Varga
Mathematik 2

Raum und Ebene
Wahrscheinlichkeit
Logik und
Kombinatorik

Akadémiai Kiadó
Budapest

Varga, Mathematik 2

Varga
Mathematik 2

Raum und Ebene
Wahrscheinlichkeit
Logik und Kombinatorik

1828

Akadémiai Kiadó • Budapest 1976

Originalausgabe:
Varga Tamás
Játsszunk matematikát! 2
Móra Könyvkiadó, Budapest

Übersetzt von
Ervin Deák
Illustriert von
Ágoston Huller

ISBN 963 05 0633 5 Bd. I und II
ISBN 963 05 0635 1 Bd. II

Gemeinschaftsausgabe des Akadémiai Kiadó, Budapest
und des Ernst Klett Verlages, Stuttgart

Printed in Hungary

Inhalt

Raum und Ebene

Was bauen wir mit dem Babylon-Spiel?

Das Babylon-Spiel ist in Spielwarenhandlungen erhältlich. Es ist auch in vielen Kindergärten und Schulen zu finden. Es besteht aus Kugeln, die mit kleinen Löchern versehen sind, und aus Stäbchen, die in diese Löcher hineinpassen. Man kann damit vielerlei Figuren zusammenstellen.

Baue einen achtstrahligen Stern! Das ist auf zwei verschiedene Weisen möglich. Der Unterschied besteht bloß darin, daß die leerbleibenden Löcher in einem Fall einen Kreis, im anderen beinahe ein Viereck bilden (Abb. 1 und 2). Je ein leeres Loch befindet sich auch in der Mitte des Kreises und des Vierecks. Auf der anderen Seite der Kugel ist dasselbe

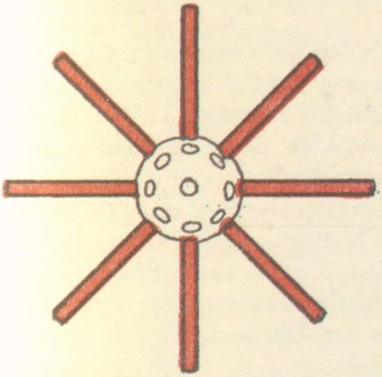


Abb. 1 Die eine Ausführung des achtstrahligen Sterns. Wir haben den Äquator besteckt

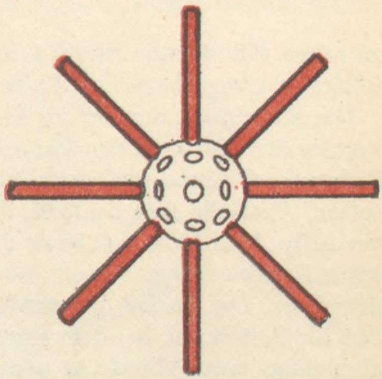


Abb. 2 Die andere Ausführung des achtstrahligen Sterns. Wir haben einen Meridian besteckt

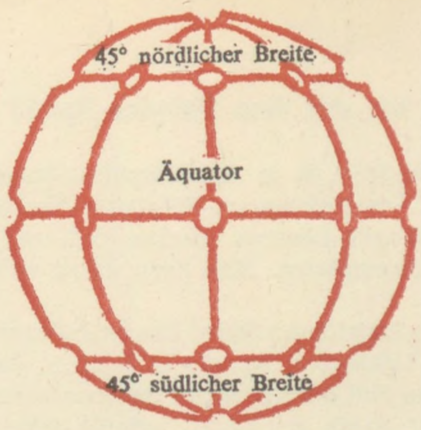


Abb. 3 Die Kugeln können wir uns als kleine Erdbälle vorstellen

zu sehen. Rundherum sind 8 Löcher mit den Stäbchen darin. Oben sind 9 Löcher, unten ebenfalls 9. Es sind also insgesamt 26 Löcher vorhanden.

Die Kugeln können wir als kleine Erdbälle betrachten (Abb. 3). Wir können den Nordpol, den Südpol, den Äquator, den nördlichen Breitenkreis von 45 Grad und den südlichen Breitenkreis von 45 Grad festsetzen. Auch die Längenkreise, die durch den Nordpol und den Südpol verlaufen, kann man sich leicht denken. In Wirklichkeit gibt es natürlich keine Kreise auf den Kugeln, nur Löcher, die sich kreisförmig aneinanderreihen. Die beiden achtstrahligen Sterne unterscheiden sich darin, daß die 8 Stäbchen bei dem einen längs des Äquators, bei dem anderen aber längs eines Meridians gesteckt sind.

Du kannst auch einen sechsstrahligen Stern herstellen. Du mußt allerdings ein bißchen herumprobieren, um das richtig fertigzubringen (Abb. 4).

Zwei Stäbchen kommen in gegenüberliegende Punkte des Äquators, zwei an den nördlichen Breitenkreis von 45 Grad, zwei an den südlichen Breitenkreis von 45 Grad; zwei Stäbchen kommen dabei niemals in unmittelbar benachbarte Löcher. Die Pole bleiben leer, nur so entsteht ein regelmäßiger sechsstrahliger Stern.

Einen vierstrahligen Stern, also ein Kreuz, kannst du ebenso wie einen achtstrahligen Stern herstellen; du steckst eben nur in jedes zweite Loch

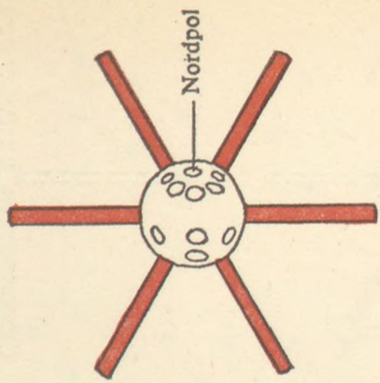


Abb. 4 Sechsstrahliger Stern. Die Pole bleiben leer

ein Stäbchen (Abb. 5). Aus dem sechsstrahligen entsteht auf dieselbe Weise ein dreistrahliger Stern (Abb. 6).

Weitere regelmäßige Sterne lassen sich aus den Elementen des Babylon-Spiels nicht herstellen.

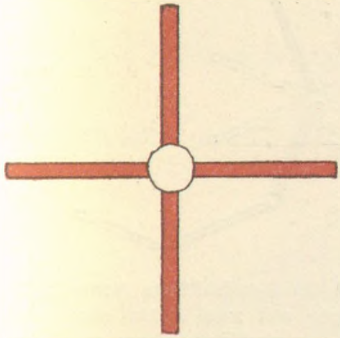


Abb. 5 Vierstrahliger Stern. Er ähnelt dem achtstrahligen, es ist aber nur in jedes zweite Loch ein Stäbchen gesteckt

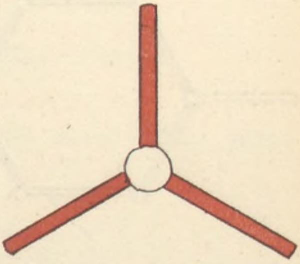


Abb. 6 Dreistrahliger Stern. Er ähnelt dem sechsstrahligen, es ist aber nur in jedes zweite Loch ein Stäbchen gesteckt

Wer Sterne bauen kann, der baut auch leicht regelmäßige Vielecke (Abb. 7–10). Die mit gestrichelten Linien gezeichneten Stäbchen gehören nicht zu den Vielecken; es wird damit nur angedeutet, was für Sterne an den Ecken der Vielecke gebildet sein könnten.

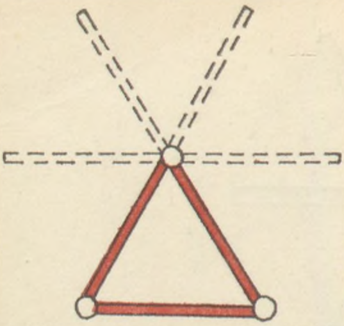


Abb. 7 Regelmäßiges Dreieck. Wir können mit zwei benachbarten Ästen eines sechsstrahligen Sterns beginnen

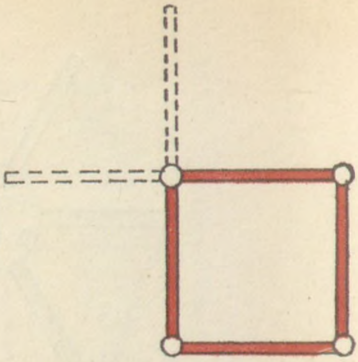


Abb. 8 Regelmäßiges Viereck (d. h. Quadrat). Wir können mit zwei benachbarten Ästen eines vierstrahligen Sterns beginnen

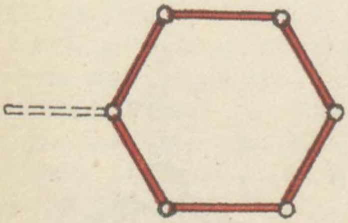


Abb. 9 Regelmäßiges Sechseck. Wir können von zwei Ästen eines dreistrahligen Sterns ausgehen

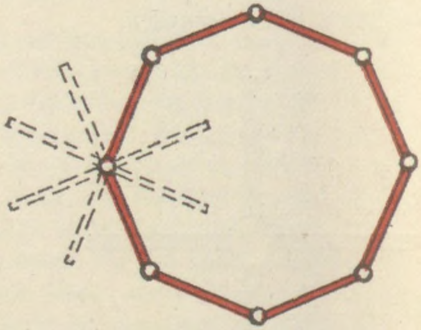


Abb. 10 Regelmäßiges Achteck. Wir fangen mit zwei Ästen eines achtstrahligen Sterns an

Weitere regelmäßige Vielecke können nicht aufgebaut werden. Aber auch mit diesen viererlei Vielecken lassen sich schöne Muster in der Ebene konstruieren (Abb. 11).

Alles, was wir bisher gebaut haben, konnte flach auf die Tischplatte gelegt werden. Jetzt wollen wir aber auch nach oben und in andere Richtungen bauen.

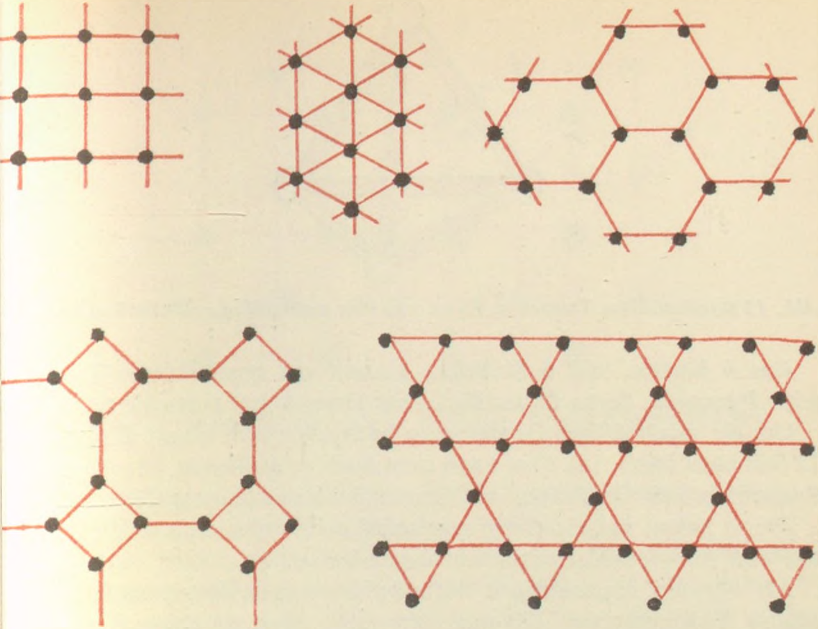


Abb. 11 Muster in der Ebene aus regelmäßigen Vielecken

Aus 8 Kugeln und 12 Stäbchen können wir einen Würfel bauen (Abb. 12):

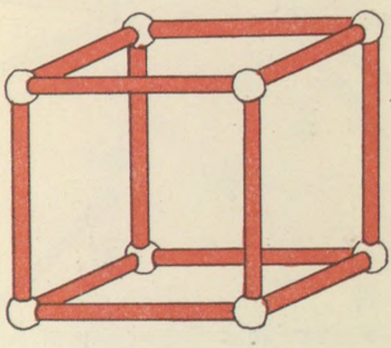


Abb. 12 Würfel. Er ist von sechs Quadraten begrenzt

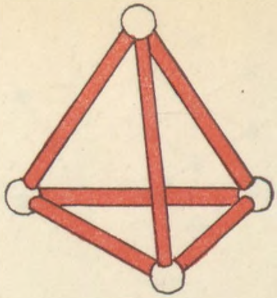


Abb. 13 Regelmäßiges Tetraeder. Es ist von vier regelmäßigen Dreiecken begrenzt

Aus 4 Kugeln und 6 Stäbchen kommt ein regelmäßiges Tetraeder (eine Pyramide, deren Grundfläche ein Dreieck ist) zustande (Abb. 13).

Um ein regelmäßiges Oktaeder zu bauen, braucht man 6 Kugeln und 12 Stäbchen (Abb. 14). Das kann man auch so auffassen, als wären zwei Pyramiden mit Quadraten als Grundfläche zusammengefügt.

Damit haben wir sämtliche regelmäßigen Körper aufgezählt, die sich aus den Babylon-Elementen aufbauen lassen.

Als wir die regelmäßigen Vielecke zusammenlegten, erhielten wir schöne Ebenenmuster. Könnte man nicht auch mehrere Körper zusammenbauen?

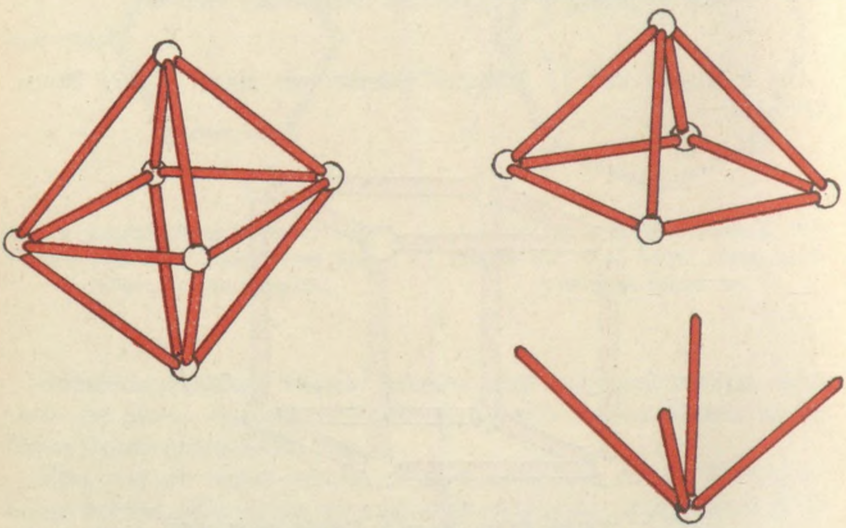


Abb. 14 Regelmäßiges Oktaeder. Es ist sozusagen aus zwei Pyramiden zusammengesetzt

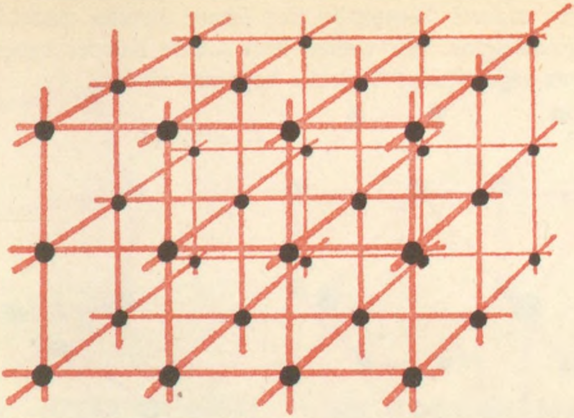


Abb. 15 Würfel können wir in beliebiger Anzahl zusammenfügen

Würfel kann man in beliebiger Anzahl zusammenbauen, solange nur der Vorrat an Kugeln und Stäben reicht (Abb. 15).

Aus den beiden anderen Körpern zusammen läßt sich ebenfalls ein Raummuster herstellen, das unbegrenzt fortgesetzt werden kann (Abb. 16). Aus dem einen oder dem anderen allein ist es aber nicht möglich; da hilft alles Probieren nicht.

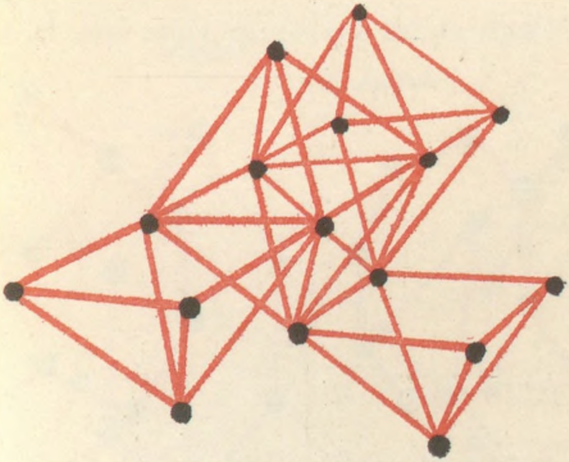


Abb. 16 Regelmäßige Tetraeder und Oktaeder lassen sich zusammenfügen. An die Seitenflächen des Oktaeders bauen wir je ein Tetraeder an, den Tetraedern fügen wir wieder Oktaeder hinzu usw. Das Muster läßt sich beliebig fortsetzen, so lange der Vorrat an Kugeln und Stäben reicht

In einigen unserer Muster in der Ebene kamen verschiedene regelmäßige Vielecke vor. Wir wollen jetzt solche Körper bauen, die durch verschiedene regelmäßige Vielecke begrenzt sind.

1. Aufgabe

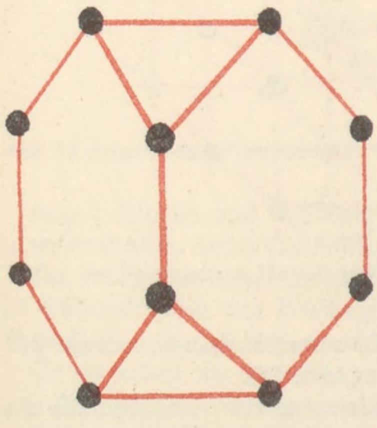


Abb. 17 Dazu sind 12 Kugeln und 18 Stäbchen nötig. Es besteht aus vier Sechsecken und vier Dreiecken

2. Aufgabe

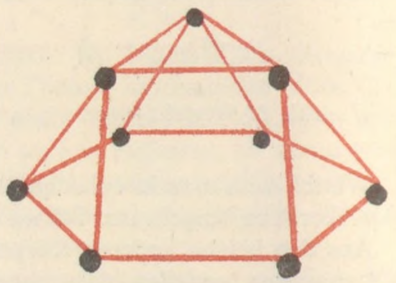


Abb. 18 Dazu sind 12 Kugeln und 24 Stäbchen nötig. Es besteht aus sechs Quadraten und acht Dreiecken

3. Aufgabe

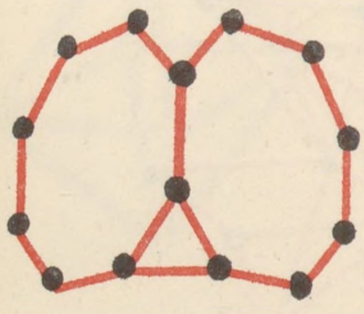


Abb. 19 Dazu sind 24 Kugeln und 36 Stäbchen nötig. Es besteht aus sechs Achtecken und acht Dreiecken

4. Aufgabe

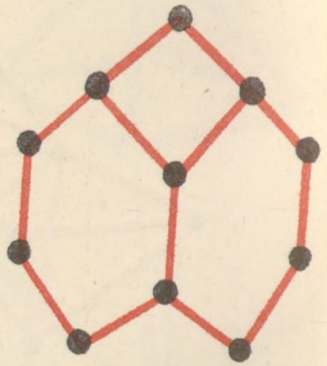


Abb. 20 Auch dazu sind 24 Kugeln und 36 Stäbchen nötig. Es besteht aus sechs Quadraten und acht Sechsecken

5. *Aufgabe*

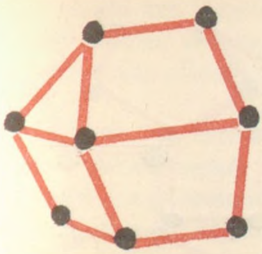


Abb. 21 Dazu sind 24 Kugeln und 48 Stäbchen nötig. Es besteht aus achtzehn Quadraten und acht Dreiecken

6. *Aufgabe*

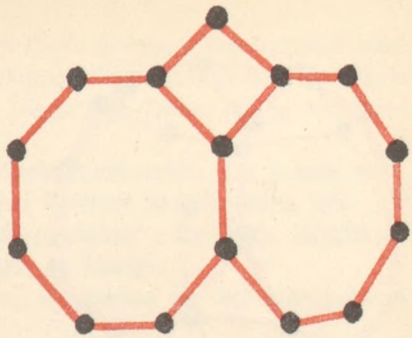


Abb. 22 Dazu sind 24 Kugeln und 48 Stäbchen nötig. Es besteht aus sechs Achtecken, acht Sechsecken und zwölf Quadraten

Die Abb. 17 bis 22 zeigen, wie du mit dem Bau solcher Körper beginnen kannst. Die Aufgaben bestehen darin, die Arbeit fortzusetzen und zu vollenden.

Lösungen

(zum Kapitel „Was bauen wir mit dem Babylon-Spiel?“)

1. *Aufgabe*

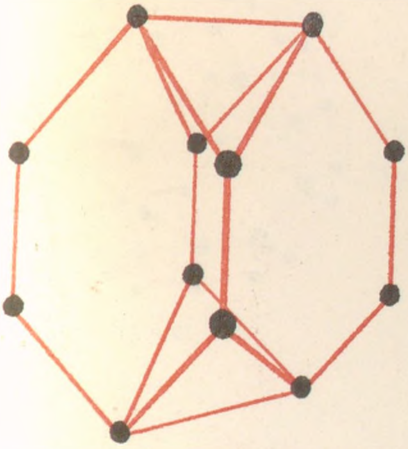


Abb. 23

2. *Aufgabe*

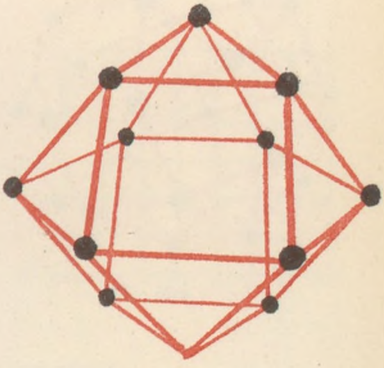


Abb. 24

3. Aufgabe

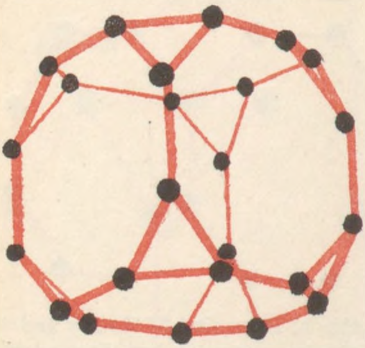


Abb. 25

4. Aufgabe

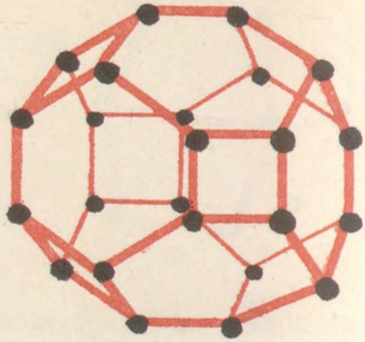


Abb. 26

5. Aufgabe

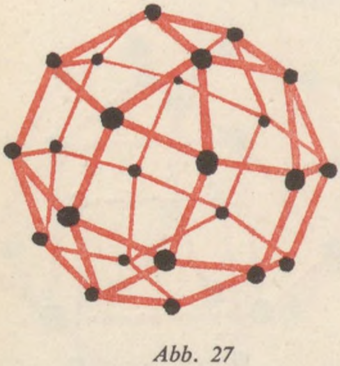


Abb. 27

6. Aufgabe

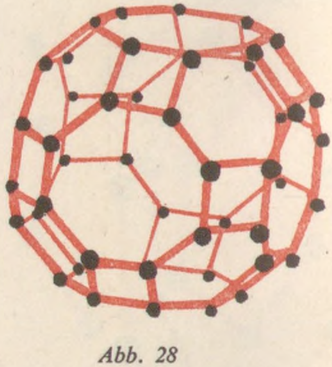


Abb. 28

Die Geometrie der neun Nägel

Hier ist ein mit Nägeln bestücktes Brett. Solche „Nagelbretter“ sind in vielen Schulen vorhanden. Wir spannen Gummiringe um die Nägel und denken uns allerlei interessante Dinge aus. Dabei lernen wir Geometrie.

Es ist leicht, ein Brett mit neun Nägeln herzustellen. Du kannst auch jemanden darum bitten, dir ein solches Brett zu basteln (Abb. 29).
Du kannst dazu Gummiringe („Schnippgummis“) benutzen. Es gibt sie in verschiedenen Längen und Stärken zu kaufen.

Findest du eine interessante Figur, so zeichne sie auf Karopapier! (Abb. 30)

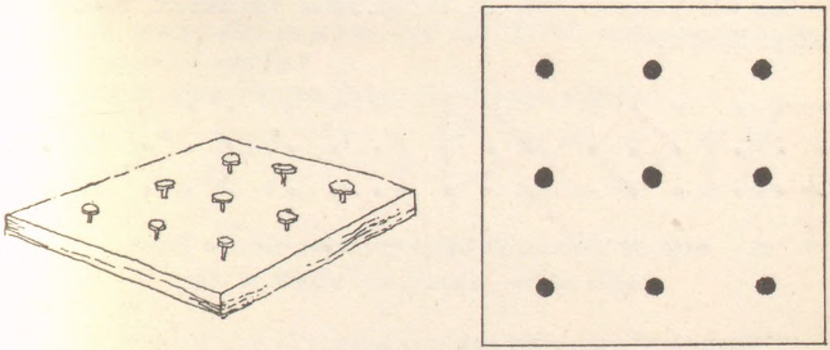


Abb. 29 Das Brett mit neun Nägeln

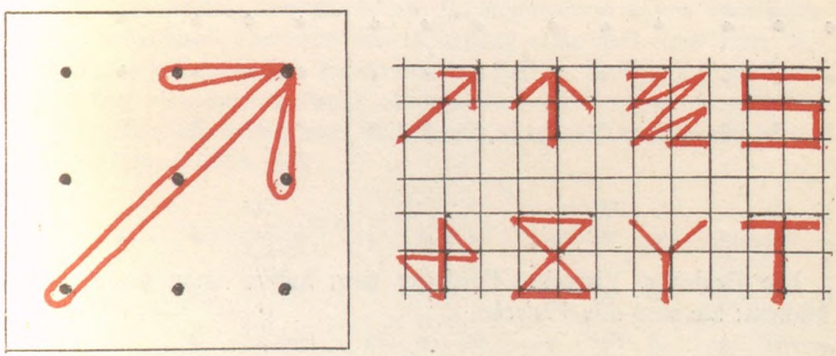


Abb. 30 Zeichnungen auf Karopapier

Du kannst z. B. versuchen, große Buchstaben herzustellen.

Hier siehst du Dreiecke (Abb. 31). Fertige so viele Dreiecke wie nur möglich an! Zeichne einige hierher!

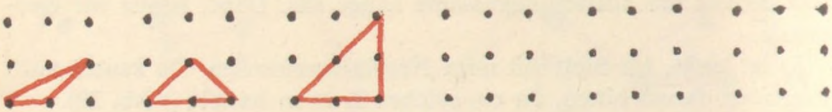
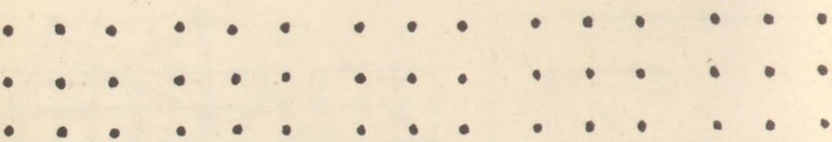


Abb. 31 Dreiecke. Sie haben drei Seiten und drei Ecken

Das sind Vierecke (Abb. 32). Fertige selbst Vierecke an, und zeichne einige hierher!

Abb. 32 Vierecke. Sie haben vier Seiten und vier Ecken

Zeichne Fünfecke hierher! Zeichne Sechsecke hierher!



Die Dreiecke, Vierecke, Fünfecke usw. haben einen gemeinsamen Namen: Sie sind alle *Vielecke*.

Wenn der Gummiring locker ist, kommt kein Vieleck zustande (Abb. 33).

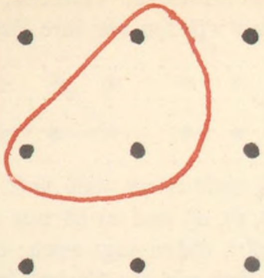


Abb. 33 Es entsteht kein Vieleck

Kommt andererseits in jedem Fall ein Vieleck zustande, wenn der Gummiring straff aufliegt?

Würdest du diese Figuren (Abb. 34) Vielecke nennen?

Abb. 34 Welche sind Vielecke, welche nicht?

Worin unterscheiden sich diese von den bisherigen Vielecken?

Setzen wir einen Finger irgendwo auf den Gummifaden, und beobachten wir, in wie viele Richtungen man ihn von dort ausgehend dem Gummifaden entlang bewegen kann. Im allgemeinen sind es zwei Richtungen. Manchmal aber nur eine Richtung oder drei oder vier. Wir wollen einen jeden solchen Punkt mit der Zahl 1, 3 oder 4, je nach der Anzahl der von diesem Punkt ausgehenden Richtungen, bezeichnen.

Die Punkte, von denen zwei Richtungen ausgehen, werden mit keiner Zahl bezeichnet (Abb. 35).

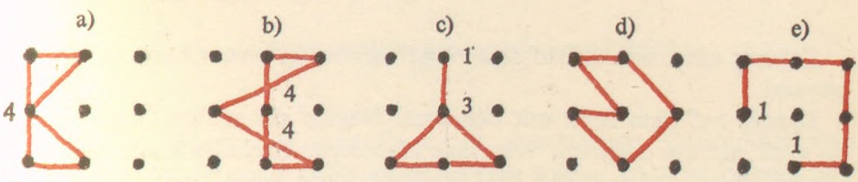


Abb. 35 In wie viele Richtungen kann man sich fortbewegen? (Wenn es zwei sind, schreiben wir nichts hin.)

Wir haben nur eine Figur, wo kein Punkt bezeichnet ist (d).

Gehen wir die vorigen Dreiecke, Vierecke, verschiedenen Vielecke durch. Mit welchen Zahlen würden wir ihre Punkte bezeichnen?......

....

....

....

....

....

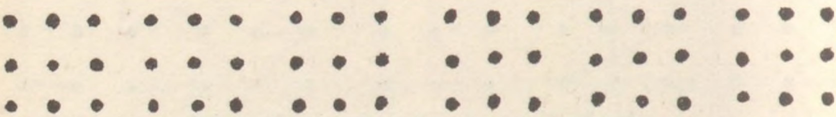
Von den Figuren a), b), c), d) und e) ist nur d) von dieser Art, allein diese Figur heißt „Vieleck“. (Man sagt auch: einfaches Vieleck.)

Worauf kommt es an, daß wir ein Vieleck erhalten?

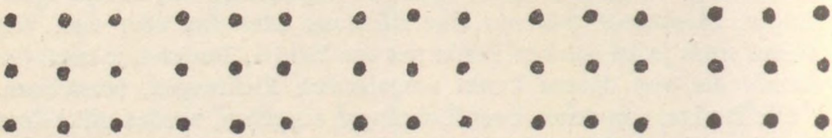
Erstens darauf, daß man sich von einem beliebigen Punkt der Linie ausgehend in genau zwei Richtungen fortbewegen kann.

Zweitens darauf, daß der Gummifaden überall straff ist, daß also die Linie aus *geraden Strecken* besteht.

Zeichne verschiedene Vielecke hierher!



Zeichne hierher Linien, die aus irgendeinem Grunde nicht Vielecke sind!



Zeichne alles, was du auf dem Nagelbrett aufgespannt hast, auf Karopapier!

Spanne auf dem Brett mit den neun Nägeln ein großes Dreieck auf, so groß wie nur möglich! Wie viele *ebensolche* Dreiecke lassen sich auf diesem Brett aufspannen? (Sie dürfen anders liegen, sonst sollen sie aber gleich sein.)

Du denkst etwa an solche (Abb. 36):

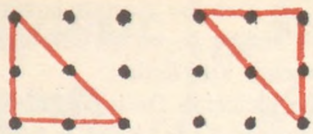


Abb. 36 Sind diese die größten Dreiecke?

oder an solche (Abb. 37):

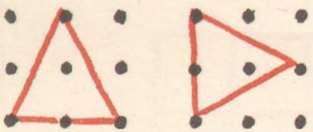


Abb. 37 Oder diese?

1. Aufgabe. Welche Dreiecke sind größer, die in Abb. 36 oder die in Abb. 37? Schreibe deine Vermutung hierher! ....
Wir werden das bald herausfinden.

Spanne jetzt das kleinstmögliche Dreieck auf! Dieses kannst du nicht nur durch Drehung, sondern auch durch Verschiebung in andere Lagen bringen. Zum Beispiel so (Abb. 38):

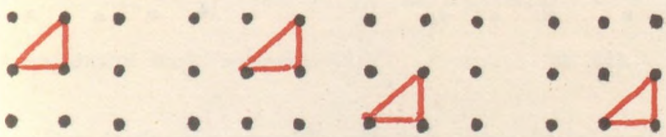


Abb. 38 Dahin und dorthin verschobene Dreiecke

2. Aufgabe. Was meinst du, auf wie viele verschiedene Weisen kann man dieses kleine Dreieck aufspannen, wenn ebenso Verschiebungen wie Drehungen zugelassen sind? ....

Prüfe deine Vermutung durch einen Versuch! Zeichne auch alles, was du herstellst, auf Karopapier! Dabei mußt du auf drei Regeln achten:

1. Alle Dreiecke sollen dieselbe Gestalt haben.
2. Jedes Dreieck soll anders liegen als alle anderen.
3. Es darf kein möglicher Fall fehlen.

Sind dies wirklich die kleinsten Dreiecke, die man auf dem Brett mit den neun Nägeln aufspannen kann? Gibt es keine kleineren?......... Auch darauf werden wir noch zurückkommen.

Es kommt natürlich darauf an, was wir unter „kleiner" verstehen. Sieh dir diese Schokoladenstücke an (Abb. 39)! Es gibt Leute, die das erste Stück für größer halten würden.

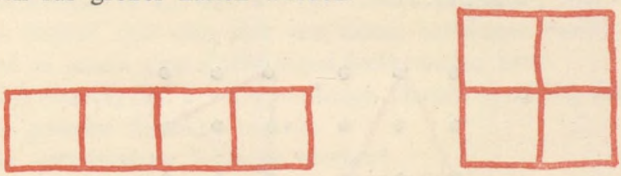


Abb. 39 Sind sie gleich groß oder nicht?

3. Aufgabe. Warum wohl?.........................Bist du damit einverstanden, oder hältst du etwa das andere Stück für größer?....... .... Oder hältst du die beiden Stücke für gleich groß? Wenn ja, aus welchem Grund?....................

Bist du damit einverstanden, daß diese Figuren dieselbe Gestalt haben?

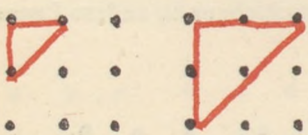


Abb. 40

Und diese?

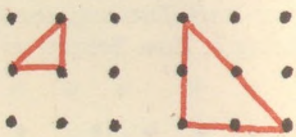


Abb. 41

Man kann wohl sagen, daß diese Figuren von gleicher Gestalt sind, obwohl sie verschieden groß sind, nicht wahr?

Anstatt sagt man in der Geometrie

von gleicher Gestalt = ähnlich

Anstatt sagt man in der Geometrie

von gleicher Gestalt und gleich groß = kongruent (deckungsgleich)

Diese zum Beispiel sind kongruent (und auch ähnlich, da sie ja dieselbe Form haben):

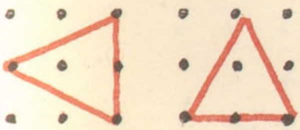


Abb. 42

diese sind es nicht (sie sind aber ähnlich, da sie dieselbe Form haben):

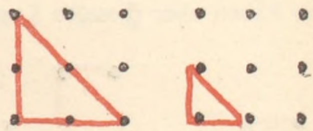


Abb. 43

Diese sind ebenfalls kongruent (und auch ähnlich):

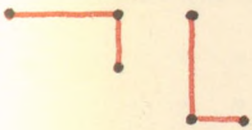


Abb. 44

diese aber nicht (und auch nicht ähnlich):

Abb. 45

Schreibe hierher, was es bedeutet, daß zwei Figuren ähnlich sind! .....

....

Daß sie kongruent sind, bedeutet, daß ....

....

4. Aufgabe. Und jetzt schreibe deine Meinung hierher über die Frage, ob es möglich ist, daß zwei Figuren

sowohl kongruent als auch ähnlich sind: ....
kongruent, aber nicht ähnlich sind: ....
ähnlich, aber nicht kongruent sind: ....
weder ähnlich noch kongruent sind: ....

(Zeichne Beispiele für die Fälle, die du für möglich hältst!)

Kongruente Figuren können Spiegelbilder voneinander sein, wie z. B.

hier:

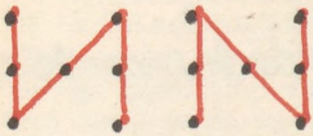


Abb. 46

oder auch hier, aber gedreht:

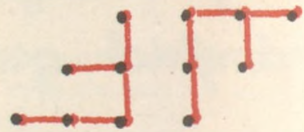


Abb. 47

Diese beiden sind nur verschoben, sie haben aber dieselbe Lage:

Abb. 48

Diese sind gedreht:

Abb. 49

5. *Aufgabe.* Versuche auf dem Nagelbrett oder mit zwei Blättern Karopapier, ob du die Figuren der

Abb. 46 ....
Abb. 47 ....
Abb. 49 ....

in die gleiche Lage bringen kannst!

(Die Figuren der Abb. 48 sind bereits in derselben Lage, bloß an verschiedenen Orten.)

6. *Aufgabe.* Abb. 50 zeigt lauter kongruente Figuren. Wähle zwei von ihnen aus, und beobachte, ob sie ohne Spiegelung in die gleiche Lage gebracht werden können! Stelle das für je zwei dieser Figuren fest! Verbinde je zwei Figuren, für welche deine Antwort *ja* lautet, mit einer Linie! Wo die Antwort *nein* gilt, ziehe keine Linie!

7. *Aufgabe.* In Abb. 51 siehst du lauter ähnliche Figuren. Verbinde diejenigen, die sich in die gleiche Lage drehen lassen, mit Linien! Ist das in der Zeichnung nicht erkennbar, so stelle die Figuren auf dem Nagelbrett her, oder zeichne sie auf Karopapier, jede auf ein eigenes Blatt!

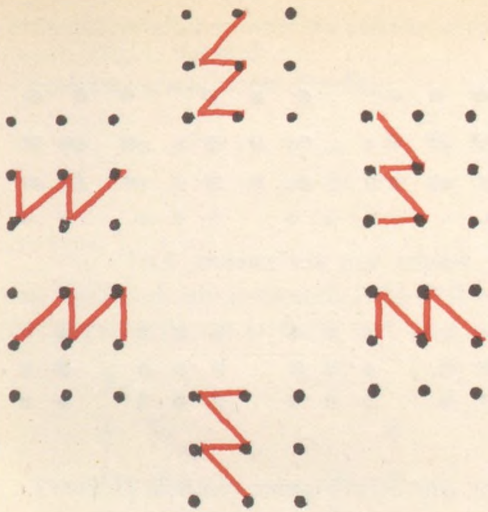


Abb. 50 Verbinde die miteinander, die sich durch Drehung in dieselbe Lage bringen lassen!

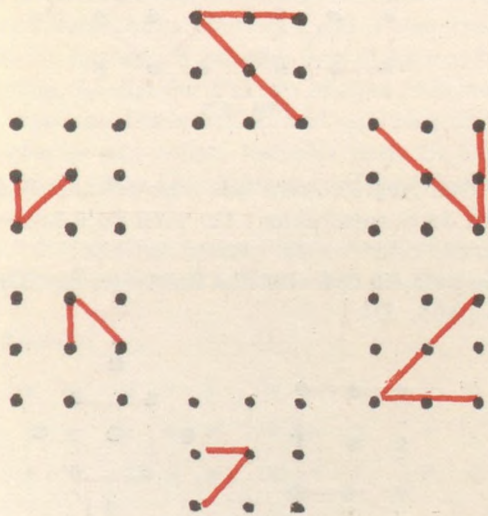


Abb. 51 Verbinde die miteinander, die sich durch Drehung in dieselbe Lage bringen lassen!

Wie viele von der einen Art hast du miteinander verbunden?........

....

Wie viele von der anderen Art?..............................

8. *Aufgabe.* Zeichne weitere Figuren von der ersten Art!

Zeichne auch welche von der zweiten Art!

Was meinst du, sind diese Figuren einander ähnlich?...............

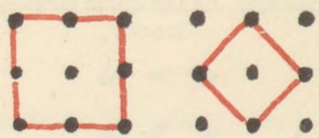


Abb. 52

Stelle sie auf zwei Nagelbrettern her, oder zeichne sie auf je ein Blatt Papier, so kannst du es entscheiden! Du wirst auch beobachten können, ob sie von der ersten oder von der zweiten Art sind:..................

Hast du daran gedacht, daß man das Brett oder das Blatt auch drehen kann? Etwa so (Abb. 53):

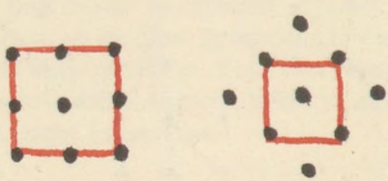


Abb. 53 Diese sind von der gleichen Gestalt und von der gleichen Lage

Sie haben offensichtlich dieselbe Gestalt. Beide sind *Quadrate.*

9. Aufgabe. Wie viele Quadrate unterschiedlicher Größe kannst du auf dem Brett mit neun Nägeln herstellen? . . . .

Zeichne alle Quadrate verschiedener Größe!

10. Aufgabe. Von Dreiecken dieser Gestalt (Abb. 54) haben wir bisher zwei verschiedene angefertigt: ein größeres und ein kleineres.

Abb. 54 Zwei ähnliche Dreiecke

Könntest du noch ein drittes herstellen? Könntest du auch ein mittelgroßes herstellen? Versuche es! Natürlich soll es aber dieselbe Gestalt wie jene haben! Ob sie tatsächlich dieselbe Gestalt haben, kannst du durch Drehung feststellen. Ist dies der Fall, so zeichne es neben die vorigen!

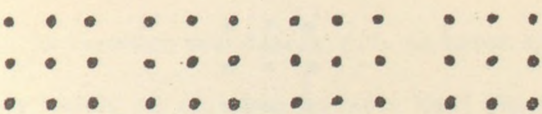
Erzeuge verschiedene Dreiecke, so viel wie möglich!

Daß sie *verschieden* sein sollen, bedeutet jetzt: Es dürfen keine zwei von ihnen kongruent sein. (Ähnlichkeit ist aber erlaubt.)

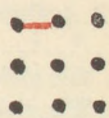
11. Aufgabe. Auf dem Brett mit neun Nägeln kann man acht verschiedene Dreiecke herstellen. Wie viele von diesen hast du schon gefunden? . . . . .

. . . .

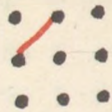
Zeichne sie hierher!



Es gibt vier unter ihnen, deren kleinste Seite so groß ist:
Wie viele von diesen hast du schon gefunden? . . . .



Es gibt zwei unter ihnen, deren kleinste Seite von dieser Größe ist: Hast du beide gefunden?..

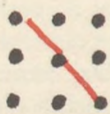


Es gibt zwei unter ihnen, deren kleinste Seite so groß ist:

Diese aufzufinden war nicht schwierig, wir haben sie ja schon gesehen.

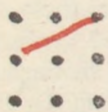
12. Aufgabe. Wie viele gibt es, deren *größte* Seite

so groß ist:



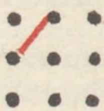
............?

so groß ist:



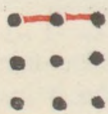
............?

so groß ist:



............?

so groß ist:



............?

so groß ist:

............?

13. Aufgabe. Wie viele gibt es, deren drei Seiten gleich groß sind?.......
....

Wie viele, deren zwei Seiten gleich groß sind?....................

Wie viele, deren Seiten alle verschieden sind?....................

Stelle auf dem Brett mit neun Nägeln verschiedene Dreiecke her, so viel wie möglich!

Daß sie *verschieden* sein sollen, das bedeutet auch hier, daß es unter ihnen keine zwei kongruente geben darf. (Es können aber ähnliche darunter sein.)

Sie können auch eingedrückt, d. h. konkav sein, so wie das in Abb. 55:

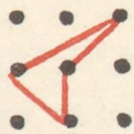


Abb. 55 Konkaves (eingedrücktes) Viereck

Wir schreiben aber vor, daß die Begrenzungslinie eines Vierecks, Fünfecks oder anderen Vielecks eine einzige zusammenhängende Figur umschließen muß: Man soll im Inneren der Figur von jedem Punkt zu jedem anderen Punkt gelangen können, ohne die Begrenzungslinie zu berühren.

Dies sind zum Beispiel keine Vielecke:

Abb. 56 Diese sind keine Vielecke, weil sie nicht nur einen inneren Teil besitzen

Dies sind Vielecke:

Abb. 57 Diese sind Vielecke. In ihrem Inneren kann man von jeder Stelle zu jeder anderen Stelle gelangen

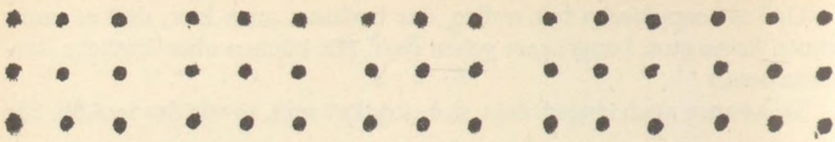
14. Aufgabe. Auf dem Brett mit neun Nägeln kann man 16 verschiedene Vierecke herstellen. Wie viele von ihnen hast du schon gefunden? ......

....

12 von den 16 Vierecken sind *konvex*, d. h. sie haben keine einspringenden Ecken.

Zeichne alle hierher, die du schon gefunden hast! (Beachte aber, daß kongruente nicht als verschieden gelten!)

Hast du die vier Konkaven gefunden? Zeichne sie hierher!

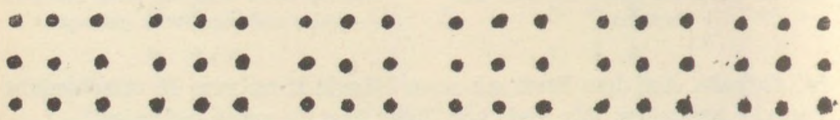


15. Aufgabe. Wie viele Vierecke kannst du finden, deren vier Seiten alle gleich sind? ....

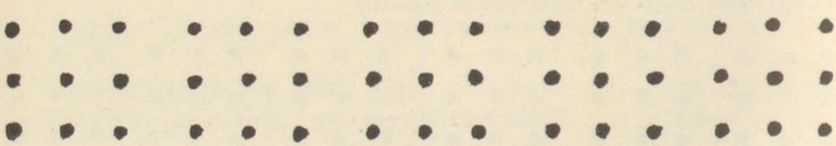
(Jetzt sind dies alle Quadrate. Auf einem größeren Nagelbrett oder Karopapier könntest du aber auch solche Vierecke finden, die keine Quadrate sind, obwohl alle vier Seiten gleich sind.)

16. Aufgabe. Wie viele Vierecke findest du, deren vier Seiten nicht alle gleich sind, wohl aber je zwei gegenüberliegende? ....
Zeichne sie hierher!

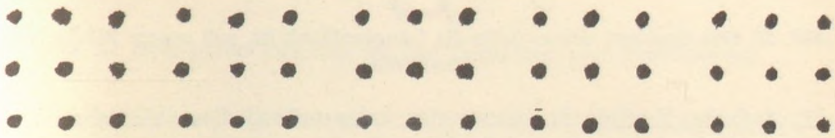
17. Aufgabe. Wie viele Vierecke kannst du finden, deren je zwei benachbarte Seiten, aber auch nur diese, gleich sind? ....
Zeichne sie hierher!



18. Aufgabe. Wie viele Vierecke findest du, deren zwei benachbarte Seiten, aber auch nur diese, gleich sind? ....
Zeichne sie hierher!

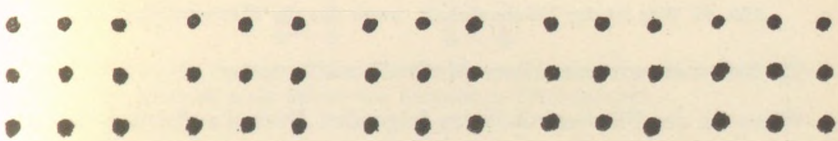


19. Aufgabe. Hast du die Vierecke gefunden, deren zwei gegenüberliegende Seiten, aber auch nur diese, gleich sind? (Auf dem Brett mit neun Nägeln gibt es zwei solche Vierecke, ein konvexes und ein konkaves.) Zeichne sie hierher!



20. Aufgabe. Und hast du auch die beiden Vierecke gefunden, deren sämtliche Seiten verschieden sind? Das eine ist konvex, das andere nicht. Zeichne sie hierher!

21. Aufgabe. Von den Fünfecken und den Vielecken mit noch mehr Seiten suche zuerst die konvexen aus! (Es gibt nicht viele, insgesamt nur fünf.)



22. Aufgabe. Konkave gibt es viel mehr. Zeichne einige! Es gibt sogar fünf Siebenecke (aber nur konkave), Achtecke und Vielecke mit noch mehr Seiten sind jedoch auf diesem Brett überhaupt nicht möglich.

Unter all diesen Vielecken gibt es welche, deren Flächeninhalt sehr leicht zu berechnen ist. Nehmen wir dieses Quadrat als Flächeneinheit an (Abb. 58):

Abb. 58 Das Quadrat, dessen Seite die Längeneinheit ist, soll unsere Flächeneinheit sein

23. Aufgabe. Zeichne in (oder unter, oder neben) diese Vielecke ihren Flächeninhalt auf!

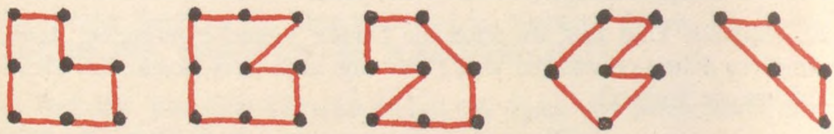


Abb. 59 Was sind die Flächeninhalte in Einheitsquadraten?

Bisher haben wir den Flächeninhalt eines jeden Vielecks durch Zerlegung in kleine Quadrate oder halbe Quadrate bestimmt. Sieh dir nun aber dieses Dreieck an!

Abb. 60 Was ist der Flächeninhalt, wenn das die Flächeneinheit ist?

Da kommen wir mit dieser Methode nicht weiter.

Wieso ist der Flächeninhalt des folgenden Dreiecks gleich $\frac{1}{2}$?

Abb. 61 Warum gerade $\frac{1}{2}$?

Weil zwei solche Dreiecke ein Einheitsquadrat ausmachen.

Abb. 62 Zwei von ihnen machen ein Einheitsquadrat aus

Und wenn wir zwei solche Dreiecke wie in Abb. 60 zusammenlegen?

Abb. 63 Zwei solche Dreiecke machen zusammen zwei Einheiten aus

Dann erhalten wir ein Viereck (Rechteck) der Fläche 2. Der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks ist also die Hälfte davon, 1 Einheit.

Hättest du gedacht, daß diese beiden Flächen denselben Flächeninhalt haben?

Abb. 64 Das Quadrat scheint kleiner zu sein

Die meisten Leute würden das Quadrat für kleiner halten. Wenn man aber je zwei zusammenfügt, so erhält man offensichtlich dieselbe Figur. Die beiden Flächeninhalte müssen also gleich sein.

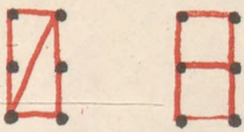


Abb. 65 Zwei von der einen oder der anderen Art sind zusammen gleich groß, also sind sie auch selbst von demselben Flächeninhalt

Jetzt ist es schon ein leichtes, den Flächeninhalt des Dreiecks in Abb. 66 zu bestimmen. Es zeigt sich, daß er gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks in Abb. 67 ist.

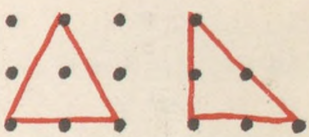


Abb. 66 *Abb. 67*

Dreiecke von verschiedener Gestalt, aber gleichem Flächeninhalt

Vergleiche auch diese beiden Vierecke (Abb. 68 und 69) miteinander!

Abb. 68 *Abb. 69*

Vierecke von verschiedener Gestalt, aber gleichem Flächeninhalt

Sie haben denselben Flächeninhalt; es ist der Flächeninhalt der vorigen zwei Dreiecke.

Diese hier sind nicht so leicht zu berechnen:

Abb. 70 *Abb. 71*

Es lohnt sich, diese Dreiecke mit den vorigen zu vergleichen. Der Flächeninhalt des ersten ist um zwei halbe Quadrate, also um 1, und das zweite um die Hälfte von 2, also ebenfalls um 1, kleiner als der Flächeninhalt der vorigen Dreiecke.

Abb. 72

24. Aufgabe. Jetzt kannst du es schon mit solchen versuchen:

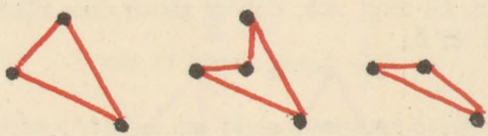
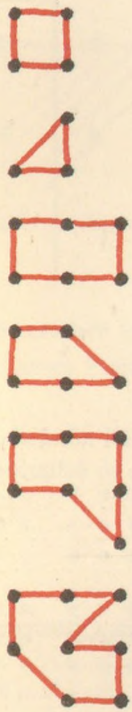


Abb. 73 *Abb. 74* *Abb. 75*

Bestimme die Flächeninhalte! Zweckmäßig ergänzt du die Figuren zuerst zu größeren.

Könnten wir den Flächeninhalt eines Vielecks aus der Anzahl der Nägel – d. h. Gitterpunkte – bestimmen, die auf seiner Begrenzungslinie bzw. in seinem Inneren zu finden sind? Prüfen wir zuerst solche Vielecke, die in ihrem Inneren keine Gitterpunkte enthalten!



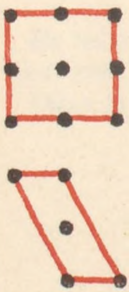
Äußere Gitterpunkte	Fläche
4	1
3	$\frac{1}{2}$
6	2
5	$1\frac{1}{2}$
7	$2\frac{1}{2}$
8	3

Abb. 76 Versuche es auch mit anderen Vielecken!

25. Aufgabe. Was für eine Regel gilt für die Vielecke, die in ihrem Inneren keinen Gitterpunkt enthalten (nur auf der Begrenzungslinie sind Gitterpunkte zu finden)? ....

....

Für Vielecke, die auch in ihrem Inneren Gitterpunkte enthalten, gestaltet sich die Regel etwas anders. Auf dem Brett mit neun Nägeln verhält sich die Sache einfach, da nur ein einziger innerer Gitterpunkt möglich ist. Zeichne verschiedene Vielecke, fertige eine Tabelle an und beobachte, wie sich die Regel ändert!



Äußere Gitterpunkte (Begrenzungslinie)	Innere Gitterpunkte	Fläche
p	i	F
8	**1**	**4**

Abb. 77 Welche Regel gilt, wenn sich im Inneren des Vielecks ein Gitterpunkt befindet?

Wenn du eine Regel gefunden hast (für den Fall nämlich, daß sich im Inneren des Vielecks kein Gitterpunkt befindet), so schreibe sie hierher!

....

....

....

26. Aufgabe. Enthält das Innere des Vielecks einen Gitterpunkt, so lautet die Regel: ....

....

....

....

....

Was meinst du, was für eine Regel gilt für den Fall, daß im Inneren des Vielecks nicht nur ein Gitterpunkt möglich ist? Dann wird der Flächeninhalt natürlich auch von der Anzahl der inneren Gitterpunkte abhängen.

Um das überprüfen zu können, brauchen wir ein größeres Nagelbrett oder ein größeres Blatt kariertes Papier als bisher.

Lösungen

(zum Kapitel „Die Geometrie der neun Nägel“)

1. Aufgabe. Die beiden Dreiecke haben den gleichen Flächeninhalt; es ist die Hälfte des Flächeninhalts des Quadrats, das alle neun Nägel umfaßt. (Weißt du warum? Nein, nicht? Tut nichts. Lies ruhig weiter! Nach der 23. Aufgabe findest du die Erklärung.)

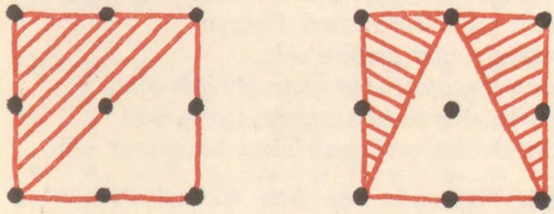


Abb. 78

2. Aufgabe. Dieses kleine Dreieck läßt sich auf 16 verschiedene Weisen aufspannen:

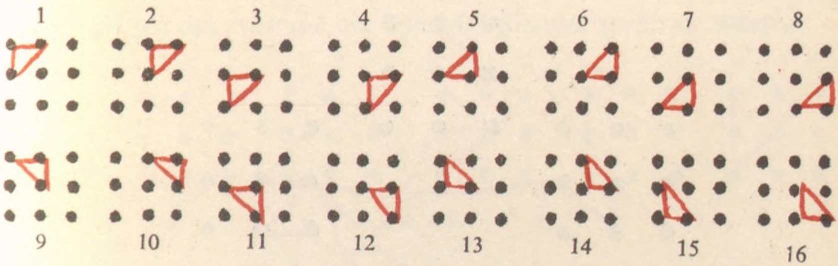


Abb. 79

3. Aufgabe. Die beiden Schokoladenstücke sind gleich groß. Allerdings ist das erste Stück doppelt so lang, andererseits aber nur halb so breit wie das zweite. Wenn du das erste Stück so halbierst, wie es Abb. 80 zeigt, so kannst du aus den beiden Teilen das zweite Stück zusammenstellen.

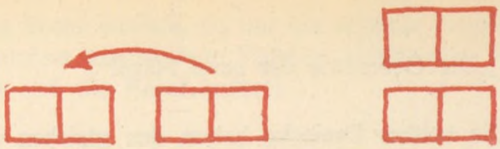


Abb. 80

4. Aufgabe. Kongruente Figuren haben die gleiche Gestalt, sind also ähnlich (und obendrein gleich groß). Ähnliche Figuren sind aber nicht unbedingt gleich groß. Also: zwei Figuren

können kongruent und ähnlich sein,
können nicht kongruent, aber nicht ähnlich sein,
können ähnlich, aber nicht kongruent sein, und
können nicht ähnlich und auch nicht kongruent sein.

5. Aufgabe. Die Figuren in den Abb. 46 und 47 können durch keinerlei Drehungen der Bretter in dieselbe Lage gebracht werden (es sei denn, daß wir das eine Brett mit den Nägeln nach unten aufstellen, das soll aber weder hier noch im folgenden erlaubt sein!). Die eine Figur der Abb. 49 braucht nur um 90° gedreht werden.

6. Aufgabe. Zwei bzw. vier Figuren können ohne Spiegelung in dieselbe Lage gebracht werden.

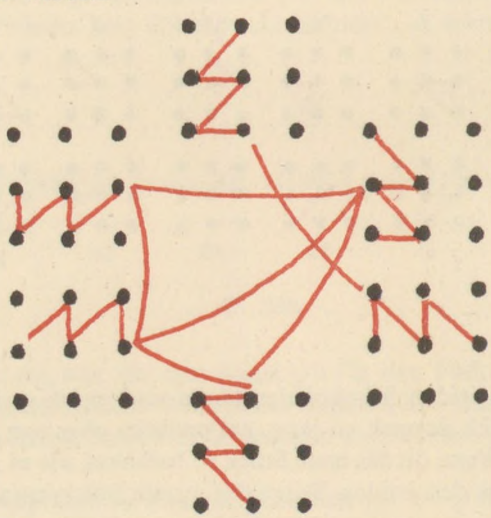


Abb. 81

7. Aufgabe.

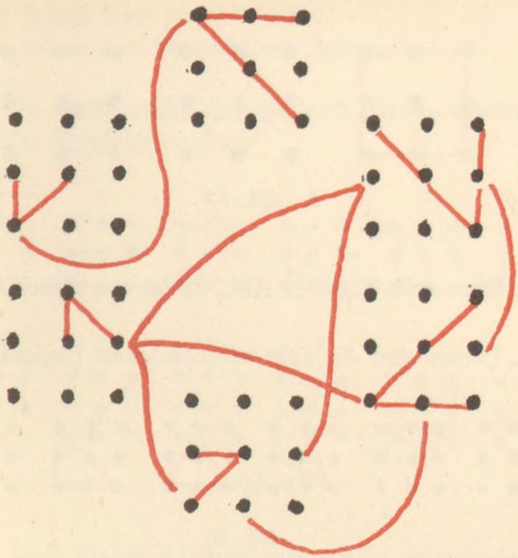


Abb. 82

8. Aufgabe. Zu den zwei von der einen Art gehören noch zum Beispiel:

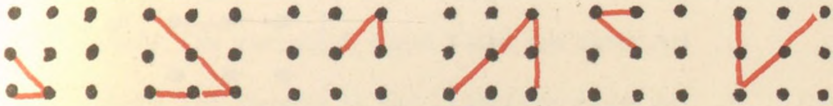


Abb. 83

Und zu den vier der anderen Art zum Beispiel solche:

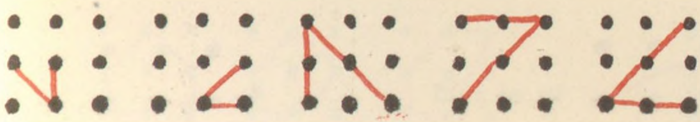


Abb: 84

9. Aufgabe. Auf dem Brett mit neun Nägeln sind Quadrate von nur drei verschiedenen Größen möglich.

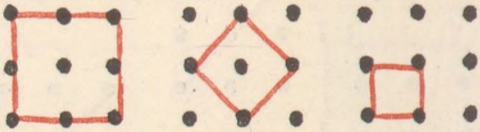


Abb. 85

10. Aufgabe. Die zweite Figur in Abb. 86 ist von dieser Art.

11. Aufgabe. Dieses sind die acht verschiedenen Dreiecke:

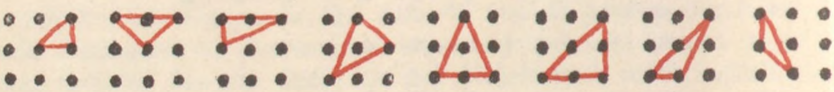
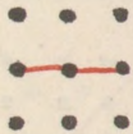
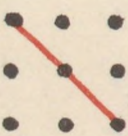
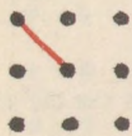


Abb. 86

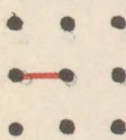
12. Aufgabe. (Siehe Abb. 86!) Die größte Seite von so vielen Dreiecken

1  ist so groß

2  ist so groß

1  ist so groß

4  ist so groß

0  ist so groß

13. Aufgabe. (Siehe Abb. 86!)
0 Dreiecke haben drei gleiche Seiten,
5 Dreiecke haben zwei gleiche Seiten,
3 Dreiecke haben drei verschiedene Seiten.

14. Aufgabe. Die ersten zwölf Vierecke sind konvex, die übrigen (das 13., 14., 15. und 16. Viereck) konkav.

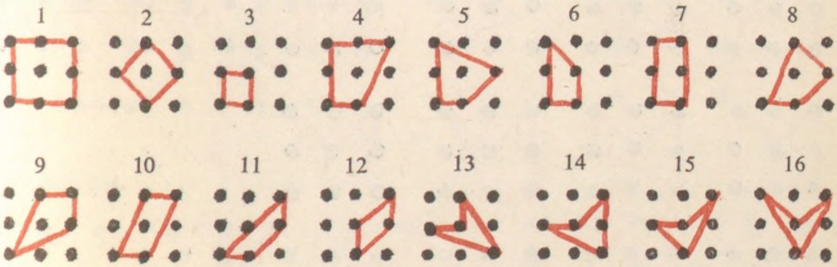


Abb. 87

15. Aufgabe. Drei Vierecke haben vier gleiche Seiten: das 1., 2. und 3. Viereck.

16. Aufgabe. Die Vierecke 7, 10 und 12 sind von dieser Art.

17. Aufgabe. Die Vierecke 9, 13 und 16 sind von dieser Art.

18. Aufgabe. Die Vierecke 4, 6 und 8 sind von dieser Art.

19. Aufgabe. Die Vierecke 11 und 15 sind von dieser Art.

20. Aufgabe. Die Vierecke 5 und 14 sind von dieser Art.

21. Aufgabe. Es gibt vier konvexe Fünfecke und ein konvexes Sechseck.

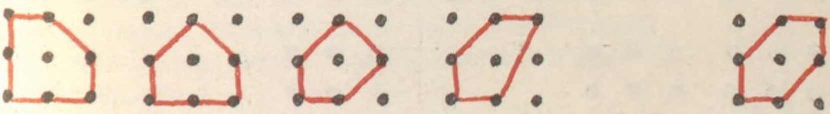


Abb. 88

22. *Aufgabe.* Konkave Fünfecke:

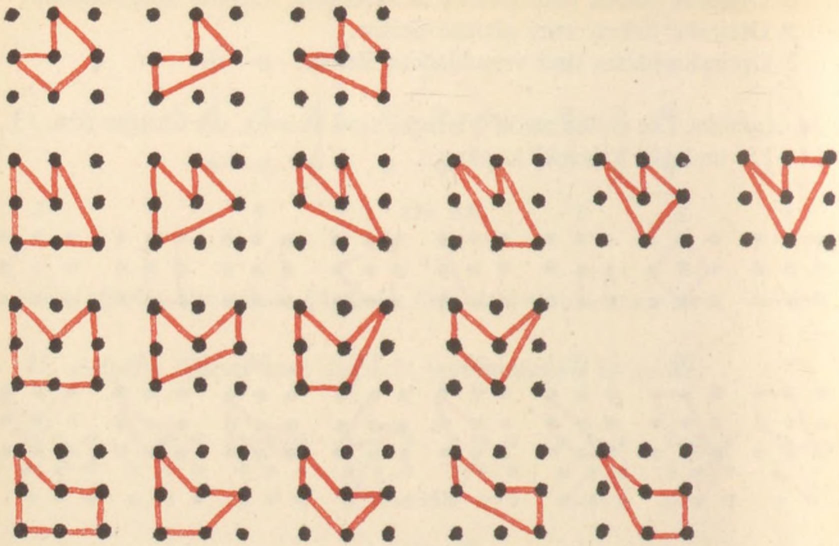


Abb. 89

Konkave Sechsecke:

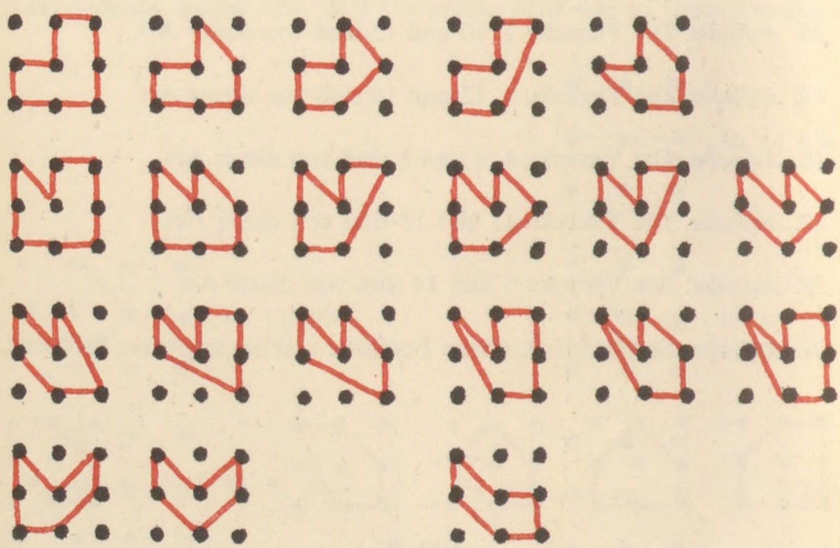


Abb. 90

Konkave Siebenecke:

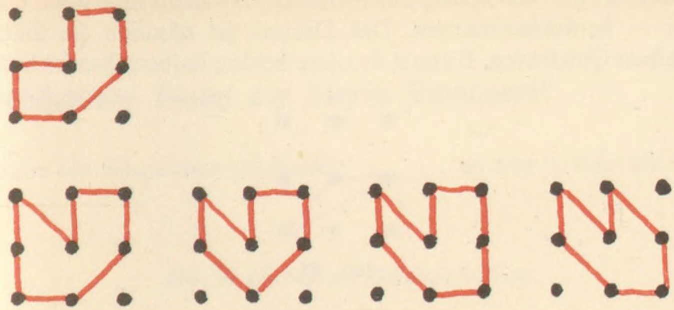


Abb. 91

23. *Aufgabe.*

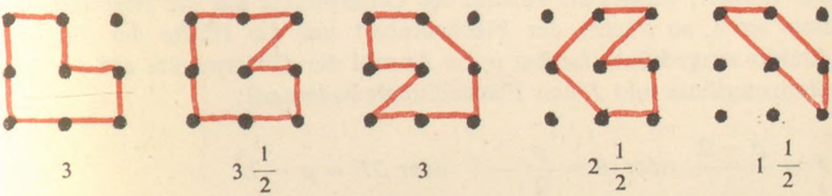


Abb. 92

24. *Aufgabe.* Wenn wir das Dreieck der Abb. 93 durch zwei solche Dreiecke  ergänzen, wird der Flächeninhalt offensichtlich gleich $3\frac{1}{2}$; der Flächeninhalt unseres Dreiecks beträgt also $1\frac{1}{2}$.

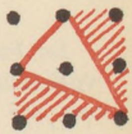


Abb. 93

Das Viereck in Abb. 94 ist nur um das kleine schraffierte Dreieck – dessen Flächeninhalt die halbe Einheit beträgt – kleiner als das vorige Dreieck. Der Flächeninhalt unseres Vierecks beträgt also 1.

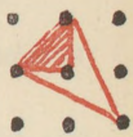


Abb. 94

Dieses Dreieck aber ist die Hälfte des vorigen Vierecks, sein Flächeninhalt beträgt also die Hälfte der Einheit. (Das kann man auch anders – leichter – herausbekommen. Das Dreieck ist nämlich die Hälfte von zwei halben Quadraten. Kannst du diese beiden halben Quadrate finden?)

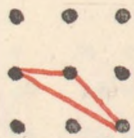


Abb. 95

25. Aufgabe. Gibt es keinen Gitterpunkt im Inneren und enthält die Begrenzungslinie 3 Gitterpunkte, so beträgt der Flächeninhalt die Hälfte der Einheit; wächst die Anzahl der Gitterpunkte auf der Begrenzungslinie um 1, so wächst der Flächeninhalt um die Hälfte der Einheit. Anders ausgedrückt (wobei p die Anzahl der Gitterpunkte auf der Begrenzungslinie und F den Flächeninhalt bedeuten):

$$F = \frac{p-2}{2} \quad \text{oder} \quad F = \frac{p}{2} - 1 \quad \text{oder} \quad 2F = p - 2.$$

26. Aufgabe. Enthält das Innere des Vielecks einen Gitterpunkt, so ist der Flächeninhalt um 1 größer als wenn kein Gitterpunkt da wäre:

$$F = \frac{p-2}{2} + 1 \quad \text{oder} \quad F = \frac{p}{2} \quad \text{oder} \quad 2F = p.$$

Im Falle, daß im Inneren des Vielecks sogar mehrere Gitterpunkte vorhanden sind, beträgt der Flächeninhalt um so viele Einheiten mehr wie die Anzahl der inneren Gitterpunkte:

$$F = \frac{p-2}{2} + i \quad \text{oder} \quad F = \frac{p}{2} + i - 1 \quad \text{oder} \quad 2F = p + 2i - 2.$$

(Kontrolliere es!)

Der sonderbare Baum des Herrn Fibonacci*

Ich habe ein Bäumchen gepflanzt:  es war 1 Jahr alt.

Abb. 96 Einjähriger Fibonacci-Baum

Nach einem Jahr war es zweimal so groß. Es hat auch einen langen Seitenast angesetzt:

Abb. 97 Zweijähriger Fibonacci-Baum

Im nächsten Jahr ist der Baum weiter gewachsen. Ein neuer Seitenast ist gewachsen. Auch der erste Ast ist weitergewachsen, aber nach oben:

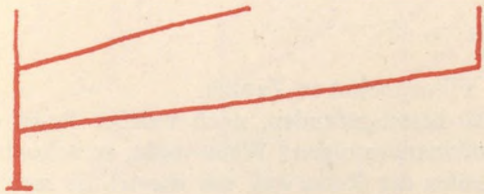


Abb. 98 Dreijähriger Fibonacci-Baum

* Fibonacci (lies Fibonattschi), italienischer Mathematiker (geb. etwa 1180, gest. um 1250)

Von Jahr zu Jahr wuchs jeder Ast weiter nach oben, auch der Hauptast. Aus jedem Ast, der schon ein Jahr lang nach oben gewachsen ist, sproß im nächsten Jahr auch wieder ein Seitenast:

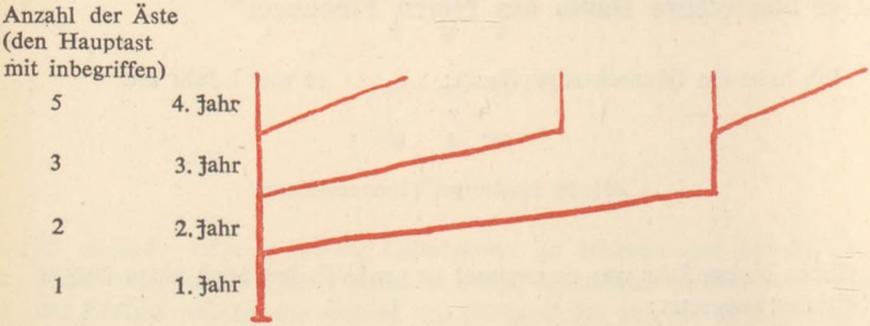


Abb. 99 Vierjähriger Fibonacci-Baum

1. Aufgabe. Wie hat sich der Baum im 5. Jahr weiter entwickelt? Fertige eine Zeichnung an! Die einjährigen Äste, die schief gewachsen sind, wachsen nicht schief weiter, sondern gerade nach oben. Nach oben wächst jeder Ast immer weiter.

2. Aufgabe. Zeichne hier auf, wie viele Endungen der Baum von Jahr zu Jahr gehabt hat! Setze die Zeichnung auf einem eigenen großen Blatt Papier fort, und ergänze diese Zahlenreihe:

1, 2, 3, 5, –, –, –, –, –

Das sind die Fibonaccischen Zahlen.

Hast du schon herausgefunden, nach welcher Regel die Fibonaccischen Zahlen aufeinanderfolgen? Wenn nicht, so schreibe in der Mitte unter je zwei Zahlen der Reihe auf, um wieviel die rechtsseitige größer ist als die linksseitige! Vergleiche dann die untere Zahlenfolge mit der oberen! Führe die untere dementsprechend weiter, und setze dann auf Grund der unteren auch die obere fort!

1 2 3 5 8 13
1 1 2 3 5 – –

Kannst du die obere Zahlenfolge auch dann fortsetzen, wenn die untere nicht da ist? Was addierst du zu 3, um die nächste Zahl zu erhalten?

....

Zu 5?...................... Zu 8?......................

Du addierst zu jeder Zahl die vorhergehende Zahl. Jede neue Zahl ist die Summe der beiden vorangehenden Zahlen.

3. Aufgabe. Die zweite Zahlenfolge zeigt, daß der Zahl 1 die Zahl 1 vorangeht. Und weiter? Kannst du die Folge rückwärts fortsetzen? Laß uns mal sehen:

–	–	1	2	3	5	8					
	–	–	1	1	2	3					

(Du darfst nicht vergessen, daß jeweils die linksseitige Zahl von der rechtsseitigen abzuziehen ist. Man kann auch größere Zahlen von kleineren abziehen, wenn man die negativen Zahlen kennt.)

Hier ist ein großgewachsener Fibonacci-Baum. Vergleiche ihn mit dem, den du gezeichnet hast!

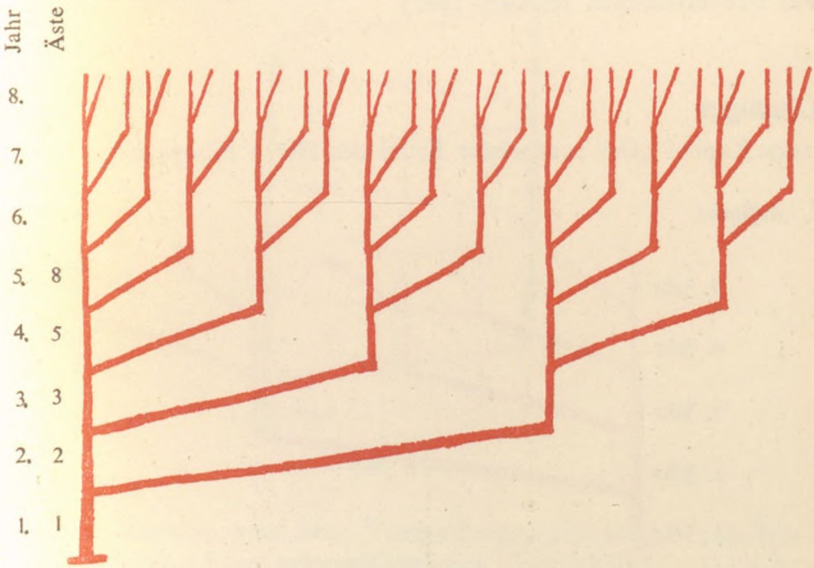


Abb. 100 Achtjähriger Fibonacci-Baum

Wenn du auf die Idee kommst, auch die vorangehenden Zahlen der Fibonaccischen Folge zu zeichnen, so mußt du den Baum zunächst auf diese Weise nach unten verlängern:

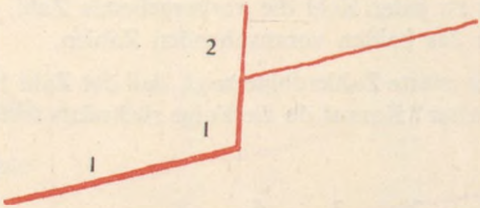


Abb. 101 Der Fibonacci-Baum, mit seinem Abschnitt vom vorigen Jahr

Das Weitere ist dann schon ganz komisch: Der Baum bricht ab, dann erscheint wieder ein Ast, d. h. eine Wurzel, und dann müßten -1 Äste folgen, was man aber nicht mehr zeichnen kann.

Es ist nicht möglich, alles zu zeichnen, was durch Zahlen ausgedrückt werden kann. (Es lohnt sich allerdings auch nicht immer zu zeichnen, was sich tatsächlich zeichnen läßt.)

Lösungen

(zum Kapitel „Der sonderbare Baum des Herrn Fibonacci")

1. Aufgabe.

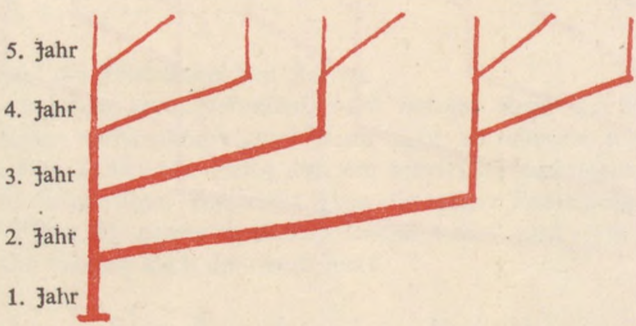


Abb. 102 So sieht der fünfjährige Fibonacci-Baum aus

2. Aufgabe.
1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 und so weiter; jede weitere Zahl ist die Summe der beiden vorangehenden Zahlen.

3. Aufgabe.

−1	1	0	1	1	2	3	5	8
	2	−1	1	0	1	1	2	3

Und so weiter .... Es kann nach beiden Seiten fortgesetzt werden.

Die Serpentine und der steile Weg

Die Touristen gehen auf einen Berg. Es führt eine Serpentine hinauf: Der Weg wendet sich nach rechts, dann nach links, wieder nach rechts, wieder nach links usw. Bei den scharfen Kurven gibt es aber auch Querwege; wer den steilen Anstieg nicht scheut, kann sich einige Bogen ersparen.

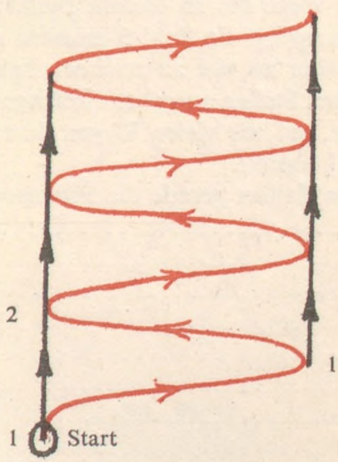


Abb. 103

1. Aufgabe. Schreibe neben jeden Verzweigungspunkt, auf wie viele Weisen die Touristen dorthin gelangen konnten. Natürlich gingen sie immer vorwärts, in Richtung der Pfeile, niemals zurück. Zu den beiden ersten

Abzweigstellen haben wir die entsprechenden Zahlen schon hingeschrieben. Der Ausgangspunkt erhielt die Zahl 1, weil es ja vor diesem Punkt keine Verzweigung gibt, dorthin konnte man also nur auf einem Weg gelangen.

Du kannst es so fortsetzen, daß du immer alle möglichen Wege zeichnest. Zum Beispiel:

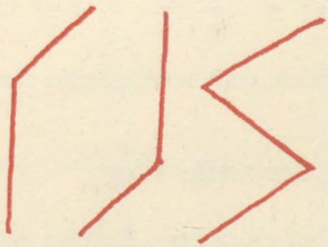


Abb. 104

Das sind sämtliche Wege bis zu diesem Punkt; daraus ersiehst du, daß die nächste Verzweigung die Zahl 3 erhalten muß.

Später würdest du aber zu viel zu zeichnen haben. Bedenke: Wenn du irgendwohin von zwei Stellen ausgehend gelangen kannst, so brauchst du nur zu untersuchen, auf wie vielen Wegen du zur einen und zur anderen Stelle kommen könntest.

Stimmt es, daß diese Zahlen gerade die Fibonaccischen Zahlen sind?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. Aufgabe. Beobachte, wie viele Wege in diesen Figuren vom Ausgangspunkt A zu den anderen Verzweigungspunkten führen!

Schreibe die entsprechenden Zahlen neben die Verzweigungspunkte!

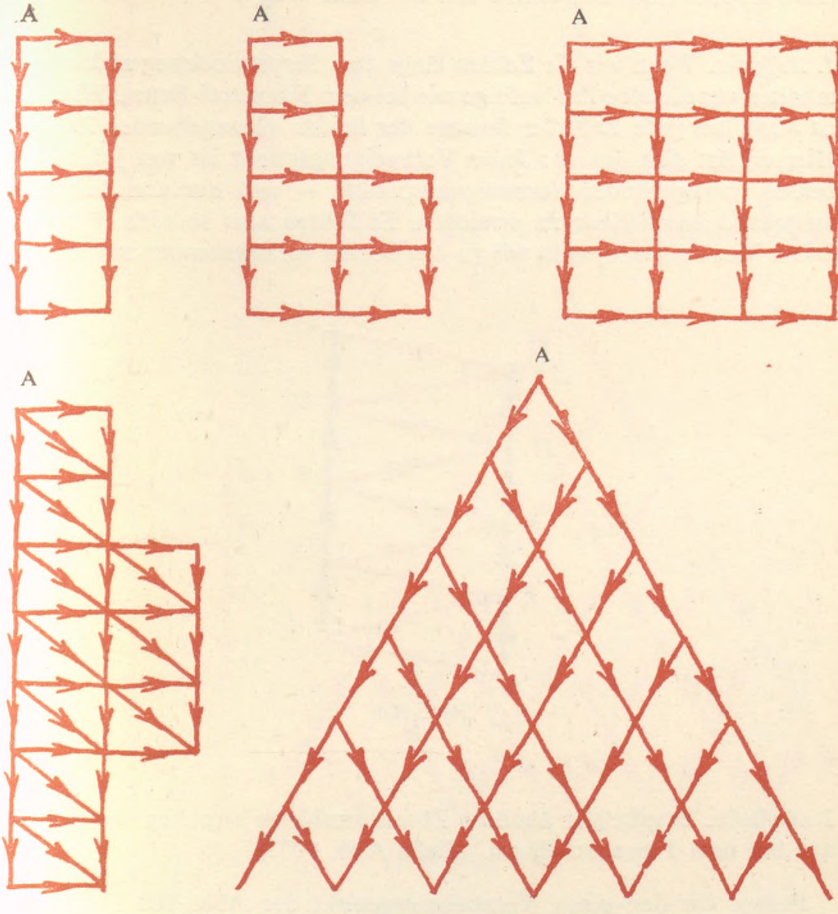


Abb. 105

Hast du irgendeinen Zusammenhang zwischen den Zahlen bemerkt?

Lösungen

(zum Kapitel „Die Serpentine und der steile Weg")

1. Aufgabe. Wenn wir die Zahlen längs dem Serpentinenweg ablesen, so erhalten wir dieselbe Zahlenfolge wie bei dem Fibonacci-Baum. Wie dort ist auch hier jede Zahl die Summe der beiden vorangehenden Zahlen. Hier erklärt sich das so: Jeder Verzweigungspunkt ist von jedem der beiden vorangehenden Verzweigungspunkte – und nur von diesen – ausgehend unmittelbar zu erreichen. Es führen also so viele Wege zu jedem Verzweigungspunkt wie zu den beiden vorangehenden zusammen.

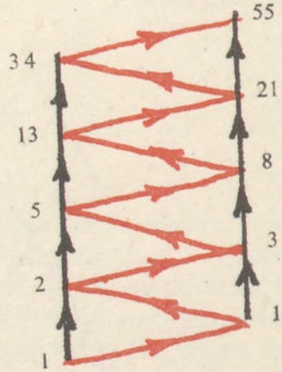


Abb. 106

2. Aufgabe. Es gibt hier ähnliche Zusammenhänge zwischen den Zahlen wie bei dem Fibonacci-Baum. (Siehe Abb. 107!)

Fassen wir den roten Verzweigungspunkt der Abb. 108 ins Auge! Zu diesem Punkt kann man von den drei vorangehenden – schwarzen – Verzweigungspunkten ausgehend gelangen. Kein Wunder, daß die Anzahl der zum roten Punkt führenden Wege genau die Summe der Zahl der Wege ist, die zu den drei schwarzen Punkten führen. Ist das auch an den anderen Stellen der Figur so?

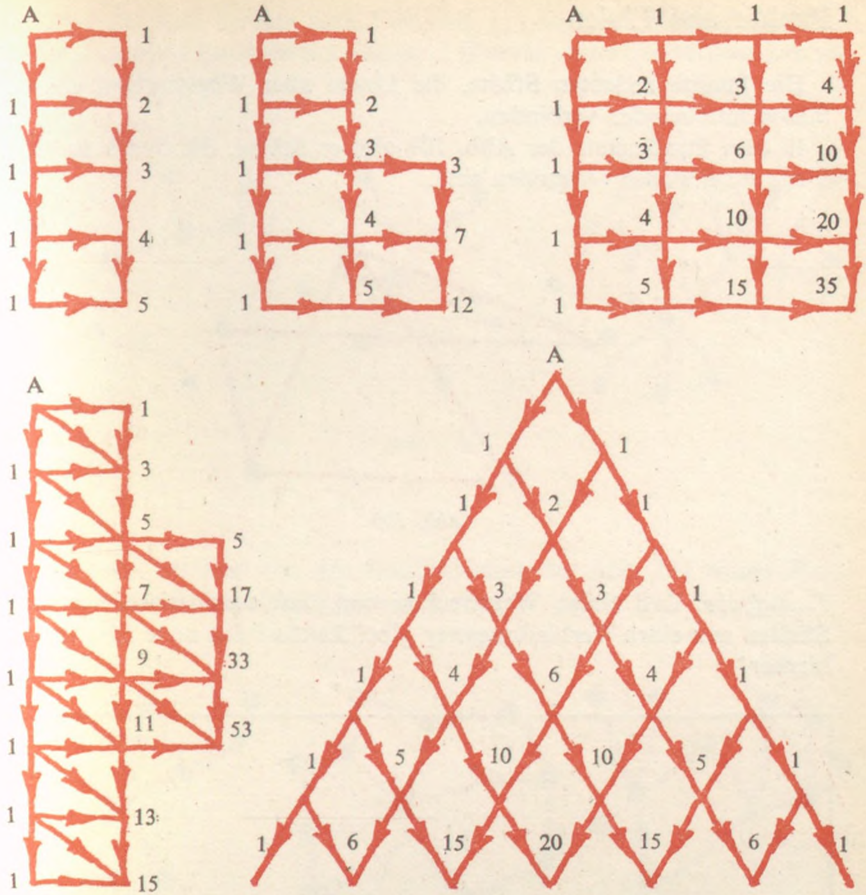


Abb. 107

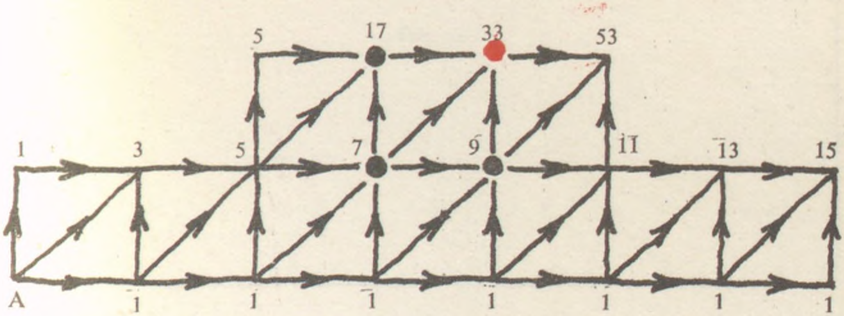


Abb. 108 Die Anzahl der zum roten Punkt führenden Wege ist gleich der Summe der Anzahlen der zu den drei schwarzen Punkten führenden Wege

Punkte und Linien

Die Punkte bedeuten Städte, die Linien aber Wegstrecken, die die Städte miteinander verbinden.

In dem Straßennetz der Abb. 109 gibt es Städte, die durch mehrere Wege miteinander verbunden sind.

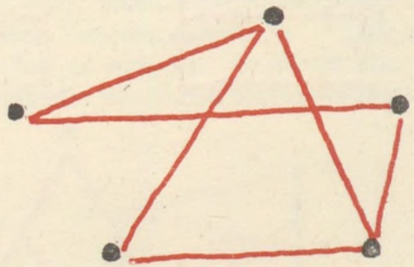


Abb. 109

1. Aufgabe. Laß einige Wegstrecken weg, damit es zwischen je zwei Städten nur einen Verbindungsweg gibt! Zeichne das neue Straßennetz hierher!

2. Aufgabe. Sieh dir die Abb. 110 und 111 an! Vergleiche die beiden Arten von Straßennetzen miteinander! Was für einen Unterschied kannst du erkennen?

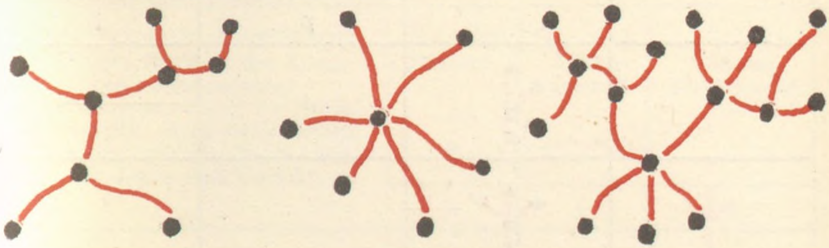


Abb. 110

3. Aufgabe. Streiche von den Straßennetzen der Abb. 111 einige Wegstrecken, damit keine Ringstraßen bleiben!

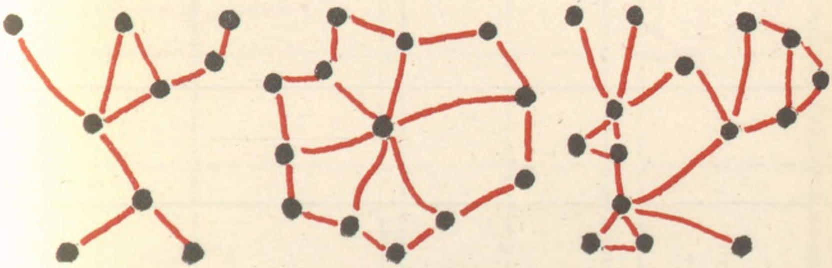


Abb. 111

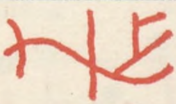
Zeichne noch mehr solcher Linien!	Setze Punkte ein (setze es fort)!	Wieviel Punkte?	Wieviel Linien sind zwischen den Punkten?
			
		p	l
		4	3
			
			
			
			

Abb. 112

Kannst du irgendeine Regel erkennen? Schreibe sie hierher! ....

....

....

....

Sind in einer Zeichnung mehrere Bäume vorhanden, so gilt nicht mehr dieselbe Regel. Es kommt auch darauf an, wie viele Bäume da sind, d. h. *aus wie vielen Teilen die Figur besteht.* Suche eine Regel, die auch für solche Fälle immer gültig ist!

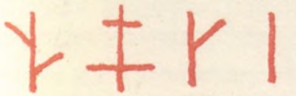
Zeichne auch an diesen Bäumen je einen Punkt an den Enden und Verzweigungen! (Du kannst auch in die Mitte eines Astes einen Punkt setzen. Prüfe nach, ob die Regel auch für diesen Fall zutrifft!)	Wie viele Punkte?	Wie viele Linien-stücke?	Wie viele Bäume (alleinstehende Teile)?
	p	l	t
			
			
			

Abb. 113

Schreibe die Regel hierher! (Du kannst es auf mehrere Weisen tun.)

....

....

....

....

Für Bäume gilt immer diese Regel: $p = l + t$. (Es gibt soviel Punkte wie Linienstücke und alleinstehende Teile zusammen.) Man kann das auch anders aufschreiben: $l = p - t$, $l + t = p$ usw.

Prüfe diese Regel auch an den folgenden Zeichnungen! Schreibe sie unter die Figuren, für welche sie zutrifft! Unter die anderen schreibe entsprechende zutreffende Regeln!

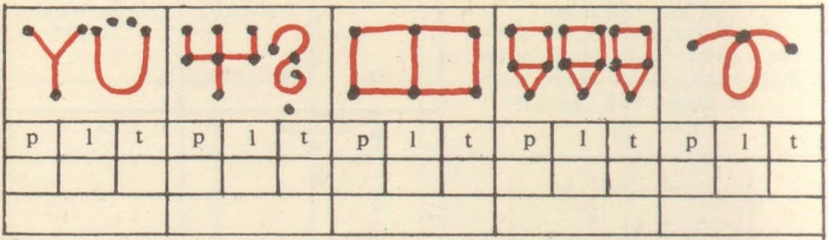


Abb. 114

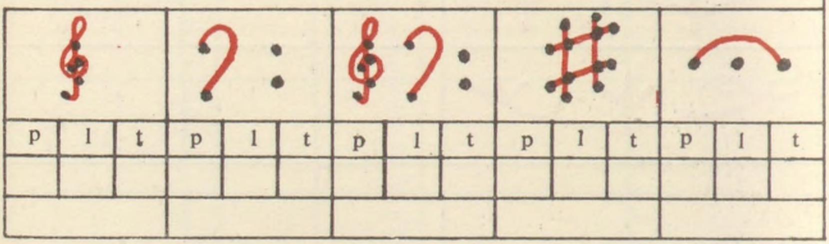


Abb. 115

Wir möchten aber eine Regel haben, die für alle Zeichnungen gültig ist.

Betrachte die Fälle, wo p nicht gleich der Summe von l und t ist; welche ist die größere Zahl, p oder $l + t$? *Um wieviel ist sie größer? Welche Anzahlen sind bei diesen Figuren gleich?*

Ist p nicht gleich $l + t$, so ist immer $l + t$ die größere Zahl von beiden; das hast du wohl schon bemerkt. Siehst du aber auch, wovon es abhängt, daß die Differenz 1, 2 oder gar 6 beträgt? Letzteres ist zum Beispiel bei der vierten Figur der Fall. Diese Differenz ist immer gleich der Anzahl der inneren (umgrenzten) Gebiete.

Überprüfe, ob das auch für andere Zeichnungen zutrifft! (Entwirf selbst solche Figuren!)

<table>
<tr><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>p</td><td>l</td><td>t</td><td>i</td><td>p</td><td>i</td><td>l</td><td>t</td><td>p</td><td>i</td><td>t</td><td>l</td><td>p</td><td>l</td><td>t</td><td>i</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

4. Aufgabe. Schreibe in die untersten Zeilen solche Regeln (Formeln), die für alle Figuren gültig sind! Ein und dieselbe Regel läßt sich auf viele Weisen aufschreiben. Die Buchstaben sind eben deshalb in verschiedene Reihenfolgen gesetzt, damit dir darüber die Formeln einfallen, in denen die Buchstaben in eben diesen Reihenfolgen aufgeschrieben sind. (Es gibt auch noch viele andere Reihenfolgen.)

Wie gestaltet sich die Regel, wenn wir nicht nur die inneren Gebiete, sondern auch das äußere Gebiet in Betracht nehmen? (Es gibt immer nur ein äußeres Gebiet, ob es innere Gebiete gibt oder nicht.) Dann schreiben wir statt i besser g; dieser Buchstabe soll die Anzahl der Gebiete der Ebene oder des Rechtecks bedeuten, die durch unsere Linien entstehen.

Versuche es an einigen Figuren!

<table>
<tr><td>p</td><td>l</td><td>t</td><td>g</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
</table>

5. Aufgabe. Welche Regel gilt für *zusammenhängende* Zeichnungen, die also nicht aus mehreren alleinstehenden Teilen bestehen? (In der entsprechenden Formel soll der Buchstabe t nicht vorkommen!)........

....

Lösungen

(zum Kapitel „Punkte und Linien")

1. Aufgabe. Es gibt mehrere Lösungen, zum Beispiel diese:

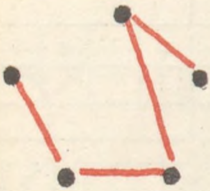


Abb. 116

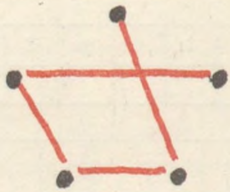


Abb. 117

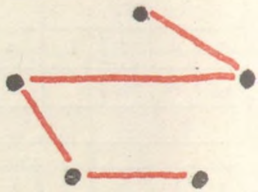


Abb. 118

2. Aufgabe. In den Straßennetzen der Abb. 111 gibt es Ringstraßen, in der Abb. 110 gibt es dagegen keine.

3. Aufgabe. Es gibt mehrere Lösungen, zum Beispiel diese:

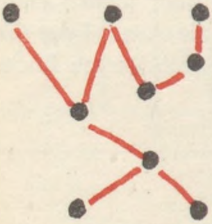


Abb. 119

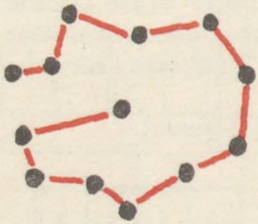


Abb. 120

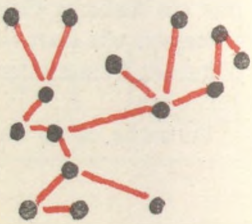


Abb. 121

4. Aufgabe. Zum Beispiel: $p = l + t - i$, $p + i = l + t$ usw.

5. Aufgabe. Zum Beispiel: $p - l + g = 2$, $p + g = l + 2$ usw.

Wahrscheinlichkeiten

Farbige Kugeln

1. Aufgabe. Wir legen 8 gelbe, 6 blaue und 5 rote Kugeln in eine Schachtel, mischen sie und greifen dann zwei von ihnen ohne hinzusehen heraus (eine Ziehung). Von welcher Farbe werden diese sein? Bestimmt kann man das nicht wissen; was aber ist am wahrscheinlichsten? Etwa gelbgelb? Schreibe in diesem Fall: gg! Oder gelb-blau? Schreibe das so auf: gb! Schreibe auch hierher, bevor du den Versuch machst, welchen Fall du für den zweitwahrscheinlichsten hältst, und so weiter, bis zum wenigsten wahrscheinlichen Fall! Schreibe immer zwei Anfangsbuchstaben!

Am wahrscheinlichsten	An zweiter Stelle		Am wenigsten wahrscheinlich

Und jetzt mache hundert Versuche! Ziehe immer zwei Kugeln, nach der Ziehung aber lege sie zurück, bevor du die nächsten zwei ziehst!

An Stelle von Kugeln kannst du auch Scheiben ziehen, diese lassen sich jedoch nicht so schnell und gründlich mischen. (Sind die beiden Seiten der Scheibe von verschiedener Farbe, so mußt du die eine durchstreichen.)

Du kannst auch andere Farben benutzen; natürlich veränderst du dann die erste Spalte der folgenden Tabelle:

	Setze nach jeder Ziehung einen Strich in die entsprechende Zeile!										
gg											
bb											
rr											
gb											
gr											
br											

Die senkrechten Trennungslinien sollen die Striche zu zehn trennen. Die Ergebnisse der ersten zehn Ziehungen kommen in die erste Spalte nach der Spalte mit den Buchstaben, die Ergebnisse der zweiten zehn Ziehungen in die nächste Spalte usw. In die letzte, breitere Spalte trage die Anzahl der Striche in jeder Zeile ein!

Bist du mit einer Spalte fertig, so denke darüber nach, ob deinen Ergebnissen irgendeine Gesetzmäßigkeit zugrundeliegt! Oder hat es sich ganz zufällig eben so ergeben?

Nachdem du eine Spalte ausgefüllt hast, kannst du deine Vermutung über die Reihenfolge ändern:

Neue Vermutungen nach Ausfüllen der	Am wahrscheinlichsten	An zweiter Stelle	An dritter Stelle	An vierter Stelle	An fünfter Stelle	An sechster Stelle
1. Spalte						
2. Spalte						
3. Spalte						
4. Spalte						

Neue Vermutungen nach Ausfüllen der	Am wahrscheinlichsten	An zweiter Stelle	An dritter Stelle	An vierter Stelle	An fünfter Stelle	An sechster Stelle
5. Spalte						
6. Spalte						
7. Spalte						
8. Spalte						
9. Spalte						
10. Spalte						

Nach hundert Versuchen hat sich die Reihenfolge schon ziemlich herausgebildet. Kannst du aber erklären, warum sich eben diese Reihenfolge bildet?

Überlege, auf wie viele Weisen zum Beispiel gelb-gelb gezogen werden kann! Wenn du die acht gelben Kugeln numerierst (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8), so kannst du folgende Fälle aufzählen:

g_1g_2						
g_1g_3	g_2g_3					
g_1g_4	g_2g_4	g_3g_4				
g_1g_5	g_2g_5	g_3g_5	g_4g_5			
g_1g_6	g_2g_6	g_3g_6	g_4g_6	g_5g_6		
g_1g_7	g_2g_7	g_3g_7	g_4g_7	g_5g_7	g_6g_7	
g_1g_8	g_2g_8	g_3g_8	g_4g_8	g_5g_8	g_6g_8	g_7g_8

Diese Ziehungen sind alle gleichwahrscheinlich. Und wie viele gb-Ziehungen gibt es? ....

Wenn du darangehst, diese ebenso aufzuschreiben, wirst du bald erkennen, daß das gar nicht nötig ist.

Ähnlich kannst du auch die anderen Anzahlen bestimmen. Es handelt sich um Ziehungen, die an sich alle gleichwahrscheinlich sind; du kannst ja die Farbe durch Betasten der Kugel nicht wahrnehmen, und deine Finger wählen auch mit gleicher Wahrscheinlichkeit die eine oder die andere Kugel von den gelben, den blauen oder den roten aus. Wenn also eine Farbenkombination wahrscheinlicher ist als die andere, so kommt das nur darauf an, auf wie viele Weisen diese Kombinationen zustande kommen können.

Die folgenden Figuren zeigen drei einfachere Fälle. Hier gibt es immer nur fünf Kugeln. Die Anzahl der Verbindungslinien zeigt an, auf wie viele Weisen Paare gezogen werden können. Lies die Wahrscheinlichkeiten von den Figuren ab, und trage sie in die Tabelle ein!

2. Aufgabe *3. Aufgabe* *4. Aufgabe*

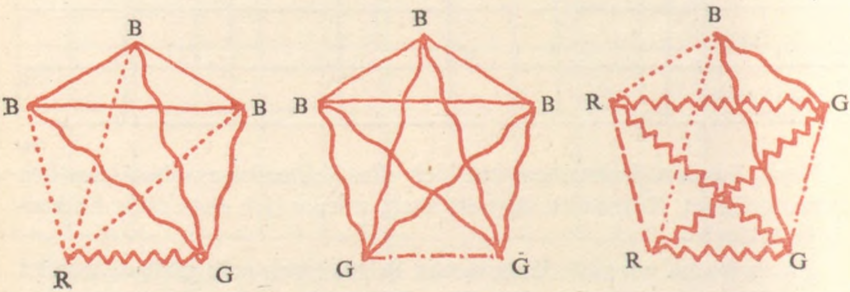


Abb. 122

Die Wahrscheinlichkeiten:

bb	
br	
bg	
rg	

bb	
gg	
bg	

br	
bg	
rg	
rr	
gg	

Lösungen

(zum Kapitel „Farbige Kugeln“)

1. Aufgabe. Haben wir 8 gelbe, 6 blaue und 5 rote Kugeln, und ziehen wir Paare, so sind die Anzahlen der möglichen Fälle, nach ihren Häufigkeiten geordnet:

Paare	gb	gr	br	gg	bb	rr	Insgesamt
Anzahl der Fälle	48	40	30	28	15	10	171

In den anderen drei Aufgaben:

2. Aufgabe

bb	3
br	3
bg	3
rg	1

3. Aufgabe

bb	3
gg	1
bg	6

4. Aufgabe

br	2
bg	2
rg	4
rr	1
gg	1

Diese Zahlen geben die Wahrscheinlichkeiten in Zehnteln an.

Experimente mit 2, 3, 4 Geldstücken

1. Aufgabe. Wirf zwei Geldstücke! Ist es wahr (wenn ja, setze den Buchstaben *w* nach die Aussage, wenn nicht, den Buchstaben *n*), daß es

a) zwei Fälle gibt: du wirfst entweder mit beiden dasselbe oder nicht dasselbe ....

b) drei Fälle gibt: zwei Kopfseiten; zwei Schriftseiten; eine Kopfseite, eine Schriftseite ....

c) vier Fälle gibt: zwei Kopfseiten; zwei Schriftseiten; das eine Geldstück zeigt die Kopfseite, das andere die Schriftseite; das andere zeigt die Kopfseite, das eine die Schriftseite ....

2. *Aufgabe.* Welche von den aufgezählten Fällen sind gleichwahrscheinlich?

a) ....
b) ....
c) ....

Es kommt nicht darauf an, ob du die zwei Geldstücke auf einmal wirfst oder zuerst das eine und dann das andere. Wirfst du zuerst nur das eine, so erhältst du entweder Kopf oder Schrift, und diesen Fällen kommt dieselbe Wahrscheinlichkeit zu $\left(\frac{1}{2} \text{ für beide Fälle}\right)$. Laß uns eine Zeichnung entwerfen!

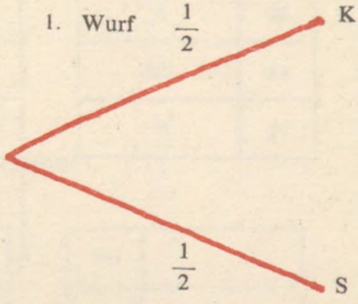


Abb. 123

Die Zahl $\frac{1}{2}$ zeigt an, daß bei vielen Würfen ungefähr die halbe Anzahl der Würfe das Ergebnis K erbringt. Die andere Hälfte ergibt das Ergebnis S.

Ob nun K oder S das Ergebnis des Wurfes ist, wir haben wieder zwei Fälle: Auch der zweite Wurf kann nur zweierlei ergeben, K oder S, deren Wahrscheinlichkeiten wieder gleich sind: Beiden kommt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zu.

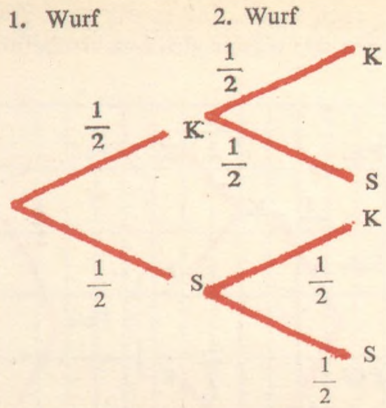


Abb. 124

Diese neuen Zahlen $\frac{1}{2}$ bedeuten folgendes: In ungefähr der Hälfte der Fälle, wo das Ergebnis des ersten Wurfes etwa K war, ergibt der zweite Wurf K und in der anderen Hälfte S. (Das gilt natürlich für genügend viele Würfe.) Ebenso wird in ungefähr der Hälfte der Fälle, wo wir zuerst S geworfen haben, zum zweiten Mal K herauskommen und in der anderen Hälfte S.

3. Aufgabe. Die Hälfte der Hälfte der Anzahl der Fälle: der wievielte Teil der Anzahl aller Fälle ist das? .... Was sind die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Fälle:

KK (zuerst K, dann wieder K): ....
KS (zuerst K, dann aber S): ....
SK (zuerst S, zum zweiten Mal K): ....
SS (zuerst S, dann wieder S): ....

Daraus ersieht man: Es gibt tatsächlich vier Fälle, und diese sind alle gleichwahrscheinlich $\left(\text{jedem kommt die Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{4} \text{ zu}\right)$.

Man kann es aber auch so auffassen, daß es drei Fälle gibt, nämlich KK, SS und gemischt; es ist ja nicht immer notwendig, ja sogar nicht immer möglich, die Fälle KS und SK voneinander zu unterscheiden. Diese drei Fälle sind nicht gleichwahrscheinlich.

Endlich kann man auch sagen, daß es nur zwei Fälle gibt: gleich und verschieden. Hier haben wir wieder gleichwahrscheinliche Fälle.

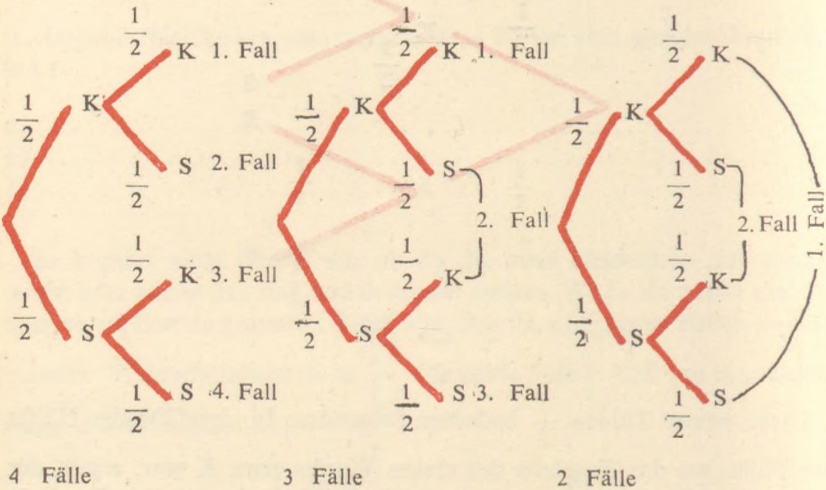


Abb. 125

4. Aufgabe. Prüfe nach, ob der Fall „eine Kopfseite, eine Schriftseite" tatsächlich zweimal so häufig ist wie die Fälle „beide Kopf" und „beide Schrift"! Wirf zwei Geldstücke und ziehe Striche in die entsprechende Zeile! (Nach je zwanzig Würfen ziehst du einen langen Trennungsstrich.) Haben wir die Sache richtig überlegt, ist also der mittlere Fall wahrhaftig zweimal so häufig wie die beiden anderen, so müssen unter zwanzig Würfen ungefähr 10 von der einen Art und je 5 von den anderen Arten sein. Natürlich kann das Ergebnis auch davon abweichen.

1. Fall	beide Kopf	
2. Fall	einmal Kopf, einmal Schrift	
3. Fall	beide Schrift	

Nach jedem Strich, wohin auch immer du ihn ziehst, streiche hier ein Feld an, damit du es siehst, wenn du zum zwanzigsten Strich gelangt bist!

1. Zwanzigerserie																				
2. Zwanzigerserie																				
3. Zwanzigerserie																				
4. Zwanzigerserie																				
5. Zwanzigerserie																				
6. Zwanzigerserie																				

5. Aufgabe. Du wirfst *drei* gleiche Geldstücke und achtest nur darauf, wie viele von den oberen Seiten gleich sind. Wie viele Fälle gibt es dann? Zähle sie hier auf: ....

....

6. Aufgabe. Was meinst du, sind diese Fälle von gleicher Wahrscheinlichkeit? Ob ja oder nein, schreibe hierher, welche Wahrscheinlichkeit einem jeden dieser Fälle zukommt!

Fälle: ....

Wahrscheinlichkeiten: ....

7. Aufgabe. Wie beurteilst du den folgenden Gedankengang? Bei drei Geldstücken gibt es bestimmt zwei gleiche Seiten; zeigt nämlich das eine Stück die Kopfseite und das andere die Schriftseite, so muß auch das dritte entweder die Kopfseite oder die Schriftseite zeigen. Es wird also immer zwei gleiche geben. Das dritte ist nun ebenso oder anders, und diese beiden Fälle sind gleichwahrscheinlich. Sind zum Beispiel die beiden gleichen S, so kann das dritte mit gleicher Wahrscheinlichkeit S oder K sein. Auch wenn die beiden gleichen K sind, ist es gleichwahrscheinlich, daß das dritte K und daß es S ist. Stimmt das? ....

....

....

8. Aufgabe. Stelle auf jeden Fall Versuche an! Die Experimente werden die Wahrscheinlichkeiten im allgemeinen nicht genau ergeben; sie können dennoch aufschlußreich sein, und zwar darfst du von wenigen Experimenten nur wenig, von vielen Experimenten aber eine größere Genauigkeit erwarten. Trage die Ergebnisse hier ein, und schreibe dann die Folgerungen auf, die du aus den Versuchen ziehen kannst!

3 gleiche	
2 gleiche, 1 anders	

....

....

Wenn Überlegung und Erfahrung auseinandergehen, so müssen wir Mittel und Wege suchen, um die Sache zu entscheiden. Man kann weitere Erfahrungen sammeln und es auch mit anderen Gedankengängen versuchen. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung lohnt es sich zuweilen, die Fälle feiner aufzuteilen. Zum Beispiel wollen auch wir jetzt nicht nur darauf achten, wie viele gleiche Seiten oben liegen, sondern wir wollen in Betracht ziehen, wie viele Kopfseiten zu sehen sind. (Daraus kann man natürlich auch die Anzahl der Schriftseiten erfahren.)

9. Aufgabe. Schreibe die möglichen Fälle hierher, und gib die Wahrscheinlichkeiten an, die deiner Meinung nach den einzelnen Fällen zukommen! (Die Wahrscheinlichkeiten kannst du prozentual oder durch Dezimalbrüche oder in gemeiner Bruchform ausdrücken):

Mögliche Anzahl der Kopfseiten?	
Ihre Wahrscheinlichkeiten (Schätzung)	

10. Aufgabe. Versuche, durch Experimente zu bestimmen, mit welcher Wahrscheinlichkeit beim Werfen von 3 Geldstücken 0, 1, 2, 3 Kopfseiten oben zu liegen kommen! Ziehe nach jedem Wurf einen Strich in die entsprechende Zeile!

0 Kopfseiten	
1 Kopfseite	
2 Kopfseiten	
3 Kopfseiten	

Was zeigen die Experimente? ....

....

Im Falle von zwei Geldstücken haben wir unsere Überlegung auch mit einer Zeichnung unterstützt. Wir haben zu diesem Zweck die Sache so aufgefaßt, als würfen wir die zwei Geldstücke nicht auf einmal, sondern einzeln, nacheinander. (Dann brauchen wir aber natürlich gar nicht zwei Geldstücke, wir kommen auch mit einem aus.) Laß uns jetzt eine solche Zeichnung auch für den Fall von drei Geldstücken anfertigen!

11. Aufgabe. Führe die Zeichnung in Abb. 126 zu Ende! Lies längs den Linien ab, was für Fälle möglich sind, wenn wir drei Geldstücke werfen und auch die Reihenfolge in Betracht ziehen! (Letztere bedeutet, daß wir die Geldstücke voneinander unterscheiden.)

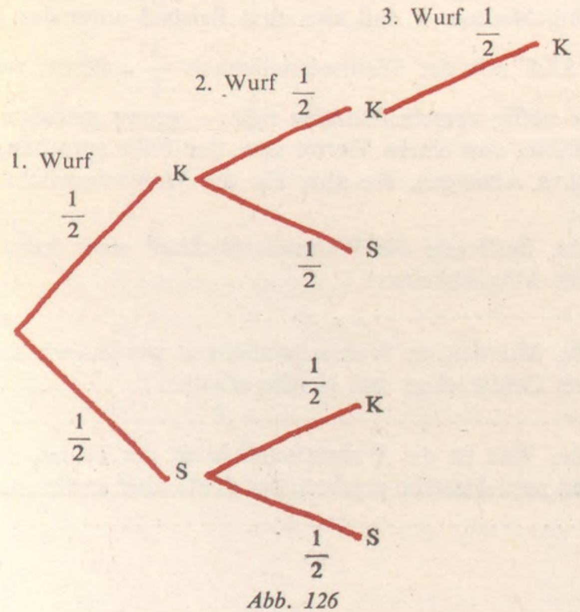


Abb. 126

Die möglichen Fälle sind jetzt: KKK, ...

....

Aus der Zeichnung ersehen wir nicht nur, was für Fälle in Frage kommen, sondern wir können auch ihre Wahrscheinlichkeiten ablesen. Die zu den Linien geschriebenen Brüche sind so zu verstehen: Bei sehr vielen Würfen werden wir im ungefähr sovielten Teil (also in ungefähr der Hälfte) der Fälle das Ergebnis erhalten, welches am Ende der betreffenden Linie steht. Zu Beginn (linkes Ende der Zeichnung) handelt es sich um die Gesamtheit der Fälle, im weiteren nur um die Fälle, die dem jeweiligen Ast entsprechen.

Verfolgen wir zum Beispiel die Linie SKS. Der erste Wurf wird in der Hälfte der Fälle S ergeben. In der Hälfte der Anzahl *der Fälle, wo der erste Wurf* S *ergab*, erhalten wir zum zweiten Mal K. Das ist schon nur ein Viertel der Anzahl aller Würfe. (Es sind dies die Würfe, die mit SK anfangen.) Der dritte Wurf wird in der Hälfte *der Anzahl dieser letzteren Fälle* S ergeben. Das ist die Hälfte eines Viertels, also ein Achtel der Anzahl aller Fälle.

Natürlich werden unsere Behauptungen „Hälfte", „Viertel", „Achtel" nicht genau, sondern nur ungefähr zutreffen. D. h. bei sehr vielen Würfen wird sich die Sache im allgemeinen ziemlich genau so verhalten, bei wenigen Würfen kann aber das Ergebnis bedeutend davon abweichen, was wir berechnet haben. Beachte aber, daß unsere Behauptungen über Wahrscheinlichkeiten – daß also zum Beispiel unter den Dreierserien die Serie SKS mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ auftritt, wenn nur die Geldstücke völlig vorschriftsmäßig sind – genau zutreffen. Wenn wir von der Hälfte, von einem Viertel usw. der Fälle sprechen, so machen wir ungenaue Aussagen, die aber für die Wahrscheinlichkeiten genau wahr sind.

12. Aufgabe. Bestimme die Wahrscheinlichkeit einer jeden der aufgezählten acht Möglichkeiten! ....

....

13. Aufgabe. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden wir beim Aufwerfen von drei Geldstücken drei gleiche erhalten? ....

....

14. Aufgabe. Was ist die Wahrscheinlichkeit des Falles, daß von den drei Würfen zwei dasselbe ergeben, der dritte aber anders ausfällt? ....

....

15. Aufgabe. Fülle diese Tabelle aus!

Anzahl der Kopfseiten bei 3 Geldstücken	Wahrscheinlichkeit dieses Falles (in Form eines gemeinen Bruches; durch einen Dezimalbruch auf zwei Stellen; in ganzen Prozenten ausgedrückt)
0	
1	
2	
3	

16. Aufgabe. Du wirfst vier Geldstücke. Zeichne den Wahrscheinlichkeitsbaum hierher!

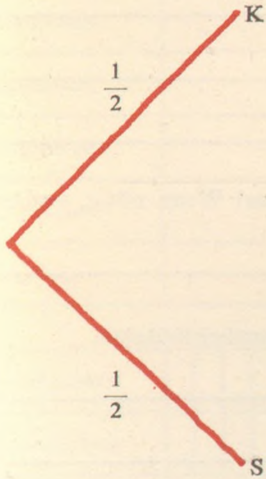


Abb. 127

17. Aufgabe. Zähle hier die möglichen Fälle auf, wenn vier Geldstücke geworfen werden, und zwar nacheinander (oder die Geldstücke sind voneinander unterschieden: 1., 2., 3., 4. Geldstück): KKKK, ...

....

....

18. Aufgabe. Welche Wahrscheinlichkeiten kommen den aufgezählten Fällen zu? ....

....

19. Aufgabe. Du kannst auch beim Aufwerfen von vier Geldstücken vier gleiche Fälle erhalten. Wieviel gleiche Fälle können sonst noch vorkommen? ....

....

Trage die Wahrscheinlichkeiten dieser Fälle in die Tabelle ein!

	Wahrscheinlichkeit
4 gleiche	
– gleiche	
–	

20. Aufgabe. Fülle auch diese Tabelle aus! Wenn nötig, verlängerst du sie. Wir geben die Lösung nicht an.

Anzahl der Kopfseiten bei 4 Geldstücken	Ihre Wahrscheinlichkeiten

21. Aufgabe. Stelle Versuche an, um die Ergebnisse der Aufgaben 19 und 20 zu prüfen! Es genügt, eine gemeinsame Serie von Versuchen durchzuführen. Nach jedem Wurf ziehst du einen Strich in je eine Zeile der beiden folgenden Tabellen, dem jeweiligen Ergebnis entsprechend! Hast du zum Beispiel eine Kopfseite und drei Schriftseiten erhalten, so ziehst du in der Zeile „3 gleiche“ der ersten Tabelle und in der Zeile „1 Kopfseite“ der zweiten Tabelle je einen Strich. Berechne auf Grund von zwanzig Würfen den prozentual ausgedrückten Näherungswert der Wahrscheinlichkeit, wirf dann zur Kontrolle noch zwanzigmal und rechne wieder! Nach jedem Wurf streichst du in der dritten Tabelle ein Feld an.

4 gleiche	
3 gleiche	
2 gleiche	

4 Kopfseiten	
3 Kopfseiten	
2 Kopfseiten	
1 Koptseite	
0 Kopfseite	

1. Zwanzigerserie																				
2. Zwanzigerserie																				

Lösungen

(zum Kapitel „Experimente mit 2, 3, 4 Geldstücken“)

1. Aufgabe. Alle drei Aussagen sind wahr. Die Unterscheidung der möglichen Fälle hängt auch von uns ab. Alle drei Fallunterscheidungen sind sinnvoll. (Vergleiche die 3. Aufgabe auf Seite 67 f.!)

2. Aufgabe. a) Diese Fälle sind gleichwahrscheinlich.
b) Beide Kopf, beide Schrift – das sind zwei gleichwahrscheinliche Fälle. Einmal Kopf, das andere Mal Schrift – das ist zweimal so wahrscheinlich wie jeder der vorigen Fälle (d. h. so wahrscheinlich wie die beiden zusammen).
c) Das sind wieder gleichwahrscheinliche Fälle.

3. Aufgabe. Die Hälfte der Hälfte der Anzahl der Fälle ist gleich einem Viertel der Anzahl aller Fälle. Das ist die Erklärung dafür, daß die Wahrscheinlichkeit eines jeden der Fälle KK, KS, SK und SS $\frac{1}{4}$ beträgt.

4. Aufgabe. Das Ergebnis kann sich etwa so gestalten:

1. Fall, beide Kopf				
2. Fall, einmal Kopf, einmal Schrift				
3. Fall, beide Schrift				

Abb. 128

5. Aufgabe. Es sind zwei Fälle möglich: 3 gleiche, 2 gleiche.

6. Aufgabe.

Fälle:	3 gleiche	2 gleiche
Wahrscheinlichkeiten:	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Deine Abschätzung ist schon ganz gut, wenn du überhaupt erraten hast, daß zwei gleiche häufiger vorkommen als drei gleiche; wenn du also zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit der zwei gleichen auf 60% und diejenige der drei gleichen auf 40% geschätzt hast. Wahrscheinlichkeiten abzuschätzen ist auch dann schwierig, wenn dir Versuchsergebnisse zur Verfügung stehen, geschweige denn, wenn du keine hast.

7. Aufgabe. Dieser Gedankengang ist fehlerhaft. Es treten zum Beispiel unter den Fällen, wo zwei von den drei Würfen S ergeben, beim dritten Wurf K und S nicht mit derselben Wahrscheinlichkeit auf. Gehst du die acht gleichwahrscheinlichen Fälle durch, die beim Werfen von drei Geldstücken möglich sind (siehe die 11. Aufgabe), so findest du unter ihnen vier Fälle mit KK, von welchen aber nur in einem Fall auch noch der dritte Buchstabe K ist, in den anderen drei Fällen ist es der Buchstabe S. Ähnlicherweise gibt es vier Fälle mit SS, von denen aber nur ein Fall SSS ist, in den anderen drei Fällen kommt ein K zu den beiden S hinzu. Unter solchen Bedingungen ist es also unrichtig zu sagen, daß „die Kopfseite und die Schriftseite gleichwahrscheinlich sind“. Auf diese Fälle beschränkt, sind sie eben nicht gleichwahrscheinlich!

8. Aufgabe. Du kannst etwa folgendes erhalten:

3 gleiche	𝍸 𝍸 ||
2 gleiche, 1 anders	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||||

Abb. 129

Zwei gleiche und das dritte anders: Das kommt ungefähr dreimal so oft vor wie der Fall, daß alle drei gleich sind.

9. Aufgabe.

Mögliche Anzahl der Kopfseiten	0	1	2	3
Ihre Wahrscheinlichkeiten	$\frac{1}{8} \approx 0{,}12 =$ $= 12\%$	$\frac{3}{8} \approx 0{,}38 =$ $= 38\%$	$\frac{3}{8} \approx 0{,}38 =$ $= 38\%$	$\frac{1}{8} \approx 0{,}12 =$ $= 12\%$

Du kannst mit deiner Abschätzung zufrieden sein, wenn die mittleren Zahlen größer sind als die äußeren und die Summe der Zahlen 1 beträgt.

10. Aufgabe. Deine Ergebnisse könnten von dieser Art sein:

Keine Kopfseite oben	𝍸 |||
1 Kopfseite oben	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||
2 Kopfseiten oben	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||
3 Kopfseiten oben	𝍸 𝍸

Abb. 130

Von den beiden äußeren Fällen gibt es weniger, ungefähr dieselbe Anzahl bei beiden. Die Anzahl der mittleren ist ungefähr gleich dem Dreifachen der Anzahl der äußeren.

11. Aufgabe.

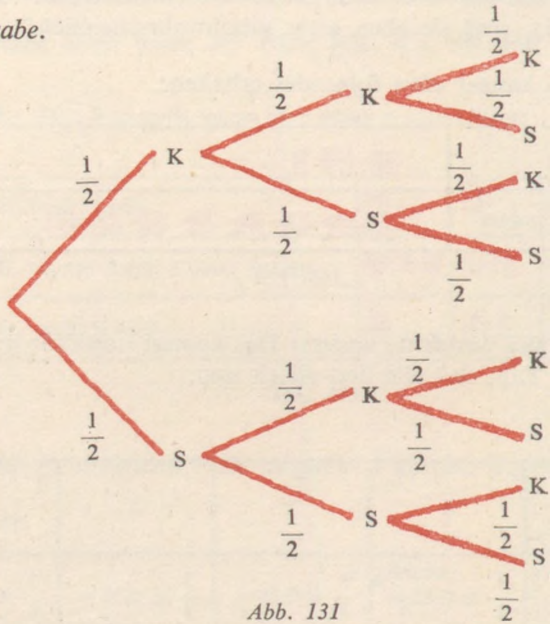


Abb. 131

Die möglichen Fälle sind: KKK, KKS, KSK, KSS, SKK, SKS, SSK, SSS.

12. Aufgabe. Allen acht Möglichkeiten kommt dieselbe Wahrscheinlichkeit zu: $\frac{1}{8}$.

13. Aufgabe. Ein Viertel. In ungefähr einem Achtel der Anzahl der Würfe ergibt sich KKK, dasselbe gilt für SSS, das macht zusammen ein Viertel aus. (Wesentlich ist, daß es sich hier tatsächlich um ein *anderes* Achtel handelt, daß wir also einander ausschließende Fälle haben.)

14. Aufgabe. $\frac{3}{4}$. Unter den acht Fällen gibt es nur diese sechs mit zwei gleichen Buchstaben: KKS, KSK, KSS, SKK, SKS, SSK. Jedem von diesen kommt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ zu, und $\frac{1}{8} \cdot 6 = \frac{3}{4}$.

15. Aufgabe. Vergleiche die Lösung der 9. Aufgabe. (Nur die Anordnung ist anders.)

16. Aufgabe.

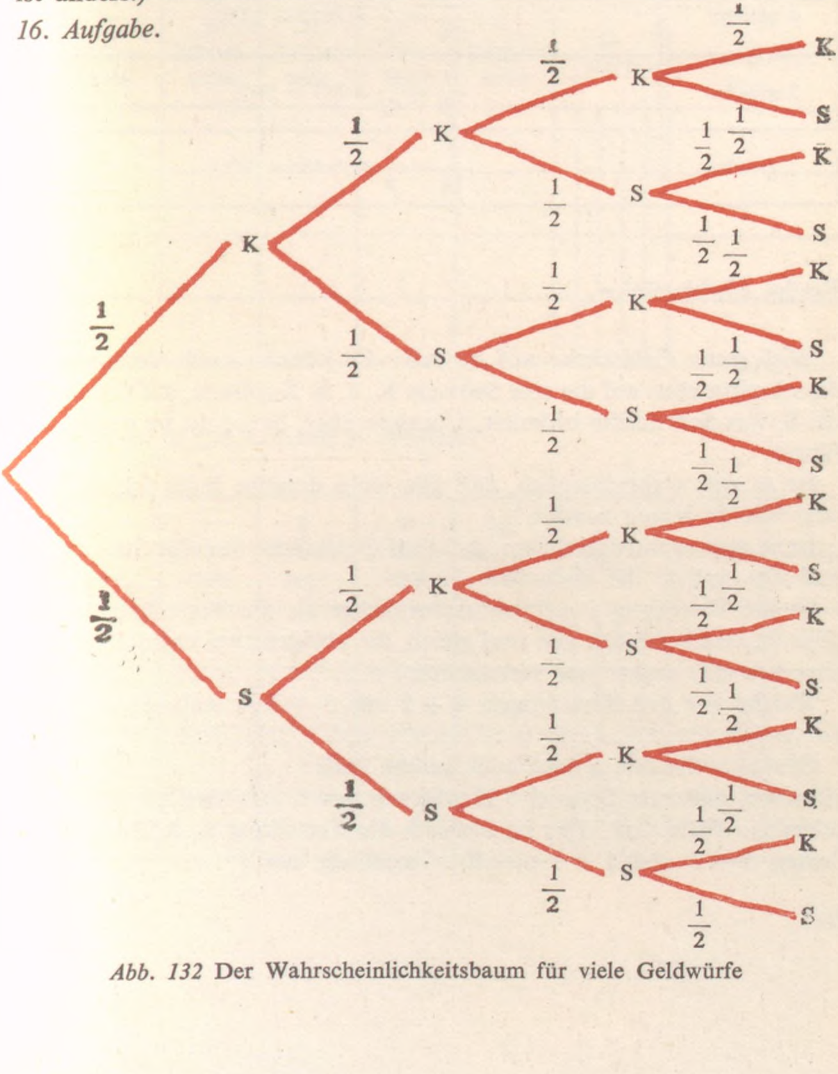


Abb. 132 Der Wahrscheinlichkeitsbaum für viele Geldwürfe

17. Aufgabe. KKKK, KKKS, KKSK, KKSS, KSKK, KSKS, KSSK, KSSS, SKKK, SKKS, SKSK, SKSS, SSKK, SSKS, SSSK, SSSS.

18. Aufgabe. Allen 16 Fällen kommt dieselbe Wahrscheinlichkeit zu: $\frac{1}{16}$.

19. Aufgabe. Es sind noch möglich: 3 gleiche; 2 gleiche (wo dann auch die beiden anderen gleich sind).

	Wahrscheinlichkeit
4 gleiche	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8} \approx 0{,}12 = 12\%$
3 gleiche	$\frac{8}{16} = \frac{1}{2} \approx 0{,}5 = 50\%$
2 gleiche	$\frac{6}{16} = \frac{3}{8} \approx 0{,}38 = 38\%$

Sechs Geldstücke

Wirf sechs Geldstücke auf einmal! Es können auch Jetons sein; du schreibst eben auf die eine Seite ein K, d. h. Kopfseite, auf die andere ein S, was Schriftseite bedeutet. Überlege aber, bevor du zu werfen anfängst:

Ist es sehr wahrscheinlich, daß alle sechs dieselbe Seite (also alle K oder alle S) zeigen werden? ....

Ist es etwa wahrscheinlicher, daß fünf Geldstücke dieselbe Seite zeigen und das sechste die andere? ....

Ist die Verteilung 5 + 1 wahrscheinlicher als die Verteilung 4 + 2? (Das letztere bedeutet: vier sind gleich, die übrigen zwei ebenfalls gleich, aber von den ersten vier verschieden.) ....

Welche von den Verteilungen 4 + 2 und 3 + 3 ist wahrscheinlicher?

....

Gibt es außer diesen auch noch andere Fälle? ....

(Beachte, daß zum Beispiel 6 Kopfseiten und 6 Schriftseiten nicht verschiedene Fälle sind! Das ist nämlich die Verteilung 6. Außerdem bedeuten 5 + 1 und 1 + 5 dieselbe Verteilung usw.)

Zähle alle Fälle nach abnehmender Wahrscheinlichkeit auf, so wie du dir die Wahrscheinlichkeiten denkst! ....

....

Jetzt kannst du anfangen zu experimentieren. Nach jedem Wurf ziehst du einen kleinen Strich in der entsprechenden Zeile der Tabelle. Zwischen zwei lange senkrechte Linien sollen jeweils zehn Striche kommen. Wenn du in einer Spalte schon zehn Striche hast, so gehst du zur nächsten Spalte über. Am Ende einer jeden Zeile zeichnest du die Anzahl der Striche in den einzelnen Spalten auf und schreibst ins letzte Feld die Summe dieser Zahlen.

	1. Zehner-serie	2. Zehner-serie	3. Zehner-serie	4. Zehner-serie	5. Zehner-serie	In Ziffern	Insgesamt
6							
5+1							
4+2							
3+3							

Versuchst du es mit weiteren 50 Würfen?

	6. Zehner-serie	7. Zehner-serie	8. Zehner-serie	9. Zehner-serie	10. Zehner-serie	In Ziffern	51–100	1–100
6								
5+1								
4+2								
3+3								

Welche Reihenfolge für die Wahrscheinlichkeit ergibt sich nach deinen Erfahrungen?

Am wahrscheinlichsten	An zweiter Stelle	An dritter Stelle	Am wenigsten wahrscheinlich

Die Erklärung ersiehst du aus der folgenden Tabelle. Sie zeigt, auf wie viele Weisen sich 6 Gleiche ergeben können (du weißt natürlich, daß es dafür zwei Möglichkeiten gibt: KKKKKK und SSSSSS), auf wie viele Weisen die Verteilung 5 + 1 (wie zum Beispiel KKKKKS, KKKSKK, SSSKSS) zustandekommen kann usw. Die „Wörter" sind alphabetisch angeordnet.

(Die Tabelle ist spaltenweise zu lesen!)

KKKKKK	KSKKKK	SKKKKK	SSKKKK
KKKKKS	KSKKKS	SKKKKS	SSKKKS
KKKKSK	KSKKSK	SKKKSK	SSKKSK
KKKKSS	KSKKSS	SKKKSS	SSKKSS
KKKSKK	KSKSKK	SKKSKK	SSKSKK
KKKSKS	KSKSKS	SKKSKS	SSKSKS
KKKSSK	KSKSSK	SKKSSK	SSKSSK
KKKSSS	KSKSSS	SKKSSS	SSKSSS
KKSKKK	KSSKKK	SKSKKK	SSSKKK
KKSKKS	KSSKKS	SKSKKS	SSSKKS
KKSKSK	KSSKSK	SKSKSK	SSSKSK
KKSKSS	KSSKSS	SKSKSS	SSSKSS
KKSSKK	KSSSKK	SKSSKK	SSSSKK
KKSSKS	KSSSKS	SKSSKS	SSSSKS
KKSSSK	KSSSSK	SKSSSK	SSSSSK
KKSSSS	KSSSSS	SKSSSS	SSSSSS

Die Häufigkeiten auf Grund der Tabelle:

	Wievielmal kommt das vor?
6	
5+1	
4+2	
3+3	

Es gibt insgesamt 64 Fälle, die zwei 6-Verteilungen machen $\frac{1}{32}$ der Anzahl der Fälle aus. Das ist also die Wahrscheinlichkeit dieser Verteilung. Schreibe auch die übrigen Wahrscheinlichkeiten auf! ....

....

Gerade und ungerade, groß und klein

1. Aufgabe. Ich wähle aufs Geratewohl eine Zahl; was ist wahrscheinlicher, daß sie gerade oder daß sie ungerade sein wird? ....

....

2. Aufgabe. Ich wähle aufs Geratewohl ein Kind. Ich frage, das wievielte Kind seiner Mutter es ist. Was ist wahrscheinlicher: daß diese Zahl gerade oder daß sie ungerade ist? ....

3. Aufgabe. Ich frage sehr viele Leute, im wievielten Stock sie wohnen. Wer im Erdgeschoß oder im Zwischengeschoß wohnt, zählt nicht.

Wenn ich nun von den anderen (die im 1., 2., 3. Stock usw. wohnen) jemanden aufs Geratewohl auswähle, was ist dann wahrscheinlicher, daß seine Zahl gerade oder daß sie ungerade ist? Wenn ich auch das Erdgeschoß zulasse und als 0-ten Stock betrachte, ist dann eine gerade oder eine ungerade Zahl wahrscheinlicher? (0 ist eine gerade Zahl.)

4. Aufgabe. Schlage die Zeitung bei der Sportseite auf oder eine Preisliste oder ein Buch über Physik, Astronomie u. ä. mit vielen Zahlen! Ist die Endziffer deiner Meinung nach häufiger gerade als ungerade oder ist es umgekehrt? ....
Erkläre auch, was der Grund dafür sein kann, daß es eben so ist:.......
....

5. Aufgabe. Ziehe Striche in die entsprechenden Zeilen, und prüfe auf diese Weise, welche Ziffern häufiger und welche seltener sind! Zeichne auf, was du erfahren hast!

Letzte Ziffer	(Striche)	Wieviel?
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Deine Erfahrung und die Erklärung dafür: ....
....
....

Fassen wir jetzt die *Anfangsziffern* ins Auge. Eine Null oder mehrere Nullen am Anfang der Zahl zählen nicht (3 mm = 0,3 cm = 0,003 m; wir werden in jedem dieser Fälle die 3 als Anfangsziffer betrachten). Die erste Ziffer kann also nur neunerlei sein: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

6. Aufgabe. Du gehst mit jemandem folgende Wette ein: Ihr kauft eine Sportzeitung und betrachtet die Anfangsziffern von hundert Sportresultaten. Bei 1, 2, 3 oder 4 bist du der Gewinner, bei 5, 6, 7, 8 oder 9 hat dein Gegner gewonnen. Was meinst du, für welchen Spieler ist diese Wette günstig? ....
Und wenn ihr nicht Sportresultate, sondern irgendwelche andere Zahlen betrachten würdet? ....

7. Aufgabe. Laßt uns mal versuchen! Hier ist die Tabelle für die Angaben:

Anfangsziffer	(Striche)	Wieviel?	Insgesamt
1			kleine Ziffern
2			
3			
4			
5			große Ziffern
6			
7			
8			
9			

(Trage in die letzte Spalte die Summe der ersten vier Zahlen ein, und schreibe die Summe der übrigen fünf Zahlen darunter!)

Was hast du beobachtet? ....

....

....

Versuche es auch mit anderen Zahlen! Es können zum Beispiel Hausnummern sein. (Im Fernsprechbuch findest du eine Menge Hausnummern.) Auch Büchern über Geographie, Physik, Chemie oder Astronomie kannst du Zahlen zu diesem Zweck entnehmen.

Diese Beobachtungen sind nicht leicht zu erklären. Die Zahlen können sehr verschieden sein, und die Erklärung hängt auch davon ab, was für Zahlen es sind.

8. Aufgabe. Versuche für den Fall von Hausnummern eine Erklärung zu finden! (Welche Anfangsziffern sind häufiger, wenn in der betreffenden Straße die Häuser von 1 bis 25 numeriert sind? Bis 50? Bis 75? Bis 100? Bis 125? Bis 150? Bis 250? ....

....

....

Entnehmen wir unsere Daten etwa einem Geographiebuch: die Flächeninhalte von Ländern, die Höhen von Bergen, Produktionsleistungen usw. Überlege nun einmal: Diese Daten hätte man auch in anderen Einheiten ausdrücken können; in Quadratmeilen anstelle von Quadratkilometern, in Schritten anstelle von Metern, in allerlei fremden Maßeinheiten. Die Umrechnung geschieht durch Multiplikation oder Division durch die Verhältniszahl (das Umrechnungsverhältnis) der Einheiten. Nehmen wir an, daß bei Zugrundelegung irgendeiner Maßeinheit alle neun möglichen Anfangsziffern gleich häufig vorkommen. Was geschieht aber, wenn wir jetzt die Zahlen auf andere Einheiten umrechnen? Darauf beziehen sich die folgenden Aufgaben.

9. Aufgabe. Welches können die Anfangsziffern des Zweifachen einer Zahl sein, die mit einer 1 beginnt? (Beachte, daß der Ziffer 1 noch weitere Ziffern folgen können!) ....

10. Aufgabe. Überlege das auch für die Fälle von Zahlen, die mit 2, 3, 4, ..., 9 beginnen, und zeichne die entsprechenden Pfeile in die Tabelle ein!

In der Spalte „Häufigkeit nach der Verdoppelung“ haben wir nach der Ziffer 2 die Zahl 50 gesetzt, weil die Zweifachen von hundert Zahlen, die mit 1 beginnen, in ungefähr halber Anzahl mit 2 beginnen. Bei den übrigen Ziffern kannst du ähnlich denken. Die Summe der Häufigkeiten muß 900 betragen (9 · 100).

Ausgangshäufigkeit	Anfangsziffer der Zahl	Anfangsziffer des Zweifachen der Zahl	Häufigkeiten nach der Verdoppelung
100	1	1	
100	2	2	50
100	3	3	
100	4	4	
100	5	5	
100	6	6	
100	7	7	
100	8	8	
100	9	9	

11. Aufgabe. Anstelle der Verdoppelung verdreifache jetzt die Zahlen! Stelle eine ähnliche Tabelle zusammen!

Ausgangshäufigkeit	Anfangsziffer der Zahl	Anfangsziffer des Dreifachen der Zahl	Häufigkeit nach der Verdreifachung
100	1	1	
100	2	2	
100	3	3	
100	4	4	
100	5	5	

Ausgangshäufigkeit	Anfangsziffer der Zahl	Anfangsziffer des Dreifachen der Zahl	Häufigkeit nach der Verdreifachung
100	6	6	
100	7	7	
100	8	8	
100	9	9	

12. Aufgabe. Wir wollen dasselbe auch für die Vervierfachung durchführen.

Ausgangshäufigkeit	Anfangsziffer der Zahl	Anfangsziffer des Vierfachen der Zahl	Häufigkeit nach der Vervierfachung
100	1	1	
100	2	2	
100	3	3	
100	4	4	
100	5	5	
100	6	6	
100	7	7	
100	8	8	
100	9	9	

13. Aufgabe. Nachdem wir auch noch die Verfünffachung untersucht haben, wollen wir aus dem Bisherigen die Lehre ziehen.

Ausgangshäufigkeit	Anfangsziffer der Zahl	Anfangsziffer des Fünffachen der Zahl	Häufigkeit nach der Verfünffachung
100	1	1	
100	2	2	
100	3	3	
100	4	4	
100	5	5	
100	6	6	
100	7	7	
100	8	8	
100	9	9	

Welche Ziffern kommen nach Vervielfachung häufiger vor? ....

....

....

....

....

....

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation, sie hebt die durch die Multiplikation hervorgerufene Änderung wieder auf. Es dürfte daher so sein, daß sich die Anfangsziffern bei der Multiplikation um 1 und 2, also um die kleinen Ziffern, konzentrieren, während bei der Division umgekehrt die kleinen Ziffern spärlicher werden und dafür mehrere Anfangsziffern groß ausfallen.

14. Aufgabe. Prüfen wir es!

Ausgangs-häufigkeit	Anfangsziffer der Zahl	Anfangsziffer der Hälfte der Zahl	Häufigkeit nach der Division
100	1	1	
100	2	2	
100	3	3	
100	4	4	
100	5	5	
100	6	6	
100	7	7	
100	8	8	
100	9	9	

Vergleiche diese Tabelle mit der vorigen! Was bemerkst du? Erkläre es!

....

....

....

....

Wenn man durch irgendeine Zahl dividiert, so wirkt das auf die Anfangsziffern ebenso wie die Multiplikation mit gewissen Zahlen. (Denke nicht nur an die ganzen Zahlen!) Das bedeutet aber, daß die durch die Multiplikation verursachten Veränderungen durch die Division doch nicht rückgängig gemacht werden. Waren die Anfangsziffern ursprünglich etwa gleich verteilt, so ändert sich die Verteilung nach der Umrechnung immer derart, daß die kleinen Ziffern häufiger werden.

Was geschieht aber, wenn vor der Umrechnung die Ziffern nicht gleichmäßig verteilt waren? Es ist interessant zu sehen, welche Änderung die

Multiplikation und die Division bei der theoretisch ermittelten und auch durch viele Erfahrungen bestätigten Verteilung hervorrufen:

Ausgangshäufigkeit	Anfangsziffer der Zahl	Anfangsziffer des Zweifachen der Zahl	Häufigkeit nach der Verdoppelung	Anfangsziffer der Zahl	Anfangsziffer der Hälfte der Zahl	Häufigkeit nach der Halbierung
30	1	1	31	1	1	30
18	2	2	15	2	2	18
12	3	3	15	3	3	13
10	4	4	9	4	4	10
8	5	5	9	5	5	6
7	6	6	6	6	6	6
6	7	7	6	7	7	6
5	8	8	5	8	8	6
5	9	9	5	9	9	6

Diese Verteilung wird also kaum verändert, die Umrechnungen „wirken nicht“ auf sie.

Damit läßt sich schon einigermaßen erklären, warum unter den vielen sehr verschiedenen Zahlenangaben eben diese Verteilung zur Geltung kommt.

Merkwürdigerweise hat man diese Gesetzmäßigkeit, so einfach sie auch ist, lange Zeit gar nicht bemerkt. Sie dürfte zuerst 1938 erwähnt worden sein, und eine theoretische Erklärung für sie hat man erst im Jahre 1961 geben können.

Lösungen

(zum Kapitel „Gerade und ungerade, groß und klein“)

1. Aufgabe. Es kommt darauf an, von welchen Zahlen ich sie auswähle. Wähle ich sie von allen Zahlen zwischen 1 und 10 oder zwischen 1 und 100 und ist dabei die Auswahl einer jeden dieser Zahlen gleich wahrscheinlich, so wird die ausgewählte Zahl mit gleicher Wahrscheinlichkeit gerade und ungerade sein. Wähle ich aber zum Beispiel nur von den Zahlen 1, 2 und 3 eine aus, und zwar jede mit gleicher Wahrscheinlichkeit, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Zahl zu wählen, doppelt so groß wie die Wahrscheinlichkeit der Auswahl einer geraden Zahl.

2. Aufgabe. Im allgemeinen ist es wahrscheinlicher, daß sie ungerade ist. Das hängt aber auch davon ab, von wo ich das Kind auswähle. Wähle ich es zum Beispiel aufs Geratewohl von zwei Geschwistern, die keine weiteren Geschwister haben, so sind die beiden Wahrscheinlichkeiten gleich. (Ich wähle entweder das erste oder das zweite Kind.) Die beiden Wahrscheinlichkeiten werden auch bei der Auswahl eines Kindes von 4 oder 6 Geschwistern gleich ausfallen. In Familien mit etwa 3 oder 5 Geschwistern sind die Kinder ungerader Ordnungszahl in der Mehrheit.

3. Aufgabe. Das ist eigentlich dieselbe Situation wie in der vorigen Aufgabe. In Häusern mit einer geraden Anzahl von Stockwerken sind weder die geraden noch die ungeraden Stockwerkzahlen im Vorteil. Da es aber auch Häuser mit 1, 3, 5 usw. Stockwerken gibt, sind die ungeraden Zahlen doch im Vorteil. Wenn wir endlich das Erdgeschoß als 0-ten Stock hinzunehmen, so überwiegen die geraden Zahlen.

4. Aufgabe. Im allgemeinen sind die geraden Endziffern häufiger. Besonders häufig kommt die 0 vor. Diese Erscheinung dürfte auf die Abrundungen zurückgehen. Man rundet nämlich gerne auf gerade Zahlen ab, und am liebsten auf 0. Die Häufigkeit der Endziffern hängt allerdings auch davon ab, welcher Zeitung oder welchem Buch wir die Zahlen entnommen haben. Es gibt auch Zahlen, die man niemals rundet. (Wie zum Beispiel die Telephonnummern.)

5. Aufgabe. Unter den ungeraden Endziffern kommt die 5 ziemlich häufig vor. Das kommt davon, daß die Hälfte einer runden Zahl sehr oft auf 5 endet. (Zum Beispiel die Hälfte von 10, von 30, von 50.)

6. Aufgabe. Im allgemeinen ist derjenige Spieler im Vorteil, der die vier kleineren Ziffern gewählt hat. In vielen Fällen kommen diese Wahrscheinlichkeiten zur Geltung:

Erste Ziffer (die 0 zählt nicht)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wahrscheinlichkeit (prozentual, auf ganze Prozente gerundet)	30	18	12	10	8	7	6	5	5

(Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten beträgt deshalb nicht 100, sondern 101, weil es gerundete Zahlenwerte sind.)

Demnach ist schon die Wahrscheinlichkeit von 1, 2 oder 3 größer als 50% (ungefähr 60%). Die Wahrscheinlichkeit von 1, 2, 3 und 4 zusammen beträgt ungefähr 70%.

7. Aufgabe. Wenn du nur nicht ganz besondere Zahlen betrachtest, so beobachtest du gewiß, daß die kleinen Ziffern viel häufiger sind als die großen. Es kann aber Abweichungen geben, die eben nur für die betreffenden Zahlen charakteristisch sind.

8. Aufgabe. Für Hausnummern gilt eine etwas ähnliche Erklärung wie für die Erscheinung, daß es mehr Kinder ungerader Ordnungszahl als solche gerader Ordnungszahl gibt, oder daß mehr Leute in Stockwerken ungerader Ordnungszahl wohnen als in solchen gerader Ordnungszahl. Jene Überlegung kann allerdings nicht ohne weiteres auf den Fall von Hausnummern übertragen werden, weil nämlich die Häuser auf den beiden Seiten der Straße unabhängig voneinander numeriert sind: Es ist zum Beispiel möglich, daß die Hausnummer 9 gar nicht existiert, wohl aber 10, 12 usw. Für Hausnummern ergibt unsere Überlegung nur, daß es mehr Hausnummern gibt, die durch 4 dividiert den Rest 1 oder 2 ergeben, als solche, deren Rest 3 oder 0 ist. (Auf den Plätzen sind die Häuser der Reihe nach numeriert, dort überwiegen tatsächlich die ungeraden Hausnummern.)

Warum beginnen die Hausnummern zum größeren Teil mit kleinen Ziffern?

Würde die Numerierung der Häuser in jeder Straße genau bis 9 oder 99 oder etwa 999 laufen, so wäre keine Zahl im Vorteil. Zum Beispiel fangen unter den Zahlen von 1 bis 99 elf Zahlen mit 1 an (1, 10, 11, . . ., 19), elf Zahlen mit 2 (2, 20, 21, . . ., 29) usw. In jedem Fall aber, wenn die Numerierung in einer Straße nicht mit einer Zahl endet, die nur die Ziffer 9 enthält, bleiben eher größere Ziffern weg: am allermeisten die 9, am wenigsten die 2 und die 1. (Die eventuellen Lücken in der Reihe der Hausnummern lassen wir hier außer acht; wir nehmen an, daß nirgends Nummern ausbleiben.)

9. Aufgabe. Die Anfangsziffer kann die 2 oder die 3 sein.

10. Aufgabe.

Ausgangshäufigkeit	Anfangsziffer der Zahl	Anfangsziffer des Zweifachen der Zahl	Häufigkeit nach der Verdoppelung
100	1	1	500
100	2	2	50
100	3	3	50
100	4	4	50
100	5	5	50
100	6	6	50
100	7	7	50
100	8	8	50
100	9	9	50

11. Aufgabe.

Ausgangshäufigkeit	Anfangsziffer der Zahl	Anfangsziffer des Dreifachen der Zahl	Häufigkeit nach der Verdreifachung
100	1	1	334
100	2	2	333
100	3	3	33
100	4	4	33
100	5	5	34
100	6	6	33
100	7	7	33
100	8	8	34
100	9	9	33
900			900

12. Aufgabe.

Ausgangshäufigkeit	Anfangsziffer der Zahl	Anfangsziffer des Vierfachen der Zahl	Häufigkeit nach der Vervierfachung
100	1	1	250
100	2	2	250
100	3	3	250
100	4	4	25
100	5	5	25
100	6	6	25
100	7	7	25
100	8	8	25
100	9	9	25
900			900

13. Aufgabe.

Ausgangshäufigkeit	Anfangsziffer der Zahl	Anfangsziffer des Fünffachen der Zahl	Häufigkeit nach der Verfünffachung
100	1	1	200
100	2	2	200
100	3	3	200
100	4	4	200
100	5	5	20
100	6	6	20
100	7	7	20
100	8	8	20
100	9	9	20
900			900

Nach der Multiplikation mit 2, 3, 4 oder 5 überwiegen unter den Anfangsziffern der Zahlen die kleinen Ziffern, wenn nur die ursprüngliche Verteilung gleichmäßig war.

14. Aufgabe.

Ausgangshäufigkeit	Anfangsziffer der Zahl	Anfangsziffer der Hälfte der Zahl	Häufigkeit nach der Division
100	1	1	200
100	2	2	200
100	3	3	200
100	4	4	200
100	5	5	20
100	6	6	20
100	7	7	20
100	8	8	20
100	9	9	20
900			900

Familien mit Söhnen, Familien mit Töchtern, gemischte Familien

Glaube nicht, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu nichts anderem als zur Berechnung der Ergebnisse des Würfelns u. ä. dient. Man kann mittels der Wahrscheinlichkeitsrechnung interessante und wichtige Daten über Geburt, Leben, Tod, Reisen auf der Erde und im Weltraum, Überschwemmung und Dürre und noch über vieles andere ausrechnen.

Weißt du zum Beispiel, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zur Welt kommendes Kind ein Knabe oder ein Mädchen sein wird? Beide Wahrscheinlichkeiten sind ungefähr gleich $\frac{1}{2}$, aber nicht genau. Unter 100 Neugeborenen finden sich im Durchschnitt nicht 50, sondern 51, eventuell 52 Knaben, und die Anzahl der Mädchen beträgt 49 oder 48. Das heißt, es werden mehr Knaben als Mädchen geboren. (Daß es dennoch mehr Frauen gibt als Männer, das kommt davon, daß die Frauen im allgemeinen länger leben.)

Es kommen allerdings manchmal Mehrlinge zur Welt. Diese können nun wieder lauter Knaben, lauter Mädchen oder gemischt sein. Der Mehrlingsgeburt kommt die Wahrscheinlichkeit 1% zu. Unter den Mehrlingen kommen solche, die nicht Zwillinge sind (also Drillinge, Vierlinge usw.) wieder ungefähr mit der Wahrscheinlichkeit 1% vor. Das macht aber nur noch 0,01% der Anzahl aller Geburten aus.

Wenn wir auch die Mehrlinge eigens in Betracht ziehen wollen, so können wir uns folgendes merken: die Wahrscheinlichkeit der Geburt

eines Knaben ist ungefähr gleich	51%
eines Mädchens ist ungefähr gleich	48%
von Mehrlingen ist ungefähr gleich	1%
	100%

Um diese Zahlen zu erhalten, braucht man die Wahrscheinlichkeitsrechnung noch nicht. Man registriert eben die Angaben viele Jahre lang und berechnet die Prozentsätze. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung fängt damit an, daß man – von solchen Daten ausgehend – andere Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen beginnt.

Der Einfachheit halber setzen wir doch $\frac{1}{2}$ für die Wahrscheinlichkeit der Knaben- bzw. der Mädchengeburt. Das ist die Grundlage für die folgenden Berechnungen.

1. Aufgabe. Was ist die Wahrscheinlichkeit dessen, daß in einer Drei-Kinder-Familie

a) lauter Knaben sind? ....

b) lauter Mädchen sind? ....

c) Knaben und Mädchen gemischt vorhanden sind? ....

d) zwei Knaben und ein Mädchen sind? ....

e) die Knaben und Mädchen abwechselnd aufeinanderfolgen (d. h. Kinder desselben Geschlechts folgen nicht unmittelbar aufeinander)? ....

....

f) auf zwei Mädchen ein Knabe folgt? ....

2. Aufgabe. Rudi und Franz erwarten ein Brüderchen oder Schwesterchen. Sie verstehen etwas von der Wahrscheinlichkeitsrechnung und denken so: Die Wahrscheinlichkeit von drei Knaben in einer Familie beträgt nur $\frac{1}{8}$; die Wahrscheinlichkeit dessen, daß zwei von drei Kindern Knaben sind und eines ein Mädchen, beträgt aber $\frac{3}{8}$. Es ist demnach dreimal so wahrscheinlich, daß sie ein Schwesterchen bekommen, als daß es ein Brüderchen sein wird – sagen sie. Und was hältst du von diesem Gedankengang? ....

....

3. Aufgabe. Was kommt bei den Vier-Kinder-Familien häufiger vor: es gibt gleich viele Knaben und Mädchen, es gibt drei Kinder vom einen und eines vom anderen Geschlecht. Was sind die Wahrscheinlichkeiten dieser beiden Fälle? ....

....

Hier ist etwas ganz Leichtes:

4. Aufgabe. Was kommt unter den Zwei-Kinder-Familien am häufigsten vor: Familien mit Söhnen, Familien mit Töchtern oder gemischte Familien? Was sind die Wahrscheinlichkeiten dieser Fälle unter sämtlichen Zwei-Kinder-Familien? ....

....

Das hier ist aber schwierig:

5. Aufgabe. In wie großen Familien kann ein Kind vorkommen, welches einen jüngeren Bruder, einen älteren Bruder, eine jüngere Schwester und auch eine ältere Schwester hat? Was ist die Wahrscheinlichkeit dessen, daß es in einer Familie mit....... Kindern tatsächlich ein solches „innerstes“ Kind gibt? (Schreibe an die punktierte Stelle selbst eine Zahl, für welche du die entsprechende Wahrscheinlichkeit berechnen kannst!)

Lösungen

(zum Kapitel „Familien mit Söhnen, Familien mit Töchtern, gemischte Familien")

1. Aufgabe. a) $\frac{1}{8}$, *b)* $\frac{1}{8}$, *c)* $\frac{3}{4}$, *d)* $\frac{3}{8}$, *e)* $\frac{1}{4}$ (es sind die Fälle KMK und MKM möglich, beiden kommt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ zu), *f)* $\frac{1}{8}$, wie die Wahrscheinlichkeit eines jeden der acht Fälle für sich.

2. Aufgabe. Rudi und Franz kennen die Wahrscheinlichkeitsrechnung nur ganz oberflächlich. In den Drei-Kinder-Familien ist der Fall von zwei Knaben und einem Mädchen nur dann dreimal so wahrscheinlich wie der Fall von drei Knaben, wenn alle acht Möglichkeiten gegeben sind: KKK, KKM, KMK, KMM, MKK, MKM, MMK, MMM. Wenn aber schon zwei Knaben geboren sind, so kommen nur noch die ersten beiden dieser Möglichkeiten in Frage, und diese sind gleich wahrscheinlich. (Allerdings ist die Geburt eines Knaben wahrscheinlicher, aber nur ganz wenig.)

3. Aufgabe. Der häufigere Fall ist der, daß drei Kinder vom einen Geschlecht sind und das vierte vom anderen Geschlecht. Unter den sechzehn Möglichkeiten gibt es nämlich nur diese sechs, wo die Geschlechter im Verhältnis zwei zu zwei stehen: KKMM, KMKM, KMMK, MKKM, MKMK, MMKK, während das Verhältnis drei zu eins in acht Fällen besteht: KKKM, KKMK, KMKK, MKKK, MMMK, MMKM, MKMM, KMMM. Die Wahrscheinlichkeit des Verhältnisses drei zu eins beträgt demnach $\frac{8}{16}$, also $\frac{1}{2}$, die des Verhältnisses zwei zu zwei aber $\frac{6}{16}$, also $\frac{3}{8}$. Wenn wir aber in den gemischten Familien drei Fälle unterscheiden (3 Knaben und 1 Mädchen, 2 Knaben und 2 Mädchen, 1 Knabe und 3 Mädchen), so ist unter diesen allerdings der Fall von 2 Knaben und 2 Mädchen der wahrscheinlichste. Die Wahrscheinlichkeit eines jeden der beiden anderen Fälle beträgt nur $\frac{4}{16}$, also $\frac{1}{4}$.

4. Aufgabe. Es gibt ungefähr zweimal so viele gemischte Familien wie Familien nur mit Söhnen oder Familien nur mit Töchtern. Jede der Wahrscheinlichkeiten der Familien mit Söhnen und der Familien mit Töchtern beträgt $\frac{1}{4}$, die Wahrscheinlichkeit der gemischten Familien beträgt $\frac{1}{2}$ (unter den Zwei-Kinder-Familien).

5. Aufgabe. Die erste Frage ist noch leicht zu beantworten: Es kann nur bei Familien mit mindestens fünf Kindern vorkommen, da das „innerste" Kind mindestens vier Geschwister haben muß (einen jüngeren Bruder, einen älteren Bruder, eine jüngere Schwester und eine ältere Schwester).

Bei Familien mit fünf Kindern gibt es 32 Möglichkeiten der Verteilung der Kinder. (Bei vier Kindern sind es 16 Möglichkeiten, das entspricht dem Fall, daß wir 4 Geldstücke werfen. Das fünfte Kind kann nun, wie das Ergebnis des fünften Geldwurfes, zweierlei sein, was in jedem der 16 Fälle je eine neue Möglichkeit ergibt, wie zum Beispiel aus KKKM sowohl KKKMK wie KKKMM werden kann.) Diese 32 Fälle können wir als gleich wahrscheinlich betrachten, jedem kommt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{32}$ zu. In wie vielen von diesen Fällen gibt es ein „innerstes" Kind? So vielmal $\frac{1}{32}$ wird die Wahrscheinlichkeit dessen betragen, daß es in einer aufs Geratewohl ausgewählten Familie mit fünf Kindern *überhaupt ein* innerstes Kind *gibt.* Dieses innerste Kind kann nun sowohl ein Knabe wie auch ein Mädchen sein, das sind zwei Fälle. In beiden Fällen kann seine jüngere Schwester älter sein als sein jüngerer Bruder oder umgekehrt. Das sind schon zweimal zwei, also vier Fälle. In jedem dieser vier Fälle kann der größere Bruder des innersten Kindes älter sein als die ältere Schwester oder umgekehrt. Jeder der vier Fälle teilt sich also durch zwei, wodurch sich endlich acht Fälle ergeben. Das ist ein $\frac{1}{4}$ der 32 Möglichkeiten. Unserem Fall kommt also die theoretisch berechnete Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ zu. In einer Sechs-Kinder-Familie beträgt die entsprechende Wahrscheinlichkeit schon $\frac{1}{2}$, in einer Sieben-Kinder-Familie $\frac{11}{16}$, in einer Familie mit n Kindern $1 - \frac{8n - 16}{2^n}$.

Was wird die Reihenfolge sein?

Wir wollen die Logik-Karten kennenlernen!

Schneide die Logik-Karten aus, die du in der Beilage findest!

Wähle von den Logik-Karten sämtliche kleinen blanken aus! (Lege die großen und von den kleinen die gepunkteten beiseite!) Es gibt 12 kleine. Lege sie in einer Reihe, in beliebiger Reihenfolge, vor dich hin! Etwa so:

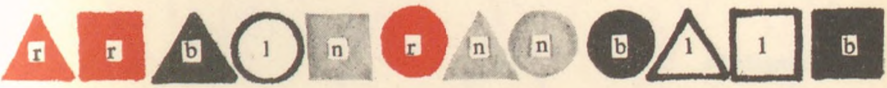


Abb. 133 Die kleinen blanken Logik-Karten. Kontrolliere, ob alle da sind! Ist keine zweimal vorhanden?

Was ist deiner Meinung nach von größerer Bedeutung: die Gestalt oder die Farbe einer Karte? Wenn du es entschieden hast, schreibe es hierher! ....

Welche Gestalt gefällt dir am besten? Zeichne sie hierher:

Welche gefällt dir noch? Zeichne auch diese hierher!

Welche gefällt dir am wenigsten? Zeichne sie hierher!

(Du hast jede nur einmal gezeichnet, nicht wahr?)

Welche Farbe gefällt dir am besten von den Farben der Logik-Karten? Welche gefällt dir weniger, noch weniger, am wenigsten? Schreibe die Namen der Farben der Reihe nach hierher, oder male Flecke der entsprechenden Farben!

Am schönsten	die nächste	die nächste	am wenigsten schön
....	....	....	....

1. Aufgabe. Nun aber lege die Karten nach der selbstgewählten Reihenfolge aus!

a) Wenn deiner Ansicht nach die Farbe das Wesentlichere ist, so sortiere sie zuerst nach der Farbe und dann innerhalb einer jeden Gruppe nach der Gestalt. Halte dich an die festgesetzte Reihenfolge!

b) Wenn du die Gestalt für das Wichtigste hältst, so teile die Karten zuerst nach der Gestalt in drei Gruppen ein, dann ordnest du sie innerhalb der Gruppen nach der Farbe.

Diese Zeichnungen können dir dabei helfen (Abb. 134 und 135). Die Karten legst du an die Spitzen der Äste. (Zeichne den Baum so groß, daß die Karten genügend Platz haben!)

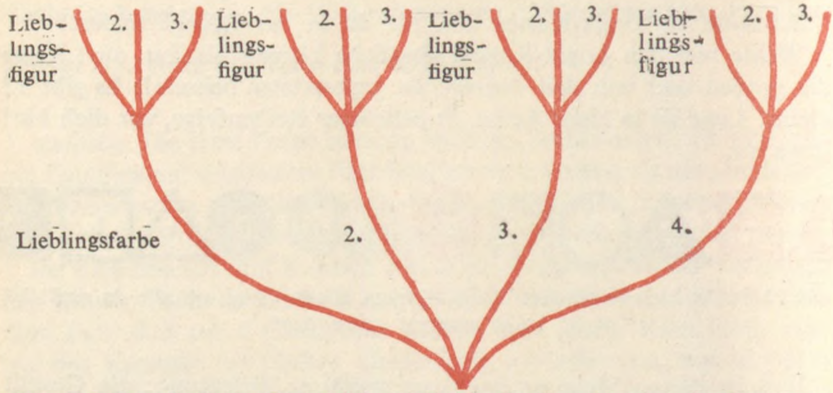


Abb. 134 Wer die Farbe für wichtiger hält als die Gestalt, wird die Karten so ordnen

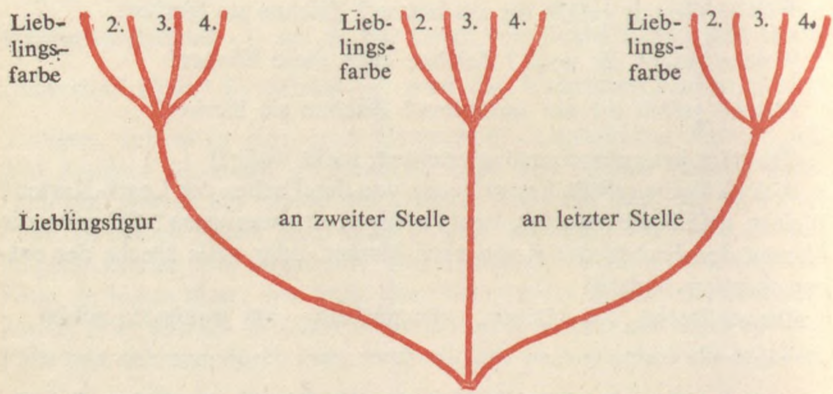


Abb. 135 Wer die Gestalt für wichtiger hält als die Farbe, wird die Karten so ordnen

Hole jetzt auch die kleinen gepunkteten hervor! Welches Muster gefällt dir besser, blank oder gepunktet? Schreibe es hierher! ....

Du hast schon entschieden, ob du die Farbe oder die Gestalt bevorzugst. Und wie steht es mit dem Muster? Ist es das Wichtigste? Ist es am wenigsten wichtig? Oder steht es etwa zwischen Farbe und Gestalt?

Schreibe jetzt die drei Eigenschaften in der Reihenfolge ihrer Wichtigkeit auf!

....

(An eine Stelle schreibst du: *Gestalt*, an eine andere: *Muster* und an eine dritte Stelle: *Farbe*.)

2. Aufgabe. Wähle von den folgenden Bäumen denjenigen aus, den du zum Ordnen der Karten benutzen willst!

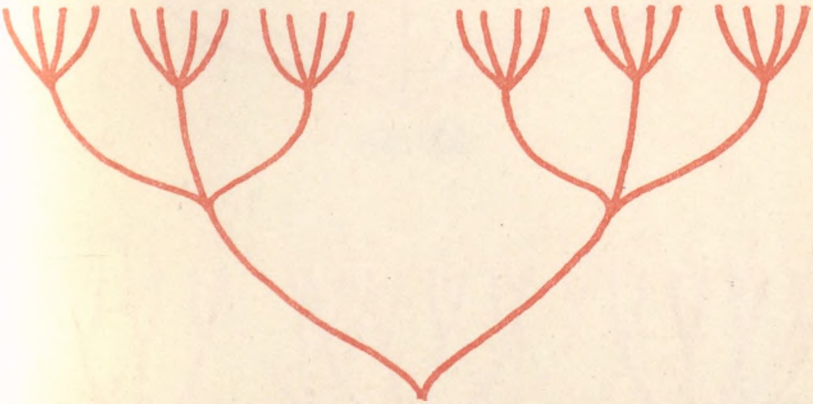


Abb. 136a) Was hält derjenige für das Wichtigste, für weniger wichtig, für am wenigsten wichtig, der diesen Baum benutzt: die Farbe, die Gestalt, das Muster?

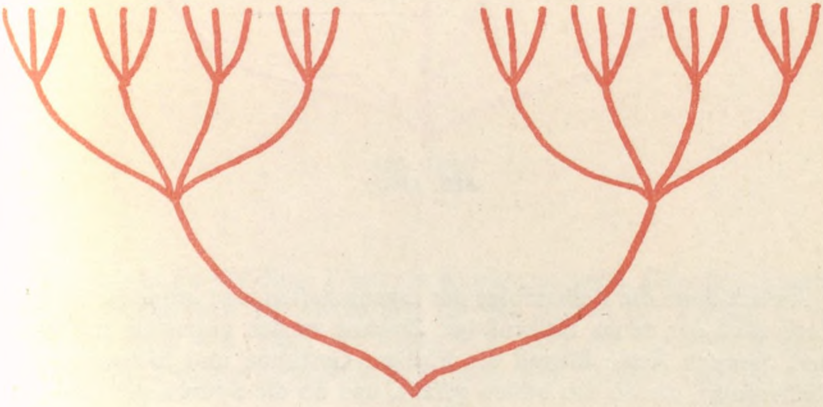


Abb. 136b)

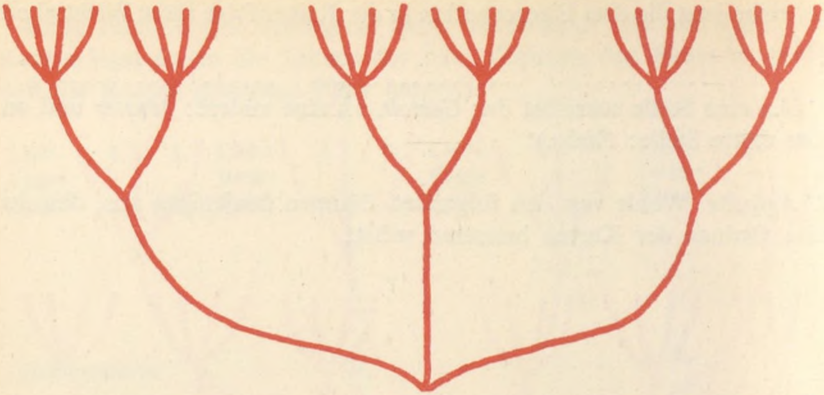


Abb. 136c)

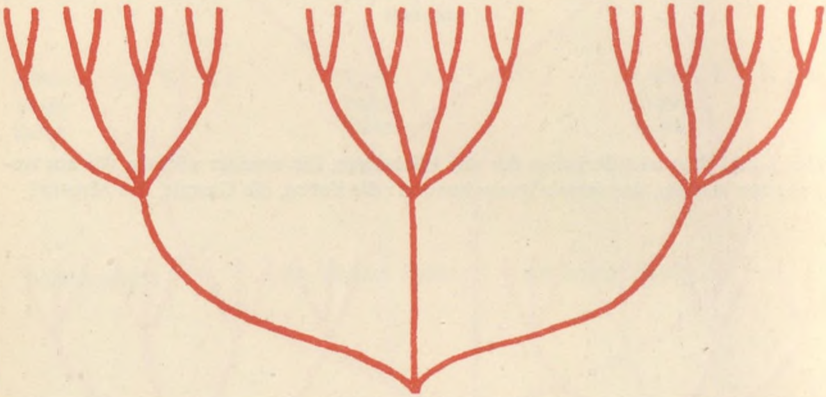


Abb. 136d)

Ändere dann die Reihenfolge der Eigenschaften, und ordne die Karten auch nach der neuen Reihenfolge. Zeichne zu den untersten, mittleren und obersten Ästen überall die Farben, Gestalten und Muster in der Reihenfolge, die dir am besten gefällt, und an die Spitzen der obersten Äste die Logik-Karten, wie sie demnach aufeinanderfolgen! Zu jedem

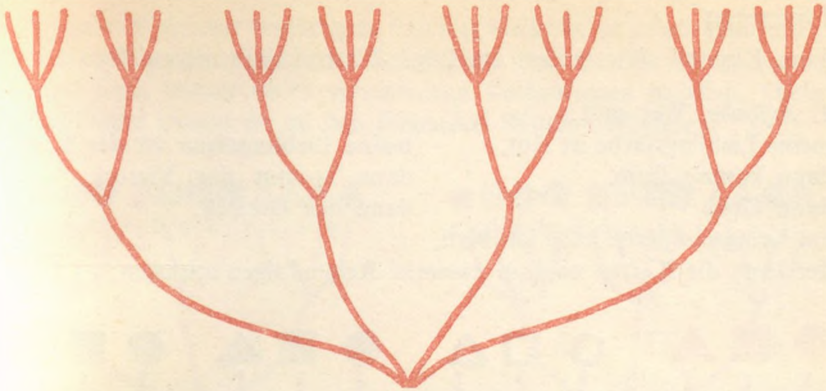


Abb. 136e)

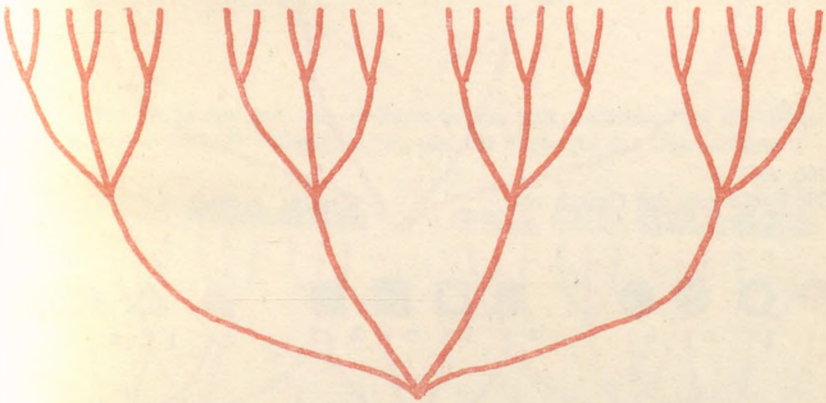


Abb. 136f)

Baum kannst du auf diese Weise 24 Karten zeichnen. (Die Äste kannst du mit Buchstaben als Abkürzung für die Namen der Farben, z. B. Rot = r, Blau = b, Gelb = l, Grün = n, oder mit farbigen Flecken bezeichnen. Erdenke irgendwelche Zeichen auch für blank und gepunktet!)

Lösungen

(zum Kapitel „Wir wollen die Logik-Karten kennenlernen!“)

1. Aufgabe. Wer sagt:

meine Lieblingsfarbe ist Rot,
dann kommt Gelb,
dann Grün,
am wenigsten gerne habe ich Blau,

meine Lieblingsfigur ist der Kreis,
dann kommt das Viereck,
dann das Dreieck,

der kann die Karten noch in zweierlei Reihenfolgen auslegen:

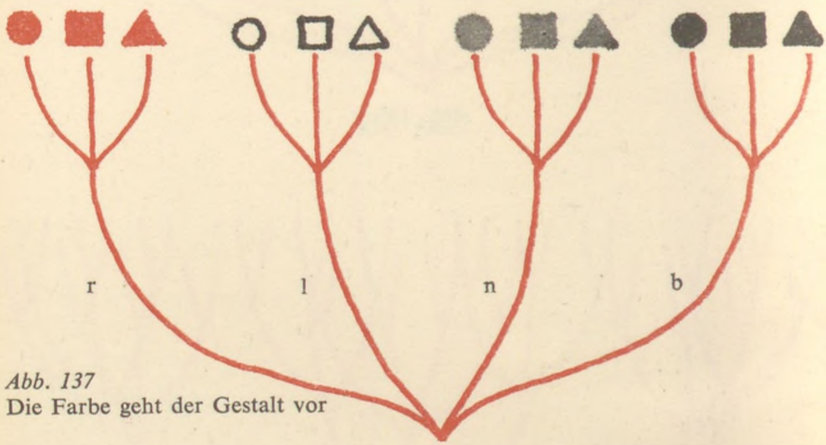


Abb. 137
Die Farbe geht der Gestalt vor

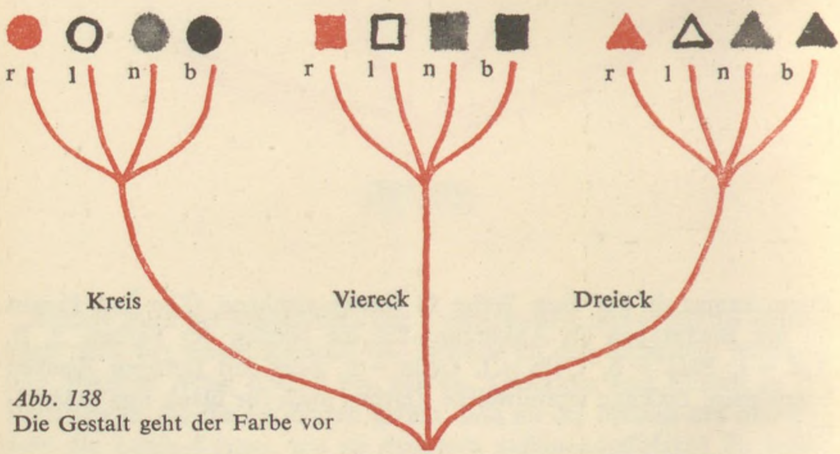


Abb. 138
Die Gestalt geht der Farbe vor

2. *Aufgabe.* Wenn wir bestimmen, daß uns blank lieber ist als gepunktet, die Reihenfolge der Farben und der Figuren aber dieselbe sei wie zuvor, so sind noch immer sechs verschiedene Reihenfolgen möglich. Diese Reihenfolgen kannst du an den folgenden Bäumen erkennen:

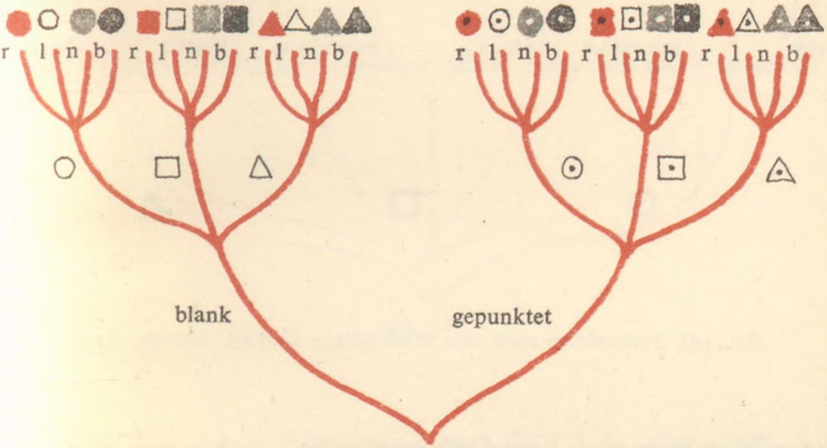


Abb. 139 Wer die Karten nach diesem Baum ordnet, hält das Muster für das Wichtigste, die Gestalt für weniger wichtig und die Farbe für das Unwichtigste

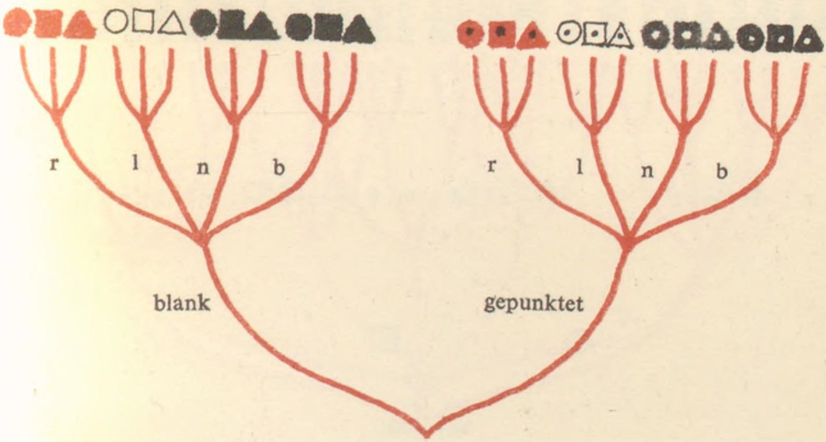


Abb. 140 Wer die Karten nach diesem Baum ordnet, hält das Muster für die wichtigste Eigenschaft, dann kommt die Farbe und dann die Gestalt als unwichtigste Eigenschaft

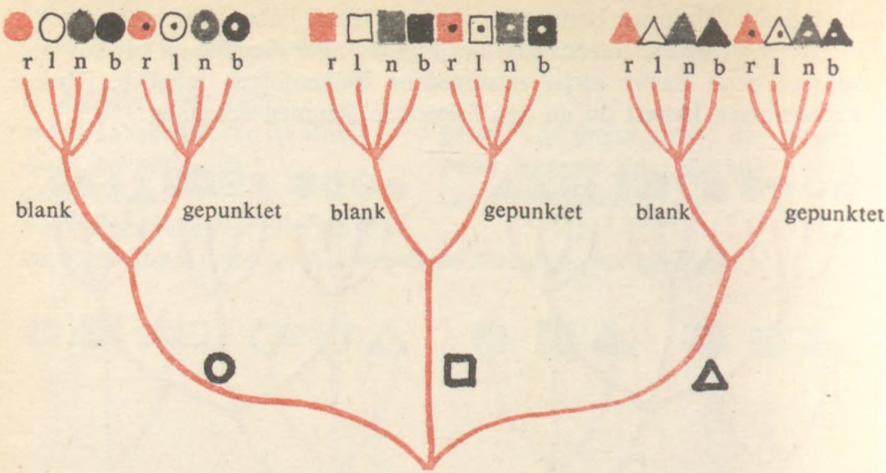


Abb. 141 Reihenfolge nach der Wichtigkeit: Gestalt, Muster, Farbe

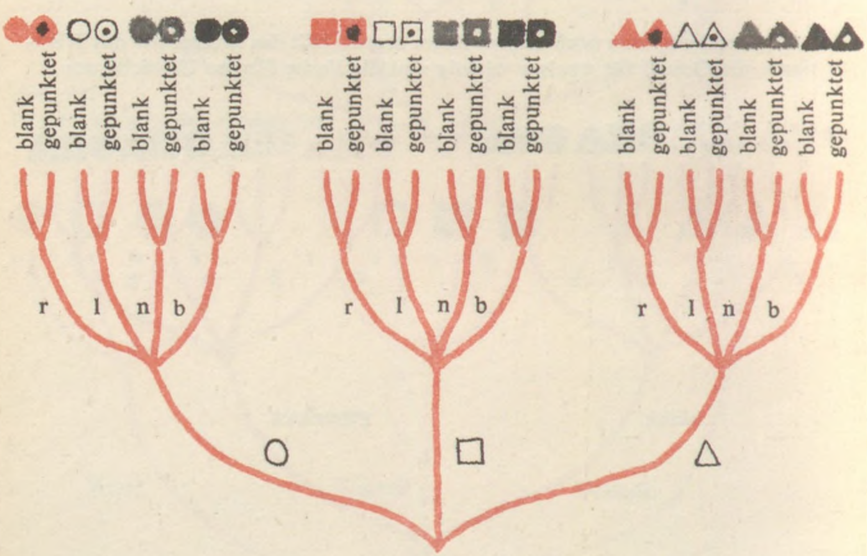


Abb. 142

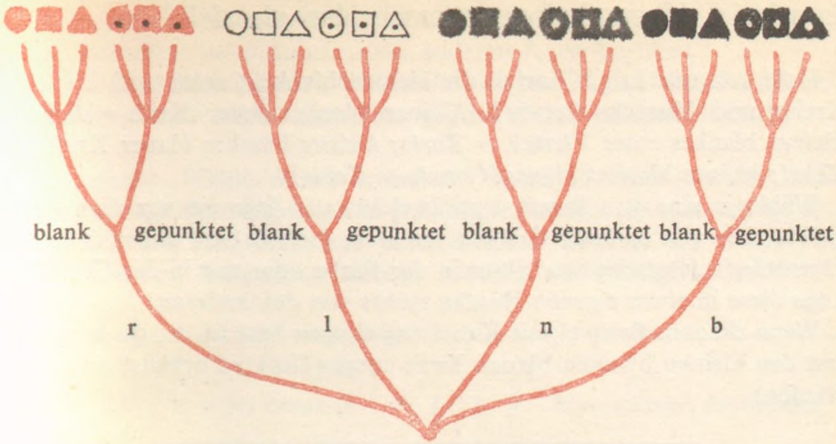


Abb. 143

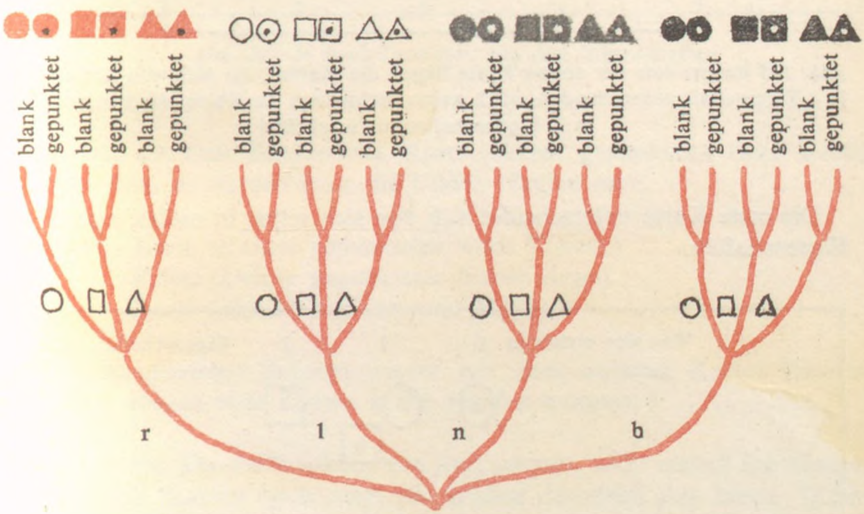


Abb. 144

In wieviel Eigenschaften unterscheiden sie sich?

Hole von den Logik-Karten die kleinen blanken, roten und blauen, Kreise und Vierecke hervor! (*K*leiner bl*a*nker *r*oter Kr*ei*s = *Karei; k*leines bl*a*nkes *r*otes V*ie*reck = *Karie; k*leiner bl*a*nker *b*lauer Kr*ei*s = *Kabei; k*leines bl*a*nkes *b*laues V*ie*reck = *Kabie)*

Wähle je eine von ihnen, irgendwelche, und lege sie vor dich hin! Wie viele gibt es unter den drei anderen, die sich von dieser in einer Eigenschaft unterscheiden? (Nur in der Farbe oder nur in der Gestalt.) Lege diese in einen eigenen Haufen rechts von den anderen!

Wenn du zum Beispiel mit Kabei angefangen hast (d. h., du hast zuerst den kleinen blanken blauen Kreis ausgewählt), so erhältst du diese Haufen:

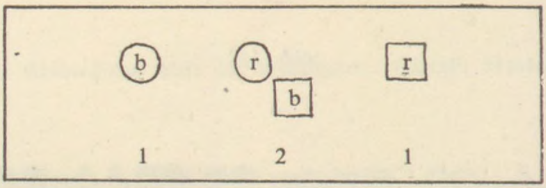


Abb. 145 Rechts von der ersten Karte liegen die Karten, die sich von der ersten in 1 Eigenschaft unterscheiden, noch weiter rechts liegt die Karte, die sich von ihr in 2 Eigenschaften unterscheidet

Die erste Karte unterscheidet sich von sich selbst in nichts, also in 0 Eigenschaften.

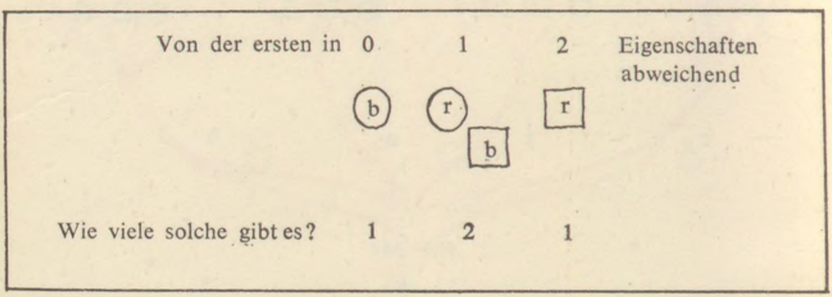


Abb. 146 Von sich selbst unterscheidet sich jede Karte in 0 Eigenschaften

1. Aufgabe. Werden auch dann ebenso viele Karten in die einzelnen Haufen kommen, wenn du mit einer anderen Karte beginnst?

Tue jetzt dasselbe mit acht anstelle von vier Karten! Behalte die bisherigen bei und nimm noch ihre gepunkteten Varianten hinzu!

2. Aufgabe. Wähle wieder irgendeine Karte als erste (als links äußere Karte), lege dann diejenigen in gesonderte Haufen, die sich von der ersten in 1, 2 usw. Eigenschaften unterscheiden! Zeichne die Karten, oder schreibe ihre Kurzwörter hierher, alles auf den richtigen Platz!

Von der ersten in	0	1	2	3	Eigenschaften abweichend
Wie viele solche gibt es?	–	–	–	–	

Abb. 147 Je zwei Varianten von drei Eigenschaften

Hast du zum Beispiel mit Kurei (*k*leiner gep*u*nkteter *r*oter Kr*ei*s) begonnen, so werden diese die beiden Haufen sein:

Kurei Kurie (*k*leines gep*u*nktetes *r*otes V*ie*reck)
Kubei (*k*leiner gep*u*nkteter *b*lauer Kr*ei*s)
Karei (*k*leiner bl*a*nker *r*oter Kr*ei*s)

Fahre so fort! Beginne wieder mit einer anderen Karte! Werden immer ebenso viele Karten in die Haufen kommen? ....

3. Aufgabe. Du weißt schon, was jetzt kommt, nicht wahr? Du nimmst zu diesen Karten auch noch die großen derselben Art hinzu. Wähle wieder eine aus! ....

Stelle die Tabelle her, und fülle sie auch aus!

Abb. 148 Je zwei Varianten von vier Eigenschaften (Größe, Muster, Farbe und Gestalt)

Weitere Eigenschaften haben wir nicht. Schaffen wir also welche! Teilen wir die Farben in zwei Gruppen ein!

Kalte Farben:	Warme Farben:
Grün	Rot
Blau	Gelb

Damit wir sagen können, welche Farbe wir uns denken, müssen wir die vier Farben auch noch anders einteilen. Rot und Grün sind ungarische Nationalfarben, Blau und Gelb sind die Farben der schwedischen Nationalfahne. Anstatt Farben haben wir jetzt zwei Eigenschaften in je zwei Varianten:

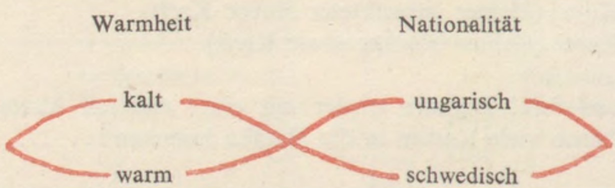


Abb. 149 Es gibt je zwei — also insgesamt vier — Varianten nach „Warmheit" und nach „Nationalität"

Wir werden wissen, daß „kalt ungarisch" die grüne Farbe bedeutet; „kalt schwedisch" bedeutet Blau, „warm ungarisch" Rot und „warm schwedisch" Gelb.

Von den 48 Logik-Karten benutzen wir sämtliche 32, die nicht Dreiecke sind. Wir achten darauf, daß sich jetzt zum Beispiel ein kleiner blanker blauer Kreis von einem kleinen blanken roten Kreis nicht in einer, sondern in zwei Eigenschaften unterscheidet: in der „Warmheit“ und der „Nationalität“.

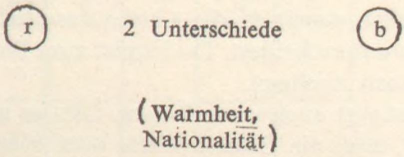


Abb. 150 Wir geben jetzt nicht die Farbe an, sondern die Warmheit und die Nationalität. Die eine Karte ist warm, die andere kalt, das ist ein Unterschied. Die eine ist ungarisch, die andere schwedisch, das ist ein zweiter Unterschied

4. Aufgabe. Lege auch jetzt zu Beginn eine Karte aus, und lege die anderen in Haufen so wie bisher! Fertige die Tabelle an, und fülle sie aus!

Abb. 151 Fünf Eigenschaften mit je zwei Varianten

Was meinst du, wie viele Karten kämen in die einzelnen Haufen, wenn wir noch eine Eigenschaft hätten? ....

....

Um das ausprobieren zu können, mußt du noch eine Logik-Karten-Garnitur haben. In der zweiten Garnitur versiehst du jeden Kreis und jedes Viereck mit einem gewissen Zeichen (es kann etwa eine kleine angeklebte oder angenähte Schlaufe sein). Die nächste Eigenschaft wird dann darin bestehen, daß die Karte bezeichnet ist oder nicht.

Mit vier Garnituren kannst du es noch weiter führen, wenn du dir noch etwas ausdenkst, womit du die Karten der zwei neuen Garnituren von den bisherigen unterscheidest. Du kannst zum Beispiel um die Figur herum einen Rahmen zeichnen.

Du kannst umgekehrt auch vereinfachen. Gibt es nur eine unterscheidende Eigenschaft, etwa die Gestalt (Kreis oder Viereck), so wählst du zu Beginn irgendeine von diesen Karten, und die andere unterscheidet sich von dieser in einer Eigenschaft.

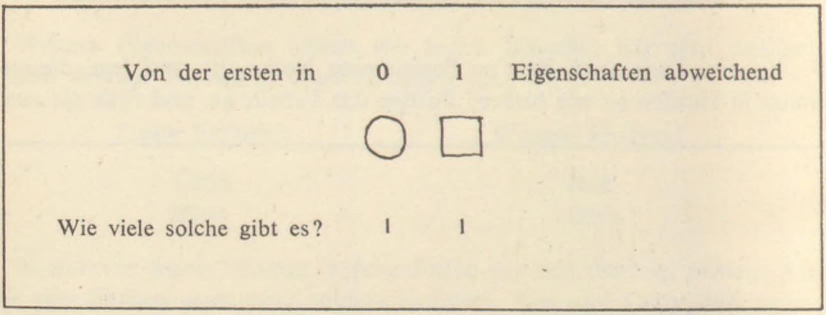


Abb. 152 Im Falle, daß sich die Karten in nur einer Eigenschaft voneinander unterscheiden können, sind ihre Anzahlen in den einzelnen Haufen: 1 und 1

Gibt es überhaupt keine unterscheidende Eigenschaft, so ist nur eine einzige Karte zugelassen.

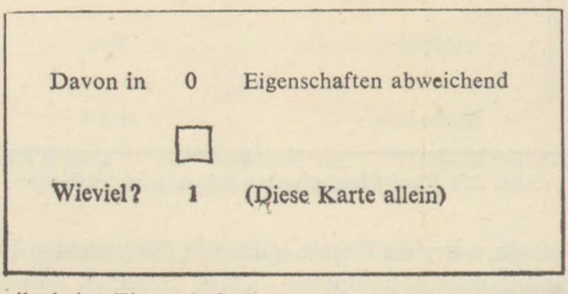


Abb. 153 Es gibt keine Eigenschaft, in der sich eine Karte von sich selbst unterscheiden kann

5. Aufgabe. Wenn du sämtliche bisherigen Ergebnisse in einer Tabelle zusammenfassen möchtest, so wird diese etwa so aussehen, wie in Abbildung 154. Könntest du das fortsetzen?

Wie viele Karten weichen von der ersten in

Soviel Eigenschaften in je zwei Varianten	0	1	2	3	4	5	Eigenschaften ab
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1						
4	1						
5	1						
⋮							

Abb. 154 Zusammenfassung der bisherigen Tabellen. Fülle die leeren Stellen aus!

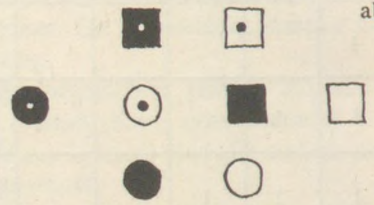
Lösungen

(zum Kapitel „In wieviel Eigenschaften unterscheiden sie sich?“)

1. Aufgabe. Wenn du mit denselben vier Karten arbeitest, so gibt es immer 1 Karte, die sich in 0 Eigenschaften, 2 Karten, die sich in 1 Eigenschaft und 1 Karte, die sich in 2 Eigenschaften von der erstgewählten Karte unterscheiden.

2. Aufgabe. Wenn du mit Kurei begonnen hast, erhältst du etwa diese Zeichnung:

Von der ersten in	0	1	2	3	Eigenschaften abweichend



Mit den Kurzwörtern aufgeschrieben	Kurei	Kurie Kubei Karei	Kubie Karie Kabei	Kabie
Wieviel solche gibt es?	1	3	3	1

Abb. 155

Beginnst du mit irgendeiner anderen Karte, so wird es ebenfalls 1 Karte geben, die sich von der Anfangskarte nicht unterscheidet; 3 Karten werden in einer Eigenschaft abweichen: nur in der Gestalt oder nur in der Farbe oder nur im Muster (blank oder gepunktet); 3 Karten werden in 2 Eigenschaften von der ersten abweichen: in Gestalt und Farbe, in Gestalt und Muster oder in Farbe und Muster; endlich wird es 1 Karte geben, die sich von der ersten Karte in allen 3 Eigenschaften unterscheidet.

3. Aufgabe. Gesetzt, wir haben fürs erste den *g*roßen bl*a*nken *b*lauen Kr*ei*s (Gabei) ausgewählt; die Tabelle gestaltet sich so:

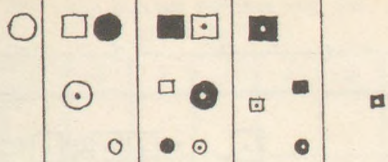
Von der ersten in	0	1	2	3	4 Eigenschaften abweichend
					
Mit den Kurzwörtern aufgeschrieben	Gabei	Gabie Garei Gubei Kabei	Garie Gubie Kabie Gurei Karei Kubei	Gurie Karie Kubie Kurei	Kurie
Wieviel solche gibt es?	1	4	6	4	1

Abb. 156

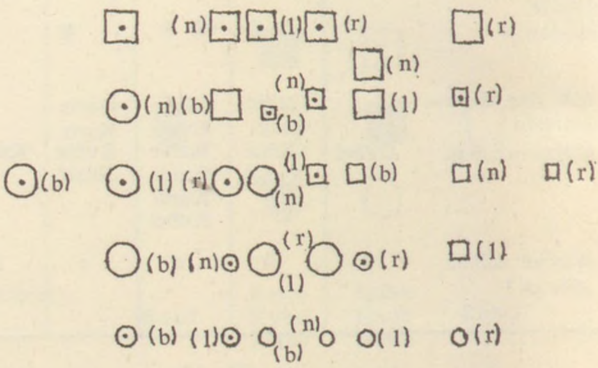
In die einzelnen Gruppen kommt immer dieselbe Anzahl von Karten, mit welcher Karte du auch beginnst. Versuche es mit mehrerlei Anfangskarten!

4. Aufgabe. Es soll jetzt der Buchstabe

t die kalten
m die warmen
j die ungarischen
w die schwedischen

Farben bedeuten. Beginnst du etwa mit dem *g*roßen gep*u*nkteten kal*t*en sch*w*edischen Kr*ei*s (Gutwei), so wirst du die folgende Tabelle erhalten:

Von der ersten in	0	1	2	3	4	5 Eigenschaften abweichend



Kurzwörter	Gutwei	Gutwie	Gutjie	Gumjie	Gamjie	Kamjie
		Gutjei	Gumwie	Gatjie	Kumjie	
		Gumwei	Gatwie	Kutjie	Katjie	
		Gatwei	Kutwie	Gamwie	Kamwie	
		Kutwei	Kumjei	Kumwie	Kamjei	
			Gatjei	Katwie		
			Kutjei	Gamjei		
			Gamwei	Kumjei		
			Kumwei	Katjei		
			Katwei	Kamwei		
Wie viele solche gibt es?	1	5	10	10	5	1

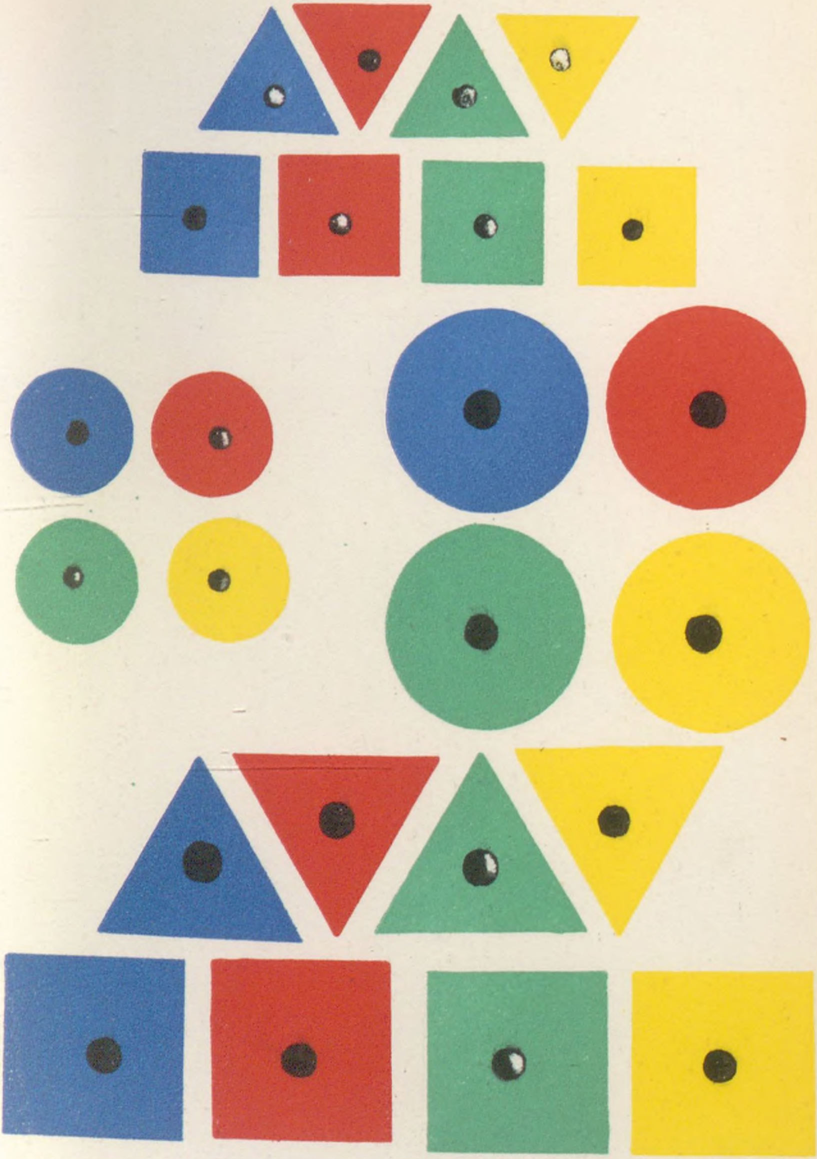
Abb. 157

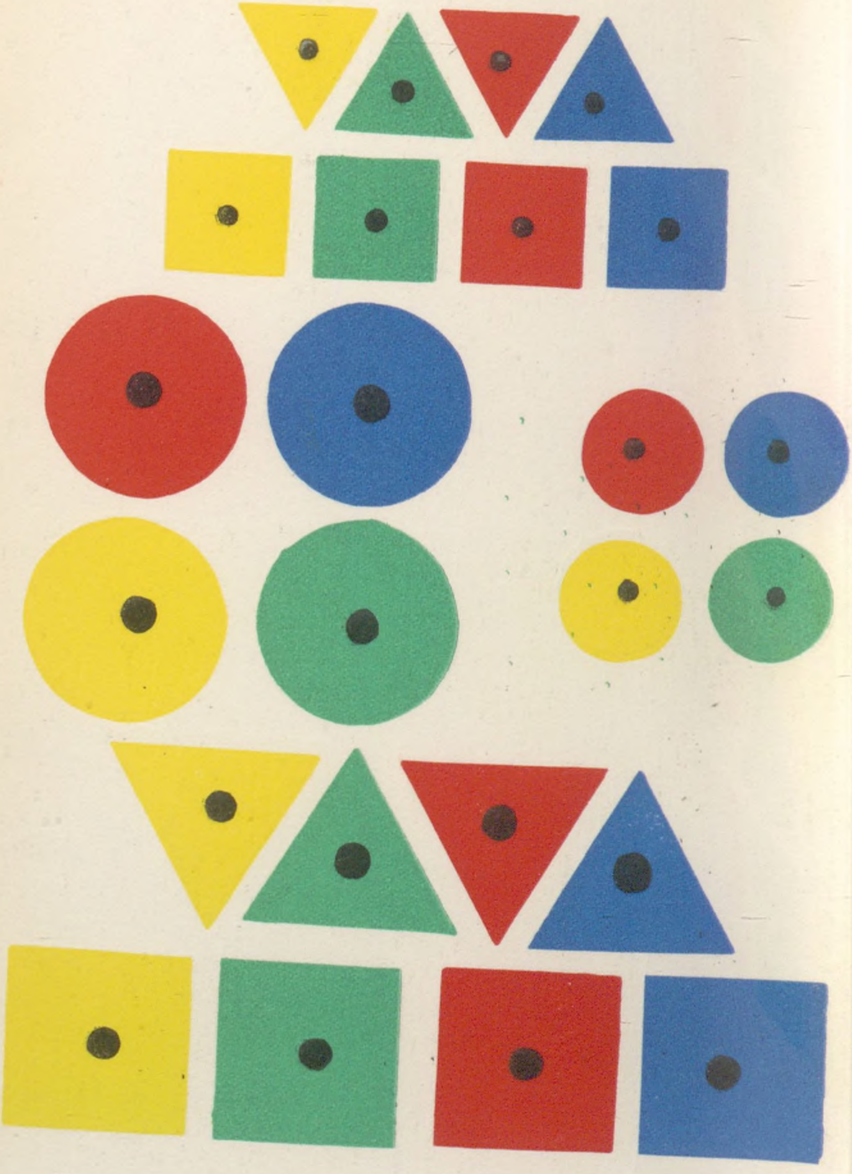
Die Anzahl der Karten in einer bestimmten Gruppe ist auch jetzt unabhängig von der Auswahl der Anfangskarte.

5. Aufgabe.

Soviel Eigenschaften in je zwei Varianten	Wie viele Karten weichen von der ersten in … Eigenschaften ab? 0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Wenn du die Regelmäßigkeit in der Tabelle erkannt hast, so könntest du die Tabelle sogar aus dem Kopf fortsetzen. Jede Zahl ist die Summe von zwei Zahlen: derjenigen, die in der Tabelle unmittelbar über ihr stehen und derjenigen, die links davon stehen.



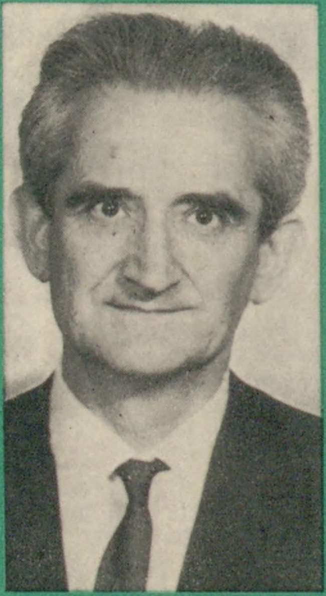


Mathematik – eine formale Wissenschaft, trocken und langweilig? Vargas Mathematik macht Spaß. Sie wird weder Kinder noch Erwachsene enttäuschen, und vielleicht finden jene, die vorher keine Freude daran hatten, auf diesem mehr spielerischen Weg Zugang zur Mathematik. Aber auch dem, der sich bisher gerne mit Mathematik beschäftigte, bietet das Buch viel Neues und Interessantes.

Der Leser erhält Einblicke in

- die Programmierung von Rechnern,
- die Verwendung von Lochkarten,
- in das Binärsystem bei Rechnern,
- und in die Wahrscheinlichkeitsrechnung (Band I).

Im zweiten Band geht es um Teilprobleme in Raum und Ebene, weitere Spiele zur Wahrscheinlichkeit und um logische und kombinatorische Fragestellungen.



Bd. 1 und 2 ISBN 963 05 0633 5
Bd. 2 ISBN 963 05 0635 1