengen eine Anordnung vom Typus ω^3 .

In einer jeden gewöhnlichen Folge der hier angegebenen Anordnung vom Typus ω^2 folgen jene Zahlen der Grösse nach aufeinander, deren Nachfolger durch eine bestimmte Potenz von 2 teilbar sind. Ist diese Potenz 2^m , so können alle Zahlen der betreffenden Folge in der Form

$$r = 2^m(2n+1) - 1$$

geschrieben werden. In der Umordnung der Folge nach demselben Prinzip wird die Zahl n in der Form

$$n = 2^s (2t + 1) - 1$$

betrachtet; und die Zahl a der Folge gilt als Vorgänger einer Zahl b derselben Folge, falls bei

$$a = 2^m (2n_1 + 1) - 1, \quad b = 2^m (2n_2 + 1) - 1$$

und

$$n_1 = 2^{s_1} (2t_1 + 1) - 1, \quad n_2 = 2^{s_2} (2t_2 + 1) - 1$$

entweder

$$s_1 < s_2,$$

oder

$$s_1 = s_2 \quad \text{und} \quad t_1 < t_2$$

gilt. In unserer neuen Anordnung vom Typus ω^3 kommt also a vor b , kurz aufgeschrieben, es besteht

$$a < b, \\ \omega^3$$

wenn für

$$a = 2^{m_1} (2 (2^{s_1} (2t_1 + 1) - 1) + 1) - 1 \quad \text{und} \quad b = 2^{m_2} (2 (2^{s_2} (2t_2 + 1) - 1) + 1) - 1$$

entweder

$$m_1 < m_2,$$

oder

$$m_1 = m_2 \quad \text{und} \quad s_1 < s_2,$$

oder aber

$$m_1 = m_2, \quad s_1 = s_2 \quad \text{und} \quad t_1 < t_2$$

besteht.

Es ist klar, dass man dieses Verfahren ähnlich fortsetzen kann; und so erhält man Anordnungen der Zahlen vom Typus $\omega^4, \omega^5, \dots$. Und wenn in der Anordnung

$$0, 2, 4, 6, \dots, 1, 5, 9, 13, \dots, 3, 11, 19, 27, \dots; \dots$$

der Zahlen eine jede der aufeinander folgenden Folgen nach irgendeinem Typus von der Form ω^k umgeordnet wird, so dass dabei auch beliebig grosse k vorkommen, so erhält man eine Anordnung der Zahlen vom Typus ω^ω .

11. Nun kann man ähnlich zum Verfahren in Nr. 7—8—9 dieses Kapitels für beliebige $k > 1$ zeigen, dass sich die k -fachen gewöhnlichen Rekursionen und die einfachen transfiniten Rekursionen vom Typus ω^k gegenseitig aufeinander zurückführen lassen. Es lassen sich sogar die mehrfachen transfiniten Rekursionen mit demselben Verfahren auf einfache transfiniten Rekursionen zurückführen. Z. B. kann die Definition

$$\psi(m, n) = 1 \quad \text{falls } m \cdot n = 0$$

$$\psi(m + 1, n + 1) = \beta(m, n, \psi(\gamma_1(m + 1), \psi(m + 1, \gamma_2(m + 1)))) ,$$

wobei

$$\gamma_1(m + 1) < m + 1 \quad \text{und} \quad \gamma_2(n + 1) < n + 1 \\ \omega^2 \quad \quad \quad \omega^3$$

ist, als eine zweifache transfiniten Rekursion betrachtet werden: in der Variablen m als eine Rekursion vom Typus ω^2 , in der Variablen n als eine Rekursion vom

Typus ω^3 . Diese Definition lässt sich ähnlich zum in Nr. 9 dieses Kapitels angewandten Verfahren auf eine einfache Rekursion vom Typus ω^5 zurückführen.²³

12. Betrachten wir noch einmal die in Nr. 9 erhaltene transfiniten Rekursion

$$\varphi(0) = 1$$

$$\varphi(r+1) = \beta'(r, \varphi(\sigma(\varrho_0(r+1) \div 1, \varphi(\sigma(\varrho_0(r+1), \varrho_1(r+1) \div 1))))),$$

auf welche eine eingeschachtelte zweifache Rekursion zurückgeführt wurde.

Das Interessante an dieser Definition ist, dass in ihr ebenfalls eingeschachtelte Funktionswerte verwendet werden, obwohl sie eine *einstellige* Funktion definiert. In der gewöhnlichen Rekursion ist so etwas nicht vorgekommen. Bei einer Wertverlaufsrekursion könnte es zwar vorkommen, dass ein Wert $\varphi(r+1)$ zum Beispiel mit Hilfe von $\varphi(\gamma(r, \varphi(r)))$ angegeben wird, wenn man auf irgendeine Weise das Bestehen von

$$\gamma(r, \varphi(r)) \leq r$$

beweisen kann, z. B. falls

$$\gamma(r, a) = \begin{cases} r, & \text{für gerades } a \\ \lfloor \frac{r}{2} \rfloor, & \text{für ungerades } a \end{cases}$$

ist; aber die einfache Wertverlaufsrekursion lässt sich auf eine primitive, also uneingeschachtelte Rekursion auflösen. Für die transfiniten Rekursion bedeutet aber diese Eingeschachteltheit eine charakteristische Eigenschaft: allgemein lässt sie sich nicht auflösen. Denn man beobachtet leicht, dass sich die Anzahl der Einschachtelungen nicht ändert, wenn man durch die oben angegebene Methode von einer gewöhnlichen k -fachen Rekursion auf eine transfiniten Rekursion vom Typus ω^k übergeht, und umgekehrt. Die Einschachtelungen der gewöhnlichen k -fachen Rekursionen lassen sich aber nach Nr. 1 des § 10 allgemein nicht ausschalten: die eingeschachtelte mehrfache Rekursion führt ja von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinaus, die uneingeschachtelte hingegen nicht.

13. Nach dem Satz zum Schluss des § 10 lassen sich alle k -rekursiven Funktionen von den Funktionen

$$n + 1, \quad \text{quadres}(n) \quad \text{und} \quad a + n$$

ausgehend, durch endlich viele Substitutionen und k -fache Rekursionen von der »Normalform« aufbauen. Nun kann auch die Normalform der k -fachen Rekursion auf die einfach-rekursive Definition vom Typus ω^k einer einstelligen Funktion zurückgeführt werden; genauer erhält man eine jede k -rekursive Funktion durch Substitution primitiv-rekursiver Funktionen aus einer *einstelligen* Funktion, die durch eine solche transfiniten Rekursion definiert wird. Im angewandten transfiniten Rekursionschema nehmen höchstens 3-stellige primitiv-rekursive Funktionen teil. Will man sich auf die Definition von höchstens dreistelligen Funktionen beschränken, so hat man auch mittels Substitutionen nur höchstens 3-stellige Funktionen zu definieren. Das ermöglicht die Aufzählung sämtlicher (höchstens) 3-stelliger, mehrfach-rekursiver Funktionen in einer einzigen Folge, und die Anwendung des Diagonalverfahrens auf diese Folge. Die Durchführung dieses Programms verursacht keine prinzipielle Schwierigkeiten, ist aber etwas

²³) PÉTER [9] § 3.

langwierig. Kurz gefasst geschieht das folgendermassen: man gibt vom Index der aufzuzählenden Funktionen:

$$\varphi_1(n_1, n_2, n_3), \varphi_2(n_1, n_2, n_3), \dots$$

abhängend an, ob die betreffende Funktion durch Substitution aus Funktionen mit kleineren Indizes entsteht, oder durch Anwendung des Rekursionschemas vom Typus ω^k , und im letzteren Fall auch das, für welches k das Schema angewandt wird; dabei müssen freilich auch beliebig grosse k vorkommen (diese Forderung macht es erwünscht, dass man vom Normalschema der gewöhnlichen k -fachen Rekursion auf das Schema vom Typus ω^k übergeht, das eine *einstellige* Funktion definiert; die Verwendung des ursprünglichen Schemas würde zu einer unendlich vielstelligen »Diagonalfunktion« führen.)

So erhält man in Abhängigkeit von n_1, n_2, n_3 und vom Index m eine solche »Diagonalfunktion« $\varphi(m, n_1, n_2, n_3)$, welche für gar kein k k -rekursiv ausfallen kann; denn mit ihr wäre auch

$$\varphi(n_1, n_1, n_2, n_3) + 1$$

k -rekursiv, müsste also als eine Funktion von 3 Variablen in unserer Folge z. B. mit einem Index m_0 vorkommen; das heisst es müsste für alle n_1, n_2, n_3 die Gleichheit

$$\varphi(n_1, n_1, n_2, n_3) + 1 = \varphi(m_0, n_1, n_2, n_3)$$

bestehen. Daraus würde sich aber für $n_1 = n_2 = n_3 = m_0$

$$\varphi(m_0, m_0, m_0, m_0) + 1 = \varphi(m_0, m_0, m_0, m_0),$$

also eine Unmöglichkeit ergeben.

In $\varphi(m, n_1, n_2, n_3)$ lassen sich die Variablen wiederum zusammenziehen: $\varphi(m, n_1, n_2, n_3)$ kann durch Substitution primitiv-rekursiver Funktionen aus einer einstelligen Funktion $\varphi(r)$ aufgebaut werden; wobei in der Definition von $\varphi(r)$ solche Stellen der Form

$$r' = 2^{m'}(2n' + 1) - 1$$

als Vorgänger einer Stelle der Form

$$r = 2^m(2n + 1) - 1$$

auftreten, für welche entweder

$$m' < m,$$

oder

$$m' = m \quad \text{und} \quad n' < n_{\omega^k}$$

besteht; und hier k beliebig grosse Werte annimmt.

Daher ist die Definition von $\varphi(r)$ eine transfinite Rekursion vom Typus ω^ω . So kommt man zum Ergebnis, dass die transfinite Rekursion vom Typus ω^ω von der Klasse der gewöhnlichen mehrfach-rekursiven Funktionen hinausführt.²⁴

²⁴) Den ausführlichen Beweis siehe in PÉTER [9] § 4.

§ 13. REKURSIONEN DER HÖHEREN STUFEN.

1. Es bietet sich auch eine andere Möglichkeit zur Zurückführung der mehrfachen Rekursion auf eine Art einfache Rekursion.

Erinnern wir uns an unser erstes Beispiel für eine zweifache Rekursion: auf die Funktion, die durch sukzessive Iterationen aufgebaut wurde. Geht man dabei z. B. vom Produkt $a \cdot n$ aus, so kann diese Funktion durch

$$\psi_0(n, a) = a \cdot n$$

und für alle m

$$\psi_{m+1}(0, a) = a$$

$$\psi_{m+1}(n+1, a) = \psi_m(\psi_{m+1}(n, a), a)$$

definiert werden. So lässt sich die Definition der 3-stelligen Funktion

$$\psi(m, n, a) = \psi_m(n, a)$$

durch die folgende zweifache Rekursion angeben:

$$\psi(0, n, a) = a \cdot n$$

$$\psi(m+1, a) = a$$

$$\psi(m+1, n+1, a) = \psi(m, \psi(m+1, n, a), a).$$

Man könnte aber auch daran denken, dass man allgemein die n -fache Iterierte einer Funktion an der Stelle a als Funktion von n , a und $f(x)$ definiert; und dann diese allgemeine Iteration zur Definition von ψ verwendet.

Das bedeutet aber die Definition einer Funktion, die zwar als Werte nicht-negative ganze Zahlen annimmt, aber unter anderen auch von einer solchen Variablen abhängt, welche nicht Zahlen, sondern Funktionen durchläuft. Solche »Funktionsfunktionen« werde ich mit grossen lateinischen Buchstaben (und Funktionsvariablen mit kleinen lateinischen Buchstaben) bezeichnen, und das Zeichen einer von $f(x)$ abhängenden Funktion werde ich mit einem Index x versehen, um daran zu erinnern, dass hier x eine *gebundene Variable* ist: die definierte Funktion hängt nicht von x , sondern von $f(x)$ als Funktion von x ab. (Als eine solche Warnung ist auch das Zeichen dx in einem Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

aufzufassen: der Wert des Integrals hängt nicht von x , sondern von $f(x)$ als Funktion von x , und von den Grenzen a und b ab.)

Es sei also die n -fache Iteration einer Funktion $f(x)$ an der Stelle a

$$B_x(n, a, f(x)).$$

Diese Funktionsfunktion kann durch

$$B_x(0, a, f(x)) = a$$

$$B_x(n+1, a, f(x)) = f(B_x(n, a, f(x)))$$

definiert werden; denn nach dieser Definition nimmt $B_x(n, a, f(x))$ für $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ tatsächlich die Iterierten

$$a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \dots$$

der Funktion $f(x)$ als Werte an der Stelle a an.

Die angegebene Definition von $B_x(n, a, f(x))$ bestimmt eindeutig den Wert von B_x , wenn für die Zahlenvariablen konkrete Zahlen, für die Funktionsvariable eine solche Funktion eingesetzt wird, deren Werte an jeder Stelle berechnet werden können. Z. B. ist für $a = 2, n = 2, f(x) = x^2$ nach der Definition

$$B_x(2, 2, x^2) = (B_x(1, 2, x^2))^2 = ((B_x(0, 2, x^2))^2)^2 = (2^2)^2 = 16.$$

Die zweite und dritte Definitionsgleichung von $\psi(m, n, a)$ ergibt nun für ein gewisses $m + 1$:

$$\psi(m + 1, 0, a) = a,$$

$$\psi(m + 1, 1, a) = \psi(m, \psi(m + 1, 0, a), a) = \psi(m, a, a),$$

$$\psi(m + 1, 2, a) = \psi(m, \psi(m + 1, 1, a), a) = \psi(m, \psi(m, a, a), a),$$

$$\psi(m + 1, 3, a) = \psi(m, \psi(m + 1, 2, a), a) = \psi(m, \psi(m, \psi(m, a, a), a), a),$$

.....

und so nimmt $\psi(m + 1, n, a)$, wenn

$$f(x) = \psi(m, x, a)$$

gesetzt wird, für $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ die Werte

$$a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \dots$$

also die Werte von $B_x(n, a, f(x))$ an.

Daher kann $\psi(m, n, a)$ auch durch

$$\psi(0, n, a) = a \cdot n$$

$$\psi(m + 1, n, a) = B_x(n, a, \psi(m, x, a))$$

definiert werden. Diese Definition²⁵ ist eine einfache Rekursion nach m ; und die vorhin angegebene Definition von B_x eine einfache Rekursion nach n .

So ist es gelungen, die zweifach-rekursive Definition von ψ auf zwei einfache Rekursionen aufzulösen; aber auf Kosten der Komplikation, dass eine der Rekursionen keine zahlentheoretische Funktion, sondern eine Funktionsfunktion definiert. Durch die Vermittelung dieser neuartigen Rekursion sind wir zur Definition der zahlentheoretischen Funktion $\psi(m, n, a)$ gekommen.

2. In der Definition von B_x kommt übrigens die einfachste Funktionsfunktion vor: diejenige, welche der Zahl n und der Funktion $f(x)$ den Funktionswert $f(n)$ zuordnet. Wird

$$V_x(n, f(x)) = f(n)$$

gesetzt, so lautet die Definition von B_x

$$B_x(0, a, f(x)) = a$$

$$B_x(n + 1, a, f(x)) = V_y(B_x(n, a, f(x)), f(y))$$

(es ist ratsam die gebundenen Variablen verschränkter Funktionsfunktionen durch verschiedene Buchstaben zu bezeichnen). Hier erfolgt eine Substitution für eine Zahlenvariable von V_y . Bei unseren neuen Funktionen hat man immer

²⁵) ACKERMANN [1].

darauf zu achten, was für eine Variable eingesetzt werden kann: für die gebundene Variable x kann nichts eingesetzt werden; für die Funktionsvariable $f(x)$ eine zahlentheoretische Funktion von x (diese kann auch eine Funktionsfunktion als Funktion einer ihrer *Zahlenvariablen* sein); für Zahlenvariable ebensogut Zahlen als Funktionen oder Funktionsfunktionen (die Werte auch der letzteren sind ja Zahlen).

Werde ich in den Folgenden $f(n)$ schreiben, so ist das nur als eine kürzere Schreibweise statt $V_x(n, f(x))$ aufzufassen.

Schauen wir nach, wie der Wert von ψ an einer gegebenen Stelle auf Grund der neuen Definition berechnet werden kann. Es ist z. B.

$$\begin{aligned}\psi(2, 1, 2) &= B_x(1, 2, \psi(1, x, 2)) = V_y(B_x(0, 2, \psi(1, x, 2)), \psi(1, y, 2)) = \\ &= V_y(2, \psi(1, y, 2)) = \psi(1, 2, 2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi(1, 2, 2) &= B_x(2, 2, \psi(0, x, 2)) = V_y(B_x(1, 2, \psi(0, x, 2)), \psi(0, y, 2)) = \\ &= V_y(B_x(1, 2, 2x), 2y) = 2 \cdot B_x(1, 2, 2x); \end{aligned}$$

$$B_x(1, 2, 2x) = V_y(B_x(0, 2, 2x), 2y) = V_y(2, 2y) = 2 \cdot 2 = 4;$$

also

$$\psi(2, 1, 2) = \psi(1, 2, 2) = 2 \cdot B_x(1, 2, 2x) = 8.$$

3. Natürlich können beim Definieren zahlentheoretischer Funktionen als Hilfsmittel auch rekursive Definitionen von »Funktionsfunktionsfunktionen« verwendet werden, welche auch von solchen Variablen abhängen, die nicht Zahlen, auch nicht Funktionen, sondern Funktionsfunktionen durchlaufen, usw. Die rekursive Definition einer Funktionsfunktion wird »Rekursion der zweiten Stufe« genannt; auch diese verläuft nach einer Zahlenvariablen (und enthält — bei fiktiven Funktionsvariablen — auch die »Rekursion der ersten Stufe«, welche eine zahlentheoretische Funktion definiert, als Spezialfall). Genau so kann man auch »Rekursionen der dritten, vierten und höheren Stufe« zulassen; diese definieren Funktionen, die auch von Funktionsfunktionen, bzw. auch von Funktionsfunktionsfunktionen abhängen, usw.

Die zahlentheoretischen Funktionen, die sich aus 0, $n + 1$ und aus den Grundfunktionsfunktionen

$$\begin{aligned}V_{x_1}(n_1, f(x_1)) &= f(n_1), & V_{x_1 x_2}(n_1, n_2, f(x_1, x_2)) &= f(n_1, n_2), \\ V_{x_1 x_2 x_3}(n_1, n_2, n_3, f(x_1, x_2, x_3)) &= f(n_1, n_2, n_3), \dots \end{aligned}$$

durch zugelassene Substitutionen und durch Vermittlung von Rekursionen der zweiten Stufe aufbauen lassen, können »rekursive Funktionen der zweiten Stufe« genannt werden. Ähnlich können nach Einführung geeigneter Grundfunktionen auch »rekursive Funktionen der höheren Stufen« definiert werden.

4. Nun kann man beweisen,²⁶ dass sich eine jede mehrfach-rekursive Funktion der ersten Stufe auf der zweiten Stufe als eine 1-rekursive Funktion definieren lässt.

In Nr. 1 dieses Kapitels sahen wir schon ein Beispiel dafür, dass sich eine zweifache Rekursion auf zwei einfache auflösen lässt. Ein solches Auflösen gelingt immer.

²⁶) PÉTER [6]. Eine ausführliche Ausarbeitung des Gegenstandes wurde nicht publiziert; die Aufzeichnungen darüber sind während des Krieges verloren gegangen.

Es lässt sich nämlich nach Nr. 6 des § 10 eine jede zweifache Rekursion der ersten Stufe auf die Normalform

$$\varphi(0, n) = 0, \quad \varphi(m + 1, 0) = 0$$

$$\varphi(m + 1, n + 1) = \beta(m, n, \varphi(m, \gamma(m, n, \varphi(m + 1, n))), \varphi(m + 1, n))$$

bringen; und ich werde zeigen, dass sich diese Definition auf zwei einfache Rekursionen der zweiten Stufe auflösen lässt.

Beobachten wir die für ein bestimmtes $m + 1$ angenommenen Werte der Funktion φ :

$$\varphi(m + 1, 0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \varphi(m + 1, 1) &= \beta(m, 0, \varphi(m, \gamma(m, 0, \varphi(m + 1, 0))), \varphi(m + 1, 0)) = \\ &= \beta(m, 0, \varphi(m, \gamma(m, 0, 0)), 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(m + 1, 2) &= \beta(m, 1, \varphi(m, \gamma(m, 1, \varphi(m + 1, 1))), \varphi(m + 1, 1)) = \\ &= \beta(m, 1, \varphi(m, \gamma(m, 1, \beta(m, 0, \varphi(m, \gamma(m, 0, 0))), 0))), \beta(m, 0, \varphi(m, \gamma(m, 0, 0)), 0)), \end{aligned}$$

.....
Wird an der rechten Seite eine Funktionsvariable $f(x)$ für $\varphi(m, x)$ eingesetzt, so erhält man eine solche Funktion $B_x(m, n, f(x))$, für welche sich bei $n = 0, 1, 2, \dots$

$$B_x(m, 0, f(x)) = 0,$$

$$B_x(m, 1, f(x)) = \beta(m, 0, f(\gamma(m, 0, 0)), 0),$$

$$\begin{aligned} B_x(m, 2, f(x)) &= \beta(m, 1, f(\gamma(m, 1, \beta(m, 0, f(\gamma(m, 0, 0))), 0))), \\ &\quad , \beta(m, 0, f(\gamma(m, 0, 0)), 0)), \end{aligned}$$

.....
ergibt; und so kann $B_x(m, n, f(x))$ durch

$$B_x(m, 0, f(x)) = 0$$

$$B_x(m, n + 1, f(x)) = \beta(m, n, f(\gamma(m, n, B_x(m, n, f(x))), B_x(m, n, f(x)))$$

definiert werden. Da ferner $B_x(m, n, f(x))$ für $f(x) = \varphi(m, x)$ und für $n = 0, 1, 2, \dots$ eben die Werte von $\varphi(m + 1, n)$ annimmt, so kann man die Funktion $\varphi(m, n)$ durch

$$\varphi(0, n) = 0$$

$$\varphi(m + 1, n) = B_x(m, n, \varphi(m, x))$$

definieren. Es ist aber diese Definition ebenso als auch die Definition von $B_x(m, n, f(x))$ eine einfache Rekursion der zweiten Stufe.

5. Der Gedankengang der vorigen Nummer kann folgendermassen zu einem exakten Beweis umformt werden:

Sei $\varphi(m, n)$ durch die zweifache Rekursion

$$\varphi(0, n) = 0, \quad \varphi(m + 1, 0) = 0$$

$$\varphi(m + 1, n + 1) = \beta(m, n, \varphi(m, \gamma(m, n, \varphi(m + 1, n))), \varphi(m + 1, n))$$

definiert, und definieren wir eine Funktionsfunktion $B_x(m, n, f(x))$ und eine Funktion $\psi(m, n)$ durch die einfachen Rekursionen der zweiten Stufe:

$$B_x(m, 0, f(x)) = 0$$

$$B_x(m, n + 1, f(x)) = \beta(m, n, f(\gamma(m, n, B_x(m, n, f(x))), B_x(m, n, f(x)))$$

und

$$\psi(0, n) = 0$$

$$\psi(m+1, n) = B_x(m, n, \psi(m, x)) .$$

Ich behaupte, dass für alle m und n

$$\psi(m, n) = \varphi(m, n)$$

besteht. Das kann durch transfinite Induktion bewiesen werden. Erstens gilt die Behauptung an der Stelle $(0, 0)$, da

$$\psi(0, 0) = 0 = \varphi(0, 0)$$

ist; und ich werde zeigen, dass sie sich von allen Vorgängern einer Stelle (m, n) auch auf die Stelle (m, n) vererbt, wobei jene Stellen als Vorgänger gelten, in welchen entweder das erste Argument kleiner als $m+1$, oder das erste Argument $m+1$, aber das zweite kleiner als $n+1$ ist. Es genügt dies für $m \neq 0$ und $n \neq 0$ zu zeigen, denn für $m = 0$ ist

$$\psi(0, n) = 0 = \varphi(0, n) ,$$

und für $n = 0$ ist

$$\psi(m+1, 0) = B_x(m, 0, \psi(m, x)) = 0 = \varphi(m+1, 0) .$$

Nehmen wir also an, dass die Behauptung bereits für alle Vorgänger der Stelle $(m+1, n+1)$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} \psi(m+1, n+1) &= B_x(m, n+1, \psi(m, x)) = \\ &= \beta(m, n, \psi(m, \gamma(m, n, B_x(m, n, \psi(m, x)))) , B_x(m, n, \psi(m, x))) = \\ &= \beta(m, n, \psi(m, \gamma(m, n, \psi(m+1, n))) , \psi(m+1, n)) = \\ &= \beta(m, n, \varphi(m, \gamma(m, n, \varphi(m+1, n))) , \varphi(m+1, n)) = \\ &= \varphi(m+1, n+1) . \end{aligned}$$

6. Eine drei- oder mehrfache Rekursion der ersten Stufe kann ähnlich Schritt für Schritt auf nach immer weniger Variablen laufende Rekursionen der zweiten Stufe zurückgeführt werden. Es ist z. B. nach Nr. 6 des § 10 die Normalform der dreifachen Rekursion:

$$\varphi(m, n, r) = 0 \quad \text{falls} \quad m \cdot n \cdot r = 0$$

$$\begin{aligned} \varphi(m+1, n+1, r+1) &= \\ &= \beta(m, n, r, \varphi(m, \gamma_1(m, n, r, \varphi(m+1, n+1, r)), \gamma_2(m, n, r, \varphi(m+1, n+1, r))), \\ &\quad , \varphi(m+1, n, \gamma_3(m, n, r, \varphi(m+1, n+1, r))), \varphi(m+1, n+1, r)) . \end{aligned}$$

Wird hier für $\varphi(m, x, y)$ die Funktionsvariable $f(x, y)$ und für $\varphi(m+1, n, y)$ die Funktionsvariable $g(y)$ eingesetzt, so gelangt man zu einer Funktionsfunktion $B_{xy}(m, n, r, f(x, y), g(y))$, die durch

$$B_{xy}(m, n, 0, f(x, y), g(y)) = 0$$

$$\begin{aligned} B_{xy}(m, n, r+1, f(x, y), g(y)) &= \\ &= \beta(m, n, r, f(\gamma_1(m, n, r, B_{xy}(m, n, r, f(x, y), g(y))), \gamma_2(m, n, r, B_{xy}(m, n, r, \\ &\quad , f(x, y), g(y)))) , g(\gamma_3(m, n, r, B_{xy}(m, n, r, f(x, y), g(y)))) , B_{xy}(m, n, r, f(x, y), g(y))) \end{aligned}$$

definiert werden kann.

Es ist klar, dass $B_{xy}(m, n, r, f(x, y), g(y))$ für $r = 0, 1, 2, \dots$ der Reihe nach die Werte von $\varphi(m+1, n+1, r)$ annimmt, wenn für $f(x, y)$ und $g(y)$

wieder $\varphi(m, x, y)$ bzw. $\varphi(m+1, n, y)$ eingesetzt wird. Nach Muster der vorigen Nummer sieht man davon leicht ein, dass sich $\varphi(m, n, r)$ auch durch

$$\varphi(m, n, r) = 0 \quad \text{falls } m \cdot n \cdot r = 0$$

$\varphi(m+1, n+1, r) = B_{xy}(m, n, r, \varphi(m, x, y), \varphi(m+1, n, y))$ definieren lässt.

Die Definition von B_{xy} ist eine *einfache* Rekursion der 2-ten Stufe nach r ; und die jetzt angegebene Definition von φ ist eine *zweifache* Rekursion. Die letztere lässt sich durch die Methode, die in den beiden vorigen Nummern angewandt wurde, auf die einfachen Rekursionen der 2-ten Stufe

$$B'_{xy}(m, 0, r, f(x, y)) = 0$$

und $B'_{xy}(m, n+1, r, f(x, y)) = B_{xy}(m, n, r, f(x, y), B'_{xy}(m, n, y, f(x, y)))$

$$\psi(0, n, r) = 0$$

$$\psi(m+1, n, r) = B'_{xy}(m, n, r, \psi(m, x, y))$$

auflösen: man kann durch transfinite Induktion beweisen, dass für alle m, n, r

$$\psi(m, n, r) = \varphi(m, n, r)$$

gilt.

Ähnlich sieht man ein, dass sich eine beliebige k -fache Rekursion der ersten Stufe auf k einfache Rekursionen der zweiten Stufe zurückführen lässt; und so gehören tatsächlich sämtliche mehrfach-rekursive Funktionen der ersten Stufe unter die 1-rekursiven Funktionen der zweiten Stufe.

7. Auch der umgekehrte Weg ist gangbar: die Darstellung von rekursiven Funktionen der 2-ten Stufe als mehrfach-rekursive Funktionen der ersten Stufe.

Betrachten wir ein verhältnismässig einfaches Beispiel. Sei

$$\psi(0, n, a) = a$$

$$\psi(m+1, n, a) = B_x(m, n, a, \psi(m, n, x)),$$

wobei B_x durch die zweifache Rekursion der zweiten Stufe

$$B_x(m, n, a, f(x)) = a(a), \quad \text{falls } m \cdot n = 0$$

$B_x(m+1, n+1, a, f(x)) = \beta(m, n, a, f(B_x(m, B_y(m+1, n, a, f(y)), a, f(x))))$ definiert wird, wobei α und β primitiv-rekursiv sind.

Um an der rechten Seite der zweiten Definitionsgleichung von ψ die Abhängigkeit von B_x und von ψ von ihren Variablen, gesondert in Betracht nehmen zu können, wird die Hilfsfunktion

$$\varphi(m, n, r, a, b) = B_x(m, n, a, \psi(r, b, x))$$

eingeführt.

Von der Definition von φ und B_x ergibt sich für $m \cdot n = 0$

$$\varphi(m, n, r, a, b) = \alpha(a).$$

Wenn auch noch die Definition von ψ benutzt wird, erhält man

$$\begin{aligned} \varphi(m+1, n+1, 0, a, b) &= B_x(m+1, n+1, a, \psi(0, b, x)) = \\ &= \beta(m, n, a, \psi(0, b, B_x(m, B_y(m+1, n, a, \psi(0, b, y)), a, \psi(0, b, x)))) = \\ &= \beta(m, n, a, \psi(0, b, \varphi(m, \varphi(m+1, n, 0, a, b), 0, a, b))) = \\ &= \beta(m, n, a, \varphi(m, \varphi(m+1, n, 0, a, b), 0, a, b)) \end{aligned}$$

und

einzigsten zusammengezogen werden. So kann man sich z. B. in der Untersuchung der zweifachen Rekursionen auf die Definition von Funktionen mit einem einzigen Parameter, und auf erste Definitionsgleichungen der Form

$$\varphi(m, n, a) = 0, \quad \text{falls } m \cdot n = 0$$

beschränken.

In der zweiten Definitionsgleichung können dabei die kompliziertesten Einschachtelungen vorkommen. Betrachten wir einen verhältnismässig einfachen Fall:

$$\varphi(m+1, n+1, a) = \beta_1(m, n, a, \varphi(m, \beta_2(m, n, a, \varphi(m+1, n, \beta_3(m, n, a))), a)).$$

Hier wird die rechte Seite aus den »Komponenten« $\beta_1(m, n, y_1, y_2)$, $\beta_2(m, n, y_1, y_2)$ und $\beta_3(m, n, y_1)$ zusammengesetzt. Werden für diese der Reihe nach die Funktionsvariablen $h_1(y_1, y_2)$, $h_2(y_1, y_2)$, $h_3(y_1)$, und für $\varphi(m, x_1, x_2)$ und $\varphi(m+1, n, x_1)$ die Funktionsvariablen $f(x_1, x_2)$ bzw. $g(x_1)$ eingesetzt, so kommt an die Stelle von $\beta_3(m, n, a)$

$$h_3(a) = V_{y_1}(a, h_3(y_1)),$$

an die Stelle von $\varphi(m+1, n, \beta_3(m, n, a))$

$$g(h_3(a)) = V_{x_1}(h_3(a), g(x_1)) = V_{x_1}(V_{y_1}(a, h_3(y_1)), g(x_1)),$$

an die Stelle von $\beta_2(m, n, a, \varphi(m+1, n, \beta_3(m, n, a)))$

$$\begin{aligned} h_2(a, g(h_3(a))) &= V_{y_1 y_2}(a, g(h_3(a)), h_2(y_1, y_2)) = \\ &= V_{y_1 y_2}(a, V_{x_1}(V_{y_1}(a, h_3(y_1)), g(x_1)), h_2(y_1, y_2)), \end{aligned}$$

an die Stelle von $\varphi(m, \beta_2(m, n, a, \varphi(m+1, n, \beta_3(m, n, a))))$, a)

$$f(h_2(a, g(h_3(a))), a) = V_{x_1 x_2}(h_2(a, g(h_3(a))), a, f(x_1, x_2)) =$$

$$= V_{x_1 x_2}(V_{y_1 y_2}(a, V_{x_1}(V_{y_1}(a, h_3(y_1)), g(x_1)), h_2(y_1, y_2)), a, f(x_1, x_2)),$$

endlich an die Stelle der ganzen rechten Seite der zweiten Definitionsgleichung von φ das Ergebnis der Einschachtelung von a und vom zuletzt erhaltenen Ausdruck in $h_1(y_1, y_2)$ (das für $\beta_1(m, n, y_1, y_2)$ steht). So gelangt man zur folgenden Funktionsfunktion:

$$\begin{aligned} F_{x_1 x_2 y_1 y_2}(a, h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2), h_3(y_1), f(x_1, x_2), g(x_1)) &= \\ &= h_1(a, f(h_2(a, g(h_3(a))), a)) = \\ &= V_{y_1 y_2}(a, f(h_2(a, g(h_3(a))), a), h_1(y_1, y_2)) = \\ &= V_{y_1 y_2}(a, V_{x_1 x_2}(V_{y_1 y_2}(a, V_{x_1}(V_{y_1}(a, h_3(y_1)), g(x_1)), h_2(y_1, y_2)), a, f(x_1, x_2)), \\ &\quad , h_1(y_1, y_2)). \end{aligned}$$

Man sieht, dass die Funktionsfunktion F aus a und aus den »Substitutionswert-Funktionsfunktionen« V durch Substitutionen aufgebaut wird. Es sollen allgemein die Ausdrücke, die so aufgebaut werden, »Substitutionsterme« genannt werden. Mit Hilfe von F lässt sich nun die zweite Definitionsgleichung von φ als

$$\varphi(m+1, n+1, a) =$$

$$F_{x_1 x_2 y_1 y_2}(a, \beta_1(m, n, y_1, y_2), \beta_2(m, n, y_1, y_2), \beta_3(m, n, y_1), \varphi(m, x_1, x_2), \varphi(m+1, n, x_1))$$

aufschreiben.

Genau so sieht man ein, dass die beliebig verwickelt eingeschachtelte rechte Seite der zweiten Definitionsgleichung einer beliebigen zweifachen Rekursion aus einem »Substitutionsterm« V so entsteht, dass man darin für die Funk-

tionsvariablen teils die bekannten »Komponenten« β_i der Definition, teils $\varphi(m, x_1, x_2)$ und $\varphi(m+1, n, x_1)$ einsetzt (wobei φ die durch die Rekursion definierte Funktion ist). Durch Einführung fiktiver Variablen kann man erreichen, dass alle Komponenten β_i als Funktionen von m, n und von anderen übereinstimmenden Variablen auftreten. So lässt sich jede zweifache Rekursion nach Normierung der Anfangswerte und nach Zusammenziehen der Parameter in einem einzigen, in der Form

$$\varphi(m, n, a) = 0, \quad \text{falls } m \cdot n = 0$$

$$\varphi(m+1, n+1, a) = F_{x_1 x_2 y_1 \dots y_r}(a, \beta_1(m, n, y_1, \dots, y_r), \dots, \beta_s(m, n, y_1, \dots, y_r), \varphi(m, x_1, x_2), \varphi(m+1, n, x_1))$$

aufschreiben, wobei F ein Substitutionsterm ist.

2. Nun lässt sich diese Rekursion durch ein ähnliches Verfahren, wie im § 5 die Definition von $\binom{n}{a}$ auf primitive Rekursionen zurückgeführt wurde, auf eine gewisse Normalform bringen.

Nach der Definition ist

$$\varphi(m+1, 0, a) = 0$$

$$\varphi(m+1, 1, a) = F_{x_1 x_2 y_1 \dots y_r}(a, \beta_1(m, 0, y_1, \dots, y_r), \dots, \beta_s(m, 0, y_1, \dots, y_r), \varphi(m, x_1, x_2), 0),$$

$$\begin{aligned} \varphi(m+1, 2, a) &= F_{x_1 x_2 y_1 \dots y_r}(a, \beta_1(m, 1, y_1, \dots, y_r), \dots, \beta_s(m, 1, y_1, \dots, y_r), \\ &\quad \varphi(m, x_1, x_2), \varphi(m+1, 1, x_1)) = \\ &= F_{x_1 x_2 y_1 \dots y_r}(a, \beta_1(m, 1, y_1, \dots, y_r), \dots, \beta_s(m, 1, y_1, \dots, y_r), \\ &\quad \varphi(m, x_1, x_2), \\ &\quad F_{x'_1 x'_2 y'_1 \dots y'_r}(x_1, \beta_1(m, 0, y'_1, \dots, y'_r), \dots, \\ &\quad \beta_s(m, 0, y'_1, \dots, y'_r), \varphi(m, x'_1, x'_2), 0)), \end{aligned}$$

Man sieht, dass $\varphi(m+1, n+1, a)$ für ein jedes n durch Substitutionen so aufgebaut werden kann, dass man dabei das in der ursprünglichen Definition auftretende $\varphi(m+1, n, x_1)$ nicht zu benutzen hat; dafür treten im Aufbau auch solche Ausdrücke $\beta_i(m, t, y_1, \dots, y_r)$ auf, in welchen $t \leq n$ ist.

Wird also eine solche Hilfsfunktion $\psi(m, n, a)$ eingeführt, dass

$$\psi(m, n, a) = 0, \quad \text{falls } m \cdot n = 0$$

ist, ferner unter den Werten der Hilfsfunktion auch a vorkommt, und samt bereits angenommenen Werten y_1, \dots, y_r auch $\beta_i(m, t, y_1, \dots, y_r)$ für beliebiges t , samt x_1 und x_2 auch $\varphi(m, x_1, x_2)$: so kommen alle Werte von φ unter den Werten von ψ vor. Genauer, es gilt für alle m und n , bei zu n geeignetem \varkappa :

$$\varphi(m+1, n, a) = \psi(m+1, \varkappa, a)$$

In der Untersuchung der einfach-rekursiven Definition von $\binom{n}{a}$ ist die Forderung, dass die Hilfsfunktion auch gewisse φ -Werte annehmen soll, nicht aufgetreten. Deshalb wird jetzt die Definition der Hilfsfunktion komplizierter ausfallen als damals: sie wird eingeschachtelt sein. Aber die auftretende Ein-

schachtelung wird nur einmalig sein, und so wird die Definition der Hilfsfunktion ψ allgemein einfacher werden, als die Definition der betrachteten Funktion. \varkappa wird sich auch jetzt als primitiv-rekursive Funktion von n erweisen; aber der Aufbau von \varkappa muss jetzt verschränkt mit dem Aufbau von ψ geschehen.

3. Sei also

$$\psi(m, n, a) = 0, \text{ falls } m \cdot n = 0;$$

dann ist

$$\psi(m+1, 0, a) = 0 = \varphi(m+1, 0, a),$$

folglich kann die Definition von $\varkappa(n)$ mit

$$\varkappa(0) = 0$$

beginnen. So gilt bereits für $m \cdot n = 0$

$$\varphi(m, n, a) = \psi(m, \varkappa(n), a).$$

Als Vorgänger einer Stelle n (wie auch bisher öfters) werde ich die Exponenten in der Primfaktorenzerlegung von n benutzen; und die Fälle werde ich darnach trennen, wie gross hier der Exponent von 2, das heisst $\exp_0(n)$ ist. Sei also (gleich in Betracht genommen, dass für $\varphi(m, x_1, x_2)$ bei geeignetem $\varkappa(n)$ hier $\psi(m, \varkappa(x_1), x_2)$ gesetzt werden darf):

$$\psi(m+1, n+1, a) = \begin{cases} a, & \text{falls } \exp_0(n+1) = 0 \\ \beta_{\exp_0(n+1)}(m, \exp_1(n+1), \psi(m+1, \exp_2(n+1), a), \dots \\ \quad, \psi(m+1, \exp_{r+1}(n+1), a)), & \text{falls } 1 \leq \exp_0(n+1) \leq s \\ \psi(m, \varkappa(\psi(m+1, \exp_1(n+1), a)), \\ \quad, \psi(m+1, \exp_2(n+1), a)), & \text{falls } \exp_0(n+1) = s+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die so definierte Funktion ψ genügt bei geeigneter Wahl von $\varkappa(n)$ den Forderungen.

Erstens ist wegen $\exp_0(1) = 0$ zum Beispiel

$$(1) \quad \psi(m+1, 1, a) = a.$$

Ferner nimmt ψ samt den Werten

$$y_1 = \psi(m+1, l_1, a), \dots, y_r = \psi(m+1, l_r, a)$$

bei beliebigem t auch die Werte

$$\beta_i(m, t, y_1, \dots, y_r) \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

an; man hat $n+1$ nur so zu wählen, dass

$\exp_0(n+1) = i, \exp_1(n+1) = t, \exp_2(n+1) = l_1, \dots, \exp_{r+1}(n+1) = l_r$ bestehen soll. Eine solche Zahl $n+1$ ist z. B.

$$n+1 = 2^i \cdot 3^t \cdot p_2^{l_1} \cdot \dots \cdot p_{r+1}^{l_r}$$

(in den Folgenden werde ich ähnliche Rechnungen ohne besondere Erklärung durchführen), und so gilt für dieses $n+1$ nach der Definition von ψ tatsächlich

$$(2) \quad \psi(m+1, 2^i \cdot 3^t \cdot p_2^{l_1} \cdot \dots \cdot p_{r+1}^{l_r}, a) = \psi(m+1, 2^i \cdot 3^t \cdot \prod_{j=1}^r p_{j+1}^{l_j}, a) = \\ = \beta_i(m, t, y_1, \dots, y_r).$$

gilt. Samt $\nu(0, s) = 0$ definiert aber diese Wertverlaufsrekursion $\nu(n, s)$ als eine primitiv-rekursive Funktion.

5. Nun können wir uns daran machen, die Funktion $\varkappa(n)$ so zu definieren, dass die Gleichheit

$$\varphi(m, n, a) = \psi(m, \varkappa(n), a)$$

immer bestehen soll. In Nr. 3 dieses Kapitels haben wir gesehen, dass sie für $m \cdot n = 0$ besteht, falls $\varkappa(0) = 0$ gewählt wird. Nehmen wir an, dass \varkappa für die Vorgänger einer Stelle $(m+1, n+1, a)$ bereits so definiert wurde, dass die Behauptung für diese Vorgänger gilt; als Vorgänger werden dabei — wie bisher — solche Stellen betrachtet, wo das erste Argument kleiner als $m+1$, oder das erste Argument gleich $m+1$, aber das zweite kleiner als $n+1$ ist. Es bleibt zu zeigen, dass sich diese Eigenschaft bei geeigneter Wahl von \varkappa auch auf die Stelle $(m+1, n+1, a)$ vererbt.

Erst zeige ich, dass bei der gemachten Annahme ψ auch der übriggebliebenen dritten Forderung genügt: ist für das jetzt gewählte $m+1$

$$x_1 = \psi(m+1, l_1, a)$$

und

$$x_2 = \psi(m+1, l_2, a),$$

so nimmt die Funktion φ für dasselbe $m+1$ und für ein geeignetes n auch den Wert

$$\varphi(m, x_1, x_2)$$

an.

Es ist nämlich nach der Annahme und nach der Definition von ψ

$$\begin{aligned} \varphi(m, x_1, x_2) &= \psi(m, \varkappa(x_1), x_2) = \psi(m, \varkappa(\psi(m+1, l_1, a)), \psi(m+1, l_2, a)) = \\ (3) \quad &= \psi(m+1, 2^{s+1} \cdot 3^{l_1} \cdot 5^{l_2}, a) . \end{aligned}$$

ψ nimmt sogar samt

$$x_1 = \psi(m+1, l, a)$$

für geeignetes zweite Argument auch den Wert

$$\varphi(m+1, n, x_1)$$

an, wo m und n die in der Annahme vorkommenden Zahlen sind. Es gilt nämlich nach der Annahme und nach dem Hilfssatz der vorigen Nummer

$$\begin{aligned} (4) \quad \varphi(m+1, n, x_1) &= \psi(m+1, \varkappa(n), x_1) = \psi(m+1, \varkappa(n), \psi(m+1, l, a)) = \\ &= \psi(m+1, \nu(\varkappa(n), l), a) . \end{aligned}$$

6. Jetzt kann endlich die zu Beginn der vorigen Nummer begonnene Induktion zu Ende geführt werden: ich zeige, dass bei Bestehen der gemachten Annahme $\varkappa(n+1)$ so gewählt werden kann, dass

$$\varphi(m+1, n+1, a) = \psi(m+1, \varkappa(n+1), a)$$

gilt.

Nach (1), (2), (3) und (4) nimmt die Funktion ψ für das $m+1$ der Annahme und für geeignete Werte des zweiten Arguments sämtliche Werte an, die aus Ineinanderschachtelungen von $a, \beta_1(m, n, \gamma_1, \dots, \gamma_r), \dots$,

$\beta_s(m, n, y_1, \dots, y_r)$, $\varphi(m, x_1, x_2)$ und $\varphi(m+1, n, x_1)$ entstehen, wenn Einsetzungen nur für die Variablen $x_1, x_2, y_1, \dots, y_r$ erfolgen. Aber nach der Definition der Funktion φ , kommt auch der Wert $\varphi(m+1, n+1, a)$ auf diese Weise zustande, nämlich durch jene Substitutionen, welche von der Funktionsfunktion $F_{x_1 x_2 y_1 \dots y_r}$ vorgeschrieben werden. Es gibt also eine Zahl n^* , so dass

$$\varphi(m+1, n+1, a) = F_{x_1 x_2 y_1 \dots y_r}(a, \beta_1(m, n, y_1, \dots, y_r), \dots, \beta_s(m, n, y_1, \dots, y_r), \varphi(m, x_1, x_2), \varphi(m+1, n, x_1)) = \psi(m+1, n^*, a)$$

gilt. Und wenn man (1), (2), (3) und (4) näher betrachtet, so sieht man, dass diese Zahl n^* genau so aus

$$1, 2^i \cdot 3^n \cdot p_1^{y_1} \dots p_{r+1}^{y_r} \text{ für } i = 1, 2, \dots, s, 2^{s+1} \cdot 3^{x_1} \cdot 5^{x_2}, \nu(\kappa(n), x_1),$$

als $\varphi(m+1, n+1, a)$ aus

$$a, \beta_i(m, n, y_1, \dots, y_r) \text{ für } i = 1, 2, \dots, s, \varphi(m, x_1, x_2), \varphi(m+1, n, x_1)$$

aufgebaut wird. Es ist daher

$$n^* = F_{x_1 x_2 y_1 \dots y_r}(1, 2^i \cdot 3^n \cdot p_1^{y_1} \dots p_{r+1}^{y_r}, \dots, 2^s \cdot 3^n \cdot p_2^{y_1} \dots p_{r+1}^{y_r}, 2^{s+1} \cdot 3^{x_1} \cdot 5^{x_2}, \nu(\kappa(n), x_1)).$$

Der Wert der rechten Seite hängt nur von n ab. Wird dieser Wert für das $n+1$ der Annahme als $\kappa(n+1)$ gewählt, so vererbt sich wegen

$$\varphi(m+1, n+1, a) = \psi(m+1, n^*, a)$$

die betrachtete Eigenschaft auch auf die Stelle $(m+1, n+1, a)$:

$$\varphi(m+1, n+1, a) = \psi(m+1, \kappa(n+1), a)$$

Wird der in Nr. 3 dieses Kapitels erhaltene Anfangswert hinzugenommen, so lautet die Definition von $\kappa(n)$:

$$\kappa(0) = 0$$

$$\kappa(n+1) = F_{x_1 x_2 y_1 \dots y_r}(1, 2^i \cdot 3^n \cdot p_1^{y_1} \dots p_{r+1}^{y_r}, \dots, 2^s \cdot 3^n \cdot p_2^{y_1} \dots p_{r+1}^{y_r}, 2^{s+1} \cdot 3^{x_1} \cdot 5^{x_2}, \nu(\kappa(n), x_1)).$$

Die Funktionsfunktion in der zweiten Definitionsgleichung ist bloss eine kürzere Schreibweise für einen Ausdruck, der durch Substitutionen aus primitiv-rekursiven Funktionen entsteht. Es ist daher klar, dass die damit definierte Funktion $\kappa(n)$ primitiv-rekursiv ist.

Da sich für diese Funktion $\kappa(n)$

$$\varphi(m, n, a) = \psi(m, \kappa(n), a)$$

erwiesen hat, so entsteht $\varphi(m, n, a)$ aus $\psi(m, n, a)$ durch Substitution einer primitiv-rekursiven Funktion.

7. Jetzt soll noch die in Nr. 3 dieses Kapitels angegebene Definition von ψ näher betrachtet werden. Das ist eigentlich noch eine Wertverlaufsrekursion, da in ihr zur Berechnung von $\psi(m+1, n+1, a)$ auch Werte $\psi(m+1, \exp_i(n+1), a)$ verwendet werden, wobei freilich $\exp_i(n+1) < n+1$, aber nicht genau $\exp_i(n+1) = n$ ist; sie kann aber, durch das in Nr. 1—2 des § 6 ausgeführte Verfahren, auf eine von dieser Beschaffenheit gereinigte Definition von ähnlicher Struktur zurückgeführt werden. Ähnlich zum Verfahren, das in Nr. 6 des § 7 angewandt wurde, kann man sie auch auf die Definition von ähnlicher Struktur einer solchen Funktion zurückführen, welche von

keinem Parameter abhängt. Das wesentliche an der Definition von ψ ist, dass darin bloss eine *einmalige Einschachtelung* vorkommt; und daran ändern die genannten Reduktionen nichts.

So kommt man zur *Normalform*:

$$\psi(m, n) = 0, \text{ falls } m \cdot n = 0$$

$$\psi(m + 1, n + 1) = \beta(m, n, \varphi(m, \gamma(m, n, \varphi(m + 1, n))), \varphi(m + 1, n))$$

der *zweifachen Rekursion*. Wie bereits am Ende des § 10 vorausgeschickt wurde, lassen sich alle 2-rekursive Funktionen (der ersten Stufe) durch solche Rekursionen und Substitutionen von den Ausgangsfunktionen $n + 1$, $\text{quadres}(n)$ und $a + n$ ausgehend aufbauen.

Ganz ähnlich lässt sich eine jede k -fache Rekursion, für beliebiges k , auf eine (in Nr. 6 des § 10 ausführlich aufgeschriebene) Normalform bringen, worin nur einmalige Einschachtelung vorkommt.

§ 15. DAS »GÖDELISIEREN« DER REKURSION VON HÖHERER STUFE.

1. In Nr. 7 des § 13 wurde eine Rekursion der 2-ten Stufe auf eine mehrfache Rekursion der ersten Stufe zurückgeführt, also auf eine solche Definition, welche keine Funktionsfunktionen benutzt. Die Funktionsfunktionen können aber auch auf eine andere Weise aus einer Definition der zweiten Stufe ausgeschaltet werden.

Wenn man die Berechnung der Werte einer durch Rekursion der zweiten Stufe definierten Funktion verfolgt, immer nur darauf achtend, was in den einzelnen Schritten *formal* durchgeführt wird, so kann man den inzwischen auftretenden Zeichenfolgen auch Zahlen zuordnen, und so das ganze Verfahren sozusagen auf die Sprache der Zahlen übersetzen. Da eine derartige Methode (für einen anderen Zweck) zuerst von Gödel²⁸ angewandt wurde, werde ich dieses Verfahren »Gödelisierung« nennen.

Es soll das geschilderte Programm am folgenden Beispiel durchgeführt werden:

$$\psi(0, n) = 2n$$

$$\psi(m + 1, n) = B_x(m, n, \psi(m, x)),$$

wo die Definition von B_x

$$B_x(0, n, f(x)) = f(n)$$

$$B_x(m + 1, n, f(x)) = f(B_x(m, n, f(x)))$$

ist (also B_x die Iterationen von $f(n)$ darstellt).

Es soll z. B. der Wert $\psi(3, 2)$ berechnet werden. Man muss dazu nach der zweiten Definitionsgleichung die Funktion $\psi(2, x)$ kennen; und diese lässt sich durch $\psi(1, x)$ bestimmen, das endlich auf $\psi(0, x)$ zurückgeführt werden kann. Daher muss man die Berechnung mit dem sukzessiven Aufbau von $\psi(m, x)$ beginnen:

$$\psi(0, x) = 2x$$

²⁸) GÖDEL [1].

$\psi(1, x)$ wird aus der zweiten Definitionsgleichung erhalten, wobei x für n eingesetzt wird; so muss freilich die gebundene Variable umbenannt werden; und es ist nach der ersten Definitionsgleichung von B

$$\psi(1, x) = B_y(0, x, \psi(0, y)) = B_y(0, x, 2y) = 2x,$$

da hier $2y$ für die Funktionsvariable $f(y)$, und x für n gesetzt wurde, und so erhält man $2x$ für $f(n)$. Ähnlich gewinnt man

$$\psi(2, x) = B_y(1, x, \psi(1, y)) = B_y(1, x, 2y),$$

$$\psi(3, x) = B_z(2, x, \psi(2, z)) = B_z(2, x, B_y(1, z, 2y)).$$

Jetzt hat man zur Berechnung von $\psi(3, 2)$ für x die Zahl 2 einzusetzen:

$$\psi(3, 2) = B_z(2, 2, B_y(1, z, 2y)).$$

Daraus kann der Wert von $\psi(3, 2)$ am schnellsten »von innen nach aussen« berechnet werden: nach der Definition von B_y gilt, da hier $f(y) = 2y$ ist,

$$B_y(1, z, 2y) = 2 \cdot B_y(0, z, 2y) = 2 \cdot 2z = 4z,$$

so kommt $4z$ im äusseren B_z an die Stelle von $f(z)$ und so ist

$$\begin{aligned} \psi(3, 2) &= B_z(2, 2, 4z) = 4 \cdot B_z(1, 2, 4z) = 4 \cdot 4 \cdot B_z(0, 2, 4z) = \\ &= 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 128. \end{aligned}$$

Ähnlich sieht man allgemein ein, dass

$$\psi(3, n) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot n$$

ist; und werden die Werte von $\psi(m, n)$ auf diese Weise der Reihe nach für $m = 1, 2, 3, 4, \dots$ berechnet, so erhält man

$$\psi(1, n) = 2n, \psi(2, n) = 2^2 \cdot n, \psi(3, n) = (2^2)^3 \cdot n, \psi(4, n) = ((2^2)^3)^4 \cdot n, \dots$$

So kann $\psi(m, n)$ durch die primitive Rekursion

$$\psi(0, n) = 2n$$

$$\psi(m+1, n) = \left[\frac{\psi(m, n)}{n} \right]^{m+1} \cdot n,$$

oder sogar durch die explizite Definition

$$\psi(m, n) = 2^{m^1} \cdot n$$

definiert werden.

So war es überflüssig zur Definition von $\psi(m, n)$ die zweite Stufe zu verwenden. Jedoch möchte ich das ziemlich komplizierte Verfahren der Gödelisierung an dieser einfachen Funktion zeigen; aber so, dass sich der Gedankengang auch auf andere rekursive Definitionen der zweiten Stufe übertragen lässt. Deshalb werde ich in den Folgenden die Berechnung der Werte von $\psi(m, n)$ mit Absicht ungeschickt durchführen.

2. Ich beginne damit, dass wir bereits in der vorigen Nummer zur Gleichheit

$$\psi(3, 2) = B_z(2, 2, B_y(1, z, 2y))$$

gelangt sind. Jetzt werde ich die weitere Berechnung »von aussen nach innen« durchführen.

Die beiden ersten Argumente von B_z sind bekannte Zahlen, und für $f(z)$ wurde darin $B_y(1, z, 2y)$ als Funktion von z eingesetzt, also besitzt $B_z(2, 2, B_y(1, z, 2y))$ denselben Wert, als der Ausdruck, der durch Einsetzung dieses Ausdruckes mit um 1 kleinerem ersten Argument für z in $B_y(1, z, 2y)$ erhalten wird. Es ist also

$$\psi(3, 2) = B_z(2, 2, B_y(1, z, 2y)) = B_y(1, B_z(1, 2, B_u(1, z, 2u)), 2y) .$$

Wird dasselbe für $B_z(1, 2, B_u(1, z, 2u))$ wiederholt, so erhält man

$$B_z(1, 2, B_u(1, z, 2u)) = B_u(1, B_z(0, 2, B_v(1, z, 2v)), 2u) ,$$

und darin ist nach der ersten Definitionsgleichung von B

$$B_z(0, 2, B_v(1, z, 2v)) = B_v(1, 2, 2v) .$$

Wird wieder die zweite, und dann die erste Definitionsgleichung von B angewandt, so ergibt sich

$$B_v(1, 2, 2v) = 2 \cdot B_v(0, 2, 2v) = 2 \cdot 2 \cdot 2 .$$

Das in den mit B_u beginnenden Ausdruck eingesetzt, erhält man

$$\begin{aligned} B_u(1, B_z(0, 2, B_v(1, z, 2v)), 2u) &= B_u(1, B_v(1, 2, 2v), 2u) = \\ &= B_u(1, 2 \cdot 2 \cdot 2, 2u) = B_u(1, 8, 2u) , \end{aligned}$$

also

$$B_z(1, 2, B_u(1, z, 2u)) = B_u(1, 8, 2u) .$$

Das ergibt, in die zuletzt erhaltene Form von $\psi(3, 2)$ eingesetzt

$$\psi(3, 2) = B_y(1, B_u(1, 8, 2u), 2y) .$$

Jetzt werde ich wieder jenen B -Ausdruck weiter formen, dessen beide ersten Argumente Zahlen sind :

$$B_u(1, 8, 2u) = 2 \cdot B_u(0, 8, 2u) = 2 \cdot 2 \cdot 8 .$$

Das im letzten Ausdruck für $\psi(3, 2)$ eingesetzt, ergibt

$$\psi(3, 2) = B_y(1, 2 \cdot 2 \cdot 8, 2y) = B_y(1, 32, 2y) = 2 \cdot B_y(0, 32, 2y) = 2 \cdot 2 \cdot 32 ,$$

also

$$\psi(3, 2) = 128 .$$

Die Berechnung des Wertes von $\psi(m, n)$ kann, wie man leicht einsieht, an jeder Stelle ähnlich durchgeführt werden.

3. Sehen wir jetzt nach, wie sich diese Berechnung, bloss formal betrachtet, vollzogen hat. Wir haben in Nr. 1 dieses Kapitels der Reihe nach für $\psi(0, x)$, $\psi(1, x)$, $\psi(2, x)$, $\psi(3, x)$ je einen »Ausdruck« erhalten. Der »Ausdruck« von $\psi(0, x)$ war nach der ersten Definitionsgleichung $2 \cdot x$; und der »Ausdruck« von $\psi(m+1, x)$ wurde aus dem bereits erhaltenen »Ausdruck« von $\psi(m, x)$ so konstruiert, dass im letzteren x umbenannt, der so modifizierte Ausdruck für die Funktionsvariable von B eingesetzt, und für die beiden ersten Variablen von B zugleich w und x gesetzt wurde. Damit man unter den immer auf neue Weise bezeichneten Variablen irgendeine Ordnung halten kann, gehen wir von einer Variablenfolge

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

aus, und bauen wir die »Ausdrücke« für $\psi(m, x_1)$ folgendermassen auf :

Der »Ausdruck« von $\psi(0, x_1)$ ist $2 \cdot x_1$,

« « « $\psi(1, x_1) \ll B_{x_2}(0, x_1, 2 \cdot x_2)$,

« « « $\psi(2, x_1) \ll B_{x_3}(1, x_1, B_{x_2}(0, x_3, 2 \cdot x_2))$,

« « « $\psi(3, x_1) \ll B_{x_4}(2, x_1, B_{x_3}(1, x_4, B_{x_2}(0, x_3, 2 \cdot x_2)))$,

und allgemein ergibt sich der Ausdruck von $\psi(m+1, x_1)$ aus dem Ausdruck von $\psi(m, x_1)$, indem darin x_{m+2} für x_1 gesetzt, und der so modifizierte Ausdruck in $B_{x_{m+2}}(m, x_1, f(x_{m+2}))$ an die Stelle von $f(x_{m+2})$ geschrieben wird.

4. Zur Berechnung von $\psi(m, n)$ wird dann erstens im Ausdruck von $\psi(m, x_1)$, der in der vorigen Nummer bestimmt wurde, n für x_1 gesetzt; so erhält man den »Ausdruck« von $\psi(m, n)$.

5. Im so erhaltenen Ausdruck wird nun ein solcher Teilausdruck der Form $B_{x_i}(a, b, t)$ gesucht, in dem a und b Zahlen sind, und t irgendein von x_i abhängiger Ausdruck ist.

In einem verwickelte Einschachtelungen enthaltenden Ausdruck ist gar nicht leicht zu erkennen, wie weit sich der Teilausdruck t ausdehnt. Es sind z. B. die beiden ersten Argumente von B_{x_3} im Ausdruck

$$B_{x_1}(2, B_{x_3}(2, 4, B_{x_5}(1, B_{x_6}(2, B_{x_7}(1, x_3, 2 \cdot x_7), 2 \cdot x_6), 4 \cdot x_5)), 8 \cdot x_1)$$

Zahlen; wo endet aber sein drittes Argument? Die zur Anfangsklammer, welche auf B_{x_3} folgt, gehörige Endklammer ist am Ende des uns interessierenden Ausdrucks. Zwischen ihnen treten auch neue Anfangsklammern auf, aber auch die Endklammer einer jeden muss auftreten, bevor man zum Schluss des Ausdrucks gelangt. Von der ersten Anfangsklammer des Ausdrucks an sind ganz bis zu seinem letzten Zeichen unbedingt die Anfangsklammern in der Mehrheit: ganz bis dahin fehlt die Endklammer wenigstens zu der ersten Anfangsklammer. So steht das Endezeichen des mit t bezeichneten dritten Argumentes unmittelbar vor jener Stelle, wo zum erstenmal von der ersten Anfangsklammer des betrachteten Ausdrucks $B_{x_i}(a, b, t)$ an die Anzahl der zweierlei Klammern gleich wird. So ist im vorhin angegebenen Beispiel

$$t = B_{x_5}(1, B_{x_6}(2, B_{x_7}(1, x_3, 2 \cdot x_7), 2 \cdot x_6), 4 \cdot x_5)$$

6. Hat man nun im betrachteten Ausdruck einen Teilausdruck der Form $B_{x_i}(a, b, t(x_i))$ gefunden, wo a und b Zahlen sind, und $t(x_i)$ ein von x_i abhängiger Ausdruck ist, so wird dieser Teilausdruck für $a=0$ durch $t(b)$ ersetzt, und für $a \neq 0$ durch jenen Ausdruck, der aus $t(x_i)$ entsteht, falls darin für x_i

$$B_{x_i}(a-1, b, t'(x_i))$$

eingesetzt wird; wobei $t'(x_i)$ aus $t(x_i)$ so gebildet wird, dass darin ausser x_i alle Variablen umbenannt werden. Diese Umbenennung kann so geschehen, dass man den grössten Variablenindex w in $t(x_i)$ aufsucht, und dann mit der Ausnahme von x_i für alle Variablen x_j von $t(x_i)$ die Variable x_{j+w} einsetzt.

7. Wenn man während der Umformung zu einem solchen, auch B enthaltenden Ausdruck kommt, der keinen mit $B_{x_i}(a, b, \dots)$ beginnenden Teil besitzt, wo a und b Zahlen wären, aber einen Teilausdruck der Form $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_r$ enthält, worin die Faktoren Zahlen sind: so wird dieses Produkt durch seinen berechneten Wert ersetzt.

8. Nach endlich vielen solchen Schritten erhält man das Produkt lauter Zahlen als Ergebnis; das wird berechnet, und so ergibt sich zum Schluss der Zahlenwert von $\psi(m, n)$.

9. Man gelangt durch endlich viele Anwendungen der in den vorigen Nummern aufgezählten Schritte tatsächlich immer zum Ziel. Das sieht man so ein: der »Ausdruck« von $\psi(0, n)$ ist

$$2 \cdot n ;$$

das ist für alle n das Produkt lauter Zahlen, und so erhält man seinen Wert durch den Schritt der Nr. 8. Und wenn man für ein gewisses m bei beliebigem n bereits den Wert des »Ausdrucks« von $\psi(m, n)$ berechnen kann, so gelingt auch bei beliebigem n die Berechnung des Wertes vom zu $\psi(m+1, n)$ gehörigen Ausdruck; und zwar folgendermassen:

Es ist

$$\psi(m+1, n) = B_x(m, n, \psi(m, x)),$$

und der »Ausdruck« von $\psi(m+1, n)$ ergibt sich daraus so, dass man hier für $\psi(m, x)$ den dazu gehörigen (für $m > 0$ aus ineinandergeschachtelten B -Ausdrücken aufgebauten) »Ausdruck« einsetzt; dieser soll jetzt kurz als $\psi^*(m, x)$ bezeichnet werden. In unserem Berechnungsverfahren gehen wir davon — die Definition von B in Betracht genommen — schrittweise auf die Ausdrücke

$$\begin{aligned} B_x(m, n, \psi^*(m, x)) &= \psi^*(m, B_x(m-1, n, \psi^*(m, x))) = \\ &= \psi^*(m, \psi^*(m, B_x(m-1, n, \psi^*(m, x)))) = \dots = \\ &= \overbrace{\psi^*(m, \psi^*(m, \dots, \psi^*(m, B_x(0, n, \psi^*(m, x))), \dots))}^{m\text{-mal}} \\ &= \overbrace{\psi^*(m, \psi^*(m, \dots, \psi^*(m, \psi^*(m, n)), \dots))}^{m+1\text{-mal}} \end{aligned}$$

über. Dann wird der Wert des innersten Ausdrucks $\psi^*(m, n)$ berechnet; das lässt sich nach der Annahme in endlich vielen Schritten durchführen. In den nächsten Ausdruck ψ^* kommt der so erhaltene Zahlenwert n_1 , so dass er in den Ausdruck von $\psi(m, n_1)$ übergeht. Auch der Wert dieses Ausdrucks lässt sich nach der Annahme in endlich vielen Schritten berechnen. Und so fort; so werden die Werte von $m+1$ Ausdrücken $\psi^*(m, n)$ für immer andere n berechnet, und diese endlich vielen Schritte ergeben den Wert des Ausdrucks von $\psi(m+1, n)$.

10. Nun sollen die in Nr. 3—8 angegebenen formalen Berechnungsschritte auf die Sprache der Zahlen übersetzt werden. Formal betrachtet sind unsere Ausdrücke bloss Zeichenfolgen. Wir werden also den benutzten Zeichen, und den Zeichenfolgen, die aus ihnen gebildet werden können, Zahlen zuordnen durch das folgende

Wörterbuch.

Der Zahl	n soll	$2(n+1) = 2n+2$ (für $n=0, 1, 2, \dots$) entsprechen,	
dem Zeichen	B «	1	«
«	«	3	«
«	(«	5	«
«) «	7	«
«	, «	9	«
der Variablen	x_n «	$2n+9$ (für $n=1, 2, \dots$)	«

Und wenn ein Ausdruck aus solchen Zeichen besteht, denen der Reihe nach die Zahlen

$$a_1, a_2, \dots, a_r$$

entsprechen, so soll zum Ausdruck selber die »Gödel-Nummer«

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$$

gehören (x_i in B_{x_i} wird als auf B folgendes Zeichen betrachtet). So ergibt der Index des grössten Primteilers von n die Anzahl der Zeichen in der betrachteten Zeichenfolge.

Nach dem Wörterbuch ist z. B. die Gödel-Nummer von B_{x_2} ($3, 2, 4 \cdot x_2$)

$$p_1^1 p_2^{13} p_3^5 p_4^8 p_5^9 p_6^6 p_7^9 p_8^{10} p_9^3 p_{10}^{13} p_{11}^7 \cdot$$

Umgekehrt entspricht z. B. der Zahl

$$24 = 2^3 \cdot 3,$$

da in ihr auch $2 = p_0$ auftritt, keine Zeichenfolge; der Zahl

$$45 = 3^2 \cdot 5^1$$

entspricht die sinnlose, zweigliedrige Zeichenfolge

$$0 B;$$

die Zahl mit der Primfaktorenzerlegung

$$3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^4$$

ist die Gödel-Nummer des Produktes

$$2 \cdot 1 \cdot$$

So ausgestattet kann man sich schon daran machen, die Berechnung der Werte von $\psi(m, n)$ zu gödelisieren.

11. Erstens kann man vom Wörterbuch gleich herauslesen, dass die Gödel-Nummer des »Ausdrucks«

$$2 \cdot x_1$$

von $\psi(0, x_1)$ die Zahl

$$3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^{11}$$

ist. Und wenn man bereits die Gödel-Nummer des Ausdrucks von $\psi(m, x_1)$ kennt, so kann man daraus auch die Gödel-Nummer des Ausdrucks $\psi(m+1, x_1)$ herauslesen.

Nach Nr. 3 unseres Kapitels muss erst die im Ausdruck von $\psi(m, x_1)$ (wie leicht zu sehen, an einer einzigen Stelle) auftretende Variable x_1 durch x_{m+2} ersetzt werden. Sehen wir nach, wie sich die Gödel-Nummer n einer Zeichenfolge modifiziert, wenn darin für das erste auftretende x_1 die Variable x_{m+2} eingesetzt wird; oder allgemeiner, wenn man für ein solches Zeichen der Zeichenfolge, dem nach dem Wörterbuch die Zahl a entspricht, an der ersten Stelle, wo es vorkommt, jenes Zeichen einsetzt, dem die Zahl b entspricht. Die Gödel-Nummer der so modifizierten Zeichenfolge soll mit

$$Sb_n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

bezeichnet werden.

Ist das Zeichen, das durch ein anderes vertreten werden soll, das k -te Zeichen der Zeichenfolge, so kommt in der Primfaktorenzerlegung von n die Primzahl p_k auf der a -ten Potenz vor. Wird für dieses Zeichen das Zeichen, welches der Zahl b entspricht, eingesetzt, so kommt an die Stelle des Faktors p_k^a von n der Faktor p_k^b . Daher ist

$$Sb_n \left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right) = \left[\frac{n}{p_k^a} \right] \cdot p_k^b.$$

Hier hat man aber noch k zu bestimmen.

Wir haben angenommen, dass k die kleinste solche Zahl ist, für welche p_k auf der a -ten Potenz in der Primfaktorenzerlegung von n auftritt. k kann natürlich nicht grösser als n sein; wird also k in Abhängigkeit von n und a mit $\varkappa(n, a)$ bezeichnet, so ist

$$\varkappa(n, a) = \mu_i [i \leq n \ \& \ \text{exp}_i(n) = a].$$

Das ist eine primitiv-rekursive Funktion, und mit ihr ist auch

$$Sb_n \left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right) = \left[\frac{n}{p_{\varkappa(n, a)}^a} \right] \cdot p_{\varkappa(n, a)}^b$$

eine solche. (Gibt es kein solches $i > 0$, für welches $\text{exp}_i(n) = a$ wäre, so ist $\varkappa(n, a) = 0$, und daher kann wegen des Faktors p_0^b die Zahl $Sb_n \left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right)$ keine Gödel-Nummer sein; aber im uns interessierenden Fall kann das nicht vorkommen.)

In unserem Fall ist n die Gödel-Nummer des Ausdrucks von $\psi(m, x_1)$; ferner ist a die zu x_1 geordnete Zahl 11, und b die zu x_{m+2} geordnete Zahl $2m+13$; so ist die Gödel-Nummer des durch die Umbenennung von $\psi(m, x_1)$ entstehenden Ausdrucks

$$\sigma(n, m) = Sb_n \left(\begin{matrix} 11 \\ 2m+13 \end{matrix} \right),$$

eine primitiv-rekursive Funktion von n und m .

12. Nach Nr. 3 dieses Kapitels erhält man den Ausdruck von $\psi(m+1, x_1)$, indem man mit Benutzung des Ausdrucks von $\psi(m, x_1)$, der geeignet (wie das in der vorigen Nummer ausgeführt wurde) umbenannt, kurz mit t bezeichnet wird, den Ausdruck

$$B_{x_{m+2}}(m, x_1, t)$$

bildet. Wie erhält man die Gödel-Nummer dieses Ausdrucks?

Nach dem Wörterbuch beginnt diese mit

$$p_1^1 p_2^{2m+13} p_3^5 p_4^{2m+2} p_5^9 p_6^{11} p_7^9;$$

die nachkommenden Primzahlen erhalten Exponenten, die den Zeichen der Zeichenfolge t entsprechen; und zum Schluss erhält die nach diesen folgende Primzahl den Exponenten 7, welcher der Endklammer entspricht.

Man hat also nachzusehen, welche die Gödel-Nummer einer solchen Folge ist, die aus Nacheinandersetzen einer Zeichenfolge mit der Gödel-Nummer a und einer Zeichenfolge mit der Gödel-Nummer b entsteht. Die Gödel-Nummer der so zusammengesetzten Folge soll mit $a * b$ bezeichnet werden.

Da nach Nr. 10 dieses Kapitels der Index des grössten Primfaktors der Gödel-Nummer einer Zeichenfolge die Anzahl der Zeichen dieser Folge ergibt, so besteht die Folge mit der Gödel-Nummer a aus $\text{long}(a)$, die Folge mit der Gödel-Nummer b aus $\text{long}(b)$ Zeichen. Reihen sich also die Zeichen des zu b gehörigen Ausdruckes nach den Zeichen des zu a gehörigen Ausdruckes, so nehmen in der Gödel-Nummer der zusammengesetzten Folge die Primfaktoren von b mit um $\text{long}(a)$ verschobenen Indizes Teil. So ist

$$a * b = a \cdot \prod_{i=1}^{\text{long}(b)} p_{i + \text{long}(a)}^{\text{exp}_i(b)} ;$$

und das ist eine primitiv-rekursive Funktion. Es ist klar, dass die Operation $a * b$ associativ ist. (Die Gödel-Nummer einer Zahlenfolge beträgt wenigstens $p_1 = 3$; aber $a * b$ hat auch für kleinere Werte von a und b einen Sinn. Da $\text{long}(1) = 0$ ist, so gilt, falls $p_0 = 2$ kein Primfaktor von b ist,

$$1 * b = b .$$

Darauf werde ich mich später berufen.)

Nach der vorigen Nummer ist die Gödel-Nummer des Ausdrucks von $\psi(0, x_1)$

$$3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^{11},$$

und ist n die Gödel-Nummer des Ausdrucks von $\psi(m, x_1)$, so ist die Gödel-Nummer der auf die oben angegebene Weise umbenannten Form dieses Ausdrucks $\sigma(n, m)$. Da ferner $B_{x_{m+2}}(m, x_1, t)$ der Ausdruck von $\psi(m+1, x)$ ist, können wir, unser bisheriges Wissen zusammenfassend, die Gödel-Nummer $\psi'(m)$ des Ausdrucks von $\psi(m, x_1)$ durch die primitive Rekursion

$$\psi'(0) = p_1^6 p_2^3 p_3^{11}$$

$$\psi'(m+1) = p_1^1 p_2^{2m+13} p_3^5 p_4^{2m+2} p_5^9 p_6^{11} p_7^9 * \sigma(\psi'(m), m) * p_7^1$$

definieren.

13. Nach Nr. 4 dieses Kapitels ist der nächste Schritt der Berechnung das Einsetzen von n für x_1 im Ausdruck von $\psi(m, x_1)$. Nach dem Wörterbuch entspricht 11 der Variablen x_1 , und $2n+2$ der Zahl n , so ist nach Nr. 11 dieses Kapitels die Gödel-Nummer des Ergebnisses dieser Substitution, also des Ausdrucks von $\psi(m, n)$, die primitiv-rekursive Funktion

$$\psi'(m, n) = \text{Sb}_{\psi'(m)} \left(\begin{matrix} 11 \\ 2n+2 \end{matrix} \right)$$

(diese ebenfalls mit ψ' bezeichnete *zweistellige* Funktion ist natürlich nicht mit der gleichbezeichneten *einstelligen* Funktion identisch).

14. Nun folgt die Untersuchung der ineinandergeschachtelten B -Ausdrücke, wie das in Nr. 5 dieses Kapitels geschildert wurde.

Erst hat man einen mit $B_{x_i}(a, b, \dots)$ beginnenden Teil des betrachteten Ausdrucks zu suchen, wobei a und b Zahlen sind (die Ausdrücke, die uns interessieren, enthalten, wie leicht zu sehen, einen einzigen so beginnenden Teil). Ein solcher Beginn spiegelt sich in der Primfaktorenzerlegung der Gödel-Nummer des Ausdrucks durch

$$p_k^1 p_{k+1}^{2i+9} p_{k+2}^5 p_{k+3}^{2a+2} p_{k+4}^9 p_{k+5}^{2b+2} p_{k+6}^9 \cdot$$

Wir wissen, dass die Aussage :

»es gibt solche k, i, a und b , dass keine von diesen grösser als n ist (das ist wegen der Folgenden selbstverständlich) und dass $\exp_k(n) = 1$, $\exp_{k+1}(n) = 2i + 9$, $\exp_{k+2}(n) = 5$, $\exp_{k+3}(n) = 2a + 2$, $\exp_{k+4}(n) = 9$, $\exp_{k+5}(n) = 2b + 2$, $\exp_{k+6}(n) = 9$ gilt«

eine primitiv-rekursive Beziehung ist ; das heisst es gibt eine primitiv-rekursive Funktion — sie soll mit $\varphi_B(n)$ bezeichnet werden — die für solche und nur solche n verschwindet, für welche die betreffende Aussage richtig ist. Wir wissen auch, dass

»das kleinste k bis n , zu welchem es solche i, a und b gibt, dass

$\exp_k(n) = 1$, $\exp_{k+1}(n) = 2i + 9$, $\exp_{k+2}(n) = 5$, $\exp_{k+3}(n) = 2a + 2$,

$\exp_{k+4}(n) = 9$, $\exp_{k+5}(n) = 2b + 2$, $\exp_{k+6}(n) = 9$ gilt«

eine primitiv-rekursive Funktion von n ist ; diese soll mit $\varkappa(n)$ bezeichnet werden (dabei ist sie natürlich nicht mit der in Nr. 11 dieses Kapitels definierten zweistelligen Funktion $\varkappa(n, a)$ identisch).

15. Gilt nun

$$\varphi_B(n) = 0,$$

so hat der Ausdruck mit der Gödel-Nummer n vom $\varkappa(n)$ -ten Zeichen an die Form

$$B_{x_l}(a, b, t) \dots$$

Die erste Anfangsklammer ist darin das $\varkappa(n) + 2$ -te Zeichen des betrachteten Ausdrucks ; und ist l die Anzahl der Zeichen von t , so ist die Endklammer zu dieser Anfangsklammer das $\varkappa(n) + 6 + l + 1$ -te Zeichen im betrachteten Ausdruck. Es ist noch die Länge l der Zeichenfolge t zu bestimmen. Nach Nr. 5 dieses Kapitels hat man zu diesem Zweck zu untersuchen, wann vom $\varkappa(n) + 2$ -ten Zeichen des betrachteten Ausdrucks an zum erstenmal die Anzahl der zweierlei Klammern gleich wird.

Sei $kl'(n, i)$ (bzw. $kl''(n, i)$) gleich 1 oder 0, je nachdem das i -te Zeichen der Folge, die n zur Gödel-Nummer hat, eine Anfangsklammer (bzw. Endklammer) ist, oder nicht; oder, was damit freilich gleichbedeutend ist, je nachdem der Exponent von p_i in der Primfaktorenzerlegung von n die Zahl 5 (bzw. 7) ist, oder nicht. Sei also

$$kl'(n, i) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \exp_i(n) = 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$kl''(n, i) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \exp_i(n) = 7 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese sind primitiv-rekursive Funktionen.

Es ist klar, dass $\sum_{i=a}^b kl'(n, i)$ (bzw. $\sum_{i=a}^b kl''(n, i)$) sovielen 1 zusammen-

zählt, wieviele Anfangsklammern (bzw. Endklammern) vom a -ten Zeichen bis zum b -ten Zeichen (die Grenzen inbegriffen) in der Zeichenfolge, die n zur

Gödel-Nummer hat, vorkommen; so ergeben diese Summen eben die Anzahl der Anfangs- bzw. Endklammern zwischen dem a -ten und b -ten Zeichen. Ist

$$\sum_{i=a}^b kl'(n, i) = \sum_{i=a}^b kl''(n, i),$$

so muss im betrachteten Fall zwischen dem a -ten und b -ten Zeichen zu jeder Anfangsklammer auch die dazu gehörige Endklammer auftreten.

Daher ist die Anzahl der Zeichen unseres t -Ausdrucks:

$$\lambda(n) = \mu_l \left[l \leq n \& \sum_{i=\kappa(n)+2}^{\kappa(n)+6+l+1} kl'(n, i) = \sum_{i=\kappa(n)+2}^{\kappa(n)+6+l+1} kl''(n, i) \right];$$

und das ist eine primitiv-rekursive Funktion von n .

16. Es hat sich vom Teil der Form $B_{x_i}(a, b, t)$ jenes Ausdrucks, der n zur Gödel-Nummer hat, und in den beiden vorigen Nummern untersucht wurde, herausgestellt, dass darin das erste Zeichen von t das $\kappa(n) + 6 + 1$ -te, das letzte Zeichen von t das $\kappa(n) + 6 + \lambda(n)$ -te Zeichen des betrachteten Ausdrucks ist. So ist die Gödel-Nummer von t :

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^{\lambda(n)} p_{\kappa(n)+6+i}$$

Der ganze Teilausdruck $B_{x_i}(a, b, t)$ erstreckt sich vom $\kappa(n)$ -ten bis zum $\kappa(n) + 6 + \lambda(n) + 1$ -ten Zeichen des betrachteten Ausdrucks; es ist also seine Gödel-Nummer:

$$\beta(n) = \prod_{i=0}^{\kappa(n)+6+\lambda(n)+1} p_{i+1} \exp_{\kappa(n)+i}(n).$$

Auch $\tau(n)$ und $\beta(n)$ sind primitiv-rekursiv.

17. Nach Nr. 6 dieses Kapitels hängt der nächste Schritt der Berechnung davon ab, ob im betrachteten Teilausdruck $B_{x_i}(a, b, t)$ die Zahl a gleich 0 ist, oder nicht. Ist $a = 0$, so hat man aus t dadurch einen neuen Ausdruck t' zu bilden, dass man b für seine Variable x_i einsetzt; und dann hat man den Teilausdruck $B_{x_i}(a, b, t)$ durch t' zu ersetzen.

Ist die Gödel-Nummer des betrachteten Ausdrucks n , so ist nach der vorigen Nummer die Gödel-Nummer seines Teilausdrucks $B_{x_i}(a, b, t)$ gleich $\beta(n)$, und die Gödel-Nummer von t gleich $\tau(n)$. Da a das 4-te Zeichen von $B_{x_i}(a, b, t)$ ist, so entspricht der Zahl a nach dem Wörterbuch die Zahl $\exp_4(\beta(n))$. Der 0 entspricht im Wörterbuch 2; also kann der Fall $a = 0$ durch

$$\exp_4(\beta(n)) = 2$$

ausgedrückt werden.

Die in t auftretende Variable x_i kommt auch als das zweite Zeichen von $B_{x_i}(a, b, t)$ vor, es entspricht ihr also nach dem Wörterbuch die Zahl $\exp_2(\beta(n))$; und der Zahl b entspricht $\exp_6(\beta(n))$. So ist die Gödel-Nummer des durch die gewünschte Substitution entstehenden Ausdrucks t' nach Nr. 11 dieses Kapitels die primitiv-rekursive Funktion

$$\tau'(n) = \text{Sb}_{\tau(n)} \left(\begin{array}{c} \exp_2(\beta(n)) \\ \exp_6(\beta(n)) \end{array} \right).$$

Jetzt ist noch der Teilausdruck $B_{x_i}(a, b, t)$ durch t' zu ersetzen.

Wird in der Zeichenfolge, die n zur Gödel-Nummer hat, der Teil, der sich vom u -ten Zeichen bis zum v -ten Zeichen erstreckt (die Grenzen inbegriffen) durch einen Ausdruck, der m zur Gödel-Nummer hat, vertreten, so soll

$$\text{Subst}_n \left(\begin{array}{c} u, v \\ m \end{array} \right)$$

die Gödel-Nummer der entstehenden Zeichenfolge bezeichnen. Diese Art der Substitution kann »Einschaltung« genannt werden.

Ist $u > 1$, so ist die Gödel-Nummer des vor u stehenden Teils der Zeichenfolge, die n zur Gödel-Nummer hat

$$\nu_1(n, u) = \prod_{i=1}^{u-1} p_i \exp_i(n);$$

und ist $v < \text{long}(n)$, so ist die Gödel-Nummer des nach v folgenden Teils der betreffenden Zeichenfolge

$$\nu_2(n, v) = \prod_{i=1}^{\text{long}(n)-v} p_i \exp_{v+i}(n).$$

So ist nach Nr. 12 dieses Kapitels (wenn in den uns nicht interessierenden Fällen, der Funktion der Wert 0 gegeben wird)

$$\text{Subst}_n \left(\begin{array}{c} u, v \\ m \end{array} \right) = \begin{cases} \nu_1(n, u) * m * \nu_2(n, v), & \text{falls } u > 1 \text{ und } v < \text{long}(n) \\ m * \nu_2(n, v), & \text{falls } u = 1 \text{ und } v < \text{long}(n) \\ \nu_1(n, u) * m, & \text{falls } u > 1 \text{ und } v = \text{long}(n) \\ m, & \text{falls } u = 1 \text{ und } v = \text{long}(n) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auch das ist eine primitiv-rekursive Funktion.

Wie auch in der vorigen Nummer benutzt wurde, erstreckt sich in unserem Fall der Teilausdruck $B_{x_i}(a, b, t)$, der durch einen Ausdruck mit der Gödel-Nummer $\tau'(n)$ ersetzt werden soll, vom $\kappa(n)$ -ten bis zum $\kappa(n) + 6 + \lambda(n) + 1$ -ten Zeichen der betrachteten Zeichenfolge, die n zur Gödel-Nummer hat; daher ist das Ergebnis dieser Einschaltung

$$\text{Subst}_n \left(\begin{array}{c} \kappa(n), \kappa(n) + 6 + \lambda(n) + 1 \\ \tau'(n) \end{array} \right).$$

18. Ist im Teilausdruck $B_{x_i}(a, b, t)$ des betrachteten Ausdrucks $a \neq 0$, was nach der vorigen Nummer mit

$$\exp_4(\beta(n)) \neq 2$$

gleichbedeutend ist, so hat man nach Nr. 6 dieses Kapitels in t ausser x_i alle Variablen x_j durch x_{j+w} zu ersetzen, wo w der grösste in $B_{x_i}(a, b, t)$ auftretende Variablenindex ist; dann hat man den mit Hilfe des so erhaltenen Ausdrucks t'' aufgebauten Ausdruck $B_{x_i}(a-1, b, t'')$ in t für x_i einzuschalten; endlich muss der so erhaltene Ausdruck t''' im betrachteten Ausdruck an die Stelle von $B_{x_i}(a, b, t)$ eingeschaltet werden.

Es muss also erstens untersucht werden, wie man in einem Ausdruck, der m zur Gödel-Nummer hat, falls er auch Variablen enthält, den grössten auf-

tretenden Variablenindex findet. Dieser ist nach dem Wörterbuch offenbar die grösste solche Zahl w bis m , zu welcher es ein i gibt (das freilich nicht grösser als m sein kann), für welches $\text{exp}_i(m) = 2w + 9$ gilt; und als solche ist w eine primitiv-rekursive Funktion von m . Diese Funktion soll mit

$$\omega(m)$$

bezeichnet werden. Da die Gödel-Nummer des Ausdrucks $B_{x_i}(a, b, t)$ nach Nr. 16 dieses Kapitels gleich $\beta(n)$ ist, so ist in diesem Ausdruck der grösste auftretende Variablenindex

$$\omega(\beta(n)).$$

Der Variablen x_i entspricht nach dem Wörterbuch $\text{exp}_2(\beta(n))$; und die Gödel-Nummer von t ist nach Nr. 16 dieses Kapitels $\tau(n)$. Wir wollen alle von x_i verschiedene Variablen x_j von t durch $x_{j+\omega(\beta(n))}$ ersetzen. Der Variablen x_j entspricht die Zahl $2j + 9$ im Wörterbuch; wird daher der Index j um $\omega(\beta(n))$ vermehrt, so wird die der Variablen entsprechende Zahl um $2\omega(\beta(n))$ grösser. Sei daher

$$\text{exp}_j''(n) = \begin{cases} \text{exp}_j(\tau(n) + 2\omega(\beta(n))), & \text{falls } \text{exp}_j(\tau(n)) \begin{cases} > 9 \\ \text{durch } 2 \text{ nicht teilbar,} \\ \neq \text{exp}_2(\beta(n)) \end{cases} \\ \text{exp}_j(\tau(n)) & \text{sonst} \end{cases}$$

(eine ungerade Zahl, die grösser als 9 ist, entspricht nach dem Wörterbuch einer Variablen). Bei der Umbenennung der Variablen, wobei t zu t'' wird, bleibt die Anzahl der Zeichen unverändert, also $\lambda(n)$ (nach Nr. 15 dieses Kapitels). So ist auch die Gödel-Nummer von t''

$$\tau''(n) = \prod_{j=1}^{\lambda(n)} p_j^{\text{exp}_j''(n)}$$

eine primitiv-rekursive Funktion von n .

19. Jetzt hat man den Ausdruck t'' an die Stelle von t in $B_{x_i}(a, b, t)$ einzuschalten. Nach Nr. 16 und 15 dieses Kapitels ist $\beta(n)$ die Gödel-Nummer des Ausdrucks $B_{x_i}(a, b, t)$; und t erstreckt sich vom $7 + 1$ -ten bis zum $7 + \lambda(n)$ -ten Zeichen dieses Ausdrucks; und nach der vorigen Nummer ist $\tau''(n)$ die Gödel-Nummer von t'' . Daher ist die Gödel-Nummer von $B_{x_i}(a, b, t'')$ nach Nr. 17 dieses Kapitels

$$\beta^*(n) = \text{Subst}_n \left(\begin{matrix} 7 + 1, 7 + \lambda(n) \\ \tau''(n) \end{matrix} \right).$$

Es ist noch $a - 1$ für a im Ausdruck $B_{x_i}(a, b, t'')$ einzusetzen. Der Zahl a entspricht nach dem Wörterbuch $\text{exp}_4(\beta(n))$; so entspricht wegen der Annahme $a \neq 0$ im Wörterbuch der Zahl $a - 1$ die Zahl $\text{exp}_4(\beta(n)) - 2$; und diese Differenz kann auch in der Form $\text{exp}_4(\beta(n)) \div 2$ geschrieben werden. Die Gödel-Nummer des Ausdrucks $B_{x_i}(a - 1, b, t'')$ ist also nach Nr. 11 dieses Kapitels

$$\beta''(n) = \text{Sb}_{\beta^*(n)} \left(\begin{matrix} \text{exp}_4(\beta(n)) \\ \text{exp}_4(\beta(n)) \div 2 \end{matrix} \right).$$

20. Der nächste Schritt ist die Einschaltung von $B_{x_i}(a - 1, b, t'')$ an die Stelle von x_i in t . Wie schon öfters verwendet wurde, entspricht nach

dem Wörterbuch der Variablen x_i die Zahl $\exp_2(\beta(n))$; und die Gödel-Nummer des Ausdrucks t ist $\tau(n)$. Nach Nr. 11 dieses Kapitels ist daher x_i das $\varkappa(\tau(n), \exp_2(\beta(n)))$ -te Zeichen von t . Wird also in t für x_i der Ausdruck $B_{x_i}(a-1, b, t')$, der $\beta''(n)$ zur Gödel-Nummer hat, eingeschaltet, so ist die Gödel-Nummer des so erhaltenen Ausdrucks t'''

$$\tau'''(n) = \text{Subst}_{\tau(n)} \left(\varkappa(\tau(n), \exp_2(\beta(n))), \varkappa(\tau(n), \exp_2(\beta(n))) \right)_{\beta''(n)}.$$

Es ist endlich noch der Ausdruck t''' an die Stelle von $B_{x_i}(a, b, t)$ im betrachteten Ausdruck, der n zur Gödel-Nummer hat, einzuschalten. Da sich dieser Teilausdruck — wie schon öfters benutzt wurde — vom $\varkappa(n)$ -ten bis zum $\varkappa(n) + 6 + \lambda(n) + 1$ -ten Zeichen erstreckt, so ist die Gödel-Nummer des Ausdrucks, der durch diese Einschaltung entsteht,

$$\text{Subst}_n \left(\varkappa(n), \varkappa(n) + 6 + \lambda(n) + 1 \right)_{\tau'''(n)}.$$

21. Kommt man zu einem auch B enthaltenden solchen Ausdruck, der keinen mit $B_{x_i}(a, b, \dots)$ beginnenden Teil enthält, wo a und b Zahlen sind, dafür aber einen Teil der Form $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_r$, wo alle a_i Zahlen sind und $r > 1$ ist, so wird nach Nr. 7 dieses Kapitels der erste solche Teilausdruck (in dem uns interessierenden Fall gibt es, wie leicht zu sehen, nach anderen Zeichen keinen weiteren solchen Teil) durch die Gödel-Nummer seines berechneten Wertes ersetzt (so kommt man im uns interessierenden Fall, wie leicht zu sehen, zu einem Ausdruck, in dem bereits ein mit $B_{x_i}(a, b, \dots)$ beginnender Teil vorkommt, wobei a und b Zahlen sind).

Ist die Gödel-Nummer des betrachteten Ausdrucks n , so kann man die Bedingung nach Nr. 14 dieses Kapitels auch so formulieren, dass $\varphi_B(n) \neq 0$ gilt, und dass es ausserdem ein von 0 verschiedenes i gibt (das freilich nicht grösser als n ist), für welches $\exp_i(n) = 1$ ist (es entspricht ja dem Zeichen B die Zahl 1 im Wörterbuch), das heisst dass

$$(Ei) [i \leq n \ \& \ i > 0 \ \& \ \exp_i(n) = 1]$$

gilt.

Ist nun m die Gödel-Nummer eines Produktes von lauter Zahlen, so ist in der Primfaktorenzerlegung von m ein jeder Exponent entweder 3 oder eine von 0 verschiedene gerade Zahl. Sei

$$\text{prod}(m) = \begin{cases} 1, & \text{falls für alle } i \quad 0 < \exp_i(m) \begin{cases} = 3 \\ \text{oder gerade Zahl ist} \end{cases} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so ist $\text{prod}(m)$ eine primitiv-rekursive Funktion. (Unter ihren Werten kommen auch einzelne Faktoren, und auch sinnlose Zeichenfolgen vor, z. B. eine Folge von lauter Multiplikationszeichen; das kann aber in ihrer uns interessierenden Verwendung nicht vorkommen.)

Ist n die Gödel-Nummer des jetzt betrachteten, auch B enthaltenden Ausdrucks, so kann die Behauptung, dass diese Zeichenfolge ein Produkt mehrerer Zahlen enthält, auch folgendermassen ausgedrückt werden:

Es gibt solche j_1 und j_2 (die freilich nicht grösser als n sind), dass $j_2 > j_1$ und

$$\text{prod} \left(\prod_{i=j_1}^{j_2} p_i^{\text{exp}_i(n)} \right) = 1$$

gilt.

Das ist eine primitiv-rekursive Beziehung. Sei $\varphi_B'(n)$ eine solche primitiv-rekursive Funktion, die für solche und nur solche n verschwindet, für welche diese Beziehung und zugleich auch $\varphi_B(n) \neq 0$ und

$$(Ei) [i \leq n \ \& \ i > 0 \ \& \ \text{exp}_i(n) = 1]$$

besteht. Im jetzt betrachteten Fall gilt

$$\varphi_B'(n) = 0.$$

Wo beginnt und wo endet im betrachteten Ausdruck das betrachtete Zahlenprodukt? Sein erstes Zeichen ist das k' -te Zeichen des ganzen Produktes, wenn k' die kleinste solche Zahl bis n ist, zu der es ein j gibt (das freilich nicht grösser als n ist), so dass

$$\text{prod} \left(\prod_{i=k'}^j p_i^{\text{exp}_i(n)} \right) = 1$$

gilt. Diese Zahl k' soll als Funktion von n mit $\kappa'(n)$ bezeichnet werden; diese Funktion ist primitiv-rekursiv.

Und das letzte Zeichen des Produktes ist das $\kappa'(n) + l'$ -te Zeichen des ganzen betrachteten Ausdrucks, falls l' die grösste Zahl bis n ist, für welche

$$\text{prod} \left(\prod_{i=\kappa'(n)}^{\kappa'(n)+l'} p_i^{\text{exp}_i(n)} \right) = 1$$

gilt. Natürlich ist auch l' eine primitiv-rekursive Funktion von n ; diese soll mit $\lambda'(n)$ bezeichnet werden.

So ist die Gödel-Nummer des betrachteten Produktes die folgende primitiv-rekursive Funktion von n :

$$\prod_{i=0}^{\lambda'(n)} p_{i+1}^{\text{exp}_{\kappa'(n)+i}(n)}$$

Wie kann der Wert des betrachteten Produktes berechnet werden? Wir wissen, dass in der Primfaktorenzerlegung der Gödel-Nummer des Produktes alle Exponenten mit 3 oder mit einer von 0 verschiedenen geraden Zahl gleich sind. Einer Zahl a entspricht nach dem Wörterbuch der Exponent $b = 2a + 2$; einem von 0 verschiedenen geraden Exponenten b entspricht daher umgekehrt die Zahl

$$\frac{b-2}{2} = \left[\frac{b \div 2}{2} \right].$$

Ist daher m die Gödel-Nummer eines Zahlenproduktes, und ist

$$\text{exp}'(m) = \begin{cases} \left[\frac{\text{exp}_i(m) \div 2}{2} \right], & \text{falls } 0 < \text{exp}_i(m) \text{ gerade ist} \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so ist der Wert des betreffenden Produktes

$$\zeta(m) = \prod_{i=1}^{\text{long}(m)} \exp^i(m).$$

Der Wert unseres Zahlenproduktes ist daher

$$\zeta'(n) = \zeta \left(\prod_{i=0}^{\lambda'(n)} p_{i+1}^{\exp^{\kappa'(n)+i}(n)} \right),$$

und daraus erhält man nach dem Wörterbuch die Gödel-Nummer der Zeichenfolge, die aus dieser einzigen Zahl besteht, als

$$\sigma'(n) = p_1^{2 \cdot \zeta'(n) + 2}.$$

Wird im betrachteten Ausdruck das betrachtete Zahlenprodukt durch seinen Wert ersetzt, so erhält man daher einen Ausdruck, der nach Nr. 17 dieses Kapitels

$$\text{Subst}_n \left(\begin{array}{c} \kappa'(n), \kappa'(n) + \lambda'(n) \\ \sigma'(n) \end{array} \right)$$

zur Gödel-Nummer hat. Das ist samt den inzwischen verwendeten Funktionen primitiv-rekursiv.

22. Nach Nr. 9 dieses Kapitels gelangt man während der Umformung nach endlich vielen Schritten zu einem Produkt lauter Zahlen. In diesem Fall hat man nach Nr. 8 dieses Kapitels endlich nur noch den Wert dieses Produktes zu bestimmen. Ist n die Gödel-Nummer des Produktes, so gilt nach der vorigen Nummer

$$\text{prod}(n) = 1,$$

und der Wert des Produktes wird durch die primitiv-rekursive Funktion

$$\zeta(n)$$

geliefert.

23. Fassen wir unsere Ergebnisse in der Definition einer Funktion $\gamma(n)$ zusammen: sei

$$\gamma(n) = \begin{cases} \zeta(n), & \text{falls } \text{prod}(n) = 1 \\ \gamma \left(\text{Subst}_n \left(\begin{array}{c} \kappa(n), \kappa(n) + 6 + \lambda(n) + 1 \\ \tau'(n) \end{array} \right) \right), & \text{falls } \varphi_B(n) = 0 \text{ und } \exp_4(\beta(n)) = 2 \\ \gamma \left(\text{Subst}_n \left(\begin{array}{c} \kappa(n), \kappa(n) + 6 + \lambda(n) + 1 \\ \tau''(n) \end{array} \right) \right), & \text{falls } \varphi_B(n) = 0 \text{ und } \exp_4(\beta(n)) \neq 2 \\ \gamma \left(\text{Subst}_n \left(\begin{array}{c} \kappa'(n), \kappa'(n) + \lambda'(n) \\ \sigma'(n) \end{array} \right) \right), & \text{falls } \varphi'_B(n) = 0. \end{cases}$$

So gilt nach den Vorherigen

$$\psi(m, n) = \gamma(\psi'(m, n)).$$

Es ist nämlich (unter den angegebenen Nummern jetzt immer Nummern dieses Kapitels verstanden) nach Nr. 13 $\psi'(m, n)$ die Gödel-Nummer des Aus-

drucks von $\psi(m, n)$. Der Ausdruck von $\psi(m, n)$ ist entweder ein Produkt von Zahlen (für $m = 0$) und in diesem Fall ergibt nach Nr. 21 und 22 wegen $\text{prod}(\psi'(m, n)) = 1$

$$\gamma(\psi'(m, n)) = \zeta(\psi'(m, n))$$

den Wert dieses Produktes; oder aber besteht dieser Ausdruck aus ineinandergeschachtelten B -Ausdrücken. Im letzten Fall beginnt eine Umformung; wobei ein jeder betrachtete Ausdruck entweder einen Teil enthält, der mit $B_{x_i}(a, b, \dots)$ beginnt, wo a und b Zahlen sind: dann gilt nach Nr. 14 $\varphi_B(\psi'(m, n)) = 0$; oder einen Teil, der das Produkt von mehreren Zahlen ist: dann gilt nach Nr. 21 $\varphi'_B(\psi'(m, n)) = 0$. Gilt $\varphi_B(\psi'(m, n)) = 0$, so ist im betreffenden Teilausdruck $B_{x_i}(a, b, \dots)$ die Zahl a entweder 0 oder nicht 0. Diese beiden Möglichkeiten sind nach Nr. 17 gleichbedeutend damit, dass der Wert von $\exp_4(\beta(n))$ gleich 2 ist, oder nicht. Im ersten Fall bedeutet die Berechnung von $\gamma(\psi'(m, n))$ durch die obige Definition nach Nr. 17, im zweiten Fall nach Nr. 18—19—20, endlich für $\varphi'_B(n) = 0$ nach Nr. 21 den Übergang auf die Gödel-Nummern jener neuen Ausdrücke, die durch die in Nr. 6 und 7 geschilderten Schritte der Berechnung erhalten werden. Nach Nr. 9 muss die Berechnung in endlich vielen solchen Schritten, dass heisst nach endlich vielen Übergängen auf immer neue solche Gödel-Nummern, endigen: man muss zu einer Zahl gelangen, deren prod -Funktion gleich 1 ist, die also die Gödel-Nummer eines Zahlenproduktes ist; und dann ergibt $\gamma(\psi'(m, n))$ nach der Definition von γ den Wert dieses Produktes als Wert von $\psi(m, n)$.

24. Betrachten wir näher die in der vorigen Nummer angegebene Definition von $\gamma(n)$. Diese Definition ist nicht vollkommen. Die Trennung der Fälle ist insofern richtig, dass $\text{prod}(n) = 1$, $\varphi_B(n) = 0$ und $\varphi'_B(n) = 0$ sich gegenseitig ausschliessende Fälle sind. $\text{prod}(n) = 1$ bedeutet ja nach Nr. 21, dass n die Gödel-Nummer eines Zahlenproduktes ist; und die Zeichenfolge mit der Gödel-Nummer n enthält für $\varphi_B(n) = 0$ nach Nr. 14 und für $\varphi'_B(n) = 0$ nach Nr. 21 auch das Zeichen B . Ferner enthält diese Folge nach Nr. 14 im Fall $\varphi_B(n) = 0$ einen mit $B_{x_i}(a, b, \dots)$ beginnenden Teil, und nach Nr. 21 enthält sie im Fall $\varphi'_B(n) = 0$ keinen solchen Teil. Es sind aber durch diese Fälle nicht sämtliche Möglichkeiten erschöpft. Man könnte nach bisherigem Brauch die Definition damit ergänzen, dass $\gamma(n) = 0$ für die übrigen n sein soll; aber ebensogut könnte für die übrigen n das nichtssagende $\gamma(n) = \gamma(n)$ geschrieben werden: für unsere Zwecke genügt auch eine solche unvollkommene, »partielle« Definition von $\gamma(n)$.

Sogar in jenen Fällen sieht man nicht gesichert, dass der Wert von $\gamma(n)$ auf Grund der Definition berechnet werden kann, über welche die Definition verfügt. Diese Definition erscheint ja gar nicht als eine Rekursion: der Wert von $\gamma(n)$ wird darin zwar mit der Hilfe von anderen γ -Werten angegeben; es ist aber keine Spur davon, dass die letzteren an solchen Stellen angenommen werden, die in irgendeinem Sinn »vor« n kommen würden. Uns interessieren aber die an beliebigen Stellen angenommenen Werte von $\gamma(n)$ gar nicht, nur die Werte $\gamma(\psi'(m, n))$; von diesen Werten wissen wir bereits aus den Überlegungen vor der Gödelisierung, dass ihre Berechnung in endlich vielen Schritten durch die Definition von $\gamma(n)$ ermöglicht wird.

Ähnlich gelingt durch Gödelisierung auch die rekursive Definition einer beliebigen ψ -Funktion von höherer Stufe auf die »partielle« Definition einer Funktion $\gamma(n)$ zurückzuführen, die aus lauter primitiv-rekursiven Funktionen

aufgebaut wird (sich also auf Funktionsfunktionen nicht mehr beruft); so dass man durch Einsetzen einer geeigneten primitiv-rekursiven Funktion in $\gamma(n)$ eine überall in endlich vielen Schritten berechenbare Funktion erhält, deren Werte eben die Werte der ψ -Funktion liefern.

Diese Zurückführung hat nur eine prinzipielle Bedeutung; eigentlich wird dadurch die Berechnung der Werte der betreffenden Funktion sehr langwierig.

Führt man die Berechnung der Werte von ψ an einer konkreten Stelle durch, so sieht man, dass diese Berechnung mit Hilfe von γ als eine gewisse Art Rekursion aufgefasst werden kann: trotzdem, dass inzwischen gewisse $\gamma(n^*)$ -Werte auf γ -Werte an solchen Stellen zurückgeführt werden, die grösser und komplizierter als n^* sind, sind unsere Schritte doch »zurückführende« Schritte: sie führen nach endlich vieler Benutzung der Definitionsgleichungen von γ zum gesuchten Zahlenwert von ψ .

§ 16. ALLGEMEIN-REKURSIVE FUNKTIONEN.

1. Bereits in der transfiniten Rekursion hatten wir ein Beispiel für eine Definition, welche die Funktionswerte mit Hilfe von solchen Funktionswerten angibt, die an grösseren Stellen angenommen wurden, und doch die Berechnung der Funktionswerte in endlich vielen Schritten ermöglicht.

Ein einfaches Beispiel einer Rekursion dieser Art ist die Berechnung von

$$\varphi(n) = [\sqrt{n}]$$

mit Hilfe der nächsten grösseren Quadratzahl.

Es ist natürlich

$$\varphi(n^2) = [\sqrt{n^2}] = n.$$

Und von einer Quadratzahl an ändert sich bis zur nächsten der Wert von $\varphi(n)$ nicht; es ist z. B.

$$\varphi(4) = [\sqrt{4}] = 2, \quad \varphi(5) = [\sqrt{5}] = 2, \quad \varphi(6) = [\sqrt{6}] = 2, \quad \varphi(7) = [\sqrt{7}] = 2,$$

aber

$$\varphi(8) = [\sqrt{8}] = 2,$$

$$\varphi(9) = [\sqrt{9}] = 3 = 2 + 1:$$

bei der nächsten Quadratzahl springt der Wert von φ um 1. So ist $\varphi(n) = \varphi(n+1)$, falls $n+1$ keine Quadratzahl ist, und $\varphi(n) = \varphi(n+1) - 1$, falls $n+1$ eine Quadratzahl ist; und im letzteren Fall kann wegen

$$\varphi(n+1) = [\sqrt{n+1}] = \sqrt{n+1} \geq 1$$

statt $\varphi(n+1) - 1$ auch $\varphi(n+1) \div 1$ geschrieben werden. Dass eine Zahl eine Quadratzahl ist, kann auch ohne Benutzung von $[\sqrt{n}]$ als eine primitiv-rekursive Beziehung aufgeschrieben werden; nämlich als

$$(Ei) [i \leq n \ \& \ i^2 = n]$$

Daher ist

$$\beta(n, a) = \begin{cases} a, & \text{falls } n+1 \text{ keine Quadratzahl ist} \\ a \div 1, & \text{falls } n+1 \text{ eine Quadratzahl ist} \end{cases}$$

eine primitiv-rekursive Funktion, und $\varphi(n)$ kann durch

$$\begin{aligned}\varphi(n^2) &= n \\ \varphi(n) &= \beta(n, \varphi(n+1))\end{aligned}$$

definiert werden.

Hier wird der Wert an der Stelle n mit Hilfe des an der Stelle $n+1$ angenommenen Wertes angegeben; jedoch ermöglichen die beiden Definitionsgleichungen die Berechnung des Wertes von φ an einer beliebigen Stelle. Es ist ja nach der zweiten Definitionsgleichung von φ und nach der Definition von β

$$\varphi(n) = \begin{cases} \varphi(n+1), & \text{falls } n+1 \text{ keine Quadratzahl ist} \\ \varphi(n+1) \div 1, & \text{« } n+1 \text{ eine Quadratzahl ist} \end{cases}$$

Daher kann z. B. $\varphi(14)$ folgendermassen berechnet werden: Man sucht eine Quadratzahl, die grösser als 14 ist. Die nächste solche Zahl ist 16. Da 16 eine Quadratzahl ist, so ist nach der ersten Definitionsgleichung

$$\varphi(16) = 4;$$

und nach der zweiten Definitionsgleichung ist

$$\varphi(15) = \varphi(16) \div 1 = 4 \div 1 = 3.$$

15 ist keine Quadratzahl; so ergibt die zweite Definitionsgleichung

$$\varphi(14) = \varphi(15) = 3.$$

Die Berechnung gelingt immer in endlich vielen Schritten: man findet zu einer jeden Zahl n eine grössere Quadratzahl; z. B. ist $(n+1)^2$ sicher grösser als n und eine Quadratzahl. Von hier an gelangt man immer um 1 rückwärts schreitend in endlich vielen Schritten zum Wert von $\varphi(n)$, so wie vorhin im Fall $n = 14$.

2. Man hat noch zu bedenken, ob die angegebene Definition zu keinem Widerspruch führen kann. Es lässt sich ja der Wert von $\varphi(n)$ nach der zweiten Definitionsgleichung von einem beliebigen solchen φ -Wert ausgehend berechnen, wobei das Argument eine Quadratzahl und grösser als n ist; und man könnte glauben, dass man von verschiedenen Quadratzahl-Argumenten ausgehend verschiedene Werte von $\varphi(n)$ erhält. Das kann aber nicht eintreffen, denn auf welche Quadratzahl auch immer erst die erste, dann schrittweise die zweite Definitionsgleichung von φ angewandt wird: man erhält für alle kleinere Quadratzahl-Argumente denselben Wert, welche die erste Definitionsgleichung geliefert hätte. Geht man nämlich davon aus, dass nach der ersten Definitionsgleichung

$$\varphi(m+1)^2 = m+1$$

ist, und schreitet man dann nach der zweiten Definitionsgleichung rückwärts, so ergibt sich, da es zwischen m^2 und $(m+1)^2 = m^2 + 2m + 1$ keine Quadratzahl gibt,

$$\begin{aligned}\varphi(m^2) &= \varphi(m^2 + 1) = \varphi(m^2 + 2) = \dots = \varphi(m^2 + 2m) = \\ &= \varphi(m+1)^2 - 1 = \varphi(m+1)^2 \div 1 = (m+1) \div 1 = m;\end{aligned}$$

so überträgt die zweite Definitionsgleichung von der zum Ausgang genommenen Quadratzahl $(m+1)^2$ auch auf die vorherige Quadratzahl m^2 die Eigenschaft

$$\varphi(m^2) = m;$$

und genau so geht diese Eigenschaft auch auf die immer kleineren Quadratzahlen über. So ist es gleich, aus welcher nach n kommenden Quadratzahl ausgehend man in der Berechnung von $\varphi(n)$ rückwärts schreitet.

Man hatte bereits bei der in Nr. 23 des vorigen Kapitels angegebenen Definition der Funktion $\gamma(n)$, welche die formalen Schritte der Berechnung von $\psi(m, n)$ gödelisiert hat, darauf zu achten, dass die Definition an keiner gegebenen Stelle (m, n) verschiedene Werte für ψ liefern kann. Deswegen wurde in die Bedingung $\varphi'_B(n) = 0$ auch jene Forderung eingeschlossen, dass in der Primfaktorenzerlegung von n auch die Zahl 1 vorkommen soll, die im Wörterbuch dem Zeichen B entspricht. In der Bedingung $\varphi'_B(n) = 0$ wurde nämlich ausser dieser Forderung gefordert, dass in der Zeichenfolge, welche n zur Gödel-Nummer hat, kein mit $B_{x_i}(a, b, \dots)$ beginnender Teil (wo a und b Zahlen sind) vorkommen soll; dafür aber ein Teil, der das Produkt lauter Zahlen ist. Hätte man aber das Auftreten eines Exponenten gleich 1 nicht gefordert, so könnte eine Zeichenfolge mit der genannten Eigenschaft auch ein Zahlenprodukt sein; aber in diesem Fall ordnet die Definition wegen $\text{prod}(n) = 1$ einen anderen Wert zu $\gamma(n)$, als dann, wenn auch B in der Zeichenfolge vorkommt.

3. In diesem Kapitel wurde $\varphi(n) = [\sqrt{n}]$ durch die Gleichungen

$$\varphi(n^2) = n$$

$$\varphi(n) = \beta(n, \varphi(n+1))$$

definiert; dazu musste man aber auch die primitiv-rekursive Funktion $\beta(n, a)$ kennen. Diese wird durch endlich viele Substitutionen und Rekursionen aus 0 und $n+1$ aufgebaut. Man erhält eigentlich erst dann die vollkommene Definition von φ , wenn man sämtliche Gleichungen, welche die Substitutionen und Rekursionen definieren, vor die beiden Definitionsgleichungen von φ setzt. Dasselbe gilt für alle zahlentheoretische Funktionen, die durch irgendeine Rekursion definiert werden. Im jetzt betrachteten verhältnismässig einfachen Fall soll einmal die vollkommene Definition aufgeschrieben werden. Dabei hat man sich an die Tabelle zum Schluss des § 2 zu erinnern.

Wie bereits in Nr. 1 dieses Kapitels erwähnt wurde, kann die Quadratzahl-Beschaffenheit von n auch durch

$$(Ei)[i \leq n \ \& \ i^2 = n]$$

ausgedrückt werden. Hier ist $i^2 = n$ mit

$$|n - i^2| = 0$$

gleichbedeutend (in der Definition von $|a - b|$ wurde zu seiner Zeit die Funktion $a \div n$ benutzt: es war ja

$$|a - b| = (a \div b) + (b \div a),$$

und dass es ein i zwischen 0 und n gibt, für welches dies gilt, ist mit

$$\prod_{i=0}^n |n - i^2| = 0$$

äquivalent. (Dabei kann $\prod_{i=0}^m |n - i^2|$ durch

$$\prod_{i=0}^0 |n - i^2| = |n| = n$$

und genau $\prod_{i=0}^{m+1} |n - i^2| = \left(\prod_{i=0}^m |n - i^2|\right) \cdot |n - (m+1)^2|$ definiert werden.)

$\beta(n, a)$ wurde in Nr. 1 dieses Kapitels als eine »zusammengeflochtene« Funktion definiert. Die Trennung der Fälle kann hier mit Hilfe von $\text{sg}(n)$ und $\overline{\text{sg}}(n)$ geschehen: es ist

$$\beta(n, a) = a \cdot \text{sg} \left(\prod_{i=0}^{n+1} |n+1-i^2| \right) + (a \div 1) \cdot \overline{\text{sg}} \left(\prod_{i=0}^{n+1} |n+1-i^2| \right).$$

In der Definition von $\text{sg}(n)$ und $\overline{\text{sg}}(n)$ wird auch die Konstante 1 benutzt; und im Aufbau von $\beta(n, a)$ nehmen auch die Funktionen $a+n$, $n \cdot a$, n^2 , $n \div 1$ Teil.

Es sollen also die Definitionsgleichungen von den aufgezählten Funktionen vor den beiden Definitionsgleichungen von φ aufgereiht werden. Die verwendeten Funktionen sollen mit Ausnahme der konstanten Zahlen und der Variablen, durch $-$ Zeichen mit verschiedenen Indizes bezeichnet werden. Für die Ausgangsfunktion $n+1$ setze ich $\sigma_0(n)$. So lauten die benutzten Definitionsgleichungen (wobei links die durch diese Gleichungen definierten Hilfsfunktionen aufgeschrieben werden, in welchen, wo m als Argument auftritt, m , sonst immer n als erstes Argument zu betrachten ist):

$$\begin{aligned} a+n & \dots\dots\dots \sigma_1(0, a) = a \\ & \dots\dots\dots \sigma_1(\sigma_0(n), a) = \sigma_0(\sigma_1(n, a)) \\ n \cdot a & \dots\dots\dots \sigma_2(0, a) = 0 \\ & \dots\dots\dots \sigma_2(\sigma_0(n), a) = \sigma_1(a, \sigma_2(n, a)) \\ n^2 & \dots\dots\dots \sigma_3(n) = \sigma_2(n, n) \\ n \div 1 & \dots\dots\dots \sigma_4(0) = 0 \\ & \dots\dots\dots \sigma_4(\sigma_0(n)) = n \\ a \div n & \dots\dots\dots \sigma_5(0, a) = a \\ & \dots\dots\dots \sigma_5(\sigma_0(n), a) = \sigma_4(\sigma_5(n, a)) \\ |n-a| & \dots\dots\dots \sigma_6(n, a) = \sigma_1(\sigma_5(n, a), \sigma_5(a, n)) \\ \text{sg}(n) & \dots\dots\dots \sigma_7(0) = 0 \\ & \dots\dots\dots \sigma_7(\sigma_0(n)) = 1 \\ \overline{\text{sg}}(n) & \dots\dots\dots \sigma_8(0) = 1 \\ & \dots\dots\dots \sigma_8(\sigma_0(n)) = 0 \\ |n+1-i^2| & \dots\dots\dots \sigma_9(n, i) = \sigma_6(\sigma_0(n), \sigma_3(i)) \\ |n+1-(a+1)^2| & \dots\dots\dots \sigma_{10}(n, a) = \sigma_9(n, \sigma_0(a)) \\ \prod_{i=0}^m |n+1-i^2| & \dots\dots\dots \sigma_{11}(0, n) = \sigma_0(n) \\ & \dots\dots\dots \sigma_{11}(\sigma_0(m), n) = \sigma_2(\sigma_{11}(m, n), \sigma_{10}(n, m)) \\ \prod_{i=0}^{n+1} |n+1-i^2| & \dots\dots\dots \sigma_{12}(n) = \sigma_{11}(\sigma_0(n), n) \\ \text{sg} \left(\prod_{i=0}^{n+1} |n+1-i^2| \right) & \dots\dots\dots \sigma_{13}(n) = \sigma_7(\sigma_{12}(n)) \\ \overline{\text{sg}} \left(\prod_{i=0}^{n+1} |n+1-i^2| \right) & \dots\dots\dots \sigma_{14}(n) = \sigma_8(\sigma_{12}(n)) \\ \beta(n, a) & \dots\dots\dots \sigma_{15}(n, a) = \sigma_1(\sigma_2(\sigma_4(a), \sigma_{14}(n)), \sigma_2(a, \sigma_{13}(n))), \end{aligned}$$

und endlich

$$\begin{aligned}\varphi(\sigma_3(n)) &= n \\ \varphi(n) &= \sigma_{15}(n, \varphi(\sigma_0(n))) .\end{aligned}$$

4. Will man zum Beispiel $\varphi(1)$ auf Grund der vollkommenen Definition berechnen, so trachtet man, mit Rücksicht auf die erste Definitionsgleichung von φ , eine solche Stelle n zu suchen, wo $\sigma_3(n) = 1$ ist. Das gelingt leicht, da

$$\begin{aligned}\sigma_3(1) &= \sigma_2(1, 1) = \sigma_2(\sigma_0(0), 1) = \sigma_1(1, \sigma_2(0, 1)) = \sigma_1(1, 0) = \\ &= \sigma_1(\sigma_0(0), 0) = \sigma_0(\sigma_1(0), 0) = \sigma_0(0) = 1\end{aligned}$$

gilt. Daher ist

$$\varphi(1) = 1 .$$

Bei der Berechnung von $\varphi(2)$ findet man schon keine Stelle n , wo $\sigma_3(n) = 2$ wäre; wird aber die zweite Definitionsgleichung von φ in Anspruch genommen, so erhält man

$$\varphi(2) = \sigma_{15}(2, \varphi(\sigma_0(2))) = \sigma_{15}(2, \varphi(3))$$

und

$$\varphi(3) = \sigma_{15}(3, \varphi(\sigma_0(3))) = \sigma_{15}(3, \varphi(4)) ;$$

aus unseren Gleichungen kann aber

$$\sigma_3(2) = 4$$

berechnet werden, und so ergibt sich, dass

$$\varphi(4) = \varphi(\sigma_3(2)) = 2$$

folglich

$$\varphi(3) = \sigma_{15}(3, 2)$$

ist; der Wert von $\sigma_{15}(3, 2)$ lässt sich wieder aus den Definitionsgleichungen berechnen, und kann dann in $\sigma_{15}(2, \varphi(3))$ für $\varphi(3)$ eingesetzt werden; wird auch der Wert des so erhaltenen Ausdrucks berechnet, dann erhält man endlich den Wert von $\varphi(2)$.

Die Schritte der Berechnung sind: Einsetzungen von Zahlen für Variablen der Definitionsgleichungen, und das Ersetzen eines Teils einer Gleichung durch einen Ausdruck, der sich damit gleich erwiesen hat.

5. Nun kann der Begriff der *allgemein-rekursiven Funktion* formuliert werden.²⁹ Betrachten wir Gleichungen, die folgendermassen aufgebaut werden. Die Zahlen, Variablen und $n + 1$ sollen »Terme« genannt werden, ferner auch alle Ausdrücke, die aus den zu definierenden Hilfsfunktionen $\sigma_i(a_1, \dots, a_r)$ und aus der zu definierenden Funktion $\varphi(a_1, \dots, a_r)$ durch Einsetzung von Terme für ihre Variablen entstehen. Eine Gleichung zwischen zwei Termen, worin auch irgendein σ_i oder φ auftritt, soll eine *Definitionsgleichung* heissen. Ein Gleichungssystem, das aus solchen Gleichungen besteht, wird eine *allgemeine Rekursion* genannt, welche die *allgemein-rekursive Funktion* φ definiert, wenn es zu einem jeden r -tupel n_1, \dots, n_r eine und nur eine Zahl n gibt, so dass man aus dem Gleichungssystem

$$\varphi(n_1, \dots, n_r) = n$$

durch endlich vieler Anwendung der folgenden beiden Schritte erhält:

²⁹) HERBRAND [1] § 2. Gruppe C.; GÖDEL [2]; KLEENE [1] und [5] I. Nr. 2.

- 1) Einsetzung von Zahlen für Variablen,
- 2) Übergang von einem Ausdruck a und von einem Ausdruck der Form $b = c$, auf jenen Ausdruck, der aus a entsteht, wenn darin für b an einer oder mehreren Stellen c eingesetzt wird.

Hier wird nicht verlangt, dass Funktionswerte aus an früheren Stellen angenommenen Funktionswerten aufgebaut werden sollen; auch nicht, dass die im Aufbau von φ teilnehmenden Hilfsfunktionen überall berechenbar sein sollen (wie auch die Berechenbarkeit der im vorigen Kapitel eingeführten Funktion $\gamma(n)$, welche die Berechnung der dort behandelten Funktion $\psi(m, n)$ gödelisiert hat, nicht überall notwendig war, bloss an den Stellen, die durch die Werte von $\psi'(m, n)$ geliefert worden sind); es wird bloss verlangt, dass das Gleichungssystem die Werte von φ an gewissen Stellen mit Hilfe anderer φ -Werte und gewisser Werte der Hilfsfunktionen so angeben soll, dass die Werte von φ aus dem Gleichungssystem an allen Stellen eindeutig berechnet werden können.

Die so definierten Funktionen können als die im allgemeinsten Sinne rekursiven Funktionen betrachtet werden. Natürlich gehören alle Arten unserer rekursiven Funktionen, die durch ausschliessliche Verwendung von Zahlenvariablen definiert wurden, unter diesen Begriff. Aber die Untersuchungen über $\psi(m, n)$ im vorigen Kapitel zeigen, dass die ausschliessliche Verwendung von Zahlenvariablen keine Beschränkung bedeutet: wird die Berechnung der Werte einer zahlentheoretischen Funktion, die durch Vermittlung von Funktionsfunktionen (oder auch durch Vermittlung von Rekursionen noch höherer Stufen oder von anderen Hilfsmitteln) definiert wurde, gödelisiert, so erhält man eine allgemeine Rekursion der ersten Stufe.

§ 17. DIE EXPLIZITE FORM DER ALLGEMEIN-REKURSIVEN FUNKTIONEN.

1. In der Tabelle am Ende des § 2 wurde die $n + 2$ -te Primzahl (da p_n die $n + 1$ -te Primzahl bedeutet) so aufgeschrieben, als die kleinste Zahl bis zur Schranke 2^{n+2} , bis welcher es genau $n + 2$ Primzahlen gibt, also — da $\pi(i)$ die Anzahl der Primzahlen bis i bezeichnet hat — als

$$p_{n+1} = \mu_i [i \leq 2^{n+2} \ \& \ \pi(i) = n + 2] .$$

Hinzugenommen, dass $p_0 = 2$ ist, hat sich daher p_n als eine primitiv-rekursive Funktion erwiesen.

Wenn man aber nicht Wert darauf legt, p_n als primitiv-rekursive Funktion zu definieren, sondern sich mit der Definition von p_n als allgemein-rekursive Funktion begnügt, so muss man sich nicht mit der Aufsuchung einer Schranke bemühen. Es genügt zu wissen, dass es zu einem jeden n ein solches i gibt, für welches

$$\pi(i) = n + 2, \quad \text{das heisst} \quad |n + 1 - \pi(i)| = 0$$

gilt. (Das ist aber sicher, da es unendlich viele Primzahlen gibt.) Denn wird das kleinste i mit einer gegebenen Eigenschaft, auch wenn keine Schranke angegeben ist, mit μ_i bezeichnet, wobei die betrachtete Eigenschaft in der Klammer nach μ_i angegeben wird, so ist

$$p_{n+1} = \mu_i [|n + 1 - \pi(i)| = 0] ;$$

und man kann allgemein den folgenden Satz beweisen: ist $\tau(n_1, \dots, n_r, i)$ eine

solche primitiv- oder bloss allgemein-rekursive Funktion, dass zu einem jeden r -tupel n_1, \dots, n_r ein i gibt, für welches

$$\tau(n_1, \dots, n_r, i) = 0$$

gilt, so ist

$$\mu(n_1, \dots, n_r) = \mu_i[\tau(n_1, \dots, n_r, i) = 0]$$

eine allgemein-rekursive Funktion.³⁰ Man kann nämlich ein Gleichungssystem angeben, woraus sich mit Vermittlung einer Hilfsfunktion der Wert von $\mu(n_1, \dots, n_r)$ an einer jeden Stelle eindeutig berechnen lässt.

Die Hilfsfunktion σ hängt ausser den Variablen n_1, \dots, n_r von zwei weiteren Variablen ab: für eine von diesen, die mit m bezeichnet wird, werden der Reihe nach die Werte

$$\tau(n_1, \dots, n_r, 0), \tau(n_1, \dots, n_r, 1), \tau(n_1, \dots, n_r, 2), \dots$$

eingesetzt, die untersucht werden: welche von ihnen zum erstenmal 0 wird; man macht einen Versuch mit diesen Werten, bis man 0 findet. Für die andere neue Variable a wird jeweils die Anzahl der bisherigen Versuche eingesetzt. Für das erste i , für welches $\tau(n_1, \dots, n_r, i) = 0$ gilt, ist die Anzahl der vorangehenden Versuche eben i . Es sei also

$$\sigma(0, n_1, \dots, n_r, a) = a$$

$$\sigma(m+1, n_1, \dots, n_r, a) = \sigma(\tau(n_1, \dots, n_r, a+1), n_1, \dots, n_r, a+1).$$

Dann ist

$$\mu(n_1, \dots, n_r) = \sigma(\tau(n_1, \dots, n_r, 0), n_1, \dots, n_r, 0).$$

Denn betrachten wir eine bestimmte Stelle n_1, \dots, n_r . Hier repräsentiert

$$\sigma(\tau(n_1, \dots, n_r, 0), n_1, \dots, n_r, 0)$$

den ersten Versuch. Ist bereits $\tau(n_1, \dots, n_r, 0) = 0$, so liefert die erste Definitionsgleichung den einzigen anwendbaren Schritt:

$$\sigma(\tau(n_1, \dots, n_r, 0), n_1, \dots, n_r, 0) = \sigma(0, n_1, \dots, n_r, 0) = 0;$$

und in diesem Fall ist tatsächlich die 0 das kleinste i für welches

$$\tau(n_1, \dots, n_r, i) = 0$$

gilt. Ist aber $\tau(n_1, \dots, n_r, 0)$ nicht 0, so kann sein Wert in der Form $m+1$ geschrieben werden, und die weitere Berechnung kann nur durch Anwendung der zweiten Definitionsgleichung geschehen:

$$\begin{aligned} \sigma(\tau(n_1, \dots, n_r, 0), n_1, \dots, n_r, 0) &= \sigma(m+1, n_1, \dots, n_r, 0) = \\ &= \sigma(\tau(n_1, \dots, n_r, 1), n_1, \dots, n_r, 1). \end{aligned}$$

Hier gibt es zwei Möglichkeiten. Ist

$$\tau(n_1, \dots, n_r, 1) = 0,$$

so lässt sich bloss die erste Definitionsgleichung anwenden, und nach ihr ist

$$\sigma(\tau(n_1, \dots, n_r, 1), n_1, \dots, n_r, 1) = \sigma(0, n_1, \dots, n_r, 1) = 1;$$

in diesem Fall ist aber tatsächlich die 1 das kleinste i , für welches $\tau(n_1, \dots, n_r, i) = 0$ gilt. Ist aber $\tau(n_1, \dots, n_r, 1)$ nicht 0, so kann es in der Form $m+1$ geschrieben werden; also ergibt die allein anwendbare zweite Definitionsgleichung

$$\begin{aligned} \sigma(\tau(n_1, \dots, n_r, 1), n_1, \dots, n_r, 1) &= \sigma(m+1, n_1, \dots, n_r, 1) = \\ &= \sigma(\tau(n_1, \dots, n_r, 2), n_1, \dots, n_r, 2). \end{aligned}$$

³⁰) KLEENE [1] § 1. Satz V.

Und so weiter. Da es nach der Annahme auch zum betrachteten r -tupel n_1, \dots, n_r ein i gibt, für welches $\tau(n_1, \dots, n_r, i) = 0$ gilt, so muss dieses Verfahren sicher nach endlich vielen Schritten zum Abschluss kommen. Werden daher zu den beiden Definitionsgleichungen von σ auch die Definitionsgleichungen von τ und die Gleichung

$$\mu(n_1, \dots, n_r) = \sigma(\tau(n_1, \dots, n_r, 0), n_1, \dots, n_r, 0)$$

hinzugenommen, so erhält man mit endlich vielen (in der Definition einer allgemein-rekursiven Funktion erlaubten) Schritten den Wert von $\mu(n_1, \dots, n_r)$. Folglich ist $\mu(n_1, \dots, n_r)$ tatsächlich allgemein-rekursiv.

2. Das definierende Gleichungssystem ist wieder von solcher Struktur, dass es den Wert $\sigma(m+1, n_1, \dots, n_r, a)$ mit Hilfe des Funktionswertes an einer solchen Stelle $(\tau(n_1, \dots, n_r, a+1), n_1, \dots, n_r, a+1)$ angibt, welche kaum als eine »frühere« Stelle betrachtet werden kann. Trotzdem ist es überraschend, dass diese verhältnismässig einfache Definitionsart alle komplizierte Möglichkeiten der von der primitiven Rekursion abweichenden rekursiven Definitionen in sich trägt: man kann nämlich beweisen,³¹ dass eine jede allgemein-rekursive Funktion $\varphi(n_1, \dots, n_r)$ auf folgende explizite Form gebracht werden kann:

$$\varphi(n_1, \dots, n_r) = \psi(\mu_i[\tau(n_1, \dots, n_r, i) = 0]),$$

wo $\psi(n)$ und $\tau(n_1, \dots, n_r, m)$ primitiv-rekursiv sind, und zu einem jeden r -tupel n_1, \dots, n_r ein solches i gibt, für welches

$$\tau(n_1, \dots, n_r, i) = 0$$

gilt.

Kurzgefasst kann das folgendermassen bewiesen werden:

Ist $\varphi(n_1, \dots, n_r)$ eine allgemein-rekursive Funktion, so gibt es ein Gleichungssystem, aus welchem sich ihre Werte in endlich vielen Schritten berechnen lassen. Es soll für ein gegebenes r -tupel a_1, \dots, a_r eine endliche Folge von Gleichungen, deren jedes Glied entweder eine Gleichung des betrachteten Gleichungssystems ist, oder durch einen erlaubten Berechnungsschritt aus früheren Gleichungen der Folge entsteht, eine »Ableitung« heissen, falls das letzte Glied der Folge eine Gleichung der Form

$$\varphi(a_1, \dots, a_r) = a,$$

und hier a eine Zahl ist. Nach der Definition der allgemein-rekursiven Funktionen gibt es zu einem jeden r -tupel a_1, \dots, a_r eine solche Ableitung. Daher kann der Wert von φ an der Stelle (a_1, \dots, a_r) als der Wert a definiert werden, der von einer bestimmten Ableitung geliefert wird (in einem gewissen Sinn die »erste« solche Ableitung wird zur Anwendung kommen). Das ist eindeutig, denn nach der Definition der allgemein-rekursiven Funktion muss eine jede zur Stelle (a_1, \dots, a_r) gehörige Ableitung denselben Wert a als Wert von $\varphi(a_1, \dots, a_r)$ ergeben.

Wird nun das von formaler Seite betrachtete Berechnungsverfahren »gödelisiert«, so stellt es sich heraus, dass man sich dabei ausser der Bestimmung der zur »ersten« Ableitung gehörigen Gödel-Nummer, auf lauter primitiv-rekursive Funktionen beschränken kann.

³¹⁾ KLEENE [1] § 1., [5] II. Nr. 7.

Die Gödelisierung wird leichter werden, wenn nicht alle Zahlen zugrunde gelegt werden, bloss die 0; man erhält ja, wenn auch die Funktion $\sigma_0(n) = n + 1$ zugrunde gelegt wird, die übrigen Zahlen als

$$1 = 0 + 1 = \sigma_0(0), \quad 2 = 1 + 1 = \sigma_0(0) + 1 = \sigma_0(\sigma_0(0)), \\ 3 = 2 + 1 = \sigma_0(\sigma_0(0)) + 1 = \sigma_0(\sigma_0(\sigma_0(0))), \dots$$

So wird zu einem Zahlzeichen einer Zeichenfolge in der Primfaktorenzerlegung der zur Folge gehörigen Gödel-Nummer nicht ein einziger Exponent gehören, sondern eine ganze Exponentenfolge, welche aus gewisser Anzahl solcher Zahlen besteht, die den Zeichen σ_0 , 0 und den Klammern entsprechen.

In unseren Gleichungen treten auch neue Zeichen auf; so hat man auch das Wörterbuch von Nr. 10 des § 15 etwas zu modifizieren. Ich werde so wenig wie möglich daran ändern. Jetzt treten nicht beliebig viele Zahlen, aber beliebig viele Zeichen σ_n auf. So sollen die geraden Zahlen von 2 an den Zeichen σ_n entsprechen. Jetzt kommen die Zeichen B und $\gg\ll$ nicht vor, dafür aber die Zeichen 0 und $\gg=\ll$. So soll diesen 1 und 3 entsprechen. Die übrigen Zuordnungen sollen unverändert bleiben. Ich bemerke noch, dass man sich im Aufbau der in Nr. 12 und 17 des § 15 definierten primitiv-rekursiven Funktionen

$$a * b \quad \text{und} \quad \text{Subst}_n \begin{pmatrix} u, v \\ m \end{pmatrix}$$

auf keine B , $\gg\ll$ oder irgendeine Zahl enthaltende Zeichenfolge berufen musste; so ändert die Einführung des neuen Wörterbuches nichts an der Bedeutung dieser Funktionen. Diese Funktionen werde ich in den Folgenden öfters benutzen.

Ich schicke noch voraus, dass dem Zeichen σ_0 die Zahl 2 entsprechen, und die zu definierende Funktion nicht mit φ , sondern mit σ_s bezeichnet wird. (s ist die Anzahl der benutzten Hilfsfunktionen, auch $\sigma_0(n) = n + 1$ inbegriffen). So lautet

das neue Wörterbuch:

Dem Zeichen σ_n soll die Zahl $2n + 2$ (für $n = 0, 1, 2, \dots$) entsprechen

«	«	0	«	«	«	1	«
«	«	=	«	«	«	3	«
«	«	(«	«	«	5	«
«	«)	«	«	«	7	«
«	«	,	«	«	«	9	«

der Variablen x_n « « « $2n + 9$ (für $n = 1, 2, \dots$) «

Die Definitionsgleichungen sind formal betrachtet Zeichenfolgen; die Gödel-Nummer der aus den Zeichen

$$a_1, a_2, \dots, a_t$$

bestehenden Gleichung ist

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$$

Und wenn den Gleichungen der Anzahl l , die in einem Gleichungssystem, oder in einer Ableitung teilnehmen, der Reihe nach die Gödel-Nummern

$$n_1, n_2, \dots, n_l$$

entsprechen, so wird dem Gleichungssystem bzw. der Ableitung die Gödel-Nummer

$$\begin{matrix} n_1 & n_2 & \dots & n_l \\ p_1 & p_2 & \dots & p_l \end{matrix}$$

zugeordnet. Z. B. ist die Gödel-Nummer der aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \sigma_2(x_1) &= 0 \\ \sigma_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

bestehenden einfachen Ableitung:

$$p_1^6 p_2^5 p_3^{11} p_4^7 p_5^3 p_6^1 \quad p_1^6 p_2^5 p_3^1 p_4^7 p_5^3 p_6^1$$

3. Da jetzt eine Zahl n durch eine ganze Zeichenfolge aufgeschrieben wird, wird es sich lohnen, die Definition der Gödel-Nummer einer Zeichenfolge dieser Art im voraus aufzuschreiben. Es soll jetzt diese Gödel-Nummer mit $\zeta(n)$ bezeichnet werden (diese Funktion ist aber nicht identisch mit der Funktion $\zeta(n)$, die in Nr. 21 des § 15 definiert wurde, und die wir nicht mehr brauchen werden).

Da das Wörterbuch dem Zeichen 0 die Zahl 1 zuordnet, so ist die Gödel-Nummer der Zeichenfolge, die aus dem einzigen Zeichen 0 besteht:

$$\zeta(0) = p_1^1.$$

Und da die Zeichenfolge für $n + 1$ so aufgebaut wird, dass man zwischen die Klammern von $\sigma_0(\dots)$ die Zeichenfolge für n schreibt, so wird $\zeta(n + 1)$ aus $\zeta(n)$ durch

$$\zeta(n + 1) = p_1^2 p_2^5 * \zeta(n) * p_1^7$$

aufgebaut. Das ergibt samt der vorigen Gleichung eine primitive Rekursion für $\zeta(n)$.

Es ist aus der Definition klar, dass für alle n

$$n < \zeta(n)$$

gilt; das gilt ja nach der ersten Definitionsgleichung für $n = 0$, und vererbt sich nach der zweiten Definitionsgleichung von n auf $n + 1$. Darauf werde ich mich noch berufen.

4. Es ist zweckmässig erst die in der Berechnung der Funktionswerte erlaubten Schritte — die »Reduktionsschritte« der Gleichungen — zu gödelisieren.

Nach Nr. 5 des vorigen Kapitels ist einer der erlaubten Schritte das Einsetzen von Zahlen für die Variablen einer Gleichung. Das kann auf weitere elementare Schritte aufgelöst werden. Erstens können die Zahlen einzeln für je eine Variable eingesetzt werden. Will man nun zum Beispiel 2 für x_i einsetzen, so kann das — da 2 durch die Zeichenfolge $\sigma_0(\sigma_0(0))$ aufgeschrieben wird — in folgenden Schritten geschehen: man setzt erst $\sigma_0(x_i)$ für x_i ; dann in der so modifizierten Gleichung wieder $\sigma_0(x_i)$ für x_i ; endlich in der neuen modifizierten Gleichung 0 für x_i . Genau so sieht man ein, dass sich das Einsetzen von Zahlen für Variablen immer auf folgende elementare Schritte auflösen lässt:

- 1) das Einsetzen von $\sigma(x_i)$ für eine Variable x_i ,
- 2) das Einsetzen von 0 für eine Variable x_i .

In einer gegebenen Gleichung treten freilich nur endlich viele Variablen auf. Ist n die Gödel-Nummer einer Gleichung, so ist nach dem neuen Wörterbuch der grösste Variablenindex in der Gleichung die grösste Zahl j (die freilich nicht

grösser als n ist), für welche $2j + 9$ unter den Exponenten in der Primfaktorenzerlegung von n vorkommt; darauf werde ich mich in den Folgenden berufen.

5. Beschäftigen wir uns erst mit dem leichteren Reduktionsschritt 2). Ist n die Gödel-Nummer der Gleichung, auf welche diese Reduktion angewandt wird, so soll die Gödel-Nummer der durch diesen Schritt modifizierten Gleichung mit $\text{red}_1(i, n)$ bezeichnet werden (diese Zahl ist freilich n selber, wenn x_i nicht in der Gleichung auftritt; so für $i > n$ jedenfalls, denn kommt x_i in der Gleichung vor, so muss die entsprechende Zahl $2i + 9$ unter den Exponenten der Primfaktorenzerlegung von n vorkommen, und daher kann sogar $2i + 9$ nicht grösser als n sein). Da nach dem Wörterbuch zu 0 die Zahl 1 und zu x_i die Zahl $2i + 9$ gehört, so ist für

$$\text{exp}'_j(n, i) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \text{exp}_j(n) = 2i + 9 \\ \text{exp}_j(n) & \text{sonst} \end{cases}$$

(welche Funktion nicht identisch mit der im § 15 ähnlich bezeichneten Funktion ist, die wir nicht mehr brauchen)

$$\text{red}_1(i, n) = \prod_{j=1}^{\text{long}(n)} p_j^{\text{exp}'_j(n, i)}$$

Nun sei die Gödel-Nummer der durch den elementaren Schritt 1) modifizierten Gleichung: $\text{red}_2(i, n)$ (diese ist wieder n selber, wenn x_i nicht in der Gleichung vorkommt; so für $i > n$ jedenfalls). Da dieser Schritt im Einsetzen von $\sigma_0(x_i)$ für x_i besteht, und die Gödel-Nummer von $\sigma_0(x_i)$

$$p_1^2 p_2^5 p_3^{2i+9} p_4^7$$

ist, entsteht $\text{red}_2(i, n)$ aus n , indem in die Primfaktorenzerlegung von n für alle Faktoren der Form p_j^{2i+9} dieses Produkt eingeschaltet wird. Sei also

$$p_j'(n, i) = \begin{cases} p_1^2 p_2^5 p_3^{\text{exp}_j(n)} p_4^7, & \text{falls } \text{exp}_j(n) = 2i + 9 \\ p_1^{\text{exp}_j(n)} & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann ist

$$\text{red}_2(i, n) = p_1'(n, i) * p_2'(n, i) * \dots * p'_{\text{long}(n)}(n, i)$$

Wird hier benutzt, dass

$$1 * b = b$$

ist, wie das in Nr. 12 des § 15 hervorgehoben wurde, so kann die aus Einschaltungen von variabler Anzahl zusammengesetzte Funktion

$$\pi^*(m, n, i) = p_1'(n, i) * p_2'(n, i) * \dots * p'_m(n, i)$$

durch die primitive Rekursion

$$\pi^*(0, n, i) = 1$$

$$\pi^*(m+1, n, i) = \pi^*(m, n, i) * p'_{m+1}(n, i)$$

definiert werden; und es ist

$$\text{red}_2(i, n) = \pi^*(\text{long}(n), n, i)$$

6. Nach Nr. 5 des vorigen Kapitels ist der andere erlaubte Reduktionsschritt, dass für einen Teil b einer Gleichung a , falls eine Gleichung $b = c$ bereits abgeleitet wurde, c gesetzt werden darf. Es genügt nachzuschauen: wie sich die Gödel-Nummer n der Gleichung a modifiziert, wenn ein solcher Teil b

von a durch c ersetzt wird, der mit dem $i + 1$ -ten Zeichen von a beginnt (und n bleibt freilich unverändert, wenn a keinen solchen Teil enthält, so z. B. für $i > n$); i kann ja nachher die Zahlen $0, 1, 2, \dots$ durchlaufen — freilich muss dabei n nicht überstiegen werden — und so kann ein beliebiger Teil b von a durch c ersetzt werden.

Wir haben also nachzuprüfen, ob in a vom $i + 1$ -ten Zeichen an die Zeichen der linken Seite der Gleichung $b = c$ aufeinanderfolgen, und wenn das der Fall ist, dann haben wir für diese die Zeichen der rechten Seite von $b = c$ einzuschalten. Ist n die Gödel-Nummer von a und m die Gödel-Nummer von $b = c$, so soll die Gödel-Nummer der so modifizierten Gleichung mit $\text{red}_3(i, n, m)$ bezeichnet werden.

Da m die Gödel-Nummer einer Gleichung ist, so muss unter den Exponenten der Primfaktorenzerlegung von m auch die dem Zeichen » = « im Wörterbuch entsprechende Zahl 3 vorkommen; und zwar als der $\text{eq}(m)$ -te Exponent, wo

$$\text{eq}(m) = \mu_j [j \leq m \ \& \ \text{exp}_j(m) = 3]$$

ist. Daher sind die Gödel-Nummern der linken und rechten Seite von $b = c$:

$$\beta(m) = \prod_{j=1}^{\text{eq}(m)-1} p_j^{\text{exp}_j(m)} \quad \text{bzw.} \quad \gamma(m) = \prod_{j=1}^{\text{long}(m)-\text{eq}(m)} p_j^{\text{exp}_j + \text{eq}(m)}(m);$$

und es ist

$$\text{red}_3(i, n, m) = \begin{cases} n, & \text{falls } (Ej) [j \leq \text{long}(\beta(m)) \ \& \ j > 0 \ \& \ \text{exp}_{i+j}(n) \neq \text{exp}_j(m)] , \\ \text{Subst}_n \left(\begin{matrix} i + 1, i + \text{long}(\beta(m)) \\ \gamma(m) \end{matrix} \right) & \text{sonst} . \end{cases}$$

7. Die Gödel-Nummern der Ergebnisse der dreierlei Reduktionsschritte können in einer einzigen Funktion $\text{red}(t, n, m)$ zusammengefasst werden, wenn die Zahlen z. B. nach ihrer Teilbarkeit durch 3 in drei Gruppen geteilt werden. Da der Rest der Division von t durch 3 mit $\text{res}(t, 3)$ bezeichnet wurde, und da falls t solche Zahlen durchläuft, die bei der Teilung durch 3 den Rest 0, 1 oder 2 ergeben, $\frac{t}{3}$, $\frac{t-1}{3}$, bzw. $\frac{t-2}{3}$ sämtliche Werte annimmt, und in den entsprechenden Fällen die Differenz und der Quotient auch als arithmetische Differenz und arithmetischer Quotient geschrieben werden kann: setzen wir

$$\text{red}(t, n, m) = \begin{cases} \text{red}_1 \left(\left[\frac{t}{3} \right], n \right), & \text{falls } \text{res}(t, 3) = 0 \\ \text{red}_2 \left(\left[\frac{t-1}{3} \right], n \right), & \text{« } \text{res}(t, 3) = 1 \\ \text{red}_3 \left(\left[\frac{t-2}{3} \right], n, m \right), & \text{« } \text{res}(t, 3) = 2 . \end{cases}$$

Wir werden diese Definition bloss für

$$t \leq 3n + 2$$

benutzen. Wir haben ja in den beiden vorigen Nummern bei der Definition von $\text{red}_1(i, n)$, $\text{red}_2(i, n)$ und $\text{red}_3(i, n, m)$ durchdacht, dass in den uns interessie-

renden Fällen i nicht grösser als n sein kann; und aus einer jeden der Ungleichungen

$$\frac{t}{3} \leq n, \quad \frac{t-1}{3} \leq n, \quad \frac{t-2}{3} \leq n$$

folgt, dass

$$t \leq 3n + 2$$

gilt.

8. Nun können wir zur Definition der Eigenschaft einer Zahl w übergehen, die Gödel-Nummer einer Ableitung zu sein, die aus lauter erlaubten elementaren Schritten besteht. Die Exponenten in der Primfaktorenzerlegung einer solchen Gödel-Nummer sind die Gödel-Nummern der Gleichungen, die der Reihe nach in der Ableitung teilnehmen. Diese Gleichungen gehören zum zugrunde gelegten Gleichungssystem, oder entstehen durch irgendeinen elementaren Reduktionsschritt aus einer oder aus zwei früheren Gleichungen der Ableitung. Ist daher n die Gödel-Nummer des zugrunde gelegten Gleichungssystems, so ist ein jeder Exponent in der Zerlegung von w entweder einer der Exponenten von n , oder die Funktion $\text{red}(t, b, c)$ zweier früheren Exponenten b und c von w , mit geeignetem t , für welches

$$t \leq 3b + 2$$

gilt.

Dass alle Exponenten der Zerlegung von w diese Eigenschaft besitzen, kann folgendermassen aufgeschrieben werden :

$$(i) [i \leq \text{long}(w) \rightarrow ((Ej) [j \leq \text{long}(n) \& \text{exp}_i(w) = \text{exp}_j(n)] \vee \vee (Ej_1)(Ej_2)(Et) [j_1 \leq \text{long}(w) \& j_2 \leq \text{long}(w) \& t \leq 3 \text{exp}_{j_1}(w) + 2 \& \& \text{exp}_i(w) = \text{red}(t, \text{exp}_{j_1}(w), \text{exp}_{j_2}(w))]]]$$

Das ist eine primitiv-rekursive Beziehung; es gibt also eine primitiv-rekursive Funktion $\tau'(n, w)$, welche dann und nur dann 0 wird, wenn diese Beziehung besteht.

Es wird aber von einer zur Stelle (a_1, \dots, a_r) gehörigen Ableitung auch verlangt, dass ihre letzte Gleichung die Form

$$\sigma_s(a_1, \dots, a_r) = a$$

hat, wobei a eine Zahl ist. (a kann natürlich nicht grösser als die Gödel-Nummer dieser Gleichung sein; es entstehen ja in der Zerlegung dieser Gödel-Nummer die letzten Faktoren durch Einschaltung der Gödel-Nummer $\zeta(a)$, die nach Nr. 3 dieses Kapitels der Zahl a entspricht; und bei der Definition von ζ wurde hervorgehoben, dass $a < \zeta(a)$ ist.) Diese Forderung (die sich auf den letzten, das heisst $\text{long}(w)$ -ten Exponenten der Zerlegung von w bezieht) kann folgendermassen aufgeschrieben werden :

$$(Ea) [a \leq \text{exp}_{\text{long}(w)}(w) \& \text{exp}_{\text{long}(w)}(w) = p_1^{2s+2} p_2^5 * \zeta(a_1) * p_1^9 * \zeta(a_2) * p_1^9 * \dots * p_1^9 * \zeta(a_r) * p_1^7 p_2^3 * \zeta(a)] .$$

Hier ist r eine bestimmte Zahl: die Anzahl der Variablen der Funktion $\varphi = \sigma_s$; so stehen an den Stellen der Punkte Einschaltungen von einer bestimmten Anzahl. So ist auch dies eine primitiv-rekursive Beziehung: es gibt eine primitiv-rekursive Funktion: $\tau''(a_1, \dots, a_r, w)$, welche dann und nur dann 0 wird, wenn sie besteht.

9. Jetzt kann man bereits den in der vorigen Nummer erwähnten Wert a das heisst den Wert der Funktion $\sigma_s = \varphi$ an der Stelle (a_1, \dots, a_s) aus der Gödel-Nummer w der Ableitung erhalten.

Wenn m die Gödel-Nummer einer Gleichung ist, so ist nach Nr. 6 dieses Kapitels die Gödel-Nummer der rechten Seite $\gamma(m)$. Da nach Annahme die letzte Gleichung der zur Gödel-Nummer w gehörigen Ableitung (die zum letzten Exponenten der Zerlegung von w gehört) die Form

$$\sigma_s(a_1, \dots, a_r) = a$$

hat, und nach Nr. 3 dieses Kapitels die zur Zahl a gehörige Gödel-Nummer $\zeta(a)$ ist, so gilt

$$\zeta(a) = \gamma(\text{explong}(w)(w)) .$$

Daher ist a als Funktion von w (da $a < \zeta(a)$ ist):

$$a = \varphi(w) = \mu_i [i \leq \gamma(\text{explong}(w)(w)) \ \& \ \zeta(i) = \gamma(\text{explong}(w)(w))] .$$

10. Nach Annahme ist $\varphi = \sigma_s$ eine allgemein-rekursive Funktion; und daher gehört zu einer jeden Stelle (a_1, \dots, a_r) eine Ableitung, deren letzte Gleichung

$$\sigma_s(a_1, \dots, a_r) = a$$

mit einer bestimmten Zahl a ist. So gehört nach Nr. 8 dieses Kapitels zu jedem r -tupel (a_1, \dots, a_r) ein solches w , dass sowohl $\tau'(n, w)$ als auch $\tau''(a_1, \dots, a_r, w)$ verschwindet, das heisst, dass

$$\tau(n, a_1, \dots, a_r, w) = \tau'(n, w) + \tau''(a_1, \dots, a_r, w) = 0$$

ist; und so ist nach Nr. 1 dieses Kapitels

$$\mu_w [\tau(n, a_1, \dots, a_r, w) = 0]$$

eine allgemein-rekursive Funktion. Ihrer Bedeutung nach ist sie die kleinste Gödel-Nummer, die zu einer solchen Ableitung gehört, deren letzte Gleichung von der Form $\sigma_s(a_1, \dots, a_r) = a$ ist. Da es nach der Definition der allgemein-rekursiven Funktion zur gegebenen Stelle (a_1, \dots, a_r) eine einzige solche Zahl a gibt, dass sich

$$\sigma_s(a_1, \dots, a_r) = a$$

aus dem Definitionsgleichungssystem ableiten lässt, endigt eine jede zu solcher Gödel-Nummer w gehörige Ableitung — auch diejenige, welche zum kleinsten solchen w gehört — auf eine Gleichung, auf deren rechten Seite dieses a auftritt; daher kann dieses a nach der vorigen Nummer auch folgendermassen aufgeschrieben werden: ist w eine beliebige Zahl, für welche

$$\tau(n, a_1, \dots, a_r, w) = 0$$

ist, so ist

$$a = \varphi(w);$$

und speziell für das kleinste solche w ist

$$a = \varphi(\mu_w [\tau(n, a_1, \dots, a_r, w) = 0]) .$$

Da hier

$$a = \sigma_s(a_1, \dots, a_r) = \varphi(a_1, \dots, a_r)$$

ist, so kann $\varphi(a_1, \dots, a_r)$ tatsächlich in der Form

$$\varphi(a_1, \dots, a_r) = \varphi(\mu_w [\tau(n, a_1, \dots, a_r, w) = 0])$$

geschrieben werden, wo φ und τ primitiv-rekursive Funktionen sind.

Das zeigt auch, dass wenn eine allgemein-rekursive Funktion nicht primitiv-rekursiv ist, die Berechnung ihrer Werte aus dem definierenden Gleichungssystem kein einfaches Verfahren sein kann: die Gödel-Nummer der Berechnung (wie sie in diesem Kapitel genannt wurde: der »Ableitung«), in welcher sich die Komplikationen der Berechnung spiegeln, muss eine »grosse« Zahl sein. Wir wissen ja: könnte man eine primitiv-rekursive Schranke $\varkappa(a_1, \dots, ar)$ für w finden, so wäre

$$\mu_w[w \leq \varkappa(a_1, \dots, ar) \ \& \ \tau(n, a_1, \dots, ar, w) = 0],$$

und damit auch $\varphi(a_1, \dots, ar)$ primitiv-rekursiv. (So hat jede, durch eine Art Rekursion definierte, aber nicht primitiv-rekursive Funktion etwas mit der Nicht-Majorisierbarkeit durch primitiv-rekursive Funktionen zu tun; daher wurde im ACKERMANNschen Beispiel für eine durch primitiv-rekursive Funktionen nicht majorisierbare Funktion das Wesentliche der nicht-primitiv-rekursiven Funktionen erfasst.)

11. Nach den Vorangehenden kann eine jede allgemein-rekursive Funktion aus primitiv-rekursiven Funktionen durch Substitutionen und durch die folgende Operation aufgebaut werden: aus einer primitiv-rekursiven Funktion $\alpha(a_1, \dots, ar, m)$, falls zu einem jeden r -tupel a_1, \dots, ar ein solches m zu finden ist, dass

$$\alpha(a_1, \dots, ar, m) = 0$$

gilt, bildet man die Funktion

$$\mu_m[\alpha(a_1, \dots, ar, m) = 0].$$

Man kann sogar zeigen,³² dass durch diese Operation und durch Substitutionen auch dann alle allgemein-rekursive Funktionen aufgebaut werden können, wenn bloss die folgenden drei primitiv-rekursiven Funktionen zugrunde gelegt werden:

$$a + n, \quad n \cdot a \quad \text{und} \quad \delta(n, a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = a \\ 0, & \text{« } n \neq a. \end{cases}$$

Wird jetzt die Konstruktion der vorhin erhaltenen expliziten Form

$$\varphi(a_1, \dots, ar) = \psi(\mu_w[\tau(n, a_1, \dots, ar, w) = 0])$$

einer beliebigen allgemein-rekursiven Funktion $\varphi(a_1, \dots, ar)$ näher betrachtet, so sieht man, dass die Definition von ψ und τ ganz unabhängig vom zugrunde gelegten Gleichungssystem ist; dieses Gleichungssystem erhält bloss dadurch eine Rolle, dass für das erste Argument von τ seine Gödel-Nummer eingesetzt wird. So enthält

$$\psi(\mu_w[\tau(n, a_1, \dots, ar, w) = 0])$$

gleichzeitig die explizite Definition sämtlicher allgemein-rekursiver Funktionen; man hat immer nur die Gödel-Nummer des entsprechenden definierenden Gleichungssystems für n einzusetzen (freilich müssen erst die im System auftretenden Funktionszeichen zu $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ umbenannt werden, so dass die zu definierende Funktion den grössten Index erhält). Da in der expliziten Definition einer konkreten Funktion für n eine konkrete Zahl gesetzt wird, so ist $\tau(n, a_1, \dots, ar, w)$ in jedem einzelnen Fall eine primitiv-rekursive Funktion $\tau(a_1, \dots, ar, w)$ der Variablen a_1, \dots, ar, w .

³²) KLEENE [3].

§ 18. MÖGLICHKEITEN ZUR WEITEREN VEREINFACHUNG DER EXPLIZITEN FORM.

1. Im vorigen Kapitel hat sich herausgestellt, dass jede allgemein-rekursive Funktion in der Form

$$\psi (\mu_m [\tau (a_1, \dots, a_r, m) = 0])$$

geschrieben werden kann, wobei ψ und τ primitiv-rekursiv sind, und τ der Forderung

(F) »zu einem jeden r -tupel a_1, \dots, a_r soll es ein m geben, so dass $\tau (a_1, \dots, a_r, m) = 0$ gilt«

genügt. Sämtliche Abweichungen der allgemein-rekursiven Funktionen von den primitiv-rekursiven nimmt die Operation μ_m auf sich. Es erhebt sich die Frage, ob bei der Darstellung der allgemein-rekursiven Funktionen überhaupt notwendig ist auch die Funktion ψ zu verwenden; und wenn das im allgemeinen der Fall ist, welche allgemein-rekursive Funktionen dennoch auch in der Form

$$\mu_m [\tau (a_1, \dots, a_r, m) = 0]$$

geschrieben werden können, wo τ irgendeine der Forderung (F) genügende primitiv-rekursive Funktion ist.

Man kann zeigen, dass sich eine allgemein-rekursive Funktion $\varphi (a_1, \dots, a_r)$ dann und nur dann auf diese einfachere explizite Form bringen lässt, wenn die Gleichung

$$\varphi (a_1, \dots, a_r) = m$$

eine primitiv-rekursive Beziehung ist.³³

Dass diese Bedingung hinreichend ist, versteht sich von selbst; denn ist $\varphi (a_1, \dots, a_r) = m$ eine primitiv-rekursive Beziehung, so gibt es eine primitiv-rekursive Funktion $\tau (a_1, \dots, a_r, m)$, welche dann und nur dann 0 wird, wenn diese Gleichheit besteht; und diese Funktion τ genügt der Forderung (F): es gibt ja zu jedem r -tupel a_1, \dots, a_r ein m , nämlich eben $\varphi (a_1, \dots, a_r)$, für welches

$$\varphi (a_1, \dots, a_r) = m \quad \text{und somit} \quad \tau (a_1, \dots, a_r, m) = 0$$

gilt. Da es ferner ein einziges solches m zum r -tupel a_1, \dots, a_r gibt, so ist das zugleich das kleinste solche m ; daher ist

$$\varphi (a_1, \dots, a_r) = \mu_m [\tau (a_1, \dots, a_r, m) = 0].$$

Umgekehrt, nehmen wir jetzt an, dass

$$\varphi (a_1, \dots, a_r) = \mu_m [\tau (a_1, \dots, a_r, m) = 0]$$

ist, wo τ eine der Forderung (F) genügende primitiv-rekursive Funktion ist. In diesem Fall besteht

$$\varphi (a_1, \dots, a_r) = m$$

dann und nur dann, wenn

(B) $\tau (a_1, \dots, a_r, m) = 0$ und für alle m' $\tau (a_1, \dots, a_r, m') = 0 \rightarrow m' \geq m$

³³) SKOLEM [6] Satz 1.

besteht (diese Beziehung gilt nämlich offenbar für das kleinste m , für welches $\tau(a_1, \dots, a_r, m) = 0$ ist und nur für dieses). Diese Beziehung ist aber primitiv-rekursiv, man kann nämlich leicht eine primitiv-rekursive Funktion $\tau'(a_1, \dots, a_r, m)$ definieren, welche dann 0 wird, wenn diese Beziehung besteht (und sonst zum Beispiel zu 1 wird). Ist $m = 0$, so besteht $m' \geq 0$ für alle m' ; daher fordert in diesem Fall die Beziehung (B) bloss das Bestehen von $\tau'(a_1, \dots, a_r, 0) = 0$. Sei also

$$\tau'(a_1, \dots, a_r, 0) = \tau(a_1, \dots, a_r, 0) \quad .$$

Für andere m muss τ' dann zu 0 werden, wenn an derselben Stelle auch τ zu 0 wird, aber für kleinere m nicht. Daher sei

$$\tau'(a_1, \dots, a_r, m+1) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \tau(a_1, \dots, a_r, m+1) = 0 \text{ und} \\ & \frac{m}{\prod_{i=0}^m \tau(a_1, \dots, a_r, i)} \neq 0 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die so definierte Funktion $\tau'(a_1, \dots, a_r, m)$ ist primitiv-rekursiv, und wird dann und nur dann zu 0, wenn $\varphi(a_1, \dots, a_r) = m$ ist; daher ist $\varphi(a_1, \dots, a_r) = m$ tatsächlich eine primitiv-rekursive Beziehung.

2. So könnte man für den ersten Moment glauben, dass sich nur primitiv-rekursive Funktionen auf die einfachere explizite Form

$$\mu_m [\tau(a_1, \dots, a_r, m) = 0]$$

bringen lassen. Das gilt aber nicht: $\varphi(a_1, \dots, a_r) = m$ kann auch dann eine primitiv-rekursive Beziehung sein, wenn $\varphi(a_1, \dots, a_r)$ keine primitiv-rekursive Funktion ist.³⁴ Betrachten wir ein Beispiel.

In Nr. 2 des § 9 wurde eine Funktion $\psi(m, n)$ als Beispiel für eine nicht-primitiv-rekursive Funktion eingeführt. Sie wurde durch folgende eingeschachtelte zweifache Rekursion definiert:

$$\psi(0, n) = n + 1$$

$$\psi(m+1, 0) = \psi(m, 1)$$

$$\psi(m+1, n+1) = \psi(m, \psi(m+1, n)) \quad .$$

Nun kann man trotzdem, dass ψ nicht primitiv-rekursiv ist, zeigen, dass

$$\psi(m, n) = r$$

eine primitiv-rekursive Beziehung ist.

In Nr. 4 und 5 des § 9 habe ich bewiesen, dass $\psi(m, n)$ eine monoton wachsende Funktion ihrer Variablen ist; daraus folgt wegen $\psi(0, 0) = 1$ auch, dass überall

$$\psi(m, n) > 0$$

gilt.

Diese Eigenschaften von ψ werde ich in der Definition einer solchen Funktion $\alpha(m, n, r)$ benützen, welche dann und nur dann gleich 0 wird, wenn

³⁴) SKOLEM [5] Satz 3.

die Beziehung $\psi(m, n) = r$ besteht (und sonst z. B. zu 1 wird). Dann wird es genügen zu zeigen, dass diese Funktion α primitiv-rekursiv ist.

Aus den beiden ersten Definitionsgleichungen von $\psi(m, n)$ ist es klar, dass die Definition von α mit

$$\alpha(0, n, r) = \begin{cases} 0, & \text{falls } r = n + 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\alpha(m + 1, 0, r) = \alpha(m, 1, r)$$

beginnen muss. Zum Aufschreiben von $\alpha(m + 1, n + 1, r)$ braucht man keine eingeschaltete α -Werte zu verwenden (und das ist das Entscheidende). Denn ist

$$\psi(m + 1, n) = i,$$

so ist der Wert von $\psi(m + 1, n + 1)$ nach der dritten Definitionsgleichung gleich $\psi(m, i)$; wenn daher

$$\psi(m, i) = r$$

ist, so ist zugleich

$$\psi(m + 1, n + 1) = r.$$

Wir wissen, dass dabei

$$\psi(m + 1, n) > 0 \quad \text{und} \quad \psi(m + 1, n) < \psi(m + 1, n + 1) = r$$

ist; daher gilt für $\psi(m + 1, n) = i$

$$1 \leq i \leq r - 1.$$

Zusammenfassend: ist r eine solche Zahl, dass für ein i zwischen 1 und $r - 1$

$$\psi(m + 1, n) = i \quad \text{und} \quad \psi(m, i) = r$$

gilt, so ist

$$\psi(m + 1, n + 1) = r.$$

Wird nun α auf die gewünschte Weise definiert, so ist

$$\max(\alpha(m + 1, n, i), \alpha(m, i, r))$$

gleich 0, wenn

$$\psi(m + 1, n) = i \quad \text{und} \quad \psi(m, i) = r$$

ist; sonst ist der Wert dieses Maximums 1. So ist

$$\prod_{i=1}^{r-1} \max(\alpha(m + 1, n, i), \alpha(m, i, r))$$

dann und nur dann gleich 0, wenn es zwischen den Grenzen 1 und $r - 1$ ein i gibt, für welches

$$\psi(m + 1, n) = i \quad \text{und} \quad \psi(m, i) = r$$

gilt. Daher kann die Definition von α mit der Gleichung

$$\alpha(m+1, n+1, r) = \prod_{i=1}^{r-1} \max(\alpha(m+1, n, i), \alpha(m, i, r))$$

beendet werden.

So ist die Definition von α eine zweifache, aber nicht-eingeschachtelte Rekursion.

3. Dafür tritt hier aber eine neue Komplikation auf, die in den bisherigen Rekursionen nicht vorgekommen ist (bloss in der Wertverlaufsrekursion, wo sie aber keine Schwierigkeiten verursacht hat): der Wert von $\alpha(m+1, n+1, r)$ wird aus vorangehenden Funktionswerten von nicht bestimmter, sondern variabler Anzahl aufgebaut. Diese Rekursionsarten (wobei nicht nur nebeneinander stehende Funktionswerte, sondern auch Einschachtelungen von variabler — sogar von Werten der zu definierenden Funktion abhängigen — Anzahl vorkommen können) harren noch einer Untersuchung.* Der vorliegende einfache Fall lässt sich jedoch noch leicht auf primitive Rekursionen und Substitutionen zurückführen.

SKOLEM richtet diese Zurückführung folgendermassen ein. Die Definition von α kann auch als Rekursion nach m und r betrachtet werden: $\alpha(m+1, n+1, r)$ wird darin erstens aus solchen Ausdrücken $\alpha(m+1, n, i)$ aufgebaut, in welchen das erste Argument dasselbe, aber das dritte kleiner ist, da i höchstens gleich $r-1$ ist; ferner aus solchen Ausdrücken $\alpha(m, i, r)$, in welchen das dritte Argument dasselbe, aber das erste kleiner ist. Zur Ausnützung der gemeinsamen Abnahme von m und r wird eine Hilfsfunktion β mit

$$\alpha(m, n, r) = \beta(m \cdot r, n, r)$$

eingeführt. So vermindert sich für $m \neq 0, r \neq 0$ das erste Argument von β , wenn eines von m und r vermindert wird.

Die Funktion $\beta(l, n, r)$ wurde damit nur an solchen Stellen definiert, wo $r=0$ und $l=0$, oder l durch r teilbar ist. An anderen Stellen kann der Wert von β noch frei angegeben werden.

Nach der bisherigen Definition gilt

$$\beta(0, n, r) = \alpha(0, n, r) = \begin{cases} 0, & \text{falls } r = n + 1 \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\beta((m+1) \cdot r, 0, r) = \alpha(m+1, 0, r) = \alpha(m, 1, r) = \beta(m \cdot r, 1, r),$$

und

$$\beta((m+1) \cdot r, n+1, r) = \alpha(m+1, n+1, r) =$$

$$\prod_{i=1}^{r-1} \max(\alpha(m+1, n, i), \alpha(m, i, r)) = \prod_{i=1}^{r-1} \max(\beta((m+1) \cdot i, n, i), \beta(m \cdot r, i, r)).$$

(Im Fall $r=0$ definieren alle drei Gleichungen den Wert von β als 1.)

* Bemerkung bei der Korrektur: neulich ist es mir gelungen, solche Rekursionsarten auf mehrfache — und in gewissen Spezialfällen auf primitive — Rekursionen und Substitutionen zurückzuführen.

Nun können für die Werte des ersten Arguments zwischen $mr + 1$ und $(m + 1)r = mr + r$ die Werte $\beta(mr + u + 1, n + 1, r)$ (für $u = 0, 1, 2, \dots, r - 1$)

als Teilprodukte von $\prod_{i=1}^{r-1} \max(\beta((m + 1)i, n, i), \beta(mr, i, r))$ definiert werden,

vom 0-ten Teilprodukt mit dem Wert 1 an, ganz bis zum $r - 1$ -ten Teilprodukt. Ist $u > 0$, so ergibt sich das u -te Teilprodukt aus dem $u - 1$ -ten durch Hinzunahme des Faktors $\max(\beta((m + 1)u, n, u), \beta(mr, u, r))$. Es sei also

$$\beta(mr + 1, n + 1, r) = 1,$$

und für $u = 1, 2, \dots, r - 1$

$$\beta(mr + u + 1, n + 1, r) = \beta(mr + u, n + 1, r) \cdot \max(\beta((m + 1)u, n, u), \beta(mr, u, r));$$

das liefert für $u = r - 1$ eben die vorhin aufgeschriebene Definitionsgleichung für $\beta((m + 1)r, n + 1, r)$. So wurde bei von 0 verschiedenen zweiten Argumenten die Definition von β auch für solche erste Argumente l erweitert, deren Reste $\text{res}(l, r)$, bei der Division durch ein $r \neq 0$, der Reihe nach gleich $1, 2, \dots, r - 1$ sind; die Definition von β wird vollständig, wenn unter β an den übrigen — uns nicht interessierenden — Stellen 1 verstanden wird.

Ist hier

$$r \neq 0 \quad \text{und} \quad mr + u + 1 = l + 1,$$

so ist

$$mr + u = l, \quad u = \text{res}(l, r), \quad mr = l \div \text{res}(l, r), \quad \text{und} \quad m = \left\lfloor \frac{l}{r} \right\rfloor.$$

Daher lautet die vollständige Definition von β :

$$\beta(l + 1, n, r) = \begin{cases} 0, & \text{falls } r = n + 1 \\ 1 & \text{sonst} \\ \beta(l \div \text{res}(l, r), 1, r), & \text{falls } r \neq 0, n = 0 \text{ und } \text{res}(l, r) = r \div 1 \\ 1, & \text{falls } r \neq 0, n \neq 0 \text{ und } \text{res}(l, r) = 1 \\ \beta(l, n, r) \cdot \max\left(\beta\left(\left\lfloor \frac{l}{r} \right\rfloor + 1, \text{res}(l, r), n \div 1, \text{res}(l, r)\right), \beta(l \div \text{res}(l, r), \text{res}(l, r), r)\right), & \\ & \text{falls } r \neq 0, n \neq 0 \text{ und } 1 < \text{res}(l, r) \leq r \div 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da

$$l = \left\lfloor \frac{l}{r} \right\rfloor \cdot r + \text{res}(l, r)$$

ist, so gilt für $\text{res}(l, r) \leq r \div 1$

$$\left(\left\lfloor \frac{l}{r} \right\rfloor + 1\right) \text{res}(l, r) \leq \left\lfloor \frac{l}{r} \right\rfloor (r \div 1) + \text{res}(l, r) \leq l,$$

und es ist freilich auch

$$l \dot{-} \text{res}(l, r) \leq l,$$

so haben wir hier mit einer Wertverlaufsrekursion nach l zu tun, wobei die beiden Parameter n und r nicht unverändert bleiben. Mit den Methoden vom § 3 und vom § 5 kann diese auf primitive Rekursionen und Substitutionen zurückgeführt werden. Daher ist β , und somit auch die durch die Substitution

$$\alpha(m, n, r) = \beta(m \cdot r, n, r)$$

definierte Funktion α primitiv-rekursiv; folglich die Gleichheit

$$\varphi(m, n) = r,$$

welche dann und nur dann besteht, wenn $\alpha(m, n, r)$ verschwindet, tatsächlich eine primitiv-rekursive Beziehung.

4. Jetzt könnte man glauben, dass vielleicht eine jede Beziehung

$$\varphi(a_1, \dots, a_r) = m,$$

welche zu einer allgemein-rekursiven Funktion $\varphi(a_1, \dots, a_r)$ gehört, allgemein-rekursiv ist; und daher nach Nr. 1 dieses Kapitels alle allgemein-rekursive Funktionen in der Form

$$\mu_m [\tau(a_1, \dots, a_r, m) = 0]$$

geschrieben werden können. Das gilt aber wieder nicht; das sieht man aus dem anderen Beispiel, durch welches gezeigt wurde, dass die zweifache Rekursion von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinausführt.³⁵

In Nr. 4 und 5 des § 11 wurde eine durch zweifache Rekursion definierte (und so jedenfalls allgemein-rekursive) Funktion $\varphi(m, n)$ eingeführt, welche bei geeigneter Wahl von m mit einer beliebigen einstelligen primitiv-rekursiven Funktion $\varphi(n)$ identisch wird. So wird

$$\text{sg}(\varphi(m, n))$$

bei geeignetem Wert von m mit einer beliebigen solchen einstelligen primitiv-rekursiven Funktion $\varphi(n)$ identisch, welche bloss die Werte 0 und 1 annimmt (es kann ja eine beliebige solche Funktion in der Form $\varphi(n) = \text{sg}(\varphi(n))$ geschrieben werden). Es folgt daraus, dass die 2-rekursive Funktion $\text{sg}(\varphi(m, n))$ nicht primitiv-rekursiv sein kann.³⁶ Denn sonst wäre auch die Funktion

$$\xi(n) = \overline{\text{sg}}(\varphi(n, n)) = 1 \dot{-} \text{sg}(\varphi(n, n)),$$

welche ebenfalls bloss die Werte 0 und 1 annimmt, primitiv-rekursiv, müsste also für ein geeignetes m mit $\text{sg}(\varphi(m, n))$ identisch sein.

$$\overline{\text{sg}}(\varphi(n, n)) = \text{sg}(\varphi(m, n))$$

kann aber bei gar keinem m für alle n bestehen, denn für $n = m$ würde sich daraus

$$\overline{\text{sg}}(\varphi(m, m)) = \text{sg}(\varphi(m, m))$$

ergeben; das ist aber unmöglich, da die linke Seite gleich 0 ist, wenn die rechte gleich 1, und umgekehrt.

³⁵) Siehe POST [4] und die *Besprechung* davon von KLEENE in The Journ. of Symb. Log. 12 (1947) S. 28.

³⁶) SKOLEM [6] Satz 2.

Aber daraus, dass die über 1 nicht steigende allgemein-rekursive Funktion $\xi(n)$ nicht primitiv-rekursiv ist, folgt, dass auch die Beziehung

$$\xi(n) = m$$

nicht primitiv-rekursiv sein kann. Denn samt dieser Beziehung wäre auch die Funktion $\xi(n)$, welche in der Form

$$\xi(n) = \mu_m [m \leq 1 \ \& \ \xi(n) = m]$$

geschrieben werden kann, primitiv-rekursiv.

5. Ich erwähne noch, dass man folgendes beweisen kann: lässt sich eine allgemein-rekursive Funktion auf eine solche explizite Form bringen, wo τ eine der Forderung (F) genügende, und $\psi(m)$ eine *monoton wachsende* primitiv-rekursive Funktion ist, so kann diese Funktion auch auf die Form

$$\mu_m [\tau'(a_1, \dots, a_r, m) = 0]$$

gebracht werden, wobei τ' der Forderung (F) genügt.³⁷

Man entnimmt daraus einfach, dass sich sämtliche allgemein-rekursive Funktionen auf die Form

$$\mu_m [\tau_1(a_1, \dots, a_r, m) = 0] \div \mu_m [\tau_2(a_1, \dots, a_r, m) = 0]$$

bringen lassen, wobei τ_1 und τ_2 der Forderung (F) genügende primitiv-rekursive Funktionen sind.³⁸

6. Man kann auch anders als in Nr. 4 dieses Kapitels einsehen, dass nicht alle allgemein-rekursive Funktionen auf die Form

$$\mu_m [\tau(a_1, \dots, a_r, m) = 0]$$

gebracht werden können. Ich nehme auch jetzt die in Nr. 4 verwendete einstellige, allgemein- aber nicht primitiv-rekursive Funktion

$$\xi(n) = \overline{\text{sg}}(\varphi(n, n))$$

zur Hilfe; aber ich beweise gleich mehr: ich gebe eine solche zweistellige allgemein-rekursive Funktion an, die keinesfalls in der Form

$$\psi(\mu_m [\tau(a_1, a_2, m) = 0])$$

geschrieben werden kann, mit einer primitiv-rekursiven Funktion τ und einer solchen Funktion $\psi(m)$, welche nicht alle Werte für Argumente über alle Grenzen annimmt. Da jene Funktion $\psi(m)$, die identisch 1 ist, überhaupt keinen Wert ausser 1 annimmt, so kann dann diese Funktion freilich auch auf die Form

$$\mu_m [\tau(a_1, a_2, m) = 0]$$

nicht gebracht werden.

Die betreffende zweistellige Funktion ist

$$\varphi_2(a_1, a_2) = \xi(a_1) + a_2;$$

diese ist freilich samt ξ allgemein-rekursiv, und

$$\varphi_2(a_1, a_2) = a_2$$

ist mit

$$\xi(a_1) = 0$$

gleichbedeutend. Wenn sich φ_2 auf die Form

$$\varphi_2(a_1, a_2) = \psi(\mu_m [\tau(a_1, a_2, m) = 0])$$

³⁷⁾ SKOLEM [5] Satz 1.

³⁸⁾ SKOLEM [5] Satz 2.

bringen lassen würde, wo τ eine der Forderung (F) genügende, und $\psi(t)$ eine solche primitiv-rekursive Funktion wäre, welche einen bestimmten Wert a für kein $t > k$ annehmen würde, so könnte

$$\xi(n) = 0$$

das heisst

$$\varphi_2(n, a) = \xi(n) + a = \psi(\mu_m[\tau(n, a, m) = 0]) = a$$

dann und nur dann bestehen, wenn

$$t = \mu_m[\tau(n, a, m) = 0]$$

der Gleichung

$$\psi(t) = a$$

genügen würde. Daraus würde aber $t \leq k$ folgen. Daher wäre $\xi(n)$ dann und nur dann gleich 0, wenn es ein $t \leq k$ mit

$$t = \mu_m[\tau(n, a, m) = 0] \text{ und } \psi(t) = a$$

gebe. Für $\xi(n) \neq 0$ gilt aber $\xi(n) = 1$. Folglich wäre

$$\xi(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } (Et) [t \leq k \ \& \ t = \mu_m[\tau(n, a, m) = 0] \ \& \ \psi(t) = a] \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

daraus würde sich aber — da die Beziehung $t = \mu_m[\tau(n, a, m) = 0]$ nach Nr. 1 dieses Kapitels primitiv-rekursiv ist — $\xi(n)$ als eine primitiv-rekursive Funktion ergeben, obwohl $\xi(n)$ nicht-primitiv rekursiv ist.

Zum Widerspruch hat jene Annahme geführt, dass $\psi(t)$ einen gewissen Wert a für keinen Wert von t über einer Schranke k annimmt. So kann in einer expliziten Form von $\varphi_2(a_1, a_2)$ nur eine solche Funktion ψ auftreten, welche alle Werte für Argumente über alle Grenzen annimmt. Eine solche Funktion soll »umfangsreich« genannt werden.

7. Der in der vorigen Nummer bewiesene Satz ist nur die eine Hälfte des folgenden Satzes von MARKOV³⁹

Es soll eine primitiv-rekursive Funktion $\psi(t)$ in Bezug auf die Variablenanzahl r »universal« genannt werden, wenn eine jede r -stellige allgemein-rekursive Funktion mit diesem gemeinsamen ψ auf die Form

$$\varphi(\mu_m[\tau(a_1, \dots, a_r, m) = 0])$$

gebracht werden kann, wobei τ eine der Forderung (F) genügende primitiv-rekursive Funktion ist. (Die Funktion ψ des vorigen Kapitels war in Bezug auf eine beliebige Variablenanzahl universal.) Eine primitiv-rekursive Funktion $\psi(t)$ ist dann und nur dann universal, wenn sie »umfangsreich« ist, das heisst alle Werte für Argumente über alle Grenzen annimmt.

In der vorigen Nummer wurde für $r = 2$ bewiesen, dass die Bedingung notwendig ist. Ist $r > 2$, so erhält man auch aus der dort angegebenen Funktion $\varphi_2(a_1, a_2)$ ein geeignetes Beispiel. Sei nämlich mit Hinzunahme fiktiver Variablen

$$\varphi_r(a_1, \dots, a_r) = \varphi_2(a_1, a_2)$$

Ist nun

$$\varphi_r(a_1, \dots, a_r) = \psi(\mu_m[\tau(a_1, \dots, a_r, m) = 0])$$

eine explizite Form von φ_r , wobei ψ und τ primitiv-rekursiv sind, und τ der Forderung (F) genügt, so gibt es wegen (F) bei beliebigem a_1 und a_2 auch zu $a_1, a_2, 0, \dots, 0$ ein solches m , für welches

$$\tau'(a_1, a_2, m) = \tau(a_1, a_2, 0, \dots, 0, m) = 0$$

gilt. So kommt man zur Darstellung

³⁹) MARKOV [3] und [4].

$$\begin{aligned} \varphi_2(a_1, a_2) &= \varphi_r(a_1, a_2, 0, \dots, 0) = \psi(\mu_m[\tau(a_1, a_2, 0, \dots, 0, m) = 0]) = \\ &= \psi(\mu_m[\tau'(a_1, a_2, m) = 0]) \end{aligned}$$

von $\varphi_2(a_1, a_2)$, welche den üblichen Forderungen genügt; darüber wissen wir aber bereits aus der vorigen Nummer, dass darin bloss eine »umfangreiche« Funktion $\psi(t)$ auftreten kann.

Der Fall $r = 1$ lässt sich mit Hilfe der Funktionen $\sigma(a, b)$, $\sigma_1(n)$, $\sigma_2(n)$, die in Nr. 27 des § 1 zur Anordnung der Zahlenpaare in eine Folge eingeführt wurden, auf die Betrachtungen über $\varphi_2(a_1, a_2)$ zurückführen. $\sigma(a, b)$ war die Stellenzahl des Paares (a, b) in der genannten Folge; durch $\sigma_1(n)$ und $\sigma_2(n)$ wurden die beiden Glieder des n -ten Paares bezeichnet; daher war

$$\sigma_1(\sigma(a, b)) = a \quad \text{und} \quad \sigma_2(\sigma(a, b)) = b$$

Es soll also im Fall $r = 1$ die Funktion

$$\varphi_1(a_1) = \varphi_2(\sigma_1(a_1), \sigma_2(a_1))$$

als Beispiel genommen werden. Kann man diese Funktion auf die Form

$$\varphi_1(a_1) = \psi(\mu_m[\tau(a_1, m) = 0])$$

bringen, wobei die üblichen Bedingungen erfüllt sind, so ist

$$\begin{aligned} \varphi_2(a_1, a_2) &= \varphi_2(\sigma_1(\sigma(a_1, a_2)), \sigma_2(\sigma(a_1, a_2))) = \varphi_1(\sigma(a_1, a_2)) = \\ &= \psi(\mu_m[\tau(\sigma(a_1, a_2), m) = 0]) \end{aligned}$$

und das ist eine die üblichen Bedingungen erfüllende explizite Darstellung von $\varphi(a_1, a_2)$ mit

$$\tau'(a_1, a_2, m) = \tau(\sigma(a_1, a_2), m);$$

und so muss darin nach der vorigen Nummer die Funktion $\psi(t)$ »umfangreich« sein.

So hat es sich herausgestellt, dass es zu einem jeden r eine r -stellige Funktion gibt, welche sich nur mit »umfangreichem« $\psi(t)$ auf die obige explizite Form bringen lässt; diese Eigenschaft von $\psi(t)$ ist also für alle r *notwendig* dazu, dass die Funktion $\psi(t)$ in Bezug auf r universal sein soll.

8. Um zeigen zu können, dass die genannte Eigenschaft von $\psi(t)$ auch hinreichend ist, wird erst bewiesen, dass es zu einer beliebigen »umfangreichen« primitiv-rekursiven Funktion $\psi_2(t)$ eine primitiv-rekursive Funktion $\psi_1(t)$, und eine allgemein-rekursive Funktion $\psi_0(w, a)$ gibt, so dass sich ψ_1 , ψ_2 und ψ_0 ähnlich, wie die in der vorigen Nummer verwendeten σ_1 , σ_2 , σ verhalten: das heisst, dass für beliebige w und a

$$\psi_1(\psi_0(w, a)) = w \quad \text{und} \quad \psi_2(\psi_0(w, a)) = a$$

gilt. Zum Beweis kann benutzt werden, dass ein beliebiger Wert beliebig oft von $\psi_2(t)$ angenommen wird; erhalten daher w und a folgende Rolle: es wird die $w + 1$ -te Stelle betrachtet, wo $\psi_2(t)$ den Wert a annimmt, dann kann man sowohl w als auch a alle Zahlen durchlaufen lassen.

Es sei also $\psi_0(w, a)$ die $w + 1$ -te Stelle, wo $\psi_2(t)$ den Wert a annimmt. Diese Funktion kann folgendermassen definiert werden: Wir wissen, dass es über alle w ein t gibt, für welches $\psi_2(t) = a$ ist; daher ist nach Nr. 1 des vorigen Kapitels das kleinste solche $t \geq w$:

$\nu(w, a) = \mu t [t \geq w \ \& \ \psi_2(t) = a]$
 eine allgemein-rekursive Funktion. Und damit hat man

$$\psi_0(0, a) = \nu(0, a)$$

$$\psi_0(w + 1, a) = \nu(\psi_0(w, a) + 1, a);$$

denn die erste Gleichung ergibt $\psi(0, a)$ als von 0 an das erste, das heisst das erste t , für welches $\psi_2(t) = a$ ist; und ist bereits $\psi_0(w, a)$ die $w + 1$ -te Stelle t , wo $\psi_2(t) = a$ ist, so ist $\psi_0(w + 1, a)$ nach der zweiten Definitionsgleichung und nach der Definition von ν die erste solche Stelle nach $\psi_0(w, a)$, das heisst die $w + 2$ -te solche Stelle.

$\psi_0(w, a)$ bedeutet jedenfalls immer eine solche Stelle, wo $\psi_2(t) = a$ ist; und so gilt

$$\psi_2(\psi_0(w, a)) = a$$

tatsächlich für alle w und a .

Jetzt hat man noch eine solche primitiv-rekursive Funktion $\psi_1(t)$ zu konstruieren, welche w aus $\psi_0(w, a)$ wiedergibt, das heisst für welche

$$\psi_1(\psi_0(w, a)) = w$$

besteht. Da $\psi_0(w, a)$ die $w + 1$ -te Stelle ist, wo $\psi_2(t)$ denselben Wert (nämlich den Wert a) annimmt, kann die Funktion $\psi_1(t)$ so definiert werden, als die Anzahl jener Stellen u vor t , wo $\psi_2(u)$ denselben Wert annimmt wie an der Stelle t .

Erstens kann die Anzahl der Stellen vor t , wo $\psi_2(t)$ einen Wert b annimmt, als primitiv-rekursive Funktion durch

$$\omega(0, b) = 0$$

$$\omega(t + 1, b) = \begin{cases} \omega(t, b), & \text{falls } \psi_2(t) \neq b \\ \omega(t, b) + 1, & \text{« } \psi_2(t) = b \end{cases}$$

definiert werden; es gibt ja vor $t = 0$ keine Stellen, und bis das erste Argument zu $t + 1$ anwächst, fordert die Definition das Addieren sovieler 1, wievielmals an vorangehenden Stellen der Wert b von ψ_2 angenommen wurde.

So gibt

$$\psi_1(t) = \omega(t, \psi_2(t))$$

die Anzahl jener Stellen vor t an, wo die Funktion ψ_2 den Wert $\psi_2(t)$, das heisst, denselben Wert wie an der Stelle t annimmt. Da ferner $\psi_0(w, a)$ die $w + 1$ -te solche Stelle bedeutet, wo $\psi_2(t)$ denselben Wert annimmt, so ist tatsächlich

$$\psi_1(\psi_0(w, a)) = w.$$

So kann man zur beliebigen »umfangreichen« primitiv-rekursiven Funktion $\psi_2(t)$ eine solche primitiv-rekursive Funktion $\psi_1(t)$ konstruieren, dass es zu allem w und a ein t (nämlich $t = \psi_0(w, a)$) gibt, für welches

$$\psi_1(t) = w \quad \text{und} \quad \psi_2(t) = a$$

gilt.

9. Jetzt kann man bereits leicht beweisen, dass die Bedingung im Satz von MARKOV auch hinreichend ist. Sei nämlich $\psi_2(t)$ eine beliebige »umfangreiche« primitiv-rekursive Funktion; dann kann eine beliebige r -stellige allgemein-rekursive Funktion φ in der Form

$$\varphi(a_1, \dots, a_r) = \psi_2(\mu_m [\tau_2(a_1, \dots, a_r, m) = 0])$$

geschrieben werden, wo τ_2 eine die Forderung (F) erfüllende primitiv-rekursive Funktion ist.

Denn nach Nr. 10 des §17 kann eine beliebige allgemein-rekursive Funktion φ mit einem bestimmten n in der Form

$$\begin{aligned}\varphi(a_1, \dots, a_r) &= \psi(\mu_w [\tau(n, a_1, \dots, a_r, w) = 0]) = \\ &= \psi(\mu_w [\tau_1(a_1, \dots, a_r, w) = 0])\end{aligned}$$

geschrieben werden, wo ψ und τ primitiv-rekursiv sind, τ die Forderung (F) erfüllt; und so oft w eine solche Zahl ist, für welches

$$\tau_1(a_1, \dots, a_r, w) = 0$$

ist, auch die Beziehung

$$\psi(w) = \varphi(a_1, \dots, a_r)$$

gilt.

So gibt es zu einem jeden r -tupel a_1, \dots, a_r solche w und a , dass die primitiv-rekursive Beziehung

$$\tau_1(a_1, \dots, a_r, w) = 0 \ \& \ \psi(w) = a$$

besteht; und daher gibt es nach der vorigen Nummer auch ein t , so dass $\psi_2(t)$ für w , und die dazu konstruierte Funktion $\psi_1(t)$ für a eingesetzt, die primitiv-rekursive Beziehung

$$\tau_1(a_1, \dots, a_r, \psi_1(t)) = 0 \ \& \ \psi(\psi_1(t)) = \psi_2(t)$$

erfüllt wird. Sei $\tau_2(a_1, \dots, a_r, t)$ eine solche primitiv-rekursive Funktion, die dann und nur dann gleich 0 wird, wenn diese letzte Beziehung besteht; dann gibt es nach den Vorangehenden zu jedem r -tupel a_1, \dots, a_r ein t , für welches

$$\tau_2(a_1, \dots, a_r, t) = 0$$

ist (das heisst, τ_2 erfüllt die Forderung (F)). Die betrachtete Beziehung besteht auch für das kleinste solche t ; wenn sie aber besteht, so folgt daraus erstens, dass

$$\tau_1(a_1, \dots, a_r, \psi_1(t)) = 0,$$

also nach der Voraussetzung auch

$$\psi(\psi_1(t)) = \varphi(a_1, \dots, a_r),$$

zweitens, dass

$$\psi(\psi_1(t)) = \psi_2(t)$$

gilt; diese beiden Gleichungen ergeben aber

$$\varphi(a_1, \dots, a_r) = \psi_2(t).$$

Wird das für das kleinste t , für welches

$$\tau_2(a_1, \dots, a_r, t) = 0$$

ist, angewandt, so erhält man tatsächlich

$$\varphi(a_1, \dots, a_r) = \psi_2(\mu_t [\tau_2(a_1, \dots, a_r, t) = 0]).$$

§ 19. BEISPIEL EINER NICHT-ALLGEMEIN-REKURSIVEN FUNKTION.

1. Für einstellige Funktionen formuliert lautet das zum Schluss des § 17 Ausgesagte: eine beliebige einstellige, allgemein-rekursive Funktion $\varphi(m)$ kann mit Verwendung der beiden universellen primitiv-rekursiven Funktionen $\psi(m)$ und $\tau(n, m, w)$ in der Form

$$\varphi(m) = \psi(\mu_w [\tau(n, m, w) = 0])$$

geschrieben werden, wo für n die Gödel-Nummer nach dem Wörterbuch in Nr. 2 des § 17 jenes Gleichungssystems zu setzen ist, durch welches $\varphi(m)$ definiert wird. Man könnte glauben, dass dies die effektive Definition von noch allgemeineren zahlentheoretischen Funktionen ermöglicht, als jene Funktionen, die wir »allgemein-rekursiv« genannt haben; werden nämlich die verschiedenen Zahlen für n eingesetzt, so erhält man ja die Definitionen der verschiedenen allgemein-rekursiven Funktionen $\varphi(m)$; und wird das Diagonalverfahren auf die so erhaltene Folge angewandt, so ergibt sich notwendigerweise eine nicht-allgemein-rekursive Funktion.⁴⁰ Betrachten wir das näher.

Es soll die zweistellige Funktion

$$\varphi(n, m) = \psi(\mu_w [\tau(n, m, w) = 0])$$

betrachtet werden. Zu einer jeden einstelligen allgemein-rekursiven Funktion $\varphi(m)$ gibt es ein n (die Gödel-Nummer ihres Definitionsgleichungssystems), so dass für beliebiges m

$$\varphi(m) = \varphi(n, m)$$

gilt. Daher kann die Funktion $\varphi(n, m)$ nicht allgemein-rekursiv sein. Denn mit ihr wäre auch die einstellige Funktion

$$\varphi(m, m) + 1$$

allgemein-rekursiv, und so müsste es auch zu dieser Funktion ein solches n geben, dass für alle m

$$\varphi(m, m) + 1 = \varphi(n, m)$$

gelten würde. Daraus würde sich aber für $m = n$

$$\varphi(n, n) + 1 = \varphi(n, n),$$

also eine Unmöglichkeit ergeben.

Wegen

$$\varphi(n, n) = \psi(\mu_w [\tau(n, n, w) = 0])$$

kann aber $\varphi(n, n)$ nur dann nicht-allgemein-rekursiv sein, wenn auch

$$\mu_w [\tau(n, n, w) = 0]$$

nicht-allgemein-rekursiv ist. Der Wert dieser Funktion ist, falls es eine Zahl w gibt, für welche $\tau(n, n, w) = 0$ gilt, die kleinste solche Zahl w , und falls kein solches w gibt, gleich 0. (Daher kann es nicht zu einem jeden n ein w mit $\tau(n, n, w) = 0$ geben, denn sonst müsste die Funktion $\mu_w [\tau(n, n, w) = 0]$ nach Nr. 1 des § 17 allgemein-rekursiv sein.)

⁴⁰) Siehe KLEENE [1] § 2. Satz XIV.

2. Als das Diagonalverfahren auf die primitiv-rekursiven Funktionen angewandt wurde, hat man eine solche nicht-primitiv-rekursive »Diagonalfunktion« erhalten, welche dennoch durch eine Art Rekursion: durch eine zweifache Rekursion definiert werden kann. Das auf die k -rekursiven Funktionen angewandte Diagonalverfahren hat auf eine $k + 1$ -rekursive Funktion geführt. Jetzt könnte man glauben, dass sich die »Diagonalfunktion« der allgemein-rekursiven Funktionen durch eine noch allgemeinere Rekursion definieren lässt.

Die allgemeine Rekursion wurde aber eben darum »allgemein« genannt, weil wir uns keine allgemeinere Rekursionsart vorstellen können. Es wurde ja von der Definition einer allgemein-rekursiven Funktion nichts anderes verlangt, bloss dass sich der Wert der definierten Funktion an einer jeden Stelle eindeutig aus den Definitionsgleichungen berechnen lässt. So können die Werte einer nicht-allgemein-rekursiven Funktion von gar keinem Definitionsgleichungssystem lückenlos geliefert werden: eine solche Funktion kann in gar keinem Sinn »rekursiv« sein.

Es kann sogar plausibel hingestellt werden, dass sich die Werte einer nicht-allgemein-rekursiven Funktion nicht nur aus einem Gleichungssystem, sondern auf keinem Weg an allen Stellen in endlich vielen Schritten berechnen lassen.

§ 20. BERECHENBARE FUNKTIONEN.

1. Man kann nur dann behaupten, dass die Werte einer Funktion an einer jeden Stelle in endlich vielen Schritten berechenbar sind, wenn diese Berechnung nicht von irgendeiner individuellen Willkür abhängt, sondern ein solches Verfahren ist, das sich zu jeder Zeit wiederholen und auch auf Andere anvertrauen lässt. Daher muss es ein mechanisches Verfahren sein; so kann man sich prinzipiell auch eine Maschine vorstellen, welche die Schritte der Berechnung ausführen kann.

Stellen wir uns eine solche Maschine vor. Man kann annehmen, dass sie eine schreibende Rechenmaschine ist, welche auf eine in Abschnitte geteilte Papierschleife, die nach beiden Richtungen beliebig verlängert werden kann, Zeichen schreibt (in einen Abschnitt immer nur ein Zeichen); es ist ja wirklich keine Einschränkung der Allgemeinheit, dass so die ganze Berechnung in einer Zeile, und nicht in mehreren Zeilen untereinander zugeht. Es kommen endlich viele Zeichen im Vorrat der Maschine vor, aber auch das ist keine Einschränkung der Allgemeinheit: es können auch beliebig viele Glieder unendlicher Folgen mit endlich vielen Zeichen aufgeschrieben werden (z. B. beliebig grosse Zahlen mit den Ziffern eines Zahlensystems). Es ist ferner keine Einschränkung, wenn unter die Zeichen der Maschine bloss zwei Zahlen: 0 und 1 aufgenommen werden. Es können ja alle positiven Zahlen mit lauter 1 aufgeschrieben werden: die 2 in der Form 11, die 3 in der Form 111, usw.; mit einem Wort, die Maschine kann so viele 1 nacheinander setzen, wie gross die aufzuzeichnende Zahl ist. Freilich wäre ebenso gut zum Beispiel a zur Bezeichnung von 0, und b, bb, bbb, \dots zur Bezeichnung der übrigen Zahlen, zu wählen.

Die Bestandteile der Maschine können in verschiedene »Konfigurationen« geraten. Wir brauchen Konfigurationen, welche die Maschine zu den folgenden Tätigkeiten bewegen: dass sie in den eben eingestellten leeren Abschnitt der

Schleife irgendein Zeichen ihres Vorrates schreibe ; dass sie aus dem eingestellten Abschnitt ein dort stehendes Zeichen austreibe ; dass sie ein eben eingestelltes Zeichen mit einem anderen Zeichen ihres Vorrates ersetze ; dass sie jenen Abschnitt einstelle, der links oder rechts vom eben eingestellten Abschnitt liegt. Der Mensch tut auch dasselbe bei der Berechnung der Werte einer Funktion : er schreibt, verwischt, besichtigt oder vergegenwärtigt sich etwas (»stellt etwas ein«), was er bereits früher abgeschrieben hat, und in Abhängigkeit davon rechnet er weiter (»nach rechts« von den bisher Aufgeschriebenen gehend), oder modifiziert etwas an der bisherigen Berechnung. Wünscht man, dass das Berechnungsverfahren auch mit Anderen mitteilbar, automatisch sei, so muss es aus endlich vielen Anweisungen bestehen, die darüber verfügen, was in den einzelnen Stadien des Rechnens zu tun ist. Unsere Maschine kann auch nur in endlich viele »Konfigurationen« geraten ; in einem gewissen Stadium entscheidet das eben eingestellte Zeichen und die aktuelle Konfiguration, welche seiner Fähigkeiten die Maschine in Tätigkeit setzen, und in welche neue Konfiguration sie nachher geraten wird.

Der Mensch kann freilich nicht nur ein Zeichen, sondern auch eine Zeichenfolge ins Auge fassen (»einstellen«) ; aber nicht beliebig viele Zeichen. Hat man z. B. die Zeichenfolgen 111111111 und 1111111111, oder Folgen von noch mehr 1 zu vergleichen, so wird man am besten einzeln je eine 1 in den beiden Folgen irgendwie bezeichnen (z. B. mit einem Strich versehen) ; kommt man zum Schluss der einen Folge, so wird es sich herausstellen, welche Folge aus mehr 1 besteht. Es bedeutet keine Einschränkung, von der Maschine zu verlangen, dass sie die Berechnung auf die elementarsten Einzelakte auflöse : die Schleife auf einmal bloss um einen Abschnitt nach rechts oder links ziehe (als nächster Schritt kann ja das Weiterziehen um noch einen Abschnitt verlangt werden) ; dass sie ferner auf einmal nur eins der bisher auf die Schleife geschriebenen Zeichen einstelle, »sich vergegenwärtige« (der nächste Schritt kann ja die Einstellung des benachbarten Zeichens sein) ; endlich, dass sie auf einmal nur ein Zeichen schreibe oder streiche.

Auch das bedeutet bloss das Einhalten einer gewissen Ordnung, aber keine Einschränkung, wenn man verlangt, dass die Maschine die Werte einer Funktion $\varphi(n)$, welche sie zu berechnen hat, so aufzeichne, dass auf der Schleife vor der ersten 0 sovielen 1 vorhanden seien, wieviel $\varphi(0)$ beträgt, dann nach der ersten 0 (welche zum Trennen des nächsten Funktionswertes da ist) bis zur nächsten 0 sovielen 1, wieviel $\varphi(1)$ beträgt, usw. ; das heisst, dass der Funktionswert $\varphi(n)$ als die Anzahl der 1 erscheinen soll von der $n + 1$ -ten 0 rückwärts bis zur vorangehenden 0, oder wenn keine solche vorhanden ist, bis zum Anfang der aufgeschriebenen Zeichenfolge. Die einmal aufgezeichneten 0 und 1 sollen nie wieder ausgestrichen werden ; in den Nebenrechnungen sollen die Zeichen 0 und 1 nicht auftreten (die dort benutzten Zahlen können ja auch mit Hilfe anderer Zeichen aufgeschrieben werden). Man kann verlangen, dass links von den bereits aufgezeichneten Zeichen 0 und 1 nie wieder 0 oder 1 aufgeschrieben werde — wenn in der Nebenberechnung auch vorkommen kann, dass die Berechnung von $\varphi(n_2)$ der Berechnung von $\varphi(n_1)$ vorangeht, wo n_1 eine frühere Stelle als n_2 ist, als Ergebnis kann jedoch $\varphi(n_1)$ vor $\varphi(n_2)$ aufgezeichnet werden. Das kann z. B. so eingerichtet werden, dass das eigentliche Berechnungsverfahren bloss in jedem zweiten Abschnitt der Schleife verläuft, und die übrigen Abschnitte für das Ergebnis vorbehalten werden ; und sobald sich der Wert von $\varphi(0)$ in der Berechnung (freilich nicht mit den Zeichen 0 und 1 bezeichnet) ergibt, die Maschine in die vorbehaltenen Abschnitte sovielen 1 schreibe, wieviel $\varphi(0)$

beträgt, und nachher eine 0; sobald dann die Berechnung den Wert von $\varphi(1)$ ergibt, die Maschine vom (von rechts) ersten leeren vorbehaltenen Abschnitt an so viele 1 schreibe, wieviel $\varphi(1)$ beträgt, und nachher eine 0; usw.

Handelt es sich um die Berechnung einer mehrstelligen Funktion, so können die Stellen (wie z. B. die Zahlenpaare in Nr. 27 des § 1) in eine Folge geordnet werden; und die Maschine hat der Reihe nach, mit je einer 0 getrennt, so viele 1 in die vorbehaltenen Abschnitte zu schreiben, wieviel der Funktionswert an der ersten, zweiten, dritten... Stelle beträgt.

Statt etwas mit der Maschine »ausstreichen« zu lassen, kann man auch sagen: »sie schreibt dafür das »vakante« Zeichen«. So muss zum Vorrat der berechnenden Maschine auch das Zeichen »vakant« gehören; es wird kurz S_0 genannt. So kann statt der Aussage: »die Maschine schreibt in den leeren Abschnitt ein Zeichen S« auch sagen: »sie schreibt S für S_0 «.

2. Nun werden wir eine Funktion $\varphi(n)$ »mechanisch berechenbar« nennen, wenn sich prinzipiell eine Maschine (von der vorhin geschilderten Struktur) mit folgenden Eigenschaften konstruieren lässt:

- 1) Der Zeichenvorrat der Maschine besteht aus endlich vielen Zeichen

$$S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, \dots;$$

dabei vertritt S_0 das »vakante« Zeichen, und es ist $S_1 = 0$ und $S_2 = 1$.

- 2) Die Maschine kann in endlich viele Konfigurationen

$$q_1, q_2, q_3, \dots$$

geraten; dabei ist q_1 die »Anfangskonfiguration«.

3) Die Tätigkeit der Maschine besteht aus Einzelakten folgender Art: steht S_i im eingestellten Abschnitt der Schleife, und ist die aktuelle Konfiguration der Maschine q_j , so schreibt die Maschine ein bestimmtes Zeichen S_i für S_i , dann stellt sie entweder denselben Abschnitt, oder einen benachbarten Abschnitt ein, und geht in eine bestimmte Konfiguration q_j über.

Da die Anzahl der S_i und q_j endlich ist, kann bloss von endlich vielen verschiedenen Einzelakten dieser Art die Rede sein. Ein solcher Einzelakt kann, je nachdem die Maschine wieder den eben eingestellten Abschnitt, oder den links oder rechts davon stehenden einstellt, kurz mit

$$q_j S_i \mid S_i N q_j \quad \text{bzw.} \quad q_j S_i \mid S_i L q_j \quad \text{bzw.} \quad q_j S_i \mid S_i R q_j$$

angedeutet werden. Ist $S_i = S_i$, das bedeutet, dass die Maschine in diesem Moment das eingestellte Zeichen S_i unverändert lässt.

Wird ein Abschnitt der leeren Schleife eingestellt, und die Maschine in die Konfiguration q_1 gebracht, so verrichtet die Maschine die Einzelakte ihrer Wirksamkeit automatisch nacheinander; und dadurch entsteht auf der Schleife eine Zeichenfolge, worin 0 über alle Grenzen wieder einmal vorkommt; vor dem ersten 0-Zeichen treten 1-Zeichen von der Anzahl $\varphi(0)$ auf, und die Anzahl der 1-Zeichen zwischen dem n -ten und $n+1$ -ten 0-Zeichen ist $\varphi(n)$. Die n -te 0, die an der Schleife zu sehen ist, ist zugleich die n -te 0, welche von der Maschine niedergeschrieben wird; und die n -te 1 der Zeichenfolge an der Schleife ist eben die n -te von der Maschine abgeschriebene 1.

3. Als erstes Beispiel soll hier die Beschreibung einer solchen Maschine stehen, welche die einfache, konstante Funktion $\varphi(n) = 1$ berechnet.

Diese Maschine hat die Zeichenfolge

10101010...

abzuschreiben. Dazu sind gar keine Nebenrechnungen nötig; daher ist der ganze Zeichenvorrat der Maschine

$$S_0 \text{ (»vakant«)}, S_1 = 0, S_2 = 1 .$$

In der Anfangskonfiguration wünschen wir, dass die Maschine das Zeichen 1 in den eingestellten leeren Abschnitt schreibe, dann den Nachbarabschnitt von rechts einstelle, und in eine solche neue Konfiguration übergehe, wo sie in den eingestellten leeren Abschnitt 0 schreibe, dann wieder den benachbarten Abschnitt von rechts einstelle, und in eine solche Konfiguration übergehe, worin sie dasselbe tue, wie zum Beginn. Daher braucht die Maschine nur die beiden Konfigurationen

$$q_1 \text{ (1-schreibende)}, \quad q_2 \text{ (0-schreibende)}$$

annehmen zu können; und die Tätigkeit der Maschine besteht insgesamt aus den beiden Einzelakten:

$$q_1 S_0 \mid S_2 R q_2, \quad q_2 S_0 \mid S_1 R q_1 .$$

Auf Grund dieser Beschreibung funktioniert die Maschine folgendermassen:

Am Anfang ist die Schleife leer; es wird ein leerer Abschnitt (also ein Abschnitt mit dem Zeichen S_0) eingestellt, und die Maschine in die Konfiguration q_1 gebracht. Nach dem ersten Einzelakt ihrer Tätigkeit schreibt dann die Maschine S_2 das heisst 1 für S_0 , stellt den (noch leeren) Nachbarabschnitt von rechts ein, und übergeht in die Konfiguration q_2 . Nach dem zweiten Einzelakt ihrer Tätigkeit, da jetzt die aktuelle Konfiguration q_2 , und das eingestellte Zeichen S_0 (»vakant«) ist, schreibt die Maschine S_1 das heisst 0 für dieses S_0 ; stellt den (noch leeren) Nachbarabschnitt von rechts ein, und geht in die Konfiguration q_1 über. Da jetzt q_1 die aktuelle Konfiguration und S_0 (»vakant«) das eingestellte Zeichen ist, kommt wieder der erste Einzelakt an die Reihe: die Maschine schreibt 1, geht nach rechts (so werde ich kurz ausdrücken, dass sie »den Nachbarabschnitt von rechts einstellt«) und geht in q_2 über. Usw. Diese Maschine schreibt also unaufhörlich die Folge

101010 ...

auf die Schleife, so wie es verlangt wurde.

4. Zur Berechnung der Funktion $\varphi(n) = n + 1$, das heisst zur Aufzeichnung der Zahlenfolge

10110111011110 ...

braucht man schon eine viel kompliziertere Maschine.

Diese Maschine hat nach jeder 0 so viele 1 zu schreiben, wieviele 1 in der vorigen Gruppe vorhanden sind, und dann noch eine 1. Also hat sie nach einer jeden 0 sozusagen die 1-Zeichen der vorigen Gruppe abzuschreiben (und dann noch eine 1 zu schreiben); sind in der abzuschreibenden Gruppe schon sehr viele 1-Zeichen vorhanden, so kann das auch ein Mensch ohne Unsicherheit nur so verrichten, dass er die bereits abgeschriebenen 1-Zeichen irgendwie, z. B. mit einem Strich bezeichnet. Bei dieser Maschine ist also auch ein »Strich«-Zeichen notwendig; und wenn auch nicht für eine ernste Nebenrechnung, aber für die Striche muss jeder zweite Abschnitt vorbehalten werden.

Die Zeichen der Maschine sind also:

$$S_0 \text{ (»vakant«)}, S_1 = 0, S_2 = 1, S_3 (\surd).$$

Und hier braucht man eine ganze Schar von Konfigurationen. Die Beschreibung wird etwas kürzer, wenn ausnahmsweise zugelassen wird, dass die Maschine auf einmal um zwei Abschnitte nach rechts oder links gehen kann; eine solche Bewegung wird mit R_2 bzw. L_2 bezeichnet (das wäre freilich nicht notwendig; ich möchte bloss die Folgenden etwas kürzer schildern).

Die Maschine muss die Folgenden können: 0 schreiben; die vorherige 0 — oder wenn kein 0-Zeichen links vorhanden ist, den leeren Abschnitt vor der auf die Schleife geschriebenen Zeichenfolge — suchen; die nachher folgenden 1-Zeichen mit einem Strich versehen; diese an das Ende der auf der Schleife stehenden Zeichenfolge abschreiben; und wenn keine zu kopierende 1 mehr vorhanden ist, noch eine 1 dazuschreiben. Das Zurücktasten zur vorherigen 0 (oder zum leeren Abschnitt) bedeutet freilich mehrere Schritte: das nach links Gehen um je zwei Abschnitte, solange man 1 findet. Auch das Abschreiben bedeutet mehrere Schritte: das nach rechts Gehen um je zwei Abschnitte, bis man einen leeren Abschnitt findet; hier das Abschreiben einer 1, das nach links Gehen um einen Abschnitt (in einen Abschnitt für Striche), und das Zurückgehen um je zwei Abschnitte nach links, bis man einen Strich findet. Das Hinzuschreiben einer 1 bedeutet ebenfalls mehrere Schritte: das Weitergehen nach rechts um je zwei Abschnitte bis zum ersten leeren Abschnitt, und dort das Schreiben einer 1. Ist der eingestellte Abschnitt leer (das ist zum Beginn der Fall), so schreibt die Maschine gleich eine 1.

Die Maschine muss daher zu folgenden Konfigurationen fähig sein:

q_1 (hinzuschreibend),	q_2 (0-schreibend),	q_3 (suchend),
q_4 (Strich-setzend),	q_5 (abschreibend),	q_6 (zurückgehend).

In hinzuschreibender Konfiguration geht die Maschine um je zwei Abschnitte nach rechts, bis sie einen leeren Abschnitt findet; findet sie einen leeren Abschnitt, so schreibt sie eine 1 hinein; geht dann um zwei Abschnitte nach rechts weiter, und geht in die 0-schreibende Konfiguration über.

In 0-schreibender Konfiguration schreibt die Maschine in den leeren Abschnitt 0, geht um zwei Abschnitte nach links, und geht in die suchende Konfiguration über.

In suchender Konfiguration geht die Maschine, wenn sie eine 1 findet, um zwei Abschnitte weiter nach links, um weiter zu suchen. Findet sie eine 0, oder einen leeren Abschnitt (vor der ganzen bisher geschriebenen Zeichenfolge), so geht sie um zwei Abschnitte nach rechts, und geht in die Strich-setzende Konfiguration über.

In Strich-setzender Konfiguration geht die Maschine, wenn sie eine 1 findet, um einen Abschnitt nach rechts, in einen Abschnitt für Striche. Hier schreibt sie auf die leere Stelle einen Strich, geht um einen Abschnitt nach rechts, und geht in die abschreibende Konfiguration über. Findet aber die von suchender Konfiguration in Strich-setzende Konfiguration übergehende Maschine bereits eine 0, so geht sie gleich in die hinzuschreibende Konfiguration über.

In abschreibender Konfiguration geht die Maschine, solange sie keinen leeren Abschnitt findet, um je zwei Abschnitte nach rechts; sobald sie aber einen leeren Abschnitt findet, schreibt sie 1 dahin, geht nach links in einen Abschnitt für Striche, und geht in die zurückgehende Konfiguration über.

In zurückgehender Konfiguration geht die Maschine, solange sie in den Abschnitten für Striche nichts findet, um je zwei Abschnitte zurück; sobald sie

aber einen Strich findet, geht sie um einen Abschnitt nach rechts, und geht in die Strich-setzende Konfiguration über: das heisst, sie sucht eine 1, um diese mit einem Strich zu versehen.

5. Nach den Vorangehenden besteht die Tätigkeit der Maschine, welche die Werte von $\varphi(n) = n + 1$ berechnet, aus den folgenden Einzelakten:

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| (1a) $q_1 S_0 S_2 R_2 q_2$ | (1b) $q_1 S_1 S_1 R_2 q_1$ | (1c) $q_1 S_2 S_2 R_2 q_1$ |
| (3a) $q_3 S_2 S_2 L_2 q_3$ | (2) $q_2 S_0 S_1 L_2 q_3$ | (3c) $q_3 S_1 S_1 R_2 q_4$ |
| (4a) $q_4 S_2 S_2 R q_4$ | (3b) $q_3 S_0 S_0 R_2 q_4$ | (4c) $q_4 S_1 S_1 N q_1$ |
| (5a) $q_5 S_1 S_1 R_2 q_5$ | (4b) $q_4 S_0 S_3 R q_5$ | (5c) $q_5 S_0 S_2 L q_6$ |
| (6a) $q_6 S_0 S_0 L_2 q_6$ | (5b) $q_5 S_2 S_2 R_2 q_5$ | |
| | (6b) $q_6 S_3 S_3 R q_4$ | |

Man sieht klar, dass diese 15 Einzelakte ausreichen, wenn man die Tätigkeit der Maschine eine Weile verfolgt. Zum Anfang wird freilich ein leerer Abschnitt und die Konfiguration q_1 eingestellt. Dann schreibt die Maschine nach (1a) eine 1, und um zwei Abschnitte nach rechts gehend, übergeht sie in die Konfiguration q_2 . Auf der Schleife steht dann (ich bezeichne die leeren Abschnitte, die bereits eine Rolle erhalten haben, mit Punkten; unterstreiche den eben eingestellten Abschnitt, und schreibe die neue Konfiguration darunter):

$$\begin{array}{c} 1 \quad . \quad . \\ \hline q_2 \end{array}$$

Das gestaltet sich folgendermassen weiter:

nach (2) ist	$\frac{1}{q_3}$. 0
nach (3a)	$\frac{.}{q_3}$. 1 . 0
nach (3b)	$\frac{.}{q_4}$. . 1 . 0
nach (4a)	$\frac{.}{q_4}$. . 1 . 0
nach (4b)	$\frac{.}{q_4}$. . 1 \checkmark 0
nach (5a)	$\frac{.}{q_5}$. . 1 \checkmark 0 . .
nach (5c)	$\frac{.}{q_5}$. . 1 \checkmark 0 . 1
nach (6a)	$\frac{.}{q_6}$. . 1 \checkmark 0 . 1
nach (6b)	$\frac{.}{q_6}$. . 1 \checkmark 0 . 1
nach (4c)	$\frac{.}{q_4}$. . 1 \checkmark 0 . 1
	$\frac{.}{q_1}$	

nach (1b)	. . .	1	✓	0	. $\frac{1}{q_1}$			
nach (1c)	. . .	1	✓	0	. 1	. $\frac{.}{q_1}$		
nach (1a)	. . .	1	✓	0	. 1	. 1	. $\frac{.}{q_2}$	
nach (2)	. . .	1	✓	0	. 1	. $\frac{1}{q_3}$. 0	
nach (3a)	. . .	1	✓	0	. $\frac{1}{q_3}$. 1	. 0	
nach (3a)	. . .	1	✓	0	. 1	. 1	. 0	
nach (3c)	. . .	1	✓	0	. $\frac{1}{q_3}$. 1	. 0	
nach (4a)	. . .	1	✓	0	. 1	. 1	. 0	
nach (4a)	. . .	1	✓	0	. 1	. $\frac{.}{q_4}$. 0	
nach (4b)	. . .	1	✓	0	. 1	✓ $\frac{1}{q_4}$. 0	
nach (5b)	. . .	1	✓	0	. 1	✓ 1	. $\frac{0}{q_5}$	
nach (5a)	. . .	1	✓	0	. 1	✓ 1	. 0	. $\frac{.}{q_5}$
nach (5c)	. . .	1	✓	0	. 1	✓ 1	. 0	. $\frac{1}{q_6}$
nach (6a)	. . .	1	✓	0	. 1	✓ 1	. 0	. 1
nach (6a)	. . .	1	✓	0	. 1	✓ $\frac{1}{q_6}$. 0	. 1
nach (6b)	. . .	1	✓	0	. 1	✓ $\frac{1}{q_6}$. 0	. 1
nach (4a)	. . .	1	✓	0	. 1	✓ $\frac{1}{q_4}$. 0	. 1
nach (4b)	. . .	1	✓	0	. 1	✓ 1	✓ $\frac{0}{q_4}$. 1
nach (5a)	. . .	1	✓	0	. 1	✓ 1	✓ $\frac{0}{q_5}$. $\frac{1}{q_5}$
nach (5b)	. . .	1	✓	0	. 1	✓ 1	✓ 0	. 1 . $\frac{.}{q_5}$
nach (5c)	. . .	1	✓	0	. 1	✓ 1	✓ 0	. 1 . $\frac{.}{q_6}$
nach (6a)	. . .	1	✓	0	. 1	✓ 1	✓ 0	. $\frac{.}{q_6}$ 1 . .
nach (6a)	. . .	1	✓	0	. 1	✓ 1	✓ $\frac{0}{q_6}$. 1 . .

nach (6b)	. .	1	✓	0	. .	1	✓	1	✓	$\frac{0}{q_4}$. .	1	. .
nach (4c)	. .	1	✓	0	. .	1	✓	1	✓	$\frac{0}{q_1}$. .	1	. .
nach (1b)	. .	1	✓	0	. .	1	✓	1	✓	0	. .	$\frac{1}{q_1}$. .
nach (1b)	. .	1	✓	0	. .	1	✓	1	✓	0	. .	1	. .
nach (1b)	. .	1	✓	0	. .	1	✓	1	✓	0	. .	1	. .
nach (1a)	. .	1	✓	0	. .	1	✓	1	✓	0	. .	1	. .
nach (2)	. .	1	✓	0	. .	1	✓	1	✓	0	. .	1	. .

und es beginnt wieder das Suchen der vorherigen 0, von hier an das Bezeichnen und Abschreiben der 1-Zeichen, das Hinzuschreiben von noch einer 1, dann das Schreiben einer 0, usw., unaufhörlich ins Unendliche.

6. Das erscheint als eine ausserordentlich verlangsamte Filmaufnahme vom Rechnungsverfahren des Menschen. Wird diese Mechanisierung der Berechnung an einigen Funktionen ausprobiert, so lebt man sich hinein, dass man genau so zu rechnen pflegt, nur schneller. Und tatsächlich können zu einer ganzen Schar von zahlentheoretischen Funktionen solche Maschinen prinzipiell konstruiert werden, welche ihre Werte berechnen; man kann sogar beweisen, dass es zu einer jeden allgemein-rekursiven Funktion eine solche »Turing-Maschine« gibt.⁴¹

Der Begriff der mechanischen Berechenbarkeit lässt sich leicht auch auf reelle Zahlen übertragen: eine reelle Zahl kann mechanisch berechenbar genannt werden, wenn man prinzipiell eine »Turing-Maschine« konstruieren kann, welche in die Anfangskonfiguration gebracht, auf die leere Schleife eine solche Zeichenfolge schreibt, worin die Teilfolge der 0- und 1-Zeichen die dyadische Entwicklung der nicht ganzen Teil der betreffenden reellen Zahl ist. Turing behauptet⁴², dass alle algebraische Zahlen, ferner π und e in diesem Sinn berechenbar sind.

All das erweckt den Eindruck, dass hier ein sehr allgemeiner Begriff der Berechenbarkeit erfasst wurde.

7. Man kann nun beweisen, dass eine jede, durch eine »Turing-Maschine« berechenbare Funktion allgemein-rekursiv ist.⁴³

Der Beweis soll hier für eine einstellige Funktion ausgeführt werden.

⁴¹ Der hier behandelte Begriff der mechanischen Berechenbarkeit wurde von TURING [1] eingeführt. TURING [2] beweist, dass eine jede der von CHURCH [1] eingeführten » λ -definierbaren Funktionen« mechanisch berechenbar ist; nach KLEENE [2] sind aber die λ -definierbaren Funktionen mit den allgemein-rekursiven Funktionen identisch.

⁴² TURING [1] § 10.

⁴³ TURING [2] Nr. 5.

Sei also $\varphi(n)$ eine mechanisch berechenbare Funktion. Die dazu gehörige Turing-Maschine soll die Zeichen

$$S_0 \text{ (»vakant«)}, S_1 (= 0), S_2 (= 1), S_3, \dots, S_{N-1}$$

der Anzahl N enthalten, und die Maschine sei zur Annahme der Konfigurationen

$$q_1 \text{ (Anfangskonfiguration)}, q_2, \dots, q_R$$

von der Anzahl R fähig. Eine endliche Anzahl von Anweisungen der Form

$$(1) q_t S_s | S_{s'} L q_{t'} \text{ bzw. } (2) q_t S_s | S_{s'} N q_{t'} \text{ bzw. } (3) q_t S_s | S_{s'} R q_{t'}$$

soll die Einzelakte der Tätigkeit der Maschine angeben. Da es nur endlich viele Möglichkeiten zu solchen Anweisungen gibt, sind die Funktionen $\delta_1(s, t)$, $\delta_2(s, t)$ und $\delta_3(s, t)$, welche den Wert 0 oder 1 annehmen, je nachdem sich der zum eingestellten Zeichen S_s und zur aktuellen Konfiguration q_t gehörige Einzelakt in der Form (1), (2) bzw. (3) beschreiben lässt oder nicht, primitiv-rekursiv; ferner sind s' und t' in allen drei Fällen dieselben primitiv-rekursiven Funktionen $\sigma(s, t)$ bzw. $\tau(s, t)$ von s und t . Das sieht man am besten an einem Beispiel. Zum Beispiel sind im Fall der in Nr. 3 dieses Kapitels angegebenen einfachen Maschine, welche die Folge

101010 ...

erzeugt hat, insgesamt zweierlei Einzelakte

$$q_1 S_0 | S_2 R q_2 \quad \text{und} \quad q_2 S_0 | S_1 R q_1$$

aufgetreten. Hier sieht man, dass als s und t bloss 0, 1 oder 0, 2 in Frage kommen; und im ersten Fall ist sowohl s' als auch t' gleich 2, im zweiten Fall ist sowohl s' als auch t' gleich 1. So ist

$$\begin{aligned} \delta_1(s, t) &= 1, \\ \delta_2(s, t) &= 1 \end{aligned}$$

(in keinem der beiden Einzelakte kommt L oder N vor), und

$$\delta_3(s, t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } s = 0, t = 1 \text{ oder } s = 0, t = 2 \\ 1 & \text{sonst;} \end{cases}$$

ferner

$$\sigma(s, t) = \begin{cases} 2, & \text{falls } s = 0, t = 1 \\ 1, & \text{« } s = 0, t = 2 \\ \text{und, sagen wir, } 3 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$\tau(s, t) = \begin{cases} 2, & \text{falls } s = 0, t = 1 \\ 1, & \text{« } s = 0, t = 2 \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bei einer komplizierten Maschine hätte man mehr Fälle in den Definitionen dieser Funktionen zu unterscheiden, aber jedenfalls nur endlich viele Fälle; und die so »zusammengeflückten« Funktionen sind tatsächlich immer primitiv-rekursiv.

8. Der Zustand der Maschine kann in einem jeden Stadium durch 4 Daten charakterisiert werden: durch das eingestellte Zeichen, durch die beiden Zeichenfolgen vor und nach diesem Zeichen an der Schleife, und durch die aktuelle Konfiguration der Maschine. Diesen Daten können Zahlen zugeordnet

werden. Ist das eingestellte Zeichen S_s und die aktuelle Konfiguration q_t , so kann man diesen natürlich die Indizes s, t zuordnen. Nehmen wir an, dass im betrachteten Stadium die Zeichenfolge

$$S_{s_1}, S_{s_2}, \dots, S_{s_k}, \dots, S_{s_{k+l}}$$

auf der Schleife steht, wobei S_{s_k} das eben eingestellte Zeichen ist, ferner vor S_{s_1} und nach $S_{s_{k+l}}$ bloss leere Abschnitte sind (es kann freilich vorkommen, dass $k = 1$ oder $l = 0$ ist; aber für $k \neq 1$ ist $S_{s_1} \neq S_0$, und für $l \neq 0$ ist $S_{s_{k+l}} \neq S_0$). So können die Indizes der Zeichenfolgen vor und nach S_{s_k} als die Ziffern einer im Zahlensystem mit der Basis N aufgeschriebenen Zahl betrachtet werden (sie sind ja alle kleiner als N), und man kann diesen Zeichenfolgen die Zahlen

$$w = \begin{cases} S_{s_{k-1}} + N \cdot S_{s_{k-2}} + \dots + N^{k-2} \cdot S_{s_1}, & \text{falls } k > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bzw.

$$v = \begin{cases} S_{s_{k+1}} + N \cdot S_{s_{k+2}} + \dots + N^{l-1} \cdot S_{s_{k+l}}, & \text{falls } l > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zuordnen. So ist s_{k-1} für $k > 1$ bzw. s_{k+1} für $l > 0$ der Rest von w bzw. von v bei der Teilung durch N ; das heisst, es ist

$$s_{k-1} = \text{res}(w, N) \quad \text{für } k > 1 \quad \text{und} \quad s_{k+1} = \text{res}(v, N) \quad \text{für } l > 0.$$

Den vier Zahlen, welche den Zustand der Maschine charakterisieren, kann auf übliche Weise eine einzige Zahl

$$u = p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4$$

zugeordnet werden. Man gewinnt daraus die vier Exponenten auf die bekannte Weise zurück:

$$w = \exp_1(u), \quad s_k = \exp_2(u), \quad t = \exp_3(u) \quad \text{und} \quad v = \exp_4(u).$$

9. Der Einzelakt der Tätigkeit der Maschine, welcher zum eingestellten Zeichen S_{s_k} und zur aktuellen Konfiguration q_t gehört, ist nach Nr. 7 dieses Kapitels

$$(1) \quad q_t S_{s_k} \mid S_{\sigma(s_k, t)} L q_{\tau(s_k, t)}, \quad \text{falls } \delta_1(s_k, t) = 0,$$

$$(2) \quad q_t S_{s_k} \mid S_{\sigma(s_k, t)} N q_{\tau(s_k, t)}, \quad \text{« } \delta_2(s_k, t) = 0,$$

$$(3) \quad q_t S_{s_k} \mid S_{\sigma(s_k, t)} R q_{\tau(s_k, t)}, \quad \text{« } \delta_3(s_k, t) = 0.$$

Der Fall (2) ist der einfachste. Hier kommt $\sigma(s_k, t)$ an die Stelle von s_k , und $\tau(s_k, t)$ an die Stelle von t ; aber der eingestellte Abschnitt bleibt derselbe. So ist der Index des neu eingestellten Zeichens $\sigma(s_k, t)$, und die Zeichenfolge vor und nach dem eingestellten Zeichen ändert sich nicht. Daher ist die charakterisierende Zahl des neuen Stadiums:

$$u' = p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 = p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 = \exp_1(u) \quad \sigma(\exp_2(u), \exp_2(u)) \quad \tau(\exp_2(u), \exp_2(u)) \quad \exp_4(u) \\ = y_2(u)$$

eine primitiv-rekursive Funktion von u .

Im Fall (1) geht die Maschine um einen Abschnitt nach links. So wird s_{k-1} zum neu eingestellten Zeichen, falls $k > 1$ ist, und das »vakante« Zeichen s_0 , falls $k = 1$ ist. Wir wissen, dass für $k > 1$

$$s_{k-1} = \text{res}(w, N) = \text{res}(\exp_1(u), N)$$

und für $k = 1$

$$w = 0 \quad \text{das heisst} \quad \exp_1(u) = 0$$

und so

$$\text{res}(\exp_1(u), N) = 0$$

ist. Daher gehört zum zweiten charakterisierenden Datum des neuen Stadiums in jedem Fall

$$s_k' = \text{res}(\exp_1(u), N).$$

Die Zahl w' , die der Zeichenfolge links vom neu eingestellten Abschnitt zugeordnet wird, ist für $k > 2$

$$w' = s_{k-2} + Ns_{k-3} + \dots + N^{k-3}s_1 = \left[\frac{w}{N} \right] = \left[\frac{\exp_1(u)}{N} \right];$$

und für $k = 1$ und 2 ist $w' = 0$. Wir haben aber bereits für $k = 1$ durchdacht, dass daraus $\exp_1(u) = 0$ folgt; und für $k = 2$ gilt nach der Definition von w

$$w = s_1 < N, \quad \text{das heisst} \quad \exp_1(u) < N,$$

Salso

$$\left[\frac{\exp_1(u)}{N} \right] = 0.$$

So wird dem ersten charakterisierenden Datum des neuen Stadiums in jedem Fall die Zahl

$$w' = \left[\frac{\exp_1(u)}{N} \right]$$

zugeordnet.

Wir wissen bereits, dass die zum dritten charakterisierenden Datum gehörige Zahl

$$t' = \tau(s, t) = \tau(\exp_2(u), \exp_3(u))$$

ist.

Endlich ist die Zahl, die der Zeichenfolge rechts vom neu eingestellten Abschnitt (die um eine Stelle links von der früheren liegt) zugeordnet wird (da $\sigma(s_k, t)$ an die Stelle von s_k gekommen ist):

$$v' = \begin{cases} \sigma(s_k, t) + Ns_{k+1} + \dots + N^l s_{k+l}, & \text{falls } l \neq 0 \\ \sigma(s_k, t), & \text{falls } l = 0 \end{cases}$$

und so ist jedenfalls

$$v' = \sigma(s_k, t) + Nv = \sigma(\exp_2(u), \exp_3(u)) + N \cdot \exp_4(u).$$

So ist endlich die einzige Zahl, welche dem neuen Stadium zugeordnet wurde, als primitiv-rekursive Funktion von u :

$$u' = v_1(u) = p_1 \left[\frac{\exp_1(u)}{N} \right]_{p_2} \text{res}(\exp_1(u), N)_{p_3} \tau(\exp_2(u), \exp_3(u))_{p_4} \sigma(\exp_2(u), \exp_3(u)) + N \exp_4(u)$$

Ganz ähnlich ergibt sich im Fall (3) die zum neuen Stadium gehörige Zahl als

$$u' = v_3(u) = p_1 \frac{\sigma(\exp_1(u), \exp_2(u)) + N \exp_1(u)}{p_2} \frac{\text{res}(\exp_1(u), N)}{p_3} \frac{\tau(\exp_1(u), \exp_2(u))}{p_4} \left[\frac{\exp_1(u)}{N} \right]$$

10. Am Anfang ist die Schleife noch leer, auch der eingestellte Abschnitt, und die Maschine ist in der Konfiguration q_1 . So ist die Zahl, welche das Anfangsstadium charakterisiert:

$$u = p_1^0 p_2^0 p_3^1 p_4^0 = p_3^1 = 7.$$

Sagen wir, dass ist das 0-te Stadium; und die Maschine geht davon automatisch ins 1-te, 2-te, ... Stadium über. Die Zahl, welche das n -te Stadium (eigentlich das $n+1$ -te, da es auch ein 0-tes Stadium gibt) charakterisiert, kann nach den Vorherigen als eine primitiv-rekursive Funktion $v(n)$ definiert werden:

$$v(0) = 7$$

$$v(n+1) = \begin{cases} v_1(v(n)), & \text{falls } \delta_1(\exp_2(v(n)), \exp_3(v(n))) = 0 \\ v_2(v(n)), & \text{« } \delta_2(\exp_2(v(n)), \exp_3(v(n))) = 0 \\ v_3(v(n)), & \text{« } \delta_3(\exp_2(v(n)), \exp_3(v(n))) = 0 \\ 0 & \text{sonst (das ist belanglos).} \end{cases}$$

11. Uns interessieren bloss jene Stadien, in welchen die Maschine 0 oder 1 schreibt, freilich in einen leeren Abschnitt; das heisst in welchen das eben eingestellte Zeichen S_0 ist, und dafür S_1 bzw. S_2 geschrieben wird. Im n -ten Stadium ist der Index des eingestellten Zeichens $\exp_2(v(n))$, und der Index der aktuellen Konfiguration $\exp_3(v(n))$. Der Index des neuen Zeichens, das an die Stelle des eingestellten Zeichens geschrieben wird, ist $\sigma(\exp_2(v(n)), \exp_3(v(n)))$. Sei

$$u(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \exp_2(v(n)) = 0 \text{ und } \sigma(\exp_2(v(n)), \exp_3(v(n))) = 1 \\ 1, & \text{« } \exp_2(v(n)) = 0 \text{ und } \sigma(\exp_2(v(n)), \exp_3(v(n))) = 2 \\ 2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

So ist $u(n) = 0$, wenn die Maschine im Übergang vom n -ten zum $n+1$ -ten Stadium 0 schreibt, und $u(n) = 1$, wenn sie dabei 1 schreibt; wenn sie dabei weder 0 noch 1 schreibt, so ist $u(n) = 2$.

Mit Hilfe der primitiv-rekursiven Funktion $u(n)$ kann man leicht jene 1 zählen, welche von der letzten 0 an, die vor dem n -ten Stadium niedergeschrieben wurde (oder, wenn keine solche 0 vorhanden ist, vom Anfang an) noch vor dem n -ten Stadium auf die Schleife geschrieben werden. Die primitiv-rekursive Funktion $\psi(n)$ zählt eben soviele 1 zusammen, wenn sie durch

$$\psi(0) = 0$$

$$\psi(n+1) = \begin{cases} 0, & \text{falls } u(n) = 0 \text{ (d. h. falls die Maschine im } n\text{-ten Stadium 0 schreibt)} \\ \psi(n), & \text{falls } u(n) = 2 \text{ (d. h. falls die Maschine im } n\text{-ten Stadium nicht 0 oder 1 schreibt)} \\ \psi(n) + 1, & \text{falls } u(n) = 1 \text{ (d. h. falls die Maschine im } n\text{-ten Stadium 1 schreibt)} \end{cases}$$

definiert wird.

12. Der Wert der von der Maschine definierten Funktion $\varphi(n)$ an der Stelle n wird durch die Anzahl der 1-Zeichen angegeben, die bevor noch die $n + 1$ -te 0 auf die Schleife geschrieben wird, von der zuletzt geschriebenen 0 an (oder, falls noch keine 0 geschrieben wurde, vom Anfang an), niedergeschrieben wurden. Schreibt also die Maschine im $\xi(n)$ -ten Stadium das $n + 1$ -te 0-Zeichen, so ist nach der vorigen Nummer

$$\varphi(n) = \psi(\xi(n)) .$$

Hier ist ψ eine primitiv-rekursive Funktion ; gelingt also zu zeigen, dass $\xi(n)$ allgemein-rekursiv ist, so erweist sich $\varphi(n)$ auch als allgemein-rekursiv.

Die Maschine schreibt jedenfalls auch 0-Zeichen, so gibt es ein solches m , für welches $\iota(m) = 0$ ist, und da die Maschine im $\xi(0)$ -ten Stadium die erste 0 schreibt, so ist

$$\xi(0) = \mu_m [\iota(m) = 0] .$$

Wir wissen aber auch, dass die Maschine über alle Grenzen immer wieder 0 schreibt (die Folgen aus lauter 1, welche der Werte $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \dots$ entsprechen, werden ja an der Schleife durch 0-Zeichen getrennt); also gibt es für ein beliebig grosses w ein m , so dass

$$m > w \quad \text{und} \quad \iota(m) = 0$$

gilt. Daher ist auch

$$\mu(w) = \mu_m [m > w \ \& \ \iota(m) = 0]$$

allgemein-rekursiv ; und da das $\xi(n + 1)$ -te Stadium das erste nach dem $\xi(n)$ -ten ist, in welchem die Maschine wieder 0 schreibt, so ist

$$\xi(n + 1) = \mu_m [m > \xi(n) \ \& \ \iota(m) = 0] = \mu(\xi(n)) .$$

Werden daher zu den Gleichungen der primitiven Rekursion

$$\xi(0) = \mu_m [\iota(m) = 0]$$

$$\xi(n + 1) = \mu(\xi(n))$$

die Definitionsgleichungen des Aufbaues der primitiv-rekursiven Funktion $\iota(m)$ und der allgemein-rekursiven Funktion $\mu(w)$ hinzugenommen, so erhält man ein solches Gleichungssystem, das die Funktion $\xi(n)$ tatsächlich als eine allgemein-rekursive Funktion definiert.

So hat es sich erwiesen, dass eine beliebige einstellige Funktion, deren Werte durch eine Turing-Maschine berechnet werden können, allgemein-rekursiv ist ; und ähnlich könnte man auch die allgemein-rekursive Beschaffenheit der mehrstelligen mechanisch-berechenbaren Funktionen beweisen.

13. Wenn man annimmt, dass es gelungen ist, im Begriff der mit Hilfe einer Turing-Maschine berechenbaren Funktion den Begriff der allgemeinsten zahlentheoretischen Funktion, deren Werte überall berechenbar sind, zu erfassen, so haben sich in den Vorherigen die allgemein-rekursiven Funktionen tatsächlich als die im allgemeinsten Sinn berechenbaren Funktionen erwiesen ; und in dieser Auffassung haben wir in der Funktion

$$\mu_w [\tau(n, n, w) = 0]$$

die sich im vorigen Kapitel nicht-allgemein-rekursiv erwiesen hat, ein Beispiel für eine im allgemeinsten Sinn nicht berechenbare Funktion erfasst.

Jedoch wie plausibel auch immer hingestellt werden kann; dass diese Auffassung ein treues Widerspiegeln der wirklichen mathematischen Tätigkeit bedeutet, dennoch handelt es sich hier um eine gewisse Abgrenzung des Berechenbarkeits-Begriffes, und die zukünftige mathematische Entwicklung kann auch heute noch nicht geahnte Berechnungsarten mit sich bringen.

§ 21. GESCHICHTE UND ANWENDUNGEN.

1. Als Vorgänger der rekursiven Funktionen können gewisse »rekurrente Folgen« betrachtet werden (z. B. die Folge von FIBONACCI; EULER hat rekurrente Folgen zur annähernden Lösung algebraischer Gleichungen verwendet; aber bereits bei ARCHIMEDES wird die Zahl π als Grenzwert einer rekurrenten Folge berechnet). Im übrigen ist die Geschichte der rekursiven Funktionen mit der Geschichte der mathematischen Grundlagenforschung eng verflochten.

2. Das Auftauchen der Antinomien der Mengenlehre hat der Tendenz: die harmloseren Gebiete der Mathematik (z. B. die Zahlentheorie) auf die Mengenlehre zu gründen, ein Ende gemacht. Die gerade entgegengesetzte Tendenz wurde aktuell: SKOLEM hat gezeigt⁴⁴, dass man die in der elementaren Zahlentheorie benutzten Begriffe und Folgerungen, auch ohne sich auf unendliche Gesamtheiten zu berufen, begründen kann. Hier hat die Rekursion eine wichtige Rolle erhalten, als eine solche Definition zahlentheoretischer Funktionen, welche die Berechnung der Funktionswerte in endlich vielen Schritten ermöglicht.

3. Die Antinomien der Mengenlehre konnten zwar durch die Einschränkung des »naiven« Mengenbegriffes ausgeschaltet werden; das gibt aber keine Sicherung gegen das Auftauchen neuer Widersprüche in einem so abgegrenzten mengentheoretischen System, oder in anderen Gebieten der Mathematik.

Zur zuverlässigeren Begründung der Mathematik hat HILBERT das folgende Programm aufgestellt:⁴⁵ es sollen die einzelnen Zweige der Mathematik, und die Beweise in diesen, formalisiert werden, so dass diese Beweise ebenso zum Gegenstand der mathematischen Untersuchung werden können, wie etwa die Zahlen und ihre Funktionen. (Der erste Schritt dazu ist die Axiomatisierung: es sollen die weiteren Beweis nicht erfordernde Grundsetze, Axiome der betrachteten Theorie im voraus festgesetzt werden; und ebenso die einzelnen zugelassenen Schritte der Schlussweisen. Die Grundbegriffe, durch welche alle anderen Begriffe der Theorie definiert werden, werden durch die Axiome sozusagen implizit definiert: es dürfen nur solche Eigenschaften der Grundbegriffe benutzt werden, welche in den Axiomen ausgesagt sind.) Dann hat man mit rein mathematischen Methoden zu beweisen, dass man im betrachteten formalen System nicht zwei solche Formeln ableiten kann, die einander widersprechende Aussagen repräsentieren. Freilich dürfen die Methoden, durch welche die Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems bewiesen wird, nicht auch selber bedenkliche Elemente enthalten. In diesen (die formalisierte Mathematik sozusagen von oben betrachtenden) »metamathematischen« Untersuchungen kann die rekursive Zahlentheorie, die sich nicht auf unendliche Gesamtheiten beruft, gut benutzt werden.

⁴⁴) SKOLEM [1].

⁴⁵) Siehe z. B. D. HILBERT: *Neubegründung der Mathematik*. Abhandlungen aus dem math. Seminar der Hamburgischen Universität I (1922) S. 157—177.

Übrigens wurde die Zahlentheorie schon viel früher von PEANO auf einige Axiome zurückgeführt⁴⁶ (freilich ohne die zugelassenen Schlussweisen genau festzulegen). Dass Funktionen durch Rekursion definiert werden dürfen, hat PEANO nicht unter seine Axiome aufgenommen; er hielt für natürlich, dass dies im Axiom der vollständigen Induktion enthalten ist. DEDEKIND hat bemerkt, dass diese Tatsache eines Beweises bedarf; er⁴⁷ und seither auch andere⁴⁸ gaben verschiedene, schrittweise elegantere Beweise dafür.

4. HILBERT hat die Fruchtbarkeit seiner Beweistheorie damit rechtfertigen wollen, dass er das berühmte ungelöste Problem der Mengenlehre: das Kontinuumproblem, mit Hilfe der Methoden der Beweistheorie in Angriff genommen hat.⁴⁹ Dieses Problem kann auch folgendermassen formuliert werden: die Menge der reellen Zahlen ist bekanntlich nicht abzählbar; könnte sie aber nicht mit Hilfe der transfiniten Ordnungszahlen der zweiten Zahlklasse »abgezählt« werden? Nun sind die Menge der zahlentheoretischen Funktionen und die Menge der reellen Zahlen von gleicher Mächtigkeit; und HILBERT wollte das »Abzählen« der zahlentheoretischen Funktionen mit Hilfe der Zahlen der zweiten Zahlklasse so durchführen, dass er den immer grösseren transfiniten Zahlen Rekursionen immer »höherer Art« zuordnet, und dann beweist: die Annahme, dass die durch immer höhere Rekursionen definierten zahlentheoretischen Funktionen die Menge sämtlicher zahlentheoretischen Funktionen erschöpfen, kann zu keinem Widerspruch führen.

Dieses Programm wurde bis heute noch nicht ausgeführt (doch GÖDEL hat mit einem analogen Gedankengang bewiesen, dass die Annahme des Kontinuumsatzes keinen Widerspruch in die bekannten Axiomensysteme der Mengenlehre hineinbringen kann); es hat aber die gründliche Untersuchung der rekursiven Funktionen in Gang gesetzt. Denn will man die Menge der zahlentheoretischen Funktionen mit rekursiven Funktionen immer höherer Art erschöpfen, so ist ja dazu vor allem notwendig, dass durch eine Rekursion höherer Art neue Funktionen definiert werden (man könnte sich ja vorstellen, dass die Funktionen, die durch Rekursionen einer höheren Art definiert werden, auch durch Rekursionen von niedrigeren Art definiert werden können, und dass daher die Einführung der neuen Rekursionsarten nur scheinbar ein weiterführender Schritt ist). Man hatte also klarzustellen, welche Rekursionsarten dieselbe Funktionenklasse definieren, und welche verschiedene Funktionenklassen.⁵⁰

5. Das berühmte Ergebnis von GÖDEL⁵¹ hat für eine Weile den Schein erweckt, dass HILBERTs Programm für die widerspruchsfreie Begründung der Mathematik unausführlich ist. GÖDEL hat nämlich bewiesen, dass jedes genügend ausdrucksfähige Axiomensystem, worin die Schlussweisen mit genügend scharf umgrenzten Methoden zugehen — wenn es (in einem verschärften Sinn) widerspruchsfrei ist — unentscheidbare Probleme enthält. Auch die Widerspruchsfreiheit des Systems selbst gehört unter die im System formulierbaren, aber unentscheidbaren Probleme: weder sie, noch ihre Negation kann mittels der im System erlaubten Schlussweisen bewiesen werden.

⁴⁶) PEANO [1].

⁴⁷) DEDEKIND [1].

⁴⁸) KALMÄR, siehe LANDAU [1] »Vorwort für den Kenner« und § 2—3; LORENZEN [1]; KALMÄR [1].

⁴⁹) HILBERT [1].

⁵⁰) ACKERMANN [1]; PÉTER [2], [3], [5]; siehe noch PÉTER [7], CSILLAG [1], ROBINSON [1], [2].

⁵¹) GÖDEL [1].

In der Beweisführung von GÖDEL spielen die primitiv-rekursiven Funktionen eine sehr wesentliche Rolle. Er hat nämlich ein Wörterbuch konstruiert, worin den Zeichen des Axiomensystems Zahlen zugeordnet wurden, und hat damit die Beweise des Systems »gödelisiert« — wie dieses Verfahren in diesem Buche nach ihm genannt wurde. Die Formeln sind Zeichenfolgen; diesen wurde auf die bekannte Weise eine einzige Zahl zugeordnet. Und die Beweise sind formal betrachtet Folgen von Formeln (wobei eine jede Formel entweder ein Axiom ist, oder aus voranstehenden Formeln der Folge durch eine der erlaubten Schlussweisen entsteht; und die letzte Formel der bewiesene Satz ist). Wurden den Formeln, die im Beweis teilnehmen, der Reihe nach die Zahlen

$$a_1, a_2, \dots, a_r$$

zugeordnet, so kann dem Beweis selbst die Zahl

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$$

zugeordnet werden (ganz ähnlich wurde in Nr. 2 des § 17 eine Zahl einer »Ableitung« aus einem Gleichungssystem, durch welches eine Funktion definiert wird, zugeordnet).

So entsprechen den Aussagen über Formeln und Beweisfiguren des Axiomensystems Aussagen über natürliche Zahlen; und gehen die Schlussfolgerungen des Systems mit genügend scharf umgrenzten Methoden zu, so entsprechen einer ganzen Schar solcher Aussagen primitiv-rekursive Beziehungen; z. B. auch der folgenden Aussage: »Die Formel mit der Gödel-Nummer m ist die Endformel des Beweises mit der Gödel-Nummer n «. Andererseits, wenn das System genügend ausdrucksfähig ist, so können die primitiv-rekursiven Beziehungen darin formalisiert werden. Das versteht gewisse Formeln des Systems, die bisher bloss als Zeichenfolgen betrachtet wurden, gleichsam mit einem »Sinn«. Zum Beispiel bedeutet die Tatsache, dass die Beziehung $m < n$ im System formalisierbar ist, dass das System eine Formel mit zwei freien Variablen enthält, woraus, wenn für die Variablen jene Ausdrücke eingesetzt werden, die im System der beliebigen Zahlen m und n entsprechen, eine beweisbare Formel wird, wenn $m < n$ ist, und sonst eine solche Formel, deren Negation beweisbar ist. So kann man sagen: diese Formel des Systems »bedeutet«, »sagt aus«, dass ihr erstes Argument kleiner als das zweite ist.

Werden nun die Aussagen über Beweise des Systems mit Hilfe des Wörterbuchs auf primitiv-rekursive Beziehungen übersetzt, dann die Formeln des Systems gesucht, welche diesen primitiv-rekursiven Beziehungen entsprechen, so kann man auch auf Formeln stossen, deren »Sinn« paradox ist; z. B. zeigt GÖDEL, dass sich eine Formel durch eine effektive Konstruktion angeben lässt, welche »aussagt«, dass sie selber nicht im System beweisbar ist. Dann ist schon leicht exakt zu beweisen, dass die Entscheidbarkeit einer solchen Formel auf einen Widerspruch führen würde. Da aber aus der Widerspruchsfreiheit des Systems folgt, dass die betrachtete Formel wahr ist (sie ist ja tatsächlich nicht im System beweisbar), so kann auch die Widerspruchsfreiheit des Systems nicht im System beweisbar sein.

Dieses Ergebnis schien darum verhängnisvoll für die Beweistheorie zu sein, weil man ja die Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems mit weniger bedenklichen Mitteln als die Methoden des betrachteten Systems beweisen

wollte; nach dem Satz von GÖDEL genügen aber nicht einmal die Methoden des betrachteten Systems zum Beweis der Widerspruchsfreiheit.

6. Nun suchte man einen Ausweg aus dieser Situation; einstweilen für die »gesamte« Zahlentheorie.⁵² In der gesamten Zahlentheorie werden auch Aussagen und Definitionen, die sich auf unendliche Gesamtheiten berufen, zugelassen; zum Beispiel darf man hier irgendetwas über die kleinste solche natürliche Zahl n aussagen, für welches eine rekursive Funktion $a(n)$ verschwindet, ohne eine Schranke für solche Zahlen n anzugeben. So ist die Widerspruchsfreiheit der gesamten Zahlentheorie problematisch. Um sie zu beweisen, hatte man nach Methoden zu forschen, die sich im betrachteten Axiomensystem der Zahlentheorie nicht formalisieren lassen, und doch mit allgemeiner Beruhigung angenommen werden können.

Als eine solche Methode wurde von ACKERMANN⁵³ die transfinite Rekursion verwendet. Hier durchläuft die Rekursionsvariable die natürlichen Zahlen in einer gewissen Wohlordnung vom Typus der ersten » ε -Zahl«:

$$\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\dots}}}$$

7. In vielen Gebieten der Mathematik spielen die vagen Begriffe der »Berechenbarkeit«, »Konstruierbarkeit«, »Effektivität« eine Rolle; es ist erwünscht, diese Begriffe mit einem exakten Sinn zu versehen. CHURCH hat vorgeschlagen⁵⁴, dass die im allgemeinsten Sinn »berechenbaren« Funktionen mit den allgemeinrekursiven Funktionen identifiziert werden sollen.

Argumente dafür wurden bereits im vorigen Kapitel angeführt. Ein nicht von Willkür geleitetes, überall und zu jeder Zeit wiederholbares Berechnungsverfahren muss mechanisch sein; und es hat sich herausgestellt, dass die mechanisch berechenbaren Funktionen von TURING mit den allgemeinrekursiven Funktionen identisch sind.⁵⁵ Man kann auch daran denken, dass jedes Berechnungsverfahren mit bestimmten Mitteln, also in einem geschlossenen System zugeht, und dieses System kann axiomatisiert werden. Zum Beispiel bedeutet die Berechenbarkeit von $\varphi(n)$ innerhalb eines Axiomensystems, worin die Gleichheit und die Zahlen formalisiert sind, dass es im System einen Ausdruck mit einer freien Variablen gibt, woraus durch Einsetzung des Ausdrucks, der im System eine beliebige Zahl n repräsentiert, ein solcher Ausdruck wird, deren Gleichheit mit dem die Zahl m repräsentierenden Ausdruck dann und nur dann im System ableitbar ist, wenn m der Wert von φ an der Stelle n ist. Man kann nun beweisen, dass auch die Funktionen, die in beliebigen, genügend ausdrucksfähigen, mit scharf umgrenzten Schlussweisen operierenden, widerspruchsfreien Axiomen-

⁵²) Zur Axiomatisierung der Zahlentheorie siehe HILBERT-BERNAYS [1] I. Band S. 371.

⁵³) ACKERMANN [2]; siehe noch G. GENTZEN: *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*. Math. Ann. 112 (1936) S. 493—565. und *Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie*. Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, Neue Folge 4 (1938) S. 19—44. GENTZEN hat als erster die Widerspruchsfreiheit der gesamten Zahlentheorie bewiesen; er hat dabei nicht eine Rekursion, sondern eine transfinite Induktion vom Typus ε_0 verwendet.

⁵⁴) CHURCH [2] Nr. 7.

⁵⁵) TURING [2].

systemen berechenbar sind, mit den allgemein-rekursiven Funktionen identisch sind.⁵⁶

Nimmt man an, dass der Begriff der allgemeinsten »berechenbaren« Funktion mit dem Begriff der allgemein-rekursiven Funktion identifiziert werden soll, so eröffnet sich ein weites Gebiet der Anwendungsmöglichkeiten.

8. So wird z. B. in der Begründung der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* von MISES⁵⁷ die Forderung gestellt, dass sich die relative Häufigkeit des Eintreffens eines Ergebnisses nicht ändern soll, wenn nicht jeder Versuch in Betracht genommen wird, sondern bloss eine »durch irgendeine mathematische Anweisung« ausgewählte Folge von Versuchen, wobei die Auswahl nur von den Ergebnissen der früheren Versuche abhängt. Die Forderung bedeutet, dass es nicht möglich sein soll ein »Spielsystem« zu konstruieren, welche die relative Häufigkeit verändern würde. Der Begriff des Spielsystems kann durch Gödelisierung präzisiert werden. Werden den Ergebnissen der Versuche Zahlen zugeordnet (handelt es sich z. B. um ein »Kreuz und Kopf«-Spiel, wobei immer wieder eine Münze aufgeworfen, und beobachtet wird, mit welcher Seite nach oben sie herunterfällt, so kann z. B. dem Ergebnis »Kreuz« die Zahl 2, dem Ergebnis »Kopf« die Zahl 3, und so z. B. der Folge :

»Kreuz, Kopf, Kreuz, Kreuz«

die Zahl

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 2 & 2 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array}$$

zugeordnet werden), so kann ein Spielsystem mit Hilfe der folgendermassen definierten Funktion charakterisiert werden :

$$\varphi(m) = \begin{cases} 1, & \text{falls } m \text{ die Gödel-Nummer einer solchen Versuchsfolge ist, wobei} \\ & \text{der nächste Versuch in Betracht genommen wird} \\ 0; & \text{falls } m \text{ die Gödel-Nummer einer solchen Versuchsfolge ist, wobei} \\ & \text{der nächste Versuch nicht in Betracht genommen wird} \\ 2, & \text{falls } m \text{ nicht die Gödel-Nummer einer Versuchsfolge ist.} \end{cases}$$

Mit Hilfe von $\varphi(m)$ kann eine Teilfolge aus der Versuchsfolge ausgewählt werden, indem der n -te Versuch zur Teilfolge hinzugenommen oder nicht hinzugenommen wird, je nachdem für die Gödel-Nummer m der Folge der vorangehenden Versuche 1 oder 0 der Wert von $\varphi(m)$ ist.

Verdient nun das Spielsystem wirklich »System« genannt zu werden, das heisst, ist sie nicht ein von der Willkür des Momentes geleitetes, sondern ein auch Anderen mitteilbares, wiederholbares System, so muss $\varphi(m)$ eine mechanisch berechenbare, also allgemein-rekursive Funktion sein.

Die Forderung von MISES kann also folgendermassen präzisiert werden : die relative Häufigkeit des Eintreffens des betrachteten Ereignisses soll sich nicht ändern, wenn statt der ganzen Versuchsfolge bloss eine durch eine beliebige allgemein-rekursive »charakteristische Funktion« ausgewählte Teilfolge in Betracht genommen wird.⁵⁸

⁵⁶) HILBERT-BERNAYS [1] Band II. Supplement II.

⁵⁷) Siehe z. B. R. MISES: *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*. 2. Auflage, Wien, (1936).

⁵⁸) CHURCH [5].

9. Der Begriff der »Konstruierbarkeit« spielt in jenem, nach Vermeidung aller Widersprüche trachtenden BROUWERSchen Aufbau der Mathematik, der *Intuitionismus* genannt wird,⁵⁹ eine besonders wichtige Rolle. Die Intuitionisten betrachten ja eine Existenzaussage nur dann als richtig, wenn der Gegenstand, dessen Existenz behauptet wird, auch effektiv konstruiert werden kann.

So ist z. B. die Behauptung: »zu jedem x gibt es ein y , für welches $\alpha(x, y) = 0$ gilt«, wo $\alpha(x, y)$ eine bestimmte zahlentheoretische Funktion ist, in ihrer Auffassung nur dann wahr, wenn ein effektives Verfahren angegeben wird, welches zu einer jeden gegebenen Zahl m eine Zahl n konstruiert, für welches $\alpha(m, n) = 0$ gilt.

Es ist nun möglich⁶⁰ den im intuitionistischen Sinne wahren zahlentheoretischen Aussagen Zahlen zuzuordnen (man sagt, dass diese Zahlen die betreffenden Aussagen »realisieren«). In einer solchen Zuordnung wird z. B. der Aussage

$$(x) (Ey) [\alpha(x, y) = 0]$$

nur dann eine Zahl entsprechen, wenn es ein effektives Verfahren gibt, welches zu einem jeden gegebenen m eine solche Zahl n konstruiert, dass auch der Aussage

$$\alpha(m, n) = 0$$

eine Zahl zugeordnet wurde. Das »effektive Verfahren« wird dabei so präzisiert, dass es eine allgemein-rekursive Funktion $\varphi(m)$ gibt, welche für ein beliebiges m einen solchen Wert $\varphi(m) = n$ annimmt, dass auch der Aussage $\alpha(m, n) = 0$ eine Zahl zugeordnet wurde.

So wird hier die Richtigkeit in intuitionistischem Sinne einer zahlentheoretischen Aussage damit präzisiert, dass die Aussage realisierbar ist (das heisst, dass ihr eine Zahl zugeordnet wurde; wenn auch nicht eindeutig).

HEYTING hat für die intuitionistische Logik einen formalen Kalkül eingeführt.⁶¹ KLEENE und NELSON haben ein darauf gegründetes Axiomensystem (S) der Zahlentheorie untersucht. Es hat sich herausgestellt, dass in diesem System eine Formel der Form

$$(x_1) (x_2) \dots (x_k) (Ey) F(x_1, \dots, x_k, y)$$

nur dann abgeleitet werden kann, wenn es eine solche allgemein-rekursive Funktion $\psi(x_1, \dots, x_k)$ gibt, dass so oft n_1, \dots, n_k und m solche nicht-negative ganze Zahlen sind, für welche

$$\psi(n_1, \dots, n_k) = m$$

gilt, $F(n_1, \dots, n_k, m)$ immer eine realisierbare Formel ist. In diesem Sinn kann in der intuitionistischen Zahlentheorie nur die Existenz allgemein-rekursiver Funktionen bewiesen werden.

Die Formeln, die in (S) ableitbar sind, haben sich alle als realisierbar erwiesen. Daher sind die zahlentheoretischen Formeln, die durch Substitution aus den Formeln des intuitionistischen Logikkalküls entstehen, alle realisierbar; daraus, und aus der Nicht-Realisierbarkeit von zahlentheoretischen Formeln

⁵⁹) Siehe z. B. A. HEYTING: *Mathematische Grundlagenforschung*. Ergebnisse der Math. 3. (1934) S. 375—449.

⁶⁰) KLEENE [7] und [8], NELSON [1].

⁶¹) A. HEYTING: *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-Math. Kl. (1930) S. 42—56.

gewisser Form, folgt, dass gewisse (in klassischem Sinne wahre) Formeln in intuitionistischem Sinn unbeweisbar sind.

So kann die Verwendung der allgemein-rekursiven Funktionen gewisse Probleme des Intuitionismus klarstellen.

10. Dass die intuitionistische Vorsicht nicht bloss eine Haarspalterei ist, kann auch durch ein Beispiel vom Gebiete der primitiv-rekursiven Funktionen erhellt werden.

Wir wissen, dass für ein positives, rationales τ die Funktion $[\tau n]$ primitiv-rekursiv ist, und in Nr. 1 des § 11 habe ich bewiesen, dass für positives, irrationales τ die notwendige und hinreichende Bedingung der primitiven Rekursivität von

$$[\tau n]$$

die primitive Rekursivität des Koeffizienten a_n (als Funktion von n) in der Faktoriellenentwicklung

$$\tau = a_0 + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_2}{2!} + \dots + \frac{a_n}{n!} + \dots \quad (a_n \leq n - 1 \text{ für } 1, 2, 3, \dots)$$

ist.

Hier mussten die irrationalen τ getrennt untersucht werden, denn wir konnten nur für ein irrationales τ mit Sicherheit behaupten, dass in seiner Fakultätenentwicklung über alle Grenzen

$$a_n < n - 1$$

vorkommt; und das war entscheidend im Beweis. Die Behauptung: »über alle Grenzen gibt es ein n , für welches $a_n < n - 1$ gilt« — ist eine solche Existenzaussage, welche von den Intuitionisten, ohne die Angabe eines effektiven Verfahrens zur Bestimmung dieses n , nicht als sinnvoll betrachtet wird. Sehen wir ein Beispiel, worin die intuitionistische Forderung wichtig werden kann.

Die Zahlentheorie hat zahlreiche bis heute unentschiedene Probleme. Betrachten wir ein solches, z. B. das Problem der ungeraden vollkommenen Zahlen: ob es eine ungerade Zahl gibt, welche der Summe ihrer »echten« Teiler gleich ist (die Zahl selbst wird nicht zu ihren echten Teilern gerechnet).

Es soll die Summe sämtlicher Teiler von n mit $\sigma(n)$ bezeichnet werden (nach Nr. 11 des § 1 ist diese Funktion primitiv-rekursiv); ist n die Summe der echten Teiler von n , so ergibt sich, die vollkommene Zahl n selbst auch zu den Teilern hinzugenommen,

$$\sigma(n) = 2n.$$

Die bisher bekannten vollkommenen Zahlen sind alle gerade; es ist z. B.

$$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \cdot 6.$$

Nun soll diese Beziehung auf eine ungerade Zahl $2n + 1$ angewandt in der folgenden Definition von a_n verwendet werden:

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } \sigma(2n + 1) = 2(2n + 1) \\ n - 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist klar, dass a_n eine primitiv-rekursive Funktion von n ist, und dass für $n = 1, 2, 3, \dots$

$$a_n \leq n - 1$$

gilt; da wir aber bis heute nicht wissen, ob es ungerade vollkommene Zahlen gibt, können wir nicht wissen, ob es auch nur ein n gibt, für welches

$$a_n < n - 1$$

wäre.

Die Reihe

$$a_0 + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_2}{2!} + \dots + \frac{a_n}{n!} + \dots,$$

welche mit der jetzt definierten primitiv-rekursiven Koeffizientenfolge gebildet wird, konvergiert zu einer nicht-negativen reellen Zahl ξ . Ist diese Zahl rational, so ist $[\xi n]$ primitiv-rekursiv. Ist ξ irrational, so ist $[\xi n]$ ebenfalls primitiv-rekursiv. Wir haben aber nicht viel davon, wenn wir nun behaupten: so ist $[\xi n]$ jedenfalls primitiv-rekursiv. Denn mit unserem heutigen Wissen können wir nicht entscheiden, ob ξ rational oder irrational ist; und daher können wir den Wert von $[\xi n]$ nicht einmal an der Stelle $n = 1$ berechnen. Gibt es nämlich keine ungerade vollkommene Zahl, so ist

$$\xi = 0 + \frac{1-1}{1!} + \frac{2-1}{2!} + \dots = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \dots = 1,$$

also

$$[\xi \cdot 1] = 1;$$

wenn es aber auch ungerade vollkommene Zahlen gibt, so muss hier wenigstens für ein — positives — Glied 0 gesetzt werden, daher ist

$$\xi < 1 \quad \text{und so} \quad [\xi \cdot 1] = 0.$$

Und wir können nicht wissen, ob das Problem der ungeraden vollkommenen Zahlen je entschieden wird, also ob der Wert von $[\xi \cdot 1]$ je berechnet werden kann. (Um $[\xi n]$ an einer jeden Stelle berechnen zu können, müsste man sogar wissen, ob es über alle Grenzen ungerade vollkommene Zahlen gibt, oder müsste man eine Schranke für solche Zahlen kennen.)

Es können freilich auch andere unentschiedene zahlentheoretische Probleme zur Konstruktion ähnlicher Beispiele verwendet werden; und vermutlich werden zu jeder Zeit unentschiedene Probleme vorhanden sein.

Deshalb betrachten die Intuitionisten das Anwenden des »tertium non datur«, wie in der Behauptung »entweder nimmt a_n über alle Grenzen kleinere Werte als $n - 1$ an, oder nicht« — nicht als sinnvoll. Ohne eine Entscheidung taugt eine solche Aussage nicht viel.

Jedoch haben die von den Intuitionisten nicht anerkannten Methoden eine wichtige Rolle im Aufbau der grossen, umfassenden mathematischen Theorien.

11. In der *Mengenlehre* ist ein alter Wunsch, dass die vagen Begriffe präzisiert werden.

Beschränkt man sich auf Mengen von natürlichen Zahlen, so kann der »naive« Mengenbegriff folgendermassen präzisiert werden. Eine Menge von natürlichen Zahlen wird dann als gegeben betrachtet, wenn man von einer jeden natürlichen Zahl entscheiden kann, ob sie in die Menge gehört oder nicht. Wir sagen, dass dies »effektiv« entscheidbar ist, wenn man eine allgemein-rekursive Funktion $\varphi(n)$ angeben kann, welche für solche und nur solche n verschwindet, die zur Menge gehören. (Manchmal kann man jene äquivalente Formulierung

besser benutzen, dass die charakteristische Funktion $\varphi(n)$ der Menge, welche an einer beliebigen Stelle n den Wert 1 oder 0 annimmt, je nachdem n zur Menge gehört oder nicht, allgemein-rekursiv sein soll.)

Der Begriff der Abzählung kann ähnlich präzisiert werden. Darunter, dass eine Teilmenge der natürlichen Zahlen »effektiv abzählbar« ist, werden wir verstehen, dass es ein »effektives Verfahren« gibt, welches die Elemente der betreffenden Teilmenge in irgendeiner Reihenfolge der Reihe nach angibt. Das »effektive Verfahren« kann dabei so präzisiert werden, dass es eine allgemein-rekursive Funktion $\varphi(n)$ gibt, welche für $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ lauter verschiedene Werte annimmt, und diese Werte eben die Elemente der betreffenden Menge sind.

Man kann beweisen,⁶² dass es eine Menge von natürlichen Zahlen gibt, welche im vorhin präzisierten Sinn nicht effektiv angebar, jedoch effektiv abzählbar ist (die abzählende allgemein-rekursive Funktion $\varphi(n)$ siebt für $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ die Elemente der betreffenden Menge freilich nicht der Größe nach von der Reihe der natürlichen Zahlen hinaus); und dass eine Teilmenge der natürlichen Zahlen dann und nur dann effektiv angebar ist, wenn sowohl sie, als auch ihre Komplementärmenge effektiv abzählbar sind.

12. Auch der vage Begriff der effektiv darstellbaren *transfiniten Zahl* kann mit Verwendung des Begriffes der rekursiven Funktion präzisiert werden.⁶³

Zu diesem Zweck hat KLEENE den Begriff der *partiell-rekursiven Funktion* eingeführt.⁶⁴ Dieser unterscheidet sich darin vom Begriff der allgemein-rekursiven Funktion, dass hier die Forderung der Überall-Berechenbarkeit fallen gelassen wird; also nur soviel verlangt wird, dass an solchen Stellen, wo sich der Wert der betreffenden Funktion aus dem Definitionsgleichungssystem durch die erlaubten Schritte berechnen lässt, sein Wert eindeutig bestimmt sein soll. Die Identität von partiell-rekursiven Funktionen wird mit

$$\varphi(n_1, \dots, n_r) \simeq \psi(n_1, \dots, n_r)$$

bezeichnet, und das wird so verstanden, dass an einer jeden Stelle, wo φ definiert ist, auch ψ definiert ist, und umgekehrt; und wo diese Funktionen definiert sind, sie denselben Wert haben. Die partiell-rekursiven Funktionen können ebenfalls auf eine explizite Form

$$\varphi(a_1, \dots, a_r) \simeq \psi(\mu_m[\tau(a_1, \dots, a_r, m) = 0])$$

gebracht werden, wo ψ und τ primitiv-rekursiv sind; die Funktion φ ist an solchen Stellen (a_1, \dots, a_r) definiert, zu welchen es ein m mit

$$\tau(a_1, \dots, a_r, m) = 0$$

gibt.

Zur effektiven Darstellung der Ordnungszahlen der ersten und zweiten Zahlklasse hat man effektiv zu entscheiden, ob eine gegebene Ordnungszahl gleich 0 ist, oder der Nachfolger einer Ordnungszahl, oder aber der Grenzwert einer wachsenden Folge von Ordnungszahlen. Im zweiten Fall hat man die vorangehende Ordnungszahl zu charakterisieren; im dritten Fall eine wachsende Ordnungszahlenfolge vom Typus ω , welche die betreffende Ordnungszahl zum

⁶²) KLEENE [1] § 2.; siehe noch POST [2].

⁶³) CHURCH and KLEENE [1], CHURCH [4], KLEENE [4], siehe noch KLEENE [6].

⁶⁴) KLEENE [4] Nr. 1. Siehe noch KLEENE [5] II. Nr. 6.

Grenzwert hat. Da die zur Darstellung dienenden Ausdrücke als Zeichenfolgen durch ihre Gödel-Nummern ersetzt werden können, kann die Charakterisierung der Ordnungszahlen so geschehen, dass den Ordnungszahlen natürliche Zahlen zugeordnet werden, wobei man die folgenden Forderungen vor Augen hält:

(1) Keine Zahl soll verschiedenen Ordnungszahlen zugeordnet werden (aber einer Ordnungszahl kann man auch mehrere natürliche Zahlen zuordnen).

(2) Die Funktion $\kappa(x)$, welche den Wert 0, 1 oder 2 annimmt, je nachdem x der Ordnungszahl 0 zugeordnet ist, oder dem Nachfolger einer Ordnungszahl, oder aber dem Grenzwert einer wachsenden Ordnungszahlenfolge, soll partiell-rekursiv sein.

(3) Es soll eine partiell-rekursive Funktion $\nu(x)$ geben, die an einer jeden Stelle x , welche dem Nachfolger X einer Ordnungszahl Y zugeordnet ist, einen der Ordnungszahl Y zugeordneten Wert annimmt.

(4) Es soll eine partiell-rekursive Funktion $\mu(x, n)$ geben, so dass falls x dem Grenzwert X einer wachsenden Ordnungszahlenfolge zugeordnet ist, es eine Ordnungszahlenfolge Y_1, Y_2, \dots vom Typus ω gibt, wobei $\mu(x, n)$ für jedes n eine der Ordnungszahl Y_n zugeordnete Zahl ist.

Man beschränkt sich hier auf partielle Definitionen, weil an Stellen, die bei der GÖDELSchen Numerierung solchen Zeichenfolgen entsprechen, die keine Ordnungszahl repräsentieren, der Wert von $\kappa(x)$, $\nu(x)$ und $\mu(x, n)$ in (2), (3) und (4) keine Rolle spielt, und so eine unnötige Einschränkung wäre zu fordern, dass diese Funktionen auch an solchen Stellen irgendwie rekursiv definiert seien.

Es gibt zu jeder Zuordnung, welche die Forderungen (1), (2), (3) und (4) erfüllt, eine Ordnungszahl ξ , welcher keine natürliche Zahl zugeordnet wird, und auch den grösseren Ordnungszahlen nicht, aber allen kleineren Ordnungszahlen als ξ werden natürliche Zahlen zugeordnet.

Es kann eine den Forderungen genügende Zuordnung angegeben werden, für welche dieses ξ am grössten ist. Dieses grösste ξ ist eine effektiv nicht darstellbare Ordnungszahl der zweiten Zahlklasse.

13. Eine der wichtigsten Anwendungen der Präzisierung des Effektivitätsbegriffes ist der Beweis der *effektiven Unentscheidbarkeit gewisser Probleme*.⁶⁵

Hier handelt es sich um Probleme von solcher Struktur, wie z. B. das grosse FERMATSche Problem in folgender Formulierung: es wird ein effektives Verfahren gesucht, um zu entscheiden, zu welchen Exponenten n es solche positive ganze Zahlen x, y und z gibt, dass

$$x^n + y^n = z^n$$

gilt. Das »effektive Verfahren« kann hier als die effektive Angabe der Menge der n mit der gewünschten Eigenschaft präzisiert werden, das heisst als Angabe einer allgemein-rekursiven Funktion $\varphi(n)$, welche für jene und nur für jene n verschwindet, zu welchen es die Forderung erfüllende Zahlen x, y und z gibt.

Es hat sich von verschiedenen Problemen dieser Art herausgestellt, dass sie effektiv unentscheidbar sind. Zu diesen gehört auch das »Entscheidungsproblem« des engeren logischen Funktionenkalküls⁶⁶; und auch das »Wortproblem« gewisser associativen Systeme. Das letztere kann folgendermassen formuliert werden:

⁶⁵) Den ersten solchen Beweis hat CHURCH [2] angegeben.

⁶⁶) CHURCH [3].

Eine Menge (H) der Elemente a, b, c, \dots wird ein associatives System genannt, wenn sie die folgenden beiden Forderungen erfüllt:

- 1) Zu beliebigen Elementen a und b von (H) gibt es in (H) ein bestimmtes Element, das ihr Produkt genannt und mit ab bezeichnet wird.
- 2) Die Multiplikation ist associativ:

$$(ab)c = a(bc).$$

Hier handelt es sich um solche associative Systeme, welche aus endlich vielen »Generatoren« x_1, \dots, x_n so aufgebaut werden können, dass ein jedes Element von (H) entweder 1 ist (darunter ein solches Element verstanden, dass für alle Elemente a von (H) $1a = a1 = a$ gelte), oder das Produkt gewisser Elemente a_1, \dots, a_t , wobei ein jedes a_i eines der x_j ist; ausserdem sind gewisse Gleichheiten von endlicher Anzahl zwischen gewissen Generatorprodukt-Paaren gegeben.

Das »Wortproblem« lautet: kann ein effektives Verfahren angegeben werden, um zu entscheiden, ob zwei beliebig gegebene Generatorprodukte gleich sind?

Den Effektivitätsbegriff mit dem Begriff der allgemein-rekursiven Funktion präzisiert, hat POST⁶⁷ und zur selben Zeit unabhängig auch MARKOV⁶⁸ associative Systeme mit effektiv unentscheidbarem »Wortproblem« konstruiert. Der Letztere hat auch die effektive Unentscheidbarkeit anderer Probleme dieses Gebietes bewiesen. (Unlängst hat KALMÄR in seinem Antrittsvortrag an der Ungarischen Akademie der Wissenschaften einen einfacheren Beweis der MARKOVschen Ergebnisse angegeben.)

Dass es überhaupt effektiv unentscheidbare Probleme gibt, im hier präzisierten Sinn, kann auch aus dem Satz von GÖDEL⁶⁹ abgeleitet werden, dass es innerhalb Axiomensysteme von gewisser Struktur unentscheidbare Probleme gibt.⁷⁰ Es lässt sich sogar eine primitiv-rekursive (sogar elementare) Funktion $\varphi(m, n)$ konstruieren, so dass sich direkt als ein Spezialfall des Gödelschen Satzes die effektive Unentscheidbarkeit des folgenden einfachen Problems beweisen lässt:⁷¹ »Für welche natürliche Zahlen n gilt $\varphi(m, n) = 0$ bei beliebigem m ?«

Es würde zum Brauch, die effektiv unentscheidbaren Probleme, wobei die Effektivität mit dem Begriff der Allgemein-Rekursivität präzisiert wird, »absolut-unentscheidbar« zu nennen; im Gegensatz zu den in gewissen Axiomensystemen unentscheidbaren Problemen von GÖDEL. Es kann aber ein Satz keineswegs von grösserer Tragweite sein, als jener Satz, dessen Spezialfall er ist. So bedeutet nach den Vorgehenden die Existenz effektiv-unentscheidbarer Probleme nicht soviel, dass es in der Mathematik »absolut« unentscheidbare Probleme gibt, sondern soviel, dass in der präzisen Formulierung des Effektivitätsbegriffes, wenn dies auch sehr weit gefasst wurde, dennoch eine Abgrenzung geschehen ist (in HILBERT-BERNAYS [1] 2. Band Supplement II. wurde ein festes formales System angegeben, worin jede allgemein-rekursive Funktion formalisiert werden kann); und die mathematische Wirklichkeit ist viel zu lebendig und entwicklungsfähig, um in starre Schranken gesperrt werden zu können.

⁶⁷) POST [5]; siehe noch HALL JR. [1].

⁶⁸) MARKOV [1] und [2].

⁶⁹) GÖDEL [1].

⁷⁰) Siehe PÉTER: *Besprechung von Skolem* [4]. The Journ. of Symb. Log. 9 (1944) S. 21.

⁷¹) KALMÄR [3].

POST hat sogar den Begriff der »effektiven Unentscheidbarkeit von niedrigerem oder höherem Grad« eingeführt; bisher hat es sich noch nicht herausgestellt, ob es effektiv unentscheidbare Probleme von verschiedenem Grad in diesem Sinne gibt.⁷²

Es ist jedoch interessant, die Probleme zu untersuchen, welche sich bei unserem sehr weit gefassten Effektivitätsbegriff als effektiv unentscheidbar erweisen.

In den Folgenden werde ich mich mit solchen Unentscheidbarkeitsfragen ausführlich befassen, welche gewisse Fragen über rekursive Funktionen erhellen.

§ 22. EFFEKTIVE UNENTSCHEIDBARKEIT DER FRAGE: WELCHE GLEICHUNGSSYSTEME ALLGEMEIN-REKURSIVE FUNKTIONEN DEFINIEREN.⁷³

1. Das zum Schluss des § 17 ausgesagte Ergebnis lautet für den einstelligen Fall: es gibt zwei universelle primitiv-rekursive Funktionen φ und τ , durch welche eine beliebige einstellige allgemein-rekursive Funktion $\varphi(m)$ in der Form

$$\varphi(m) = \varphi(\mu_w[\tau(n, m, w) = 0])$$

geschrieben werden kann, wo n die Gödel-Nummer (nach einem ein für allemal konstruierten Wörterbuch) eines Gleichungssystems ist, welches die Funktion $\varphi(m)$ definiert, und τ so beschaffen ist, dass es zu jedem m ein w gibt, für welches

$$\tau(n, m, w) = 0$$

gilt. Zu einem anderen Gleichungssystem gehört eine andere Gödel-Nummer n ; man kann sagen, dass $\varphi(m)$ durch die Gödel-Nummer n »definiert« wird.

Exakter gefasst: man sagt, dass die Zahl n eine einstellige allgemein-rekursive Funktion definiert, wenn es für dieses n zu einem beliebigen m ein w gibt, so dass

$$\tau(n, m, w) = 0$$

gilt; in diesem Fall ist nach Nr. 1 des § 17 $\mu_w[\tau(n, m, w) = 0]$ eine allgemein-rekursive Funktion von m ; und wir sagen, dass die Zahl n die Funktion

$$\varphi(\mu_w[\tau(n, m, w) = 0])$$

definiert.

Zu einem jeden Gleichungssystem, das eine allgemein-rekursive Funktion $\varphi(m)$ definiert, kann nach den Vorherigen eine $\varphi(m)$ definierende Zahl n konstruiert werden, nämlich die Gödel-Nummer des Gleichungssystems. Und umgekehrt lässt sich auch zu jeder Zahl n , welche eine einstellige allgemein-rekursive Funktion definiert, ein Gleichungssystem konstruieren, durch welches dieselbe Funktion definiert werden kann: man erhält ein solches Gleichungssystem, wenn man zu den Definitionsgleichungen, die im Aufbau von φ und τ und von der sich in diesem Fall als allgemein-rekursiv erweisenden Funktion

$$\mu(m) = \mu_w[\tau(n, m, w) = 0]$$

teilnehmen, noch die Gleichung

$$\varphi(m) = \varphi(\mu(m))$$

⁷²) POST [2].

⁷³) KLEENE [1] § 2.

hinzunimmt (freilich ist die Gödel-Nummer dieses Gleichungssystems im allgemeinen von n verschieden).

Man kann daher statt der Gleichungssysteme, die einstellige allgemein-rekursive Funktionen definieren, die Zahlen betrachten, durch welche einstellige allgemein-rekursive Funktionen definiert werden.

So hätte man einen klaren Überblick von den einstelligen primitiv-rekursiven Funktionen, wenn man entscheiden könnte: welche Zahlen solche Funktionen definieren, das heisst: bei welchen Zahlen n es zu jedem m ein w gibt, für welches

$$\tau(n, m, w) = 0$$

gilt.

Das lässt sich aber nicht effektiv entscheiden.

2. Erst werde ich zeigen, dass die Zahlen der gewünschten Art nicht effektiv abzählbar sind, in dem Sinne, dass es keine allgemein-rekursive Funktion $\vartheta(n)$ gibt, deren für $n = 0, 1, 2, \dots$ angenommene sämtliche Werte $\vartheta(0), \vartheta(1), \vartheta(2), \dots$ Zahlen dieser Art wären, und von welcher jede solche Zahl irgendwo angenommen wäre (wobei nicht einmal verlangt wird, dass $\vartheta(n)$ einen jeden Wert nur an einer Stelle annehmen soll).

Denn nehmen wir an, es wäre $\vartheta(n)$ eine solche allgemein-rekursive Funktion, deren sämtliche Werte Zahlen der gewünschten Art sind; das heisst, dass es zu jedem n und zu jedem m ein w gibt, für welches

$$\tau(\vartheta(n), m, w) = 0$$

gilt. Werden speziell immer gleiche m und n gewählt, so muss zu jedem m auch ein solches w geben, für welches

$$\tau(\vartheta(m), m, w) = 0$$

ist.

Nun kann man zeigen, dass falls ϑ eine beliebige solche allgemein-rekursive Funktion ist, dass es zu jedem m ein w mit

$$\tau(\vartheta(m), m, w) = 0$$

gibt, so gibt es eine Zahl f von gewünschter Art, die von $\vartheta(m)$ nicht angenommen werden kann.

Das sieht man folgendermassen ein. Gilt bei beliebigem m mit geeignetem w

$$\tau(\vartheta(m), m, w) = 0,$$

so ist

$$\mu_w [\tau(\vartheta(m), m, w) = 0],$$

und damit auch die Funktion

$$\eta(m) = \psi(\mu_w [\tau(\vartheta(m), m, w) = 0]) + 1$$

allgemein-rekursiv. Wird $\eta(m)$ durch die Zahl f definiert, das heisst, ist

$$\eta(m) = \psi(\mu_w [\tau(f, m, w) = 0]),$$

so ist f eine Zahl von gewünschter Art, und eben diese kann von $\vartheta(m)$ nicht angenommen werden. Denn wäre an einer Stelle q

$$\vartheta(q) = f,$$

dann würde sich aus der letzten Gleichung durch Einsetzen von $\vartheta(q)$ für f

$$\eta(m) = \psi(\mu_w [\tau(\vartheta(q), m, w) = 0]) ,$$

und für

$$\eta(q) = \psi(\mu_w [\tau(\vartheta(q), q, w) = 0])$$

ergeben. Aus der zuerst aufgeschriebenen Form von $\eta(m)$ ergibt sich aber für $m = q$ im Widerspruch damit

$$\eta(q) = \psi(\mu_w [\tau(\vartheta(q), q, w) = 0]) + 1 .$$

So können die Zahlen, welche einstellige allgemein-rekursive Funktionen definieren (und für die Definitionsgleichungssysteme stehen) nicht effektiv abzählbar sein.

3. Aus den Tatsachen, die in der vorigen Nummer klargestellt wurden, kann man ferner ableiten, dass *sich nicht effektiv entscheiden lässt: welche Zahlen einstellige primitiv-rekursive Funktionen definieren.* Das heisst, es gibt keine solche allgemein-rekursive Funktion $\varphi(n)$, welche an solchen und nur solchen Stellen n verschwinden würde, welche einstellige allgemein-rekursive Funktionen definierende Zahlen sind.

Denn nehmen wir an, dass $\varphi(n)$ eine solche allgemein-rekursive Funktion ist, dass jedes n , für welches $\varphi(n) = 0$ gilt, eine Zahl der gewünschten Art ist. Dann kann man eine Zahl f der gewünschten Art angeben, für welche

$$\varphi(f) \neq 0$$

gilt. Das sieht man folgendermassen ein :

Es gibt natürlich beliebig viele Zahlen, die einstellige allgemein-rekursive Funktionen definieren ; wählen wir aus diesen eine bestimmte Zahl k heraus. Sei

$$\vartheta(n) = \begin{cases} n, & \text{falls } \varphi(n) = 0 \\ k, & \text{« } \varphi(n) \neq 0 . \end{cases}$$

So sind sämtliche Werte von $\vartheta(n)$ Zahlen der gewünschten Art (k wurde so gewählt, und für $\varphi(n) = 0$ ist n eine solche Zahl) ; das heisst es gibt zu einem jeden n und zu jedem m ein w , für welches

$$\tau(\vartheta(n), m, w) = 0$$

gilt ; werden speziell immer gleiche n und m gewählt, so ergibt sich für beliebiges m bei geeignetem w

$$\tau(\vartheta(m), m, w) = 0 .$$

In der vorigen Nummer hat es sich herausgestellt, dass es zu einer beliebigen allgemein-rekursiven Funktion $\vartheta(m)$, welche sich so verhält, eine Zahl f der gewünschten Art gibt, welche nicht zu ihren Werten gehören kann. Es gehört aber ein jedes n , für welches $\varphi(n) = 0$ gilt, zu den Werten von ϑ ; daher muss

$$\varphi(f) \neq 0$$

sein. Damit ist die Behauptung bewiesen.

All das kann ohne Schwierigkeiten auch auf mehrstellige Funktionen übertragen werden.

§ 23. DIE FRAGE DER ALLGEMEINEN ENTSCHEIDBARKEIT DER ARITHMETISCHEN PROBLEME.

1. Es werden unter »arithmetischen« Aussagen solche Aussagen verstanden, die sich auf Identitäten zwischen Polinomen der Zahlentheorie beziehen. Formal betrachtet handelt es sich hier um Aussagen, die mit Hilfe der mathematischen Zeichen »+«, »·«, »=«, und mit den logischen Zeichen aufgeschrieben werden können; wobei die Anwendung des Allzeichens: (x) und des Seinzeichens: (Ex) auch dann zugelassen wird, wenn keine Schranke für die betreffenden x gegeben ist.

Man kann auch von berühmten, bis heute nicht entschiedenen Problemen zeigen, dass sie in diesem Sinn arithmetische Probleme sind. Z. B. lässt sich die Goldbachsche Vermutung, dass jede von 2 verschiedene gerade Zahl die Summe zweier Primzahlen ist, folgendermassen als arithmetisches Problem formulieren. Eine jede gerade Zahl kann in der Form $x + x$ geschrieben werden. Dass $y > 1$ eine Primzahl ist, ist gleichbedeutend damit, dass so oft die Zahl y in der Form $u \cdot v$ geschrieben werden kann, sie immer entweder gleich u oder gleich v sein muss. Also kann die Behauptung, dass eine jede Zahl der Form $x + x$ einer Summe $y + z$ gleich ist, wo sowohl y als z Primzahlen sind, mit den Zeichen +, ·, = und mit den logischen Zeichen in der Form

$$(x)(Ey)(Ez)[x + x = y + z \ \& \ (u)(v)[y = u \cdot v \rightarrow (y = u \vee y = v)] \ \& \\ \& \ (u)(v)[z = u \cdot v \rightarrow (z = u \vee z = v)]]$$

aufgezeichnet werden (auch für $x = 0$ und $x = 1$ gilt die Behauptung, dass es solche Zahlen y und z gibt: im ersten Fall kann 0, im zweiten 1 als Wert von y und z gewählt werden).

Dem Fermat-Problem ist schon nicht so unmittelbar anzusehen, dass es arithmetisch ist: darin kommen auch Potenzen mit variablen Exponenten vor, und es ist nicht leicht sich vorzustellen, dass diese unter blosser Benutzung von Additionen und Multiplikationen ausgedrückt werden können. GÖDEL hat aber bewiesen, dass sich alle primitiv-rekursive Beziehungen auch als arithmetische Aussagen formulieren lassen.⁷⁴

2. Ich werde die Methode von GÖDEL gerade auf die primitiv-rekursive Beziehung

$$y = a^x$$

anwenden.

Die rekursive Definition von a^n lautet:

$$a^0 = 1 \\ a^{n+1} = a \cdot a^n.$$

So ist die Identität $y = a^x$ gleichbedeutend damit, dass es zu jedem x eine $x + 1$ -gliedrige Zahlenfolge gibt, worin das erste (zu $n = 0$ gehörige) Glied gleich 1 ist, ferner für beliebiges $n + 1 < x$ das $n + 2$ -te Glied a -mal soviel als das vorherige ist, endlich das letzte, $x + 1$ -te Glied mit y übereinstimmt.

Man kann nun beweisen, dass es zu einer beliebigen endlichen Zahlenfolge

$$a_1, a_2, \dots, a_k$$

⁷⁴) GÖDEL [1] § 3.

— also auch zu der vorliegenden — eine solche Zahl m und eine solche k -gliedrige arithmetische Progression :

$$1 + d, 1 + 2d, \dots, 1 + kd$$

gibt, dass die Glieder der ursprünglichen Folge der Reihe nach mit den Resten der Teilung von m durch die entsprechenden Glieder der Progression übereinstimmen: das heisst, das für $i = 1, 2, \dots, k$

$$a_i = \text{res}(m, 1 + id)$$

gilt.

Es ist nämlich aus der Zahlentheorie bekannt,⁷⁵ dass wenn die Zahlen

$$b_1, b_2, \dots, b_k$$

paarweise teilerfremd sind, sich zu den Gliedern

$$a_1, a_2, \dots, a_k$$

einer beliebigen Folge ein solches m finden lässt, welches mit geeigneten q_i für $i = 1, 2, \dots, k$ in der Form

$$m = q_i b_i + a_i$$

geschrieben werden kann. Gilt dabei noch für $i = 1, 2, \dots, k$

$$a_i < b_i,$$

so sind dabei die Zahlen a_i eben die Reste der Teilungen von m durch die entsprechenden b_i .

Man hat daher bloss ein solches d zu suchen, dass

$$1 + d, 1 + 2d, \dots, 1 + kd$$

der Reihe nach grösser als a_1, a_2, \dots, a_k , und paarweise teilerfremd ausfallen sollen.

Das gelingt, wenn für

$$l = \max(a_1, \dots, a_k, k) \\ d = l!$$

gesetzt wird. Es ist ja klar, dass in diesem Fall für $i = 1, 2, \dots, k$

$$a_i < 1 + i \cdot \max(a_1, \dots, a_k, k) \leq 1 + id$$

gilt. Und die für $i = 1, 2, \dots, k$ angenommenen Werte von $1 + id = 1 + i l!$ sind paarweise teilerfremd. Denn hätten z. B.

$$1 + i_1 l! \quad \text{und} \quad 1 + i_2 l!$$

für $i_1 \leq k, i_2 \leq k$ und $i_1 > i_2$ den gemeinsamen Primfaktor p , so wäre auch ihre Differenz

$$(i_1 - i_2) \cdot l!$$

durch p teilbar; da aber

$$i_1 - i_2 < k \leq l$$

ist, und so $i_1 - i_2$ unter den Faktoren von $l!$ vorkommt, wäre damit auch $l!$ teilbar durch p . Aber ein Teiler von $l!$ kann nicht zugleich Teiler von $1 + i_1 l!$ sein.

Die Wahl

$$d = l!$$

⁷⁵) Siehe z. B. P. BACHMANN: *Die Elemente der Zahlentheorie*. Berlin (1921) S. 66—69.

erfüllt daher die Forderungen; und so gibt es in der Tat solche Zahlen m und d zur beliebigen endlichen Folge a_1, \dots, a_k , dass für $i = 1, 2, \dots, k$

$$a_i = \text{res}(m, 1 + id)$$

gilt. Auch zu unserer $x + 1$ -gliedrigen Exponentialfolge gibt es solche Zahlen m und d .

3. Sehen wir noch einmal nach, wie diese Folge am Anfang der vorigen Nummer definiert wurde. Aus dieser Definition und aus dem Ergebnis der vorigen Nummer liest man unmittelbar heraus, dass die Identität

$$y = a^x$$

mit der folgenden Aussage gleichbedeutend ist:

$$(Em)(Ed)[\text{res}(m, 1 + d) = 1 \ \& \ (n)[n + 1 < x \rightarrow \text{res}(m, 1 + (n + 2)d) = a \cdot \text{res}(m, 1 + (n + 1)d)] \ \& \ \text{res}(m, 1 + (x + 1)d) = y] .$$

Diese Formel kann auf rein arithmetische Form gebracht werden.

Erstens kann die darin auftretende Teilaussage

$$\text{res}(m, 1 + (n + 2)d) = a \cdot \text{res}(m, 1 + (n + 1)d)$$

auch so ausgedrückt werden, dass es einen Wert t gibt, welcher mit beiden Seiten übereinstimmt:

$$(Et)[\text{res}(m, 1 + (n + 2)d) = t \ \& \ a \cdot \text{res}(m, 1 + (n + 1)d) = t] .$$

Wird der betrachtete Teilausdruck damit ersetzt, so ergibt sich eine Formel, welche durch Multiplikation und logische Operationen aus Ausdrücken der Form

$$v < u$$

und

$$\text{res}(m, u) = v$$

aufgebaut wird. Und diese können leicht auf eine arithmetische Form gebracht werden.

$v < u$ ist gleichbedeutend damit, dass es ein w gibt (w kann auch 0 sein), für welches $u = v + w + 1$ gilt; und das kann in der Form

$$(Ew)[u = v + w + 1]$$

geschrieben werden.

Und $\text{res}(m, u) = v$ ist damit gleichbedeutend, dass es ein q gibt, für welches

$$m = q \cdot u + v \quad \text{und} \quad v < u$$

gilt; das lässt sich aber, durch die Verwendung der vorhin erhaltenen arithmetischen Formel für $v < u$, in der Form

$$(Eq)[m = q \cdot u + v \ \& \ (Ew)[u = v + w + 1]]$$

aufschreiben.

Daher kann man die Identität

$$y = a^x$$

in der Tat auf eine arithmetische Form bringen.

4. Das Beweisverfahren, welches sich auf gewisse Eigenschaften ganz beliebiger endlicher Zahlenfolgen gestützt hat, lässt sich auch auf andere, durch primitive Rekursionen definierte Funktionen übertragen.

Auf diese Weise kann man leicht beweisen, dass falls die Funktion φ durch die primitive Rekursion

$$\varphi(0, a_1, \dots, a_r) = \alpha(a_1, \dots, a_r)$$

$$\varphi(n+1, a_1, \dots, a_r) = \beta(n, a_1, \dots, a_r, \varphi(n, a_1, \dots, a_r))$$

definiert wird, wobei sich die Beziehungen

$$y = \alpha(x_1, \dots, x_r) \quad \text{und} \quad y = \beta(x_0, x_1, \dots, x_r, x_{r+1})$$

auf eine arithmetische Form bringen lassen, so auch die Beziehung

$$y = \varphi(x_0, x_1, \dots, x_r)$$

auf eine arithmetische Form gebracht werden kann.

Man sieht ferner leicht ein, dass diese Eigenschaft bei einer Substitution nicht verloren geht; das heisst, dass sich samt den Beziehungen

$$y = \alpha_1(x_1, \dots, x_r), y = \alpha_2(x_1, \dots, x_r), \dots, y = \alpha_s(x_1, \dots, x_r)$$

und

$$y = \beta(x_1, \dots, x_s)$$

auch

$$y = \beta(\alpha_1(x_1, \dots, x_r), \dots, \alpha_s(x_1, \dots, x_r))$$

auf eine arithmetische Form bringen lässt. Diese letzte Beziehung kann ja auch so ausgedrückt werden, dass es solche Zahlen u_1, \dots, u_s gibt, für welche

$$u_1 = \alpha_1(x_1, \dots, x_r), \dots, u_s = \alpha_s(x_1, \dots, x_r)$$

und

$$y = \beta(u_1, \dots, u_s)$$

gilt; kurz, dass

$$(E u_1) \dots (E u_s) [u_1 = \alpha_1(x_1, \dots, x_r) \ \& \ \dots \ \& \ u_s = \alpha_s(x_1, \dots, x_r) \ \& \ y = \beta(u_1, \dots, u_s)]$$

besteht.

Da aber jede primitiv-rekursive Funktion durch primitive Rekursionen und Substitutionen aus den Ausgangsfunktionen 0 und $n+1$ aufgebaut wird, zu welchen die arithmetischen Beziehungen

$$y = 0 \quad \text{bzw.} \quad y = x + 1$$

gehören, so kann jede Identität

$$y = \varphi(x_1, \dots, x_r),$$

wo φ eine primitiv-rekursive Funktion ist, auf eine arithmetische Form gebracht werden.

Und eine Beziehung zwischen den Variablen x_1, \dots, x_r wird dann primitiv-rekursiv genannt, wenn es eine primitiv-rekursive Funktion $\varphi(x_1, \dots, x_r)$ gibt, welche an einer Stelle dann und nur dann verschwindet, wenn dort zwischen x_1, \dots, x_r die betreffende Beziehung besteht. Das kann aber auch in der Form

$$(Ey)[y = \varphi(x_1, \dots, x_r) \ \& \ y = 0]$$

aufgeschrieben werden; daher ist jede primitiv-rekursive Beziehung arithmetisch.

5. SKOLEM hat sogar bewiesen, dass *jede allgemein-rekursive Beziehung arithmetisch ist*.⁷⁶ Wenn man den Begriff der »Berechenbarkeit« mit dem Begriff der Allgemein-Rekursivität identifiziert, so bedeutet das, dass sämtliche Aussagen über berechenbare zahlentheoretische Funktionen auch als Aussagen über Identitäten zwischen Polinomen der Zahlentheorie formuliert werden können.

⁷⁶) SKOLEM [4].

Diese überraschende Tatsache folgt einfach daraus, dass sich jede allgemein-rekursive Funktion auf die bekannte explizite Form bringen lässt.

Eine allgemein-rekursive Beziehung zwischen x_1, \dots, x_r bedeutet eine für solche und nur solche Werte der Variablen bestehende Beziehung, für welche eine bestimmte allgemein-rekursive Funktion $\varphi(x_1, \dots, x_r)$ gleich 0 wird. Dass aber die mit primitiv-rekursivem ψ und τ in der expliziten Form

$$\varphi(x_1, \dots, x_r) = \psi(\mu_m[\tau(x_1, \dots, x_r, m) = 0])$$

geschriebene Funktion φ an einer Stelle x_1, \dots, x_r gleich 0 wird, ist gleichbedeutend damit, dass es eine Stelle m gibt, wo $\psi(m) = 0$ ist, und dieses m eine solche Zahl ist, für welche $\tau(x_1, \dots, x_r, m) = 0$ gilt, und zwar ist m die kleinste solche Zahl: ein beliebiges z , für welches $\tau(x_1, \dots, x_r, z) = 0$ ist, ist grösser als m oder ebenso gross. Das kann aber in der Form:

$$(Em) [\psi(m) = 0 \ \& \ \tau(x_1, \dots, x_r, m) = 0 \ \& \ (z) [\tau(x_1, \dots, x_r, z) = 0 \rightarrow z \geq m]]$$

geschrieben werden. Da es sich schon herausgestellt hat, dass eine jede primitiv-rekursive Beziehung arithmetisch ist, und die Beziehungen

$$\psi(m) = 0, \ \tau(x_1, \dots, x_r, m) = 0, \ \tau(x_1, \dots, x_r, z) = 0, \ z \geq m$$

alle primitiv-rekursiv sind, so ist unsere Formel in der Tat arithmetisch.

6. Hier wurden die Aussagen der Zahlentheorie auf solche Formeln reduziert, in welchen bloss zwei einfache Funktionen (Summe und Produkt) und eine einfache mathematische Beziehung (Gleichheit) verwendet werden; das ist aber auf Kosten der schrankenlosen Zulassung der sogenannten logischen Quantoren: (x) und (Ex) geschehen. Es gibt auch Reduktionsmöglichkeiten von umgekehrter Tendenz. KLEENE hat bewiesen⁷⁷, dass alle Aussagen mit einer freien Variablen (ähnliches gilt auch für mehreren Variablen) über allgemein-rekursive Funktionen entweder auf die quantorenlose Form

$$\varphi(a) = 0,$$

oder auf eine der folgenden zu Paaren geordneten »Normalformen«

$$(Ex) [\varphi(a, x) = 0], \quad (x) (Ey) [\varphi(a, x, y) = 0], \quad (Ex) (y) (Ez) [\varphi(a, x, y, z) = 0], \dots \\ (x) [\varphi(a, x) = 0], \quad (Ex) (y) [\varphi(a, x, y) = 0], \quad (x) (Ey) (z) [\varphi(a, x, y, z) = 0], \dots$$

reduziert werden können, wo φ eine allgemein-rekursive Funktion ist; und dass hier keine weitere Reduktion möglich ist: es gibt zu einem jeden Glied der Normalformenfolge eine Aussage über allgemein-rekursive Funktionen, welche sich auf die betreffende Form bringen lässt, aber weder in der »Dualform«, noch in einer Form mit weniger Quantoren ausgedrückt werden kann.

7. In den Vorangehenden konnte man sehen, welcher reichhaltiger Kreis der Probleme von den arithmetischen Beziehungen umfasst wird. Es wäre eine sehr grosse Sache, wenn man ein allgemeines Verfahren zur Entscheidung sämtlicher arithmetischer Probleme angeben könnte. Es ist nicht überraschend, dass sich ein solches Verfahren nicht effektiv angeben lässt, wenn die »Effektivität« mit dem Begriff der allgemein-rekursiven Funktion präzisiert wird; aber es ist doch schön, dass diese Tatsache bewiesen werden kann.⁷⁸

Es soll hier der Beweis, auf Formeln mit einer freien Variablen beschränkt, geschildert werden.

⁷⁷) KLEENE [5] I. Nr. 5.

⁷⁸) SKOLEM [4].

Um den zu beweisenden Satz exakt formulieren zu können, werden den arithmetischen Formeln Zahlen zugeordnet. Das kann mit der bekannten GÖDELSchen Wörterbuch-Konstruktion geschehen, da die arithmetischen Aussagen aus den Zahlen, aus einer Folge x_1, x_2, \dots von Variablen, und aus anderen Zeichen von endlicher Anzahl (+, ·, =, Komma, Klammern, logische Zeichen) aufgebaut werden. Jetzt beschränken wir uns auf Formeln, die von einer (freien) Variablen abhängen; und es soll eine solche Formel mit der Gödel-Nummer x kurz $C_x(y)$ genannt werden.

Gebe es nun ein effektives Verfahren zum Entscheiden, für welche x und y die Aussage $C_x(y)$ wahr ist, so gebe es nach der schon mehrfach verwendeten Annahme eine allgemein-rekursive charakteristische Funktion $\varphi(x, y)$, welche an einer beliebigen Stelle (x, y) den Wert 1 oder 0 annimmt, je nachdem x die Gödel-Nummer einer solchen einstelligen arithmetischen Formel ist, welche an der Stelle y wahr ist (das heisst, falls $C_x(y)$ wahr ist), oder nicht. Dann wäre aber mit $\varphi(x, y)$ auch $\varphi(x, x)$ allgemein-rekursiv, und so wäre nach Nr. 5 dieses Kapitels die Beziehung mit einer freien Variablen

$$\varphi(x, x) = 0$$

arithmetisch. Wäre die Gödel-Nummer ihrer arithmetischen Form k , das heisst wäre eben $C_k(x)$ diese arithmetische Formel, so würde sich daraus für $x = k$ ergeben, dass $\varphi(k, k)$ dann und nur dann gleich 0 ist, wenn $C_k(k)$ wahr ist. $\varphi(x, y)$ wurde aber nach Annahme folgendermassen definiert:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ die Gödel-Nummer einer einstelligen arithmetischen Formel, und } C_x(y) \text{ wahr ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Und daraus ergibt sich für $x = y = k$, da k die Gödel-Nummer einer einstelligen arithmetischen Formel ist,

$$\varphi(k, k) = \begin{cases} 1, & \text{falls } C_k(k) \text{ wahr ist} \\ 0, & \text{« } C_k(k) \text{ nicht wahr ist,} \end{cases}$$

also, dass $\varphi(k, k)$ eben dann und nur dann gleich 0 ist, wenn $C_k(k)$ nicht wahr ist.

So hat sich ein Widerspruch ergeben; daher kann ein allgemeines effektives Verfahren zur Entscheidung der arithmetischen Probleme mit einer freien Variablen tatsächlich nicht angegeben werden.

§ 24. AUSDEHNUNG DES BEGRIFFES DER REKURSIVITÄT. ANWENDUNGEN AUF DIE ANALYSIS.

1. Als eine Anwendung des präzisierten Effektivitätsbegriffes bietet sich zu untersuchen, ob die mit natürlichen Zahlen formulierbaren Aussagen der Analysis eine effektive Geltung haben. Dazu muss aber der Begriff der Rekursivität erweitert werden.

In der Analysis wird z. B. oft behauptet: »Es gibt zu einer positiven »Fehlerschranke« ε eine solche »Schwellenzahl« N , dass ein gewisser von n abhängiger Wert für $n \geq N$ kleiner als ε ist«. Hier handelt es sich um die Angabe von N als Funktion von ε . Statt eines beliebigen positiven, reellen ε kann $\frac{1}{m}$

oder $\frac{1}{2^m}$ mit beliebigem positivem, ganzem m genommen werden; und dann lautet die effektive Formulierung des mit Anführungszeichen bezeichneten Satzes:⁷⁹⁾ »Es gibt eine allgemein-rekursive Funktion $\nu(m)$, so dass der betreffende Wert für $n \geq \nu(m)$ kleiner als $\frac{1}{m}$ (oder $\frac{1}{2^m}$) ist«. (Man spricht von primitiv-rekursiver Formulierung, wenn hier die Existenz einer primitiv-rekursiven Funktion $\nu(m)$ verlangt wird.)

Aussagen dieser Art beziehen sich z. B. auf die Konvergenz der Folgen von Rationalzahlen. In einer Folge

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

von Rationalzahlen ist das n -te Glied a_n eine Funktion des Index, welcher nur nicht-negative ganze Zahlen annimmt; die Werte dieser Funktion sind aber Rationalzahlen. Eine beliebige (positive oder negative) ganze Zahl kann als $a - b$, und so eine beliebige positive oder negative Rationalzahl als

$$\frac{a - b}{c}$$

geschrieben werden, wo a, b und c nicht-negative ganze Zahlen sind, und $c \geq 1$ ist. Es liegt an der Hand den Begriff der Rekursivität so auszudehnen, dass eine Folge von Rationalzahlen

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

(primitiv- oder allgemein-)rekursiv genannt wird, wenn es solche (primitiv- oder allgemein-)rekursive Funktionen $\alpha(n), \beta(n)$ und $\gamma(n)$ gibt, für welche

$$\gamma(n) \geq 1 \quad \text{und} \quad a_n = \frac{\alpha(n) - \beta(n)}{\gamma(n)}$$

gilt.

Und eine reelle Zahl r soll (primitiv- oder allgemein-)rekursiv heissen, wenn es eine entsprechend rekursive Folge von Rationalzahlen gibt, welche entsprechend rekursiv gegen sie konvergiert. Das heisst genauer gefasst, wenn es eine solche entsprechend rekursive Folge a_n von Rationalzahlen, und eine solche entsprechend rekursive Funktion $\nu(m)$ gibt, dass für $m > 0$ und $n, n^* \geq \nu(m)$

$$|a_n - a_{n^*}| < \frac{1}{m}$$

gilt. Die Form $\frac{1}{m}$ der Fehlerschranke ist freilich unwesentlich; sind die Bedingungen erfüllt, so ist z. B. auch $\nu(2^m)$ entsprechend rekursiv, und für $n, n^* \geq \nu(2^m)$ gilt

$$|a_n - a_{n^*}| < \frac{1}{2^m}$$

2. Man kann nun beweisen,⁸⁰⁾ dass es eine monotone, beschränkte, primitiv-rekursive Folge von Rationalzahlen gibt, welche nicht effektiv konvergent ist:

⁷⁹⁾ SPECKER [1] Definitionen.

⁸⁰⁾ SPECKER [1] Satz I.

genauer, bei welcher die zur Fehlergrenze $\frac{1}{2^m}$ gehörige Schwellenzahl nicht als eine allgemein-rekursive Funktion von m angegeben werden kann.

In Nr. 1 des § 19 haben wir ein Beispiel für eine solche primitiv-rekursive Funktion $\varrho(m, n)$ gesehen (die Variablen anders bezeichnet war $\tau(m, m, n)$ eine solche Funktion), für welche

$$\mu_x [\varrho(m, x) = 0]$$

nicht allgemein-rekursiv ist. Sei

$$\psi(m, n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } (x)[x \leq n \rightarrow \varrho(m, x) \neq 0] \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ψ ist primitiv-rekursiv. Man sieht auch ihre Monotonität in n :

$$\psi(m, n+1) \geq \psi(m, n)$$

leicht ein. Denn ist $\psi(m, n) = 0$, so kann $\psi(m+1, n)$ nicht kleiner sein; und ist $\psi(m, n) = 1$, das heisst gibt es ein $x \leq n$, für welches $\varrho(m, x) = 0$ gilt, so ist dieses x freilich auch nicht grösser als $n+1$, daher gibt es ein $x \leq n+1$, für welches $\varrho(m, x) = 0$ gilt, und so muss auch $\psi(m, n+1)$ den Wert 1 haben.

Mit Benutzung dieser Funktion ψ soll die primitiv-rekursive Folge von Rationalzahlen

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{\psi(k, n)}{2^k}$$

definiert werden. Die Glieder der Summe sind nicht-negativ, und nehmen nie ab; so ist die Folge der a_n eine nie abnehmende Folge. Und sie ist auch beschränkt; denn ψ nimmt bloss die Werte 0 und 1 an, also ist

$$a_n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Man kann nun beweisen, dass diese monoton nicht-abnehmende, von oben beschränkte Folge nicht effektiv konvergiert.

3. Denn nehmen wir an, dass die Folge a_n effektiv konvergent wäre; das heisst, dass es eine allgemein-rekursive Funktion $\nu(m)$ gebe, dass für $n, n^* \geq \nu(m)$

$$|a_n - a_{n^*}| < \frac{1}{2^m}$$

gilt. Es kann angenommen werden, dass hier

$$\nu(m) \geq m$$

ist (denn ist eine allgemein-rekursive Funktion so beschaffen, dass für $n, n^* \geq \nu(m)$

$$|a_n - a_{n^*}| < \frac{1}{2^m}$$

gilt, so ist auch $\nu(m) = \nu'(m) + m$ allgemein-rekursiv und $\nu(m) \geq m$; ferner gilt wegen $\nu(m) \geq \nu'(m)$ auch für $n, n^* \geq \nu(m)$

$$|a_n - a_{n^*}| < \frac{1}{2^m} .)$$

Für n^* kann auch $\nu(m)$ gewählt werden. So gilt nach der Annahme für $n \geq \nu(m)$

$$|a_n - a_{\nu(m)}| = \sum_{k=0}^n \frac{\psi(k, n)}{2^k} - \sum_{k=0}^{\nu(m)} \frac{\psi(k, \nu(m))}{2^k} < \frac{1}{2^m} .$$

Die Ungleichheit besteht um so mehr, wenn die linke Seite dadurch vermindert wird, dass man die Summation auch im Minuend bloss bis $\nu(m)$ führt:

$$\sum_{k=0}^{\nu(m)} \frac{\psi(k, n) - \psi(k, \nu(m))}{2^k} < \frac{1}{2^m} .$$

Da $\psi(m, n)$ eine monoton nicht-abnehmende Funktion von n , und $n \geq \nu(m)$ ist, sind alle Glieder der Summe nicht-negativ. Da $\nu(m) > m$ ist, tritt unter ihnen auch

$$\frac{\psi(m, n) - \psi(m, \nu(m))}{2^m}$$

auf. Hier ist der Zähler nicht-negativ; daher kann die Summe nur so kleiner als $\frac{1}{2^m}$ sein, wenn dieser Zähler 0, das heisst

$$\psi(m, n) = \psi(m, \nu(m))$$

ist. Das muss also für jedes $n \geq \nu(m)$ stimmen, wenn a_n eine effektiv-konvergente Folge ist.

So hat es sich herausgestellt, dass falls a_n effektiv konvergiert, zu einem beliebig gegebenen m eine solche bestimmte Zahl n gehört (nämlich $n = \nu(m)$), dass von hier an die Werte von $\psi(m, n)$ für alle n übereinstimmen. Also, wie immer auch m gewählt wird, es genügt das dazu gehörige kleinste n , für welches $\psi(m, n) = 1$ gilt, zwischen den Zahlen bis $\nu(m)$ zu suchen. Aber nach der (in der vorigen Nummer angegebenen) Definition von ψ wird der Wert $\psi(m, n)$ bei beliebigem m für jenes n zuerst gleich 0, für welches der Wert von $\varrho(m, n)$ zuerst gleich 0 wird. So genügt es auch das kleinste x , für welches $\varrho(m, x) = 0$ gilt, zwischen den Zahlen x bis $\nu(m)$ zu suchen:

$$\mu_x [\varrho(m, x) = 0] = \mu_x [x \leq \nu(m) \ \& \ \varrho(m, x) = 0] .$$

Die Funktion auf der rechten Seite ist aber eine allgemein-rekursive Funktion $\varphi(m)$ von m ; man erhält ja ein Gleichungssystem, welches ihre Werte eindeutig liefert, wenn man zu den Definitionsgleichungen, die im Aufbau der allgemein-rekursiven Funktion $\nu(m)$ und der primitiv-rekursiven Funktion

$$\mu(m, a) = \mu_x [x \leq a \ \& \ \varrho(m, x) = 0]$$

teilnehmen, die Gleichung

$$\varphi(m) = \mu(m, \nu(m))$$

hinzunimmt.

Daher hat sich

$$\mu_x [\varrho(m, x) = 0]$$

als identisch mit der allgemein-rekursiven Funktion $\varphi(m)$ erwiesen; obwohl wir von einer solchen Funktion $\varrho(m, n)$ ausgegangen sind, für welche $\mu_x [\varrho(m, x) = 0]$ nicht allgemein-rekursiv ist.

Daher führt die Annahme, dass die primitiv-rekursive, monotone, beschränkte Folge a_n effektiv konvergiert, zu einem Widerspruch.

Man kann sogar beweisen,⁸¹ dass es eine primitiv-rekursive, monotone, beschränkte Folge von Rationalzahlen a_n gibt, gegen deren (jedenfalls existierenden) Grenzwert nicht nur die Folge a_n selber nicht effektiv konvergiert, sondern gar keine allgemein-rekursive Folge von Rationalzahlen; so dass der Grenzwert der betreffenden Folge a_n keine allgemein-rekursive reelle Zahl sein kann.

4. Befassen wir uns noch ein bisschen mit dem Begriff der primitiv-rekursiven reellen Zahl. (In den Folgenden wird kein anderer Rekursionsbegriff als die primitive Rekursivität vorkommen; so werde ich statt »primitiv-rekursiv« kurz nur »rekursiv« sagen.)

Man kann daraus, dass eine reelle Zahl r rekursiv ist, das heisst, dass es eine rekursive Folge von Rationalzahlen gibt, welche rekursiv gegen sie konvergiert, nicht einmal darauf schliessen, dass sie sich in einen rekursiven Dezimalbruch entwickeln lässt, das heisst dass es eine rekursive Funktion $\psi(n)$ mit $\psi(n) \leq 9$ und

$$r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(k)}{10^k}$$

gibt. Es ist auch ein Gegenbeispiel dafür bekannt.⁸²

Aber daraus, dass eine gewisse spezielle rekursive Folge von Rationalzahlen rekursiv gegen r konvergiert, folgt die Rekursivität einer ganzen Schar von Entwicklungen der Zahl r ; so z. B. auch der Entwicklung von r in einem beliebigen Zahlensystem.⁸³ Diese spezielle Folge ist die in den Folgenden zu behandelnde Fakultätenentwicklung von r .

Beschränken wir uns in den Folgenden auf positive, irrationale r unter 1 (jede andere Irrationalzahl ist die Summe einer solchen und einer ganzen Zahl). Ich habe bereits in Nr. 1 des § 11 benutzt, dass ein jedes solche r in eine Reihe der Form

$$r = \frac{a_1}{1!} + \frac{a_2}{2!} + \dots + \frac{a_n}{n!} + \dots$$

entwickelt werden kann, wo die Koeffizienten nicht-negative ganze Zahlen sind, für alle n

$$a_n \leq n - 1,$$

und für gewisse n über alle Grenzen

$$a_n < n - 1$$

gilt. Diese Reihe konvergiert immer rekursiv gegen r , denn die Restsumme nach der Teilsumme

⁸¹) SPECKER [1] Satz IV.

⁸²) SPECKER [1] Satz II.

⁸³) PÉTER [10] Nr. 2.

$$S_n = \frac{a_1}{1!} + \dots + \frac{a_n}{n!}$$

ist (wie es sich auch in Nr. 2 des § 11 ergeben hat), kleiner als $\frac{1}{n!}$, und so ist bei der Wahl $\nu(m) = m$ der Schwellenzahl, für $n, n^* \geq m (> 0)$

$$|S_n - S_{n^*}| < \frac{1}{(\min(n, n^*))!} \leq \frac{1}{m}.$$

Ist nun der Koeffizient a_n eine rekursive Funktion von n — in diesem Fall sage ich, dass r eine rekursive Faktoriellenentwicklung besitzt — so bestimmt r einen rekursiven Schnitt⁸⁴ in folgendem Sinn: dass eine Rationalzahl rechts von r liegt, das heisst dass

$$\frac{m}{n+1} > r$$

ist, ist eine rekursive Beziehung zwischen m und n .

$$\frac{m}{n+1} > r, \text{ das heisst } m > (n+1)r$$

ist ja gleichbedeutend damit, dass m wenigstens um 1 grösser ist als die in $(n+1)r$ enthaltene grösste ganze Zahl:

$$m \geq [(n+1)r] + 1.$$

Aus der Rekursivität der Faktoriellenentwicklung von r folgt aber nach Nr. 2 des § 11, dass $[rn]$ eine rekursive Funktion ist; und so ist diese Beziehung tatsächlich rekursiv.

5. Nun folgt aber daraus, dass r einen rekursiven Schnitt bestimmt, die Rekursivität der verschiedensten Entwicklungen von r .

Sei

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

eine beliebige solche Folge von positiven ganzen Zahlen, worin

$$b_n \geq 2 \quad \text{für} \quad n > 1$$

und b_n eine rekursive Funktion von n ist. Dann kann unser r in eine Reihe der Form

$$r = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_1 b_2 \dots b_n} + \dots$$

entwickelt werden, wo a_n rekursiv, und für alle n

$$a_n \leq b_n - 1$$

ist.

Erstens gibt es unter b_1 sicher ein x , für welches

$$\frac{x+1}{b_1} > r$$

gilt, denn für $x = b_1 - 1$ ist

$$\frac{x+1}{b_1} = \frac{b_1}{b_1} = 1 > r.$$

Sei

⁸⁴) Dieser Begriff stammt von SPECKER [1].

$$(1) \quad a_1 = \mu_x \left[x < b_1 \div 1 \ \& \ \frac{x+1}{b_1} > r \right].$$

Jetzt nehmen wir an, dass wir uns für $i = 1, 2, \dots, n+1$ bereits davon überzeugt haben, dass es unter b_i ein x gibt, für welches

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \dots + \frac{a_{i-1}}{b_1 b_2 \dots b_{i-1}} + \frac{x+1}{b_1 b_2 \dots b_i} > r$$

gilt, wobei die Koeffizienten a_i immer durch

$$a_i = \mu_x \left[x \leq b_i \div 1 \ \& \ \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \dots + \frac{a_{i-1}}{b_1 b_2 \dots b_{i-1}} + \frac{x+1}{b_1 b_2 \dots b_i} > r \right]$$

bestimmt wurden, und a_i auch noch für $i = n+1$ so bestimmt wird. Dann gibt es unter b_{n+2} ein solches x , dass

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \dots + \frac{a_{n+1}}{b_1 b_2 \dots b_{n+1}} + \frac{x+1}{b_1 b_2 \dots b_{n+2}} > r$$

gilt; denn wäre auch noch für $x = b_{n+2} - 1$

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \dots + \frac{a_{n+1}}{b_1 b_2 \dots b_{n+1}} + \frac{b_{n+2}}{b_1 b_2 \dots b_{n+2}} \leq r,$$

so wäre wegen

$$\frac{b_{n+2}}{b_1 b_2 \dots b_{n+2}} = \frac{1}{b_1 b_2 \dots b_{n+1}}$$

auch

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \dots + \frac{a_{n+1} + 1}{b_1 b_2 \dots b_{n+1}}$$

nicht grösser als r ; das widerspricht aber der Definition von a_{n+1} . Sei nun

$$(2) \quad a_{n+2} = \mu_x \left[x \leq b_{n+2} \div 1 \ \& \ \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \dots + \frac{a_{n+1}}{b_1 b_2 \dots b_{n+1}} + \frac{x+1}{b_1 b_2 \dots b_{n+2}} > r \right].$$

Da

$$\frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_{n+1}}{b_1 \dots b_{n+1}} + \frac{x+1}{b_1 \dots b_{n+2}} = \frac{a_1 b_2 \dots b_{n+2} + \dots + a_{n+1} b_{n+2} + x+1}{(b_1 \dots b_{n+2} \div 1) + 1},$$

und $\frac{u}{v+1} > r$ nach Annahme für alle u und v eine primitiv-rekursive Beziehung zwischen u und v ist, so haben wir in (1) und (2) eine solche Wertverlaufsrekursion erhalten, welche a_{n+1} als eine primitiv-rekursive Funktion definiert.

Wird mit den für $n = 0, 1, 2, \dots$ angenommenen Werten a_1, a_2, a_3, \dots dieser Funktion die Reihe

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \frac{a_3}{b_1 b_2 b_3} + \dots$$

aufgeschrieben, so ergeben die Teilsummen s_n dieser Reihe eine solche rekursive Folge von Rationalzahlen, welche rekursiv konvergiert. Denn ist zum Beispiel $n^* > n$, so ist

$$\begin{aligned} s_{n^*} - s_n &= \frac{a_{n+1}}{b_1 \dots b_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{b_1 \dots b_{n+2}} + \frac{a_{n+3}}{b_1 \dots b_{n+3}} + \dots \leq \\ &\leq \frac{b_{n+1} - 1}{b_1 \dots b_{n+1}} + \frac{b_{n+2} - 1}{b_1 \dots b_{n+2}} + \frac{b_{n+3} - 1}{b_1 \dots b_{n+3}} + \dots + \frac{b_{n^*} - 1}{b_1 \dots b_{n^*}} = \\ &= \frac{1}{b_1 \dots b_n} - \frac{1}{b_1 \dots b_{n+1}} + \frac{1}{b_1 \dots b_{n+1}} - \frac{1}{b_1 \dots b_{n+2}} + \frac{1}{b_1 \dots b_{n+2}} - \\ &- \frac{1}{b_1 \dots b_{n+3}} + \dots + \frac{1}{b_1 \dots b_{n^*-1}} - \frac{1}{b_1 \dots b_{n^*}} = \frac{1}{b_1 \dots b_n} - \frac{1}{b_1 \dots b_{n^*}} < \\ &< \frac{1}{b_1 \dots b_n}, \end{aligned}$$

wird daher zu rekursiver Schwelle $\nu(m) = m + 2$ gewählt, so ist, da $b_n \geq 2$ für $n > 1$ ist, für $n, n^* \geq m + 2$

$$|s_n - s_{n^*}| < \frac{1}{b_1 \dots b_{\min(n, n^*)}} \leq \frac{1}{b_1 \dots b_{m+2}} \leq \frac{1}{2^{m+1}} < \frac{1}{2^m}.$$

Ferner ist aus der Definition der Koeffizienten a_n klar, dass für alle n

$$\frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_{n+1}}{b_1 \dots b_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{b_1 \dots b_{n+2}} \leq r < \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_{n+1}}{b_1 \dots b_{n+1}} + \frac{a_{n+2} + 1}{b_1 \dots b_{n+2}}$$

gilt, und daher konvergiert diese Reihe wegen

$$\frac{1}{b_1 \dots b_{n+2}} \rightarrow 0$$

gegen r .

6. Unter diese Entwicklungen gehören auch die Entwicklungen von r in einem beliebigen Zahlensystem. Gilt z. B. für alle $n > 0$

$$b_n = 10 \quad \text{und so} \quad a_n \leq 9,$$

so handelt es sich um die Dezimalentwicklung von r .

Aber auch die Faktoriellenentwicklung ist ein Spezialfall der erhaltenen allgemeinen Entwicklung; nämlich jener Fall, wobei für alle $n > 0$

$$b_n = n \quad \text{und so} \quad a_n \leq n - 1$$

ist. So folgt daraus, dass die Zahl r einen rekursiven Schnitt bestimmt, die Existenz einer rekursiven Faktoriellenentwicklung von r .

So hat es sich herausgestellt, dass die positive, irrationale Zahl r dann und nur dann einen rekursiven Schnitt bestimmt, wenn in der Faktoriellenentwicklung von r der Koeffizient a_n eine rekursive Funktion von n ist; das ist aber nach Nr. 2 des § 11 mit der Rekursivität von

$$[rn]$$

gleichbedeutend. (Die Hinzunahme einer ganzen Zahl zu r ändert weder an der Rekursivität von $[rn]$, noch an der Bestimmung eines rekursiven Schnittes durch r ; so konnte das Ergebnis ohne die Beschränkung $r < 1$ ausgesagt werden.)

Da für ein positives rationales r die Funktion $[rn]$ immer rekursiv ist, und nach Nr. 4 dieses Kapitels die Behauptung, dass r einen rekursiven Schnitt bestimmt, mit der Rekursivität der Beziehung

$$m \geq [(n+1)r + 1]$$

gleichbedeutend ist: bestimmt ein positives rationales r immer einen rekursiven Schnitt (also gilt auch für ein positives rationales r , dass es dann und nur dann einen rekursiven Schnitt bestimmt, wenn $[nr]$ rekursiv ist).

7. In den Vorangehenden wurden die Fälle eines rationalen und eines irrationalen r getrennt behandelt; wir sahen ja in Nr. 10 des § 21, dass hier eine solche Vorsicht am Platz sein kann. Dass hier die Entscheidbarkeit der Irrationalität von r eine wichtige Rolle spielt, erhellt sich auch von den Folgenden.

Sei r eine rekursive positive reelle Zahl, das heisst es soll eine rekursive Folge von positiven Rationalzahlen a_n rekursiv gegen r konvergieren; genauer, sei $\nu_1(m)$ eine solche rekursive Funktion, dass für $m > 0$ und $n, n^* \geq \nu_1(m)$

$$|a_n - a_{n^*}| < \frac{1}{m}$$

gelten soll.

Dieses r ist dann und nur dann irrational, wenn es zu einem jeden positiven Bruch $\frac{p}{q}$ ein $k > 0$ und ein N gibt, so dass für $n \geq N$ die Entfernung

eines jeden a_n von $\frac{p}{q}$ grösser als k ist. Wenn das nun in einem solchen effektiven

Sinn besteht, dass es solche rekursive Funktionen $\kappa(p, q) > 0$ und $\nu_2(p, q)$ gibt, dass für alle positiven ganzen p und q aus $n \geq \nu_2(p, q)$

$$\left| a_n - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{\kappa(p, q)}$$

folgt, wenn also die rekursiv-reelle Zahl r eine in diesem Sinne »rekursiv-irrationale« Zahl ist: dann werde ich zeigen, dass

$$[rm]$$

eine rekursive Funktion ist, und daher r einen rekursiven Schnitt bestimmt⁸⁵ (und so ihre üblichen Entwicklungen rekursiv sind).

Nehmen wir an, dass die Bedingungen erfüllt sind; und es sei $m > 0$, ferner

$$[m \cdot a_{\nu_1(2m)}] = \gamma_m.$$

γ_m ist freilich eine rekursive Funktion von m . Trennen wir die beiden Fälle, wobei

$$(1) \quad 0 \leq m \cdot a_{\nu_1(2m)} - \gamma_m \leq \frac{1}{2}$$

und wobei

$$(2) \quad m a_{\nu_1(2m)} - \gamma_m > \frac{1}{2} \quad \text{das heisst} \quad 0 < \gamma_m + 1 - m \cdot a_{\nu_1(2m)} < \frac{1}{2}$$

gilt.

⁸⁵) PÉTER [10] Nr. 5—6—7.

Im Fall (1) ergibt sich nach der Annahme, wenn $v_1(2m)$ für n^* gewählt wird, für $n \geq v_1(2m)$

$$\left| a_n - a_{v_1(2m)} \right| < \frac{1}{2m}, \text{ also } \left| ma_n - ma_{v_1(2m)} \right| < \frac{1}{2}.$$

Das ergibt samt (1), dass

$$\left| ma_n - \gamma_m \right| < 1$$

ist. Andererseits gilt nach der Annahme für $n \geq v_2(\gamma_m, m)$

$$\left| a_n - \frac{\gamma_m}{m} \right| > \frac{1}{\varkappa(\gamma_m, m)}, \text{ also } \left| ma_n - \gamma_m \right| > \frac{m}{\varkappa(\gamma_m, m)},$$

und das kann wegen der vorigen Ungleichung nur so gelten, falls

$$k_m = \frac{m}{\varkappa(\gamma_m, m)} < 1$$

ist. Ist daher

$$n \geq \max(v_1(2m), v_2(\gamma_m, m)),$$

so gilt

$$k_m < \left| ma_n - \gamma_m \right| < 1,$$

und so fällt $m \cdot a_n$ für solche n in eines der offenen Intervalle

$$(\gamma_m - 1, \gamma_m - k_m), \quad (\gamma_m + k_m, \gamma_m + 1)$$

(ins erste, wenn $ma_n < \gamma_m$, ins zweite, wenn $ma_n > \gamma_m$ ist). Die Entfernung des Endpunktes $\gamma_m - k_m$ des ersten Intervalls vom Anfangspunkt $\gamma_m + k_m$ des zweiten Intervalls beträgt $2k_m$. Für genügend grosses n unterscheiden sich die Glieder der Folge ma_n um weniger: ist $n, n^* \geq v_1(\varkappa(\gamma_m, m))$, so ist

$$\left| a_n - a_{n^*} \right| < \frac{1}{\varkappa(\gamma_m, m)}, \text{ also } \left| ma_n - ma_{n^*} \right| < \frac{m}{\varkappa(\gamma_m, m)} = k_m.$$

Für so grosse Indizes können daher die Glieder der Folge $m \cdot a_n$ nur in eines der vorhin aufgeschriebenen Intervalle fallen: ist

$$v_0(m) = \max(v_1(2m), v_2(\gamma_m, m), v_1(\varkappa(\gamma_m, m))),$$

so gilt entweder für alle $n \geq v_0(m)$

$$\gamma_m + k_m < m \cdot a_n < \gamma_m + 1,$$

woraus

$$\gamma_m < ma_n < \gamma_m + 1, \text{ also } [ma_n] = \gamma_m$$

folgt; oder gilt für alle $n \geq v_0(m)$

$$\gamma_m - 1 < m \cdot a_n < \gamma_m - k_m,$$

und folglich

$$\gamma_m - 1 < ma_n < \gamma_m, \text{ also } [ma_n] = \gamma_m - 1.$$

Daher ist für $n \geq v_0(m)$ der Wert von $[ma_n]$ jedenfalls unabhängig von n , das heisst stets derselbe, wie der zum Index $n = v_0(m)$ gehörige Wert: für $n \geq v_0(m)$ ist

$$[ma_n] = [ma_{v_0(m)}].$$

Diese Folgerungen können genau so auch im Fall (2) durchgeführt werden, wenn nur für γ_m überall $\gamma_m + 1$ gesetzt wird; und das führt zum Ergebnis, dass mit einer bestimmten rekursiven Funktion $\nu_0'(m)$, für $n \geq \nu_0'(m)$

$$[ma_n] = [ma_{\nu_0'(m)}]$$

gilt. Wird daher

$$\nu(m) = \max(\nu_0(m), \nu_0'(m))$$

gesetzt, so ist der Wert von $[ma_n]$ für $n \geq \nu(m)$ in beiden Fällen unabhängig von n , und so gilt für $n \geq \nu(m)$

$$[ma_n] = [ma_{\nu(m)}].$$

Daraus folgt aber, dass auch

$$[mr] = [ma_{\nu(m)}]$$

gilt. Es konvergiert ja ma_n gegen mr , und nach unserem Ergebnis ist für $n \geq \nu(m)$

$$ma_n = [ma_n] + r_{mn} = [ma_{\nu(m)}] + r_{mn},$$

wo

$$0 \leq r_{mn} < 1$$

ist. So fällt der Grenzwert mr der Folge ma_n zwischen folgende Schranken:

$$[ma_{\nu(m)}] \leq mr \leq [ma_{\nu(m)}] + 1;$$

eine Gleichheit kann hier aber nicht bestehen, da das irrationale mr keiner ganzen Zahl gleich sein kann. Also ist in der Tat

$$[mr] = [ma_{\nu(m)}],$$

und da $[ma_{\nu(m)}]$ rekursiv ist, so ist tatsächlich auch $[mr]$ rekursiv.

8. Das in der vorigen Nummer angewandte Beweisverfahren ist eine Modifizierung eines Beweisverfahrens von GOODSTEIN, wodurch eine gewisse »strenge« Konvergenz der Entwicklungen in Zahlensystemen der Exponentialreihe

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

für rationale x bewiesen wurde.⁸⁶ Mit der hier angewandten Modifikation des Beweises kann auch die strenge Konvergenz im Sinn von GOODSTEIN jener allgemeinen Entwicklung von e^x gezeigt werden, die in Nr. 5 dieses Kapitels behandelt wurde.

SPECKER hat — teils von gewissen Untersuchungen von GOODSTEIN⁸⁷ angeregt — auch die Begriffe der »rekursiven reellen Funktion« und der »rekursiven Intervallenschachtelung« eingeführt, und die rekursive Erfassbarkeit der mit diesen Begriffen zusammenhängenden Sätze der Analysis untersucht.⁸⁸ Auf diesem Gebiete sind aber die Untersuchungen nur kürzlich in Gang gekommen: es gibt hier noch vieles zu erforschen.

⁸⁶) GOODSTEIN [3].

⁸⁷) GOODSTEIN [2].

⁸⁸) SPECKER [1] Satz V. und VI.

LITERATUR.

- W. Ackermann** [1] *Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen.* Math. Annalen 99 (1928) S. 118—133.
 [2] *Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie.* Math. Annalen 117 (1940) S. 162—194.
- P. Bernays** [1] *Quelques points essentiels de la métamathématique.* L'Enseignement Mathématique 34 (1935) S. 70—95.
- A. Church** [1] *A set of postulates for the foundation of logic.* Annals of Mathematics 33 (1932) S. 346—366.
 [2] *An unsolvable problem of elementary number theory.* American Journal of Math. 58 (1936) S. 345—363.
 [3] *A note on the Entscheidungsproblem.* The Journ. of Symb. Log. 1 (1936) S. 40—41. Correction S. 101.
 [4] *The constructive second number class.* Bulletin of the Am. Math. Soc. 44 (1938) S. 224—232.
 [5] *On the concept of a random sequence.* Bulletin of the Am. Math. Soc. 46 (1940) S. 130—135.
- A. Church and S. C. Kleene** [1] *Formal definitions in the theory of ordinal numbers.* Fundamenta Mathematicae 28 (1936) S. 11—21.
- P. Csillag** † [1] *Eine Bemerkung zur Auflösung der eingeschachtelten Rekursion.* Acta Scient. Math. Szeged 11 (1947) S. 169—173.
- H. B. Curry** [1] *A formalisation of recursive arithmetic.* American Journal of Math. 63 (1941) S. 263—282.
 [2] *The paradox of Kleene and Rosser.* Transactions of the Am. Math. Soc. 50 (1941) S. 454—516.
- R. Dedekind** [1] *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig 1888, 1893, 1911, 1930; auch in *Gesammelte Werke* 3 (Braunschweig 1932) S. 335—391.
- R. L. Goodstein** [1] *On the restricted ordinal theorem.* The Journ. of Symb. Log. 9 (1944) S. 33—41.
 [2] *Function theory in an axiom-free equation calculus.* Proceedings of the London Math. Soc. (2) 48 (1945) S. 401—434.
 [3] *The strong convergence of the exponential function.* Journal of the London Math. Soc. 22 (1947) S. 200—205.
 [4] *Transfinite ordinals in recursive number theory.* The Journ. of Symb. Log. 12 (1947) S. 123—129.
- K. Gödel** [1] *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I.* Monatshefte für Math. und Phys. 38 (1931) S. 173—198.
 [2] *On undecidable propositions of formal mathematical systems.* Notes of lectures at the Institute for Advanced Study, 1934.
- M. Hall Jr.** [1] *The word problem for semigroups with two generators.* The Journ. of Symb. Log. 14 (1949) S. 115—118.
- J. Herbrand** † [1] *Sur la non-contradiction de l'arithmétique.* Journal für die reine und angewandte Math. 166 (1932) S. 1—8.
- D. Hilbert** [1] *Über das Unendliche.* Math. Annalen 95 (1926) S. 161—190.
- D. Hilbert und P. Bernays** [1] *Grundlagen der Mathematik.* Berlin 1934—39.
- L. Kalmár** [1] *On the possibility of definition by recursion.* Acta Scient. Math. Szeged 9 (1940) S. 227—232.
 [2] *Egyszerű példa eldönthetetlen aritmetikai problémára* (ungarisch, mit deutschem Auszug: *Ein einfaches Beispiel für ein unentscheidbares arithmetisches Problem*). Matematikai és Fizikai Lapok 50 (1943) S. 1—23.
 [3] *On unsolvable mathematical problems.* Proceedings of the tenth International Congress of Philosophy Amsterdam 1948. I. Band S. 534—536.

- S. C. Kleene** [1] *General recursive functions of natural numbers*. Math. Annalen 112 (1936) S. 727—742.
 [2] *λ -definability and recursiveness*. Duke Math. Journal 2 (1936) S. 340—353.
 [3] *A note on recursive functions*. Bulletin of the Am. Math. Soc. (1936) S. 544—546.
 [4] *On notation for ordinal numbers*. The Journ. of Symb. Log. 3 (1938) S. 150—155.
 [5] *Recursive predicates and quantifiers*. Transactions of the Am. Math. Soc. 53 (1943) S. 41—73.
 [6] *On the forms of the predicates in the theory of constructive ordinals*. American Journal of Math. 66 (1944) S. 41—58.
 [7] *On the interpretation of intuitionistic number theory*. The Journ. of Symb. Log. 10 (1945) S. 109—123.
 [8] *On the intuitionistic logic*. Proceedings of the tenth International Congress of Philosophy Amsterdam 1948. I. Band S. 185—187. Im II. Band auf S. 741—743 wurde eine demnächst erscheinende grössere Arbeit über dieses Thema angekündigt.
- A. V. Kuzn'ecov** [1] о примитивно рекурсивных функциях большого размаха (*Über umfangsreiche primitiv-rekursive Funktionen.*) Доклады Академии Наук СССР 71 (1950) S. 233—236.
- E. Landau** [1] *Grundlagen der Analysis*. Leipzig (1930).
- P. Lorenzen** [1] *Die Definition durch vollständige Induktion*. Monatshefte für Math. und Phys. 47 (1938—39) S. 356—358.
- A. Markov** [1] невозможность некоторых алгоритмов в теории ассоциативных систем (*Die Unmöglichkeit gewisser Algorithmen in der Theorie assoziativer Systeme*). Доклады Академии Наук СССР 55 (1947) S. 587—590 ; II. Teil ebenda 58 (1947) S. 353—356.
 [2] о некоторых неразрешимых проблемах касающихся матриц (*Über die Unlösbarkeit gewisser Probleme für Matrices.*) Доклады Академии Наук СССР 57 (1947) S. 539—542.
 [3] о представлении рекурсивных функций (*Über die Darstellung rekursiver Funktionen.*) Доклады Академии Наук СССР 58 (1947) S. 1891—92.
 [4] о представлении рекурсивных функций (*Über die Darstellung rekursiver Funktionen.*) Известия Академии Наук СССР Серия Mat. 13 (1949) 417—424.
- A. Mostowski** [1] *On definable sets of positiv integers*. Fundamenta Mathematicae 34 (1946) S. 81—112.
 [2] *On a set of integers not definable by means of one-quantifier predicates*. Annales de la Soc. Polonaise de Math. 21 (1948) S. 114—119.
 [3] *Sur l'interprétation géométrique et topologique des notions logiques*. Proceedings of the tenth International Congress of Philosophy Amsterdam 1948. I. Band. S. 102—104.
- D. Nelson** [1] *Recursive functions and intuitionistic number theory*. Transactions of the Am. Math. Soc. 61. S. 307—368.
 [2] *Constructible falsity*. The Journ. of Symb. Log. 14 (1949) S. 16—26.
- G. Peano** [1] *Sul concetto di numero*. Rivista di matematica 1 (1891) S. 1—10.
- R. Péter (Póltzer)** [1] *Rekursive Funktionen*. Verhandlungen des Internationalen Mathematiker Kongresses Zürich 1932, II. Band S. 336—337.
 [2] *Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion*. Math. Annalen 110 (1934) S. 612—632.
 [3] *Konstruktion nichtrekursiver Funktionen*. Math. Annalen 111 (1935) S. 42—60.
 [4] *A rekurzív függvények elméletéhez* (ungarisch mit deutschem Auszug : *Zur Theorie der rekursiven Funktionen*). Matematikai és Fizikai Lapok 42 (1935) S. 25—49.
 [5] *Über die mehrfache Rekursion*. Math. Annalen 113 (1936) S. 489—527.
 [6] *Über rekursive Funktionen der zweiten Stufe*. Comptes rendus du Congrès International des Mathématiciens Oslo 1936, II. Band S. 267.
 [7] *Contribution to recursive number theory*. Acta Scient. Math. Szeged 9 (1940) S. 233—238.
 [8] *Az axiomatikus módszer korlátai* (ungarisch mit deutschem Auszug : *Die Schranken der axiomatischen Methode*). Matematikai és Fizikai Lapok 48 (1941) S. 120—143.
 [9] *Mehrfache und transfinit Rekursionen*. (Angenommen vom The Journ. of Symb. Log.)
 [10] *Zum Begriff der rekursiven reellen Zahl*. Acta Scient. Math. Szeged 12/A. Leopoldo Fejér et Frederico Riesz LXX annos natis dedicatus. (1950) S. 239—245.

- L. Post** [1] *Finite combinatory processes*. The Journ. of Symb. Log. 1 (1936) S. 103—105.
 [2] *Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems*. Bulletin of the Am. Math. Soc. 50 (1944) S. 284—316.
 [3] *A variant of a recursively unsolvable problem*. Bulletin of the Am. Math. Soc. 52 (1946) S. 264—268.
 [4] *Note on a conjecture of Skolem*. The Journ. of Symb. Log. 11 (1946) S. 73—74.
 [5] *Recursive unsolvability of a problem of Thue*. The Journ. of Symb. Log. 12 (1947) S. 1—11.
- R. M. Robinson** [1] *Primitive recursive functions*. Bulletin of the Am. Math. Soc. 53 (1947) S. 925—942.
 [2] *Recursion and double recursion*. Bulletin of the Am. Math. Soc. 54 (1948) 987—993.
- B. Rosser** [1] *Extensions of some theorems of Gödel and Church*. The Journ. of Symb. Log. 1 (1936) S. 87—91.
- S. Sarantapontos** [1] *Quelques théorèmes relatifs à la méthode par récurrence*. Rendiconti Accademia dei Lincei, Roma (6) 20 S. 242—251 und S. 293—301.
 [2] *Un théorème se rattachant à la méthode par récurrence (induction complète)*. Actes Congrès Interbalk. Math. Athènes 1934, S. 261—263.
- Th. Skolem** [1] *Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich*. Videnskapselskabet Skrifte I. Mat-Naturv. Kl. 6 (1923) S. 3—38.
 [2] *Über die Zurückführbarkeit einiger durch Rekursionen definierten Relationen auf »arithmetische«*. Acta Scient. Math. Szeged 8 (1936—37) S. 73—88.
 [3] *Eine Bemerkung über die Induktionsschemata in der rekursiven Zahlentheorie*. Monatshefte für Math. und Phys. 48 (1939) S. 268—276.
 [4] *Einfacher Beweis der Unmöglichkeit eines allgemeinen Lösungsverfahrens für arithmetische Probleme*. Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab Forhandling 13 (1940) S. 1—4.
 [5] *Remarks on recursive functions and relations*.
 [6] *Some remarks on recursive arithmetic*.
 [7] *A note on recursive arithmetic*.
 [8] *Some remarks on the comparison between recursive functions*. Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab Forhandling 17 (1944) S. 89—92, 103—106, 107—109, 126—129.
 [9] *Den rekursive aritmetikk*. Norsk Mat. Tidsskrift (1946) S. 1—12.
 [10] *The development of recursive arithmetic*. Dixième congrès des mathématiciens scandinaves. Copenhague 1946. S. 1—16.
- E. Specker** [1] *Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis*. The Journ. of Symb. Log. 14 (1949) S. 145—158.
- G. Sudan** [1] *Sur le nombre transfini ω^ω* . Bulletin Math. de la Soc. Roumaine des Sciences 30 (1927) S. 1—20.
- A. M. Turing** [1] *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*. Proceedings of the London Math. Soc. (2) 42 (1937) S. 230—265. *A correction*. 43 (1937) S. 544—546.
 [2] *Computability and λ -definability*. The Journ. of Symb. Log. 2 (1937) S. 153—163.

Vorwort	3
§ 1. Die übliche Definition von zahlentheoretischen Funktionen, durch Übergang von n auf $n + 1$	5
<p>1. Das Weiterzählen um 1, als eine der wichtigsten Methoden in der elementaren Zahlentheorie; auch die Definition zahlentheoretischer Funktionen kann auf diese Weise geschehen. 2. Definition der Summe, des Produktes und der Potenz. 3. Die arithmetische Differenz: $a - n$. 4. Summe und Produkt mit variabler Glieder- bzw. Faktorenzahl. 5. Die charakteristischen Funktionen von $m > n$, $m = 0$ und $0 < m \leq n$. Das arithmetische sign-Funktion und ihr Gegenteil: $\overline{sg}(n)$ und $\underline{sg}(n)$. 6. Aus mehreren Fällen «zusammengeflochte» Funktionen. 7. Der Ausdruck von «für alle i unter einer Schranke ...» und «es gibt ein i unter einer Schranke, für welches ...» mit Hilfe von Σ und \prod. 8. Der arithmetische Quotient: $\left[\frac{a}{n} \right]$. 9. Der Ausdruck vom «kleinsten i unter einer Schranke, für welches ...» mit Hilfe von Σ und \prod. 10. Der Rest $\text{res}(a, n)$ der Division $\frac{a}{n}$. Die charakteristische Funktion der Teilbarkeit. 11. Teileranzahl, Teilersumme. Die charakteristische Funktion der Primzahlbeschaffenheit. Die Anzahl der Primzahlen bis n. 12. Der absolute Wert einer Differenz: $a - b$. 13–14–15. Verschiedene Charakterisierungen der Primzahlen. 16. Die n-te Primzahl: $p_0 = 2$; p_n ist die $n + 1$-te Primzahl. 17. Der Exponent von p_a in der Primfaktorenzerlegung von n: $\text{exp}_a(n)$. 18. Die »Länge« der Primfaktorenzerlegung von n: $\text{long}(n)$. 19. Die Eulersche φ-Funktion. 20. $\min(a, b)$ und $\max(a, b)$. 21. Grösster gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfache zweier Zahlen. Zwei Variablen mit gleicher Rolle in einer Definition. 22. Beispiele aus der Kombinatorik. Die Anzahl der Permutationen: $n!$. Die Berechnung des Funktionswertes an einer gegebenen Stelle, durch Rekursion. 23. Die Definition von $\binom{n}{a}$. Beispiel einer Definition, worin die in der Rekursion nicht teilnehmende Variable nicht unverändert bleibt. 24. Die Definition der Folge von Fibonacci. Übergang nicht von der unmittelbar vorangehenden, sondern von gewissen vorangehenden Stellen auf spätere. 25. Zahlentheoretische Funktionen, die von der Analysis</p>	

geliefert werden. Die rekursive Definition von $[\sqrt{n}]$. Die Abweichung von der nächsten nicht-grösseren Quadratzahl: $\text{quadres}(n)$. Die charakteristische Funktion der Quadratzahl-Beschaffenheit: $\text{quad}(n)$. 26. Die Definition von $[e \cdot n]$ durch Rekursion. 27. Beispiel für eine Funktion, die von der Mengenlehre geliefert wird: Anordnung der Zahlenpaare in eine Folge. Simultane Definition zweier Funktionen.

- § 2. *Rekursive Funktionen und Beziehungen* 23
1. Der Begriff der rekursiven Funktion und seine Vorteile. 2. Primitive Rekursion, primitiv-rekursive Funktionen. 3. Definitionen, die vom Schema der primitiven Rekursion abweichen. 4. Der Begriff der rekursiven und der primitiv-rekursiven Beziehung. $a > b$, $a = b$, « a ist teilbar durch b », « a ist eine Primzahl», « a ist eine Quadratzahl» — als primitiv-rekursive Beziehungen. 5. Zusammensetzungen primitiv-rekursiver Beziehungen. \bar{B} , als Negation von B . 6. « B_1 und B_2 »: $B_1 \& B_2$. 7. « B_1 oder B_2 »: $B_1 \vee B_2$. 8. «Aus B_1 folgt B_2 »: $B_1 \rightarrow B_2$. 9. «Für alle i bis $n \dots$ »: $(\forall i) [i \leq n \rightarrow \dots]$. «Es gibt ein i bis n , für welches \dots »: $(\exists i) [i \leq n \& \dots]$. 10. Die «zusammengeflickte» Definition. 11. «Das kleinste bzw. grösste i bis n für welches \dots »: $\mu_i [i \leq n \& \dots]$ bzw. $\mu'_i [i \leq n \& \dots]$. 12. Tabelle für die gebräuchlichsten primitiv-rekursiven Funktionen und Beziehungen.
- § 3. *Die Wertverlaufsrekursion* 32
1. Verallgemeinerung der Definition der Folge von FIBONACCI: die allgemeine Wertverlaufsrekursion. 2. Zurückführung der Wertverlaufsrekursion auf primitive Rekursion und Substitution.
- § 4. *Die simultane Rekursion* 34
1. Die Zurückführung der simultanen Rekursion, die bei der Anordnung der Zahlenpaare in eine Folge aufgetreten ist, auf eine Wertverlaufsrekursion. 2. Die allgemeine simultane Rekursion führt nicht von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinaus.
- § 5. *Rekursion, wobei an Stelle der Parameter Einsetzungen erfolgen* 36
1. Die «Bausteine», die im Aufbau der definierten Funktion gebraucht werden. 2. $\psi(n, a)$, deren Werte diese Bausteine sind, kann durch eine Wertverlaufsrekursion definiert werden. 3. Hilfssatz über die uneingeschachtelte Darstellung eingeschachtelter ψ -Werte. 4. Die Herausholung der Werte der zu definierenden Funktion aus den Werten von $\psi(n, a)$. 5. Die Verallgemeinerung des Ergebnisses: Rekursionen dieser Art führen nicht von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinaus.
- § 6. *Rekursion nach mehreren Variablen* 41
1. Die Definition von $dv(m, n)$. Die Wertverlaufsrekursion nach der einen Variablen. 2. Die Wertverlaufsfunktion nach der anderen Variablen. 3. Abbau der Definition der zweiten Wertverlaufsfunktion. 4. Samt der zweiten Wertverlaufsfunktion ist auch die erste und auch $dv(m, n)$ primitiv-rekursiv. 5. Allgemein führen Definitionen dieser Art nicht von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinaus.

- § 7. *Reduktionen* 46
1. Die Reduktion der allgemeinen Substitution auf das Einsetzen von 1. 2. Das gelingt, weil die Substitution in das Rekursionschema eingekleidet ist. Ihre Ausschaltung von hier, auf Kosten der Einführung noch eines Parameters. 3. Die Minderung der Anzahl der Parameter. 4. Zurückführung auf ein Rekursionschema in dem höchstens zweistellige Funktionen auftreten. 5. Die Ausschaltung der eingekleideten Substitution aus dem neuen Schema; jetzt bereits ohne Vermehrung der Variablenanzahl. 6. Ausschaltung des letzten Parameters. 7. Definition der bisher unbestimmten Hilfsfunktionen ι , κ , λ . 8. Die Zurückführung der Rekursion auf die Iteration einer einstelligen Funktion an der Stelle 0. 9. Die Reduktion gelang auf Kosten der Vermehrung der Ausgangsfunktionen. Man hat zu zeigen, dass auch drei Ausgangsfunktionen genügen, zum Beispiel (A_2) : $n+1$, $a+n$, $\text{quadres}(n)$. 10. Bildung der Differenz auf Grund von (A_2) .
11. Der Aufbau von $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. 12. Der Aufbau von n^2 . 13. Der Aufbau von $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$. 14. Die Zurückführung von $a+n$ auf $|a-n|$. 15. Das Ergebnis: aus drei Ausgangsfunktionen kann man alle primitiv-rekursive Funktionen durch Substitutionen und Iterationen aufbauen. Die mehrstelligen können durch bloße Verwendung von Substitutionen aus den einstelligen und aus $a+n$ aufgebaut werden. 16. Die einstelligen primitiv-rekursiven Funktionen lassen sich aus zwei Ausgangsfunktionen, ohne Verwendung von mehrstelligen Funktionen, durch drei einfache Schemata aufbauen.
- § 8. *Elementare Funktionen* 60
1. Liesse sich nicht auch die Iteration ausschalten? Die Klasse der durch die vier Spezies definierbaren «elementaren Funktionen» enthält auch einen grossen Teil der in der elementaren Zahlentheorie gebräuchlichen Funktionen. 2. Die Iteration beschleunigt das Wachsen stark. Heuristisch scheint die Iteration des Potenzierens: $\psi(n, a)$ alle elementare Funktionen zu «majorisieren». Zur genauen Untersuchung: zu jedem n_1 und n_2 gibt es ein m , so dass $\psi(m, a)$ nicht kleiner ist als: 3. $\psi(n_1, a) + \psi(n_2, a)$, 4. $\psi(n_1, a) \cdot \psi(n_2, a)$, 5. $\psi(n_1, a) \psi(n_2, a)$ und 6. $\psi(n_1, \psi(n_2, a))$. 7. $\psi(n, a)$ majorisiert die elementaren Ausgangsfunktionen. 8. Diese Eigenschaft vererbt sich bei der Anwendung der vier Spezies und: 9. bei Summen- oder Produktbildung. 10. Die Iteration des Potenzierens ist primitiv-rekursiv und führt aus der Klasse der elementaren Funktionen hinaus.
- § 9. *Beispiel einer nicht primitiv-rekursiven zahlentheoretischen Funktion.* 68
1. Wird die Iteration des Potenzierens weiter iteriert, so ist zu erwarten, dass man zu Funktionen gelangt, die sämtliche primitiv-rekursive Funktionen majorisieren. 2. Die Definition einer zweistelligen Funktion $\psi(m, n)$, von der dasselbe erwartet wird. 3—4—5. Untersuchungen über das Wachsen von $\psi(m, n)$. 6. Der Aufbau der einstelligen primitiv-rekursiven Funktionen aus einigen Ausgangsfunktionen mittels einiger Schemata ermöglicht, dass Behauptungen

über diese Funktionen ähnlich wie Behauptungen über natürliche Zahlen bewiesen werden. 7. Alle einstellige primitiv-rekursive Funktionen werden von $\psi(m, n)$ majorisiert. 8. $\psi(m, n)$ kann nicht primitiv-rekursiv sein. 9. Alle beliebigviel-stellige Funktionen werden von $\psi(m, n)$ majorisiert.

§ 10. Die eingeschachtelte Rekursion 73

1. Die eingeschachtelte mehrfache (nach mehreren Variablen laufende) Rekursion führt von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinaus; die uneingeschachtelte nicht. 2. Auch die eingeschachtelte einfache Rekursion führt nicht aus dieser Klasse hinaus. 3. Wird das eben geschilderte Verfahren auf eine mehrfache Rekursion angewandt, so gewinnt man eine Normalform mit bloss einmaliger Einschachtelung. 4—5. Normierung der Anfangswerte. 6. Begriff der *in gewissen Funktionen rekursiven Funktion*. Mehrfach, genauer k -fach rekursive Funktionen und ihr Aufbau.

§ 11. Das Diagonalverfahren und die mehrfachen Rekursionen 78

1. Es gibt auch aus Mächtigkeitsgründen notwendigerweise nicht-primitiv-rekursive Funktionen; sogar unter den Funktionen der Form $[\tau n]$, wo τ eine nicht-negative reelle Zahl ist. 2. Für irrationales τ ist $[\tau n]$ dann rekursiv, wenn der Koeffizient a_n einer «Faktoriellenentwicklung» von τ primitiv-rekursiv ist. Es ist entscheidend im Beweis, dass $a_n < n-1$ über alle Grenzen vorkommt. 3. Anwendung des Cantorsche Diagonalverfahrens auf die Folge der einstelligen primitiv-rekursiven Funktionen. 4—5. Die effektive Abzählung dieser Funktionen mittels einer Funktion $\varphi(m, n)$. 6. Die Definition von $\varphi(m, n)$ ist eine eingeschachtelte zweifache Rekursion: so ergibt sich wieder, dass diese von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinausführt. 7. Ähnlich definiert man eine $r + 2$ -stellige Funktion, die bei geeignetem ersten Argument mit einer beliebigen $r + 1$ -stelligen primitiv-rekursiven Funktion identisch wird. 8. Die Anwendung des Diagonalverfahrens auf die k -rekursiven Funktionen ergibt, dass die $k + 1$ -fache Rekursion von der Klasse der k -rekursiven Funktionen hinausführt.

§ 12. Transfinite Rekursionen 84

1. In der Definition mehrstelliger Funktionen wäre eine sehr willkürliche Abgrenzung, sich auf einfache Rekursionen zu beschränken. 2. Bei einer k -stelligen Funktion ist die natürliche Anordnung der Stellen eine Anordnung vom Typus ω^k . 3. Eine Anordnung der Zahlen vom Typus ω^2 . 4. Die charakteristischen Eigenschaften der «charakterisierenden Funktionen» dieser Anordnung. 5. Die transfinite Rekursion. Beispiel einer Rekursion vom Typus ω^2 . 6. Beispiel der Berechnung eines Funktionswertes aus einem an grösserer Stelle angenommenen Funktionswert. Die Werte der durch transfinite Rekursionen definierten Funktionen lassen sich in endlich vielen Schritten berechnen. 7—8. Die Rekursion vom Typus ω^2 kann auf eine gewöhnliche zweifache Rekursion zurückgeführt werden. Inzwischen wird benutzt, dass das Schema der primitiven Rekursion die definierte Funktion eindeutig bestimmt. 9. Umgekehrt: die zweifache Rekursion lässt sich auf eine einfache Rekursion vom Typus ω^2 zurückführen.

10. Die Anordnung der Zahlen nach Typus ω^3 ; als Fortsetzung des Verfahrens: die Anordnung vom Typus ω^k und vom Typus ω^ω .
 11. Die k -fachen gewöhnlichen und die transfiniten Rekursionen vom Typus ω^k lassen sich gegenseitig auf einander zurückführen. Auch die transfiniten mehrfachen Rekursionen sind auf transfiniten einfache Rekursionen zurückführbar. 12. Eine Besonderheit der transfiniten Rekursion: hier kann auch die Definition einer einstelligen Funktion eingeschachtelt sein; und die Einschachtelungen lassen sich dabei im allgemeinen nicht auflösen. 13. Das auf die dreistelligen mehrfach-rekursiven Funktionen angewandte Diagonalverfahren ergibt, dass die Rekursion vom Typus ω^ω von der Klasse der mehrfach-rekursiven Funktionen hinausführt.

- § 13. *Rekursionen der höheren Stufen* 97
1. Die Iteration als Funktionsfunktion. Die Auflösung der zweifachen Rekursion, welche die vom Produkt ausgehenden Iterationen liefert, auf einfache Rekursionen, wobei auch Funktionsvariablen auftreten. 2. Die einfachste Funktionsfunktion: $V_x (n, f(x)) = f(n)$. 3. Rekursionen und rekursive Funktionen der höheren Stufen. 4. Alle zweifache Rekursionen der ersten Stufe lassen sich auf zwei einfache Rekursionen der zweiten Stufe auflösen. 5. Die exakte Durchführung des Beweises. 6. Eine mehrfache Rekursion der ersten Stufe kann schrittweise auf nach immer weniger Variablen laufende Rekursionen der zweiten Stufe zurückgeführt werden. Eine jede mehrfach-rekursive Funktion der ersten Stufe gehört unter die 1-rekursiven Funktionen der zweiten Stufe. 7. Beispiel der Darstellung einer Funktion der zweiten Stufe als eine mehrfach-rekursive Funktion der ersten Stufe.
- § 14. *Die Normalform der mehrfachen Rekursionen* 103
1. Die Verwendung von Funktionsfunktionen ermöglicht das einheitliche Aufschreiben der verwickeltesten eingeschachtelten Rekursionen; so wird jetzt die im § 10 versprochene Normalform der mehrfachen Rekursion hergestellt. Das aus den «Komponenten» der Rekursion aufgebaute «Substitutionsterm». 2. Drei Forderungen gegenüber der Funktion ψ , das die Bausteine der Definition als Werte anzunehmen hat. 3. Die Definition von ψ , mit einstweilen unbestimmtem $\varkappa(n)$. Dieses ψ genügt den beiden ersten Forderungen. 4. Hilfssatz zur Auflösung von Einschachtelungen. 5. Induktionsannahme; besteht sie, so erfüllt ψ auch die dritte Forderung, und noch mehr. 6. Die Induktion wird zu Ende geführt; die Definition von $\varkappa(n)$. 7. Alle mehrfachen Rekursionen lassen sich auf eine Normalform bringen, worin nur einmalige Einschachtelungen vorkommen.
- § 15. *Das «Gödelisieren» der Rekursion von höherer Stufe* 110
1. Die Berechnung der Werte einer Funktion ψ , die durch eine Rekursion von höherer Stufe definiert wird. 2. Eine Anordnung der Berechnung, die sich auch auf kompliziertere Fälle übertragen lässt. 3—8. Beobachtung der in der Berechnung angewandten formalen Schritte. 9. Die Berechnung endet immer in endlich vielen Schritten. 10. Konstruktion eines Wörterbuches, in dem allen verwendeten Zeichen und Zeichenfolgen Zahlen zugeordnet werden. 11—22. Über-

setzung (mit Verwendung des Wörterbuches) der formalen Schritte der Berechnung auf die Sprache der Zahlen. Inzwischen wird in

Nr.11 $Sb_n \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right)$, in Nr.12 $a * b$, in Nr.17 $Subst_n \left(\begin{smallmatrix} u, v \\ m \end{smallmatrix} \right)$ definiert.

23. Zusammenfassung der Schritte in einer Definition der ersten Stufe von einer zahlentheoretischen Funktion $\gamma(n)$. Man erhält daraus ψ durch Einsetzen einer primitiv-rekursiven Funktion. 24. Die Definition von $\gamma(n)$ ist bloss «partiell», sie scheint auch gar keine Rekursion zu sein. Trotzdem ermöglichen die Definitionsgleichungen von γ die Berechnung der Werte von ψ an beliebigen Stellen.

- § 16. *Allgemein-rekursive Funktionen* 126
1. Die Definition von $[\sqrt{n}]$ mit Hilfe der nächsten grösseren Quadratzahl. 2. Die Definition liefert die Funktionswerte widerspruchsfrei. 3. Hinzufügung der Definitionsgleichungen der Hilfsfunktionen. 4. Die Berechnung der Funktionswerte aus der vollkommenen Definition; die Schritte der Berechnung. 5. Begriff der allgemeinen Rekursion und der allgemein-rekursiven Funktion.
- § 17. *Die explizite Form der allgemein-rekursiven Funktionen* 131
1. μ_i ist allgemein-rekursiv, wenn zwar keine Schranke für i angegeben ist, aber ein i von der gewünschten Eigenschaft existiert. 2. Plan der Darstellung einer allgemein-rekursiven Funktion in expliziter Form. Das neue Wörterbuch. 3. Die Gödel-Nummer einer Zahl. 4. Die Auflösung der in der Berechnung erlaubten Substitution auf elementare Schritte. 5. Gödel-Nummern der elementaren reduzierenden Substitutionsschritte. 6. Der übriggebliebene Reduktionsschritt und die Gödel-Nummer seines Ergebnisses. 7. Zusammenfassung der Ergebnisse der Reduktionen. 8. Charakterisierung der Gödel-Nummer einer Ableitung. 9. Die Gödel-Nummer des Wertes von $\varphi(a_1, \dots, a_r)$. 10. Die explizite Form. 11. Der Aufbau der allgemein-rekursiven Funktionen aus primitiv-rekursiven Ausgangsfunktionen mittels zwei Operationen. Die erhaltene explizite Form ist universell.
- § 18. *Möglichkeiten zur weiteren Vereinfachung der expliziten Form* 141
1. Die Bedingung dafür, dass eine allgemein-rekursive Funktion φ auf eine einfachere explizite Form (ohne ψ) gebracht werden kann, ist die primitive Rekursivität von $\varphi(a_1, \dots, a_r) = m$. 2. Beispiel einer nicht-primitiv-rekursiven Funktion, für welche diese Beziehung primitiv-rekursiv ist. 3. Dabei tritt eine Art Rekursion auf, welche die Funktionswerte aus früheren Funktionswerten von nicht bestimmter, sondern variabler Anzahl aufbaut. 4. Beispiel einer allgemein-rekursiven Funktion, für welche die betrachtete Beziehung nicht primitiv-rekursiv ist. 5. Andere hierher gehörige Ergebnisse. 6. MARKOV's Beweis dafür, dass nicht alle allgemein-rekursive Funktionen in der einfacheren expliziten Form geschrieben werden können. «Umfangreiche» Funktionen. 7. Begriff der «universalen» ψ -Funktion. Notwendige Bedingung der Universal-Beschaffenheit. 8. Hilfssatz zum Beweis, dass die Bedingung auch genügend ist. 9. Beweis des Satzes von MARKOV, dass eine «umfangreiche» Funktion ψ für eine jede Variablenanzahl «universal» ist.

- § 19. *Beispiel einer nicht-allgemein-rekursiven Funktion* 152
 1. Die explizite Form ermöglicht die Anwendung des Diagonalverfahrens auf die allgemein-rekursiven Funktionen. 2. Kann die Diagonalfunktion in irgendeinem noch allgemeineren Sinn rekursiv, oder überhaupt berechenbar sein?
- § 20. *Berechenbare Funktionen* 153
 1. Eine Berechnung, die wiederholt, und auch auf Andere überlassen werden kann, kann nur mechanisch sein. Die Idee einer Maschine, welche die Berechnung ausführt. 2. Die Zeichen und Konfigurationen der Maschine, die Einzelakte ihrer Tätigkeit; das Erscheinen der Funktionswerte $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ... an der Schleife. 3. Maschine zur Berechnung von $\varphi(n) = 1$. 4—5. Maschine zur Berechnung von $\varphi(n) = n + 1$. 6. Eine Turing-Maschine ist zur Berechnung einer jeden allgemein-rekursiven Funktion, aber auch zur Berechnung einer jeden effektiv angegebenen reellen Zahlen fähig. 7—10. Berechnet eine Turing-Maschine die Werte einer zahlentheoretischen Funktion $\varphi(n)$, so lassen sich die Einzelakte ihrer Tätigkeit und die Stadien ihres Zustandes mit primitiv-rekursiven Funktionen beschreiben. 11. Die Anzahl der 1-Zeichen, die von einem 0-schreibenden Stadium an bis zum n -ten Stadium geschrieben werden, ist auch eine primitiv-rekursive Funktion von n . 12. Schreibt die Maschine im $\xi(n)$ -ten Stadium die $n + 1$ -te 0, so ist $\xi(n)$ allgemein-rekursiv. Daraus folgt auch die Allgemein-Rekursivität der von der Maschine berechneten Funktion. 13. So kann plausibel hingestellt werden, dass die allgemein-rekursiven Funktionen als die im allgemeinsten Sinn berechenbaren zahlentheoretischen Funktionen betrachtet werden können.
- § 21. *Geschichte und Anwendungen* 166
 1. Die Geschichte der rekursiven Funktionen ist mit der Geschichte der mathematischen Grundlagenforschung eng verflochten. 2. Aufbau der rekursiven Zahlentheorie ohne Verwendung unendlicher Mengen. 3. Das Programm der Beweistheorie; die Brauchbarkeit der rekursiven Zahlentheorie in der Metamathematik. 4. Das Programm von HILBERT zum Beweis der Kontinuumhypothese: Aufbau der zahlentheoretischen Funktionen durch Rekursionen immer «höherer» Art. 5. Der Satz von GÖDEL über die Unbeweisbarkeit der Widerspruchsfreiheit mit den Mitteln des betrachteten Systems; die Methode der «Gödelisierung». 6. Eine Methode, die sich im System der Zahlentheorie nicht formalisieren lässt: die transfinite Rekursion. 7. Das Identifizieren der allgemeinsten berechenbaren Funktionen mit den allgemein-rekursiven Funktionen. Anwendungen: 8. in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 9. in der intuitionistischen Logik (10. ein Beispiel vom Gebiete der rekursiven Funktionen erhellt: weshalb die intuitionistische Vorsicht nötig sein kann), 11. in der Mengenlehre, 12. in der Charakterisierung der transfiniten Ordnungszahlen, 13. im Beweis der Effektiv-Unentscheidbarkeit gewisser Probleme (z. B. Entscheidungsproblem, «Wortproblem» von Halbgruppen).
- § 22. *Effektive Unentscheidbarkeit der Frage: welche Gleichungssysteme allgemein-rekursive Funktionen definieren* 177
 1. Zahlen, die allgemein-rekursive Funktionen definieren (und so

Definitionsgleichungssysteme vertreten). **2.** Diese Zahlen sind nicht effektiv abzählbar. Man kann nicht effektiv entscheiden, welche Zahlen allgemein-rekursive Funktionen definieren.

§ **23.** *Die Frage der allgemeinen Entscheidbarkeit der arithmetischen Probleme* 180

1. Arithmetische Formeln. Die arithmetische Form der GOLDBACHschen Vermutung. **2.** Die Identität $y = a^x$ ist gleichbedeutend mit der Existenz einer gewissen Folge. Die Glieder einer beliebigen endlichen Folge können als Reste der Teilung einer Zahl durch die Glieder einer arithmetischen Progression betrachtet werden. **3.** So kann $y = a^x$ auf eine arithmetische Form gebracht werden. **4.** Alle primitiv-rekursive Beziehungen sind arithmetisch. **5.** Alle allgemein-rekursive Beziehungen sind arithmetisch. **6.** Auch Reduktionen mit umgekehrter Tendenz sind möglich: das Zusammenziehen der Quantoren. **7.** Es kann kein effektives allgemeines Verfahren zur Entscheidung der arithmetischen Probleme mit einer freien Variablen angegeben werden.

§ **24.** *Ausdehnung des Begriffes der Rekursivität. Anwendungen auf die Analysis* 185

1. Die zu einer Fehlergrenze gehörige Schwellenzahl als rekursive Funktion. Effektive, rekursive Konvergenz. Rekursive Folge von Rationalzahlen. Rekursive reelle Zahl. **2.** Die Angabe einer monotonen, beschränkten, primitiv-rekursiven Folge von Rationalzahlen, mit Verwendung einer primitiv-rekursiven Funktion $\varrho(m, n)$, für welche $\mu_x [\varrho(m, x) = 0]$ nicht allgemein-rekursiv ist. **3.** Diese Folge kann nicht effektiv konvergieren. **4.** Nicht alle rekursiven reellen Zahlen haben eine rekursive Dezimalentwicklung. Eine Zahl mit einer rekursiven Faktoriellenentwicklung bestimmt einen rekursiven Schnitt. **5.** Wenn eine Zahl einen rekursiven Schnitt bestimmt, so ist sie in eine Schar von Reihen mit rekursiven Koeffizienten entwickelbar. **6.** Unter diese Reihen gehört auch die Dezimal- und Faktoriellenentwicklung. **7.** Ist die rekursiv-reelle Zahl r «rekursiv-irrational», so bestimmt sie einen rekursiven Schnitt. **8.** Andere Untersuchungen auf diesem Gebiet.

Literatur 196

AMERICAN LIBRARY ASSOCIATION
WASHINGTON, D. C.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA 30.068/1957 N. SZ.

