

Lantos Béla

**IRÁNYÍTÁSI RENDSZEREK
ELMÉLETE ÉS TERVEZÉSE
II.**

KORSZERŰ SZABÁLYOZÁSI RENDSZEREK



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

IRÁNYÍTÁSI RENDSZEREK ELMÉLETE ÉS TERVEZÉSE II.

IRÁNYÍTÁSI RENDSZEREK ELMÉLETE ÉS TERVEZÉSE II.

ADATBÁZIS
MAGYARORSZÁGI HUNGÁRIKAI

2000-2001-2002

Magyar Tudományos Akadémia



225768

LANTOS BÉLA

IRÁNYÍTÁSI RENDSZEREK ELMÉLETE ÉS TERVEZÉSE II.

KORSZERŰ
SZABÁLYOZÁSI RENDSZEREK

1. + 955.634



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

MTAK



955.634

A könyv megjelenését támogatta a Magyar Tudományos Akadémia
és az Oktatási Minisztérium támogatásával, a Felsőoktatási Pályázatok Irodája által
lebonyolított felsőoktatási tankönyv-támogatási program

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

ISBN 963 05 7922 7

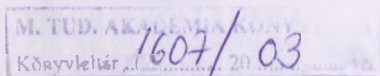
Kiadja az Akadémiai Kiadó,
az 1795-ben alapított
Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja
1117 Budapest, Prielle Kornélia u. 19.
www.akkrt.hu
www.szakkonyv.hu

Első magyar nyelvű kiadás: 2003

© *Lantos Béla, 2003*

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a nyilvános előadás, a rádió- és televízióadás,
valamint a fordítás jogát, az egyes fejezeteket illetően is.

Printed in Hungary



Tartalomjegyzék

Előszó	xi
Jelölések	xiii
1. Bezetés	1
1.1 <i>Az irányítástechnika fejlődési korszakai</i>	1
1.2 <i>Az első kötet eredményeinek áttekintése</i>	2
1.3 <i>A második kötet felépítése</i>	3
1.4 <i>A második kötet céljai</i>	7
2. Dinamikus modell felállítása fizikai elvek alapján	9
2.1 <i>Robotok dinamikus modellje</i>	9
2.1.1 <i>A kinematikai mennyiségek rekurzív számítása</i>	10
2.1.2 <i>A robot Appell-egyenleten alapuló dinamikus modellje</i>	12
2.1.3 <i>A robot Lagrange-egyenleten alapuló dinamikus modellje</i>	16
2.1.4 <i>SCARA robot dinamikus modellje</i>	18
2.2 <i>Repülőgép dinamikus modellje</i>	27
2.2.1 <i>A repüléstechnikában használt fontosabb koordináta-rendszerek</i>	27
2.2.2 <i>A repülőgép kinematikai modellje</i>	35
2.2.3 <i>A repülőgép állapotegyenlete</i>	42
2.3 <i>Helikopter dinamikus modellje</i>	44
3. Sztochasztikus irányítások frekvenciatartományban	51
3.1 <i>Kauzális és antikauzális operátorok</i>	53
3.2 <i>Optimális predikció ARMA modell esetén</i>	54
3.3 <i>Minimális varianciájú szabályozás</i>	55
3.3.1 <i>MVC stabilis inverz rendszer esetén</i>	55
3.3.2 <i>MVC labilis inverz rendszer esetén</i>	58
3.4 <i>Lineáris-kvadratikus Gauss-féle irányítás</i>	62
3.4.1 <i>Spektrális faktorizáció</i>	64
3.4.2 <i>Algoritmusok az optimális LQG irányítás meghatározására</i>	68
3.5 <i>Az alapjel figyelembevétele</i>	74
4. Prediktív irányítás frekvenciatartományban	77
4.1 <i>Optimális predikció CARIMA modell esetén</i>	77
4.2 <i>Optimális prediktív irányítás CARIMA modell esetén</i>	80
4.3 <i>A számítások felbontása CARIMA modell esetén</i>	83
4.3.1 <i>Jelfüggetlen számítások</i>	83
4.3.2 <i>Jelfüggő számítások</i>	84
4.4 <i>Prediktív irányítás színes zaj esetén</i>	85

4.5	<i>Prediktív irányítás stabilitása</i>	87
4.6	<i>MIMO prediktív irányítás</i>	90
4.6.1	MIMO prediktív irányítás fehér zaj esetén	91
4.6.2	MIMO prediktív irányítás színes zaj és általános struktúra esetén	94
4.6.3	MIMO prediktív irányítás színes zaj és diagonális struktúra esetén	97
4.7	<i>Korlátozások figyelembevétele</i>	98
4.7.1	A jeltartományokra vonatkozó korlátozások	99
4.7.2	A tranziensekre vonatkozó korlátozások	100
4.7.3	A célfüggvény alakja	102
4.7.4	Optimalizálás kvadratikus programozással	103
5.	Többszáltozós rendszerek irányítása állapotterben	105
5.1	<i>Luenberger-féle normálalakok</i>	105
5.1.1	Szelektációs séma	105
5.1.2	Luenberger-féle irányíthatósági normálalak	107
5.1.3	Luenberger-féle megfigyelhetőségi normálalak	111
5.2	<i>Pólusáthelyezés állapot-visszacsatolással</i>	113
5.3	<i>Állapotmegfigyelő tervezés</i>	115
5.3.1	Teljesrendű állapotmegfigyelő tervezése	116
5.3.2	Minimálisrendű állapotmegfigyelő tervezése	117
5.4	<i>Robusztus pólusáthelyezés</i>	121
5.4.1	A robusztus pólusáthelyezési feladat megfogalmazása	122
5.4.2	A megoldás tulajdonságai	123
5.4.3	A robusztusság mértékei	125
5.4.4	A robusztus pólusáthelyezés algoritmusai	128
5.5	<i>Modális szintézisen alapuló szabályozó tervezés</i>	135
5.5.1	Roppenecker-paraméterek	136
5.5.2	Kimeneti visszacsatolás tervezése	137
5.6	<i>Projektív irányítás</i>	143
5.6.1	Projektív irányítás reziduális spektruma	144
5.6.2	Dinamikus szabályozó tervezése	145
5.6.3	PI szabályozás	149
5.6.4	PID szabályozás	150
5.6.5	Általánosított PID szabályozás	151
6.	Többszáltozós rendszerek szétcsatolása	153
6.1	<i>A szétcsatolhatóság feltétele</i>	153
6.2	<i>Integrátor értelemben szétcsatolt rendszer</i>	155
6.3	<i>Kanonikusan szétcsatolt rendszer</i>	157
6.4	<i>Kanonikusan szétcsatolt rendszer kompenzálása</i>	160
6.4.1	Zérushelyek invarianciája állapot-visszacsatolás esetén	162
6.4.2	A szétcsatolt rendszer pólusai és zérushelyei	164
6.4.3	Az állapot-visszacsatolás megtervezése	166
6.5	<i>A szétcsatolási feltételek biztosítása soros kompenzációval</i>	168
6.6	<i>Párhuzamos dinamikus kompenzálás instabil szétcsatolási zérusok esetén</i> ..	173
6.6.1	Egyetlen instabil MIMO zérus kompenzálása	173
6.6.2	Konjugált komplex MIMO zéruspár kompenzálása	175

6.6.3	Az instabil szétszételési zérusok fokozatos felszámolása	176
7.	MIMO diszkrétidejű optimális LQ és LQG irányítás	177
7.1	<i>Időben változó rendszer LQ optimális irányítása</i>	177
7.2	<i>Időinvariáns rendszer LQ optimális irányítása</i>	181
7.2.1	Reciprok gyök tulajdonság	181
7.2.2	Optimális konstans szabályozó	183
7.3	<i>Az optimalizálási kritérium diszkrétizálása</i>	185
7.4	<i>Aktuális Kalman-szűrő időben változó rendszer esetén</i>	190
7.5	<i>Aktuális Kalman-szűrő időinvariáns rendszer esetén</i>	194
7.6	<i>Optimális LQG irányítás</i>	195
7.7	<i>A Kalman-szűrő általánosítási lehetőségei</i>	200
7.7.1	Kalman-szűrő korrelált rendszerzaj és mérési zaj esetén	200
7.7.2	Kiterjesztett Kalman-szűrő	201
8.	Prediktív irányítás állapotterben	205
8.1	<i>Prediktív irányítás tervezése stabilitási garanciával</i>	206
8.1.1	Mosca–Zhang-féle korlátozó feltételek	206
8.1.2	Rawlings–Muske-féle korlátozó feltételek	208
8.1.3	LQ szabályozásra alapozott prediktív irányítás	211
8.2	<i>Korrekciók a numerikus stabilitás biztosítására</i>	212
8.2.1	Mosca–Zhang-módszer kiterjesztése	212
8.2.2	Rawlings–Muske-módszer kiterjesztése	214
8.2.3	Az LQ szabályozásra alapozott prediktív irányítás kiterjesztése	216
9.	Adaptív irányítások	217
9.1	<i>Kauzalitás, bemenet-kimenet stabilitás, passzivitás</i>	217
9.1.1	Kauzalitás	218
9.1.2	Bemenet-kimenet stabilitás	218
9.1.3	Passzív rendszer	227
9.2	<i>Szigorúan pozitív valós (SPR) lineáris rendszerek</i>	229
9.3	<i>SISO adaptív irányítások</i>	232
9.3.1	Erősítéshangolás	233
9.3.2	Általános modellreferenciás adaptív irányítás	239
9.3.3	Diszkrétidejű önhangoló adaptív irányítás	246
9.4	<i>MIMO indirekt adaptív irányítás</i>	251
9.5	<i>Robotok önhangoló adaptív irányítása</i>	255
10.	Optimális irányítások elmélete	261
10.1	<i>Optimalizálás skalárértékű kritérium esetén</i>	261
10.1.1	Optimalizálás lineáris topológikus terekben	263
10.1.2	A statikus optimum szükséges feltétele skalárértékű kritérium esetén Banach-térben	269
10.1.3	A lokális maximum elv	271
10.1.4	A Pontrjagin-féle maximum elv	279
10.1.5	Bang-bang elv	286
10.1.6	Folytonosidejű LQ irányítási probléma	287

10.2	<i>Optimalizálás nem skalárértékű kritérium esetén</i>	289
10.2.1	<i>Optimalizálás részben rendezett lineáris topológikus térben</i>	290
10.2.2	<i>Optimalizálás részben rendezett Banach-térben</i>	292
10.2.3	<i>A lokális supremum elv</i>	300
10.2.4	<i>A supremum elv</i>	305
10.2.5	<i>Kalman–Bucy-szűrő folytonos időben</i>	306
10.2.6	<i>Optimalizálás halmaz-értékű kritérium szerint</i>	310
11.	Nemlineáris irányítások elmélete	317
11.1	<i>Differenciálgeometriai alapok</i>	317
11.2	<i>Lokális elérhetőség</i>	330
11.3	<i>Lokális megfigyelhetőség</i>	335
11.4	<i>Nemlineáris rendszer linearizálása teljes állapot-visszacsatolással</i>	340
11.4.1	<i>SISO rendszer linearizálása állapot-visszacsatolással</i>	340
11.4.2	<i>MIMO rendszer linearizálása állapot-visszacsatolással</i>	345
11.5	<i>Bemenet/kimenet linearizálás</i>	355
11.5.1	<i>SISO rendszer bemenet/kimenet linearizálása</i>	356
11.5.2	<i>MIMO rendszer bemenet/kimenet linearizálása</i>	361
12.	Nemlineáris irányítások tervezése	367
12.1	<i>Flatness szabályozás</i>	367
12.1.1	<i>Vektormezők prolongálása, Cartan-mezők</i>	368
12.1.2	<i>Lie–Bäcklund transzformáció</i>	369
12.1.3	<i>Endogén állapot-visszacsatolás</i>	371
12.1.4	<i>Differenciálisan sima rendszerek tulajdonságai</i>	372
12.1.5	<i>Hajódaru vezérlése a differenciális simaság elve alapján</i>	373
12.2	<i>Visszalépéses technikán alapuló stabilizálás</i>	381
12.2.1	<i>A visszalépéses stabilizálás elméleti alapjai</i>	381
12.2.2	<i>Helikopter stabilizálása back-stepping módszerrel</i>	383
12.3	<i>Mobilis robot irányítása</i>	391
12.3.1	<i>Mobilis robot irányítása statikus visszacsatolással</i>	392
12.3.2	<i>Mobilis robot irányítása időben változó dinamikus visszacsatolással</i>	397
Függelék		403
F1.	Fizikai rendszerek kinematikai és dinamikai alapjai	403
F1.1	<i>Kinematikai alapfogalmak</i>	403
F1.1.1	<i>Az orientáció jellemzése forgatásokkal</i>	405
F1.1.2	<i>Az orientáció jellemzése kvaterniókkal</i>	407
F1.1.3	<i>Az inverz orientációs feladat megoldása</i>	408
F1.2	<i>Differenciálási szabályok mozgó koordináta-rendszerekben</i>	410
F1.3	<i>Merev test inercia jellemzői</i>	413
F1.4	<i>Lagrange-, Appell- és Newton–Euler-egyenletek</i>	416
F1.4.1	<i>Lagrange-egyenlet</i>	418
F1.4.2	<i>Appell-egyenlet</i>	419
F1.4.3	<i>Newton–Euler-egyenlet</i>	420
F1.5	<i>Robotok kinematikai modellje</i>	422
F1.5.1	<i>Csuklókval összekapcsolt nyíltláncú merev testek geometriai modellje</i>	423

F1.5.2	Direkt geometriai feladat	428
F1.5.3	Inverz geometriai feladat	431
F1.5.4	A robot differenciális mozgása	433
F2.	Polinom- és racionális mátrixok faktorizációja	439
F2.1	Átviteli függvény mátrix minimális alakja	439
F2.2	Polinom mátrix Smith-alakja	444
F2.3	Racionális mátrixok Smith–McMillan-alakja	446
F3.	Kvadratikus programozási algoritmusok	451
F3.1	Aktív halmaz módszerek	451
F3.1.1	Egyenlőség alakjában adott korlátozások	451
F3.1.2	Egyenlőtlenség alakjában adott korlátozások	454
F3.1.3	Kezdeti megvalósítható pont meghatározása	456
F3.1.4	Az aktív halmaz módszeren és a megvalósítható irányokon alapuló QP algoritmus	457
F3.1.5	Általános nemlineáris programozási feladat (NLP)	458
F3.1.6	Az Optimization Toolbox főbb szolgáltatásai	458
F3.2	A kvadratikus programozási feladat visszavezetése lineáris komplementer problémára (LCP)	460
F3.2.1	Pivot lépés	462
F3.2.2	Lineáris komplementer probléma megoldása	464
F4.	A funkcionálanalízis alapjai	471
F4.1	Lineáris terek	471
F4.2	Topológikus terek	472
F4.3	Metrikus, lineáris normált, Banach- és Hilbert-terek	477
F4.4	Részben rendezett terek	481
	Irodalomjegyzék	483

Előszó

Az irányítástechnika (az automatikus szabályozások és vezérlések tudománya) rohamos fejlődésen ment át az elmúlt ötven évben, eredményei nélkül ma már nem hozhatók létre biztonságos erőművi rendszerek, robotizált gyártórendszereknek, repülőgépek és űrtechnikai berendezések.

A három kötetre tervezett sorozat eme második kötete (továbbiakban könyv) az irányítástechnika korszerű irányzatait mutatja be szigorú, de logikusan felépített szemléletben és egységes rendszertechnikai látásmódot közölve. Szerves folytatása az első kötetnek, amely általános rendszeres technikai ismereteket adott és bemutatta az egyváltozós szabályozások tervezési módszereit.

A könyv a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Villamosmérnöki és Informatikai Karán a szakirányú képzésben "Írányításelmélet" és a PhD képzésben "Modern irányításelmélet I." címmel tartott előadásaimon alapul.

A könyv (egy fejezet kivételével) többváltozós (MIMO) rendszerek irányítási módszereit vizsgálja. Először egy rövid áttekintést ad az irányítástechnika fejlődéséről és a könyvben vizsgált tématerületekről.

Ezután az irányítástechnikai gyakorlatban fontos szerepet játszó robotok, repülő és helikopterek dinamikus modelljének felállítását mutatja be egységes elvek alapján, amely vezérfonalként szolgálhat másfajta rendszerek fizikai modelljeinek felállításánál is.

Bemutatja az optimális minimális varianciájú (MVC) és LQG (Linear Quadratic Gaussian) irányítások tervezési módszereit frekvenciatartományban stabilis és labilis SISO inverz rendszer esetén.

Az általánosított prediktív irányítások (GPC) tervezésére frekvenciatartománybeli módszereket mutat be SISO és MIMO rendszerek, valamint fehér és színes zaj esetén, lehetővé téve a tranziensek számára korlátozások előírását is. Míg korlátozás nélkül analitikus megoldás adható, addig korlátozások esetén egy kvadratikusan programozási (QP) feladat keletkezik, amelyet valós időben kell megoldani két mintavételi időpont között, amelyre az aktív halmaz módszer és a Lemke-algoritmus javasolható.

Bemutatja a MIMO rendszerek Luenberger-féle normálalakjait. Módszert ad a pólus-áthelyezésre, a minimálisrendű állapotmegfigyelő tervezésére és az állapot-visszacsatolás különféle közelítéseire (kimeneti visszacsatolás, projektív irányítás, általánosított PID szabályozás).

Módszert ad többváltozós rendszer stabilis szétcsatolására. Megadja a szétcsatolhatóság Gilbert-féle feltételét, módszert ad a rendszer integrátor értelemben történő szétcsatolására, a rendszer kanonikus struktúrájának meghatározására és az alrendszerek kompenzálására. Módszert ad a Gilbert-feltételek biztosítására prekompenzációval, illetve az instabil szétcsatolási zérusok megszüntetésére párhuzamos kompenzációval.

Bemutatja időben változó (LTV) és időinvariáns (LTI) diszkrétidejű rendszerek LQ optimális irányítását, az optimális sztochasztikus állapotbecslést (Kalman-szűrő), az LQ irányítás és a Kalman-szűrő közötti matematikai analógiát és az LQG optimális irányítás szeparációs elvét. Az LTI esetben a Riccati-egyenlet mellett bemutat egy sajátérték-sajátvektor technikán alapuló alternatív módszert is az optimális állapot-visszacsatolás tervezésére.

Állapotterbeli prediktív irányítási módszereket mutat be MIMO rendszerek esetén, különös figyelmet fordítva a fizikai stabilitás mellett a numerikus stabilitásra is. A stabilitás garantálását különféle korlátozó feltételek betartásával lehet biztosítani. A numerikus stabilitási problémák eliminálására a módszerek korrigált változatai is bemutatásra kerülnek.

Külön fejezet foglalkozik az adaptív irányítások elméleti alapjaival (bemenet-kimenet stabilitás, passzivitás), a modell referenciás (MRAC) és az önhangoló (STAC) adaptív irányítási módszerekkel, a MIMO implicit adaptív irányítással és a robotok nemlineáris önhangoló adaptív irányításával.

A könyv részletesen tárgyalja az optimális irányítások elméletének legfontosabb eredményeit skalárkritérium és nem skalárértékű kritérium esetén általános függvényterekben. Az eredményeket példák illusztrálják a folytonosidejű optimális irányítás, állapotbecslés és halmazkritériumú optimalizálás területéről.

A könyv egyik súlyponti része a nemlineáris rendszerek differenciálgeometriai (Lie-algebrai) elven történő irányításának vizsgálata. A differenciálgeometriai alapozás után először megadja az elérhetőség és a megfigyelhetőség általánosítását nemlineáris rendszerekre, majd az állapot-visszacsatolás elvén és a bemenet-kimenet visszacsatolás elvén alapuló linearizálási módszereket.

Külön vizsgálja a differenciálisnima rendszerek irányítását (flatness control), a viszszafejtéssel (back-stepping) technikát és az időben változó nemlineáris irányítást, amelyek alkalmazását hajódaru, helikopter és mobilis robot irányítása példáján mutatja be.

A függelék összefoglalja a modellek felállításánál használt fizikai elveket, az átviteli függvény mátrix faktorizációit, a QP algoritmusokat és a funkcionálanalízis alapjait.

A könyv jól használható az egyetemeken folyó irányítástechnikai szakirányú és PhD oktatásban. Javasolható az irányítástechnika területén oktatók és kutatók számára is. Segítséget nyújt a gyakorlati szakembernek a korszerű irányítástechnikai szoftver/hardware tervezői rendszerek használatához. Jó alapokat nyújt a sorozat további kötete (III. Robusztus, LPV és Soft Computing módszerek) anyagának elsajátításához.

A könyv anyagának bizonyos részei az *MTA Irányítástechnikai Kutatócsoportban*, az *OTKA T 029072* téma keretében és a *Charles Simonyi kutatói ösztöndíj* támogatással keletkezett kutatási eredményeimen alapulnak. A kutatási támogatásért ezúton mondok köszönetet.

A könyv megírásához nagymértékben hozzájárultak azok a beszélgetések, melyeket a szakterület hazai és külföldi művelőivel folytathattam. A könyv lektorainak, *Keviczky László* és *Bokor József* akadémikusoknak külön is megköszönöm értékes tanácsait. Megköszönöm *Kahlesz Ferenc* PhD hallgatónak és *Kiss Bálint* adjunktusnak a könyv ábráinak számítógépes szerkesztését. Végül köszönetet mondok az Oktatási Minisztérium és a Magyar Tudományos Akadémia támogatásáért és az Akadémiai Kiadó gondos kiadói tevékenységéért.

Budapest, 2002. december.

Lantos Béla

JELÖLÉSEK

$\Rightarrow$	következik
$\Leftrightarrow$	akkor és csakis akkor
$\in$	eleme
$\notin$	nem eleme
$a := b$	a -t definiálja b
0	lineáris tér nulla eleme
$A = \{a : a \text{ tulajdonságai}\}$	az A halmaz definíciója
A^0	az A halmaz belső pontjainak halmaza
$\overline{A}$	az A halmaz lezártja
$\langle A \rangle$	az A halmaz konvex burka
$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$	A és B halmazok direkt szorzata
$F : A \rightarrow B$	F leképezés (függvény) A -ból B -be
$D(F)$	F leképezés értelmezési tartománya
$\text{kernel}(F)$	F lépezés magtere
$\text{range}(F), R(F)$	F leképezés képtere
$F(\cdot, y)$	$F(x, y)$ függvény rögzített y esetén
R^1	valós számok halmazaza
C^1	komplex számok halmaza
$z, \bar{z} = \bar{z}$	komplex szám és konjugáltja
$\langle x, y \rangle$	x és y skalárszorzata
$x \times y$	x és y vektoriális szorzata
R^n, C^n	valós vagy komplex n -dimenziós euklideszi tér
$ x $	x abszolút értéke
$\ x\ $	x normája
$(X, \cdot, F)$	lineáris tér az F test felett
(X, ρ)	metrikus tér
(X, τ)	topológikus tér
$S_f = \{f^{-1}(U) : U \in \tau_Y\}$	$f : X \rightarrow Y$ által generált topológia szubbázis
$w(X, f)$	az S_f által generált gyenge (weak) topológia
(E, τ)	lineáris topológikus tér
$\sigma(E, \Phi)$	Φ félnormák által generált gyenge topológia

$f: E \rightarrow R^1$	lineáris funkcionál E felett
$E^\#$	az E feletti $f(x)$ lineáris funkcionálok tere
E'	az E feletti folytonos lineáris funkcionálok tere
$\hat{x}: E^\# \rightarrow R^1$	$\hat{x}(f) := f(x)$ lineáris funkcionál $E^\#$ felett
$\hat{E}$	az $E^\#$ feletti $\hat{x}(f)$ lineáris funkcionálok tere
$\sigma(E, E')$	az E' által generált gyenge topológia E -ben
$\sigma(E', \hat{E})$	az $\hat{E}$ által generált gyenge* topológia E' -ben
K	nulla csúcspontú kúp
K^*	a K kúp konjugált kúpja E' -ben
$(E, \ \cdot \)$	lineáris normált tér, Banach-tér (ha teljes)
$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$	Hilbert-tér
$C^n[0, T]$	folytonos függvények tere R^n -ben
$C^{(n)}[0, T]$	n -szer folytonosan differenciálható függvények
$L_p^n[0, T]$	p -normában integrálható függvények R^n -ben
$L_\infty^n[0, T]$	lényegében korlátos függvények R^n -ben
$\geq$	részben rendezés (P pozitív kúp definiálja)
$(E, \geq)$	részben rendezett (topológikus, Banach-) tér
$L(E_1 \rightarrow E_2)$	lineáris leképezések tere
$K(E_1 \rightarrow E_2)$	korlátos lineáris operátorok tere
A^*	adjungált operátor Hilbert-térben
$F'(x)$	Fréchet-derivált
$f'(x), f''(x)$	gradiens és Hess-mátrix, ha $f: R^n \rightarrow R^1$
$\mathcal{A}$	lineáris leképezés
$\mathcal{I}$	identikus leképezés
$A, B, C, \dots$	mátrixok
$a, b, c, \dots$	vektorok
$\text{rank}(A)$	mátrix rangja
$\det(A)$	mátrix determinánsa
$\text{trace}(A)$	A mátrix nyoma
$\text{Span}\{a, b, c, \dots\}$	$a, b, c, \dots$ vektorok által kifeszített tér
$A = U \Sigma V^T$	A mátrix szinguláris érték felbontása
$A = QR$	A mátrix QR-felbontása
A^+	A mátrix Moore-Penrose pszeudoinverze

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Laplace-transzformált
$F(z) = Z\{f_n\}$	Z transzformált
l_2	mindkét irányban végtelen sorozatok tere
q, q^{-1}	shift-operátorok
$G(q), H(q), H^{-1}(q)$	stabil (korlátos) operátorok l_2 felett
$P^*(z)$	reciprok polinom, $P^*(z) = z^{gr P} P(z^{-1})$
$(\Omega, \mathcal{A}, P)$	valószínűségi mező
ξ	valószínűségi változó
$E\xi$	várható érték
$x(t) = x(t, \omega)$	sztochasztikus folyamat
$R_{xy}(\tau)$	keresztkovariancia függvény
$R_{xx}(\tau)$	autokovariancia függvény
$\Phi_{xy}(\omega)$	keresztspektrálsűrűség
$\Phi_{xx}(\omega)$	teljesítménysűrűség spektrum
$x \in R^n, u \in R^r, y \in R^m$	állapot, bemenő jel, kimenő jel
$x(t) = \varphi(t, \tau, x, u(\cdot))$	állapotátmenet függvény
$y(t) = g(t, x(t), u(t))$	kimeneti leképezés
$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$	nemlineáris rendszer állapotegyenlete
$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$	lineáris rendszer állapotegyenlete
$y(t) = C(t)x(t) + B(t)u(t)$	lineáris rendszer kimeneti leképezése
$\dot{x} = Ax + Bu$	időinvariáns lineáris rendszer állapotegyenlete
$y = Cx + Du$	időinvariáns lineáris rendszer kimenete
e^{At}	exponenciális mátrix
$W(s), G(s), H(s)$	átviteli függvények
p, z	pólus, zérus
d_i, D_i	Gilbert-féle szétcsatlakozási jellemzők
$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i$	diszkrétidejű lineáris időinvariáns rendszer
$x_{i+1} = \Phi x_i + \Gamma u_i$	mintavételezett lineáris folytonosidejű rendszer
$D(z)$	diszkrétidejű átviteli függvény
$M_c = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$	lineáris rendszer irányíthatósági mátrixa
$M_o = [C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T]^T$	lineáris rendszer megfigyelhetőségi mátrixa
$u = -Kx$	lineáris állapot-visszacsatolás

$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Gy + Hu$	lineáris állapotmegfigyelő
$\hat{x}_i = F\hat{x}_{i-1} + Gy_i + Hu_{i-1}$	aktuális lineáris állapotmegfigyelő
$y(t) = \varphi^T(t)\vartheta$	lineáris paraméterbecslési feladat
$P(t) = \left[\sum \mathcal{X}^{-i} \varphi(i) \varphi^T(i) \right]^{-1}$	paraméterbecslésnél szereplő mátrix
$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t)\hat{\vartheta}(t-1)$	reziduál
$\hat{\vartheta}(t) = \hat{\vartheta}(t-1) + P(t)\varphi(t)\varepsilon(t)$	rekurzív paraméterbecslés
$C^{(\infty)}$	sima függvények tere
$f: X \rightarrow R^n$	vektormező X -en, X nyílt halmaz, $f \in C^\infty$
$V(X)$	az X feletti vektormezők halmaza
$S(X)$	az $a: X \rightarrow R^1$ sima függvények halmaza
$(R^n)^*$	sorvektorok (kovektorok) tere
$h: X \rightarrow (R^n)^*$	forma (kovektormező) X -en, $h \in C^{(\infty)}$
$F(X)$	az X feletti formák (kovektormezők) halmaza
$y = T(x)$	koordináta-transzformáció, diffeomorfizmus
$s_{f,t}(x_0)$	integrálgörbe, $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $x(0) = x_0$
∇a , da	$a \in S(X)$ gradiense
$L_f a = \langle da, f \rangle$	a Lie-deriváltja, $a \in S(X)$, $f \in V(X)$
$L_f g = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g = [f, g]$	g Lie-deriváltja (Lie-bracket), $f, g \in V(X)$
$L_f h = f^T \left(\frac{\partial h^T}{\partial x} \right)^T + h \frac{\partial f}{\partial x}$	h Lie-deriváltja, $h \in F(X)$, $f \in V(X)$
$ad_f^{i+1} g = [f, ad_f^i g]$	ad -operátor, $ad_f^0 g = g$, $ad_f^1 g = [f, g]$ stb.
$M \subset X$	részsokaság (submanifold)
TM_x	az M részsokaság érintőtere
$\Delta: x \mapsto \mathcal{D}^k(x)$	disztribúció, $\Delta(x) = \text{Span}\{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$
$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i$	nemlineáris rendszerosztály, $f, g_i \in V(x)$
$\text{Span}\{ad_f^i g_j: 1 \leq j \leq m, 0 \leq i \leq n-1\}$	elérhetőségi disztribúció
$r = (r_1, \dots, r_m)$	relatív fokszám vektor
$u = S^{-1}(x)(-q(x) + v)$	linearizáló statikus visszacsatolás, $\det S(x) \neq 0$
$\dot{z} = \beta(x, z, v)$, $u = \alpha(x, z, v)$	endogén állapot-visszacsatolás

K_{cs}, K_m, K_e	csökkenési, megengedett, érintő irányok kúpja
$F(x, u) = \int_0^T \phi(x(t), u(t)) dt$	minimalizálandó célfüggvény
$H(x, u, \psi) = \langle f, \psi \rangle - \lambda_0 \phi$	Hamilton-függvény
K	kinetikus energia
P	potenciális energia
$L = K - P$	Lagrange függvény
G	Gibbs-függvény
K_i	koordináta-rendszer, keret
T_{K_1, K_2}	homogén transzformáció
A_{K_1, K_2}	orientáció
P_{K_1, K_2}	pozíció
$Rot(z, \varphi)$	forgatás z körül φ szöggel
φ, ϑ, ψ	Euler-szög, RPY-szög
$q = (w, s)$	kvaternió, $w \in R^3, s \in R^1$
v, a	sebesség, gyorsulás
ω, ε	szögsebesség, szöggyorsulás
q_i	általánosított koordináta, csuklóváltozó
${}^n d_{i-1}, {}^n t_{i-1}$	parciális sebesség, parciális szögsebesség
m	tömeg
$J(q)$	fizikai rendszer Jacobi-mátrixa
ρ_c	tömegközéppont
$K_x, K_{xy}, \dots$	tehetetlenségi nyomatékok
K (vagy K)	inercia mátrix
$H(q)$	általánosított inercia mátrix
F, N (vagy T, τ)	erő, nyomaték
$P(s)$	polinom mátrix
$\partial c_j[P(s)], \partial r_j[P(s)]$	polinom mátrix oszlopfokszáma, sorfokszáma
$P_S(s)$	polinom mátrix Smith-alakja
$W_{SM}(s) = P_S(s) / D_W(s)$	átviteli függvény Smith–McMillan-alakja
$W(s) = W_N(s)[W_D(s)]^{-1}$	jobb oldali mátrixtört leírás (RMFD)
$W(s) = [\overline{W}_D(s)]^{-1} \overline{W}_N(s)$	bal oldali mátrixtört leírás (LMFD)

1. BEVEZETÉS

Az elmúlt több mint fél évszázad alatt az irányítástechnika (az automatikus szabályozások és vezérlések tudománya) rohamos fejlődésen ment át, eredményei elengedhetetlen részévé váltak a technikai fejlődésnek. A számítástechnika rohamos fejlődése megnyitotta az utat az elméleti eredmények gyakorlati felhasználásához. Korszerű tervezői rendszerek és szoftver/ hardver platformok jelentek meg, amelyek megkönnyítik a tervezést és a gyors implementálást a szakember számára, ugyanakkor korszerű ismereteket is igényelnek az ilyen rendszerek használatához. Ezeknek az ismereteknek az elsajátításához elengedhetetlenül szükség van olyan művekre, amelyek rendszerezik és összefoglalják az eddig elért eredményeket a graduális és posztgraduális egyetemi képzésben részt vevők, valamint a gyakorlati szakemberek számára. A több kötetre tervezett könyv egyik célja ez volt.

1.1 Az irányítástechnika fejlődési korszakai

Az irányítástechnika fejlődésében több korszak különböztethető meg. A *klasszikus szabályozáselmélet* az 1940-es évek elején kezdett kialakulni, és fejlődése a második világháború alatt gyorsult fel. A módszerek többségükben determinisztikus jeleket feltételeztek. Egyszerű szabályozókat (PID stb.) használtak, amelyek beállítását egyszerű frekvenciatartománybeli módszerekkel határozták meg. A szabályozott szakasz statikus és dinamikus tulajdonságainak identifikációjára legtöbbször grafoanalitikus módszereket alkalmaztak. A szabályozók beállítására ökölsabályokat is kidolgoztak. Elsőként a folytonosidejű (analóg) szabályozások tervezési módszereit fejlesztették ki, majd a hatvanas években a diszkrétidejű (mintavételes) szabályozásokét. A sztochasztikus szabályozások elméletének első eredményei már a második világháborúban alkalmazásra kerültek. A klasszikus szabályozáselmélet elsősorban a lineáris rendszerek esetére adott szabályozótervezési módszereket. A statikus nemlinearitás figyelembevételére a leírófüggvény módszert használták.

A *korszerű szabályozáselmélet* az ötvenes évek végén és a hatvanas évek elején kezdett kialakulni. Szakított a frekvenciatartománybeli módszerek egyeduralmával. Elméletileg jól megalapozott eredmények születtek az optimális irányítások tervezésére. Kidolgozták a szabályozások állapot-visszacsatoláson és állapotmegfigyelőn alapuló tervezési módszereit folytonos és diszkrét időben. Megmutatták, hogy a lineáris rendszerek kvadratikus kritérium szerinti optimális irányítása analitikusan is megoldható. Kidolgozták a sztochasztikus jelek optimális szűrését. Kidolgozták a lineáris paraméterbecslés feladatnak a megoldását, amely a lineáris rendszerek identifikációjának egyik alapját képezte. A szabályozó paramétereinek hangolását és az identifikációt összekapcsolták, ez a terület az adaptív irányítások területe lett. Szemléletes mérnöki megközelítésen alapul a nyolcvanas években kifejlődött általá-

nosított prediktív irányítás. A nemlineáris rendszerek irányítására differenciálgeometriai eszközöket vontak be. A korszerű szabályozáselmélet fejlődése jelenleg is tart.

A *posztmodern szabályozáselmélet* a robusztus optimális irányítások területe. A nyolcvanas években kezdett kifejlődni azzal a céllal, hogy optimális viselkedést biztosítson változó rendszer, változó referenciajel és változó zavaró jelek esetén. A változások jellemzésére speciális tereket használnak. Különböző megközelítései a μ -analízis módszerét és a lineáris mátrixegyenlőtlenségek (LMI, linear matrix inequalities) technikáját alkalmazzák a robusztus és optimális szabályozás megtervezésére. Központi kérdés lett a lineáris változó paraméterű (LPV, linear parameter varying) rendszerek tervezési módszereinek kutatása. A nemlineáris irányítások területén teret kaptak a passzivitáselmélet eredményei és a Hamilton–Jacobi egyenlőtlenségen alapuló tervezési módszerek.

A *soft computing* különféle irányzatai (fuzzy rendszerek, neurális hálózatok, neuro-fuzzy rendszerek, genetikus algoritmusok) az utóbbi két évtizedben szintén fokozatosan helyet kaptak a szabályozástechnikában, különösen a nemlineáris rendszerek modellezésében, irányításában és a különféle optimalizálási problémák megoldásában.

1.2 Az első kötet eredményeinek áttekintése

A könyv I. kötetében összefoglaltuk a *klasszikus szabályozáselmélet* legfontosabb eredményeit és bizonyos eredményeket a *korszerű szabályozáselmélet* területéről.

Összefoglaltuk a többváltozós (MIMO, multiple-input, multiple-output) lineáris és nemlineáris dinamikus rendszerek különféle leírási módszereit, stabilitás definícióit és stabilitásvizsgálati módszereit (Ljapunov-tételek, La Salle-tétel). Bemutattuk a MIMO lineáris rendszerek irányíthatóságának és megfigyelhetőségének feltételeit, az állapot-visszacsatolás és az állapot-megfigyelő elvét. Bemutattuk a mérnöki gyakorlatban oly fontos statikus optimalizálás és paraméterbecslés legfontosabb eredményeit. Módszereket adtunk a lineáris egyváltozós (SISO, single-input, single-output) rendszerek ARX, ARMAX, IV modelljeinek és a MIMO rendszerek altérbázisú MOESP modelljének identifikációjára. Ezért elmondhatjuk, hogy az első kötet rendszerteknikai szempontból többváltozós rendszerekkel foglalkozott.

A szabályozótervezés tekintetében azonban a könyv I. kötete didaktikai megfontolásból és terjedelmi korlátok miatt csak egyváltozós szabályozásokkal foglalkozott, innen a kötet alcíme. A SISO szabályozótervezési módszerek közül bemutattuk a frekvencia-tartománybeli és az időtartománybeli tervezési módszerek széles skáláját, kezdve a klasszikus PID-szabályozástól az állapot-visszacsatolást és állapotmegfigyelőt alkalmazó szabályozásokig mind folytonos időben (analóg szabályozások), mind pedig diszkrét időben (mintavételes szabályozások) determinisztikus jelek esetén.

1.3 A második kötet felépítése

A könyv II. kötete szervesen épít az I. kötet eredményeire, és a korszerű szabályozásméлет ott nem tárgyalt tématerületeivel foglalkozik. Elsősorban MIMO szabályozási rendszerek elméletével és tervezésével foglalkozik, ez alól csak a sztochasztikus irányítások jelentenek kivételt a 3. fejezetben, amelyet didaktikai megfontolásból SISO rendszerekre mutatunk csak be. A kötet más helyén azonban MIMO sztochasztikus irányítások is megjelennek (LQG optimális irányítás). A könyv II. kötete bevezetésből (1. fejezet), további 11 fejezetből és 4 függelékkel áll.

A 2. fejezetben az irányítástechnikai gyakorlatban fontos szerepet játszó néhány bonyolult nemlineáris rendszer (robot, repülő, helikopter) dinamikus modelljének felállítására mutatunk be módszereket általános fizikai elvek felhasználásával. A célkettős, egyrészt konkrét modellek felállítása a vizsgált három rendszer számára, másrészt annak a "know-how"-nak a bemutatása, amely vezérfonalként szolgálhat másfajta rendszerek fizikai modelljeinek felállításánál. Különlegesség, hogy a robotok, repülők és helikopterek modelljeinek felállítása egységes elvek alapján történik. A kinematikai mennyiségek közül az orientáció jellemzésére a Rodriguez képletet, Euler szögeket, RPY (roll, pitch, yaw) szögeket és a kvaterniókat, a pozíció és orientáció együttes jellemzésére a homogén transzformációt használjuk. A dinamikus modellek felállítására a Lagrange-, Appell- és Newton-Euler-egyenleteket alkalmazzuk.

A 3. fejezet a diszkrétidejű SISO sztochasztikus irányítások területéről két problémával, a minimális varianciájú irányítással (MVC, minimum variance control) és a lineáris-kvadratikus Gauss-féle irányítással (LQG, linear quadratic Gaussian control) foglalkozik frekvenciatartományban (operátor módszerrel). Az LQG elnevezés lineáris rendszer kvadratikus kritérium szerinti irányítására utal Gauss-féle zajt feltételezve. Az LQG irányítástervezési algoritmus a spektrális faktorizáción alapul. A módszereket stabilis és labilis inverz rendszerre is bemutatjuk.

A 4. fejezet az általánosított prediktív irányítások (GPC, Generalized Predictive Control) tervezésének kérdéseivel foglalkozik frekvenciatartományban (operátor módszerrel). A GPC egy optimalizálási feladatot old meg a predikciós horizont fölött felnyitott körben, és az így kapott soronkövetkező beavatkozást adja ki zárt körben integráló szabályozás formájában. Először a SISO esetet tárgyaljuk. Az optimális jóslást felbontjuk múltbeli és jövőbeli adatoktól függő részre. Ökölszabályokat fogalmazunk meg a feladat paramétereinek megválasztására. A számításokat felbontjuk előre elvégezhető és csak valós időben elvégezhető részekre, és erre alapozva megadjuk az általánosított prediktív irányítás algoritmusát. Megvizsgáljuk a színes zaj esetét és a stabilitás kérdését. Részletesen vizsgáljuk a MIMO prediktív irányítást és a korlátozások figyelembevételét az optimalizálás során. Az optimalizálási feladat kvadratikus programozási feladatra (QP, Quadratic Programming) vezet, melyet valós időben kell megoldani két mintavételi időpont között. Erre a célra az aktív halmaz módszert és a Lemke-algoritmust javasoljuk.

Az 5. fejezet a többváltozós lineáris rendszerek állapot-visszacsatoláson és állapotmegfigyelőn, illetve kimeneti visszacsatoláson alapuló szabályozótervezési módszerei közül mutat be néhányat. Először a rendszer különféle normálalakjai közül a Luenberger-féle irányíthatósági és megfigyelhetőségi normálalakokat mutatjuk be, majd ezek felhasználásával megoldjuk az állapot-visszacsatolási és az állapotmegfigyelő tervezési feladatokat. Módszert adunk a minimálisrendű állapotmegfigyelő tervezésére. Megvizsgáljuk a robusztus pólusáthelyezés lehetőségét. A robusztusság jellemzésére különféle mértékeket vezetünk be, és ezek felhasználásával algoritmust adunk a robusztus pólusáthelyezésre. Bemutatjuk a modális szintézisen alapuló tervezést, vagyis amikor előírjuk a zárt rendszer sajátértékeit és sajátvektorait, és ehhez keressük meg a szükséges állapot-visszacsatolást. A modális szintézis megoldására a Roppenecker-paramétereket használjuk. Módszert adunk az állapot-visszacsatolás közelítésére kimeneti visszacsatolással. Projektív irányításon alapuló módszereket mutatunk be MIMO PI , PID és általánosított PID szabályozások tervezésére.

A 6. fejezet többváltozós rendszerek szétcsatolásával foglalkozik *állapottérben*. Előbb megadjuk a szétcsatolhatóság Gilbert-féle feltételét. Bemutatunk egy módszert a rendszer szétcsatolására integrátor értelemben állapot-visszacsatolással, ha a szétcsatolhatóság feltétele teljesül. Az integrátor értelemben szétcsatolt rendszert kanonikus alakra hozzuk, és megmutatjuk, hogy melyik rész felelős az esetleg meglévő instabil szétcsatolhatósági zérushelyekért. Ezután bemutatunk egy prekompenzációs módszert a szétcsatolhatósági feltétel biztosítására, amely megfelelően súlyozott erősítőket és integrátorokat alkalmaz. Végül bemutatunk egy módszert az instabil szétcsatolhatósági zérushelyek eltüntetésére, amely párhuzamos kompenzáción alapul. Bár a módszereket folytonosidejű rendszerekre mutatjuk be, azok az algebrai hasonlóság miatt diszkrétidejű rendszerekre is alkalmazhatók.

A 7. fejezet többváltozós (MIMO) diszkrétidejű lineáris rendszerek kvadratikus kritérium szerinti optimális irányításával (LQ, linear quadratic control) foglalkozik determinisztikus jelek esetén, továbbá optimális állapotbecslésével (Kalman szűrés) és optimális LQG irányításával sztochasztikus jelek esetén.

Előbb megadjuk az LQ probléma megoldását időben változó rendszer és véges időintervallum esetén. Időinvariáns rendszer és végtelen időintervallum esetén megmutatjuk, hogy az optimális megoldás rendelkezik a reciprok gyök tulajdonsággal, továbbá az állapot-visszacsatolás egy diszkrétidejű algebrai Riccati-egyenlet megoldása. Megadjuk egy alternatív módszert is, amely sajátérték-sajátvektor technikát használ az optimális állapot-visszacsatolás meghatározására. Mivel az irányítási cél rendszerint folytonos időben fogalmazódik meg, módszert adunk a folytonos időben megfogalmazott kritérium diszkrétizálására.

Az optimális állapotbecslést sztochasztikus jelek esetén mint a kovariancia mátrix szerinti (nem skalárértékű) optimalizálási problémát fogjuk fel, és megmutatjuk, hogy az optimális állapotbecslő az aktuális Kalman-szűrő. Megmutatjuk a matematikai analógiát az LQ irányítás és Kalman szűrés között, és megadjuk az analógiában

az egymásnak megfelelő mennyiségeket. Megfogalmazzuk az optimális LQG irányítási feladatot (linear quadratic Gaussian control), és bebizonyítjuk az LQG irányításra érvényes szeparációs elvet, amely alapján az optimális megoldás egy LQ optimális állapotviszacsatolás, amelyben az állapotot az aktuális Kalman-szűrővel kapott becslült állapot helyettesíti. Nemlineáris rendszerek állapotbecslésére a kiterjesztett Kalman-szűrőt mutatjuk be.

A 8. fejezet állapotterbeli prediktív irányítási módszereket mutat be MIMO rendszerek esetén, különös figyelmet fordítva a fizikai stabilitás mellett a numerikus stabilitásra is. Ha a szakasz nem tartalmaz integrátort, akkor a szabályozó integrátorát a tervezés idejére formálisan hozzávesszük a szakaszhoz. Ha a szakasz integráló, akkor az integrátorral való kiegészítés elmarad. A tervezést nulla alapjel esetére véghezvük el, az alapjellel a megoldást ki kell egészíteni. Az optimális irányítás állapotviszacsatolás. Ha az állapot nem mérhető, akkor becslésére determinisztikus állapotmegfigyelőt vagy sztochasztikus állapotbecslőt alkalmazhatunk. A stabilitás garantálását különféle korlátozó feltételek betartásával biztosítjuk, amelyek előírásokat fogalmaznak meg a predikciós horizonton túli tranziensekre. A numerikus stabilitási problémák eliminálására megadjuk a módszerek korrigált változatait is.

A 9. fejezet adaptív irányításokkal foglalkozik. Először az adaptív szabályozások stabilitásvizsgálatánál fontos szerepet játszó bemenet-kimenet stabilitás, passzivitás és a szigorúan pozitív valós (SPR) tulajdonság kérdésével foglalkozunk. Megadjuk a stabilitással kapcsolatos fontosabb tételeket L_1 és L_2 terekben, illetve azok kiterjesztéseiben (kis erősítés tétel, kör kritérium, passzivitási tételek, Popov-kritérium, Kalman–Yacubovitch tétel). Az adaptív irányításokat felosztjuk modellreferenciás (MRAC, model reference adaptive control) és önhangoló (STAC, selftuning adaptive control) adaptív irányításokra. Egyváltozós (SISO) lineáris rendszerek esetén módszert mutatunk be a modellreferenciás adaptív irányítás tervezésére folytonos időben és az önhangoló adaptív irányítás tervezésére diszkrét időben. Többváltozós (MIMO) lineáris rendszer és innovációs zajmodell esetén módszert adunk az indirekt adaptív irányítás tervezésére, amely megoldja a rendszer paramétereinek és az állapotnak egyidejű becslését, és alapul szolgálhat különféle (pólusáthelyezésen alapuló, LQ optimum, prediktív stb.) irányítási törvények online tervezéséhez és megvalósításához. A többváltozós nemlineáris adaptív irányítások területéről robotok önhangoló adaptív irányítására mutatunk be egy módszert.

A 10. fejezet az optimális irányítások általános elméletével foglalkozik. Az eredmények felfoghatók a klasszikus variációszámítás modern általánosításának. Az optimum általános analitikus feltételeit a funkcionálanalízis módszereivel vizsgáljuk skalárértékű és nem skalárértékű (vektor, mátrix, halmaz stb. értékű) optimalizálási kritériumok esetén.

Skalárértékű optimalizálási kritérium esetén az optimum szükséges feltételeit először az Euler–Lagrange egyenletek általánosításának tekinthető geometriai for-

mában fogalmazzuk meg lineáris topológikus terekben, amelyből levezetjük a statikus optimum feltételét Banach-terekben, a dinamikus optimum feltételét a lokális maximum elv formájában, majd ebből a Pontrjagin-féle maximum elvet.

Mindezeket az eredményeket rendre kiterjesztjük nem skalárértékű kritérium esetére is, ahol a részben rendezés pozitív kúp által van definiálva. Nem skalárértékű kritérium esetén éles különbséget kell tenni a minimum és az infimum között, mivel nem mindegyik megoldás hasonlítható össze. A minimumból kontinuum sok lehet, az infimum globális, azonban nem mindig létezik. Az infimum szükséges feltételeit részben rendezett lineáris topológikus térben és Banach-térben adjuk meg a statikus feladat esetén. A dinamikus optimum szükséges feltételét egy-egy lokális és globális supremum-elv alakjában fogalmazzuk meg és bizonyítjuk is.

Az eredmények alkalmazását az irányítástechnikában néhány példa keretében mutatjuk be (bang-bang elv, folytonosidejű LQ optimalizálás, folytonosidejű Kalman-szűrő, halmazkritérium szerinti optimalizálás).

A 11. fejezet a nemlineáris irányítások elméletének alapkérdéseivel foglalkozik SISO és MIMO rendszerek esetén. A nemlineáris irányítások különös fontosságúak olyan rendszereknél, ahol dominál a követő szabályozás, mint például robotok, repülőek stb. A nemlineáris irányítások elméletének egyik jelentős irányzata a differenciálgeometria eredményeit használja fel. A differenciálgeometriai alapfogalmak (vektormező, sokaság, érintő tér, disztribúció, involutív disztribúció stb.) tárgyalásakor a mérnökök számára szemléletesebb "koordinátás alakot" használó módszert részesítjük előnyben.

A differenciálgeometriai alapokra építve megadjuk az elérhetőség és megfigyelhetőség fogalmának általánosítását nemlineáris rendszerekre. Algoritmusokat adunk az elérhetőségi és megfigyelhetőségi normáalakok meghatározására, a nemlineáris rendszer linearizálására teljes állapot-visszacsatolással és a bemenet/kimenet linearizálásra. Bemutatjuk a zéró-dinamika hatását a rendszer stabilitására. Módszert adunk a rendszer bővítésére integrátorokkal, ha a nemlineáris rendszer nem rendelkezik vektor relatív fokszámmal. Meg kell azonban jegyezni, hogy a legtöbb algoritmus igényli egy parciális differenciálegyenlet-rendszer (a Frobenius-egyenlet) szimbolikus (képletszerű) megoldását az algoritmusban szerepet játszó koordináta-transzformáció meghatározásához, amelyre általános és effektív módszerek nem állnak rendelkezésre. Bizonyos esetekben "megsejthető" a transzformáció alakja, de általános elv nem ismeretes. Mindezek indokolják, hogy speciális rendszerosztályokra speciális megoldásokat keressünk.

A 12. fejezet néhány tervezési módszert mutat be a nemlineáris irányítások területéről, amelyek ugyan nem minden tekintetben általánosak, viszont viszonylag egyszerűvé teszik a nemlineáris rendszerek esetén fontossá váló mozgástervezést illetve irányítást bizonyos rendszerosztályon belül. Ennek során foglalkozunk a differenciálisan sima (flat) rendszerek irányításával, a nemlineáris rendszerek visszalépéses technikán (back-stepping) alapuló irányításával és a nemlineáris rendszerek időben változó irányításával. A módszereket példák keretében mutatjuk be.

A flatness-elvű irányítást egy hajódaru pályatervezése és pályamenti vezérlése példájával illusztráljuk. A back-stepping elvű szabályozás tervezését egy helikopter irányítása keretében mutatjuk be. Mobilis robot esetén időben változó, nemlineáris dinamikus visszacsatolás tervezését mutatjuk be, amely megoldja az együttes követő és helyzet szabályozási feladatokat.

Az *F1. függelék* összefoglalja a fizikai rendszerek (robotok, repülőgépek, helikopterek stb.) kinematikai modelljeiben szerepet játszó különféle orientáció jellemzéseket, a pozíció és orientáció leírását homogén transzformációval, a tehetetlenségi mátrix értelmezését és a dinamikus modell felállításánál fontos szerepet játszó Lagrange-, Appell- és Newton–Euler-egyenleteket.

Az *F2. függelék* összefoglalja az átviteli függvény mátrix minimális alakjának meghatározására szolgáló technikákat előbb a legnagyobb közös osztóra és a Sylvester rezultáns mátrixra alapozva, majd a Smith–McMillan alak felhasználásával. Ez utóbbi lehetőséget ad a MIMO rendszer nulla helyeinek és pólusainak precíz értelmezésére is.

Az *F3. függelék* bemutatja a prediktív irányítások optimalizálási feladatainak megoldásához a kvadratikus optimalizálási (QP) algoritmusok elméleti alapjait, így az aktív halmaz módszert, az aktív halmaz módszeren és a megvalósítható irányokon alapuló QP algoritmust, a MATLAB Optimization Toolbox nemlineáris programozási szolgáltatásait, a QP feladat visszavezetését lineáris komplementer problémára (LCP) és a Lemke-féle LCP-algoritmust.

Az *F4. függelék* összefoglalja az optimális irányítások elméleténél felhasznált alapokat a funkcionálanalízis területéről, így a lineáris terek, topológikus terek, Banach- és Hilbert-terek, valamint a részben rendezett terek alapjait.

1.4 A második kötet céljai

Elsődleges célunk olyan ismeretek nyújtása az egyetemi hallgató, a gyakorló mérnök és a kutató számára, amelyek megfelelő ismereteket adnak a korszerű szabályozástechnikai szoftver/hardver tervező platformok használatához (MATLAB és toolboxai, Simulink, Real Time Workshop, dSPACE kártyák Simulink és technológiai felülettel stb.). Másrészt viszont közismert az is, hogy ezeknek a rendszereknek a licensz-díja magas, ezért sokszor szükséges a valós idejű realizálást saját fejlesztésű szoftverrel megoldani, amikor már ezek az eszközök nem állnak rendelkezésre. Példként erre álljon itt a prediktív irányítás, ahol az optimalizálást korlátozások mellett a MATLAB Optimization Toolbox nélkül valós időben kell megoldani. Ezért világos, hogy ilyen esetben különös fontosságú az algoritmusok mélyebb ismerete. *Másik célunk* a korszerű szabályozáselmélet eredményeinek összefoglalása a graduális és posztgraduális egyetemi képzés és a kutató mérnök számára.

A könyv fejezetei úgy vannak lehatárolva, hogy a különböző érdeklődésű olvasó a számára fontos részproblémákban anélkül is elmélyedhet, hogy más fejezeteket el kelljen olvasnia hozzá, feltéve, hogy az I. kötet anyagát megismerte. Az egyes feje-

zetek lényegében önállóan is megállják a helyüket. Szándékosan van például két különböző fejezetbe téve a SISO sztochasztikus irányítás frekvenciatartományban és a MIMO LQG irányítás állapotterben. Hasonló megfontolásból került különböző fejezetbe a prediktív irányítás frekvenciatartományban és a prediktív irányítás állapotterben (az utóbbihoz mellesleg szükség van az LQ-optimalizálás eredményeire). Szándékosan tárgyaljuk külön fejezetben a diszkrétidejű LQ irányítást és a folytonosidejűt, mivel az első esetén végesdimenziós térben kell optimalizálni, a második esetben szükség van bizonyos ismeretekre a variációszámítás vagy az optimális irányítás területétől.

Ebből következik, hogy az egyetemi oktatás felől nézve a különböző típusú képzési formák célkitűzéseikhez könnyen kiválaszthatók a megfelelő fejezetek. Világos például, hogy az optimális irányítások elméletével és a nemlineáris irányítások elméletével foglalkozó nehezebb részek inkább a PhD képzésbe illenek. Mindazonáltal a didaktikai sorrend azon olvasó számára, aki meg akar ismerkedni a kötet teljes anyagával, a fejezetek számozásának természetes sorrendje.

2. DINAMIKUS MODELL FELÁLLÍTÁSA FIZIKAI ELVEK ALAPJÁN

Ebben a fejezetben néhány, az irányítástechnikai gyakorlatban sokszor előforduló rendszer dinamikus modelljének felállítására mutatunk be módszereket fizikai törvények felhasználásával. Az F1. függelékben összefoglaltuk a mechanikai rendszerek (robot, repülő, helikopter stb.) leírásánál elterjedten használt kinematikai és dinamikai alapfogalmakat, amelyek ismeretére számítnak a továbbiakban. Az itteni szolid tárgyalásnál mélyebb ismereteket nyújt [2], [3], [4] és [5].

Az orientáció jellemzésére a Rodriguez-képletet, Euler-szögeket, RPY (roll, pitch, yaw) szögeket vagy a kvaterniókat, a pozíció és orientáció együttes jellemzésére pedig a homogén transzformációt használhatjuk. Merev test inercia jellemzői alatt a tömegét (m), tömegközéppontját (ρ_c) és tehetetlenségi (inercia) mátrixát (K_c , ha a tömegközéppontra vonatkozik) értjük. A mechanikai rendszerek dinamikus modelljének felállítására a Lagrange-, Appell- és Newton–Euler-egyenleteket használhatjuk.

2.1 Robotok dinamikus modellje

Számos, a gyakorlatban elterjedt ipari robot ún. nyíltláncú, elágazás nélküli merev robot. A robotok kinematikájával és dinamikájával kapcsolatos alapvető összefüggéseket az F1. függelékben foglaltuk össze, a merev robotok vizsgálata ezeken alapul.

A robot szegmensekből (link) áll, amelyeket rotációs (R) vagy translációs (T) csuklók (joint) kötnek össze. Az $[i-1]$ és $[i]$ szegmensek közötti kapcsolat jellemezhető például a $\vartheta_i, d_i, a_i, \alpha_i$ eredeti Denavit–Hartenberg paraméterekkel és az azokból számítható $T_{i-1,i}$ homogén transzformációval:

$$T_{i-1,i} = \begin{bmatrix} C_{\vartheta_i} & -S_{\vartheta_i} C_{\alpha_i} & S_{\vartheta_i} S_{\alpha_i} & a_i C_{\vartheta_i} \\ S_{\vartheta_i} & C_{\vartheta_i} C_{\alpha_i} & -C_{\vartheta_i} S_{\alpha_i} & a_i S_{\vartheta_i} \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Rotációs csukló esetén $q_i = \vartheta_i$, translációs csukló esetén $q_i = d_i$ a csuklózváltozó. A csuklózváltozók vektora $q = (q_1, \dots, q_m)^T$. A robotikában rövidített jelöléseket használunk, pl. $C_{\vartheta_i} = \cos(\vartheta_i)$ vagy $S_{12} = \sin(q_1 + q_2)$ stb. A robot K_B bázis, K_0 referencia, K_m utolsó szegmens és K_E végberendezés (end effector) koordináta-

rendszere (röviden kerete) közötti kapcsolat kifejezhető homogén transzformációkkal:

$$T_{0,m}(q) = T_{0,1}(q_1)T_{1,2}(q_2) \cdots T_{m-1,m}(q_m), \quad (2.2)$$

$$T_{B,E} = T_{B,0}T_{0,m}(q)T_{m,E}. \quad (2.3)$$

Az m szabadságfokú (m -DOF) robot utolsó szegmensének ${}^m v_m$ sebessége és ${}^m \omega_m$ szögsebessége kifejezhető az ${}^m d_{i-1}$ parciális sebességekkel és az ${}^m t_{i-1}$ parciális szögsebességekkel, amelyek meghatározzák a robot konfiguráció függő $J_m(q)$ Jacobi-mátrixát:

$$\begin{pmatrix} {}^m v_m \\ {}^m \omega_m \end{pmatrix} = {}^m J_m(q) \dot{q} = \begin{bmatrix} {}^m d_0 & {}^m d_1 & \cdots & {}^m d_{m-1} \\ {}^m t_0 & {}^m t_1 & \cdots & {}^m t_{m-1} \end{bmatrix} \dot{q}. \quad (2.4)$$

Az indexek közül a jobb alsó (a névvel együtt) azonosítja a mennyiséget, a bal felső pedig a bázist, amiben a mennyiség fel lett írva. A parciális sebesség és parciális szögsebesség (F1.127-131) szerint számítható. A végberendezés sebessége és szögsebessége ${}^m J_m$ ismeretében már meghatározható, ugyanis ha

$$T_{m,E} = \begin{bmatrix} A_{m,E} & p_{m,E} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

akkor

$${}^E v_E = A_{m,E}^T ({}^m v_m + {}^m \omega_m \times p_{m,E}), \quad (2.6a)$$

$${}^E \omega_E = A_{m,E}^T {}^m \omega_m, \quad (2.6b)$$

$${}^E J_E = \begin{bmatrix} A_{m,E}^T & ([p_{m,E} \times] A_{m,E})^T \\ 0 & A_{m,E}^T \end{bmatrix} {}^m J_m. \quad (2.7)$$

2.1.1 A kinematikai mennyiségek rekurzív számítása

A robot dinamikus modelljét $H\ddot{q} + h = \tau$ alakra fogjuk hozni, ezért ehhez hasonlóan paraméterezzük a szegmensek kinematikai mennyiségeit is:

$${}^i \omega_i = \Gamma_i \dot{q}, \quad (2.8a)$$

$${}^i v_i = \Omega_i \dot{q}, \quad (2.8b)$$

$${}^i \varepsilon_i = \Gamma_i \ddot{q} + \phi_i, \quad (2.8c)$$

$${}^i a_i = \Omega_i \ddot{q} + \theta_i, \quad (2.8d)$$

ahol ${}^i\omega_i$, iv_i , ${}^i\varepsilon_i$, ia_i rendre az $[i]$ szegmenshez rögzített K_i keret origójának szögsebessége, sebessége, szöggyorsulása, gyorsulása, mind kifejezve a K_i keret bázisában. Felhasználván az (F1.51-52) összefüggéseket $\rho := p_{i-1,i}$ választás mellett, és figyelembe véve, hogy a mozgó koordináta-rendszerben érvényes deriválási szabály szerint

$$\begin{aligned}\rho' &= (1 - \kappa_i)t_{i-1}\dot{q}_i + \kappa_i t_{i-1}\dot{q}_i \times p_{i-1,i} =: d_{i-1,i}\dot{q}_i, \\ \rho'' &= d_{i-1,i}\ddot{q}_i + \kappa_i t_{i-1}\dot{q}_i \times d_{i-1,i},\end{aligned}$$

továbbá hogy az eredmények a K_{i-1} bázisában keletkeznek, amelyeket azután a K_i bázisába át kell transzformálni, ezért

$${}^i\omega_i = A_{i-1,i}^{-1} {}^{i-1}\omega_{i-1} + {}^i t_{i-1}\dot{q}_i, \quad (2.9a)$$

$${}^iv_i = A_{i-1,i}^{-1} ({}^{i-1}v_{i-1} + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times p_{i-1,i}) + {}^i d_{i-1,i}\dot{q}_i, \quad (2.9b)$$

$${}^i\varepsilon_i = A_{i-1,i}^{-1} {}^{i-1}\varepsilon_{i-1} + {}^i t_{i-1}\ddot{q}_i + {}^i\omega_i \times {}^i t_{i-1}\dot{q}_i, \quad (2.9c)$$

$$\begin{aligned}{}^ia_i &= A_{i-1,i}^{-1} \{ {}^{i-1}a_{i-1} + {}^{i-1}\varepsilon_{i-1} \times p_{i-1,i} + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times ({}^{i-1}\omega_{i-1} \times p_{i-1,i}) \} + \\ &\quad + {}^i d_{i-1,i}\ddot{q}_i + {}^i t_{i-1}\dot{q}_i \times {}^i d_{i-1,i}\dot{q}_i + 2({}^{i-1}A_{i-1,i}^{-1} {}^{i-1}\omega_{i-1}) \times {}^i d_{i-1,i}\dot{q}_i = \\ &= A_{i-1,i}^{-1} \{ {}^{i-1}a_{i-1} + {}^{i-1}\varepsilon_{i-1} \times p_{i-1,i} + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times ({}^{i-1}\omega_{i-1} \times p_{i-1,i}) \} + \\ &\quad + 2{}^i\omega_i \times {}^i d_{i-1,i}\dot{q}_i - {}^i t_{i-1}\dot{q}_i \times {}^i d_{i-1,i}\dot{q}_i + {}^i d_{i-1,i}\ddot{q}_i.\end{aligned} \quad (2.9d)$$

Itt ${}^i d_{i-1,i}$, ${}^i t_{i-1}$ (F1.127-131) szerint határozható meg $m=i$ választás mellett. A fenti összefüggésekből kiolvashatóak a $\Gamma_i, \phi_i, \Omega_i, \theta_i$ rekurzív számítására szolgáló képletek. Azért, hogy ezeket a képleteket egyszerűbbé tegyük, elhagyjuk a mátrixok végén álló nulla oszlopokat, vagyis az i -edik lépésben Γ_i, Ω_i -nek i oszlopa van és $\dim \dot{q}_i = i$:

$$\Gamma_{i,j} = A_{i-1,i}^{-1} \Gamma_{i-1,j}, \quad j=1, \dots, i-1; \quad \Gamma_{i,i} = {}^i t_{i-1}, \quad (2.10a)$$

$${}^i\omega_i = A_{i-1,i}^{-1} {}^{i-1}\omega_{i-1} + {}^i t_{i-1}\dot{q}_i, \quad (2.10b)$$

$$\phi_i = A_{i-1,i}^{-1} \phi_{i-1} + {}^i\omega_i \times {}^i t_{i-1}\dot{q}_i, \quad (2.10c)$$

$$\Omega_{i,j} = A_{i-1,i}^{-1} (\Omega_{i-1,j} + \Gamma_{i-1,j} \times p_{i-1,i}), \quad j=1, \dots, i-1; \quad \Omega_{i,i} = {}^i d_{i-1,i}, \quad (2.10d)$$

$$\begin{aligned}\theta_i &= A_{i-1,i}^{-1} \{ \theta_{i-1} + \phi_{i-1} \times p_{i-1,i} + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times ({}^{i-1}\omega_{i-1} \times p_{i-1,i}) \} + \\ &\quad + 2{}^i\omega_i \times {}^i d_{i-1,i}\dot{q}_i - {}^i t_{i-1}\dot{q}_i \times {}^i d_{i-1,i}\dot{q}_i.\end{aligned} \quad (2.10e)$$

Ha ρ_{ci} jelöli az $[i]$ szegmens tömegközéppontját a K_i keretben kifejezve, akkor

$$\Omega_{ci} = \Omega_i - [\rho_{ci} \times] \Gamma_i, \quad (2.11a)$$

$$\theta_{ci} = \theta_i + \phi_i \times \rho_{ci} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times \rho_{ci}), \quad (2.11b)$$

$${}^i v_{ci} = \Omega_{ci} \dot{q}, \quad (2.11c)$$

$${}^i a_{ci} = \Omega_{ci} \ddot{q} + \theta_{ci}. \quad (2.11d)$$

A kinematikai mennyiségek fenti paraméterezése kapcsolatban áll a robot Jacobi-mátrixával is. A kapcsolat érzékeny arra, hogy a bázisvektorok a K_0 (rögzített) vagy K_m (mozgó) koordináta-rendszerből valók-e. Ha vessző (') jelöli a formális (elemenkénti) deriváltat az idő szerint, akkor

$$\begin{pmatrix} {}^\circ a_m \\ {}^\circ \varepsilon_m \end{pmatrix} = {}^\circ J_m \ddot{q} + \frac{d {}^\circ J_m}{dt} \dot{q} = \begin{bmatrix} {}^\circ \Omega_m \\ {}^\circ \Gamma_m \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} {}^\circ \Omega'_m \\ {}^\circ \Gamma'_m \end{bmatrix} \dot{q}, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} {}^m a_m \\ {}^m \varepsilon_m \end{pmatrix} &= {}^m J_m \ddot{q} + \begin{pmatrix} {}^m \Omega'_m \dot{q} + ({}^m \Gamma_m \dot{q}) \times ({}^m \Omega_m \dot{q}) \\ {}^m \Gamma'_m \dot{q} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} {}^m \Omega_m \\ {}^m \Gamma_m \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} {}^m \Omega'_m + [({}^m \Gamma_m \dot{q}) \times] {}^m \Omega_m \\ {}^m \Gamma'_m \end{bmatrix} \dot{q}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.1.2 A robot Appell-egyenleten alapuló dinamikus modellje

Az F1. függelékben bevezettük a "gyorsulás" energiát vagy Gibbs-függvényt. Ha a szegmenshez rögzített keret origója a tömegközéppontban van, akkor a Gibbs-függvény

$$G = \frac{1}{2} \langle a_c, a_c \rangle + m + \frac{1}{2} \langle K_c \varepsilon - 2(K_c \omega) \times \omega, \varepsilon \rangle, \quad (2.14)$$

ahol a_c a tömegközéppont gyorsulása, ε és ω a szegmens szöggyorsulása és szögsebessége, m a szegmens tömege és K_c a tömegközéppontra vonatkozó inercia mátrix a szegmenshez rögzített koordináta-rendszerben. Feltesszük, hogy a koordináta-rendszer tengelyei párhuzamosak a Denavit-Hartenberg keret tengelyeivel, ezért használhatjuk a kinematikai mennyiségek számítására az (2.11a-d) képleteket, továbbá feltehető, hogy a szegmens és a rászerezelt motor inercia jellemzőit már összevontuk (F1.61-62) szerint. Ha G a robot Gibbs-függvénye és P a potenciális energiája, akkor az Appell-egyenlet alapján

$$\frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_i} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i} = \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.15)$$

ahol τ_i az i -edik szegmenst meghajtó általánosított nyomaték. Mivel a robot Gibbs-függvénye a szegmensek Gibbs-függvényeinek összege, elegendő egy szegmens hatását tisztázni a dinamikus modellben és a hatásokat összegezni. Azért, hogy egyszerű összefüggést kapjunk, hozzáveszünk nulla oszlopokat Ω_{cs} -hez és Γ_s -hez, ezáltal a mátrixok $3 \times m$ méretűek lesznek. Akkor

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_s}{\partial \ddot{q}_i} &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial a_{cs}}{\partial \ddot{q}_i}, a_{cs} \right\rangle m_s + \frac{1}{2} \left\langle a_{cs}, \frac{\partial a_{cs}}{\partial \ddot{q}_i} \right\rangle m_s + \\ &+ \frac{1}{2} \left\langle K_{cs} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \ddot{q}_i}, \varepsilon_s \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle K_{cs} \varepsilon_s - 2(K_{cs}^s \omega_s) \times^s \omega_s, \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \ddot{q}_i} \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\partial a_{cs}}{\partial \ddot{q}_i}, a_{cs} \right\rangle m_s + \left\langle \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \ddot{q}_i}, K_{cs} \varepsilon_s - (K_{cs}^s \omega_s) \times^s \omega_s \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial a_{cs}}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_i} (\Omega_{cs} \ddot{q} + \theta_{cs}) = \Omega_{cs,i}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_i} (\Gamma_s \ddot{q} + \phi_s) = \Gamma_{s,i}, \quad (2.18)$$

ahol $\Omega_{cs,i}$ és $\Gamma_{s,i}$ rendre az i -edik oszlopa Ω_{cs} -nek és Γ_s -nek. Irjuk fel a skalárszorzatot mátrixszorzásos alakban, akkor

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_s}{\partial \ddot{q}_i} &= m_s \Omega_{cs,i}^T (\Omega_{cs} \ddot{q} + \theta_{cs}) + \Gamma_{s,i}^T [K_{cs} (\Gamma_s \ddot{q} + \phi_s) - (K_{cs}^s \omega_s) \times^s \omega_s] = \\ &= (\Omega_{cs,i}^T \Omega_{cs} m_s + \Gamma_{s,i}^T K_{cs} \Gamma_s) \ddot{q} + \Omega_{cs,i}^T \theta_{cs} m_s + \\ &+ \Gamma_{s,i}^T [K_{cs} \phi_s - (K_{cs}^s \omega_s) \times^s \omega_s]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Összegezvén az egyes szegmensek hatását, a robot dinamikus modelljét kapjuk:

$$H(q) \ddot{q} + h_{cc}(q, \dot{q}) + h_g(q) = \tau \quad (2.20)$$

$$H = \sum_{s=1}^m \{ \Omega_{cs}^T \Omega_{cs} m_s + \Gamma_s^T K_{cs} \Gamma_s \}, \quad (2.21)$$

$$h_{cc} = \sum_{s=1}^m \{ \Omega_{cs}^T \theta_{cs} m_s + \Gamma_s^T [K_{cs} \phi_s - (K_{cs}^s \omega_s) \times^s \omega_s] \}, \quad (2.22)$$

ahol h_{cc} a centripetális és Coriolis hatás és h_g a gravitációs hatás.

Ha m egy tömegpont, amelynek helyvektora r a K_0 keretben, akkor mgh potenciális energiája felírható

$$-m < g_0, r > = (-g_0^T \ 0) \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} m, \quad (2.23)$$

alakban, ahol g_0 a gravitációs gyorsulás a K_0 keret bázisában kifejezve. Ha az s -edik szegmens tömegközéppontja ρ_{cs} a K_s Denavit–Hartenberg keretben, akkor a robot P potenciális energiája és hatása az Appell-egyenletben:

$$P = \sum_{s=1}^m (-g_0^T \ 0) T_{0,s} \begin{pmatrix} \rho_{cs} \\ 1 \end{pmatrix} m_s, \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial q_i} &= \sum_{s=1}^m (-g_0^T \ 0) \frac{\partial T_{0,s}}{\partial q_i} \begin{pmatrix} \rho_{cs} \\ 1 \end{pmatrix} m_s = \\ &= \sum_{s=i}^m (-g_0^T \ 0) T_{0,i-1} \frac{\partial T_{i-1,s}}{\partial q_i} \begin{pmatrix} \rho_{cs} \\ 1 \end{pmatrix} m_s. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Mivel (F1.133) szerint

$$\frac{\partial T_{i-1,s}}{\partial q_i} = A_{i-1} T_{i-1,s},$$

ezért

$$\frac{\partial P}{\partial q_i} = (-g_0^T \ 0) T_{0,i-1} A_{i-1} \sum_{s=i}^m m_s T_{i-1,s} \begin{pmatrix} \rho_{cs} \\ 1 \end{pmatrix} = G_i^T \begin{pmatrix} R_i \\ M_i \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

$$G_i^T = (-g_0^T \ 0) T_{0,i-1} A_{i-1}, \quad (2.27)$$

$$M_i = \sum_{s=i}^m m_s, \quad (2.28)$$

$$R_i = \sum_{s=i}^m m_s (A_{i-1,s} \rho_{cs} + p_{i-1,s}). \quad (2.29)$$

Az eredeti Denavit–Hartenberg alakban $t_{i-1} = k_{i-1}$ a csuklótengely, ezért

i) rotációs csukló esetén

$$\Delta_{i-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

$$T_{0,i-1} \Delta_{i-1} = \begin{bmatrix} m_{0,i-1} & -l_{0,i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

$$G_i^T = (-g_0 \cdot m_{0,i-1}, g_0 \cdot l_{0,i-1}, 0, 0), \quad (2.32)$$

ii) translációs csukló esetén

$$\Delta_{i-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

$$T_{0,i-1} \Delta_{i-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & n_{0,i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

$$G_i^T = (0, 0, 0, -g_0 \cdot n_{0,i-1}). \quad (2.35)$$

Felhasználván, hogy

$$\begin{aligned} R_i &= \sum_{s=i+1}^m m_s (A_{i-1,i} A_{i,s} \rho_{cs} + p_{i-1,i} + A_{i-1,i} p_{i,s}) + m_i (A_{i-1,i} \rho_{ci} + p_{i-1,i}) = \\ &= A_{i-1,i} \left\{ \sum_{s=i+1}^m m_s (A_{i,s} \rho_{cs} + p_{i,s}) + m_i \rho_{ci} \right\} + \left(\sum_{s=i}^m m_s \right) p_{i-1,i}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

a következő hátratarató rekurziós algoritmust kapjuk R_i és M_i számítására:

$$R_{m+1} = 0, M_{m+1} = 0, \quad (2.37)$$

$$M_i = M_{i+1} + m_i, \quad (2.38)$$

$$R_i = A_{i-1,i} (R_{i+1} + m_i \rho_{ci}) + M_i p_{i-1,i}. \quad (2.39)$$

A gravitációs hatás a dinamikus modellben

$$h_{g,i} = G_i^T \begin{pmatrix} R_i \\ M_i \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

2.1.3 A robot Lagrange-egyenleten alapuló dinamikus modellje

Az F1. függelékben megmutattuk, hogy a robot szegmens kinetikus energiája, ha a koordináta-rendszer origója a tömegközéppontban van

$$K = \frac{1}{2} \langle v_c, v_c \rangle + m + \frac{1}{2} \langle K_c \omega, \omega \rangle, \quad (2.41)$$

ahol K_c a keret origójára (a tömegközéppontra) vonatkozó tehetetlenségi mátrix. Feltesszük, hogy a keret tengelyei párhuzamosak a szegmenshez rögzített Denavit–Hartenberg keret tengelyeivel, ezért alkalmazható (2.8a-b) és (2.11c) a robot kinetikus energiájának meghatározásakor:

$$\begin{aligned} K &= \sum_{s=1}^m \left\{ \frac{1}{2} \langle v_{cs}, v_{cs} \rangle m_s + \frac{1}{2} \langle K_{cs} {}^s\omega_s, {}^s\omega_s \rangle \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \left\{ \langle \Omega_{cs} \dot{q}, \Omega_{cs} \dot{q} \rangle m_s + \langle K_{cs} \Gamma_s \dot{q}, \Gamma_s \dot{q} \rangle \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \left\{ \langle \Omega_{cs}^T \Omega_{cs} m_s \dot{q}, \dot{q} \rangle + \langle \Gamma_s^T K_{cs} \Gamma_s \dot{q}, \dot{q} \rangle \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \sum_{s=1}^m \left\{ \Omega_{cs}^T \Omega_{cs} m_s + \Gamma_s^T K_{cs} \Gamma_s \right\} \dot{q}, \dot{q} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle H(q) \dot{q}, \dot{q} \rangle \end{aligned} \quad (2.42)$$

A robot kinetikus energiája a dinamikus modellben szereplő $H(q)$ mátrix kvadrátikus alakja a $\dot{q}$ csuklósebességekben. Vezessük be a

$$H(q) = [D_{jk}(q)]_{m \times m} \quad (2.43)$$

jelölést, akkor $H = [D_{jk}]$ szimmetrikus és fizikai megfontolások alapján pozitív definit, továbbá

$$K = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m D_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (2.44)$$

Alkalmazzuk az (F1.81) Lagrange-egyenletet:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i} = \tau_i. \quad (2.45)$$

Mivel $H = [D_{jk}]$ szimmetrikus, ezért $D_{ji} = D_{ij}$ és

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m D_{ji} \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m D_{ik} \dot{q}_k = \sum_{j=1}^m D_{ij} \dot{q}_j, \quad (2.46)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^m D_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial D_{ij}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (2.47)$$

Másrészt

$$axy + bxy = \frac{a+b}{2} xy + \frac{a-b}{2} xy, \quad (2.48)$$

ezért a második tag mindig szimmetrizálható:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^m D_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial D_{ik}}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (2.49)$$

Hasonló módon kapjuk, hogy

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial D_{jk}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (2.50)$$

$$D_i = \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i} = G_i^T \begin{pmatrix} R_i \\ M_i \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Ezért a robot dinamikus modellje Lagrange-alakban

$$\sum_{j=1}^m D_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m D_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + D_i = \tau_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.52)$$

$$D_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial D_{ik}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial D_{jk}}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad (2.53)$$

ahol

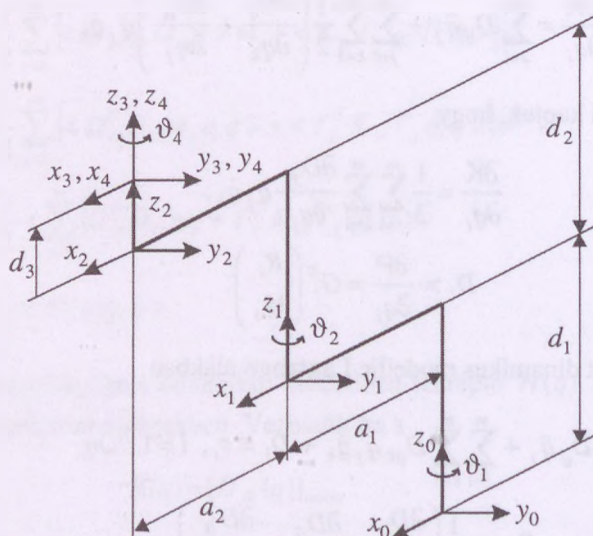
D_{ii}	effektív inercia,
D_{ij}	csatoló inercia ($i \neq j$),
D_{ijj}	centripetális hatás,
D_{ijk}	Coriolis hatás ($j \neq k$),
D_i	gravitációs hatás.

A D_{ij}, D_{ijk}, D_i paraméterek függvényei q -nak, ezért a robot mozgása közben változnak.

Vegyük észre, hogy ha ismert D_{ij} szimbolikus (képletszerű) alakban, akkor (2.53) alapján parciális deriválással meghatározható D_{ijk} . Hasonló módon, ha ismert a P potenciális energia szimbolikus alakban, akkor parciális deriválással meghatározható a D_i gravitációs hatás is. Ily módon az energiák képletszerű ismerete esetén a dinamikus modell szimbolikus operációval (parciális deriválással) képletszerű alakban is meghatározható.

2.1.4 A SCARA robot dinamikus modellje

A 4-DOF RRTR SCARA robot Denavit–Hartenberg paramétereit (lásd 2.1. táblázat) a 2.1. ábra koordináta-rendszerei alapján értelmeztük.



2.1. ábra. A SCARA robotnál használt keretek

2.1. táblázat. SCARA robot Denavit–Hartenberg paramétereit

i	q_i	ϑ_i	d_i	a_i	α_i
1	ϑ_1	ϑ_1	d_1	a_1	0°
2	ϑ_2	ϑ_2	d_2	a_2	0°
3	d_3	0°	d_3	0	0°
4	ϑ_4	ϑ_4	0	0	0°

Az egyes szegmensek közötti homogén transzformációk a következők:

$$T_{0,1} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & a_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & a_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_{1,2} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

$$T_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_{3,4} = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & 0 \\ S_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

A homogén transzformációkat fokozatosan összeszorozzuk a parciális sebességek és szögsebességek és az eredő homogén transzformáció meghatározásához:

$$T_{2,4} = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & 0 \\ S_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_{1,4} = \begin{bmatrix} C_{24} & -S_{24} & 0 & a_2 C_2 \\ S_{24} & C_{24} & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

$$T_{0,4} = \begin{bmatrix} C_{124} & -S_{124} & 0 & a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ S_{124} & C_{124} & 0 & a_1 S_1 + a_2 S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & d_1 + d_2 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

Itt $q \mapsto T_{0,4}$ a direkt geometriai feladat megoldása. A $T_{0,4} \mapsto q$ inverz geometriai feladat a következő egyenletekre vezet:

$$a_1 C_1 + a_2 C_{12} = p_x, \quad (2.58)$$

$$a_1 S_1 + a_2 S_{12} = p_y, \quad (2.59)$$

$$d_1 + d_2 + d_3 = p_z, \quad (2.60)$$

$$C_{124} = l_x, \quad (2.61)$$

$$S_{124} = l_y. \quad (2.62)$$

A q_1 csuklóváltozó meghatározásához végezzük el a következő átalakításokat:

$$a_2 C_{12} = p_x - a_1 C_1,$$

$$a_2 S_{12} = p_y - a_1 S_1,$$

$$a_2^2 C_{12}^2 + a_2^2 S_{12}^2 = p_x^2 - 2a_1 p_x C_1 + a_1^2 C_1^2 + p_y^2 - 2a_1 p_y S_1 + a_1^2 S_1^2,$$

$$2a_1 p_x C_1 + 2a_1 p_y S_1 = p_x^2 + p_y^2 + a_1^2 - a_2^2,$$

ahol az utolsó egyenlet alakja $AC_\alpha + BS_\alpha = D$, amelynek megoldása

$$S_\alpha = \frac{DB + \delta_\alpha A \sqrt{A^2 + B^2 - D^2}}{A^2 + B^2}, \quad (2.63)$$

$$C_\alpha = \frac{DA + \gamma_\alpha B \sqrt{A^2 + B^2 - D^2}}{A^2 + B^2}. \quad (2.64)$$

Mivel teljesülnie kell, hogy $S_\alpha^2 + C_\alpha^2 = 1$, ezért csak két (S_α, C_α) megoldás van, amelyek a $(\delta_\alpha, \gamma_\alpha) = (1, -1)$ és $(\delta_\alpha, \gamma_\alpha) = (-1, 1)$ értékpárokhöz tartoznak. Mivel (S_α, C_α) meghatározza a térnegyedeket a síkon, ezért mindkét (S_α, C_α) párhoz egy-egy α megoldás van, amely

$$\alpha = \arctan 2(S_\alpha, C_\alpha), \quad (2.65)$$

feltéve hogy a

$$A^2 + B^2 - D^2 \geq 0 \quad (2.66)$$

munkatér feltétel teljesül. Választhatjuk azt a q_1 megoldást, amely a megelőző q_1 -hez legközelebb van.

Ha már q_1 -et meghatároztuk, akkor

$$S_{12} = \frac{p_y - a_1 S_1}{a_2}, \quad (2.67)$$

$$C_{12} = \frac{p_x - a_1 C_1}{a_2}, \quad (2.68)$$

és innen

$$q_1 + q_2 = \arctan 2(S_{12}, C_{12}). \quad (2.69)$$

Az utolsó lépések nyilvánvalóak:

$$q_3 = p_z - d_1 - d_2, \quad (2.70)$$

$$q_1 + q_2 + q_4 = \arctan 2(l_y, l_x) \quad (2.71)$$

A SCARA robot 4J_4 Jacobi-mátrixa (F1.128-131) és (2.55-57) segítségével határozható meg:

$$\begin{aligned}
{}^4d_0 &= \begin{pmatrix} -C_{124}(a_1S_1 + a_2S_{12}) + S_{124}(a_1C_1 + a_2C_{12}) \\ S_{124}(a_1S_1 + a_2S_{12}) + C_{124}(a_1C_1 + a_2C_{12}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1S_{24} + a_2S_4 \\ a_1C_{24} + a_2C_4 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
{}^4d_1 &= \begin{pmatrix} -C_{24}a_2S_2 + S_{24}a_2C_2 \\ S_{24}a_2S_2 + C_{24}a_2C_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2S_4 \\ a_2C_4 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
{}^4d_3 &= 0,
\end{aligned} \tag{2.72}$$

$${}^4J_4 = \begin{bmatrix} a_1S_{24} + a_2S_4 & a_2S_4 & 0 & 0 \\ a_1C_{24} + a_2C_4 & a_2C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ha szükséges 0J_4 is, akkor alkalmazható (F1.139). De a SCARA robot elég egyszerű (a csuklótagok párhuzamosak), ezért közvetlenül is írható, hogy

$${}^0v_4 = \frac{dp_{0,4}}{dt} = \begin{pmatrix} -a_1S_1\dot{q}_1 - a_2S_{12}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ a_1C_1\dot{q}_1 + a_2C_{12}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}, \tag{2.73}$$

$${}^0\omega_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_4 \end{pmatrix}, \tag{2.74}$$

$${}^0J_4 = \begin{bmatrix} -a_1S_1 - a_2S_{12} & -a_2S_{12} & 0 & 0 \\ a_1C_1 + a_2C_{12} & a_2C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.75}$$

Ha v_{x0}, v_{y0}, v_{z0} és ω_{z0} értéke elő van írva, akkor tekinthetők a nekik megfelelő egyenletek

$$\dot{q}_3 = v_{z0}, \tag{2.76}$$

$$\dot{q}_4 = \omega_{z0} - \dot{q}_1 - \dot{q}_2, \quad (2.77)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 S_1 - a_2 S_{12} & -a_2 S_{12} \\ a_1 C_1 + a_2 C_{12} & a_2 C_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \end{pmatrix}. \quad (2.78)$$

A két utolsó egyenlet egyszerűen megoldható, mert

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad (2.79)$$

ahol

$$\begin{aligned} \det = ad - bc &= (a_1 S_{24} + a_2 S_4) a_2 C_4 - (a_1 C_{24} + a_2 C_4) a_2 S_4 = \\ &= a_1 a_2 (S_{24} C_4 - C_{24} S_4) = a_1 a_2 S_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.80)$$

definiálja a szinguláris konfigurációkat:

$$q_2 = 0^\circ \text{ vagy } q_2 = 180^\circ, \quad (2.81)$$

összhangban a 2.1. ábrával.

A (2.11a-d) rekurzív algoritmussal a következő kinematikai mennyiségeket kapjuk (ρ_i jelöli az $\boxed{i}$ szegmens tömegközéppontját):

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \phi_1 = 0, \quad \Omega_{c1} = \begin{pmatrix} -\rho_{y1} \\ a_1 + \rho_{x1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \theta_{c1} = \begin{pmatrix} -a_1 - \rho_{x1} \\ -\rho_{y1} \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1^2, \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = 0, \\ \Omega_{c2} &= \begin{pmatrix} a_1 S_2 - \rho_{y2} & -\rho_{y2} \\ a_2 + a_1 C_2 + \rho_{x2} & a_2 + \rho_{x2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\theta_{c2} = \begin{pmatrix} -a_2 - a_1 C_2 - \rho_{x2} \\ a_1 S_2 - \rho_{y2} \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1^2 + 2 \begin{pmatrix} -a_2 - \rho_{x2} \\ -\rho_{y2} \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \begin{pmatrix} -a_2 - \rho_{x2} \\ -\rho_{y2} \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_2^2,$$

$$\Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \phi_3 = 0,$$

$$\Omega_{c3} = \begin{bmatrix} a_1 S_2 - \rho_{y3} & -\rho_{y3} & 0 \\ a_2 + a_1 C_2 + \rho_{x3} & a_2 + \rho_{x3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.84)$$

$$\theta_{c3} = \begin{pmatrix} -a_2 - a_1 C_2 - \rho_{x3} \\ a_1 S_2 - \rho_{y3} \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1^2 + 2 \begin{pmatrix} -a_2 - \rho_{x3} \\ -\rho_{y3} \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \begin{pmatrix} -a_2 - \rho_{x3} \\ -\rho_{y3} \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_2^2,$$

$$\Gamma_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \phi_4 = 0,$$

$$\Omega_{c4} = \begin{bmatrix} a_2 S_4 + a_1 S_{24} - \rho_{y4} & a_2 S_4 - \rho_{y4} & 0 & -\rho_{y4} \\ a_2 C_4 + a_1 C_{24} + \rho_{x4} & a_2 C_4 + \rho_{x4} & 0 & \rho_{x4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.85)$$

$$\theta_{c4} = \begin{pmatrix} -a_2 C_4 - a_1 C_{24} - \rho_{x4} \\ a_2 S_4 + a_1 S_{24} - \rho_{y4} \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1^2 + \begin{pmatrix} -a_2 C_4 - \rho_{x4} \\ a_2 S_4 - \rho_{y4} \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_2^2 + \begin{pmatrix} -\rho_{x4} \\ -\rho_{y4} \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_4^2 +$$

$$+ 2 \begin{pmatrix} -a_2 C_4 - \rho_{x4} \\ a_2 S_4 - \rho_{y4} \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2 \begin{pmatrix} -\rho_{x4} \\ -\rho_{y4} \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_4 + 2 \begin{pmatrix} -\rho_{x4} \\ -\rho_{y4} \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_2 \dot{q}_4,$$

A dinamikuss modellt a kinematikai mennyiségek ismeretében az Appell-egyenlettel határozzuk meg. Figyelembe véve Γ_s speciális alakját, a $\Gamma_s^T K_{cs} \Gamma_s$ szorzattól származó tagok $H_{ij} = D_{ij}$ -ben egyszerűsíthetők:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \Gamma_{si,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & K_{cs,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma_{sj,z} \end{bmatrix} = \Gamma_{si,z} \Gamma_{sj,z} K_{cs,z}. \quad (2.86)$$

Mivel Γ_s oszlopai és ω_s párhuzamosak, és $\phi_s = 0$, ezért a második tag h_{cc} -ben nulla:

$$\Gamma_s^T [K_{cs} \phi_s - (K_{cs} \omega_s) \times \omega_s] = 0. \quad (2.87)$$

Egyszerű számítások után D_{ij} , D_{ijk} és D_i következő nemtriviális elemeihez jutunk:

$$H = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ * & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ * & * & D_{33} & D_{34} \\ * & * & * & D_{44} \end{bmatrix}, \quad (2.88)$$

$$D^1 = \begin{bmatrix} 0 & D_{112} & D_{113} & D_{114} \\ * & D_{122} & D_{123} & D_{124} \\ * & * & D_{133} & D_{134} \\ * & * & * & D_{144} \end{bmatrix}, \quad (2.89)$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} -D_{112} & 0 & D_{213} & D_{214} \\ * & 0 & D_{223} & D_{224} \\ * & * & D_{233} & D_{234} \\ * & * & * & D_{244} \end{bmatrix}, \quad (2.90)$$

$$D^3 = \begin{bmatrix} -D_{133} & -D_{213} & 0 & D_{314} \\ * & -D_{223} & 0 & D_{324} \\ * & * & 0 & D_{334} \\ * & * & * & D_{344} \end{bmatrix}, \quad (2.91)$$

$$D^4 = \begin{bmatrix} -D_{114} & -D_{214} & -D_{314} & 0 \\ * & -D_{224} & -D_{324} & 0 \\ * & * & -D_{334} & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.92)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}. \quad (2.93)$$

A dinamikus modell egyszerű alakot ölt, ha bevezetjük a következő $P_1, \dots, P_{11}$ paramétereket és az $F_1, \dots, F_7$ függvényeket (a c indexet elhagytuk ρ_{cs} -ben és K_{cs} -ben):

$$\begin{aligned}
P_1 &= m_1 \{ \rho_{y1}^2 + (a_1 + \rho_{x1})^2 \} + K_{z1} + \\
&\quad + m_2 \{ a_1^2 + \rho_{x2}^2 + (a_2 + \rho_{x2})^2 \} + K_{z2} + \\
&\quad + m_3 \{ a_1^2 + (a_2 + \rho_{x3})^2 + \rho_{y3}^2 \} + K_{z3} + \\
&\quad + m_4 \{ a_1^2 + a_2^2 + \rho_{x4}^2 + \rho_{y4}^2 \} + K_{z4}, \\
P_2 &= m_4 a_2 \rho_{y4}, \\
P_3 &= m_4 a_2 \rho_{x4}, \\
P_4 &= m_2 a_1 \rho_{y2} + m_3 a_1 \rho_{y3}, \\
P_5 &= m_2 a_1 (a_2 + \rho_{x2}) + m_3 a_1 (a_2 + \rho_{x3}) + m_4 a_1 a_2, \\
P_6 &= m_4 a_1 \rho_{y4}, \\
P_7 &= m_4 a_1 \rho_{x4}, \\
P_8 &= m_2 \{ (a_2 + \rho_{x2})^2 + \rho_{y2}^2 \} + K_{z2} + m_3 \{ (a_2 + \rho_{x3})^2 + \rho_{y3}^2 \} + K_{z3} + \\
&\quad + m_4 \{ a_2^2 + \rho_{x4}^2 + \rho_{y4}^2 \} + K_{z4}, \\
P_9 &= m_4 \{ \rho_{x4}^2 + \rho_{y4}^2 \} + K_{z4}, \\
P_{10} &= m_3 + m_4, \\
P_{11} &= (m_3 + m_4) g_z;
\end{aligned} \tag{2.94}$$

$$\begin{aligned}
F_1 &= 1, \\
F_2 &= S_4, \\
F_3 &= C_4, \\
F_4 &= S_2, \\
F_5 &= C_2, \\
F_6 &= S_{24}, \\
F_7 &= C_{24};
\end{aligned} \tag{2.95}$$

$$\begin{aligned}
D_{11} &= F_1 P_1 - 2F_2 P_2 + 2F_3 P_3 - 2F_4 P_4 + 2F_5 P_5 - 2F_6 P_6 + 2F_7 P_7, \\
D_{12} &= F_1 P_8 - 2F_2 P_2 + 2F_3 P_3 - F_4 P_4 + F_5 P_5 - F_6 P_6 + F_7 P_7, \\
D_{13} &= 0, \\
D_{14} &= F_1 P_9 - F_2 P_2 + F_3 P_3 - F_6 P_6 + F_7 P_7, \\
D_{22} &= F_1 P_8 - 2F_2 P_2 + 2F_3 P_3, \\
D_{23} &= 0, \\
D_{24} &= F_1 P_9 - F_2 P_2 + F_3 P_3, \\
D_{33} &= F_1 P_{10},
\end{aligned} \tag{2.96}$$

$$\begin{aligned}
 D_{34} &= 0, \\
 D_{44} &= F_1 P_9; \\
 D_{112} &= -F_4 P_5 - F_5 P_4 - F_6 P_7 - F_7 P_6, \\
 D_{113} &= 0, \\
 D_{114} &= -F_2 P_3 - F_3 P_2 - F_6 P_7 - F_7 P_6, \\
 D_{122} &= -F_4 P_5 - F_5 P_4 - F_6 P_7 - F_7 P_6, \\
 D_{123} &= 0, \\
 D_{124} &= -F_2 P_3 - F_3 P_2 - F_6 P_7 - F_7 P_6, \\
 D_{133} &= 0, \\
 D_{134} &= 0, \\
 D_{144} &= -F_2 P_3 - F_3 P_2 - F_6 P_7 - F_7 P_6,
 \end{aligned} \tag{2.97}$$

$$\begin{aligned}
 D_{213} &= 0, \\
 D_{214} &= -F_2 P_3 - F_3 P_2, \\
 D_{223} &= 0, \\
 D_{224} &= -F_2 P_3 - F_3 P_2, \\
 D_{233} &= 0, \\
 D_{234} &= 0, \\
 D_{244} &= -F_2 P_3 - F_3 P_2;
 \end{aligned} \tag{2.98}$$

$$\begin{aligned}
 D_{314} &= 0, \\
 D_{324} &= 0, \\
 D_{334} &= 0, \\
 D_{344} &= 0;
 \end{aligned} \tag{2.99}$$

$$D_{444} = 0, \tag{2.100}$$

$$\begin{aligned}
 D_1 &= 0, \\
 D_2 &= 0, \\
 D_3 &= -F_1 P_{11}, \\
 D_4 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.101}$$

A szegmens és a rászerezelt motor inerciajellemzőit a rotor álló helyzetében összevontuk, de nem vettük figyelembe a forgó rotor kinetikus energiáját, amely

$K_{ri} = \frac{1}{2} \Theta_{ri} \dot{\phi}_i^2 = \frac{1}{2} \Theta_{ri} v_i^2 \dot{q}_i^2$, ahol Θ_{ri} a rotor tehetetlenségi nyomatéka, $\dot{\phi}_i$ a rotor szögsebessége és $v_i = \dot{\phi}_i / \dot{q}_i$ az áttétel. Mivel

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K_{ri}}{\partial \dot{q}_i} = \Theta_{ri} v_i^2 \ddot{q}_i, \quad (2.102)$$

ezért a beavatkozószerv hatása jó közelítéssel $D_{ii} := D_{ii} + \Theta_{ri} v_i^2$ révén vehető figyelembe. A surlódási veszteség az $f_i \dot{q}_i$ viszkózus surlódással közelíthető, amelyet szintén a τ_i meghajtó nyomatéknak kell fedeznie. Ezért néhány paraméter megváltozik, és a surlódás miatt további paraméterek lépnek be:

$$\begin{aligned} P_1 &:= P_1 + \Theta_{r1} v_1^2, \\ P_{10} &:= P_{10} + \Theta_{r3} v_3^2, \\ P_{12} &= \Theta_{r2} v_2^2, \\ P_{13} &= \Theta_{r4} v_4^2, \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$P_{14} = f_1,$$

$$P_{15} = f_2,$$

$$P_{16} = f_3,$$

$$P_{17} = f_4;$$

$$D_{22} := D_{22} + P_{12},$$

$$D_{44} := D_{44} + P_{13}, \quad (2.104)$$

$$h_i := h_i + P_{13+i} \dot{q}_i.$$

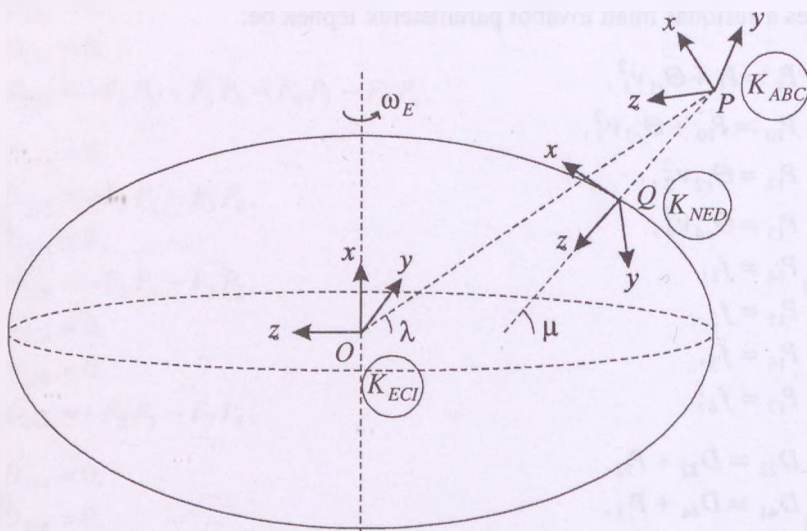
2.2 Repülőgép dinamikus modellje

A korszerű polgári és katonai repülőgépek nagyértékű berendezések. A repülőgépek irányítási algoritmusainak kifejlesztését és tesztelését nagymértékben megkönnyíti, ha megbízható dinamikus modell áll rendelkezésre. Célunk, hogy a dinamikus modell felállításának főbb lépéseit összefoglaljuk.

2.2.1 A repüléstechnikában használt fontosabb koordinátarendszerek

A klasszikus mechanika törvényei inercia koordináta-rendszerben érvényesek. A különféle repülő objektumok azonban a nap körül keringő és a tengelye körül forgó föld környezetében mozognak. Ezért a természetes választás egy inercia koordináta-rendszer origója számára a nap középpontja, orientációja számára pedig az "álló"

csillagokhoz relatíven rögzített orientáció lehetne. Ez azonban a nagy távolságok miatt kényelmetlen, ezért a repüléstechnikában hosszabb időtartamú utak esetében a föld középpontjához rögzített és azzal kvázi "egyenletes sebességgel" haladó, de a csillagokhoz fix orientációjú K_{ECI} keretet (Earth-centered inertial frame) választják. A föld és a légkör, amelyben a repülőgép mozog, konstans ω_E szögsebességgel forog, és ebben a médiumban (a légkörben) manőverezik a repülőgép. Ez robotikai analógiával felfogható úgy is, mintha a légkör egy szegmens lenne K_{ECI} és a repülőgép közé ékelődve, amelyet egy rotációs csukló forgat. A csukló a föld forgástengelye, amelynek iránya az K_{ECI} keret x -tengelye.



2.2. ábra. A repüléstechnikában használt koordináta-rendszerek

A repülőgép testéhez a tömegközéppontban hozzárögzíthetünk egy vele együtt mozgó K_{ABC} koordináta-rendszert (aircraft-body coordinate frame). Az irányítás feladata, hogy a repülési célnak megfelelően változzék K_{ECI} -hez képest a K_{ABC} origójának v_{abs} abszolút sebessége és ω_B abszolút szögsebessége. Ez a hajtóművek teljesítményének és az aerodinamika törvényeinek kihasználásával lehet elérni.

Egy harmadik koordináta-rendszerhez úgy jutunk, hogy a K_{ABC} origóját merőlegesen levetítjük a föld felületére. Ezáltal kapunk egy pontot a föld felszínén a repülőgép alatt, amely a legközelebb van K_{ABC} origójához, de amely a repülőgéppel együtt mozog. A felület érintősíkjában ebben a pontban az új K_{NED} koordináta-rendszer x tengelye északra, y tengelye keletre mutat, z tengelye pedig

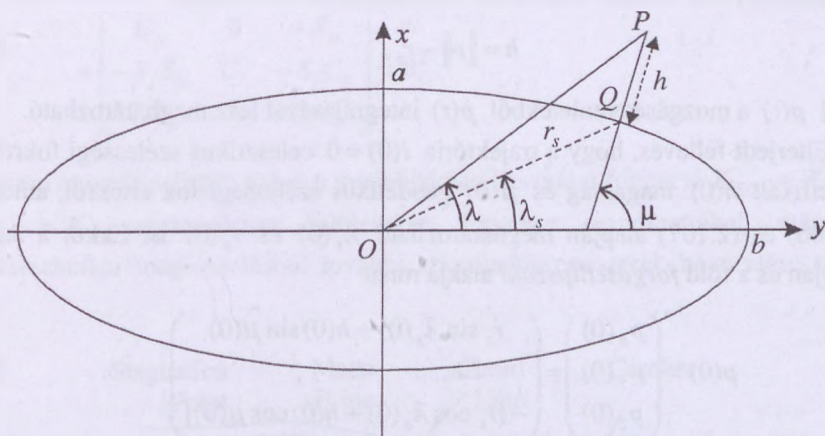
az érintősíkra merőleges és lefelé mutat (north-east-down). Ez a koordináta-rendszer rövididejű repülőutak esetén kvázi inerciarendszernek tekinthető.

A három koordináta-rendszert a 2.2. ábrán mutattuk be. A Föld jó közelítéssel egy forgásellipszoid, amely egy ellipsziszből keletkezik a K_{ECI} x -tengelye (a föld forgástengelye) körüli forgatás révén. Az ábrán az ellipszis excentricitását eltűz-
tuk, hogy kihangsúlyozzuk a Földnek a gömbtől való eltérését.

A föld alakját approximáló forgásellipszoid egy ellipszis forgatása révén kelet-
kezik, amelynek egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b > a > 0. \quad (2.105)$$

Az ellipszis hosszabbik tengelye $r_E = b = 6378137.000$ m, a kisebbik tengely $a = b(1 - f) = 6356752.314$ m, ahol $f = 1/298.257$ az excentricitás jellemzője. A földkörüli navigáció a hosszúsági és a szélességi fokokon alapul.



2.3. ábra. A földkörüli navigációnál használt változók

A hosszúsági fokok keletre és nyugatra mérendők a Greenwichi Obszervatóriu-
mon keresztülhaladó főmeridiánhoz képest. A K_{ECI} keretben navigációs célra az l
"égi" hosszúsági fok (celestial longitude angle) használatos, amelyet a K_{ECI} keret
 $y - z$ síkjában a $-z$ tengelytől mérünk az óramutató járásával ellentétes irányban
az Északi-sark felől nézve (következésképp egy geostacionárius megfigyelő folya-
matosan növekvő l értékkel jellemezhető).

A szélességi fok jellemzése összetettebb, mivel a föld alakja eltér a gömbtől. Mutasson a K_{ABC} keret origójába (a repülőgép tömegközéppontjába) a $p(t)$ helyvektor. A λ geocentrikus szélességi fok és a μ geodetikus szélességi fok a 2.3. ábra alapján van definiálva. A térképek a geodetikus szélességi fokokat használják. A Q pont a K_{NED} keret origója és megfelel a tengerszintnek a repülőgép alatt.

A Q pont geocentrikus szélességi foka λ_s , amelyre az ellipszis egyenlete alapján teljesül

$$(1-f)^2 \tan \mu = \tan \lambda_s. \quad (2.106)$$

A Q pont polárkoordinátái (r_s, λ_s) , ahol

$$r_s^2 = \frac{r_E^2}{1 + [1/(1-f)^2 - 1] \sin^2 \lambda_s}. \quad (2.107)$$

A repülőgépnek a tengerszint fölötti magassága jó közelítéssel

$$h \approx \|p\| - r_s, \quad (2.108)$$

ahol $p(t)$ a mozgásegyenletekből $\dot{p}(t)$ integrálásával lesz meghatározható.

Elterjedt feltevés, hogy a trajektória $l(0)=0$ celesztikus szélességi fokról indul, specifikált $h(0)$ magasság és $\mu(0)$ geodetikus szélességi fok értékről, amelyekből (2.106) és (2.107) alapján meghatározható $\lambda_s(0)$ és $r_s(0)$ is. Ekkor a 2.3. ábra alapján és a föld *forgásellipszoid* alakja miatt

$$p(0) = \begin{pmatrix} p_x(0) \\ p_y(0) \\ p_z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_s \sin \lambda_s(0) + h(0) \sin \mu(0) \\ 0 \\ -[r_s \cos \lambda_s(0) + h(0) \cos \mu(0)] \end{pmatrix}. \quad (2.109)$$

A navigáció történhet $p(t)$ vagy $(h(t), l(t), \lambda(t))$ alapján, bár a trajektória megjelenítésére legtöbbször az utóbbit használják. Ezek meghatározása a kinematikai modellből keletkező $p(t)$ -ből egyszerű, mert

$$\begin{aligned} \tan l(t) &= \frac{p_y(t)}{-p_z(t)} \Rightarrow l(t) \in [0^\circ, 360^\circ), \\ \tan \lambda(t) &= \frac{p_x(t)}{\sqrt{p_y^2(t) + p_z^2(t)}} \Rightarrow \lambda(t) \in [0^\circ, 360^\circ), \\ h(t) &= \|p(t)\| - r_s(t). \end{aligned} \quad (2.110)$$

A geografikus hosszúság innen a kezdeti $l_G(0)$ greenwichi hosszúság ismeretében meghatározható:

$$l_G(t) = l_G(0) + l(t) - \omega_E t \in (-180^\circ, +180^\circ]. \quad (2.111)$$

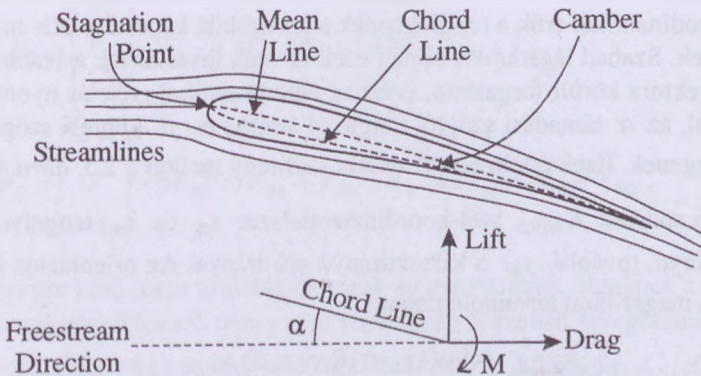
Ha a repülőgép orientációja K_{NED} -hez képest ismert $A_{K_{NED}, K_{ABC}} = B_B^T$ alakjában, akkor ebből az orientáció a K_{ECI} inercia rendszerhez képest könnyen számítható

$$A_{K_{ECI}, K_{ABC}} = A_{K_{ECI}, K_{NED}} A_{K_{NED}, K_{ABC}} = B_G^T B_B^T = B^T \quad (2.112)$$

révén, ahol $A_{K_{ECI}, K_{NED}}$ két forgatással állítható elő:

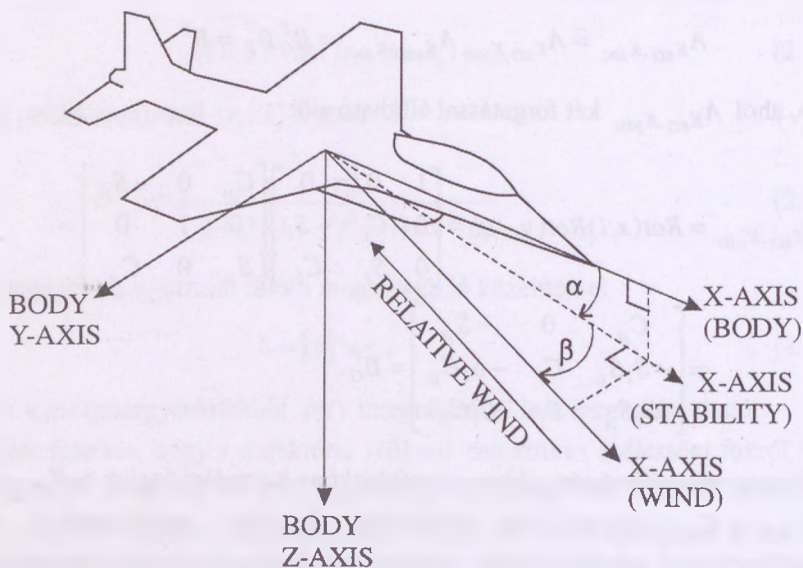
$$\begin{aligned} A_{K_{ECI}, K_{NED}} &= Rot(x, l) Rot(y, -\mu) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_l & -S_l \\ 0 & S_l & C_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\mu & 0 & -S_\mu \\ 0 & 1 & 0 \\ S_\mu & 0 & C_\mu \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C_\mu & 0 & -S_\mu \\ -S_l S_\mu & C_l & -S_l C_\mu \\ C_l S_\mu & S_l & C_l C_\mu \end{bmatrix} = B_G^T. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Ha nem okoz félreértést, akkor a továbbiakban használni fogjuk a $K_{ECI} =: K_E$ és a $K_{ABC} =: K_B$ egyszerűsített jelöléseket. Egyrészt aerodinamikai, másrészt irányítástechnikai megfontolásból további koordináta-rendszerek bevezetése szükséges.



2.4. ábra. A felhajtóerő, légellenállás és támadási szög aerodinamikai értelmezése

A 2.4. ábra egy szárnyfelületet mutat a szabad légáram útjában bizonyos eltéréssel a szabad légáram irányához képest, ahol az eltérés iránya szoros kapcsolatban áll a repülőgép haladási irányával (lásd az ún. chord line irányát az ábrán). A szárnyra két erő hat: a felhajtóerő (lift L) és a légellenállás (drag D). A felhajtóerő merőleges a légáramlás irányára, a légellenállás párhuzamos a szabad légáramlás irányával. A támadási szög α a chord line és a szabad légáramlás iránya közötti szög. Az ábrában az elterjedt angol elnevezéseket használtuk.



2.5. ábra. A támadási és kitérés (elhajlási) szög értelmezése a relatív szélirányhoz képest

Az aerodinamikai erők a repülőgépnek a levegőhöz képesti relatív mozgása miatt keletkeznek. Szabad légáramlás esetén ezek az erők invariánsak a szabad légáramlás sebességvektora körüli forgatásra, ezért az aerodinamikai erők és nyomatékok csak két szögtől, az α támadási szögtől (angle of attack) és β kitérés szögtől (slidestip angle) függenek. Ezek értelmezését relatív szélirány mellett a 2.5. ábra mutatja.

A jobb sodrású K_{WIND} szél-koordinátarendszer x_w és z_w tengelye rendre $-D$ és $-L$ irányú, továbbá y_w a keresztirányú erő iránya. Az orientációs mátrix (a robotikában megszokott terminológiában)

$$A_{K_B, K_W} = Rot(y, -\alpha) Rot(z, \beta) \Rightarrow$$

$$A_{K_B, K_W} = \begin{bmatrix} C_\alpha & 0 & -S_\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ S_\alpha & 0 & C_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\beta & -S_\beta & 0 \\ S_\beta & C_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\alpha C_\beta & -C_\alpha S_\beta & -S_\alpha \\ S_\beta & C_\beta & 0 \\ S_\alpha C_\beta & -S_\alpha S_\beta & C_\alpha \end{bmatrix},$$

$$S := A_{K_B, K_W}^T, \quad (2.114)$$

$$r_B = A_{K_B, K_W} r_W, \quad r_W = S r_B.$$

A v_T valódi levegő sebesség (true air speed) csak x_W irányú komponenssel rendelkezik, ezért a repülőgép v_B relatív sebessége, amelyet a pilóta tapasztal a repülőben ülve és változtat a céljának megfelelően (pl. egy katonai gépben támadáskor), kifejezhető a következő alakban:

$$v_B = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = S^T v_W = A_{K_B, K_W} \begin{pmatrix} v_T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\alpha C_\beta v_T \\ S_\beta v_T \\ S_\alpha C_\beta v_T \end{pmatrix}, \quad (2.115)$$

ahonnan következik

$$v_T = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}, \quad \tan \alpha = W / U, \quad \sin \beta = V / v_T. \quad (2.116)$$

A repülőgépre ható F_B külső erő (a gravitációs hatás nélkül) és T_B külső nyomaték felbontható F_{BA}, T_{BA} aerodinamikai (A) és F_{BT}, T_{BT} hajtóműtől származó (T thrust) komponensekre a repülőgép koordináta-rendszerében, és hasonlóan a szél-koordinátarendszerben:

$$F_B = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = F_{BA} + F_{BT}, \quad T_B = \begin{pmatrix} \bar{L} \\ M \\ N \end{pmatrix} = T_{BA} + T_{BT}, \quad (2.117)$$

$$F_W = S F_B = \begin{pmatrix} -D \\ Y \\ -L \end{pmatrix} + S F_{BT} = F_{WA} + F_{WT}, \quad T_W = S T_B = T_{WA} + T_{WB}. \quad (2.118)$$

A repülőgépre ható (nem gravitációs) erők és nyomatékok függenek a repülőgép S_{wa} hatásos szárnyfelületétől (wing reference area), a szabad levegőáramlás $\bar{q}$ dinamikus nyomásától (free-stream dynamic preassure), különféle $C_D, C_L, \dots, C_N$ dimenzió nélküli koefficiensektől, és a nyomatékok esetében a b szárny fesztávolságtól (wing span) és a szárny $\bar{c}$ közepes geometriai húrjától (wing mean geometric chord):

$D = \bar{q} S_{wa} C_D$ légellenállás (drag),

$L = \bar{q} S_{wa} C_L$ felhajtó erő (lift),

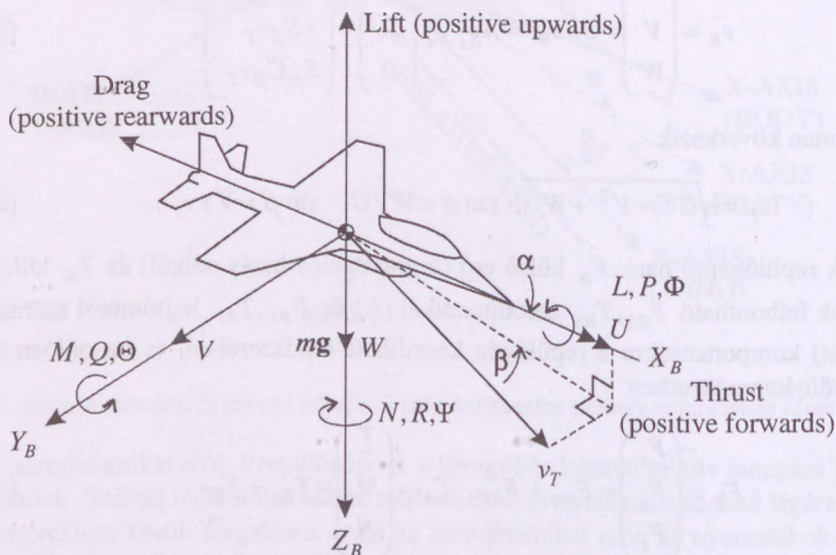
$Y = \bar{q} S_{wa} C_Y$ oldalero (sideforce),

$\bar{L} = \bar{q} S_{wa} b C_{\bar{L}}$ gördülő nyomaték (rolling moment),

$M = \bar{q} S_{wa} \bar{c} C_M$ billentő nyomaték (pitching moment),

$N = \bar{q} S_{wa} b C_N$ kitérítő nyomaték (yawing moment).

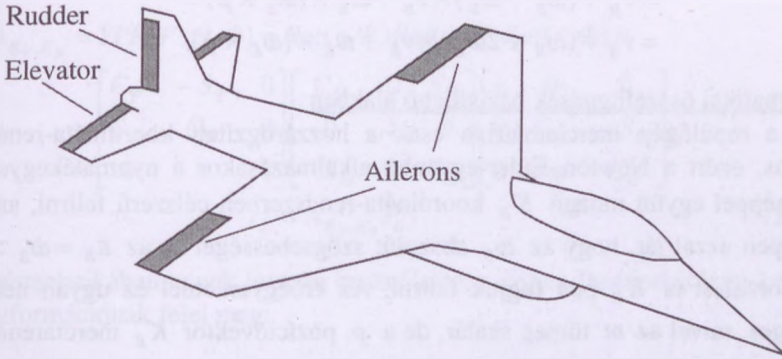
A $C_D, C_L, \dots, C_N$ dimenzió nélküli koefficiensek elsősorban az α és β szögektől, az irányító felületek (control surfaces) helyzetétől, valamint a Mach-számtól függenek. A Mach-szám a levegő áramlás egy pontjában a lokális levegő sebessége elosztva a hangsebességgel a levegőben szabad levegőáramlás esetén.



2.6. ábra. A repülőgéphez rögzített keret a kinematikai és az erő/nyomaték mennyiségekkel

A 2.6. ábrán összefoglaltuk a kinematikai és dinamikai modellek levezetésénél és értelmezésénél használt K_B koordináta-rendszerben a kinematikai és erő/nyomaték mennyiségek értelmezését a három koordinátatengely irányában. Az eddig nem szereplő mennyiségek az orientáció jellemzésére használt és a repüléstechnika szokásainak megfelelően nagy betűkkel jelölt Φ (roll), Θ (pitch) és Ψ (yaw) szögek, valamint az ω_B abszolút szögsebességnek a K_B bázisában kifejezett P, Q, R komponensei. A 2.7. ábrán egy konvencionális repülőgép irányítási felüle-

teit mutatjuk be a repülőgép mozgását befolyásoló emelő, csűrő és kormányzó lapátokkal (angolul rendre elevator, aileron, rudder).



2.7. ábra. Konvencionális repülőgép irányító felületei

2.2.2 A repülőgép kinematikai modellje

A repülőgép tömegközéppontjába, vagyis a K_B origójába egy p vektor mutat a K_E origójából, amely azonosítja a repülőgép pozícióját. A repülőgép abszolút sebessége $v_{abs} = \dot{p}$, abszolút gyorsulása pedig $a_{abs} = \ddot{p} = \dot{v}_{abs}$ az inercia rendszerben. Mint korábban láttuk, a légkör, amelyben a repülőgép mozog, konstans ω_E szögsebességgel forog, és ebben a médiumban (a légkörben) manőverezik a repülőgép. Ez robotikai analógiával felfogható úgy is, mintha a légkör egy szegmens lenne K_E és K_B közé ékelődve, amelyet egy rotációs csukló forgat. A csukló a föld forgástengelye, amelynek iránya az K_E keret x_E -tengelye. A repülőgép orientációjának megváltoztatása érdekében meg kell változtatni a levegőéhez képest a szögsebességet valamilyen ω_R értékkel, miáltal az inercia rendszerhez képest az abszolút szögsebesség $\omega_B = \omega_E + \omega_R$ lesz. A repülőgép relatív sebessége, amelyet a repülőgépben ülő tapasztal, v_B .

Kinematikai összefüggések bázisfüggetlen alakban

A kinematikai összefüggések a mozgó koordináta-rendszerben érvényes deriválási szabályok felhasználásával bázisfüggetlen alakban egyszerűen képezhetők:

$$\omega_B = \omega_E + \omega_R, \quad (2.119)$$

$$v_{abs} = \dot{p} = v_B + \omega_E \times p, \quad (2.120)$$

$$\begin{aligned}
\dot{v}_{abs} &= \dot{v}_B + \omega_B \times v_B + \omega_E \times \dot{p} = \\
&= \dot{v}_B + \omega_B \times v_B + \omega_E \times (v_B + \omega_E \times p) = \\
&= \dot{v}_B + (\omega_B + \omega_E) \times v_B + \omega_E \times (\omega_E \times p) = \\
&= \dot{v}_B + (\omega_R + 2\omega_E) \times v_B + \omega_E \times (\omega_E \times p).
\end{aligned} \tag{2.121}$$

A kinematikai összefüggések bázisfüggő alakban

Mivel a repülőgép inerciamátrixa csak a hozzárögzített koordináta-rendszerben konstans, ezért a Newton–Euler-egyenlet alkalmazásakor a nyomatékegyenletet a repülőgéppel együtt mozgó K_B koordináta-rendszerben célszerű felírni, ami szükségképpen azzal jár, hogy az ω_B abszolút szögsebességet és az $\varepsilon_B = \dot{\omega}_B$ abszolút szöggyorsulást is K_B -ben fogjuk felírni. Az erőegyenletnél ez ugyan nem lenne szükséges, mivel az m tömeg skalár, de a p pozícióvektor K_E inerciarendszerben történt értelmezése miatt az erőegyenletet mégis célszerű lesz K_E -ben felírni. Világos, hogy a repülőgép v_B relatív sebességét célszerű K_B -ben számítani. Másrészt viszont, ha az erőegyenletet K_E -ben írjuk fel, akkor célszerű a $\dot{p} = v_{abs}$ abszolút sebességet és az $a_{abs} = \dot{v}_{abs}$ abszolút gyorsulást K_E -ben felírni.

Legyen tehát az $r_E = A_{K_E, K_B} r_B = B^T r_B \Leftrightarrow r_B = A_{K_E, K_B}^T r_E = B r_E$ koordináta-transzformáció mátrixa ismert, akkor a kinematikai egyenletek a következők lesznek:

$$\omega_B = B \omega_E + \omega_R \tag{1.122}$$

$$\dot{\omega}_B = \varepsilon_B \tag{1.123}$$

$$B \dot{p} = v_B + B(\omega_E \times p) \Leftrightarrow \tag{1.124}$$

$$\dot{p} = B^T v_B + [\omega_E \times] p$$

$$\begin{aligned}
B a_{abs} &= \dot{v}_B + (\omega_B + B \omega_E) \times v_B + B\{\omega_E \times (\omega_E \times p)\} \Leftrightarrow \\
\dot{v}_B &= B a_{abs} - B[\omega_E \times]^2 p - \{[\omega_B \times] + B[\omega_E \times] B^T\} v_B.
\end{aligned} \tag{1.125}$$

Megjegyzés:

- i) K_E bázisában számítjuk: $p, \dot{p}, a_{abs}$.
- ii) K_B bázisában számítjuk: $\omega_B, \varepsilon_B, v_B$.
- iii) A Newton (erő-) egyenletből számítjuk: a_{abs} .
- iv) Az Euler (nyomaték-) egyenletből számítjuk: ε_B .
- v) Az abszolút szögsebesség számítására 3-változós (YPR szögeken) vagy 4-változós (kvaterniók technikán alapuló) módszereket fogunk kidolgozni.

Az orientáció 3-változós jellemzése

A repülőgép relatív orientációját a K_E koordináta-rendszerhez képest szokás a 2.6. ábra és a robotikai konvenciók szerint az YPR-szögekkel jellemezni:

$$A_{K_E, K_B} = YPR(\Psi, \Theta, \Phi) = Rot(z, \Psi) Rot(y, \Theta) Rot(x, \Phi) =$$

$$= \begin{bmatrix} C_\Psi & -S_\Psi & 0 \\ S_\Psi & C_\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\Theta & 0 & S_\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\Theta & 0 & C_\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\Phi & -S_\Phi \\ 0 & S_\Phi & C_\Phi \end{bmatrix}, \quad (2.126a)$$

$$r_E = A_{K_E, K_B} r_B. \quad (2.126b)$$

A repüléstechnikában ennek inverze használatos, amely a fordított irányú koordináta-transzformációnak felel meg:

$$B(\Phi, \Theta, \Psi) = A_{K_E, K_B}^{-1} = A_{K_E, K_B}^T = Rot(x, \Phi)^T Rot(y, \Theta)^T Rot(z, \Psi)^T, \quad (2.127a)$$

$$r_B = B r_E. \quad (2.127b)$$

Határozzuk meg A_{K_E, K_B} kifejezését, mert ebből transzponálással $B(\Phi, \Theta, \Psi)$ is meghatározható:

$$A_{K_E, K_B} = \begin{bmatrix} C_\Psi & -S_\Psi & 0 \\ S_\Psi & C_\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\Theta & S_\Theta S_\Phi & S_\Theta C_\Phi \\ 0 & C_\Phi & -S_\Phi \\ -S_\Theta & C_\Theta S_\Phi & C_\Theta C_\Phi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_\Psi C_\Theta & C_\Psi S_\Theta S_\Phi - S_\Psi C_\Phi & C_\Psi S_\Theta C_\Phi + S_\Psi S_\Phi \\ S_\Psi C_\Theta & S_\Psi S_\Theta S_\Phi + C_\Psi C_\Phi & S_\Psi S_\Theta C_\Phi - C_\Psi S_\Phi \\ -S_\Theta & C_\Theta S_\Phi & C_\Theta C_\Phi \end{bmatrix}. \quad (2.128)$$

Mivel Ψ, Θ, Φ egy fiktív RRR kar csuklóváltozóinak is felfogható, ezért az $\omega_B = \omega_x i_B + \omega_y j_B + \omega_z k_B$ abszolút szögsebesség (a mozgó K_B keret bázisában) és a $\dot{\Psi}, \dot{\Theta}, \dot{\Phi}$ "csuklósebességek" közötti kapcsolat kifejezhető a parciális szögsebességek számítására adott képlettel, de a képletben a csuklótengelyek rendre $t_1 = k$, $t_2 = j$ és $t_3 = i$. A parciális szögsebességek számításához a részletszorzatok már előálltak (2.126a)-ban és (2.128)-ben, ezért

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -S_\Theta & 0 & 1 \\ C_\Theta S_\Phi & C_\Phi & 0 \\ C_\Theta C_\Phi & -S_\Phi & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\Psi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Phi} \end{pmatrix}. \quad (2.129)$$

A "Jacobi-mátrix" determinánsa $\det = -C_\theta S_\phi^2 - C_\theta C_\phi^2 = -C_\theta$, inverze pedig a 3×3 mátrixok inverzének képlete szerint

$$[]^{-1} = -\frac{1}{C_\theta} \begin{bmatrix} 0 & -S_\phi & -C_\phi \\ 0 & -C_\theta C_\phi & C_\theta S_\phi \\ -C_\theta & -S_\theta S_\phi & -S_\theta C_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S_\phi / C_\theta & C_\phi / C_\theta \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 1 & T_\theta S_\phi & T_\theta C_\phi \end{bmatrix}. \quad (2.130)$$

Áttérve a választott $\omega_B = P i_B + Q j_B + R k_B$ jelölésre, a

$$\begin{pmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T_\theta S_\phi & T_\theta C_\phi \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & S_\phi / C_\theta & C_\phi / C_\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} =: F(\Phi, \Theta) \omega_B \quad (2.131)$$

összefüggést kapjuk az orientáció 3-változós jellemzésének propagációjára.

A (2.131) nemlineáris differenciálegyenletben szereplő mátrix nem ortogonális és függ a Φ, Θ, Ψ szögektől, amelyeket tehát a differenciálegyenlet megoldásához ki kell tudni számítani. A feladat a (2.128) egyenlet szerint egy inverz RPY-feladat, amellyel az F1. függelékben foglalkoztunk. A $\Theta = \pm 90^\circ$ érték szinguláris konfiguráció, közelében $C_\theta = 0$ miatt (2.131) kiértékelhetetlen. Ezért nagyobb tartományt szingularitás nélkül átfogó kvaterniók technikát is be fogunk mutatni.

Megjegyzés: Az RPY szögek a K_{NED} és K_B keretek között is értelmezhetők, mi több ez a szokásos technika a repülőgép navigációban. Ekkor azonban más lesz a szögek értéke, amelyeket jelöljünk kis betűvel: φ, ϑ, ψ . A B transzformáció és az új transzformáció közötti kapcsolat $B(\Phi, \Theta, \Psi) = B_B(\varphi, \vartheta, \psi) B_G(l, \mu)$, ahonnan B, l, μ numerikus értékének ismeretében $B_B = B B_G^T$ numerikus értéke is meghatározható, és ebből az inverz probléma φ, ϑ, ψ megoldása kiszámítható. A $\vartheta = \pm 90^\circ$ érték a tengerszint feletti vertikális helyzetnek felel meg.

Az orientáció 4-változós jellemzése kvaternióval

Jelölje a jelölések egyszerűsítése érdekében $\omega := \omega_B$ a repülőgép abszolút szögsebességét a K_B mozgó koordináta-rendszer bázisában kifejezve és $A := A_{K_L, K_B}$ az inerciarendszerhez képesti orientációt. Az F1. függelékből tudjuk, hogy $\omega = A^{-1} A'$ és a Rodriguez-képlet alapján létezik olyan t tengely és φ szög, hogy $\|t\| = 1$ és $A = C_\varphi I + (1 - C_\varphi)[t \circ t] + S_\varphi[t \times]$, továbbá az A orientáció azonosítható a $q = (t \sin \frac{\varphi}{2}, \cos \frac{\varphi}{2})$, $\|q\| = 1$ kvaternióval, mert $q * (r, 0) * \bar{q} = (Ar, 0)$.

Mivel $t^2 = \langle t, t \rangle = 1$, ezért $\langle t', t \rangle + \langle t, t' \rangle = 0 \Rightarrow \langle t, t' \rangle = 0 \Rightarrow t \perp t'$, és ily módon $t, t \times t', t'$ ortogonális bázist alkot. Ezért ω feírható $\omega = \lambda_1 t + \lambda_2 t \times t' + \lambda_3 t'$ alakban.

2.1 Lemma: $\omega = \varphi' t + (1 - C_\varphi) t' \times t + S_\varphi t'$.

Bizonyítás:

Felhasználjuk, hogy $a \times a = 0$, $\langle a, a \times b \rangle = 0$, $a \times (b \times c) = b \langle a, c \rangle - c \langle a, b \rangle$, $[a \circ a] - I = [a \times][a \times]$, továbbá $\langle t, t \rangle = 1$ és $\langle t, t' \rangle = 0$, ezért

$$\begin{aligned} \omega \times t &= \lambda_1 t \times t + \lambda_2 (t \times t') \times t + \lambda_3 t' \times t = \lambda_2 \{-t \langle t, t' \rangle + t' \langle t, t \rangle\} + \lambda_3 t' \times t = \\ &= \lambda_2 t' + \lambda_3 t' \times t, \end{aligned} \quad (2.132)$$

és hasonlóan

$$\omega \times t' = \lambda_1 t \times t' - \lambda_2 t \langle t', t' \rangle, \quad (2.133)$$

$$\omega \times (t \times t') = -\lambda_1 t' + \lambda_3 t \langle t', t' \rangle. \quad (2.134)$$

A Rodriguez-képlet alapján

$$A^{-1} = C_\varphi I + (1 - C_\varphi)[t \circ t] - S_\varphi[t \times], \quad (2.135)$$

$$\begin{aligned} A' &= -S_\varphi \varphi' I + S_\varphi \varphi'[t \circ t] + (1 - C_\varphi)[t \circ t' + t' \circ t] + C_\varphi \varphi'[t \times] + S_\varphi[t' \times] = \\ &= S_\varphi \varphi'[t \times][t \times] + (1 - C_\varphi)[t \circ t' + t' \circ t] + C_\varphi \varphi'[t \times] + S_\varphi[t' \times], \end{aligned} \quad (2.136)$$

ahonnan következik

$$A' t = (1 - C_\varphi) t' + S_\varphi t' \times t \quad (2.137)$$

$$A' t' = -S_\varphi \varphi' t' + (1 - C_\varphi) t \langle t', t' \rangle + C_\varphi \varphi' t \times t' \quad (2.138)$$

$$\begin{aligned} \omega \times t &= A^{-1} A' t = \\ &= \{C_\varphi I + (1 - C_\varphi)[t \circ t] - S_\varphi[t \times]\} \{(1 - C_\varphi) t' + S_\varphi t' \times t\} = \\ &= -(1 - C_\varphi) t' + S_\varphi t' \times t = \lambda_2 t' + \lambda_3 t' \times t \Rightarrow \lambda_2 = -(1 - C_\varphi), \quad \lambda_3 = S_\varphi, \end{aligned} \quad (2.139)$$

$$\begin{aligned} \omega \times t' &= A^{-1} A' t' = \\ &= \{C_\varphi I + (1 - C_\varphi)[t \circ t] - S_\varphi[t \times]\} \cdot \\ &\quad \cdot \{-S_\varphi \varphi' t' + (1 - C_\varphi) t \langle t', t' \rangle + C_\varphi \varphi' t \times t'\} = \\ &= \varphi' t + (1 - C_\varphi) t \times t' = \lambda_1 t - \lambda_2 t \times t' \Rightarrow \lambda_1 = \varphi', \quad \lambda_2 = -(1 - C_\varphi). \end{aligned} \quad (2.140)$$

Ezért $\omega = \lambda_1 t + \lambda_2 t \times t' + \lambda_3 t' = \varphi' t - (1 - C_\varphi) t \times t' + S_\varphi t'$, ami ekvivalens a lemma állításával.

2.2 Lemma: Legyen az A orientációs mátrixszal ekvivalens kvaternió

$$q = (w, s) = (t \sin \frac{\varphi}{2}, \cos \frac{\varphi}{2}), \quad \|q\| = 1, \quad (2.141)$$

akkor

$$\omega = 2\{-ws' + (-[w \times] + sI)w'\}. \quad (2.142)$$

Bizonyítás:

Következik a q kvaternió alakjából, hogy

$$\varphi = 2 \arccos s \Rightarrow \varphi' = -2 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} s' = -\frac{2}{\sin \frac{\varphi}{2}} s', \quad (2.143)$$

$$t = \frac{w}{\sin \frac{\varphi}{2}} \Rightarrow t' = \frac{w'}{\sin \frac{\varphi}{2}} - w \frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\varphi}{2} \frac{1}{2} \varphi' \Rightarrow \quad (2.144)$$

$$t' = \frac{w'}{\sin \frac{\varphi}{2}} - w \frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \left(-\frac{2}{\sin \frac{\varphi}{2}} s'\right) = \frac{w'}{\sin \frac{\varphi}{2}} + \frac{w}{\sin^3 \frac{\varphi}{2}} s s'. \quad (2.145)$$

Helyettesítsük be ezeket az $\omega = t\varphi' - (1 - C_\varphi) t \times t' + S_\varphi t'$ összefüggésekbe, akkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{w}{\sin \frac{\varphi}{2}} \left(-\frac{2}{\sin \frac{\varphi}{2}} s' \right) - \{1 - (\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2})\} \frac{[w \times]}{\sin \frac{\varphi}{2}} \left(\frac{w'}{\sin \frac{\varphi}{2}} + \frac{w}{\sin^3 \frac{\varphi}{2}} s s' \right) + \\ &+ 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \left(\frac{w'}{\sin \frac{\varphi}{2}} + \frac{w}{\sin^3 \frac{\varphi}{2}} s s' \right) = \\ &= -2 \frac{w}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} s' - 2[w \times] w' + 2 \left(s w' + \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} w s' \right) \end{aligned}$$

$$\omega = 2\{-ws' + (-[w \times] + sI)w'\},$$

ami a lemma állítása.

Következmény:

i) Mivel $\|q\|^2 = w^2 + s^2 = 1 \Rightarrow 2(w^T w' + s s') = 0$, ezért

$$\begin{pmatrix} \omega \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -w & -[w \times] + sI \\ s & w^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s' \\ w' \end{pmatrix}. \quad (2.146)$$

ii) Az egyenletben szereplő mátrix ortogonális:

$$\begin{bmatrix} -w^T & s \\ [w \times] + sI & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -w & -[w \times] + sI \\ s & w^T \end{bmatrix} = I. \quad (2.147)$$

iii) A kvaternió idő szerinti deriváltja kifejezhető ω -val és q -val bilineáris alakban:

$$\begin{pmatrix} s' \\ w' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -w^T & s \\ [w \times] + sI & w \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -w^T \\ [w \times] + sI \end{bmatrix} \omega = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\omega^T w \\ \omega s - \omega \times w \end{pmatrix}, \quad (2.148)$$

$$\begin{pmatrix} s' \\ w' \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega^T \\ -\omega & [\omega \times] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s \\ w \end{pmatrix}. \quad (2.149)$$

Az eredményeket a gyakorlat számára a következő lemma foglalja össze.

2.3 Lemma: A repülőgép $A_{K_E, K_B} = B^T$ orientációja kifejezhető egy 4-dimenziós $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T = (s, w^T)^T$ vektorral, és ha $\omega_B = (P, Q, R)^T$ jelöli a repülőgép abszolút szögsebességét a K_B keret bázisában, akkor az orientáció propagációja

$$\dot{q} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & P & Q & R \\ -P & 0 & -R & Q \\ -Q & R & 0 & -P \\ -R & -Q & P & 0 \end{bmatrix} q = -\frac{1}{2} \Omega_q q. \quad (2.150)$$

Megjegyzés: Az ω_B -től függő Ω_q mátrix a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$\begin{aligned} \Omega_q^2 &= -(P^2 + Q^2 + R^2)I = -\|\omega_B\|^2 I, \\ \Omega_q^{2n} &= (-1)^n \|\omega_B\|^{2n} I, \\ \Omega_q^{2n+1} &= (-1)^n \|\omega_B\|^{2n} \Omega_q. \end{aligned} \quad (2.151)$$

2.2.3 A repülőgép állapotegyenlete

A repülőgép kinematikai és dinamikus modellje együttesen alkotja az állapotegyenletet, amelynek felállítása előtt még tisztázni kell a külső erőkben fellépő gravitációs hatást, mivel az magasságfüggő, valamint az inerciamátrix alakját, kihasználva a repülőgépek jellegzetes szimmetria tulajdonságait.

A nehézségi gyorsulás függése a repülőgép pozíciójától

A tömegvonzás törvénye szerint a Föld egy F_g erőt fejt ki a repülőgépre, amelynek nagysága

$$F_g = -G \frac{Mm}{\|p\|^2} \frac{p}{\|p\|} = -GMm \frac{p}{\|p\|^3}, \quad (2.152)$$

ahol G konstans, M a Föld tömege, m a repülőgép tömege és p a repülőgép tömegközéppontjába mutató vektor, továbbá $GM = 3.98599927 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$. A nehézségi gyorsulás vektora

$$g = -\frac{GM}{\|p\|^3} p. \quad (2.153)$$

Értéke változik p -vel, például $\|g\|$ a tengerszinten az egyenlítőnél 9.81425 m/s^2 , a sarkokon pedig 9.83193 m/s^2 . Különbféle korrekciós képletek ismertek a Föld ellipszoid alakjának figyelembevételére, amelyek rendszerint p helyett egy korrigált $\bar{p}$ értéket használnak, amely a λ geocentrikus szélességi fok függvénye. Egy ilyen például a következő:

$$\begin{aligned} \bar{p}_x &= p_x [1 + 1.5J_2(r_E/\|p\|)^2(3 - 5\sin^2 \lambda)], \\ \bar{p}_y &= p_y [1 + 1.5J_2(r_E/\|p\|)^2(1 - 5\sin^2 \lambda)], \\ \bar{p}_z &= p_z [1 + 1.5J_2(r_E/\|p\|)^2(1 - 5\sin^2 \lambda)], \end{aligned} \quad (2.154)$$

ahol $r_E = 6378137 \text{ m}$ az egyenlítő sugara és $J_2 = 1.08263 \cdot 10^{-3}$ az ún. gravitációs harmonikus konstans, továbbá $\lambda = \arcsin(p_x/\|p\|)$.

A repülőgép inerciamátrixa és inverze

A repülőgép alakjának szimmetria tulajdonságai miatt $K_{xy}, K_{yz} = 0$ feltételezhető, ezért

$$K = \begin{bmatrix} K_x & 0 & K_{xz} \\ 0 & K_y & 0 \\ K_{xz} & 0 & K_z \end{bmatrix}, \quad (2.155)$$

$$\det K = K_y (K_x K_z - K_{xz}^2) = K_y \Gamma \Rightarrow \Gamma = K_x K_z - K_{xz}^2, \quad (2.156)$$

$$K^{-1} = \frac{1}{\Gamma} \begin{bmatrix} K_z & 0 & -K_{xz} \\ 0 & \Gamma / K_y & 0 \\ -K_{xz} & 0 & K_x \end{bmatrix}. \quad (2.157)$$

Newton-Euler-egyenlet (lásd Fl. függelék)

A korábban bevezetett konvenciókkal a Newton (erő-) egyenlet szerint

$$ma_{abs} = B^T F_B - mg \Rightarrow Ba_{abs} = \frac{F_B}{m} - Bg \quad (2.158)$$

$$\dot{v}_B + B[\omega_E \times]^2 p + \{[\omega_B \times] + B[\omega_E \times]B^T\}v_B = \frac{F_B}{m} - Bg.$$

Az Euler- (nyomaték-) egyenlet szerint

$$\begin{aligned} K\epsilon_B + \omega_B \times (K\omega_B) &= T_B \Rightarrow \\ \dot{\omega}_B + K^{-1}[\omega_B \times]K\omega_B &= K^{-1}T_B. \end{aligned} \quad (2.159)$$

Repülőgép állapotegyenlete kvaterniós orientáció jellemzés esetén

Használjuk az orientáció jellemzésére a 4-változós kvaterniós technikát, akkor az $x = (p^T, v_B^T, \omega_B^T, q^T)^T \in R^{13}$ állapot választás mellett a repülőgép következő állapotegyenletéhez jutunk:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{v}_B \\ \dot{\omega}_B \\ \dot{q} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} [\omega_E \times] & B^T & 0 & 0 \\ -B[\omega_E \times]^2 & -([\omega_B \times] + B[\omega_E \times]B^T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K^{-1}[\omega_B \times]K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\Omega_q \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ v_B \\ \omega_B \\ q \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F_B}{m} + Bg(p) \\ K^{-1}T_B \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.160)$$

Az állapotegyenlet nemlineáris, mert az állapotmátrix tartalmazza a $B, [\omega_B \times], \Omega_q$ mátrixokat, amelyek az állapotvektor függvényei. Ez az állapotegyenlet jól használható a föld körüli nagy távolságú és nagy sebességű repülés esetén szimulációs és irányítási célra (Round-Earth-Equations).

Repülőgép állapotegyenlete RPY szöges orientáció jellemzés esetén

Közepes távolságú repülés esetén választható közelítő inercia keretként a K_{NED} koordináta-rendszer. Ez a keret ugyan gyorsul és forog, de a Föld által okozott gyorsulása elhanyagolható a manőverező repülőgép gyorsulásához képest. A rendszer-egyenletekben a pozíció a K_{NED} origójából mért p_{NED} , továbbá $\dot{p}_{NED} = B_B^T v_B$. A nehézségi gyorsulás egy $\|g_0\| = 9.8054 \text{ m/s}^2$ átlagértékkel vehető figyelembe, amely megfelel a tengerszinten mért nehézségi gyorsulásnak a 45° szélességi fokon, iránya z_{NED} . Használhatjuk a korábban bevezetett, K_{NED} -hez relatív 3-változós orientáció jellemzést a φ, ϑ, ψ RPY szögekkel és a B_B mátrixszal. Az $x = (v_B^T, \omega_B^T, \underbrace{\varphi, \vartheta, \psi, p_{NED}^T}_{\phi^T})^T$ állapotválasztás mellett a repülőgép állapotegyenlete a következő lesz:

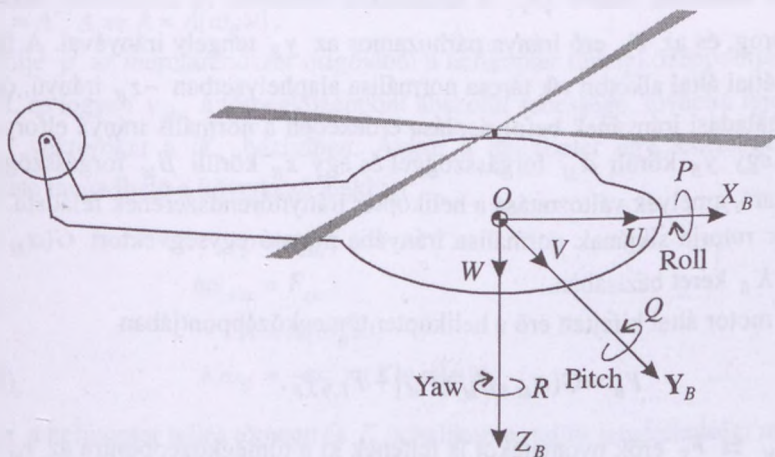
$$\begin{pmatrix} \dot{v}_B \\ \dot{\omega}_B \\ \dot{\phi} \\ \dot{p}_{NED} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -[\omega_B \times] v_B \\ -K^{-1} [\omega_B \times] K \omega_B \\ F(\varphi, \vartheta) \omega_B \\ B_B^T v_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{F_B}{m} + B_B g_0 \\ K^{-1} T_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.161)$$

Az egyenletet szokás sík-Föld egyenletnek nevezni (Flat-Earth-Equations). Ha a lokális szél W_N, W_E, W_D komponensekkel jellemezhető és konstansnak tekinthető a repülőgép méretéhez képest egy jelentősen nagyobb régióban, akkor a repülőgépnek a légáramláshoz képesti sebessége $v_R = v_B - B_B(W_N, W_E, W_D)^T$. Ez az egyenlet hozzávehető a sík-Föld egyenlethez. Ekkor a szél komponensek bemenő jeleknek tekinthetők, és az aerodinamikai erők és nyomatékok számításakor v_B helyett v_R használandó.

2.3 Helikopter dinamikus modellje

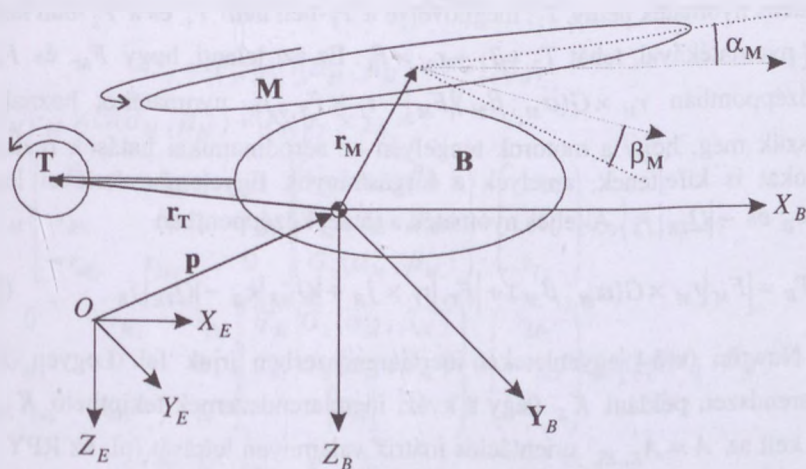
Egy tipikus felépítésű helikopter sémáját mutatja a 2.8. ábra. Jól látható, hogy a repülőgéphez képest jelentős eltérés van a hajtóművekben, mivel a meghajtást a főmotor (M, main motor) és a farokmotor (T, tail motor) forgó lapátjai által kiváltott

felhajtóerő biztosítja. A helikopter testéhez és a motorok állórészéhez egy-egy koordináta-rendszert rögzítünk, ezek rendre K_B , K_M és K_T . A motorok elhelyezkedése miatt a felépítés nem szimmetrikus, ezért a tehetetlenségi mátrix általános alakú.



2.8. ábra. Tipikus felépítésű helikopter

A helikopter modelljében használt geometriai paramétereket a 2.9. ábra tartalmazza.



2.9. ábra. A helikopter geometriai paraméterei

A hajtások modellezésénél azzal a feltevessel élünk, hogy egy rövid tranziens után a rotorok felfoghatók egy nagy sebességgel forgó keskeny tárcsának, amely által kifejtett felhajtóerő iránya a tárcsa síkjára merőleges irány, nagysága pedig $|F_M|$ a főmotor esetében, illetve $|F_T|$ a farokmotor esetében. A farokmotor rotorja fix síkban forog, és az F_T erő iránya párhuzamos az y_B tengely irányával. A főmotor forgó lapátjai által alkotott sík tárcsa normálisa alaphelyzetben $-z_B$ irányú, de a helikopter haladási irányának befolyásolása érdekében a normális iránya elforgatható. Az irány egy y_B körüli α_M forgásszöggel és egy x_B körüli β_M forgásszöggel befolyásolható, amelyek változtatása a helikopter irányítórendszerének feladata. Jelölje a főmotor rotorja síkjának normálisa irányába mutató egységvektort $G(\alpha_M, \beta_M)$, felírva a K_B keret bázisában.

A két motor által kifejtett erő a helikopter tömegközéppontjában

$$F_B = G(\alpha_M, \beta_M)|F_M| + F_{T,y}j_B. \quad (2.162)$$

Az F_M és F_T erők nyomatékot is fejtenek ki a tömegközéppontra az r_M és r_T helyvektorok által definiált offset miatt. Legyen adott egy F_1, T_1 erő és nyomaték egy P_1 pontban, és keressük az ezzel ekvivalens F_2, T_2 erőt és nyomatékot egy P_2 pontban, a P_2 -ből P_1 -be mutató helyvektor pedig legyen r_{21} . Akkor felvehetünk a P_2 pontban egy $-F_1 + F_1 = 0$ erőt, ezért P_2 -ben az ekvivalens erő $F_2 = F_1$ lesz, az ekvivalens nyomaték pedig T_1 , megnövelve a P_1 -ben ható F_1 és a P_2 -ben ható $-F_1$ erőpár nyomatékával, tehát $T_2 = T_1 + r_{21} \times F_1$. Ez azt jelenti, hogy F_M és F_T a tömegközéppontban $r_M \times G(\alpha_M, \beta_M)|F_M| + r_T \times F_{T,y}j_B$ nyomatékot hoznak létre. Feltesszük még, hogy a motorok tengelyén az aerodinamikai hatások reakciónyomatékokat is fejtenek, amelyek a forgásirányok figyelembevételével legyenek $|Q_{MR}|k_B$ és $-|Q_{TR}|j_B$. A teljes nyomaték a tömegközéppontban

$$T_B = |F_M|r_M \times G(\alpha_M, \beta_M) + |F_T|r_T \times j_B + |Q_{MR}|k_B - |Q_{TR}|j_B. \quad (2.163)$$

A Newton (erő-) egyenleteket inerciarendszerben írjuk fel. Legyen K_i egy inerciarendszer, például K_E vagy a kvázi inerciarendszernek tekinthető K_{NED} . Ismerni kell az $A := A_{K_i, K_B}$ orientációs mátrix valamilyen leírását (pl. az RPY szögeken alapulót), hogy az F_B erőt felírhassuk az inerciarendszer bázisában. Az F_{ext} gravitációs hatást is magába foglaló külső erő

$$F_{ext} = AG(\alpha_M, \beta_M)|F_M| + F_{T,y}Aj_B + mg|k_i|. \quad (2.164)$$

Az Euler- (nyomaték-) egyenletet a helikopter tömegközéppontjához rögzített K_B keret bázisában írjuk fel, mert ebben a tehetetlenségi mátrix konstans. Ezért a helikopter abszolút szögsebességét is a K_B bázisában kell felírni, amire teljesül $[\omega_B \times] = A^{-1} \dot{A} \Rightarrow \dot{A} = A[\omega_B \times]$.

Jelölje p az inerciarendszer origójából a helikopter tömegközéppontjába mutató vektort, és legyen v_{abs} a tömegközéppont abszolút sebessége, továbbá fejezzük ki a p, v_{abs} vektorokat a K_i bázisában. Akkor a helikopter egy lehetséges állapot-egyenlete megadható a következő alakban:

$$\begin{aligned}\dot{p} &= v_{abs}, \\ m\dot{v}_{abs} &= F_{ext}, \\ \dot{A} &= A[\omega_B \times], \\ K\dot{\omega}_B &= -\omega_B \times (K\omega_B) + T_B,\end{aligned}\tag{2.165}$$

ahol m a helikopter teljes tömege és K a helikopter teljes tehetetlenségi mátrixa.

Megjegyzés: A harmadik egyenletben $A, \dot{A}$ mátrixok, az egyenlet egy mátrix-differenciálegyenlet, amely helyett RPY szöges orientáció jellemzésnél vehető a (2.131) vektor-differenciálegyenlet.

Írányítástechnikai szempontból célszerű külön is megvizsgálni a rotoroknak az erőkre és nyomatékokra kifejtett F_r és T_r hatását, ahol

$$F_r = |F_M| AG(\alpha_M, \beta_M) + F_{T,y} A j_B,\tag{2.166}$$

$$\begin{aligned}T_r &= |T_M| r_M \times G(\alpha_M, \beta_M) + |F_{Ty}| r_T \times j_B = \\ &= |T_M| \begin{bmatrix} 0 & -r_{Mz} & r_{My} \\ r_{Mz} & 0 & -r_{Mx} \\ -r_{My} & r_{Mx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_x(\alpha_M, \beta_M) \\ G_y(\alpha_M, \beta_M) \\ G_z(\alpha_M, \beta_M) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -r_{Tz} \\ 0 \\ r_{Tx} \end{bmatrix} |F_{Ty}| = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -r_{Mz} & -r_{Tz} \\ r_{Mz} & 0 & 0 \\ -r_{My} & r_{Mx} & r_{Tx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |T_M| G_x(\alpha_M, \beta_M) \\ |T_M| G_y(\alpha_M, \beta_M) \\ |F_{Ty}| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{My} \\ -r_{Mx} \\ 0 \end{bmatrix} |T_M| G_z(\alpha_M, \beta_M) \Rightarrow \\ T_r &= H \begin{bmatrix} |T_M| G_x(\alpha_M, \beta_M) \\ |T_M| G_y(\alpha_M, \beta_M) \\ |F_{Ty}| \end{bmatrix} + h_0 |T_M| G_z(\alpha_M, \beta_M).\end{aligned}\tag{2.167}$$

Itt a H -t tartalmazó tag tekinthető a rotációs dinamikán keresztül ható irányító hatásnak, míg a h_0 -t tartalmazó tag a translációs és rotációs dinamika közötti csatoló hatás. A H mátrix invertálható, mivel a helikopter felépítésének megfelelően $r_{Mz} \gg r_{Mx}, r_{My}$ és $r_{Tx} \gg r_{Ty}, r_{Tz}$. Kis α_M, β_M szögek esetén $G \approx (-\alpha_M, \beta_M, 1)^T$.

Világos, hogy $A = [l_B \ m_B \ n_B]$, ahol pl. l_B nem más, mint i_B felírva az i_i, j_i, k_i bázisban. Ezért l_B, m_B, n_B ortonormált bázist alkot, és alkalmas a különféle hatások szétválasztására. A rotorok által kifejtett erő felírható

$$F_r = n_B [F_M | G_z(\alpha_M, \beta_M) + [l_B \ m_B \ m_B] \begin{pmatrix} |T_M| G_x(\alpha_M, \beta_M) \\ |T_M| G_y(\alpha_M, \beta_M) \\ |F_{Ty}| \end{pmatrix} \quad (2.168)$$

alakban. Célszerű bevezetni a $w = (w_1, w_2, w_3)^T$ és az $u > 0$ névleges beavatkozó (vezérlő) jeleket, ahol w feladata a K_B keret tengelyei körüli forgások, u feladata pedig a fő rotor által létrehozandó $-n_B$ irányú felhajtóerő komponens irányítása:

$$w := H \begin{pmatrix} |T_M| G_x(\alpha_M, \beta_M) \\ |T_M| G_y(\alpha_M, \beta_M) \\ |F_{Ty}| \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -\alpha_M |T_M| \\ \beta_M |T_M| \\ |F_{Ty}| \end{pmatrix} \quad (2.169)$$

$$u := -|F_M| G_z(\alpha_M, \beta_M) = F_{Mz} \quad (2.170)$$

Vezessük be az $L = [e_1 \ e_2 \ e_2]$ jelölést, ahol $e_i \in R^3$ az i -edik standard egységvektor, akkor $AL = [l_B \ m_B \ m_B]$ és $n_B = A e_3$ miatt

$$\begin{aligned} F_r &= -uA e_3 + ALK^{-1}w, \\ T_r &= w - k_0 u. \end{aligned} \quad (2.171)$$

Mivel $n_B^T AL = e_3^T L = 0$, ezért az F_r -ben szereplő két komponens merőleges egymásra. Az első komponens a fő beavatkozó jel a translációs mozgás számára: mindig a helikopterhez rögzített koordináta-rendszer $-z_B$ tengelyének irányába mutat (amelyet az inercia rendszerben $-n_B$ fejez ki). A pozíció irányítása a helikopterhez rögzített keret újra orientálása révén érhető el. A másik komponens merőleges erre az irányra, várhatóan sokkal kisebb az elsőnél, és a nyomaték irányításával együtt járó csatoló hatás. T_r alakjából világos, hogy a nyomaték w révén teljesen irányítható, és $k_0 u$ a translációs és rotációs mozgás közötti csatoló hatásért felelős.

A beavatkozó jeleket visszaírva az állapotegyenletbe olyan alakhoz jutunk, amelyből jól láthatók az irányítás fő és a csatoló hatásai:

$$\begin{aligned}
 \dot{p} &= v_{abs}, \\
 m\dot{v}_{abs} &= -uAe_3 + mge_3 + ALK^{-1}w, \\
 \dot{A} &= A[\omega_B \times], \\
 K\dot{\omega}_B &= -\omega_B \times (K\omega_B) + |Q_{MR}|e_3 - |Q_{TR}|e_2 + w - k_0u.
 \end{aligned} \tag{2.172}$$

Megjegyzés: Ha a repülőgép vagy a helikopter egyszerű repülési módban halad (pl. konstans magasságban és konstans sebességgel stb.), akkor a nemlineáris dinamikus modellje linearizálható, és a különféle tipikus üzemmódokhoz tartozó linearizált modellek felhasználásával a zavarások és változások kompenzálására szabályozások tervezhetők a lineáris irányításelmélet módszereinek felhasználásával. Bonyolult üzemmódok esetén azonban a nemlineáris irányítások elméletét, vagy más korszerű módszert (LPV irányítás stb.) kell bevonni a tervezésbe.

3. SZTOCHASZTIKUS IRÁNYÍTÁSOK FREKVENCIATARTOMÁNYBAN

Ebben a fejezetben a diszkrétidejű SISO sztochasztikus irányítások területéről két problémával, a minimális varianciájú irányítással (MVC, minimum variance control) és a lineáris-kvadratikussal Gauss-féle irányítással (LQG, linear quadratic Gaussian control) fogunk foglalkozni frekvenciatartományban (oprátor módszerrel). Az LQG elnevezés lineáris rendszer kvadratikussal kritérium szerinti irányítására utal Gauss-féle zajt feltételezve. A téma iránt mélyebben érdeklődő olvasó számára a terület széles irodalmából kiemeljük Aström és Wittenmark [6], valamint Goodwin és Sin [7] könyvét.

Felhasználjuk könyvünk I. kötete F6. és F7. függelékeinek eredményeit, amelyben összefoglaltuk az l_2 tér feletti stabil lineáris operátorok és a sztochasztikus folyamatok tulajdonságait [1]. Speciálisan az

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t) \quad (3.1)$$

ARMAX folyamat esetén stabil $H(q) = C(q)/A(q)$ operátort és $e(t)$ diszkrétidejű fehér zajt feltételezve a zajhatás korrelációs struktúráját

$$F(z) = \frac{C(z)}{A(z)} \cdot \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (3.2)$$

definiálja, ahol a korrelációs struktúra megtartása mellett $C(z)$ helyett választható $\bar{C}(z)$, amely kielégíti a következő feltételeket:

- (1) $\bar{C}(z)$ fokszáma azonos $A(z)$ fokszámával: $\text{gr } \bar{C} = n_A$
- (2) $H(z) = \frac{\bar{C}(z)}{A(z)}$ minden p_i pólusa az egységkör belsejében és minden z_i zérusa

az egységkör belsejében vagy határán helyezkedik el: $|p_i| < 1$, $|z_i| \leq 1$.

Szintén felhasználjuk a könyv I. kötete 13. fejezetének eredményeit a kimenő jel optimális predikciójáról [1]. Legyen a zajos rendszer

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t), \quad (3.3)$$

ahol $G(q), H(q), H^{-1}(q)$ stabil szűrők,

$$H(q) = H_k(q) + q^{-k} \bar{H}_k(q) \quad (3.4a)$$

$$H_k(q) = 1 + h_1 q^{-1} + \dots + h_{k-1} q^{-(k-1)} \quad (3.4b)$$

$$\tilde{H}_k(q) = h_k + h_{k+1} q^{-1} + h_{k+2} q^{-2} + \dots \quad (3.4c)$$

és teljesülnek a következő feltételek:

- i) $H_k(q)e(t+k)$ és $\tilde{H}_k(q)H^{-1}(q)[y(t) - G(q)u(t)]$ függetlenek
- ii) $H_k(q)e(t+k)$ és $G(q)u(t+k)$ függetlenek
- iii) $E e(t) = 0, \forall t$ esetén.

Ha rendelkezésre állnak az

$$\begin{aligned} y_{-\infty}^t &= \{\dots, y(t-2), y(t-1), y(t)\} \\ u_{-\infty}^{t+k} &= \{\dots, u(t+k-2), u(t+k-1), u(t+k)\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

megfigyelések, akkor az $E[y(t+k) - \hat{y}]^2 \rightarrow \min$ kritérium szerinti k -lépéssel előretartó $\hat{y}(t+k | y_{-\infty}^t, u_{-\infty}^{t+k}) = \hat{y}(t+k | t)$ optimális becslés

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+k | t) &= G(q)u(t+k) + \tilde{H}_k(q)H^{-1}(q)[y(t) - G(q)u(t)] = \\ &= [1 - q^{-k} \tilde{H}_k(q)H^{-1}(q)]G(q)u(t+k) + \tilde{H}_k(q)H^{-1}(q)y(t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

A további tárgyalást megkönnyíti a $P(z)$ polinomhoz tartozó $P^*(z^{-1})$ ún. reciprok polinom bevezetése:

$$\begin{aligned} P(z) &= p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_{n-1} z + p_n \\ P(z^{-1}) &= p_0 z^{-n} + p_1 z^{-(n-1)} + \dots + p_{n-1} z^{-1} + p_n \\ P^*(z) &= z^{gr P} P(z^{-1}) = z^n P(z^{-1}) = p_0 + p_1 z + \dots + p_{n-1} z^{n-1} + p_n z^n \\ P^*(z^{-1}) &= z^{-gr P} P(z) = z^{-n} P(z) = p_0 + p_1 z^{-1} + \dots + p_{n-1} z^{-(n-1)} + p_n z^{-n}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

A reciprok polinom segítségével írható, hogy

$$\begin{aligned} \frac{B(z)}{A(z)} &= \frac{b_0 z^m + \dots + b_{m-1} z + b_m}{a_0 z^n + \dots + a_{n-1} z + a_n} = \frac{z^{-(n-m)} [b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}]}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \\ &= z^{-(gr A - gr B)} \cdot \frac{B^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\frac{B^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})} = z^{(gr A - gr B)} \cdot \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (3.9)$$

Speciálisan, ha

$$z^{k-1}C(z) = A(z)F(z) + G(z), \quad (3.10)$$

ahol $\text{gr } C = \text{gr } A = n$, $\text{gr } F = k - 1$, $\text{gr } G = n - 1$ és C, A, F normalizált (1 vezető együtthatójú, monik) polinomok, akkor $z^{-(n+k-1)}$ -gyel végigszorozva kapjuk, hogy

$$q^{-n}C(z) = z^{-n}A(z)z^{-(k-1)}F(z) + z^{-k}z^{-(n-1)}G(z), \quad (3.11a)$$

$$C^*(z^{-1}) = A^*(z^{-1})F^*(z^{-1}) + z^{-k}G^*(z^{-1}), \quad (3.11b)$$

$$\frac{C^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})} = F^*(z^{-1}) + \frac{z^{-k}G^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})}. \quad (3.11c)$$

3.1 Kauzális és antikauzális operátorok

Tisztázzuk előbb a stabilis és labilis operátorok kapcsolatát a kauzális és antikauzális (nemkauzális) operátorokkal. Egy operátort *kauzálisnak* fogunk nevezni, ha kimenete a bemenetnek csak az aktuális és a múltbeli értékeitől függ. Hasonlóan egy operátort *antikauzálisnak* (nemkauzálisnak) fogunk nevezni, ha kimenete a bemenetnek csak az aktuális és a jövőbeli értékeitől függ.

3.1 Lemma: Legyen $P(z)$ stabilis polinom, akkor $\frac{1}{P^*(q^{-1})}$ kauzális operátor.

Bizonyítás:

Mivel $P(z)$ stabilis polinom, ezért bármelyik $z - z_i$ faktorára teljesül $|z_i| < 1$, ahonnan következik

$$(i) \quad P^*(q) = q^n P(q^{-1}) \text{ egy faktora } q(q^{-1} - z_i) = 1 - qz_i,$$

$$(ii) \quad P^*(q^{-1}) = q^{-n} P(q) \text{ egy faktora } q^{-1}(q - z_i) = 1 - q^{-1}z_i,$$

$$(iii) \quad \frac{1}{P^*(q^{-1})} \text{ egy faktora } \frac{1}{1 - q^{-1}z_i}, \text{ ahol } \|q^{-1}z_i\| \leq |z_i| < 1 \text{ (mivel a } q^{-1} \text{ operátor normája 1), és ezért } \frac{1}{1 - q^{-1}z_i} = 1 + q^{-1}z_i + q^{-2}z_i^2 + \dots \text{ kauzális operátor, mert}$$

tetszőleges $u(t)$ bemenő jelre alkalmazva az operátort a kimenet csak $u(t), u(t-1), \dots$ értékeitől fog függeni.

$$(iv) \quad \text{Részlettörtre bontással következik, hogy } \frac{1}{P^*(q^{-1})} \text{ kauzális operátor.}$$

3.2 Lemma: Legyen a $P(z)$ polinom minden faktora labilis, akkor $\frac{1}{P(q)}$ antikauzális operátor.

Bizonyítás:

Mivel a $P(z)$ polinom minden faktora labilis, ezért bármelyik $z - z_i$ faktorára teljesül $|z_i| > 1$, ahonnan következik

- (i) $\frac{1}{P(q)}$ egy faktora $\frac{1}{q - z_i} = -z_i^{-1} \frac{1}{1 - qz_i^{-1}}$, ahol $\|qz_i^{-1}\| \leq |z_i^{-1}| < 1$ (mivel a q operátor normája 1), és ezért $\frac{1}{q - z_i} = -z_i^{-1} \{1 + qz_i^{-1} + q^2 z_i^{-2} + \dots\}$ antikauzális operátor, mert tetszőleges $u(t)$ bemenő jelre alkalmazva az operátort a kimenet csak $u(t), u(t+1), u(t+2), \dots$ értékeitől fog függeni.
- (ii) Részlettörtre bontással következik, hogy $\frac{1}{P(q)}$ antikauzális operátor.

Következmény: Legyen $B(z) = B^+(z)B^-(z)$, ahol $B^+(z)$ stabilis polinom és $B^-(z)$ minden faktora labilis (röviden labilis polinom), és legyenek $A(z), C(z)$ stabilis polinomok. Akkor az előző két lemmát $A(z), C(z), B^-(z)$ -re alkalmazva kapjuk, hogy $\frac{1}{A^*(q^{-1})}$ és $\frac{1}{C^*(q^{-1})}$ kauzális operátorok, ellenben $\frac{1}{B^-(q)}$ antikauzális operátor.

3.2 Optimális predikció ARMA modell esetén

Legyen $A(q)$ stabilis operátor, és tekintsük az

$$A(q)y(t) = C(q)e(t) \Leftrightarrow y(t) = \frac{C(q)}{A(q)}e(t) \quad (3.12)$$

ARMA modellt. A korrelációs struktúrát megtartva feltehető, hogy A, C normalizált, $gr C = gr A = n$ és $C(q)$ stabilis operátor. Ezért egyrészt (3.9) és (3.4a-c) szerint

$$H(q) = \frac{C(q)}{A(q)} = \frac{C^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} = H_k(q) + q^{-k} \tilde{H}_k(q), \quad (3.13)$$

másrészt viszont, ha tekintjük a $z^{k-1}C(z) = A(z)F(z) + G(z)$ diophantoszi polinom egyenlet megoldását, akkor (3.10) és (3.11a-c) szerint $H_k = F^*$ és $\tilde{H}_k = G^* / A^*$, ezért

$$\tilde{H}_k H^{-1} = \frac{G^*}{A^*} \cdot \frac{A^*}{C^*} = \frac{G^*}{C^*}. \quad (3.14)$$

Az optimális k -lépéssel előretartó prediktor ARMA modell esetén (3.6) szerint

$$\hat{y}(t+k|t) = \tilde{H}_k(q) H^{-1}(q) y(t) = \frac{G^*(q^{-1})}{C^*(q^{-1})} y(t) = \frac{qG(q)}{C(q)} y(t). \quad (3.15)$$

Együttható összehasonlítással (3.10) mindkét oldalán kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + f_1 \\ c_2 &= a_2 + a_1 f_1 + f_2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.16a)$$

$$\begin{aligned} c_{k-1} &= a_{k-1} + a_{k-2} f_1 + \dots + a_1 f_{k-2} + f_{k-1} \\ c_k &= a_k + a_{k-1} f_1 + \dots + a_1 f_{k-1} + g_0 \\ c_{k+1} &= a_{k+1} + a_k f_1 + \dots + a_2 f_{k-1} + g_1 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.16b)$$

$$\begin{aligned} c_n &= a_n + a_{n-1} f_1 + \dots + a_{n-k+1} f_{k-1} + g_{n-k} \\ 0 &= a_n f_1 + a_{n-1} f_2 + \dots + a_{n-k+2} f_{k-1} + g_{n-k+1} \\ &\vdots \\ 0 &= a_n f_{k-1} + g_{n-1}. \end{aligned} \quad (3.16c)$$

A (3.15) optimális k -lépéssel előretartó prediktor ARMA modell esetén a (3.16a-c) lineáris egyenletrendszer megoldásával határozható meg, a prediktorban

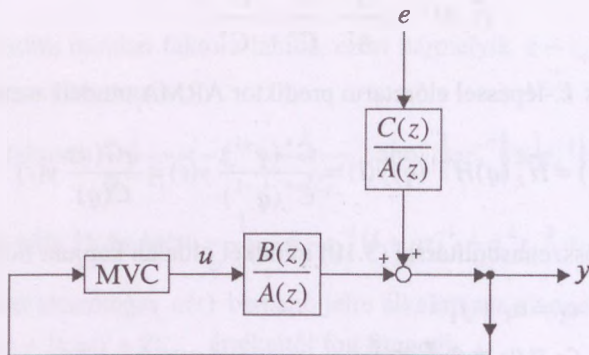
$$G(q) = g_0 q^{n-1} + g_1 q^{n-2} + \dots + g_{n-2} q + g_{n-1}. \quad (3.17)$$

3.3 Minimális varianciájú szabályozás

Tekintsük a 3.1. ábra szerinti minimális varianciájú szabályozást (MVC). Feltesz-szük, hogy $A(q)$ stabilis operátor. Külön vizsgáljuk a stabilis és labilis inverz rend-szer esetét. Az alapjel figyelembevételét később fogjuk tárgyalni.

3.3.1 MVC stabilis inverz rendszer esetén

Stabilis inverz rendszer esetén $B(q)$ stabilis operátor, azaz $B(z)$ minden gyöke az egységkör belsejébe esik. A korrelációs struktúra megtartása mellett feltehető, hogy A, C stabilis, normalizált és $grC = grA$. Ha $d = grA - grB$ a pólustöbblet, akkor



3.1. ábra. MVC szabályozás hatásvázlata

$$y(t) = \frac{B^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} u(t-d) + \frac{C^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} e(t), \quad (3.18a)$$

$$y(t+d) = \frac{B^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} u(t) + \frac{C^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} e(t+d). \quad (3.18b)$$

Oldjuk meg a

$$z^{d-1}C(z) = A(z)F(z) + G(z) \quad (3.19)$$

diophantoszi polinom egyenletet $k = d$ esetén (3.16a-c) szerint, akkor (3.11a-c) és (3.18b) felhasználásával írható, hogy

$$\frac{C^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} = F^*(q^{-1}) + \frac{q^{-d}G^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})}, \quad (3.20)$$

$$y(t+d) = F^*(q^{-1})e(t+d) + \frac{G^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})}e(t) + \frac{B^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})}u(t). \quad (3.21)$$

Az $e(t)$ zaj kifejezhető (3.18a)-ból:

$$e(t) = \frac{A^*(q^{-1})}{C^*(q^{-1})}y(t) - \frac{B^*(q^{-1})}{C^*(q^{-1})}u(t-d), \quad (3.22)$$

amelyet (3.21)-be behelyettesíthetünk:

$$y(t+d) = F^*(q^{-1})e(t+d) + \frac{G^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} \left[\frac{A^*(q^{-1})}{C^*(q^{-1})} y(t) - \frac{B^*(q^{-1})}{C^*(q^{-1})} q^{-d} u(t) \right] + \frac{B^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} u(t). \quad (3.23)$$

Másrészt viszont (3.20) szerint $q^{-d} G^* / A^* = C^* / A^* - F^*$, amelyet behelyettesítve (3.23)-ba összevonások után kapjuk, hogy

$$y(t+d) = F^*(q^{-1})e(t+d) + \frac{G^*(q^{-1})}{C^*(q^{-1})} y(t) + \frac{F^*(q^{-1})B^*(q^{-1})}{C^*(q^{-1})} u(t). \quad (3.24)$$

Mivel $C(z)$ stabilis, ezért a 3.1 lemma szerint $C^*(q^{-1})$ kauzális (stabilis) operátor.

Vegyük észre, hogy $gr F = d-1$ és (3.7) miatt a (3.24) jobb oldalán álló első tag csak a zaj jövőbeli $e(t+d), \dots, e(t+1)$ értékeitől függ, ezért nem befolyásolható. A jobb oldal második és harmadik tagja stabilis rendszer kimenete, ezért csak az aktuális és múltbeli $y(t), y(t-1), \dots$ illetve $u(t), u(t-1), \dots$ értékektől függ.

Minimális varianciájú szabályozás esetén a cél az $E y^2(t)$ variancia minimalizálása. Gyengén stacionárius jeleket feltételezve választható az ezzel megegyező $E y^2(t+d)$ variancia minimalizálása, amely (3.24) szerint három tagra bontható:

$$\begin{aligned} E y^2(t+d) &= E[F^* e(t+d)]^2 + \\ &+ 2E\{F^* e(t+d) \left[\frac{G^*}{C^*} y(t) + \frac{F^* B^*}{C^*} u(t) \right]\} + \\ &+ E\left[\frac{G^*}{C^*} y(t) + \frac{F^* B^*}{C^*} u(t) \right]^2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ha $e(t)$ nulla várható értékű fehér zaj és e, y és e, u korrelálatlanok, akkor a második tag nulla. Az első tag nem befolyásolható, és az abszolút minimum ott van, ahol

$$\frac{G^*}{C^*} y(t) + \frac{F^* B^*}{C^*} u(t) = 0 \Rightarrow u(t) = -\frac{G^*(q^{-1})}{F^*(q^{-1})B^*(q^{-1})} y(t) = -\frac{G(q)}{F(q)B(q)} y(t).$$

3.1 Tétel: Az optimális MVC irányítás *stabilis inverz rendszer* esetén

$$u(t) = -\frac{G^*(q^{-1})}{F^*(q^{-1})B^*(q^{-1})} y(t) = -\frac{G(q)}{F(q)B(q)} y(t), \quad (3.26)$$

ahol $F(q)$ és $G(q)$ a (3.19) diophantoshi polinom egyenlet megoldása.

Az optimális zárt rendszer átviteli függvénye

$$D_{ye} = \frac{\frac{C}{A}}{1 + \frac{B}{A} \cdot \frac{G}{BF}} = \frac{BCF}{B(AF + G)} = \frac{BCF}{BCq^{d-1}} = \frac{F(q)}{q^{d-1}}, \quad (3.27)$$

ahol az egyszerűsítésnél és kiejtésnél kihasználtuk a (3.19) egyenletet és B, C stabilitását. Jól látható, hogy a zárt rendszer minden pólusa $z = 0$ -ban van (dead beat optimális rendszer).

Ha bevezetjük a visszacsatolás számára a

$$-\frac{S}{R} = -\frac{G}{BF} \Rightarrow R = BF, \quad S = G \quad (3.28)$$

jelölést, akkor a zárt rendszer karakterisztikus egyenlete

$$AR + BS = ABF + BG = (AF + G)B = z^{d-1}CB =: A_m A_o B^+ \quad (3.29)$$

alakra hozható, ami szoros kapcsolatban van a könyv I. kötete 9. fejezetében megismert módszerrel, amely szerint $A_m = z^{d-1}$ a referencia modell nevezője, $A_o = C$ a megfigyelő polinom és $B = B^+$, továbbá $A_o B^+$ kiejthető [1].

3.3.2 MVC labilis inverz rendszer estén

Legyen $B(z) = B^+(z)B^-(z)$, ahol $B^-(z)$ gyökeire $|z_i| \geq 1$ teljesül. Feltesszük, hogy $A(z)$ -nek és $B^-(z)$ -nek nincs közös faktoruk (relatív prímek).

A korrelációs struktúra megtartása mellett feltehető, hogy A, C stabilis, normalizált és $grC = grA$. Legyen $B = B^+ B^-$, ahol B^+ stabilis és normalizált, B^- pedig labilis. Tekintsük ezután a

$$z^{d-1}C(z)B^{-*}(z) = A(z)F(z) + B^-(z)G(z) \quad (3.30)$$

diophantoszi polinom egyenlet megoldását, ahol $d = grA - grB$, $grF = d - 1 + grB^-$ és $grG = n - 1$. A diophantoszi egyenlet biztosan megoldható, mivel $A(z)$ és $B^-(z)$ relatív prímek, lásd a könyv I. kötetének 9. fejezetét [1]. A (3.30) egyenletben q -t helyettesítve és mindkét oldalon $q^{-(d-1+n+grB^-)}$ -szal szorozva és felhasználva a (3.7) összefüggéseket a következő alakhoz jutunk:

$$C^*(q^{-1})B^-(q^{-1}) = A^*(q^{-1})F^*(q^{-1}) + q^{-d}B^{-*}(q^{-1})G^*(q^{-1}), \quad (3.31)$$

amiből következik

$$\frac{C^* B^-}{A^* B^{-*}} = \frac{F^*}{B^{-*}} + q^{-d} \frac{G^*}{A^*}. \quad (3.32)$$

Vezessük be a

$$w(t) := \frac{B^-(q^{-1})}{B^{-*}(q^{-1})} y(t) \quad (3.33)$$

transzformált kimenő jelet. Ha $B^-(z)$ egy faktora $z - z_i$, ahol $|z_i| > 1$, akkor

$\frac{B^-(z^{-1})}{B^{-*}(z^{-1})}$ megfelelő faktora $\frac{z^{-1} - z_i}{1 - z^{-1} z_i}$ lesz, és mivel

$$\frac{z^{-1} - z_i}{1 - z^{-1} z_i} \cdot \frac{z - z_i}{1 - z z_i} = \frac{z^{-1}(1 - z z_i)(z - z_i)}{z^{-1}(z - z_i)(1 - z z_i)} = 1, \quad (3.34)$$

ezért a könyv I. kötete F7. függeléke szerint a két jel teljesítménysűrűség spektruma azonos lesz [1]:

$$\Phi_{ww} = \Phi_{yy} \Rightarrow R_{ww}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{ww}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{yy}(\omega) d\omega = R_{yy}(0), \quad (3.35)$$

$$\min E w^2(t) = \min E y^2(t). \quad (3.36)$$

Gyengén stacionárius jeleket feltételezve $E y^2(t)$ minimalizálása helyett választható a vele megegyező $E w^2(t + d)$ minimalizálása.

Másrészt viszont (3.18b) szerint írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} w(t+d) &= \frac{B^-(q^{-1})}{B^{-*}(q^{-1})} y(t+d) = \\ &= \frac{B^-(q^{-1})}{B^{-*}(q^{-1})} \frac{B^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} u(t) + \frac{B^-(q^{-1})}{B^{-*}(q^{-1})} \frac{C^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} e(t+d) = \\ &= \frac{B^-(q^{-1})}{B^{-*}(q^{-1})} \frac{B^{+*}(q^{-1}) B^{-*}(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} u(t) + \frac{B^-(q^{-1})}{B^{-*}(q^{-1})} \frac{C^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} e(t+d) \end{aligned}$$

$$w(t+d) = \frac{B^{**}(q^{-1})B^{-}(q^{-1})}{A^{*}(q^{-1})}u(t) + \frac{C^{*}(q^{-1})B^{-}(q^{-1})}{A^{*}(q^{-1})B^{-*}(q^{-1})}e(t+d),$$

ahonnan (3.32) felhasználásával következik

$$w(t+d) = \frac{F^{*}}{B^{-*}}e(t+d) + \frac{B^{**}B^{-}}{A^{*}}u(t) + \frac{G^{*}}{A^{*}}e(t). \quad (3.37)$$

Tekintsük (3.32)-ben az F^{*}/B^{-*} tagot, akkor (3.7) és a 3.2 lemma szerint

$$\begin{aligned} \frac{F^{*}(q^{-1})}{B^{-*}(q^{-1})}q^d &= (1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{grB^{-}+d-1}q^{-(grB^{-}+d-1)}) \frac{q^{grB^{-}}}{B^{-}(q)}q^d = \\ &= (q^{grB^{-}+d} + f_1q^{grB^{-}+d-1} + \dots + f_{grB^{-}+d-1}q) \frac{1}{B^{-}(q)} = \\ &= \alpha_1q + \alpha_2q^2 + \dots \end{aligned}$$

antikauzális operátor, ezért

$$\frac{F^{*}(q^{-1})}{B^{-*}(q^{-1})}e(t+d) = \frac{F^{*}(q^{-1})}{B^{-*}(q^{-1})}q^de(t) = \alpha_1e(t+1) + \alpha_2e(t+2) + \dots \quad (3.38)$$

Tehát (3.37)-ben az első tag csak a hiba jövőbeli értékeitől függ, és ezért nem befolyásolható. Ha $e(t)$ nulla várható értékű fehér zaj és e, y és e, u korrelálatlanok, akkor $Ew^2(t+d)$ minimuma ott van, ahol

$$\frac{B^{**}B^{-}}{A^{*}}u(t) + \frac{G^{*}}{A^{*}}e(t) = 0, \quad (3.39a)$$

$$u(t) = -\frac{G^{*}(q^{-1})}{B^{**}(q^{-1})B^{-}(q^{-1})}e(t). \quad (3.39b)$$

Fejezzük ki az optimális $u(t)$ értékét $y(t)$ -vel, felhasználván $w(t)$ (3.33) szerinti definícióját, az optimális $u(t)$ irányítás (3.39b) szerinti alakját, a (3.37)-ből és

(3.39a)-ból következő $w(t) = \frac{F^{*}}{B^{-*}}e(t)$ összefüggést, a polinomok (3.7) szerinti tulajdonságait és $n = grB^{+} + grB^{-} + d$ értékét:

$$y(t) = \frac{B^{-*}}{B^{-}}w(t) = \frac{B^{-*}}{B^{-}} \frac{F^{*}}{B^{-*}}e(t) = \frac{F^{*}(q^{-1})}{B^{-}(q^{-1})}e(t) \quad (3.40a)$$

$$e(t) = \frac{B^-(q^{-1})}{F^*(q^{-1})} y(t) \quad (3.40b)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{G^*(q^{-1})}{B^{++}(q^{-1})B^-(q^{-1})} \cdot \frac{B^-(q^{-1})}{F^*(q^{-1})} y(t) = \\ &= -\frac{G^*(q^{-1})}{B^{++}(q^{-1})F^*(q^{-1})} y(t) = -\frac{q^{-(n-1)}G(q)}{q^{-gr}B^+B^-(q)q^{-(d-1+gr)}F(q)} y(t) = \\ &= -\frac{G(q)}{B^+(q)F(q)} y(t). \end{aligned} \quad (3.40c)$$

3.2 Tétel: Az optimális MVC irányítás *labilis inverz rendszer* esetén

$$u(t) = -\frac{G^*(q^{-1})}{B^{++}(q^{-1})F^*(q^{-1})} y(t) = -\frac{G(q)}{B^+(q)F(q)}, \quad (3.41)$$

ahol $F(q)$ és $G(q)$ a (3.30) diophantoszi polinom egyenlet megoldása.

Az optimális zárt rendszer átviteli függvénye

$$D_{ye} = \frac{\frac{C}{A}}{1 + \frac{B}{A} \cdot \frac{G}{B^+F}} = \frac{B^+CF}{B^+(AF + B^-G)} = \frac{B^+CF}{B^+CB^{*-}(q)q^{d-1}} = \frac{F(q)}{B^{*-}(q)q^{d-1}}, \quad (3.42)$$

ahol az egyszerűsítésnél és kiejtésnél kihasználtuk a (3.30) egyenletet és B^+, C stabilitását.

Ha bevezetjük a visszacsatolás számára a

$$-\frac{S}{R} = -\frac{G}{B^+F} \Rightarrow R = B^+F, S = G \quad (3.43)$$

jelölést, akkor a zárt rendszer karakterisztikus egyenlete

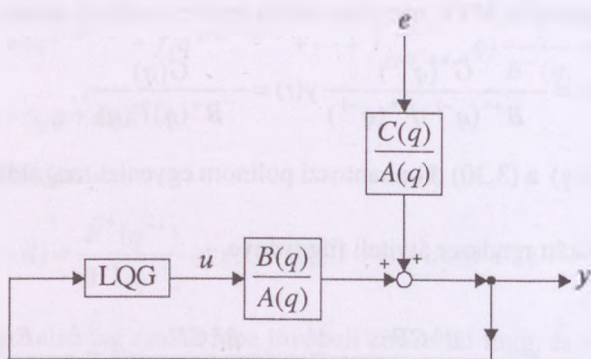
$$\begin{aligned} AR + BS &= AB^+F + BG = (AF + B^-G)B^+ = z^{d-1}C(z)B^{*-}(z)B^+(z) \\ &= z^{d-1}B^{*-}(z)C(z)B^+(z) = A_m A_o B^+ \end{aligned} \quad (3.44)$$

alakra hozható, ami szoros kapcsolatban van a könyv I. kötete 9. fejezetében megismert módszerrel, amely szerint $A_m = z^{d-1}B^{*-}(z)$ a referencia modell nevezője, $A_o = C$ a megfigyelő polinom és $B = B^+B^-$, továbbá $A_o B^+$ kiejthető [1].

A zárt rendszer pólusai (a zárt rendszer karakterisztikus egyenletének gyökei) a $C(z)$ megfigyelő zérusaiból, a szakasz stabilis $B^+(z)$ zérusaiból és a labilis zérusok egységkör belsejébe reflektált és ezáltal stabilissá tett értékeiből állnak, ahol $B^-(z)$ a végesből reflektált és z^{d-1} a végtelenből reflektált labilis zérusoknak felelnek meg. Mint az (3.40c)-ből látható, a szabályozóban van egy $z=0$ -ban lévő pólus/zérus kiejtés is.

3.4 Lineáris-kvadratikus Gauss-féle irányítás

Tekintsük a 3.2. ábra szerinti lineáris-kvadratikus Gauss-féle irányítást (LQG, linear quadratic Gaussian control).



3.2. ábra. LQG szabályozás hatásvázlata

Az LQG elnevezés arra utal, hogy

$$u(t) = -\frac{S(q)}{R(q)} y(t) \quad (L)$$

$$E[y^2(t) + \rho u^2(t)] \rightarrow \min \quad (Q)$$

$$\{e(t)\} \text{ független fehér zaj.} \quad (G)$$

Az elnevezés kissé félrevezető, mert a független fehér zajnak nem kell Gauss-típusúnak lennie, az eredmények annál általánosabb érvényűek.

A továbbiakban felhasználjuk a könyv I. kötete F7. függelékéből a korrelációs függvényre és a spektrálsűrűségre megismert tulajdonságokat [1], és ezekből további

összefüggéseket vezetünk le, amelyeket az LQG optimális irányítás levezetésénél fogunk felhasználni.

Legyen $y_1(t) = H_1(q)v_1(t)$ és $y_2(t) = H_2(q)v_2(t)$, ahol $H_1(q)$ és $H_2(q)$ kauzális operátorok, azaz $H_1(q) = h_{10} + h_{11}q^{-1} + \dots$ és $H_2(q) = h_{20} + h_{21}q^{-1} + \dots$. Akkor a korrelációs függvény és a spektrálsűrűség rendre

$$\begin{aligned} R_{y_1 y_2}(\tau) &= E\left[\sum_{n=0}^{\infty} h_{1n} v_1(t + \tau - n) \sum_{m=0}^{\infty} h_{2m} v_2(t - m)\right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h_{1n} h_{2m} R_{v_1 v_2}(\tau + m - n), \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{y_1 y_2}(j\omega) &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{y_1 y_2}(\tau) e^{-j\omega\tau} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_{1n} e^{-j\omega n} \sum_{m=0}^{\infty} h_{2m} e^{+j\omega m} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{v_1 v_2}(\tau + m - n) e^{-j\omega(\tau + m - n)} = \\ &= H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{-j\omega}) \Phi_{v_1 v_2}(j\omega). \end{aligned} \quad (3.46)$$

i) Ha $v_1(t) = v_2(t) = v(t) = V(q)e(t)$, ahol $V(q)$ kauzális operátor és $e(t)$ független fehér zaj, amelynek szórása σ , akkor

$$\begin{aligned} \Phi_{y_1 y_2}(j\omega) &= V(e^{j\omega}) V(e^{-j\omega}) \Phi_{ee}(j\omega) = V(e^{j\omega}) V(e^{-j\omega}) \sigma^2, \\ \Phi_{y_1 y_2}(j\omega) &= H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{-j\omega}) V(e^{j\omega}) V(e^{-j\omega}) \sigma^2. \end{aligned}$$

ii) Ha $v_1(t) = V(q)e(t)$ és $v_2(t) = e(t)$, ahol $V(q)$ kauzális operátor és $e(t)$ független fehér zaj, amelynek szórása σ , akkor

$$\begin{aligned} \Phi_{y_1 y_2}(j\omega) &= V(e^{j\omega}) \Phi_{ee}(j\omega) = V(e^{j\omega}) \sigma^2, \\ \Phi_{y_1 y_2}(j\omega) &= H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{-j\omega}) V(e^{j\omega}) \sigma^2. \end{aligned}$$

Ezeknek az összefüggéseknek a felhasználásával írható, hogy

$$\begin{aligned} E[y_1(t) y_2(t)] &= R_{y_1 y_2}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{y_1 y_2}(j\omega) d\omega \\ z = e^{j\omega} &\Rightarrow dz = e^{j\omega} j d\omega \Rightarrow d\omega = \frac{1}{j} \frac{dz}{z} \end{aligned}$$

$$E[y_1(t)y_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \Phi_{y_1 y_2}(\ln z) \frac{dz}{z},$$

ahonnan a következő eredményeket kapjuk:

i) Ha $y_1(t) = H_1(q)v(t)$ és $y_2(t) = H_2(q)v(t)$, továbbá $v(t) = V(q)e(t)$, akkor

$$E[y_1(t)y_2(t)] = \frac{\sigma^2}{2\pi j} \oint_C H_1(z) H_2(z^{-1}) V(z) V(z^{-1}) \frac{dz}{z}. \quad (3.47)$$

ii) Ha $y_1(t) = H_1(q)v(t)$ és $y_2(t) = H_2(q)e(t)$, továbbá $v(t) = V(q)e(t)$, akkor

$$E[y_1(t)y_2(t)] = \frac{\sigma^2}{2\pi j} \oint_C H_1(z) H_2(z^{-1}) V(z) \frac{dz}{z}. \quad (3.48)$$

Az LQG irányítás meghatározásakor központi szerepet kap a spektrális faktorizációs tétel, ezért először ennek különféle eseteit fogjuk megvizsgálni. Az ötlet onnan származik, hogy a zárt rendszer karakterisztikus egyenletét a szokásos $AR + BS = PC$ alakban felírva az LQG feladat leegyszerűsödik, és (3.47-48) felhasználásával a spektrális faktorizációs feladatra vezet, amelynek megoldására ezért módszert kell kidolgozni. A vizsgálatok során tekintettel kell lenni arra, hogy

$$y(t) = \frac{B_1(q)}{A_1(q)} u(t) + \frac{C_1(q)}{A_2(q)} e(t) \Rightarrow A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t)$$

$$A = A_1 A_2, \quad B = B_1 A_2, \quad C = C_1 A_1,$$

és ezért a standard ARMAX alakban a polinomok közös faktorokat is tartalmazhatnak.

3.4.1 Spektrális faktorizáció

3.3. Lemma: Legyen $A(z)$ és $B(z)$ relatív prím, $d := \text{gr } A - \text{gr } B$, akkor

(i) $\exists P(z)$ egyértelműen meghatározott polinom, $\text{gr } P = \text{gr } A = n$, hogy $P(z)$ minden zérus helye az egységkör belsejében vagy határán van és teljesül

$$rP(z)P(z^{-1}) = \rho A(z)A(z^{-1}) + B(z)B(z^{-1}), \quad (3.49)$$

(ii) ha $\rho > 0$, akkor $P(z)$ minden zérus helye az egységkör belsejében van (nem esik zérus hely az egységkör határára).

Bizonyítás:

Szorozzuk meg (3.49) mindkét oldalát z^n -nel, és jelöljük az így keletkező polinomot $\varphi(z)$ -vel, akkor (3.7) felhasználásával írható, hogy

$$\begin{aligned}\varphi(z) &:= [\rho A(z)A(z^{-1}) + B(z)B(z^{-1})]z^n = \rho A(z)A^*(z) + z^d B(z)B^*(z) \\ \varphi^*(z) &= z^{2n} \varphi(z^{-1}) = z^{2n} [\rho A(z^{-1})A^*(z^{-1}) + z^{-d} B(z^{-1})B^*(z^{-1})] = \\ &= \rho z^n A(z^{-1})z^n z^{-n} A(z) + z^d z^{n-d} B(z^{-1})z^{n-d} z^{-(n-d)} B(z) = \\ &= \rho A^*(z)A(z) + z^d B^*(z)B(z) = \varphi(z),\end{aligned}$$

ezért $\varphi(z) = \varphi^*(z)$ önreciprok tulajdonságú. Tekintsük a polinomok egymásnak megfelelő faktorait, akkor

$$\begin{aligned}\varphi(z) &\Rightarrow z - z_i \\ \varphi^*(z) &\Rightarrow z(z^{-1} - z_i) = -z_i(z - z_i^{-1}),\end{aligned}$$

vagyis a két polinom gyökei egymásnak az egységkörre vett tükörképei. Ezért

$$rP(z)P^*(z) = \rho A(z)A^*(z) + z^d B(z)B^*(z) = \varphi(z)$$

miatt $P(z)$ -nek a $z - z_i$ faktorai megválaszthatók úgy, hogy $|z_i| \leq 1$ teljesüljön. (Meghatározzuk a $\varphi(z)$ polinomot, annak $2n$ gyökét és azokból szelektálunk n darabot az egységkör belsejéből és határáról. Mivel $A(z)$ és $B(z)$ együtthatói valósak, ezért a $\varphi(z)$ gyökei a valós tengelyre szimmetrikusan helyezkednek el, és $P(z)$ is valós együtthatójú lesz). Ha $\rho > 0$ és $z = e^{j\omega}$ gyök lenne az egységkörön, akkor

$$\begin{aligned}\rho A(e^{j\omega})A(e^{-j\omega}) + B(e^{j\omega})B(e^{-j\omega}) &= \rho |A(e^{j\omega})|^2 + |B(e^{j\omega})|^2 = 0 \Rightarrow \\ |A(e^{j\omega})| &= |B(e^{j\omega})| = 0\end{aligned}$$

következne, ami ellentmondana annak, hogy $A(z), B(z)$ relatív prímek.

A továbbiakban többször is felhasználjuk a könyv I. kötete 9. fejezetének eredményeit az $AX + BY = C$ diophantoszi polinomegyenlet megoldásáról, ha a legnagyobb közös osztó, $\text{LNKO} = (A, B)$, osztója C -nek, ami mindig teljesül, ha $(A, B) = 1$. A diophantoszi polinomegyenlet lineáris egyenletrendszerre vezet, amelynek alakját ugyancsak megadtuk. Szintén tudjuk, hogy ha X_0, Y_0 egy megoldás, akkor minden megoldás előáll $X = X_0 + QB$ és $Y = Y_0 - QA$ alakban [1].

3.4 Lemma: Legyen $A(z)$ és $B(z)$ relatív prím, $d := \text{gr } A - \text{gr } B > 0$, $A(0) \neq 0$, $A(z), P(z), C(z)$ normalizált, $\text{gr } A = \text{gr } C = \text{gr } P = n$, akkor $\exists R(z), S(z)$ úgy, hogy $\text{gr } R = \text{gr } S = n$, $S(0) = 0$, $R(z)$ normalizált és teljesül az

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = P(z)C(z) \quad (3.50)$$

diophantoszi polinomegyenlet.

Bizonyítás:

1. eset: $\text{gr } S = \text{gr } R - 1 = n - 1$. Ebben az esetben $P(z)C(z)$ együtthatóinak száma $2n$, $R(z)$ és $S(z)$ együtthatóinak száma szintén összesen $2n$, és mivel $(A, B) = 1$, ezért $R(z)$ és $S(z)$ együtthatói egy lineáris egyenletrendszerből meghatározhatók [1].
2. eset: $\text{gr } S = \text{gr } R = n$. Az 1. eset szerint választható $S_0(z)$, $R_0(z)$ megoldás, amelyre teljesül $\text{gr } S_0 = n - 1$, ezért

$$R(z) = R_0(z) + Q(z)B(z) \quad (3.51a)$$

$$S(z) = S_0(z) - Q(z)A(z)$$

$$S(0) = 0 \Rightarrow Q(z) = \frac{S_0(0)}{A(0)} \text{ konstans polinom} \quad (3.51b)$$

$$\text{gr } S = \text{gr } A = n. \quad (3.51c)$$

Következmény: Helyettesítsünk a (3.50) egyenletbe z^{-1} -et és szorozzunk mindkét oldalon z^{2n} -nel, akkor

$$A^*(z)R^*(z) + z^d B^*(z)S^*(z) = P^*(z)C^*(z). \quad (3.52)$$

3.5 Lemma: Legyen $A(z)$, $B(z)$ tetszőleges polinom, $d := \text{gr } A - \text{gr } B > 0$, $A(0) \neq 0$, $A(z), P(z), C(z), R(z)$ normalizált, $\text{gr } A = \text{gr } C = \text{gr } P = \text{gr } R = \text{gr } S = n$, $S(0) = 0$,

$$rP(z)P^*(z) = \rho A(z)A^*(z) + z^d B(z)B^*(z) \quad (3.53a)$$

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = P(z)C(z). \quad (3.53b)$$

Akkor $\exists X(z)$ polinom, $\text{gr } X < n$, hogy teljesül:

$$A^*(z)X(z) + rP(z)S^*(z) = B(z)C^*(z) \quad (3.54a)$$

$$P^*(z)X(z) + \rho A(z)S^*(z) = R^*(z)B(z), \quad (3.54b)$$

vagy ami ezzel ekvivalens:

$$A(z^{-1})X(z) + rP(z)S(z^{-1}) = B(z)C(z^{-1}) \quad (3.55a)$$

$$P(z^{-1})X(z) + \rho A(z)S(z^{-1}) = R(z^{-1})B(z). \quad (3.55b)$$

Bizonyítás:

Tekintsük a következő kifejezést és végezzünk rajta átalakításokat (3.53a-b) felhasználásával:

$$\begin{aligned} A^*(z)[R^*(z)B(z) - \rho A(z)S^*(z)] &= \\ &= A^*R^*B - S^*(rPP^* - z^d BB^*) = \\ &= B(A^*R^* + z^d B^*S^*) - rS^*PP^* = \\ &= BP^*C^* - rS^*PP^* = \\ &= P^*(BC^* - rS^*P), \end{aligned} \quad (3.56)$$

és vizsgáljuk meg a következő eseteket:

1. eset: Ha $LNKO = (A, B) = 1$, akkor a spektrális faktorizáció alakja miatt következik $LNKO = (P, A) = 1$ is, ezért (3.56) első és utolsó összefüggése szerint

$$A^* \text{ osztója } BC^* - rS^*P \text{-nek,}$$

$$P^* \text{ osztója } R^*B - \rho AS^* \text{-nak.}$$

Ezért $\exists X(z)$ polinom, amely kielégíti a következő feltételeket:

$$BC^* - rS^*P = A^*X,$$

$$R^*B - \rho AS^* = P^*X,$$

és mivel $S(0) = 0$, ezért $P(z)S(z^{-1})$ legmagasabb hatványa z -ben legfeljebb $n-1$, ezért teljesül $gr X < n$ is.

2. eset: Ha $GCD = (A, B) = A_2$, akkor a spektrális felbontás szerint A_2 osztója P -nek is, tehát $A = A_1A_2$, $B = B_1A_2$, $P = P_1A_2$, és ezért (3.56) szerint

$$A^*(R^*B_1A_2 - \rho A_1A_2S^*) = P^*(B_1A_2C^* - rS^*P_1A_2),$$

és A_2 -vel egyszerűsítve az előzőhöz hasonló megfontolásokkal következik, hogy $\exists \tilde{X}$ polinom, $gr \tilde{X} < n - gr A_2$, hogy

$$B_1 C^* - r S^* P_1 = A^* \bar{X}$$

$$R^* B_1 - \rho A_1 S^* = P^* \bar{X}.$$

De akkor választható $X = \bar{X} A_2$, és teljesül $gr X < n$ is.

Következmény: (3.54a-b)-vel ekvivalens

$$A^*(z)X(z) + rP(z)S^*(z) = B(z)C^*(z) \quad (3.57a)$$

$$z^d B^*(z)X(z) - rP(z)R^*(z) = -\rho A(z)C^*(z). \quad (3.57b)$$

Bizonyítás:

Szorozzuk meg a (3.54a) egyenletet $\rho A(z)$ -vel, vegyük figyelembe a (3.53a) spektrális faktorizációt, szorozzuk meg a (3.54b) egyenletet $rP(z)$ -vel, és vonjuk ki a második egyenletből az elsőt, akkor

$$\rho A A^* X + \rho r A P S^* = \rho A B C^* \Rightarrow [r P P^* - z^d B B^*] X + \rho r A P S^* = \rho A B C^*,$$

$$r P P^* X + r \rho P A S^* = r P R^* B,$$

$$z^d B B^* X = r P R^* B - \rho A B C^*.$$

Innen B -vel osztva és átrendezés után következik

$$z^d B^* X - r P R^* = -\rho A C^*,$$

ami azonos (3.57b)-vel.

3.4.2 Algoritmusok az optimális LQG irányítás meghatározására

3.3 Tétel (optimális LQG irányítás stabilis $A_2(z)$ esetén): Legyen $gr A = gr C = n$, $C(z)$ stabilis, $LNKO = (A(z), B(z), C(z)) = 1$, $LNKO = (A(z), B(z)) = A_2(z)$ stabilis, $d = gr A - gr B > 0$ és $\rho > 0$. Akkor az

$$u(t) = -\frac{S^*(q^{-1})}{R^*(q^{-1})} y(t) = -\frac{S(q)}{R(q)} y(t) \quad (L)$$

$$E[y^2(t) + \rho u^2(t)] \rightarrow \min \quad (Q)$$

$$\{e(t)\} \text{ független fehér zaj.} \quad (G)$$

LQG optimális szabályozó kielégíti a következő feltételeket:

$$rP(z)P(z^{-1}) = \rho A(z)A(z^{-1}) + B(z)B(z^{-1}), \quad (3.58)$$

$$A^*(z)X(z) + rP(z)S^*(z) = B(z)C^*(z), \quad (3.59a)$$

$$P^*(z)X(z) + \rho A(z)S^*(z) = R^*(z)B(z), \quad (3.59b)$$

ahol $P(z)$ minden zérus helye az egységkör belsejében van, $P(z)$ normalizált, $gr P = n$, $gr X < n$, $gr R = gr S = n$ és $S(0) = 0$, és a minimum értéke

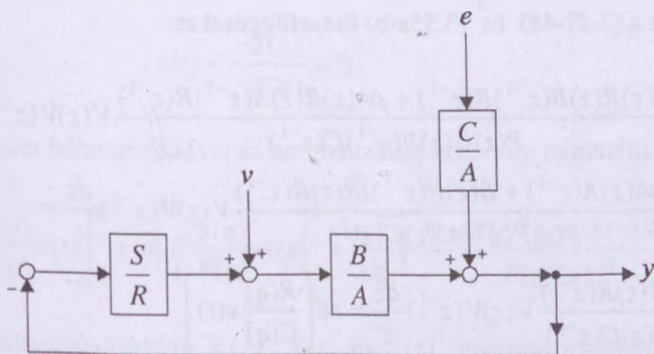
$$\min = \frac{\sigma^2}{2\pi j} \oint \frac{R(z)R(z^{-1}) + \rho S(z)S(z^{-1})}{P(z)P(z^{-1})} \frac{dz}{z}.$$

Bizonyítás:

Keressük a megoldást a 3.3. ábra szerinti

$$u(t) = v(t) - \frac{S(q)}{R(q)} y(t)$$

alakban, ahol $v(t)$ szabadon megválasztható. Elegendő belátni, hogy $v(t) \equiv 0$ és a minimum értéke a fenti.



3.3. ábra. LQG szabályozás, keresendő az optimális $v(t)$

Tekintsük $y(t)$ és $u(t)$ kifejezését a 3.3. ábra alapján.

$$y = \frac{\frac{B}{A}}{1 + \frac{B}{A} \frac{S}{R}} v + \frac{\frac{C}{A}}{1 + \frac{B}{A} \frac{S}{R}} e = \frac{BR}{AR + BS} v + \frac{CR}{AR + BS} e = \frac{BR}{PC} v + \frac{R}{P} e,$$

$$u = \frac{1}{1 + \frac{B}{A} \frac{S}{R}} v - \frac{\frac{C}{A} \frac{S}{R}}{1 + \frac{B}{A} \frac{S}{R}} e = \frac{AR}{AR + BS} v - \frac{CS}{AR + BS} e = \frac{AR}{PC} v - \frac{S}{P} e.$$

A hibakritérium felbontható 3 tagra:

$$J = E[y^2(t) + \rho u^2(t)] = E\left[\frac{BR}{PC} v + \frac{R}{P} e\right]^2 + \rho E\left[\frac{AR}{PC} v - \frac{S}{P} e\right]^2,$$

$$J_1 = E\left[\left(\frac{BR}{PC} v\right)^2 + \rho\left(\frac{AR}{PC} v\right)^2\right],$$

$$J_2 = E\left[\left(\frac{BR}{PC} v\right)\left(\frac{R}{P} e\right) - \rho\left(\frac{AR}{PC} v\right)\left(\frac{S}{P} e\right)\right],$$

$$J_3 = E\left[\left(\frac{R}{P} e\right)^2 + \rho\left(\frac{S}{P} e\right)^2\right],$$

$$J = J_1 + 2J_2 + J_3.$$

Alkalmazzuk a (3.47-48) és (3.55a-b) összefüggéseket:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\sigma^2}{2\pi j} \oint_C \frac{B(z)R(z)B(z^{-1})R(z^{-1}) + \rho A(z)R(z)A(z^{-1})R(z^{-1})}{P(z)C(z)P(z^{-1})C(z^{-1})} V(z)V(z^{-1}) \frac{dz}{z} = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi j} \oint_C \frac{[\rho A(z)A(z^{-1}) + B(z)B(z^{-1})]R(z)R(z^{-1})}{P(z)P(z^{-1})C(z)C(z^{-1})} V(z)V(z^{-1}) \frac{dz}{z} = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi j} \oint_C \frac{rR(z)R(z^{-1})}{C(z)C(z^{-1})} V(z)V(z^{-1}) \frac{dz}{z} = rE\left[\frac{R(q)}{C(q)} v(t)\right]^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{\sigma^2}{2\pi j} \oint_C \frac{B(z)R(z)R(z^{-1}) - \rho A(z)R(z)S(z^{-1})}{P(z)C(z)P(z^{-1})} V(z) \frac{dz}{z} = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi j} \oint_C \frac{[B(z)R(z^{-1}) - \rho A(z)S(z^{-1})]R(z)}{P(z)C(z)P(z^{-1})} V(z) \frac{dz}{z} = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi j} \oint_C \frac{P(z^{-1})X(z)R(z)}{P(z)C(z)P(z^{-1})} V(z) \frac{dz}{z} = E\left[\frac{R(q)X(q)}{P(q)C(q)} v(t)e(t)\right]. \end{aligned}$$

Mivel $gr(RX) < 2n$, $gr(PC) = 2n$ és $P(z)$, $C(z)$ stabilis, ezért a 3.1 lemma szerint

$$\frac{R(q)X(q)}{P(q)C(q)} = q^{-(n-gr X)} \frac{R^*(q^{-1})X^*(q^{-1})}{P^*(q^{-1})C^*(q^{-1})}$$

kauzális operátor, és ezért

$$\frac{R(q)X(q)}{P(q)C(q)} v(t) = \alpha_1 v(t-1) + \alpha_2 v(t-2) + \dots$$

független $e(t)$ -től, és mivel $Ee(t) = 0$, ezért $J_2 = 0$.

Összefoglalva tehát

$$J = rE \left[\frac{R(q)}{C(q)} v(t) \right]^2 + E \left[\frac{R(q)}{P(q)} e(t) \right]^2 + \rho \left[E \frac{S(q)}{P(q)} e(t) \right]^2,$$

aminek abszolút minimuma van $v(t) \equiv 0$ esetén, ezért az optimális irányítás

$$u(t) = -\frac{S(q)}{R(q)} y(t).$$

A (3.47) egyenlet felhasználásával az optimalizálási kritérium minimális értéke

$$\min J = E \left[\frac{R(q)}{P(q)} e(t) \right]^2 + \rho \left[E \frac{S(q)}{P(q)} e(t) \right]^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi j} \oint \frac{R(z)R(z^{-1}) + \rho S(z)S(z^{-1})}{P(z)P(z^{-1})} \frac{dz}{z}.$$

Megjegyzés: Általános esetben $X(z)$, $R(z)$ és $S(z)$ meghatározásához a (3.59a-b) egyenleteket szimultán kell megoldani. Helyettük választható (3.57a-b) is.

Algoritmus az optimális LOG irányítás meghatározására:

1. A folyamat és a zaj modell standard $A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t)$ alakra hozatala, ahol a korrelációs struktúra megtartása mellett $C(z)$ stabilis polinom és $gr A = gr C = n$.
2. Spektrális faktorizáció $P(z)$ meghatározásához. Ha $LNKO(A, B) = A_2(z)$ stabilis, akkor legyen $A = A_1 A_2$, $B = B_1 A_2$, $P = P_1 A_2$, és meghatározandó $P_1(z)$

az $rP_1(z)P_1(z^{-1}) = \rho A_1(z)A_1(z^{-1}) + B_1(z)B_1(z^{-1})$ spektrális faktorizációjával, majd $P(z) := P_1(z)A_2(z)$. A (3.50) egyenlet alakja ilyenkor $A_1(z)R(z) + B_1(z)S(z) = P_1(z)C(z)$ lesz, ahol $gr R = gr S = n$ és $S(0) = 0$.

3. Ha speciálisan $A(z)$ és $B(z)$ relatív prím és $A(0) \neq 0$, akkor $R(z)$ és $S(z)$ a (3.50) egyenlet egyértelmű megoldása: $A(z)R(z) + B(z)S(z) = P(z)C(z)$, $gr R = gr S = n$ és $S(0) = 0$.
4. Ha $LNKO(A, B) = A_2(z)$ stabilis vagy $A(0) = 0$, akkor $X(z)$, $R(z)$, $S(z)$ meghatározásához a csatolt (3.59a-b) egyenleteket kell megoldani. Helyettük választható (3.57a-b) is.

3.4 Tétel (optimális LQG irányítás labilis $A_2(z)$ esetén): Legyen $gr A = gr C = n$, $C(z)$ stabilis, $LNKO = (A, B, C) = 1$, $LNKO = (A, B) = A_2(z) = A_2^+(z)A_2^-(z)$, ahol $A_2^-(z)$ labilis, $A = A_1A_2$, $B = B_1A_2$, $\tilde{B} = B_1A_2^+$, $gr A_2^- = m$, $w(t) := q^{-m}A_2^-(q)u(t)$ és $\rho > 0$. Akkor az

$$u(t) = -\frac{S^*(q^{-1})}{R^*(q^{-1})}y(t) = -\frac{S(q)}{R(q)}y(t) \quad (L)$$

$$E[y^2(t) + \rho w^2(t)] \rightarrow \min \quad (Q)$$

$$\{e(t)\} \text{ független fehér zaj} \quad (G)$$

LQG optimális szabályozó kielégíti a következő feltételeket:

$$rP_1(z)P_1(z^{-1}) = \rho A_1(z)A_2^-(z)A_1(z^{-1})A_2^-(z^{-1}) + B_1(z)B_1(z^{-1}), \quad (3.60a)$$

$$gr P_1 = gr A_1 + gr A_2^-, \quad (3.60b)$$

$$A_1(z)A_2^-(z)\tilde{R}(z) + z^m B_1(z)\tilde{S}(z) = P_1(z)C(z), \quad (3.61a)$$

$$gr \tilde{R} = gr \tilde{S} = n, \quad \tilde{S}(0) = 0, \quad (3.61b)$$

$$R(z) = A_2^-(z)\tilde{R}(z), \quad S(z) = z^m \tilde{S}(z). \quad (3.62)$$

Bizonyítás: Megjegyezzük, hogy

$$y(t) = \frac{\frac{C}{A}}{1 + \frac{B}{A} \frac{S}{R}} e(t) = \frac{CR}{AR + BS} e(t),$$

$$u(t) = -\frac{\frac{C}{A} \frac{S}{R}}{1 + \frac{B}{A} \frac{S}{R}} e(t) = -\frac{CS}{AR + BS} e(t),$$

ezért ha $y(t)$ korlátos, akkor $A_2^-(z)$ osztója $R(z)$ -nek, ha pedig $u(t)$ korlátos, akkor $A_2^-(z)$ osztója $S(z)$ -nek. Ha $\text{LNKO}(S, R) = 1$, akkor $y(t)$ és $u(t)$ nem lehetnek egyszerre korlátosak. Mivel $w(t) := q^{-m} A_2^-(q) u(t) = q^{-gr A_2^-} A_2^-(q) u(t)$, ezért

$$\begin{aligned} A(q)y(t) &= B(q)u(t) + C(q)e(t) = \\ &= q^m B_1(q) A_2^+(q) q^{-m} A_2^-(q) u(t) + C(q)e(t) = \\ &= q^m \tilde{B}(q) w(t) + C(q)e(t), \end{aligned}$$

és $w(t)$ bemenet esetén megoldva a spektrális faktorizációs és szabályozó tervezési feladatokat kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} r\tilde{P}(z)\tilde{P}(z^{-1}) &= \rho A(z)A(z^{-1}) + z^m \tilde{B}(z)z^{-m} \tilde{B}(z^{-1}), \\ A(z)\tilde{R}(z) + z^m \tilde{B}(z)\tilde{S}(z) &= \tilde{P}(z)C(z), \quad gr \tilde{R} = gr \tilde{S} = n, \quad \tilde{S}(0) = 0. \end{aligned}$$

Mivel $A_2^+(z)$ osztója $A(z), B(z)$ -nek, ezért $\tilde{P}(z)$ -nek is, és így

$$\tilde{P}(z) = P_1(z)A_2^+(z),$$

$$\begin{aligned} rP_1(z)A_2^+(z)P_1(z^{-1})A_2^+(z^{-1}) &= \rho A_1(z)A_2^+(z)A_2^-(z)A_1(z^{-1})A_2^+(z^{-1})A_2^-(z^{-1}) + \\ &+ B_1(z)A_2^+(z)B_1(z^{-1})A_2^+(z^{-1}) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$rP_1(z)P_1(z^{-1}) = \rho A_1(z)A_2^-(z)A_1(z^{-1})A_2^-(z^{-1}) + B_1(z)B_1(z^{-1}),$$

$$P_1(z) \text{ normalizált, } gr P_1 = gr A_1 + gr A_2^-.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$A(z)\tilde{R}(z) + z^m \tilde{B}(z)\tilde{S}(z) = \tilde{P}(z)C(z), \quad gr \tilde{R} = gr \tilde{S} = n, \quad \tilde{S}(0) = 0 \Rightarrow$$

$$A_1(z)A_2^+(z)A_2^-(z)\tilde{R}(z) + z^m B_1(z)A_2^+(z)\tilde{S}(z) = P_1(z)A_2^+(z)C(z) \Rightarrow$$

$$A_1(z)A_2^-(z)\tilde{R}(z) + z^m B_1(z)\tilde{S}(z) = P_1(z)C(z), \quad gr \tilde{R} = gr \tilde{S} = n, \quad \tilde{S}(0) = 0.$$

Ezért

$$w(t) = -\frac{\tilde{S}(q)}{\tilde{R}(q)} y(t) \Rightarrow q^{-m} A_2^-(q) u(t) = -\frac{\tilde{S}(q)}{\tilde{R}(q)} y(t) \Rightarrow$$

$$u(t) = -\frac{q^m \tilde{S}(q)}{A_2^-(q) \tilde{R}(q)} y(t) = -\frac{S(q)}{R(q)} y(t)$$

$$S(q) = q^m \tilde{S}(q), \quad R(q) = A_2^-(q) \tilde{R}(q)$$

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_2^-(z)P_1(z)C(z)$$

$A_2^-(z)$ osztója $R(z)$ -nek.

Megjegyzés: Integrátor kényszeríthető a szabályozóba, ha formálisan

$$y(t) = \frac{B_1(q)}{A_1(q)} u(t) + \frac{C_1(q)}{q-1} e(t)$$

modellt választunk, mert ekkor

$$A(q) = (q-1)A_1(q), \quad B(q) = (q-1)B_1(q), \quad C(q) = A_1(q)C_1(q),$$

$$A_2^-(q) = q-1, \quad \text{gr } A_2^- = 1,$$

$$S(q) = q\tilde{S}(q), \quad R(q) = (q-1)\tilde{R}(q).$$

Az optimalizálási kritérium azonban ekkor módosul:

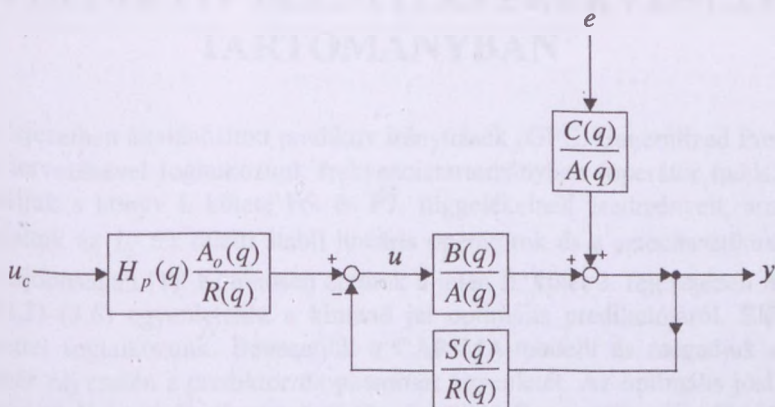
$$J = E[y^2(t) + \rho(\Delta u(t))^2] \rightarrow \min.$$

3.5 Az alapjel figyelembevétele

Az eddigi vizsgálatoknál nulla referencia jelet (alapjelet) feltételeztünk. A referencia jelet előreccsatolással vehetjük figyelembe a szabályozóban:

$$R(q)u(t) = A_0(q)H_p(q)r(t) - S(q)y(t), \quad (3.63)$$

ahol $A_0(q)$ a "megfigyelő polinom", $H_p(q)$ stabilisra választott előreccsatolás, amellyel tovább befolyásolhatjuk az $r(t)$ hatására követendő jel alakját, és optimális esetben $A_0(q) = C(q)$, lásd 3.4. ábra.



3.4. ábra. Az alapjel követés biztosítása előreccatolással és megfigyelővel

A kimenő jel ekkor

$$y(t) = \frac{\frac{B}{A} \frac{A_0}{R} H_p}{1 + \frac{B}{A} \frac{S}{R}} r(t) + \frac{\frac{C}{A}}{1 + \frac{B}{A} \frac{S}{R}} e(t) = \frac{BA_0 H_p}{AR + BS} r(t) + \frac{CR}{AR + BS} e(t)$$

$$AR + BS = PA_0 = PC$$

$$y(t) = \frac{B(q)}{P(q)} H_p(q) r(t) + \frac{R(q)}{P(q)} e(t). \quad (3.64)$$

Mivel $P(q)$ stabilis, ezért $P(q)$ akár ki is ejthető $H_p(q)$ -val. Ezért megtervezhető előbb a $-S(q)/R(q)$ kompenzátor a zavarás számára, majd megválasztható a $H_p(q)$ előreccatolás, eleget téve a $B(1)H_p(1)/P(1)=1$ feltételnek. Például választható egyszerűen

$$H_p(q) := t_0, \text{ ahol } t_0 = \frac{P(1)}{B(1)}, \quad (3.65)$$

$$\frac{A_0(q)}{R(q)} H_p(q) = \frac{C(q)}{R(q)} \frac{P(1)}{B(1)}. \quad (3.66)$$

4. PREDIKTÍV IRÁNYÍTÁS FREKVENCIA-TARTOMÁNYBAN

Ebben a fejezetben általánosított prediktív irányítások (GPC, Generalized Predictive Control) tervezésével foglalkozunk frekvenciatartományban (operátor módszerrel). Felhasználjuk a könyv I. kötete F6. és F7. függelékeinek eredményeit, amelyben összefoglaltuk az l_2 tér feletti stabil lineáris operátorok és a sztochasztikus folyamatok tulajdonságait [1]. Különösen építünk a jelen II. kötet 3. fejezetében már felidézett (3.3)–(3.6) egyenletekre a kimenő jel optimális predikciójáról. Először a SISO esettel foglalkozunk. Bevezetjük a CARIMA-modellt és megadjuk erre az esetre fehér zaj esetén a prediktor diophantoszi egyenletét. Az optimális jóslást felbontjuk múltbeli és jövőbeli adatoktól függő részre. Bevezetjük a predikciós horizont fogalmát és megfogalmazzuk az optimalizálási feladatot. Megadjuk az optimalizálási feladat megoldását felnyitott körben, és olyan irányítást választunk, amely az így kapott soronkövetkező beavatkozást kiadja zárt körben integráló szabályozás formájában. Ökölszabályokat fogalmazunk meg a feladat paramétereinek megválasztására. A számításokat felbontjuk előre elvégezhető és csak valós időben elvégezhető részekre, és erre alapozva megadjuk az általánosított prediktív irányítás algoritmusát. Megvizsgáljuk a színes zaj esetét és a stabilitás kérdését. Részletesen vizsgáljuk a MIMO prediktív irányítást és a korlátozások figyelembevételét az optimalizálás során, és bemutatjuk a kapcsolatot a kvadratikus programozással. A prediktív irányítások széles irodalmából kiemeljük Clarke, Mohtadi és Tuffs cikkeit [8], [9], valamint Camacho és Bordons [10] és Goodwin és Sin [7] könyvét.

4.1 Optimális predikció CARIMA modell esetén

Tudjuk, hogy ha a zajos rendszer $y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t)$, akkor a k -lépéssel előretartó $\hat{y}(t+k | y^t, u^{t+k}) = \hat{y}(t+k | t)$ optimális prediktor

$$\hat{y}(t+k | t) = [1 - q^{-k} \bar{H}_k(q) H^{-1}(q)] G(q) u(t+k) + \bar{H}_k(q) H^{-1}(q) y(t). \quad (4.1)$$

Speciálisan, ha a szakasz ún. CARIMA (Controlled Auto-Regressive Integrating Moving-Average) modellel írható le, azaz

$$A(q)y(t) = B(q)u(t-1) + \frac{1}{1-q^{-1}}e(t), \quad (4.2a)$$

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)} q^{-1} u(t) + \frac{1}{A(q)(1-q^{-1})} e(t), \quad (4.2b)$$

ahol

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a}, \quad (4.3a)$$

$$B(q) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b}, \quad (4.3b)$$

akkor a $\Delta(q) := 1 - q^{-1}$ és $H(q) = \frac{1}{A(q)\Delta(q)}$ jelöléssel írható, hogy

$$H = H_k + q^{-k} \tilde{H}_k = \frac{1}{A\Delta}, \quad (4.4)$$

$$1 = A\Delta H_k + q^{-k} A\Delta \tilde{H}_k \Leftrightarrow 1 = \tilde{A}H_k + q^{-k} F_k. \quad (4.5)$$

Itt (4.5) egy diophantoszi polinom egyenlet, ahol H_k és F_k a keresett polinomok, $gr H_k = k - 1$, $gr F_k = n_a$, továbbá

$$\tilde{H}_k = \frac{1 - A\Delta H_k}{A\Delta} q^k. \quad (4.6)$$

$$\tilde{H}_k H^{-1} = \frac{1 - A\Delta H_k}{A\Delta} q^k A\Delta = (1 - A\Delta H_k) q^k = F_k, \quad (4.7)$$

$$(1 - q^{-k} \tilde{H}_k H^{-1}) G(q) = [1 - q^{-k} (1 - A\Delta H_k) q^k] \frac{B}{A} q^{-1} = B H_k \Delta q^{-1}. \quad (4.8)$$

Ezért az optimális k -lépéssel előretartó prediktor CARIMA modell esetén

$$\hat{y}(t+k) = B H_k \Delta u(t+k-1) + F_k y(t). \quad (4.9)$$

Vizsgáljuk meg a (4.9)-ben szereplő $B H_k$ kifejezést:

$$V_k(q) := B(q) H_k(q) = B \frac{1 - q^{-k} F_k}{A\Delta} = \frac{B}{A} \cdot \frac{1}{\Delta} - q^{-k} \frac{B F_k}{A\Delta}. \quad (4.10)$$

Mivel $1/\Delta$ az egységugrás bemenetnek felel meg és $G = q^{-1} B/A$, ezért az első tag a jobb oldalon a $G(q)$ átviteli függvényű rendszer $v(t)$ átmeneti függvényének egy-egy eltolts mintáiból áll, amelyhez a k -adik mintától kezdve további tagok adódnak hozzá:

$$V_k = v_0 + v_1 q^{-1} + v_{k-1} q^{-(k-1)} + q^{-k} [v_{kk} + v_{k,k+1} q^{-1} + \dots + v_{k,n_b+k-1} q^{-(n_b+k-1)}] \quad (4.11a)$$

$$V_k = B H_k = v_0 + v_1 q^{-1} + v_{k-1} q^{-(k-1)} + q^{-k} \tilde{V}_k, \quad (4.11b)$$

Mivel

$$\begin{aligned} y(t+k) &= G(q)u(t+k) + H(q)e(t+k) = \\ &= G(q)u(t+k) + H_k(q)e(t+k) + q^{-k}\tilde{H}_k(q)e(t+k) = \\ &= G(q)u(t+k) + \tilde{H}_k(q)H^{-1}(q)[y(t) - G(q)u(t)] + H_k(q)e(t+k), \end{aligned}$$

ezért

$$y(t+k) = \hat{y}(t+k) + H_k(q)e(t+k), \quad (4.12a)$$

$$y(t+k) = F_k(q)y(t) + V_k(q)\Delta u(t+k-1) + H_k(q)e(t+k). \quad (4.12b)$$

A kimenet optimális k -lépéssel előretartó $\hat{y}(t+k)$ jóslása felbontható a múltbeli adatok hatására, amely

$$(y_{-\infty}^t, u_{-\infty}^{t-1}) \rightarrow f(t+k), \quad (4.13)$$

és a jövőbeli u_t^{t+k} adatok hatására.

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} V_k \Delta u(t+k-1) &= [v_0 + v_1 q^{-1} + \dots + v_{k-1} q^{-(k-1)}](1 - q^{-1})u(t+k-1) + \\ &+ [v_{kk} + v_{k,k+1} q^{-1} + \dots + v_{k,n_b+k-1} q^{-(n_b+k-1)}](1 - q^{-1})u(t-1) \end{aligned} \quad (4.14)$$

miatt

$$\begin{aligned} f(t+k) &= F_k y(t) + [V_k - (v_0 + v_1 q^{-1} + \dots + v_{k-1} q^{-(k-1)})] \Delta u(t+k-1) = \\ &= \hat{y}(t+k) - (v_0 + v_1 q^{-1} + \dots + v_{k-1} q^{-(k-1)}) \Delta u(t+k-1), \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\hat{y}(t+k) = v_{k-1} \Delta u(t) + v_{k-2} \Delta u(t+1) + \dots + v_0 \Delta u(t+k-1) + f(t+k). \quad (4.16)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\hat{y} := (\hat{y}(t+1), \hat{y}(t+2), \dots, \hat{y}(t+N))^T \text{ jóslt kimenetek,} \quad (4.17a)$$

$$\tilde{u} := (\Delta u(t), \Delta u(t+1), \dots, \Delta u(t+N-1))^T \text{ jövőbeli tervezendő bemenetek,} \quad (4.17b)$$

$$f := (f(t+1), f(t+2), \dots, f(t+N))^T \text{ múltbeli adatok hatása,} \quad (4.17c)$$

$$r := (r(t+1), r(t+2), \dots, r(t+N))^T \text{ jövőbeli referencia jel értékek,} \quad (4.17d)$$

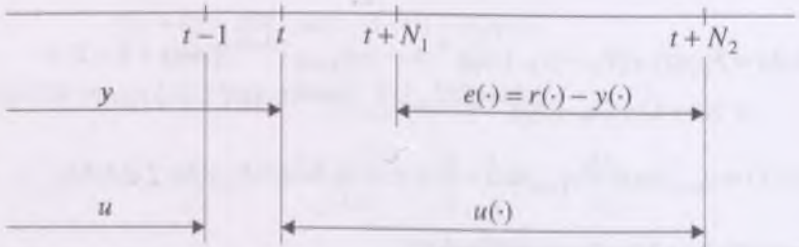
$$V := \begin{bmatrix} v_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ v_1 & v_0 & 0 & \cdots & 0 \\ v_2 & v_1 & v_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{N-1} & v_{N-2} & \cdots & v_1 & v_0 \end{bmatrix}, \quad (4.17e)$$

akkor

$$\hat{y} = V\tilde{u} + f. \quad (4.18)$$

4.2 Optimális prediktív irányítás CARIMA modell esetén

Tekintsük a szabályozási rendszer jeleit az időtengely mentén. Tegyük fel, hogy a bemenő jel $u(t-1)$ -gyel bezárólag, a kimenő jel $y(t)$ -vel bezárólag és a referencia jel $r(t+N_2)$ -vel bezárólag adott. Keressük a bemenő jel optimális értékeit $t, \dots, t+N_2-1$ között, miközben minimalizálni akarunk egy kritériumot, amely bünteti a hiba négyzetének várható értékét $t+N_1, \dots, t+N_2$ között, valamint a bemenőjel nagy változásait $t, \dots, t+N_2-1$ között. A hiba $N_1, \dots, N_2$ tartományra korlátozását az indokolja, hogy a rendszer holtidős lehet, és a kezdeti hiba értékeket a bemenet ilyenkor még nem tudja befolyásolni. A predikciós horizontot a 4.1. ábra illusztrálja.



4.1. ábra. A predikciós horizont

Az optimalizálási kritérium:

$$J(N_1, N_2) = E \left\{ \sum_{k=N_1}^{N_2} [r(t+k) - y(t+k)]^2 + \sum_{k=1}^{N_2} \lambda(k) [\Delta u(t+k-1)]^2 \right\} \rightarrow \min. \quad (4.19)$$

Átmenetileg feltesszük, hogy $N_1 = 1$, $N_2 = N$, továbbá $\lambda(k) = \lambda$ konstans. Mivel (4.12a) szerint

$$[r(t+k) - y(t+k)]^2 = [r(t+k) - \hat{y}(t+k)]^2 + 2[r(t+k) - \hat{y}(t+k)]H_k e(t+k) + [H_k e(t+k)]^2, \quad (4.20)$$

ezért az optimális prediktor levezetésekor felhasznált feltételek teljesülésekor

$$\arg \min J(1, N) = \arg \min \sum_{k=1}^N \{ [r(t+k) - \hat{y}(t+k)]^2 + \lambda [\Delta u(t+k-1)]^2 \}. \quad (4.21)$$

Felhasználva a (4.18) összefüggést, a következő optimalizálási feladathoz jutunk:

$$\min_{\tilde{u}} J(1, N) = \min_{\tilde{u}} \{ \langle r - V\tilde{u} - f, r - V\tilde{u} - f \rangle + \lambda \langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle \}. \quad (4.22)$$

Mivel $J(1, N)$ konvex függvény, ezért az optimum szükséges és elégséges feltétele $\frac{dJ}{d\tilde{u}} = 0$. Egyszerű átalakítással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \langle r - V\tilde{u} - f, r - V\tilde{u} - f \rangle &= \\ &= \langle r, r \rangle + \langle V\tilde{u}, V\tilde{u} \rangle + \langle f, f \rangle - 2\langle r, V\tilde{u} \rangle - 2\langle r, f \rangle + 2\langle V\tilde{u}, f \rangle \\ &= \langle r, r \rangle + \langle V^T V \tilde{u}, \tilde{u} \rangle + \langle f, f \rangle - 2\langle V^T r, \tilde{u} \rangle - 2\langle r, f \rangle + 2\langle V^T f, \tilde{u} \rangle, \end{aligned}$$

$$\frac{dJ}{d\tilde{u}} = 2V^T V \tilde{u} - 2V^T r + 2V^T f + 2\lambda \tilde{u} = 0,$$

$$\tilde{u} = (V^T V + \lambda I)^{-1} V^T (r - f). \quad (4.23)$$

Legyen

$$v^T := (V^T V + \lambda I)^{-1} V^T \text{ mátrix első sora,} \quad (4.24)$$

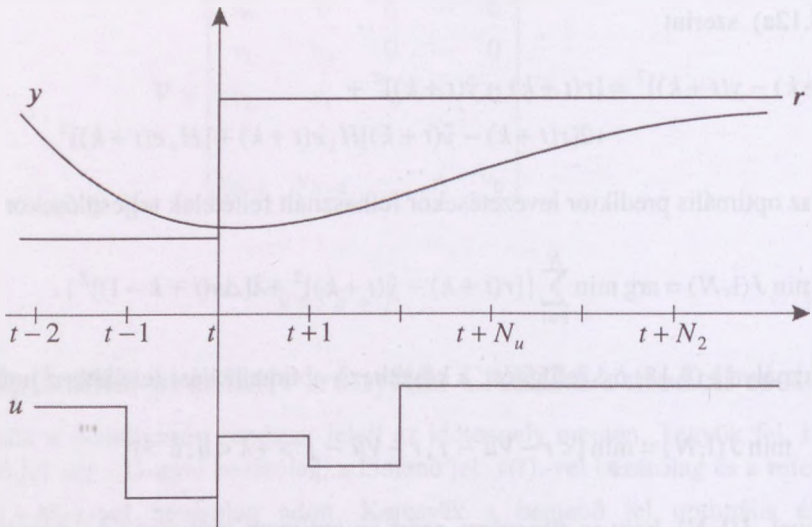
$$\tilde{u}(t) = \Delta u(t) = u(t) - u(t-1) := \tilde{u} \text{ vektor első komponense,} \quad (4.25)$$

akkor az optimális prediktív irányítás zárt körben

$$u(t) := u(t-1) + v^T (r - f), \quad (4.26)$$

és a szabályozó integrátort is tartalmaz.

Foglalkozzunk ezután az irányítási és predikciós horizont megválasztásával.



4.2. ábra. A szabályozó kimenetének stabilizálódása N_u lépés után

Követő szabályozásoknál tipikus eset, hogy alapjel váltás után a szabályozó kimenete N_u lépés után nullává válik, lásd 4.2. ábra:

$$\Delta u(t+k-1) = 0, \text{ ha } k > N_u. \quad (4.27)$$

Ekkor az $\bar{u}$ vektor $N_u, N_u+1, \dots$ indexű komponensei mind nullák, ezért a V mátrix helyett vehető annak első N_u oszlopa, és ez határozza meg az optimális megoldást:

$$V_{N_u} := V \text{ mátrix első } N_u \text{ oszlopa,} \quad (4.28a)$$

$$\bar{u} := (V_{N_u}^T V_{N_u} + \lambda I)^{-1} V_{N_u}^T (r - f). \quad (4.28b)$$

A predikciós és irányítási horizont paramétereinek megválasztására a következő *ököl szabályok* szokásosak a gyakorlatban:

N_1 : d_0 , ha a $T_h = d_0 T$ holtidő ismert, különben 1

N_2 : ha a szakasz felfutási ideje $t_{rise} = N_2 T$

N_u : 1, ha a szakasz stabilis, különben a labilis, ill. gyengén csillapított pólusszám.

4.3 A számítások felbontása CARIMA modell esetén

A prediktív irányítási algoritmus megvalósításához célszerű a számításokat felbontani előre elvégezhető (jelfüggetlen) és valós időben elvégzendő (jelfüggő) számításokra.

4.3.1 Jelfüggetlen számítások

Az előre elvégezhető számítások körébe H_k , F_k , V_{N_u} , F és $\tilde{V}$ meghatározása tartozik. Jelölés: $N := N_2$.

1. $k = 1, 2, \dots, N \Rightarrow H_k, F_k$ meghatározása az $1 = \tilde{A}H_k + q^{-k}F_k$ diophantoszi polinom egyenlet alapján, lásd (4.5). Ha $\tilde{A} = A\Delta = 1 + \tilde{a}_1q^{-1} + \dots + \tilde{a}_{n_a+1}q^{-(n_a+1)}$, akkor vehető az $(1 \ \tilde{a}_1 \ \dots \ \tilde{a}_{n_a+1} \ 0 \ \dots \ 0)^T \in R^{n_a+1+k}$ oszlopvektor és az $(1 \ 0 \ \dots \ 0) \in R^k$ sorvektor által definiált $\tilde{\mathbf{A}}_k$ Toeplitz-mátrix, amelynek első k sorából álló blokkját jelölje $\tilde{\mathbf{A}}_{k1}$, az alatta lévő sorokból álló blokkját pedig $\tilde{\mathbf{A}}_{k2}$. Ha

$$\begin{aligned} H_k &= 1 + h_{k,1}q^{-1} + \dots + h_{k,k-1}q^{-(k-1)}, \quad \mathbf{h}_k = (h_{k,0} \ h_{k,1} \ \dots \ h_{k,k-1})^T, \\ F_k &= f_{k,0} + f_{k,1}q^{-1} + \dots + f_{k,n_a}q^{-n_a}, \quad \mathbf{f}_k = (f_{k,0} \ f_{k,1} \ \dots \ f_{k,n_a})^T, \\ \mathbf{e}_1 &= (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T \in R^k \text{ és } \tilde{a}_0 = h_{k,0} = 1, \end{aligned}$$

akkor

$$\mathbf{h}_k = \tilde{\mathbf{A}}_{k1}^{-1} \mathbf{e}_1 \text{ vagy másként } h_{k,j} = - \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{a}_{j-i} h_{k,i} \quad (4.29)$$

$$\mathbf{f}_k = -\tilde{\mathbf{A}}_{k2} \mathbf{h}_k. \quad (4.30)$$

2. $k = 1, 2, \dots, N \Rightarrow V_k = BH_k$ meghatározása, és az így kapott szorzat polinom utolsó n_b együtthatójából a $\tilde{V}_k = (v_{k,k} \ v_{k,k+1} \ \dots \ v_{k,n_b+k-1}) \in R^{n_b}$ sorvektor képzése, lásd (4.11a-b).

3. A $qG(q) = \frac{B(q)}{A(q)}$ rendszer $v_0, v_1, \dots, v_{N-1}$ átmeneti függvény mintáinak meghatározása és ezekből V_{N_s} felépítése, lásd (4.17e) és (4.28a).

4. Az F és $\tilde{V}$ mátrixok felépítése f_k és $\tilde{V}_k$ komponenseiből, $k = 1, \dots, N$:

$$F = \begin{bmatrix} f_{10} & f_{11} & \cdots & f_{1,n_a} \\ f_{20} & f_{21} & \cdots & f_{2,n_a} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{N0} & f_{N1} & \cdots & f_{N,n_a} \end{bmatrix}, \text{ mérete } N \times n_a, \quad (4.31)$$

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1,n_b} \\ v_{22} & v_{23} & \cdots & v_{2,n_b+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{NN} & v_{N,N+1} & \cdots & v_{N,n_b+N-1} \end{bmatrix}, \text{ mérete } N \times n_b. \quad (4.32)$$

Az F és $\tilde{V}$ mátrixokat a múltbeli adatok $f(t+k)$ hatásának meghatározásakor fogjuk felhasználni, lásd (4.15).

5. A V_{N_1} , F és $\tilde{V}$ mátrixok első $N_1 - 1$ sorának elhagyása. (Feltesszük, hogy a holtidős rendszer esetén N_1 úgy lett megválasztva, hogy $qG(q) = B(q)/A(q)$ átmeneti függvényére teljesül $v_0 = v_1 = \dots = v_{N_1-2} = 0$, $v_{N_1-1} \neq 0$. Például holtidő nélküli esetben $N_1 = 1$ és $v_0 \neq 0$).

6. $v^T := (V_{N_1}^T V_{N_1} + \lambda I)^{-1} V_{N_1}^T$ első sora.

4.3.2 Jelfüggő számítások

A jelfüggő számításokat valós időben kell elvégezni. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$y_{t-n_a}^t = (y(t), y(t-1), \dots, y(t-n_a))^T, \quad (4.33a)$$

$$\tilde{u}_{t-n_b}^{t-1} = (\Delta u(t-1), \Delta u(t-2), \dots, \Delta u(t-n_b))^T. \quad (4.33b)$$

A jelfüggő számításokat a következő sorrendben célszerű elvégezni:

$$r = (r(t+1), r(t+2), \dots, r(t+N))^T \text{ jövőbeli referencia jel értékek}, \quad (4.34a)$$

$$f = F y_{t-n_d}^t + \tilde{V} \tilde{u}_{t-n_d}^{t-1} \text{ múltbeli adatok hatása a jósolt kimenetre,} \quad (4.34b)$$

$$u(t) = u(t-1) + v^T (r - f) \text{ soronkövetkező beavatkozás zárt körben.} \quad (4.34c)$$

4.4 Prediktív irányítás színes zaj esetén

Színes zaj esetén a szakasz modellje

$$A(q)y(t) = B(q)u(t-1) + \frac{C(q)}{1-q^{-1}}e(t), \quad (4.35a)$$

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)}q^{-1}u(t) + \frac{C(q)}{A(q)(1-q^{-1})}e(t). \quad (4.35b)$$

Ekkor

$$H(q) = \frac{C(q)}{A(q)\Delta(q)} = H_k(q) + q^{-k}\tilde{H}_k(q),$$

$$C(q) = A(q)\Delta(q)H_k(q) + q^{-k}A(q)\Delta(q)\tilde{H}_k(q),$$

$$C(q) = A(q)\Delta(q)H_k(q) + q^{-k}F_k(q), \text{ gr } H_k = k-1, \text{ gr } F_k = n_d, \quad (4.36)$$

ahol H_k és F_k a (4.36) diophantoszi polinom egyenlet megoldása. Az optimális prediktort a következő lépésekben határozhatjuk meg:

$$\tilde{H}_k = q^k \frac{C - A\Delta H_k}{A\Delta},$$

$$\tilde{H}_k H^{-1} = q^k \frac{C - A\Delta H_k}{A\Delta} \cdot \frac{A\Delta}{C} = q^k (C - A\Delta H_k) / C = \frac{F_k}{C},$$

$$1 - q^{-k}\tilde{H}_k H^{-1} = 1 - q^{-k} \frac{F_k}{C} = \frac{C - q^{-k}F_k}{C} = \frac{A\Delta H_k}{C},$$

$$(1 - q^{-k}\tilde{H}_k H^{-1})G(q) = \frac{A\Delta H_k}{C} \cdot \frac{B}{A} q^{-1} = \frac{BH_k}{C} \Delta q^{-1},$$

$$\hat{y}(t+k) = \frac{BH_k}{C} \Delta u(t+k-1) + \frac{F_k}{C} y(t), \quad (4.37a)$$

$$C\hat{y}(t+k) = BH_k \Delta u(t+k-1) + F_k y(t). \quad (4.37b)$$

Legyen

$$M_k(q) = 1 + m_1 q^{-1} + \dots + m_{k-1} q^{-(k-1)},$$

$$N_k(q) = n_{k,k} + n_{k,k+1} q^{-1} + \dots + n_{k,k+n_c-1} q^{-(n_c-1)},$$

és tekintsük a következő diophantoszi polinom egyenlet megoldását:

$$1 = C(q)M_k(q) + q^{-k}N_k(q), \quad \text{gr } M_k = k-1, \quad \text{gr } N_k = n_c-1. \quad (4.38)$$

Szorozzunk (4.37b) mindkét oldalán M_k -val, akkor (4.38) felhasználásával

$$CM_k \hat{y}(t+k) = (1 - q^{-k}N_k) \hat{y}(t+k) = M_k BH_k \Delta u(t+k-1) + M_k F_k y(t),$$

ahonnan $\hat{y}(t|t) = y(t)$ felhasználásával következik, hogy a kimenet jóslott értéke színes zaj esetén:

$$\hat{y}(t+k) = M_k BH_k \Delta u(t+k-1) + (M_k F_k + N_k) y(t). \quad (4.39a)$$

Bontsuk fel $M_k(q)B(q)H_k(q)$ -t az $M_k(q)B(q)H_k(q) = G_k(q) + q^{-k}G_{k,p}(q)$ alakban, akkor megmutatható, hogy teljesül $G_k = v_0 + v_1 q^{-1} + \dots + v_{k-1} q^{-(k-1)}$, és az optimális predikció

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+k) &= G_k \Delta u(t+k-1) + G_{k,p} \Delta u(t-1) + (M_k F_k + N_k) y(t) = \\ &= G_k \Delta u(t+k-1) + f(t+k). \end{aligned} \quad (4.39b)$$

Vegyük észre, hogy a kimenet (4.39a-b) szerinti jóslásához színes zaj esetén minden k esetén két diophantoszi polinom egyenletet kell megoldani, (4.36)-ot és (4.38)-at.

Egy másik lehetőség következik az eredeti (4.35a) egyenletből, ha azt $C(q)$ -val elosztjuk és bevezetjük az $y_f(t)$, $u_f(t)$ szűrt jeleket:

$$A(q) \frac{1}{C(q)} y(t) = B(q) \frac{1}{C(q)} u(t-1) + \frac{1}{1-q^{-1}} e(t),$$

$$y_f(t) = \frac{1}{C(q)} y(t), \quad u_f(t) = \frac{1}{C(q)} u(t), \quad (4.40)$$

$$A(q) y_f(t) = B(q) u_f(t-1) + \frac{1}{1-q^{-1}} e(t) \quad (4.41)$$

A szűrt jelekkel alkalmazható a fehér zajra korábban már kifejlesztett prediktív irányítási algoritmus is.

4.5 Prediktív irányítás stabilitása

A prediktív irányítást

$$R(q)\Delta u(t) = T(q)r(t) - S(q)y(t) \quad (4.42)$$

alakra fogjuk hozni, és ennek alapján határozzuk meg a zárt rendszer karakterisztikus egyenletét és átviteli függvényeit. Mivel a zaj $C(q)$ színesítő szűrőjét nehéz jól identifikálni, ezért a szakaszt

$$A(q)y(t) = B(q)u(t-1) + \frac{T(q)}{\Delta(q)}e(t) \quad (4.43)$$

alakúnak fogjuk feltételezni, ahol $C(q)$ helyett egy alkalmas $T(q)$ "megfigyelő polinomot" választunk. Ekkor (4.36) helyett

$$T(q) = A(q)\Delta(q)H_k(q) + q^{-k}F_k(q), \quad \text{gr } H_k = k-1, \quad \text{gr } F_k = n_a, \quad (4.44)$$

és (4.37a) helyett

$$\hat{y}(t+k) = \frac{BH_k}{T} \Delta u(t+k-1) + \frac{F_k}{T} y(t) \quad (4.45)$$

szerepel.

Oldjunk meg (4.38) helyett egy másik

$$B(q)H_k(q) = T(q)\tilde{M}_k(q) + q^{-k}\tilde{N}_k(q), \quad \text{gr } \tilde{M}_k = k-1, \quad \text{gr } \tilde{N}_k = n_b-1 \quad (4.46)$$

diophantoszi polinom egyenletet, akkor az optimális predikció a következő alakra hozható:

$$\hat{y}(t+k) = \tilde{M}_k \Delta u(t+k-1) + \frac{\tilde{N}_k}{T} \Delta u(t-1) + \frac{F_k}{T} y(t). \quad (4.47)$$

Bevezetve az

$$y_f(t) = \frac{1}{T} y(t) \quad \text{és} \quad u_f(t) = \frac{1}{T} u(t) \quad (4.48)$$

szűrt jeleket, az optimális predikció

$$\hat{y}(t+k) = \tilde{M}_k \Delta u(t+k-1) + \tilde{N}_k \Delta u_f(t-1) + F_k y_f(t), \quad (4.49)$$

a rendszer válasza pedig a múltbeli adatokra

$$f(t+k) = \tilde{N}_k \Delta u_f(t-1) + F_k y_f(t) = \frac{\tilde{N}_k}{T} \Delta u(t-1) + \frac{F_k}{T} y(t) \quad (4.50)$$

lesz. Másrészt viszont a $v^T := (v_{N_1}^T, \dots, v_{N_2}^T)$ jelöléssel ($v_k^T \in R^1$ skalár) írható, hogy

$$\begin{aligned} \Delta u(t) &= v^T (r - f) = \sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T [r(t+k) - f(t+k)] = \\ &= \sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T r(t+k) - \sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T \frac{\tilde{N}_k}{T} \Delta u(t-1) - \sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T \frac{F_k}{T} y(t), \end{aligned} \quad (4.51)$$

ahonnan $r(t+k) = r(t)$, $k=1, \dots, N_2$ feltételezésével következik

$$[T + q^{-1} \sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T \tilde{N}_k] \Delta u(t) = T \sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T r(t+k) - \sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T F_k y(t), \quad (4.52)$$

$$\frac{T + q^{-1} \sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T \tilde{N}_k}{\sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T} \Delta u(t) = T r(t) - \frac{\sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T F_k}{\sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T} y(t), \quad (4.53)$$

$$R = \frac{T + q^{-1} \sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T \tilde{N}_k}{\sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T} \quad \text{és} \quad S = \frac{\sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T F_k}{\sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T}. \quad (4.54)$$

A zárt rendszer a szakasz és a szabályozó egyenletéből határozható meg:

$$A \Delta y(t) = B q^{-1} \Delta u(t) + T e(t), \quad (4.55)$$

$$\Delta u(t) = \frac{T}{R} r(t) - \frac{S}{R} y(t), \quad (4.56)$$

$$A \Delta y(t) = B q^{-1} \left[\frac{T}{R} r(t) - \frac{S}{R} y(t) \right] + T e(t), \quad (4.57)$$

$$y(t) = \frac{B T q^{-1}}{R A \Delta + B S q^{-1}} r(t) + \frac{T R}{R A \Delta + B S q^{-1}} e(t). \quad (4.58)$$

A zárt rendszer karakterisztikus egyenlete

$$\begin{aligned}
 RA\Delta + BSq^{-1} &= \frac{1}{\sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T} (T\tilde{A} + \tilde{A}q^{-1} \sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T \tilde{N}_k + Bq^{-1} \sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T F_k) = \\
 &= \frac{1}{\sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T} [T\tilde{A} + \tilde{A}q^{-1} \sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T q^k (BH_k - T\tilde{M}_k) + Bq^{-1} \sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T q^k (T - \tilde{A}H_k)] = \\
 &= \frac{1}{\sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T} [T\tilde{A} + T \sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T q^{k-1} (B - \tilde{A}\tilde{M}_k)] = TP_c,
 \end{aligned}$$

ahol

$$P_c(q) := \frac{\tilde{A}(q) + \sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T q^{k-1} [B(q) - \tilde{A}(q)\tilde{M}_k(q)]}{\sum_{k=N_1}^{N_2} v_k^T} \quad (4.59)$$

dönti el a zárt rendszer stabilitását.

Vegyük észre, hogy $P_c(z)$ gyökei az N_u irányítási horizonttól (v^T -n keresztül), az N_1, N_2 predikciós horizonttól és a bemenő jel változását súlyozó λ -tól függenek, ezért a stabilitást ezek nagymértékben befolyásolhatják.

Ki kell hangsúlyozni, hogy abból, hogy a *felnyitott körben* optimális irányítás soronkövetkező értékét a zárt rendszerben kiadjuk, nem következik a *zárt rendszer* stabilitása. A stabilitáshoz N_u, N_1, N_2, λ értékét jól kell megválasztani. A gyakorlatban erre ökölszabályokat javasolnak, amire már láttunk példát.

Az eredő zárt rendszer

$$y(t) = \frac{Bq^{-1}}{P_c} r(t) + \frac{R}{P_c} e(t) \quad (4.60)$$

lesz, mivel a $T(q)$ "megfigyelő polinommal" egyszerűsíteni lehet. A zárt rendszer stabilitását $P_c(z)$ gyökei döntenek el.

4.6 MIMO prediktív irányítás

Ha $y, e \in R^m$ és $u \in R^r$, akkor az $A(q), B(q), C(q)$ operátorok alakja

$$A(q) = I_{m \times m} + A_1 q^{-1} + \dots + A_{n_a} q^{-n_a}, \text{ ahol } A_i \text{ } m \times m \text{ méretű mátrix,}$$

$$B(q) = B_0 + B_1 q^{-1} + \dots + B_{n_b} q^{-n_b}, \text{ ahol } B_i \text{ } m \times r \text{ méretű mátrix,}$$

$$C(q) = I_{m \times m} + C_1 q^{-1} + \dots + C_{n_c} q^{-n_c}, \text{ ahol } C_i \text{ } m \times m \text{ méretű mátrix,}$$

és a szakasz modellje

$$A(q)y(t) = B(q)u(t-1) + \frac{C(q)}{\Delta(q)}e(t), \quad (4.61a)$$

vagy más alakban

$$y(t) = A^{-1}(q)B(q)q^{-1}u(t) + \frac{A^{-1}(q)C(q)}{\Delta(q)}e(t) =: G(q)u(t) + H(q)e(t). \quad (4.61b)$$

A $H(q)$ operátort a szakasos alakban partícionáljuk:

$$H = \frac{A^{-1}C}{\Delta} = H_k + q^{-k} \bar{H}_k \quad (4.62a)$$

$$C = A\Delta H_k + q^{-k} A\Delta \bar{H}_k =: A\Delta H_k + q^{-k} F_k \quad (4.62b)$$

$$H_k = I_{m \times m} + H_{k,1} q^{-1} + \dots + H_{k,k-1} q^{-(k-1)}, \text{ ahol } H_{k,i} \text{ } m \times m \text{ alakú mátrix,} \quad (4.62c)$$

$$F_k = F_{k,0} + F_{k,1} q^{-1} + \dots + F_{k,n_c} q^{-n_c}, \text{ ahol } F_{k,i} \text{ } m \times m \text{ alakú mátrix.} \quad (4.62d)$$

Az optimális jóslás felfogható úgy is, mint az

$$\hat{y}(t+k|t) = E[y(t+k) - H_k(q)e(t+k) | \mathcal{F}_t] \quad (4.63)$$

feltételes várható érték, ahol $\mathcal{F}_t$ a t pillanatig rendelkezésre álló adatok által generált σ -részalgebra. Vegyük észre, hogy $H_k(q)e(t+k)$ csak jövőbeli adatokat tartalmaz.

Eltérő bonyolultságuk miatt külön vizsgáljuk a fehér zaj ($C(q) = I_{m \times m}$) és a színes zaj ($C(q) \neq I_{m \times m}$) esetét.

4.6.1 MIMO prediktív irányítás fehér zaj esetén

Fehér zaj esetén (4.62a) alakja

$$\frac{A^{-1}}{\Delta} = H_k + q^{-k} \tilde{H}_k. \quad (4.64)$$

amelyet balról vagy jobbról megszorozhatunk $A\Delta$ -val. Válasszuk itt az utóbbit, akkor (4.62b) helyett a következő diophantoszi egyenletet kapjuk a polinommatrixok körében:

$$I = H_k A\Delta + q^{-k} \tilde{H}_k A\Delta = H_k A\Delta + q^{-k} F_k. \quad (4.65)$$

Szorozzuk meg a (4.61a) egyenletet $q^k H_k \Delta$ -val balról, és használjuk ki, hogy (4.64) szerint $H_k A\Delta = I - q^{-k} F_k$, akkor

$$\begin{aligned} H_k A\Delta y(t+k) &= H_k B\Delta u(t+k-1) + H_k e(t+k), \\ y(t+k) - H_k e(t+k) &= H_k B\Delta u(t+k-1) + F_k y(t), \end{aligned}$$

és feltételes várható érték képzéssel (4.63) szerint

$$\hat{y}(t+k|t) = H_k B\Delta u(t+k-1) + F_k y(t). \quad (4.66)$$

Bontsuk fel $H_k B$ -t két tagra:

$$H_k(q)B(q) = G_k(q) + q^{-k}G_{k,p}(q), \quad \text{gr } G_k = k-1, \quad (4.67)$$

akkor

$$\hat{y}(t+k|t) = G_k(q)\Delta u(t+k-1) + f(t+k), \quad (4.68a)$$

$$f(t+k) = G_{k,p}(q)\Delta u(t-1) + F_k(q)y(t), \quad (4.68b)$$

ahol a múltbeli jelek hatását $f(t+k)$ írja le. Másrészt viszont (4.64) szerint

$$H_k B = \left[\frac{A^{-1}}{\Delta} - q^{-k} \tilde{H}_k \right] B = A^{-1} B \frac{1}{\Delta} - q^{-k} \tilde{H}_k B, \quad (4.69)$$

ahol az első tag az $A^{-1}B$ rendszer egységugrásra adott válasza, tehát az átmeneti függvény mátrix értékeiből álló sorozat: $V_0 + V_1 q^{-1} + V_2 q^{-2} + \dots$, ezért

$$G_k(q) = V_0 + V_1 q^{-1} + \dots + V_{k-1} q^{-(k-1)}, \quad (4.70)$$

Legyen N_u az irányítási és N_1, N_2 a predikciós horizont, akkor az egyes időpontokhoz tartozó vektorokat egymás alá írva és bevezetve az átmeneti függvény mátrix mintáiból álló

$$V_{N_{12}} = \begin{bmatrix} V_{N_1-1} & V_{N_1-2} & \cdots & V_{N_1-N_u} \\ V_{N_1-2} & V_{N_1-1} & \ddots & V_{N_1+1-N_u} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ V_{N_2-1} & V_{N_2-2} & \cdots & V_{N_2-N_u} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

adatmátrixot, amelyben $V_i := 0_{m \times r}$, ha $i < 0$, akkor az

$$\hat{y}_{N_{12}} = V_{N_{12}} \tilde{u}_{N_u} + f_{N_{12}} \quad (4.72)$$

predikciós összefüggéshez jutunk.

Súlyozza az optimalizálási kritérium a predikciós hiba értékét az $m \times m$ méretű Q , a bemenőjel megváltozását az $r \times r$ méretű R pozitív definit és szimmetrikus mátrixokkal, akkor $\bar{Q} = \text{diag}(Q, \dots, Q)$ és $\bar{R} = \text{diag}(R, \dots, R)$ jelöléssel az optimalizálási kritérium

$$\begin{aligned} J(N_u, N_1, N_2) &= \frac{1}{2} \langle \bar{Q}(r_{N_{12}} - \hat{y}_{N_{12}}), r_{N_{12}} - \hat{y}_{N_{12}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{R} \tilde{u}_{N_u}, \tilde{u}_{N_u} \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle \bar{Q}(r_{N_{12}} - V_{N_{12}} \tilde{u}_{N_u} - f_{N_{12}}), r_{N_{12}} - V_{N_{12}} \tilde{u}_{N_u} - f_{N_{12}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{R} \tilde{u}_{N_u}, \tilde{u}_{N_u} \rangle \end{aligned} \quad (4.73)$$

alakú lesz. Hagyjuk el átmenetileg a méreteket jelölő indexeket, akkor

$$\begin{aligned} 2J &= \langle \bar{Q}r, r \rangle - \langle \bar{Q}V\tilde{u}, r \rangle - \langle \bar{Q}f, r \rangle - \langle \bar{Q}r, V\tilde{u} \rangle + \langle \bar{Q}V\tilde{u}, V\tilde{u} \rangle + \langle \bar{Q}f, V\tilde{u} \rangle - \\ &\quad - \langle \bar{Q}r, f \rangle + \langle \bar{Q}V\tilde{u}, f \rangle + \langle \bar{Q}f, f \rangle + \langle \bar{R}\tilde{u}, \tilde{u} \rangle = \\ &= \langle \bar{Q}r, r \rangle + \langle V^T \bar{Q}V\tilde{u}, \tilde{u} \rangle + \langle \bar{Q}f, f \rangle - \\ &\quad - 2 \langle V^T \bar{Q}r, \tilde{u} \rangle - 2 \langle \bar{Q}r, f \rangle + 2 \langle V^T \bar{Q}f, \tilde{u} \rangle + \langle \bar{R}\tilde{u}, \tilde{u} \rangle, \end{aligned}$$

$$\frac{dJ}{d\tilde{u}} = V^T \bar{Q}V\tilde{u} - V^T \bar{Q}r + 2V^T \bar{Q}f + \bar{R}\tilde{u} = 0,$$

ahonnan kapjuk, hogy az optimális irányítás alakja felnyitott körben

$$\tilde{u}_{N_u} = (V_{N_{12}}^T \bar{Q} V_{N_{12}} + \bar{R})^{-1} V_{N_{12}}^T \bar{Q} (r_{N_{12}} - f_{N_{12}}). \quad (4.74)$$

Vezessük be a $(V_{N_{u12}}^T \bar{Q} V_{N_{u12}} + \bar{R})^{-1} V_{N_{u12}}^T \bar{Q}$ mátrix első r sorából álló $r \times (N_2 - N_1)$ méretű blokkra a

$$v_{N_{u12}}^T := (V_{N_{u12}}^T \bar{Q} V_{N_{u12}} + \bar{R})^{-1} V_{N_{u12}}^T \bar{Q} \text{ mátrix első } r \text{ sora} \quad (4.75)$$

jelölést, akkor a soron következő beavatkozás zárt körben

$$u(t) := u(t-1) + v_{N_{u12}}^T (r_{N_{12}} - f_{N_{12}}). \quad (4.76)$$

MIMO esetben jelentős egyszerűsítést eredményez, ha az algoritmusban szereplő mennyiségeket rekurzívan lehet számítani. Vezessük be az

$$\begin{aligned} \tilde{A}(q) &= A(q)\Delta(q) = I_{m \times m} + \tilde{A}_1 q^{-1} + \dots + \tilde{A}_{n_a+1} q^{-(n_a+1)} = \\ &= I_{m \times m} + (A_1 - I_{m \times m})q^{-1} + (A_2 - A_1)q^{-2} + \dots + (A_{n_a} - A_{n_a-1})q^{-n_a} - A_{n_a} q^{-(n_a+1)} \end{aligned}$$

jelölést, akkor (4.65)-ből kivonással következik

$$0_{m \times m} = [H_{k+1}(q) - H_k(q)]\tilde{A}(q) + q^{-k}[q^{-1}F_{k+1}(q) - F_k(q)], \quad (4.77)$$

ahol $gr[H_{k+1} - H_k] = k$. Ezért

$$H_{k+1}(q) - H_k(q) = \tilde{R}(q) + q^{-k}R_k, \quad gr \tilde{R} < k, \quad (4.78)$$

$$0_{m \times m} = \tilde{R}(q)\tilde{A}(q) + q^{-k}[R_k\tilde{A}(q) + q^{-1}F_{k+1}(q) - F_k(q)], \quad (4.79)$$

és mivel $\tilde{A}$ normalizált (egységmátrix vezető tagú, monik), ezért $\tilde{R}(q) = 0_{m \times m} \Rightarrow F_{k+1}(q) = q[F_k(q) - R_k\tilde{A}(q)]$, ahonnan a következő rekurzív összefüggéseket kapjuk:

$$H_{k+1}(q) = H_k(q) + R_k q^{-k}, \quad (4.80a)$$

$$R_k = F_{k,0}, \quad (4.80b)$$

$$F_{k+1,i} = F_{k,i+1} - R_k \tilde{A}_{i+1}. \quad (4.80c)$$

A rekurzió inicializálására a (4.65)-ből közvetlenül nyerhető kifejezéseket használhatjuk:

$$H_1(q) = I_{m \times m}, \quad (4.81a)$$

$$F_1(q) = q(I_{m \times m} - \tilde{A}(q)). \quad (4.81b)$$

A múltbeli adatok jövőbeli hatása szintén rekurzívan számítható:

$$f(t+k+1) = q[I_{m \times m} - \tilde{A}(q)]f(t+k) + B(q)\Delta u(t+k), \quad (4.82a)$$

$$\text{inicializálás: } f_0 := y(t), \quad (4.82b)$$

ahol a (4.28a) képletben $\Delta u(t+k-i) := 0$ helyettesítendő, ha $k-i \geq 0$.

4.6.2 MIMO prediktív irányítás színes zaj és általános struktúra esetén

Színes zaj esetén a szakasz modellje $A(q)y(t) = B(q)u(t-1) + C(q)/\Delta e(t)$, a színes zaj modellje $H = A^{-1}C/\Delta = H_k + q^{-k}\tilde{H}_k$, az ebből balról $A\Delta$ -val való szorzással keletkező diophantoszi polinomegyenlet $C = A\Delta H_k + q^{-k}A\Delta\tilde{H}_k = A\Delta H_k + q^{-k}F_k$, az optimális jóslás pedig $\hat{y}(t+k|t) = E[y(t+k) - H_k(q)e(t+k)|\mathcal{F}_t]$.

Térjünk át a $H_k C^{-1}$ bal oldali mátrixtört felbontásról a $\bar{C}_k^{-1}\bar{H}_k$ jobb oldali mátrixtört felbontásra, lásd F2. függelék:

$$H_k C^{-1} = \bar{C}_k^{-1}\bar{H}_k, \quad \det(C) = \det(\bar{C}_k), \quad (4.83a)$$

akkor következik

$$CH_k^{-1} = \bar{H}_k^{-1}\bar{C}_k, \quad (4.83b)$$

$$\bar{H}_k C = (\bar{C}_k H_k C^{-1})C = \bar{C}_k H_k. \quad (4.83c)$$

Definiáljuk az $\bar{F}_k$ polinommátrixot a következő összefüggéssel:

$$\bar{F}_k := q^k(\bar{C}_k - \bar{H}_k A\Delta). \quad (4.83d)$$

Szorozzuk meg a (4.61a) szakaszmodellt balról $q^k\bar{H}_k\Delta$ -val, akkor

$$\bar{H}_k\Delta Ay(t+k) = \bar{H}_k B\Delta u(t+k-1) + \bar{H}_k C e(t+k),$$

ahonnan (4.83d) és (4.83c) felhasználásával következik

$$(\bar{C}_k - q^{-k}\bar{F}_k)y(t+k) = \bar{H}_k B\Delta u(t+k-1) + \bar{C}_k H_k e(t+k),$$

$$\bar{C}_k[y(t+k) - H_k e(t+k)] = \bar{H}_k B\Delta u(t+k-1) + \bar{F}_k y(t),$$

és (4.63) felhasználásával

$$\bar{C}_k \hat{y}(t+k|t) = \bar{H}_k B \Delta u(t+k-1) + \bar{F}_k y(t). \quad (4.84)$$

Határozzuk meg $\bar{C}_k(q)$ -hoz a

$$I_{moon} = M_k \bar{C}_k + q^{-k} N_k, \quad gr M_k = k-1, \quad gr N_k = n_c - 1 \quad (4.85)$$

diophantoszi mátrixpolinom egyenlet megoldását.

Szorozzuk meg a (4.84) egyenletet balról M_k -val és vegyük figyelembe, hogy (4.85) alapján $M_k \bar{C} = I - q^{-k} N_k$, továbbá $\hat{y}(t|t) = y(t)$ akkor

$$M_k \bar{C}_k \hat{y}(t+k|t) = M_k \bar{H}_k B \Delta u(t+k-1) + M_k \bar{F}_k y(t), \quad (4.86)$$

$$\hat{y}(t+k|t) = M_k \bar{H}_k B \Delta u(t+k-1) + (M_k \bar{F}_k + N_k) y(t). \quad (4.87)$$

Bontsuk fel az $M_k(q) \bar{H}_k(q) B(q)$ polinommátrixot

$$M_k \bar{H}_k B = G_k + q^{-k} G_{k,p} \quad (4.88)$$

alakban. Vizsgáljuk meg, mi is valójában $G_k(q)$. Ehhez felhasználjuk, hogy

$$\frac{A^{-1}C}{\Delta} = H_k + q^{-k} \tilde{H}_k, \quad (4.89a)$$

$$\frac{A^{-1}}{\Delta} = H_k C^{-1} + q^{-k} \tilde{H}_k C^{-1}, \quad (4.89b)$$

$$\bar{H}_k = \bar{C}_k H_k C^{-1}, \quad (4.89c)$$

$$M_k = (I - q^{-k} N_k) \bar{C}_k^{-1}, \quad (4.89d)$$

$$\begin{aligned} M_k \bar{H}_k &= (I - q^{-k} N_k) \bar{C}_k^{-1} \bar{C}_k H_k C^{-1} = (I - q^{-k} N_k) H_k C^{-1} = \\ &= H_k C^{-1} - q^{-k} N_k H_k C^{-1} = \end{aligned} \quad (4.89e)$$

$$= \frac{A^{-1}}{\Delta} - q^{-k} \tilde{H}_k C^{-1} - q^{-k} N_k H_k C^{-1},$$

$$M_k \bar{H}_k = \frac{A^{-1}}{\Delta} - q^{-k} (\tilde{H}_k + N_k H_k) C^{-1}, \quad (4.89f)$$

$$M_k \bar{H}_k B = A^{-1} B \frac{1}{\Delta} - q^{-k} (\tilde{H}_k + N_k H_k) C^{-1} B = G_k + q^{-k} G_{k,p}. \quad (4.89g)$$

Másrészt viszont $A^{-1}B \frac{1}{\Delta}$ az $A^{-1}B$ rendszer válasza egységugrásra, ami az átmeneti függvény mátrix mintáiból áll:

$$A^{-1}B \frac{1}{\Delta} = V_0 + V_1 q^{-1} + V_2 q^{-2} + \dots \quad (4.90)$$

Ezért a bemenő jel jövőbeli értékeit súlyozó $G_k(q)$ minden k -ra az átmeneti függvény mátrix induló mintáiból áll színes zaj esetén is:

$$G_k(q) = V_0 + V_1 q^{-1} + \dots + V_{k-1} q^{-(k-1)}. \quad (4.91)$$

Az optimális kimenő jel becslés most is az $\hat{y}_{N_{12}} = V_{N_{12}} \tilde{u}_{N_s} + f_{N_{12}}$ alakra hozható, és $\tilde{u}_{N_s} = (V_{N_{12}}^T \bar{Q} V_{N_{12}} + \bar{R})^{-1} V_{N_{12}}^T \bar{Q} (r_{N_{12}} - f_{N_{12}})$ az optimális irányítás felnyitott körben, $u(t) := u(t-1) + v_{N_{12}}^T (r_{N_{12}} - f_{N_{12}})$ pedig a zárt körben kiadott soron következő beavatkozás.

H_k és F_k most is rekurzívan számítható, mert (4.62b)-ből különbségképzéssel következik

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{A}(H_{k+1} - H_k) + q^{-k}(q^{-1}F_{k+1} - F_k) \\ H_{k+1}(q) - H_k(q) &= \tilde{R}(q) + q^{-k}R_k, \quad \text{gr } \tilde{R} < k, \\ 0_{m \times m} &= \tilde{A}(q)\tilde{R}(q) + q^{-k}[\tilde{A}(q)R_k + q^{-1}F_{k+1}(q) - F_k(q)], \\ \tilde{R}(q) &= 0, \\ F_{k+1}(q) &= q[F_k(q) - \tilde{A}(q)R_k], \end{aligned}$$

ezekből pedig

$$H_{k+1}(q) = H_k(q) + R_k q^{-k}, \quad (4.92a)$$

$$R_k = F_{k,0}, \quad (4.92b)$$

$$F_{k+1,i} = F_{k,i+1} - \tilde{A}_{i+1} R_k. \quad (4.92c)$$

A rekurzió inicializálására a (4.62b)-ből közvetlenül nyerhető következő kifejezéseket használhatjuk:

$$H_1(q) = I_{m \times m}, \quad (4.93a)$$

$$F_1(q) = q(C(q) - \tilde{A}(q)). \quad (4.93b)$$

A folytatás azonban innentől bonyolultabb, amit elsősorban $\bar{H}_k$, $\bar{C}_k$ meghatározása tesz nehezzé, és ehhez hozzájön még $\bar{F}_k$, M_k , N_k , G_{kp} , $f(t+k)$, f meghatározása is.

4.6.3 MIMO prediktív irányítás színes zaj és diagonális struktúra esetén

A gyakorlat számára különösen fontos az a speciális eset, amikor $A(q) = \text{diag}(A_{ii}(q))$ és $C(q) = \text{diag}(C_{ii}(q))$, mert ekkor a SISO esetre kidolgozott eredmények kis változtatással alkalmazhatók. Az i -ik kimenő jel ekkor

$$A_{ii}(q)y_i(t) = \sum_{j=1}^r B_{ij}(q)u_j(t-1) + \frac{C_{ii}(q)}{\Delta(q)}e_i(t). \quad (4.94)$$

Oldjuk meg a

$$C_{ii}(q) = A_{ii}(q)\Delta(q)H_{ik}(q) + q^{-k}F_{ik}(q), \quad \text{gr } H_{ik} = k-1, \quad \text{gr } F_{ik} = n_{a_i} \quad (4.95)$$

diophantoszi polinom egyenletet.

Szorozzuk meg (4.94)-et $q^k H_{ik} \Delta$ -val és használjuk (4.95)-öt, akkor

$$H_{ik} \Delta A_{ii} y_i(t+k) = H_{ik} \sum_{j=1}^r B_{ij} \Delta u_j(t+k-1) + H_{ik} C_{ii} e_i(t+k),$$

$$C_{ii} [y_i(t+k) - H_{ik} e_i(t+k)] = H_{ik} \sum_{j=1}^r B_{ij} \Delta u_j(t+k-1) + F_{ik} y_i(t),$$

$$C_{ii} \hat{y}_i(t+k) = H_{ik} \sum_{j=1}^r B_{ij} \Delta u_j(t+k-1) + F_{ik} y_i(t). \quad (4.96)$$

Oldjuk meg az

$$I = C_{ii}(q)M_{ik}(q) + q^{-k}N_{ik}(q), \quad \text{gr } M_{ik} = k-1, \quad \text{gr } N_{ik} = n_{c_i} - 1 \quad (4.97)$$

diophantoszi polinom egyenletet, akkor M_{ik} -val megszorozva (4.96)-ot és felhasználva (4.97)-et kapjuk, hogy

$$\hat{y}_i(t+k) = M_{ik} H_{ik} \sum_{j=1}^r B_{ij} \Delta u_j(t+k-1) + (M_{ik} F_{ik} + N_{ik}) y_i(t). \quad (4.98)$$

Bontsuk fel az $M_{ik}H_{ik}B_{ij}$ polinomot két részre:

$$M_{ik}(q)H_{ik}(q)B_{ij}(q) = G_{ik}(q) + q^{-k}G_{ik,p}(q), \quad (4.99)$$

akkor

$$\hat{y}_i(t+k) = \sum_{j=1}^r G_{ik} \Delta u_j(t+k-1) + \sum_{j=1}^r G_{ik,p} \Delta u_j(t-1) + (M_{ik}F_{ik} + N_{ik})y_i(t). \quad (4.100)$$

Ezek a predikciók aztán behelyettesíthetők a közös J költségfüggvénybe, amely a korábbihoz hasonlóan minimalizálható. Vegyük észre, hogy a számítások nagymértékben egyszerűsödtek a nemdiagonális esethez képest.

4.7 Korlátozások figyelembevétele

A GPC alkalmazása esetén sok esetben célszerű korlátozásokat is figyelembe venni, amelyek vonatkozhatnak a bemenő jel megengedett változási sebességére (slew rate limits), a bemenő jel megengedett tartományára (actuator limits) és a kimenőjel megengedett tartományára (output signal limits), valamint a tranziensek alakjára.

A korlátozások megfogalmazásakor szükség lesz a következő jelölésekre:

- i) Jelölje $\mathbf{1}_{N,r \times r}$ azt a mátrixot, amelyben egymás alatt N darab $r \times r$ méretű egység mátrix helyezkedik el:

$$\mathbf{1}_{N,r \times r} = \begin{bmatrix} I_{r \times r} \\ I_{r \times r} \\ \vdots \\ I_{r \times r} \end{bmatrix}. \quad (4.101)$$

- ii) Jelölje $T_{N,r \times r}$ azt az alsó blokkháromszög mátrixot, amelynek N blokksora van, és a blokkok mind $r \times r$ méretű egység mátrixok:

$$\mathbf{T}_{N,r \times r} = \begin{bmatrix} I_{r \times r} & 0 & \cdots & 0 \\ I_{r \times r} & I_{r \times r} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{r \times r} & I_{r \times r} & \cdots & I_{r \times r} \end{bmatrix}. \quad (4.102)$$

4.7.1 A jeltartományokra vonatkozó korlátozások

A jeltartományokra vonatkozó korlátozások tipikus alakja

$$\Delta u_L \leq \Delta u(t+k) \leq \Delta u_H, \quad (4.103a)$$

$$u_L \leq u(t+k) \leq u_H, \quad (4.103b)$$

$$y_L \leq y(t+k) \leq y_H, \quad (4.103c)$$

ahol $\Delta u_L, \Delta u_H, u_L, u_H, y_L, y_H$ ismert konstansok (a MIMO esetben vektorok).

A továbbiakban az $\tilde{u}, u$ és $\hat{y} = V\tilde{u} + f$ jelekre vonatkozó korlátozásokat $R\tilde{u} \leq c$ (vektor-egyenlőtlenség) alakban keressük. Vegyük ehhez figyelembe, hogy

$$u(t) = \Delta u(t) + u(t-1),$$

$$u(t+1) = \Delta u(t+1) + u(t) = \Delta u(t) + \Delta u(t+1) + u(t-1),$$

$$\vdots$$

$$u(t+k) = \Delta u(t+k) + u(t+k-1) = \Delta u(t) + \Delta u(t+1) + \dots + \Delta u(t+k) + u(t-1)$$

miatt

$$u = T_{N_u, r \times r} \tilde{u} + \mathbf{1}_{N_u, r \times r} u(t-1). \quad (4.104)$$

Mivel $x_L \leq x \leq x_H$ ekvivalens azzal, hogy $x \leq x_H$ és $-x \leq -x_L$, ezért a jeltartományokra vonatkozó korlátozások az

$$\tilde{u} = I_{N_s \times N_s} \tilde{u} \leq \mathbf{1}_{N_s, r \times r} \Delta u_H, \quad (4.105a)$$

$$-\tilde{u} = -I_{N_s \times N_s} \tilde{u} \leq -\mathbf{1}_{N_s, r \times r} \Delta u_L, \quad (4.105b)$$

$$T_{N_u, r \times r} \tilde{u} \leq \mathbf{1}_{N_u, r \times r} u_H - \mathbf{1}_{N_u, r \times r} u(t-1), \quad (4.105c)$$

$$-T_{N_u, r \times r} \tilde{u} \leq -\mathbf{1}_{N_u, r \times r} u_L + \mathbf{1}_{N_u, r \times r} u(t-1), \quad (4.105d)$$

$$V\tilde{u} \leq \mathbf{1}_{N_2 - N_1, m \times m} y_H - f, \quad (4.105e)$$

$$-V\tilde{u} \leq -\mathbf{1}_{N_2 - N_1, m \times m} y_L + f \quad (4.105f)$$

komponensekből állnak, amelyeket vektor-egyenlőtlenség alakjában is felírhatunk:

$$R\tilde{u} \leq b, \quad (4.106a)$$

$$R = \begin{bmatrix} I_{N_u \times N_u} \\ -I_{N_u \times N_u} \\ \mathbf{T}_{N_u, r \times r} \\ -\mathbf{T}_{N_u, r \times r} \\ V \\ -V \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_u, r \times r} \Delta u_H \\ -\mathbf{1}_{N_u, r \times r} \Delta u_L \\ \mathbf{1}_{N_u, r \times r} u_H - \mathbf{1}_{N_u, r \times r} u(t-1) \\ -\mathbf{1}_{N_u, r \times r} u_L + \mathbf{1}_{N_u, r \times r} u(t-1) \\ \mathbf{1}_{N_2 - N_1, m \times m} y_H - f \\ -\mathbf{1}_{N_2 - N_1, m \times m} y_L + f \end{bmatrix}. \quad (4.106b)$$

Ha bevezetjük a $\Delta u(t+k) = \Delta u_{L,k} + x_k$ jelölést, azaz $\tilde{u} = \mathbf{1}_{N_u, r \times r} \Delta u_L + x$, akkor a korlátozások a

$$x = I_{N_u \times N_u} x \leq \mathbf{1}_{N_u, r \times r} (\Delta u_H - u_L), \quad (4.105a^*)$$

$$x \geq 0, \quad (4.105b^*)$$

$$\mathbf{T}_{N_u, r \times r} x \leq \mathbf{1}_{N_u, r \times r} u_H - \mathbf{T} \mathbf{1}_{N_u, r \times r} u_L - \mathbf{1}_{N_u, r \times r} u(t-1), \quad (4.105c^*)$$

$$-\mathbf{T}_{N_u, r \times r} x \leq -\mathbf{1}_{N_u, r \times r} u_L + \mathbf{T} \mathbf{1}_{N_u, r \times r} u_L + \mathbf{1}_{N_u, r \times r} u(t-1), \quad (4.105d^*)$$

$$Vx \leq \mathbf{1}_{N_2 - N_1, m \times m} y_H - f - V \mathbf{1}_{N_u, r \times r} u_L, \quad (4.105e^*)$$

$$-V\tilde{u} \leq -\mathbf{1}_{N_2 - N_1, m \times m} y_L + f + V \mathbf{1}_{N_u, r \times r} u_L \quad (4.105f^*)$$

komponensekből állnak, amelyeket vektor-egyenlőtlenség alakjában is felírhatunk:

$$x \geq 0, \quad \hat{R} x \leq \hat{b}, \quad (4.106a^*)$$

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} I_{N_u \times N_u} \\ \mathbf{T}_{N_u, r \times r} \\ -\mathbf{T}_{N_u, r \times r} \\ V \\ -V \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_u, r \times r} (\Delta u_H - \Delta u_L) \\ \mathbf{1}_{N_u, r \times r} u_H - \mathbf{T} \mathbf{1}_{N_u, r \times r} u_L - \mathbf{1}_{N_u, r \times r} u(t-1) \\ -\mathbf{1}_{N_u, r \times r} u_L + \mathbf{T} \mathbf{1}_{N_u, r \times r} u_L + \mathbf{1}_{N_u, r \times r} u(t-1) \\ \mathbf{1}_{N_2 - N_1, m \times m} y_H - f - V \mathbf{1}_{N_u, r \times r} u_L \\ -\mathbf{1}_{N_2 - N_1, m \times m} y_L + f + V \mathbf{1}_{N_u, r \times r} u_L \end{bmatrix}. \quad (4.106b^*)$$

4.7.2 A tranziensekre vonatkozó korlátozások

1. A kimenő jelnek egy előírt sávban kell maradnia. Ez az eset programszabályozás esetén tipikus, amikor az előírt sávot $y_L(t)$ és $y_H(t)$ határozza meg. Legyen $Y_L := (y_L(t+1)^T, \dots, y_L(t+N)^T)^T$ és $Y_H := (y_H(t+1)^T, \dots, y_H(t+N)^T)^T$, akkor a sávban maradás feltételei a következők:

$$V\tilde{u} \leq Y_H - f, \quad (4.107a)$$

$$-V\tilde{u} \leq -Y_L + f. \quad (4.107b)$$

2. Túllövés-mentes tranziens szükséges (a kimenő jelnek alapjelváltás után aperiodikusnak kell maradnia). Ez az eset pl. robotikai alkalmazások esetén tipikus, amikor el kell kerülni az ütközést a munkaszattal vagy az azon lévő tárggyal. Legyen a tartomány N_1, N_2 , ahol a feltételt biztosítani kell, akkor pozitív alapjelugrást és utána tartósan konstans alapjelet feltételezve teljesülnie kell, hogy $y(t+k) \leq r(t)$, ahonnan következik

$$V\tilde{u} \leq \mathbf{1}_{N_2-N_1, \max} r(t) - f. \quad (4.108)$$

3. Monoton tranziens szükséges (a kimenő jelnek pozitív alapjelugrás után monoton növekednie, negatív alapjelugrás után pedig monoton csökkennie kell). Ez a követelmény az oszcilláció elleni védekezés eszköze lehet, ha a szakasz modelljének perturbációja várható. Ekkor pozitív alapjelugrást és utána tartósan konstans alapjelet feltételezve teljesülnie kell, hogy $y(t+k+1) \geq y(t+k)$, ha $y(t) < r(t)$, ami részletesebben azt jelenti, hogy

$$\hat{y}(t+1) = V_0 \tilde{u}_1 + f_1 \geq y(t) \Rightarrow V_0 \tilde{u}_1 \geq y(t) - f_1,$$

$$\hat{y}(t+2) = V_1 \tilde{u}_1 + V_0 \tilde{u}_2 + f_2 \geq \hat{y}(t+1) \Rightarrow (V_1 - V_0) \tilde{u}_1 + V_0 \tilde{u}_2 \geq f_1 - f_2,$$

$$\vdots$$

$$\hat{y}(t+N) = V_{N-1} \tilde{u}_1 + V_{N-2} \tilde{u}_2 + \dots + V_0 \tilde{u}_N + f_N \geq \hat{y}(t+N-1) \Rightarrow$$

$$(V_{N-1} - V_{N-2}) \tilde{u}_1 + (V_{N-2} - V_{N-3}) \tilde{u}_2 + \dots + (V_1 - V_0) \tilde{u}_{N-1} + V_0 \tilde{u}_N \geq f_{N-1} - f_N.$$

Ezért a monotonitási korlátozás a következőképp adható meg vektor-egyenlőtlenség alakjában (pozitív alapjelugrás esetén):

$$\begin{bmatrix} -V_0 & 0 & \dots & 0 \\ -(V_1 - V_0) & -V_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -(V_N - V_{N-1}) & -(V_{N-1} - V_{N-2}) & \dots & -V_0 \end{bmatrix} \tilde{u} \leq \begin{bmatrix} f_1 - y(t) \\ f_2 - f_1 \\ \vdots \\ f_N - f_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (4.109)$$

4. Nem-minimumfázisú jelleg elleni védekezés. Ha egy rendszer kimenő jele pozitív alapjelugrás esetén előbb csökkenni kezd, és csak később kezd el növekedni, akkor a rendszer viselkedése nem-minimumfázisú jellegű. Ezt úgy lehet megakadályozni, ha pl. pozitív alapjelugrást, azaz $y(t) < r(t)$ esetet feltételezve megköveteljük, hogy $y(t+k+1) \geq y(t)$, ahonnan következik

$$-V\tilde{u} \leq -\mathbf{1}_{N, m \times m} y(t) + f. \quad (4.110)$$

5. Beavatkozó szerv holtjátékának kompenzálása. A holtjáték (dead zone) tartományában a beavatkozó szerv nulla kimenő jelet ad. Ha a holtjátékot a sebességre és a kimenetre is vonatkoztatjuk, és tartományaitak rendre $\Delta u_{dL}, \Delta u_{dH}, u_{dL}, u_{dH}$ definiálja, akkor a holtjáték kiküszöbölésére a következő feltételek teljesülését kell garantálni:

$$\Delta u(t+k) \geq \Delta u_{dH}, \text{ ha } \Delta u(t+k) \geq 0, \quad (4.111a)$$

$$\Delta u(t+k) \leq \Delta u_{dL}, \text{ ha } \Delta u(t+k) \leq 0, \quad (4.111b)$$

$$u(t+k) = \Delta u(t) + \dots + \Delta u(t+k) + u(t-1) \geq u_{dH}, \text{ ha } u(t+k) \geq 0, \quad (4.111c)$$

$$u(t+k) = \Delta u(t) + \dots + \Delta u(t+k) + u(t-1) \leq u_{dL}, \text{ ha } u(t+k) \leq 0. \quad (4.111d)$$

Ezeknek a feltételeknek a kiértékelése azonban bonyolult a megkülönböztetendő esetek miatt. Az optimalizálási feladat elveszíti konvex jellegét, ezért az optimum meghatározására ebben az esetben elsősorban az evolúciós technikák (genetikus algoritmus stb.) javasolhatók. A továbbiakban ezzel a korlátozási típussal nem foglalkozunk.

6. A végállapot feltétel biztosítása. Ebben az esetben megköveteljük, hogy az N_y költséghorizont után még n ütemig a kimenet jósolt értéke kövesse a referencia jel jósolt értékét. Legyen $y_n = (y(t+N_y+1)^T, \dots, y(t+N_y+n)^T)^T$, akkor a cél $y_n = V\tilde{u} + f_n := r_n$. Ekkor az eddigiekkel szemben *egyenlőség* típusú korlátozást kapunk:

$$V\tilde{u} = r_n - f_n. \quad (4.112)$$

4.7.3 A célfüggvény alakja

A célfüggvény alakja (4.73) szerint

$$J = \frac{1}{2} \langle H\tilde{u}, \tilde{u} \rangle + \langle c, \tilde{u} \rangle + d, \quad (4.113a)$$

$$H = V^T \bar{Q} V + \bar{R}, \quad (4.113b)$$

$$c = V^T \bar{Q} (f - r), \quad (4.113c)$$

$$d = \frac{1}{2} \langle \bar{Q} r, r \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{Q} f, f \rangle - \langle \bar{Q} r, f \rangle. \quad (4.113d)$$

Ha bevezetjük a, $\tilde{u} = \mathbf{1}_{N_{\text{r}} \times r} \Delta u_L + x \Rightarrow x = \tilde{u} - \tilde{u}_0$ transzformációt, ahol $\tilde{u}_0 = \mathbf{1}_{N_{\text{r}} \times r} \Delta u_L$ és $x \geq 0$, akkor a célfüggvény új alakja a következő lesz:

$$J = \frac{1}{2} \langle \hat{H}x, x \rangle + \langle \hat{c}, x \rangle + \hat{d}, \quad (4.114a)$$

$$\hat{H} = H, \quad (4.114b)$$

$$\hat{c} = c + H\tilde{u}_0, \quad (4.114c)$$

$$\hat{d} = d + \frac{1}{2} \langle H\tilde{u}_0, \tilde{u}_0 \rangle + \langle c, \tilde{u}_0 \rangle. \quad (4.114d)$$

Vegyük észre, hogy J minimumának helyét d , illetve $\hat{d}$ nem befolyásolja.

4.7.4 Optimalizálás kvadratikus programozással

A prediktív irányítási feladat optimális megoldásának meghatározása korlátozások esetén az ún. kvadratikus programozás körébe tartozik, mivel a célfüggvény kvadratikus és korlátozásoknak van alávetve, amelyek lineáris egyenlőtlenség-típusúak, kivéve a végállapot feltételeket, amelyek lineáris egyenlőség-típusúak. A kvadratikus optimalizálás alapjait az F3. függelékben foglaltuk össze.

A kvadratikus programozás (QP) alapfeladata a következő:

$$\min_x J(x) = \frac{1}{2} \langle Hx, x \rangle + \langle c, x \rangle, \quad (4.115a)$$

$$x \geq 0, \quad A_1 x = b_1, \quad A_2 x \leq b_2, \quad (4.115b)$$

ahol $x \in \mathbb{R}^n$, $H \geq 0$ $n \times n$ méretű pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrix, $b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$, $J'_x = Hx + c =: g(x)$ a célfüggvény gradiense és $J''_x = H$ a célfüggvény Hess-mátrixa.

Az optimális prediktív irányítás korlátozások esetén a MATLAB *Optimization Toolbox* qp függvényével határozható meg, amelynek szintaktikája a következő:

$$[x_{\text{opt}}, \lambda, \text{how}] = qp(H, c, A, b, vlb, vub, neqcstr)$$

ahol az optimalizálási feladat $\min f(x) = \frac{1}{2} \langle Hx, x \rangle + \langle c, x \rangle$, $Ax \leq b$, $vlb \leq x \leq vub$, továbbá *neqcstr* az egyenlőség alakú korlátozások száma, amelyek A és b elején helyezkednek el. A *lambda* kimeneti paraméter elején a nem egyenlőség alakú korlátozásokhoz tartozó λ Lagrange-multiplikátorok állnak. Nulla λ_i érték inaktív korlátozást jelöl. A *lambda* végén álló értékek a $vlb \leq x$ és az

$x \leq vub$ alakú korlátozások aktív vagy inaktív voltát mutatják. A *how*='ok' string érték azt mutatja, hogy az optimalizálás probléma nélkül zajlott, *how*='infeasible' jelzi, ha a feladatnak nincs megvalósítható (a korlátozásokat kielégítő, angolul feasible) x megoldása.

Az Optimization Toolbox *qp* függvénye az aktív halmaz (active set) és a megvalósítható irányok (feasible directions) módszerén alapul. Mivel a prediktív irányítás valós idejű megvalósításakor ritkán használunk MATLAB-ot, és az optimalizálást minden időpontban újra el kell végezni, ezért az F3. függelékben összefoglaltuk a kvadrátikus programozási algoritmusok alapjait, amelynek alapján a felhasználó maga is megírhatja saját optimalizáló függvényét az irányító rendszer szoftver platformja számára (pl. C nyelven).

5. TÖBBVÁLTOZÓS RENDSZEREK IRÁNYÍTÁSA ÁLLAPOTTÉRBE

Ebben a fejezetben többváltozós lineáris rendszerek állapot-visszacsatoláson, állapotmegfigyelőn vagy kimeneti visszacsatoláson alapuló szabályozó tervezési módszerei közül mutatunk be néhányat. Először a rendszer különféle normálalakjai közül a Luenberger-féle irányíthatósági és megfigyelhetőségi normálalakokat mutatjuk be, majd ezek felhasználásával megoldjuk az állapot-visszacsatolási és az állapotmegfigyelő tervezési feladatokat [11]. Megvizsgáljuk a robusztus pólusát helyezés lehetőségét [12]. Bemutatjuk a Roppenecker-paramétereken és modális szintén alapuló tervezést [14]. Módszert adunk az állapot-visszacsatolás közelítésére kimeneti visszacsatolással [15].

Feltesszük, hogy a rendszer a szokásos alakban adott:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du, \\ x &\in R^n, u \in R^r, y \in R^m.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Az algebrai hasonlóság miatt az eredmények diszkrét időben is érvényesek maradnak, de a stabilitási tartomány eltérő volta miatt a zárt rendszer karakterisztikus polinomját és a megfigyelő polinomját másként kell megválasztani. Feltesszük továbbá azt is, hogy $\text{rank}(B) = r$ illetve $\text{rank}(C) = m$, különben bizonyos bemenetek, illetve kimenetek fölöslegesek lennének, mert a többiekből kifejezhetők.

5.1 Luenberger-féle normálalakok

Az irányítástechnikában számos normálalak ismert, ezek közül a könyv I. kötetének 6. fejezetében [1] SISO rendszerek esetén már megismertedtünk az állapotegyenlet szabályozó és megfigyelő alakjaival. MIMO rendszerek esetén a Luenberger-féle normálalakok egy szelekciós sémán alapulnak. Mivel a nem irányítható, illetve nem megfigyelhető módusok hatásával az irányíthatósági, illetve megfigyelhetőségi normálalakokban már foglalkoztunk a könyv I. kötetének 10. fejezetében [1], ezért itt elsősorban *irányítható és megfigyelhető* rendszerekre fogunk koncentrálni.

5.1.1 Szelekciós séma

Tekintsük a rendszer $M_c = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$ irányíthatósági mátrixát, amely most $n \times (r \cdot n)$ méretű. Legyen $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_r]$, ahol b_i az i -ik oszlopvektor. A szelekciós séma r oszlopból és maximum n sorból áll, és a séma minden egyes helye

egy $A^j b_i$ oszlopvektornak felel meg. Szigorúan balról jobbfelé haladva az M_c mátrix oszlopain, teszteljünk minden egyes oszlopot, hogy lineárisan független-e a tőle balra lévő oszlopoktól M_c -ben (a sémában a soron belül tőle balra és a fölötté lévő sorokban lévő vektoroktól). Ha $A^j b_i$ az éppen vizsgált oszlop, és $A^j b_i$ lineárisan független a tőle balra lévő oszlopoktól M_c -ben, akkor írjuk be $A^j b_i$ -t a szelekciós séma $j+1$ -edik sorának i -edik oszlopába, ha pedig nem, akkor jelöljük meg $\circ$ jellel (karikával) ezt a helyet a szelekciós sémában, és hagyjuk ki a vizsgálatát az i -edik oszlopban minden $A^k b_i$, $k > j$ tagnak a továbbiakban.

Definiáljuk a v_i irányíthatósági indexet a séma i -edik oszlopában a $\circ$ fölött elhelyezkedő vektorok számával ($v_i = j$, ha a $\circ$ az $A^j b_i$ tesztelésénél keletkezett a sémában). Ezáltal minden i bemenő jelhez keletkezett egy $v_i \geq 1$ irányíthatósági index (mivel $b_1, \dots, b_r$ lineárisan függetlenek a feltevés szerint). Megmutatható, hogy

$$A^{v_i} b_i = \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=0}^{K_1} \alpha_{ijk} A^k b_j + \sum_{j=i}^r \sum_{k=0}^{K_2} \alpha_{ijk} A^k b_j \quad (5.2)$$

$$K_1 = \min\{v_i, v_j - 1\}, \quad K_2 = \min\{v_i, v_j\} - 1.$$

Vezessük be még a $\sigma_1 = v_1$, $\sigma_2 = v_1 + v_2$, $\dots$, $\sigma_r = v_1 + v_2 + \dots + v_r$ indexeket is.

Példa a szelekciós sémára:

Legyen $r = 3$ és $n = 9$, és tegyük fel, hogy a szelekciós séma az (5.3a-c) eredményt adta.

$$\begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \\ Ab_1 & Ab_2 & Ab_3 \\ A^2 b_1 & \circ & A^2 b_3 \\ A^3 b_1 & & \circ \\ \circ & & \end{array} \quad (5.3a)$$

$$v_1 = 4 \quad v_2 = 2 \quad v_3 = 3 \quad (5.3b)$$

$$\sigma_1 = 4 \quad \sigma_2 = 6 \quad \sigma_3 = 9 \quad (5.3c)$$

Az (5.2) képlet alapján a következők mondhatók:

$$\begin{aligned}
 A^4 b_1 = & \alpha_{110} b_1 + \alpha_{111} A b_1 + \alpha_{112} A^2 b_1 + \alpha_{113} A^3 b_1 + \\
 & + \alpha_{120} b_2 + \alpha_{121} A b_2 + \\
 & + \alpha_{130} b_3 + \alpha_{131} A b_3 + \alpha_{132} A^2 b_3,
 \end{aligned} \tag{5.4a}$$

$$\begin{aligned}
 A^2 b_2 = & \alpha_{210} b_1 + \alpha_{211} A b_1 + \alpha_{212} A^2 b_1 + \\
 & + \alpha_{220} b_2 + \alpha_{221} A b_2 + \\
 & + \alpha_{230} b_3 + \alpha_{231} A b_3,
 \end{aligned} \tag{5.4b}$$

$$\begin{aligned}
 A^3 b_3 = & \alpha_{310} b_1 + \alpha_{311} A b_1 + \alpha_{312} A^2 b_1 + \alpha_{313} A^3 b_1 + \\
 & + \alpha_{320} b_2 + \alpha_{321} A b_2 + \\
 & + \alpha_{330} b_3 + \alpha_{331} A b_3 + \alpha_{332} A^2 b_3.
 \end{aligned} \tag{5.4c}$$

Ha szükséges, ezekből az eredményekből további eredmények is levezethetők, pl.

$$\begin{aligned}
 A^3 b_2 = & \alpha_{210} A b_1 + \alpha_{211} A^2 b_1 + \alpha_{212} A^3 b_1 + \\
 & + \alpha_{220} A b_2 + \alpha_{221} A^2 b_2 + \\
 & + \alpha_{230} A b_3 + \alpha_{231} A^2 b_3,
 \end{aligned} \tag{5.4d}$$

ahol $A^2 b_2$ nem szerepel ugyan a lineárisan függetlennek talált vektorok között, de helyére behelyettesíthető (5.4b).

5.1.2 Luenberger-féle irányíthatósági normálalak

Tekintsük a szelekciós sémára adott mintapélda eredményét. A konstrukció szerint $b_1, A b_1, A^2 b_1, A^3 b_1, b_2, A b_2, b_3, A b_3, A^2 b_3$ lineárisan függetlenek, és mivel a feltevés szerint a rendszer irányítható, ezért az állapotter egy bázisát alkotják. Álljon a P mátrix ezekből az oszlopokból és legyen q_i^T a P^{-1} mátrix σ_i -edik sora:

$$P = [b_1 \quad A b_1 \quad A^2 b_1 \quad A^3 b_1 \quad b_2 \quad A b_2 \quad b_3 \quad A b_3 \quad A^2 b_3], \tag{5.5a}$$

$$q_i^T := P^{-1} \text{ mátrix } \sigma_i\text{-edik sora.} \tag{5.5b}$$

Vezessük be az alábbi T koordináta-transzformációt, és határozzuk meg fokozatosan TAT^{-1} és TB értékét. Ennek során vegyük figyelembe, hogy $TT^{-1} = I$, $P^{-1}P = I$, továbbá használjuk ki az (5.4a-d) összefüggéseket.

$$T = \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_1^T A \\ q_1^T A^2 \\ q_1^T A^3 \\ q_2^T \\ q_2^T A \\ q_3^T \\ q_3^T A \\ q_3^T A^2 \end{bmatrix} \Rightarrow TA = \begin{bmatrix} q_1^T A \\ q_1^T A^2 \\ q_1^T A^3 \\ q_1^T A^4 \\ q_2^T A \\ q_2^T A^2 \\ q_3^T A \\ q_3^T A^2 \\ q_3^T A^3 \end{bmatrix} \Rightarrow TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

$$TB = \begin{bmatrix} q_1^T b_1 & q_1^T b_2 & q_1^T b_3 \\ q_1^T Ab_1 & q_1^T Ab_2 & q_1^T Ab_3 \\ q_1^T A^2 b_1 & q_1^T A^2 b_2 & q_1^T A^2 b_3 \\ q_1^T A^3 b_1 & q_1^T A^3 b_2 & q_1^T A^3 b_3 \\ q_2^T b_1 & q_2^T b_2 & q_2^T b_3 \\ q_2^T Ab_1 & q_2^T Ab_2 & q_2^T Ab_3 \\ q_3^T b_1 & q_3^T b_2 & q_3^T b_3 \\ q_3^T Ab_1 & q_3^T Ab_2 & q_3^T Ab_3 \\ q_3^T A^2 b_1 & q_3^T A^2 b_2 & q_3^T A^2 b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_{212} & \alpha_{313} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Itt kihasználtuk, hogy például a $(TAT^{-1})_{23}$ elem számításakor TA 2-ik sorát, ami $q_1^T A^2$ miatt a T mátrix 3-ik sora, kell összeszorozni a T^{-1} mátrix 3-ik oszlopával, ezért az eredmény 1. Ha viszont a $(TAT^{-1})_{22}$ elemet számítjuk, akkor TA 2-ik sorát, ami $q_1^T A^2$ miatt a T mátrix 3-ik sora, kell összeszorozni a T^{-1} mátrix 2-ik oszlopával, ezért az eredmény 0. Másrészt például $(TAT^{-1})_{4i}$ számításakor TA 4-ik sorát, ami $q_1^T A^4$ miatt már nem sora a T mátrixnak, kell összeszorozni a T^{-1} mátrix i -edik oszlopával, ezért az eredménynek semmi köze TT^{-1} elemeihez, az eredmény általános, amit $*$ -gal jelöltünk.

Hasonlóan például $(TB)_{22}$ számításakor q_1^T -t, ami P^{-1} 4-ik sora, kell összeszorozni Ab_2 -vel, ami P -nek 6-ik oszlopa, ezért az eredmény 0. $(TB)_{32}$ számításakor ugyan $A^2 b_2$ nem oszlopa P -nek, de kihasználható (5.4b) annak belátására, hogy

ebben az esetben is 0 keletkezik. Másrészt viszont például $(TB)_{41}$ számításakor q_1^T -t, ami P^{-1} 4-ik sora, kell megszorozni $A^3 b_1$ -gyel, ami P -nek a 4-ik oszlopa, ezért az eredmény 1 lesz. $(TB)_{42}$ számításakor kihasználható, hogy q_1^T -t, ami P^{-1} 4-ik sora, kell megszorozni $A^3 b_2$ -vel, ami ugyan nem szerepel közvetlenül P oszlopai között, de (5.4d) szerint P bizonyos oszlopainak lineáris kombinációja, ezért az eredmény α_{212} , mert ez a súlya $A^3 b_1$ -nek az (5.4d) kifejezésben.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a példában a T koordináta-transzformáció elvégzése után az $\hat{A} = TAT^{-1}$ mátrix általános elemei a $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sorokban helyezkednek el és a többi elem 0 vagy 1, ahol az egyesek a főátló feletti diagonálisban helyezkednek el, kivéve persze a $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sorok elemeit. A $\hat{B} = TB$ mátrix elemei a $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sorok elemeinek kivételével mind nullák, és ha kiemeljük belőle a $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ -edik sorokat, akkor egy felső háromszögmátrix keletkezik, amelynek a diagonálisában egyesek állnak, és így ez a részmátrix invertálható is. A $\hat{C} = CT^{-1}$ és a $\hat{D} = D$ mátrixok elemei általánosak. Ezt az alakot Luenberger-féle irányíthatósági normálalaknak nevezik [11]. Ezek a tulajdonságok nemcsak a mintapéldára érvényesek.

Algoritmus a Luenberger-féle irányíthatósági normálalak meghatározására:

1. Alkalmazzuk a szelekciós sémát az (A, B) pár $M_c = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ irányíthatósági mátrixára. Határozzuk meg a rendszer $v_1, \dots, v_r$ irányíthatósági indexeit és a belőlük számítható $\sigma_1 = v_1, \sigma_2 = v_1 + v_2, \dots, \sigma_r = v_1 + \dots + v_r$ mennyiségeket.
2. Képezzük a $P = [b_1, Ab_1, \dots, A^{v_1-1}b_1, \dots, b_r, Ab_r, \dots, A^{v_r-1}b_r]$ mátrixot, határozzuk meg a P^{-1} mátrixot és szelektáljuk ki a $q_i^T := P^{-1}$ mátrix σ_i -edik sorait, $i = 1, \dots, r$.
3. Határozzuk meg a T koordináta-transzformáció mátrixát, amelynek sorait rendre a $q_1^T, q_1^T A, \dots, q_1^T A^{v_1-1}, \dots, q_r^T, q_r^T A, \dots, q_r^T A^{v_r-1}$ sorvektorok alkotják.
4. Határozzuk meg az (A, B, C, D) rendszer $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ Luenberger-féle irányíthatósági normálalakját az $\hat{A} = TAT^{-1}$, $\hat{B} = TB$, $\hat{C} = CT^{-1}$, $\hat{D} = D$ összefüggések alapján.

Megjegyzés:

- i) Egy $\varphi(s) = s^n + a_{n-1}s + \dots + a_1s + a_0$ polinom kísérő mátrixa és annak determinánsa

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \det(sI - A_\varphi) = \varphi(s).$$

- ii) A MIMO pólusáthelyezési feladat megoldásakor jól kihasználható lesz, hogy a Luenberger-féle irányíthatósági normálalakban $\hat{A}$ egy polinom kísérőmátrixával egyenlő, eltekintve a $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ soroktól.
- iii) A MIMO minimálisrendű megfigyelő tervezéskor ki fogjuk használni, hogy $\hat{C} = [C_1 \ 0]$, ahol a C_1 blokk alsó háromszögmátrix. Mivel a megfigyelő tervezés a pólusáthelyezés duálisa, ezért célszerű a normálalakban az általános sorokat előre mozgatni, ami a bázisvektorok permutációjának felel meg.
- iv) Az általános sorokat előre mozgathatjuk úgy is, hogy a $\tilde{T}$ koordináta-transzformáció mátrixába a bázisvektorokat eleve a $q_1^T A^{v_1-1}, \dots, q_r^T A^{v_r-1}, q_1^T, q_1^T A, \dots, q_1^T A^{v_1-2}, \dots, q_r^T, q_r^T A, \dots, q_r^T A^{v_r-2}$ sorrendben helyezzük el. Ez azonban máshová helyezi a korábban főátlóban lévő egyeseket, és ezáltal elvesz a kísérőmátrix jelleg. Ilyenkor egy előírt A_φ betartásához a kísérőmátrixon is el kell végezni a $\tilde{A}_\varphi = T_{perm} A_\varphi T_{perm}^T$ transzformációt, ahol T_{perm} a bázisvektorok T -hez képesti permutációjának megfelelő koordináta-transzformáció mátrixa.

Példa T_{perm} meghatározására iv)-hez (lásd korábbi példa):

Permutáció:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \xrightarrow{Perm} \{4, 5, 6, 1, 7, 2, 8, 9, 3\}.$$

Eredeti bázis:

$$\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$$

Permutáció utáni bázis:

$$\{h_1 = f_4, h_2 = f_6, h_3 = f_9, h_4 = f_1, h_5 = f_2, h_6 = f_3, h_7 = f_5, h_8 = f_7, h_9 = f_8\},$$

$$T_{perm} = [f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9] = [e_4, e_5, e_6, e_1, e_7, e_2, e_8, e_9, e_3],$$

felírva $h_1, h_2, \dots, h_9$ bázisban

ahol e_i az i -edik standard (oszlop) egységvektor, $T_{perm}^{-1} = T_{perm}^T$.

(A teljes koordináta-transzformáció a régi T -vel kifejezve $\tilde{T} = T_{perm}T$, amivel $\tilde{A} = \tilde{T}A\tilde{T}^{-1}$, $\tilde{B} = \tilde{T}B$ stb. lenne. A permutációt azonban csak akkor kell meghatározni, ha transzformálni akarjuk A_φ -t. Különbözően elég közvetlenül felépíteni $\tilde{T}$ -ot, és ennek alávetni A, B, C, D -t.)

Megjegyzés: Mivel a Luenberger-féle megfigyelő normálalakot később az irányíthatóság és a megfigyelhetőség dualitására hivatkozva egy fiktív rendszer Luenberger-féle irányíthatósági normálalakjának közbeiktatásával határozzuk majd meg, ezért szükség lesz a koordináta-transzformációk precíz megkülönböztetésére. Ennek érdekében a továbbiakban a $T_{cLUE} := T$ és $\tilde{T}_{cLUE} := \tilde{T}$ jelölést fogjuk használni:

$$(A, B, C, D) \xrightarrow{T_{cLUE}} (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}) \quad (5.6a)$$

$$(A, B, C, D) \xrightarrow{\tilde{T}_{cLUE}} (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}) \quad (5.6b)$$

Vegyük észre, hogy $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ és $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ abban különböznek, hogy míg $(\hat{A}, \hat{B})$ -ban az általános sorok a $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ -edik sorok, addig $(\tilde{A}, \tilde{B})$ -ban az általános sorok az $1, \dots, r$ -edik sorok, és a $\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ felbontásban B_1 felső háromszög-mátrix, amelynek a diagonálisában mindenütt 1 áll, ezért invertálható.

5.1.3 Luenberger-féle megfigyelhetőségi normálalak

Az irányíthatóság és megfigyelhetőség dualitása miatt egy fiktív rendszer közbeiktatásával bevezethetjük a Luenberger-féle megfigyelhetőségi normálalakot:

$$(A, B, C, D) \rightarrow (A^T, C^T, B^T, D^T)_{II} \xrightarrow{T_{cLUE}} (\hat{A}^T, \hat{C}^T, \hat{B}^T, \hat{D}^T)_{II} \rightarrow (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$$

$$(A, B, C, D) \rightarrow (A^T, C^T, B^T, D^T)_{II} \xrightarrow{\tilde{T}_{cLUE}} (\tilde{A}^T, \tilde{C}^T, \tilde{B}^T, \tilde{D}^T)_{II} \rightarrow (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$$

Jelölje a fiktív II. rendszer irányíthatósági indexeit $v_{1,II}, \dots, v_{m,II}$, akkor az eredeti rendszer megfigyelhetőségi indexeit $d_1 := v_{1,II}, \dots, d_m := v_{m,II}$ révén definiáljuk. A kitüntetett további indexek $\sigma_1 := d_1, \sigma_2 := d_1 + d_2, \dots, \sigma_m := d_1 + d_2 + \dots + d_m$.

Vegyük észre, hogy $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ és $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ abban különböznek, hogy míg $(\hat{A}, \hat{C})$ -ben az általános oszlopok a $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ -edik oszlopok, addig $(\tilde{A}, \tilde{C})$ -ban az általános oszlopok az $1, \dots, r$ -edik oszlopok és a $\tilde{C} = [C_1 \ 0]$ felbontásban C_1 alsó háromszög-mátrix, amelynek a diagonálisában mindenütt 1 áll, ezért invertálható.

Határozzuk meg a Luenberger-féle megfigyelhetőségi normálalakra való áttérés $T_{o,LUE}$ és $\tilde{T}_{o,LUE}$ koordináta-transzformációit:

$$(A, B, C, D) \xrightarrow{T_{o,LUE}} (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}),$$

$$(A, B, C, D) \xrightarrow{\tilde{T}_{o,LUE}} (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}).$$

Világos, hogy $\hat{A}^T = T_{c,LUE} A^T T_{c,LUE}^{-1}$, $\hat{C}^T = T_{c,LUE} C^T$, $\hat{B}^T = B^T T_{c,LUE}^{-1}$, $\hat{D}^T = D^T$, ezért $\hat{A} = T_{c,LUE}^{-T} A T_{c,LUE}^T$, $\hat{C} = C T_{c,LUE}^T$, $\hat{B} = T_{c,LUE}^{-T} B$, $\hat{D} = D$, ahonnan következik

$$T_{o,LUE} = T_{c,LUE}^{-T}, \hat{A} = T_{o,LUE} A T_{o,LUE}^{-1}, \hat{B} = T_{o,LUE} B, \hat{C} = C T_{o,LUE}^{-1}, \hat{D} = D, \quad (5.7a)$$

és hasonlóan

$$\tilde{T}_{o,LUE} = \tilde{T}_{c,LUE}^{-T}, \tilde{A} = \tilde{T}_{o,LUE} A \tilde{T}_{o,LUE}^{-1}, \tilde{B} = \tilde{T}_{o,LUE} B, \tilde{C} = C \tilde{T}_{o,LUE}^{-1}, \tilde{D} = D. \quad (5.7b)$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a megfigyelhetőségi normálalak meghatározásakor a $T_{c,LUE}$ transzformációt a fiktív $(A^T, C^T)_H$ párhoz határoztuk meg, nem pedig az eredeti rendszerhez. (A megfigyelhetőségi normálalakokkal kapcsolatban ezt a továbbiakban is mindig így kell érteni).

Példa a Luenberger-féle megfigyelhetőségi normálalak meghatározására:

Tegyük fel, hogy elvégeztük a szelekciós sémát az $(A^T, C^T)_H$ páron és eredményül a fiktív rendszer $v_{1,H} = 4$, $v_{2,H} = 2$, $v_{3,H} = 3$ irányíthatósági indexeit kaptuk. Ezért $d_1 = 4$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$ az eredeti rendszer megfigyelhetőségi indexei és $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 6$, $\sigma_3 = 9$, továbbá

$$\hat{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \hat{C}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ha az általános sorokat a $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \xrightarrow{\text{Perm}} \{4,5,6,1,7,2,8,9,3\}$ permutációval előre mozgatjuk, akkor

$$\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \tilde{C}^T = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

lesz az eredmény. Végezzük el a transzponálást, akkor

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|cccccc} * & * & * & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (5.8a)$$

$$\tilde{C} = [C_1 \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (5.8b)$$

5.2 Pólusát helyezés állapot-visszacsatolással

A pólusát helyezési feladatot a könyv I. kötetének 10. és 11. fejezetében [1] már vizsgáltuk. Az ott tárgyalt megoldások (állapot-visszacsatolás, alapjel miatti korrekció, integráló szabályozás, terhelésbecslés) mind érvényben maradnak, kivéve az Ackermann-képletet, amely csak SISO rendszerek esetén érvényes. A diszkrétidejű szabályozások tervezésénél kihasználható a folytonosidejű és a diszkrétidejű rend-

szerek algebrai hasonlósága, ezért elegendő a MIMO folytonosidejű állapotvisszacsatolás megtervezésére módszert kidolgozni.

Felteszük, hogy a rendszer teljesen irányítható. Ha nem lenne az, akkor irányíthatósági lépcsős alakra hozhatjuk, és ha a nem irányítható módusok stabilak (tehát a rendszer stabilizálható), akkor az irányítható módusok kimoszthatók állapotvisszacsatolással, a nem irányítható módusok pedig megmaradnak stabilnak, mert az állapot-visszacsatolás nem hat rájuk.

Tekintsük tehát a teljesen irányítható *folytonosidejű rendszert* (vagy annak irányítható alterét). Legyen $\varphi_c(s) = (s - s_1) \cdots (s - s_n)$ a zárt rendszer előírt karakterisztikus egyenlete, amely megmondja, hogy hová kell kimosztítani a szakasz pólusait (az A mátrix sajátértékeit) az $u = -Kx$ állapot-visszacsatolással: $\varphi_c(s) = \det(sI - (A - BK))$. Tudjuk, hogy koordináta-transzformáció esetén a karakterisztikus egyenlet invariáns marad, ezért a pólusáthelyezési feladatot a Luenberger-féle irányíthatósági normálalakban is elvégezhetjük a következő lépésekben:

- 1) Hozzuk a rendszert az (5.6a) vagy (5.6b) Luenberger-féle irányíthatósági normálalakra.
- 2a) Az (5.6a) szerinti $(\hat{A}, \hat{B})$ esetén az általános sorokat nem mozdítottuk előre. Képezzük a zárt rendszer $\varphi_c(s)$ karakterisztikus polinomjának A_{φ_c} kísérőmátrixát. Szelektáljuk ki az $\hat{A}, \hat{B}, A_{\varphi_c}$ mátrixok $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ általános (general) sorait, és jelölje az így kapott részmátrixokat rendre $\hat{A}_{gen}, \hat{B}_{gen}, A_{\varphi_c, gen}$. Mivel $\hat{B}$ -nak a ki nem szelektált sorai mind nullák, ezért $\hat{A}$ és $\hat{A} - \hat{B}\hat{K}$ eme sorai egyformák, és megegyeznek A_{φ_c} -vel. Elegendő tehát biztosítani, hogy teljesüljön $\hat{A}_{gen} - \hat{B}_{gen}\hat{K} = A_{\varphi_c, gen}$. Figyelembe véve még, hogy $u = -\hat{K}\hat{x} = -\hat{K}\hat{T}_{c, LUE}x$, ezért

$$\hat{K} = \hat{B}_{gen}^{-1} (\hat{A}_{gen} - A_{\varphi_c, gen}), \quad (5.9a)$$

$$K = \hat{K}\hat{T}_{c, LUE}. \quad (5.9b)$$

- 2b) Az (5.6b) szerinti $(\bar{A}, \bar{B})$ esetén az általános sorokat már előre mozgattuk a bázisvektorok permutációjával. Képezzük a zárt rendszer $\varphi_c(s)$ karakterisztikus polinomjának A_{φ_c} kísérőmátrixát. Határozzuk meg a bázisvektorok permutációjának megfelelő T_{perm} koordináta-transzformációt. Szelektáljuk ki az $\bar{A}, \bar{B}, T_{perm} A_{\varphi_c} T_{perm}^T$ mátrixok $1, \dots, r$ sorait, és jelölje az így kapott részmátri-

xokat rendre $\tilde{A}_{gen}, \tilde{B}_{gen}, \tilde{A}_{\varphi_c, gen}$. Mivel $\tilde{B}$ -nak a ki nem szelektált sorai mind nullák, ezért $\tilde{A}$ és $\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}$ eme sorai egyformák, és megegyeznek $T_{perm} A_{\varphi_c} T_{perm}^T$ -vel. Elegendő tehát biztosítani, hogy teljesüljön $\tilde{A}_{gen} - \tilde{B}_{gen} \tilde{K} = \tilde{A}_{\varphi_c, gen}$. Figyelembe véve még, hogy $u = -\tilde{K}\tilde{x} = -\tilde{K}\tilde{T}_{c, LUE}$, ezért

$$\tilde{K} = \tilde{B}_{gen}^{-1} (\tilde{A}_{gen} - \tilde{A}_{\varphi_c, gen}), \quad (5.10a)$$

$$K = \tilde{K}\tilde{T}_{c, LUE}. \quad (5.10b)$$

A pólusát helyezési feladat megoldását a (SISO rendszereknél használt jelöléshez hasonlóan) röviden a következőképp fogjuk jelölni:

$$(A, B) \xrightarrow[M_c]{\varphi_c(s)} K, \quad (5.11)$$

de a most megismert vagy azzal ekvivalens más pólusát helyezési módszert fogjuk érteni alatta MIMO rendszerek esetén.

Ha a rendszer *diszkrétidejű* és a szakasz modellje

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \Phi x_i + \Gamma u_i, \\ y_i &= C x_i + D u_i, \end{aligned} \quad (5.12)$$

akkor az algebrai hasonlóság miatt (Φ, Γ, C, D) Luenberger-féle normálalakjai a folytonos időre megismert módszerrel határozhatók meg. A pólusát helyezési feladat megoldásának lépései is azonosak, de $M_c = [\Gamma \ \Phi\Gamma \ \dots \ \Phi^{n-1}\Gamma]$ az irányíthatósági mátrix, és a zárt rendszer $\varphi_c(z)$ karakterisztikus polinomját a $|z| < 1$ stabilitástartománynak megfelelően kell megválasztani:

$$(\Phi, \Gamma) \xrightarrow[M_c]{\varphi_c(z)} K. \quad (5.13)$$

5.3 Állapotmegfigyelő tervezés

Felteszük, hogy a rendszer teljesen megfigyelhető. Ha nem lenne az, akkor megfigyelhetőségi lépcsős alakra hozhatjuk, és ha a nem megfigyelhető módusok stabilak (tehát a rendszer detektálható), akkor az állapot aszimptotikusan becsülhető teljesrendű megfigyelővel. A megfigyelhető módusokhoz tartozó becslési hiba tranziense gyorsítható, a nem megfigyelhető módusokhoz tartozó becslési hiba tranziens-

se pedig stabil marad. Tekintsük tehát a teljesen megfigyelhető rendszert (vagy annak megfigyelhető alterét).

5.3.1 Teljesrendű állapotmegfigyelő tervezése

Ha a rendszer *folytonosidejű* és a teljesrendű állapotmegfigyelő alakja

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = F\hat{x} + Gy + Hu, \quad \dim \hat{x} = \dim x = n, \quad (5.14)$$

akkor bevezetve az $\bar{x} = x - \hat{x}$ becslési hibát, a könyv I. kötetének 10. fejezete szerint [1], a következő feltételeket kell kielégíteni:

- i) $F = A - GC$ és $H = B$,
- ii) $\dot{\bar{x}} = F\bar{x}$ stabil és gyors.

Ehhez előírható a megfigyelő

$$\varphi_o(s) = \det(sI - (A - GC)) = \det(sI - (A^T - C^T G^T)) \quad (5.15)$$

karakterisztikus polinomja a $\operatorname{Re} s < 0$ stabilitástartomány figyelembevételével, és a feladat ezután G^T meghatározása. Jól látható, hogy a feladat rokon a pólusáthelyezési feladattal, hiszen a fiktív $(A^T, C^T)_H$ párhoz kell a $\varphi_o(s)$ feltételt kielégítő $K_H = G^T$ állapotvisszacsatolást meghatározni, ami a fiktív rendszer Luenberger-féle irányíthatósági normálalakjára való áttéréssel vagy más ekvivalens módszerrel elvégezhető a MIMO rendszerekre kidolgozott sémával:

$$(A, C) \rightarrow (A^T, C^T)_H \xrightarrow{M_{c,H}} K_H \rightarrow G = K_H^T \rightarrow F = A - GC. \quad (5.16)$$

Ha a rendszer *diszkrétidejű* és a teljesrendű megfigyelő alakja

$$x_{i+1} = Fx_i + Gy_i + Hu_i, \quad (5.17)$$

akkor az algebrai hasonlóság miatt

- i) $F = \Phi - GC$ és $H = \Gamma$,
- ii) $\bar{x}_{i+1} = F\bar{x}_i$ stabil és gyors.

Előírható a megfigyelő $\varphi_o(z) = \det(zI - (\Phi - GC))$ karakterisztikus polinomja a $|z| < 1$ stabilitástartomány figyelembevételével, és a folytonosidejű feladattal való algebrai hasonlóság miatt a megoldás a következő sémával határozható meg:

$$(\Phi, C) \rightarrow (\Phi^T, C^T)_{II} \xrightarrow[M_{c,II}]{\varphi_o(z)} K_{II} \rightarrow G = K_{II}^T \rightarrow F = \Phi - GC. \quad (5.18)$$

Ha teljesrendű *aktuális* megfigyelőt alkalmazunk:

$$\hat{x}_i = F\hat{x}_{i-1} + Gy_i + Hu_{i-1}, \quad (5.19)$$

ami egy T mintavételi idővel korábban reagál a kimenet aktuális értékére, és ezáltal kedvezőbb megoldás, akkor a könyv I. kötetének 11. fejezete szerint [1]

$$i) \quad F = \Phi - GC\Phi \text{ és } H = \Gamma - GCG\Gamma,$$

$$ii) \quad \tilde{x}_i = F\tilde{x}_{i-1} \text{ stabil és gyors.}$$

Ha $(\Phi, C\Phi)$ megfigyelhető, azaz $(\Phi^T, \Phi^T C^T)_{II}$ irányítható, akkor az aktuális megfigyelő a következő sémával határozható meg:

$$(\Phi, C) \rightarrow (\Phi^T, \Phi^T C^T)_{II} \xrightarrow[M_{c,II}]{\varphi_o(z)} K_{II} \rightarrow G = K_{II}^T \rightarrow F = \Phi - GC\Phi, \quad (5.20)$$

$$H = \Gamma - GCG\Gamma.$$

5.3.2 Minimálisrendű állapotmegfigyelő tervezése

MIMO rendszer esetén célszerű a szabályozó komplexitását azáltal csökkenteni, hogy maximálisan kihasználjuk a kimenő jelben lévő információt a megfigyelő dinamikus részében. Tekintsük a folytonosidejű esetet, és legyen a megfigyelő alakja

$$\frac{dz}{dt} = Fz + Gy + Hu, \quad \dim z = p, \quad (5.21a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ x(t) - \mathcal{F} \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \right\} = 0, \quad (5.21b)$$

$$z = Tx + e, \quad (5.21c)$$

akkor

$$x(t) - \mathcal{F} \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} x(t) - \mathcal{F} \begin{bmatrix} 0 \\ e(t) \end{bmatrix} = 0, \quad (5.22a)$$

$$I_n - \mathcal{F} \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} = 0_{n \times n}, \quad (5.22b)$$

$$e(t) \rightarrow 0, \quad (5.22c)$$

Mivel $\text{rank } \mathcal{F} \leq \min\{n, m + p\}$ és $\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} \leq \min\{m + p, n\}$, ezért

$$\text{rank} \left\{ \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} \right\} = \text{rank} I_n = n \leq \text{rank} \{ \text{rank } \mathcal{T}, \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} \} \leq \min \{ m + p, n \} \leq m + p.$$

Ha $p < n - m$ lenne, akkor $n \leq m + p < m + n - m = n \Leftrightarrow n < n$ ellentmondás lenne, ezért $p \geq n - m$. Megmutatjuk, hogy konstruálható $p_{\min} = n - m$ -edrendű megfigyelő.

Tetszőleges p -edrendű megfigyelő és $D = 0$ esetén (5.21a-c szerint)

$$\dot{z} = T\dot{x} + \dot{e} = T(Ax + Bu) + \dot{e} = F(Tx + e) + GCx + Hu, \quad (5.23a)$$

$$\dot{e} = Fe - (TA - FT - GC)x - (TB - H)u, \quad (5.23b)$$

ahonnan következik, hogy

$$\text{i) } TA - FT - GC = 0 \text{ és } TB = H,$$

$$\text{ii) } \dot{e} = Fe \text{ stabil és gyors.}$$

Minimálisrendű állapotmegfigyelő tervezése: $p = n - m$

Hozzuk a rendszert a $\tilde{T}_{o,LUE} = \tilde{T}_{c,LUE}^{-T}$ koordináta-transzformációval Luenberger-féle megfigyelhetőségi normálalakra. Akkor $\tilde{C} = [C_1 \ 0]$, ahol C_1 invertálható $m \times m$ méretű mátrix. A jelölések egyszerűsítése érdekében legyen $T = \tilde{T}_{o,LUE}$, továbbá $\xi = Tx$ az állapot a megfigyelhetőségi normálalakban, $S := C_1^{-1}$ és a transzformált kimenet $\eta := Sy = [I_m \ 0]\xi$. Akkor ξ partícionálható $\xi = \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$ alakban, ahol $\xi \in R^n$, $\eta \in R^m$ és $\zeta \in R^{n-m} = R^p$. Partícionáljuk az $\tilde{A}, \tilde{B}$ mátrixokat is a megfigyelhetőségi normálalakban η és ζ méretének megfelelően:

$$\xi = \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = TAT^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right], \quad \tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= A_{11}\eta + A_{12}\zeta + B_1u, \\ \dot{\zeta} &= A_{21}\eta + A_{22}\zeta + B_2u. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Mivel u és y mérhető, ezért η és (elvben) $\dot{\eta}$ is számítható, ezért

$$A_{12}\zeta = \dot{\eta} - A_{11}\eta - B_1u \quad (5.26)$$

fiktív kimenetnek tekinthető. Az állapotegyenlet tehát felfogható, mint egy fiktív rendszer, amelynek alakja

$$\dot{\zeta} = A_{22}\zeta + \underbrace{(A_{21}\eta + B_2u)}_{\text{bemenet}} + \underbrace{A_{12}\zeta}_{\text{megfigyelés}} \quad (5.27)$$

és amelyhez azután $\dim \zeta = n - m = p_{\min}$ teljesrendű megfigyelő tervezhető.

Álljon ebben a teljesrendű megfigyelőben G helyett L , akkor $\hat{\zeta}$ teljesrendű megfigyelője

$$\frac{d\hat{\zeta}}{dt} = (A_{22} - LA_{12})\hat{\zeta} + L(\dot{\eta} - A_{11}\eta - B_1u) + (A_{21}\eta + B_2u). \quad (5.28)$$

Válasszuk a $z := -L\eta + \hat{\zeta}$ jelet a végső megfigyelő belső állapotváltozójának, akkor $\dim z = p_{\min} = n - m$ és

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -L\dot{\eta} + \dot{\hat{\zeta}} = \\ &= -L\dot{\eta} + (A_{22} - LA_{12})(z + L\eta) + L(\dot{\eta} - A_{11}\eta - B_1u) + (A_{21}\eta + B_2u) = \\ &= (A_{22} - LA_{12})z + \{(A_{22} - LA_{12})L - LA_{11} + A_{21}\}\eta + (B_2 - LB_1)u. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Hátra van még L megválasztása. Legyenek a Luenberger-féle megfigyelhetőségi normálalakra hozatalkor kapott megfigyelhetőségi indexek $d_1, \dots, d_m$. Mivel $\dim \hat{\zeta} = p_{\min} = n - m$, ezért $\hat{\zeta}$ teljesrendű állapotmegfigyelője $\varphi_o(s)$ karakterisztikus polinomjának fokszáma $gr \varphi_o = n - m$. Feltettük, hogy az eredeti rendszer teljesen megfigyelhető, ezért $d_1 + d_2 + \dots + d_m = n$. Ha tehát előírjuk, hogy $\varphi_o(s)$ faktorizálható legyen

$$\varphi_o(s) = P_{d_1-1}(s) \cdots P_{d_m-1}(s) \quad (5.30)$$

alakban, ahol $P_{d_i-1}(s)$ polinom, amelynek fokszáma $d_i - 1$, $i = 1, \dots, m$, akkor teljesülni fog a $gr \varphi_o = n - m$ feltétel. Megmutatható, hogy így faktorizálva $\varphi_o(s)$ -t, a keresett L további számítások nélkül meghatározható. Legyen ugyanis

$$P_{d_i-1}(s) = s^{d_i-1} + g_{i,d_i-2}s^{d_i-2} + \dots + g_{i,1}s + g_{i,0}, \quad (5.31)$$

akkor

$$L = \begin{bmatrix} g_{10} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{1,d_1-2} & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & g_{20} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & g_{2,d_2-2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & g_{m0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{m,d_m-2} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

megfelel.

Jól látható a (5.29) egyenletből, hogy $\eta = Sy = C_1^{-1}y$ figyelembevételével az eredő minimálisrendű megfigyelőben szereplő mátrixok a következők lesznek:

$$F = A_{22} - LA_{12}, \quad (5.33a)$$

$$G = [(A_{22} - LA_{12})L - LA_{11} + A_{21}]C_1^{-1}, \quad (5.33b)$$

$$H = B_2 - LB_1. \quad (5.33c)$$

A minimálisrendű megfigyelő *dinamikus* és *statikus* részből áll, melyek a következők:

$$\frac{dz}{dt} = Fz + Gy + Hu, \quad (5.34a)$$

$$\hat{x} = T^{-1} \begin{bmatrix} \eta \\ \hat{\zeta} \end{bmatrix} = \tilde{T}_{oLUE}^{-1} \begin{bmatrix} \eta \\ z + L\eta \end{bmatrix} = \tilde{T}_{cLUE}^T \begin{bmatrix} C_1^{-1} & 0_{m \times (n-m)} \\ LC_1^{-1} & I_{n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \mathcal{F} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}. \quad (5.34b)$$

A megfigyelő bemenete u és y , belső állapota z , kimenete pedig $\hat{x}$.

Példa: L -nek (5.32) szerinti választása mellett valóban teljesül $\varphi_o(s) = \det(sI - F)$. A korábbi példában szereplő (5.8a) felhasználásával írható, hogy

$$A_{22} - LA_{12} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{12} & 0 & 0 \\ g_{13} & 0 & 0 \\ 0 & g_{20} & 0 \\ 0 & 0 & g_{30} \\ 0 & 0 & g_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & g_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{20} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{31} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -g_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g_{20} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -g_{31} \end{bmatrix},$$

ezért $F = A_{22} - LA_{12}$ polinomok kísérőmátrixainak blokkdiagonális mátrixa, és így

$$\varphi_o(s) = \det(sI - F) = (s^3 + g_{12}s^2 + g_{11}s + g_{10})(s + g_{20})(s^2 + g_{31}s + g_{30}).$$

5.4 Robusztus pólusáthelyezés

MIMO rendszerek esetén az állapot-visszacsatolás K mátrixának $r \times n$ eleme van, a zárt rendszer előírt $\varphi_c(s)$ karakterisztikus polinomjának ellenben csak n paramétere, ezért a $\varphi_c(s) = \det(sI - (A - BK))$, $K = ?$ feladat alulspecifikált, és a Luenberger-féle irányíthatósági normálalakon alapuló módszer a létező megoldások közül egy meghatározottat választ. Világos azonban, hogy jobb lenne egy olyan optimális megoldást választani, amelynél a zárt rendszer sajátértékei a $\varphi_c(s)$ -ben specifikáltakhoz képest a legkevésbé érzékenyek a rendszer A, B és a szabályozó K mátrixainak üzem közbeni megváltozására. A továbbiakban Kautski et al. [12]

eredményeire támaszkodva egy ilyen módszert ismertetünk. A módszert a MATLAB Control System Toolboxában a `place` függvény realizálja.

5.4.1 A robusztus pólusáthelyezési feladat megfogalmazása

A folytonosidejű és a diszkrétidejű probléma párhuzamos kezelése érdekében egy-egy λ -t fogunk használni s , illetve z helyett, és ha szükséges, a megfelelő helyen utalunk a két eset közötti különbségekre. A jelölések egyszerűsítése érdekében legyen $F := A - BK$.

1. feladat: Adott az $(A_{n \times n}, B_{n \times r})$ pár és az n komplex számból álló $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ halmaz, amely zárt a komplex konjugált műveletre, keresendő olyan $K_{r \times n}$, hogy a zárt rendszer $F = A - BK$ mátrixának sajátértékei λ_i , $i = 1, \dots, n$ legyenek.

Felhasználjuk az irányítástechnikából és a lineáris algebrából a következő összefüggéseket:

- i) (A, B) teljesen irányítható, ha $\{w^T A = \mu w^T \text{ és } w^T B = 0\} \Leftrightarrow w^T = 0$. Ekkor ugyanis $\forall K$ esetén $w^T (A - BK) = \mu w^T$. Ezért μ sajátértéke $F = A - BK$ -nak $\forall K$ esetén, ha $w^T \neq 0$, és μ nem mozdítható ki állapot-visszacsatolással. Az ilyen μ a rendszer nem irányítható módusú pólusa, és az ilyen μ -nek szerepelnie kell Λ -ban.
- ii) Ha (A, B) nem teljesen irányítható, akkor az 1. feladatnak létezik K megoldása, ha Λ partícionálható $\Lambda = [\Lambda_c \ \Lambda_c^-]$ alakban, ahol Λ_c^- tartalmazza az (A, B) nem irányítható módusú pólusait.
- iii) Ha x_i és w_i^T rendre az $F = A - BK$ halmaz jobb oldali és bal oldali sajátvektorai, amelyek a λ_i sajátértékhez tartoznak, azaz $F x_i = \lambda_i x_i$ és $w_i^T F = \lambda_i w_i^T$, $i = 1, \dots, n$, továbbá F nem-defektív, azaz F sajátvektorai lineárisan függetlenek (bázist alkotnak, és így F diagonalizálható), akkor λ_i érzékenysége az A, B, K mátrixok perturbációjára a $c_i = 1/s_i = \|w_i\|_2 \|x_i\|_2 / |w_i^T x_i| \geq 1$ kondíciószámától függ. Precízebben, ha F elemeinek a perturbációja $O(\varepsilon)$, akkor λ_i elsőrendű perturbációjának nagyságrendje $O(c_i \varepsilon)$. A cél tehát a kondíciószám csökkentése. A sajátértékek érzékenységére felső korlát az $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ mátrix $\kappa_2(X)$ kondíciószáma, mert $\max c_i \leq \kappa_2(X) \equiv \|X\|_2 \|X^{-1}\|_2$.

iv) A kondíciószám pontosan akkor veszi fel a $c_i = 1$ minimális értéket minden $i = 1, \dots, n$ esetén, ha az F mátrix normális, azaz $F^* F = F F^*$ (itt F^* az F transzponáltjának a konjugáltja). Ebben az esetben F sajátvektorai átskálázhatók úgy, hogy C^n -nek (a komplex szám koordinátájú n -dimenziós vektorok terének) egy ortonormált bázisát adják, azaz $X^{-1} F X = \Lambda$, amikor is a robusztus pólusáthelyezési feladatot perfektül kondicionálnak nevezzük és $\kappa_2(X) = 1$.

A továbbiakban feltesszük, hogy $F = A - BK$ nem-defektív, azaz a sajátvektorraiból álló X mátrix invertálható, továbbá $\text{rank}(B) = r$ (maximális).

2. feladat: Adott az $(A_{n \times n}, B_{n \times r})$ pár és az n komplex számból álló $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ halmaz, amely zárt a komplex konjugált műveletre, keresendő olyan $K_{r \times n}$, hogy az $F = A - BK$ mátrix sajátértékei λ_i , $i = 1, \dots, n$ legyenek és az F sajátvektoraiból álló $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ mátrix elégítse ki az

$$(A - BK)X = X\Lambda \quad (5.35)$$

feltételt, továbbá a feladat optimálisan (robusztusan) kondicionált legyen valamilyen v kondíciószám szempontjából.

5.4.2 A megoldás tulajdonságai

5.1 Tétel: Adott Λ és X esetén (5.35) megoldható, ha

$$U_1^T (AX - X\Lambda) = 0, \quad (5.36)$$

ahol

$$B = [U_0 \ U_1] \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.37)$$

továbbá $U = [U_0 \ U_1]$ ortogonális és Z nonszinguláris. Ekkor K kifejezhető a következő explicit alakban:

$$K = Z^{-1} U_0^T (A - X\Lambda X^{-1}). \quad (5.38)$$

Bizonyítás: (5.35) szerint

$$BK = A - X\Lambda X^{-1}, \quad (5.39)$$

amit $U^T = \begin{bmatrix} U_0^T \\ U_1^T \end{bmatrix}$ -vel balról megszorozva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} ZK &= U_0^T (A - XAX^{-1}), \\ 0 &= U_1^T (A - XAX^{-1}), \end{aligned} \quad (5.40)$$

ahonnan következik (5.38).

Megjegyzés:

- i) Az (5.39) és (5.37) egyenletek felhasználásával írható, hogy $\text{range}(A - XAX^{-1}) \subset \text{range}(B) \equiv \text{range}(U_0)$, ezért $\text{range}(A - XAX^{-1})$ és $\text{kernel}(B) = \text{range}(U_1)$ egymásra merőleges alterek, továbbá teljesül (5.36).
- ii) Az (5.37) felbontás meghatározható szinguláris érték felbontással vagy QR faktorizációval.

1) Szinguláris érték felbontás esetén $B = U \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T$, ezért $Z = \Sigma V^T$, ahol

$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ pozitív mátrix.

2) QR felbontás esetén $B = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$ és R felső háromszögmátrix.

Következmény: Legyen $F = A - BK$ -nak a λ_i sajátértékéhez tartozó sajátvektora x_i , akkor

$$x_i \in \mathcal{S}_i := \text{kernel}\{U_1^T (A - \lambda_i I)\}, \quad (5.41a)$$

$$\dim \mathcal{S}_i = r + k_{\lambda_i}, \quad (5.41b)$$

ahol

$$k_{\lambda_i} := \dim(\text{kernel}\{[B \mid A - \lambda_i I]^T\}), \quad (5.41c)$$

Az állítás közvetlenül következik (5.36)-ból: $U_1^T (Ax_i - \lambda_i x_i) = 0 \Rightarrow x_i \in \mathcal{S}_i, \forall i$. Másrészt k_{λ_i} definíciója szerint $n - k_{\lambda_i} = \text{rank}[B \mid A - \lambda_i I]$, továbbá (5.36) és (5.37) alapján

$$\begin{aligned} U^T [B \mid A - \lambda_i I] &= [U^T B \mid U^T (A - \lambda_i I)] = \left[\begin{bmatrix} U_0^T \\ U_1^T \end{bmatrix} [U_0 \mid U_1] \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} U_0^T \\ U_1^T \end{bmatrix} (A - \lambda_i I) \right] = \\ &= \left[\begin{array}{c|c} Z & U_0^T (A - \lambda_i I) \\ \hline 0 & U_1^T (A - \lambda_i I) \end{array} \right], \end{aligned}$$

és mivel $Z_{r \times r}$ invertálható, ezért $n - k_{\lambda_i} - r = \text{rank}[U_1^T (A - \lambda_i I)]$, ahonnan $\mathcal{S}_i$ definíciója alapján következik (5.41b).

Szükséges feltételek a 2. feladat megoldhatóságához:

- i) Ha (A, B) teljesen irányítható, akkor $k_{\lambda_i} = 0$ és $\dim \mathcal{P}_i = r$, $\forall i$. Ezért a sajátérték multiplicitását úgy kell definiálni Λ -ban, hogy $\lambda_i \in \Lambda$ multiplicitása kisebb legyen vagy egyenlő r -rel.
- ii) Ha (A, B) nem teljesen irányítható, akkor $\Lambda = [\Lambda_c \quad \Lambda_r]$, és ha $\lambda_i \in \Lambda_r$ egy nem irányítható pólus, akkor $k_{\lambda_i} > 0$, és a sajátérték legfeljebb $r + k_{\lambda_i} = \dim \mathcal{P}_i$ multiplicitással szerepelhet.
- iii) Minden $\mu \in \Lambda_r$ nem irányítható pólus esetén teljesülnie kell még, hogy

$$\{w^T B = 0, w^T (A - \mu I) B = 0, w^T (A - \mu I)^2 = 0\} \Rightarrow w^T (A - \mu I) = 0 \quad (5.42)$$

(ami irányítható μ pólus esetén mindig teljesül).

Két fontos kérdés vár tisztázásra:

- a) Mi a hatása a perturbációknak a sajátértékekre?
- b) Mit lehet mondani egy mátrix kondíciós számairól, ha az oszlopait meghatározott alterekből lehet csak megválasztani?

$$X = [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_k],$$

$X_i = S_i D_i$ $n \times m_i$ méretű, X_i oszlopai az $\mathcal{P}_i$ altérből valók, $\dim \mathcal{P}_i = r_i$,

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \dots + \mathcal{P}_k = C^n \text{ (vagy } R^n \text{),}$$

S_i $n \times r_i$ méretű mátrix ortonormált oszlopokkal, $\text{Span}(S_i) = \mathcal{P}_i$,

D_i $r_i \times m_i$ mátrix, $\text{rank}(D_i) = m_i$ (ha X_i oszlopai lineárisan függetlenek)

$$X = [S_1 \quad S_2 \quad \dots \quad S_k] \text{diag}(D_1, D_2, \dots, D_k) =: SD.$$

Becslést keresünk a minimális $\kappa_2(X)$ kondíciószámmra az összes lehetséges D_i választás esetén.

5.4.3 A robusztusság mértékei

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételeket, amelyekben, mivel a szinguláris értékek pozitívak és nem nőnek, a legnagyobb indexű szinguláris érték egyúttal a legkisebb szinguláris érték. Mátrix esetén $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^* A)}$ az indukált operátor norma.

5.2 Tétel: Ha K megoldása a 2. feladatnak és $x(t)$ az $\dot{x} = (A - BK)x$ zárt rendszer tranziense x_0 kezdeti állapot esetén, akkor

$$\|F\|_2 \leq \left(\|A\|_2 + \max_i \{|\lambda_i|\} \cdot \kappa_2(X) \right) / \sigma_r(B), \quad (5.43)$$

$$\|x(t)\|_2 \leq \kappa_2(X) \cdot \max_i \left\{ e^{|\lambda_i|t} \right\} \cdot \|x_0\|_2 \text{ folytonos időben,} \quad (5.44a)$$

$$\|x(k)\|_2 \leq \kappa_2(X) \cdot \max_i \left\{ |\lambda_i|^k \right\} \cdot \|x_0\|_2 \text{ diszkrét időben.} \quad (5.44b)$$

5.3 Tétel: Ha a K állapot-visszacsatoláshoz tartozó sajátértékek halmaza Λ , és minden $\lambda_i \in \Lambda$ stabil, akkor a zárt rendszer perturbált $A - BK + \Delta$ állapotmátrixa stabil marad, ha

$$\left. \begin{aligned} \|\Delta\|_2 &< \min_{s=j\omega} \sigma_n \{sI - (A - BK)\} =: \delta(K) \\ \delta(K) &\geq \min_i \operatorname{Re}(-\lambda_i) / \kappa_2(X) \end{aligned} \right\} \text{ folytonos időben,} \quad (5.45a)$$

$$\left. \begin{aligned} \|\Delta\|_2 &< \min_{z=\exp(j\omega)} \sigma_n \{zI - (A - BK)\} =: \delta(K) \\ \delta(K) &\geq \min_i \operatorname{Re}(1 - |\lambda_i|) / \kappa_2(X) \end{aligned} \right\} \text{ diszkrét időben.} \quad (5.45b)$$

5.4 Tétel: Ha X, S, D a fenti módon vannak definiálva és S^+ jelöli S -nek a Moore–Penrose-féle pszeudoinverzét, akkor

$$\kappa_2(S) := \|S\|_2 \|S^+\|_2 \leq \sqrt{1 + (k-1) \cos(\vartheta_{\min})} \cdot \kappa_2(X) \leq \sqrt{k} \cdot \kappa_2(X), \quad (5.46)$$

ahol $\vartheta_{\min}$ jelöli a minimális szöget két $\mathcal{P}_i$ és $\mathcal{P}_j$ altér között, ahol definíció szerint

$$\cos(\vartheta_{\min}) := \max_{i \neq j} \|S_i^* S_j\|_2 \leq 1. \quad (5.47)$$

Megjegyzés:

i) A fenti módon definiált tetszőleges $X = SD$ esetén $\max \kappa_2(X) \geq \kappa_2(S) / \sqrt{k}$,

feltéve hogy az $\{m_i\}_1^k$ választás mellett teljesül $m_i \leq r_i$ és $\sum_{i=1}^k m_i = n$.

ii) A $\kappa_2(S) / \sqrt{k}$ alsó korlát nem minden speciális (pl. $m_i \equiv 1$ vagy X_i oszlopai ortonormáltak) választás esetén érhető el.

iii) Ha S numerikusan rosszul kondicionált ($\sigma_{\max} / \sigma_{\min}$ nagy), akkor X is rosszul kondicionált, még akkor is, ha a $\kappa_2(S)$ kondíciós szám ésszerű nagyságrendű.

Ezért célszerű $\kappa_2(X)$ mellett más robusztussági mértékeket is bevezetni. Ehhez különféle (nem euklideszi) normákat hívunk segítségül. Ha $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$, akkor $\|x\|_{\infty} := \max_i |x_i|$. Ha $X = [x_{ij}]$ mátrix, akkor Frobenius-normája (F -normája)

$\|X\|_F = \sqrt{\text{Trace}(A^* A)} = \sqrt{\sum_i \sum_j |x_{ij}|^2}$. A D súlyozó mátrixot diagonálisnak fogjuk

feltételezni: $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, ahol $\forall d_i > 0$.

Nem súlyozott mértékek a robusztusság jellemzésére:

$$\begin{aligned} v_1 &= \|c\|_{\infty} = \max_i c_i \\ v_2 &= \kappa_2(X) \\ v_3 &= \|X^{-1}\|_F / \sqrt{n} = \|c\|_2 / \sqrt{n} \\ v_4 &= \sqrt{\sum_i \sin^2(\vartheta_i)} / \sqrt{n}. \end{aligned} \tag{5.48}$$

Itt $X = [x_1, \dots, x_n]$ az $F = A - BK$ mátrix jobb oldali sajátvektoraiból álló mátrix.

A c mátrix a kondíciós számokból áll: $c = (c_1, \dots, c_n)^T$. Ha a sajátvektorok normalizáltak, azaz $\|x_i\|_2 = 1, \forall i$, akkor $X^{-1} = [w_1, \dots, w_n]^T$ és $c_i = \|w_i\|_2$.

Megmutatható, hogy

- i) v_1, v_2, v_3 matematikailag ekvivalensek: $1 \leq v_3 \leq v_1 \leq v_2 \leq n v_3$
- ii) v_1, v_2, v_3 szimultán veszik fel minimális értéküket, ha X unitér ($U^* U = U U^* = I$) és a sajátérték-sajátvektor rendszer perfektül kondicionált.
- iii) Ha bármelyik mérték v_1, v_2, v_3 közül közel van 1-hez, akkor a kondíciós számok négyzetének összege, $\|c\|_2^2$ is közel optimális.
- iv) $v_2 = \kappa_2(X)$ optimális ($v_2 = 1$), ha a normalizált jobb oldali x_j sajátvektorokból álló X mátrix unitér. A robusztus pólusáthelyezés célja ezért úgy kiszelektálni az $x_i \in \mathcal{P}$ sajátvektorokat, hogy $\|x_i\|_2 = 1$ legyen és az x_j vektorok amennyire csak lehet merőlegesek legyenek egymásra.

- v) Az ortogonalitás mértékéül a sajátvektorok X mátrixa és egy $\hat{X}$ unitér mátrix közötti távolságot választjuk. Az $\hat{X}$ unitér mátrixot úgy választjuk meg, hogy X minden egyes x_i oszlopa az $\hat{X}$ mátrix $\hat{x}_i$ oszlopának (normalizált) ortogonális projekciója legyen az $\mathcal{P}_i$ altérre. Az általánosság gyengítése nélkül feltehetjük, hogy $\hat{x}_i^* x_i$ valós és pozitív, és ekkor $\hat{x}_i^* x_i = \|S_i^* \hat{x}_i\|_2 = \cos(\vartheta_i)$, ahol ϑ_i az $\hat{x}_i$ és x_i közötti szög, és az S_i mátrix oszlopai az $\mathcal{P}_i$ altér ortonormált bázisát alkotják. A v_4 mérték ebben az értelemben méri a kondicionáltságát a feladatnak. Világos, hogy $0 \leq v_4 \leq 1$, és $v_4 = 0$, ha a sajátvektorok $\{x_i\}$ halmaza ortonormált és a kondíciós számokra teljesül $c_i = 1, \forall i$.

Súlyozott mértékek a robusztusság jellemzésére:

$$v_3(D) = \|DX^{-1}\|_F / \|D\|_F = \sqrt{\sum_i d_i^2 c_i^2} / \sqrt{\sum_i d_i^2}, \quad (5.49)$$

$$v_4(D) = \sqrt{\sum_i d_i^2 \sin^2(\vartheta_i)} / \sqrt{\sum_i d_i^2}. \quad (5.50)$$

Ezek a mértékek minimálisak, ha a sajátérték-sajátvektor feladat perfektül kondicionált. Minimalizálván ezeket a mértékeket, minimalizáljuk a kondíciós számok súlyozott összegének felső határát is. Egy alkalmas választás a súlyokra a folytonosidejű esetben $d_i^{-1} = \operatorname{Re}(-\lambda_i)$, a diszkrétidejű esetben pedig $d_i^{-1} = 1 - |\lambda_i|$. A $v_3(D)$ vagy $v_4(D)$ értékek minimalizálása megfelel a zárt rendszer amplitúdó tartaléka alsó határának a maximalizálásának. A súlyozás lehetővé teszi, hogy a stabilitás határához közelebb eső sajátértékeket, amelyek paraméterváltozáskor könnyebben labilissá válhatnak, sokkal hatékonyabban kondicionáljuk, és ezáltal a rendszer robusztusabb legyen.

5.4.4 A robusztus pólusáthelyezés algoritmus

Az algoritmus három alapvető lépésből áll.

A-lépés:

A B mátrix dekompozíciója (5.37) szerint, azaz U_0, U_1 és Z meghatározása. Az $\mathcal{P}_i = \ker\{U_1^T (A - \lambda_i I)\}$ altér S_i , illetve a rá merőleges $\hat{\mathcal{P}}_i$ altér $\hat{S}_i$ ortonormált bázisainak konstrukciója minden $\lambda_i \in A$ esetén, $i = 1, 2, \dots, n$. A dekompozícióra már bemutatunk egy-egy QR vagy SVD felbontáson alapuló algoritmust. Az S_i

illetve $\hat{S}_i$ ortonormált bázisok is meghatározhatók ezekkel a technikákkal, ha az $[U_i^T (A - \lambda_i I)]^T$ mátrixra alkalmazzuk azokat:

$$[U_i^T (A - \lambda_i I)]^T = [\hat{S}_i \quad S_i] \begin{bmatrix} R_i \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow S_i, \hat{S}_i \quad (\text{QR})$$

$$[U_i^T (A - \lambda_i I)] = T_i [\Gamma_i \quad 0] [\hat{S}_i \quad S_i]^T \Rightarrow S_i, \hat{S}_i. \quad (\text{SVD})$$

X-lépés:

Ez a lépés az algoritmus fő lépése. A cél az $x_i = S_i w_i \in \mathcal{P}_i$ vektorok kiszelektálása úgy, hogy teljesüljön $\|x_i\|_2 = 1$ és az $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ mátrix jól kondicionált legyen. Ennek a lépésnek a megvalósítására négy módszert mutatunk be (valós sajátvektorokat feltételezve; általános esetben lásd [13]). A módszerek iteratívak, és mindegyik módszer egy meghatározott kondicionáltsági mértéket igyekszik minimalizálni. Ezek a mértékek bizonyos értelemben ekvivalensek, és ha 1 közelében vannak, akkor a kijelölt λ_i sajátértékek érzékenységet mérő c_i kondíciós számok egyszerre vannak közel a minimálishoz. A négy módszert külön mutatjuk be.

K-lépés:

Az $F = A - BK$ mátrix meghatározása az $FX = XA$ egyenlet megoldása révén. Az egyenletet $X^T F^T = (XA)^T$ alakra is lehet hozni, melyet F^T -re kell megoldani. F ismeretében a K állapot-visszacsatolás meghatározható $K = Z^{-1} U_0^T (A - F)$ alapján.

Az alábbiakban módszereket mutatunk be az X-lépésre.

X1. módszer:

A cél $x_i \in \mathcal{P}_i$, $i = 1, \dots, n$ megválasztása úgy, hogy a szög $x_i \in \mathcal{P}_i$ és a maradék vektorok $\mathcal{Q}_i = \text{Span}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ altere között maximális legyen minden i esetén. Ezzel ekvivalens, hogy minimalizáljuk a szöget $x_i \in \mathcal{P}_i$ és az $\mathcal{Q}_i$ -re merőleges $\tilde{y}_i$ normalizált vektor között. A megoldást iterációval keressük. Az iteráció aktuális fázisában külön-külön tekintünk minden egyes x_i -t és helyettesítjük egy új vektorral, amely maximális szöget zár be $\mathcal{Q}_i$ -vel. Az $\mathcal{Q}_i$ -re merőleges $\tilde{y}_i$ vektort QR dekompozícióval határozhatjuk meg:

$$X_i := [x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n] = [\tilde{Q}_i \quad \tilde{y}_i] \begin{bmatrix} \tilde{R}_i \\ 0^T \end{bmatrix}. \quad (5.51)$$

Jelölje az x_i irányú egységvektort x_{i0} (a konstrukció szerint $\tilde{y}_i$ egységvektor), akkor a cél a közöttük lévő φ_i szög minimalizálása, vagyis $\cos(\varphi_i) = \langle x_{i0}, \tilde{y}_i \rangle$ maximalizálása. Ezért azt az $x_{i0} \in \mathcal{P}_i$ egységvektort választjuk, amely $\tilde{y}_i$ projekciója $\mathcal{P}_i$ -re μ -vel skálázva. Mivel S_i ortonormált, ezért

$$x_i = \mu \tilde{y}_{i,p} = \mu \sum_j S_{ij} \langle S_{ij}, \tilde{y}_{i0} \rangle = \mu S_i S_i^T \tilde{y}_{i0},$$

$$\|x_i\|^2 = \mu^2 \langle S_i S_i^T \tilde{y}_i, S_i S_i^T \tilde{y}_i \rangle = \mu^2 \langle S_i^T \tilde{y}_i, S_i^T S_i S_i^T \tilde{y}_i \rangle = \mu^2 \|S_i^T \tilde{y}_i\|^2 = 1,$$

$$x_i := S_i S_i^T \tilde{y}_i / \|S_i^T \tilde{y}_i\|. \quad (5.52)$$

Az iteráció minden fázisa végén teszteljük, hogy $\kappa_2(X)$ értéke egy pozitív korlát alá csökkent-e, és ha igen, leállunk, különben pedig újabb iterációs fázis következik. Az iteráció fázisának minden lépésében új X mátrix keletkezik, amelyben megpróbáltuk minimalizálni a λ_i sajátérték érzékenységet. Az $\tilde{y}_i^T$ vektor a λ_i -hez tartozó normalizált bal oldali sajátvektor, és a választás révén a $c_i = 1 / \|\tilde{y}_i^T x_i\|$ kondíciós számot minimalizáljuk az x_i megválasztásával. A maradék sajátértékek kondíciós száma azonban ekkor elromolhat, és egy teljes fázis után a kondicionáltság összességében nem szükségképpen javul. Ezért az algoritmus nem szükségképpen konvergál egy fixponthoz, előnye viszont az egyszerűsége.

X2. módszer:

Ennél a módszernél az algoritmus minden lépésében úgy választjuk meg az új $x_i \in \mathcal{P}_i$ értéket, $i = 1, \dots, n$, hogy minimalizálja a $v_3(D) = \|DX^{-1}\|_F^2 / \|D\|_F$ kondíciós számot. Ez azt jelenti, hogy minden lépésben egy nemlineáris, korlátozásnak alávetett LS-problémát kell megoldani, amely explicite elvégezhető QR dekompozíciókkal. Az iteráció befejeződik, ha $v_3(D)$ egy teljes fázis ($i = 1, \dots, n$) után egy előírt korlát alá csökken.

Az algoritmus elve $D = I$ választás mellett a következő. A feladat olyan $x_i = S_i w_i$, $\|x_i\|^2 = \langle S_i w_i, S_i w_i \rangle = \langle w_i, S_i^T S_i w_i \rangle = \|w_i\|^2 = 1$ meghatározása, amely minimalizálja $\|X^{-1}\|_F^2$ értékét, ahol $X_i := [x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$. Mivel a Frobenius-norma négyzetének definíciójában tetszőlegesen lehet zárójelezni, ezért a vektorok sorrendje közömbös, tekinthető tehát az $X = [x_i \ X_i]$ mátrix kiindulás-

ként. Alkalmazzunk QR felbontást X_i -re: $X_i = Q \begin{bmatrix} R \\ 0^T \end{bmatrix}$, és ezért

$$XX^{-1} = I = \begin{bmatrix} x_i & Q \begin{bmatrix} R \\ 0^T \end{bmatrix} \end{bmatrix} X^{-1} = \begin{bmatrix} x_i & [Q_i \quad q_i] \begin{bmatrix} R \\ 0^T \end{bmatrix} \end{bmatrix} X^{-1} \Rightarrow$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} Q^T x_i & \begin{bmatrix} R \\ 0^T \end{bmatrix} \end{bmatrix} X^{-1} = \begin{bmatrix} Q_i^T x_i & R \\ q_i^T x_i & 0 \end{bmatrix} X^{-1}.$$

(Vegyük észre, hogy Q, R, Q_i, q_i mind i -től függenek, csak a jelölések egyszerűsítése érdekében hagytuk el az i indexet).

Felhasználván, hogy $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}$, következik hogy

$$Q = X \left[\begin{array}{c|c} 0 & (q_i^T x_i)^{-1} \\ \hline R^{-1} & -R^{-1}Q_i^T x_i (q_i^T x_i)^{-1} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$X^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \rho_i \\ \hline R^{-1} & -R^{-1}Q_i^T x_i \rho_i \end{array} \right] Q^T, \quad (5.53)$$

ahol bevezettük a $\rho_i := (q_i^T x_i)^{-1}$ jelölést. A Frobenius-norma négyzetének additív tulajdonsága miatt írható, hogy

$$\|X^{-1}\|_F^2 = \|R^{-1}\|_F^2 + \rho_i^2 + \rho_i^2 \|R^{-1}Q_i^T x_i\|_2^2 \rightarrow \min, \quad (5.54)$$

ahol felhasználtuk még, hogy vektorok esetén az F -norma és az l_2 -norma megegyezik, továbbá unitér mátrixszal való szorzás a mátrix F -normáját nem befolyásolja. Másrészt $\|R^{-1}\|_F^2$ nem függ az $x_i = S_i w_i$ választástól, ezért az optimalizálásnál elhagyható, továbbá kihasználható, hogy $\|w_i\|^2 = 1$:

$$\rho_i^2 + \rho_i^2 \|R^{-1}Q_i^T S_i w_i\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} R^{-1}Q_i^T S_i \\ I_r \end{bmatrix} \rho_i w_i \right\|_2^2 \rightarrow \min. \quad (5.55)$$

Alkalmazzunk egy második QR felbontást, de most az $S_i^T q_i$ oszlopvektorra, majd hajtsunk végre sorrend cserét az R -részben, akkor

$$\begin{aligned}
 S_i^T q_i &= \tilde{Q}_i \begin{bmatrix} \tilde{r}_i \\ 0_{(r-1) \times 1} \end{bmatrix} = \tilde{Q}_i \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{(r-1) \times 1} \\ \tilde{r}_i \end{bmatrix} = \tilde{r}_i \tilde{P}_i e_r = \tilde{r}_i [P_i \quad p_i] e_r \Rightarrow \\
 q_i^T S_i &= \tilde{r}_i e_r^T [P_i \quad p_i]^T = \tilde{r}_i p_i^T, \\
 \rho_i^{-1} &= \tilde{r}_i p_i^T w_i,
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

ahol $\tilde{P}_i$ unitér mátrix. Vezessük be a $\tilde{w}_i = \rho_j P_i^T w_i$ transzformációt, akkor

$$\begin{aligned}
 \rho_i w_i &= \rho_i \tilde{P}_i \tilde{P}_i^T w_i = \rho_i [P_i \quad p_i] \begin{bmatrix} P_i^T \\ p_i^T \end{bmatrix} w_i = (P_i P_i^T w_i + p_i p_i^T w_i) / (\tilde{r}_i p_i^T w_i) = \\
 &= \tilde{r}_i^{-1} (P_i \tilde{w}_i + p_i),
 \end{aligned} \tag{5.57}$$

és ezért a feladat

$$\left\| \begin{bmatrix} R^{-1} Q_i^T S_i \\ I_r \end{bmatrix} (P_i \tilde{w}_i + p_i) \right\|_2^2 \rightarrow \min. \tag{5.58}$$

A feladat *matematikai sémája* egy $\|\Gamma(\Phi\vartheta - Y)\|_2^2 \rightarrow \min$ lineáris WLS probléma. A minimum feltétele a könyv I. kötete 12. fejezete szerint [1]

$$\Phi^T W \Phi \vartheta = \Phi^T W Y, \tag{5.59}$$

amelynek megoldására numerikusan stabil módszereket ismerünk (SVD, QR, Moore–Penrose pseudoinverz).

Hátra van még az optimális súly megválasztása. Mivel $\|w_i\|^2 = 1$, ezért

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{w}_i\|^2 &= \langle \rho_i P_i^T w_i, \rho_i P_i^T w_i \rangle = \rho_i^2 \|w_i\|^2 = \rho_i^2 \\
 \rho_i^2 &= \langle \rho_i w_i, \rho_i w_i \rangle = \langle \tilde{r}_i^{-1} (P_i \tilde{w}_i + p_i), \tilde{r}_i^{-1} (P_i \tilde{w}_i + p_i) \rangle = \\
 &= \tilde{r}_i^{-2} (\langle P_i^T P_i \tilde{w}_i, \tilde{w}_i \rangle + 2 p_i^T P_i \tilde{w}_i + \langle p_i, p_i \rangle),
 \end{aligned}$$

ahonnan kapjuk, hogy az optimális súly és az új x_i :

$$\rho_i^2 = \tilde{r}_i^{-2} (\|\tilde{w}_i\|^2 + 1), \tag{5.60}$$

$$x_i = S_i w_i = (\rho_i \tilde{r}_i)^{-1} S_i (P_i \tilde{w}_i + p_i). \tag{5.61}$$

A gyakorlatban ez a módszer az X1. módszerhez hasonló eredményt ad, de elméletileg megalapozottabb, bár nehezebb implementálni.

X3. módszer:

Ennél a módszernél induláskor választunk egy ortonormált oszlopvektorokból álló $\tilde{X} = [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n]$ mátrixot is, amelyből rendre kiválasztunk $\tilde{x}_i, \tilde{x}_j$ párokat, és azokat úgy forgatjuk el a síkjukban egy megfelelően választott szöggel, hogy az elforgatott $\tilde{x}'_i$ és az $\mathcal{P}_i$ altér, valamint az elforgatott $\tilde{x}'_j$ és az $\mathcal{P}_j$ altér közötti $v_4(D)$ távolság minimális legyen. Ezután az X halmazban lecseréljük az x_i vektort $\tilde{x}'_i$ -nek az $\mathcal{P}_i$ altérre vett normalizált projekciójára, az x_j vektort $\tilde{x}'_j$ -nek az $\mathcal{P}_j$ altérre vett normalizált projekciójára, az $\tilde{X}$ halmazban pedig az $\tilde{x}_i, \tilde{x}_j$ párt az $\tilde{x}'_i, \tilde{x}'_j$ párra. Az X halmaz vektorai így fokozatosan közelítőleg normalizálttá válnak, és X kondicionáltsága egyre jobban megközelíti az 1-et. Mivel $v_4(D)$ minimalizálása megfelel $v_3(D)$ minimalizálásának, ezért ha $v_4(D)$ kicsi, akkor $\|Dc\|_2 = \sqrt{\sum_i d_i^2 c_i^2}$ is kicsi és $X = [x_1, \dots, x_n]$ jól kondicionált (a választott súlyozás mellett).

Az algoritmus numerikus részletei a következők (a komplex eset is megengedett):

- i) Az $\tilde{x}_i, \tilde{x}_j$ vektorokat α szöggel a saját síkjukban elforgatva a keletkező vektorok $\tilde{x}'_i = \cos(\alpha)\tilde{x}_i + \sin(\alpha)\tilde{x}_j$ és $\tilde{x}'_j = -\sin(\alpha)\tilde{x}_i + \cos(\alpha)\tilde{x}_j$ lesznek.
- ii) Az optimalizálási kritérium $(v_4(D))^2 = \sum_i d_i^2 \sin^2(\varphi_i) / \sum_i d_i^2$, ahol a φ_i szög meghatározásához szükség van az $\mathcal{P}_i$ altér komplementer terére is. Jelölje ezt $\hat{\mathcal{P}}_i = \text{Span}(\hat{S}_i)$, akkor $\hat{S}_i = \text{kernel}(S_i^*)$ és $\sin^2(\varphi_i) = \|\hat{S}_i^* \tilde{x}_i\|_2^2$.
- iii) Az optimális α szöget úgy választjuk meg, hogy $\tilde{x}'_i, \tilde{x}'_j$ rendre maximális szöget zárjanak be az $\hat{\mathcal{P}}_i, \hat{\mathcal{P}}_j$ komplementis alterekkel (minimális szöget az $\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j$ alterekkel):

$$J(\alpha) = d_i^2 \sin^2(\varphi_i) + d_j^2 \sin^2(\varphi_j) \rightarrow \min \quad (5.62)$$

$$J(\alpha) = d_i^2 \|\hat{S}_i^* \tilde{x}'_i\|_2^2 + d_j^2 \|\hat{S}_j^* \tilde{x}'_j\|_2^2 \quad (5.63)$$

$$\frac{dJ}{d\alpha} = 2d_i^2 \langle \hat{S}_i^* \tilde{x}'_i, \hat{S}_i^* \frac{d\tilde{x}'_i}{d\alpha} \rangle + 2d_j^2 \langle \hat{S}_j^* \tilde{x}'_j, \hat{S}_j^* \frac{d\tilde{x}'_j}{d\alpha} \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{dJ}{d\alpha} = & 2d_i^2 < \hat{S}_i^* \{ \cos(\alpha) \bar{x}_i + \sin(\alpha) \bar{x}_j \}, \hat{S}_i^* \{ -\sin(\alpha) \bar{x}_i + \cos(\alpha) \bar{x}_j \} > + \\
& + 2d_j^2 < \hat{S}_j^* \{ -\sin(\alpha) \bar{x}_i + \cos(\alpha) \bar{x}_j \}, \hat{S}_j^* \{ -\cos(\alpha) \bar{x}_i - \sin(\alpha) \bar{x}_j \} > = 0 \\
& d_i^2 < \bar{x}_i + \tan(\alpha) \bar{x}_j \}, \hat{S}_i \hat{S}_i^* \{ -\tan(\alpha) \bar{x}_i + \bar{x}_j \} > + \\
& + d_j^2 < \{ -\tan(\alpha) \bar{x}_i + \bar{x}_j \}, \hat{S}_j \hat{S}_j^* \{ -\bar{x}_i - \tan(\alpha) \bar{x}_j \} > = 0 \\
& \tan^2(\alpha) \{ -d_i^2 < \bar{x}_j, \hat{S}_i \hat{S}_i^* \bar{x}_i > + d_j^2 < \bar{x}_i, \hat{S}_j \hat{S}_j^* \bar{x}_j > \} + \\
& + \tan(\alpha) \{ d_i^2 < \bar{x}_j, \hat{S}_i \hat{S}_i^* \bar{x}_j > - d_i^2 < \bar{x}_i, \hat{S}_i \hat{S}_i^* \bar{x}_i > + \\
& + d_j^2 < \bar{x}_j, \hat{S}_j \hat{S}_j^* \bar{x}_i > - d_j^2 < \bar{x}_j, \hat{S}_j \hat{S}_j^* \bar{x}_j > \} + \\
& + \{ d_i^2 < \bar{x}_i, \hat{S}_i \hat{S}_i^* \bar{x}_j > - d_j^2 < \bar{x}_j, \hat{S}_j \hat{S}_j^* \bar{x}_i > = 0
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Az optimális α szög a $\tan(\alpha)$ -ra kapott másodfokú egyenletből határozható meg.

- iv) Az optimális α ismeretében képezhető az új $\bar{x}_i := \cos(\alpha) \bar{x}_i + \sin(\alpha) \bar{x}_j$ és $\bar{x}_j := -\sin(\alpha) \bar{x}_i + \cos(\alpha) \bar{x}_j$, és behelyettesítendő $\bar{X}$ -ba.
- v) Az $\bar{x}_i$ normalizált projekcióját $\mathcal{P}_i$ -re az $x_i := S_i \hat{S}_i^* \bar{x}_i / \|\hat{S}_i^* \bar{x}_i\|_2$ összefüggéssel lehet meghatározni, és hasonlóan $x_j := S_j \hat{S}_j^* \bar{x}_j / \|\hat{S}_j^* \bar{x}_j\|_2$. Az új x_i, x_j behelyettesítendő X -be.

Az algoritmus kerete a következő. Kezdetben felvesszünk egy ortonormált mátrixot, például $\bar{X} = I$ -t. Az iteráció fázisokból áll (sweep). Minden fázisban $n(n+1)/2$ lépést hajtunk végre. Egy lépés abból áll, hogy választunk egy i, j indexpárt, $1 \leq i < j \leq n$, és a megfelelő $\bar{x}_i, \bar{x}_j$ vektorokra alapozva elvégezzük a fenti lépéseket. A lépés után módosul $\bar{x}_i, \bar{x}_j$ és x_i, x_j , és javul a $v_4(D)$ mérték. A fázisokat addig ismételjük, amíg $v_4(D)$ már nem javul lényegesen.

X4. módszer:

A módszer csak annyiban különbözik az X3. módszertől, hogy rendre az $\bar{x}_i', \bar{x}_j'$ vektorok és a komplementer $\hat{\mathcal{P}}_i, \hat{\mathcal{P}}_j$ alterek közötti távolságot igyekszik maximalizálni. Az optimalizálási kritérium

$$(\hat{v}_4(D))^2 = \sum_i d_i^2 \cos^2(\varphi_i) / \sum_i d_i^2 = 1 - (v_4(D))^2 \rightarrow \max, \quad (5.65)$$

ahol $\cos^2(\varphi_i) = \|S_i^* \tilde{x}_i\|_2^2$. A komplementens mérték és vele a X4. módszer használata különösen $r < n - r$ esetén előnyös.

5.5 Modális szintézisen alapuló szabályozó tervezés

Teljes modális szintézisnek fogjuk nevezni a szabályozó tervezési eljárást, ha előírjuk a zárt rendszer sajátértékeit és sajátvektorait, és ehhez keressük meg a szükséges állapot-visszacsatolást. Az ismertetésre kerülő módszer a Roppenecker-paraméterekre épül [14].

Feltesszük, hogy a szabályozott szakasz sajátértékei egyszeresek, vagy a többszörös sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek. Az A állapotmátrix jobb oldali sajátvektorait v -vel, bal oldali sajátvektorait w^T -vel fogjuk jelölni. Jobb oldali sajátvektorok esetén

$$Av_i = \lambda_i v_i \Rightarrow (A - \lambda_i I)v_i = 0 \Rightarrow AV := A[v_1 \dots v_n] = A \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =: AA, \quad (5.66)$$

bal oldali sajátvektorok esetén

$$w_i^T A = w_i^T \lambda_i \Rightarrow w_i^T (A - \lambda_i I) = 0 \Rightarrow WA := \begin{bmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix} A = \Lambda W, \quad (5.67)$$

együttesen pedig

$$w_i^T Av_j = w_i^T \lambda_j v_j = \begin{cases} \lambda_i, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases} \Rightarrow WV = VW = I \Rightarrow W = V^{-1}. \quad (5.68)$$

A szakasz állapotegyenletén $\tilde{x} = Tx$ koordináta-transzformációt hajthatunk végre, amely annak felel meg, hogy mind a kiindulási, mind pedig a képtérben a jobb oldali sajátvektorokat választjuk bázisnak:

$$\begin{array}{ccccccc} R^n & \xrightarrow{\mathcal{A}} & R^n & \xrightarrow{\mathcal{A}} & R^n & \xrightarrow{\mathcal{A}} & R^n \\ v_1 & & e_1 & & e_1 & & v_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_n & & e_n & & e_n & & v_n \\ R^n & \xrightarrow{T^{-1}=V} & R^n & \xrightarrow{A} & R^n & \xrightarrow{T=V^{-1}} & R^n \end{array} \quad (5.69a)$$

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \Lambda, \quad \tilde{B} = TB = V^{-1}B, \quad \tilde{C} = CT^{-1} = CV, \quad (5.69b)$$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u, \\ y &= \tilde{C}\tilde{x}.\end{aligned}\quad (5.69c)$$

5.5.1 Roppenecker-paraméterek

Ha előírjuk az $u = -Kx$ állapot-visszacsatolás mellett a zárt rendszer számára biztosítandó $\lambda_{K,i}$ sajátértékeket és $v_{K,i}$ sajátvektorokat, akkor a feladat

$$\left. \begin{aligned}\dot{x} &= (A - BK)x \\ y &= Cx\end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda_{K,i}, v_{K,i} \text{ választás a zárt rendszerhez, } K = ? \quad (5.70)$$

Ha a cél K alkalmas paraméterezése, akkor betartandó, hogy

$$(\lambda_{K,i}I - A + BK)v_{K,i} = 0 \Rightarrow (\lambda_{K,i}I - A)v_{K,i} = \underbrace{BKv_{K,i}}_{p_i \in R^r}. \quad (5.71)$$

Választhatók tehát K paraméterezésére a $p_i = Kv_{K,i} \in R^r$ Roppenecker-paraméterek, amelyekből K kifejezhető:

$$\lambda_{K,i} \neq \lambda_i \text{ esetén } K[\underbrace{v_{K,1} \dots v_{K,n}}_{\text{invertálható}}] = [p_1, \dots, p_n], \quad (5.72)$$

$$\begin{aligned}v_{K,i} &= (A - \lambda_{K,i}I)^{-1} Bp_i, \\ K &= [p_1, \dots, p_n]_{r \times n} \left[(A - \lambda_{K,1}I)^{-1} Bp_1, \dots, (A - \lambda_{K,n}I)^{-1} Bp_n \right]^{-1}.\end{aligned}\quad (5.73)$$

A Roppenecker-paraméterek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

i) Az állapot és az irányítás hasonló jelekkel írható le a zárt rendszerben:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n x_{K,i}(t) v_{K,i} \text{ és } u(t) = -Kx(t) = -\sum_{i=1}^n x_{K,i}(t) p_i. \quad (5.74)$$

ii) $\{v_{K,i}\}_{i=1}^n$ kifeszíti az állapotteret, $\{p_i\}_{i=1}^n$ kifeszíti az irányító jel terét (vagy alterét).

iii) $\{p_i\}_{i=1}^n$ Roppenecker-paraméterek invariánsak a koordináta-transzformációra, ellenben a $\{v_{K,i}\}_{i=1}^n$ sajátvektorok érzékenyek a koordináta-transzformációra.

iv) Ha meg akarjuk őrizni a szakasz valamelyik $\lambda_i = \lambda_{K,i}$ (pl. gyors) sajátértékét és $v_i = v_{K,i}$ sajátvektorát, akkor a hozzátartozó Roppenecker-paramétert $p_i = 0$ -nak kell választani, mivel $\text{rank}(B) = r$ (maximális) esetén

$$(\lambda_{K,i}I - A)v_{K,i} = -Bp_i = 0 \Rightarrow p_i = 0. \quad (5.75)$$

v) SISO rendszer esetén $p_i \in \mathbb{R}^1$, ezért K meghatározására megadható a Roppenecker-képlet (hasonlóan az Ackermann-képlethez):

$$\begin{aligned} K &= [p_1, \dots, p_n]_{1 \times n} \left[(A - \lambda_{K,1}I)^{-1} B p_1, \dots, (A - \lambda_{K,n}I)^{-1} B p_n \right]^T = \\ &= [p_1, \dots, p_n]_{1 \times n} \text{diag}(p_1^{-1}, \dots, p_n^{-1}) \left[(A - \lambda_{K,1}I)^{-1} B, \dots, (A - \lambda_{K,n}I)^{-1} B \right]^T \\ K &= (1, \dots, 1) \left[(A - \lambda_{K,1}I)^{-1} B, \dots, (A - \lambda_{K,n}I)^{-1} B \right]^T. \end{aligned} \quad (5.76)$$

A Roppenecker-paramétereken alapuló teljes modális szintézis elve ezek után a következőképp fogalmazható meg:

1. Előírjuk a zárt rendszer stabilitási tulajdonságait $\{\lambda_{K,i}\}_{i=1}^n$ révén.
2. Optimális $\{p_i\}_{i=1}^n$ Roppenecker-paramétereket választunk valamilyen jól átgondolt szabályozási elv alapján.
3. Meghatározzuk az optimális paraméterekhez tartozó K állapot-visszacsatolást (5.73) szerint.

5.5.2 Kimeneti visszacsatolás tervezése

Ha az állapot nem teljesen mérhető, akkor az állapot-visszacsatolásban szereplő állapotot helyettesíthetjük a becsült állapottal, amelyet egy dinamikus tag, az állapotmegfigyelő vagy állapotbecslő határoz meg. Most egy másik lehetőséget vizsgálunk meg, amely statikus tagot használ, nevezetesen kimeneti visszacsatolást (P -szabályozást). A kimeneti visszacsatolással optimálisan közelíteni szeretnénk az állapot-visszacsatolást vagy a zárt rendszer modális jellemzőit. A vizsgálatokhoz először néhány matematikai részletet tisztázunk.

5.1 Lemma: $\forall X$ esetén $\text{trace}(AX^T) = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

Bizonyítás: Jelölje e_i az i -edik standard egységvektort, akkor

$$\begin{aligned} \text{trace}(AX^T) &= \sum_i e_i^T (AX^T) e_i = \sum_i e_i^T \sum_\mu \sum_\nu a_{\mu\nu} e_\mu e_\nu^T X^T e_i = \\ &= \sum_\mu \sum_\nu a_{\mu\nu} e_\nu^T X^T e_\mu \end{aligned}$$

Speciálisan $X := e_j e_i^T$ esetén $X^T = e_j e_i^T \Rightarrow \sum_\mu \sum_\nu a_{\mu\nu} e_\nu^T e_j e_i^T e_\mu = a_{ij} = 0, \forall i, j$,
ezért $A = 0$.

5.2 Lemma: Legyen $J = \text{trace}(XAX^T)$, ahol A szimmetrikus mátrix, akkor

$$\frac{dJ}{dX}(\cdot) = \text{trace}\{2XA(\cdot)^T\} = 0(\cdot) \Leftrightarrow 2XA = 0. \quad (5.77)$$

Bizonyítás: Felhasználjuk, hogy tetszőleges mátrixnak és transzponáltjának a nyoma megegyezik, továbbá mátrixok összegének a nyoma az egyes mátrixok nyomának összege. Ezért

$$\frac{dJ}{dX}(\cdot) = \text{trace}\{(\cdot)AX^T + XA(\cdot)^T\} = \text{trace}\{2XA(\cdot)^T\}, \quad (5.78)$$

és az állítás többi része következik az 5.1. lemmából.

5.3 Lemma: Legyen $J = \text{trace}(XA)$, ahol A tetszőleges, akkor

$$\frac{dJ}{dX}(\cdot) = \text{trace}\{(\cdot)A\} = 0(\cdot) \Leftrightarrow A = 0. \quad (5.79)$$

Bizonyítás: Az állítás első fele triviális, a második fele transzponálás után következik az 5.1 lemmából.

A kimeneti visszacsatolás (KV) tervezésére két módszert mutatunk be, egy approximáción alapulót és egy modális szintézisre épülőt.

1. módszer (ÁV és KV szabályozó eltérés Frobenius normájának minimalizálása)

Legyen a kezdeti állapot $x(0) = 0$ és a referencia jel $r(t) = r_0 1(t)$, akkor

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$\text{ÁV: } u = -Kx + r$$

$$\text{KV: } u = -Ry + r$$

$$\dot{x} = \underbrace{(A - BK)}_{A_K} x + Br$$

$$\dot{x} = \underbrace{(A - BRC)}_{A_R} x + Br$$

$$x_K(t) = \int_0^t e^{A_K(t-\vartheta)} B d\vartheta r_0$$

$$x_R(t) = \int_0^t e^{A_R(t-\vartheta)} B d\vartheta r_0$$

$$x_K(t) = A_K^{-1}(e^{A_K t} - I)Br_0$$

$$x_R(t) = A_R^{-1}(e^{A_R t} - I)Br_0$$

$$u_K(t) = -KA_K^{-1}(e^{A_K t} - I)Br_0$$

Itt kihasználtuk, hogy a zárt rendszer stabilis és $s=0$ nem sajátérték, ezért $\exists A_K^{-1}, A_R^{-1}$. Ha a kimeneti visszacsatolással is elő tudnánk állítani az $x_K(t)$ álla-

potot, akkor el tudnánk érni egy $\tilde{u}_R(t) := -RCx_K(t) = -RCA_K^{-1}(e^{A_K t} - I)Br_0$ beavatkozó jelet, ami jó R választás mellett ideálisnak tekinthető. Ezért az ehhez képesti eltérést fogjuk minimalizálni:

$$\begin{aligned} e &:= u_K - \tilde{u}_R = (RC - K)A_K^{-1}(e^{A_K t} - I)Br_0 = \\ &= \underbrace{(RC - K)A_K^{-1}e^{A_K t}Br_0}_{\text{dinamikus hiba}} - \underbrace{(RC - K)A_K^{-1}Br_0}_{\text{statikus hiba}} \end{aligned}$$

Az optimális választás alapuljon a Frobenius-normán és legyen a következő:

$$\text{Nulla maradó hiba: } (RC - K)A_K^{-1}B = 0$$

$$\text{Minimális dinamikus hiba: } J(R) = \int_0^{\infty} \left\| (RC - K)A_K^{-1}e^{A_K t}B \right\|_F^2 dt \rightarrow \min$$

Matematikai séma:

$$J(X) = \int_0^{\infty} \text{trace} \{ (XM - W)G(XM - W)^T \} dt \rightarrow \min \quad (5.80)$$

$$XH - L = 0$$

Alkalmazzuk a Lagrange-multiplikátor szabályt:

$$F = J + \sum_{\mu, \nu} \lambda_{\mu\nu} e_{\mu}^T (XH - L) e_{\nu} = J + \sum_{\mu} e_{\mu}^T (XH - L) \underbrace{\sum_{\nu} \lambda_{\mu\nu} e_{\nu}}_{(\lambda_{\mu 1}, \dots, \lambda_{\mu n})^T}$$

$$\Gamma := [\lambda_{\mu\nu}]_{r \times l} \Rightarrow F = J + \text{trace} \{ (XH - L) \Gamma^T \}$$

Feltesszük, hogy a G mátrix szimmetrikus. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$(XM - W)G(M^T X^T - W^T) = XMGM^T X^T - XMGW^T - WGM^T X^T + WGW^T$$

$$\text{trace}(VGV^T) := \text{trace}(XMGM^T X^T) - 2 \text{trace}(XMGW^T) + \text{trace}(WGW^T)$$

$$\int_0^{\infty} \text{trace}(VGV^T) dt = \text{trace} \left\{ X \underbrace{\int_0^{\infty} MGM^T dt}_{S_2} X^T \right\} - 2 \text{trace} \left\{ X \underbrace{\int_0^{\infty} MGW^T dt}_{S_1} \right\} +$$

$$+ \text{trace} \left\{ \underbrace{\int_0^{\infty} WGW^T dt}_{S_3} \right\}$$

Sikerült F -et a következő alakra hozni:

$$F = \text{trace}(XS_2X^T) - 2\text{trace}(XS_1) + \text{trace}(S_0) + \text{trace}\{(XH - L)\Gamma^T\}.$$

Képezzük F deriváltját az X mátrix szerint, tegyük nullává és alkalmazzuk az 5.1–5.3 lemmákat:

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dX} = 0 &\Rightarrow 2XS_2 - 2S_1^T + \Gamma H^T = 0 \Rightarrow X = S_1^T S_2^{-1} - \frac{1}{2} \Gamma H^T S_2^{-1} \\ 0 &= XH - L = S_1^T S_2^{-1} H - \frac{1}{2} \Gamma H^T S_2^{-1} H - L \\ \frac{1}{2} \Gamma &= (L - S_1^T S_2^{-1} H)(H^T S_2^{-1} H)^{-1} \\ X &= S_1^T S_2^{-1} - (L - S_1^T S_2^{-1} H)(H^T S_2^{-1} H)^{-1} H^T S_2^{-1}. \quad (5.81)\end{aligned}$$

Alkalmazzuk a matematikai séma eredményeit a kimeneti visszacsatolás meghatározására a következő megfeleltetések mellett:

$$X = R$$

$$M = CA_K^{-1} e^{A_K t} B$$

$$W = KA_K^{-1} e^{A_K t} B$$

$$G = G(t)$$

$$H = CA_K^{-1} B$$

$$L = KA_K^{-1} B$$

$$S_2 = \int_0^\infty MGM^T dt = \int_0^\infty CA_K^{-1} e^{A_K t} BGB^T e^{A_K^T t} A_K^{-T} C^T dt = CSC^T$$

$$S_1 = \int_0^\infty MGW^T dt = \int_0^\infty CA_K^{-1} e^{A_K t} BGB^T e^{A_K^T t} A_K^{-T} K^T dt = CSK^T \Rightarrow S_1^T = KS^T C^T$$

$$S := \int_0^\infty A_K^{-1} e^{A_K t} BGB^T e^{A_K^T t} A_K^{-T} dt = \int_0^\infty e^{A_K t} A_K^{-1} BGB^T A_K^{-T} e^{A_K^T t} dt$$

$$\text{Legyen } G(t) := G_0 e^{2\alpha t}, \quad G_0 > 0, \text{ akkor } S = \int_0^\infty e^{(A_K + \alpha I)t} A_K^{-1} B G_0 B^T A_K^{-T} e^{(A_K + \alpha I)^T t} dt.$$

Stabil rendszer esetén a Ljapunov-egyenlet és megoldása (lásd könyv I. kötet 5. fejezet [1])

$$PA + A^T P = -Q, \text{ ahol } P > 0, Q > 0,$$

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt,$$

ezért S a következő Ljapunov-egyenlet megoldása:

$$(A_K + \alpha I)S + S(A_K + \alpha I)^T = -A_K^{-1} B G_0 B^T A_K^{-T}. \quad (5.82)$$

Vegyük észre, hogy S_1^T -ből és L -ből a K állapot-visszacsatolás kiemelhető balról, és így az optimális R kimeneti visszacsatolásból is:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 &:= CS, \\ \tilde{L} &:= A_K^{-1} B, \\ R &:= K \{ \tilde{S}_1^T + (\tilde{L} - \tilde{S}_1^T S_2^{-1} H)(H^T S_2^{-1} H)^{-1} H^T \} S_2^{-1}. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Fontos deriválási szabályok:

A 2. módszer megfogalmazása előtt szükség van még néhány deriválási szabályra:

$$\begin{aligned} K &= P V_K^{-1} = [p_1, \dots, p_n]_{rxn} \left[(A - \lambda_{K,1} I)^{-1} B p_1, \dots, (A - \lambda_{K,n} I)^{-1} B p_n \right]^{-1} \\ \frac{\partial K}{\partial p_i}(\cdot) &= \frac{\partial P}{\partial p_i}(\cdot) V_K^{-1} - P V_K^{-1} \frac{\partial V_K}{\partial p_i}(\cdot) V_K^{-1} \\ \frac{\partial P}{\partial p_i}(\cdot) V_K^{-1} &= [0 \dots 0(\cdot) 0 \dots 0] \begin{bmatrix} w_{K,1}^T \\ \vdots \\ w_{K,n}^T \end{bmatrix} = (\cdot) w_{K,i}^T \\ \frac{\partial V_K}{\partial p_i}(\cdot) V_K^{-1} &= (A - \lambda_{K,i} I)^{-1} B [0 \dots 0(\cdot) 0 \dots 0] V_K^{-1} = (A - \lambda_{K,i} I)^{-1} B (\cdot) w_{K,i}^T \\ \frac{\partial K}{\partial p_i}(\cdot) &= [I - K(A - \lambda_{K,i} I)^{-1} B] (\cdot) w_{K,i}^T \end{aligned}$$

$$J(P) = \frac{1}{2} \text{trace}(K G K^T), \quad G \text{ szimmetrikus mátrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial p_i}(\cdot) &= \text{trace} \{ K G [(I - K(A - \lambda_{K,i} I)^{-1} B) (\cdot) w_{K,i}^T]^T \} = \\ &= \text{trace} \{ \underbrace{K G w_{K,i}}_a (\cdot)^T \underbrace{[I - K(A - \lambda_{K,i} I)^{-1} B]^T}_{b^T} \} = \end{aligned}$$

$$= \text{trace}\{a \cdot b^T\} = \text{trace}\{a^T \cdot b\} = \langle a, b \rangle =$$

$$= \langle KGw_{K,i}, [(I - K(A - \lambda_{K,i}I)^{-1}B)](\cdot) \rangle$$

$$= \langle [(I - K(A - \lambda_{K,i}I)^{-1}B)]^T KGw_{K,i}, (\cdot) \rangle$$

$$\frac{\partial J}{\partial p_i} = [(I - K(A - \lambda_{K,i}I)^{-1}B)]^T KGw_{K,i} \quad (5.84)$$

2. módszer (KV tervezés teljes modális szintézissel)

ÁV: $K = [k_1 \dots k_n]_{r \times n}$.

KV: $R_{r \times r}$.

Célfüggvény:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \gamma_j \|k_j\|_2^2 \rightarrow \min$$

$$\gamma_j = \begin{cases} > 0, & \text{elnyomandó oszlop } K \text{ - ban} \\ 0, & \text{megmaradó oszlop } K \text{ - ban} \end{cases}$$

Vezessük be a $G := \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ mátrixot, és vegyük figyelembe, hogy $\gamma_j k_j^T$ azonos a GK^T mátrix j -edik sorával, ezért a célfüggvény a következő alakra hozható:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \gamma_j k_j^T k_j = \frac{1}{2} \text{trace} \left\{ \sum_{j=1}^n k_j \cdot \gamma_j k_j^T \right\} = \frac{1}{2} \text{trace}(KGK^T). \quad (5.85)$$

Az állapot-visszacsatolást Roppenecker-paraméteres alakban keressük:

$$K = K(\lambda_{K,1}, \dots, \lambda_{K,n}, p_1, \dots, p_n). \quad (5.86)$$

A feladat a célfüggvény szempontjából az optimális K meghatározása, és abból az y kimenethez tartozó oszlopok kiválasztása és realizálása R -ben.

Az algoritmus lépései:

1. $\lambda_{K,1}, \dots, \lambda_{K,n}$ megválasztása
2. $J(p_1, \dots, p_n)$ kritérium minimalizálása gradiens vagy konjugált gradiens módszerrel. A $p_i \in R^r$ szerinti deriváltak $\frac{\partial J}{\partial p_i} = [(I - K(A - \lambda_{K,i}I)^{-1}B)]^T KGw_{K,i}$ alapján számíthatók. Jelölje az optimális paramétereket $p_1^*, \dots, p_n^*$.

3. Az optimális $K^* := K(p_1^*, \dots, p_n^*)$ meghatározása (5.73) alapján.
4. $k_i^* = 0$ helyettesítés a kis normájú oszlopoknál.
5. $R := K^*$ nem nulla oszlopai (az y kimenethez tartoznak).

5.6 Projektív irányítás

Ebben a részben feltételezzük, hogy a szabályozott szakasz alakja

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u, \\ y &= Cx = [I_m \ 0] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ ahol } x_1 = y.\end{aligned}\quad (5.87)$$

Ilyen alakot kaphatunk például, ha a rendszert Luenberger-féle megfigyelhetőségi normálalakra hozzuk. Legyen az állapot-visszacsatolás

$$u = -Kx, \quad (5.88)$$

akkor a zárt rendszer

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BK)x = Fx \\ y &= [I_m \ 0]x = Cx\end{aligned}\quad (5.89)$$

alakú, ahol bevezettük az $F := A - BK$ jelölést. A zárt rendszer sajátvektorai és sajátértékei az $Fx_i = \lambda_i x_i$ feltételből meghatározhatók. Válasszunk ezek közül $m = \dim y$ darab összetartozó sajátvektort és sajátértéket, melyeket egy-egy mátrixba rendezünk: X_m, A_m (az utóbbi diagonális).

Feltesszük, hogy a zárt rendszer sajátértékei egyszeresek. A számítások egyszerűsítése érdekében konjugált komplex sajátértékpárok esetén az x_i és $x_{i+1} = x_i^*$ sajátvektorok helyett a valós $(x_i + x_{i+1})/2$ és $(x_i - x_{i+1})/(2j)$ vektorokat szerepeltetjük. Legyen $x_i = u_i + jv_i$ és $\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i$, akkor

$$\tau_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

jelöléssel teljesül, hogy

$$\begin{aligned}[u_i \ v_i] &= [x_i \ x_{i+1}] \tau_i \\ F[u_i \ v_i] &= F[x_i \ x_{i+1}] \tau_i^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_{i+1} \end{bmatrix} \tau_i = [\dot{u}_i \ \dot{v}_i] \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (5.91)$$

ezért ha sajátvektoroknál a valós u_i, v_i vektorokra térünk át, akkor a Λ_m mátrixban a blokkdiagonálisban a sajátértékek helyett az α_i, β_i számokból álló 2×2 méretű blokkot kell szerepeltetni:

$$[u_i \quad v_i] \leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}. \quad (5.92)$$

5.6.1 A projektív irányítás reziduális spektruma

Tegyük fel, hogy a K mátrix már meg lett tervezve valamilyen alkalmas módszerrel. Alkalmazzunk állapot-visszacsatolás helyett kimeneti visszacsatolást ún. *projektív irányítás* alakjában [15]:

$$u = -KX_m(CX_m)^{-1}y = -KX_m(CX_m)^{-1}Cx. \quad (5.93)$$

A zárt rendszer állapotmátrixa a projektív irányítással

$$\hat{A} = A - BKX_m(CX_m)^{-1}C \quad (5.94)$$

alakú lesz, továbbá C alakja miatt $\hat{A}e_i = Ae_i$, ha $i > m$. Mivel

$$\hat{A}X_m = AX_m - BKX_m = FX_m = X_m\Lambda_m, \quad (5.95)$$

ezért az X_m oszlopai által kifeszített tér invariáns altér, és a projektív irányítás megőrzi a korábban megtervezett állapot-visszacsatolás m sajátvektorát és m sajátértékét. Koordináta-transzformációval a zárt rendszer speciális alakra hozható:

$$\begin{array}{ccccccc} R^n & \xrightarrow{\mathcal{X}} & R^n & \xrightarrow{\hat{A}} & R^n & \xrightarrow{\mathcal{X}} & R^n \\ \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ e_{m+1} \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} & & \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \\ e_{m+1} \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} & & \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \\ e_{m+1} \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} & & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ e_{m+1} \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \\ & & & & & & (5.96a) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} R^n & \xrightarrow{T^{-1}} & R^n & \xrightarrow{\hat{A}} & R^n & \xrightarrow{T} & R^n \\ & & & & & & \\ T^{-1} = \begin{bmatrix} X_m & 0_{m \times (n-m)} \\ I_{n-m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & 0 \\ V & I \end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} U^{-1} & 0 \\ -VU^{-1} & I \end{bmatrix}, & & & & (5.96b) \end{array}$$

$$\tilde{A} = T\hat{A}T^{-1} = \begin{bmatrix} U^{-1} & 0 \\ -VU^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & A_{12} \\ \hat{A}_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & 0 \\ V & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & * \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.96c)$$

$$\tilde{A}_{22} = \begin{bmatrix} -VU^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = A_{22} - VU^{-1}A_{12} =: A_{22} - NA_{12}. \quad (5.96d)$$

A projektív irányítással nem tudjuk befolyásolni a $\det(sI_{n-m} - A_r) = 0$ megoldásai által alkotott ún. *reziduális spektrumot*, ahol

$$\begin{aligned} A_r &= A_{22} - NA_{12} \\ N &= VU^{-1}. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Ha a reziduális spektrum szabályozástechnikai szempontból nem domináns (stabilis és gyors), akkor a projektív irányítás alkalmazható, ellenkező esetben szükség van a reziduális spektrum korrekciójára.

Vegyük észre, hogy a T koordináta-transzformációt csak (5.97) bizonyítására használtuk, konkrét elvégzésére az eredményen alapuló tervezéseknél nem lesz szükség, viszont $C = [I_m \ 0]$ a továbbiakban is szükséges lesz.

5.6.2 Dinamikus szabályozó tervezése

Ha a reziduális spektrum rossz tulajdonságú, akkor próbálkozhatunk *dinamikus szabályozóval*:

$$\dot{z} = Hz + Dy = Hz + DCx = Hz + \begin{bmatrix} D & 0 \end{bmatrix} x, \quad \dim z = p, \quad (5.98a)$$

$$u = -\begin{bmatrix} 0_p & K_m & K_{n-m} \end{bmatrix} P_{p+m} \begin{bmatrix} z \\ y \\ * \end{bmatrix}, \quad (5.98b)$$

ahol P_{p+m} egy még meghatározandó projekció. DC -ben kihasználtuk C speciális alakját. Tekintsük először a kiegészített rendszert:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} H & DC \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u, \\ \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Legyen $x_1 := [z^T \ x^T]^T$ az új állapotvektor, akkor (5.99)-ből leolvashatók az állapotegyenlet A_1, B_1, C_1 mátrixai.

Ha a kompenzálást az $u = -[0 \ K]x_1$ állapot-visszacsatolás alakjában realizálunk, akkor a zárt rendszer

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} H & DC \\ 0 & F \end{bmatrix} x_1 = F_1 x_1 \quad (5.100)$$

alakú lenne, ahol $F = A - BK$. Tekintsük F_1 sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\begin{aligned} F_1 x_1 = \lambda x_1 &\Rightarrow Hx + DCx = \lambda z \\ Fx &= \lambda x. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Két eset lehetséges:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lambda = \lambda_H : Hx &= \lambda_H z \text{ és } x = 0, \\ \text{b) } \lambda = \lambda_F : Fx &= \lambda_F x \text{ és } z = (\lambda I - H)^{-1} DCx. \end{aligned} \quad (5.102)$$

Ezért F_1 n darab sajátértéke F -hez tartozik (λ_F). Válasszunk ezután F_1 sajátértékei és sajátvektorai közül úgy $p + m$ darabot, hogy

$$\text{sajátvektorok: } X_{p+m} = \begin{bmatrix} W_p & W_m \\ U & Y \\ V & Z \end{bmatrix} \subset X_1, \quad (5.103a)$$

$$\text{diszjunkt sajátértékek: } \Lambda_p, \Lambda_m \subset \Lambda_F. \quad (5.103b)$$

Ha ellenben dinamikus szabályozást alkalmazunk az A_1, B_1, C_1 rendszer esetén, akkor az (5.96b) és (5.96d) egyenleteknek

$$T^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} W_p & W_m & 0 \\ U & Y & 0 \\ \hline V & Z & I_{n-(p+m)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \bar{U} & 0 \\ \hline \bar{V} & I_{n-(p+m)} \end{array} \right] \quad (5.96b^*)$$

$$\bar{N} = \bar{V} \bar{U}^{-1} = [V \ Z] \begin{bmatrix} W_p & W_m \\ U & Y \end{bmatrix}^{-1} = [N_p \ N_m] \quad (5.96d^*)$$

felel meg. Az (5.97) egyenlet felhasználásával kapjuk, hogy a reziduális spektrum dinamikus szabályozás esetén a következő lesz:

$$A_1 = \left[\begin{array}{cc|c} H & D & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{21} & A_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \hline \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{array} \right] \Rightarrow A_{r1} = \bar{A}_{22} - \bar{N} \bar{A}_{12} = A_{22} - N_m A_{12}. \quad (5.97^*)$$

Legyen a P_{p+m} projekció és az u irányítás rendre a következő:

$$\begin{aligned}
 P_{p+m} &:= X_{p+m} (C_1 X_{p+m})^{-1} C_1 = \\
 &= \begin{bmatrix} W_p & W_m \\ U & Y \\ V & Z \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_p & W_m \\ U & Y \\ V & Z \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} W_p & W_m \\ U & Y \\ V & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_p & W_m \\ U & Y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ N_p & N_m & 0 \end{bmatrix}, \text{ ahol } [N_p \quad N_m] := [V \quad Z] \begin{bmatrix} W_p & W_m \\ U & Y \end{bmatrix}^{-1}.
 \end{aligned} \tag{5.104}$$

$$\begin{aligned}
 u &= -[0_p \quad K_m \quad K_{n-m}] P_{p+m} \begin{bmatrix} z \\ y \\ * \end{bmatrix} = [0_p \quad K_m \quad K_{n-m}] \begin{bmatrix} z \\ y \\ N_p z + N_m y \end{bmatrix} = \\
 &= -K_{n-m} N_p z - (K_m + K_{n-m} N_m) y.
 \end{aligned} \tag{5.105}$$

Arra keresünk választ, hogyan lehet a reziduális spektrumot a projektív irányítás mellett a dinamikus szabályozó H és D mátrixai révén befolyásolni. A spektrális jellemzőkre teljesül, hogy

$$\begin{bmatrix} H & D & 0 \\ * & * & A_{12} \\ * & * & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_p & W_m \\ U & Y \\ V & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p & W_m \\ U & Y \\ V & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & \Lambda_m \end{bmatrix}, \tag{5.106}$$

ahonnan következik, hogy

$$\begin{aligned}
 HW_p + DU &= W_p \Lambda_p, \\
 HW_m + DY &= W_m \Lambda_m.
 \end{aligned} \tag{5.107}$$

Vezessük be a

$$W_m = W_p L \Rightarrow L := W_p^{-1} W_m \tag{5.108}$$

jelölést, akkor $[W_p \quad W_m] = W_p [I \quad L]$, és így N_p, N_m paraméterezhető L -lel.

Alkalmazzuk a blokkmátrixok invertálására vonatkozó Schur-komplemens összefüggést (lásd könyv I. kötet F1. függelék [1]):

$$\begin{bmatrix} I & L \\ U & Y \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I + L(Y - UL)^{-1}U & -L(Y - UL)^{-1} \\ -(Y - UL)^{-1}U & (Y - UL)^{-1} \end{bmatrix}, \quad (5.109)$$

$$\begin{aligned} N_m &= -VL(Y - UL)^{-1} + Z(Y - UL)^{-1}, \\ N_p &= \{V + VL(Y - UL)^{-1}U - Z(Y - UL)^{-1}U\}W_p^{-1}. \end{aligned} \quad (5.110)$$

A reziduális spektrumot dinamikus szabályozó nélkül és dinamikus szabályozóval rendre az $A_r = A_{22} - NA_{12} = A_{22} - ZY^{-1}A_{12}$ és az $A_{r1} = A_{22} - N_m A_{12}$ mátrixok sajátértékei alkotják. Keressünk tömör kapcsolatot közöttük és egyúttal egy lehetőleg egyszerű módszert is A_{r1} befolyásolására.

A mátrix inverz lemma alkalmazásával N_m, N_p átalakítható:

$$\begin{aligned} Z(Y - UL)^{-1} &= Z\{(I - ULY^{-1})Y\}^{-1} = ZY^{-1}\{I + UL(-UL + Y)^{-1}\} = \\ &= N + NUL(Y - UL)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.111)$$

$$\begin{aligned} N_m &= N - (V - NU)L(Y - UL)^{-1} = N - B_0 P_0, \\ N_p &= (V - N_m U)W_p^{-1} = B_0(I + P_0 U)W_p^{-1}, \end{aligned} \quad (5.112)$$

ahol

$$\begin{aligned} B_0 &:= V - NU, \\ P_0 &:= L(Y - UL)^{-1}, \\ A_{r1} &:= A_{22} - N_m A_{12} = (A_{22} - NA_{12}) + B_0 P_0 A_{12} = \\ &= A_r + B_0 P_0 A_{12}. \end{aligned} \quad (5.113)$$

Lehetséges tehát A_r kedvezőtlen reziduális halmazát $A_{r1} = A_r + B_0 P_0 A_{12}$ kedvezőbb reziduális halmazára lecserélni, ha a P_0 mátrix elemeit alkalmasan választjuk meg. Ehhez el kell végezni a fiktív $\hat{\Sigma} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}) := (A_r, B_0, A_{12})$ rendszer pólusainak áthelyezését az $\hat{u} = -P_0 \hat{y}$ statikus kimeneti visszacsatolás segítségével. P_0 ismeretében a dinamikus szabályozó L, H, D paraméterei már meghatározhatók. Ehhez előkészítésképpen bevezetjük a H_0, D_0 mátrixokat:

$$\begin{aligned} HW_p + DU &= W_p A_p \\ H &:= W_p H_0 W_p^{-1} \text{ és } D := W_p D_0 \Rightarrow HW_p = W_p H_0 \Rightarrow H_0 + D_0 U = A_p, \end{aligned}$$

$$HW_m + DY = W_m \Lambda_m$$

$$W_p(\Lambda_p - D_0 U)W_p^{-1}W_m + W_p D_0 Y = W_m \Lambda_m \Rightarrow D_0 := (L\Lambda_m - \Lambda_p L)(Y - UL)^{-1},$$

Ezek után már a dinamikus szabályozó és komponensei meghatározhatók:

Dinamikus szabályozó:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Hz + Dy, \\ u &= -K_{n-m}N_p z - (K_m + K_{n-m}N_m)y,\end{aligned}\tag{5.114}$$

ahol a dinamikus szabályozó *komponensei* a következők:

$$\begin{aligned}L &:= (I + P_0 U)^{-1} P_0 Y, \\ N_p &:= B_0 (I + P_0 U)W_p^{-1}, \\ N_m &:= N - B_0 P_0, \\ D_0 &:= (L\Lambda_m - \Lambda_p L)(Y - UL)^{-1} \\ H_0 &:= \Lambda_p - D_0 U, \\ H &:= W_p H_0 W_p^{-1}, \\ D &:= W_p D_0.\end{aligned}\tag{5.115}$$

5.6.3 PI szabályozás

PI szabályozás esetén

$$u = -A_p y - A_I \int y dt, \tag{5.116}$$

ezért választható

$$\dot{z} = y,$$

de nem befolyásolható $H = 0$ és $D = I$ a tervezéskor. A kiegészített rendszerben

$x_1 = [z^T \ x^T]^T$, $y_1 = [z^T \ y^T]^T$, és az állapotegyenlet mátrixai

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \tag{5.117}$$

és ehhez tervezendő az

$$u = -K_1 x_1 \tag{5.118}$$

állapot-visszacsatolás, melyet projektív irányítással közelíthetünk. Ehhez $\tilde{A}_1 = A_1 - B_1 K_1$ spektrumából $2m$ darab sajátvektort és sajátértéket betarthatunk, a reziduális spektrum azonban nem befolyásolható az

$$u = -K_1 P_1 y_1 = -K_1 \begin{bmatrix} I_{2m} & 0 \\ N & 0 \end{bmatrix} x_1 = -\begin{bmatrix} K_z & K_y & K_{n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \\ N_z z + N_y y \end{bmatrix} = \quad (5.119)$$

$$= -(K_z + K_{n-m} N_z) z - (K_y + K_{n-m} N_y) y$$

projektív irányítással, amely azonos a PI szabályozással:

$$\begin{aligned} A_P &:= K_y + K_{n-m} N_y, \\ A_I &:= K_z + K_{n-m} N_z. \end{aligned} \quad (5.120)$$

5.6.4 PID szabályozás

PID szabályozás esetén

$$u = -A_P y - A_I \int y dt - A_D \dot{y}, \quad (5.121)$$

ezért választható

$$\tilde{z} = y, \quad (5.122)$$

de nem befolyásolható $H = 0$ és $D = I$ a tervezéskor. Mivel $\dot{y} = C\dot{x} = CAx + CBu$, ezért a kiegészített rendszerben $x_1 = [z^T \ x^T]^T$, $y_1 = [z^T \ y^T \ \dot{y}^T]^T$, és az állapot-egyenlet mátrixai

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & C \\ 0 & CA \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ CB \end{bmatrix}, \quad (5.123)$$

és ehhez tervezhető kimeneti visszacsatolás, amely

$$u = -\tilde{K}_1 y_1 = -\tilde{K}_1 (C_1 x_1 + D_1 u) \Rightarrow u = -(I + \tilde{K}_1 D_1)^{-1} \tilde{K}_1 C_1 x_1 \quad (5.124)$$

miatt ekvivalens az

$$u = -K_1 x_1$$

állapot-visszacsatolással, ahol az áttérés

$$K_1 = (I + \tilde{K}_1 D_1)^{-1} \tilde{K}_1 C_1 \leftrightarrow \tilde{K}_1 = K_1 (C_1 - D_1 K_1)^{-1} \quad (5.125)$$

alapján lehetséges.

Először el kell végezni egy T koordináta-transzformácót a kiegészített rendszeren, mert C_1 nem a projektív irányításhoz szükséges alakú:

$$(A_1, B_1, C_1, D_1) \xrightarrow{T} A_1 := TAT^{-1}, B_1 := TB_1, C_1 := C_1 T^{-1} = [I_{3m} \ 0], D_1. \quad (5.126)$$

Ezután megtervezzük az $u = -K_1 x_1$ állapotviszacsatolást a transzformált rendszerhez. Meghatározzuk a zárt rendszer $A_1 - B_1 K_1$ állapotmátrixának spektrumát és sajátvektorait. Ebből $3m$ darabot az

$$u = -K_1 P_1 x_1 = -K_1 \begin{bmatrix} I_{3m} & 0 \\ N & 0 \end{bmatrix} x_1 = -\hat{K}_1 y_1 \quad (5.127)$$

projektív irányítással betarthatunk, míg a reziduális spektrum kiadódó helyre kerül.

A PID szabályozó paramétereit az

$$[A_I \ A_P \ A_D] = \hat{K}_1 (I_{3m} - D_1 \hat{K}_1)^{-1} \quad (5.128)$$

feltételből határozhatjuk meg.

5.6.5 Általánosított PID szabályozás

Általánosított PID szabályozás esetén a PI szabályozó $y_1 = [z^T \ y^T]^T$ kimenetéhez képest tovább bővítjük a kimenetek számát z_1 -gyel, ahol $z_1 = Hz_1 + Dy_1$. A szabályozó algoritmus

$$u = -A_P y - A_I \int y \, dt - A_{z_1} z_1. \quad (5.129)$$

A szabályozó H, D, A_P, A_I, A_{z_1} paramétereinek a megválasztására alkalmazhatjuk az előzőekben már részletezett módszert. Ehhez elegendő a PI szabályozásnál szereplő kiegészített rendszerből kiindulni, és az $x := x_1, y := y_1, z := z_1$ helyettesítéseket elvégezni.

Legyen $p = \dim(z_1)$, akkor a tervezést $p=1$ választással célszerű indítani és szükség esetén addig növelni p értékét, amíg a reziduális spektrum megfelelő helyre nem kerül. Ennek során figyelembe kell venni, hogy P_0 révén csak

$\text{rank}(B_0) + \text{rank}(A_{12}) - 1$ pólus helyezhető tetszőleges helyre kimeneti visszacsatolással. Itt $\text{rank}(B_0)$ növelhető $p = \dim(z_1)$ növelésével.

6. TÖBBVÁLTOZÓS RENDSZEREK SZÉTCSATOLÁSA

Ebben a fejezetben többváltozós rendszerek szétcsatolásával foglalkozunk *állapot-térben*. A szétcsatolással foglalkozó bő szakirodalomból a vizsgálatok során Gilbert [16] és Lohmann [17] eredményeit fogjuk felhasználni. Előbb megadjuk a szétcsatolhatóság feltételét, és bemutatunk egy módszert a rendszer szétcsatolására integrátor értelemben állapot-visszacsatolással, ha a szétcsatolhatóság feltétele teljesül. Az integrátor értelemben szétcsatolt rendszert kanonikus alakra hozzuk, és megmutatjuk, hogy melyik rész felelős az esetleg meglévő labilis pólus/zérus (P/Z) párokért, az ún. instabil szétcsatolhatósági zérushelyekért. Ezután bemutatunk egy prekompenzációs módszert a szétcsatolhatósági feltétel biztosítására, amely megfelelően súlyozott erősítőket és integrátorokat alkalmaz. Végül bemutatunk egy módszert az instabil szétcsatolhatósági zérushelyek eltüntetésére, amely párhuzamos kompenzáláson alapul. Bár a módszereket eredetileg folytonosidejű rendszerekre dolgozzuk ki, az algebrai hasonlóság miatt diszkrétidejű rendszerekre is alkalmazhatók, de az integrátor értelemben vett szétcsatoltság ekkor dead beat értelemben vett szétcsatoltsággal helyettesítendő.

6.1 A szétcsatolhatóság feltétele

Legyen $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ az irányítandó rendszer, amelynél a bemenő és kimenő jelek száma egyenlő: $m = \dim u = \dim y$, az irányítás pedig

$$u = -Kx + Lr. \quad (6.1)$$

A zárt rendszer állapotegyenlete és az átviteli függvény mátrixa rendre

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= (A - BK)x + BLr, \\ W(s, K, L) &= C(sI - (A - BK))^{-1} BL. \end{aligned} \quad (6.2)$$

A zárt rendszert szétcsatoltnak nevezzük, ha a $W(s, K, L)$ átviteli függvény diagonális és nemszinguláris, mert ekkor

$$W(s, K, L) = \text{diag}(w_{11}(s, K, L), \dots, w_{mm}(s, K, L)), \quad (6.3)$$

és ezért az r_i bemenet csak az y_i kimenetre hat. Jelölje $W_i(s, K, L)$ az átviteli függvény mátrix i -edik sorvektorát, akkor szétcsatolt rendszer esetén $W_i(s, K, L) = w_{ii}(s, K, L)e_i$, ahol e_i az i -edik standard egység-sorvektor.

A szétcsatolhatóság jellemzésére Gilbert [16] a $d_i \in R^1$ skalár és $D_i \in R^m$ sorvektor paramétereket vezette be, amelyek a rendszert a nagyfrekvenciás tartományban jellemzik, $i = 1, \dots, m$. Legyen speciálisan $W_i(s) := W_i(s, 0, I)$ a szakasz átviteli függvény mátrixának az i -edik sorvektora, akkor d_i és D_i definíciója a következő:

$$d_i = \begin{cases} n-1, & \text{ha } W_i(s) \equiv 0 \\ \lim_{s \rightarrow \infty} s^{d_i+1} W_i(s) \neq 0 \text{ és véges, különben} \end{cases} \quad (6.4a)$$

$$D_i = \begin{cases} 0, & \text{ha } d_i = n-1 \\ \lim_{s \rightarrow \infty} s^{d_i+1} W_i(s), & \text{különben.} \end{cases} \quad (6.4b)$$

Jelölje C_i a C mátrix i -edik sorvektorát. A Leverrier–Faddajeva-képletet szerint (lásd könyv I. kötet 3. fejezet [1]) ezeknek a paramétereknek időtartományban a következők felenek meg:

$$d_i = \begin{cases} n-1, & \text{ha } C_i A^l B = 0, \forall l = 0, 1, \dots, n-1 \text{ esetén} \\ l, & \text{ha } C_i A^k B = 0, \forall k = 0, 1, \dots, l-1 \text{ esetén és } C_i A^l B \neq 0 \end{cases} \quad (6.5a)$$

$$D_i = \begin{cases} 0, & \text{ha } d_i = n-1 \\ C_i A^{d_i} B, & \text{különben.} \end{cases} \quad (6.5b)$$

Tekintsük ezután a zárt rendszert, akkor szintén a Leverrier–Faddajeva-képlet szerint

$$\begin{aligned} \det(sI - A + BK) &= s^n - q_1(K)s^{n-1} - \dots - q_n(K) \\ \text{adj}(sI - A + BK) &= s^{n-1} + R_1(K)s^{n-2} + \dots + R_{n-1}(K), \end{aligned} \quad (6.6)$$

ahol

$$\begin{aligned} R_1(K) &= A - BK - q_1(K)I = A - q_1(K)I + BQ_{1,0}(K) \\ R_2(K) &= (A - BK)R_1(K) - q_2(K)I = \\ &= A^2 - q_1(K)A - q_2(K)I + B\{-KA + q_1(K)K + KBK\} - ABK = \\ &= A^2 - q_1(K)A - q_2(K)I + BQ_{2,0}(K) + ABQ_{2,1}(K), \end{aligned}$$

és általában

$$R_j(K) = A^j - q_1(K)A^{j-1} - \dots - q_j(K)I + \sum_{l=0}^{j-1} A^l BQ_{j,l}(K), \quad (6.7)$$

ahol $Q_{j,l}(0) = 0$. Ezért

$$\begin{aligned} W_i(s, K, L) &= \frac{s^{n-1}C_i B + s^{n-2}C_i R_1(K)B + \dots + C_i R_{n-1}(K)B}{s^n - q_1(K)s^{n-1} - \dots - q_n(K)} L = \\ &= \frac{s^{n-(d_i+1)}C_i A^{d_i} B + \dots}{s^n - q_1(K)s^{n-1} - \dots - q_n(K)} L, \end{aligned} \quad (6.8)$$

ahonnan következik

$$d_i(K, L) = d_i \Rightarrow K, L\text{-invariáns}, \quad (6.9a)$$

$$D_i(K, L) = D_i L \Rightarrow K\text{-invariáns}. \quad (6.9b)$$

Tekintsük a szabályozott szakaszt: $\Sigma = (A, B, C)$ és a zárt rendszert állapot-visszacsatolással: $\tilde{\Sigma} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) = (A - BK, BL, C)$. Vezessük be a következő Gilbert-mátrixokat:

$$D = \begin{bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_m \end{bmatrix}_{m \times m} \quad \text{és} \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_1 \\ \vdots \\ \tilde{D}_m \end{bmatrix}_{m \times m} = DL. \quad (6.10)$$

Feltehető, hogy L invertálható, ezért D és $\tilde{D}$ rangja megegyezik. Megmutatjuk, hogy ha a Gilbert-mátrix nemszinguláris, akkor a szakasz szétcsatolható állapot-visszacsatolással.

6.2 Integrátor értelemben szétcsatolt rendszer

6.1 Tétel: Ha a $\tilde{\Sigma} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ rendszer integrátor értelemben szétcsatolt, azaz

$\tilde{W}_i(s) = \frac{\gamma_i}{s^{d_i+1}} e_i$, ahol e_i az i -edik standard egység-sorvektor, akkor

$$\tilde{C}_i \tilde{A}^{d_i+1} = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Bizonyítás:

Ha a rendszer integrátor értelemben szétcsatolt, akkor

$$\det(sI - \tilde{A}) = s^n - \tilde{q}_1 s^{n-1} - \dots - \tilde{q}_n$$

$$\text{adj}(sI - \tilde{A}) = s^{n-1} + \tilde{R}_1 s^{n-2} + \dots + \tilde{R}_{n-1}$$

$$\tilde{W}_i = \frac{s^{n-d_i-1} \tilde{C}_i \tilde{R}_{d_i} \tilde{B} + s^{n-d_i-2} \tilde{C}_i \tilde{R}_{j_i} \tilde{B} + \dots}{s^n - \tilde{q}_1 s^{n-1} - \dots - \tilde{q}_n} = \frac{\gamma_i}{s^{d_i+1}} e_i,$$

ezért

$$\begin{aligned} \tilde{C}_i \tilde{R}_{d_i} \tilde{B} &= \tilde{D}_i = \gamma_i e_i \\ \tilde{C}_i \tilde{R}_{j_i} \tilde{B} &= \tilde{D}_i, \quad \forall j \geq i \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\tilde{W}_i = \frac{(s^{n-d_i-1} - \tilde{q}_1 s^{n-d_i-2} - \dots - \tilde{q}_{n-d_i-1}) \tilde{C}_i \tilde{R}_{d_i} \tilde{B}}{(s^{n-d_i-1} - \tilde{q}_1 s^{n-d_i-2} - \dots - \tilde{q}_{n-d_i-1}) s^{d_i+1}} = \frac{\gamma_i}{s^{d_i+1}} e_i, \quad (6.12)$$

ahonnan következik

$$\tilde{C}_i \tilde{R}_j \tilde{B} = \tilde{C}_i \tilde{A}^j \tilde{B} - \sum_{d_i < l < j} \tilde{C}_i \tilde{A}^l \tilde{B} \tilde{q}_{j-l} - \underbrace{\tilde{C}_i \tilde{A}^{d_i} \tilde{B}}_{\tilde{D}_i} \tilde{q}_{j-d_i} = -\tilde{D}_i \tilde{q}_{j-d_i} \Leftrightarrow \tilde{C}_i \tilde{A}^{d_i+1} = 0.$$

Megjegyzés: A szabályozott szakaszra általában $C_i A^{d_i+1} \neq 0$ áll fenn, mivel még nincs szétcsatolva integrátor értelemben.

6.2 Tétel: Legyen a $\Sigma = (A, B, C)$ szabályozott szakasz (kiindulási rendszer) Gilbert-mátrixa

$$D = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1} B \\ \vdots \\ C_m A^{d_m} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_m \end{bmatrix} \text{ nemszinguláris és } A^* := \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1+1} \\ \vdots \\ C_m A^{d_m+1} \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Akkor $K := D^{-1} A^*$ és $L = D^{-1}$ integrátor értelemben szétcsatolja a $\Sigma = (A, B, C)$ rendszert.

Bizonyítás:

A zárt rendszer az állapot-visszacsatolással $\bar{A} = A - BD^{-1} A^*$, $\bar{B} = BD^{-1}$ és $\bar{C} = C$. Mivel $\bar{d} = d_i$ és $\bar{D}_i = D_i L$, ezért

$$\bar{C}_i \bar{A}^{d_i} \bar{B} = D_i L = D_i D^{-1} = e_i$$

$$\bar{C}_i \bar{A} = C_i (A - BD^{-1} A^*) = C_i A - \underbrace{C_i BD^{-1} A^*}_0 = C_i A$$

$$\bar{C}_i \bar{A}^2 = C_i A (A - BD^{-1} A^*) = C_i A^2 - \underbrace{C_i ABD^{-1} A^*}_0 = C_i A^2$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ \bar{C}_i \bar{A}^{d_i} &= C_i A^{d_i} \\ \bar{C}_i \bar{A}^{d_i+1} &= C_i A^{d_i} (A - BD^{-1}A^*) = C_i A^{d_i+1} - \underbrace{C_i A^{d_i} BD^{-1}A^*}_{D_i} = 0, \end{aligned}$$

és a 6.1 tétel szerint a $\bar{\Sigma} = (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ rendszer integrátor értelemben szétcsatolt.

6.3 Kanonikusan szétcsatolt rendszer

A $\Sigma = (A, B, C)$ rendszert kanonikusan szétcsatoltnak nevezzük, ha

1) A, B, C az alábbi módon partícionált ($\bar{c}$ felső index a nem irányítható alrendszerhez tartozik):

$$A = \left[\begin{array}{ccccc|c} A_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & A_1^{\bar{c}} \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & 0 & A_2^{\bar{c}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m & 0 & A_m^{\bar{c}} \\ A_1^c & A_2^c & \cdots & A_m^c & A_{m+1}^c & A_{m+1}^{\bar{c}} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & A_{m+2}^{\bar{c}} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} A_i \ p_i \times p_i \text{ méretű} \\ A_i^c \ p_{m+1} \times p_i \text{ méretű} \\ A_i^{\bar{c}} \ p_i \times p_{m+2} \text{ méretű} \end{array} \quad (6.14a)$$

$$B = \left[\begin{array}{cccc} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_m \\ \hline b_1^c & b_2^c & \cdots & b_{m+1}^c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} b_i \ p_i \times 1 \text{ méretű} \\ b_i^c \ p_{m+1} \times 1 \text{ méretű} \end{array}$$

$$C = \left[\begin{array}{ccccc|c} c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_1^{\bar{c}} \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & c_2^{\bar{c}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_m & 0 & c_m^{\bar{c}} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} c_i \ 1 \times p_i \text{ méretű} \\ c_i^{\bar{c}} \ 1 \times p_{m+2} \text{ méretű} \end{array} \quad (6.14b)$$

$$p_i \geq d_i + 1, \quad i = 1, \dots, m \quad (6.14c)$$

2) A_i, b_i, c_i tovább partícionáltak, $i = 1, \dots, m$:

$$A_i = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & I_{d_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline Y_i & \Phi_i & \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} Y_i \ r_i \times (d_i + 1) \text{ méretű} \\ \Phi_i \ r_i \times r_i \text{ méretű} \end{array} \quad (6.15a)$$

$$b_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma_i \\ \beta_i \end{pmatrix}_{(d_i+1+\eta_i) \times 1} \quad \beta_i = \begin{pmatrix} \beta_{i1} \\ \beta_{i2} \\ \vdots \\ \beta_{i,r_i} \end{pmatrix}_{r_i \times 1} \quad \gamma_i \in R^1 \quad c_i = (1 \ 0 \ \dots \ 0)_{1 \times p_i} \quad (6.15b)$$

$$r_i = p_i - d_i - 1 \quad (6.15c)$$

3) Jelölje B_i a B mátrix i -edik oszlopát, akkor $B_i, AB_i, \dots, A^{p_i-1}B_i$ lineárisan függetlenek.

4) Legyen $p = \sum_{i=1}^m p_i$. Ha $p_{m+1} \neq 0$, és $\eta = (\eta_1 \dots \eta_n)$ jelölés mellett $\eta_p, \dots, \eta_{p+p_{m+1}}$ nem mind nulla, akkor az $\eta(sI_n - A)^{-1}B$ sorvektornak legalább két eleme nemnulla függvénye s -nek.

Megjegyzés: A kanonikusan szétcsatolt alaknak fontos szerepe lesz az instabil szétcsatolhatósági zérusok meghatározásában.

A továbbiakban megadjuk az integrátor értelemben szétcsatolt rendszer néhány fontos tulajdonságát, és erre alapozva módszert adunk az integrátor értelemben szétcsatolt és kanonikus alak meghatározására. Vezessük be a következő jelölést:

$$\mathcal{M} := \{\eta : \eta \in R^n \text{ sorvektor}\} \quad (6.16)$$

$$\mathcal{M}_i := \{\eta \in \mathcal{M} : \eta A^j B_k = 0 \ \forall k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}, \ \forall j \in \{0, \dots, n-1\}\}.$$

6.3 Tétel (Gilbert, [16]): Ha a $\Sigma = (A, B, C)$ rendszer teljesen irányítható és integrátor értelemben szétcsatolt, akkor $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ esetén teljesül, hogy

$$\mathcal{M}_i A \subset \mathcal{M}_i \quad (6.17a)$$

$$\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j = \{0\}, \text{ ha } i \neq j \quad (6.17b)$$

$$C_i, C_i A, \dots, C_i A^{d_i} \subset \mathcal{M}_i \text{ és lineárisan függetlenek.} \quad (6.17c)$$

Következmény: Ha a $\Sigma = (A, B, C)$ rendszer teljesen irányítható és integrátor értelemben szétcsatolt, akkor

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \dots + \mathcal{M}_m + \mathcal{M}_{m+1}, \quad (6.18a)$$

$$p_i = \dim \mathcal{M}_i, \quad i = 1, \dots, m+1, \quad p = \sum_{i=1}^m p_i, \quad p_{m+1} = n - p, \quad (6.18b)$$

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_m + \xi_{m+1}, \quad \xi_i \in \mathcal{M}_i \text{ egyértelmű}, \quad (6.18c)$$

$$\xi_{m+1} \neq 0 \Rightarrow \exists (j_1, k_1), (j_2, k_2), \quad k_1 \neq k_2, \text{ hogy } \eta A^{j_1} B_{k_1} \neq 0 \text{ és } \eta A^{j_2} B_{k_2} \neq 0, \quad (6.18d)$$

ahol $\mathcal{M}_{m+1}$ az ortogonális kiegészítője $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \dots + \mathcal{M}_m$ -nek $\mathcal{M}$ -ben.

Algoritmus (áttérés teljesen irányítható és integrátor értelemben szétcsatolt rendszerről kanonikusan szétcsatolt rendszerre):

1. Mivel a $\Sigma = (A, B, C)$ rendszer integrátor értelemben szétcsatolt, ezért $C_i, C_i A, \dots, C_i A^{d_i} \in \mathcal{M}_i$ lineárisan függetlenek. Egészítse ki ezeket a sorvektorokat $q_{d_i+2}^*, \dots, q_{p_i}^* \in \mathcal{M}_i$ bázissá, ahol $p_i = \dim \mathcal{M}_i$. Legyen

$$Q_i = \begin{bmatrix} C_i \\ C_i A \\ \vdots \\ C_i A^{d_i} \\ q_{d_i+2}^* \\ \vdots \\ q_{p_i}^* \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, m \quad (6.19)$$

2. Legyen $\mathcal{M}_{m+1}$ az ortogonális kiegészítője $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \dots + \mathcal{M}_m$ -nek $\mathcal{M}$ -ben, és álljanak Q_{m+1} sorai $\mathcal{M}_{m+1}$ egy bázisából.
3. Legyen $Q = [Q_1^T \ \dots \ Q_m^T \ Q_{m+1}^T]^T$, akkor $\tilde{x} = Qx$ egy koordináta-transzformáció, amely a teljesen irányítható és integrátor értelemben szétcsatolt rendszert kanonikus alakra hozza. Mivel a koordináta-transzformáció nem változtatja meg az átviteli függvényt, ezért a $\tilde{\Sigma} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) = (QAQ^{-1}, QB, CQ^{-1})$ rendszer továbbra is integrátor értelemben szétcsatolt marad.

Megjegyzés: Ha a $\Sigma = (A, B, C)$ rendszer integrátor értelemben szétcsatolt, de nem teljesen irányítható, akkor irányíthatósági lépcsős alakra hozható egy

$$T^{-1} = [\underbrace{t_1, \dots, t_k}_{L \text{ bázisa}}, \underbrace{t_{k+1}, \dots, t_n}_{L^\perp \text{ bázisa}}] \quad (6.20)$$

koordináta-transzformációval (lásd könyv I. kötet, 10. fejezet [1]), ahol $L = \text{Span}(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$, $R^n = L + L^\perp$, $\dim L^\perp = p_{m+2}$, $\hat{x} = Tx$ és $\Sigma = (A, B, C) \xrightarrow{T} \hat{\Sigma} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$,

$$\hat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{cc} & A_{c\bar{c}} \\ 0 & A_{\bar{c}\bar{c}} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = TB = \begin{bmatrix} B_c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = CT^{-1} = [C_c \mid C_{\bar{c}}], \quad (6.21)$$

továbbá $\hat{\Sigma}_c = (A_{cc}, B_c, C_c)$ is integrátor értelemben szétcsatolt. Az áttérés a következő sémában végezhető el:

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma & \xrightarrow{T} & \hat{\Sigma} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_{p_{m+2}} \end{bmatrix}} & \tilde{\Sigma} \\ & & \downarrow & & \\ & & \hat{\Sigma}_c & \xrightarrow{Q} & \tilde{\Sigma}_c \end{array} \quad (6.22)$$

6.4 Kanonikusan szétcsatolt rendszer kompenzálása

6.4 Tétel (Gilbert, [16]): Legyen a $\tilde{\Sigma} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ rendszer kanonikusan szétcsatolt, akkor a $\{\tilde{K}, \tilde{L}\}$ állapot-visszacsatolás szétcsatolja a rendszert $\Leftrightarrow$

$$\tilde{L} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m), \quad \lambda_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.23a)$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \vartheta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \vartheta_1^{\bar{c}} \\ 0 & \vartheta_2 & \dots & 0 & 0 & \vartheta_2^{\bar{c}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \vartheta_m & 0 & \vartheta_m^{\bar{c}} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \vartheta_i \quad 1 \times p_i \text{ méretű} \\ \vartheta_i^{\bar{c}} \quad 1 \times p_{m+2} \text{ méretű} \end{array} \quad (6.23b)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{p_{m+1}} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{p_{m+2}}$

Az állítás illusztrálására tekintsük az $sI - (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})$ kifejezést, kihasználva, hogy $\tilde{\Sigma}$ kanonikus alakban adott:

$$sI - (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}) =$$

$$= sI - \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & 0 & 0 & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_m & 0 & * \\ * & \cdots & * & A_{m+1}^c & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & A_{m+2}^{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_m \\ * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vartheta_1 & \cdots & 0 & 0 & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \vartheta_m & 0 & * \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|cc} sI_{p_1} - A_1 + b_1\vartheta_1 & \cdots & 0 & 0 & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & sI_{p_m} - A_m + b_m\vartheta_m & 0 & * \\ * & \cdots & * & sI_{p_{m+1}} - A_{m+1}^c & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & sI_{p_{m+2}} - A_{m+2}^{\bar{c}} \end{array} \right] =$$

$$=: \begin{bmatrix} P & 0 & Q \\ R & S & T \\ 0 & 0 & V \end{bmatrix}$$

Felhasználjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} P & 0 & Q \\ R & S & T \\ 0 & 0 & V \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & -P^{-1}QV^{-1} \\ -S^{-1}RP^{-1} & S^{-1} & -S^{-1}TV^{-1} + S^{-1}RP^{-1}QV^{-1} \\ 0 & 0 & V^{-1} \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} P & 0 & Q \\ R & S & T \\ 0 & 0 & V \end{bmatrix} = \det(P) \det(S) \det(V).$$

Figyelembe véve, hogy

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & 0 & 0 & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_m & 0 & * \end{bmatrix} = [C \ 0 \ *],$$

$$\tilde{B}\tilde{L} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & b_m \\ * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & b_m\lambda_m \\ * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} H \\ * \\ 0 \end{bmatrix},$$

ezért a kompenzált rendszer átviteli függvénye

$$\begin{aligned}
 W(s, \tilde{K}, \tilde{L}) &= [C \quad 0 \quad *] \begin{bmatrix} P & 0 & Q \\ R & S & T \\ 0 & 0 & V \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H \\ * \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} c_1(sI_{p_1} - A_1 + b_1\vartheta_1)^{-1}b_1\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_m(sI_{p_m} - A_m + b_m\vartheta_m)^{-1}b_m\lambda_m \end{bmatrix} = (6.24) \\
 &= \text{diag}(w_{11}(s, \vartheta_1, \lambda_1), \dots, w_{mm}(s, \vartheta_m, \lambda_m)).
 \end{aligned}$$

Megjegyzés:

- i) Annak bizonyításában, hogy szétcsatolás esetén az utolsó előtti blokkoszlop $\tilde{K}$ -ban nulla, központi szerepe van a kanonikusan szétcsatolt rendszer 4) tulajdonságának.
- ii) Az utolsó ($\tilde{c}$ -hoz tartozó) blokkoszlop nullának is választható $\tilde{K}$ -ban, mivel nem befolyásolja az eredő átviteli függvényt.

6.4.1 Zérushelyek invarianciája állapot-visszacsatolás esetén

Megmutatjuk, hogy az állapot-visszacsatolás változtatlanul hagyja a zérushelyeket mind egyváltozós, mind pedig többváltozós rendszer esetén.

SISO rendszer esete

SISO rendszer például a $w_{ii}(s, \vartheta_i, \lambda_i)$ alrendszer is. A jelölések egyszerűsítése érdekében hagyjuk el az i indexet, és tekintsük a

$$W(s, \vartheta, \lambda) = c(sI - A + b\vartheta)^{-1}b\lambda =: \frac{\omega(s)\lambda}{\psi(s, \sigma)} \quad (6.25)$$

állapot-visszacsatolással kompenzált SISO rendszert, ahol ϑ sorvektor, b oszlopvektor és λ skalár. Megmutatjuk, hogy

- i) $\omega(s)$ maximum $(n-1)$ -edfokú és független ϑ, λ -tól
- ii) $\psi(s, \sigma) = \det(sI - A + b\vartheta) = s^n - \sigma_1 s^{n-1} - \dots - \sigma_n \Rightarrow \sigma := (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$
- iii) $\varphi(s) = \det(sI - A) = s^n - q_1 s^{n-1} - \dots - q_n \Rightarrow \pi := (q_1, \dots, q_n)$
- iv) $\sigma = \pi - \vartheta \kappa$, ahol

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &:= b \\
\kappa_2 &:= (A - q_1 I)b \\
&\vdots \\
\kappa_n &:= (A^{n-1} - q_1 A^{n-2} - \dots - q_n I)b \\
\kappa &:= [\kappa_1 \quad \kappa_2 \quad \dots \quad \kappa_n].
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Az állítások bizonyítására induljunk ki a Leverrier–Faddajeva-képletből:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \text{trace}(A - b\vartheta) = \text{trace}(A) - \text{trace}(b\vartheta) = \\
&= q_1 - (b_1\vartheta_1 + \dots + b_n\vartheta_n) = q_1 - \vartheta b = q_1 - \vartheta\kappa_1, \\
\sigma_2 &= \frac{1}{2} \text{trace}\{(A - b\vartheta)[(A - b\vartheta) - \sigma_1 I]\} = q_2 - \vartheta(A - q_1 I)b = q_2 - \vartheta\kappa_2, \\
&\vdots \\
\sigma_i &= q_i - \vartheta\kappa_i, \quad i = 1, \dots, n,
\end{aligned}$$

ahonnan következik $\sigma = \pi - \vartheta\kappa$.

Az állapot-visszacsatolással kompenzált rendszer átviteli függvénye

$$W(s, \vartheta, \lambda) = c \frac{s^{n-1}I + s^{n-2}(A - b\vartheta - \sigma_1 I) + \dots}{s^n - \sigma_1 s^{n-1} - \dots - \sigma_n} b\lambda.$$

Alkalmazzuk ismét a Leverrier–Faddajeva képletet, akkor

$$\begin{aligned}
[(A - b\vartheta) - \sigma_1 I]b &= Ab - b\vartheta b - (q_1 - \vartheta\kappa_1)b = Ab - q_1 b, \\
[(A - b\vartheta)(A - b\vartheta) - \sigma_1(A - b\vartheta) - \sigma_2 I]b &= \\
&= (A - b\vartheta)(Ab - q_1 b - (q_2 - \vartheta\kappa_2)b) = \\
&= A^2 b - q_1 Ab - q_2 b, \\
&\vdots \\
[(A - b\vartheta)^i - \sigma_1(A - b\vartheta)^{i-1} - \dots - \sigma_i I]b &= \\
&= (A - b\vartheta)(A^{i-1}b - q_1 A^{i-2}b - \dots - q_{i-1}b) - (q_i - \vartheta\kappa_i)b = \\
&= A^i b - q_1 A^{i-1}b - \dots - q_i b,
\end{aligned}$$

ahonnan következik

$$\omega(s) = c[s^{n-1}b + s^{n-2}(A - q_1 I)b + \dots + (A^{n-1} - q_1 A^{n-2} - \dots - q_n I)b], \tag{6.27}$$

és ezért $\omega(s)$ független ϑ, λ -tól és $(n-1)$ -edfokú.

MIMO rendszer esete

Tekintsük az $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ szabályozott szakaszt, amelynek az (ún. invariáns) MIMO zérushelyei a

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} < n + \min(m, r), \text{ ha } m \neq r \quad (6.28a)$$

$$\det \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} = 0, \text{ ha } m = r \quad (6.28b)$$

feltételekből határozhatók meg, lásd könyv I. kötet 3. fejezet [1]. Alkalmazzuk az $u = -Kx + Lr$ állapot-visszacsatolást, akkor a zárt rendszer állapotegyenlete $\dot{x} = (A - BK)x + BLr$, $y = Cx$, ezért a zárt rendszer MIMO zérushelyei a

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A + BK & -BL \\ C & 0 \end{bmatrix} = \text{rank} \left\{ \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -K & L \end{bmatrix} \right\} = \text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

feltétel alapján megegyeznek a szakasz MIMO zérushelyeivel, mivel feltehető, hogy L maximális rangú ($m = r$ esetén invertálható).

6.4.2 A szétcsatolt rendszer pólusai és zérushelyei

Vezessük be a

$$\psi_i(s, \sigma_i) := \det(sI_{p_i} - A_i + b_i \sigma_i) = s^{p_i} - \sigma_{i,1} s^{p_i-1} - \dots - \sigma_{i,p_i}, \quad (6.30a)$$

$$\sigma_i := (\sigma_{i,1}, \dots, \sigma_{i,p_i}),$$

$$\alpha_{m+1}(s) := \det(sI_{p_{m+1}} - A_{m+1}^c) \quad (6.30b)$$

$$\alpha_{m+2}(s) := \det(sI_{p_{m+2}} - A_{m+2}^{\bar{c}}) \quad (6.30c)$$

jelölést, ahol $\psi_i(s, \sigma_i)$ a $\{\vartheta_i, \lambda_i\}$ állapot-visszacsatolással kompenzált (A_i, b_i, c_i) alrendszer karakterisztikus egyenlete a kompenzálás után, $\alpha_{m+1}(s)$ és $\alpha_{m+2}(s)$ pedig a kanonikusan szétcsatolt alak két kitüntetett blokkjának karakterisztikus egyenlete.

6.5 Tétel: Ha a kanonikusan és integrátor értelemben szétcsatolt $\tilde{\Sigma} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ rendszert a (6.23a-b) állapot-visszacsatolással kompenzáljuk, akkor a zárt rendszer szétcsatolt marad, és az átviteli függvény diagonális eleme

$$w_{\tilde{u}}(s, \tilde{K}, \tilde{L}) = w_{\tilde{u}}(s, \vartheta_i, \lambda_i) = \frac{\alpha_i(s) \lambda_i}{\psi_i(s, \sigma_i)} \quad (6.31)$$

lesz, ahol

- i) $\alpha_i(s) = s^{r_i} - \alpha_{i,1} s^{r_i-1} - \dots - \alpha_{i,r_i}$
- ii) $\psi_i(s, \sigma_i) = s^{p_i} - \sigma_{i,1} s^{p_i-1} - \dots - \sigma_{i,p_i}$, $\sigma_i = (\sigma_{i,1}, \dots, \sigma_{i,p_i})$
- iii) $\alpha_i(s) = \det(sI_{r_i} - \Phi_i)$
- iv) $\sigma_i = \pi_i - \vartheta_i \kappa_i$, ahol $\pi_i = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,r_i}, 0, \dots, 0) \in R^{p_i}$, továbbá

$$\begin{aligned} \kappa_{i,1} &= b_i \\ \kappa_{i,2} &= A_i b_i - \alpha_{i,1} b_i \\ &\vdots \\ \kappa_{i,p_i} &= A_i^{p_i-1} b_i - \alpha_{i,1} A_i^{p_i-2} b_i - \dots - \alpha_{i,r_i} A_i^{p_i-r_i-1} b_i \\ \kappa_i &= [\kappa_{i,1} \quad \kappa_{i,2} \quad \dots \quad \kappa_{i,p_i}]_{p_i \times p_i} \end{aligned} \quad (6.32)$$

- v) A $\{\tilde{K}, \tilde{L}\}$ állapot-visszacsatolással kompenzált zárt szabályozási kör karakterisztikus egyenlete

$$\varphi_c(s, \tilde{K}, \tilde{L}) = \alpha_{m+1}(s) \alpha_{m+2}(s) \prod_{i=1}^m \psi_i(s, \sigma_i). \quad (6.33)$$

Bizonyítás:

A SISO rendszerekre kapott eredmény szerint

$$\omega_i(s) = c_i \{ s^{p_i-1} b_i + s^{p_i-2} (A_i b_i - q_{i,1} b_i) + \dots + (A_i^{p_i-1} b_i - q_{i,1} A_i^{p_i-2} b_i - \dots - q_{i,p_i-1} b_i) \}$$

ahol

$$\begin{aligned} \varphi_i(s) &= \det(sI_{p_i} - A_i) = s^{p_i} - q_{i,1} s^{p_i-1} - \dots - q_{i,p_i} = \\ &= \det \left[\begin{array}{cccc|c} s & -1 & \dots & 0 & \\ 0 & s & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & \\ 0 & 0 & \dots & s & \\ \hline & Y_i & & & sI_{r_i} - \Phi_i \end{array} \right] = s^{d_i+1} \det(sI_{r_i} - \Phi_i). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Másképp viszont a SISO rendszer zérushelyeinek invarianciája miatt $\omega_i(s)$ ugyanaz, mint a kanonikusan és integrálós értelemben szétcsatolt rendszer esetén volt, tehát

$$w_{ii}(s, 0, I_m) = \frac{\gamma_i}{s^{d_i+1}} = \frac{\omega_i(s)}{s^{d_i+1} \det(sI_{r_i} - \Phi_i)} \Rightarrow \quad (6.35)$$

$$\omega_i(s) = \alpha_i(s) \gamma_i, \text{ ahol } \alpha_i(s) = \det(sI_{r_i} - \Phi_i). \quad (6.36)$$

Innen és a SISO rendszerekre kapott korábbi eredményekből következik π_i speciális alakja, valamint $\sigma_i = \pi_i - \vartheta_i \kappa_i$. A szétcsatolt zárt szabályozási rendszer karakterisztikus egyenletének alakja a korábbi $\varphi_c(s, \tilde{K}, \tilde{L}) = \det(P) \det(S) \det(V)$ összefüggésből következik.

Következmény: Mivel a szétcsatolt rendszer karakterisztikus egyenlete

$$\varphi_c(s, \tilde{K}, \tilde{L}) = \alpha_{m+1}(s) \alpha_{m+2}(s) \prod_{i=1}^m \psi_i(s, \sigma_i),$$

a szétcsatolt rendszer diagonálisban álló átviteli függvényei pedig

$$w_{ii}(s, \tilde{K}, \tilde{L}) = w_{ii}(s, \vartheta_i, \lambda_i) = \frac{\alpha_i(s) \lambda_i}{\psi_i(s, \sigma_i)}$$

alakúak, ezért a szétcsatolt rendszer átviteli függvényeiben $\alpha_{m+1}(s) \alpha_{m+2}(s)$ pólus-zérus (P/Z) kiejtést okoz. Közülük $\alpha_{m+2}(s)$ jól ismert a nem teljesen irányítható rendszerek területéről, és nem okoz problémát ún. stabilizálható rendszer esetén, lásd könyv I. kötet 10. fejezet [1]. Újdonság viszont, hogy teljesen irányítható rendszer esetén is lehet P/Z kiejtés, ha a rendszer szétcsatolt, amelyet a MIMO zérushelyek okozhatnak $\alpha_{m+1}(s) := \det(sI_{p_{m+1}} - A_{m+1}^c)$ révén. Ezeket a zérushelyeket szétcsatolási zérushelyeknek nevezzük. Ha $\alpha_{m+1}(s)$ gyökei között vannak labilisak is, akkor ezek az ún. *instabil szétcsatolási zérushelyek* (unstable decoupling zeros) a rendszert használhatatlanná teszik a mindig meglévő paraméter bizonytalanságok miatt. Az instabil szétcsatolási zérushelyek állapot-visszacsatolással nem mozdíthatók ki, mert a MIMO zérushelyek állapot-visszacsatolás esetén invariánsak. Módosításukra ezért más módszert (párhuzamos kompenzálást stb.) kell alkalmazni.

6.4.3 Az állapot-visszacsatolás megtervezése

Tegyük fel, hogy a rendszer irányítható (vagy legalább stabilizálható) és teljesülnek a szétcsatolhatóság feltételei. A rendszer szétcsatolását három lépésben meg tudjuk tervezni. Az első lépésben meghatározzuk a Gilbert-féle szétcsatolhatósági

jellemzőket (d_i, D) , és állapot-visszacsatolással $(K_1 = D^{-1}A^*, L_1 = D^{-1})$ a rendszert integrátor értelemben szétcsatoljuk. Egy második lépésben megfelelő koordináta-transzformációval (Q) az integrátor értelemben szétcsatolt rendszert kanonikusan szétcsatolt alakra hozzuk, amelyből a rendszer struktúrája meghatározható. A már szétcsatolt SISO alrendszereket külön-külön kompenzáljuk állapot-visszacsatolással (v_i, λ_i) , és meghatározzuk az ezeknek megfelelő eredő MIMO állapot-visszacsatolást (K_2, L_2) . Végül meghatározzuk a két lépcsőben kapott állapot-visszacsatolások eredőjét.

Az alrendszerek kompenzálása

Az Ackermann-képlet és a Roppenecker-formula mellett a $w_{ii}(s, v_i, \lambda_i)$ SISO alrendszerek állapot-visszacsatolásának megtervezésére a 6.5 tétel^{en} alapuló, Gilberttől származó módszer is alkalmazható. Ehhez meg kell választani a $w_{ii}(s, v_i, \lambda_i)$ kompenzált rendszer $\psi_i(s, \sigma_i)$ nevezőjét (a zárt rendszer pólusait), képezni kell az $\alpha_i(s) = \det(sI_{p_i} - \Phi_i)$ számláló polinomot, és ezekből a 6.5 tétel ^{alapján} elő kell állítani a σ_i és π_i sorvektorokat, a $\kappa_{i,1}, \dots, \kappa_{i,p_i}$ oszlopvektorokat és az utóbbiakból álló κ_i mátrixot, amelyekkel már az állapot-visszacsatolás meghatározható:

$$v_i := (\pi_i - \sigma_i)\kappa_i^{-1} \quad \text{és} \quad \lambda_i = \frac{\psi_i(0, \sigma_i)}{\alpha_i(0)}. \quad (6.37)$$

Többlépcsős állapot-visszacsatolás eredője

Irányítható rendszert feltételezve a kompenzálást két lépésben végezhetjük el. Feltételezve, hogy a D Gilbert mátrix invertálható, az első lépésben integrátor értelemben szétcsatoljuk a szabályozott szakaszt egy alkalmasan megválasztott állapot-visszacsatolással:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (6.38a)$$

$$u = -K_1 x + L_1 \bar{u}, \quad K_1 := D^{-1}A^*, \quad L_1 := D^{-1}. \quad (6.38b)$$

Az első állapot-visszacsatolás eredője:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK_1)x + BL_1 \bar{u} =: \bar{A}x + \bar{B}\bar{u} \\ y &= Cx =: \bar{C}x. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Ezután megkonstruáljuk az $\tilde{x} = Qx$ koordináta-transzformációt az erre kidolgozott algoritmussal, és a már integrátor értelemben szétcsatolt rendszert kanonikusan szétcsatolt alakra hozzuk:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= Q\bar{A}Q^{-1}\tilde{x} + Q\bar{B}\bar{u} =: \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\ y &= \bar{C}Q^{-1}\tilde{u} =: \tilde{C}\tilde{x},\end{aligned}\tag{6.40a}$$

amelyet azután egy második lépésben az

$$\bar{u} = -\tilde{K}_2\tilde{x} + \tilde{L}_2r\tag{6.40b}$$

állapot-visszacsatolással kompenzáljuk, megőrizvén a szétcsatoltságot. Az eredő irányítás innen meghatározható:

$$\begin{aligned}u &= -K_1x + L_1(-\tilde{K}_2Qx + \tilde{L}_2r) \\ u &= -\underbrace{(K_1 + L_1\tilde{K}_2Q)}_Kx + \underbrace{L_1\tilde{L}_2}_Lr.\end{aligned}$$

Az eredő állapot-visszacsatolás és irányítás:

$$K = D^{-1}A^* + D^{-1}\tilde{K}_2Q = D^{-1}(A^* + \tilde{K}_2Q),\tag{6.41a}$$

$$L = D^{-1}\tilde{L}_2,\tag{6.41b}$$

$$u = -Kx + Lr.\tag{6.41c}$$

Megjegyzés: Az irányítás csak akkor alkalmazható, ha $\alpha_{m+1}(s)$ gyökei stabilak. Az általában nem mérhető x állapot becslésére állapotmegfigyelőt alkalmazhatunk.

6.5 A szétcsatolási feltételek biztosítása soros kompenzálással

6.1 Lemma: Legyen $n = \dim x$, $m = \dim y = \dim u$ és legyenek a Gilbert-paraméterek d_i , $i = 1, \dots, m$. Akkor a szétcsatolható rendszer esetén

$$n = \sum_{i=1}^m (d_i + 1) + \text{MIMO zérusok száma}.\tag{6.42}$$

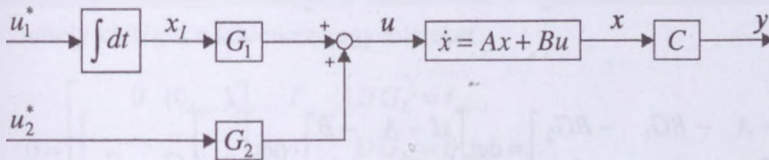
Bizonyítás:

Ha a rendszer szétcsatolható, akkor állapot-visszacsatolással integrátor értelemben szétcsatolt alakra hozható, és a diagonálisban álló átviteli függvény

$$w_{ii}(s, K, L) = \frac{\gamma_i}{s^{d_i+1}}.$$

Mivel az állapot-visszacsatolás a MIMO zérushelyeket invariánsan hagyja, ezért a MIMO zérushelyek pólus/zérus kiejtést okoznak $W(s, K, L)$ -ben, és így a pólusok száma $n = \sum_{i=1}^m (d_i + 1) + \text{MIMO zérusok száma}$.

A szétcsatolási feltételek biztosítására *soros kompenzátort* fogunk alkalmazni, amely integrátorokból és erősítőkből áll, lásd 6.1. ábra.



6.1. ábra. Szétcsatolhatósági feltételek biztosítása integrátorokkal és erősítővel

6.2 Lemma: A 6.1. ábra szerinti, integrátorokból és erősítőkből álló kompenzáció esetén a MIMO zérushelyek megőrződnek és újak nem keletkeznek, ha $G = [G_1 \ G_2]_{m \times m}$ nonszinguláris. A bemenő jelek száma sem változik meg.

Bizonyítás:

A rendszer állapotegyenlete $\dot{x} = Ax + Bu$ és $y = Cx$, a kompenzáló tagé pedig

$$\begin{aligned} \dot{x}_I &= u_1^*, \\ u &= G_1 x_I + G_2 u_2^* = [G_1 \ G_2]_{m \times m} \begin{pmatrix} x_I \\ u_2^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mivel $\dim u_1^* = \dim x_I$ és $G = [G_1 \ G_2]_{m \times m}$ méretű, ezért a bemenetek száma a kompenzáció révén nem változik meg. Az eredő rendszer állapotegyenlete

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & BG_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_I \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & BG_2 \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u^* \quad (6.43)$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_I \end{pmatrix} = \bar{C}\bar{x}.$$

A MIMO zérusok a soros kompenzálás után a

$$\det \begin{bmatrix} sI - A & -BG_1 & 0 & -BG_2 \\ 0 & sI & -I & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (6.44)$$

feltételből határozhatók meg. A determináns kifejthető a harmadik blokkoszlop szerint:

$$\det \begin{bmatrix} sI - A & -BG_1 & -BG_2 \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_{m \times m} \end{bmatrix}}_{G_{m \times m}} \end{bmatrix} = 0 \quad (6.45)$$

Ha tehát $G_{m \times m}$ nonszinguláris, akkor a második determináns a jobb oldalon nem nulla, és ezért megőrződnek a szakasz zérushelyei és új zérushelyek sem keletkeznek.

Megjegyzés: Ha a 6.1. ábra szerinti kompenzálással $\bar{n}$ és $\bar{\delta} = \sum (\bar{d}_i + 1)$ mindketten nőnek, de az $\bar{n} - \bar{\delta}$ különbség csökken, akkor a kompenzálás fokozatos ismétlésével elérhető, hogy teljesüljön az $\bar{n} - \bar{\delta} = \text{MIMO zérusok száma}$ szétcsatolási feltétel, mivel a MIMO zérushelyek invariánsak maradnak.

6.3 Lemma (Lohmann, [17]): Legyen a Gilbert-mátrix rangja $\text{rank } D = m - r$, ahol r a defektszám. Akkor a 6.1. ábrának megfelelő $G = [G_1 \ G_2]_{m \times m}$ nonszinguláris mátrix megválasztható úgy, hogy $\alpha = \dim x_I$ jelöléssel $\bar{n} = n + \alpha$ és $\bar{\delta} = \delta + \alpha + r$, tehát $\bar{\delta}$ jobban nő, mint $\bar{n}$. Ezért a 6.1. ábrának megfelelő kompenzálás sorozatos alkalmazásával elérhető, hogy a kompenzált rendszerre már teljesül a szétcsatolhatósági feltétel.

Bizonyítás:

Indexeljük úgy át a kimenő jeleket, hogy az átindexelés után D első $m-r$ oszlopa lineárisan független legyen. Akkor $\exists Q_{r \times m}$, amely megoldása a következő egyenletnek:

$$QD = \begin{bmatrix} \underbrace{Q_L}_r & \underbrace{Q_R}_{m-r-\gamma} & \underbrace{0}_\gamma \end{bmatrix} D = 0_{r \times m}, \text{ továbbá } \exists Q_L^{-1}. \quad (6.46)$$

Itt γ jelöli az esetleg meglévő nulla oszlopok számát Q -ban. Keressünk olyan

$$G_{m \times m} = \begin{bmatrix} \underbrace{G_L}_{m-r} & \underbrace{G_R}_r \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

mátrixot, amely kielégíti a következő egyenleteket:

$$\begin{aligned} [0_{(m-r) \times r} \quad I_{m-r}] D G_L &= I_{m-r} \\ D G_R &= 0_{m \times r} \end{aligned} \quad (6.48)$$

Legyen G_1, G_2 a G mátrix egy másik partíciója:

$$\begin{array}{cc} m-r & r \\ \hline G_L & G_R \\ \hline \end{array} \quad (6.49a)$$

$$\begin{array}{cc} m-r-\gamma & \gamma+r \\ \hline G_1 & G_2 \\ \hline \end{array} \quad (6.49b)$$

és válasszunk $\alpha = \dim x_l := m-r-\gamma$ értéket. Akkor

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \begin{bmatrix} A & BG_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & BG_2 \\ I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BG_1 & ABG_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \overline{A^2B} &= \begin{bmatrix} A & BG_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BG_1 & ABG_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ABG_1 & A^2BG_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ \overline{A^{d_l}B} &= \begin{bmatrix} A^{d_l-1}BG_1 & A^{d_l}BG_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.50)$$

és ezért

$$\begin{aligned}
\overline{C_i} \overline{B} &= [C_i \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & BG_2 \\ I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \underbrace{C_i BG_2}_0 \end{bmatrix} = 0^T, \\
\overline{C_i} \overline{A} \overline{B} &= [C_i \quad 0] \begin{bmatrix} BG_1 & ABG_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{C_i BG_1}_0 & \underbrace{C_i ABG_2}_0 \end{bmatrix} = 0^T, \\
&\vdots \\
\overline{C_i} \overline{A}^{d_i} \overline{B} &= [C_i \quad 0] \begin{bmatrix} A^{d_i-1} BG_1 & A^{d_i} BG_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \underbrace{C_i A^{d_i} BG_2}_{D_i} \end{bmatrix} = [0 \quad D_i G_2].
\end{aligned} \tag{6.51}$$

Világos, hogy

$$DG = [DG_L \quad DG_R] = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \tag{6.52a}$$

$$[0 \quad I]DG = [0 \quad I] \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} = [I \quad 0], \tag{6.52b}$$

továbbá $\Phi_{r \times (m-r)}$ meghatározható a

$$\underbrace{QDG}_0 = [Q_L \quad Q_R \quad 0] \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} = [Q_L \Phi + [Q_R \quad 0]I \quad 0] = 0 \tag{6.53}$$

feltételből:

$$\Phi = -Q_L^{-1}[Q_R \quad 0] = [\Phi_L \quad 0], \text{ ahol } \Phi_L \text{ } r \times (m-r-\gamma) \text{ méretű.} \tag{6.54}$$

Innen következik, hogy

$$DG = \begin{bmatrix} \overbrace{I}^{m-r-\gamma} & 0 & 0 \\ \Phi_L & 0 & 0 \\ 0 & I_\gamma & 0 \end{bmatrix} \text{ és } DG_2 = \begin{bmatrix} 0_{r \times \gamma} & 0 \\ 0_{(m-r-\gamma) \times \gamma} & 0 \\ I_\gamma & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.55}$$

Összefoglalva az eddigieket, a következőket láttuk be:

i) Ha $i = m - \gamma + 1, \dots, m$, akkor (6.51) és (6.55) szerint $\bar{D}_i \neq 0$ és $\bar{d}_i = d_i$.

ii) Ha $i = 1, \dots, m - \gamma$, akkor (6.51) szerint $\bar{C}_i \bar{A}^{d_i+1} \bar{B} = \begin{bmatrix} \underbrace{C_i A^{d_i} B G_1}_{D_i} & C_i A^{d_i+1} B G_2 \end{bmatrix}$,

és mivel $D_i G_1$ nem más, mint $\begin{bmatrix} \Phi \\ I \end{bmatrix}$ -nek az i -edik sora, ezért a konstrukció szerint $D_i G_1$ nem nulla, amiből következik $\bar{d}_i = d_i + 1$.

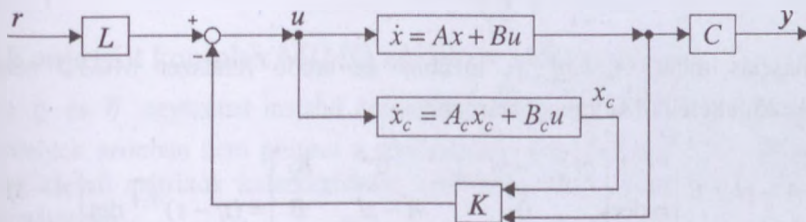
iii) Mivel $\dim x_l = \alpha = m - r - \gamma$, ezért $\bar{n} = n + \alpha$. Másrészt viszont i) és ii) szerint

$$\bar{\delta} = \sum (\bar{d}_i + 1) = \sum_{i=1}^{m-\gamma} (d_i + 2) + \sum_{i=m-\gamma+1}^m (d_i + 1) = \delta + m - \gamma = \delta + \alpha + r. \quad \text{Követke-}$$

zőképp $\bar{\delta}$ jobban nő, mint $\bar{n}$, ezért a 6.1. ábra szerinti kompenzálás esetleg többszöri alkalmazásával a szétcsatolhatósági feltétel teljesülése biztosítható.

6.6 Párhuzamos dinamikus kompenzálás instabil szétcsatolási zérusok esetén

Ha a kanonikusan szétcsatolt alakban $\alpha_{m+1}(s) = \det(sI_{p_{m+1}} - A_{m+1}^c)$ instabil gyökökkel is rendelkezik, akkor ezek az instabil MIMO zérusok állapot-visszacsatolással nem mozdíthatók ki. Kompenzálásukra ezért párhuzamos dinamikus kompenzátort alkalmazunk, lásd 6.2. ábra.



6.2. ábra. Instabil szétcsatolási zérusok kompenzálása párhuzamos dinamikus szabályozóval

6.6.1 Egyetlen instabil MIMO zérus kompenzálása

Legyen η egyszeres instabil MIMO zérus $\alpha_{m+1}(s)$ -ben, amely azonban nem pólusa a rendszernek. Akkor a nem maximális rang miatt létezik r^T, q^T megoldása a

következő problémának, továbbá y elemeinek átindexelésével a nemnulla elemek mindig előre mozdíthatók q^T -ben:

$$\begin{aligned} (r^T \ q^T) \begin{bmatrix} A - \eta I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} &= 0^T, \\ q^T &= (q_1, \dots, q_\alpha, 0, \dots, 0) \in R^m. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Választás:

- i) $\dim x_c = \alpha - 1$ és $A_c = \eta I_{\alpha-1}$.
- ii) Az eredő rendszernek η legyen α -szoros MIMO zérushelye.
- iii) Az eredő rendszerhez megkonstruált $q_1^T, \dots, q_\alpha^T$ sorvektorok mindegyikének csak 1 koordinátája legyen nemnulla.

Lohmann megmutatta [17], hogy a fenti választás mellett stabil szétcsatolás lehetséges.

B_c konstrukciója (lásd 6.2. ábra):

Az x_c -vel bővített rendszer állapotegyenlete

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} A_c & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ x \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_c \\ B \end{bmatrix} u =: \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B} u, \\ y &= [0 \ C] \begin{pmatrix} x_c \\ x \end{pmatrix} =: \tilde{C} \tilde{x}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

A választás miatt $A_c = \eta I_{\alpha-1}$, továbbá az eredő rendszer MIMO zérusait a következő feltételből kell meghatározni:

$$\det \begin{bmatrix} \tilde{A} - sI & \tilde{B} \\ \tilde{C} & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \eta I_{\alpha-1} - sI_{\alpha-1} & 0 & B_c \\ 0 & A - sI_n & B \\ 0 & C & 0 \end{bmatrix} = (\eta - s)^{\alpha-1} \det \begin{bmatrix} A - sI & B \\ C & 0 \end{bmatrix},$$

ahonnan következik, hogy η α -szoros MIMO zérus helye a párhuzamosan kompenzált rendszernek.

A mátrix rangjának lecsökkenése miatt $s := \eta$ esetén választható α darab megoldás a következő egyenlethez, és benne $\tilde{q}_i^T := e_i^T$ a stabil szétcsatolás érdekében:

$$\begin{pmatrix} \tilde{r}_{iL}^T & \tilde{r}_{iR}^T & \underbrace{\tilde{q}_i^T}_{e_i^T} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \eta I_{\alpha-1} - \eta I_{\alpha-1} & 0 & B_c \\ 0 & A - \eta I_n & B \\ 0 & C & 0 \end{bmatrix} = 0^T, \quad i = 1, \dots, \alpha. \quad (6.58)$$

Fogjuk össze ezeket a megoldásokat egy mátrixba, akkor írható, hogy

$$\begin{bmatrix} \underbrace{\tilde{R}_L}_{\alpha-1} & \underbrace{\tilde{R}_R}_n & \underbrace{I_\alpha}_\alpha & \underbrace{0}_{m-\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_c \\ 0 & A - \eta I_n & B \\ 0 & C & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Tekintsük előbb a szorzat 2. majd 3. blokkoszlopát, akkor

$$\tilde{R}_R(A - \eta I_n) + [I_\alpha \quad 0]C = 0 \Rightarrow \underbrace{\tilde{R}_R}_n = -\underbrace{[I_\alpha \quad 0]}_{\alpha \quad m-\alpha} C(A - \eta I_n)^{-1} \quad (6.59)$$

$$\tilde{R}_L B_c + \tilde{R}_R B = 0 \Rightarrow \tilde{R}_L B_c = -\tilde{R}_R B = -[I_\alpha \quad 0]C(A - \eta I_n)^{-1} B. \quad (6.60)$$

A két utolsó összefüggés lehetőséget ad előbb $\tilde{R}_R$ meghatározására, majd ennek ismeretében B_c meghatározására. Tudjuk ugyanis, hogy $\tilde{R}_L B_c = -\tilde{R}_R B$ megoldható $\Leftrightarrow \text{rank} \begin{bmatrix} B_c \\ \tilde{R}_R B \end{bmatrix} = \text{rank } B_c$, amire azonban az oszlopszám miatt fennáll $\text{rank } B_c \leq \alpha - 1$. Mivel $\text{rank}(\tilde{R}_R B) < \alpha$, ezért indokolt a következő választás:

$$B_c := \tilde{R}_R B \text{ lineárisan független sorai.} \quad (6.61)$$

6.6.2 Konjugált komplex MIMO zéruspár kompenzálása

Legyen η és $\bar{\eta}$ egyszeres instabil konjugált komplex MIMO zéruspár $\alpha_{m+1}(s)$ -ben, amelyek azonban nem pólusai a rendszernek. Akkor az előző konstrukcióval komplex elemű mátrixok keletkeznének, amelyeket nem tudunk implementálni a kompenzátorban:

$$\begin{bmatrix} A_c & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}_c & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} B_c \\ \bar{B}_c \\ B \end{bmatrix} \text{ és } [0 \quad 0 \quad C]. \quad (6.62)$$

Tekintsük a $\tau = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_{\alpha-1} & I_{\alpha-1} \\ jI_{\alpha-1} & -jI_{\alpha-1} \end{bmatrix}$ transzformációt, akkor

$$\underbrace{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_{\alpha-1} & I_{\alpha-1} \\ jI_{\alpha-1} & -jI_{\alpha-1} \end{bmatrix}}_{\tau} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} I_{\alpha-1} & -jI_{\alpha-1} \\ I_{\alpha-1} & jI_{\alpha-1} \end{bmatrix}}_{\tau^{-1}} = \begin{bmatrix} I_{\alpha-1} & 0 \\ 0 & I_{\alpha-1} \end{bmatrix}. \quad (6.63)$$

Alkalmazzuk a τ koordináta-transzformációt a komplex rendszermátrixokra, akkor

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_{\alpha-1} & I_{\alpha-1} \\ jI_{\alpha-1} & -jI_{\alpha-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & 0 \\ 0 & \bar{A}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\alpha-1} & -jI_{\alpha-1} \\ I_{\alpha-1} & jI_{\alpha-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{A_c + \bar{A}_c}{2} & -j \frac{A_c - \bar{A}_c}{2} \\ j \frac{A_c - \bar{A}_c}{2} & \frac{A_c + \bar{A}_c}{2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \operatorname{Re} A_c & \operatorname{Im} A_c \\ -\operatorname{Im} A_c & \operatorname{Re} A_c \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.64)$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_{\alpha-1} & I_{\alpha-1} \\ jI_{\alpha-1} & -jI_{\alpha-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_c \\ \bar{B}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{B_c + \bar{B}_c}{2} \\ j \frac{B_c - \bar{B}_c}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} B_c \\ -\operatorname{Im} B_c \end{bmatrix}. \quad (6.65)$$

Ezért a

$$T := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_{\alpha-1} & I_{\alpha-1} \\ jI_{\alpha-1} & -jI_{\alpha-1} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \quad (6.66)$$

koordináta-transzformációval valós alakra lehet áttérni:

$$T \tilde{A} T^{-1} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} A_c & \operatorname{Im} A_c & 0 \\ -\operatorname{Im} A_c & \operatorname{Re} A_c & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}, \quad T \tilde{B} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} B_c \\ -\operatorname{Im} B_c \\ B \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} T^{-1} = [0 \quad 0 \quad C]. \quad (6.67)$$

6.6.3 Az instabil szétcsatolási zérusok fokozatos felszámolása

A valós vagy konjugált komplex instabil szétcsatolási zérushelyek fokozatosan eliminálhatóak $\alpha_{m+1}(s)$ ből a fenti módszerek ismételt alkalmazásával. A stabil MIMO zérushelyeket nem kell eltávolítani.

7. MIMO DISZKRÉTIDEJŰ OPTIMÁLIS LQ ÉS LQG IRÁNYÍTÁS

Ebben a fejezetben többváltozós (MIMO) diszkrétidejű lineáris rendszerek kvadrátikus kritérium szerinti optimális irányításával (LQ, linear quadratic control) fogunk foglalkozni determinisztikus jelek esetén, továbbá lineáris rendszerek optimális állapotbecslésével (Kalman szűrés) és optimális LQG irányításával sztochasztikus jelek esetén.

Előbb megadjuk az LQ probléma megoldását időben változó rendszer és véges időintervallum esetén. Ezután vizsgáljuk az időinvariáns rendszer és végtelen időintervallum esetét, és megmutatjuk, hogy az optimális megoldás rendelkezik a reciprok gyök tulajdonsággal, továbbá az állapot-visszacsatolás egy diszkrétidejű algebrai Riccati-egyenlet megoldása. Módszert adunk a folytonos időben megfogalmazott kritérium diszkretizálására.

Az optimális állapotbecslést sztochasztikus jelek esetén mint mátrix kritérium szerinti optimalizálási (infimum) problémát fogjuk fel, és megmutatjuk, hogy az optimális állapotbecslő az aktuális Kalman-szűrő. Megmutatjuk a matematikai analógiát az LQ irányítás és Kalman szűrés között, és megadjuk az analógiában az egymásnak megfelelő mennyiségeket.

Végül megfogalmazzuk az optimális LQG irányítási feladatot (linear quadratic Gaussian control), és bemutatjuk az LQG irányításra érvényes szeparációs elvet, amely alapján az optimális megoldás egy LQ optimális állapot-visszacsatolás, amelyben az állapotot az aktuális Kalman-szűrővel kapott becslt állapot helyettesíti.

A vizsgálatok során felhasználjuk Åström és Wittenmark [6], Franklin, Powell és Workman [18], Goodwin és Sin [7] könyveinek, valamint Lantos értekezéseinek [19], [20] a fenti témákkal kapcsolatos eredményeit.

7.1 Időben változó rendszer LQ optimális irányítása

Legyen az optimalizálási kritérium kvadratikus:

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \{ \langle Q_k x_k, x_k \rangle + \langle R_k u_k, u_k \rangle \} + \frac{1}{2} \langle Q_N x_N, x_N \rangle, \quad (7.1a)$$

$$Q_N, Q_k \geq 0 \text{ (pozitív szemidefinit)}, R_k > 0 \text{ (pozitív definit)}, k = 0, \dots, N-1, \quad (7.1b)$$

az irányítandó rendszer pedig lineáris:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (7.2a)$$

$$x_0 = a. \quad (7.2b)$$

Az optimális megoldást az

$$x = \{x_k\}_{k=0}^N \text{ és } u = \{u_k\}_{k=0}^{N-1} \quad (7.3)$$

változóknak keressük. A feladat tehát egy optimalizálási feladat végesdimenziós térben kvadratikusan kritérium és lineáris korlátozások esetén, ezért az optimális megoldás szükséges és elégséges feltételét a Lagrange-multiplikátor szabály adja, lásd könyv I. kötet, 12. fejezet [1].

Egészítsük ki a $J(x, u)$ célfüggvényt a Lagrange-multiplikátorokkal súlyozott (nullára rendezett) $F_k(x, u)$ korlátozásokkal, akkor

$$\begin{aligned} L(x, u) &= J(x, u) + \sum_k \langle \lambda_k, F_k(x, u) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \{ \langle Q_k x_k, x_k \rangle + \langle R_k u_k, u_k \rangle \} + \frac{1}{2} \langle Q_N x_N, x_N \rangle + \\ &\quad + \langle \lambda_0, a - x_0 \rangle + \langle \lambda_1, A_0 x_0 + B_0 u_0 - x_1 \rangle + \\ &\quad + \langle \lambda_{N-1}, A_{N-2} x_{N-2} + B_{N-2} u_{N-2} - x_{N-1} \rangle + \\ &\quad + \langle \lambda_N, A_{N-1} x_{N-1} + B_{N-1} u_{N-1} - x_N \rangle. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Figyelembe véve, hogy $\langle \lambda, Ax + Bu \rangle = \langle A^T \lambda, x \rangle + \langle B^T \lambda, u \rangle$, a Lagrange-multiplikátor szabály a következő összefüggésekre vezet:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_0} &= Q_0 x_0 - \lambda_0 + A_0^T \lambda_1 = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_{N-1}} &= Q_{N-1} x_{N-1} - \lambda_{N-1} + A_{N-1}^T \lambda_N = 0 \end{aligned} \right\} \cdot \lambda_k = Q_k x_k + A_k^T \lambda_{k+1} \quad (7.5a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_N} = Q_N x_N - \lambda_N = 0, \quad \lambda_N = Q_N x_N \quad (7.5b)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_0} &= R_0 u_0 + B_0^T \lambda_1 = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial L}{\partial u_{N-1}} &= R_{N-1} u_{N-1} + B_{N-1}^T \lambda_N = 0 \end{aligned} \right\} \cdot u_k = -R_k^{-1} B_k^T \lambda_{k+1} \quad (7.6)$$

Mivel a korlátozásoknak teljesülni kell, ezért u_k visszahelyettesítendő az állapot-egyenletbe: $x_{k+1} = A_k x_k - B_k R_k^{-1} B_k^T \lambda_{k+1}$. Az optimum szükséges és elégséges feltétele ezért a következő:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & -B_k R_k^{-1} B_k^T \\ Q_k & A_k^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ \lambda_{k+1} \end{pmatrix}. \quad (7.7a)$$

$$x_0 = a \text{ és } \lambda_N = Q_N x_N. \quad (7.7b)$$

A kevert kezdeti és végérték feltételek sugallják, hogy célszerű a megoldást a

$$\lambda_k := P_k x_k \quad (7.8)$$

alakban keresni. Ekkor eltűnik a λ_k Lagrange-multiplikátor vektor, de megjelenik a P_k mátrix helyette, amelynek azonban ismert a végértéke, mert (7.7b) szerint $P_N = Q_N$. A helyettesítés hasznossága attól függ, hogy lehet-e rekurzív összefüggést levezetni P_k -ra. Az is világos, hogy ha igen, akkor az optimális irányítás állapot-visszacsatolás lesz, mert x_{k+1} kifejezhető x_k -val:

$$x_{k+1} = A_k x_k - B_k R_k^{-1} B_k^T P_{k+1} x_{k+1} \Rightarrow x_{k+1} = (I + B_k R_k^{-1} B_k^T P_{k+1})^{-1} A_k x_k. \quad (7.9)$$

Alkalmazzuk az $(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(DA^{-1}B + C^{-1})^{-1}DA^{-1}$ mátrix inverz lemmát az $A := I$, $B := B_k$, $C := R_k^{-1}$, $D := B_k^T P_{k+1}$ választás mellett, akkor kapjuk, hogy

$$(I + B_k R_k^{-1} B_k^T P_{k+1})^{-1} = I - B_k (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k^T P_{k+1}, \quad (7.10)$$

$$x_{k+1} = \{I - B_k (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k^T P_{k+1}\} A_k x_k, \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} u_k &= -R_k^{-1} B_k^T \lambda_{k+1} = \\ &= -R_k^{-1} B_k^T P_{k+1} \{I - B_k (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k^T P_{k+1}\} A_k x_k := -K_k x_k, \end{aligned} \quad (7.12)$$

ahol

$$K_k = \{R_k^{-1} - R_k^{-1} B_k^T P_{k+1} B_k (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k)^{-1}\} B_k^T P_{k+1} A_k. \quad (7.13)$$

Alkalmazzuk az inverz mátrix lemmát fordított irányban az $A := R_k$, $B := B_k^T P_{k+1} B_k$, $C = D := I$ választás mellett, akkor a következő rekurzív összefüggéshez jutunk:

$$K_k = (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k^T P_{k+1} A_k. \quad (7.14)$$

Másrészt viszont

$$\begin{aligned} \lambda_k &= Q_k x_k + A_k^T \lambda_{k+1} = Q_k x_k + A_k^T P_{k+1} x_{k+1} = \\ &= Q_k x_k + A_k^T P_{k+1} \{I - B_k (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k^T P_{k+1}\} A_k x_k = \\ &= \{Q_k + A_k^T P_{k+1} A_k - A_k^T P_{k+1} B_k (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k^T P_{k+1} A_k\} x_k = \\ &= P_k x_k, \end{aligned} \quad (7.15)$$

ahonnan következik egy rekurzív összefüggés P_k -ra is:

$$P_k = Q_k + A_k^T P_{k+1} A_k - A_k^T P_{k+1} B_k (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k^T P_{k+1} A_k. \quad (7.16)$$

Az összefüggés másik neve diszkrétidejű *Riccati-differenciaegyenlet*, amelynek $P_k \geq 0$ megoldása választandó.

Célszerű bevezetni egy közbenső M_{k+1} mátrixot, amelynek segítségével P_k egyszerű alakra hozható:

$$M_{k+1} = P_{k+1} - P_{k+1} B_k (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k^T P_{k+1}, \quad (7.17)$$

$$P_k = Q_k + A_k^T M_{k+1} A_k. \quad (7.18)$$

Összefoglalva az eredményeket megállapítható, hogy időben változó rendszer és/vagy véges időintervallum esetén a tervezést nem lehet valós időben elvégezni, hanem előre el kell végezni jelentős mennyiségű és adattömegű számítást, mielőtt az optimális irányítást valós időben megvalósítanánk.

Offline tervezés:

1. Inicializálás: $k = N$ és $P_N = Q_N$.
2. Hátrataró rekurzió: $k = N-1, N-2, \dots, 1$
 - i) M_{k+1} meghatározása (7.17) szerint,
 - ii) P_k meghatározása (7.18) szerint.

Online irányítás:

1. Inicializálás: x_0 kezdeti állapot beállítása.
2. Előretartó rekurzió: $k = 0, 1, \dots, N-1$

- i) K_k meghatározása (7.14) szerint,
- ii) $u_k := -K_k x_k$ kiadása a rendszerre,
- iii) $x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k$ meghatározása.

Ha az állapot nem mérhető, akkor alkalmazhatunk (aktuális, minimális rendű stb.) állapotmegfigyelőt a becslésére. A referencia jelhez meghatározható egy névleges bemenő jel (u_c), amellyel korrigálhatjuk u_k -t.

7.2 Időinvariáns rendszer LQ optimális irányítása

Időinvariáns rendszer LQ optimális irányítását végtelen időintervallum, konstans szabályozó és az optimalizálási kritériumban konstans súlyozó mátrixok esetén vizsgáljuk.

7.2.1 Reciprok gyök tulajdonság

A (7.7a) egyenlet alakja időinvariáns rendszer esetén a következő:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k - BR^{-1}B^T \lambda_{k+1}, \\ \lambda_k &= Qx_k + A^T \lambda_{k+1}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

ahonnan Z-transzformációval kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} zx &= Ax - BR^{-1}B^T z\lambda \Rightarrow (zI - A)x + BR^{-1}B^T (z\lambda) = 0, \\ \lambda &= Qx + A^T z\lambda \Rightarrow -Qx + (z^{-1}I - A^T)(z\lambda) = 0, \end{aligned} \quad (7.20)$$

illetve mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} zI - A & BR^{-1}B^T \\ -Q & z^{-1}I - A^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.21)$$

A nemtriviális megoldás feltétele

$$\det \begin{bmatrix} zI - A & BR^{-1}B^T \\ -Q & z^{-1}I - A^T \end{bmatrix} = 0. \quad (7.22)$$

Szorozzuk meg a determináns első blokk sorát balról a $Q(zI - A)^{-1}$ kifejezéssel, majd az így kapott blokk sort adjuk hozzá a második blokk sorhoz, akkor

$$\det \begin{bmatrix} zI - A & BR^{-1}B^T \\ 0 & z^{-1}I - A^T + Q(zI - A)^{-1}BR^{-1}B^T \end{bmatrix} = 0, \quad (7.23)$$

ahonnan következik

$$\det \begin{bmatrix} zI - A & BR^{-1}B^T \\ 0 & (z^{-1}I - A^T)\{I + (z^{-1}I - A^T)^{-1}Q(zI - A)^{-1}BR^{-1}B^T\} \end{bmatrix} = 0. \quad (7.24a)$$

$$\underbrace{\det(zI - A)}_{\varphi(z)} \underbrace{\det(z^{-1}I - A^T)}_{\varphi(z^{-1})} \det\{I + (z^{-1}I - A^T)^{-1}Q(zI - A)^{-1}BR^{-1}B^T\} = 0. \quad (7.24b)$$

Mivel pozitív szemidefinit mátrixnak létezik négyzetgyöke, ezért bevezethetjük a $Q := \rho \overline{Q}^T \overline{Q}$ és $BR^{-1}B^T := \overline{B} \overline{B}^T$ jelölést, amivel a kapcsos zárójeles kifejezés

$$\det\{I + \rho(z^{-1}I - A^T)^{-1} \overline{Q}^T \overline{Q} (zI - A)^{-1} \overline{B} \overline{B}^T\} \quad (7.25)$$

alakú lesz, amelyről megmutatjuk, hogy $a(z)a(z^{-1})$ alakra hozható. Ehhez felhasználjuk a következő összefüggéseket (A, B tetszőleges):

$$\begin{aligned} \det \left\{ \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{bmatrix} \right\} &= \det \begin{bmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n + BA \end{bmatrix} = \det(I_n + BA) \\ \uparrow \\ \text{egyformák} \\ \downarrow \\ \det \left\{ \begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{bmatrix} \right\} &= \det \begin{bmatrix} I_m + AB & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix} = \det(I_m + AB). \end{aligned} \quad (7.26)$$

Beláttuk tehát, hogy $\det(I_n + BA) = \det(I_m + AB)$. Alkalmazzuk ezt az összefüggést a következő választás mellett:

$$\begin{aligned} \underbrace{\{I + \rho(z^{-1}I - A^T)^{-1} \overline{Q}^T \overline{Q}\}}_A \underbrace{(zI - A)^{-1} \overline{B} \overline{B}^T}_B &= I + \rho AB \\ \underbrace{\{I + \rho \overline{Q} (zI - A)^{-1} \overline{B} \overline{B}^T\}}_B \underbrace{(z^{-1}I - A^T)^{-1} \overline{Q}^T}_A &= I + \rho BA. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Mivel a mátrixnak és transzponáltjának azonos a determinánása, ezért írható, hogy

$$\det(I + \rho AB) = \det(I + \rho BA) = \det((I + \rho A^T B^T)) \quad (7.28)$$

$$\begin{aligned} \det(I + \rho AB) &= \det\{I + \rho \bar{Q}(zI - A)^{-1} \bar{B} \bar{B}^T (z^{-1}I - A^T)^{-1} \bar{Q}^T\} = \psi(z) \\ \det(I + \rho A^T B^T) &= \det\{I + \rho \bar{Q}(z^{-1}I - A)^{-1} \bar{B} \bar{B}^T (zI - A^T)^{-1} \bar{Q}^T\} = \psi(z^{-1}) \\ \psi(z) &= \psi(z^{-1}) \Rightarrow \psi(z) = a(z)a(z^{-1}) \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$\det \begin{bmatrix} zI - A & BR^{-1}B^T \\ -Q & z^{-1}I - A^T \end{bmatrix} = \varphi(z)\varphi(z^{-1})a(z)a(z^{-1}). \quad (7.30)$$

7.2.2 Optimális konstans szabályozó

Feltesszük, hogy $\exists A^{-1}$ (tehát $z=0$ nem sajátértéke A -nak, a rendszer nem tartalmaz holtidőt). Ekkor λ_{k+1} kifejezhető x_k -val és λ_k -val, ezért

$$\lambda_{k+1} = -A^{-T}Qx_k + A^{-T}\lambda_k, \quad (7.31)$$

$$x_{k+1} = Ax_k - BR^{-1}B^T\{-A^{-T}Qx_k + A^{-T}\lambda_k\}, \quad (7.32)$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}B^TA^{-T}Q & -BR^{-1}B^TA^{-T} \\ -A^{-T}Q & A^{-T} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{pmatrix} =: H_c \begin{pmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{pmatrix}. \quad (7.33)$$

Legyen a $H_c : R^{2n} \rightarrow R^{2n}$ mátrixnak z sajátértéke és $\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$ a hozzá tartozó sajátvektora, akkor

$$\begin{aligned} (A + BR^{-1}B^TA^{-T}Q)x - BR^{-1}B^TA^{-T}\lambda &= zx, \\ -A^{-T}Qx + A^{-T}\lambda &= z\lambda. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Világos, hogy a második egyenletből következik

$$\begin{aligned} \lambda &= Qx + A^Tz\lambda, \\ BR^{-1}B^TA^{-T}Qx - BR^{-1}B^TA^{-T}\lambda &= -BR^{-1}B^TA^{-T}A^Tz\lambda, \\ zx &= Ax - BR^{-1}B^Tz\lambda, \end{aligned} \quad (7.35)$$

és ezért (7.34) és (7.20) ekvivalensek, következésképp

$$\det(zI_{2n} - H_c) = \varphi(z)\varphi(z^{-1})a(z)a(z^{-1}) \quad (7.36)$$

rendelkezik a reciprok gyök tulajdonsággal.

Beláttuk, hogy a H_c $(2n) \times (2n)$ méretű mátrixnak n sajátértéke az egységkör belsejében helyezkedik el (z_i) , n sajátértéke pedig az egységkör külsejében $(z_o = z_i^{-1})$. Ha a sajátértékek egyszeresek, akkor a sajátvektorok bázist alkotnak, és áttérve a sajátvektorok bázisára H_c diagonális (Jordan) alakra transzformálható, lásd könyv I. kötet, Fl. függelék [1].

Tekintsük az egységkörön belüli és egységkörön kívüli sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat:

$$z_i \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{\lambda}_i \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad z_o = z_i^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{\lambda}_o \end{pmatrix}. \quad (7.37)$$

Helyezzük el a sajátvektorokat rendre egy $\begin{bmatrix} X_i \\ \Lambda_i \end{bmatrix}$, illetve egy $\begin{bmatrix} X_o \\ \Lambda_o \end{bmatrix}$ mátrixban, akkor a diagonális alakra hozó koordináta-transzformáció

$$T^{-1} := \begin{bmatrix} X_i & X_o \\ \Lambda_i & \Lambda_o \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\lambda} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (7.38)$$

révén van meghatározva. Mivel ekkor

$$\tilde{H}_c = TH_cT^{-1} = \begin{bmatrix} \text{diag}(z_i) & 0 \\ 0 & \text{diag}(z_i^{-1}) \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \quad (7.39)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\lambda} \end{pmatrix}_k = (\tilde{H}_c)^k \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\lambda} \end{pmatrix}_0 = \begin{bmatrix} \text{diag}(z_i) & 0 \\ 0 & \text{diag}(z_i^{-1}) \end{bmatrix}^k \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\lambda} \end{pmatrix}_0 \quad (7.40)$$

$$\tilde{x}_k = \text{diag}(z_i)^k \tilde{x}_0 \quad (7.41a)$$

$$\tilde{\lambda}_k = \text{diag}(z_i^{-1})^k \tilde{\lambda}_0 \xrightarrow[|z_i| < 1]{\text{véges}} \tilde{\lambda}_0 = 0, \quad (7.41b)$$

ezért

$$\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}_k = T^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\lambda} \end{pmatrix}_k = \begin{bmatrix} X_i & X_o \\ A_i & A_o \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} X_i \\ A_i \end{bmatrix} \tilde{x}_k \quad (7.42)$$

$$x_k = X_i \text{diag}(z_i)^k \tilde{x}_0 \Rightarrow \tilde{x}_0 = \text{diag}(z_i)^{-k} X_i^{-1} x_k \quad (7.43)$$

$$\begin{aligned} \lambda_k &= A_i \tilde{x}_k = A_i \underbrace{\text{diag}(z_i)^k \text{diag}(z_i)^{-k}}_I X_i^{-1} x_k = \\ &= A_i X_i^{-1} x_k = P_\infty x_k. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Itt felhasználtuk, hogy (7.8) szerint $\lambda_k = P_k x_k$, és (7.44) szerint $P_k = P_\infty$ konstans a végtelen időintervallumú esetben.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy időinvariáns rendszer, konstans súlyozó mátrixok és végtelen időintervallum esetén az optimális LQ irányítás konstans állapot-visszacsatolás, amely a következő módon határozható meg:

$$\begin{aligned} P_\infty &= A_i X_i^{-1} \\ K_\infty &= (R + B^T P_\infty B)^{-1} B^T P_\infty A \\ u_k &= -K_\infty x_k. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Ha az (A, B, C) folytonosidejű rendszerről tértünk át a diszkrétidejű (Φ, Γ, C) rendszerre, akkor értelemszerűen el kell végezni az eredményekben az $A := \Phi$ és $B := \Gamma$ helyettesítéseket.

A (7.45) összefüggésekben P_∞ -t sajátérték/sajátvektor technikával határoztuk meg. Egy másik lehetőség a diszkrétidejű *algebrai Riccati-egyenlet* megoldása:

$$P_\infty = Q + A^T P_\infty A - A^T P_\infty B (B^T P_\infty B + R)^{-1} B^T P_\infty A. \quad (7.46)$$

7.3 Az optimalizálási kritérium diszkrétizálása

Mivel az irányítandó fizikai rendszerek általában folytonosidejű (analóg) rendszerek, ezért az optimalizálási kritériumot rendszerint a fizikai megfontolásokra alapozva folytonos időben fogalmazzák meg:

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^{NT} \{ \langle Q_{c1} x(t), x(t) \rangle + \langle Q_{c2} u(t), u(t) \rangle \} dt. \quad (7.47)$$

Vegyük figyelembe, hogy a szabályozó diszkrétidejű:

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kT}^{(k+1)T} \{ \langle Q_{c1} x(t), x(t) \rangle + \langle Q_{c2} u(kT), u(kT) \rangle \} dt. \quad (7.48)$$

Az állapotváltozóra érvényes

$$x(kT + \vartheta) = e^{A\vartheta} x(kT) + \int_0^{\vartheta} e^{A\sigma} d\sigma B u(kT) =: \Phi(\vartheta) x_k + \Gamma(\vartheta) u_k, \quad (7.49)$$

aminek segítségével $J(x, u)$ átalakítható:

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T \{ \langle Q_{c1} [\Phi(\vartheta) x_k + \Gamma(\vartheta) u_k], \Phi(\vartheta) x_k + \Gamma(\vartheta) u_k \rangle + \langle Q_{c2} u_k, u_k \rangle \} d\vartheta \quad (7.50)$$

Tekintsük ezután az integrandust:

$$\begin{aligned} & \langle Q_{c1} \Phi x_k, \Phi x_k \rangle + \langle Q_{c1} \Phi x_k, \Gamma u_k \rangle + \langle Q_{c1} \Gamma u_k, \Phi x_k \rangle + \langle Q_{c1} \Gamma u_k, \Gamma u_k \rangle + \\ & + \langle Q_{c2} u_k, u_k \rangle = \\ & = \langle \Phi^T Q_{c1} \Phi x_k, x_k \rangle + \langle \Phi^T Q_{c1} \Gamma u_k, x_k \rangle + \langle \Gamma^T Q_{c1} \Phi x_k, u_k \rangle + \\ & + \langle (\Gamma^T Q_{c1} \Gamma + Q_{c2}) u_k, u_k \rangle, \end{aligned} \quad (7.51)$$

amelynek egy másik alakja mátrix formában

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x_k^T & u_k^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^T Q_{c1} \Phi & \Phi^T Q_{c1} \Gamma \\ \Gamma^T Q_{c1} \Phi & \Gamma^T Q_{c1} \Gamma + Q_{c2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} x_k^T & u_k^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^T & 0 \\ \Gamma^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{c1} & 0 \\ 0 & Q_{c2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.52)$$

Figyelembe véve, hogy

$$\Phi = e^{At} \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = A\Phi = \Phi A, \quad (7.53a)$$

$$\Gamma = \int_0^t e^{A\sigma} d\sigma B \Rightarrow \frac{d\Gamma}{dt} = e^{At} B = \Phi B, \quad (7.53b)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi A & \Phi B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ 0 & I \end{bmatrix} = e^{\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t}, \quad (7.54)$$

akkor az

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ és } \tilde{Q}_c := \begin{bmatrix} Q_{c1} & 0 \\ 0 & Q_{c2} \end{bmatrix} \quad (7.55)$$

jelölésekkel az integrál és az optimalizálási kritérium tömör alakra hozható:

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} := \int_0^T e^{\tilde{A}^T \vartheta} \tilde{Q}_c e^{\tilde{A} \vartheta} d\vartheta, \quad (7.56)$$

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \begin{pmatrix} x_k^T & u_k^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix}. \quad (7.57)$$

Megmutatjuk, hogy (7.56)-ban megkerülhető a mátrixfüggvény integrálása, és helyette elegendő egyetlen exponenciális mátrix értékét kiszámítani, amely jelentős egyszerűsítés.

Tekintsük a következő M felső blokk-háromszögmátrixot, annak exponenciálisát és az exponenciális mátrix deriváltját:

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{Mt} = \begin{bmatrix} F_1(t) & G_1(t) \\ 0 & F_2(t) \end{bmatrix}, \quad e^{M0} = I \quad (7.58a)$$

$$\frac{de^{Mt}}{dt} = M e^{Mt} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(t) & G_1(t) \\ 0 & F_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (7.58b)$$

$$\dot{F}_j = A_j F_j, \quad j = 1, 2 \quad (7.58c)$$

$$\dot{G}_1 = A_1 G_1 + B_1 F_2. \quad (7.58d)$$

A mátrix-differenciálegyenletek megoldása megadható zárt alakban, hasonlóan a folytonosidejű állapotegyenlet megoldásához, lásd könyv I. kötet 3. fejezet [1]:

$$F_j(t) = e^{A_j t}, \quad j = 1, 2 \quad (7.59a)$$

$$G_1(t) = \int_0^t e^{A_1(t-\vartheta)} B_1 F_2(\vartheta) d\vartheta = \int_0^t e^{A_1(t-\vartheta)} B_1 e^{A_2 \vartheta} d\vartheta. \quad (7.59b)$$

Speciálisan, ha

$$M := \begin{bmatrix} -\tilde{A}^T & \tilde{Q}_c \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix} \quad (7.60)$$

akkor

$$F_1 = e^{-\tilde{A}^T t} \quad (7.61a)$$

$$F_2 = e^{\tilde{A} t} \quad (7.61b)$$

$$G_1 = \int_0^t e^{-\tilde{A}^T (t-\vartheta)} \tilde{Q}_c e^{\tilde{A} \vartheta} d\vartheta = e^{-\tilde{A}^T t} \int_0^t e^{\tilde{A}^T \vartheta} \tilde{Q}_c e^{\tilde{A} \vartheta} d\vartheta \Rightarrow \quad (7.61c)$$

$$\int_0^t e^{\tilde{A}^T \vartheta} \tilde{Q}_c e^{\tilde{A} \vartheta} d\vartheta = e^{\tilde{A}^T t} G_1(t) = F_2^T(t) G_1(t) \Rightarrow \quad (7.61d)$$

$$\int_0^T e^{\tilde{A}^T \vartheta} \tilde{Q}_c e^{\tilde{A} \vartheta} d\vartheta = F_2^T(T) G_1(T). \quad (7.62)$$

Innen következik, hogy integrálás nélkül, egyetlen nagyobb méretű exponenciális mátrix kiszámításával elvégezhető (7.56):

$$\exp \left(\begin{bmatrix} -A^T & 0 & Q_{c1} & 0 \\ -B^T & 0 & 0 & Q_{c2} \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T \right) = \left[\begin{array}{c|c} F_1(T) & G_1(T) \\ \hline 0 & F_2(T) \end{array} \right] \Rightarrow \quad (7.63)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} := F_2^T(T) G_1(T). \quad (7.64)$$

A folytonosidejű optimalizálási kritérium diszkretizálása tehát egyszerűen elvégezhető:

$$(A, B, Q_{c1}, Q_{c2}, T) \xrightarrow{(7.63), (7.64)} Q_{11}, Q_{12}, Q_{21}, Q_{22} \quad (7.65)$$

Vegyük azonban észre, hogy a diszkretizálás révén a $J(x, u)$ diszkretizált optimalizálási kritériumban megjelentek Q_{12}, Q_{21} révén az x és u változók szorzatai is, amire eddig nem készültünk fel. Nézzük meg, lehet-e ezen egyszerű korrekcióval

segíteni. Ehhez egy *ekvivalens* költséget fogunk keresni, amelyben már $\bar{Q}_{12} = \bar{Q}_{21} = 0$. Az ötlet az irányítás kis módosítása egy alkalmasan megválasztott α x korrekcióval (α mátrix):

$$u_p := \alpha x + u \Rightarrow u = -\alpha x + u_p \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\alpha & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u_p \end{pmatrix}. \quad (7.66)$$

Az optimalizálási kritériumban át lehet térni az x, u_p változókra:

$$(x \ u)^T \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = (x \ u_p)^T \begin{bmatrix} I & -\alpha^T \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\alpha & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u_p \end{pmatrix} \quad (7.67)$$

$$\begin{bmatrix} I & -\alpha^T \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\alpha & I \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} Q_{11} - Q_{12}\alpha - \alpha^T(Q_{21} - Q_{22}\alpha) & Q_{12} - \alpha^T Q_{22} \\ \hline Q_{21} - Q_{22}\alpha & Q_{22} \end{array} \right].$$

A korrekció után az új súlyozó mátrixnak szimmetrikusnak és pozitív szemidefinitnek kell maradnia, ezért $Q_{12}^T = Q_{21}$ felhasználásával a $\bar{Q}_{21} = Q_{21} - Q_{22}\alpha = 0$ feltételből α és az optimalizálási kritériumban az új súlyozó mátrixok meghatározhatók:

$$\alpha := Q_{22}^{-1} Q_{21} = Q_{22}^{-1} Q_{12}^T \quad (7.68)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{Q} & 0 \\ 0 & \bar{R} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} Q_{11} - Q_{12}\alpha & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{bmatrix}. \quad (7.69)$$

Az optimalizálási kritérium mellett a rendszer is módosul. Az optimális $u_{p,k} = -K_p x_k$ állapot-visszacsatolást a következő fiktív rendszerhez kell meghatározni:

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma(-\alpha x_k + u_{p,k}) = (\Phi - \Gamma\alpha)x_k + \Gamma u_{p,k} \Rightarrow K_p. \quad (7.70)$$

Ennek ismeretében a valódi rendszerhez a következő optimális állapot-visszacsatolást kapjuk:

$$u_k = -\alpha x_k + u_{p,k} = -\alpha x_k - K_p x_k = -(K_p + \alpha)x_k = -Kx_k \quad (7.71)$$

$$K := K_p + \alpha. \quad (7.72)$$

Összefoglalva az eredményeket, az optimális irányítás számításának sémája a következő:

$$\begin{aligned} (Q_{11}, Q_{12}, Q_{21}, Q_{22}) &\xrightarrow{(7.68), (7.69)} \alpha, \tilde{Q}, \tilde{R} \\ (\Phi - \Gamma\alpha, \Gamma, \tilde{Q}, \tilde{R}) &\xrightarrow{LQ} K_p \xrightarrow{(7.72)} K \end{aligned} \quad (7.73)$$

7.4 Aktuális Kalman-szűrő időben változó rendszer esetén

Az "aktuális" Kalman-szűrő az $\hat{x}_k$ állapot becslésénél már az "aktuális" y_k kimenetet veszi figyelembe (és az előző u_{k-1} bemenetet). Ezáltal az $u_k = -K_k \hat{x}_k$ állapot-visszacsatolásban számíthatóvá válik u_k (mert csak az előző u_{k-1} kell hozzá), de már figyelembe lesz véve az aktuális y_k mérési eredmény, ami nyilván jobb irányítási tulajdonságok elérését teszi lehetővé.

Tekintsük a zajokkal terhelt diszkrétidejű lineáris rendszert:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + v_k, \quad x(0) \quad (7.74a)$$

$$y_k = C_k x_k + z_k. \quad (7.74b)$$

Itt u_k determinisztikus jel. A v_k és z_k zajokra és az $x(0)$ kezdeti állapotra a következő sztochasztikus hipotézis legyen érvényes (δ_{kl} a Kronecker-delta):

$$x(0) \text{ független } v_k \text{-től és } z_k \text{-től,} \quad (7.75a)$$

$$E x(0) = x_0, \quad E[(x(0) - x_0)(x(0) - x_0)^T] = \Sigma_0 \geq 0 \text{ (pozitív szemidefinit)} \quad (7.75b)$$

$$E v_k = 0, \quad E[v_k v_l^T] = R_{v,k} \delta_{kl}, \quad R_{v,k} \geq 0 \text{ (pozitív szemidefinit)} \quad (7.75c)$$

$$E z_k = 0, \quad E[z_k z_l^T] = R_{z,k} \delta_{kl}, \quad R_{z,k} > 0 \text{ (pozitív definit)} \quad (7.75d)$$

$$E[v_k z_l^T] = 0, \quad E[z_l v_k^T] = 0 \quad (v_k \text{ és } z_l \text{ korrelálatlanok}). \quad (7.75e)$$

Keressük azt a lineáris szűrőt, amely az u_k és y_{k+1} mérési eredményekből az

$$\hat{x}_{k+1} = F_k \hat{x}_k + G_{k+1} y_{k+1} + H_k u_k, \quad \hat{x}(0) \quad (7.76)$$

algorithmus alapján az x_k állapot optimális $\hat{x}_k$ becslését adja abban az értelemben, hogy

$$E[x_k - \hat{x}_k] = 0 \text{ minden } k \text{ esetén,} \quad (7.77a)$$

$$E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T] = \Sigma_k \rightarrow \text{infimum.} \quad (7.77b)$$

Az infimum az M_{KRM} szimmetrikus mátrixok (kvadratikus alak révén definiált) részben rendezése szerint értendő, lásd könyv I. kötet 12. fejezet [1]. Az optimális megoldás a kovarianciamátrix összes sajátértékét egyszerre teszi minimálissá. A feltételek alapján teljesülnie kell, hogy

$$E\hat{x}(0) = \hat{x}_0 := x_0 \Rightarrow E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] = \Sigma_0. \quad (7.78)$$

Képezzük a becsült állapotot és a futó hibát $k+1$ esetén:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= F_k \hat{x}_k + G_{k+1}(C_{k+1}x_{k+1} + z_{k+1}) + H_k u_k = \\ &= F_k \hat{x}_k + G_{k+1}\{C_{k+1}(A_k x_k + B_k u_k + v_k) + z_{k+1}\} + H_k u_k = \\ &= F_k \hat{x}_k + G_{k+1}C_{k+1}A_k x_k + (G_{k+1}C_{k+1}B_k + H_k)u_k + G_{k+1}C_{k+1}v_k + G_{k+1}z_{k+1} \\ x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + v_k \\ x_{k+1} - \hat{x}_{k+1} &= (I - G_{k+1}C_{k+1})A_k x_k + [(I - G_{k+1}C_{k+1})B_k - H_k]u_k - \\ &\quad - F_k \hat{x}_k + (I - G_{k+1}C_{k+1})v_k - G_{k+1}z_{k+1}. \end{aligned} \quad (7.79)$$

A hiba várható értékére vonatkozó (7.77a) feltétel szerint

$$F_k := (I - G_{k+1}C_{k+1})A_k, \quad H_k := (I - G_{k+1}C_{k+1})B_k, \quad (7.80)$$

ezért

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &:= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1} = \\ &= (I - G_{k+1}C_{k+1})A_k(x_k - \hat{x}_k) + (I - G_{k+1}C_{k+1})v_k - G_{k+1}z_{k+1} = \\ &= (I - G_{k+1}C_{k+1})\{A_k x_k + B_k u_k + v_k - A_k \hat{x}_k - B_k u_k\} - G_{k+1}z_{k+1}. \end{aligned} \quad (7.81)$$

Vezessük be az

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &:= A_k \bar{x}_k + B_k u_k \\ M_{k+1} &:= E[(x_{k+1} - \bar{x}_{k+1})(x_{k+1} - \bar{x}_{k+1})^T] \end{aligned} \quad (7.82)$$

jelölést, akkor

$$\Sigma_{k+1} = (I - G_{k+1}C_{k+1})M_{k+1}(I - G_{k+1}C_{k+1})^T + G_{k+1}R_{z,k+1}G_{k+1}^T. \quad (7.83)$$

Mivel Σ_{k+1} -et infimummá kell tenni, ezért Σ_{k+1} -nek a G_{k+1} szerinti deriváltjának a $\emptyset(\cdot)$ nulla transzformációt kell adnia. Képezzük ezért a G_{k+1} szerinti differenciált:

$$\begin{aligned}
 & -dG_{k+1}C_{k+1}M_{k+1}(I-G_{k+1}C_{k+1})^T - (I-G_{k+1}C_{k+1})M_{k+1}C_{k+1}^T(dG_{k+1})^T + \\
 & + dG_{k+1}R_{z,k+1}G_{k+1}^T + G_{k+1}R_{z,k+1}(dG_{k+1})^T = \emptyset(dG_{k+1}).
 \end{aligned} \quad (7.84)$$

Vezessük be az $U(\cdot)$ és $T(\cdot)$ transzformációkat:

$$\begin{aligned}
 U(X) &:= X + X^T, \\
 T(X) &:= X^T.
 \end{aligned} \quad (7.85)$$

A differenciált átírhatjuk az

$$U\{[-(I-G_{k+1}C_{k+1})M_{k+1}C_{k+1}^T + G_{k+1}R_{z,k+1}]T(dG_{k+1})\} = \emptyset(dG_{k+1}) \quad (7.86)$$

alakba, ahonnan következik az infimum alábbi feltétele operátor alakban:

$$U\{[-(I-G_{k+1}C_{k+1})M_{k+1}C_{k+1}^T + G_{k+1}R_{z,k+1}]T(\cdot)\} = \emptyset(\cdot). \quad (7.87)$$

Tetszőleges X esetén teljesül, hogy

$$U\{XT(\cdot)\} = \emptyset(\cdot) \Leftrightarrow U\{XT(Y)\} = 0 \text{ minden } Y \text{ esetén} \Leftrightarrow X = 0, \quad (7.88)$$

lásd Lantos [19], [20]. Az infimum feltétele ezért

$$\begin{aligned}
 0 &= -(I-G_{k+1}C_{k+1})M_{k+1}C_{k+1}^T + G_{k+1}R_{z,k+1} = \\
 &= -M_{k+1}C_{k+1}^T + G_{k+1}C_{k+1}M_{k+1}C_{k+1}^T + G_{k+1}R_{z,k+1} = \\
 &= -M_{k+1}C_{k+1}^T + G_{k+1}(C_{k+1}M_{k+1}C_{k+1}^T + R_{z,k+1}),
 \end{aligned} \quad (7.89)$$

ahonnan következik, hogy az optimális megoldás

$$G_{k+1} = M_{k+1}C_{k+1}^T(C_{k+1}M_{k+1}C_{k+1}^T + R_{z,k+1})^{-1}. \quad (7.90)$$

Helyettesítsük vissza az optimális G_{k+1} megoldást a (7.83) egyenletbe:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{k+1} &= (I-G_{k+1}C_{k+1})M_{k+1} - (I-G_{k+1}C_{k+1})M_{k+1}C_{k+1}^TG_{k+1}^T + G_{k+1}R_{z,k+1}G_{k+1}^T = \\
 &= (I-G_{k+1}C_{k+1})M_{k+1} + \underbrace{[-M_{k+1}C_{k+1}^T + G_{k+1}(C_{k+1}M_{k+1}C_{k+1}^T + R_{z,k+1})]G_{k+1}^T}_0 = \\
 &= (I-G_{k+1}C_{k+1})M_{k+1} = M_{k+1} - G_{k+1}C_{k+1}M_{k+1}.
 \end{aligned}$$

A becslési hiba optimális kovariancia mátrixa ezért

$$\Sigma_{k+1} = M_{k+1} - M_{k+1} C_{k+1}^T (C_{k+1} M_{k+1} C_{k+1}^T + R_{z,k+1})^{-1} C_{k+1} M_{k+1}. \quad (7.91)$$

Bontsuk fel a becsült állapot képzését a mérési időpontok között elvégezhető $\bar{x}_{k+1}$ frissítésre és az új mérés y_{k+1} pillanatában elvégezhető $\hat{x}_{k+1}$ állapotbecslésre, akkor

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &= A_k \hat{x}_k + B_k u_k, \\ x_{k+1} - \bar{x}_{k+1} &= A_k (x_k - \hat{x}_k) + v_k, \\ M_{k+1} &= A_k \Sigma_k A_k^T + R_{v,k}, \end{aligned} \quad (7.92)$$

ahol M_{k+1} szintén meghatározható a mérési időpontok között. Másrészt a becsült állapot felírható

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= F_{k-1} \hat{x}_{k-1} + G_k y_k + H_{k-1} u_{k-1} = \\ &= (I - G_k C_k) A_{k-1} \hat{x}_{k-1} + G_k y_k + (I - G_k C_k) B_{k-1} u_{k-1} = \\ &= A_{k-1} \hat{x}_{k-1} + B_{k-1} u_{k-1} + G_k \{y_k - C_k (A_{k-1} \hat{x}_{k-1} + B_{k-1} u_{k-1})\} = \\ &= \bar{x}_k + G_k (y_k - C_k \bar{x}_k) \end{aligned} \quad (7.93)$$

alakban is. Végül felhasználván a (7.90) egyenletet G_k tovább egyszerűsíthető:

$$\begin{aligned} G_k &= M_k C_k^T (C_k M_k C_k^T + R_{z,k})^{-1} \Rightarrow \\ M_k C_k^T &= G_k (C_k M_k C_k^T + R_{z,k}) = G_k C_k M_k C_k^T + G_k R_{z,k} \\ G_k R_{z,k} &= (I - G_k C_k) M_k C_k^T = \Sigma_k C_k^T \Rightarrow \\ G_k &= \Sigma_k C_k^T R_{z,k}^{-1}. \end{aligned} \quad (7.94)$$

Az "aktuális" Kalman-szűrő algoritmus:

1. *Frissítés mérési időpontok között* (time update between measurements):

$$\begin{aligned} \bar{x}_k &= A_{k-1} \hat{x}_{k-1} + B_{k-1} u_{k-1}, \\ M_k &= A_{k-1} \Sigma_{k-1} A_{k-1}^T + R_{v,k-1}, \\ \Sigma_k &= M_k - M_k C_k^T (C_k M_k C_k^T + R_{z,k})^{-1} C_k M_k, \\ G_k &= M_k C_k^T (C_k M_k C_k^T + R_{z,k})^{-1} = \Sigma_k C_k^T R_{z,k}^{-1}. \end{aligned} \quad (7.95)$$

2. *Mérési eredmény frissítése* (measurement update):

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + G_k (y_k - C_k \bar{x}_k). \quad (7.96)$$

Megjegyzés:

1. Különleges eset, ha nincs kimeneti zaj, mert ekkor $R_{z,k} = 0$ és G_k számítására (7.94) nem használható. Ekkor (7.90) használandó.
2. Vegyük észre, hogy a (7.95)-(7.96) egyenletek *előretartó rekurzív egyenletek*, ezért a Kalman szűrési algoritmus *online* realizálható. Ez lényeges egyszerűsítést jelent az időben változó rendszerek LQ optimális irányításához képest, ahol jelentős mennyiségű számítást offline előre el kellett végezni az állapot-visszacsatolás implementálása előtt. A Kalman szűrési algoritmus időben változó rendszer esetén a következő sémával ábrázolható:

Inicializálás: $\hat{x}_0 := x_0 = Ex(0)$, $\Sigma_0 := E[(x(0) - x_0)(x(0) - x_0)^T]$

Előretartó rekurzió $k = 1, 2, \dots$:

$$\hat{x}_{k-1} \xrightarrow{(7.95)} M_k, \Sigma_k, G_k, \bar{x}_k \xrightarrow{y_k, (7.96)} \hat{x}_k$$

7.5 Aktuális Kalman-szűrő időinvariáns rendszer esetén

Időinvariáns rendszer, valamint konstans R_v kovariancia mátrixú rendszerzaj és konstans R_z kovariancia mátrixú kimeneti zaj esetén a Kalman szűrési algoritmus az időinvariáns rendszer LQ optimális irányítási algoritmusának duálisa, és amint az az eddigi eredményekből kiolvasható, a két feladat között a következő megfeleltetések állnak fenn:

LQ optimális irányítás (P_k, M_k)	Optimális állapotbecslés (Σ_k, M_k)
A	A^T
B	C^T
Q	R_v
R	R_z
P	M
M	Σ
$\begin{bmatrix} A + BR^{-1}B^T A^{-T}Q & -BR^{-1}B^T A^{-T} \\ -A^{-T}Q & A^{-T} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A^T + C^T R_z^{-1}CA^{-1}R_v & -C^T R_z^{-1}CA^{-1} \\ -A^{-1}R_v & A^{-1} \end{bmatrix}$
$P_\infty = A_i X_i^{-1}$	$M_\infty = A_i X_i^{-1}$
$K_\infty = (B^T P_\infty B + R)^{-1} B^T P_\infty A$	$G_\infty = M_\infty C^T (CM_\infty C^T + R_z)^{-1}$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy $(A^T, C^T, R_v, R_z) \xrightarrow{LQ} K_\infty \neq G_\infty^T$, mivel K -ban szerepel A , míg G -ben nem. Minden más tekintetben a hasonlóság teljes.

7.6 Optimális LQG irányítás

Tekintsük a zajokkal terhelt (7.74a-b) diszkrétidejű lineáris rendszert a zajokra és a kezdeti állapotokra vonatkozó (7.75a-e) sztochasztikus hipotézis mellett:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + v_k, \quad x(0)$$

$$y_k = C_k x_k + z_k$$

$x(0)$ független v_k -től és z_k -től,

$$E x(0) = x_0, \quad E[(x(0) - x_0)(x(0) - x_0)^T] = \Sigma_0 \geq 0 \text{ (pozitív szemidefinit)}$$

$$E v_k = 0, \quad E[v_k v_l^T] = R_{v,k} \delta_{kl}, \quad R_{v,k} \geq 0 \text{ (pozitív szemidefinit)}$$

$$E z_k = 0, \quad E[z_k z_l^T] = R_{z,k} \delta_{kl}, \quad R_{z,k} > 0 \text{ (pozitív definit)}$$

$$E[v_k z_l^T] = 0, \quad E[z_l v_k^T] = 0 \quad (v_k \text{ és } z_l \text{ korrelálatlanok}).$$

Keressük azt az $u_k = f(u_0, \dots, u_{k-1}, y_0, \dots, y_k)$ irányítást, amelyik optimális a

$$\hat{J} = E[J] = E\left[\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \{ < Q_k x_k, x_k > + < R_k u_k, u_k > \} + \frac{1}{2} < Q_N x_N, x_N > \right] \rightarrow \min \quad (7.97)$$

sztochasztikus optimum kritérium szempontjából, ahol E a várható érték operátora és $J(x, u)$ az LQ optimalizálási feladatnál szereplő (7.1a-b) kritérium szerint van definiálva.

A feladat megoldásához felhasználjuk a következő lemmákat.

7.1 Lemma: Legyen $E x = m$, $E[(x - m)(x - m)^T] = \text{cov}[x, x] =: R$, $A = A^T$, akkor

$$E < A x, x > = E < A(x - m), x - m > + < A m, m > = \text{trace}(AR) + < A m, m >. \quad (7.98)$$

Bizonyítás:

Mivel A szimmetrikus mátrix, ezért

$$< A(x - m), x - m > = < A x, x > - 2 < A x, m > + < A m, m >$$

$$E < A(x - m), x - m > = E < A x, x > - < A m, m >.$$

Másrészt $< A x, x > = \text{trace}(A x x^T)$, ezért

$$E < A x, x > = \text{trace}(A E[x x^T]) + < A m, m > = \text{trace}(AR) + < A m, m >.$$

7.2 Lemma: Legyen $Q \subset R^n$ és A egy $(n \times n)$ -es szimmetrikus pozitív definit mátrix. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \{x: \Omega \rightarrow R^n \text{ valószínűségi változó: } Ex = 0, \exists E[xx^T]\}$ és $G = \{x \in \mathcal{F} : p(\omega : x(\omega) \in Q) = 1\}$. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} F: \mathcal{F} &\rightarrow R^n & F(x) &:= E[xx^T] \\ F_1: \mathcal{F} &\rightarrow R^1 & F_1(x) &:= E \langle Ax, x \rangle \\ F_2: \mathcal{F} &\rightarrow R^1 & F_2(x) &:= \text{trace } E[xx^T] \\ F_3: \mathcal{F} &\rightarrow R^1 & F_3(x) &:= \det E[xx^T] \end{aligned} \quad (7.99)$$

Ha $F(x) \geq F(y)$, azaz $F(x) - F(y)$ pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrix, akkor $F_i(x) \geq F_i(y)$, $i = 1, 2, 3$. Ha $x_0 \in G$ és $\inf \{F(x) : x \in G\} = F(x_0)$, akkor $\min \{F_i(x) : x \in G\} = F_i(x_0)$, $i = 1, 2, 3$.

Bizonyítás: lásd Lantos [19].

Következmény: Ha $Ex = 0$ és $E[xx^T]$ infimum a szimmetrikus mátrixok részben rendezése szerint, akkor $E \langle Ax, x \rangle = \text{trace}(A \text{cov}[x, x]) + \langle Am, m \rangle$ minimális tetszőleges konstans szimmetrikus pozitív szemidefinit A mátrix esetén.

7.3 Lemma: Tekintsük a (7.74a-b) rendszert a (7.75a-e) sztochasztikus hipotézis mellett. Tartozzon a $J(x, u)$ kritérium szerinti LQ feladat optimális megoldásához (az u_k -től független) P_k és K_k , és legyen $-K_k x_k$ az LQ optimális megoldás, u_k pedig tetszőleges irányítás, akkor

$$\langle Q_N x_N, x_N \rangle = \langle P_0 x_0, x_0 \rangle + \sum_{k=0}^{N-1} \{ \langle P_{k+1} x_{k+1}, x_{k+1} \rangle - \langle P_k x_k, x_k \rangle \} \quad (7.100a)$$

$$\begin{aligned} \langle Q_N x_N, x_N \rangle = \langle P_0 x_0, x_0 \rangle + \\ + \sum_{k=0}^{N-1} \{ 2 \langle P_{k+1} (A_k x_k + B_k u_k), v_k \rangle + \langle P_{k+1} v_k, v_k \rangle + \\ + \langle (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k)(u_k + K_k x_k), u_k + K_k x_k \rangle - \\ - \langle Q_k x_k, x_k \rangle - \langle R_k u_k, u_k \rangle \}. \end{aligned} \quad (7.100b)$$

Bizonyítás:

Mivel $P_N = Q_N$, ezért (7.100a) evidens. Másrészt (7.74a-b) felhasználásával

$$\begin{aligned}
 \langle P_{k+1}x_{k+1}, x_{k+1} \rangle &= \langle P_{k+1}(A_k x_k + B_k u_k + v_k), A_k x_k + B_k u_k + v_k \rangle = \\
 &= 2 \langle P_{k+1}(A_k x_k + B_k u_k), v_k \rangle + \langle P_{k+1}v_k, v_k \rangle + \\
 &\quad + \langle P_{k+1}(A_k x_k + B_k u_k), A_k x_k + B_k u_k \rangle,
 \end{aligned} \tag{7.101}$$

$$\begin{aligned}
 \langle P_{k+1}(A_k x_k + B_k u_k), A_k x_k + B_k u_k \rangle &= \\
 &= \langle A_k^T P_{k+1} A_k x_k, x_k \rangle + \langle B_k^T P_{k+1} A_k x_k, u_k \rangle + \\
 &\quad + \langle A_k^T P_{k+1} B_k u_k, x_k \rangle + \langle B_k^T P_{k+1} B_k u_k, u_k \rangle.
 \end{aligned} \tag{7.102}$$

Következik (7.14)-ből, hogy

$$B_k^T P_{k+1} A_k = (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k) K_k, \tag{7.103a}$$

$$A_k^T P_{k+1} B_k = K_k^T (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k), \tag{7.103b}$$

abból pedig

$$\begin{aligned}
 \langle B_k^T P_{k+1} A_k x_k, u_k \rangle &= \langle (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k) K_k x_k, u_k \rangle = \\
 &= \langle K_k x_k, (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k) u_k \rangle,
 \end{aligned} \tag{7.104a}$$

$$\begin{aligned}
 \langle A_k^T P_{k+1} B_k u_k, x_k \rangle &= \langle u_k, (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k) K_k x_k \rangle = \\
 &= \langle (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k) u_k, K_k x_k \rangle,
 \end{aligned} \tag{7.104b}$$

$$\langle A_k^T P_{k+1} B_k K_k x_k, x_k \rangle = \langle (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k) K_k x_k, K_k x_k \rangle. \tag{7.104c}$$

(7.16), (7.101), (7.102) és (7.104a-c) szerint írható, hogy

$$\begin{aligned}
 \langle P_{k+1}x_{k+1}, x_{k+1} \rangle &= 2 \langle P_{k+1}(A_k x_k + B_k u_k), v_k \rangle + \langle P_{k+1}v_k, v_k \rangle + \\
 &\quad + \langle A_k^T P_{k+1} A_k x_k, x_k \rangle + \langle (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k) K_k x_k, u_k \rangle + \\
 &\quad + \langle (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k) u_k, K_k x_k \rangle + \langle B_k^T P_{k+1} B_k u_k, u_k \rangle
 \end{aligned} \tag{7.105}$$

$$\begin{aligned}
 \langle P_k x_k, x_k \rangle &= \langle (Q_k + A_k^T P_{k+1} A_k) x_k, x_k \rangle - \langle A_k^T P_{k+1} B_k K_k x_k, x_k \rangle = \\
 &= \langle (Q_k + A_k^T P_{k+1} A_k) x_k, x_k \rangle - \langle (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k) K_k x_k, K_k x_k \rangle,
 \end{aligned} \tag{7.106}$$

$$\begin{aligned}
 \langle P_{k+1}x_{k+1}, x_{k+1} \rangle &- \langle P_k x_k, x_k \rangle + \underbrace{\langle R_k u_k, u_k \rangle - \langle R_k u_k, u_k \rangle}_0 = \\
 &= 2 \langle P_{k+1}(A_k x_k + B_k u_k), v_k \rangle + \langle P_{k+1}v_k, v_k \rangle + \\
 &\quad + \langle (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k)(u_k + K_k x_k), u_k + K_k x_k \rangle - \\
 &\quad - \langle Q_k x_k, x_k \rangle - \langle R_k u_k, u_k \rangle.
 \end{aligned} \tag{7.107}$$

Ezért (7.100b) következik (7.100a)-ból, ha felhasználjuk a (7.107) összefüggést.

7.4 Lemma: Tekintsük a (7.74a-b) rendszert a (7.75a-e) sztochasztikus hipotézis mellett. Tartozzon a $J(x, u)$ kritérium szerinti LQ feladat optimális megoldásához (az u_k -től független) P_k és K_k , és legyen $-K_k x_k$ az LQ optimális megoldás, u_k pedig *tetszőleges* irányítás, akkor

$$2J = \langle P_0 x_0, x_0 \rangle + \sum_{k=0}^{N-1} \{ 2 \langle P_{k+1} (A_k x_k + B_k u_k), v_k \rangle + \langle P_{k+1} v_k, v_k \rangle \} + \sum_{k=0}^{N-1} \langle (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k)(u_k + K_k x_k), u_k + K_k x_k \rangle. \quad (7.108)$$

Bizonyítás: A lemma állítása közvetlenül következik $J(x, u)$ definíciójából és a (7.100b) összefüggésből.

7.1 Tétel (LQG szeparációs tétel): Tekintsük a (7.74a-b) rendszert a (7.75a-e) sztochasztikus hipotézis és a

$$\hat{J} = E[J] = E \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \{ \langle Q_k x_k, x_k \rangle + \langle R_k u_k, u_k \rangle \} + \frac{1}{2} \langle Q_N x_N, x_N \rangle \right\} \rightarrow \min$$

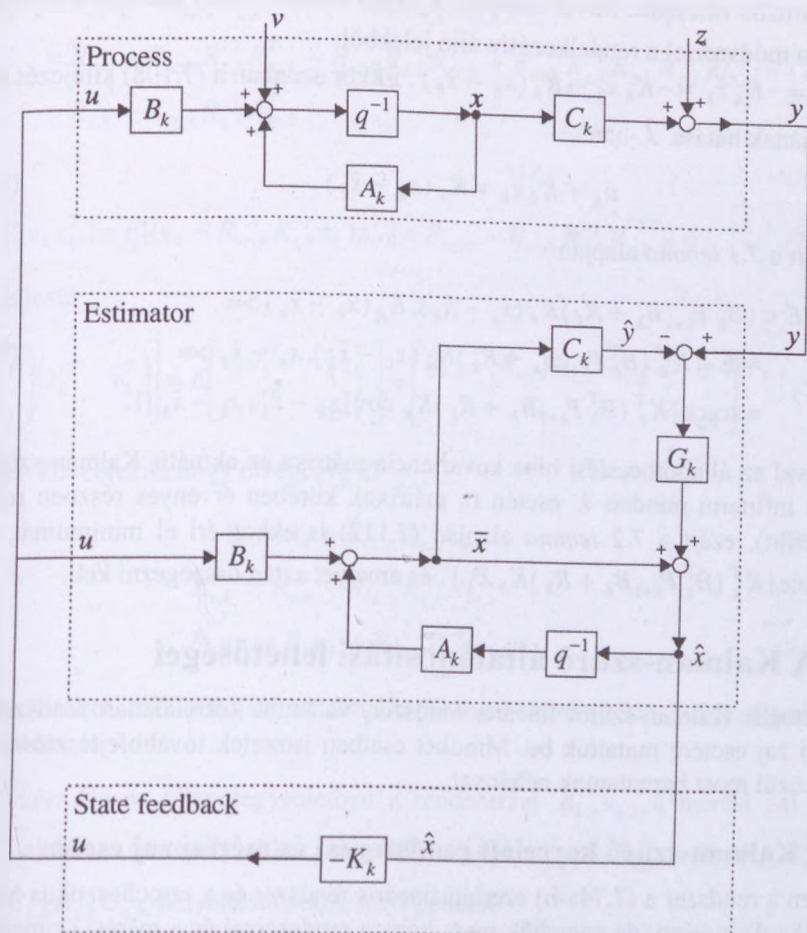
sztochasztikus optimalizálási kritérium mellett. Akkor az optimális LQG irányítási stratégia

$$u_k = -K_k \hat{x}_k, \quad (7.109a)$$

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + G_k (y_k - C \bar{x}_k), \quad (7.109b)$$

ahol K_k a $J(x, u)$ determinisztikus kritérium szerinti LQ optimális állapot-visszacsatolás és $\hat{x}_k$ a sztochasztikus hipotézishez tartozó aktuális Kalman-szűrő által képzett becslt állapot. Az LQG optimális irányítás esetén $2\hat{J}$ értéke

$$2\hat{J} = \text{trace}(P_0 \Sigma_0) + \sum_{k=0}^{N-1} \text{trace}(P_{k+1} R_{v,k}) + \sum_{k=0}^{N-1} \text{trace} \{ K_k^T (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k) K_k \Sigma_k \}. \quad (7.110)$$



7.1. ábra. LQG szeparációs tétel szerinti irányítás struktúrája

Bizonyítás:

- A kezdeti állapot hatása $\hat{J}$ -ban a 7.1 és 7.4 lemma szerint $\text{trace}(P_0 \Sigma_0)$ és nem befolyásolható az irányítással.
- A v_k rendszerzaj független u_k -től és x_k -től, ezért hatása a 7.1 és 7.4 lemma szerint $\sum_{k=0}^{N-1} \text{trace}(P_{k+1} R_{v,k})$ és nem befolyásolható.
- Ha x_k mérhető lenne, akkor az $u_k = -K_k x_k$ LQ optimális irányítás eltüntetné a (7.108) kifejezés utolsó (pozitív) tagját J -ben, és így $\hat{J}$ -ban is, ezért ez lenne az

optimális választás. Mivel azonban x_k nem mérhető, ezért becsülni kell valamilyen módszerrel a rendelkezésre álló jelekből:

$u_k = -K_k \hat{x}_k = -K_k x_k + K_k (x_k - \hat{x}_k)$. Ekkor azonban a (7.108) kifejezés utolsó tagjának hatása $\hat{J}$ -ban

$$u_k + K_k x_k = K_k (x_k - \hat{x}_k), \quad (7.111)$$

ezért a 7.1 lemma alapján

$$\begin{aligned} E < (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k) K_k (x_k - \hat{x}_k), K_k (x_k - \hat{x}_k) > &= \\ &= E < K_k^T (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k) K_k (x_k - \hat{x}_k), x_k - \hat{x}_k > = \\ &= \text{trace} \{ K_k^T (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k) K_k \text{cov}[x_k - \hat{x}_k, x_k - \hat{x}_k] \}. \end{aligned} \quad (7.112)$$

Mivel az állapotbecslési hiba kovariancia mátrixa az aktuális Kalman-szűrő esetén infimum minden k esetén (a mátrixok körében érvényes részben rendezés szerint), ezért a 7.2 lemma alapján (7.112) is ekkor éri el minimumát, amely $\text{trace} \{ K_k^T (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k) K_k \Sigma_k \}$, és amelyet aztán összegezni kell.

7.7 A Kalman-szűrő általánosítási lehetőségei

Az aktuális Kalman-szűrőt lineáris rendszer, valamint korrelálatlan rendszerzaj és mérési zaj esetére mutattuk be. Mindkét esetben ismertek továbbfejlesztések, amelyek közül most bemutatunk néhányat.

7.7.1 Kalman-szűrő korrelált rendszerzaj és mérési zaj esetén

Legyen a rendszer a (7.74a-b) szerinti lineáris rendszer és a sztochasztikus hipotézis a (7.75a-d) szerinti, de engedjük meg, hogy a rendszerzaj és a mérési (kimeneti) zaj korrelált lehessen:

$$E[v_k z_l^T] = R_{vz,k} \delta_{kl}, \quad E[z_l v_k^T] = R_{vz,k}^T \delta_{kl}. \quad (7.75e^*)$$

Világos, hogy

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + v_k - R_{vz,k} R_{z,k}^{-1} (y_k - y_k) = \\ &= A_k x_k + B_k u_k + v_k - R_{vz,k} R_{z,k}^{-1} (C_k x_k + z_k) + R_{vz,k} R_{z,k}^{-1} y_k = \\ &= (A_k - R_{vz,k} R_{z,k}^{-1} C_k) x_k + \underbrace{(v_k - R_{vz,k} R_{z,k}^{-1} z_k)}_{\tilde{v}_k} + B_k u_k + R_{vz,k} R_{z,k}^{-1} y_k, \end{aligned} \quad (7.74a^*)$$

ahol

$$\begin{aligned}
 E[v'_k v_k^T] &= E[(v_k - R_{vz,k} R_{z,k}^{-1} z_k)(v_k^T - z_k^T R_{z,k}^{-1} R_{vz,k}^T)] = \\
 &= R_{v,k} - R_{vz,k} R_{z,k}^{-1} R_{vz,k}^T - R_{vz,k} R_{z,k}^{-1} R_{vz,k}^T + R_{vz,k} R_{z,k}^{-1} R_{z,k} R_{z,k}^{-1} R_{vz,k}^T = (7.75c^*) \\
 &= R_{v,k} - R_{vz,k} R_{z,k}^{-1} R_{vz,k}^T
 \end{aligned}$$

és

$$E[v'_k z_k^T] = E[(v_k - R_{vz,k} R_{z,k}^{-1} z_k) z_k^T] = R_{vz,k} - R_{vz,k} R_{z,k}^{-1} R_{z,k} = 0 \quad (7.75e^*)$$

miatt teljesül

$$E\left[\begin{pmatrix} v'_k \\ z_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_k^T & z_k^T \end{pmatrix}\right] = E\left[\begin{pmatrix} v'_k v_k^T & v'_k z_k^T \\ z_k v_k^T & z_k z_k^T \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} R_{v,k} - R_{vz,k} R_{z,k}^{-1} R_{vz,k}^T & 0 \\ 0 & R_{z,k} \end{bmatrix}. \quad (7.113)$$

Innen következik, hogy elvégezve az

$$A_k := A_k - R_{vz,k} R_{z,k}^{-1} C_k \quad (7.114a)$$

$$R_{v,k} := R_{v,k} - R_{vz,k} R_{z,k}^{-1} R_{vz,k}^T \quad (7.114b)$$

$$B_k u_k := B_k u_k + R_{vz,k} R_{z,k}^{-1} y_k \quad (7.114c)$$

helyettesítéseket, alkalmazható az aktuális Kalman-szűrő (7.95)-(7.96) algoritmusára erre az esetre is.

Megjegyzés: Ha az állapotegyenletben a rendszerzaj $B_{v,k} v_k$, a mérési zaj pedig $C_{z,k} z_k$ alakban szerepel, akkor elegendő elvégezni az $R_{v,k} := B_{v,k} R_{v,k} B_{v,k}^T$ és $R_{z,k} := C_{z,k} R_{z,k} C_{z,k}^T$ helyettesítéseket, mert például

$$E[(B_{v,k} v_k)(B_{v,k} v_k)^T] = B_{v,k} E[v_k v_k^T] B_{v,k}^T.$$

7.7.2 Kiterjesztett Kalman-szűrő

Tekintsük a következő nemlineáris rendszert diszkrét időben:

$$\bar{x}_{k+1} = f(x_k, u_k, v_k), \quad (7.115a)$$

$$y_k = g(x_k, z_k). \quad (7.115b)$$

Teljesüljenek a lineáris eset sztochasztikus hipotézisei, ezen belül pedig legyen

$$E\left[\begin{pmatrix} v_k \\ z_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_k^T & z_l^T \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} R_{v,k} & R_{vz,k} \\ R_{vz,k}^T & R_{z,k} \end{bmatrix} \delta_{kl}. \quad (7.116)$$

Tegyük fel, hogy ismerjük a rendszer állapotának $\hat{x}_k$ becslését a $[kT, (k+1)T]$ időintervallum bal oldali végpontjában, és keressük az állapot $\hat{x}_{k+1}$ becslését a jobb oldali végpontban. Ha a rendszer sima, akkor próbálkozhatunk a nemlineáris modell linearizálásával az $\hat{x}_k$, $v_k = 0$, $z_k = 0$ munkapontban:

$$x_{k+1} = f(\hat{x}_k, u_k, 0) + \frac{\partial f(\hat{x}_k, u_k, 0)}{\partial x} (x_k - \hat{x}_k) + \frac{\partial f(\hat{x}_k, u_k, 0)}{\partial v} v_k \quad (7.117a)$$

$$y_k \approx g(\hat{x}_k, 0) + \frac{\partial g(\hat{x}_k, 0)}{\partial x} (x_k - \hat{x}_k) + \frac{\partial g(\hat{x}_k, 0)}{\partial z} z_k. \quad (7.117b)$$

Vegyük észre, hogy

$$f(\hat{x}_k, u_k, 0) - \frac{\partial f(\hat{x}_k, u_k, 0)}{\partial x} \hat{x}_k \quad (7.118a)$$

és

$$g(\hat{x}_k, 0) - \frac{\partial g(\hat{x}_k, 0)}{\partial x} \hat{x}_k \quad (7.118b)$$

ismert jeleknek tekinthetők.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$A_k := \frac{\partial f(\hat{x}_k, u_k, 0)}{\partial x} \quad (7.119a)$$

$$B_{v,k} := \frac{\partial f(\hat{x}_k, u_k, 0)}{\partial v} \quad (7.119b)$$

$$C_k := \frac{\partial g(\hat{x}_k, 0)}{\partial x} \quad (7.119c)$$

$$C_{z,k} := \frac{\partial g(\hat{x}_k, 0)}{\partial z} \quad (7.119d)$$

$$R_{v,k} := B_{v,k} R_{v,k} B_{v,k}^T \quad (7.120a)$$

$$R_{vz,k} := E[(B_{v,k} v_k)(C_{z,k} z_k)^T] = B_{v,k} R_{vz,k} C_{z,k}^T \quad (7.120b)$$

$$R_{z,k} := C_{z,k} R_{z,k} C_{z,k}^T. \quad (7.120c)$$

Mivel a linearizálás után az 7.7.1 pontban vizsgált általánosabb problémára jutottunk, ezért elvégezhetjük az ott bevezetett és indokolt következő módosításokat:

$$A_k := A_k - R_{vz,k} R_{z,k}^{-1} C_k \quad (7.121a)$$

$$R_{v,k} := R_{v,k} - R_{vz,k} R_{z,k}^{-1} R_{vz,k}^T \quad (7.121b)$$

A jelölések tisztázása után tekintsük a nemlineáris rendszert a $[(k-1)T, kT]$ intervallumban, amelynek bal oldali végpontjában már ismert az állapot $\hat{x}_{k-1}$ becslése. Linearizáljuk a nemlineáris rendszert az $\hat{x}_{k-1}$, $v_k = 0$, $z_k = 0$ munkapontban, és végezzük el a (7.121a-b) korrekciókat ($k := k-1$). A linearizált rendszerre alkalmazzuk a lineáris rendszerekre kidolgozott aktuális Kalman-szűrő algoritmust. Az így kapott állapotbecslő az ún. *kiterjesztett Kalman-szűrő* (extended Kalman filter):

$$\begin{aligned} \bar{x}_k &= f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) \\ M_k &= A_{k-1} \Sigma_{k-1} A_{k-1}^T + R_{v,k-1}, \end{aligned} \quad (7.122)$$

$$\Sigma_k = M_k - M_k C_k^T (C_k M_k C_k^T + R_{z,k})^{-1} C_k M_k,$$

$$G_k = M_k C_k^T (C_k M_k C_k^T + R_{z,k})^{-1} = \Sigma_k C_k^T R_{z,k}^{-1}.$$

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + G_k (y_k - g(\bar{x}_k, 0)). \quad (7.123)$$

Megjegyzés: A kiterjesztett Kalman-szűrő algoritmusában az $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ nemlineáris függvényekhez úgy jutottunk, hogy a Taylor sorok helyett a nemlineáris függvények értékét írtuk vissza:

$$\bar{x}_k = A_{k-1} \hat{x}_{k-1} + f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) - \frac{\partial f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0)}{\partial x} \hat{x}_{k-1} \rightarrow f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0)$$

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + G_k (y_k - g(\hat{x}_{k-1}, 0) + \frac{\partial g(\hat{x}_{k-1}, 0)}{\partial x} \hat{x}_{k-1} - C_k \bar{x}_k) \rightarrow \bar{x}_k + G_k (y_k - g(\bar{x}_k, 0))$$

8. PREDIKTÍV IRÁNYÍTÁS ÁLLAPOTTÉRBE

Korábban már megismertedtünk a prediktív irányítási módszerekkel frekvenciatartományban (operátor tartományban) SISO és MIMO rendszerek esetén. Ebben a fejezetben állapotterbeli prediktív irányítási módszereket vizsgálunk MIMO rendszerek esetén, különös figyelmet fordítva a fizikai stabilitás mellett a numerikus stabilitásra is.

A vizsgálatok során a következő feltevésekkel élünk:

1. Ha a szakasz nem tartalmaz integrátort, akkor a szabályozó integrátorát a *tervezés idejére* formálisan hozzávesszük a szakaszhoz. Az u formális beavatkozó jel (irányítás) ekkor a valódi szabályozó integrátora előtti növekmény jel lesz, ezért állandósult állapotban az u formális irányításra $u=0$ -nak kell teljesülni. A prediktív szabályozó megvalósításakor az integrátort visszatesszük a szabályozóba, és a kiszámított u formális beavatkozó jel lesz az integrátor bemenete. (MIMO esetben természetesen minden u_i komponenshez tartozik egy integrátor).
2. Ha a szakasz integráló, akkor az integrátorral való kiegészítés elmarad. A szabályozó nem fog tartalmazni integrátort, és állandósult állapotban most is $u=0$ -nak kell teljesülni.
3. A tervezést nulla alapjel esetére végezzük el, ezért állandósult állapotban elvárás $y=0$ biztosítása. Az alapjellel a megoldást ki kell egészíteni.
4. Lineáris időinvariáns rendszert (LTI) feltételezünk, ezért az aktuális pillanatot $t=kT$ helyett a tervezés során választhatjuk $t=0$ -nak. A horizont kezdőpontjában ezért a kezdeti állapotot x_0 jelöli. A predikciós horizont hossza N . A keresett optimális irányítás $U=[u_0^T, u_1^T, \dots, u_{N-1}^T]^T$, amelyből minden lépés után az új u_0 lesz kiadva. Ha az optimális irányítás az $U=-Kx_0$ állapotvisszacsatolás, akkor az $u_0=-\hat{K}x_0$ jelölést fogjuk használni.
5. Ha x_0 nem mérhető, akkor becslésére determinisztikus állapotmegfigyelőt vagy sztochasztikus állapotbecslőt alkalmazunk, és $u_0=-\hat{K}\hat{x}_0$ lesz a beavatkozás (az integrátor előtt).

A feltevéseknek megfelelően korrigált rendszer állapotegyenlete legyen

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\y_k &= Cx_k,\end{aligned}\tag{8.1}$$

az optimalizálási kritérium pedig

$$J = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\|y_j\|^2 + \lambda_j \|u_{j-1}\|^2). \quad (8.2)$$

Az állapotegyenlet megoldása

$$\begin{aligned} x_k &= A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-(j+1)} B u_j, \\ y_k &= C A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} C A^{k-(j+1)} B u_j, \end{aligned} \quad (8.3)$$

ami a következő tömör alakban is felírható:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^k \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ CA^{k-1}B & \dots & CAB & CB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{k-1} \end{bmatrix}. \quad (8.4)$$

Vegyük észre, hogy bizonyos horizont méret elérése után y_i számításakor nagyszámú pozitív és negatív tagot kell összegezni, ezért a tervezéskor a halmozódó hibák miatt *numerikus problémákkal* is meg kell majd birkóznunk. A tervezési módszereket először a numerikus robusztusság kérdését figyelmen kívül hagyva ismertetjük, majd egy második menetben korrekciós javaslatokat mutatunk be a numerikus problémák kiküszöbölésére. A *fizikai stabilitási* elvárásokat mindkét esetben bizonyos korlátozó feltételek bevezetésével fogjuk biztosítani.

8.1 Prediktív irányítás tervezése stabilitási garanciával

A prediktív irányítás tervezésére állapottérben három módszert mutatunk be.

8.1.1 Mosca–Zhang-féle korlátozó feltételek

A fizikai stabilitás biztosítására Mosca és Zhang az

$$y_i = 0 \text{ és } u_i = 0, \text{ ha } i \geq N \quad (8.5)$$

korlátozó feltétel betartását javasolja [21]. Ehhez elegendő $u_i = 0, i \geq N$ esetén $x_N = 0$, vagy más, ezzel lényegében egyenértékű követelmény biztosítása, például $y_i = 0, i = N, N+1, \dots, N+n-1$, ahol $n = \dim x$.

Legyen ezért $U = [u_0^T, u_1^T, \dots, u_{N-1}^T]^T$, és partícionáljuk a (8.4) egyenletet ennek megfelelően:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \\ \vdots \\ y_{N+n-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CA \\ \vdots \\ CA^{N-1} \\ CA^N \\ \vdots \\ CA^{N+n-1} \end{bmatrix}, \quad (8.6)$$

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CB & 0 & \dots & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ CA^{N-2}B & CA^{N-3}B & \ddots & \ddots & 0 \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & \dots & \ddots & CB \\ CA^N B & CA^{N-1}B & \dots & \dots & CAB \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{N+n-2}B & CA^{N+n-3}B & \dots & \dots & CA^{n-1}B \end{bmatrix}. \quad (8.7)$$

A korlátozó feltétel a következő tömör alakra hozható:

$$P_2 x_0 + H_2 U = 0. \quad (8.8)$$

Legyen az optimalizálási kritériumban az egyszerűség kedvéért $\lambda_i = \lambda$ konstans.

Jelölje kivételesen $\mu \in R^n$ a Lagrange-multiplikátort (mivel λ már más célra le van foglalva), akkor a Lagrange-multiplikátor szabály szerint az alábbi L függvény deriváltját kell nullává tenni és a korlátozásokat kielégíteni:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \langle P_1 x_0 + H_1 U, P_1 x_0 + H_1 U \rangle + \frac{1}{2} \lambda \langle U, U \rangle + \langle \mu, P_2 x_0 + H_2 U \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle P_1^T P_1 x_0, x_0 \rangle + \langle H_1^T P_1 x_0, U \rangle + \frac{1}{2} \langle H_1^T H_1 U, U \rangle + \frac{1}{2} \lambda \langle U, U \rangle + \\ &+ \langle P_2^T \mu, x_0 \rangle + \langle H_2^T \mu, U \rangle. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Tegyük L deriváltját U szerint nullává, és a megoldást helyettesítsük vissza a korlátozásokba:

$$\frac{dL}{dU} = H_1^T P_1 x_0 + \underbrace{(H_1^T H_1 + \mathcal{U})}_{L_1} U + H_2^T \mu = 0$$

$$U = -L_1^{-1} (H_1^T P_1 x_0 + H_2^T \mu)$$

$$P_2 x_0 - H_2 L_1^{-1} (H_1^T P_1 x_0 + H_2^T \mu) = 0$$

$$(P_2 - H_2 L_1^{-1} H_1^T P_1) x_0 = \underbrace{H_2 L_1^{-1} H_2^T}_{L_\mu} \mu$$

$$\mu = L_\mu^{-1} (P_2 - H_2 L_1^{-1} H_1^T P_1) x_0.$$

Az optimális irányítás ezért

$$U = \underbrace{-L_1^{-1} \{H_1^T P_1 + H_2^T L_\mu^{-1} (P_2 - H_2 L_1^{-1} H_1^T P_1)\}}_K x_0 =: -K x_0, \quad (8.10)$$

ahol $L_1 = H_1^T H_1 + \mathcal{U}$ és $L_\mu = H_2 L_1^{-1} H_2^T$. Az első $\dim u = m$ sorát kell venni K -nak, ez lesz $\hat{K}$, az optimális prediktív irányítás pedig $u_0 = -\hat{K} x_0$.

8.1.2 Rawlings–Muske-féle korlátozó feltételek

A fizikai stabilitás biztosítására Rawlings és Muske az

$$y_i \rightarrow 0, \text{ ha } i \rightarrow \infty \text{ és } u_i = 0, \text{ ha } i \geq N \quad (8.11)$$

korlátozó feltétel betartását javasolja [22].

Vezessük be a következő jelölést:

$$x_N = \underbrace{A^N}_{P_3} x_0 + \underbrace{[A^{N-1}B \quad A^{N-2}B \quad \dots \quad B]}_{H_1} U =: P_3 x_0 + H_1 U. \quad (8.12)$$

Mivel az A mátrix labilis is lehet, ezért partícionáljuk a sajátértékeit és a sajátvektorait a stabilitásnak megfelelően, mert ezek befolyásolni fogják y_i határértékét:

- i) Legyen λ_s stabilis sajátértéke A -nak, $|\lambda_s| \leq 1$. Legyen A_s a stabilis sajátértékekből álló diagonális mátrix, V_s a stabilis sajátértékekhez tartozó jobb oldali (oszlop) sajátvektorokból álló mátrix és W_s a stabilis sajátértékekhez tartozó bal oldali (sor) sajátvektorokból álló mátrix.

ii) Legyen λ_u labilis (unstable) sajátértéke A -nak, $|\lambda_u| > 1$. Legyen A_u a labilis sajátértékekből álló diagonális mátrix, V_u a labilis sajátértékekhez tartozó jobb oldali (oszlop) sajátvektorokból álló mátrix és W_u a labilis sajátértékekhez tartozó bal oldali (sor) sajátvektorokból álló mátrix.

Vezessük be a $T^{-1} = [V_s \quad V_u] \Leftrightarrow T = \begin{bmatrix} W_s \\ W_u \end{bmatrix}$ koordináta-transzformációt. Akkor

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_u \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}_N = Tx_N = \begin{bmatrix} W_s \\ W_u \end{bmatrix} x_N = \begin{pmatrix} W_s x_N \\ W_u x_N \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \tilde{x}_{Ns} \\ \tilde{x}_{Nu} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}_{N+i} = \tilde{A}^i \tilde{x}_N = \begin{pmatrix} A_s^i \tilde{x}_{Ns} \\ A_u^i \tilde{x}_{Nu} \end{pmatrix} \rightarrow \infty, \text{ ha } \tilde{x}_{Nu} \neq 0 \Rightarrow \tilde{x}_{Nu} = 0,$$

ezért teljesülni kell a következő korlátozó feltételnek:

$$W_u x_N = 0. \quad (8.13)$$

Mivel $u_i = 0$, ha $i \geq N$, ezért

$$\begin{aligned} y_i &= \tilde{C} \tilde{x}_i = \tilde{C} \tilde{A}^{i-N} \tilde{x}_N = \underbrace{C[V_s \quad V_u]}_{T^{-1}} \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_u \end{bmatrix}^{i-N} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{Ns} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= CV_s A_s^{i-N} \tilde{x}_{Ns} = \underbrace{CV_s A_s^{i-N} W_s}_{A_s^{i-N}} x_N =: CA_s^{i-N} x_N, \end{aligned} \quad (8.14)$$

ahol $A_s = V_s A_s W_s$.

A $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = 0$ feltétel biztosítása érdekében minimalizáljuk $\sum_{i=N}^{\infty} \|y_i\|^2$ értékét.

Megmutatjuk, hogy létezik olyan S_2 mátrix, hogy minden $i \geq k \geq N$ esetén

$$\sum_{i=k}^{\infty} \|y_i\|^2 = \langle S_2 x_k, x_k \rangle, \quad (8.15)$$

ami a kimenetre vonatkozó feltétel kezelését le fogja egyszerűsíteni. Ennek belátása egyszerű. Tegyük fel, hogy a feltétel igaz $k+1$ esetén. Belátjuk, hogy igaz marad k esetén is, mitöbb, megadjuk S_2 számítási módját is:

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{\infty} \|y_i\|^2 &= \langle y_k, y_k \rangle + \sum_{i=k+1}^{\infty} \|y_i\|^2 = \langle Cx_k, Cx_k \rangle + \langle S_2 x_{k+1}, x_{k+1} \rangle = \\ &= \langle C^T Cx_k, x_k \rangle + \langle S_2 A_s x_k, A_s x_k \rangle = \langle (C^T C + A_s^T S_2 A_s) x_k, x_k \rangle = \\ &= \langle S_2 x_k, x_k \rangle, \end{aligned}$$

feltéve, hogy $S_2 > 0$ megoldása a következő ún. diszkrétidejű Ljapunov-egyenletnek, amely stabil A_s rendszer esetén létezik:

$$S_2 = A_s^T S_2 A_s + C^T C, \text{ ahol } S_2 > 0 \text{ (diszkrétidejű Ljapunov-egyenlet).} \quad (8.16)$$

Összefoglalva az eddigieket, a feladat a következő:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle P_1 x_0 + H_1 U, P_1 x_0 + H_1 U \rangle + \frac{1}{2} \lambda \langle U, U \rangle + \langle S_2 x_N, x_N \rangle \rightarrow \min \\ W_u x_N = 0 \text{ korlátozás,} \end{aligned} \quad (8.17)$$

ahol x_N helyére beírható $P_3 x_0 + H_3 U$. A feladat a Lagrange-multiplikátor szabállyal megoldható:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \langle P_1 x_0 + H_1 U, P_1 x_0 + H_1 U \rangle + \frac{1}{2} \lambda \langle U, U \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \langle S_2 (P_3 x_0 + H_3 U), (P_3 x_0 + H_3 U) \rangle + \langle \mu, W_u (P_3 x_0 + H_3 U) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle P_1^T P_1 x_0, x_0 \rangle + \langle H_1^T P_1 x_0, U \rangle + \frac{1}{2} \langle H_1^T H_1 U, U \rangle + \frac{1}{2} \lambda \langle U, U \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \langle P_3^T S_2 P_3 x_0, x_0 \rangle + \langle H_3^T S_2 P_3 x_0, U \rangle + \frac{1}{2} \langle H_3^T S_2 H_3 U, U \rangle + \\ &+ \langle \mu, W_u P_3 x_0 \rangle + \langle H_3^T W_u^T \mu, U \rangle \end{aligned}$$

$$\frac{dL}{dU} = \underbrace{(H_1^T H_1 + \lambda I + H_3^T S_2 H_3)}_{L_2} U + (H_1^T P_1 + H_3^T S_2 P_3) x_0 + H_3^T W_u^T \mu = 0$$

$$U = -L_2^{-1} \{ (H_1^T P_1 + H_3^T S_2 P_3) x_0 + H_3^T W_u^T \mu \}$$

$$W_u (P_3 x_0 - H_3 L_2^{-1} \{ (H_1^T P_1 + H_3^T S_2 P_3) x_0 + H_3^T W_u^T \mu \}) = 0$$

$$\mu = \underbrace{[W_u H_3 L_2^{-1} H_3^T W_u^T]^{-1}}_{L_{\mu 3}} W_u [P_3 - H_3 L_2^{-1} (H_1^T P_1 + H_3^T S_2 P_3)] x_0$$

$$U = -L_2^{-1} \{ (H_1^T P_1 + H_3^T S_2 P_3) + H_3^T W_u^T L_{\mu 3}^{-1} W_u [P_3 - H_3 L_2^{-1} (H_1^T P_1 + H_3^T S_2 P_3)] \} x_0 = \\ =: -K x_0.$$

Ha a rendszer stabilis és ezért W_u hiányzik, akkor $K = K_s$, ahol

$$K_s := L_2^{-1} \{ (H_1^T P_1 + H_3^T S_2 P_3) \}, \quad (8.18)$$

és általában

$$K := (I - L_2^{-1} H_3^T W_u^T L_{\mu 3}^{-1} W_u H_3) K_s + L_2^{-1} H_3^T W_u^T L_{\mu 3}^{-1} W_u P_3, \quad (8.19)$$

ahol a képletekben szereplő mennyiségek

$$L_2 := H_1^T H_1 + \lambda I + H_3^T S_2 H_3, \quad (8.20a)$$

$$L_{\mu 3} := W_u H_3 L_2^{-1} H_3^T W_u^T. \quad (8.20b)$$

Az optimális prediktív irányítás $u_0 = -\hat{K} x_0$, ahol $\hat{K}$ az első $\dim u = m$ sora K -nak.

8.1.3 LQ szabályozásra alapozott prediktív irányítás

A fizikai stabilitás biztosítására használható az

$$y_i \rightarrow 0, \text{ ha } i \rightarrow \infty \text{ és } u_i = -K_q x_i, \text{ ha } i \geq N, \text{ ahol } K_q \text{ LQ optimális} \quad (8.21)$$

korlátozó feltétel.

Ekkor

$$x_{k+1} = \underbrace{(A - BK_q)}_{\Phi} x_k =: \Phi x_k, \text{ ha } k \geq N, \quad (8.22)$$

$$x_i = (A - BK_q)^{i-k} x_k = \Phi^{i-k} x_k, \text{ ha } i \geq k \geq N. \quad (8.23)$$

A $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = 0$ feltétel biztosítás érdekében minimalizáljuk $\sum_{i=N}^{\infty} \|y_i\|^2$ értékét. Mivel K_q LQ optimális stabilizáló állapot-visszacsatolás, ezért Φ stabilis, továbbá

$y_{N+i} = C\Phi^i x_N$. Ezért $\sum_{i=k}^{\infty} \|y_i\|^2 = \langle S_2 x_k, x_k \rangle$, ahol S_2 az

$$S_2 = \Phi^T S_2 \Phi + C^T C \quad (S_2 > 0) \quad (8.24)$$

diszkrétidejű Ljapunov-egyenlet megoldása. A megoldás innen azonos a Rawling–Muske-módszerrel, de A_s helyett $\Phi = A - BK_q$ áll és hiányzik W_u . Ennek során L_2 és $K = K_s$ számítására rendre (8.20a) és (8.18) használható.

8.2 Korrekciók a numerikus stabilitás biztosítására

A predikciós horizont bővülésekor a nagyszámú pozitív és negatív előjelű tag összegzése következtében numerikus stabilitási problémák lépnek fel állapottérbeli tervezéskor, amelyek elkerülésére Rossiter, Kouvaritakis és Rice a fenti módszerek kiterjesztésére tettek javaslatot [23]. A korrekciók növelik a módszerek numerikus robusztusságát.

8.2.1 Mosca–Zhang-módszer kiterjesztése

Az eredeti $y_i = 0$ és $u_i = 0$, ha $i \geq N$ feltétel biztosítása érdekében legyen u_i alakja a következő:

$$u_i = \begin{cases} -K_d x_i + t_i, & i = 0, \dots, N-n-1 \\ -K_d x_i, & i \geq N-n. \end{cases} \quad (8.25)$$

Ekkor

$$x_{N-n+i} = (A - BK_d)^i x_{N-n}, \quad (8.26)$$

ahol K_d választható dead-beat szabályozónak, amikor is előírjuk, hogy

$$(A - BK_d)^n = 0, \text{ ahol } n = \dim x. \quad (8.27)$$

E mellett a választás mellett

$$x_N = (A - BK_d)^n x_{N-n} = 0 \Rightarrow x_i, y_i = 0, \quad \forall i \geq N, \quad (8.28)$$

függetlenül t_i megválasztásától, ezért t_i választására pótlólagos feltételek tehetők.

Vezessük be a $\Phi := A - BK_d$ jelölést, akkor a predikciós horizont kezdeti szegmensében

$$x_{k+1} = Ax_k + B(-K_d x_k + t_k) = \Phi x_k + Bt_k, \quad k = 0, \dots, N - n - 1, \quad (8.29)$$

tehát $\Phi = A - BK_d$ átveszi A szerepét, t_k pedig u_k szerepét az eredeti módszerhez képest.

Legyen tehát

$$P_4 := \begin{bmatrix} C\Phi \\ C\Phi^2 \\ \vdots \\ C\Phi^{N-1} \end{bmatrix}, \quad H_4 = \begin{bmatrix} CB & 0 & \dots & 0 \\ C\Phi B & \cdot CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C\Phi^{N-2}B & C\Phi^{N-3}B & \dots & C\Phi^{n-1}B \end{bmatrix}, \quad (8.30a)$$

$$T := \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{N-n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = P_4 x_0 + H_4 T, \quad (8.30b)$$

akkor

$$x_k = \Phi^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-(j+1)} B t_j, \quad (8.31)$$

$$u_k = -K_d x_k + t_k = -K_d \left\{ \Phi^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-(j+1)} B t_j \right\} + t_k. \quad (8.32)$$

Innen következik, hogy

$$U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = M_4 x_0 + N_4 T, \quad (8.33a)$$

ahol M_4 és N_4 kiolvasható a (8.32) összefüggésből:

$$M_4 := \begin{bmatrix} -K_d \\ -K_d \Phi \\ -K_d \Phi^2 \\ \vdots \\ -K_d \Phi^{N-1} \end{bmatrix}, N_4 := \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ -K_d B & I & \dots & 0 \\ -K_d \Phi B & -K_d B & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -K_d \Phi^{N-2} B & -K_d \Phi^{N-3} B & \dots & -K_d \Phi^{N-1} B \end{bmatrix} \quad (8.33b)$$

A feladat a J optimalizálási kritérium minimalizálása T szerint, az optimum feltétele pedig $\frac{dJ}{dT} = 0$:

$$J = \frac{1}{2} \|P_4 x_0 + H_4 T\|^2 + \frac{1}{2} \lambda \|M_4 x_0 + N_4 T\|^2 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \langle P_4 x_0 + H_4 T, P_4 x_0 + H_4 T \rangle + \frac{1}{2} \lambda \langle M_4 x_0 + N_4 T, M_4 x_0 + N_4 T \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle P_4^T P_4 x_0, x_0 \rangle + \langle H_4^T P_4 x_0, T \rangle + \frac{1}{2} \langle H_4^T H_4 T, T \rangle + \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda \langle M_4^T M_4 x_0, x_0 \rangle + \lambda \langle N_4^T M_4 x_0, T \rangle + \frac{1}{2} \lambda \langle N_4^T N_4 T, T \rangle \end{aligned}$$

$$\frac{dJ}{dT} = H_4^T P_4 x_0 + H_4^T H_4 T + \lambda N_4^T M_4 x_0 + \lambda N_4^T N_4 T = 0$$

$$T = -(H_4^T H_4 + \lambda N_4^T N_4)^{-1} (H_4^T P_4 + \lambda N_4^T M_4) x_0 \quad (8.34)$$

$$U = \{M_4 - N_4 (H_4^T H_4 + \lambda N_4^T N_4)^{-1} (H_4^T P_4 + \lambda N_4^T M_4)\} x_0 = -K x_0. \quad (8.35)$$

Az optimális prediktív irányítás $u_0 = -\hat{K}x_0$, ahol $\hat{K}$ az első $\dim u = m$ sora K -nak.

8.2.2 Rawlings-Muske módszer kiterjesztése

Az eredeti $y_i \rightarrow 0$, ha $i \rightarrow \infty$ és $u_i = 0$, ha $i \geq N$ feltétel biztosítása érdekében legyen u_i alakja a következő:

$$u_i = \begin{cases} -K_1 x_i + t_i, & i = 0, \dots, N-1 \\ 0, & i \geq N. \end{cases} \quad (8.36)$$

Ekkor

$$x_{k+1} = Ax_i + B(-K_1 x_i + t_i) = (A - BK_1)x_i + Bt_i, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (8.37)$$

Vezessük be a $\Phi := A - BK_1$ jelölést, ahol K_1 tetszőleges *stabilizáló* állapot-visszacsatolás, akkor

$$x_N = \underbrace{\Phi^N}_{P_3} x_0 + \underbrace{[\Phi^{N-1} B \quad \Phi^{N-2} B \quad \dots \quad B]}_{H_3} T = P_3 x_0 + H_3 T. \quad (8.38)$$

A további folytatás az eredeti Rawlings–Muske-módszer és a Mosca–Zhang kiterjesztett módszer keveréke. A predikciós horizonton belül a Mosca–Zhang kiterjesztett módszert használjuk, amelynél Φ az állapotmátrix és T a bemenet, amire optimalizálni kell. Ehhez ki kell számítani a P_4, H_4, M_4, N_4 mátrixokat, de M_4, N_4 számításakor K_u helyett K_1 szerepel. H_4 számításakor formálisan $n := 0$ helyettesítendő, lásd (8.37). A predikciós horizontot követően azonban $u = 0$, ezért A az állapotmátrix, ahhoz kell meghatározni a W_s, W_u bal oldali és a V_s, V_u jobb oldali sajátvektorokat, valamint a diszkrétidejű Ljapunov-egyenlet $S_2 > 0$ megoldását, továbbá teljesülnie kell a $W_u x_N = 0$ korlátozó feltételnek (lásd eredeti Rawlings–Muske-módszer).

8.1. táblázat. Az eredeti és a kiterjesztett Rawlings–Muske-módszer közötti kapcsolat

Eredeti módszer	Kiterjesztett módszer
A	$\Phi \rightarrow P_4, H_4, M_4(K_1), N_4(K_1)$
$A \rightarrow W_s, W_u, V_s$ sajátvektorok	$A \rightarrow W_s, W_u, V_s$ sajátvektorok
$A_s, C \rightarrow S_2$	$A_s, C \rightarrow S_2$
P_1	P_4
H_1	H_4 (formálisan $n = 0$)
λ (L_2 -ben)	$\lambda N_4^T N_4$ (L_2 -ben)
P_3	P_5
H_3	H_5

A korlátozó feltétel miatt a Lagrange-multiplikátor szabályt alkalmazzuk, amihez képezni kell az L függvényt, nullává kell tenni a $\frac{dL}{dT}$ deriváltat és be kell tartani a korlátozást. Ennek során L alakja a következő:

$$L = \frac{1}{2} \|P_4 x_0 + H_4 T\|^2 + \frac{1}{2} \lambda \|M_4 x_0 + N_4 T\|^2 + \frac{1}{2} \langle S_2 (P_5 x_0 + H_5 T), P_5 x_0 + H_5 T \rangle + \langle \mu, W_u (P_5 x_0 + H_5 T) \rangle \quad (8.39)$$

Az eredeti és a kiterjesztett módszer közötti kapcsolatot a 8.1 táblázatban foglaltuk össze. K számításakor a (8.18) és (8.19) összefüggések érvényesek, de P_1, H_1, P_3, H_3 helyett rendre P_4, H_4, P_5, H_5 szerepel, és L_2 -ben λI helyett $\lambda N_4^T N_4$ áll. Az optimális prediktív irányítás $u_0 = -\hat{K}x_0$, ahol $\hat{K}$ az első $\dim u = m$ sora K -nak.

8.2.3 Az LQ szabályozásra alapozott prediktív irányítás kiterjesztése

Az eredeti $y_i \rightarrow 0$, ha $i \rightarrow \infty$ és $u_i = -K_q x_i$, ha $i \geq N$, K_q LQ optimális feltétel biztosítása érdekében legyen u_i alakja a következő:

$$u_i = \begin{cases} -K_q x_i + t_i, & i = 0, \dots, N-1 \\ -K_q x_i, & i \geq N. \end{cases} \quad (8.40)$$

A módszer kiterjesztése hasonló a Rawling–Muske-módszer kiterjesztéséhez, de a $\Phi := A - BK_q$ állapotmátrix stabilis és érvényes mind a predikciós horizonton belül, mind pedig azt követően is. Ezért $A_s := \Phi$, W_u hiányzik, $S_2 = \Phi^T S_2 \Phi + C^T C$ és korlátozó feltétel nincs:

$$J = \frac{1}{2} \|P_4 x_0 + H_4 T\|^2 + \frac{1}{2} \lambda \|M_4 x_0 + N_4 T\|^2 + \frac{1}{2} \langle S_2 (P_5 x_0 + H_5 T), P_5 x_0 + H_5 T \rangle$$

$$T = -(H_4^T H_4 + \lambda N_4^T N_4 + H_5^T S_2 H_5)^{-1} (H_4^T P_4 + \lambda N_4^T M_4 + H_5^T S_2 P_5) x_0$$

$$K = -(M_4 - N_4 (H_4^T H_4 + \lambda N_4^T N_4 + H_5^T S_2 H_5)^{-1} (H_4^T P_4 + \lambda N_4^T M_4 + H_5^T S_2 P_5)).$$

Az optimális prediktív irányítás $u_0 = -\hat{K}x_0$, ahol $\hat{K}$ az első $\dim u = m$ sora K -nak.

9. ADAPTÍV IRÁNYÍTÁSOK

Az adaptív szabályozások stabilitásvizsgálatánál fontos szerepet játszik a bemenet-kimenet stabilitás, a passzivitás és a pozitív valós (SPR) tulajdonság. Ebben a fejezetben előbb összefoglaljuk a nemlineáris irányítások és az adaptív irányítások tervezésénél fontos szerepet játszó eme rendszertechnikai elveket. Megadjuk a stabilitással kapcsolatos fontosabb tételeket L_p vagy speciálisan L_2 terekben, illetve azok kiterjesztéseiben (kis erősítés tétel, kör kritérium, passzivitási tételek, Popov-kritérium, Kalman–Yacubovitch tétel).

Az adaptív irányításokat felosztjuk modellreferenciás (MRAC) és az önhangoló (STAC) adaptív irányításokra, és bemutatjuk jellegzetes hatásvázlataikat. Egyváltozós (SISO) lineáris rendszerek esetén módszert mutatunk be modellreferenciás adaptív irányítás tervezésére folytonos időben és önhangoló adaptív irányítás tervezésére diszkrét időben. Többváltozós (MIMO) lineáris rendszer és innovációs zajmodell esetén módszert adunk az indirekt adaptív irányítás tervezésére, amely megoldja a rendszer paramétereinek és az állapotnak egyidejű becslését, és alapul szolgálhat különféle (pólusáthelyezésen alapuló, LQ optimum, prediktív stb.) irányítási törvények online tervezéséhez és megvalósításához. A többváltozós nemlineáris adaptív irányítások területéről robotok önhangoló adaptív irányítására mutatunk be egy módszert.

A téma iránt mélyebben érdeklődők számára a stabilitás és az adaptív irányítás bő irodalmából kiemeljük Vidyasagar [24], Åström és Wittenmark [28], Isermann, Lachmann és Matko [29], Nazaruddin és Unbehauen [30], [31], valamint Slotine és Li [32] könyvét illetve cikkét. Ezekben megtalálható a fejezetben használt, de nem bizonyított tételek bizonyítása is.

9.1 Kauzalitás, bemenet-kimenet stabilitás, passzivitás

Az F4. függelékben összefoglaltuk a függvényterekkel kapcsolatos fontosabb összefüggéseket. A mérhető függvény egy nulla mértékű halmaz kivételével lépcsős függvények határértékeként áll elő minden t esetén. Ha $p \in [1, \infty)$, akkor az $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$ mérhető függvény a Lebesgue-integrálható függvények $L_p[0, \infty)$ teréhez tartozik, ha $\int_0^\infty |f(t)|^p dt < \infty$. Ekkor az $\|f\|_p = (\int_0^\infty |f(t)|^p dt)^{1/p}$ normával $L_p[0, \infty)$ egy Banach-tér. Ha $p = \infty$, akkor $\|f\|_\infty = \text{ess sup } |f(t)| < \infty$ választással L_∞ szintén Banach-tér. Ha $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ és $f_i \in L_p[0, \infty)$, $i = 1, \dots, n$, a norma definíciója pedig $\|f\|_p := (\sum_{i=1}^n \|f_i\|_p^2)^{1/2}$, akkor az $L_p^*[0, \infty)$ Banach-térhez jutunk.

Ha $f, g \in L_2^n[0, \infty)$ és a skalárszorzatot $\langle f, g \rangle = \int_0^\infty \langle f^*(t), g(t) \rangle dt$ definiálja, akkor $L_2^n[0, \infty)$ egy Hilbert-tér. Bizonyos rendszertechnikai elvek megfogalmazásához célszerű kibővíteni a megengedett függvények (jelek) terét.

9.1.1 Kauzalitás

Definíció (az L_p tér kiterjesztése): Legyen $0 \leq T < \infty$, akkor az $f(t)$ függvény csonkítása az az $f_T(t)$ függvény, amelyre $f_T(t) := f(t)$, ha $0 \leq t \leq T$, különben nulla. Azt mondjuk, hogy $f \in L_{pe}$, ha $f_T \in L_p$ minden véges pozitív T esetén. Az L_{pe} tér az L_p tér kiterjesztése, vagy más néven a kiterjesztett L_p tér.

Az így definiált L_{pe} tér a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- i) Minden $p \in [1, \infty]$ esetén L_{pe} lineáris vektortér.
- ii) $f \in L_{pe}$ esetén $\|f_T\|_p$ nemcsökkenő függvénye T -nek.
- iii) $f \in L_p \Leftrightarrow \exists m < \infty$ konstans, hogy $\|f_T\|_p \leq m, \forall T \geq 0$ esetén. Ekkor

$$\|f\|_p = \lim_{T \rightarrow \infty} \|f_T\|_p.$$

- iv) L_{pe}^n hasonlóan definiálható, mint L_p^n .

Definíció (kauzalitás): Legyen $A: L_{pe}^n \rightarrow L_{pe}^m$ egy (általában nemlineáris) leképezés, amely a rendszer $f(\cdot)$ bemenő jeléhez a rendszer $(Af)(\cdot)$ kimenő jelét rendeli, és ebben az értelemben modellezi a rendszert. Azt mondjuk, hogy az $A: L_{pe}^n \rightarrow L_{pe}^m$ leképezés kauzális, ha

$$(Af)_T = (Af_T)_T, \forall T \geq 0, \forall f \in L_{pe}^n. \quad (9.1)$$

Világos, hogy a definíció azt az elvárásunkat tükrözi vissza, hogy kauzális rendszer esetén a kimenet értéke a t pillanatban csak a bemenetnek t -vel bezárólag felvett értékeitől függ (a bemenő jel jövőbeli értékeitől nem függ).

9.1.2 Bemenet-kimenet stabilitás

Elterjedt szokás a bemenet-kimenet stabilitást (input-output stability) nem operátorral, hanem bináris relációval definiálni. Egy R reláció $X \times Y$ felett, amely xRy alakban vagy $(x, y) \in R$ alakban írható fel, lényegében azt jelenti, hogy az R relá-

cióba sorolt (x, y) rendezett párok egy kitüntetett $R \subset X \times Y$ részhalmazból valók. Világos, hogy ha speciálisan $A: X \rightarrow Y$ egy leképezés, akkor $R_A = \{(x, Ax) : x \in X\}$ egy relációt definiál. Másrészt viszont egy reláció rendelhet több értéket is x -hez (pl. $(x, y_1), (x, y_2) \in R$), de az is lehet, hogy nem minden $x \in X$ fordul elő bal oldali elemként R -ben.

Definíció (L_p stabilitás): Legyen $R \subset L_{pe}^n \times L_{pe}^m$ egy reláció. Azt mondjuk, hogy

- i) az R reláció L_p -stabil, ha $(x, y) \in R, x \in L_p^n \Rightarrow y \in L_p^m$, speciálisan $p = \infty$ esetén BIBO (bounded input, bounded output) stabilitásról beszélünk,
- ii) az R reláció L_p -stabil véges erősítéssel (wfg, with finite gain), ha L_p -stabil és léteznek véges $\gamma_p, \beta_p \geq 0$ konstansok, hogy

$$(x, y) \in R, x \in L_p^n \Rightarrow \|y\|_p \leq \gamma_p \|x\|_p + \beta_p, \quad (9.2)$$

- iii) az R reláció L_p -stabil véges erősítéssel és nulla offset-tel (wb, without bias), ha L_p -stabil és létezik véges $\gamma_p \geq 0$ konstans, hogy

$$(x, y) \in R, x \in L_p^n \Rightarrow \|y\|_p \leq \gamma_p \|x\|_p. \quad (9.3)$$

Következmény:

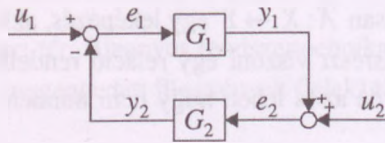
- i) L_p -stabil wfg reláció esetén $\gamma_p(R) := \inf\{\gamma_p : \exists \beta_p \geq 0 \text{ és teljesül (9.2)}\}$.
- ii) L_p -stabil wb reláció esetén $\gamma_p(R) := \inf\{\gamma_p : \text{teljesül (9.3)}\}$.

Definíció (L_p -stabil leképezés): Az $A: L_{pe}^n \rightarrow L_{pe}^m$ leképezés L_p -stabil (wfg, wb), ha a hozzátartozó R_A reláció L_p -stabil (wfg, wb). Ha az R_A reláció L_p -stabil (wfg, wb), akkor $\gamma_p(A) := \gamma_p(R_A)$.

Következmény:

- i) Ha az $A: L_{pe}^n \rightarrow L_{pe}^m$ leképezés L_p -stabil wfg, azaz $\exists \gamma_p, \beta_p$, hogy teljesül $\|Ax\|_p \leq \gamma_p \|x\|_p + \beta_p, \forall x \in L_p^n$, akkor $\|Ax\|_{Tp} \leq \gamma_p \|x\|_{Tp} + \beta_p, \forall T \geq 0, \forall x \in L_{pe}^n$.
- ii) Lineáris $A: L_{pe}^n \rightarrow L_{pe}^m$ leképezés L_p -stabil wfg $\Leftrightarrow L_p$ -stabil wb.

A fenti definíciók jellemzik a felnyitott kör (open loop) stabilitását. Nézzük meg, mi mondható a 9.1. ábra szerinti zárt rendszer stabilitásáról.



9.1. ábra. Nemlineáris zárt szabályozási kör sémája

Legyen $p \in [1, \infty]$, G_1, G_2 nemlineáris leképezések és $u_1, e_1, y_2 \in L_{pe}^{n_1}$, $u_2, e_2, y_1 \in L_{pe}^{n_2}$. Akkor a visszacsatolt rendszerre teljesül

$$e_1 = u_1 - y_2, \quad e_2 = u_2 + y_1, \quad y_1 = G_1 e_1, \quad y_2 = G_2 e_2. \quad (9.4)$$

Legyen $n = n_1 + n_2$ és $u, e, y \in L_{pe}^n$, ahol $u = (u_1^T, u_2^T)^T$, $e = (e_1^T, e_2^T)^T$, $y = (y_1^T, y_2^T)^T$, akkor bevezethető a következő $G: L_{pe}^n \rightarrow L_{pe}^n$ leképezés és F konstans összeköttetési mátrix:

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_1} \\ -I_{n_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (9.5)$$

amellyel a visszacsatolt rendszer

$$e = u - Fy, \quad y = Ge, \quad (9.6a)$$

$$(I + FG)e = u, \quad y = G(u - Fy). \quad (9.6b)$$

Vezessük be a következő relációkat:

$$R_{ue} = \{(u, e) \in L_{pe}^{2n} : e + FGe = u\}, \quad R_{uy} = \{(u, y) \in L_{pe}^{2n} : y = G(u - Fy)\}. \quad (9.7)$$

Definíció: A 9.1. ábra szerinti visszacsatolt rendszer

- i) L_p -stabil az u bemenetre és e kimenetre, röviden L_p -stabil (u-e), ha az R_{ue} reláció L_p -stabil,
- ii) L_p -stabil az u bemenetre és y kimenetre, röviden L_p -stabil (u-y), ha az R_{uy} reláció L_p -stabil,
- iii) L_p -stabil (u-e-y), ha mind az R_{ue} , mind pedig az R_{uy} reláció L_p -stabil.

Következmény: A 9.1. ábra szerinti visszacsatolt rendszer esetén a következő három állítás ekvivalens:

- i) R_{ue} reláció L_p -stabil,
- ii) R_{uy} reláció L_p -stabil,
- iii) R_{ue} és R_{uy} relációk L_p -stabilak.

Az állítás egyszerűen következik abból, hogy F konstans és $\exists F^{-1}$. Például ha R_{ue} L_p stabil és $(u, e) = (u, u - Fy) \in R_{ue}$, akkor $(u, e) \in L_{pe}^{2n}$, $y = F^{-1}(u - e) \in L_{pe}^n$ és $(u, y) \in R_{uy}$ L_p -stabil. Megjegyezzük azonban, hogy más összeköttetés esetén, amikor F nem invertálható, általában az (u, e) stabilitásból nem következik az (u, y) stabilitás.

9.1 Tétel (kis erősítés tétel): Tekintsük a 9.1. ábra szerinti visszacsatolt rendszert és legyen $p \in [1, \infty]$. Tegyük fel továbbá, hogy G_1, G_2 kauzális és L_p -stabil wb (vagy wfg) nemlineáris leképezések, $\gamma_{1p} := \gamma_{1p}(G_1)$ és $\gamma_{2p} := \gamma_{2p}(G_2)$. Akkor a 9.1. ábra szerinti visszacsatolt rendszer L_p -stabil, ha

$$\gamma_{1p} \cdot \gamma_{2p} < 1. \quad (9.8)$$

Bizonyítás: Csak a wb részt bizonyítjuk. Világos, hogy

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}. \quad (9.9)$$

Mivel G_i kauzális és L_p -stabil wb, ezért ha $u_i \in L_p^{n_i}$, akkor $e_1, y_2 \in L_p^{n_1}$ és $e_2, y_1 \in L_p^{n_2}$, továbbá (9.9) felhasználásával

$$\begin{pmatrix} \|y_1\|_{T_p} \\ \|y_2\|_{T_p} \end{pmatrix} \leq \begin{bmatrix} \gamma_{1p} & 0 \\ 0 & \gamma_{2p} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \|e_1\|_{T_p} \\ \|e_2\|_{T_p} \end{pmatrix}, \quad \forall T \geq 0, \quad (9.10)$$

$$\begin{pmatrix} \|e_1\|_{T_p} \\ \|e_2\|_{T_p} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \|u_1\|_{T_p} \\ \|u_2\|_{T_p} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \|y_1\|_{T_p} \\ \|y_2\|_{T_p} \end{pmatrix}, \quad \forall T \geq 0. \quad (9.11)$$

Helyettesítsük be (9.10)-et (9.11)-be, akkor kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} \|e_1\|_{T_p} \\ \|e_2\|_{T_p} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \|u_1\|_{T_p} \\ \|u_2\|_{T_p} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{2p} \\ \gamma_{1p} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \|e_1\|_{T_p} \\ \|e_2\|_{T_p} \end{pmatrix}, \quad \forall T \geq 0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\gamma_{2p} \\ -\gamma_{1p} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \|e_1\|_{T_p} \\ \|e_2\|_{T_p} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \|u_1\|_{T_p} \\ \|u_2\|_{T_p} \end{pmatrix}, \quad \forall T \geq 0. \quad (9.12)$$

Másrészt, ha $\gamma_{1p}\gamma_{2p} < 1$, akkor az utolsó összefüggésben szereplő $M_{2 \times 2}$ mátrix nemszinguláris:

$$M^{-1} = \frac{1}{1 - \gamma_{1p}\gamma_{2p}} \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{2p} \\ \gamma_{1p} & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.13)$$

Felhasználjuk, hogy ha $x \leq y$ a vektorok körében értelmezett részben rendezés szerint, akkor $x_j \leq y_j$, és ha $a_{ij} \geq 0$, akkor ebből következik $a_{ij}x_j \leq a_{ij}y_j$ és $\sum_j a_{ij}x_j \leq \sum_j a_{ij}y_j$. Ezért ha az A mátrix nemnegatív elemű, akkor $Ax \leq Ay$ is teljesül a vektorok körében érvényes részben rendezés szerint. Alkalmazzuk ezt az összefüggést az M^{-1} pozitív elemű mátrixra, akkor kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} \|e_1\|_{T_p} \\ \|e_2\|_{T_p} \end{pmatrix} \leq \frac{1}{1 - \gamma_{1p}\gamma_{2p}} \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{2p} \\ \gamma_{1p} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \|u_1\|_{T_p} \\ \|u_2\|_{T_p} \end{pmatrix}, \quad \forall T \geq 0. \quad (9.14)$$

Ha $u_i \in L_p^{n_i}$, $i = 1, 2$, akkor

$$\begin{pmatrix} \|u_1\|_{T_p} \\ \|u_2\|_{T_p} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \|u_1\|_p \\ \|u_2\|_p \end{pmatrix}, \quad \forall T \geq 0, \quad (9.15)$$

és (9.15)-öt behelyettesítve (9.14)-be következik

$$\begin{pmatrix} \|e_1\|_{T_p} \\ \|e_2\|_{T_p} \end{pmatrix} \leq \frac{1}{1 - \gamma_{1p}\gamma_{2p}} \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{2p} \\ \gamma_{1p} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \|u_1\|_p \\ \|u_2\|_p \end{pmatrix}, \quad \forall T \geq 0. \quad (9.16)$$

Mivel azonban (9.16) jobb oldala nem függ T -től, ezért $e_i \in L_p^{n_i}$, $i = 1, 2$ és (9.10) alapján következik

$$\begin{pmatrix} \|y_1\|_{T_p} \\ \|y_2\|_{T_p} \end{pmatrix} \leq \frac{1}{1 - \gamma_{1p}\gamma_{2p}} \begin{bmatrix} \gamma_{1p} & \gamma_{1p}\gamma_{2p} \\ \gamma_{1p}\gamma_{2p} & \gamma_{2p} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \|u_1\|_p \\ \|u_2\|_p \end{pmatrix}, \quad \forall T \geq 0, \quad (9.17)$$

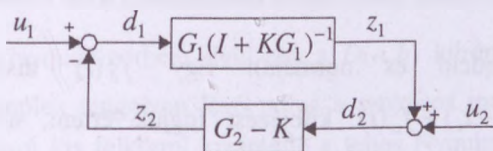
(9.17)-ből pedig következik $y_1 \in L_p^{n_2}$, $y_2 \in L_p^{n_1}$. Ezért (9.16-17) alapján a zárt rendszer L_p -stabil wb.

9.2 Tétel (hurok transzformációs tétel): Tekintsük a 9.1. ábra szerinti visszacsatolt rendszert és legyen $p \in [1, \infty]$. Tegyük fel továbbá, hogy G_2 kauzális és L_p -stabil wb. Akkor a rendszer L_p -stabil wb, ha létezik K kauzális és L_p -stabil wb lineáris operátor, amellyel teljesülnek a következő feltételek:

i) $G_1(I + KG_1)^{-1}$ kauzális és L_p -stabil wb,

ii) $\gamma_p[G_1(I + KG_1)^{-1}] \cdot \gamma_p[G_2 - K] < 1$

A 9.2 tételnek megfelelő rendszert a 9.2. ábra mutatja. A tételt nem bizonyítjuk, a bizonyítás a 9.1 kis erősítés tételén alapul.



9.2. ábra. A hurok transzformációs tétel illusztrációja

Definíció (szektor típusú nemlinearitás): Legyen $\Phi: [0, \infty] \times R^m \rightarrow R^m$ időtől is függő nemlinearitás és $a, b \in R^1$, $a < b$. Azt mondjuk, hogy Φ az $[a, b]$ szektorhoz tartozik, ha $\Phi(t, 0) \equiv 0$, $\forall t \geq 0$ és

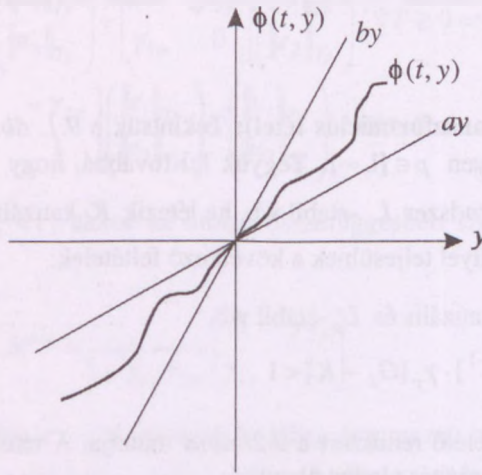
$$[\Phi(t, y) - ay]^T [by - \Phi(t, y)] \geq 0, \forall t \geq 0, \forall y \in R^m \text{ esetén.} \quad (9.18)$$

Megjegyzés: Ha $m = 1$, tehát $\Phi(t, y)$ skálárértékű, akkor (9.18) azt fejezi ki, hogy $\Phi(t, y)$ gráfja két egyenes közé esik, lásd 9.3. ábra. Legyen $\sigma := y$, akkor

$$a \leq \frac{\Phi(t, y)}{\sigma} \leq b, \forall \sigma \neq 0, \forall t \geq 0, \quad (9.19a)$$

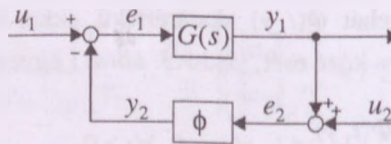
vagy σ^2 -tel végigszorozva

$$a\sigma^2 \leq \sigma\Phi(t, y) \leq b\sigma^2, \forall \sigma \in R^1, \forall t \geq 0. \quad (9.19b)$$



9.3. ábra. Szektor típusú nemlinearitás a skalár esetben

Definíció (disztribúció és normája): Egy $f_d(t)$ disztribúció alatt az $f_d(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \delta(t - t_i) + f_a(t)$ kifejezést fogjuk érteni, ahol $\delta(t)$ a Dirac-függvény és $f_a \in L_1$. A disztribúció normája $\|f_d\| := \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i| + \int_0^{\infty} |f_a(t)| dt < \infty$. Két disztribúció konvolúciója $(f * g)(t) := \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$, ahol $\delta(t - \tau_1) * \delta(t - \tau_2) = \delta(t - \tau_1 - \tau_2)$ és $\delta(t - \tau) * f_a(t) = f_a(t - \tau)$. A disztribúciók a fenti normával egy A Banach-teret alkotnak, amelynek L_1 egy altere. $\hat{A}$ fogja jelölni azon $F_d(s)$ függvények terét, amelyek $f_d(t) \in A$ disztribúciók Laplace-transzformáltjai.



9.4. ábra. A kör kritérium tétel esetén feltételezett SISO rendszer

Megjegyzés: Ha $F_d(s) \in \hat{A}$ racionális és szigorúan proper, akkor $F_d(s)$ minden pólusa a nyílt bal félsíkon van, mivel ekkor $F_d(s) = \mathcal{F}\{f_m(t)\}$ és $f_m(t) \in L_1$ (esetleg idővel súlyozott) exponenciális időfüggvények szuperpozíciója.

9.3 Tétel (kör kritérium): Tekintsük a 9.4. ábra szerinti SISO rendszert. Az előrevezető ágban $G(s) = G_d(s) + G_r(s)$ lineáris, időinvariáns rendszer átviteli függvénye, ahol $G_d(s) \in \hat{A}$ és $G_r(s)$ racionális, szigorúan proper átviteli függvény.

Az első tag súlyfüggvénye csak $g_d(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \delta(t - iT) + g_m(t)$ alakú disztribúció lehet, ahol $T > 0$ fix érték. A visszacsatoló ágban szereplő $(\Phi x)(t) := \phi(t, x(t))$ folytonos függvény az $[a, b]$ szektorhoz tartozó szektor típusú nemlinearitás. Jelölje $D(a, b)$ azt a kört (belsejét és határát) a komplex síkon, amelynek centruma a valós tengelyen van, és átmérőjének két végpontja $-1/a$ és $-1/b$. Akkor a visszacsatolt rendszer L_2 -stabil wb, ha a következő esetek valamelyike teljesül:

1. eset: $ab < 0$ és

- i) $G(s)$ teljes Nyquist-görbéje kívül esik a $D(a, b)$ körön és nem érinti a kör határát (komplex tengelyen lévő pólus a szokásos módon egy $s = \rho e^{j\varphi}$, $\rho \rightarrow 0$ sugarú kis félkörrel kizárando a teljes Nyquist-görbe felrajzolása-kor), azaz

$$\inf_{\omega \in \mathbb{R}^1, z \in D(a, b)} |G(j\omega) - z| > 0.$$

- ii) Jelölje $G(s)$ pozitív valós részű pólusainak számát P_+ és Arg a fázisszöget, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Arg}[G(j2\pi n/T) - z] - \text{Arg}[G(-j2\pi n/T) - z] = 2\pi P_+, \quad \forall z \in D(a, b).$$

2. eset: $0 = a < b$ és

- i) $G(s) \in \hat{A}$,

- ii) $G(s)$ teljes Nyquist-görbéjére teljesül $\inf_{\omega \in \mathbb{R}^1} \text{Re } G(j\omega) > -\frac{1}{b}$.

3. eset: $a < 0 < b$ és

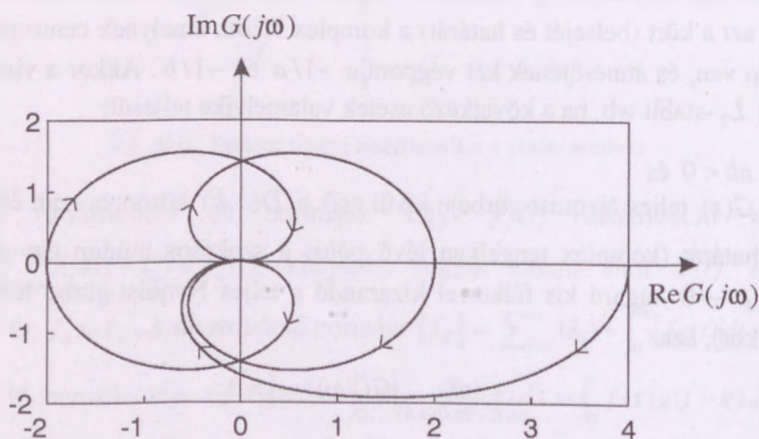
- i) $G(s) \in \hat{A}$,

- ii) $G(s)$ teljes Nyquist-görbéje benne marad a $D(a, b)$ körben és nem érinti a kör határát.

A bizonyítás a 9.2 tételen alapul. Legyen ugyanis $r = (b - a)/2$ és $k = (b + a)/2$, akkor $b = k + r$, $a = k - r$ és a $\sigma \mapsto \varphi(t, \sigma) - k\sigma$ leképezés a $[-r, r]$ szektorhoz tartozik. Alkalmazható a 9.2 hurok transzformációs tétel $K = kI$ és $p = 2$ választással, kombinálva a 9.1 kis erősítés tétellel, amely szerint $\sup_{\omega \in \mathbb{R}^1} |G(j\omega)| < r^{-1}$. Mivel

$\Phi - K$ a $[-r, r]$ szektorhoz tartozik, ezért L_2 -erősítése legfeljebb r . Ezért a rendszer L_2 stabil wb feltéve, hogy a) $G/(1 + kG) \in \hat{A}$ és b) $\sup_{\omega} \frac{|G(j\omega)|}{1 + kG(j\omega)} r < 1$. A bi-

zonyítás további lépései abból állnak, hogy meg kell mutatni, hogy a 9.3 tétel feltételeiből következnek az a) és b) feltételek.



9.5. ábra. Teljes Nyquist-görbe a kör kritériumot illusztráló példa esetén

9.1 Példa: Tekintsük a 9.4. ábra szerinti rendszert, és legyen

$$\begin{aligned} G(s) &= e^{-0.1s} \left[\frac{s+2}{s+1} + e^{-0.2s} \frac{s+4}{s+2} \right] = e^{-0.1s} \left[1 + \frac{1}{s+1} + e^{-0.2s} \left(1 + \frac{2}{s+2} \right) \right] = \\ &= e^{-0.1s} + e^{-0.3s} + \frac{1}{s+1} e^{-0.1s} + \frac{2}{s+2} e^{-0.3s} \in \hat{A}. \end{aligned}$$

1. A teljes Nyquist-görbéből (lásd 9.5. ábra) megállapítható, hogy $\gamma_2(G) = \sup_{\omega} |G(j\omega)| = 4$, ezért a 9.1 kis erősítés tétel szerint az L_2 -stabilitáshoz a Φ nemlinearitás ki kell, hogy elégítse a $\gamma_2(\Phi) = 1/\gamma_1(G) = 0.25$ feltételt, ami

memória nélküli szektor típusú nemlinearitás esetén teljesül az $[a, b] = [-0.25 + \varepsilon, 0.25 - \varepsilon]$ szektorban ($\varepsilon > 0$ kis szám).

2. A teljes Nyquist-görbe végig benne marad a $D(a, b)$ kör belsejében, ha $-1/b < -2$ és $4 < -1/a$, azaz $-0.25 < a < b < 0.5$. A 9.3 tétel 3. esete szerint ezért a rendszer L_2 -stabilitáshoz a Φ memória nélküli szektor típusú nemlinearitásnak ki kell elégítenie az $[a, b] = [-0.25 + \varepsilon, 0.5 - \varepsilon]$ feltételt, ami szélesebb felső határú szektort enged meg, mint a kis erősítés tétel szerint.
3. Az 1. eset is teljesül, továbbá $P_+ = 0$. Ezért a teljes Nyquist-görbének tilos metszenie és körülvennie a $D(a, b)$ körlemezét. Ez akkor teljesül, ha $-1/a < -1/b < -2$, azaz $0 < a < b < 0.5$, vagy $4 < -1/a < -1/b$, azaz $-0.25 < a < b < 0$. A két feltétel egyesítése most is $[a, b] = [-0.25 + \varepsilon, 0.5 - \varepsilon]$, tehát az előző feltétel tovább már nem élesíthető a 9.3 tétel 1. esetének felhasználásával.

9.1.3 Passzív rendszer

Ha egy nemlineáris villamos áramkör bemenetei feszültség- és áramgenerátorok, kimenetei az azoktól függő feszültségek és áramok, akkor $\langle y(t), u(t) \rangle$ a pillanatnyi teljesítmény. Az áramkör passzív, ha a bemeneti energia (a teljesítmény idő szerinti integrálja) nem haladja meg az áramkörben tárolt energia változását. Ha az áramkör minden induktív és kapacitív eleme kezdetben töltésmentes, akkor az áramkört akkor tekintjük passzívnak, ha $\int_0^T \langle y(t), u(t) \rangle dt \geq 0$, $\forall T \geq 0$ esetén. Ennek az elvnek általánosítása a passzív rendszer. A passzivitást a skalárszorzat miatt csak L_2 -ben definiálhatjuk.

Definíció (passzív rendszer): Legyen $G : L_{2e}^{n_1} \rightarrow L_{2e}^{n_2}$. Azt mondjuk, hogy

- i) G passzív, ha $\exists \beta \in \mathbb{R}^1$, hogy $\langle x, Gx \rangle_T = \int_0^T \langle x(t), (Gx)(t) \rangle dt \geq \beta$, $\forall T \geq 0, \forall x \in L_{2e}$ esetén,
- ii) G szigorúan passzív, ha $\exists \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}^1$, hogy $\langle x, Gx \rangle_T \geq \alpha \|x\|_{L_2}^2 + \beta$, $\forall T \geq 0, \forall x \in L_{2e}$ esetén.

Megjegyzés: Mivel $x=0 \in L_{2e}^{n_1}$ választás esetén a skalárszorzat nulla, ezért $0 \geq \beta$.

9.4 Tétel (első passzivitási tétel, passzív előrevezető ág és szigorúan passzív visszacsatolás): Tekintsük a 9.1. ábra szerinti rendszert $u_2 = 0$ esetén. Ha $G_1, G_2 \in L_{2e}$,

G_1 passzív, G_2 szigorúan passzív és L_2 -stabil wfg, akkor a zárt rendszer L_2 -stabil wfg.

Bizonyítás: $u_2 = 0$ miatt $e_1 = u_1 - G_2 e_2$ és $e_2 = G_1 e_1$. A feltételek szerint

$$\begin{aligned} \langle e_1, G_1 e_1 \rangle_T &\geq 0, \quad \langle e_2, G e_2 \rangle_T \geq \alpha_2 \|e_2\|_{2T}^2 + \beta_2, \\ \langle u_1, G e_1 \rangle_T &= \langle e_1, G_1 e_1 \rangle_T + \langle G_2 e_2, e_2 \rangle_T \geq \alpha_2 \|e_2\|_{2T}^2 + \beta_2. \end{aligned}$$

A Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség szerint ebből következik

$$\|u_1\|_{T2} \cdot \|G_1 e_1\|_{T2} \geq \alpha_2 \|G_1 e_1\|_{2T}^2 + \beta_2,$$

ahonnan $\alpha_2 > 0$ és $\beta_2 \leq 0$ miatt teljes négyzetre kiegészítéssel következik

$$\begin{aligned} \left(\|G_1 e_1\|_{T2} - \frac{1}{2\alpha_2} \|u_1\|_{T2} \right)^2 &\leq \frac{1}{4\alpha_2^2} \|u_1\|_{T2}^2 - \frac{\beta_2}{\alpha_2} \leq \left(\frac{\|u_1\|_{T2}}{2\alpha_2} + \sqrt{\frac{|\beta_2|}{\alpha_2}} \right)^2 \\ \|G_1 e_1\|_{T2} = \|y_1\|_{T2} &\leq \frac{\|u_1\|_{T2}}{\alpha_2} + \sqrt{\frac{|\beta_2|}{\alpha_2}} =: \gamma_1 \|u_1\|_{T2} + \delta_2 \end{aligned}$$

Mivel a G_2 operátor a visszacsatoló ágban L_2 -stabil wfg és $y_1 = G_1 e_1$, ezért $\exists \gamma_2, \delta_2 \geq 0$, hogy

$$\|G_2 y_1\|_{T2} \leq \gamma_2 \|G_1 e_1\|_{T2} + \delta_2 \leq \gamma_2 (\gamma_1 \|u_1\|_{T2} + \delta_2) + \delta_2 =: \gamma_2^* \|u_1\|_{T2} + \delta_2^*$$

Ezért az R_{uy} reláció L_2 -stabil wfg, amiből következik, hogy ha az előrevezető ág passzív és a visszacsatoló ág szigorúan passzív és L_2 -stabil wfg, akkor a visszacsatolt rendszer L_2 -stabil wfg.

Megjegyzés: A tétel igaz marad akkor is, ha G_1 és G_2 szerepet cserél, azaz G_1 szigorúan passzív és L_2 -stabil wfg, G_2 pedig passzív.

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételeket, illetve lemmákat, amelyek segítségével szolgálhatnak bonyolultabb stabilitáskérdések megválaszolásánál.

9.5 Tétel (második passzivitási tétel, egyik rendszer sem szükségképpen passzív a hurokban [24]): Tekintsük a 9.1. ábra szerinti visszacsatolt rendszert. Tegyük fel, hogy létezik ε_i, δ_i , $i = 1, 2$, hogy teljesül

$$\langle x, G_i x \rangle_T \geq \varepsilon_i \|x\|_{T^2}^2 + \delta_i \|G_i x\|_{T^2}^2, \quad \forall T \geq 0, \quad \forall x \in L_{2e}, \quad i=1,2. \quad (9.20)$$

Akkor a rendszer L_2 -stabil wb, ha $\delta_1 + \varepsilon_2 > 0$, $\delta_2 + \varepsilon_1 > 0$.

9.6 Tétel (Popov-kritérium [24]): Tekintsük a 9.1. ábra szerinti SISO visszacsatolt rendszert abban a speciális esetben, amikor $G_1 = G(s)$ lineáris, a $g(t)$ súlyfüggvénynek létezik disztribúció-deriváltja, $g, \dot{g} \in A$, továbbá $G_2 = \Phi$ statikus nemlinearitás, amelynek alakja $(\Phi x)(t) = \phi[x(t)]$, ahol ϕ a $[0, b]$ szektorhoz tartozik, nem függ az időtől és b végtelen is lehet. Tegyük fel, hogy létezik $q \geq 0$ konstans, hogy

$$\inf_{\omega \in \mathbb{R}^1} \operatorname{Re}[(1 + j\omega q)G(j\omega)] + \frac{1}{b} = \beta > 0. \quad (9.21a)$$

Akkor az e_1, e_2, y_1, y_2 jelek L_2 -höz tartoznak, hacsak az $u_1, u_2, \dot{u}_2$ jelek L_2 -beliek. Létezik továbbá $\gamma < \infty$ konstans, hogy

$$\|e_i\|_2, \|y_i\|_2 \leq \gamma(\|u_1\|_2 + \|u_2\|_2 + \|\dot{u}_2\|_2), \quad i=1,2. \quad (9.21b)$$

Megjegyzés: Ha $q > 0$, akkor a Popov-kritérium (ahol a nemlinearitás nem függhet az időtől) erősebb, mint a kör kritérium a 2. esetben (amelynél azonban a nemlinearitás függhet az időtől).

9.2 Szigorúan pozitív valós (SPR) lineáris rendszerek

A szigorúan pozitív valós rendszerek szoros kapcsolatban állnak a passzív rendszerekkel és a minimumfázisú rendszerekkel. Fontos szerepet töltenek be az adaptív algoritmusok konstrukciójában és a stabilitás megválaszolásában.

9.7 Tétel (Kalman–Yacubovitch [24]): Tekintsük az

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t), \\ z(t) &= \Phi(t, y(t)), \\ u(t) &= -z(t) \end{aligned} \quad (9.22)$$

rendszert, ahol $x \in \mathbb{R}^n$, $u, y \in \mathbb{R}^m$, $m < n$, és legyen $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$.

Teljesüljenek a következő feltételek:

- i) A Hurwitz-mátrix (stabil),
- ii) (A, B) irányítható, (A, C) megfigyelhető,

iii) $G(\cdot)$ szigorúan pozitív valós átviteli függvény mátrix, azaz

$$\inf_{\omega \in \mathbb{R}^+} \lambda_{\min}[G(j\omega) + G^*(j\omega)] > 0, \quad (9.23)$$

ahol $*$ jelöli a konjugált transzponáltat és $\lambda_{\min}$ a szögletes zárójelben álló Hermit-féle mátrix minimális sajátértéke.

Akkor létezik $P_{n \times n}$ szimmetrikus, pozitív definit mátrix, valamint $Q_{m \times n}$ és $W_{m \times m}$ mátrixok és $\varepsilon > 0$ konstans, hogy teljesül

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= -\varepsilon P - Q^T Q, \\ B^T P + W^T Q &= C, \\ W^T W &= D + D^T. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Megjegyzés:

- i) Ha csak a gyengébb $G(j\omega) + G^*(j\omega) > 0$ (pozitív definit) $\forall \omega$ esetén feltétel teljesül, de a határérték nem feltétlenül határozottan pozitív (nulla is lehet), akkor csak annyi mondható, hogy $A^T P + PA = -Q^T Q$, ahol a jobb oldal csak negatív szemidefinit. Ezzel szemben, ha a határérték is határozottan pozitív, akkor a jobb oldalon $-\varepsilon P - Q^T Q$ negatív definit, mivel A Hurwitz-mátrix (stabil).
- ii) SISO esetben $m=1$, ezért $Q_{1 \times n} = q^T$ és $W^T W = D + D^T = 2d \Rightarrow W_{1 \times 1} = \sqrt{2d}$. Ekkor $G(j\omega) + G^*(j\omega) = 2 \operatorname{Re} G(j\omega)$.

9.8 Tétel (harmadik passzivitási tétel [24]): Teljesüljenek a 9.7 tétel i)-iii) feltételei és iv) tartozzon Φ a $[0, \infty)$ szektorhoz, azaz $\Phi(t, 0) = 0$, $\forall t \geq 0$ és $y^T \Phi(t, y) \geq 0$, $\forall t \geq 0$, $\forall y \in \mathbb{R}^m$. Akkor a (9.22) rendszer globálisan és exponenciálisan stabil.

Definíció (SISO eset): Azt mondjuk, hogy $G(s)$ szigorúan pozitív valós (SPR, strictly positive real), ha analitikus a $C_+ = \{s: \operatorname{Re} s \geq 0\}$ zárt jobbfélsíkon és $\operatorname{Re} G(j\omega) > 0$, $\forall \omega$.

Megjegyzés:

1. Ha $G(s)$ SPR, akkor következik az analitikus tulajdonságból, hogy $\operatorname{Re} s > 0 \Rightarrow \operatorname{Re} G(s) > 0$. Speciálisan $G(\infty) = D = d \geq 0$.
2. Ha $G(s)$ SPR, akkor a $G(j\omega)$ Nyquist-görbéje az első és a negyedik térdnegyedben fekszik, ezért a fázisszög $|\varphi(\omega)| \leq \pi/2$ érvényes. Ha $d = 0$, akkor az aszimptotikus fázisszög $\omega = \infty$ esetén $\pi/2$, ezért a pólustöbblet (relatív

fokszám) 1. SPR átviteli függvény relatív fokszáma csak 1 ($d=0$) vagy 0 ($d>0$) lehet.

3. SPR átviteli függvények minimumfázisúak, azaz nincs zérushelyük a nyílt jobbfélsíkon.
4. SPR átviteli függvények passzív rendszereket modelleznek. Pozitív értékű ellenállásokból, kapacitásokból és induktivitásokból felépülő passzív hálózatok átviteli függvényei ugyanis SPR tulajdonságúak, amiből következik a passzivitás:

$$\begin{aligned} \langle y, u \rangle_T &= \int_0^\infty \langle y_T, u_T \rangle dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty G(j\omega) U_T(j\omega) U_T(-j\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \underbrace{\{\operatorname{Re} G(j\omega)\}}_{\geq 0} |U_T(j\omega)|^2 d\omega \geq 0 \quad (\text{passzivitás, } \beta = 0). \end{aligned}$$

A következő lemma közvetlenül következik a SISO rendszer ún. szabályozó alakjából, lásd a könyv I. kötet 6. fejezetét [1].

9.1 Lemma (Kalman–Yacubovitch): Legyen $A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$ stabil polinom. Akkor megkonstruálható $G(s) = B(s)/A(s)$ SPR átviteli függvény a következő módon:

$$\text{i) } A = \begin{bmatrix} -a_1 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ii) $A^T P + PA = -Q$ és $P > 0$, $Q > 0$, ahol $Q > 0$ megválasztható, P pedig a Ljapunov-egyenlet megoldása.

iii) $B(s) = s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n$, ahol $(b_1, \dots, b_n) := e_1^T P$ (azaz P első sora).

9.2 Lemma (Barbalat-lemmák [27]):

i) **Barbalat-lemma:** Ha $f \in L_\infty$, $\dot{f} \in L_\infty$ és $f \in L_2$, akkor $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.

ii) **Barbalat-lemma integrál alakja:** Ha f egyenletesen folytonos és

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |f(\tau)| d\tau < \infty, \text{ akkor } \lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| = 0.$$

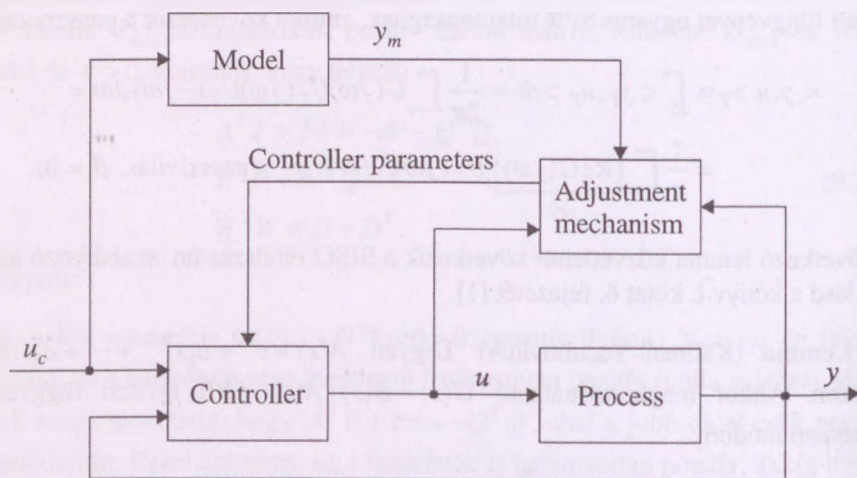
iii) **Kiterjesztett Barbalat-lemma:** Ha létezik $\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)|$ és $f(t)$ differenciálható, továbbá

$$\dot{f}(t) = g_1(t) + g_2(t), \text{ ahol } g_1(t) \text{ egyenletesen folytonos és } \lim_{t \rightarrow \infty} g_2(t) = 0,$$

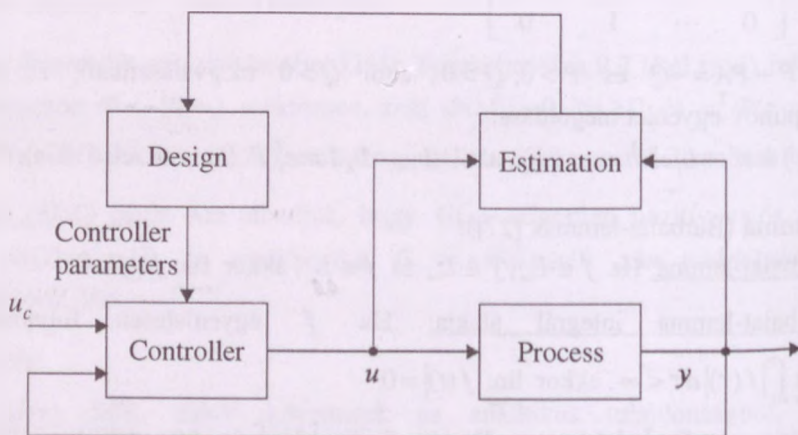
$$\text{akkor } \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = 0 \text{ és } \lim_{t \rightarrow \infty} g_1(t) = 0.$$

9.3 SISO adaptív irányítások

Az adaptív irányítások két jellegzetes osztályát alkotják a modellreferenciás adaptív irányítások (MRAC, model reference adaptive control), lásd 9.6. ábra és az önhangoló adaptív irányítások (STAC, self-tuning adaptive control), lásd 9.7. ábra. Először néhány egyszerű módszert fogunk bemutatni SISO rendszerek esetén [28].



9.6. ábra. Modellreferenciás adaptív irányítás (MRAC) elvi sémája



9.7. ábra. Önhangoló adaptív irányítás (STAC) elvi sémája

9.3.1 Erősítéshangolás

Előbb egy egyszerű példával, a körerősítés adaptív hangolásával foglalkozunk, bemutatván a paraméterhangoláskor várható stabilitási problémákat.

MIT szabály

Legyen a folyamat $\vartheta G(s)$, ahol a ϑ erősítés változik, a referencia modell pedig $\vartheta_0 G(s)$. Az MIT szabály a referencia modelltől való eltérés $e(t)$ aktuális hibájának négyzetét akarja minimalizálni, ezért a negatív gradiens irányában hangolja az erősítést:

$$\begin{aligned} e(t) &:= y_m(t) - y(t) \\ F &= \frac{1}{2} e^2(t) \rightarrow \min \\ \text{grad } F &= e \frac{\partial e}{\partial \vartheta} \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= -\gamma' e \frac{\partial e}{\partial \vartheta} \quad (\gamma' > 0: \text{lépésköz}) \end{aligned} \quad (9.25)$$

Jelölje $p := \frac{d}{dt}$ az idő szerinti differenciálás operátorát és $u_c := r$ az alapjelet. Akkor

$$\begin{aligned} e &= y_m - y = \vartheta_0 G(p) u_c - \vartheta G(p) u_c = G(p)(\vartheta_0 - \vartheta) u_c, \\ \frac{\partial e}{\partial \vartheta} &= -G(p) u_c = -y_m / \vartheta_0, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \gamma' e y_m / \vartheta_0 =: \gamma e y_m \quad (\text{MIT szabály, gradiens módszer}). \end{aligned} \quad (9.26)$$

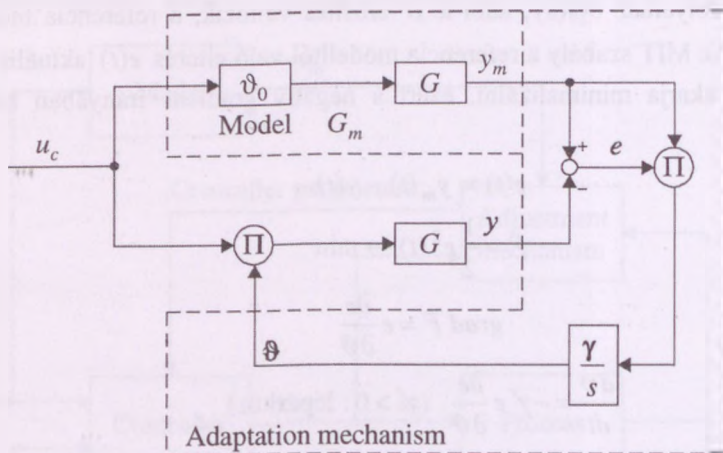
9.2 Példa: Legyen $G(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_2}$, akkor

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_m}{dt^2} + a_1 \frac{dy_m}{dt} + a_2 y_m &= \vartheta_0 u_c, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y &= \vartheta u_c, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \gamma (y_m - y) y_m, \end{aligned} \quad (9.27)$$

ahonnan a második egyenlet differenciálása és a deriválás szorzat-szabályának alkalmazása után kapjuk, hogy

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + a_1 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_2 \frac{dy}{dt} + \gamma u_c(t) y_m(t) y(t) = \vartheta \frac{du_c}{dt} + \gamma u_c(t) y_m^2(t). \quad (9.28)$$

Tekintsük a 9.8. ábrát.



9.8. ábra. MIT szabály szerinti erősítéshangolás sémája

Először kapcsoljuk le az adaptációs mechanizmust, adjunk konstans u_{c0} értéket a bemenetre és várjuk meg, amíg a referencia modell kimenete az y_{m0} értéken stabilizálódik. Ezután kapcsoljuk be az adaptációt, de $u_c = u_{c0}$ és ezért $y_m = y_{m0}$ is maradjon konstans. Mivel ekkor a (9.28) szerinti rendszer időinvariáns lineáris rendszer, amelynek egyensúlyi pontja $y_0 = y_{m0} = \vartheta_0 u_{c0} / a_2$, ezért a Hurwitz-kritérium szerint stabilitásának feltétele

$$a_1 a_2 > \gamma u_{c0} y_{m0} = \frac{\gamma'}{a_2} (u_{c0})^2, \quad (9.29)$$

ami biztosan nem teljesül, ha γ vagy u_{c0} elég nagyra lett választva. Ezért stabil és instabil régiók várhatók az MIT szabály alkalmazásakor. Erről könnyen meggyőződhetünk, ha $a_1 = a_2 = \vartheta_0 = 1$ esetén szimulációs vizsgálatokat végzünk $\gamma = 0.1$ esetén periódikus négyszögjelet választva $u_c(t)$ -nek, amelynek amplitudója a) $u_c = \pm 0.1$, b) $u_c = \pm 0.9$ és c) $u_c = \pm 4$, végigpásztázva ezzel a lassú és gyors konvergencia, valamint az instabil hangolás eseteit.

Az egyszerű gradiens módszernél jobb eredmény várható, ha a paraméter változásának nagyságát u_c nagyságától függetlenné tesszük, figyelembe véve, hogy

$$\frac{\partial e}{\partial \vartheta} = -G(p)u_c :$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\gamma \operatorname{sat} \left(\frac{e \frac{\partial e}{\partial \vartheta}}{\alpha + \left(\frac{\partial e}{\partial \vartheta} \right)^T \left(\frac{\partial e}{\partial \vartheta} \right)}, \beta \right), \quad (9.30)$$

ahol $\operatorname{sat}(u, \beta)$ a telítési jelleggörbe (saturation) függvény.

Erősítéshangolás a Ljapunov-elmélet szerint

Legyen a rendszer és a referencia modell közötti hiba $e = G(p)(\vartheta_0 - \vartheta)u_c$. Legyen $G(s)$ aszimptotikusan stabil és állapotteres realizációja (A, B, C) , akkor

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + B(\vartheta_0 - \vartheta)u_c, \\ e &= Cx. \end{aligned} \quad (9.31)$$

Az aszimptotikus stabilitás miatt $\exists P > 0, Q > 0$, hogy P megoldása a $A^T P + PA = -Q$ Ljapunov-egyenletnek. Legyen V a Ljapunov-függvény, akkor

$$V := \frac{1}{2} \left(\gamma \langle Px, x \rangle + (\vartheta_0 - \vartheta)^2 \right), \quad (9.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\gamma}{2} \left(\langle Px, \frac{dx}{dt} \rangle + \langle P \frac{dx}{dt}, x \rangle \right) - (\vartheta_0 - \vartheta) \frac{d\vartheta}{dt} = \\ &= -\frac{\gamma}{2} \langle Qx, x \rangle + (\vartheta_0 - \vartheta) \left(-\frac{d\vartheta}{dt} + \gamma u_c B^T Px \right). \end{aligned} \quad (9.33)$$

Ezért ha az adaptációs törvény

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \gamma u_c B^T Px, \quad (9.34)$$

akkor $\frac{dV}{dt} < 0$ (negatív definit), és ezért $x(t) \rightarrow 0$, amiből következik $e(t) = Cx(t) \rightarrow 0$. Bár az $e(t)$ hiba nullához tart, ebből nem szükségképpen következik, hogy ϑ is tart ϑ_0 -hoz.

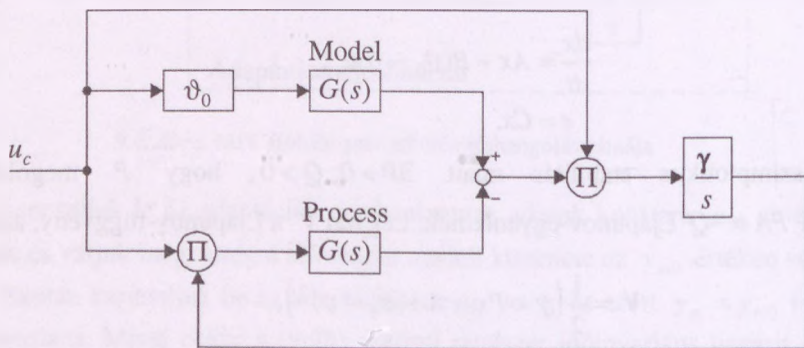
Az adaptációs törvény nem használható, ha x nem mérhető. Ha azonban $G(s)$ SPR, akkor a Kalman–Yacubovitch lemma szerint $B^T P = C$ is biztosítható, és így $e = Cx$ miatt a $\frac{d\vartheta}{dt} = \gamma u_c e$ adaptációs törvényhez jutunk.

Szigorúan pozitív valós rendszer erősítéshangolása

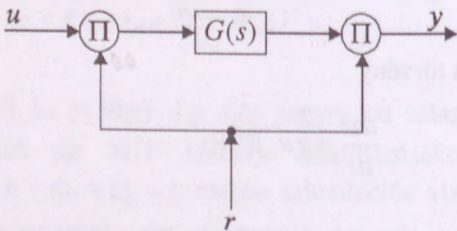
Legyen $G(s)$ SPR és $G^{-1}(s)$ L_2 -stabil. Akkor az MRAC szabályozás hibája nullához tart, ha az erősítés paraméterhangolási szabálya

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \gamma u_c e. \quad (9.35)$$

Az SPR erősítéshangolási szabálynak megfelelő sémát a 9.9. ábra illusztrálja.



9.9. ábra. SPR szabály szerinti erősítéshangolás sémája



9.10. ábra. Bemenetén és kimenetén véges energiájú jellel szorzott SPR rendszer sémája

Ha ϑ nem tartana ϑ_0 -hoz, miközben u_c perzisztensen gerjesztő, akkor ez ellentmondás lenne. Vegyük észre azt is, hogy az MRAC tetszőleges $\gamma > 0$ esetén stabil, ezért az adaptáció tetszőlegesen gyorsá tehető (de nagy jeleknél a beavatkozó szerv telítésbe kerülhet, ami a gyorsításnak határt szab).

A kiegészített hiba módszere

Ha $G(s)$ nem SPR, akkor próbálkozhatunk a kiegészített hiba (augmented error) módszerével, amely a modellezési hiba megfelelő szűrésén alapul. Faktorizáljuk az átviteli függvényt $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ alakban, ahol $G_1(s)$ SPR, G_1^{-1} L_2 -stabil és G_2 -nek nincs zérushelye a jobb félsíkon. Akkor az $e = y_m - y$ modellezési hiba felírható a következő alakban:

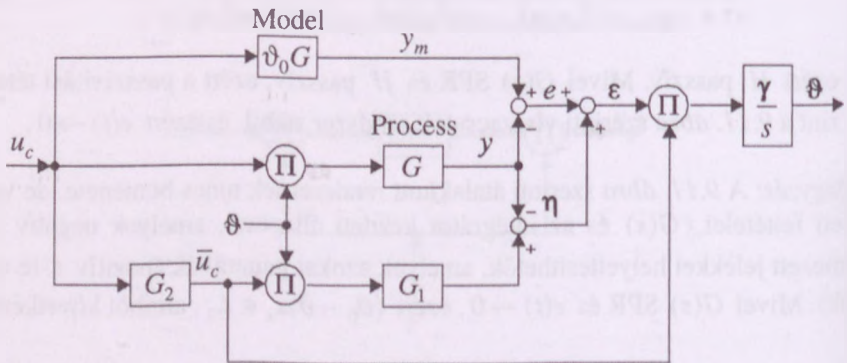
$$\begin{aligned} e &= G(\vartheta_0 - \vartheta)u_c = G_1G_2(\vartheta_0 - \vartheta)u_c = \\ &= G_1[G_2(\vartheta_0 - \vartheta)u_c + (\vartheta_0 - \vartheta)G_2u_c] = \\ &= G_1[(\vartheta_0 - \vartheta)G_2u_c] - G_1[(\vartheta_0 - \vartheta)G_2u_c - G_2(\vartheta_0 - \vartheta)u_c]. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Vezessük be a következő ε kiegészített hibát és η hibakiegészítést:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= e + \eta, \\ \eta &= -G_1(\vartheta_0 - \vartheta)G_2u_c + G(\vartheta_0 - \vartheta)u_c = G_1(\vartheta G_2u_c) - G\vartheta u_c. \end{aligned} \quad (9.39)$$

(Vegyük észre, hogy az η hibakiegészítés eltűnik, ha az ϑ paraméter konstans, mivel ekkor $G_1(\vartheta G_2u_c) = \vartheta G_1G_2u_c \Rightarrow \eta = 0$). Legyen a paraméterhangolási szabály

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \gamma \varepsilon (G_2u_c). \quad (9.40)$$



9.12. ábra. Hibakiegészítésen alapuló erősítéshangolás sémája

A hibakiegyezéséssel történő erősítéshangolás sémáját a 9.12. ábra mutatja. Mivel $G_1(s)$ SPR és $G_1^{-1} L_2$ -stabil, ezért $\varepsilon(t)$ tart a nullához és L_2 -stabil. Mivel az integrátor bemenete ekkor nullához tart, ezért az integrátor $\vartheta(t)$ kimenete szintén konvergál egy határértékhez, ezért $e(t)$ szintén tart nullához. Mivel $G_2(s)$ minimumfázisú, ezért "visszafelé" haladhatunk $G_2(s)$ -en, és ha u_c perzisztensen gerjesztő, akkor $\vartheta_0 - \vartheta$ is tart nullához.

9.3.2 Általános modellreferenciás adaptív irányítás

Az MRAC algoritmus konstrukciójakor a következő kérdéseket kell megválaszolni:

1. Mi a modellkövetést biztosító szabályozó struktúra?
2. Mi az $\varepsilon = G_1(p)\{\varphi^T(t)(\vartheta_0 - \vartheta)\}$ alakú hibamodell, ahol G_1 SPR és a jobb oldalon álló mennyiségek számíthatók?

Paraméterhangolási szabályként az SPR-szabályt választjuk:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \gamma \varphi \varepsilon \quad \text{vagy} \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \gamma \frac{\varphi \varepsilon}{\alpha + \varphi^T \varphi}. \quad (9.41)$$

Az irányítandó rendszert $A(p)y = B(p)u$ alakú lineáris rendszernek feltételezzük, ahol $p = d/dt$ a differenciálási operátor. Feltesszük még, hogy $B(s) = b_0 B^+(s)$, tehát a rendszer minimumfázisú, továbbá $B^- = b_0$ ismert előjelű konstans.

A referencia rendszer legyen ismert $A_m(p)y_m = B_m(p)u_c$ alakú, ahol $u_c := r$ a referencia jel (alapjel időfüggvény, command signal).

A szabályozó legyen a könyv I. kötetének 9. fejezetében [1] tárgyalt kétszabadságfokú szabályozóhoz hasonló folytonosidejű szabályozó, ahol A_0 a megfigyelő polinom:

$$\left. \begin{aligned} R &= R_1 B^+ \\ T &= A_0 B_m / b_0 \\ A R_1 + b_0 S &= A_0 A_m \end{aligned} \right\} \begin{aligned} gr A_m - gr B_m &\geq gr A - gr B \\ gr A_0 &\geq 2 gr A - gr A_m - gr B^+ - 1 \end{aligned} \quad (9.42)$$

$$u = \frac{T}{R} u_c - \frac{S}{R} y.$$

Tekintsük ezután a hibamodell levezetését:

$$\begin{aligned}
A_0 A_m y &= (AR_1 + b_0 S)y = AR_1 y + b_0 Sy = R_1 (Ay) + b_0 Sy = \\
&= R_1 Bu + b_0 Sy = R_1 b_0 B^+ u + b_0 Sy = b_0 (R_1 B^+ u + Sy) = \\
&= b_0 (Ru + Sy) \\
A_0 A_m y_m &= A_0 B_m u_c = b_0 Tu_c \\
e(t) &= y_m(t) - y(t) \\
A_0 A_m e &= b_0 Tu_c - b_0 (Ru + Sy) \Rightarrow \\
e &= \frac{b_0}{A_0 A_m} (Tu_c - Ru - Sy) \tag{9.43}
\end{aligned}$$

Mivel általában $b_0 / (A_0 A_m)$ nem SPR, ezért hibaszűrést alkalmazunk (filtering):

$$e_f = \frac{Q}{P} e = \frac{Q}{P} (y_m - y) \text{ szűrt hiba,} \tag{9.44a}$$

$$gr Q \leq gr (A_0 A_m) \text{ és } \frac{Q}{A_0 A_m} \text{ SPR.} \tag{9.44b}$$

Q megválasztása $A_0 A_m$ -hez történhet a 9.1 lemma szerint.

Válasszunk ezután egy $P = P_1 P_2$ stabil polinomot, ahol P_2 normalizált (monik) és $gr P_2 = gr R$. Akkor R/P felírható a következő alakban:

$$\frac{R}{P} = \frac{R - P_2 + P_2}{P_1 P_2} = \frac{1}{P_1} + \frac{R - P_2}{P}, \tag{9.45}$$

ahonnan következik, hogy

$$\begin{aligned}
e_f &= \frac{Q}{P} e = \frac{Q}{P} \cdot \frac{b_0}{A_0 A_m} (-Ru - Sy + Tu_c) = \\
&= \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} \left(-\frac{R}{P} u - \frac{S}{P} y + \frac{T}{P} u_c \right) = \\
&= \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} \left(-\frac{1}{P_1} u - \frac{R - P_2}{P} u - \frac{S}{P} y + \frac{T}{P} u_c \right). \tag{9.46}
\end{aligned}$$

Legyen $gr R = gr P_2 = k$, $gr S = l$, $gr T = m$, akkor $gr (R - P_2) = k - 1$ és a szűrt hiba paraméterezésére választható

$$\vartheta_0 := (\underbrace{r'_1, \dots, r'_k}_{R-P_2}, \underbrace{s_0, s_1, \dots, s_l}_S, \underbrace{t_0, t_1, \dots, t_m}_T)^T, \quad (9.47)$$

$$\varphi := \left(-\frac{p^{k-1}}{P(p)} u, \dots, -\frac{1}{P(p)} u, -\frac{p^l}{P(p)} y, \dots, -\frac{1}{P(p)} y, \frac{p^m}{P(p)} u_c, \dots, \frac{1}{P(p)} u_c \right)^T, \quad (9.48)$$

amivel a szűrt hiba a következő alakra hozható:

$$e_f = \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} \left(-\frac{1}{P_1} u + \varphi^T \vartheta_0 \right). \quad (9.49)$$

A szabályozó paraméterezése a nominális rendszer esetén (paramétere ϑ_0):

$$u = \frac{T}{R} u_c - \frac{S}{R} y \Rightarrow -Ru - Sy + Tu_c = 0 \quad (9.50)$$

$$-\frac{R}{P} u - \frac{S}{P} y + \frac{T}{P} u_c = -\frac{1}{P_1} u - \frac{R-P_2}{P} u - \frac{S}{P} y + \frac{T}{P} u_c = 0 \Rightarrow \quad (9.51)$$

$$u = P_1 (\varphi^T \theta_0) = P_1 (\vartheta_0^T \varphi) = \vartheta_0^T (P_1 \varphi). \quad (9.52)$$

Mivel ϑ_0^T konstans, ezért $P_1(p)$ elé lehetett hozni.

Általában azonban üzem közben a rendszer paraméterei változnak, ezért $u = P_1(\varphi^T \vartheta)$ nem realizálható, mert ehhez a ϑ paramétert deriválni kellene. Ezért irányítási törvényként a következőt választjuk:

$$u := \vartheta^T (P_1 \varphi), \quad (9.53)$$

ami már realizálható. Ekkor a szűrt hiba

$$\begin{aligned} e_f &= \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} \left\{ \varphi^T \vartheta_0 - \frac{1}{P_1} \vartheta^T (P_1 \varphi) \right\} = \\ &= \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} \left\{ \varphi^T \vartheta_0 - \varphi^T \vartheta - \frac{1}{P_1} \vartheta^T (P_1 \varphi) + \varphi^T \vartheta \right\} = \\ &= \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} \varphi^T (\vartheta_0 - \vartheta) - \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} \left(\frac{1}{P_1} u - \varphi^T \vartheta \right) \end{aligned} \quad (9.54)$$

alakra hozható. Választható ezért hiba kiegészítésként (error augmentation)

$$\eta := \frac{1}{P_1} u - \varphi^T \vartheta, \quad (9.55)$$

kiegészített hibaként (augmented error) pedig

$$\varepsilon := e_f + \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} \eta, \quad (9.56)$$

amely a következő két ekvivalens alakban is kifejezhető:

$$\varepsilon = \frac{Q}{P} e + \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} \eta, \quad (9.57a)$$

$$\varepsilon = \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} \varphi^T (\vartheta_0 - \vartheta). \quad (9.57b)$$

Vegyük észre, hogy $G_1(p) := b_0 Q / (A_0 A_m)$ SPR. Célszerű ezért bevezetni még a

$$\varphi_f := \frac{Q}{A_0 A_m} \varphi, \quad u_f := \frac{Q}{A_0 A_m P_1} u \quad (9.58)$$

szűrt jeleket, amelyekkel a szűrt hiba

$$e_f = b_0 (\varphi_f^T \vartheta_0 - u_f) \quad (9.59)$$

alakra hozható.

Hátra van még a paraméterhangolási törvény megválasztása, amelyet úgy fogunk megválasztani, hogy az

$$\varepsilon_p := e_f - \hat{e}_f = e_f - \hat{b}_0 (\varphi_f^T \vartheta - u_f) \quad (9.60)$$

predikciós hiba négyzete minimális legyen:

$$V = \frac{1}{2} \varepsilon_p^2 \rightarrow \min \quad (9.61)$$

$$\frac{dV}{d\vartheta} = -\varepsilon_p \hat{b}_0 \varphi_f, \quad \frac{dV}{d\hat{b}_0} = -\varepsilon_p (\varphi_f^T \vartheta - u_f). \quad (9.62)$$

A gradiensen alapuló paraméterbecslési törvény a következő:

$$\begin{aligned}\frac{d\vartheta}{dt} &= \gamma' \hat{b}_0 \varphi_f \varepsilon_p = \gamma \varphi_f \varepsilon_p, \\ \frac{d\hat{b}_0}{dt} &= \gamma_0 (\varphi_f^T \hat{v} - u_f) \varepsilon_p.\end{aligned}\quad (9.63)$$

Az általános MRAC realizációja a következő összefüggéseken alapul:

$$y_m = \frac{B_m}{A_m} u_c \quad (9.64a)$$

$$e_f = \frac{Q}{P} e = \frac{Q}{P} (y_m - y) \quad (9.64b)$$

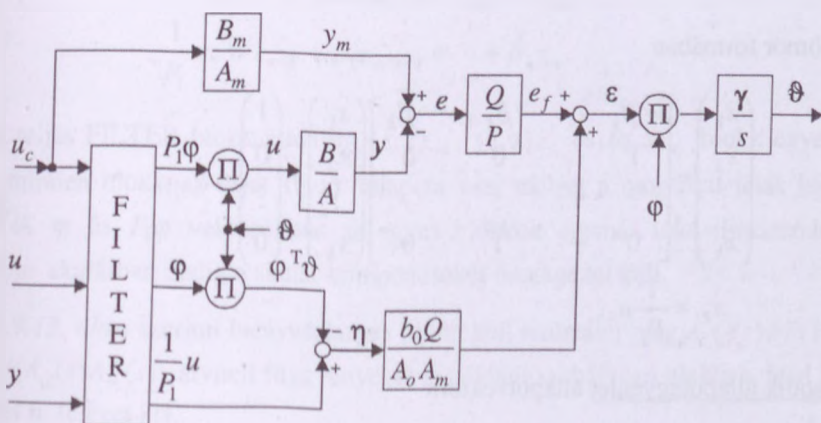
$$\eta = \frac{1}{P_1} u - \varphi^T \vartheta \quad (9.64c)$$

$$\varepsilon = e_f + \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} \eta \quad (9.64d)$$

$$\dot{\vartheta} = \gamma \varphi \varepsilon \quad (9.64e)$$

$$u = \vartheta^T (P_1 \varphi). \quad (9.64f)$$

A realizáció hatásvázlatát a 9.13. ábra illusztrálja, amelyben a FILTER az u_c, u, y bemenetekből előállítja a $P_1 \varphi, \varphi$ és $\frac{1}{P_1} u$ jeleket.



9.13. ábra. Általános MRAC hatásvázlata SISO esetben

A FILTER három hasonló komponensből áll, amelyek állapotteres realizációját külön fogjuk kirészletezni.

FILTER realizálása állapotteres alakban

Legyen $P = P_1 P_2$, $gr P_1 > gr P_2$, $gr P_2 = gr R = k$, továbbá

$$\begin{aligned} P_1 &= p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} p + \alpha_n, \\ P_2 &= p^k + \beta_1 p^{k-1} + \dots + \beta_{k-1} p + \beta_k. \end{aligned} \quad (9.65)$$

Kihasználjuk, hogy a realizálhatóság miatt $l, m \leq k = gr R$. Három blokkot fogunk megkonstruálni, amelynek mindegyike a következő általános feladat egy speciális esete:

$$P_1 \varphi_{u_*} = (x_1, \dots, x_k)^T, \quad x_1 = \frac{p^{k-1}}{P_2} u_*, \dots, x_k = \frac{1}{P_2} u_*. \quad (9.66)$$

Az általános feladathoz rendre két állapotegyenletet fogunk megkonstruálni, és a megoldást $(x, z)_{u_*}$ alakban állítjuk elő.

Az első állapotegyenlet

$$\dot{x}_k = p x_k = x_{k+1},$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_2 = p x_2 = x_1,$$

$$\dot{x}_1 = p x_1 = \frac{p^k}{P_2} u_* = (1 - \beta_1 \frac{p^{k-1}}{P_2} - \dots - \beta_k \frac{1}{P_2}) u_* = -\beta_1 x_1 - \dots - \beta_k x_k + u_*,$$

vagy tömör formában

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_1 & \dots & -\beta_{k-1} & -\beta_k \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u_*, \quad (9.67)$$

$$x_k = \frac{1}{P_2} u_*.$$

A második állapotegyenlet állapotvektora

$$(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n)^T = \left(\frac{p^{n-1}}{P_1} x_k, \dots, \frac{p}{P_1} x_k, \frac{1}{P_1} x_k \right)^T, \quad (9.68)$$

az állapotegyenlet pedig

$$\begin{aligned}\dot{z}_n &= pz_n = z_{n-1}, \\ &\vdots \\ \dot{z}_2 &= pz_2 = z_1, \\ \dot{z}_1 &= \frac{p^n}{P_1} x_k = \left(1 - \alpha_1 \frac{p^{n-1}}{P_1} - \dots - \alpha_n \frac{1}{P_1} \right) x_k,\end{aligned}$$

vagy tömör formában

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x_k. \quad (9.69)$$

A φ_{u_*} elemeit a z állapotvektor utolsó $\dim \varphi_{u_*}$ darab eleme adja:

$$\varphi_{u_*} = (z_{n-(\dim \varphi_{u_*}-1)}, \dots, z_n)^T. \quad (9.70)$$

Szükség van még a $P_1 \varphi_{u_*}$ vektorra és az $\frac{1}{P_1} u_* = \frac{1}{P_1} P_2 x_k = P_2 \frac{1}{P_1} x_k = P_2 z_n$ skalárra is, amelyek a következőképpen határozhatók meg:

$$P_1 \varphi_{u_*} = (x_{k-(\dim \varphi_{u_*}-1)}, \dots, x_k)^T, \quad (9.71)$$

$$\frac{1}{P_1} u_* = z_{n-k} + \beta_1 z_{n-k+1} + \dots + \beta_k z_n. \quad (9.72)$$

A teljes FILTER blokk a három $(z, x)_{-u}$, $(z, x)_{-y}$ és $(z, x)_{u_*}$ blokk egyesítése, ahol minden blokknak saját (z, x) állapota van, melyet a megadott jelek hajtanak meg. A φ és $P_1 \varphi$ vektorokban az egyes blokkok egymás után illesztendők, az $(1/P_1)u$ skalárban pedig a skalár komponenseket összegezni kell.

A 9.13. ábra szerinti hatásvázlatban külön kell realizálni még a $Q(s)/P(s)$ és a $Q(s)/(A_0(s)A_m(s))$ átviteli függvényeket is például szabályozó alakban, lásd könyv I. kötet 6. fejezet [1].

Az MRAC algoritmus megválasztható elemei számára javasolható például a következő:

$$\left. \begin{array}{l} P_1 := A_m \\ P_2 := A_0 \\ Q := A_0 A_m \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{Q}{P} = \frac{Q}{A_0 A_m} = 1 \Rightarrow \text{SPR}. \quad (9.73)$$

9.3.3 Diszkrétidejű önhangoló adaptív irányítás

Az STAC különféle megoldásai intenzíven építenek a paraméterbecslés különféle módszereire, amelyet a könyv I. kötetének 12. fejezetében tárgyaltunk, 13. fejezetében pedig rendszer-identifikációra használtunk [1]. Itt csak néhány jellegzetes esetre térünk ki.

Munkapont becslése

Legyen u_{00} és y_{00} a bemenő jel és a kimenő jel munkapontja. Ha a munkaponttól való eltérésre jó közelítéssel linearizált modell érvényes, akkor áttérve a $\Delta u(t) := u(t) - u(t-1)$ és a $\Delta y(t) := y(t) - y(t-1)$ jelekre, LS-becsléssel meghatározható az $A(q^{-1})\Delta y(t) = B(q^{-1})q^{-d}\Delta u(t) + e(t)$ ARX modell, ha

$$\varphi^T(t) := (-\Delta y(t-1), \dots, -\Delta y(t-n), \Delta u(t-d), \dots, \Delta u(t-d-m))^T \quad (9.74)$$

$$\vartheta = (a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m)^T. \quad (9.75)$$

Adaptív irányításnál a rekurzív paraméterbecslés összefüggéseit rendszerint $\lambda < 1$ felejtési tényezővel alkalmazzuk (általában $y(t)$, itt $\Delta y(t)$ kell $\varepsilon(t)$, $\hat{\vartheta}(t)$ -ben):

$$\begin{aligned} K(t) &= P(t-1)\varphi(t)[\lambda + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)]^{-1}, \\ P(t) &= [1 - K(t)\varphi^T(t)]P(t-1)/\lambda, \\ \varepsilon(t) &= y(t) - \varphi^T(t)\hat{\vartheta}(t-1), \\ \hat{\vartheta}(t) &= \hat{\vartheta}(t-1) + K(t)[y(t) - \varphi^T(t)\hat{\vartheta}(t-1)] = \hat{\vartheta}(t-1) + K(t)\varepsilon(t). \end{aligned} \quad (9.76)$$

A lineáris szabályozó kimenetén szükség van az u_{00} esetleg lassan változó munkaponti érték hozzáadására, ezért a munkaponti értékeket szintén becsülni kell. A $\hat{\vartheta}(t)$ paraméter becslése szeparáltan végezhető. Mivel a munkaponttól való eltérés $y(t) - y_{00}$ és $u(t) - u_{00}$ értékére is érvényes a linearizált modell, ezért a munkaponti értékek egy C konstanst eredményeznek, amelyre teljesülnie kell, hogy

$$\begin{aligned} y(t) &= -\hat{a}_1 y(t-1) - \dots - \hat{a}_n y(t-n) + \\ &\quad + \hat{b}_0 u(t-d) + \dots + \hat{b}_m u(t-d-m) + C, \\ C &= (1 + \hat{a}_1 + \dots + \hat{a}_n) y_{00} - (\hat{b}_0 + \dots + \hat{b}_m) u_{00}. \end{aligned} \quad (9.77)$$

Legyen

$$L(t) := y(t) + \hat{a}_1 y(t-1) + \dots + \hat{a}_n y(t-n) - \hat{b}_0 u(t-d) - \dots - \hat{b}_m u(t-d-m), \quad (9.78)$$

akkor az egyenlethiba $e(t) = L(t) - C$, és ezért választható

$$\hat{C}(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=t-N}^t L(k), \quad (9.79)$$

vagy nagy N esetén

$$\hat{C} = (1 + \sum_{i=1}^n \hat{a}_i) \hat{y}_{00} - (\sum_{i=0}^m \hat{b}_i) \hat{u}_{00}. \quad (9.80)$$

$\hat{C}$ ismeretében az $\hat{y}_{00} := u_c(t)$ választással (zárt körben) vagy az átlagolt

$\hat{y}_{00} := \frac{1}{N+1} \sum_{k=t-N}^t y(k)$ értékkel $\hat{u}_{00}$ kifejezhető:

$$\hat{u}_{00} := [\hat{C} - (1 + \sum_{i=1}^n \hat{a}_i) \hat{y}_{00}] / \sum_{i=0}^m \hat{b}_i. \quad (9.81)$$

Direkt STAC

Legyen a SISO rendszer ARMAX modellel jellemezhető:

$$\begin{aligned} A(q)y(t) &= B(q)u(t) + C(q)e(t), \\ A^*(q^{-1})y(t) &= B^*(q^{-1})u(t-d_0) + C^*(q^{-1})e(t), \end{aligned} \quad (9.82)$$

ahol $gr A = gr C = n$, $d_0 = gr A - gr B = n - m$, $e(t)$ fehér zaj, és tetszőleges $A(z)$ polinom reciprok polinomja $A^*(z) = z^{gr A} A(z^{-1})$. A modellben szereplő operátorok

$$\begin{aligned} A^*(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}, \\ B^*(q^{-1}) &= b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_m q^{-m}, \\ C^*(q^{-1}) &= 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_n q^{-n}. \end{aligned}$$

A modell identifikálására javasolható a *kiterjesztett legkisebb négyzetek* módszer (ELS, extended least squares) rekurzív változata, amely esetén

$$\vartheta = (a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m, c_1, \dots, c_n)^T,$$

$$\varphi^T(t) = (-y_1(t-1), \dots, -y(t-n), u(t-d_0), \dots, u(t-d_0-m), \varepsilon(t-1), \dots, \varepsilon(t-n)).$$

Ha a zárt rendszer referencia modellje

$$A_m(q)y(t) = B_m(q)u_c(t) \quad (9.83)$$

és a szabályozó kétszabadságfokú, azaz

$$R(q)u(t) = T(q)u_c(t) - S(q)y(t), \quad (9.84)$$

akkor $A_0(z)$ megfigyelő polinomot, $B = B^+ B^-$ faktorizációt és $B^+(z)$ kiejthető zérushelyeket feltételezve a könyv I. kötet 9. fejezet [1] szerint teljesülnie kell, hogy

$$AR_1 + B^- S = A_0 A_m, \quad (9.85)$$

ahol A_0, A_m, B^+, R_1 normalizált (monic) és

$$\begin{aligned} R &= B^+ R_1, \\ B_m &= B^- B'_m, \\ T &= A_0 B'_m. \end{aligned} \quad (9.86)$$

Szorozzuk meg a (9.85) diophantoszi egyenletet $y(t)$ -vel és vegyük figyelembe a (9.82) rendszermodellt, akkor

$$\begin{aligned} A_0 A_m y(t) &= R_1 A y(t) + B^- S y(t) = \\ &= R_1 B u(t) + B^- S y(t) + R_1 C e(t) = \\ &= B^- [R u(t) + S y(t)] + R_1 C e(t). \end{aligned} \quad (9.87)$$

Vegyük észre, hogy (9.87) tekinthető a (9.82) rendszer egy másik paraméterezésének a B^-, R_1, S -ben szereplő szabályozóparaméterek szerint. Probléma, hogy (9.87) nemlineáris B^- paramétereiben.

Egy másik lehetőség, ha az

$$\begin{aligned} A_0 A_m y &= \bar{R} u + \bar{S} y + R_1 C e, \\ \bar{R} &= B^- R, \quad \bar{S} = B^- S \end{aligned} \quad (9.88)$$

paraméterezésre térünk át, ahol azonban $\bar{R}$ már nem normalizált. Ekkor minden egyes mintavételi lépésben becsülni kell $\bar{R}, \bar{S}$ és $R_1 C$ paramétereit, meg kell határozni $\bar{R}, \bar{S}$ közös faktorait, az azzal való osztás után az $R(z)$ és $S(z)$ polinomokat, és ki kell számítani a szabályozó aktuális $u(t)$ kimenő jelét $Ru = Tu_c - Sy$ alapján. A módszer megkerüli a nemlineáris paraméterbecslést, de paraméterezése redundáns (B^- paramétereit kétszer szerepelnek), ami konvergencia problémát okozhat. A közös faktorok biztonságos meghatározása szintén nehézséget okozhat.

Speciálisan abban az egyszerű esetben, amikor $B^- = b_0$ konstans és b_0 előjele és d_0 alsó becslése ismert, a zárt rendszer referencia modellje b_0 / A_m . Az A_0 megfigyelő polinom megválasztása után (9.88) helyére $A_0 A_m = Ru + Sy + R_1 Ce$ lép, ahol azonban R nem normalizált (nem monic).

Minimális varianciájú direkt STAC szabályozás

A 3. fejezetben megismertük, hogy az optimális MVC szabályozás *stabil inverz rendszer* esetén (3.26) és (3.20) szerint

$$u(t) = -\frac{S^*(q^{-1})}{R^*(q^{-1})} y(t) = -\frac{G^*(q^{-1})}{B^*(q^{-1})F^*(q^{-1})} y(t) \quad (9.89)$$

alakú, ahol $S^*(q^{-1}), R^*(q^{-1})$ minimális foksámú megoldása a

$$A^*(q^{-1})R^*(q^{-1}) + q^{-d_0}B^*(q^{-1})S^*(q^{-1}) = B^*(q^{-1})C^*(q^{-1}) \quad (9.90)$$

diophantoszi egyenletnek. A zárt rendszer ekkor $A_m(q) = 1/q^{d_0-1} \Rightarrow A_m^*(q^{-1}) = 1$.

Az $R_1^* := F^*$ jelöléssel $R^* = B^*R_1^*$, ezért B^* -gal egyszerűsítve kapjuk, hogy

$$A^*R_1^* + q^{-d_0}S^* = C^*, \quad (9.91)$$

$$\begin{aligned} C^*y(t) &= A^*R_1^*y(t) + S^*y(t-d_0), \\ &= B^*R_1^*u(t-d_0) + S^*y(t-d_0) + R_1^*C^*e(t) = \\ &= R^*u(t-d_0) + S^*y(t-d_0) + R_1^*C^*e(t), \end{aligned} \quad (9.92)$$

$$y(t) = \frac{1}{C^*} (R^*u(t-d_0) + S^*y(t-d_0)) + R_1^*e(t).$$

A kimenő jel ilyenkor $y(t) = R_1^*(q^{-1})e(t)$, amely egy $(d_0 - 1)$ -rendű mozgóátlag (MA, moving average) folyamat. Az optimális MVC szabályozó kiejti a szakasz minden $B(z)$ zérusát, ami az egységkörön kívül fekvő vagy az egységkör közelében lévő zérushelyek esetén problémát jelent, mert pontatlanul ismert paraméterek esetén instabil rendszert eredményez.

Mozgóátlag STAC szabályozás

A fenti nehézségeken (a szokásos $B = B^+B^-$ faktorizáció mellett) segít, ha R^*, S^* meghatározása

$$A^*R^* + q^{-d_0}B^*S^* = B^{+*}C^* \quad (9.93)$$

alapján történik, mivel ekkor $d = gr A - gr B^+$ jelöléssel

$$y(t) = \frac{1}{C^*} (R^* u(t-d) + S^* y(t-d)) + R_1^* e(t), \quad (9.94)$$

továbbá $R^* = B^{+*} R_1^*$, $gr R_1^* = d - 1$ és a zárt rendszer kimenő jele

$$y(t) = R_1^* (q^{-1}) e(t), \quad (9.95)$$

amely most egy $(d - 1)$ -rendű mozgóátlag (MA) folyamat.

Közös MV és MA STAC algoritmus

Az MV és MA STAC szabályozások csak d értékében és a zárt körben kiegyeszerősített zérushelyek számában különböznek: MV esetén $d = d_0 = gr A - gr B$, és minden zérushellyel egyszerűsítünk, MA esetén viszont csak $d = gr A - gr B^+$ zérushellyel. Speciálisan $B^{+*} = 1$ esetén $d = gr A = n$, és nincs egyszerűsítés semmilyen zérushellyel. A jelek megszürethetők egy $1/A_0^*(q^{-1})$ stabil szűrővel, amikor is

$$y(t) = \frac{A_0^*}{C^*} (R^* u_f(t-d) + S^* y_f(t-d)) + R_1^* e(t), \quad (9.96)$$

$$u_f(t) = \frac{1}{A_0^*(q^{-1})} u(t), \quad y_f(t) = \frac{1}{A_0^*(q^{-1})} y(t).$$

Speciálisan $A_0 = C$ választás mellett közvetlenül

$$R^* = r_0 + r_1 q^{-1} + \dots + r_k q^{-k}$$

$$S^* = s_0 + s_1 q^{-1} + \dots + s_l q^{-l} \quad (9.97)$$

paraméterei hangolhatók. Aström és Wittenmark megmutatta [28], hogy $A_0 \neq C$ esetén is korrekt szabályozóhoz konvergáló megoldást kapunk a (9.76) rekurzív algoritmussal, ha

$$y(t) = R^* u_f(t-d) + S^* y_f(t-d) + \varepsilon(t),$$

$$\vartheta = (r_0, \dots, r_k, s_0, \dots, s_l)^T, \quad (9.98)$$

$$\varphi^T(t) = [u_f(t-d), \dots, u_f(t-d-k), y_f(t-d), \dots, y_f(t-d-l)],$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t) \hat{\vartheta}(t-1).$$

Minden mintavételi lépésben a paraméterek becsült értékéből elő kell állítani az $R^*(q^{-1})$, $S^*(q^{-1})$ operátorokat és képezni kell a szabályozó $u(t)$ kimenetét

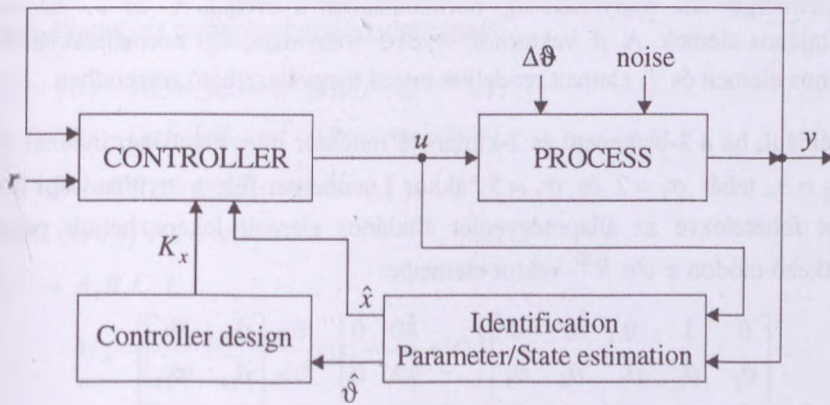
$$R^*(q^{-1})u(t) = -S^*(q^{-1})y(t) \quad (9.99)$$

alapján. Az alapjel a sztochasztikus szabályozásoknál megismert módon vehető figyelembe.

9.4 MIMO indirekt adaptív irányítás

Az indirekt adaptív irányítás sémáját a 9.14. ábra mutatja. Az irányítás a következő módon jellemezhető:

- i) innovációs zajmodell feltételezése,
- ii) online identifikáció és állapotbecslés (rekurzív technikával),
- iii) online szabályozótervezés minden identifikációs lépés után (pólusát helyezés, LQ optimum, prediktív irányítás stb.).



9.14. ábra. Indirekt adaptív irányítás sémája

Az innovációs zajmodellben a rendszerzaj a mérési zajból az L konstans lineáris leképezéssel áll elő:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + Le(t), \\ y(t) &= Cx(t) + e(t). \end{aligned} \quad (9.100)$$

Az állapotbecslő ezért a következő lehet:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t+1) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L[\underbrace{y(t) - C\hat{x}(t)}_{\varepsilon(t)}], \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t).\end{aligned}\quad (9.101)$$

A lineáris rendszer nemtriviális paramétereit helyezzük el egy ϑ oszlopvektorban:

$$A, B, C, L \rightarrow \vartheta. \quad (9.102)$$

A rendszer paraméterezésére segítségül hívhatjuk a Luenberger-féle normálalakokat:

- i) Ha korábbi kísérletek kiértékelése alapján rendelkezésre állnak a rendszer $d_1, d_2, \dots, d_m$ megfigyelhetőségi indexei, akkor tudjuk, hogy hol helyezkednek el a Luenberger-féle megfigyelhetőségi normálalakban a triviális 0 és 1, valamint az általános elemek. A ϑ vektorhoz A, B, C megfigyelhetőségi normálalakjának általános elemeit és L elemeit rendeljük hozzá megválasztható sorrendben.
- ii) Ha korábbi kísérletek kiértékelése alapján rendelkezésre állnak a rendszer $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$ irányíthatósági indexei, akkor tudjuk, hogy hol helyezkednek el a Luenberger-féle irányíthatósági normálalakban a triviális 0 és 1, valamint az általános elemek. A ϑ vektorhoz A, B, C irányíthatósági normálalakjának általános elemeit és L elemeit rendeljük hozzá megválasztható sorrendben.

Például, ha a 2-bemenetű és 2-kimenetű rendszer irányíthatósági indexei $\nu_1 = 2$ és $\nu_2 = 3$, tehát $\sigma_1 = 2$ és $\sigma_2 = 5$, akkor Luenberger-féle irányíthatósági normálalakot feltételezve az állapotegyenlet általános elemeit leképezhetjük például a következő módon a $\vartheta \in R^{30}$ vektor elemeibe:

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vartheta_2 & \vartheta_1 & \vartheta_5 & \vartheta_4 & \vartheta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vartheta_7 & \vartheta_6 & \vartheta_{10} & \vartheta_9 & \vartheta_8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \vartheta_{15} & \vartheta_{20} \\ \vartheta_{14} & \vartheta_{19} \\ \vartheta_{13} & \vartheta_{18} \\ \vartheta_{12} & \vartheta_{17} \\ \vartheta_{11} & \vartheta_{16} \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} \vartheta_{25} & \vartheta_{24} & \vartheta_{23} & \vartheta_{22} & \vartheta_{21} \\ \vartheta_{30} & \vartheta_{29} & \vartheta_{28} & \vartheta_{27} & \vartheta_{26} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (9.103)$$

Az állapotegyenletről ezután áttérünk a lineáris paraméterbecslésnél megszokott alakra. Az áttérés elve a következő:

$$\hat{y}(t) = \varphi^T(t) \hat{\vartheta}(t-1), \quad (9.104a)$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - \varphi^T(t) \hat{\vartheta}(t-1), \quad (9.104b)$$

$$\varphi^T(t) = -\frac{d\varepsilon(t)}{d\hat{\vartheta}(t-1)} = \frac{d\hat{y}(t)}{d\hat{\vartheta}(t-1)}, \quad (9.104c)$$

$$\varphi^T(t+1) = \frac{d\hat{y}(t+1)}{d\hat{\vartheta}(t)} = \frac{d}{d\hat{\vartheta}(t)} [C\hat{x}(t+1)] = \underbrace{\frac{dC}{d\hat{\vartheta}} \hat{x}(t+1)}_{V_k} + C \underbrace{\frac{d\hat{x}(t+1)}{d\hat{\vartheta}}}_{W_{k+1}}, \quad (9.104d)$$

$$\underbrace{\frac{d\hat{x}(t+1)}{d\hat{\vartheta}}}_{W_{k+1}} = \frac{dA}{d\hat{\vartheta}} \hat{x}(t) + A \underbrace{\frac{d\hat{x}(t)}{d\hat{\vartheta}}}_{W_k} + \frac{dB}{d\hat{\vartheta}} u(t) + \frac{dL}{d\hat{\vartheta}} \varepsilon(t) - L \underbrace{\frac{dC}{d\hat{\vartheta}} \hat{x}(t)}_{V_k} - LC \underbrace{\frac{d\hat{x}(t)}{d\hat{\vartheta}}}_{W_k}, \quad (9.104e)$$

$$M_k = \left[\frac{dA}{d\hat{\vartheta}} \hat{x}(t) + \frac{dB}{d\hat{\vartheta}} u(t) + \frac{dL}{d\hat{\vartheta}} \varepsilon(t) \right], \quad (9.104f)$$

$$W_{k+1} = (A - LC)W_k + M_k - LV_k. \quad (9.104g)$$

Legyen $\lambda \in (0, 1)$ a felejtési tényező, akkor a szimultán állapot- és paraméterbecslésre a következő rekurzív algoritmus adható [30], [31].

Rekurzív állapot- és paraméterbecslési algoritmus

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - \varphi^T(t) \hat{\vartheta}(t-1)$$

$$K(t) = P(t-1) \varphi(t) [\lambda I + \varphi^T(t) P(t-1) \varphi(t)]^{-1}$$

$$P(t) = [I - K(t) \varphi^T(t)] P(t-1) / \lambda$$

$$\hat{\vartheta}(t) = \hat{\vartheta}(t-1) + K(t) \varepsilon(t)$$

$$\hat{\vartheta}(t) \rightarrow A, B, C, L$$

$$M_k = \left[\frac{dA}{d\hat{\vartheta}} \hat{x}(t) + \frac{dB}{d\hat{\vartheta}} u(t) + \frac{dL}{d\hat{\vartheta}} \varepsilon(t) \right]$$

$$V_k = \frac{dC}{d\hat{\vartheta}} \hat{x}(t)$$

$$W_{k+1} = (A - LC)W_k + M_k - LV_k$$

$$\hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L\varepsilon(t)$$

$$V_k = \frac{dC}{d\hat{\vartheta}} \hat{x}(t+1)$$

$$\varphi^T(t+1) = V_k + CW_{k+1}$$

$$\hat{y}(t+1) = C\hat{x}(t+1)$$

9.5 Robotok önhangoló adaptív irányítása

A robotok dinamikus modelljében szereplő inercia paraméterek (tömegek, tömegközéppontok, tehetetlenségi nyomatékok) rendszerint nem ismertek, ezért a dinamikus modellen alapuló korszerű robotirányítási algoritmusok megvalósításakor szükség van ezek megbízható becslésére. Rendszerint választhatók olyan független $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ paraméterek, amelyek a robot dinamikus modelljében lineárisan fordulnak elő [20]. Például a könyv I. kötete 5. fejezetében [1] szereplő kétszabadságfokú robotkar esetén (az ott szereplő jelölésekkel) paraméterként választható

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2) + I_1 + I_2, \\ \alpha_2 &= m_2 l_1 l_{c2}, \\ \alpha_3 &= m_2 l_{c2}^2 + I_2, \\ \alpha_4 &= g(m_1 l_{c1} + m_2 l_1), \\ \alpha_5 &= g m_2 l_{c2}.\end{aligned}\tag{9.108}$$

Ezek a paraméterek lineárisan fordulnak elő a robotkar modelljének Lagrange-féle alakjában:

$$\begin{aligned}D_{11} &= \alpha_1 + 2C_2 \alpha_2, \\ D_{12} &= \alpha_3 + C_2 \alpha_2 = D_{21}, \\ D_{22} &= \alpha_3, \\ D_{111} &= 0, \\ D_{112} &= -S_2 \alpha_2 = D_{121} = D_{122}, \\ D_{211} &= S_2 \alpha_2, \\ D_{212} &= D_{221} = D_{222} = 0, \\ D_1 &= C_1 \alpha_4 + C_{12} \alpha_5, \\ D_2 &= C_{12} \alpha_5.\end{aligned}\tag{9.109}$$

Itt az elterjedt rövidített jelöléseket alkalmaztuk, például $C_{12} = \cos(q_1 + q_2)$, ahol q_i az i -edik csuklóváltozó. Írjuk fel a dinamikus modellt

$$\sum_k D_{ik} \ddot{z}_k + \sum_k \left(\sum_j D_{ijk} \dot{q}_j \right) \dot{z}_k + D_i = \tau_i \tag{9.110}$$

alakban, ahol z_k később kerül megválasztásra. A fenti paraméterválasztással a dinamikus modell a következő alakú lesz:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= D_{11}\ddot{z}_1 + D_{12}\ddot{z}_2 + (D_{111}\dot{q}_1 + D_{121}\dot{q}_2)\dot{z}_1 + (D_{112}\dot{q}_1 + D_{122}\dot{q}_2)\dot{z}_2 + D_1 = \\ &= (\alpha_1 + 2C_2\alpha_2)\ddot{z}_1 + (\alpha_3 + C_2\alpha_2)\ddot{z}_2 + (-S_2\alpha_2)(\dot{q}_1\dot{z}_2 + \dot{z}_1\dot{q}_2) + \\ &\quad + (-S_2\alpha_2)\dot{q}_2\dot{z}_2 + (C_1\alpha_4 + C_{12}\alpha_5),\end{aligned}\quad (9.111a)$$

$$\begin{aligned}\tau_2 &= D_{21}\ddot{z}_1 + D_{22}\ddot{z}_2 + (D_{211}\dot{q}_1 + D_{221}\dot{q}_2)\dot{z}_1 + (D_{212}\dot{q}_1 + D_{222}\dot{q}_2)\dot{z}_2 + D_2 = \\ &= (\alpha_3 + C_2\alpha_2)\ddot{z}_1 + \alpha_3\ddot{z}_2 + (S_2\alpha_2)\dot{q}_1\dot{z}_1 + C_{12}\alpha_5.\end{aligned}\quad (9.111b)$$

Az így kapott dinamikus modellt felírhatjuk paraméterektől független Y_{ij} jelekből álló Y mátrix és α_j paraméterekből álló α paramétervektor szorzataként:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}, \quad (9.112)$$

ahol

$$\begin{aligned}Y_{11} &= \ddot{z}_1, \\ Y_{12} &= C_2(2\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2) - S_2(\dot{q}_1\dot{z}_2 + \dot{z}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2\dot{z}_2), \\ Y_{13} &= \ddot{z}_2, \\ Y_{14} &= C_1, \\ Y_{15} &= C_{12}, \\ Y_{21} &= 0, \\ Y_{22} &= C_2\ddot{z}_1 + S_2\dot{q}_1\dot{z}_1, \\ Y_{23} &= \ddot{z}_1 + \ddot{z}_2, \\ Y_{24} &= 0, \\ Y_{25} &= C_{12}.\end{aligned}\quad (9.113)$$

A robot dinamikus modelljét az irányítási törvény és az adaptációs törvény levezetésekor háromféle alakban is fogjuk használni:

$$H(q)\ddot{z} + h(q, \dot{q}, \dot{z}) = \tau, \quad (9.114a)$$

$$H(q)\ddot{z} + C(q, \dot{q})\dot{z} + D(q) = \tau, \text{ ahol } C = [C_{ik}], \quad C_{ik} = \sum_j D_{ijk}(q)\dot{q}_j, \quad (9.114b)$$

$$Y(q, \dot{q}, \dot{z}, \ddot{z})\alpha = \tau. \quad (9.114c)$$

Válasszuk meg a konstans Λ mátrixot úgy, hogy $\det(sI + \Lambda) = 0$ s_i gyökeire teljesüljön $\text{Re } s_i < 0$. Jelölje $q_d(t), \dot{q}_d(t), \ddot{q}_d(t)$ a csuklóváltozó előírt (desired) alapjel időfüggvényét és deriváltjait a robot megtervezett pályája esetén. Akkor ha az $e = q_d - q$ hibajel kielégíti az $\dot{e} + \Lambda e = 0$ differenciálegyenletet, akkor $e(t) \rightarrow 0$ exponenciálisan Λ megválasztásával befolyásolható sebességgel. Az alapjel időfüggvény helyett bevezetjük annak a hibaintegrál Λ -val súlyozott értékével korrigált értékét, amelyet referenciajelnek fogunk nevezni:

$$\begin{aligned} q_r &= q_d + \Lambda \int (q_d - q) dt, \\ \dot{q}_r &= \dot{q}_d + \Lambda(q_d - q), \\ \ddot{q}_r &= \ddot{q}_d + \Lambda(\dot{q}_d - \dot{q}). \end{aligned} \quad (9.115)$$

Vegyük észre, hogy az

$$s := \dot{q}_r - \dot{q} = \dot{q}_d - \dot{q} + \Lambda(q_d - q) = \dot{e} + \Lambda e \quad (9.116)$$

választással elegendő biztosítani az irányítási törvénnyel, hogy $s = 0$ állandósuljon, mert akkor $e(t) \rightarrow 0$ exponenciális sebességgel, ami azt jelenti, hogy eltűnik a $q_d(t)$ és a $q(t)$ hiba egy tranziens után. A következő irányítási törvénnyel, amely felfogható a kiszámított nyomatékok módszere (nemlineáris szétcsatolás a csuklók terében), a csúszó szabályozás (sliding control) és a PID szabályozás ötvözetének, egy tranziens után $s(t) \equiv 0$ biztosítható [32]. Megjegyezzük, hogy az irányítási törvény ugyan közvetlenül csak PD komponenst mutat a szabályozóban, de ez csak lát-szólagos, mert az I komponens megtalálható q_r -ben. Az irányítási törvény nyomaték kimenetű, amelyet az alsó irányítási hierarchia szinten gyors tranziensű áramszabályozásokkal lehet megvalósítani (DC motorok esetén az áram arányos a nyomatékkal). Az irányítási törvény felhasználja a robot paraméterek aktuális $\hat{\alpha}$ becslését.

Irányítási törvény:

$$\begin{aligned} \tau &= \hat{H}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{D}(q) + K_p(q_r - q) + K_D s = \\ &= Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \dot{q}_r) \hat{\alpha} + K_p(q_r - q) + K_D s \\ &\quad (K_p > 0, K_D > 0) \end{aligned} \quad (9.117)$$

A zárt rendszer az irányítási törvénnyel

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q) = \hat{H}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{D}(q) + K_p(q_r - q) + K_D s,$$

ahonnan következik

$$\begin{aligned}
 H\ddot{q} &= \hat{H}\ddot{q}_r + \hat{C}\dot{q}_r + \hat{D} + K_p(q_r - q) + K_D s - \underbrace{C\dot{q} - D}_{0} + (C\dot{q}_r - C\dot{q}_r) = \\
 &= \hat{H}\ddot{q}_r + (\hat{C} - C)\dot{q}_r + (\hat{D} - D) + C(\underbrace{\dot{q}_r - \dot{q}}_s) + K_p(q_r - q) + K_D s.
 \end{aligned} \quad (9.118)$$

Megmutatjuk, hogy a zárt rendszer Ljapunov-értelemben stabil. Ljapunov-függvényként válasszuk a q_r -hez képest értelmezett hiba "kinetikus és potenciális energiáját" annak analógiájára, hogy a robot kinetikus energiája $\frac{1}{2} \langle H\dot{q}, \dot{q} \rangle$, egy k

rúgóállandójú rúgó potenciális energiája pedig $\frac{1}{2} kx^2$:

$$V = \frac{1}{2} \langle H(q)s, s \rangle + \frac{1}{2} \langle K_p(q_r - q), q_r - q \rangle + \frac{1}{2} \langle \Gamma(\alpha - \hat{\alpha}), \alpha - \hat{\alpha} \rangle. \quad (9.119)$$

A Ljapunov-függvény $\Gamma > 0$ súlyozó mátrixszal bünteti az $\alpha - \hat{\alpha}$ paraméterbecslési hibát is. A Ljapunov-függvény deriváltja

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= \langle H\dot{s}, s \rangle + \frac{1}{2} \langle \dot{H}s, s \rangle + \langle K_p(\dot{q}_r - \dot{q}), q_r - q \rangle + \\
 &+ \langle \Gamma(\dot{\alpha} - \dot{\hat{\alpha}}), \alpha - \hat{\alpha} \rangle.
 \end{aligned} \quad (9.120)$$

Mivel $H\dot{s} = H\ddot{q}_r - H\ddot{q}$, ezért (9.118) felhasználásával kapjuk, hogy

$$H\dot{s} = (H - \hat{H})\ddot{q}_r + (C - \hat{C})\dot{q}_r + (D - \hat{D}) - K_p(q_r - q) - K_D s - Cs, \quad (9.121)$$

ahonnan következik

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= \underbrace{\langle (H - \hat{H})\ddot{q}_r + (C - \hat{C})\dot{q}_r + (D - \hat{D}) - K_p(q_r - q) - K_D s - Cs, s \rangle}_{Y(\alpha - \hat{\alpha})} + \\
 &+ \frac{1}{2} \langle \dot{H}s, s \rangle + \langle K_p(\dot{q}_r - \dot{q}), q_r - q \rangle + \langle \Gamma(\dot{\alpha} - \dot{\hat{\alpha}}), \alpha - \hat{\alpha} \rangle = \\
 &= - \langle K_D s, s \rangle + \frac{1}{2} \underbrace{\langle (\dot{H} - 2C)s, s \rangle}_0 + \langle \alpha - \hat{\alpha}, Y^T s + \Gamma(\dot{\alpha} - \dot{\hat{\alpha}}) \rangle.
 \end{aligned} \quad (9.122)$$

Felhasználtuk, hogy $\dot{H} - 2C$ antiszimmetrikus mátrix, ezért kvadratikusság alakja tetszőleges változó, így s esetén is azonosan nulla. Ezért választható $Y^T s + \Gamma(\dot{\alpha} - \dot{\hat{\alpha}}) = 0$, ahonnan $\alpha = \text{const}$ valódi robot paraméterek esetén $\dot{\alpha} = 0$ miatt a következő adaptációs törvényt kapjuk a robotparaméterek hangolására:

Adaptációs törvény:

$$\frac{d\hat{\alpha}}{dt} = \Gamma^{-1} Y^T (q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \ddot{q}_r) s. \quad (9.123)$$

Mivel ekkor

$$\frac{dV}{dt} = - \langle K_D s, s \rangle \quad (9.124)$$

negatív, ha $s \neq 0$, ezért V addig csökken, amíg $s = 0$ be nem következik, de ekkor a hiba exponenciálisan nullához tart.

Megjegyzés:

- i) Minden alkalommal, amikor a robot megfog egy tárgyat (CLOSE), vagy elenged egy tárgyat (OPEN), a robot valódi α paramétervektora új konstans értéket vesz fel a következő mozgásperiódusra, és az önhangoló adaptív irányításnak egy rövid tranziens után meg kell találnia a jó $\hat{\alpha}$ becslést.
- ii) Bár K_p nincs hatással a stabilitásra (kiesik dV/dt -ben), az $\hat{\alpha}$ tranziensére hatással van. Általában a nagy hibák miatt a rotoráram korlátozások megszólalhatnak, ha még semmiféle információnk sincs a robot paramétereiről. Kezdetben ezért célszerű kikapcsolni K_p -t a hiba hatásának csökkentése érdekében a τ beavatkozó jelben, és $K_p = 0$ mellett elő-identifikálni a robot szegmensek ismeretlen inercia paramétereit (nulla vagy névleges teher esetén).
- iii) Később, amikor már csak a változó teher miatti kisebb paraméterváltozásokra kell reagálni és ezért a hiba is kisebb, K_p -t célszerű bekapcsolni a paraméterhangolás tranziens idejének csökkentése érdekében.

10. OPTIMÁLIS IRÁNYÍTÁSOK ELMÉLETE

Ebben a fejezetben az optimum általános analitikus feltételeit vizsgáljuk a funkcionálanalízis módszereivel skalárértékű és nem skalárértékű (vektor, mátrix, halmaz stb. értékű) optimalizálási kritériumok esetén. Az eredmények alkalmazását az irányítástechnikában néhány példa keretében mutatjuk be (folytonosidejű LQ optimalizálás, Kalman-szűrő, halmazkritérium szerinti optimalizálás).

A funkcionálanalízis használata nem öncélú, hanem a problémakör általánosságának következménye. Ez a rész feltételezi a topológikus terek, a funkcionálanalízis és a valós függvénytan alapfogalmainak és néhány alapvető eredményének ismeretét. A valós függvénytan területéről feltételezzük a mérhető halmaz, mérték és a Radon–Nikodym-tétel ismeretét. Mérhető halmaz alatt mindenütt Lebesgue-mérhető halmazt, mérték alatt pedig Lebesgue-mértéket fogunk érteni (jelölése $\lambda(\cdot)$). A topológikus terek területéről feltételezzük a nyíltság, zártság, kompaktság, környezet és környezetbázis, folytonosság, lineáris topológikus tér és lokálisan konvex lineáris topológikus tér fogalmának ismeretét. A funkcionálanalízis területéről feltételezzük a funkcionál, duális tér, norma, lineáris normált tér, korlátozott lineáris operátor, Banach-tér, skalárszorzat és Hilbert-tér fogalmának, a Hahn–Banach-tétel algebrai alakjának és a Banach-féle nyílt leképezési tételnek az ismeretét. A topológikus terek és a funkcionálanalízis fontosabb definícióit és összefüggéseit az F4. függelékben foglaltuk össze. A fejezet nem bizonyított tételeinek és lemmáinak részletes bizonyítása megtalálható Lantos [19] munkájában.

10.1 Optimalizálás skalárértékű kritérium esetén

A klasszikus varációszámítás eredményeihez képest a reális vezérlési feltételeknek eleget tevő irányítási problémák vizsgálatára Pontrjagin maximum-elve [33] és Bellman dinamikus programozási módszere [34] hozták meg az első átütő erejű elméleti eredményeket. Ezt követően intenzív elméleti kutatómunka indult meg, amelynek eredményeként több általános módszer is kialakult, amelyek közül itt először néhány már klasszikussá vált módszer elvét röviden összefoglaljuk.

Dubovickij és Miljutyin [35] az optimum szükséges feltételeinek meghatározására alkalmas módszert dolgoztak ki Banach-térben adott optimalizálási feladatok esetén. Módszerüket Girszanov [36] lokálisan konvex lineáris topológikus terekre általánosította. Bár a két forrás a részletkérdések tekintetében lényegesen eltér egymástól, alapötletük – a minimalizálandó funkcionál és a korlátozások approximációja kúpokkal – közös. A "Dubovickij–Miljutyin–Girszanov" elnevezés alatt a Girszanov-féle tárgyalásmódot fogjuk érteni. A módszernek alapvető előnye más módszerekkel szemben, hogy differenciálegyenletet is megenged az egyenlőség alakjában adott korlátozások között. A dinamikus optimalizálási probléma a folyto-

nos állapot trajektóriák és a lényegében korlátozott irányítások Banach-terében tárgyalható. A módszernek hátránya, hogy csak egyetlen korlátozásnál engedi meg az approximációt érintő iránnyal. Másrészt, az érintő irányok meghatározásának alapja a Ljuszternyik-tétel [46], amely csak akkor alkalmazható, ha a Fréchet-derivált képtere a teljes tér. Az ettől eltérő "szinguláris" esetekben pótlólagos vizsgálatok szükségesek. A vezérlésre vonatkozó korlátozás egy A absztrakt halmaz alakjában vehető figyelembe.

Neustadt az optimalizálendő funkcionált és a korlátozásokat konvex halmazokkal approximálta az optimum helyének környezetében [37]. Az approximáció az optimalizálendő funkcionál és a belső ponttal rendelkező korlátozások esetén belső kúp, minden más esetben pedig elsőrendű konvex approximáció. A belső kúp a Dubovickij–Miljutyin–Girszanov-módszer terminológiájában a csökkenési és a megengedett irányok kúpjainak metszete, kiegészítve a csúccsal. Előírás, hogy a belső kúp konvex legyen. Neustadt a lokális optimum általános szükséges feltételét egy szétválasztási tétel alakjában adta meg, amelyet a kanonikus optimalizálási probléma vizsgálatánál használt fel. A kanonikus optimalizálási feladatban a minimalizálendő funkcionál nem szükségképpen a teljes térben definiált, és a korlátozások egyenlőtlenségek, egyenletek és egy további A absztrakt halmaz révén adottak. Neustadt a kanonikus optimalizálási feladatban szereplő leképezések differenciálhatóságát helyettesítő különböző (ún. regularitási) feltételek teljesülése esetén megadta a lokális optimum szükséges feltételét.

A Canon, Cullum és Polak által vizsgált optimalizálási feladatban [38] a korlátozás (egy vektorértékű függvény révén adott) egyenlet és egy további halmaz alakjában adott, az utóbbit az optimum helyének környezetében kanonikus approximációjával helyettesíti. Az optimum szükséges feltétele egy alapeladatra lett kidolgozva lineáris topológikus térben, amelyben az egyik korlátozás egy A absztrakt halmaz lehet. A Canon–Cullum–Polak-módszer használatát dinamikus rendszer esetén megnehezíti, hogy az egyenlőtlenségek alakjában, vagy az állapotegyenlet és vezérlési korlátozás alakjában adott korlátozások csak az A halmaz révén vehetők figyelembe. További nehézséget jelent, hogy az A halmaz approximációjakor biztosítani kell a kanonikus approximációban szereplő bizonyos függvények folytonosságát és az egyenletes konvergenciát, ezért folytonos állapot trajektória és lényegében korlátozott irányítás esetén is (Banach-tér helyett) egy alkalmas lokálisan konvex lineáris topológikus térben kell megfogalmazni az optimalizálási problémát.

Hestenes olyan optimalizálási feladatot vizsgált, amelyben a minimalizálendő funkcionál és a korlátozást (egyenlőtlenségek és egyenletek alakjában) definiáló leképezések egy közös A absztrakt halmaz felett vannak értelmezve, amely azonban nem szükségképpen van ellátva topológiával [39]. Hestenes a leképezéseket derivált halmazzal approximálta az optimum helyének környezetében, és az optimum szükséges feltételének meghatározását egy szétválasztási problémára vezette vissza végesdimenziós térben. Az optimum szükséges feltételét az általános multiplikátor szabály alakjában adta meg. Hestenes módszerének használatakor nehézséget jelent.

hogy nincs általános séma a derivált halmaz meghatározására és a definíciójában szereplő feltételek kielégítésére, dinamikus rendszer optimalizálásakor pedig az állapotegyenlet, valamint az állapot trajektóriára és a vezérlésre vonatkozó korlátozások csak az A halmaz révén vehetők figyelembe, továbbá a derivált halmaz megválasztásakor a differenciálegyenlet karakterisztikus függvényének számos speciális tulajdonságát ki kell használni a derivált halmaz konstrukciójához szükséges feltételek belátásához.

A globális optimum elégséges feltételét végesdimenziós térben Kuhn és Tucker a Lagrange-funkcionálra vonatkozó nyeregpont feltétel alakjában adta meg [40]. Girszanov megmutatta, hogy ez a feltétel Banach-térben is igaz [36]. Továbbá ha a célfüggvény és az egyenlőtlenség alakjában definiált korlátozások konvexek és simák, az egyenlőség alakjában adott korlátozás folytonos lineáris funkcionálok révén van definiálva, az A absztrakt halmaz alakjában adott korlátozás konvex és belső ponttal rendelkezik és teljesül az ún. Slater-feltétel, akkor a Lagrange-funkcionálra vonatkozó nyeregpont feltétel a globális optimumnak szükséges feltétele is. A pótlólagos feltételek teljesülése esetén a lokális optimum szükséges feltétele egyben a globális optimumnak az elégséges feltétele is.

10.1.1 Optimalizálás lineáris topológikus terekben

A gyakorlatban előforduló extrémum problémák a következő általános modellre vezethetők vissza: A Q absztrakt halmazon adva van az $F: Q \rightarrow R^1$ funkcionál. Meghatározandó azon $x_0 \in Q$, amelyre $F(x_0) = \min_{x \in Q} F(x)$ teljesül.

A Q halmaz általában egy bővebb halmaznak része és korlátozások definiálják. A korlátozások a legváltozatosabb típusúak lehetnek, leggyakrabban azonban egyenlőtlenségek és egyenlőségek (pl. differenciálegyenlet) alakjában adottak. Ebben a pontban feltesszük, hogy a Q halmaz egy lineáris topológikus tér része és a korlátozások száma véges. Célunk az extrémum szükséges feltételeinek meghatározása. A korlátozásokat bizonyos értelemben kúpokkal fogjuk approximálni az extrémum közelében. Az extrémum szükséges feltétele a konjugált kúpokból való folytonos lineáris funkcionálok közötti összefüggés alakjában fog adódni. Ez az összefüggés eléggé általános lesz ahhoz, hogy segítségével a konkrét gyakorlati problémák során az extrémum szükséges feltételei viszonylag egyszerűen levezethetők legyenek.

Definíció (csökkenési irány): Legyen (E, τ) lineáris topológikus tér, $x_0 \in E$ és $F: E \rightarrow R^1$. Azt mondjuk, hogy $h \in E$ az $F(x)$ funkcionál csökkenési iránya az x_0 pontban, ha létezik $0 \in E$ -nek olyan V környezete és olyan $\alpha < 0$ és $\varepsilon_0 > 0$ valós szám, hogy minden $\bar{h} \in h + V$ és $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ esetén

$$f(x_0 + \varepsilon \bar{h}) \leq F(x_0) + \varepsilon \alpha. \quad (10.1)$$

10.1 Lemma: A csökkenési irányok $K_{cs} = \{h \in E : h \text{ csökkenési iránya } F\text{-nek az } x_0 \text{ pontban}\}$ halmaza a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- 1) K_{cs} nulla csúcspontú nyílt kúp.
- 2) Ha $h \in K_{cs}$ és létezik az $F'(x_0, h)$ iránymenti derivált, akkor $F'(x_0, h) < 0$.
- 3) Ha $F(x)$ Lipschitz-feltételt elégít ki az x_0 pont egy környezetében és $F'(x_0, h) < 0$, akkor $h \in K_{cs}$.
- 4) Ha $F(x)$ konvex és folytonos funkcionál, akkor létezik az $F'(x_0, h)$ iránymenti derivált, a csökkenési irányok kúpja pedig a $K_{cs} = \{h \in E : F'(x_0, h) < 0\}$ konvex halmaz.
- 5) Ha $F_i(x)$ konvex és folytonos funkcionál, $i = 1, \dots, n$, és $F(x) = \max_{1 \leq i \leq n} F_i(x)$, akkor a csökkenési irányok kúpja a $K_{cs} = \{h \in E : \forall i \in I \text{ esetén } F'_i(x_0, h) < 0\}$ konvex halmaz, ahol $I = \{i \in \{1, \dots, n\} : F_i(x_0) = F(x_0)\}$.
- 6) Ha E lineáris normált tér és létezik az $F'(x_0)$ Fréchet-derivált, akkor a csökkenési irányok kúpja $K_{cs} = \{h \in E : F'(x_0)h < 0\}$ és K_{cs} konvex halmaz.
- 7) Ha E lineáris normált tér és létezik az $F'_i(x_0)$ Fréchet-derivált, $i = 1, \dots, n$, és $F(x) = \max_{1 \leq i \leq n} F_i(x)$, akkor $K_{cs} = \{h \in E : \forall i \in I \text{ esetén } F'_i(x_0)h < 0\}$ a csökkenési irányok konvex kúpja, ahol $I = \{i \in \{1, \dots, n\} : F_i(x_0) = F(x_0)\}$.
- 8) Legyen $x \in C^1[0, T]$, $F(x) = \max_{0 \leq t \leq T} |x(t)|$, akkor $\forall x_0, h \in C^1[0, T]$ esetén $\exists F'(x_0, h)$ iránymenti derivált és

$$F'(x_0, h) = \begin{cases} \|h\|, & \text{ha } x_0 = 0 \in C^1[0, T] \\ \max_{t \in R} [h(t) \operatorname{sign}(x_0(t))], & \text{ha } x_0 \neq 0 \in C^1[0, T], \end{cases} \quad (10.2)$$

ahol $R = \{t \in [0, T] : |x_0(t)| = F(x_0)\}$.

- 9) Legyen $E = C^n[0, T] \times L_\infty^n[0, T]$, $D(F) = E$, $F(x, u) = \int_0^T \phi(x(t), u(t), t) dt$ és $\phi(x, u, t)$ elégítse ki a folytonosság, mérhetőség és korlátosság tekintetében a következő **(C1) feltételeket**:

- i) majdnem minden (m.m.) rögzített $t \in [0, T]$ esetén $\phi_x(x, u, t)$ és $\phi_u(x, u, t)$ egyenlő mértékben folytonosak (x, u) -ban minden $K_1 \times K_2 \subset R^n \times R^r$ kompakt halmaz esetén,
- ii) minden rögzített $(x, u) \in R^n \times R^r$ esetén $\phi(x, u, t), \phi_x(x, u, t), \phi_u(x, u, t)$ mérhető függvényei t -nek,
- iii) minden korlátos $F \times G \subset R^n \times R^r$ halmaz esetén létezik olyan k valós szám, hogy minden $(x, u) \in F \times G$ és m.m. $t \in [0, T]$ esetén $|\phi(x, u, t)| < k$, $|\phi_x(x, u, t)| < k$ és $|\phi_u(x, u, t)| < k$.

Akkor minden $(x_0, u_0) \in E$ esetén létezik az $F'(x_0, u_0)$ Fréchet-derivált,

$$F'(x_0, u_0)(\bar{x}, \bar{u}) = \int_0^T [\langle \phi_x(x_0(t), u_0(t), t), \bar{x}(t) \rangle + \langle \phi_u(x_0(t), u_0(t), t), \bar{u}(t) \rangle] dt, \quad (10.3)$$

és az (x_0, u_0) pontbeli csökkenési irányok konvex kúpja

$$K_{cs} = \{(\bar{x}, \bar{u}) \in E : (F'(x_0, u_0)(\bar{x}, \bar{u})) < 0\}. \quad (10.4)$$

Definíció (megengedett irány): Legyen (E, τ) lineáris topológikus tér, $Q \subset E$ és $x_0 \in E$. Azt mondjuk, hogy $h \in E$ megengedett irány a Q halmaz számára az x_0 pontban, ha létezik $0 \in E$ -nek olyan V környezete és $\varepsilon_0 > 0$ valós szám, hogy minden $\bar{h} \in h + V$ és $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ esetén $x_0 + \varepsilon \bar{h} \in Q$.

10.2 Lemma: A megengedett irányok $K_m = \{h \in E : h \text{ megengedett irány a } Q \text{ halmaz számára az } x_0 \text{ pontban}\}$ halmaza a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- 1) K_m nulla csúcspontú nyílt kúp.
- 2) Ha $x_0 \notin \bar{Q}$, akkor $K_m = \emptyset$, és ha $x_0 \in Q^0$, akkor $K_m = E$. Speciálisan, ha $F: E \rightarrow R^1$, λ valós szám és $Q = \{x \in E : F(x) \leq \lambda\}$, akkor $F(x_0) > \lambda$ esetén $K_m = \emptyset$, és $F(x_0) < \lambda$ esetén $K_m = E$.
- 3) Ha $F: E \rightarrow R^1$ és $Q = \{x \in E : F(x) \leq F(x_0)\}$, akkor ha K_{cs} jelöli az $F(x)$ funkcionál csökkenési irányainak kúpját az x_0 pontban, K_m pedig a Q halmaz megengedett irányainak kúpját az x_0 pontban, akkor $K_{cs} \subset K_m$.
- 4) Teljesüljön a következő feltételek közül valamelyik:

- i) Elégítsen ki az $F: E \rightarrow R^1$ funkcionál az x_0 pont egy környezetében Lipschitz-feltételt, és létezzen minden $h \in E$ estén az $F'(x_0, h)$ iránymenti derivált, $F'(x_0, \cdot)$ legyen konvex funkcionál és létezzen $\tilde{h} \in E$, hogy $F'(x_0, \tilde{h}) < 0$.
- ii) Legyen az $F: E \rightarrow R^1$ funkcionál konvex és folytonos, és létezzen $\tilde{x} \in E$, amelyre $F(\tilde{x}) < F(x_0)$.
- iii) Létezzen az $F: E \rightarrow R^1$ funkcionálnak az $F'(x_0)$ Frèchet-deriváltja és legyen $F'(x_0) \neq 0 \in E'$.

Akkor a $Q = \{x \in E : F(x) \leq F(x_0)\}$ halmaz x_0 pontbeli megengedett irányainak K_m konvex kúpja

$$K_m = \{h \in E : F'(x_0, h) < 0\}. \quad (10.5)$$

5) Ha a $Q \subset E$ korlátozás konvex halmaz és $x_0 \in \overline{Q}$, akkor

$$K_m = \{\lambda(x - x_0) : \lambda > 0 \text{ valós szám és } x \in Q^0\}. \quad (10.6)$$

6) Ha $Q = \bigcap_{i=1}^n Q_i$, és $K_m^{(Q)}$ jelöli a Q , illetve $K_m^{(Q_i)}$ jelöli a Q_i halmaz megengedett irányainak kúpját az x_0 pontban, akkor

$$K_m^{(Q)} = \bigcap_{i=1}^n K_m^{(Q_i)}. \quad (10.7)$$

Definíció (érintő irány): Legyen (E, τ) lineáris topológikus tér, $Q \subset E$ és $x_0 \in E$. Azt mondjuk, hogy $h \in E$ érintő iránya a Q halmaznak az x_0 pontban, ha létezik $\varepsilon_0 > 0$ valós szám és olyan $r: (0, \varepsilon_0) \rightarrow E$ leképezés, hogy

1. $x(\varepsilon) := x_0 + \varepsilon h + r(\varepsilon) \in Q$ minden $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ esetén
2. $0 \in E$ minden V környezete esetén létezik olyan $0 < \eta_0(V) \leq \varepsilon_0$ valós szám, hogy $\frac{1}{\varepsilon} r(\varepsilon) \in V$ minden $0 < \varepsilon < \eta_0(V)$ esetén.

10.3 Lemma: Az érintő irányok $K_e = \{h \in E : h \text{ érintő iránya a } Q \text{ halmaznak az } x_0 \text{ pontban}\}$ halmaza a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- 1) K_e nulla csúcspontú kúp.

2) Legyen E és E_1 Banach-tér, $\varphi: E \rightarrow E_1$ leképezés, $\varphi(x_0) = 0 \in E_1$, létezzen a $\varphi'(x)$ Frèchet-derivált az x_0 pont egy környezetében és legyen $\varphi'(x)$ folytonos ebben a környezetben, továbbá teljesüljön $R(\varphi'(x_0)) = E_1$. Akkor a $Q = \{x \in E : \varphi(x) = 0\}$ halmaz x_0 pontbeli érintő irányainak kúpja a $K = \text{Ker } \varphi'(x_0)$ konvex halmaz (altér).

3) Legyen $E = C^n[0, T] \times L_\infty[0, T]$, $E_1 = C^n[0, T]$, $f = R^n \times R^r \times [0, T] \rightarrow R^n$ leképezés, $c \in R^n$. Tekintsük az $\dot{x} = f(x, u, t)$, $x(0) = c$ kezdeti érték problémát az $F: E \rightarrow E_1$ leképezés és az $F(x, u)(t) := x(t) - c - \int_0^t f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau$, $t \in [0, T]$ definíció segítségével a $Q = \{(x, u) \in E : F(x, u) = 0 \in E_1\}$ integrálegyenlet alakjában. Elégítse ki az $f(x, u, t)$ függvény a (C1) feltételeket. Akkor a Q halmaz $(x_0, u_0) \in Q$ pontbeli érintő irányainak konvex kúpja (altér)

$$K_e = \{(\bar{x}, \bar{u}) \in E : \bar{x}(t) = \int_0^t [f_x(x_0(\tau), u_0(\tau), \tau) \bar{x}(\tau) + f_u(x_0(\tau), u_0(\tau), \tau) \bar{u}(\tau)] d\tau\}. \quad (10.8)$$

Ha Q bővül az $x(T) = d \in R^n$ végérték feltétellel, akkor K_e bővül az $\bar{x}(T) = 0 \in R^n$ végérték feltétellel.

4) Legyen E Banach-tér, $x_0 \in E$, $F_i: E \rightarrow R^1$ funkcionál, $F_i(x_0) = 0$, létezzen az $F'_i(x)$ Frèchet-derivált és $F'_i(x)$ legyen folytonos az x_0 egy V környezetében, $i = 1, \dots, n$. Teljesüljön továbbá, hogy $\sum_{i=1}^n \lambda_i F'_i(x_0) = 0 \in E' \Leftrightarrow \lambda_i = 0, i = 1, \dots, n$. Akkor a $Q = \{x \in E : F_i(x) = 0, i = 1, \dots, n\}$ halmaz x_0 pontbeli érintő irányainak konvex kúpja

$$K_e = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker } F'_i(x_0). \quad (10.9)$$

5) Legyen E Banach-tér, $f_j \in E'$, b_j valós szám, $Q_j := \{x \in E : f_j(x) \geq b_j\}$, $j = 1, \dots, n$, $Q = \bigcap_{j=1}^n Q_j$, $x_0 \in Q$, $J = \{j \in \{1, \dots, n\} : f_j(x_0) = b_j\}$. Akkor $J = \emptyset$ esetén $K_e = E$, $J \neq \emptyset$ esetén pedig

$$K_e = \bigcap_{j \in J} \{h \in E : f_j(h) \geq 0\}. \quad (10.10)$$

Definíció (konjugált kúp): Legyen (E, τ) lineáris topológikus tér, $K \subset E$ nulla csúcspontú kúp. Akkor a $K^* = \{f \in E' : \text{minden } x \in K \text{ esetén } f(x) \geq 0\}$ halmazt a K kúp konjugált kúpjának nevezzük.

10.4 Lemma: A K^* konjugált kúp a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- 1) Ha $K \subset E$ altér, akkor $K^* = \{f \in E' : \text{minden } x \in K \text{ esetén } f(x) = 0\}$.
- 2) Legyen $f \neq 0 \in E'$, $K_1 := \{x \in E : f(x) = 0\}$, $K_2 := \{x \in E : f(x) \geq 0\}$ és $K_3 := \{x \in E : f(x) > 0\}$. Akkor $K_1^* = \{\lambda f : -\infty < \lambda < \infty\}$, $K_2^* = \{\lambda f : 0 \leq \lambda < \infty\}$ és $K_3^* = K_2^*$.
- 3) Legyen $Q \subset E$ konvex, $x_0 \in \overline{Q}$ és teljesüljön minden $x \in Q$, $x \neq x_0$ és $0 < \lambda < 1$ esetén $\lambda x + (1 - \lambda)x_0 \in Q$. Legyen $Q^* := \{f \in E' : \text{minden } x \in Q \text{ esetén } f(x) \geq f(x_0)\}$. Jelölje K_m a Q halmaz x_0 pontbeli megengedett irányainak, K_e pedig az x_0 pontbeli érintő irányainak kúpját, akkor
 - i) $K_e^* = Q^*$,
 - ii) ha $Q^0 \neq \emptyset$, akkor $K_m^* = Q^*$.
- 4) Legyen E Banach-tér, $f_j \in E'$, b_j valós szám, $Q := \{x \in E : f_j(x) \geq b_j, j = 1, \dots, m\}$. Legyen x_0 határpontja Q -nak, jelölje a Q halmaz x_0 pontbeli érintő irányainak kúpját K_e és legyen

$$M^* := \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j : \lambda_j \geq 0, \lambda_j (f_j(x_0) - b_j) = 0, j = 1, \dots, m \right\}. \quad (10.11)$$

Akkor $K_e^* = M^*$.

- 5) Legyen (E, τ) lineáris topológikus tér, $K = L_1 \cap L_2$, ahol $L_1 \subset E$ zárt altér és $L_2 \subset E$ végesdimenziós altér, akkor $K^* = L_1^* + L_2^*$.

Definíció: Legyen (E, τ) lineáris topológikus tér, $x_0 \in E$, $Q \subset E$ és $F : E \rightarrow \mathbb{R}^l$ funkcionál. Azt mondjuk, hogy

- i) $F(x)$ helyesen csökkenő az x_0 pontban, ha K_{cs} nem üres konvex halmaz,

- ii) az $F(x)$ funkcionálra vonatkozó, egyenlőtlenség alakjában adott Q korlátozás helyes az x_0 pontban, ha K_m nem üres konvex halmaz,
- iii) az $F(x)$ funkcionálra vonatkozó, egyenlőség alakjában adott Q korlátozás helyes az x_0 pontban, ha K_e nem üres konvex halmaz.

Definíció (lokális minimum): Legyen (E, τ) lineáris topológikus tér, $Q \subset E$ és $F: E \rightarrow R^1$ funkcionál. Az mondjuk, hogy $F(x)$ -nek lokális minimuma van az $x_0 \in Q$ pontban, ha x_0 -nak van olyan U környezete, hogy

$$F(x_0) = \min \{F(x) : x \in Q \cap U\}. \quad (10.12)$$

10.1 Tétel (Dubovickij–Miljutyin [36]): Legyen (E, τ) lineáris topológikus tér és legyen az $F: E \rightarrow R^1$ funkcionálnak a $Q = \bigcap_{i=1}^{n+1} Q_i$ halmazon lokális minimuma az $x_0 \in Q$ pontban. Legyen $F(x)$ helyesen csökkenő az x_0 pontban, és jelölje K_0 a csökkenési irányok kúpját. Legyenek az egyenlőtlenség alakjában adott Q_i korlátozások helyesek az x_0 pontban, $i = 1, \dots, n$, és jelölje K_i a Q_i halmaz megengedett irányainak kúpját az x_0 pontban. Legyen továbbá az egyenlőség alakjában adott Q_{n+1} korlátozás helyes az x_0 pontban, és jelölje K_{n+1} a Q_{n+1} halmaz érintő irányainak kúpját az x_0 pontban. Jelölje K_i^* a K_i konjugált kúpját. Akkor létezik $f_i \in K_i^*$, $i = 0, \dots, n+1$, hogy nem mindegyik f_i nulla, és amelyre teljesül az

$$f_0 + f_1 + \dots + f_{n+1} = 0 \in E' \quad \text{Euler–Lagrange-egyenlet,} \quad (10.13)$$

továbbá

$$f_i \neq 0 \in E', \text{ ha } \bigcap_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n K_j \neq \emptyset. \quad (10.14)$$

10.1.2 A statikus optimum szükséges feltétele skalárértékű kritérium esetén Banach-térben

A tételek megfogalmazásakor az A konvex halmazról feltesszük, hogy kielégíti a következő, a továbbiakban tömören **(FA) feltételként** hivatkozott elvárásokat.

(FA) feltétel: Legyen E Banach-tér, $A \subset E$ konvex halmaz, $x_0 \in A$ rögzített, és teljesüljön az alábbi két feltétel közül valamelyik:

- i) $A^0 \neq \emptyset$ (A -nak van belső pontja)
 ii) $\exists f_j \in E'$ és $b_j \in R^1$, $j = 1, \dots, m$, hogy $A = \{x \in E: f_j(x) \geq b_j, j = 1, \dots, m\}$,
 továbbá a $J := \{j \in \{1, \dots, m\}: f_j(x_0) = b_j\}$ jelölés mellett

$$\sum_{j \in J} \tilde{\lambda}_j f_j = 0_{E'}, \tilde{\lambda}_j \geq 0, j \in J \Leftrightarrow \tilde{\lambda}_j = 0, j \in J.$$

Vegyük észre, hogy az (FA) feltétel teljesülése esetén vagy belső pontja van A -nak, vagy pedig folytonos lineáris funkcionálokkal definiált félterek metszete ("poliéder"). Az utóbbi esetben azon funkcionálok, melyekre x_0 a féltér határán van, nemnegatív együttthatók mellett lineárisan függetlenek. A 10.1 Dubovickij-Miljutyin-tételből következik a lokális minimum következő szükséges feltétele.

10.2 Tétel: Legyen E Banach-tér, $x_0 \in E$, k és n természetes egész, $F_i: E \rightarrow R^1$ funkcionál, amelynek létezik és folytonos a Frèchet-deriváltja az x_0 egy V környezetében, $i = 0, \dots, n+k$, $A \subset E$ konvex és kielégíti az (FA) feltételt. Legyen

$$Q = \{x \in E: F_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, n; F_i(x) = 0, i = n+1, \dots, n+k; x \in A\} \quad (10.15)$$

a korlátozás, $x_0 \in Q$ és létezzen x_0 -nak olyan U környezete, hogy

$$\min_{x \in Q \cap U} F_0(x) = F_0(x_0). \quad (10.16)$$

Akkor léteznek olyan λ_i számok, $i = 0, \dots, n+k$, hogy

- 1) $\lambda := (\lambda_0, \dots, \lambda_{n+k}) \neq 0$
- 2) $\lambda_i \geq 0$, $i = 0, \dots, n$ és $\lambda_i F_i(x_0) = 0$, $i = 1, \dots, n$,
- 3) $f(x) := \sum_{i=0}^{n+k} \lambda_i F'_i(x_0)x$ összefüggéssel definiált $f \in E'$ folytonos lineáris funkcionálra teljesül

$$\forall x \in A \Rightarrow f(x) \geq f(x_0). \quad (10.17)$$

Megjegyzés:

Az A konvex halmaz a megengedett irányok K_m kúpjával jellemezhető. A K_m^* konjugált kúp tulajdonságai közül az (FA) feltétel i) esetében a konjugált kúp 3) tulajdonsága, az (FA) feltétel ii) esetében pedig a konjugált kúp 4) tulajdonsága volt kihasználható, lásd 10.4 lemma.

A 10.2 tételnek speciális esete a Kuhn–Tucker-tétel és a Lagrange-multiplikátor szabály, lásd a könyv I. kötet 12. fejezetét [1].

10.1.3 A lokális maximum elv

Tekintsük a dinamikus optimalizálási feladatot rögzített $[0, T]$ időintervallum és skalárértékű kritérium esetén. Feltesszük, hogy a dinamikus rendszer állapotegyenlet alakjában adott, a vezérlési intervallum kezdeti és végpontjában adva van az állapotváltozók értéke (c, d) , a vezérlésre vonatkozó feltétel egy M absztrakt halmaz alakjában adott, a célfüggvény pedig integrál alakjában definiált funkcionál.

10.3 Tétel (lokális maximum elv): Legyen $E = C^n[0, T] \times L_\infty^r[0, T]$, $\phi: R^n \times R^r \times [0, T] \rightarrow R^1$, $f: R^n \times R^r \times [0, T] \rightarrow R^n$, és elégítse ki ϕ és f a (C1)

feltételt. Legyen $F: E \rightarrow R^1$ és $F(x, u) := \int_0^T \phi(x(t), u(t), t) dt$, $M \subset R^r$ konvex halmaz és $M^0 \neq \emptyset$, $c, d \in R^n$. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$Q_1 = \{(x, u) \in E : u(t) \in M \text{ m.m. } t \in [0, T] \text{ esetén} \},$$

$$Q_2 = \{(x, u) \in E : x(t) = c + \int_0^t f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \quad \forall t \in [0, T] \text{ esetén, } x(T) = d \},$$

$$Q = Q_1 \cap Q_2.$$

Legyen $(x_0, u_0) \in Q$ és létezzen (x_0, u_0) -nak olyan V környezete, hogy $\min\{F(x, u) : (x, u) \in Q \cap V\} = F(x_0, u_0)$. Akkor létezik $\lambda_0 \in R^1$, $\lambda_0 \geq 0$ és $\psi: [0, T] \rightarrow R^n$ abszolút folytonos függvény, hogy

1. a λ_0 szám és a $\psi(\cdot)$ függvény közül nem mindkettő nulla,
2. $\frac{d\psi(t)}{dt} = -f_x^*(x_0(t), u_0(t), t)\psi(t) + \lambda_0 \phi_x(x_0(t), u_0(t), t)$ m.m. $t \in [0, T]$ esetén,
3. $\langle -f_u(x_0(t), u_0(t), t)\psi(t) + \lambda_0 \phi_u(x_0(t), u_0(t), t), u - u_0(t) \rangle \geq 0$ minden $u \in M$ és m.m. $t \in [0, T]$ esetén.

Bizonyítás:

1. Az $F(x, u)$ funkcionál (x_0, u_0) pontbeli csökkenési irányainak K_0 konvex kúpja a (10.3-4) összefüggés szerint számítható. Ha $K_0 \neq \emptyset$, akkor a 10.4 lemma szerint

$$K_0^* = \{f_0 \in E' :$$

$$f_0(\bar{x}, \bar{u}) = -\lambda_0 \int_0^T [\langle \phi_x(x_0(t), u_0(t), t), \bar{x}(t) \rangle + \langle \phi_u(x_0(t), u_0(t), t), \bar{u}(t) \rangle] dt,$$

$$\lambda_0 \geq 0 \}.$$

$K_0 = \emptyset$ esetén az integrál nulla.

- II. Mivel $M \subset R^r$ konvex halmaz és $M^0 \neq \emptyset$, ezért $Q_1 = C^n[0, T] \times A$ alakú, ahol $A \subset L_\infty^r[0, T]$ konvex halmaz és $A^0 \neq \emptyset$, tehát Q_1 konvex halmaz E -ben és $Q_1^0 \neq \emptyset$. Ezért $Q_1(x_0, u_0)$ pontbeli megengedett irányainak konvex kúpja (10.6) szerint $K_1 = \{ \lambda(x - x_0, u - u_0) : (x, u) \in C^n[0, T] \times A^0, \lambda > 0 \}$, és a 10.4 lemma 3) pontja szerint

$$K_1^* = \{ (0, f_2) : f_2(u) \geq f_2(u_0), f_2 \in L_\infty'[0, T], u \in A \}.$$

- III. Tegyük fel, hogy minden olyan $\psi \neq 0 \in C^n[0, T]$, $\psi : [0, T] \rightarrow R^n$ abszolút folytonos függvény esetén, amelyre m.m. $[0, T]$ esetén teljesül

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -f_x^*(x_0(t), u_0(t), t)\psi(t), \text{ létezik } I \subset [0, T], \text{ hogy } \lambda(I) > 0 \text{ és minden}$$

$t \in I$ esetén $f_u^*(x_0(t), u_0(t), t)\psi(t) \neq 0 \in R^r$. Akkor a Q_2 halmaz (x_0, u_0) pontbeli érintő irányainak altere a 10.3 lemma 3) pontja szerint $K_2 = L_1 \cap L_2$ alakú, ahol $L_2 = \{ (\bar{x}, \bar{u}) \in E : \bar{x}(T) = 0 \in R^n \}$ végesdimenziós altér, ezért a 10.4 lemma szerint $K_2^* = L_1^* + L_2^*$. Mivel L_2 végesdimenziós, ezért

$$L_2^* = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{x}_i(T) : \lambda_i \in R^1, i = 1, \dots, n \right\}.$$

- IV. Tegyük fel, hogy $K_0 \neq \emptyset$ és $K_2^* = L_1^* + L_2^*$. A 10.1 Dubovickij–Miljutyin-tétel szerint van olyan $f_0 \in K_0^*$, $f_1 \in K_1^*$, $f_2 \in L_1^*$ és $f_3 \in L_2^*$, amelyek nem mind egyenlők 0 $\in E'$ -vel, és amelyekre minden $(\bar{x}, \bar{u}) \in E$ esetén teljesül

$$f_0(\bar{x}, \bar{u}) + f_1(\bar{x}, \bar{u}) + f_2(\bar{x}, \bar{u}) + f_3(\bar{x}, \bar{u}) = 0.$$

Legyen $\bar{u} \in L_\infty'[0, T]$ tetszőleges. Az

$$\bar{x}(t) = \int_0^t [f_x(x_0(\tau), u_0(\tau), \tau)\bar{x}(\tau) + f_u(x_0(\tau), u_0(\tau), \tau)\bar{u}(\tau)] d\tau, t \in [0, T]$$

integrálegyenletnek létezik egyértelmű $\bar{x} = \bar{x}(\bar{u}) \in C^n[0, T]$ megoldása. Mivel $(\bar{x}(\bar{u}), \bar{u}) \in L_1$ és L_1 altér, ezért $f_2(\bar{x}(\bar{u}), \bar{u}) = 0$. Másrészt $f_1 = (0, h)$ alakú, ahol $h \in L_\infty^+[0, T]$ és $h(\bar{u}) \geq h(u_0)$ minden $\bar{u} \in A$ esetén. Legyen a továbbiakban $\bar{u} \in A$, $\bar{x} = \bar{x}(\bar{u})$, akkor

$$f_0(\bar{x}, \bar{u}) + f_1(\bar{x}, \bar{u}) + f_3(\bar{x}, \bar{u}) = 0,$$

amiből következik

$$h(\bar{u}) = \lambda_0 \int_0^T [\langle \phi_x(x_0(t), u_0(t), t), \bar{x}(t) \rangle + \langle \phi_u(x_0(t), u_0(t), t), \bar{u}(t) \rangle] dt - \langle a, \bar{x}(T) \rangle$$

ahol $a \in R^n$. Elégítse ki $\psi(t)$ m.m. $t \in [0, T]$ esetén a

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -f_x^*(x_0(t), u_0(t), t)\psi(t) + \lambda_0 \phi_x(x_0(t), u_0(t), t), \quad \psi(T) = a$$

differenciálegyenletet. Parciálisan integrálunk:

$$\begin{aligned} \lambda_0 \int_0^T \langle \phi_x(x_0(t), u_0(t), t), \bar{x}(t) \rangle dt - \langle a, \bar{x}(T) \rangle &= \\ &= \int_0^T \left\langle \frac{d\psi(t)}{dt} + f_x^*(x_0(t), u_0(t), t)\psi(t), \bar{x}(t) \right\rangle dt - \langle a, \bar{x}(T) \rangle = \\ &= \langle \psi(t), \bar{x}(t) \rangle \Big|_0^T - \int_0^T \left\langle \psi(t), \frac{d\bar{x}(t)}{dt} \right\rangle dt + \\ &+ \int_0^T \langle \psi(t), f_x(x_0(t), u_0(t), t)\bar{x}(t) \rangle dt - \langle a, \bar{x}(T) \rangle = \\ &= - \int_0^T \left\langle \psi(t), \frac{d\bar{x}(t)}{dt} - f_x(x_0(t), u_0(t), t)\bar{x}(t) \right\rangle dt = \\ &= - \int_0^T \langle f_u^*(x_0(t), u_0(t), t)\psi(t), \bar{u}(t) \rangle dt, \end{aligned}$$

ahonnan következik

$$h(\bar{u}) = \int_0^T \langle -f_u^*(x_0(t), u_0(t), t)\psi(t) + \lambda_0 \phi_u(x_0(t), u_0(t), t), \bar{u}(t) \rangle dt.$$

De akkor minden $\bar{u} \in A$ esetén

$$\int_0^T < -f_u^*(x_0(t), u_0(t), t) \psi(t) + \lambda_0 \phi_u(x_0(t), u_0(t), t), \bar{u}(t) - u_0(t) > dt \geq 0,$$

ahonnan következik, hogy minden $u \in M$ és m.m. $t \in [0, T]$ esetén

$$< -f_u^*(x_0(t), u_0(t), t) \psi(t) + \lambda_0 \phi_u(x_0(t), u_0(t), t), u - u_0(t) > \geq 0.$$

Ha $\lambda_0 = 0$ és $\psi(t) \equiv 0$ lenne, akkor következne $h(\bar{u}) = 0$ minden $\bar{u} \in A$ esetén és $A^0 \neq \emptyset$ miatt $h = 0 \in (L_\infty^r)'$, amiből következne $f_0, f_1, f_2, f_3 = 0 \in E'$ is, ami ellentmondana a 10.1 Dubovickij–Miljutyin-tételnek. Ezzel az el nem fajuló esetre a tételt bebizonyítottuk.

V. Tegyük fel, hogy $K_0 = \emptyset$ és $K_2^* = L_1^* + L_2^*$. Akkor I) szerint

$$\int_0^T [< \phi_x(x_0(t), u_0(t), t), \bar{x}(t) > + < \phi_u(x_0(t), u_0(t), t), \bar{u}(t) >] dt = 0 \quad \forall (\bar{x}, \bar{u}) \in E$$

esetén. Legyen $\psi(t)$ megoldása a

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -f_x^*(x_0(t), u_0(t), t) \psi(t) + \phi_x(x_0(t), u_0(t), t), \quad \psi(T) = 0 \in R^n$$

differenciálegyenletnek, továbbá legyen $\bar{u} \in L_\infty^r[0, T]$ tetszőleges és $\bar{x} = \bar{x}(\bar{u})$ megoldása az

$$\bar{x}(t) = \int_0^t [f_x(x_0(\tau), u_0(\tau), \tau) \bar{x}(\tau) + f_u(x_0(\tau), u_0(\tau), \tau) \bar{u}(\tau)] d\tau, \quad t \in [0, T]$$

integrálegyenletnek, akkor

$$\begin{aligned} \int_0^T < \phi_x(x_0(t), u_0(t), t), \bar{x}(t) > dt &= \\ &= \int_0^T < \frac{d\psi(t)}{dt} + f_x^*(x_0(t), u_0(t), t) \psi(t), \bar{x}(t) > dt = \\ &= - \int_0^T < f_u^*(x_0(t), u_0(t), t) \psi(t), \bar{u}(t) > dt, \end{aligned}$$

ezért

$$\int_0^T < -f_u^*(x_0(t), u_0(t), t) \psi(t) + \phi_u(x_0(t), u_0(t), t), \bar{u}(t) - u_0(t) > dt = 0$$

minden $\bar{u} \in L_\infty'[0, T]$ esetén. Mivel a skalárszorzat bal oldali tényezője is $L_\infty'[0, T]$ -beli, ezért m.m. $t \in [0, T]$ esetén

$$-f_u^*(x_0(t), u_0(t), t) \psi(t) + \phi_u(x_0(t), u_0(t), t) = 0 \in R^r.$$

Legyen $\lambda_0 = 1$, akkor minden $u \in M$ és m.m. $t \in [0, T]$ esetén

$$< -f_u^*(x_0(t), u_0(t), t) \psi(t) + \lambda_0 \phi_u(x_0(t), u_0(t), t), u - u_0(t) > \geq 0.$$

VI. Tegyük fel, hogy III)-mal ellentétben létezik $\psi \neq 0 \in C^n[0, T]$ abszolút folytonos függvény, hogy m.m. $t \in [0, T]$ esetén

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(t)}{dt} &= -f_x^*(x_0(t), u_0(t), t) \psi(t), \\ f_u^*(x_0(t), u_0(t), t) \psi(t) &= 0 \in R^r. \end{aligned}$$

Akkor $\lambda_0 = 0$ választással minden $u \in M$ és m.m. $t \in [0, T]$ esetén

$$< -f_u^*(x_0(t), u_0(t), t) \psi(t) + \lambda_0 \phi_u(x_0(t), u_0(t), t), u - u_0(t) > \geq 0.$$

Következmény: Vezessük be a következő jelölést:

$$H(x, u, \psi, t) := < f(x, u, t), \psi > - \lambda_0 \phi(x, u, t), \quad (10.18)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (10.19)$$

Akkor a tétel állítása átfogalmazható a következő alakra:

Minden $u \in M$ és m.m. $t \in [0, T]$ esetén

$$< -H_u(x_0(t), u_0(t), \psi(t), t), u - u_0(t) > \geq 0. \quad (10.20a)$$

A 10.2 tétel alapján tudjuk, hogy annak szükséges feltétele, hogy $u_0(t) \in M$ és V környezete $u_0(t)$ esetén

$$\min\{-H(x_0(t), u, \psi(t), t) : u \in M \cap V\} = -H(x_0(t), u_0(t), \psi(t), t) \quad (10.20b)$$

teljesüljön, az, hogy $-H_u(x_0(t), u_0(t), \psi(t), t)$ támaszfunkcionálja legyen az M halmaznak az $u_0(t)$ pontban. Ezért a tétel állítása úgy is megfogalmazható, hogy ha (x_0, u_0) megoldása a tételben megfogalmazott optimális irányítási feladatnak, akkor a $H(x_0(t), u, \psi(t), t)$ függvény m.m. $t \in [0, T]$ esetén az $u = u_0(t)$ pontban elégíti ki az M halmazon az u szerinti *lokális maximum* szükséges feltételét. Innen a "lokális maximum elv" elnevezés.

Megjegyzés:

1. Abban a speciális esetben, amikor az $x(t)$ trajektória jobb oldali végpontja szabad, azaz $x(0) = c$, $x(T) \in R^n$, a bizonyítás során az el nem fajulás feltétele elhagyható. Ekkor $\lambda_0 > 0$, és így speciálisan $\lambda_0 = 1$ is választható (linearitás λ_0 -ban és ψ -ben). Másrészt a bizonyítás IV) pontjában $\bar{x}(T) \neq 0 \in R^n$ miatt a parciális integráláskor $\psi(T) = 0 \in R^n$ választható.
2. Hasonlóan, ha az $x(t)$ trajektória bal oldali végpontja (is) szabad, akkor a $\psi(0) = 0 \in R^n$ feltételnek (is) teljesülnie kell.
3. Az itt közölt bizonyítást a fentieknél jóval lényegesebben kellene módosítani ahhoz, hogy az irodalomból ismert következő összefüggést belássuk: Ha S_1 és S_2 sima felületek, és az $x(t)$ trajektóriára az $x(0) \in S_1$ és $x(T) \in S_2$ feltételek vannak előírva, akkor $\psi(0)$ merőleges az S_1 korlátozás $x_0(0)$ pontbeli érintő síkjára, és $\psi(T)$ merőleges az S_2 korlátozás $x_0(T)$ pontbeli érintő síkjára (transzverzálitási feltétel).

A folytonosidejű LQ probléma vizsgálatánál a lokális maximum elv egy olyan alakját fogjuk használni, amelyben az eddig integrállal definiált célfüggvényhez egy additív tag járul, amely a végállapot függvénye, a végállapot viszont emiatt szabad.

10.4 Tétel: Tekintsük a 10.3 tételben vizsgált feladatot az ott használt jelölésekkel. de szerepeljen még a célfüggvényben egy additív $\varphi(x(T))$ tag, ahol $\varphi: R^n \rightarrow R^s$ differenciálható, és hiányozzon ennek megfelelően Q_2 -ből az $x(T) = d$ végfeltétel:

$$F(x, u) := \int_0^T \phi(x(t), u(t), t) dt + \varphi(x(T)),$$

$$Q_2 = \{(x, u) \in E : x(t) = c + \int_0^t f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \quad \forall t \in [0, T] \text{ esetén.}$$

Legyen $(x_0, u_0) \in Q$ és létezzen (x_0, u_0) -nak olyan V környezete, hogy $\min\{F(x, u) : (x, u) \in Q \cap V\} = F(x_0, u_0)$. Akkor létezik $\lambda_0 \geq 0$ valós szám és $\psi : [0, T] \rightarrow R^n$ abszolút folytonos függvény, hogy

1. a λ_0 szám és a $\psi(\cdot)$ függvény nem mindkettő nulla,
2. $\frac{d\psi(t)}{dt} = -f_x^*(x_0(t), u_0(t), t)\psi(t) + \lambda_0 \phi_x(x_0(t), u_0(t), t)$ m.m. $t \in [0, T]$ esetén,
 $\psi(T) := -\lambda_0 \phi'(x(T))$,
3. $\langle -f_u(x_0(t), u_0(t), t)\psi(t) + \lambda_0 \phi_u(x_0(t), u_0(t), t), u - u_0(t) \rangle \geq 0$ minden $u \in M$ és m.m. $t \in [0, T]$ esetén.

Bizonyítás:

Csak a nem elfajuló esetre koncentrálnunk és követjük a 10.3 tétel bizonyításának menetét és jelöléseit.

I. Minden $(x_0, u_0) \in E$ esetén létezik az $F'(x_0, u_0)$ Fréchet-derivált,

$$F'(x_0, u_0)(\bar{x}, \bar{u}) = \int_0^T [\langle \phi_x(x_0(t), u_0(t), t), \bar{x}(t) \rangle + \langle \phi_u(x_0(t), u_0(t), t), \bar{u}(t) \rangle] dt + \langle \phi'(x_0(T)), \bar{x}(T) \rangle,$$

és az (x_0, u_0) pontbeli csökkenési irányok konvex K_0 kúpja és K_0^* konjugált kúpja (10.3-4) szerint számítható:

$$K_0 = \{(\bar{x}, \bar{u}) \in E : (F'(x_0, u_0)(\bar{x}, \bar{u})) < 0\}, \quad (10.21a)$$

$$K_0^* = \{f_0 \in E' :$$

$$f_0(\bar{x}, \bar{u}) = -\lambda_0 \left(\int_0^T [\langle \phi_x(x_0(t), u_0(t), t), \bar{x}(t) \rangle + \langle \phi_u(x_0(t), u_0(t), t), \bar{u}(t) \rangle] dt + \langle \phi'(x_0(T)), \bar{x}(T) \rangle \right), \quad \lambda_0 \geq 0 \}. \quad (10.21b)$$

II. Legyen $\bar{u} \in L_\infty'[0, T]$ tetszőleges. A korábbi konstrukció szerint $\bar{x} = \bar{x}(\bar{u})$, $f_2(\bar{x}(\bar{u}), \bar{u}) = 0$, $f_1 = (0, h)$, $h \in L_\infty'[0, T]^*$ és $h(\bar{u}) \geq h(u_0)$ minden $\bar{u} \in A$ esetén. Mivel nincs végfeltétel, ezért $f_3 \in L_2^*$ hiányzik, ezért $f_0(\bar{x}, \bar{u}) + f_1(\bar{x}, \bar{u}) = 0$, amiből következik $h(\bar{u}) = -f_0(\bar{x}, \bar{u})$, azaz

$$h(\bar{u}) = \lambda_0 \left(\int_0^T [\langle \phi_x, \bar{x} \rangle + \langle \phi_u, \bar{u} \rangle] dt + \langle \varphi', \bar{x}(T) \rangle \right).$$

III. Ha a $\lambda_0 \phi_x = \frac{d\psi}{dt} + f_x^* \psi$ mindkét oldalán skalárisan szorzunk $\bar{x}(t)$ -vel és integrálunk, majd mindkét oldalhoz hozzáadjuk a $\lambda_0 \langle \varphi'(x_0(T)), \bar{x}(T) \rangle$ tagot az integrálás után, akkor a jobb oldalon az integráláskor parciálisan integrálva és $\psi(T) := -\lambda_0 \varphi'(x(T))$ választással élve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lambda_0 \int_0^T \langle \phi_x, \bar{x} \rangle dt + \lambda_0 \langle \varphi'(x_0(T)), \bar{x}(T) \rangle &= \\ &= \langle \psi, \bar{x} \rangle \Big|_0^T - \int_0^T \langle \psi, \frac{d\bar{x}}{dt} \rangle dt + \int_0^T \langle f_x^* \psi, \bar{x} \rangle dt + \lambda_0 \langle \varphi'(x_0(T)), \bar{x}(T) \rangle = \\ &= - \int_0^T \langle f_u^* \psi, \bar{u} \rangle dt. \end{aligned}$$

IV. Mindkét oldalhoz hozzáadva az $\int_0^T \langle \lambda_0 \phi_u, \bar{u} \rangle dt$ tagot kapjuk, hogy

$$h(\bar{u}) = \int_0^T \langle -f_u^* \psi + \lambda_0 \phi_u, \bar{u} \rangle dt.$$

De akkor minden $\bar{u} \in A$ esetén

$$\int_0^T \langle -f_u^*(x_0(t), u_0(t), t) \psi(t) + \lambda_0 \phi_u(x_0(t), u_0(t), t), \bar{u}(t) - u_0(t) \rangle dt \geq 0.$$

Mivel $\bar{u} \in L_\infty^+[0, T]$ tetszőleges, ezért minden $u \in M$ és m.m. $t \in [0, T]$ esetén

$$\langle -f_u^*(x_0(t), u_0(t), t) \psi(t) + \lambda_0 \phi_u(x_0(t), u_0(t), t), u - u_0(t) \rangle \geq 0,$$

ami a $H(x, u, \psi, t) = \langle f(x, u, t), \psi \rangle - \lambda_0 \phi(x, u, t)$ Hamilton-függvény segítségével a (10.20a-b) lokális maximum elv alakjára hozható.

Következmény:

- 1) Ha $M = R^r$, akkor $H_u = f_u^*(x_0(t), u_0(t), t) \psi(t) - \lambda_0 \phi_u(x_0(t), u_0(t), t) \equiv 0$.
- 2) Ha $\lambda_0 > 0$, akkor mindkét oldalon oszthatunk $(-\lambda_0)$ -al és bevezethetjük a $\hat{\psi} := \psi / (-\lambda_0)$ és $\hat{H} := \langle f, \hat{\psi} \rangle + \phi$ jelölést. Ezzel a jelöléssel $\hat{H}_u(x_0(t), u_0(t), \hat{\psi}(t), t) \equiv 0$ és $\frac{d\hat{\psi}}{dt} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial x}$ m.m., ahol $\hat{\psi}(T) = \varphi'(x_0(T))$.

10.1.4 A Pontrjagin-féle maximum elv

Tekintsük a dinamikus optimalizálási feladatot mozgó végpontú $[0, t_1]$ időintervallum, skalárértékű kritérium és először csak időinvariáns rendszer esetén. Az optimum szükséges feltétele a Pontrjagin-féle maximum elv alakjában fogalmazható meg. A Pontrjagin-féle maximum elv levezethető a lokális maximum elvből, ehhez azonban néhány matematikai részletet tisztázni kell.

10.5 Lemma: Legyen $0 < \varepsilon < 1$. Akkor megkonstruálható olyan $I_{n+1,k} \subset [0, 1]$ diszjunkt és nyílt intervallum rendszer, amelynek hossza $(\varepsilon/(1+2\varepsilon))^{n+1}$, $k = 1, \dots, 2^n$, és amellyel teljesül, hogy

- i) $P := [0, 1] \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k} \right)$ és $\lambda(P) = 1 - \varepsilon$,
- ii) $P^0 = (\bar{P})^0 = \emptyset$ (P sehol sem sűrű R^1 -ben),
- iii) P zárt és minden pontja torlódási pont (P perfekt),
- iv) $I = (a, b)$, $P \cap I \neq \emptyset \Rightarrow \lambda(P \cap I) > 0$.

10.6 Lemma: Legyen $M \subset R^r$, $M \neq \emptyset$, akkor létezik $\{v_i\}_{i=1}^{\infty} \subset M$, hogy $\overline{\{v_1, v_2, \dots\}} \supset M$.

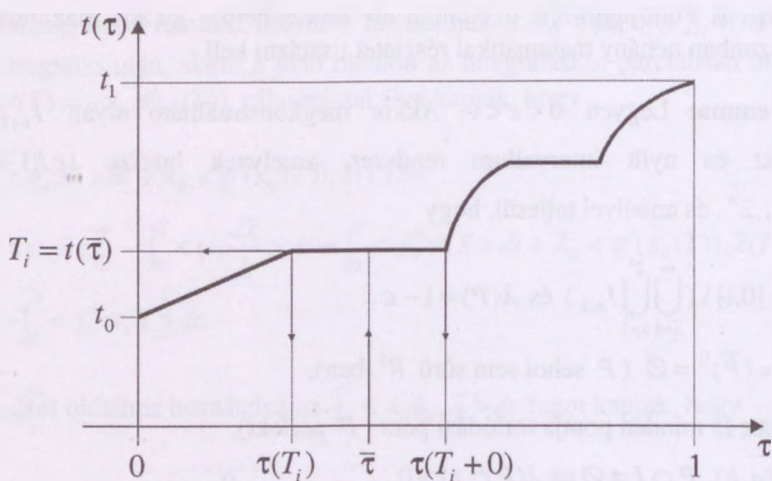
10.7 Lemma: Legyen $a, b, \alpha, \beta \in R^1$; $f, g \in L_{\infty}^1[a, b]$, $g(\tau) \geq 0$ minden $\tau \in [a, b]$ esetén; $\alpha + \int_a^b g(\tau) d\tau = \beta$; $D(\varphi) = [a, b]$, $\varphi(\tau) := \alpha + \int_a^{\tau} g(\xi) d\xi$; $D(\psi) = [\alpha, \beta]$, $\psi(t) := \inf \{\tau \in [a, b] : \varphi(\tau) = t\}$, akkor $f \circ \psi \in L_{\infty}^1[\alpha, \beta]$.

10.8 Lemma: Teljesüljenek a következő feltételek:

- i) $w \in L_{\infty}^1[0, 1]$,
- ii) $w(\tau) \geq 0$ minden $\tau \in [0, 1]$ esetén,
- iii) $R_1 := \{\tau : w(\tau) > 0\}$, $\lambda(R_1) > 0$,
- iv) $t_0 + \int_0^1 w(\xi) d\xi = t_1$,
- v) $D(t) = [0, 1]$, $t(\tau) := t_0 + \int_0^{\tau} w(\xi) d\xi$,
- vi) $D(\tau) = [t_0, t_1]$, $\tau(\bar{t}) := \inf \{\bar{\tau} : t(\bar{\tau}) = \bar{t}\}$.

Akkor $S \subset [t_0, t_1]$, $\lambda(S) = 0 \Rightarrow \lambda(t^{-1}(S) \cap R_1) = 0$ és $\lambda(\{\bar{\tau} : \tau(t(\bar{\tau})) \neq \bar{\tau}\} \cap R_1) = 0$.

A $t(\tau)$ és $\tau(t)$ függvények értelmezéséhez illusztrációként tekintsük a 10.1. ábrát.



10.1. ábra. A $t(\tau)$ és $\tau(t)$ függvények értelmezése

10.9 Lemma: Teljesüljenek a következő (C2) feltételek:

Legyen $\phi: R^n \times R^r \rightarrow R^1$ és $f: R^n \times R^r \rightarrow R^n$ folytonos leképezés, $\phi(x, u)$ és $f(x, u)$ differenciálható x szerint minden $u \in R^r$ esetén és a $\phi_x(x, u)$ és $f_x(x, u)$ deriváltak legyenek folytonosak $R^n \times R^r$ -en. Legyen továbbá $c, d \in R^n$, $t_0, t_1 \in R^1$, $t_0 < t_1$ és $\emptyset \neq M \subset R^r$. Vezessük be a következő jelöléseket:

- i) $A := \{w \in L_\infty^1[0, 1] : w(\tau) \geq 0 \text{ minden } \tau \in [0, 1] \text{ esetén}, t_0 + \int_0^1 w(\tau) d\tau = t_1\}$,
- ii) $w \in A, D(t) = [0, 1], t(\tau) := t_0 + \int_0^\tau w(\xi) d\xi, D(\tau) = [t_0, t_1], \tau(t) := \inf \{\tau : t(\tau) = t\}$
és $R_1 := \{\tau \in [0, 1] : w(\tau) > 0\}, R_2 := \{\tau \in [0, 1] : w(\tau) = 0\}$,
- iii) $E_1 := C^n[t_0, t_1] \times L_\infty^r[t_0, t_1], Q_1 := \{(x, u) \in E_1 : x(t) = c + \int_{t_0}^t f(x(\tau), u(\tau)) d\tau$
minden $t \in [t_0, t_1]$ esetén és $x(t_1) = d\}, Q_2 := \{(x, u) \in E_1 : u(t) \in M \text{ m.m.}$
 $t \in [t_0, t_1]$ esetén}, $D(F_1) = E_1$ és $F_1(x, u) := \int_{t_0}^{t_1} \phi(x(t), u(t)) dt$,

- iv) $E_2 := C^*[0,1] \times L'_\infty[0,1] \times L^1_\infty[0,1]$, $A_0 := \{(x, u, w) \in E_2 : w \in A\}$, $A_1 := \{(x, u, w) \in E_2 : x(\tau) = c + \int_0^\tau f(x(\vartheta), u(\vartheta))w(\vartheta) d\vartheta \text{ minden } \tau \in [0,1] \text{ esetén és } x(1) = d\}$, $A_2 := \{(x, u, w) \in E_2 : u(\tau) \in M \text{ m.m. } \tau \in [0,1] \text{ esetén}\}$, $D(F_2) = E_2$ és $F_2(x, u, w) := \int_0^1 \phi(x(\tau), u(\tau))w(\tau) d\tau$.

A lemma állítása:

- 1) Legyen $(x, u) \in Q_1 \cap Q_2, w \in A$, $\tilde{x}(\tau) := x(\tau(t))$, $\tau \in [0,1]$ $\tilde{u} \in S_{u(\cdot)} := \{\tilde{u} \in L'_\infty[0,1] : \tilde{u}(\tau) \in M \text{ m.m. } \tau \in [0,1] \text{ esetén és } \tilde{u}(\tau) = u(\tau(t)) \text{ minden } \tau \in R_1 \text{ esetén}\}$, akkor $(\tilde{x}, \tilde{u}, w) \in A_0 \cap A_1 \cap A_2$ és $F_1(x, u) = F_2(\tilde{x}, \tilde{u}, w)$.
- 2) Legyen $(\tilde{x}, \tilde{u}, w) \in A_0 \cap A_1 \cap A_2$, $x(t) := \tilde{x}(\tau(t))$ és $u(t) := \tilde{u}(\tau(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, akkor $(x, u) \in Q_1 \cap Q_2$ és $F_1(x, u) = F_2(\tilde{x}, \tilde{u}, w)$.

10.10 Lemma: Teljesüljenek a 10.9 lemma feltételei. Tekintsük a következő feladatokat:

1. feladat: $\min \{F_1(x, u) : (x, u) \in Q_1 \cap Q_2, t_1 > t_0\}$.

2. feladat: $\min \{F_2(x, u, w) : (x, u, w) \in A_0 \cap A_1 \cap A_2\}$.

3. feladat: Legyen $\tilde{u}_0 \in L'_\infty[0,1]$ rögzített, $\tilde{u}_0(\tau) \in M$ m.m. $\tau \in [0,1]$ esetén,

$$E_3 := C^n[0,1] \times L^1_\infty[0,1], \quad B_0 := \{(x, w) \in E_3 : w \in A\}, \quad B_1 := \{(x, w) \in E_3 : x(\tau) = c + \int_0^\tau f(x(\vartheta), \tilde{u}_0(\vartheta))w(\vartheta) d\vartheta \text{ minden } \tau \in [0,1] \text{ esetén, } x(1) = d\},$$

$$D(F_3) = E_3, \quad F_3(x, w) := \int_0^1 \phi(x(\tau), \tilde{u}_0(\tau))w(\tau) d\tau, \text{ és a feladat: } \min \{F_3(x, w) : (x, w) \in B_0 \cap B_1\}.$$

A lemma állítása:

- 1) Ha (x_0, u_0) és t_1 megoldása az 1. feladatnak, akkor tetszőleges olyan $w \in A$ esetén, amelyre $t(1) = t_1$, az $\tilde{x}_0(\tau) := x_0(\tau(t))$, $\tau \in [0,1]$ és $\tilde{u}_0 \in S_{u_0(\cdot)}$ választással $(\tilde{x}_0, \tilde{u}_0, w)$ megoldása 2. feladatnak.
- 2) Ha (x_0, u_0) és t_1 megoldása az 1. feladatnak, akkor tetszőleges olyan $w \in A$ esetén, amelyre $t(1) = t_1$, az $\tilde{x}_0(\tau) := x_0(\tau(t))$, $\tau \in [0,1]$ és $\tilde{u}_0 \in S_{u_0(\cdot)}$ választással (x_0, w) megoldása a 3. feladatnak.

10.5 Tétel (Pontrjagin-féle maximum elv): Legyen $\emptyset \neq M \subset R^r$ korlátos halmaz, (x_0, u_0) és t_1 megoldása a 10.10 lemmában megfogalmazott 1. feladatnak, akkor létezik olyan $\psi \in C^n[t_0, t_1]$ abszolút folytonos függvény és $\lambda_0 \geq 0$ valós szám, hogy

- 1) a λ_0 szám és a $\psi(\cdot)$ függvény nem egyszerre nullák,
- 2) $\frac{d\psi(t)}{dt} = -f_x^*(x_0(t), u_0(t))\psi(t) + \lambda_0 \phi_x(x_0(t), u_0(t))$ m.m. $t \in [t_0, t_1]$ esetén,
- 3) bevezetve a $H(x, u, \psi) := f(x, u, \psi) - \lambda_0 \phi(x, u)$ jelölést, teljesül, hogy m.m. $t \in [t_0, t_1]$ esetén $\max_{u \in M} H(x_0(t), u, \psi(t)) = H(x_0(t), u_0(t), \psi(t)) = 0$.

Bizonyítás:

Felhasználjuk a 10.6-10 lemmák eredményeit. Legyen $R_1 := [0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$; $I_i \subset [0, 1]$ nyílt intervallum, $i = 1, 2, \dots$, olyan perfekt, R^1 -ben sehol sem sűrű halmaz, amelyre $0 < \lambda(R_1) < 1$ teljesül, és amelynek bármely nyílt intervallummal vett nem üres metszete pozitív mértékű. Legyen $R_2 := [0, 1] \setminus R_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ és állítsunk elő minden I_i nyílt intervallumot megszámlálható sok, páronként diszjunkt, balról zárt és jobbról nyílt intervallum $(J_{i,j})$ egyesítéseként: $I_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} J_{i,j}$, $i = 1, 2, \dots$. Legyen $\{v_i\}_{i=1}^{\infty} \subset M$ olyan, hogy $\overline{\{v_1, v_2, \dots\}} \subset M$. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$w(\tau) := \begin{cases} \frac{t_1 - t_0}{\lambda(R_1)}, & \text{ha } \tau \in R_1, \\ 0, & \text{ha } \tau \in R_2, \end{cases}$$

$$t(\tau) := t_0 + \int_0^\tau w(\xi) d\xi, \quad \tau \in [0, 1],$$

$$\tau(t) := \inf \{ \tau : t(\tau) = t \}, \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$\bar{x}_0(\tau) := x_0(t(\tau)), \quad \tau \in [0, 1],$$

$$\bar{u}_0(\tau) := u_0(t(\tau)), \quad \text{ha } \tau \in R_1, \text{ illetve } v_j, \text{ ha } \tau \in J_{i,j}.$$

Teljesülnek a 10.10 lemma állításának feltételei, ezért (x_0, w) megoldása a 3. feladatnak, amelyben a B_0 korlátozás

$$B_0 = \{(x, w) \in E_3 : w(\tau) \in \bar{M} \text{ minden } \tau \in [0, 1] \text{ esetén}\},$$

ahol $\tilde{M} := [0, \infty) \subset R^1 \Rightarrow \tilde{M}$ konvex halmaz R^1 -ben és $\tilde{M}^0 \neq \emptyset$. Legyen

$$\tilde{\phi} : R^n \times R^1 \times [0, 1] \rightarrow R^1, \quad \tilde{\phi}(x, w, \tau) := w\phi(x, \tilde{u}_0(\tau)),$$

$$\tilde{f} : R^n \times R^1 \times [0, 1] \rightarrow R^n, \quad \tilde{f}(x, w, \tau) := wf(x, \tilde{u}_0(\tau)),$$

akkor M korlátossága miatt $\tilde{u}_0 \in L_\infty^r[0, 1]$ és ϕ, f, ϕ_x, f_x folytonossága miatt $\tilde{\phi}$ és $\tilde{f}$ kielégíti a 10.3 tétel (C1) feltételeit, ezért a 3. feladatra alkalmazható a lokális maximum elv:

Létezik $\lambda_0 \geq 0$ valós szám és $\tilde{\psi} : [0, 1] \rightarrow R^n$ abszolút folytonos függvény, hogy

a) λ_0 és $\tilde{\psi}(\cdot)$ nem egyszerre nulla,

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{d\tilde{\psi}(\tau)}{d\tau} &= -\tilde{f}_x^*(\tilde{x}_0(\tau), w(\tau), \tau)\tilde{\psi}(\tau) + \lambda_0\tilde{\phi}_x(\tilde{x}_0(\tau), w(\tau), \tau) \\ &= -w(\tau)\tilde{f}_x^*(\tilde{x}_0(\tau), \tilde{u}_0(\tau))\tilde{\psi}(\tau) + \lambda_0w(\tau)\phi_x(\tilde{x}_0(\tau), \tilde{u}_0(\tau)) \quad \text{m.m. } \tau \in [0, 1], \end{aligned}$$

$$\text{c) } < -\tilde{f}_w^*(\tilde{x}_0(\tau), w(\tau), \tau)\tilde{\psi}(\tau) + \lambda_0\tilde{\phi}_w(\tilde{x}_0(\tau), w(\tau), \tau), w - w(\tau) > \geq 0 \quad \forall w \in [0, \infty)$$

és m.m. $\tau \in [0, 1]$ esetén, ahonnan $w - w(\tau)$ alakja alapján következik:

c1) m.m. $\tau \in R_1$ esetén:

$$\begin{aligned} -\tilde{f}_w^*(\tilde{x}_0(\tau), w(\tau), \tau)\tilde{\psi}(\tau) + \lambda_0\tilde{\phi}_w(\tilde{x}_0(\tau), w(\tau), \tau) &= 0 \Rightarrow \\ -< f(\tilde{x}_0(\tau), \tilde{u}_0(\tau)), \tilde{\psi}(\tau) > + \lambda_0\phi(\tilde{x}_0(\tau), \tilde{u}_0(\tau)) &= 0, \end{aligned}$$

c2) m.m. $\tau \in R_2$ esetén:

$$\begin{aligned} -\tilde{f}_w^*(\tilde{x}_0(\tau), w(\tau), \tau)\tilde{\psi}(\tau) + \lambda_0\tilde{\phi}_w(\tilde{x}_0(\tau), w(\tau), \tau) &\geq 0 \Rightarrow \\ -< f(\tilde{x}_0(\tau), \tilde{u}_0(\tau)), \tilde{\psi}(\tau) > + \lambda_0\phi(\tilde{x}_0(\tau), \tilde{u}_0(\tau)) &\geq 0. \end{aligned}$$

I. Legyen $\psi(t) := \tilde{\psi}(\tau(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, akkor $\psi(t)$ abszolút folytonos és

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -f_x^*(x_0(t), u_0(t))\psi(t) + \lambda_0\phi_x(x_0(t), u_0(t)) \quad \text{m.m. } t \in [t_0, t_1]. \quad (10.22)$$

II. Ha $S_1 \subset R_1$ és $\lambda(S_1) = 0$, akkor

$$\tau^{-1}(S_1) = \{t : \tau(t) \in S_1\} = \{t : \min\{\tau : t(\tau) = t\} \in S_1\} \subset \{t(\tau) : \tau \in S_1\},$$

és $t(\tau)$ abszolút folytonossága miatt $\lambda(\tau^{-1}(S_1)) = 0$, ezért c1) szerint

$- \langle f(x_0(t), u_0(t)), \psi(t) \rangle + \lambda_0 \phi(x_0(t), u_0(t)) = 0$ m.m. $t \in \tau^{-1}(R_1)$ esetén.

III. Megmutatjuk, hogy $\tau^{-1}(R_1) = [t_0, t_1]$. Tegyük fel az ellenkezőjét, legyen $\bar{t} \in [t_0, t_1]$ és $\tau(\bar{t}) \in R_2$. Mivel $R_2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, ezért létezik $I_i = (\alpha_i, \beta_i) \subset [0, 1]$ nyílt intervallum, hogy $\alpha_i < \tau(\bar{t}) < \beta_i$. Másrészt, $\tau \in I_i \Rightarrow w(\tau) = 0$ és $t(\tau) = \text{const} = \bar{t}$, ezért $\tau(\bar{t}) = \inf \{ \tau : t(\tau) = \bar{t} \} \leq \alpha_i$, ami ellentmondás, tehát $\tau^{-1}(R_1) = [t_0, t_1]$.

IV. Következik III-ból és II-ből, hogy

$$H(x_0(t), u_0(t), \psi(t)) = 0 \text{ m.m. } t \in [t_0, t_1] \text{ esetén.} \quad (10.23)$$

V. Mivel $\tau \in I_i \Rightarrow w(\tau) = 0$, ezért $\tilde{x}_0(\tau)$ és $\tilde{\psi}(\tau)$ konstans az I_i intervallumon. Másrészt, $\{\tilde{u}_0(\tau) : \tau \in I_i\} \supset M$, továbbá ϕ és f második változójának, a skalárszorzat pedig a tényezőinek folytonos függvénye, ezért következik c2)-ből, hogy

$$- \langle f(\tilde{x}_0(\tau), u), \tilde{\psi}(\tau) \rangle + \lambda_0 \phi(\tilde{x}_0(\tau), u) \geq 0 \quad \forall u \in M \text{ és m.m. } \tau \in I_i \text{ esetén,}$$

amiből $R_2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ miatt következik az állítás helyessége $\forall u \in M$ és m.m. $\tau \in R_2$ esetén.

VI. Megmutatjuk, hogy az V-ben megfogalmazott állítás minden $\tau \in R_1$ esetén is igaz. Legyen $\tau \in R_1$. Mivel R_1 perfekt, sehol sem sűrű halmaz R^1 -ben, ezért $(\overline{R_1})^0 = R_1^0 = \emptyset$. Legyen $\varepsilon > 0$, akkor $(\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon) \cap [0, 1] \not\subset R_1$, ezért létezik olyan $\tau_\varepsilon \in R_2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, hogy $\tau_\varepsilon \in (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$. De akkor $\tau_\varepsilon \in I_i = (\alpha_i, \beta_i)$ valamilyen i -re, és az $(\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon) := (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon) \cap I_i$ jelölés mellett $\lambda((\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon)) > 0$ miatt létezik $\bar{\tau}_\varepsilon \in (\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon) \subset (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$, hogy

$$- \langle f(\tilde{x}_0(\bar{\tau}_\varepsilon), u), \tilde{\psi}(\bar{\tau}_\varepsilon) \rangle + \lambda_0 \phi(\tilde{x}_0(\bar{\tau}_\varepsilon), u) \geq 0,$$

ha $u \in M$ rögzített. Legyen $\varepsilon_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ és $u \in M$ rögzített.

Akkor $\exists \{\bar{\tau}_{\varepsilon_n}\}_{n=1}^{\infty} \subset R_2$, hogy

$$- \langle f(\tilde{x}_0(\bar{\tau}_{\varepsilon_n}), u), \tilde{\psi}(\bar{\tau}_{\varepsilon_n}) \rangle + \lambda_0 \phi(\tilde{x}_0(\bar{\tau}_{\varepsilon_n}), u) \geq 0.$$

De $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = \tau$, továbbá $\bar{x}_0$ és $\bar{\psi}$ folytonos függvények, f és ϕ az első változó, a skalárszorzat pedig a tényezők folytonos függvénye, ahonnan III. alapján következik, hogy minden $t \in [t_0, t_1]$ és $u \in M$ esetén

$$- < f(x_0(t), u), \psi(t) > + \lambda_0 \phi(x_0(t), u) \geq 0,$$

amiből IV. alapján a Pontrjagin-féle maximum elvet nyerjük:

$$\max_{u \in M} H(x_0(t), u, \psi(t)) = H(x_0(t), u_0(t), \psi(t)) = 0 \text{ m.m. } t \in [t_0, t_1]. \quad (10.24)$$

Megjegyzés:

- 1) A Pontrjagin-féle maximum elvben az M halmaz korlátosságára vonatkozó feltétel elhagyható. Legyen ugyanis (x_0, u_0) és t_1 megoldása az 1. feladatnak, akkor $u_0 \in L^\infty[t_0, t_1]$, ezért létezik olyan korlátos $M_0 \subset M$, hogy $u_0(t) \in M_0$ m.m. $t \in [t_0, t_1]$ esetén. Legyen $M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n \subset M_{n+1} \subset \dots$; M_n korlátos halmaz, $n=1, 2, \dots$; $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Nyilvánvaló, hogy az 1. feladatban M helyettesíthető bármelyik M_n halmazzal, akkor is (x_0, u_0) és t_1 lesz a megoldás ($M_0 \subset M$). Létezik tehát $\lambda_{0,n} \geq 0$ valós szám és $\psi_n: [t_0, t_1] \rightarrow R^n$ abszolút folytonos függvény, amely kielégíti a 10.5 tétel 1-3. összefüggéseit. Vezessük be az $(A\psi)(t) := \int_{t_0}^t f_x(x_0(\tau), u_0(\tau))\psi(\tau) d\tau$, valamint az $\xi(t) := \int_{t_0}^t \phi_x(x_0(\tau), u_0(\tau)) d\tau$ operátorokat, és használjuk ki, hogy $\psi_n = (I + A)^{-1}(\psi_n(t_0) + \lambda_{0,n}\xi)$, ahol $(I + A)^{-1}$ korlátos lineáris operátor. Legyen $\bar{\alpha}_n := (\bar{\lambda}_0, \bar{\psi}_n^*(t_0))^*$ és $\|\bar{\alpha}_n\| = 1$, akkor az $\{\bar{\alpha}_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak kiválasztható egy konvergens részsorozata. Legyen a határértéke a sorozatnak $\alpha = (\lambda_0, \psi^*(t_0))^*$, ahol $\|\alpha\| = 1$. Elvégezhető a $\bar{\psi}_n := \psi_n / \|\alpha_n\|$ normalizálás, és az 1-3. összefüggések továbbra is fenn fognak állni. Ezért $\lambda_0 \geq 0$ és $\psi := (I + A)^{-1}(\psi(t_0) + \lambda_0 \xi)$ abszolút folytonos, és kielégíti az 1-3. összefüggéseket.
- 2) A $\psi(t)$ -re vonatkozó társ-differenciálegyenlet (ún. adjungált differenciálegyenlet) megadható $\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ alakban is.

3) Vegyük észre, hogy nem követeltük meg, hogy t_1 rögzített legyen. Ezért

időoptimális irányítás esetén választható $\phi = 1$, mivel $t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} 1 \cdot dt$.

4) A Pontrjagin-féle maximum elvet időinvariáns (autonóm) rendszerre igazoltuk. Ha $\phi(x, u, t), \phi_x(x, u, t), \phi_t(x, u, t)$ és $f(x, u, t), f_x(x, u, t), f_t(x, u, t)$ folytonosak, akkor új változó bevezetésével az időben változó eset átfogalmazható egy ekvivalens időinvariáns feladattá, amelyre már alkalmazható a 10.5 tétel. Ha t_1 és (x_0, u_0) az eredeti időben változó feladat optimális megoldása, akkor érvényesek maradnak a 10.5 tétel 1-2. összefüggései, de a 3. összefüggés az alábbi-ra módosul:

$$H(x, u, \psi, t) := \langle f(x, u, t), \psi \rangle - \lambda_0 \phi(x, u, t), \quad (10.25)$$

$$\max_{u \in M} H(x_0(t), u, \psi(t), t) = H(x_0(t), u_0(t), \psi(t), t) = \quad (10.26)$$

$$= \int_t^{t_1} [-f_t(x_0(\tau), u_0(\tau), \psi(\tau)) + \lambda_0 \phi_t(x_0(\tau), u_0(\tau), \tau)] d\tau \text{ m.m. } t \in [t_0, t_1].$$

10.1.5 Bang-bang elv

Legyen a minimalizálandó célfüggvény, a rendszer állapotegyenlete és a vezérlő jel korlátozás rendre

$$F(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(x(t)) dt, \quad (10.27a)$$

$$\dot{x} = g(x) + Bu, \quad (10.27b)$$

$$M = \{u \in R^r : |u_i| \leq 1, i = 1, \dots, r\}. \quad (10.27c)$$

Legyen $\lambda_0 > 0$, akkor a Hamilton-függvényt és a társ-differenciálegyenletet végigoszthatjuk λ_0 -al, és elvégezhető a $H := H / \lambda_0$ és a $\psi := \psi / \lambda_0$ helyettesítés. A Hamilton-függvénynek ezután a normalizálás után is maximuma lesz az optimális irányítás esetén. A vizsgált rendszer esetén a normalizálás után

$$H(x, u, \psi) = \langle g(x) + Bu, \psi \rangle - \phi(x), \quad (10.28a)$$

$$\dot{\psi}(t) = -g_x^*(x_0(t)) \psi(t) + \phi_x(x_0(t)), \quad (10.28b)$$

és a Pontrjagin-féle maximum elv szerint

$$\max_{u \in M} [\langle g(x_0(t)) + Bu, \psi(t) \rangle - \phi(x_0(t))] = \langle g(x_0(t)) + Bu_0(t), \psi(t) \rangle - \phi(x_0(t)).$$

Definiáljuk az előjel-függvényt vektor argumentum esetén a komponensek előjeléből álló vektorral, azaz $\text{sign}(x) := (\text{sign}(x_1), \dots, \text{sign}(x_n))^T$, akkor a Pontrjagin-féle maximum elvből következik

$$\max_{|u_i| \leq 1} \langle u, B^* \psi(t) \rangle = \langle u_0(t), B^* \psi(t) \rangle \Rightarrow u_0(t) := \text{sign}(B^* \psi(t)), \quad (10.29)$$

vagyis az optimális irányítás $u_{0i}(t)$ komponensei minden időpontban csak ± 1 értéket vehetnek fel, tehát a negatív és a pozitív szélsőértékük között választhatnak (bang-bang). Hogy mikor melyiket kell választani, az $B^* \psi(t)$ -től függ, tehát lényegében $\psi(t)$ aktuális értékétől. Mivel $x_0(t)$ is ismeretlen, és $\psi(t)$ meghatározásához $x_0(t)$ is szükséges, amely viszont $u_0(t)$ -től függ, ezért a bang-bang elv ugyan egyszerűsíti a problémát, de a megmaradó

$$\dot{x}_0(t) = g(x_0(t)) + B \text{sign}(B^* \psi(t)) \quad (10.30a)$$

$$\dot{\psi}(t) = -g_x^*(x_0(t)) \psi(t) + \phi_x(x_0(t)) \quad (10.30b)$$

csatolt probléma, beleértve az általában kevert vagy hiányzó kezdeti és végérték feltételeket is, még ebben a viszonylag egyszerűbb esetben is numerikus szempontból kellően bonyolult marad. Lineáris rendszer esetén kapcsolási görbék meghatározásával igyekezzenek egyszerűsíteni a problémát.

10.1.6 Folytonosidejű LQ irányítási probléma

A folytonosidejű LQ probléma megoldását a lokális maximum elv 10.4 tételben megfogalmazott alakjának felhasználásával fogjuk meghatározni.

Folytonosidejű LQ irányítási feladat: Legyen $(x, u) \in C^n[0, T] \times L_\infty[0, T]$, és a minimalizálandó $F(x, u)$ kvadratikus költségfüggvény és az időben változó lineáris rendszer:

$$F(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^T [\langle Q(t)x(t), x(t) \rangle + \langle R(t)u(t), u(t) \rangle] dt + \frac{1}{2} \langle Q(T)x(T), x(T) \rangle, \quad (10.31)$$

$$Q(t) \geq 0, \quad R(t) > 0,$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0. \quad (10.32)$$

Alkalmazzuk a lokális maximum elvet a 10.5 tétel következménye szerinti formában és a diszkrétidejű esethez való hasonlóság kidomborítása céljából a $\lambda(t) := \hat{\psi}(t)$ jelölés mellett:

$$\hat{H} = \langle Ax + Bu, \lambda \rangle + \frac{1}{2} (\langle Qx, x \rangle + \langle Ru, u \rangle), \quad (10.33a)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\hat{H}_x = -A^T(t)\lambda(t) - Q(t)x(t), \quad \lambda(T) = Q(T)x(T), \quad (10.33b)$$

$$\dot{H}_u = B^T(t)\lambda(t) + R(t)u(t) = 0 \Rightarrow u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t). \quad (10.33c)$$

Visszaírva az optimális irányítás alakját az állapotegyenletbe, a következő vegyes kezdeti és végérték problémát kapjuk:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad x(0) = x_0, \quad \lambda(T) = Q(T)x(T). \quad (10.34)$$

Keressük a megoldást $\lambda(t) = P(t)x(t)$ alakban:

$$\dot{\lambda} = \dot{P}x + P\dot{x} = \dot{P}x + P(Ax - BR^{-1}B^T Px) = -Qx - A^T \lambda,$$

akkor a (P -ben kvadratikus) folytonosidejű Riccati-differenciálegyenlethez jutunk:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + Q(t) &= 0, \\ P(T) &= Q(T), \end{aligned} \quad (10.35)$$

amelynek $P(t) \geq 0$ pozitív megoldását keressük. Az optimális LQ irányítás állapot-visszacsatolás, amely $P(t)$ ismeretében:

$$u(t) = -K(t)x(t), \quad \text{ahol } K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t). \quad (10.36)$$

Ha $T = \infty$ és az optimalizálási kritérium és a rendszer konstans, akkor az optimális irányítás az $u = -K_\infty x$ konstans állapot-visszacsatolás, ahol $K_\infty = R^{-1}B^T P_\infty$ és P_∞ megoldása a következő diszkrétidejű algebrai Riccati-egyenletnek:

$$P_\infty A + A^T P_\infty - P_\infty B R^{-1} B^T P_\infty + Q = 0. \quad (10.37)$$

A diszkrétidejű algebrai Riccati-egyenlet megoldására több módszer és szoftver eszköz (pl. MATLAB Control System Toolbox `lqr`, `lqr2` függvények) ismeretes.

Egy lehetőség például, ha diszkrétizáljuk és visszafelé megoldjuk az eredeti differenciálegyenletet:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}, \quad \exp(-\mathcal{A} \cdot \Delta T) = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix},$$

$$x_k = F_{11}x_{k+1} + F_{12}\lambda_{k+1} \Rightarrow x_{k+1} = (F_{11} + F_{12}P_{k+1})^{-1}x_k$$

$$\lambda_k = F_{21}x_{k+1} + F_{22}\lambda_{k+1} \Rightarrow \lambda_k = (F_{21} + F_{22}P_{k+1})^{-1}x_{k+1}$$

$$\lambda_k = (F_{21} + F_{22}P_{k+1})^{-1}(F_{11} + F_{12}P_{k+1})^{-1}x_k$$

$$P_k := (F_{21} + F_{22}P_{k+1})^{-1}(F_{11} + F_{12}P_{k+1})^{-1}.$$

Célszerű minden lépés után a P_k mátrixot szimmetrizálni a számítási pontatlanságok miatt. A konvergenciára a mátrixnyom relatív változásának értékéből lehet következtetni. Hangsúlyozni szeretnénk azonban, hogy jobb numerikus módszerek is vannak.

Az LQ optimális irányítás mellett:

- i) $F(x, u)$ optimalizálási kritérium véges, ha (A, B) irányítható (stabilizálható).
- ii) Legyen $Q = C^T C$ (például $C := \sqrt{Q}$), akkor a zárt rendszer stabilis, ha (A, C) megfigyelhető (detektálható).

10.2 Optimalizálás nem skalárértékű kritérium esetén

A nem skalárértékű kritérium szerinti optimalizálási módszerekről végtelendimenziós terekben jó áttekintést ad Dauer és Stadler [45]. Az általánosság szempontjából a bemutatott módszerek közül kiemelhetők Neustadt és Lantos módszerei.

Neustadt módszerét ún. $(\varphi, \phi, \hat{Z})$ extrémálisok vizsgálatára dolgozta ki [41]. Legyen $A \subset E$, $\hat{Z} \subset E$ nulla csúspontú zárt és konvex kúp, $\phi: E \rightarrow \hat{E}$ és $\varphi: E \rightarrow R^m$ leképezések, akkor $x_0 \in E$ egy $(\varphi, \phi, \hat{Z})$ extrémális, ha $\varphi(x_0) = 0_{R^m}$, $\phi(x_0) \in \hat{Z}$ és $\{x \in E: \varphi(x) = 0_{R^m}; \phi(x) \in \hat{Z}^0; x \in A\} = \emptyset$. Megmutatható, hogy a nem skalárértékű kritérium szerinti minimum helye egy $(\varphi, \phi, \hat{Z})$ extrémális, de nem minden $(\varphi, \phi, \hat{Z})$ extrémális minimum hely. Neustadt egy absztrakt maximum elvben fogalmazta meg annak szükséges feltételét, hogy x_0 egy $(\varphi, \phi, \hat{Z})$ extrémális legyen. A módszer használatát nehezíti, hogy teljesülnie kell, hogy $R(\varphi) \subset R^m$, ezért dinamikus rendszer esetén az állapotegyenlet csak az A halmaz révén vehető figyelembe.

Ritter részben rendezett Banach-térben sima leképezések révén megfogalmazott optimalizálási feladat esetén határozta meg az infimum szükséges feltételét [44]. Ritter eredménye annyiban különbözik a későbbi 10.7 tételtől, hogy nála a Fréchet-deriváltak képterének zártsága helyett pótlólagos "regularitási" feltételeknek kell teljesülniük.

Athans és Geering megmutatták [42], [43], hogy ha $F_0(x)$ nem skalárértékű optimalizálási kritérium és F_0 képtere végesdimenziós lineáris normált tér, továbbá $F_0(x)$ kétszer folytonosan Fréchet-deriválható és nincs korlátozás, akkor $F_0(x)$ -nek lokális infimuma van az x_0 pontban, ha $F'(x_0)$ nulla és $F''(x_0)$ pozitív

definit. Ha $F_0(x)$ konvex és folytonosan Fréchet-deriválható, a korlátozás pedig az $A \subset E$ nyílt halmaz, akkor $x_0 \in A$ a globális infimum helye akkor és csakis akkor, ha az $F'(x_0)$ Fréchet-derivált nulla.

Ritter megmutatta [44], hogy a Lagrange-függvény nem skalárértékű infimum probléma esetén is definiálható, és a Lagrange-függvény nyeregpontjában globális infimum van (elégségesség). A lokális optimum szükséges feltétele egyben a globális optimumnak az elégséges feltétele, ha az optimalizálási kritérium és a leképezések speciális, a konvexitást pótló (de annál gyengébb) feltételeknek tesznek eleget.

A továbbiakban Lantos eredményeit [19] foglaljuk össze a nem skalárértékű optimalizálás területéről, és bemutatunk néhány alkalmazási példát is.

10.2.1 Optimalizálás részben rendezett lineáris topológikus térben

$A \geq$ részben rendezés egy E alaphalmaz felett definiált $\geq \subset E \times E$ reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív reláció, vagyis az $x \geq y \Leftrightarrow (x, y) \in \geq$ jelöléssel

$$\begin{aligned} x &\geq x && \text{reflexív} \\ x &\geq y \text{ és } y \geq x \Rightarrow x = y && \text{antiszimmetrikus} \\ x &\geq y \text{ és } y \geq z \Rightarrow x \geq z && \text{tranzitív} \end{aligned}$$

Világos, hogy $x \geq y \Leftrightarrow x - y \geq 0$, ezért a részben rendezéshez elegendő az $x \geq 0$ részhalmazt definiálni. Ha az alaphalmaz lineáris topológikus tér, akkor feltesszük, hogy a részben rendezést ún. pozitív kúp definiálja.

Definíció (pozitív kúp): Legyen (E, τ) lineáris topológikus tér. Akkor $P \subset E$ pozitív kúp, ha kielégíti a következő feltételeket:

- i) P nulla csúcspontú konvex kúp,
- ii) P zárt halmaz,
- iii) $P^\circ \neq \emptyset$ (van belső pontja),
- iv) $x \in P$ és $x \in -P \Rightarrow x = 0$.

Azt mondjuk, hogy $x \geq y$, ha $x - y \in P$. A lineáris topológikus teret az így definiált részben rendezéssel részben rendezett lineáris topológikus térnek fogjuk nevezni. Jelölése: $(E, \tau, \geq)$.

Az alkalmazások számára különösen fontos a részben rendezés R^n -ben és az $M_{n \times n}$ szimmetrikus, $n \times n$ méretű mátrixok körében.

Részben rendezés R^n -ben: $P = \{(x_1, \dots, x_n)^T \in R^n : \forall x_i \geq 0\}$.

Részben rendezés $M_{n \times n}$ -ben: $P = \{A \in M_{n \times n} : \langle Ax, x \rangle \geq 0, \forall x \in R^n\}$.

Részben rendezett térben nem minden elem hasonlítható össze, ezért a minimum és infimum, valamint a maximum és szuprémum élesen megkülönböztetendő.

Definíció (max, min, sup, inf): Legyen E Banach-tér, $x_0 \in Q \subset E$, és definiáljon a P pozitív kúp $\geq$ részben rendezést E -ben.

- 1) $x_0 = \max Q$, ha nem létezik $x \in Q$, hogy $x \geq x_0$ és $x \neq x_0$.
- 2) $x_0 = \min Q$, ha nem létezik $x \in Q$, hogy $x_0 \geq x$ és $x \neq x_0$.
- 3) $x_0 = \sup Q$, ha $x_0 \geq x$ minden $x \in Q$ esetén.
- 4) $x_0 = \inf Q$, ha $x \geq x_0$ minden $x \in Q$ esetén.

Mivel a $\geq$ részben rendezés nem "lineáris rendezés" (tehát Q -nak lehetnek olyan elempárjai, amelyek nem összehasonlíthatók), ezért $\max Q$ és $\min Q$ rendszerint nem egyértelműen definiált (több, akár végtelen sok is lehet belőlük a Q halmazon). Másrészt a $\geq$ részben rendezés antiszimmetrikus tulajdonsága miatt $\sup Q$ és $\inf Q$ egyértelműen definiált, feltéve, hogy létezik (az a tipikus, hogy nem létezik).

Definíció (csökkenési irány): Legyen (E, τ) lineáris topológikus tér, $(E_0, \tau_0, \geq)$ részben rendezett lineáris topológikus tér, $F_0 : E \rightarrow E_0$ leképezés. Azt mondjuk, hogy $h \in E$ csökkenési iránya az F_0 leképezésnek az $x_0 \in E$ pontban, ha létezik $0 \in E$ -nek olyan V környezete és $\varepsilon_0 > 0$ valós szám, hogy minden $\bar{h} \in h + V$ és $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ esetén

$$F_0(x_0) \geq F_0(x_0 + \varepsilon \bar{h}) \text{ és } F_0(x_0) \neq F_0(x_0 + \varepsilon \bar{h}). \quad (10.38)$$

Vegyük észre, hogy $F_0(x_0) \geq F_0(x_0 + \varepsilon \bar{h}) \Leftrightarrow F_0(x_0) - F_0(x_0 + \varepsilon \bar{h}) \in P_0$.

10.6 Tétel (lokális minimum szükséges feltétele részben rendezett lineáris topológikus térben [19]): Legyen (E, τ) lineáris topológikus tér, $(E_0, \tau_0, \geq)$ rész-

ben rendezett lineáris topológikus tér, $Q = \bigcap_{i=1}^{n+1} Q_i \subset E$ és $F_0 : E \rightarrow E_0$ leképezés.

Jelölje H_0 az F_0 leképezés csökkenési irányainak halmazát, H_i a Q_i halmaz megengedett irányainak halmazát, $i = 1, \dots, n$, és H_{n+1} a Q_{n+1} halmaz érintő irányainak halmazát az x_0 pontban. Teljesüljenek a következő feltételek:

- 1) létezik K_i nulla csúcspontú nyílt konvex kúp, hogy $\emptyset \neq K_i \subset H_i$, $i = 0, \dots, n$,
- 2) létezik K_{n+1} nulla csúcspontú nyílt konvex kúp, hogy $\emptyset \neq K_{n+1} \subset H_{n+1}$,

3) létezik x_0 -nak olyan U környezete, hogy $\min \{F_0(x) : x \in Q \cap U\} = F_0(x_0)$.

Akkor létezik $f_i \in K_i^*$, $i=0, \dots, n+1$, hogy legalább egy i -re $f_i \neq 0 \in E'$ és

$$f_0 + f_1 + \dots + f_{n+1} = 0 \in E'. \quad (10.39)$$

Bizonyítás: Ha $h \in \bigcap_{i=0}^{n+1} K_i$ lenne, akkor a feltételek és a Ljuszternyik-tétel szerint létezne $0 \in E$ -nek olyan V környezete, $\varepsilon_0 > 0$ és minden $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ esetén olyan $\bar{h}(\varepsilon) \in h + V$, hogy $x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon \bar{h}(\varepsilon) \in Q$, $F_0(x_0) \geq F_0(x_0 + \varepsilon \bar{h}(\varepsilon))$ és $F_0(x_0) \neq F_0(x_0 + \varepsilon \bar{h}(\varepsilon))$ is teljesülne. Mivel elég kis ε esetén $x_0 + \varepsilon \bar{h}(\varepsilon) \in Q \cap U$ is fennállna, ez ellentmondana a 3) feltételnek. Ezért $\bigcap_{i=0}^{n+1} K_i = \emptyset$, és a tétel állítása következik a Dubovickij–Miljutyin-lemmából [36].

10.2.2 Optimalizálás részben rendezett Banach-térben

A következő két lemma fontos szerepet játszik az infimum szükséges feltételeinek vizsgálatánál.

10.11 Lemma [19]: Legyen E és E_i Banach-tér, $i=1, \dots, n$; E_0 reflexív Banach-tér (azaz $E_0^* = E_0$); $A_i \in K(E \rightarrow E_i)$, $i=0, \dots, n$; $R(A_i)$ zárt E_i -ben, $i=1, \dots, n$; és $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } A_i \subset \text{Ker } A_0$. Akkor létezik $T_i \in L(E_i \rightarrow E_0)$ lineáris leképezés, hogy T_i folytonos $R(A_i)$ -n, $i=1, \dots, n$; és $A_0 = \sum_{i=1}^n T_i \circ A_i$. Speciálisan ha $E_0 = R^1$, akkor $T_i \in E_i'$.

10.12 Lemma (Minkowski–Farkas [36], [19]): Legyen (E_1, τ_1) és (E_2, τ_2) lineáris topológikus tér, $A: E_1 \rightarrow E_2$ folytonos lineáris operátor, $K_2 \subset E_2$ nulla csúcspontú konvex kúp, $K_2^0 \neq \emptyset$. $K_1 := \{x_1 \in E_1 : Ax_1 \in K_2\}$, és létezzen $\tilde{x}_1 \in E_1$, hogy $A\tilde{x}_1 \in K_2^0$. Akkor $K_1^* = A^* K_2^*$.

10.7 Tétel (lokális infimum részben rendezett Banach-térben [19]): Teljesüljenek az alábbi feltételek:

- i) E és E_i Banach-tér, $i=0, 1, \dots, n+k$,
- ii) $P_i \subset E_i$ pozitív kúp, amely $\geq$ részben rendezést definiál E_i -ben, $i=0, 1, \dots, n$,
- iii) $F_i: E \rightarrow E_i$ leképezés, amelynek létezik az $F_i'(x_0)$ Fréchet-deriváltja az x_0 pontban, $i=0, \dots, n$,

- iv) $F_i : E \rightarrow E_i$ leképezés, amely az x_0 pont egy környezetében *folytonosan* Fréchet-deriválható és a képtere $R(F'_i(x_0)) \subset E_i$ zárt halmaz, $i = n+1, \dots, n+k$,
- v) $A \subset E$ konvex halmaz, $A^0 \neq \emptyset$,
- vi) legyen a korlátozás

$$Q := \{x \in E : -F_i(x) \geq 0_{E_i}, i = 1, \dots, n; F_i(x) = 0_{E_i}, i = n+1, \dots, n+k; x \in A\} \quad (10.40)$$

Létezzen $x_0 \in Q$ és x_0 -nak olyan U környezete, hogy

$$\inf_{x \in Q \cap U} F_0(x) = F_0(x_0). \quad (10.41)$$

Akkor létezik $f_i \in E'_i$ folytonos lineáris funkcionál, $i = 0, 1, \dots, n+k$, hogy

- 1) $f_i \in P_i^*$, azaz $f_i(P_i) \geq 0$, $i = 0, \dots, n$,
- 2) $\varphi := \sum_{i=0}^{n+k} f_i \circ F'_i(x_0)$ jelöléssel $\forall x \in A \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(x_0)$,
- 3) legalább egy i -re $f_i \neq 0_{E'}$,
- 4) ha $i \in \{1, \dots, n\}$ és $-F_i(x_0) \in P_i^0$, akkor $f_i = 0_{E'}$,
- 5) ha teljesül az

$$\begin{aligned} R(F'_i(x_0)) &= E_i, \quad i = n+1, \dots, n+k, \\ R(-F'_i(x_0)) \cap P_i^0 &\neq \emptyset, \\ i \in \{1, \dots, n\} \text{ és } -F_i(x_0) \notin P_i^0 &\Rightarrow R(-F'_i(x_0)) \subset P_i^0 \neq \emptyset, \end{aligned}$$

feltételrendszer, akkor legalább egy i -re igaz, hogy $f_i \circ F'_i(x_0) \neq 0$,

- 6) speciálisan, ha kiegészítésképpen

$$\begin{aligned} F'_i(x_0)(x - x_0) &= 0_{E_i}, \quad i = n+1, \dots, n+k, \\ i \in \{1, \dots, n\} \text{ és } -F_i(x_0) \notin P_i^0 &\Rightarrow -F'_i(x_0)(x - x_0) \in P_i^0, \\ &x \in A^0 \end{aligned}$$

rendszernek is létezik x megoldása, akkor $f_0 \circ F'_0(x_0) \neq 0_{E'}$.

Bizonyítás:

- I. Tegyük fel, hogy létezik $i \in \{0, \dots, n\}$ úgy, hogy $i \neq 0$, $-F_i(x_0) \notin P_i^0$ és $R(-F'_i(x_0)) \cap P_i^0 = \emptyset$, vagy pedig úgy, hogy $i = 0$ és $R(-F'_0(x_0)) \cap P_0^0 = \emptyset$. Mivel $R(-F'_i(x_0))$ altér, ezért konvex. A Hahn-Banach-tétel szerint

- $R(-F'_i(x_0))$ és P_i elválaszthatók, azaz létezik nemnulla $f_i \in E'_i$, hogy $f_i(R(-F'_i(x_0))) = 0 \leq f_i(P_i)$. Ezért $f_i \circ F'_i(x_0) = 0_{E'}$ és $f_i \in P_i^*$. Legyen $f_j := 0_{E'}$, ha $j \neq i$, akkor a tétel állítása teljesül.
- II. Tegyük fel, hogy létezik $i \in \{n+1, \dots, n+k\}$, hogy $R(F'_i(x_0)) \neq E_i$. Legyen $y_i \in E_i \setminus R(F'_i(x_0))$. A Hahn–Banach-tétel és a 10.4 lemma szerint y_i és az $R(F'_i(x_0))$ zárt altér szigorú értelemben elválaszthatók, azaz létezik nemnulla $f_i \in E'_i$, hogy $f_i(R(F'_i(x_0))) = 0 > f_i(y_i)$. Ezért $f_i \circ F'_i(x_0) = 0_{E'}$. Legyen $f_j := 0_{E'}$, ha $j \neq i$, akkor a tétel állítása teljesül.
- III. Tegyük fel, hogy $R(F'_i(x_0)) = E_i$, $i = n+1, \dots, n+k$, és $R(\Phi)$ valódi részhalmaza $E_{n+1} \times \dots \times E_{n+k}$ -nak, ahol $\Phi := (F'_{n+1}(x_0), \dots, F'_{n+k}(x_0))$. Következik a Hahn–Banach-tételből és a 2.4 lemma bizonyításából [44]-ben, hogy léteznek $f_i \in E'_i$, $i = n+1, \dots, n+k$ funkcionálok, hogy $\sum_{i=n+1}^{n+k} f_i \circ F'_i(x_0) = 0$ és legalább egy i -re $f_i \circ F'_i(x_0)$ nemnulla. Legyen $f_j := 0$, $j = 0, \dots, n$, akkor a tétel állítása teljesül.
- IV. Tegyük fel, hogy az I, II, III esetek egyike sem áll fenn. Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} Q_0 &:= \{x \in E : F_0(x_0) - F_0(x) \in P_0\} \\ Q_i &:= \{x \in E : -F_i(x) \in P_i\}, \quad i = 1, \dots, n, \\ Q_{n+1} &:= \{x \in E : F_i(x) = 0, \quad i = n+1, \dots, n+k\}, \\ I &:= \{i \in \{1, \dots, n\} : -F_i(x_0) \notin P_i^0\}. \end{aligned}$$

Akkor a Q korlátozás alakja a következő:

$$Q = \bigcap_{i=1}^{n+1} Q_i \cap A.$$

- 1) Ha $i \in \{1, \dots, n\} \setminus I$, akkor $x_0 \in Q_i^0$, és így a Q_i halmaz megengedett irányainak kúpja a 10.2 lemma szerint $K_m^{(i)} = E \Rightarrow K_m^{(i)*} = \{0 \in E'\}$. Ha $i \in I$, akkor $R(-F'_i(x_0)) \cap P_i^0 \neq \emptyset$, ezért a Q_i halmaz x_0 pontbeli megengedett irányainak $K_m^{(i)}$ kúpja tartalmazza a nemüres, nyílt és konvex K_i kúpot, ahol

$$K_i = \{h \in E : -F'_i(x_0)h \in P_i^0\} \subset K_m^{(i)}.$$

Mivel Banach-térben a zárt és konvex halmazok azonosak a norma és a gyenge topológiában, ezért következik $\overline{P_i^0} = P_i$ -ből, hogy $(P_i^0)^* = P_i^*$, továbbá a 10.12 lemmából, hogy

$$K_i^* = (-F_i'(x_0))^*(P_i^0)^* = (-F_i'(x_0))^* P_i^*.$$

Ezért $\varphi_i \in K_i^* \Leftrightarrow \exists f_i \in P_i^*$, hogy $\varphi_i = -f_i \circ F_i'(x_0)$.

- 2) Jelölje $K_e^{(n+1)}$ a Q_{n+1} halmaz x_0 pontbeli érintő irányainak kúpját, akkor a Ljuszternyik-tétel [46] szerint

$$K_e^{(n+1)} = \bigcap_{i=n+1}^{n+k} \text{Ker } F_i'(x_0).$$

Mivel $K_e^{(n+1)}$ altér, ezért ha $\varphi_{n+1} \in K_e^{(n+1)*}$, akkor $\varphi_{n+1}(K_e^{(n+1)}) = 0$ és

$$\bigcap_{i=n+1}^{n+k} \text{Ker } F_i'(x_0) \subset \text{Ker } \varphi_{n+1}.$$

A 2.2 lemma szerint [36]-ban és a Hahn–Banach-tétel szerint léteznek $f_i \in E_i'$, $i = n+1, \dots, n+k$, funkcionálok, hogy

$$\varphi_{n+1} = \sum_{i=n+1}^{n+k} f_i \circ F_i'(x_0).$$

Fordítva, ha $f_i \in E_i'$, $i = n+1, \dots, n+k$, akkor $\forall x \in \bigcap_{i=n+1}^{n+k} \text{Ker } F_i'(x_0)$ esetén

$$\varphi_{n+1}(x) = \sum_{i=n+1}^{n+k} f_i \circ F_i'(x_0)(x) = \sum_{i=n+1}^{n+k} f_i(0) = 0,$$

amiből következik $\varphi_{n+1} \in K_e^{(n+1)*}$. Beláttuk tehát, hogy

$$K_e^{(n+1)*} = \sum_{i=n+1}^{n+k} (F_i'(x_0))^* E_i'.$$

- 3) Mivel $R(-F_0'(x_0)) \cap P_0^0 \neq \emptyset$, ezért következik, hogy a Q_0 halmaz x_0 pontbeli megengedett irányainak $K_m^{(0)}$ kúpja tartalmazza a nemüres, nyílt és konvex K_0 kúpot, ahol

$$K_0 = \{h \in E : -F_0'(x_0)h \in P_0^0\} \subset K_m^{(0)}.$$

Legyen $h \in K_0$, akkor létezik $\delta_0 > 0$ és $\varepsilon_0 > 0$ valós szám, hogy

$$x_0 + \varepsilon \bar{h} \in Q_0,$$

$$F_0(x_0) - F_0(x_0 + \varepsilon \bar{h}) \in P_0 \Leftrightarrow F_0(x_0) \geq F_0(x_0 + \varepsilon \bar{h})$$

minden $\|\bar{h} - h\| < \delta_0$ és $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ esetén. Mivel P_0^0 nyílt kúp, következik $-F_0'(x_0)h \in P_0^0$ és $0 \notin P_0^0$ alapján, hogy elegendően kis $\delta_0 > 0$ és $\varepsilon_0 > 0$ esetén

$$-F_0(x_0 + \varepsilon \bar{h}) + F_0(x_0) \in P_0^0,$$

$$F_0(x_0) \neq F_0(x_0 + \varepsilon \bar{h}).$$

Jelölje H_0 az F_0 függvény csökkenési irányainak halmazát, akkor

$$K_0 \subset H_0,$$

ahol K_0 nemüres, nyílt és konvex kúp. A 10.12 lemma szerint

$$K_0^* = (-F_0'(x_0))^* P_0^*.$$

- 4) Jelölje $K_m^{(A)}$ az A halmaz x_0 pontbeli megengedett irányainak kúpját, akkor a 10.2 lemma szerint

$$K_m^{(A)} = \{\lambda(x - x_0) : x \in A^0, \lambda > 0\} \neq \emptyset,$$

és a $K_m^{(A)}$ kúp nyílt és konvex. A 10.4 lemma szerint

$$K_m^{(A)*} = \{\varphi \in E' : \varphi(x) \geq \varphi(x_0), \forall x \in A\}.$$

- 5) Alkalmazható a 10.6 tétel, amely szerint létezik olyan $\varphi_0 \in K_0^*$; $\varphi_i \in K_i^*$, $i \in I$; $\varphi_{n+1} \in K_e^{(n+1)*}$ és $\varphi \in K_m^{(A)*}$ funkcionál, hogy

$$\varphi_0 + \sum_{i \in I} \varphi_i + \varphi_{n+1} + \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = -\varphi_0 - \sum_{i \in I} \varphi_i - \varphi_{n+1},$$

$$\varphi(x) = f_0 \circ F_0'(x_0) + \sum_{i \in I} f_i \circ F_i'(x_0) + \sum_{i=n+1}^{n+k} f_i \circ F_i'(x_0),$$

$\varphi(x) \geq \varphi(x_0)$, $\forall x \in A$, azaz $\varphi(x)$ támaszfunkcionálja A -nak,

legalább egy i -re $f_i \circ F_i'(x_0) \neq 0_{E'}$.

6) Legyen $\bigcap_{i \in I} K_i \cap K_m^{(A)} \cap K_e^{(n+1)} \neq \emptyset$, akkor a Dubovickij–Miljutyin-lemma szerint $f_0 \circ F_0'(x_0) \neq 0$. Ez az eset akkor áll fenn, ha

$$\begin{aligned} -F_i'(x_0)h &\in P_i^0, i \in I, \\ h &= \lambda(x - x_0), x \in A^0, \lambda > 0, \\ F_i(x_0)h &= 0_{E_i}, i = n+1, \dots, n+k \end{aligned}$$

egyszerre teljesül. Mivel P_i^0 nulla csúcspontú kúp és $F_i'(x_0)$ lineáris operátor, ezért $\lambda > 0$ miatt ez az eset pontosan akkor áll fenn, ha a

$$\begin{aligned} -F_i'(x_0)(x - x_0) &\in P_i^0, i \in I, \\ x &\in A^0, \\ F_i(x_0)(x - x_0) &= 0_{E_i}, i = n+1, \dots, n+k \end{aligned}$$

rendszernek van x megoldása. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

10.8 Tétel (Lagrange multiplikátor szabály nem skalárértékű kritérium esetén reflexív Banach-térben [19]): Teljesüljenek a 10.7 tétel feltételei és a következő *pótlólagos* követelmények:

- a) E_0 reflexív Banach-tér (azaz $E_0'' = E_0$), $x_0 \in E$,
- b) létezik $\delta > 0$, hogy minden $y_1, y_2 \in P_0 \subset E_0$ és $\|y_1\| = \|y_2\| = 1$ esetén $\|y_1 + y_2\| \geq \delta$,
- c) $R(F_i'(x_0)) \subset E_i$ zárt halmaz, $i = 1, \dots, n$.

Akkor létezik $T_i \in L(E_i \rightarrow E_0)$ lineáris leképezés, amely folytonos $R(F_i'(x_0))$ -on, $i = 0, 1, \dots, n+k$, továbbá

- 1) minden $y_0 \geq 0_{E_0}$ esetén $T_0 y_0 \geq 0_{E_0}$; minden $y_i \in R(F_i'(x_0)) \cap (P_i + F_i(x_0))$ esetén $T_i y_i \in P_0$, azaz $T_i y_i \geq 0_{E_0}$, $i = 1, \dots, n$,

- 2) $T := \sum_{i=0}^{n+k} T_i \circ F_i'(x_0)$ jelöléssel minden $x \in A$ esetén $Tx - Tx_0 \in P_0$, azaz

$$\forall x \in A \Rightarrow Tx \geq Tx_0, \quad (10.42)$$

- 3) legalább egy i -re $T_i \neq 0_{K(E_i \rightarrow E_0)}$,

- 4) ha $i \in \{1, \dots, n\}$ és $-F_i(x_0) \in P_i^0$, akkor $T_i = 0_{K(E_i \rightarrow E_0)}$,

- 5) ha teljesül a 10.7 tételbeli 5) feltételrendszer, akkor legalább egy i -re igaz, hogy $T_i \circ F'_i(x_0) \neq 0_{K(E \rightarrow E_0)}$,
- 6) ha teljesül a 10.7 tételbeli 6) speciális feltételrendszer, akkor $T_0 = I$ az identikus leképezés.

Bizonyítás:

Használjuk a 10.7 tétel bizonyításának jelöléseit. Legyen $0_{E_0} \neq y \in P_0$ és $T_i(\cdot) := y f_i(\cdot)$, akkor a speciális IV/6 esettől eltekintve

$$\bigcap_{i \in I} K_i \cap K_m^{(A)} \cap K_e^{(n+1)} \neq \emptyset,$$

ezért a 10.7 tételből következik a 10.8 tétel állítása.

Tekintsük ezért a megmaradó esetet. Ha $K \subset E$ és $P_0 \subset E_0$ nulla csúcspontú konvex kúp, akkor a K kúpot P_0 -ba leképező korlátos lineáris operátorok maximális halmaza $M(K, P_0) := \{A \in K(E \rightarrow E_0) : A(K) \subset P_0\}$. Ritter [44] megmutatta, hogy ha $K_1, K_2 \subset E$ nulla csúcspontú konvex kúp, E_0 reflexív Banach-tér, továbbá $K_1^0 \cap K_2^0 \neq \emptyset$ vagy K_2 altér és $K_1^0 \cap K_2 \neq \emptyset$, akkor

$$M(K_1 \cap K_2, P_0) = M(K_1, P_0) + M(K_2, P_0).$$

A csökkenési, megengedett és érintő irány definíciója, az infimum tulajdonsága és a 10.12 lemma szerint

$$\begin{aligned} \exists h \in \bigcap_{i \in I} K_i \cap K_m^{(A)} \cap K_e^{(n+1)} &\Rightarrow F'_0(x_0)h \in P_0, \\ F'_0(x_0) \in M\left(\bigcap_{i \in I} K_i \cap K_m^{(A)} \cap K_e^{(n+1)}, P_0\right) &\Rightarrow F'_0(x_0) = \sum_{i \in I} G_i + T + G_e, \\ G_i(K_i) \subset P_0 &\Rightarrow G_i = -T_i \circ F'_i(x_0), \quad i \in I, \text{ és teljesül 1),} \\ K_e^{(n+1)} = \bigcap_{i=n+1}^{n+k} \text{Ker } F'_i(x_0) \text{ altér} &\Rightarrow G_e = -\sum_{i \in I} T_i \circ F'_i(x_0), \\ Tx - Tx_0 &\in P_0, \end{aligned}$$

ahonnan már következik a tétel állítása.

Következmény: Ha nincsenek korlátozások (azaz $n = k = 0$ és $A = E$), akkor a lokális infimum szükséges feltétele $F'_0(x_0) = 0_{K(E \rightarrow E_0)}$.

10.9 Tétel (globális infimum szükséges és elégséges feltétele Banach-térben [19]): Teljesüljenek a 10.8 tétel feltételein túl pótlólagosan még a következők is:

- iii.a) $F_i : E \rightarrow E_i$ konvex leképezés, $i = 0, 1, \dots, n$, és ha $i \in \{1, \dots, n\}$, akkor vagy $R(F'_i(x_0)) = E_i$, vagy pedig $F'_i(x_0) = 0_{K(E \rightarrow E_i)}$,
- iv.a) létezik $B_i \in K(E \rightarrow E_i)$ és $b_i \in E_i$, hogy $F_i(x) = B_i x + b_i$ és $R(B_i) = E_i$, $i = n+1, \dots, n+k$,
- 6.a) létezik olyan $x \in E$, amely megoldása a következő rendszernek:

$$F'_i(x_0)(x - x_0) = 0_{E_i}, \quad i = n+1, \dots, n+k,$$

$$i \in \{1, \dots, n\} \text{ és } -F_i(x_0) \notin P_i^0 \Rightarrow -F'_i(x_0)(x - x_0) \in P_i^0 + \{\lambda F_i(x_0) : \lambda > 0\}, \\ x \in A^0.$$

Akkor a következő feltétel szükséges és elégséges ahhoz, hogy x_0 megoldása legyen az

$$\inf_{x \in Q} F_0(x_0) = F_0(x_0) \quad (10.43)$$

feladatnak:

Létezik olyan $T_i \in K(E_i \rightarrow E_0)$ operátor, $i = 1, \dots, n+k$, hogy

- i) minden $y_i \in P_i + F_i(x_0)$ esetén $T_i y_i \in P_0$, azaz $T_i y_i \geq 0_{E_0}$, $i = 1, \dots, n$,
- ii) $T := F'_0(x_0) + \sum_{i=1}^{n+k} T_i \circ F'_i(x_0)$ jelöléssel minden $x \in A$ esetén $Tx - Tx_0 \in P_0$,

azaz

$$\forall x \in A \Rightarrow Tx \geq Tx_0, \quad (10.44)$$

- iii) ha $i \in \{1, \dots, n\}$ és $-F_i(x_0) \in P_i^0$, akkor $T_i = 0_{K(E_i \rightarrow E_0)}$.

Következmény: Ha hiányoznak az egyenlőtlenség alakjában és a konvex halmaz alakjában adott korlátozások (tehát $n=0$ és $A=E$), akkor konvex $F_0(x)$ kritérium függvény és lineáris $F_i(x) = 0_{E_i}$, $i = 1, \dots, k$ korlátozások esetén a globális infimum szükséges és elégséges feltétele

$$F'_0(x_0) + \sum_{i=1}^k T_i \circ F'_i(x_0) = 0_{K(E \rightarrow E_0)}. \quad (10.45)$$

Következmény: Korlátozás nélküli esetben ($n=k=0$ és $A=E$) és konvex $F_0(x)$ kritérium függvény esetén a globális infimum szükséges és elégséges feltétele [19]:

$$F'_0(x_0) = 0. \quad (10.46)$$

10.2.3 A lokális supremum elv

A lokális supremum elv bizonyításakor felhasználjuk a következő összefüggéseket.

10.13 Lemma [19]:

- i) Legyen $M \subset R^r$, $Q = \{x \in L_\infty^r[0, T] : x(t) \in M \text{ m.m. } t \in [0, T] \text{ esetén}\}$, $x_0 \in Q$, $A \in L_\infty^{n \times r}[0, T]$, $P \subset R^n$ nulla csúcspontú zárt (nem szükségképpen konvex) kúp. Ha minden $x(\cdot) \in Q$ esetén teljesül $\int_0^T A(t)(x(t) - x_0(t)) dt \in P$, akkor m.m. $t \in [0, T]$ és minden $x \in M$ esetén $A(t)(x(t) - x_0(t)) \in P$.
- ii) Legyen $B \in C^{n \times m}[0, T]$, $K \in L_\infty^{n \times n}[0, T] \times [0, T]$ és $K(t, \tau) = 0_{n \times n}$, ha $t < \tau$. Akkor a $\Psi(t) = B(t) + \int_0^T K(t, \tau)\Psi(\tau) d\tau$ integrálegenletnek pontosan egy $\Psi \in C^{n \times m}[0, T]$ megoldása létezik.
- iii) Legyen B ($m \times n$)-es mátrix, $A(\cdot) \in L_\infty^{n \times n}[T_1, T_2]$. Akkor a $\frac{d\Phi}{dt} = \Phi(t)A(t)$ m.m. $t \in [T_1, T_2]$ esetén, $\Phi(T_1) = B$ feladatnak pontosan egy $\Phi \in C^{n \times m}[T_1, T_2]$ megoldása létezik.
- iv) Legyen $\tau \in [0, T]$, $A(\cdot) \in L_\infty^{n \times n}[0, T]$. Akkor
 - a) létezik pontosan egy megoldása a $\frac{d\Phi(t, \tau)}{dt} = \Phi(t, \tau)A(t)$ m.m. $t \in [0, T]$, $\Phi(\tau, \tau) = I_{n \times n}$ feladatnak,
 - b) létezik pontosan egy megoldása a $\frac{d\Psi(t)}{dt} = \Psi(t)A(t)$ m.m. $t \in [0, T]$, $\Psi(\tau)$ előírt feladatnak, és ez a megoldás $\Psi(t) = \Psi(\tau)\Phi(t, \tau)$,
 - c) tetszőleges $t, \tau \in [0, T]$ esetén létezik $\Phi^{-1}(t, \tau) = \Phi(\tau, t)$, továbbá $\Phi(t, \tau)\Phi(\tau, t) = I_{n \times n}$.

10.14 Lemma [19]: Legyen R^n tetszőleges n -dimenziós lineáris normált tér, akkor

- i) R^n szeparált és topológiája ekvivalens a $p(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|$ norma által generált topológiával, ha $x = (x_1, \dots, x_n)$,
- ii) $S(0, 1) = \{x \in R^n : \|x\| = 1\}$ egységgömb kompakt,
- iii) ha $P \subset R^n$ pozitív kúp, akkor létezik $\delta > 0$ valós szám, hogy $\forall y_1, y_2 \in P$ és $\|y_1\| = \|y_2\| = 1 \Rightarrow \|y_1 + y_2\| \geq \delta$.

10.10 Tétel (lokális supremum elv [19]): Legyen $E = C^n[0, T] \times L_\infty^n[0, T]$, $\phi : C^n[0, T] \times L_\infty^n[0, T] \rightarrow R^m$, $f : C^n[0, T] \times L_\infty^n[0, T] \rightarrow R^n$, és elégítse ki ϕ és f a (C1) feltételt. Legyen $F_0 : E \rightarrow R^m$ és $F_0(x, u) := \int_0^T \phi(x(t), u(t), t) dt$ a nem skalárértékű optimalizálási kritérium, $M \subset R^n$ konvex halmaz és $M^0 \neq \emptyset$, $c, d \in R^n$. Legyen $P_0 \subset R^m$ pozitív kúp. Legyen a korlátozás $Q = \{(x, u) \in E : \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t) \text{ m.m. } t \in [0, T] \text{ esetén, } x(0) = c, x(T) = d, u(t) \in M \text{ m.m. } t \in [0, T] \text{ esetén}\}$. Legyen $(x_0, u_0) \in Q$ és létezzen (x_0, u_0) -nak olyan U környezete, hogy (x_0, u_0) megoldása az

$$\inf \left\{ \int_0^T \phi(x(t), u(t), t) dt : (x, u) \in Q \cap U \right\} \quad (10.47)$$

feladatnak.

Akkor létezik olyan $(m \times m)$ -es konstans T_0 mátrix és $(m \times n)$ -es $\psi(t)$ mátrixfüggvény, hogy

- i) minden $y \geq 0_{R^m}$ esetén $T_0 y \geq 0_{R^m}$, azaz $T_0(P_0) \subset P_0$,
- ii) $T_0 = 0_{m \times m}$ és $\psi(t) \equiv 0_{m \times n}$ egyszerre nem áll fenn,
- iii) $\frac{d\psi(t)}{dt} = -\psi(t)f_x(x_0(t), u_0(t), t) + T_0\phi_x(x_0(t), u_0(t), t)$ m.m. $t \in [0, T]$ esetén,
- iv) $(-\psi(t)f_u(x_0(t), u_0(t), t) + T_0\phi_u(x_0(t), u_0(t), t))(u - u_0(t)) \in P_0$ minden $u \in M$ és m.m. $t \in [0, T]$ esetén,
- v) speciálisan, ha a

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = f_x(x_0(t), u_0(t), t)\bar{x}(t) + f_u(x_0(t), u_0(t), t)(u(t) - u_0(t)) \text{ m.m. } t \in [0, T],$$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}(T) = 0_{R^n},$$

$$u(t) \in M^0 \text{ m.m. } t \in [0, T]$$

rendszernek van $(\bar{x}, u) \in E$ megoldása, akkor $T_0 = I_{m \times m}$.

Bizonyítás: Vezessük be a következő jelöléseket:

$$F_1 : E \rightarrow C^n[0, T], F_1(x, u)(t) := x(t) - c - \int_0^t f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau,$$

$$F_2 : E \rightarrow R^n, F_2(x, u) := x(T) - d,$$

$$A := \{(x, u) \in E : u(t) \in M \text{ m.m. } t \in [0, T]\}.$$

Akkor $Q = \{(x, u) \in E : F_1(x, u) = 0_{C^n}; F_2(x, u) = 0_{R^n}; (x, u) \in A\}$. Mivel $A = C^n[0, T] \times B$, M konvex és $M^0 \neq \emptyset$, ezért $B \subset L_\infty^1[0, T]$ konvex, $B^0 \neq \emptyset$ és $A \subset E$ konvex és $A^0 \neq \emptyset$. Mivel ϕ és f kielégítik a (C1) felételt, ezért F_0, F_1, F_2 Fréchet-deriválhatók,

$$\begin{aligned} F'_0(x_0, u_0)(\bar{x}, \bar{u}) &= \int_0^T [\phi_x(x_0(t), u_0(t), t)\bar{x}(t) + \phi_u(x_0(t), u_0(t), t)\bar{u}(t)] dt, \\ F'_1(x_0, u_0)(\bar{x}, \bar{u})(t) &= \bar{x}(t) - \int_0^t [f_x(x_0(\tau), u_0(\tau), \tau)\bar{x}(\tau) + f_u(x_0(\tau), u_0(\tau), \tau)\bar{u}(\tau)] d\tau, \\ F'_2(x_0, u_0)(\bar{x}, \bar{u}) &= \bar{x}(T), \end{aligned}$$

továbbá $R(F'_1(x_0, u_0)) = C^n[0, T]$, $R(F'_2(x_0, u_0)) = R^n$. A 10.14 lemma szerint alkalmazható a 10.8 tétel. Létezik tehát $T_0 \in K(R^m \rightarrow R^m)$, $T_1 \in K(C^n[0, T] \rightarrow R^m)$, $T_2 \in K(R^n \rightarrow R^m)$, $\tilde{T} \in K(E \rightarrow R^m)$ korlátos lineáris operátor, hogy $T_0(P_0) \subset P_0$, legalább egy $i \in \{0, 1, 2\}$ esetén T_i nem a nulla operátor és

$$\tilde{T} = T_0 \circ F'_0(x_0, u_0) + T_1 \circ F'_1(x_0, u_0) + T_2 \circ F'_2(x_0, u_0), \quad (10.48)$$

$$\tilde{T}(\bar{x}, \bar{u}) \geq \tilde{T}(x_0, u_0) \text{ minden } (\bar{x}, \bar{u}) \in A \text{ esetén.} \quad (10.49)$$

Rögzített bázisban T_0 azonosítható egy $(m \times m)$ típusú konstans mátrixszal, T_1 egy $(m \times n)$ típusú mátrixfüggvénnyel, T_2 pedig egy konstans $(m \times n)$ -es mátrixszal. A speciális esetben $T_0 = I_{m \times m}$.

Mivel $\tilde{T}(\bar{x}, \bar{u}) = \tilde{T}(\bar{x}, 0_{L_\infty}) + \tilde{T}(0_C, \bar{u})$, ezért következik A alakja és a pozitív kúp $\pm z \in P_0 \Rightarrow z = 0_{R^m}$ tulajdonsága miatt, hogy $\tilde{T}(\bar{x}, 0_{L_\infty}) = 0_{R^m}$ minden $\bar{x} \in C^n[0, T]$ esetén. Vezessük be a

$$\hat{T}(\bar{u}) := \tilde{T}(\bar{x}, \bar{u}) = \tilde{T}(0_C, \bar{u}) \quad (10.50)$$

jelölést. Legyen $\bar{u} \in L_\infty^1[0, T]$ tetszőleges, és $\bar{x} = \bar{x}(\bar{u})$ megoldása az $F'_1(x_0, u_0)(\bar{x}, \bar{u}) = 0_C$ egyenletnek, tehát

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}(t)}{dt} &= f_x(x_0(t), u_0(t), t)\bar{x}(t) + f_u(x_0(t), u_0(t), t) \text{ m.m. } t \in [0, T], \\ \bar{x}(0) &= 0_{R^n}. \end{aligned} \quad (10.51)$$

akkor következik

$$\hat{T}(\bar{u}) = T_0 \int_0^T [\phi_x(x_0(t), u_0(t), t) \bar{x}(t) + \phi_u(x_0(t), u_0(t), t) \bar{u}(t)] dt + T_2 \bar{x}(T). \quad (10.52)$$

Legyen $\psi: [0, T] \rightarrow K(R^n \rightarrow R^m)$ megoldása a

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(t)}{dt} &= -\psi(t) f_x(x_0(t), u_0(t), t) + T_0 \phi_x(x_0(t), u_0(t), t) \text{ m.m. } t \in [0, T] \\ \psi(T) &= -T_2 \end{aligned} \quad (10.53)$$

differenciálegyenletnek. Rögzített bázisban $\psi(t)$ azonosítható egy $(m \times n)$ típusú mátrixfüggvénnyel. A 10.13 lemma szerint a differenciálegyenletnek pontosan egy $\psi(t)$ megoldása van. Ha T_0 és $\psi(\cdot)$ egyszerre nulla lehetne, akkor $\psi(T) = -T_2$ miatt T_2 is nulla lenne, amiből következne $\hat{T}(\bar{u}) \equiv 0_{R^m}$, abból pedig (10.48) alapján, hogy $T_1 \circ F'_1(x_0, u_0)$ is nulla és $R(F'_1(x_0, u_0)) = C^n[0, T]$ miatt $T_1 = 0_{K(C^n \rightarrow R^m)}$. De ez ellentmondás, mivel T_0, T_1, T_2 nem mind nulla, ezért T_0 és $\psi(\cdot)$ egyszerre nem lehet nulla. Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} T_0 \int_0^T \phi_x(x_0(t), u_0(t), t) \bar{x}(t) dt &= \int_0^T \left[\frac{d\psi(t)}{dt} + \psi(t) f_x(x_0(t), u_0(t), t) \right] \bar{x}(t) dt = \\ &= \int_0^T \frac{d\psi(t)}{dt} \bar{x}(t) dt + \int_0^T \psi(t) f_x(x_0(t), u_0(t), t) \bar{x}(t) dt = \\ &= -T_2 \bar{x}(T) - \int_0^T \psi(t) \frac{d\bar{x}}{dt} dt + \int_0^T \psi(t) f_x(x_0(t), u_0(t), t) \bar{x}(t) dt = \\ &= -T_2 \bar{x}(T) - \int_0^T \psi(t) f_u(x_0(t), u_0(t), t) \bar{u}(t) dt, \end{aligned}$$

ahonnan következik

$$\begin{aligned} \hat{T}(\bar{u}) &= \int_0^T [-\psi(t) f_u(x_0(t), u_0(t), t) + T_0 \phi_u(x_0(t), u_0(t), t)] \bar{u}(t) dt, \\ \hat{T}(\bar{u} - u_0) &= \int_0^T [-\psi(t) f_u(x_0(t), u_0(t), t) + T_0 \phi_u(x_0(t), u_0(t), t)] [\bar{u}(t) - u_0(t)] dt \in P_0, \end{aligned}$$

feltéve, hogy $\bar{u} \in B = \{\bar{u} \in L_\infty'[0, T]: \bar{u}(t) \in M \text{ m.m. } t \in [0, T]\}$. Ezért a 10.13 lemma szerint minden $u \in M$ és m.m. $t \in [0, T]$ esetén

$$[-\psi(t) f_u(x_0(t), u_0(t), t) + T_0 \phi_u(x_0(t), u_0(t), t)] (u - u_0(t)) \in P_0. \quad (10.54)$$

Ezzel a tétel minden állítását igazoltuk.

Következmény: Vezessük be a következő jelölést:

$$H(x, u, \psi, t) := \psi f(x, u, t) - T_0 \phi(x, u, t), \quad (10.55)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (10.56)$$

Akkor a tétel állítása átfogalmazható a következő alakra:

Minden $u \in M$ és m.m. $t \in [0, T]$ esetén

$$-H_u(x_0(t), u_0(t), \psi(t), t)(u - u_0(t)) \geq 0_{R^m}. \quad (10.57a)$$

A 10.8 tétel alapján tudjuk, hogy (10.57a) szükséges feltétele annak, hogy $u_0(t) \in M$ és V környezete $u_0(t)$ esetén

$$\inf \{-H(x_0(t), u, \psi(t), t) : u \in M \cap V\} = -H(x_0(t), u_0(t), \psi(t), t) \quad (10.57b)$$

teljesüljön. Ezért a tétel állítása úgy is megfogalmazható, hogy ha (x_0, u_0) megoldása a tételben megfogalmazott optimális irányítási feladatnak, akkor a $H(x_0(t), u, \psi(t), t)$ függvény m.m. $t \in [0, T]$ esetén az $u = u_0(t)$ pontban elégíti ki az M halmazon az u szerinti lokális supremum szükséges feltételét. Innen a "lokális supremum elv" elnevezés.

Megjegyzés:

1. Abban a speciális esetben, amikor az $x(t)$ trajektória jobb oldali végpontja szabad, azaz $x(0) = c$, $x(T) \in R^n$, akkor a tétel bizonyításában szereplő $F_2(x, u)$ által adott korlátozás hiányzik. Ekkor a parciális integráláskor $\psi(T) = 0_{m \times n}$ választható és $T_0 = I_{m \times m}$.
2. Hasonlóan, ha az $x(t)$ trajektória bal oldali végpontja szabad, akkor a $\psi(0) = 0_{m \times n}$ feltételnek kell teljesülnie és $T_0 = I_{m \times m}$.
3. Ha S_1 és S_2 sima felületek, és az $x(t)$ trajektóriára az $x(0) \in S_1$ és $x(T) \in S_2$ feltételek vannak előírva, akkor ha $\bar{x}(0)$ az S_1 felület $x_0(0)$ pontbeli érintősíkjában fekvő tetszőleges pont, akkor $\psi(0)\bar{x}(0) = 0_{R^m}$, ha pedig $\bar{x}(T)$ az S_2 felület $x_0(T)$ pontbeli érintősíkjában fekvő tetszőleges pont, akkor $\psi(T)\bar{x}(T) = 0_{R^m}$ (transzverzálítási feltétel megfelelője).
4. Ha a trajektória jobb oldali $x(T)$ végpontja szabad és ennek megfelelően a nem

skalárértékű kritérium $F_0(x, u) := \int_0^T \phi(x(t), u(t), t) dt + \varphi(x(T))$ alakú, ahol

$\varphi: R^n \rightarrow R^m$ differenciálható, akkor $\psi(T) := -T_0 \varphi'(x_0(T))$. Speciálisan, ha az integrál hiányzik a kritériumban, akkor formálisan $\phi \equiv 0$ vehető. Ha $m = n$ és $\varphi'(x_0(T))$ invertálható, akkor $f_u(x_0(t), u_0(t), t) = 0$ m.m. $t \in [0, T]$ esetén.

5. Ha $\phi(x, u, t)$ konvex leképezés, $f = A(t)x + B(t)u$ lineáris és teljesül az v) speciális eset, azaz $\exists (x, u) \in E$, hogy $u(t) \in M^0$, $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, $x(u) = c$, $x(T) = d$, akkor a lokális supremum elv az $\inf \{F_0(x, u): (x, u) \in Q\}$ globális infimum feladatnak szükséges és elégséges feltétele [19].

Következmény:

- 1) Ha $M = R^r$, akkor $H_u = \psi(t) f_u(x_0(t), u_0(t), t) - T_0 \phi_u(x_0(t), u_0(t), t) \equiv 0$.
 2) Ha T_0 invertálható, akkor balról szorozhatunk $-T_0$ inverzával és bevezethetjük a $\hat{\psi} := -T_0^{-1} \psi$ és $\hat{H} := \hat{\psi} f + \phi$ jelölést. Ezzel a jelöléssel

$$\hat{H}_u(x_0(t), u_0(t), \hat{\psi}(t), t) \equiv 0 \text{ és } \frac{d\hat{\psi}}{dt} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial x} \text{ m.m., ahol } \hat{\psi}(T) = \varphi'(x_0(T)).$$

10.2.4 A supremum elv

A Pontrjagin-féle maximum elv általánosítható nem skalárértékű kritérium és infimum probléma esetére is.

10.11 Tétel (supremum elv [19]): Teljesüljenek a következő (C2*) feltételek: Legyen $\phi: R^n \times R^r \rightarrow R^m$ és $f: R^n \times R^r \rightarrow R^n$ folytonos leképezés, $\phi(x, u)$ és $f(x, u)$ differenciálható x szerint minden $u \in R^r$ esetén és a $\phi_x(x, u)$ és $f_x(x, u)$ deriváltak legyenek folytonosak $R^n \times R^r$ -en. Legyen $P_0 \subset R^m$ pozitív kúp, amely $\geq$ részben rendezést definiál R^m -ben. Legyen továbbá $c, d \in R^n$, $t_0, t_1 \in R^1$, $t_0 < t_1$ és $\emptyset \neq M \subset R^r$. Legyen $E = C^n[0, T] \times L_\infty^r[0, T]$ és a korlátozás

$$Q = \{(x, u) \in E: \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)) \text{ m.m. } t \in [0, T], x(t_0) = c, x(t_1) = d, \\ u(t) \in M \text{ m.m. } t \in [0, T]\} \quad (10.58)$$

Legyen t_1 és $(x_0, u_0) \in Q$ megoldása az

$$\inf \int_{t_0}^{t_1} \phi(x(t), u(t)) dt: t_1 > t_0, (x, u) \in Q \quad (10.59)$$

feladatnak. Akkor létezik olyan $(m \times m)$ -es konstans T_0 mátrix és $(m \times n)$ -es $\psi(t)$ mátrixfüggvény, hogy

- i) minden $y \geq 0_{R^m}$ esetén $T_0 y \geq 0_{R^m}$, azaz $T_0(P_0) \subset P_0$,
 ii) $T_0 = 0_{m \times n}$ és $\psi(t) \equiv 0_{m \times n}$ egyszerre nem áll fenn,
 iii) $\frac{d\psi(t)}{dt} = -\psi(t)f_x(x_0(t), u_0(t)) + T_0\phi_x(x_0(t), u_0(t))$ m.m. $t \in [t_0, t_1]$,
 iv) bevezetve a $H(x, u, \psi) := \psi f(x, u) - T_0\phi(x, u)$ jelölést teljesül

$$\sup \{H(x_0(t), u, \psi(t)) : u \in M\} = H(x_0(t), u_0(t), \psi(t)) \text{ m.m. } t \in [t_0, t_1]. \quad (10.60)$$

Bizonyítás:

I. Használjuk a 10.10 lemma jelöléseit, de módosítsuk az ott szereplő feladatokat az alábbiakra:

1. feladat: $\inf \{F_1(x, u) : (x, u) \in Q_1 \cap Q_2, t_1 > t_0\}$.
2. feladat: $\inf \{F_2(x, u, w) : (x, u, w) \in A_0 \cap A_1 \cap A_2\}$.
3. feladat: $\inf \{F_3(x, w) : (x, w) \in B_0 \cap B_1\}$.

Akkor továbbra is érvényben maradnak a 10.10 lemmában a fenti feladatok megoldásaira megfogalmazott 1) és 2) összefüggések.

II. A bizonyítás többi része hasonló a 10.5 tétel bizonyításához, de a nem skalárértékű kritérium esetén érvényes lokális supremum elvet kell használni [19].

A supremum elvet időinvariáns (autonóm) rendszerre igazoltuk. Ha $\phi(x, u, t)$, $\phi_x(x, u, t)$, $\phi_t(x, u, t)$ és $f(x, u, t)$, $f_x(x, u, t)$, $f_t(x, u, t)$ folytonosak, akkor új változó bevezetésével az időben változó eset átfogalmazható egy ekvivalens időinvariáns feladattá, amelyre már alkalmazható a 10.11 tétel. Ha t_1 és (x_0, u_0) az eredeti időben változó feladat optimális megoldása, akkor érvényesek maradnak a 10.11 tétel összefüggései, de (10.60) az alábbira módosul:

$$H(x, u, \psi, t) := \psi f(x, u, t) - T_0\phi(x, u, t), \quad (10.60a)$$

$$\begin{aligned} \inf_{u \in M} H(x_0(t), u, \psi(t), t) &= H(x_0(t), u_0(t), \psi(t), t) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [-\psi(\tau)f_t(x_0(\tau), u_0(\tau), \tau) + T_0\phi_t(x_0(\tau), u_0(\tau), \tau)] d\tau \text{ m.m. } t \in [t_0, t_1]. \end{aligned} \quad (10.60b)$$

10.2.5 Kalman–Bucy-szűrő folytonos időben

Legyen a zajjal terhelt folytonosidejű, időben változó lineáris rendszer állapot-egyenlete

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + z(t).\end{aligned}\quad (10.61)$$

Az $u(t)$ és $z(t)$ zajokra és az $x(0)$ kezdeti állapotra a következő sztochasztikus hipotézis legyen érvényes:

$$x(0) \text{ független } u(t) \text{-től és } z(t) \text{-től}, \quad (10.62a)$$

$$Ex(0) = x_0, \quad E[(x(0) - x_0)(x(0) - x_0)^*] = \Sigma_0, \quad (10.62b)$$

$$Eu(t) = 0, \quad E[u(t)u^*(\tau)] = Q(t)\delta(t - \tau), \quad (10.62c)$$

$$Ez(t) = 0, \quad E[z(t)z^*(\tau)] = R(t)\delta(t - \tau), \quad (10.62d)$$

$$E[u(t)z^*(\tau)] = S(t)\delta(t - \tau), \quad (10.62e)$$

ahol $x \in R^n$, $u \in R^r$, $y, z \in R^m$, $\Sigma_0 \geq 0_{n \times n}$, $Q(t) \geq 0_{r \times r}$, $R(t) > 0_{m \times m}$ és $\delta(t)$ a Dirac-delta függvény.

Keressük azt a lineáris szűrőt, amely az $y(t)$ mérési eredményekből az

$$\dot{\hat{x}}(t) = F(t)\hat{x}(t) + G(t)y(t), \quad \hat{x}(0) \quad (10.63)$$

algorithmus alapján az $x(T)$ állapot optimális becslését adja abban az értelemben, hogy

$$E[x(t) - \hat{x}(t)] = 0 \text{ minden } t \in [0, T] \text{ esetén}, \quad (10.64a)$$

$$E[(x(T) - \hat{x}(T))(x(T) - \hat{x}(T))^*] \rightarrow \inf. \quad (10.64b)$$

Az infimum az $M_{n \times n}$ mátrixok részben rendezése szerint értendő, az $\hat{x}(0)$, $F(\cdot)$, $G(\cdot)$ változók függvényében. Legyen

$$\mathcal{F} = \{x(T) - \hat{x}(T) : \exists \hat{x}(0), F(\cdot), G(\cdot), \text{ hogy } E[x(t) - \hat{x}(t)] = 0 \quad \forall t \in [0, T]\}, \quad (10.65)$$

akkor a feladat az

$$\inf E[(x(T) - \hat{x}(T))(x(T) - \hat{x}(T))^*], \quad (10.66a)$$

$$x(T) - \hat{x}(T) \in \mathcal{F} \quad (10.66b)$$

alakban is megfogalmazható, amely egy mátrix kritériumú optimalizálási feladat, amelynek optimális megoldása a leggyakrabban használt skalár kritériumok szempontjából is optimális lesz. Többek között a hibajel kovarianciamátrixának összes sajátértékét egyszerre teszi minimálissá, ami csökkenően hat a $P\{|x(T) - \hat{x}(T)| > \rho\}$ hibaválósínség alakulására. Mivel

$$\dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) = [A(t) - F(t) - G(t)C(t)]x(t) + F(t)[x(t) - \hat{x}(t)] + B(t)u(t) - G(t)z(t),$$

ezért a feltételek és az $E[x(t) - \hat{x}(t)] \equiv 0$ követelmény szerint

$$F(t) = A(t) - G(t)C(t); \quad \hat{x}(0) = x_0; \quad (10.67)$$

és az $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ jelölés mellett

$$\dot{\tilde{x}}(t) = [A(t) - G(t)C(t)]\tilde{x}(t) + B(t)u(t) - G(t)z(t). \quad (10.68)$$

Legyen $\Phi(t, \tau)$ megoldása a

$$\frac{d\Phi(t, \tau)}{dt} = [A(t) - G(t)C(t)]\Phi(t, \tau), \quad \Phi(\tau, \tau) = I \quad (10.69)$$

mátrix differenciálegyenletnek, akkor

$$\tilde{x}(t) = \Phi(t, 0)\tilde{x}(0) + \int_0^t \Phi(t, \tau)[B(\tau)u(\tau) - G(\tau)z(\tau)] d\tau, \quad (10.70)$$

és a feltételek miatt

$$\begin{aligned} E[\tilde{x}(t)\tilde{x}^*(t)] &= \Phi(t, 0)E[\tilde{x}(0)\tilde{x}^*(0)]\Phi^*(t, 0) + \\ &+ \int_0^t \int_0^t \Phi(t, \tau)E[(B(\tau)u(\tau) - G(\tau)z(\tau))(u^*(\vartheta)B^*(\vartheta) - z^*(\vartheta)G^*(\tau))]\Phi^*(t, \vartheta) d\tau d\vartheta = \\ &= \Phi(t, 0)\Sigma_0\Phi^*(t, 0) + \int_0^t \Phi(t, \tau)[\dots]\Phi^*(t, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

ahol

$$[\dots] = [B(\tau)Q(\tau)B^*(\tau) - B(\tau)S(\tau)G^*(\tau) - G(\tau)S^*(\tau)B^*(\tau) + G(\tau)R(\tau)G^*(\tau)].$$

Legyen $\Sigma(t) := E[\tilde{x}(t)\tilde{x}^*(t)]$, akkor $\Sigma_0 = \Sigma(0)$ és $\Sigma(t) \geq 0$, továbbá

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}(t) &= (A(t) - G(t)C(t))\Phi(t, 0)\Sigma_0\Phi^*(t, 0) + \Phi(t, 0)\Sigma_0\Phi^*(t, 0)(A(t) - G(t)C(t))^* + \\ &+ \int_0^t (A(t) - G(t)C(t))\Phi(t, \tau)[\dots]\Phi^*(t, \tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t \Phi(t, \tau)[\dots]\Phi^*(t, \tau)(A(t) - G(t)C(t))^* d\tau + \\ &+ B(t)Q(t)B^*(t) - B(t)S(t)G^*(t) - G(t)S^*(t)B^*(t) + G(t)R(t)G^*(t), \end{aligned}$$

ahonnan következik a kiindulási feladattal ekvivalens, determinisztikussá transzformált alábbi mátrix kritériumú infimum feladat, amelyben Σ az állapotváltozó, a kezdőpont rögzített, a végpont szabad, a vezérlés pedig $G(\cdot)$:

$$\begin{aligned}\dot{\Sigma}(t) &= [A(t) - G(t)C(t)]\Sigma(t) + \Sigma(t)[A(t) - G(t)C(t)]^* + \\ &\quad + B(t)Q(t)B^*(t) - B(t)S(t)G^*(t) - G(t)S^*(t)B^*(t) + G(t)R(t)G^*(t) \\ \Sigma(0) &= \Sigma_0, \\ \inf \Sigma(T).\end{aligned}$$

A 10.10 tételt (lokális supremum elvet) követő 4) és 5) megjegyzés szerint a globális optimum szükséges és elégséges feltétele, hogy a differenciálegyenlet jobb oldalának $G(\cdot)$ szerinti deriváltja $0(\cdot)$ -tal legyen egyenlő. Alkalmazzuk az

$$U: M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}, U(X) = X + X^*; T: M_{n \times m} \rightarrow M_{m \times n}, T(Y) = Y^*$$

lineáris operátorokat, akkor

$$\begin{aligned}\dot{\Sigma}(t) &= U\{[A(t) - G(t)C(t)]\Sigma(t)\} + \\ &\quad + B(t)Q(t)B^*(t) - U\{B(t)S(t)G^*(t)\} + G(t)R(t)G^*(t),\end{aligned}$$

és a jobb oldal teljes differenciálja $G(\cdot)$ szerint:

$$\begin{aligned}-U\{(dG)C\Sigma\} - U\{BS(dG)^*\} + (dG)RG^* + GR(dG)^* &= \\ = -U\{\Sigma C^*(dG)^* + BS(dG)^*\} + U\{GR(dG)^*\} &= \\ = U\{[GR - \Sigma C^* - BS]T(dG)\},\end{aligned}$$

ezért az optimum feltétele $U\{[GR - \Sigma C^* - BS]T(\cdot)\} = 0_{K(M_{n \times m} \rightarrow M_{m \times n})}$. Másrészt, rögzített X esetén $U\{XT(\cdot)\} = 0(\cdot) \Leftrightarrow X = 0_{n \times m}$, ezért

$$GR - \Sigma C^* - BS = 0_{n \times m} \Rightarrow G = \Sigma C^* R^{-1} + BSR^{-1}$$

az egyetlen megoldás. Visszahelyettesítés után

$$\begin{aligned}\dot{\Sigma} &= [A - \Sigma C^* R^{-1} C - BSR^{-1} C]\Sigma + \Sigma[A^* - C^* R^{-1} C \Sigma - C^* R^{-1} S^* B^*] + \\ &\quad + BQB^* - BS(R^{-1} C \Sigma + R^{-1} S^* B^*) - (\Sigma C^* R^{-1} + BSR^{-1})S^* B^* + \\ &\quad + (\Sigma C^* R^{-1} + BSR^{-1})R(R^{-1} C \Sigma + R^{-1} S^* B^*),\end{aligned}$$

majd összevonás után az alábbi eredményhez jutunk:

$$\begin{aligned}\dot{\Sigma} &= (A - BSR^{-1} C)\Sigma + \Sigma(A^* - C^* R^{-1} S^* B^*) + \\ &\quad + BQB^* - \Sigma C^* R^{-1} C \Sigma - BSR^{-1} S^* B^*, \\ \Sigma(0) &= \Sigma_0,\end{aligned}\tag{10.71}$$

$$G = \Sigma C^* R^{-1} + BSR^{-1} \quad (10.72)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + (\Sigma C^* R^{-1} + BSR^{-1})(y - C\hat{x}), \\ \hat{x}(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (10.73)$$

A (10.71) rendszer független az $y(t)$ megfigyeléstől, ezért $\Sigma(t)$ előre is számítható. Másrészt (10.71-73) független a T időponttól, ezért $\hat{x}(t)$ minden időpontban az optimális becslés. Ha a bemeneti és kimeneti zajok korrelálatlanok ($S=0$), akkor (10.71-73) egyszerűsödik. (10.71) neve folytonosidejű mátrix Riccati-differenciálegyenlet. Ha a bemeneti és/vagy kimeneti zaj várható értéke nem nulla, vagy a bemenő jelek között vannak mérhetőek is, akkor a szuperpozíció elvének felhasználásával a szűrési feladat a vizsgált sémára transzformálható. Ha a rendszer és a sztochasztikus hipotézisekben szereplő statisztikák konstansak, akkor (10.71)-ből a Riccati-féle algebrai egyenlethez jutunk és G konstans.

10.2.6 Optimalizálás halmaz-értékű kritérium szerint

Egy hiányosan ismert lineáris rendszert irányítástechnikai szempontból jellemezhetünk a következő módon is: Legyen $U \subset E$ az irányítási halmaz. A lineáris rendszer állapota legyen E_2 pontja, és függjön az $u \in U$ irányítástól és az E_1 -térbeli paramétertől. Erről a paramétről csak annyit tudunk, hogy üzemi értékei a $Q_1 \subset E_1$ halmazba esnek. A rendszer állapotának az előírttól való eltérése legyen minden $u \in U$ irányítás esetén az $A_u : E_1 \rightarrow E_2$ lineáris operátor révén számítható. Az $u \in U$ irányítást úgy kell megválasztani, hogy a rendszer állapota és az előírt állapot közötti eltérés $A_u(Q_1)$ halmaza a legkisebb legyen a halmaz tartalmazás értelmében.

Vegyük észre, hogy az optimalizálási kritérium értékészlete a $H = \{A_u(Q_1) : u \in U\}$ halmazrendszer. H elemei (az optimalizálási kritérium $A_u(Q_1)$ értékei) maguk is halmazok. A H halmazrendszer részben rendezetté tehető az alábbi $\geq$ reláció segítségével:

$$A_u(Q_1) \geq A_{\bar{u}}(Q_1) \Leftrightarrow A_u(Q_1) \supset A_{\bar{u}}(Q_1). \quad (10.74)$$

A $(H, \geq)$ részben rendezett halmazban az irányítási feladat a következő lesz. Keresendő $u_0 \in U$, hogy

$$\inf \{A_u(Q_1) : u \in U\} = A_{u_0}(Q_1). \quad (10.75)$$

A továbbiakban csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor E Banach-tér, $E_1 = H_1$ és $E_2 = H_2$ Hilbert-tér, továbbá a Q_1 paraméter halmaz konvex és zárt, $A_u \in K(H_1 \rightarrow H_2)$.

Definíció (szupport funkcionál): Legyen H Hilbert-tér és $Q \subset H$. Azt mondjuk, hogy $\delta_Q : H \rightarrow R^1$ a Q halmaz szupport funkcionálja, ha

$$\delta_Q(h) := \sup \{ \langle h, x \rangle : x \in Q \}. \quad (10.76)$$

10.15 Lemma [19]:

- 1) Legyen H Hilbert-tér, $Q \subset H$ konvex és zárt halmaz, akkor $x \in Q \Leftrightarrow \langle h, x \rangle \leq \delta_Q(h)$ minden $h \in H$ esetén.
- 2) Legyen H Hilbert-tér, $Q \subset H$ konvex és zárt halmaz, akkor $Q = \{x \in H : \langle h, x \rangle \leq \delta_Q(h) \text{ minden } h \in H \text{ esetén}\}$.
- 3) Legyen H Hilbert-tér, $Q_1, Q_2 \subset H$ konvex és zárt halmaz, akkor $Q_1 \supset Q_2 \Leftrightarrow \delta_{Q_1}(h) \geq \delta_{Q_2}(h)$ minden $h \in H$ esetén.
- 4) Legyen H Hilbert-tér, $A \in K(H \rightarrow H)$ önadjungált, pozitív definit operátor, $R(A) = H$ és létezzen $\alpha > 0$ valós szám, hogy $\langle Ax, x \rangle \geq \alpha \|x\|^2$ minden $x \in H$ esetén. Legyen $Q = \{x \in H : \langle Ax, x \rangle \leq 1\}$. Akkor Q konvex és zárt halmaz és szupport funkcionálja $\delta_Q(h) = (\langle h, A^{-1}h \rangle)^{1/2}$.
- 5) Legyen H_1 és H_2 Hilbert-tér, $A \in K(H_1 \rightarrow H_2)$. Akkor létezik $A^* \in K(H_2 \rightarrow H_1)$, hogy $\langle Ax, y \rangle_{H_2} = \langle x, A^*y \rangle_{H_1}$ minden $x \in H_1$ és $y \in H_2$ esetén, továbbá $(A^*)^* = A$.

10.12 Tétel [19]: Legyen E Banach-tér és $U \subset E$. Legyen H_1 és H_2 Hilbert-tér, $A \in K(H_1 \rightarrow H_1)$ önadjungált, pozitív definit operátor és létezzen $\alpha > 0$ valós szám, hogy $\langle Ax, x \rangle_{H_1} \geq \alpha \|x\|_{H_1}^2$ minden $x \in H_1$ esetén. Legyen $Q_1 = \{x \in H_1 : \langle Ax, x \rangle_{H_1} \leq 1\}$. Minden $u \in U$ esetén legyen $A_u \in K(H_1 \rightarrow H_2)$ és $R(A)$ zárt H_2 -ben. Ha $u_0 \in U$ megoldása az

$$\inf \{ A_u(Q_1) : u \in U \} = A_{u_0}(Q_1) \quad (10.77)$$

feladatnak, ahol a $\geq$ részben rendezés a halmaztartalmazás szerint van definiálva, akkor A_{u_0} megoldása az

$$\inf \{A_u A^{-1} A_u^* : u \in U\} = A_{u_0} A^{-1} A_{u_0}^* \quad (10.78)$$

feladatnak, ahol a $\geq$ részben rendezés a $K(H_2 \rightarrow H_2)$ -beli önadjungált operátorok körében definiált részben rendezés, speciálisan $H_2 = R^n$ esetén az $(n \times n)$ -es szimmetrikus mátrixok körében definiált részben rendezés.

10.1 Példa végállapot hibahalmazának minimalizálására

Egy lineáris rendszer működése a névleges értékek körüli perturbációkra legyen a következő modellel jellemezhető:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + \Gamma(t)w(t), \quad x(0) = x_0, \\ y(t) &= C(t)x(t) + \Delta(t)z(t) \end{aligned} \quad (10.79)$$

ahol $x \in R^n$ az állapotvektor, $u \in R^r$ az irányítás, $y \in R^m$ a kimenő jel, továbbá $w \in R^k$ és $z \in R^p$ olyan zavaró jelek, melyek nem mérhetők. A rendszer x_0 kezdeti állapota nem ismert. Az A, B, C, Γ, Δ mátrixok adottak. Az $u(t)$ irányítás legyen

$$u(t) = K(t)y(t) \quad (10.80)$$

alakú, ahol K $(r \times m)$ -es mátrix. Legyen $E = L_{\infty}^{r \times m}[0, T]$, $U = E$; $H_1 = R^n \times L_2^k[0, T] \times L_2^p[0, T]$ (a H_1 szorzattérben a skalárszorzat a komponensenkénti skalárszorzatok összege); $H_2 = R^n$. Legyen $A_1 \in M_{n \times n}^s$, $A_2(t) = M_{k \times k}^s$ és $A_3(t) \in M_{p \times p}^s$ szimmetrikus (s) pozitív definit mátrix, és $(x_0, w(\cdot), z(\cdot))$ üzemszerű értékei alkossák a

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{(x_0, w(\cdot), z(\cdot)) \in H_1 : x_0^* A_1 x_0 + \int_0^T w^*(t) A_2(t) w(t) dt + \int_0^T z^*(t) A_3(t) z(t) dt \leq 1\} \\ Q_1 &= \{(x_0, w(\cdot), z(\cdot)) \in H_1 : \langle \mathcal{A}(x_0, w(\cdot), z(\cdot)), (x_0, w(\cdot), z(\cdot)) \rangle \leq 1\} \end{aligned} \quad (10.81)$$

halmazt, ahol $\mathcal{A}(x_0, w(\cdot), z(\cdot)) := (A_1 x_0, A_2(\cdot) w(\cdot), A_3(\cdot) z(\cdot))$. Legyen a feladat a $K(t)$ mátrix olyan megválasztása, amely mellett a végállapot

$$\{x(T) : (x_0, w(\cdot), z(\cdot)) \in Q_1\}_K \quad (10.82)$$

halmaza a legkisebb. Mivel

$$\dot{x} = Ax + B[K(Cx + \Delta z)] + \Gamma w = (A + BKC)x + \Gamma w + BK\Delta z, \quad (10.83)$$

ezért ha a $\Phi(t, \tau, K)$ $(n \times n)$ -es mátrix kielégíti a

$$\frac{d\Phi(t, \tau, K)}{dt} = [A(t) + B(t)K(t)C(t)]\Phi(t, \tau, K), \quad \Phi(\tau, \tau, K) = I_{n \times n} \quad (10.84)$$

differenciálegyenletet, akkor

$$\begin{aligned} x(T) &= \Phi(T, 0, K)x_0 + \int_0^T \Phi(T, \tau, K)\Gamma(\tau)w(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^T \Phi(T, \tau, K)B(\tau)K(\tau)\Delta(\tau)z(\tau) d\tau = \\ &=: A_K(x_0, w(\cdot), z(\cdot)). \end{aligned} \quad (10.85)$$

Másrészt,

$$\begin{aligned} \langle x(T), y \rangle_{R^n} &= \langle A_K(x_0, w(\cdot), z(\cdot)), y \rangle_{R^n} = \langle x_0, w(\cdot), z(\cdot) \rangle_{H_1} A_K^* y = \\ &= \langle x_0, \Phi^*(T, 0, K)y \rangle_{R^n} + \int_0^T \langle w(\tau), \Gamma^*(\tau)\Phi^*(T, \tau, K)y \rangle_{R^k} d\tau + \\ &+ \int_0^T \langle z(\tau), \Delta^*(\tau)K^*(\tau)B^*(\tau)\Phi^*(T, \tau, K)y \rangle_{R^p} d\tau, \end{aligned} \quad (10.86)$$

ezért bevezetve az

$$\begin{aligned} M(t) &:= \Phi(t, 0, K)A_1^{-1}\Phi^*(t, 0, K) + \\ &+ \int_0^t \Phi(t, \tau, K)\Gamma(\tau)A_2^{-1}(\tau)\Gamma^*(\tau)\Phi^*(t, \tau, K) d\tau + \\ &+ \int_0^t \Phi(t, \tau, K)B(\tau)K(\tau)\Delta(\tau)A_3^{-1}(\tau)\Delta^*(\tau)K^*(\tau)B^*(\tau)\Phi^*(t, \tau, K) d\tau \end{aligned} \quad (10.87)$$

jelölést, következik

$$A_K A_1^{-1} A_K^* = M(T) \in M_{n \times n}^s. \quad (10.88)$$

Differenciáljuk a (10.87) egyenletet az idő szerint, akkor a következő, mátrix értékű kritérium szerinti optimális irányítási feladatot kapjuk a $K(t)$ mátrix megválasztására:

$$\begin{aligned} \frac{dM(t)}{dt} &= [A(t) + B(t)K(t)C(t)]M(t) + M(t)[A(t) + B(t)K(t)C(t)]^* + \\ &+ \Gamma(t)A_2^{-1}(t)\Gamma^*(t) + B(t)K(t)\Delta(t)A_3^{-1}(t)\Delta^*(t)K^*(t)B^*(t), \end{aligned} \quad (10.89)$$

$$M(0) = A_1^{-1},$$

$$\inf M(T). \quad (10.90)$$

Ebben a feladatban $M(t)$ fiktív állapotváltozó, $K(t)$ a fiktív irányítás és $M(T)$ az optimalizálási kritérium; a részben rendezés a szimmetrikus mátrixok körében defi-

niált részben rendezés. Az optimális $K(t)$ meghatározásához a 10.10 tételt követő 4. megjegyzés szerint (10.89)-ben a jobb oldalt $K(t)$ szerint kell differenciálni és nullává tenni. Ha $\text{rank } \Delta(t) = m \leq p$ és $\text{rank } B(t) = r \leq n$, akkor $\Delta A_3^{-1} \Delta^*$ és $B^* B$ pozitív definit, és így invertálható, ezért átalakítások után kapjuk, hogy

$$U\{(MC^* + BK\Delta A_3^{-1} \Delta^*)T[B(dK)]\} = 0(dK) \Rightarrow \quad (10.91a)$$

$$MC^* + BK\Delta A_3^{-1} \Delta^* = 0_{M_{n \times m}}, \quad (10.91b)$$

aminek a megoldása

$$K = -(B^* B)^{-1} B^* MC^* (\Delta A_3^{-1} \Delta^*)^{-1}. \quad (10.92)$$

A $K(t)$ meghatározásához szükséges $M(t)$ értékét az

$$\dot{M}(t) = AM + MA + \Gamma A_2^{-1} \Gamma^* - MC^* (\Delta A_3^{-1} \Delta^*)^{-1} CM, \quad M(0) = A_1^{-1} \quad (10.93)$$

Riccati-féle differenciálegyenletből lehet számítani.

Megjegyzés: Az átalakítások során felhasználtuk a következő összefüggéseket:

$$\mathcal{A} = (A_1, A_2, A_3), \quad \mathcal{A}^{-1} = (A_1^{-1}, A_2^{-1}, A_3^{-1});$$

$$A_K = (A_{K1}, A_{K2}, A_{K3}), \quad A_K(x_0, w(\cdot), z(\cdot)) = A_{K1}x_0 + A_{K2}w(\cdot) + A_{K3}z(\cdot);$$

$$A_K^* = (A_{K1}^*, A_{K2}^*, A_{K3}^*);$$

$$A_K A^{-1} A_K^* = A_{K1} A_1^{-1} A_{K1}^* + A_{K2} A_2^{-1} A_{K2}^* + A_{K3} A_3^{-1} A_{K3}^*.$$

10.2 Példa bizonytalan rendszer állapotbecslésére

Tekintsük a Kalman–Bucy-szűrőnél szereplő (10.61) időben változó lineáris rendszert, de tegyük fel, hogy az $x(0)$ kezdeti állapotról és az $u(t)$, $z(t)$ zajokról csak annyi ismeretes, hogy energiájuk limitált abban az értelemben, hogy csak olyan $x(0), u(\cdot), z(\cdot)$ fordul elő, amely a

$$\begin{aligned} Q_1 = \{ & (x(0), u(\cdot), z(\cdot)) : (x(0) - x_0)^* A_1 (x(0) - x_0) + \\ & + \int_0^T [u^*(t) A_2(t) u(t) + z^*(t) A_3(t) z(t)] dt \leq 1 \} \end{aligned} \quad (10.94)$$

halmazba esik, ahol A_1 és (minden t -re) $A_2(t), A_2^{-1}(t), A_3(t), A_3^{-1}(t)$ normában korlátos és pozitív definit mátrixok, amelyek a rendszer bizonytalanságát jellemzik.

Keresendő rögzített T esetén, $0 < T < \infty$, a (10.63) szűrési algoritmusához olyan $\hat{x}(0)$, $F(\cdot)$, $G(\cdot)$, amely a szűrést optimálissá teszi az alábbi értelemben:

$$x(0) = x_0, u(t) \equiv 0, z(t) \equiv 0 \text{ esetén } x(t) - \hat{x}(t) \equiv 0, \quad (10.95a)$$

$$\{x(T) - \hat{x}(T): x(0), u(\cdot), z(\cdot) \text{ változik}\} \text{ hibahalmaza} \rightarrow \text{infimum}. \quad (10.95b)$$

A (10.95a) feltételből következik, hogy

$$F(t) = A(t) - G(t)C(t); \quad \hat{x}(0) = x_0, \quad (10.96a)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = [A(t) - G(t)C(t)]\hat{x}(t) + B(t)u(t) - G(t)z(t), \quad (10.96b)$$

$$\{\hat{x}(T)\}_G \rightarrow \text{infimum}. \quad (10.96c)$$

Legyen $\Phi(t, \tau, G)$ megoldása a

$$\frac{d\Phi(t, \tau, G)}{dt} = [A(t) - G(t)C(t)]\Phi(t, \tau, G), \quad \Phi(\tau, \tau, G) = I \quad (10.97)$$

mátrix differenciálegyenletnek, akkor

$$\tilde{x}(T) = \Phi(T, 0, G)\tilde{x}(0) + \int_0^T \Phi(T, \tau, G)[B(\tau)u(\tau) - G(\tau)z(\tau)]d\tau. \quad (10.98)$$

A végállapot becslési hibájának hibahalmaza csak $G(\cdot)$ -től függ. A bizonyítalan rendszer állapotbecslési feladatát a 10.12 tétel segítségével fogjuk megoldani:

$$E = L_{\infty}^{n \times m}[0, T], \quad U = E, \quad u = G(\cdot), \quad H_1 = R^n \times L_2^r[0, T] \times L_2^m[0, T], \quad H_2 = R^n,$$

$$\mathcal{A} = (A_1, A_2(t), A_3(t)); \quad \mathcal{A}^{-1} = (A_1^{-1}, A_2^{-1}(t), A_3^{-1}(t)),$$

$$A_G(\tilde{x}(0), u(\cdot), z(\cdot)) = \Phi(T, 0, G)\tilde{x}(0) + \int_0^T \Phi(T, \tau, G)[B(\tau)u(\tau) - G(\tau)z(\tau)]d\tau,$$

$$A_G^* = (\Phi^*(T, 0, G), B^*(t)\Phi^*(T, t, G), -G^*(t)\Phi^*(T, t, G)),$$

$$M(T) := A_G \mathcal{A}^{-1} A_G^* = A_G (\mathcal{A}^{-1} A_G^*) =$$

$$= A_G [(A_1^{-1} \Phi^*(T, 0, G), A_2^{-1}(t) B^*(t) \Phi^*(T, t, G), -A_3^{-1}(t) G^*(t) \Phi^*(T, t, G))] =$$

$$= \Phi(T, 0, G) A_1^{-1} \Phi^*(T, 0, G) +$$

$$+ \int_0^T \Phi(T, \tau, G) [B(\tau) A_2^{-1}(\tau) B^*(\tau) + G(\tau) A_3^{-1}(\tau) G^*(\tau)] \Phi^*(T, \tau, G) d\tau.$$

A minimális állapotbecslési hibahalmaz eléréséhez az $M(T)$ mátrix értékű kritériumot kell infimummá tenni $G(\cdot)$ függvényében.

Bevezethető most is az $M(t)$ mátrix és elvégezhető $M(t)$ differenciálása:

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= [A(t) - G(t)(C(t))]M(t) + M(t)[A(t) - G(t)(C(t))]^* + \\ &\quad + B(t)A_2^{-1}(t)B^*(t) + G(t)A_3^{-1}(t)G^*(t), \\ M(0) &= A_1^{-1}. \end{aligned} \quad (10.99)$$

Az optimális $G(t)$ meghatározásához alkalmazható a 10.10 tételt követő 4. megjegyzés, amely szerint $\dot{M}(t)$ jobb oldalát kell differenciálni $G(t)$ szerint és nullává tenni. Innentől kezdve a Kalman–Bucy szűrési algoritmus eredményei átvehetők, ha a következő megfeleltetéseket használjuk:

$$\begin{array}{ll} \Sigma(t) & M(t) \\ \Sigma_0 & A_1^{-1} \\ \Phi(t, \tau) & \Phi(t, \tau, G) \\ Q(t) & A_2^{-1}(t) \\ R(t) & A_3^{-1}(t) \\ S(t) & 0 \end{array} \quad (10.100)$$

Ezért az optimális szűrési algoritmus bizonytalan lineáris rendszer esetén a következő:

$$G = MC^*A_3, \quad (10.101)$$

$$\dot{M} = AM + MA^* + BA_2^{-1}B^* - MC^*A_3CM, \quad M(0) = A_1^{-1}, \quad (10.102)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + MC^*A_3(y - C\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = x_0. \quad (10.103)$$

Az algoritmus független a T időponttól, ezért $\hat{x}(t)$ minden időpontban az optimális becslés. Szembetűnő az analógia a sztochasztikus hipotézis és a determinisztikus hipotézis esetén nyert eredmények között.

11. NEMLINEÁRIS IRÁNYÍTÁSOK ELMÉLETE

A nemlineáris irányítások fontos szerepet töltenek be a különféle rendszerek irányításában. Bár a folyamatirányításban sok rendszer egy nominális üzemi állapot környezetében üzemel, és ezért az üzemi állapot körül érvényes linearizált rendszermoddellre és a lineáris szabályozások elméletének eredményeire alapozva a megtervezett szabályozókkal a technológiai elvárásokat jól kielégítő eredmény érhető el kis alapjelváltások és zavaró jelek esetén, merőben megváltozik a helyzet, ha a rendszert nagyobb változások érik, vagy eltávolodik a nominális munkaponttól. A nemlineáris irányítások különös fontosságúak olyan rendszereknél, ahol dominál a követő szabályozás, mint például robotok és más mechatronikai rendszerek esetén. Ezért kézenfekvő ilyen rendszerek irányításába bevonni a nemlineáris irányítások elméletének kialakult fegyvertárát.

A nemlineáris irányítások elméletének egyik jelentős irányzata a differenciálgeometria eredményeit használja fel, amelynek segítségével választ tud adni olyan fontos irányítástechnikai kérdésekre, mint az elérhetőség, megfigyelhetőség, a rendszer belső struktúrája, állapot-visszacsatolás, és egyúttal kapcsolatot is teremt a lineáris rendszerek elmélete felé. Ebben a fejezetben ezek közül az eredmények közül mutatunk be néhányat a könyv által szabott kereteken belül.

11.1 Differenciálgeometriai alapok

A differenciálgeometriai módszerek fontos szerepet játszanak a nemlineáris rendszerek korszerű elméleteiben. A továbbiakban először összefoglaljuk a differenciálgeometria alapfogalmait. Ennek során Vidyasagarhoz [24] hasonlóan sok helyen a mérnökök számára szemléletesebb "koordinátás alakot" használó módszert részesítjük előnyben. Elméletileg mélyebb megalapozást adnak és más fontos módszereket is bemutatnak Isidori [53] [54], Nijmeijer és van der Schaft [55], Sastry [25] és van der Schaft [56] könyvei. Tekintsünk először néhány alapdefiníciót és jelölést.

Folytonosan differenciálható függvény:

Az $f: R^n \rightarrow R^n$ függvény folytonosan differenciálható ($f \in C^{(1)}$), ha $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ folytonos, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$.

Sima függvény:

Az $f: R^n \rightarrow R^n$ függvény sima, ha f minden f_i komponensének tetszőleges rendű és tetszőleges változókombinációjú deriváltja folytonos ($C^{(\infty)}$).

Jacobi-mátrix:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (11.1)$$

Diffeomorfizmus:

Legyen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $f: U \rightarrow V$, $f \in C^{(1)}$. Azt mondjuk, hogy f diffeomorfizmus, ha

- i) $f(U) = V$,
- ii) f 1-1 típusú ($f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$),
- iii) az inverz függvény $f^{-1}: V \rightarrow U$ folytonosan differenciálható ($f^{-1} \in C^{(1)}$).

Azt mondjuk, hogy f sima diffeomorfizmus, ha f, f^{-1} sima függvények.

Inverz függvény tétel:

Legyen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^{(1)}$, $y_0 = f(x_0)$ és $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0}$ nonszinguláris. Akkor

$\exists U(x_0), V(x_0)$ nyílt halmaz, hogy f diffeomorfizmus U -ról V -re. Ha továbbá f sima függvény, akkor f^{-1} is sima, azaz f sima diffeomorfizmus.

A továbbiakban feltesszük, hogy a diffeomorfizmus mindig sima és $X \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, n rögzített. A következő definíciókat és jelöléseket rendszeresen fogjuk használni:

1. Vektormező X -en: $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ sima függvény.
2. $V(X)$: az X feletti vektormezők halmaza.
3. $S(X)$: az $a: X \rightarrow \mathbb{R}^1$ sima valósértékű függvények halmaza.
4. Sorvektorok (kovektorok) tere: $(\mathbb{R}^n)^*$.
5. Forma X -en: $h: X \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ sima függvény.
6. $F(X)$: az X feletti formák (kovektormezők, one-forms) halmaza.

Tulajdonságok:

- i) $a, b \in S(X) \Rightarrow a \pm b, ab \in S(X) \Rightarrow S(X)$ gyűrű.
- ii) $a, b \in S(X)$ és $f, g \in V(X)$ esetén

$$a(f + g) = af + ag,$$

$$(a + b)f = af + bf,$$

$$(ab)f = a(bf).$$

Ezért $V(X)$ modulus az $S(X)$ gyűrű felett.

Görbe:

c az X -ben futó, x_0 -on áthaladó görbe, ha $c: (-\alpha, \beta) \rightarrow R^n$ sima függvény, $-\alpha < 0 < \beta$ és $c(0) = x_0$.

Integrál görbe:

Ha $f \in V(X)$, akkor elég kis t esetén létezik egyértelmű megoldása (mindkét irányban) a $\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t))$, $x(0) = x_0$ kezdeti érték problémának. Az $x(t) = s_{f,t}(x_0)$ megoldást f -nek az x_0 ponton áthaladó integrál görbéjének nevezzük.

Nemlineáris koordináta-transzformáció

Legyen $f \in V(X)$, $x_0 \in X$ és T sima diffeomorfizmus x_0 valamilyen $U(x_0)$ környezete felett. Vezessük be az $y = T(x)$ koordináta-transzformációt. Legyen $x(t)$ integrál görbéje f -nek x_0 -on keresztül, és jelölje T Jacobi-mátrixát J , akkor az $y = T(x)$ koordináta-transzformáció hatása az $x(t)$ görbére

$$\begin{aligned} y(t) &= T(x(t)), \\ \frac{d}{dt}y(t) &= \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x(t)} \frac{dx(t)}{dt} = J \Big|_{x(t)} f(x(t)) = J(T^{-1}(y(t))) f(T^{-1}(y(t))), \\ \frac{d}{dt}y(t) &= f_T(y(t)), \\ f_T(y) &= J(T^{-1}(y)) f(T^{-1}(y)) \Rightarrow f_T = (Jf) \circ T^{-1}. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Hasonlóan: $s_{f,t} = T^{-1} \circ s_{f_T,t} \circ T \Leftrightarrow T \circ s_{f,t} = s_{f_T,t} \circ T$.

Gradiens:

Legyen $a \in S(X)$, akkor $\nabla a = \left(\frac{\partial a}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial a}{\partial x_n} \right) = da \in F(X)$.

Lie-deriváltak:

(1) $a \in S(X)$ és $f \in V(X)$ esetén a Lie-deriváltja f -re vonatkozóan $L_f a := \langle da, f \rangle$.

(2) $f, g \in V(x)$ esetén g -nek f -re vonatkozó deriváltja a Lie-zárójel (bracket):

$$L_f g = [f, g] := \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g.$$

(3) $f \in V(X)$ és $h \in F(X)$ esetén h Lie-deriváltja f -re vonatkozóan

$$L_f h := f^T \left(\frac{\partial h^T}{\partial x} \right)^T + h \frac{\partial f}{\partial x}.$$

11.1 Lemma [24]:

(1) $(L_f a)(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{a(s_{f,t}(x_0)) - a(x_0)\}$. Ezért $L_f a$ úgy interpretálható, mint a deriváltja az f vektormező integrál görbéi mentén.

(2) $[f, g](x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ \left[\frac{\partial s_{f,-t}(x)}{\partial x} \right]_{s_{f,t}(x_0)} \circ g[s_{f,t}(x_0)] - g(x_0) \right\}$. Ezért az $[f, g]$

Lie-zárójel úgy interpretálható, mint az iránymenti deriváltja a g vektormezőnek az f integrál görbéi mentén. Azonban absztrakt sokaságok esetén nem vonhatók ki egyszerűen egymásból $g[s_{f,t}(x_0)]$ és $g(x_0)$, mivel különböző érintő terekben (tangent spaces) "élnék", ezért egy extra faktor $[\partial s_{f,-t}(x) / \partial x]_{s_{f,t}(x_0)}$ "visszahúzza" a $g[s_{f,t}(x_0)]$ vektort X -nek x_0 pontbeli érintő terébe.

(3) $[f, g](x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \{[s_{g,-t} \circ s_{f,-t} \circ s_{g,t} \circ s_{f,t}](x_0) - x_0\}$. Ez azt jelenti, hogy indulunk az x_0 pontból és nagyon rövid t ideig haladunk az f integrál görbéje mentén, ezután g integrál görbéjét követjük t ideig, majd időben visszafelé követjük f integrál görbéjét, végül időben visszafelé haladunk g integrál görbéjén. Mivel $s_{f,t}$ inverze $s_{f,-t}$ stb., ezért ha $s_{f,t}$ és $s_{g,t}$ kommutatívak, akkor $[f, g]$ nulla, különben pedig arra jellemző, mennyire nem kommutatívak, lásd 11.1. ábra.

(4) $[f, g] = 0 \Leftrightarrow s_{f,t} \circ s_{g,\tau} = s_{g,\tau} \circ s_{f,t}$ minden elegendően kis t, τ esetén.

(5) Koordináta-transzformáció hatására nem változik meg a Lie-zárójel értéke: $[f, g] = [f_T, g_T]$.

(6) $a \in S(X)$ és $f, g \in V(X)$ esetén $L_{[f,g]} a = L_f(L_g a) - L_g(L_f a)$.

(7) $f, g \in V(x)$ és $h \in F(X)$ esetén $L_f \langle h, g \rangle = \langle L_f h, g \rangle + \langle h, \underbrace{L_f g}_{[f,g]} \rangle$.

(8) Legyen $f, g, h \in V(X)$, $a \in S(X)$ és $\alpha, \beta \in R^1$, akkor a Lie-zárójel rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

$$[f, \alpha g + \beta h] = \alpha[f, g] + \beta[f, h],$$

$$[f, g] = -[g, f] \text{ (antiszimmetria),}$$

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0 \text{ (Jacobi-azonosság),}$$

$$[f, ag] = a[f, g] + (L_f a)g \text{ és } L_f(ag) = a(L_f g) + (L_f a)g \text{ (szorzatszabály).}$$

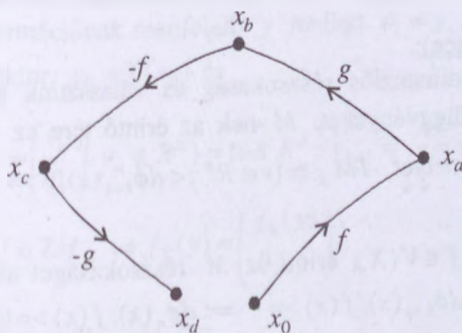
Az összefüggések igazolása egyszerű. (6) igazolásakor ki kell használni, hogy a $\partial^2 a / \partial x^2$ Hess-mátrix szimmetrikus. (7) igazolása például a következő:

$$\langle (\Delta x)^T \left(\frac{\partial h^T}{\partial x} \right)^T, g \rangle + \langle h, \frac{\partial g}{\partial x} \Delta x \rangle \Rightarrow \langle (\cdot)^T \left(\frac{\partial h^T}{\partial x} \right)^T, g \rangle + \langle h, \frac{\partial g}{\partial x} (\cdot) \rangle,$$

$$L_f \langle h, g \rangle = \langle f^T \left(\frac{\partial h^T}{\partial x} \right)^T, g \rangle + \langle h, \frac{\partial g}{\partial x} f \rangle,$$

$$\langle L_f h, g \rangle + \langle h, L_f g \rangle = \langle f^T \left(\frac{\partial h^T}{\partial x} \right)^T + h \frac{\partial f}{\partial x}, g \rangle + \langle h, \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g \rangle =$$

$$= \langle f^T \left(\frac{\partial h^T}{\partial x} \right)^T, g \rangle + \langle h, \frac{\partial g}{\partial x} f \rangle = L_f \langle h, g \rangle.$$



11.1. ábra. A Lie-derivált egy lehetséges interpretációja

Ismételt Lie-zárójel ("ad" operátor):

$$\begin{aligned} ad_f^0 g &:= g, \\ ad_f^{i+1} g &:= [f, ad_f^i g], \end{aligned} \quad (11.3)$$

speciálisan $ad_f^1 g = [f, g]$, $ad_f^2 g = [f, [f, g]]$.

Lineárisan független vektormezők:

- (1) $f_1, f_2, \dots, f_k \in V(X)$ lineárisan függetlenek az x_0 pontban, ha az $f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_k(x_0)$ oszlopvektorok lineárisan függetlenek.
- (2) A folytonosság következtében (1)-ből következik, hogy létezik $U(x_0) \subset R^n$ nyílt halmaz, hogy minden $x \in U(x_0)$ esetén fennáll a lineáris függetlenség.

k -dimenziós részsokaság (submanifold):

Azt mondjuk, hogy $M \subset X$ k -dimenziós részsokaság X -en ($k < n$), ha minden $x_0 \in M$ esetén létezik $U(x_0) \subset X$ nyílt halmaz és $\phi_{k+1}, \dots, \phi_n \in S(X)$, hogy teljesülnek a következő feltételek:

- (1) $\forall x \in U(x_0)$ esetén $\{d\phi_{k+1}(x), \dots, d\phi_n(x)\}$ lineárisan független,
- (2) $U(x_0) \cap M = \{x \in U : \phi_{k+1}(x) = \dots = \phi_n(x) = 0\}$.

Könnyű megmutatni, hogy teljesül a következő lemma.

11.2 Lemma: Ha az M k -dimenziós részsokaság definícióját kielégíti $U(x_0)$, $\phi_{k+1}, \dots, \phi_n \in S(X)$ és $V(x_0)$, $\psi_{k+1}, \dots, \psi_n \in S(X)$, akkor $\forall x \in U(x_0) \cap V(x_0)$ esetén $(R^n)^*$ -ban $\text{Span}\{d\phi_{k+1}(x), \dots, d\phi_n(x)\} = \text{Span}\{d\psi_{k+1}(x), \dots, d\psi_n(x)\}$.

Érintő tér (tangent space):

Legyen $M \subset X$ k -dimenziós részsokaság és válasszunk a definíciót kielégítő $\phi_{k+1}, \dots, \phi_n \in S(X)$ függvényeket. M -nek az érintő tere az $x \in M$ pontban az a $TM_x \subset R^n$ altér, amelyet $TM_x := \{v \in R^n : \langle d\phi_{k+1}(x), v \rangle = \dots = \langle d\phi_n(x), v \rangle = 0\}$ definiál.

Azt mondjuk, hogy $f \in V(X)$ érinti az M részsokaságot az $x \in M$ pontban, ha $f(x) \in TM_x$, azaz $\langle d\phi_{k+1}(x), f(x) \rangle = \dots = \langle d\phi_n(x), f(x) \rangle = 0$.

Tulajdonságok:

- i) TM_x nem függ attól, hogy M definíciójában melyik $\phi_{k+1}, \dots, \phi_n \in S(X)$ reprezentánst választottuk.
- ii) $TM_x = (\text{Span}\{d\phi_{k+1}(x), \dots, d\phi_n(x)\})^\perp$, ahol $\perp$ az ortogonális komplement jelöli.

Részsokaság speciális koordináták mellett:

Legyen $M \subset X$ k -dimenziós részsokaság, $x_0 \in M$, és legyen megválasztva a definíciónak megfelelően $U(x_0)$ és $\phi_{k+1}, \dots, \phi_n \in S(X)$. Válasszunk további $\phi_1, \dots, \phi_k \in S(X)$ függvényeket úgy, hogy teljesüljön $\phi_1(x_0) = \dots = \phi_k(x_0) = 0$ és $\{d\phi_1(x_0), \dots, d\phi_n(x_0)\}$ bázis $(R^n)^*$ -ban.

Konstrukció: $v_1, \dots, v_k \in (R^n)^*$ egészítse ki bázissá a lineárisan független $d\phi_{k+1}(x_0), \dots, d\phi_n(x_0)$ sorvektorokat. Legyen $\phi_i(x) := v_i(x - x_0)$, $i = 1, \dots, k$, akkor $\{v_1, \dots, v_k, d\phi_{k+1}(x_0), \dots, d\phi_n(x_0)\}$ bázis $(R^n)^*$ -ban.

Koordináta-transzformáció:

Legyen $y_i = (T(x))_i := \phi_i(x)$, $i = 1, \dots, n$. A konstrukció szerint a $J = \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x_0}$

Jacobi-mátrix nemszinguláris. Az inverz függvény tétel szerint $\exists U_o(x_0) \subset U(x_0)$ nyílt halmaz, amely koordinátáinak tekinthető $y_1, \dots, y_n$. Mi lesz az M részsokaság képe a transzformáció után? A részsokaság definíciója szerint

$$U_0 \cap M = \{y \in R^n : y = \begin{pmatrix} y_a \\ 0 \end{pmatrix} : y_a \in N(0) \subset R^k \text{ nyílt}\}. \quad (11.4)$$

Ezért az M k -dimenziós részsokaság alkalmas sima koordináta-transzformáció után úgy néz ki, mint egy k -dimenziós "szelete" (slice) X -nek.

Érintő tér speciális koordináta választás mellett:

A koordináta-transzformációnak megfelelő y mellett $\phi_i = y_i$, $d\phi_i = e_i^T$ az i -edik standard egység-sorvektor, $y_0 = T(x_0)$ és

$$TM_{y_0} = \{v \in R^n : v = \begin{pmatrix} v_a \\ 0 \end{pmatrix}, v_a \in R^k\} = \{v \in R^n : v_{k+1} = \dots = v_n = 0\}, \quad (11.5)$$

$$f \in TM_{x_0} \Rightarrow f_T(y) = \begin{pmatrix} f_a(y) \\ 0_{n-k} \end{pmatrix}. \quad (11.6)$$

Jelölés: $\mathcal{S}^k \subset R^n$ k -dimenziós altér.

k-dimenziós disztribúció: $\Delta : x \mapsto \mathcal{S}^k(x)$

A Δ disztribúció minden $x \in X$ -hez R^n -nek valamelyik k -dimenziós alterét rendel hozzá úgy, hogy a következő simasági feltétel teljesül: Minden $x_0 \in X$ esetén létezik $U(x_0) \subset X$ nyílt halmaz és $f_1, \dots, f_k \in V(X)$, hogy

- (1) $\{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$ lineárisan független minden $x \in U(x_0)$ esetén,
 (2) $\Delta(x) = \text{Span}\{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$.

Módosítások:

- i) A Δ disztribúciót célszerű lenne a disztribúciót generáló (2) összefüggéssel definiálni, de figyelembe kell venni, hogy $\Delta(x)$ egy altér, és $\{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$ csupán egy lehetséges, de nem az egyetlen bázisa az alternak.
 ii) Legyen $f_1, \dots, f_k \in V(X)$ és definiáljuk (2)-vel a Δ disztribúciót. Elképzelhető, hogy az $[f_1(x) \dots f_k(x)]$ mátrix rangja nem konstans mindenütt. Definiáljuk a k -dimenziós disztribúciót úgy, hogy tetszőleges x helyen a dimenziója nem nagyobb, mint k , de követeljük meg, hogy minden U nyílt halmaz esetén létezzen legalább egy $y \in U$, hogy $\dim \Delta(y) = k$ egzaktul.
 iii) Ha $\dim \Delta(x) = k$, akkor x -et a Δ disztribúció *reguláris* pontjának fogjuk nevezni. Egy alternatív megfogalmazás, hogy x reguláris pontja a Δ disztribúciónak, ha $\exists U(x)$ nyílt halmaz, hogy $\forall y \in U(x)$ esetén $\Delta(y)$ ugyanaz a k -dimenziós altere R^n -nek.
 iv) Azt mondjuk, hogy f a Δ disztribúcióhoz tartozik, ha $f(x) \in \Delta(x)$ minden $x \in X$ esetén. Jelölése: $f \in \Delta$.

A következő lemma a disztribúció elemeit a generáló bázissal fejezi ki.

11.3 Lemma [24]: Legyen Δ k -dimenziós disztribúció, $U \subset X$ nyílt halmaz, $f_1, \dots, f_m \in V(X)$, $m \geq k$, amelyek kifeszítik a Δ disztribúciót minden $x \in X$ esetén: $\Delta(x) = \text{Span}\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$. Legyen $f \in \Delta$, akkor $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in S(X)$, hogy

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) f_i(x). \quad (11.7)$$

Vegyük észre, hogy az "együtthatók" sima függvények.

Teljesen integrálható disztribúció, integrál sokaság:

Az alábbi kérdések fontosak a differenciálgeometriai alkalmazásokban, ezért precíz megválaszolásuk elengedhetetlen. Tegyük fel, hogy Δ adott k -dimenziós, mindenütt reguláris disztribúció X -en. Létezik-e $\forall x \in X$ esetén (x -et tartalmazó) $M_x \subset X$ részsokaság úgy, hogy $\forall f \in \Delta$ érintője M_x -nek, azaz $TM_x = \Delta(x)$? Ha ilyen M_x részsokaság létezik, akkor azt mondjuk, hogy a Δ disztribúció teljesen integrálható, és M_x a Δ disztribúció x ponton áthaladó integrál sokasága (integral manifold). Mikor teljesen integrálható egy disztribúció? Erre a kérdésre a Frobenius-tétel fogja megadni a választ.

Involutív disztribúció:

A Δ disztribúciót involutívnek nevezzük, ha Δ zárt a Lie-zárójelre, azaz minden $f, g \in \Delta$ esetén $[f, g] \in \Delta$.

Involutív tulajdonság tesztelése:

- i) Először is minden disztribúciónak végtelen sok eleme van: $f \in \Delta, a \in S(X)$
 $\Rightarrow af \in \Delta$.
- ii) Másrészt tegyük fel, hogy $f_1, \dots, f_m \in V(X)$ kifeszíti a k -dimenziós ($k \leq m$) disztribúciót. Mivel $\forall f \in \Delta$ előáll $f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) f_i(x)$ alakban, ezért elegendő tesztelni, hogy létezik-e $\alpha_{ijl} \in S(X)$, $1 \leq i, j, l \leq m$, hogy

$$[f_i, f_j](x) = \sum_{l=1}^m \alpha_{ijl}(x) f_l(x) \quad \forall x \in U(x_0) \text{ esetén.} \quad (11.8)$$

11.4 Lemma [24]: Tegyük fel, hogy $f \in V(X)$, $x_0 \in X$ és $f(x_0) \neq 0$. Akkor létezik x_0 -nak $U \subset X$ környezete és $T: U \rightarrow X$ diffeomorfizmus, hogy

$$f_T(y) = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T \quad \forall y \in T(U) \text{ esetén.} \quad (11.9)$$

Bizonyítás:

Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $x_0 = 0$. Legyen $s_{f,t}$ az f vektormező integrál görbéje. Ekkor $s_{f,t}(x_0)$ megoldása a $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $x(0) = x_0$ differenciál-egyenletnek, kiértékelve a t pillanatban. Válasszunk egy $M = [f(0) \ M_2]$ nemszinguláris $(n \times n)$ -es mátrixot, amelynek első oszlopa $f(0) \neq 0$. Legyen $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X$, $\bar{x} = (x_2, \dots, x_n)^T \in R^{n-1}$ és $q(x) := s_{f,x_1}(M(0) \bar{x}^T)^T$. A $q(x)$ integrálgörbe az x_1 "időpontban" áthalad az $M(0) \bar{x}^T$ ponton és jól definiált, ha $\|x\|$ elég kicsi. Világos, hogy $q(X) \in X$, továbbá Jacobi-mátrixa könnyen meghatározható, mert

$$\frac{\partial}{\partial t} s_{f,t}(x) = f(s_{f,t}(x)), \quad s_{f,0}(x) = x \Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial t} s_{f,t}(x) \right]_{(t,x)=(0,0)} = f(0),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} s_{f,t}(x) \right]_{(t,x)=(0,0)} = \left[\frac{\partial}{\partial x} s_{f,0}(x) \right]_{x=0} = I,$$

$$\left[\frac{\partial q}{\partial x_1} \right]_{x=0} f(M(0)) = f(0),$$

$$\left[\frac{\partial q}{\partial \bar{x}} \right]_{x=0} = IM_2 = M_2,$$

$$J = \left[\frac{\partial q}{\partial x} \right]_{x=0} = [f(0) \quad M_2] = M \text{ nemszinguláris.}$$

Ezért q lokális diffeomorfizmus 0 -ban. Ez azt jelenti, hogy ha $y \in X$ elég közel van 0 -hoz, akkor létezik egyértelmű $\bar{z} \in R^{n-1}$ és τ "időpont", hogy

$$y = s_{f,\tau}(M(0 \quad \bar{z}^T)^T). \quad (11.10)$$

Legyen $T = q^{-1}$, akkor $T(0) = 0$ és T lokális diffeomorfizmus 0 -ban. Legyen $g \in V(x)$ az f_T transzformált vektormező, akkor $s_{g,t} = T s_{f,t} T^{-1}$. Tegyük fel, hogy $x \in X$ elég közel van 0 -hoz, akkor

$$T^{-1}(x) = q(x) = s_{f,x_1}(M(0 \quad \bar{x}^T)^T), \quad (11.11)$$

$$s_{f,t}(T^{-1}(x)) = s_{f,t}(s_{f,x_1}(M(0 \quad \bar{x}^T)^T)) = s_{f,t+x_1}(M(0 \quad \bar{x}^T)^T) =: y. \quad (11.12)$$

De $T(y) = q^{-1}(y)$ -ban τ és $\bar{z} \in R^{n-1}$ egyértelmű és fennáll (11.10). Ezért (11.10) és (11.12) szerint következik

$$T(y) = \begin{pmatrix} x_1 + t \\ \bar{x} \end{pmatrix} \Rightarrow s_{g,t}(x) = \begin{pmatrix} x_1 + t \\ \bar{x} \end{pmatrix}, \quad (11.13)$$

és differenciálás után

$$g(x) = (1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T. \quad (11.14)$$

Ezért T a keresett diffeomorfizmus.

11.1 Tétel (Frobenius-tétel [24]): Egy disztribúció teljesen integrálható $\Leftrightarrow$ involutív.

Bizonyítás:

I. Tegyük fel, hogy Δ teljesen integrálható k -dimenziós disztribúció.

Akkor $\forall x \in X$ -hez tartozik egy M_x integrál sokaság, amelyre $TM_x = \Delta(x)$. A részsokaság definíciója szerint $\forall x_0 \in X$ esetén $\exists U(x_0) \subset X$ nyílt halmaz és $\phi_{k+1}, \dots, \phi_n \in S(X)$, hogy a differenciálok az x_0 pontban lineárisan független sorvektorok, és minden $\phi_{k+1}, \dots, \phi_n$ függvény konstans értékű M_{x_0} minden pontjában. Válasszunk $\phi_1, \dots, \phi_k \in S(X)$ függvényeket úgy, hogy a

$\{d\phi_1(x_0), \dots, d\phi_n(x_0)\}$ sorvektorok bázist alkossanak, akkor a korábbi konstrukció szerinti $T:U(x_0) \rightarrow R^n$ leképezés egy diffeomorfizmus valamilyen $U_0(x_0) \subset U(x_0)$ felett. Mivel $f \in \Delta$ érintője M_x -nek $\forall x \in U_0(x_0)$ pontban, ezért az új koordináta-rendszerben $f_T \in \Delta_T$ alakja

$$f_T(y) = \begin{pmatrix} f_a(y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall y \in T(U_0(x_0)) \text{ esetén.} \quad (11.15)$$

A kulcsa mindennek az, hogy az érintő reláció egy *nyílt halmaz* minden pontjában teljesül. Mivel $TM_x = \Delta(x) \quad \forall x \in U_0(x_0)$ esetén, ezért következik, hogy Δ_T precízen $f_T(y)$ alakú. Ha tehát $f_T, g_T \in \Delta_T$, akkor

$$f_T(y) = \begin{pmatrix} f_a(y) \\ 0_{n-k} \end{pmatrix}, \quad g_T(y) = \begin{pmatrix} g_a(y) \\ 0_{n-k} \end{pmatrix}, \quad (11.16a)$$

$$[f_T, g_T] = \frac{\partial g_T}{\partial x} f_T - \frac{\partial f_T}{\partial x} g_T \Rightarrow [f_T, g_T] = \begin{pmatrix} h_a(y) \\ 0_{n-k} \end{pmatrix}. \quad (11.16b)$$

Ezért $[f_T, g_T] \in \Delta_T$, és így Δ_T , tehát Δ is involutív disztribúció.

II. Tegyük fel, hogy a Δ disztribúció involutív.

A bizonyítás teljes indukcióval történik m -ben.

Ha $m=1$, akkor f az egyetlen vektormező és a lineáris függetlenség miatt $f(x) \neq 0 \quad \forall x$ -re. Ekkor vehető a 11.4 lemma szerinti T diffeomorfizmus, és erre alapozva választható $\phi_i(x) = T_i(x)$, $i=2, \dots, n$. Ekkor a transzformált változóban $f_T(y) = (10 \dots 0)^T \quad \forall y$ esetén és $\phi_{iT}(y) = y_i$, $i=2, \dots, n$. Ezért $m=1$ esetén igaz az állítás.

Tegyük fel, hogy az állítás $(m-1)$ -gyel bezárólag igaz. Továbbra is legyen $x_0 = 0$. Legyen a feltételeket kielégítő m vektormező $f_1, \dots, f_m$, és válasszuk meg a T diffeomorfizmust úgy, hogy f_{iT} elégítse ki az $f_{iT}(y) = (10 \dots 0)^T$ feltételt $\forall y$ esetén. Vezessük be a $g_i(y) := f_{iT}(y)$, $i=1, \dots, m$ jelölést. Mivel a Lie-zárójel értéke megőrződik koordináta-transzformáció esetén, ezért $\{g_1, \dots, g_m\}$ szintén involutív. Ezért léteznek $\beta_{ijk} \in S(X)$ sima függvények, hogy

$$[g_i, g_j](y) = \sum_{k=1}^m \beta_{ijk}(y) g_k(y), \quad \forall y. \quad (11.17)$$

Vezessük be a $h_i(y) := g_i(y) - g_{i1}(y)g_1(y)$, $i = 2, \dots, m$ jelölést, ahol $g_{i1}(y)$ az első komponense $g_i(y)$ -nak. Mivel $\{g_1, \dots, g_m\}$ lineárisan független rendszer, ezért a konstrukció szerint $\{g_1, h_2, \dots, h_m\}$ is lineárisan független. Jelölje $h_i(y)$ utolsó $(n-1)$ komponensét $\bar{h}_i(y)$, $i = 2, \dots, m$, akkor $h_{i1}(y) = 0$ miatt $\{\bar{h}_2, \dots, \bar{h}_m\}$ lineárisan független rendszer R^{n-1} -ben. Meg kell mutatni, hogy $\{\bar{h}_2, \dots, \bar{h}_m\}$ involutív. Ehhez abból lehet kiindulni, hogy $h_2, \dots, h_m$ lineáris kombinációja $g_1, \dots, g_m$ -nek, ezért $\exists \alpha_{ijk} \in S(X)$, hogy

$$[h_i, h_j](y) = \alpha_{ij1}(y)g_1(y) + \sum_{k=2}^m \alpha_{ijk}(y)h_k(y), \quad \forall y, \quad (11.18a)$$

és $g_1(y)$ alakja és $h_{i1}(y) \equiv 0$ miatt

$$[h_i, h_j](y) = \sum_{k=2}^m \alpha_{ijk}(y)h_k(y), \quad \forall y. \quad (11.18b)$$

Jelölje X -nek az $y_1 = 0$ által definiált szeletét $\bar{X}$, akkor $\bar{X}$ nyílt halmaz R^{n-1} -ben. Jelölje vonás a függvények és vektorok utolsó $n-1$ komponensét, akkor

$$[\bar{h}_i, \bar{h}_j]((0 \bar{y}^T)^T) = \sum_{k=2}^m \alpha_{ijk}((0 \bar{y}^T)^T) \bar{h}_k((0 \bar{y}^T)^T), \quad \forall y, \quad (11.19)$$

ami mutatja, hogy $\{\bar{h}_2, \dots, \bar{h}_m\}$ involutív $0_{R^{n-1}}$ valamilyen környezetében. Ezért az indukciós hipotézis szerint léteznek sima $\bar{\phi}_{m+1}(\bar{y}), \dots, \bar{\phi}_n(\bar{y}) \in S(\bar{X})$ sima függvények és egy $\bar{N}(0_{R^{n-1}}) \subset R^{n-1}$ környezet úgy, hogy $d\bar{\phi}_{m+1}(\bar{y}), \dots, d\bar{\phi}_n(\bar{y})$ lineárisan függetlenek $\forall \bar{y} \in \bar{N}$ esetén és

$$\frac{\partial \bar{\phi}_i(\bar{y})}{\partial \bar{y}} \bar{h}_i((0 \bar{y}^T)^T) = 0, \quad \forall \bar{y} \in \bar{N}, \quad j = 2, \dots, m; \quad i = m+1, \dots, n. \quad (11.20)$$

Legyen

$$\phi_i(y) := \bar{\phi}_i(\bar{y}), \quad i = m+1, \dots, n, \quad (11.21)$$

akkor $\phi_i(y)$ valójában független y_1 -től és $\phi_{m+1}, \dots, \phi_n \in S(X)$, továbbá választható $N = \{y \in X : \bar{y} \in \bar{N}\}$. Be kell látni, hogy

$$\langle d\phi_i, g_j \rangle(y) = 0, \quad \forall y \in N, \quad j = 1, \dots, m; \quad i = m+1, \dots, n. \quad (11.22)$$

Mivel $\{g_1(y), \dots, g_m(y)\}$ és $\{g_1(y), h_2(y), \dots, h_m(y)\}$ azonos alteret feszítenek ki, ezért ellegendő megmutatni, hogy teljesül

$$\langle d\phi_i, g_1 \rangle(y) = 0, \forall y \in N, i = m+1, \dots, n, \quad (11.23)$$

$$\langle d\phi_i, h_j \rangle(y) = 0, \forall y \in N, j = 2, \dots, m; i = m+1, \dots, n. \quad (11.24)$$

Mivel

$$d\phi_i(y) = [0 \ \partial \bar{\phi}_i / \partial \bar{y}] \quad (11.25)$$

és $g_1(y)$ -nak csak az első komponense különbözik nullától, ezért a (11.23) állítás igaz.

A (11.24) állítás a következő lépésekben látható be:

$$L_{g_1} \phi_i = \langle d\phi_i, g_1 \rangle = 0 \Rightarrow L_{[g_1, h_j]} \phi_i = L_{g_1} L_{h_j} \phi_i - L_{h_j} L_{g_1} \phi_i = L_{g_1} L_{h_j} \phi_i,$$

$$[g_i, h_j] = b_{j1} g_1 + \sum_{k=2}^m b_{jk} h_k, \quad b_{jk} \in S(X) \text{ (involutív tulajdonság),}$$

$$L_{g_1} L_{h_j} \phi_i = L_{[g_1, h_j]} \phi_i = \sum_{k=2}^m b_{jk} L_{h_k} \phi_i,$$

$$\psi_{ij} := L_{h_j} \phi_i = \langle d\phi_i, h_j \rangle \in S(X),$$

$$L_{g_1} \psi_{ij} = \langle d\psi_{ij}, g_1 \rangle = \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial y_1} = \sum_{k=2}^m b_{jk} ((y_1 \ \bar{y}^T)^T) \psi_{jk} ((y_1 \ \bar{y}^T)^T). \quad (11.26)$$

Rögzítsük az i indexet és az $\bar{y} \in \bar{X}$ vektort. Akkor (11.26) egy lineáris vektor-differenciálegyenlet, amelyben a független változó y_1 és az ismeretlen vektor $(\psi_{i2}, \dots, \psi_{im})^T$. A "kezdeti feltétel" $y_1 = 0$ -nál (11.20) és (11.25) felhasználásával

$$\psi_{ij} ((0 \ \bar{y}^T)^T) = \frac{\partial \bar{\phi}_i(\bar{y})}{\partial \bar{y}} \bar{h}_j ((0 \ \bar{y}^T)^T) = 0. \quad (11.27)$$

Mivel a vektor-differenciálegyenlet homogén és lineáris, a kezdeti feltétel pedig nulla, ezért

$$\langle d\phi_i, h_j \rangle(y) = \psi_{ij} ((y_1 \ \bar{y}^T)^T) = 0, \forall (y_1 \ \bar{y}^T)^T \in N, \forall i, j, \quad (11.28)$$

ami teljessé teszi a bizonyítást.

11.2 Tétel (alternatív Frobenius-tétel [24]): Legyen $f_1, \dots, f_m \in V(X)$, $N(x_0) \subset X$ nyílt halmaz, és $\forall x \in N(x_0)$ esetén tartalmazzon az $\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ halmaz k lineárisan független vektort. Akkor léteznek $\phi_{k+1}, \dots, \phi_n \in S(X)$ függvények, hogy

(1) $\{d\phi_{k+1}(x_0), \dots, d\phi_n(x_0)\}$ lineárisan függetlenek,

(2) $\exists V(x_0) \subset N(x_0)$ nyílt halmaz, hogy

$$\langle d\phi_i, f_j \rangle(x) = 0, \forall x \in V(x_0), k+1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \text{ esetén} \quad (11.29)$$

$\Leftrightarrow$

az $f_1, \dots, f_m$ által kifeszített $\Delta(x) = \text{Span}\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ disztribúció involutív, azaz léteznek $\alpha_{ijl} \in S(X)$ valós függvények és $U(x_0) \subset N(x_0)$ nyílt halmaz, hogy

$$[f_i, f_j](x) = \sum_{l=1}^m \alpha_{ijl}(x) f_l(x) \quad \forall x \in U(x_0) \text{ esetén.} \quad (11.30)$$

Megjegyzés: A fenti (11.29) egyenletek parciális differenciálegyenletek, amelyek megoldhatóságára lehet következtetni az involutív tulajdonság teljesüléséből. A fő probléma azonban az, hogy az alkalmazásokhoz a parciális differenciálegyenletek megoldása is szükséges szimbolikus (képletszerű) alakban.

11.2 Lokális elérhetőség

Az $\dot{x} = Ax + Bu$, $x \in R^n$, $u \in R^m$ lineáris rendszer irányíthatósági lépcsős alakra hozható, lásd könyv I. kötet 10. fejezet [1]. Ha $M \subset R^n$ az irányíthatósági altér, akkor $A(M) \subset M$ és $B(R^m) \subset M$. A két tulajdonság úgy fogalmazható meg, hogy az M altér A -invariáns, ha $A(M) \subset M$ teljesül, és (A, B) -invariáns, ha egyszerre $A(M) \subset M$ és $B(R^m) \subset M$.

Megjegyzés: A később bevezetendő és fontos szerepet játszó r_i relatív fokszámmal való jelölésbeli ütközés elkerülésére itt és a továbbiakban $\dim u = m$ választással élünk. Ez eltér a könyvben máshol használt $\dim u = r$ értéktől.

Nemlineáris rendszerosztály

Legyen $X \subset R^n$, $f, g_1, \dots, g_m \in V(X)$ és a nemlineáris rendszer állapotegyenlete

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x). \quad (11.31)$$

Nemlineáris rendszer invariáns disztribúciója

Legyen Δ disztribúció X -en és $f \in V(X)$. Azt mondjuk, hogy Δ invariáns f alatt vagy f -invariáns, ha $[f, h] \in \Delta$ minden $h \in \Delta$ esetén. Röviden: $[f, \Delta] \subset \Delta$.

Megjegyzés: Ez a definíció megfelel a permanencia elvének lineáris rendszer esetén. Legyen ugyanis $X = R^n$, $M \subset R^n$ k -dimenziós altér, amely A -invariáns, tehát

$A(M) \subset M$, ahol a lineáris rendszer miatt $f(x) = Ax$. Legyen M bázisa $\{v_1, \dots, v_k\}$, és tekintsük azt a Δ disztribúciót, amelyet $\{v_1, \dots, v_k\}$ generál:

$$\Delta(x) := \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = M, \quad (11.32)$$

$$h \in \Delta \Rightarrow h(x) = \sum_{i=1}^k h_i(x)v_i, \quad h_i \in S(X). \quad (11.33)$$

I. Tegyük fel, hogy a Δ disztribúció f -invariáns.

A következő tulajdonságok triviálisak:

$$v_i \in \Delta$$

$$[f, v_i] = \frac{\partial v_i}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} v_i = -Av_i \in \Delta$$

$$-Av_i = \text{const} \quad \forall x \text{ esetén} \Rightarrow -Av_i \in \Delta(x) = M$$

$$AM \subset M \Rightarrow M \text{ altér } A\text{-invariáns.}$$

II. Tegyük fel, hogy az M altér A -invariáns, azaz $A(M) \subset M$.

Mivel a Lie-zárójel bilineáris, elegendő bizonyítani a $h_i \in S(X)$, $h := h_i(x)v_i \in \Delta$ esetre, hogy $[Ax, h_i(x)v_i] \in \Delta$. Ekkor azonban

$$\begin{aligned} [Ax, h_i(x)v_i] &= v_i \frac{\partial h_i(x)}{\partial x} Ax - Ah_i(x)v_i = c_i(x)v_i - h_i(x) \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j = \\ &= \sum_{j=1}^k \hat{h}_j(x)v_j \in \Delta, \end{aligned}$$

$$\text{mivel } c_i(x) := \frac{\partial h_i(x)}{\partial x} Ax \text{ miatt } c_i, \hat{h}_j \in S(X).$$

11.5 Lemma: Legyen $x_0 \in X$, $f \in V(X)$ és Δ k -dimenziós disztribúció X -en.

Tegyük fel, hogy $\exists U(x_0)$ nyílt halmaz, hogy Δ megszorítása $U(x_0)$ -on involutív és f -invariáns. Akkor létezik $U_0(x_0)$ nyílt halmaz és T diffeomorfizmus $U_0(x_0)$ -on úgy, hogy az új $y = T(x)$ koordinátákban f_T alakja

$$f_T(y) = \begin{pmatrix} f_a(y_a, y_b) \\ f_b(y_b) \end{pmatrix} \quad \forall y = \begin{pmatrix} y_a \\ y_b \end{pmatrix} \in T(U_0) \text{ esetén,} \quad (11.34)$$

ahol $f_a, y_a \in R^k$ és $f_b, y_b \in R^{n-k}$.

Bizonyítás:

Mivel Δ involutív az U nyílt halmazon, ezért a Frobenius-tétel szerint $\exists U_0, T$ a tételben szereplő tulajdonságokkal, továbbá az új koordinátákban

$$\begin{aligned}\Delta_T &= \{h_T \in V(X) : h_{iT}(y) = 0, k+1 \leq i \leq n, \forall y \in T(U_0)\} = \\ &= \{h_T \in V(X) : h_{bT}(y) = 0, \forall y \in T(U_0)\}.\end{aligned}$$

Mivel Δ f -invariáns, ezért Δ_T f_T -invariáns. Ha tehát $h_T \in \Delta_T$ tetszőlegesen, akkor az f_T -invariancia miatt

$$[f, h]_T = [f_T, h_T] = \frac{\partial h_T}{\partial y} f_T - \frac{\partial f_T}{\partial y} h_T \in \Delta_T,$$

és ezért $[f_T, h_T]$ utolsó $n-k$ eleme nulla. Partícionálva:

$$\begin{aligned}f_T &= \begin{pmatrix} f_a \\ f_b \end{pmatrix}, \quad h_T = \begin{pmatrix} h_a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_a \\ y_b \end{pmatrix} \\ \frac{\partial f_T}{\partial y} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_a}{\partial y_a} & \frac{\partial f_a}{\partial y_b} \\ \frac{\partial f_b}{\partial y_a} & \frac{\partial f_b}{\partial y_b} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial h_T}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_a}{\partial y_a} & \frac{\partial h_a}{\partial y_b} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial h_a}{\partial y_a} & \frac{\partial h_a}{\partial y_b} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_a \\ f_b \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_a}{\partial y_a} & \frac{\partial f_a}{\partial y_b} \\ \frac{\partial f_b}{\partial y_a} & \frac{\partial f_b}{\partial y_b} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_a \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} * \\ \frac{\partial f_b}{\partial y_a} h_a \end{pmatrix} \in \Delta_T \Rightarrow \\ \frac{\partial f_b}{\partial y_a} h_a &= 0, \quad \forall h_a \Rightarrow \frac{\partial f_b}{\partial y_a} \equiv 0 \Rightarrow f_b = f_b(y_b)\end{aligned}$$

Megjegyzés: A lemmában megfogalmazott alak tekinthető a lépcsős vagy blokk-háromszög alak általánosításának.

11.3 Tétel (elérhetőségi lépcsős alak): Tekintsük a $\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x)$ nemlineáris rendszert. Tegyük fel, hogy létezik $U(x_0)$ nyílt halmaz és Δ k -dimenziós disztribúció $U(x_0)$ felett, hogy teljesülnek a következő feltételek:

- i) Δ involutív és x_0 reguláris pontja Δ -nak,
- ii) $g_i(x) \in \Delta$ minden $x \in U(x_0)$ esetén, $i = 1, \dots, m$,
- iii) Δ f -invariáns.

Akkor létezik $U_0(x_0)$ nyílt halmaz és T diffeomorfizmus $U_0(x_0)$ -on úgy, hogy

$$f_T(y) = \begin{pmatrix} f_a(y_a, y_b) \\ f_b(y_b) \end{pmatrix}; \quad g_{iT}(y) = \begin{pmatrix} g_{ia}(y_a, y_b) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (11.35)$$

ahol $y = \begin{pmatrix} y_a \\ y_b \end{pmatrix} = T(x)$ és $y_a, f_a, g_{ia} \in R^k$, $y_b, f_b \in R^{n-k}$.

Bizonyítás: f_T alakja következik a 11.5 lemmából, g_{iT} alakja pedig abból, hogy $g_i \in \Delta \Leftrightarrow g_{iT} \in \Delta_T$.

Következmény: y_b nem elérhető, mert sem y_a , sem pedig u nem hat rá. A cél az alkalmazások során a legkisebb k és a hozzátartozó Δ meghatározása, amelyre teljesülnek a 11.3 tétel feltételei.

Algoritmus involutív és f -invariáns disztribúció előállítására

1. $i := 0$ és $\Delta_0 := \text{Span}\{g_1, \dots, g_m\}$.
2. Legyen $\{h_1^i, \dots, h_{k_i}^i\} \subset V(X)$ generátora Δ_i -nek. Tesztelendő, hogy Δ_i involutív-e x_0 valamilyen környezetében, azaz $[h_j^i, h_l^i] \in \Delta_i$, $\forall 1 \leq j, l \leq k_i$ esetén. Tesztelendő, hogy Δ_i invariáns-e f alatt, azaz $[f, h_j^i] \in \Delta_i$, $\forall 1 \leq j \leq k_i$ esetén. Ha Δ_i involutív és f -invariáns, akkor STOP.
3. Ha Δ_i vagy nem involutív, vagy nem f -invariáns, akkor $i := i + 1$,

$$\Delta_{i+1} = \text{Span}\{h_j^i : 1 \leq j \leq k_i\} \cup \{[h_j^i, h_l^i] : 1 \leq j, l \leq k_i\} \cup \{[f, h_j^i] : 1 \leq j \leq k_i\}$$

és ugrás 2-re. Ebben a lépésben csak azokkal a Lie-zárójelekkel kell bővíteni, amelyek esetén $[h_j^i, h_l^i]$ vagy $[f, h_j^i]$ nem tartoztak hozzá Δ_i -hez.

Értelmezés:

- i) Az algoritmus egy $\{\Delta_i\}$ sorozatot generál, amelyre $\Delta_i(x) \subset \Delta_{i+1}(x) \quad \forall x \in X$ esetén.
- ii) Ha x_0 reguláris pontja $\forall \Delta_i$ -nek, akkor $\dim \Delta_{i+1} > \dim \Delta_i$. Mivel $\dim \Delta_i \leq n$, ezért a folyamat nem folytatható n -nél többször.
- iii) Ha a folyamat befejeződik, akkor a keletkezett Δ_c involutív és invariáns f és minden g_i alatt.
- iv) Δ_c a legszűkebb ilyen tulajdonságú disztribúció, azaz ha Δ egy másik disztribúció, amely tartalmazza mindegyik g_i -t, involutív és f -invariáns x_0 valamilyen környezetében, akkor $\Delta_c \subset \Delta$.

Korrekciós lehetőségek az algoritmuson:

- i) Az 2. lépésben elegendő tesztelni, hogy Δ_i invariáns-e f és $\forall g_l$ alatt, mivel az involutív tulajdonság automatikusan következik [53].
- ii) A 3. lépésben elegendő bővíteni az $[f, h_j^i], [g_l, h_j^i]$ Lie-zárójelekkel:

$$\Delta_{i+1} := \text{Span} \{h_j^i : 1 \leq j \leq k_i\} \cup \{[f, h_j^i], [g_l, h_j^i] : 1 \leq j \leq k_i, 1 \leq l \leq m\}.$$

A közbenső disztribúciókra a változás hatással lehet, de a végső Δ_c -re NEM.

- iii) Ha x_0 reguláris pontja $\forall \Delta_i$ -nek, akkor az algoritmus legfeljebb $n-1$ lépés után befejeződik a 3. lépés ismétlésével. Ha $i < n-1$ és Δ_i tartalmazza a $g_1, \dots, g_m$ vektormezőket, f -invariáns és involutív, akkor ha $\Delta_{i+1} = \Delta_i$, akkor következik $\Delta_i = \Delta_{i+1} = \dots = \Delta_{n-1} = \Delta_c$. Ezért elegendő végrehajtani a korrigált 3. lépést $(n-1)$ -szer, és minden lépésben ellenőrizni, hogy x_0 reguláris pontja-e Δ_i -nek (nem ellenőrizve az invariáns és involutív tulajdonságot). Ilyen esetben $\Delta_c = \Delta_{n-1}$.

11.4 Tétel (lokális elérhetőség [53]): Legyen $\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x)$ a nemlineáris rendszer.

- i) Ha $\dim \Delta_c < n$, akkor a rendszer nem elérhető.
- ii) Ha $\dim \Delta_c = n$, akkor a rendszer elérhető.

Következmény: Tekintsük a

$$\bar{\Delta}_{n-1} = \text{Span} \{ad_f^i g_j : 1 \leq j \leq m, 0 \leq i \leq n-1\} \quad (11.36)$$

disztribúciót. Ha $\dim \bar{\Delta}_{n-1} = n$, akkor $\dim \Delta_c = n$, ezért a rendszer lokálisan elérhető.

Bizonyítás: Világos, hogy $\bar{\Delta}_{n-1} \subset \Delta_c$. Ha tehát $\dim \bar{\Delta}_{n-1} = n$, akkor $\dim \Delta_c = n$, és ezért a rendszer lokálisan elérhető.

Megjegyzés:

- 1. $\bar{\Delta}_{n-1}$ előállítható a következő algoritmussal:

$$i) \quad \bar{\Delta}_0 := \Delta_0.$$

$$ii) \quad \bar{\Delta}_{i+1} := \text{Span} \{\bar{\Delta}_i, [f, r_j^i] : 1 \leq j \leq l_i\}, \text{ ahol } l_i = \dim \bar{\Delta}_i, r_1^i, \dots, r_{l_i}^i \text{ generátora } \bar{\Delta}_i\text{-nek, } i = 1, \dots, n-1.$$

2. Nemlineáris rendszer esetén általában $\bar{\Delta}_{n-1} \neq \Delta_c$, mivel nem bővítünk $[g_i, r_j^i]$ -vel $\bar{\Delta}_{i+1}$ -ben.
3. Lineáris rendszer esetén $\bar{\Delta}_i = \Delta_i$, mivel $g_j(x) = b_j, 1 \leq j \leq m$ konstans vektormezők Lie-zárójele nulla. Lineáris rendszer esetén $\bar{\Delta}_{n-1} = \Delta_c$.

11.3 Lokális megfigyelhetőség

Legyen a kimeneti leképezéssel kibővített nemlineáris rendszer

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x), \\ y &= h(x),\end{aligned}\tag{11.37}$$

ahol $x \in R^n$, $u \in R^m$ és $y \in R^l$. Az $x(0) = x_0$ kezdeti érték probléma megoldása felírható az állapotátmenet függvénnyel és a kimeneti leképezéssel, lásd könyv I. kötet 2. fejezet [1]:

$$x(t) = \varphi(t, 0, x_0, u(\cdot)), \tag{11.38a}$$

$$y(\cdot, x_0, u) := h(\varphi(\cdot, 0, x_0, u(\cdot))). \tag{11.38b}$$

Megkülönböztethető állapotok

Azt mondjuk, hogy x_0 és x_1 megkülönböztethető állapotok, ha $\exists u(\cdot)$ bemenő jel, hogy $y(\cdot, x_0, u) \neq y(\cdot, x_1, u)$.

Lokálisan megfigyelhető rendszer

A nemlineáris rendszer az x_0 állapotban lokálisan megfigyelhető, ha $\exists N(x_0)$ nyílt halmaz úgy, hogy $\forall x \in N, x \neq x_0$ megkülönböztethető x_0 -tól.

A nemlineáris rendszer lokálisan megfigyelhető, ha lokálisan megfigyelhető $\forall x_0 \in X$ esetén.

Lineáris rendszer megfigyelhetősége

A megfigyelhetőséggel kapcsolatos fontosabb összefüggéseket az $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ lineáris rendszer esetén a könyv I. kötetének 10. fejezetében vizsgáltuk [1]. Hozzuk az eredményeket olyan alakra, amely könnyen kiterjeszthető nemlineáris rendszerekre is. Deriválással kapjuk, hogy

$$\dot{y} = C\dot{x} = CAx + CBu,$$

$$\ddot{y} = C\ddot{x} = CA\dot{x} + CB\dot{u} = CA(Ax + Bu) + CB\dot{u} = CA^2x + CABu + CB\dot{u},$$

$$\ddot{\ddot{y}} = CA^2\dot{x} + CAB\dot{u} + CB\ddot{u} = CA^3x + CA^2Bu + CAB\dot{u} + CB\ddot{u} \text{ stb.}$$

A bal oldalakból az ismert $CBu(t)$, $CABu(t)$, $CB\dot{u}(t)$ stb. rendre levonható, és hivatkozva még a Cayley–Hamilton-tételre következik, hogy $x(t)$ meghatározható, ha

$$\text{rank } W_0 := \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n = \dim x.$$

Nemlineáris rendszer esetén

Sorozatos idő szerinti deriválással kapjuk, hogy

$$y_j = h_j(x),$$

$$\dot{y}_j = dh_j \dot{x} = dh_j f(x) + \sum_{i=1}^m u_i dh_j g_i(x) = (L_f h_j)(x) + \sum_{i=1}^m u_i (L_{g_i} h_j)(x),$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_j &= d \underbrace{(dh_j f)}_{L_f h_j} \dot{x} + \sum_{i=1}^m \dot{u}_i \underbrace{dh_j g_i}_{L_{g_i} h_j} + \sum_{i=1}^m u_i d \underbrace{(dh_j g_i)}_{L_{g_i} h_j} \dot{x} = \\ &= d(L_f h_j)(f + \sum u_i g_i) + \sum \dot{u}_i (L_{g_i} h_j) + \sum u_i d(L_{g_i} h_j)(f + \sum u_s g_s) = \\ &= L_f^2 h_j + \sum_i u_i L_{g_i} L_f h_j + \sum_i \dot{u}_i L_{g_i} h_j + \sum_i u_i L_f L_{g_i} h_j + \sum_i \sum_s u_i u_s L_{g_i} L_{g_s} h_j, \end{aligned}$$

ahonnan már látható, hogy $y_j^{(k)}$ "lineáris" kombinációja az olyan tagoknak, mint

$$(L_{z_1} L_{z_{s-1}} \dots L_{z_1} h_j)(x), \quad 1 \leq s \leq k, \quad (11.39)$$

ahol a $z_1, z_2, \dots, z_s$ vektormezők az $\{f, g_1, \dots, g_m\}$ halmazból valók.

Megfigyelési tér

A nemlineáris rendszer $\mathcal{O}$ megfigyelési tere az R^1 valós számtest feletti azon függvényter, amelyet a következő függvények feszítenek ki:

$$L_{z_1} L_{z_{s-1}} \dots L_{z_1} h_j, \quad s \geq 0, \quad z_1, \dots, z_s \in \{f, g_1, \dots, g_m\}, \quad 1 \leq j \leq l. \quad (11.40)$$

A lineáris kombinációban a súlyok számok, nem pedig függvények.

11.6 Lemma: Jelölje $\mathcal{J}$ az R test felett azon függvények terét, amelyet kifeszít

$$L_{v_1} L_{v_{s-1}} \dots L_{v_1} h_j, \quad s \geq 0, \quad 1 \leq j \leq l, \quad (11.41)$$

ahol $v_1, \dots, v_s \in V(X)$ alakja $u_1, \dots, u_m \in R^1$ valós számoknál

$$v = f + \sum_{i=1}^m u_i g_i. \quad (11.42)$$

Akkor $\mathcal{J} = \emptyset$.

Bizonyítás:

i) $L_{v+w} h_j = dh_j(v+w) = L_v h_j + L_w h_j$

ii) Minden $v = f + \sum_{i=1}^m u_i g_i$ lineáris kombinációja az R^1 valós számtest felett az $\{f, g_1, \dots, g_m\}$ vektormezőknek.

iii) Minden vektormező az $\{f, g_1, \dots, g_m\}$ halmazból $v = f + \sum_{i=1}^m u_i g_i$ alakú függvények lineáris kombinációja, például f esetén minden u_i nulla, g_i pedig $g_i = (f + g_i) - f$, $i = 1, \dots, m$.

Ezért $\mathcal{J} = \emptyset$ (egyforma kifeszített terek).

11.7 Lemma: Legyen $u_1, \dots, u_s \in R^m$, és tekintsük a következő szakaszonként konstans függvényt:

$$u(t) := \begin{cases} u_1, & 0 \leq t < t_1 \\ u_2, & t_1 \leq t < t_1 + t_2 \\ \vdots & \vdots \\ u_s, & \sum_{k=1}^{s-1} t_k \leq t \leq \sum_{k=1}^s t_k \end{cases} \quad (11.43)$$

Jelölje $y_j(x_0) = y_j(x_0, t_1, \dots, t_s)$ a rendszer kimenetének j -edik komponensét $u(\cdot)$ hatására, az x_0 kezdeti állapotból indítva. Akkor

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1} \dots \frac{\partial}{\partial t_s} y_j \right)_{t_k=0, \forall k} = (dL_{v_s} L_{v_{s-1}} \dots L_{v_1} h_j)(x_0), \quad (11.44)$$

ahol v_k alakja

$$v_k = f + \sum_{i=1}^m u_{ki} g_i, \quad k = 1, \dots, s. \quad (11.45)$$

A lemma szerint ha a szakaszosan konstans bemenő jelet alkalmazzuk és a "pulzusok" időtartamát nullához zsugorítjuk, akkor $((\partial / \partial t_1, \dots, \partial / \partial t_s)(y))_{t_k=0, \forall k}$ egy speciális ismételt Lie-derivált. A bizonyítás indukcióval lehetséges.

11.5 Tétel (lokális megfigyelhetőség elégséges feltétele): Legyen a nemlineáris rendszer a (11.39) szerinti. Tekintsük a következő formákat x_0 -ban kiértékelve:

$$(dL_{z_s} L_{z_{s-1}} \dots L_{z_1} h_j)(x_0), s \geq 0, z_i \in \{f, g_1, \dots, g_m\}. \quad (11.46)$$

Tegyük fel, hogy létezik n lineárisan független sorvektor a halmazban. Akkor a rendszer lokálisan megfigyelhető x_0 körül.

Bizonyítás:

Jelölje $\mathcal{O}$ a megfigyelési teret, és tekintsük a $d\alpha(x_0)$ sorvektorokat, miközben α végigfut $\mathcal{O}$ felett. Ez $(R^n)^*$ -nak altere, amely $1 \times n$ alakú vektorokból áll. Ezt az alteret pontosan $(dL_{z_s} L_{z_{s-1}} \dots L_{z_1} h_j)(x_0)$, $s \geq 0$, $z_i \in \{f, g_1, \dots, g_m\}$ feszíti ki, és a feltevés szerint dimenziója n . Legyen $\mathcal{J}$ a 11.6 lemma szerinti. Mivel $\mathcal{J} = \mathcal{O}$, a feltevés szerint létezik n lineárisan független sorvektor, amely $d\beta_1(x_0), \dots, d\beta_n(x_0)$ alakú, ahol $\forall \beta_i$ valamilyen $L_{v_s} L_{v_{s-1}} \dots L_{v_1} h_j$ alakú függvény, $v = f + \sum_{i=1}^m u_i g_i$, $u_1, \dots, u_m \in R$. Ezért az inverz függvény tétel szerint

$$T(x) := \begin{bmatrix} \beta_1(x) \\ \vdots \\ \beta_n(x) \end{bmatrix} \quad (11.47)$$

egy diffeomorfizmus x_0 körül lokálisan. Válasszuk meg az $N(x_0)$ környezetet úgy, hogy $T: N \rightarrow T(N)$ diffeomorfizmus legyen.

Tegyük fel, hogy $x_1 \in N$ megkülönböztethetetlen x_0 -tól. (Be kell látni, hogy $x_1 = x_0$). Ekkor minden $u(\cdot)$ esetén $y(\cdot, x_0, u) = y(\cdot, x_1, u)$. Speciálisan igaz ez konstans $u(\cdot)$ esetén is, amikor is $y_j(x_0) = y_j(x_1)$. Ha $t_s \rightarrow 0$ és alkalmazzuk a 11.7 lemmát, akkor

$$(dL_{v_s} L_{v_{s-1}} \dots L_{v_1} h_j)(x_0) = (dL_{v_s} L_{v_{s-1}} \dots L_{v_1} h_j)(x_1), j = 1, \dots, l \quad (11.48)$$

teljesül minden $v = f + \sum_{i=1}^m u_i g_i$ vektormező és $s \geq 0$ egész esetén. De $\forall \beta_i(x)$ alakja $L_{v_s} L_{v_{s-1}} \dots L_{v_1} h_j$, $s \geq 0$, $1 \leq j \leq l$, alkalmasan választott $v_1, \dots, v_s$ esetén. Ezért $\beta_i(x_0) = \beta_i(x_1)$, $i = 1, \dots, n$, amiből következik $T(x_0) = T(x_1)$, és mivel T lokális diffeomorfizmus, ezért $x_0 = x_1$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

11.6 Tétel (megfigyelhető rendszerek dekompozíciója): Legyen a nemlineáris rendszer a (11.37) szerinti és jelölje $\mathcal{O}$ a megfigyelési teret. Minden $x \in X$ esetén jelölje $d\mathcal{O}(x) \subset (R^n)^*$ azt az alteret, amely a $d\alpha(x)$, $\alpha \in \mathcal{O}$ sorvektorokból áll. Tegyük fel, hogy létezik $N(x_0)$ környezet úgy, hogy $\dim d\mathcal{O}(x) = k < n$, $\forall x \in N$ esetén. Ak-

kor létezik T diffeomorfizmus N felett úgy, hogy a $z = T(x)$ koordináta-transzformáció és $z = \begin{pmatrix} z_a \\ z_b \end{pmatrix}$, $z_a \in R^k$, $z_b \in R^{n-k}$ jelölések mellett

$$f_T(z) = \begin{pmatrix} f_a(z_a) \\ f_b(z_a, z_b) \end{pmatrix}, g_{iT} = \begin{pmatrix} g_{ia}(z_a) \\ g_{ib}(z_a, z_b) \end{pmatrix}, h_T(z) = h(T^{-1}(z)) = h_T(z_a). \quad (11.49)$$

Bizonyítás:

Válasszunk $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in S(X)$ függvényeket úgy, hogy teljesüljön

$$d\mathcal{O}(x_0) = \text{Span} \{d\alpha_1(x_0), \dots, d\alpha_k(x_0)\}, \quad (11.50)$$

és válasszunk elegendően kis $N(x_0)$ környezetet úgy, hogy teljesüljön az is, hogy

$$d\mathcal{O}(x) = \text{Span} \{d\alpha_1(x), \dots, d\alpha_k(x)\}, \quad \forall x \in N. \quad (11.51)$$

Válasszunk további $n-k$ függvényt: $\beta_{k+1}, \dots, \beta_n \in S(X)$ úgy, hogy

$$T(x) = \begin{bmatrix} \alpha_1(x) \\ \vdots \\ \alpha_k(x) \\ \beta_{k+1}(x) \\ \vdots \\ \beta_n(x) \end{bmatrix} \text{ diffeomorfizmus } N\text{-en és } z = T(x). \quad (11.52)$$

Tegyük fel, hogy $\alpha \in \mathcal{O}$, akkor $d\alpha(x) \in d\mathcal{O}(x)$, $\forall x \in N$, ezért (11.51) miatt a koordináta-transzformáció után $\alpha_T(z) = \alpha_T(z_a)$. Ez azt jelenti, hogy minden α_T transzformált függvény gradiense

$$d\alpha_T(z) = [w(z_a) \quad 0_{n-k}], \quad \forall z \in M = T(N). \quad (11.53)$$

Mivel $h(x)$ minden h_j komponense esetén $h_j \in \mathcal{O}$, ezért $h_{jT}(z) = h_{jT}(z_a)$, $h_T(z) = h_T(z_a)$. Legyen v valamelyik függvény $f_T, g_{iT}, i=1, \dots, m$ közül, és partícionáljuk:

$$v(z) = \begin{pmatrix} v_a(z) \\ v_b(z) \end{pmatrix}, \quad v_a \in R^k, \quad v_b \in R^{n-k}. \quad (11.54)$$

Ha $\alpha_T \in \mathcal{O}$, akkor $(L_v \alpha_T)(z) = w(z_a) v_a(z_a)$. Következik a megfigyelési tér definíciójából, hogy $\mathcal{O}$ zárt a Lie-deriválásra bármelyik $f, g_1, \dots, g_m$ szerint, ezért

$\alpha \in \mathcal{O} \Rightarrow L_f \alpha, L_g \alpha \in \mathcal{O} \Rightarrow L_v \alpha_T$ független z_b -től: $(L_v \alpha_T)(z) = (L_v \alpha_T)(z_a)$. Alkalmazzuk ezt $\alpha = \alpha_i$ esetén, ahol α_i az i -edik "bázis" függvény $d\mathcal{O}(x)$ -ben, akkor következik $\alpha_{iT} = z_i$, $d\alpha_{iT} = e_i^T$, amit behelyettesítve (11.53)-ba $w(z_a) = e_i^T$ helyére kapjuk, hogy $v(z_a)$ i -edik komponense független z_b -től. Mivel v bármelyik $f, g_1, \dots, g_m$ lehet, ezért következik az $f_a(z_a), g_{ia}(z_a)$ alak. Ezzel a tételt igazoltuk.

Megjegyzés:

- i) z_b nem megfigyelhető, mivel nem befolyásolja z_a -t és nem jelenik meg y -ban.
- ii) A lineáris rendszerek Kalman-féle felbontásához hasonló általános felbontás adható meg nemlineáris rendszerek esetén is, amelynek alapja a korábbi Δ_c disztribúció és az $\mathcal{O}$ megfigyelési térhez megkonstruálható $\ker d\mathcal{O}$ disztribúció, amely minden $x \in X$ -hez a $\ker d\mathcal{O}(x) := \{f \in V(X) : \langle f(x), d\alpha(x), f(x) \rangle = 0, \forall \alpha \in \mathcal{O}\}$ alteret rendel hozzá. A részletek tekintetében lásd [55].

11.4 Nemlineáris rendszer linearizálása teljes állapot-visszacsatolással

Egy érdekes kérdés, vajon nem hozható-e a nemlineáris rendszer egyszerű nemlineáris statikus állapot-visszacsatolással, mégha csak loklisan is, egy lineáris rendszerrel megegyező alakra, amelyet azután a lineáris rendszerekre jól kidolgozott módszerekkel tovább lehet kompenzálni. Megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén ez lehetséges.

11.4.1 SISO rendszer linearizálása állapot-visszacsatolással

Rögzítsük le a SISO nemlineáris rendszerosztályt és fogalmazzuk meg precízen a célt.

Rendszer:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + ug(x), \\ X &\subset \mathbb{R}^n \text{ nyílt, } 0 \in X, f, g \in V(X). \end{aligned} \tag{11.55}$$

Cél:

$$\begin{aligned} q, s &\in S(X), s(x) \neq 0 \text{ valamilyen } U(0) \text{ környezetben,} \\ T &\text{ lokális diffeomorfizmus, } T(0) = 0, \\ v &= q(x) + s(x)u, \\ \dot{z} &= Az + bv, (A, b) \text{ irányítható.} \end{aligned} \tag{11.56}$$

Ha a cél elérhető, akkor a nemlineáris rendszer linearizálható az

$$u := -\frac{q(x)}{s(x)} + \frac{1}{s(x)}v \quad (11.57)$$

nemlineáris statikus állapot-visszacsatolással az $x \in U(0)$ állapot környezetében, ahol v a linearizált rendszerhez megkonstruált vezérlő jel.

Az $\dot{z} = Az + bv$ linearizált rendszer különböző alakú lehet, például *szabályozó alak-ra* is hozható egy újabb $\tilde{z} = \tilde{T}z$ konstans, nonsinguláris koordinátatranszformációval, lásd könyv I. kötet 6. fejezet [1]:

$$\dot{\tilde{z}} = \tilde{A}\tilde{z} + \tilde{b}v \quad (11.58a)$$

$$\tilde{A} := \tilde{T}A\tilde{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} := \tilde{T}b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (11.58b)$$

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s + \cdots + a_1s + a_0. \quad (11.58c)$$

Ha alkalmazzuk az újabb $v := \tilde{v} + (a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_{n-1})\tilde{z}$ állapot-visszacsatolást, akkor az így kompenzált rendszer állapotegyenlete

$$\dot{\tilde{z}} = \tilde{A}\tilde{z} + \tilde{b}[\tilde{v} + \underbrace{(a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_{n-1})}_{a^T}\tilde{z}] = \tilde{A}\tilde{z} + \tilde{b}\tilde{v} \quad (11.59a)$$

$$\tilde{\tilde{A}} := \tilde{A} + \tilde{b}a^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\tilde{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11.59b)$$

alakú lesz, amelyet SISO Brunovsky-féle kanonikus alaknak fogunk nevezni. A kompenzált rendszer ilyenkor n darab sorba kötött integrátorból áll, ha z_1 -et tekintjük kimenetnek:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}}_1 &= \tilde{z}_2, \dots, \dot{\tilde{z}}_{n-1} = \tilde{z}_n, \dot{\tilde{z}}_n = \tilde{v}, \\ \tilde{z} &= \tilde{T}T(x), \end{aligned} \quad (11.60)$$

$$\tilde{v} = v - a^T \tilde{z} = q(x) - a^T \tilde{T}T(x) + s(x)u.$$

Probléma megfogalmazás (SISO):

Adott a nemlineáris rendszer: $\dot{x} = f(x) + ug(x)$.

Léteznek-e:

i) $q \in S(X)$

ii) $s \in S(X)$ és $U(0)$ nyílt halmaz, hogy $s(x) \neq 0, \forall x \in U(0)$

iii) lokális diffeomorfizmus $T: R^n \rightarrow R^n, T(0) = 0$,

amelyek kielégítik a következő feltételt:

$$\begin{aligned} v &= q(x) + s(x)u, \\ z &= T(x), \\ \dot{z}_1 &= z_2, \dot{z}_2 = z_3, \dots, \dot{z}_{n-1} = z_n, \dot{z}_n = v. \end{aligned} \quad (11.61)$$

11.8 Lemma: Ha $\dot{x} = f(x) + ug(x), z = T(x), \dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = z_3, \dots, \dot{z}_{n-1} = z_n, \dot{z}_n = v = q(x) + us(x)$ és $s(x) \neq 0$, akkor

$$L_{ad_f^i g} T_j = 0, \quad 0 \leq i \leq n-j-1, \quad 1 \leq j \leq n-1, \quad (11.62)$$

$$L_{ad_f^{n-1} g} T_j = (-1)^{n-j} s, \quad 1 \leq j \leq n-1. \quad (11.63)$$

Bizonyítás:

A lemma feltételei szerint $z_i = T_i(x)$ az i -edik komponens, ezért

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \langle \nabla T_1, \dot{x} \rangle = \langle dT_1, f \rangle + u \langle dT_1, g \rangle = z_2 = T_2(x) \text{ független } u\text{-től} \Rightarrow \\ T_2 &= \langle dT_1, f \rangle = L_f T_1 \text{ és } 0 = \langle dT_1, g \rangle = L_g T_1, \end{aligned}$$

és ismétléssel $z_2, \dots, z_{n-1}$ esetén, illetve speciális módon z_n esetén

$$L_f T_i = T_{i+1}, \quad L_g T_i = 0, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\dot{z}_n = L_f T_n + u L_g T_n = v = q + us \Rightarrow q = L_f T_n, \quad s = L_g T_n.$$

(11.62) állítása más alakban is megfogalmazható:

$$L_g T_{n-1} = 0$$

$$L_g T_{n-2} = 0, \quad L_{[f,g]} T_{n-2} = 0, \quad \dots$$

$\vdots$

$$L_g T_1 = 0, \quad L_{[f,g]} T_1 = 0, \quad \dots, \quad L_{ad_f^{n-2} g} T_1 = 0.$$

(11.62) állításának igazolása teljes indukcióval történhet, start: $j = n-1$.

- 1) $j = n - 1$ esetén $L_g T_{n-1} = 0$ igaz.
- 2) Tegyük fel, hogy igaz $j + 1, \dots, n - 1$ esetén. Igazolni kell, hogy igaz j -re is. Ehhez ismét indukciót alkalmazunk, de most i -re, start $i = 0$:
- i) $i = 0$ esetén $L_g T_j = 0$ igaz.
- ii) Tegyük fel, hogy igaz $0, \dots, i - 1$ esetén. Igazolni kell, hogy ebből és a fentiekből következik i -re. De i esetén írható, hogy

$$L_{ad_f^i g} T_j = L_{[f, ad_f^{i-1} g]} T_j = L_f \underbrace{(L_{ad_f^{i-1} g} T_j)}_0 - L_{ad_f^{i-1} g} \underbrace{(L_f T_j)}_{T_{j+1}} = -L_{ad_f^{i-1} g} T_{j+1} = 0,$$

ezért az állítás igaz i -re,
és ezért j -re is.

Tekintsük ezután a (11.63) állítás igazolását. Világos, hogy

$$\begin{aligned} L_{ad_f^{n-j} g} T_j &= L_{[f, ad_f^{n-j-1} g]} T_j = L_f \underbrace{(L_{ad_f^{n-j-1} g} T_j)}_0 - L_{ad_f^{n-j-1} g} \underbrace{(L_f T_j)}_{T_{j+1}} = \\ &= -L_{ad_f^{n-j-1} g} T_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq n-1. \end{aligned}$$

A (11.63) állítást szintén teljes indukcióval fogjuk igazolni, start: $j = n - 1$.

- 1) $j = n - 1$ esetén igaz, mert

$$L_{ad_f^1 g} T_{n-1} = L_{[f, g]} T_{n-1} = L_f \underbrace{(L_g T_{n-1})}_0 - L_g \underbrace{(L_f T_{n-1})}_{T_n} = -L_g T_n = -s.$$

- 2) Tegyük fel, hogy igaz $j + 1, \dots, n - 1$ esetén. Igazolni kell, hogy igaz j -re is:

$$\begin{aligned} L_{ad_f^{n-j} g} T_j &= L_{[f, ad_f^{n-j-1} g]} T_j = L_f \underbrace{(L_{ad_f^{n-j-1} g} T_j)}_0 - L_{ad_f^{n-j-1} g} \underbrace{(L_f T_j)}_{T_{j+1}} = \\ &= -(-1)^{n-(j+1)} s = (-1)^{n-j} s, \end{aligned}$$

amit bizonyítani kellett.

11.7 Tétel: A (11.61) állapot-visszacsatolós linearizálási probléma SISO esetben megoldható $\Leftrightarrow$ a következő két feltétel valamilyen $U(0)$ környezetben teljesül:

- i) $\{ad_f^i g : 0 \leq i \leq n - 1\}$ vektormező halmaz lineárisan független,
ii) $\{ad_f^i g : 0 \leq i \leq n - 2\}$ vektormező halmaz involutív.

Bizonyítás:

I. Tegyük fel, hogy a nemlineáris rendszer linearizálható állapot-visszacsatolással, azaz $\exists U(0)$ nyílt halmaz, T diffeomorfizmus és $q, s \in S(X)$, amely linearizálja a rendszert. Alkalmazzuk a 11.8 lemma eredményeit.

i) Legyen $x_0 \in U$ és $\sum_{i=0}^{n-1} c_i [ad_f^i g](x_0) = 0$. Be kell látni, hogy minden c_i nulla. Szorozzunk mindkét oldalon dT_1 -gyel, dT_2 -vel stb., akkor

$$\langle dT_1, \sum_{i=0}^{n-1} c_i [ad_f^i g](x_0) \rangle = (-1)^{n-1} c_{n-1} s(x_0) = 0, \quad s(x_0) \neq 0 \Rightarrow c_{n-1} = 0.$$

$$\langle dT_2, \sum_{i=0}^{n-2} c_i [ad_f^i g](x_0) \rangle = (-1)^{n-2} c_{n-2} s(x_0) = 0, \quad s(x_0) \neq 0 \Rightarrow c_{n-2} = 0,$$

stb., ezért az $\{ad_f^i g : 0 \leq i \leq n-1\}$ vektormező halmaz lineárisan független.

ii) $\{ad_f^i g : 0 \leq i \leq n-2\}$ tartalmaz $n-1$ lineárisan független vektormezőt, hiszen a bővebb halmaz részhalmaza. Legyen Δ az ezek által generált disztribúció, akkor $\langle dT_1, ad_f^i g \rangle = 0$, $0 \leq i \leq n-2$ miatt dT_1 anulálja Δ -t. Mivel T_1 a lokális diffeomorfizmus első komponense, $dT_1(x) \neq 0 \quad \forall x \in U$ esetén, ezért alkalmazható az alternatív Frobenius-tétel $k=n-1$ és $\phi_{k+1} = \phi_n = T_1$ választás mellett, amely szerint Δ involutív.

II. Tegyük fel, hogy i) és ii) teljesül valamilyen $U(0)$ környezetben. Be kell látni, hogy a nemlineáris rendszer linearizálható statikus állapot-visszacsatolással.

A involutív tulajdonságból és az alternatív Frobenius-tételből következik, hogy $\exists T_1 \in S(X)$, amely megoldása a $\langle dT_1, ad_f^i g \rangle = 0$, $0 \leq i \leq n-2$, $\forall x \in U$ parciális differenciálegyenletnek. Feltehető, hogy $T_1(0) = 0$ (különben levonható, és konstans deriváltja nulla, nem befolyásolja dT_1 -et). $T_2, \dots, T_n$ rekurzívan definiálható:

$$T_{i+1} := \langle dT_i, f \rangle = L_f T_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow T_i(0) = 0, \quad \forall i,$$

$$q := \langle dT_n, f \rangle, \quad s := \langle dT_n, g \rangle, \quad v := q + su,$$

$$z = (T_1(x), \dots, T_n(x))^T.$$

Tisztázni kell, milyen egyenletnek tesznek eleget az új változók. Megmutatható (nem bizonyítjuk), hogy teljesül (11.62-63), ezért

$$\dot{z}_i = \nabla T_i \dot{x} = \langle dT_i, f \rangle + \underbrace{u \langle dT_i, g \rangle}_0 = T_{i+1} = z_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

$$\dot{z}_n = \nabla T_n \dot{x} = \langle dT_n, f \rangle + u \langle dT_n, g \rangle = q + su = v,$$

tehát a rendszer linearizálható és előállítható (SISO) Brunovsky-alakban.

Bizonyítani kell, hogy $s(x) \neq 0$ az U halmazon. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists x_0, s(x_0) = \langle dT_n, g \rangle(x_0) = 0$. Legyen $j=1$ és alkalmazzuk (11.62-63)-at, akkor $\langle dT_1, ad_f^j g \rangle(x_0) = 0, 0 \leq i \leq n-1$, ami ellentmond annak, hogy a $\{ad_f^i g : 0 \leq i \leq n-1\}$ rendszer lineárisan független. Ezért $s(x) \neq 0, \forall x \in U$.

Be kell még látni, hogy T lokális diffeomorfizmus 0 -nak valamilyen környezetében. Legyenek $a_1, \dots, a_n$ valós számok és $\sum_{i=1}^n a_i dT_i(0) = 0$. Szorozzunk mindkét oldalon $g(0)$ -val, akkor (11.62) szerint $i=1$ választással kapjuk, hogy $0 = a_n \langle dT_n, g \rangle(0) = a_n s(0) \Rightarrow a_n = 0$. Hasonlóan ha a megmaradt összeget $ad_f g(0)$ -al szorozzuk, akkor (11.62) szerint $i=1$ és (11.63) szerint $j=n-1$ mellett kapjuk, hogy $0 = a_{n-1} \langle dT_{n-1}, ad_f g \rangle(0) = -a_{n-1} s(0) \Rightarrow a_{n-1} = 0$, stb. Ezért $dT_i(0), i=1, \dots, n$ lineárisan független, és az inverz függvény tétel szerint T lokális diffeomorfizmus 0 -nak egy környezetében.

11.4.2 MIMO rendszer linearizálása állapot-visszacsatolással

Tekintsük az $\dot{x} = Ax + Bu$ többváltozós lineáris rendszert, ahol a mátrixok $A_{n \times n}$ és $B_{n \times m}$ alakúak, és legyen a rendszer irányítható. Vezessük be a következő fokszámokat:

$$\begin{aligned} r_0 &= \text{rank } B = m, \\ r_i &= \text{rank}[B \ AB \ \dots \ A^i B] - \text{rank}[B \ AB \ \dots \ A^{i-1} B], \quad i \geq 1. \end{aligned} \quad (11.64)$$

Bizonyítható, hogy

$$\begin{aligned} 0 &\leq r_i \leq m, \quad \forall i, \\ r_i &\geq r_{i+1}, \\ m = r_0 &\geq r_1 \geq \dots \geq r_{n-1}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} r_i = n. \end{aligned} \quad (11.65)$$

A $\kappa_1, \dots, \kappa_m$ Kronecker-indexek a következőképpen vannak definiálva:

$$\kappa_i := \sum_{r_j \geq i} 1: \text{ azon } r_j \text{ integereknek a száma, amelyek nagyobb-egyenlők } i\text{-nél,}$$

$$\begin{aligned} \kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_m \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \kappa_i = n, \\ \sigma_i := \sum_{j=1}^i \kappa_j, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (11.66)$$

Az irányítható lineáris MIMO rendszer Brunovsky-féle kanonikus alakja a következő módon van definiálva:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \hat{A}z + \hat{B}u, \\ \hat{A} &= \text{BlockDiag}\{\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_m\}, \\ \hat{A}_i &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{\kappa_i \times \kappa_i} \\ \hat{B} &= [e_{\sigma_1} \quad e_{\sigma_2} \quad \dots \quad e_{\sigma_m}], \end{aligned} \quad (11.67)$$

ahol e_{σ_i} a σ_i -edik egységvektor.

11.9 Lemma: Ha az $\dot{x} = Ax + Bu$ lineáris rendszer irányítható, akkor lineáris állapot-visszacsatolással és koordináta-transzformációval Brunovsky-féle alakra hozható. Irányítható MIMO lineáris rendszerek ($\dim x = n$ és $\dim u = m$ esetén) visszacsatolás-ekvivalensek, azaz egymásba transzformálhatók állapot-visszacsatolással és koordináta-transzformációval $\Leftrightarrow$ Brunovsky-féle kanonikus alakjuk azonos.

Nemlineáris MIMO rendszer

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x), \\ X \subset \mathbb{R}^n \text{ nyílt, } 0 \in X, \quad f, g_1, \dots, g_m &\in V(X). \end{aligned} \quad (11.68)$$

Végezzük el a következő konstrukciót:

$$\begin{aligned} C_i &:= \{ad_f^k g_j : 1 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq i\}, \quad 0 \leq i \leq n-1, \\ \Delta_i &:= \text{Span } C_i \text{ (generált disztribúció)}. \end{aligned} \quad (11.69)$$

Nevezetesen $\Delta_0 = \text{Span}\{g_1, \dots, g_m\}$, $\Delta_1 = \text{Span}\{g_1, \dots, g_m, [f, g_1], \dots, [f, g_m]\}$ stb. Vezessük be a következő fokszámokat:

$$r_0 := \dim \Delta_0 = m; \quad r_i := \dim \Delta_i - \dim \Delta_{i-1}, \quad i \geq 1. \quad (11.70)$$

$$\delta := \max\{i : r_i \neq 0\}; \quad m_\delta := r_\delta; \quad m_i := r_i - r_{i+1}, \quad i = 0, \dots, \delta - 1. \quad (11.71)$$

Problémát jelent, hogy $\dim \Delta_i(x)$ változhat x -szel. Ezért feltesszük, hogy 0 reguláris pont, $\forall \Delta_i$, $i = 0, \dots, n-1$ esetén. Ekkor $\dim \Delta_i(x)$ konstans, $\forall x \in U(0)$, és ezért r_i jól definiált. Ha a nemlineáris rendszer teljes állapot-visszacsatolással Brunovsky-alakra hozható, akkor azt az $\{r_i\} \rightarrow \{\kappa_i\} \rightarrow$ Brunovsky-alak sémában várjuk.

11.10 Lemma (nemlineáris eset): $0 \leq r_{i+1} \leq r_i$, $\forall i$.

Bizonyítás:

$r_{i+1} \geq 0$, mivel Δ_i része Δ_{i+1} -nek,

$\dim \Delta_i = \dim \Delta_{i-1} + r_i$,

$$\dim \text{Span} \{C_{i-1} \cup \{ad_f^i g_1, \dots, ad_f^i g_m\}\} = \dim \text{Span } C_{i-1} + r_i. \quad (11.72)$$

Létezik egzaktul $m - r_i$ vektormező $\{ad_f^i g_1, \dots, ad_f^i g_m\}$ között, amelyek lineáris kombinációi a C_{i-1} -beli és a maradék r_i vektormezőnek $\{ad_f^i g_1, \dots, ad_f^i g_m\}$ -ből.

Legyen ez az utolsó $m - r_i$ vektormező, akkor $ad_f^i g_j \in \text{Span} \{C_{i-1} \cup \{ad_f^i g_1, \dots, ad_f^i g_m\}\}$, $j = r_i + 1, \dots, m$. Alkalmazzuk a Lie-zárójelet mindkét oldalon, akkor

$$ad_f^{i+1} g_j \in \text{Span} \{C_i \cup \{ad_f^{i+1} g_1, \dots, ad_f^{i+1} g_r\}\}, \quad j = r_i + 1, \dots, m. \quad (11.73)$$

$$\dim \text{Span } C_{i+1} \leq \dim \text{Span } C_i + r_i \Rightarrow r_{i+1} \leq r_i, \quad (11.74)$$

amit bizonyítani kellett.

A visszacsatolós linearizálás feltételeinek megfogalmazásához további integerek kellenek:

$$\delta := \max \{i : r_i \neq 0\},$$

$$r_\delta > 0, \text{ de } r_i = 0, \forall i > \delta,$$

$$m_\delta := r_\delta; \quad m_i := r_i - r_{i+1}, \quad i = 0, \dots, \delta - 1, \quad (11.75a)$$

$$r_i := \sum_{j=i}^{\delta} m_j,$$

$$\dim \Delta_i = \sum_{j=0}^i r_j,$$

$$\begin{aligned} \dim \Delta_\delta - \dim \Delta_i &= \sum_{j=0}^{\delta} r_j - \sum_{j=0}^i r_j = \sum_{j=i+1}^{\delta} r_j = \sum_{j=i+1}^{\delta} \sum_{k=j}^{\delta} m_k = \\ &= \sum_{k=i+1}^{\delta} (k - i) m_k = m_{i+1} + 2m_{i+2} + \dots + (\delta - i)m_\delta. \end{aligned} \quad (11.75b)$$

Illusztrációként tekintsünk egy lineáris rendszert $A_{9 \times 9}, B_{9 \times 3}$ esetén, amelyre alkalmaztuk az 5. fejezetben tárgyalt szelekciós sémát:

$$\begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \\ Ab_1 & Ab_2 & Ab_3 \\ A^2b_1 & \circ & A^2b_3 \\ A^3b_1 & & \circ \\ \circ & & \end{array}$$

Akkor

$$r_0 = 3, r_1 = 3, r_2 = 2, r_3 = 1, r_4, \dots, r_8 = 0,$$

$$\delta = 3,$$

$$\kappa_1 = 4, \kappa_2 = 3, \kappa_3 = 2,$$

$$\sigma_1 = 4, \sigma_2 = 7, \sigma_3 = 9,$$

$$m_3 = r_3 = 1,$$

$$m_2 = r_2 - r_3 = 2 - 1 = 1,$$

$$m_1 = r_1 - r_2 = 3 - 2 = 1,$$

$$m_0 = r_0 - r_1 = 3 - 3 = 0,$$

$$n = 1 \cdot m_0 + 2 \cdot m_1 + 3 \cdot m_2 + 4 \cdot m_3 = 9.$$

Összehasonlításuképpen tekintsük a disztribúcióknak megfelelő kifeszített tereket, amelyeket rendre a szelekciós séma sora és a felette lévő sorok definiálnak:

$$\dim \Delta_0 = 3 \quad \dim \Delta_3 - \dim \Delta_0 = 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 6$$

$$\dim \Delta_1 = 6 \quad \dim \Delta_3 - \dim \Delta_1 = 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

$$\dim \Delta_2 = 8 \quad \dim \Delta_3 - \dim \Delta_2 = 1$$

$$\dim \Delta_3 = 9$$

Interpretáció:

- (1) $\kappa_1, \dots, \kappa_m$ a blokkok mérete $\hat{A}$ -ban. Feltehető, hogy a blokkok nemnövekvő blokkméret szerint át vannak rendezve: $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_m$.
- (2) δ a legnagyobb blokk mérete -1 , azaz $\delta = \kappa_1 - 1$.
- (3) m_i azon blokkok száma, amelyek mérete $i+1$, ezért $\sum_{i=0}^{\delta} m_i = r_0 = m$.

$$\sum_{i=0}^{\delta} (i+1)m_i = n.$$

Probléma megfogalmazása MIMO esetben:

Adott:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x), \\ \kappa_1, \dots, \kappa_m \text{ és } \kappa_1 &\geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_m. \end{aligned} \quad (11.76)$$

Létezik-e:

- i) $U(0)$ nyílt halmaz,
- ii) $q: U \rightarrow R^m$ sima függvény,
- iii) $S: U \rightarrow R^{m \times m}$ sima függvény, $\det S(x) \neq 0, \forall x \in U$,
- iv) lokális diffeomorfizmus $T: U \rightarrow R^n, T(0) = 0$,

amelyek kielégítik a következő feltételeket:

$$\begin{aligned} v &= q(x) + S(x)u, \\ z &= T(x), \\ \dot{z} &= Az + Bv, \end{aligned} \quad (11.77)$$

A, B Brunovsky-féle kanonikus alak a $\kappa_1, \dots, \kappa_m$ indexekhez.

11.8 Tétel: Legyen a nemlineáris rendszer $\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i$. Tegyük fel, hogy

- (a) $g_1, \dots, g_m$ vektormezők lineárisan függetlenek 0 -ban, $\Delta_0 = \text{Span}\{g_1, \dots, g_m\}$ és $\dim \Delta_0 = r_0 = m$,
- (b) 0 reguláris pontja Δ_i -nek, $\forall i \geq 0$ esetén.

Akkor a MIMO teljes állapot-visszacsatolási probléma megoldható $\Leftrightarrow$ a következő két feltétel teljesül:

- i) $\dim \Delta_\delta = n$,
- ii) Δ_{i-1} disztribúció involutív, ha $m_i = 0$.

Bizonyítás:

Csak az állítás egyik irányát bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy teljesül i) és ii), meg kell konstruálni a probléma megoldását.

Mivel $\delta = \max\{i: r_i \neq 0\}$, $\dim \Delta_\delta = n$ és $\dim \Delta_{\delta-1} = \dim \Delta_\delta - r_\delta = n - m_\delta$, ezért $\Delta_{\delta-1}$ kodimenziója m_δ és involutív is, ezért az alternatív Frobenius-tétel szerint $\exists U_0(0)$ nyílt halmaz és $\exists h_{\delta,i} \in S(X)$ sima függvények, $1 \leq i \leq m_\delta$, melyek differenciáljai lineárisan függetlenek az $x=0$ pontban és amelyekkel teljesül

$$\langle dh_{\delta,i}, ad_f^l g_j \rangle(x) = 0, \forall x \in U_0, 0 \leq l \leq \delta - 1, 1 \leq i \leq m_\delta, 1 \leq j \leq m. \quad (11.78)$$

Ezek a függvények a T koordináta-transzformáció részét fogják képezni. Bevezetjük az M_δ $m_\delta \times m$ típusú mátrixot, amelyre $(M_\delta)_{ij}(x) := \langle dh_{\delta,i}, ad_f^\delta g_j \rangle(x)$. Megmutatjuk, hogy $\text{rank } M_\delta(x) = m_\delta$ (maximális), $\forall x \in U_0$. Indirekt, tegyük fel, hogy $\exists x_0 \in U_0$ és $c_1, \dots, c_{m_\delta} \in R^1$, hogy $\sum_{i=1}^{m_\delta} c_i \langle dh_{\delta,i}, ad_f^\delta g_j \rangle(x_0) = 0$, $j = 1, \dots, m$, azaz (11.78)-cal kiegészítve az $r = \sum_{i=1}^{\delta} c_i dh_{\delta,i}(x_0)$ sorvektor annullálja az összes $(ad_f^l g_j)(x_0)$, $0 \leq l \leq \delta, 1 \leq j \leq m$ oszlopvektort, amelyek viszont generálják $\Delta_\delta(x_0)$ -t, és ezért kifeszítik R^n -et. Ezért $r = 0$ a sorvektor. Mivel a $dh_{\delta,i}(x_0)$, $i = 1, \dots, m_\delta$ sorvektorok lineárisan függetlenek, ezért $c_i = 0$, $\forall i \Rightarrow M_\delta$ maximális rangú.

Tekintsük ezután a $\Delta_{\delta-2}$ disztribúciót:

$$\dim \Delta_{\delta-2} = \dim \Delta_\delta - m_{\delta-1} - 2m_\delta = n - m_{\delta-1} - 2m_\delta.$$

Két eset lehetséges ($m_{\delta-1} = 0$ és $m_{\delta-1} \neq 0$).

Tegyük fel, hogy $m_{\delta-1} = 0$.

Be fogjuk látni, hogy $2m_\delta$ darab $\{h_{\delta,i}, L_f h_{\delta,i} : 1 \leq i \leq m_\delta\}$ függvény differenciáljai lineárisan függetlenek és annullálják a $\Delta_{\delta-2}$ -beli vektormezőket. Mivel $\Delta_{\delta-2}$ kodimenziója $2m_\delta$, ebből következni fog, hogy $\Delta_{\delta-2}$ automatikusan involutív $m_{\delta-1} = 0$ esetén.

Mivel $\Delta_{\delta-2} \subset \Delta_{\delta-1}$, ezért (11.78) szerint $\{dh_{\delta,i} : 1 \leq i \leq m_\delta\}$ annullálja a $\Delta_{\delta-2}$ -beli vektormezőket. Másrészt

$$\begin{aligned} L_{[f,g]}a &= L_f(L_g a) - L_g(L_f a) \Rightarrow L_g(L_f a) = L_f(L_g a) - L_{[f,g]}a, \\ \langle d(L_f a), g \rangle &= L_f \langle da, g \rangle - \langle da, [f, g] \rangle, \end{aligned} \quad (11.79)$$

$$\begin{aligned} \langle d(L_f h_{\delta,i}), ad_f^l g \rangle &= L_f \underbrace{\langle dh_{\delta,i}, ad_f^l g_j \rangle}_0 - \underbrace{\langle dh_{\delta,i}, ad_f^{l+1} g_j \rangle}_0 = 0, \\ 0 \leq l \leq \delta - 2. \end{aligned} \quad (11.80)$$

Megmutatjuk, hogy a $2m_\delta$ differenciál: $\{dh_{\delta,i}, dL_f h_{\delta,i} : 1 \leq i \leq m_\delta\}$ lineárisan független is. Tegyük fel, hogy $\exists c_{0i}, c_{li}, 1 \leq i \leq m_\delta$ és $\exists x_0$, hogy

$$\sum_{i=1}^{m_\delta} [c_{0i} dh_{\delta,i} + c_{1i} dL_f h_{\delta,i}](x_0) = 0. \quad (11.81)$$

Szorozzunk mindkét oldalon $ad_f^l g_j$ -vel, és vegyük figyelembe a (11.78-80) összefüggéseket, akkor kapjuk, hogy $\sum_{i=1}^{m_\delta} c_{1i} \langle dL_f h_{\delta,i}, ad_f^{\delta-1} g_j \rangle = 0, 1 \leq j \leq m \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{m_\delta} c_{1i} L_f \underbrace{\langle dh_{\delta,i}, ad_f^{\delta-1} g_j \rangle}_0 - \sum_{i=1}^{m_\delta} c_{1i} \langle dh_{\delta,i}, ad_f^{\delta} g_j \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$-(c_{11} \cdots c_{1,m_\delta}) M_\delta(x_0) = 0.$$

Mivel M_δ maximális rangú, ezért $c_{1i} = 0, i = 1, \dots, m_\delta$. Ezért (11.81)-ben csak az első összeg marad meg: $\sum_{i=1}^{m_\delta} c_{0i} dh_{\delta,i}(x_0) = 0$. De a $dh_{\delta,i}(x_0)$ differenciálok lineárisan függetlenek, ezért $c_{0i} = 0, \forall i \Rightarrow \{dh_{\delta,i}, dL_f h_{\delta,i} : 1 \leq i \leq m_\delta\}$ lineárisan független. Megjegyezzük, hogy ez igaz marad $m_{\delta-1} \neq 0$ esetén is.

Tegyük fel, hogy $m_{\delta-1} \neq 0$.

Ekkor ii) szerint $\Delta_{\delta-2}$ involutív, továbbá kodimenziója $m_{\delta-1} + 2m_\delta$. Az alternatív Frobenius-tétel szerint létezik $U_1(0)$ nyílt halmaz és $m_{\delta-1} + 2m_\delta$ lineárisan független, egzakt differenciál forma, amelyik annullálja $\Delta_{\delta-2}$ -t minden $x \in U_1$ esetén. Feltehető, hogy $U_1 \subset U_0$. U_1 -en $\Delta_{\delta-1}$ is involutív. Ebből a $\Delta_{\delta-2}$ -t annulláló készletből $2m_\delta$ darabot már ismerünk: $\{dh_{\delta,i}, dL_f h_{\delta,i} : 1 \leq i \leq m_\delta\}$. Szelektáljunk másik $m_{\delta-1}$ sima függvényt: $\{h_{\delta-1,i} : 1 \leq i \leq m_{\delta-1}\}$ úgy, hogy

$$\{dh_{\delta,i}, dL_f h_{\delta,i} : 1 \leq i \leq m_\delta\} \cup \{h_{\delta-1,i} : 1 \leq i \leq m_{\delta-1}\}$$

lineárisan független legyen és mindenegyik a készletből annullálja $\Delta_{\delta-2}(x)$ -et $\forall x \in U_1$ esetén. Vezessük be az $m_{\delta-1} \times m$ méretű $M_{\delta-1}$ mátrixot:

$$(M_{\delta-1})_{ij}(x) := \langle dh_{\delta-1,i}, ad_f^{\delta-1} g_j \rangle(x), 1 \leq i \leq m_{\delta-1}, 1 \leq j \leq m,$$

és tekintsük az $(m_\delta + m_{\delta-1}) \times m$ méretű $[M_\delta^T \ M_{\delta-1}^T]^T$ mátrixot. Be kell látni, hogy a mátrix maximális rangú minden $x \in U_1$ esetén. Legyen $c_{0i}, 1 \leq i \leq m_\delta$ és $c_{1i}, 1 \leq i \leq m_{\delta-1}$ olyan, hogy $1 \leq j \leq m$ esetén

$$\sum_{i=1}^{m_\delta} c_{0i} \langle dh_{\delta,i}, ad_f^{\delta} g_j \rangle(x_0) + \sum_{i=1}^{m_{\delta-1}} c_{1i} \langle dh_{\delta-1,i}, ad_f^{\delta-1} g_j \rangle(x_0) = 0.$$

(11.79), (11.78) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\langle dh_{\delta,i}, ad_f^\delta g_j \rangle &= \langle dh_{\delta,i}, [f, ad_f^{\delta-1} g_j] \rangle = -\langle dL_f h_{\delta,i}, ad_f^{\delta-1} g_j \rangle \Rightarrow \\
\langle -\sum_{i=1}^{m_\delta} c_{0i} dL_f h_{\delta,i} + \sum_{i=1}^{m_{\delta-1}} c_{1i} dh_{\delta-1,i}, ad_f^{\delta-1} g_j \rangle (x_0) &= 0, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (11.82)
\end{aligned}$$

Vezessük be a $v := \{-\sum_{i=1}^{m_\delta} c_{0i} dL_f h_{\delta,i} + \sum_{i=1}^{m_{\delta-1}} c_{1i} dh_{\delta-1,i}\}(x_0)$ jelölést. Tudjuk, hogy a konstrukció szerint v annullálja $\Delta_{\delta-2}$ -t, továbbá (11.82) szerint minden $ad_f^{\delta-1} g_j$, $j = 1, \dots, m$ vektormezőt is. Ezért v annullálja $\Delta_{\delta-1}(x_0)$ -t, ezért ott van az egzakt differenciálok között, amelyek annullálják $\Delta_{\delta-1}$ -et, amelyek viszont $\{dh_{\delta,i}(x_0) : 1 \leq i \leq m_\delta\}$. De $v - \{\dots\}(x_0) = 0$ és $\{dh_{\delta,i}\} \cup \{dL_f h_{\delta,i}\} \cup \{dh_{\delta-1,i}\}$ lineárisan független, ezért $v = 0$ vektor és $\forall c_{0i}, c_{1i} = 0$. Ezért a $[M_\delta^T \ M_{\delta-1}^T]^T$ mátrix maximális sor-rangú.

Az eljárás hasonlóan folytatható, a végén a következő függvények állnak elő:

$$\begin{aligned}
&\{h_{\delta,i}, L_f h_{\delta,i}, \dots, L_f^{\delta-1} h_{\delta,i} : 1 \leq i \leq m_\delta\}, \\
&\vdots \\
&\{h_{2,i}, L_f h_{2,i} : 1 \leq i \leq m_2\}, \\
&\{h_{1,i} : 1 \leq i \leq m_1\}. \quad (11.83)
\end{aligned}$$

Természetesen, ha $m_i = 0$, akkor a megfelelő függvényhalmaz rész hiányzik. A függvények teljes száma

$$\delta m_\delta + (\delta - 1)m_{\delta-1} + \dots + 2m_2 + m_1 = \dim \Delta_\delta - \dim \Delta_0 = n - m = n - \dim \Delta_0.$$

Ezeknek a függvényeknek a differenciáljai lineárisan függetlenek valamilyen $U(0)$ nyílt halmazon és annullálnak minden vektormezőt Δ_0 -ból. Befejezésül két esetet kell még megkülönböztetni ($m_0 = 0$ és $m_0 \neq 0$). Mindkét esetben

$$\sum_{i=0}^{\delta} m_i = r_0 = m.$$

Tegyük fel, hogy $m_0 = 0$.

Ekkor $\sum_{i=1}^{\delta} m_i = m$, $(\delta + 1)m_\delta + \delta m_{\delta-1} + \dots + 3m_2 + 2m_1 = n$, ezért a következő függvényhalmaz pontosan n függvényből áll:

$$\{L_f^l h_{k,i} : 1 \leq i \leq m_k, 0 \leq l \leq k, 1 \leq k \leq \delta\}. \quad (11.84)$$

Ezeknek a függvényeknek a differenciáljai lineárisan függetlenek valamilyen $U(0)$ nyílt halmazon.

Tegyük fel, hogy $m_0 \neq 0$.

Ekkor (11.84)-ben $n - m_0$ függvény szerepel. Válasszunk m_0 további függvényt: $\{h_{0,i} : 1 \leq i \leq m_0\}$ úgy, hogy az n darab

$$\{L_f^l h_{k,i} : 1 \leq i \leq m_k, 0 \leq l \leq k, 0 \leq k \leq \delta\} \quad (11.85)$$

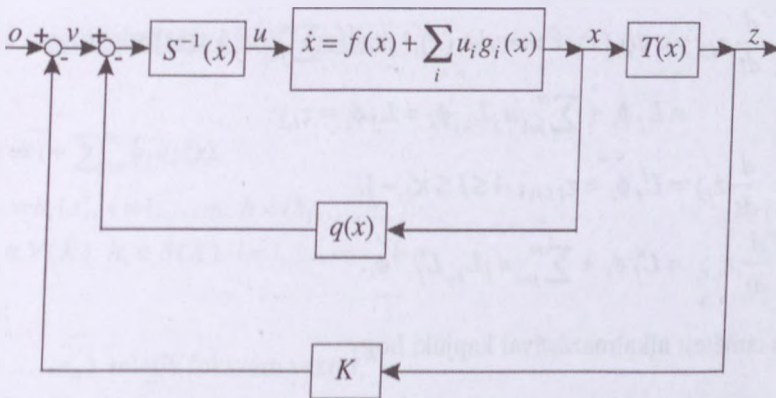
függvény differenciáljai lineárisan függetlenek legyenek valamilyen $U(0)$ nyílt halmazon. Képezzük a következő mátrixot:

$$M = [M_\delta^T M_{\delta-1}^T \cdots M_1^T M_0^T]^T, \quad (M_k)_{ij}(x) = \langle dh_{k,i}, ad_f^k g_j \rangle(x), \quad 1 \leq i \leq m_k, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (11.86)$$

A mátrix sorainak a száma: $\sum_{i=0}^{\delta} m_i = m$, ezért M kvadratikus.

Megjegyzés:

- 1) Az m_i integerek között legfeljebb m határozottan pozitív lehet.
- 2) Legyen $\kappa_i := i + 1$ azon i értékek esetén, amelyekre $m_i > 0$, akkor ezek pontosan a Kronecker-indexek. Tehát $m_k > 0$ csak akkor áll fenn, ha $k + 1 = \kappa_i$ valamilyen i -re úgy, hogy csak a hozzátartozó $h_{k,i}$ függvények szerepelnek a (11.85) listán.



11.2. ábra. Nemlineáris rendszer kompenzálása külső és belső állapot-visszacsatolással

Definiáljuk a következő függvényeket:

$$\phi_1 = h_{\delta,1}, \dots, \phi_{m_\delta} = h_{\delta,m_\delta}.$$

$$\text{Ha } m_{\delta-1} > 0, \text{ akkor } \phi_{m_\delta+1} = h_{\delta-1,1}, \dots, \phi_{r_{\delta-1}} = h_{\delta-1,m_{\delta-1}}. \quad (11.87)$$

$\vdots$

$$\text{Ha } m_0 > 0, \text{ akkor } \phi_{r_1+1} = h_{0,1}, \dots, \phi_{r_0} = h_{0,m_0}.$$

Vegyük észre, hogy az indexelésnél figyelembe vettük, hogy $r_i = \sum_{j=1}^{\delta} m_j$. Egzak-
tul m függvény van a ϕ_i készletben. Minden i esetén κ_i az az integer, ahányszor
 ϕ_i Lie-deriválva lett az $\{L_f^l h_{k,i}\}$ listában. Definiáljuk a $z_i: U \rightarrow R^{\kappa_i}$ és a
 $T: U \rightarrow R^n$ leképezést a következő módon:

$$z_i := \begin{pmatrix} \phi_i(x) \\ L_f \phi_i(x) \\ \vdots \\ L_f^{\kappa_i-1} \phi_i(x) \end{pmatrix}, \quad z := \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_m(x) \end{pmatrix} = T(x). \quad (11.88)$$

Akkor T lokális diffeomorfizmus, $\phi_i(0) = 0$ (esetleg konstans levonása után), ezért
 $T(0) = 0$. A SISO esethez hasonlóan látható be, hogy ez a kívánt koordináta-
transzformáció.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} z_{i,1} &= \langle d\phi_i(x), \dot{x} \rangle = \langle d\phi_i(x), [f(x) + \sum_{j=1}^m u_j g_j(x)] \rangle = \\ &= L_f \phi_i + \sum_{j=1}^m u_j L_{g_j} \phi_i = L_f \phi_i = z_{i,2}, \\ \frac{d}{dt} z_{i,l} &= L_f^l \phi_i = z_{i,l+1}, \quad 1 \leq l \leq \kappa_i - 1, \\ \frac{d}{dt} z_{i,\kappa_i} &= L_f^{\kappa_i} \phi_i + \sum_{j=1}^m u_j L_{g_j} L_f^{\kappa_i-1} \phi_i. \end{aligned} \quad (11.89)$$

(11.79) ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy

$$L_{g_j} L_f^{\kappa_i-1} \phi_i = \langle d\phi_i, \text{ad}_f^{\kappa_i-1} g_j \rangle = (-1)^{\kappa_i-1} M_{ij} \quad (11.90)$$

ezért

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_{1, \kappa_1} \\ \vdots \\ z_{m, \kappa_m} \end{pmatrix} = q(x) + S(x)u, \quad (11.91)$$

ahol

$$q_i(x) = L_f^{\kappa_i} \phi_i, \quad s_{ij}(x) = (-1)^{\kappa_i-1} M_{ij}(x),$$

$$v = q(x) + S(x)u$$

$$\frac{d}{dt} z_{i, \kappa_i} = v_i.$$

Ezért a v visszacsatolással a rendszer Brunovsky-féle kanonikus alakban áll elő. A keletkező lineáris rendszernek a karakterisztikus egyenlete $\prod_{i=1}^m s^{\kappa_i} = 0$, amely egy külső $v = -Kz$ állapot-visszacsatolással stabilizálható, lásd 11.2. ábra.

11.5 Bemenet/kimenet linearizálás

Az előző pontban láttuk, hogy bizonyos feltételek teljesülésekor a nemlineáris rendszer *állapotegyenlete* egyszerű kompenzációval linearizálható. Vizsgáljuk meg, lehetséges-e a teljes *bemenet/kimenet* kapcsolatot, ha csak lokálisan is, hasonlóan egyszerű kompenzációval linearizálni. Megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén ez lehetséges. A problémát az x_0 pont egy $U(x_0)$ környezetében fogjuk vizsgálni, ahol tipikusan (de nem kizárólagosan) x_0 egy egyensúlyi helyzet, amelyre $f(x_0) = 0$ teljesül, de nem lenne akadálya az $x_0 = 0$ normalizálásnak sem.

Probléma megfogalmazása MIMO esetben:

Adott:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x), \\ y_i(x) &= h_i(x), \quad i = 1, \dots, m, \quad h = (h_1, \dots, h_m)^T, \\ f, g_i &\in V(X), \quad h_i \in S(X), \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (11.92)$$

Létezik-e:

- i) $r = (r_1, \dots, r_m)$ relatív fokszám vektor,
- ii) $U(x_0)$ nyílt halmaz,
- iii) $v = q(x) + S(x)u$,
- iv) $q: U \rightarrow R^m$ sima függvény,

v) $S: U \rightarrow R^{m \times m}$ sima függvény, $\det S(x_0) \neq 0$,

hogy

$$y_i^{(\eta)} = v_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (11.93)$$

Ha a feladatnak van megoldása, akkor a rendszer szétesik m darab integrátor értelemben szétszalt alrendszerre, ahol az i -edik alrendszerben az integrátorok száma r_i .

11.5.1 SISO rendszer bemenet/kimenet linearizálása

A SISO esetben $\dot{x} = f(x) + ug(x)$, $y = h(x)$, és azt keressük, hogy hányadik deriválás után jelenik meg az u bemenet a kimenet deriváltjában, és ez egyáltalán elérhető-e. Differenciáljuk y -t fokozatosan:

$$\dot{y} = \nabla h \cdot \dot{x} = \langle dh, f \rangle + u \langle dh, g \rangle = L_f h(x) + u L_g h(x).$$

Ha $L_g h(x_0) \neq 0$, akkor $q(x) = L_f h(x)$, $s(x) = L_g h(x)$ és $r=1$ megfelel az elvárásoknak x_0 -nak valamilyen elegendően kis $U(x_0)$ környezetében. Ha $\langle dh, g \rangle = 0$, akkor $\dot{y} = \langle dh, f \rangle = L_f h$ és a feltételek még nem teljesülnek. Ekkor fokozatosan tovább lehet deriválni.

$$\ddot{y} = \langle d(L_f h), \dot{x} \rangle = L_f^2 h + u L_g(L_f h) \quad \text{stb.}$$

Szigorú relatív fokszám:

Azt mondjuk, hogy a nemlineáris rendszer az r szigorú relatív fokszámmal rendelkezik, ha r a legkisebb integer, amelyre teljesül, hogy

$$\begin{aligned} L_g L_f^i h(x) &\equiv 0, \quad \forall x \in U(x_0), \quad i = 0, 1, \dots, r-2, \\ L_g L_f^{r-1} h(x_0) &\neq 0. \end{aligned} \quad (11.94)$$

Megjegyzés:

1. Ez a definíció összhangban van a lineáris rendszer relatív fokszámával, amely a pólusok és zérusok számának különbsége. Ez következik az átviteli függvény $c(sI - A)^{-1}b = cb s^{-1} + cAb s^{-2} + cA^2 b s^{-3} + \dots$ sorfejtéséből nagy s esetén, ekkor ugyanis $cb = cAb = \dots cA^{r-2}b = 0$ és $cA^{r-1}b \neq 0$, másrészt $L_g L_f^i h = cA^i b$.
2. Ha $L_g L_f^{r-1} h(x_0) \neq 0$, akkor x_0 -nak elég kis $U(x_0)$ környezetében teljesül $s(x) = L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$.

3. A relatív fokszám *nem mindig definiált*, mert könnyen megadható olyan nemlineáris rendszer, ahol $L_g L_f^{r-1} h(x_0) = 0$, de $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$, ha x elég közel van x_0 -hoz. Ehhez elegendő olyan rendszert kreálni, amelynél $L_g L_f^{r-1} h(x)$ előjelet vált egy felület két oldalán, amely áthalad az x_0 ponton.

11.11 Lemma: Ha létezik az r relatív fokszám, akkor a $dh, dL_f h, \dots, dL_f^{r-1} h$ sorvektorok lineárisan függetlenek valamilyen $U(x_0)$ nyílt halmazon, továbbá $r \leq n$.

Bizonyítás:

Ha meg tudjuk mutatni, hogy a lineáris függetlenség fennáll x_0 -ban, akkor a függvények simasága miatt ez fenn fog állni tetszőleges x esetén is, ha x elég közel van x_0 -hoz. Tegyük fel tehát, hogy $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1})^T \in R^r$ és $\sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i dL_f^i h(x_0) = 0$. Be kell látni, hogy $\alpha = 0$.

Először megmutatjuk, hogy

$$L_{ad_f^i g} L_f^k h = \begin{cases} 0, & \text{ha } i+k \leq r-2 \\ (-1)^i L_g L_f^{r-1} h, & \text{ha } i+k = r-1. \end{cases} \quad (11.95)$$

A bizonyítás teljes indukcióval történhet. Legyen k fix, akkor az indukció történhet i -re. Ha $i=0$, akkor a bal oldal $L_g L_f^k h$, és az állítás következik a relatív fokszám definíciójából. Ha az állítás igaz $0, \dots, i-1$ esetén, akkor i és $i+k < r-1$ esetén

$$L_{ad_f^i g} L_f^k h = L_{\{f, ad_f^{i-1} g\}} L_f^k h = L_f \underbrace{L_{ad_f^{i-1} g} L_f^k h}_{=0} - L_{ad_f^{i-1} g} L_f L_f^k h = -L_{ad_f^{i-1} g} L_f^{k+1} h = 0$$

az indukciós hipotézis és $(i-1) + (k+1) = i+k < r-1$ miatt, míg i és $i+k = r-1$ esetén

$$L_{ad_f^i g} L_f^k h = -L_{ad_f^{i-1} g} L_f^{k+1} h = \dots = (-1)^i L_g L_f^{r-1} h$$

miatt igaz az állítás.

Legyen $a = \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i L_f^i h \in S(X)$, akkor $da(x_0) = \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i dL_f^i h(x_0) = 0$. Szorozzuk jobbról fokozatosan egy megfelelően megválasztott függvénnyel. (11.95) felhasználásával megmutatjuk, hogy minden α_i nulla:

$$0 = \langle da, g \rangle(x_0) = \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i L_{ad^0 g} L_f^i h(x_0) = \alpha_{r-1} L_g L_f^{r-1} h(x_0) \Rightarrow \alpha_{r-1} = 0,$$

$$0 = \langle da, ad_f^1 g \rangle(x_0) = \sum_{i=0}^{r-2} \alpha_i L_{ad^1 g} L_f^i h(x_0) = -\alpha_{r-2} L_g L_f^{r-1} h(x_0) \Rightarrow \alpha_{r-2} = 0,$$

$$\vdots$$

$$0 = \langle da, ad_f^{r-1} g \rangle(x_0) = \alpha_0 L_{ad^{r-1} g} L_f^0 h(x_0) = (-1)^{r-1} L_g L_f^{r-1} h(x_0) \Rightarrow \alpha_0 = 0.$$

Mivel $\alpha = 0$, a lemmát bebizonyítottuk. Az is világos, hogy mivel a sorvektorok lineárisan függetlenek $(R^n)^*$ -ban, ezért $r \leq n$.

SISO nemlineáris rendszer normálalakja:

Ha létezik az r relatív fokszám x_0 -ban, akkor a $dh, dL_f h, \dots, dL_f^{r-1} h$ sorvektorok lineárisan függetlenek valamilyen $U(x_0)$ nyílt halmazon. Mivel a $\Delta = \text{Span}\{g(x)\}$ involutív, ezért a Frobenius-tétel szerint létezik $\eta_1, \dots, \eta_{n-1} \in S(X)$ függvény, amelynek a differenciáljai lineárisan függetlenek x_0 -ban, továbbá $\langle d\eta_i, g(x) \rangle \equiv 0, \forall x \in U$. Ezek közül szelektálható $n-r$ darab $\eta_i(x) \in S(X)$ függvény (legyen ez az első $n-r$), hogy az x_0 pontban

$$\text{rank}[(dh)^T, \dots, (dL_f^{r-1} h)^T, (d\eta_1)^T, \dots, (d\eta_{n-r})^T]^T = n, \quad (11.96)$$

és a

$$T(x) := \begin{pmatrix} h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(x) \\ \eta_1(x) \\ \vdots \\ \eta_{n-r}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_o(x) \\ z_u(x) \end{pmatrix}, \quad z_o = (z_1, \dots, z_r)^T, \quad z_u = (\eta_1, \dots, \eta_{n-r})^T, \quad (11.97)$$

koordináta-transzformáció lokális diffeomorfizmus. A koordináta-transzformáció után

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \dots, \dot{z}_{r-1} = z_r, \\ \dot{z}_r &= b(z_o, z_u) + a(z_o, z_u)u = L_f h(T^{-1}(z_o, z_u)) + u L_g L_f^{r-1} h(T^{-1}(z_o, z_u)) = v, \\ \dot{z}_o &= f_o(z_o, z_u), \\ \dot{z}_u &= f_u(z_o, z_u), \\ y &= z_1, \end{aligned} \quad (11.98)$$

ahol $T^{-1}(z_o, z_u)$ az inverz leképezést jelöli (lásd inverz függvény tétel), és

$$v = q(x) + us(x) = L_f^r h(x) + u L_g L_f^{r-1} h(x). \quad (11.99)$$

Következmény:

i) Ha alkalmazzuk az $u = -\frac{q(x)}{s(x)} + \frac{1}{s(x)}v$ statikus visszacsatolást, akkor $\dot{z}_r = v$ és a rendszer z_o -ra vonatkozó állapotegyenlete Brunovsky-féle kanonikus alakban áll elő:

$$\begin{aligned} \dot{z}_o &= A_o z_o + b_o v, \\ y &= z_{o1} = z_1. \end{aligned} \quad (11.100)$$

- ii) Mivel z_u ekkor nem fejt ki hatást z_o -ra és y -ra, ezért z_u nem megfigyelhető (unobservable). Világos, hogy z_o megfigyelhető (observable).
- iii) Ha x_o egyensúlyi helyzet, azaz $f(x_o) = 0$ és $h(x_o) = 0$, akkor x_o -hoz a koordináta-transzformáció szerint $z_o = 0$ tartozik. Másrészt választható $z_u = 0$ is x_o -hoz. Az x_o egyensúlyi ponthoz ezért $(z_o, z_u) = (0, 0)$ tartozik.
- iv) A megfigyelhető rész egyensúlyi ponthoz tartozó $v \rightarrow y$ átviteli függvénye a Brunovsky-féle kanonikus alaknak megfelelően $1/s^r$, amely egy integrátor értelemben szétcsatolt alrendszer és tovább kompenzálható. A nem megfigyelhető rész azonban stabilitási problémákat okozhat.

Kimenet-nullázási probléma:

Keresett $\bar{x}(0) \in U$ kezdeti állapot és $\bar{u}(t)$ bemenő jel, hogy teljesüljön $y(t) \equiv 0$, ha $t \geq 0$. A (11.98) normálalak ismeretében a feladat egyszerűen megválaszolható, mert differenciálással

$$y(t) \equiv 0 \Rightarrow z_1 = \dots = z_r = 0 \Rightarrow u(t) = -\frac{b(0, z_u(t))}{a(0, z_u(t))}, \quad (11.101)$$

ahol $z_u(t)$ megoldása az

$$\dot{z}_u = f_u(0, z_u), \quad z_u(0) \text{ tetszőleges} \quad (11.102)$$

kezdeti érték problémának. Ehhez $\bar{x}(0)$ -nak rajta kell lennie az

$$M = \{x : h(x) = L_f h(x) = \dots = L_f^{r-1} h(x) = 0\}$$

sokaságon, amely $n - r$ dimenziós. Az eredeti koordinátákban $\bar{u}(t)$ pontosan $v = 0$ választással kapható meg:

$$\bar{u}(t) = -\frac{q(x)}{s(x)} = -\frac{L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)}. \quad (11.103)$$

Zéró-dinamika:

Ha az $\bar{x}(0)$ kezdeti feltétel M -en fekszik, akkor a teljes trajektória M -en fog maradni. A rendszer dinamikája ilyenkor

$$\dot{\bar{x}} = f(x) + g(x)\bar{u}(x) \text{ megszorítva } M\text{-en,}$$

amelyet a rendszer zéró-dinamikájának neveznek. Ez az összefüggés a zéró-dinamikát R^n -ben jellemzi. Ennél gazdaságosabb jellemzést kapunk, ha $z_u(t)$ -t tekintjük R^{n-r} -ben.

Minimumfázisú rendszer:

A nemlineáris rendszert lokálisan aszimptotikusan (exponenciálisan) minimumfázisúnak nevezzük az x_0 egyensúlyi pontban, ha a $\dot{z}_u = f_u(0, z_u)$ rendszer $z_u = 0$ egyensúlyi pontja lokálisan aszimptotikusan (exponenciálisan) stabilis. A rendszer lokálisan exponenciálisan minimumfázisú, ha a $\frac{\partial f_u}{\partial z_u}(0, 0)$ mátrix sajátértékei a nyílt bal félsíkon vannak.

Egzakt jelkövetés:

Ha követni kell az $y_d(t)$ előírt (desired) referencia jelet, akkor deriválások után

$$z_o(t) = \begin{pmatrix} y_d(t) \\ \dot{y}_d(t) \\ \vdots \\ y_d^{(r-1)}(t) \end{pmatrix} =: z_o^d(t). \quad (11.104)$$

Mivel $y_d^{(r)} = b(z_o^d, z_u) + a(z_o^d, z_u)u_d$, ezért

$$u_d = \frac{1}{a(z_o^d, z_u)}(y_d^{(r)} - b(z_o^d, z_u)), \quad (11.105a)$$

$$z_o(0) = z_o^d(0), \quad (11.105b)$$

$$\dot{z}_u = f_u(z_o^d, z_u), \quad z_u(0) \text{ tetszőleges.} \quad (11.105c)$$

Az u_d bemenő jel számításához teljesülnie kell az $a(z_o^d, z_u) \neq 0$ feltételnek, ami várhatóan csak elég kis z_o^d, z_u esetén fog teljesülni. Mivel z_o^d nem függ $z_u(0)$ -tól, ezért $z_u(0)$ alkalmas megválasztásával lehet próbálkozni.

Vegyük észre, hogy a konstrukció elvi lehetőséget ad az $y(t) \rightarrow u(t)$ inverz rendszer értelmezésére $y_d(t) \rightarrow u_d(t)$ mintájára.

11.9 Tétel: Ha a nemlineáris rendszernek létezik r relatív fokszáma, lokálisan exponenciálisan minimumfázisú és az $s^r + a_{r-1}s^{r-1} + \dots + a_1s + a_0$ polinom Hurwitz-polinom (sajátértékei a nyílt bal félsíkon vannak), akkor az

$$u = \frac{1}{s(x)} [-q(x) - a_{r-1}L_f^{-1}h(x) - \dots - a_1L_f h(x) - a_0h(x)] \quad (11.106)$$

visszacsatolással a nemlineáris rendszer lokálisan exponenciálisan stabilis.

Bizonyítás:

Alkalmazzuk Ljapunov indirekt módszerét, lásd könyv I. kötet 5. fejezet [1]. Jelölje a polinom kísérő mátrixát A . Akkor (11.106)-ot alkalmazva zárt körben

$$\begin{aligned} \dot{z}_o &= Az_o, \\ \dot{z}_u &= f_u(z_o, z_u), \end{aligned} \quad (11.107)$$

és a linearizált rendszer állapotmátrixa

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ \frac{\partial f_u}{\partial z_o}(0,0) & \frac{\partial f_u}{\partial z_u}(0,0) \end{bmatrix}, \quad (11.108)$$

amelynek sajátértékei a feltételek szerint a nyílt bal félsíkon vannak. Ezért a nemlineáris rendszer a választott kompenzálással lokálisan exponenciálisan stabilis.

11.5.2 MIMO rendszer bemenet/kimenet linearizálása

A SISO esetre kidolgozott módszerek jelentős része kisebb korlátozásokkal kiterjeszthető MIMO rendszerekre. Ehhez először be kell vezetni a vektor relatív fokszámot (vector relative degree). A nemlineáris rendszert a (11.92) alakban feltételezzük, a bemenetek és kimenetek száma azonos (m).

Differenciáljuk az egyes kimeneteket fokozatosan, míg legalább egy bemenő jel meg nem jelenik a kimenő jel deriváltjában. Legyen r_i a legkisebb integer (ha ilyen létezik), amelyre teljesül

$$y_i^{(r_i)} = L_{f_i}^{r_i} h_i + \sum_{j=1}^m L_{g_j} (L_{f_i}^{r_i-1} h_i) u_j, \quad (11.109)$$

továbbá legalább egy $L_{g_j} (L_{f_i}^{r_i-1} h_i)(x_0) \neq 0$.

Relatív fokszám vektor:

Azt mondjuk, hogy a MIMO nemlineáris rendszer relatív fokszáma vektora x_0 -ban $r = (r_1, \dots, r_m)^T$, ha $\exists U(x_0)$ nyílt halmaz, hogy

i) $L_{g_j} L_{f_i}^k h_i(x) \equiv 0, \forall x \in U, j = 1, \dots, m, k = 0, \dots, r_i - 2$,

ii) az $S(x) = [s_{ij}(x)]_{m \times m}$ mátrix nonszinguláris x_0 -ban, ahol $s_{ij} = L_{g_j} L_{f_i}^{r_i-1} h_i$, azaz

$$S(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_{f_1}^{r_1-1} h_1 & \dots & L_{g_m} L_{f_1}^{r_1-1} h_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_{f_m}^{r_m-1} h_m & \dots & L_{g_m} L_{f_m}^{r_m-1} h_m \end{bmatrix}. \quad (11.110)$$

Mivel $S(x_0)$ nonszinguláris, ezért $S(x)$ szintén nonszinguláris x_0 -nak egy elég kis környezetében.

11.12 Lemma: Ha létezik az $r = (r_1, \dots, r_m)^T$ relatív fokszám vektor, akkor a $\{dL_{f_i}^k h_i : 0 \leq k \leq r_{i-1}, 1 \leq i \leq m\}$ sorvektor halmaz lineárisan független valamilyen $U(x_0)$ nyílt halmazon, továbbá $\sum_{i=1}^m r_i \leq n$.

A bizonyítás a SISO esethez hasonlóan úgy történhet, hogy fokozatosan megmutatjuk, hogy a $\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{r_i-1} \alpha_{ik} (dL_{f_i}^k h_i)(x_0) = 0$ lineáris kombinációban szereplő együtthatók nullák, kihasználva azt a tényt, hogy $S(x_0)$ invertálható. A lineáris függetlenség miatt $\sum_{i=1}^m r_i \leq n$ nyilvánvaló.

MIMO nemlineáris rendszer normálalakja:

Ha létezik az $r = (r_1, \dots, r_m)^T$ relatív fokszám vektor, akkor választhatók a következő koordináták:

$$\begin{aligned} z_{11} &= h_1(x) & z_{12} &= L_{f_1} h_1(x) & \dots & z_{1,r_1} &= L_{f_1}^{r_1-1} h_1(x) \\ z_{21} &= h_2(x) & z_{22} &= L_{f_2} h_2(x) & \dots & z_{2,r_2} &= L_{f_2}^{r_2-1} h_2(x) \\ &\vdots & & & & & \\ z_{m1} &= h_m(x) & z_{m2} &= L_{f_m} h_m(x) & \dots & z_{m,r_m} &= L_{f_m}^{r_m-1} h_m(x) \end{aligned} \quad (11.111)$$

Vezessük be a $z_i = (z_{i1}, \dots, z_{i,r_i})^T \in R^{r_i}$, $i = 1, \dots, m$ és a $z_o = (z_1^T, \dots, z_m^T)^T$ jelölést. Ezek a koordináták egy részét képezhetik egy koordináta-transzformációnak, mivel a $dL_f^k h_i(x)$, $0 \leq k \leq r_i - 1$, $1 \leq i \leq m$ differenciálok lineárisan függetlenek egy $U(x_0)$ nyílt halmazon. Legyen $\rho = \sum_{i=1}^m r_i$, akkor megkonstruálható $n - \rho$ darab $\eta_i(x) \in S(X)$ függvény, hogy a fenti differenciálokat $d\eta_1(x), \dots, d\eta_{n-\rho}(x)$ bázissá egészíti ki az x_0 pontban. Legyen $z_u := (\eta_1(x), \dots, \eta_{n-\rho}(x))^T$, akkor $(z_o^T, z_u^T)^T = T(x)$ egy koordináta-transzformációt definiál.

SISO esetben a $\Delta = \text{Span}\{g(x)\}$ disztribúció triviálisan involutív, ezért η_i konstrukciójakor alkalmazható a Frobenius-tétel és ezért $d\eta_i(x)g(x) \equiv 0$, $\forall x \in U$. MIMO esetben az ennek megfelelő $L_{g_j} \eta_i(x) \equiv 0$, $1 \leq j \leq n - \rho$, $1 \leq i \leq m$ feltétel teljesüléséhez az szükséges, hogy a $\Delta = \text{Span}\{g_1(x), \dots, g_m(x)\}$ disztribúció involutív legyen, ami általában nem biztosítható. Ezért a MIMO normálalakban az $f_u(z_o, z_u)$ függvény bonyolultabb lesz. Jelölje $T^{-1}(x)$ az inverz koordináta-transzformációt, és legyen

$$\begin{aligned} q_i(x) &:= L_f^{r_i} h_i(x), \quad q(x) := [q_i]_{m \times 1}, \\ s_{ij}(x) &:= L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(x), \quad S(x) := [s_{ij}(x)]_{m \times m}, \\ v_i &:= q_i(x) + \sum_{j=1}^i s_{ij}(x) u_j, \quad v := q(x) + S(x)u, \\ b_i(z_o, z_u) &:= q_i(T^{-1}(z_o, z_u)), \quad b(z_o, z_u) := [b_i]_{m \times 1}, \\ a_{ij}(z_o, z_u) &:= s_{ij}(T^{-1}(z_o, z_u)), \quad A(z_o, z_u) := [a_{ij}]_{m \times m}, \end{aligned} \quad (11.112a)$$

$$\begin{aligned} b_{u,k}(z_o, z_u) &:= L_f \eta_k(T^{-1}(z_o, z_u)), \quad b_u := [b_{u,k}]_{(n-\rho) \times 1}, \\ a_{u,kj}(z_o, z_u) &:= L_{g_j} \eta_k(T^{-1}(z_o, z_u)), \quad A_u(z_o, z_u) := [a_{u,kj}]_{(n-\rho) \times m}, \end{aligned} \quad (11.112b)$$

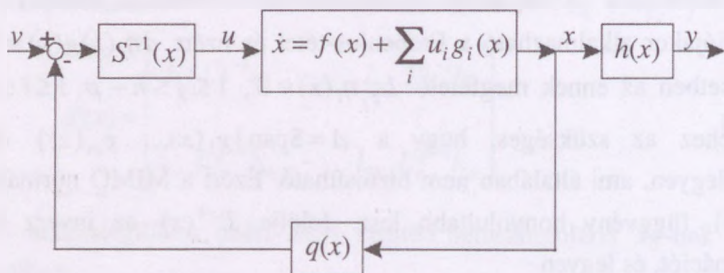
akkor a MIMO normálalak

$$\begin{aligned} \dot{z}_{i1} &= z_{i2}, \quad \dot{z}_{i2} = z_{i3}, \quad \dots, \quad \dot{z}_{i,r_i-1} = z_{i,r_i}, \\ \dot{z}_{i,r_i} &= b_i(z_o, z_u) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(z_o, z_u) u_j = \\ &= L_f^{r_i} h_i(T^{-1}(z_o, z_u)) + \sum_{j=1}^m L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(T^{-1}(z_o, z_u)) u_j = \\ &= v_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ v &= b(z_o, z_u) + A(z_o, z_u)u = q(x) + S(x)u, \end{aligned} \quad (11.113a)$$

$$\dot{z}_u = b_u(z_o, z_u) + A_u(z_o, z_u)u \quad (11.113b)$$

Következmény:

- i) Ha alkalmazzuk az $u(x) = -S^{-1}(x)q(x) + S^{-1}(x)v$ statikus visszacsatolást, akkor $\dot{z}_i = A_i z_i + b_i v_i$, $y_i = c_i z_i$ lineáris alrendszerek keletkeznek Brunovsky-féle kanonikus alakban, ahol $c_i = e_i^T \in (R^n)^*$. Az alrendszerek az $r_1, \dots, r_m$ blokkméretekhez tartozó linearizált rendszerré foghatók össze Brunovsky-féle kanonikus alakban, lásd 11.3. ábra:



11.3. ábra. MIMO bemenet/kimenet linearizált rendszer blokkvázlata

$$\begin{aligned} \dot{z}_o &= A_o z_o + B_o v, \\ y &= C_o z_o. \end{aligned} \quad (11.114)$$

- ii) Mivel z_u ekkor nem fejt ki hatást z_o -ra és y -ra, ezért z_u nem megfigyelhető (unobservable). Világos, hogy z_o megfigyelhető (observable).
- iii) Ha x_o egyensúlyi helyzet, azaz $f(x_o) = 0$ és $h(x_o) = 0$, akkor x_o -hoz a koordináta-transzformáció szerint $z_o = 0$ tartozik. Másrészt választható $z_u = 0$ is x_o -hoz. Az x_o egyensúlyi ponthoz ezért $(z_o, z_u) = (0, 0)$ tartozik.
- iv) A megfigyelhető rész egyensúlyi ponthoz tartozó átviteli függvénye a Brunovsky-féle kanonikus alaknak megfelelően $\text{diag}(1/s^{r_1}, \dots, 1/s^{r_m})$, amely egy integrátor értelemben szétcsatolt rendszer és tovább kompenzálható. A nem megfigyelhető rész azonban stabilitási problémákat okozhat.

Az egzakt jelkövetési probléma, kimenet-nullázási probléma, zéró-dinamika stb. a SISO esethez hasonlóan vizsgálható. Például a kimenet-nullázási probléma esetén $y_i(t) \equiv 0 \Rightarrow z_{ij} \equiv 0$ biztosításához az

$$\bar{u}(t) = -A^{-1}(0, z_u)b(0, z_u) \quad (11.115)$$

vezérlés szükséges. A kezdeti feltételek z_{ij} számára nullák és $z_u(0) = \eta(0)$ tetszőleges. Az eredeti x koordinátákban a kezdeti feltételnek rajta kell lennie az

$$M = \{x : h_1(x) = L_f h_1(x) = \dots = L_f^{m-1} h_m(x) = 0\}$$

sokaságon. A $z_u = \eta$ változó dinamikája az $\bar{u}(t)$ vezérlés mellett

$$\dot{z}_u = b_u(0, z_u) - A_u(0, z_u)A^{-1}(0, z_u)b(0, z_u).$$

Ha $f(x_0) = 0$, $h(x_0) = 0$ és $T(x_0) = (0^T, 0^T)^T$, akkor $u = 0$ esetén $z_o \equiv 0$, $z_u = 0$ egyensúlyi pont, és a MIMO rendszer zéró-dinamikáját $\dot{z}_u = f_u(0, z_u)$ definiálja. A MIMO rendszer lokálisan (exponenciálisan) minimumfázisú, ha az egyensúlyi pont lokálisan aszimptotikusan (exponenciálisan) stabilis.

Ha a nemlineáris rendszer lokálisan exponenciálisan minimumfázisú és a Brunovsky-féle kanonikus alakra hozott linearizált alrendszert a $v = -K_o z_o$ állapot-visszacsatolással tovább kompenzáljuk, ahol $A_o - B_o K_o$ sajátértékei stabilak, akkor az együttes rendszer lokálisan aszimptotikusan stabilis lesz.

Dinamikus kiterjesztés integrátorokkal:

Ha az $\dot{x} = f(x) + G(x)u$, $y = h(x)$ MIMO rendszernek nincs jól definiált vektor relatív fokszáma, akkor ez többféleképpen lehetséges, például úgy, hogy $S(x)$ szinguláris. Ha $S(x)$ rangja konstans $r < m$, ha x a közelében van x_0 -nak, akkor kiterjeszthetjük a rendszert alkalmas módon integrátorokkal úgy, hogy a rendszernek már legyen vektor relatív fokszáma. A következő algoritmus erre ad eljárást. A bővített rendszer függvényeit hullámmal fogjuk jelölni.

Dinamikus kiterjesztési algoritmus:

1. lépés: Legyen $\tilde{n} := n$, $\tilde{x} := x$, $\tilde{x}_0 := x_0$, $\tilde{f} := f$, $\tilde{G} := G$, $\tilde{h} := h$, $\tilde{u} := u$, $\tilde{m} := m$.
2. lépés: $\tilde{S}(\tilde{x})$ kiszámítása $\tilde{x}_0$ -nak egy $\tilde{U}$ környezetében.
 - i) Ha $\text{rank } \tilde{S}(\tilde{x}) = m$ $\tilde{U}$ -on, akkor stop, az $(\tilde{f}, \tilde{G}, \tilde{h})$ rendszernek van vektor relatív fokszáma.
 - ii) Ha $\text{rank } \tilde{S}(\tilde{x})$ nem konstans $\tilde{x}_0$ egy környezetében, akkor stop, a rendszer nem bővíthető úgy, hogy legyen vektor relatív fokszáma.
 - iii) Ha $\text{rank } \tilde{S}(\tilde{x}) = r$, akkor legyen $\tilde{r} := r$ és folytatás a 3. lépéssel.

3. lépés: Elemi oszlop-operációk olyan $\beta(\tilde{x})$ sima mátrixának meghatározása, hogy $\tilde{S}(\tilde{x})\beta(\tilde{x})$ utolsó $(\tilde{m} - \tilde{r})$ oszlopa azonosan nulla legyen. Mivel $\tilde{S}(\tilde{x})$ rangja konstans, ezért $\beta(\tilde{x})$ particionálható ennek megfelelően $\beta(\tilde{x}) = [\beta_1(\tilde{x}) \ \beta_2(\tilde{x})]$ alakban úgy, hogy $\beta_1(\tilde{x})$ az első $\tilde{r}$ oszlopból áll.

4. lépés: Legyen $\tilde{u} = \beta_1(\tilde{x})z_1 + \beta_2(\tilde{x})w_2$ és $\dot{z}_1 = w_1$, ahol $z_1, w_1 \in R^{\tilde{r}}$, $w_2 \in R^{\tilde{m}-\tilde{r}}$. Ez megfelel $\tilde{r}$ darab integrátor és a $\beta_1(x), \beta_2(x)$ erősítők hozzáadásának. Az új bemenetek w_1, w_2 lesznek. Az így bővített rendszer a következő lesz:

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f} + \tilde{G}\beta_1 z_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \tilde{G}\beta_2 \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad (11.116)$$

ahol a bővített állapot $\bar{x} = (\tilde{x}^T, z_1^T)^T$ és az új bemenet $\bar{u} = (w_1^T, w_2^T)^T$. Az új $\tilde{f}, \tilde{G}$ kiolvasható a (11.116) új állapotegyenletből. A kimenet változatlan, ezért $\bar{h}(\bar{x}) = \tilde{h}(\tilde{x})$.

5. lépés: Nevezzük át $\bar{x}, \bar{u}, \tilde{f}, \tilde{G}, \bar{h}$ -t az új $\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{f}, \tilde{G}, \tilde{h}$ -nak és menjünk vissza a 2. lépésre.

Az algoritmus véges sok lépés után befejeződik, ha az algoritmus minden lépésében $\tilde{S}(\tilde{x})$ aktuális rangja konstans $\tilde{x}_0$ -nak egy környezetében. A feltételt regularitási feltételnek nevezik, ami a szigorú relatív fokszám MIMO megfelelője. Ha az algoritmus sikeresen befejeződik, akkor a bővített rendszer vektor relatív fokszáma létezik, és a kompenzátor egy dinamikus rendszer, amelynek alakja

$$\begin{aligned} \dot{z} &= c(x, z) + d(x, z)w, \\ u &= \alpha(x, z) + \beta(x, z)w. \end{aligned} \quad (11.117)$$

Speciálisan, ha csak egy iterációs lépés volt szükséges, akkor a bővített rendszer

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= w_1, \\ u &= \beta_1(x)z_1 + \beta_2(x)w_2. \end{aligned} \quad (11.118)$$

Az *eredő nemlineáris rendszer* a dinamikus kompenzátorral prekompenzált rendszer lesz. Mivel az eredő rendszernek már létezik a vektor relatív fokszáma, a fentebb tárgyalt MIMO nemlineáris irányítási módszerek már alkalmazhatók lesznek rá.

12. NEMLINEÁRIS IRÁNYÍTÁSOK TERVEZÉSE

Az előző fejezetben összefoglaltuk a nemlineáris rendszerek differenciálgeometriai elveken alapuló elméletének fontosabb eredményeit, ha a bemenetek és a kimenetek száma azonos. Láttuk, hogy meghatározott feltételek teljesülése esetén, legalábbis lokálisan, a nemlineáris rendszer statikus vagy dinamikus visszacsatolással linearizálható, és ezután már alkalmazhatók a lineáris irányításelmélet eredményei a további kompenzálás megtervezésére. Probléma azonban, hogy a linearizáláshoz szükséges koordináta-transzformáció meghatározásához általában szimbolikusan (képletszerű alakban) meg kell oldani egy parciális differenciálegyenlet-rendszert (a Frobenius-egyenletet), amelyre általános és effektív módszerek nem állnak rendelkezésre. Bizonyos esetekben "megsejthető" a transzformáció alakja, de általános elv nem ismeretes. Mindezek indokolják, hogy speciális rendszerosztályokra speciális megoldásokat keressünk.

Ebben a fejezetben néhány módszert mutatunk be a nemlineáris irányítások területéről, amelyek ugyan nem minden tekintetben általánosak, viszont viszonylag egyszerűvé teszik a nemlineáris rendszerek esetén fontossá váló mozgástervezést illetve irányítást bizonyos rendszerosztályon belül. Ennek során foglalkozunk a differenciálisan sima (flat) rendszerek irányításával, a nemlineáris rendszerek visszalépéses technikán (back-stepping) alapuló irányításával és a nemlineáris rendszerek időben változó irányításával.

12.1 Flatness szabályozás

Számos gyakorlati jelentőségű nemlineáris dinamikus rendszer, így például egyes mechanikai rendszerek is, differenciálisan simák (differentially flat systems). Ezek a rendszerek nemlineáris dinamikus visszacsatolással és koordináta-transzformáció segítségével egy lineáris rendszerrel ekvivalenssé tehetők.

Dinamikus visszacsatolással a lineáris rendszerek esetén gyakran találkozunk, példa rá az integrál típusú szabályozás. A differenciálisan sima rendszerek fogalma a 1990-es évek elején született David Hilbert és Elie Cartan XX. század elejei munkáira alapozva, melyekben a neves szerzők differenciálegyenletek megoldásainak geometriáját vizsgálták. Az alábbiakban a differenciálisan sima rendszereket [57] és [58] alapján tárgyaljuk, ahol számos további, az elmélet alkalmazásával foglalkozó hivatkozás is megtalálható. A differenciálgeometriával kapcsolatos újabb fogalmak tekintetében utalunk még [59]-re.

A továbbiakban először kiterjesztjük a dinamikai rendszer fogalmát végtelen dimenziójú sokaságokon értelmezett rendszerekre. A végtelen dimenziójú rendszert a "hagyományos" állapotegyenlethez a vektormező prolongálásával kapjuk. A végtelen dimenziójú rendszerekre definiáljuk az ún. Lie-Bäcklund transzformációt és

megmutatjuk, hogy ez a transzformáció egyenértékű a megfelelő véges dimenziójú rendszeren végzett endogén dinamikus visszacsatolással és állapot-transzformációval. Erre alapozva úgy definiáljuk a differenciálisan sima rendszerek osztályát, hogy az abba sorolható rendszerek egy Lie–Bäcklund transzformáció segítségével triviálissá, azaz egy integrátor sorra tehetőek.

12.1.1 Vektormezők prolongálása, Cartan-mezők

Tekintsük az

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (12.1)$$

differenciálegyenlettel adott rendszert, ahol x egy n dimenziós M sokaság egy pontja, $u \in R^m$ és f egy $C^{(\infty)}$ vektormező M felett, amely a $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

ún. lokális koordinátákkal az $f = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ alakban írható fel. Feltesszük továbbá, hogy $u(t) \in C^{(\infty)}$. Vezessük be a

$$\xi(t) = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 \quad \dots]^T = [x(t)^T \quad u(t)^T \quad \dot{u}(t)^T \quad \dots]^T$$

végtesen dimenziójú vektort, amelyre konstrukciójából adódóan teljesül, hogy $\xi \in M \times R^m \times R^m \times \dots = M \times R_{\infty}^m = \bar{M}$, azaz ξ egy végtesen dimenziójú sokaság egy pontja. Legyen $\bar{f}$ egy vektormező $M \times R_{\infty}^m = \bar{M}$ felett, amelyet f -ből

$$\bar{\xi} = \bar{f}(\xi) = \begin{bmatrix} f(\xi_1, \xi_2) \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (12.2)$$

révén kapunk. Vegyük észre, hogy dacára a vektormező végtesen dimenziójának, annak minden egyes sora csak ξ véges számú elemétől függ. Az $\bar{f}$ vektormezőt lokális koordinátákban felírva az

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j \geq 0} \sum_{i=1}^m u_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(j)}} \quad (12.3)$$

kifejezést kapjuk. A fenti formában felírható vektormezőt Cartan-mezőnek nevezik. Az $\bar{f}$ vektormező konstrukciójából adódóan, ha egy $t \rightarrow (x(t), u(t))$ pálya megoldása (12.1)-nek, akkor a $t \rightarrow (x(t), u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), \dots)$ pálya megoldása (12.2)-nek. A

továbbiakban irányított rendszer alatt egy rendezett $(\bar{M}, \bar{f})$ kettőst értünk, ahol $\bar{M}$ egy végtelen dimenziós sokaság és $\bar{f}$ egy (12.3) alakú vektormező (Cartan-mező) $\bar{M}$ felett.

Tekintsünk egy integrátorsorokból álló (lineáris) dinamikus rendszert:

$$\begin{aligned} x_{r_1}^{(\kappa_1)} &= u_1 \\ x_{r_2}^{(\kappa_2)} &= u_2 \\ &\vdots \\ x_{r_m}^{(\kappa_m)} &= u_m \end{aligned} \quad r_1 = 1; \quad r_i = r_{i-1} + \kappa_{i-1}; \quad \sum_i \kappa_i = n$$

A fenti alakban r_i dimenziót, κ_i rendszámot (integrátorszámot) jelöl. Az ehhez a rendszerhez tartozó végtelen dimenziós vektormező lokális koordinátákban az

$$\bar{f}_{triv} = \sum_{j \geq 0} \sum_{i=1}^m x_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial x_i^{(j)}} \quad (12.4)$$

alakban írható fel. Ezt a vektormezőt triviális vektormezőnek nevezünk. Vegyük észre, hogy kölcsönösen egyértelmű kapcsolat van a triviális rendszer $t \rightarrow (x(t), u(t))$ integrál görbéi és a kellően reguláris (megfelelően differenciálható) $t \rightarrow (x_{r_1}(t), \dots, x_{r_m}(t))$ időfüggvények között.

12.1.2 Lie–Bäcklund transzformáció

Tekintsük az $\dot{x} = f(x, u)$ és $\dot{y} = g(y, v)$ ($\dim u = \dim v$) differenciálegyenletekből kapott $(\bar{M}, \bar{f})$ és $(\bar{N}, \bar{g})$ irányított rendszereket, ahol $\bar{M} = M \times R_m^m$ ($\dim M = n$) és $\bar{N} = N \times R_m^m$ ($\dim N = l$), azaz a két rendszer hagyományos értelemben vett dimenziószáma különbözik, ugyanakkor a bemenetek száma megegyezik. Tekintsünk továbbá egy invertálható $C^{(\infty)}$ leképezést, amely egy koordináta-transzformációt definiál $\bar{M}$ és $\bar{N}$ között: $\xi = \Phi(\zeta)$, $\xi \in \bar{M}$ és $\zeta \in \bar{N}$. Jelölje Ψ az inverz koordináta-transzformációt, amely szintén $C^{(\infty)}$ és amelyre $\zeta = \Psi(\xi)$. Csak olyan koordináta-transzformációkkal foglalkozunk, amelyekre teljesül, hogy minden komponensük csak véges számú koordinátától függ, hasonlóan a prolongált vektormezőkhöz. Így $\zeta_1 = \psi_1(\xi_1)$, $\zeta_2 = \psi_2(\xi_2), \dots, \zeta_i = \psi_i(\xi_i), \dots$ ahol $\xi_i = (\xi_{i,1}, \dots, \xi_{i,r_i})$ és r_i véges.

Tekintsük most az $\bar{f}$ vektormező egy $t \rightarrow \xi(t)$ integrál görbéjét. Ennek képe az $\bar{N}$ sokaságon $t \rightarrow \zeta(t) = \Psi(\xi(t))$. Jelölje $\Psi_* \bar{f}$ azt a vektormezőt az $\bar{N}$ sokaság

felett, amelynek $t \rightarrow \zeta(t) = \Psi(\xi(t))$ az integrál görbéje. Idő szerint differenciálva a $\Psi(\xi(t))$ görbét a

$$\frac{d}{dt} \Psi(\xi(t)) = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \cdot \dot{\xi}(t) = L_{\dot{\xi}} \Psi(\xi)$$

kifejezést kapjuk, de mivel $\Psi_* \bar{f} : \bar{N} \rightarrow T\bar{N}$ így

$$\Psi_* \bar{f} = (L_{\dot{\xi}} \Psi) \circ \Phi = (L_{\dot{\xi}} \psi_1) \circ \Phi \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{j \geq 0} (L_{\dot{\xi}} \psi_{j+1}) \circ \Phi \frac{\partial}{\partial v^{(j)}}. \quad (12.5)$$

Vegyük észre, hogy a fenti kifejezésben minden tag véges, mivel a transzformáció és a vektormező minden egyes eleme véges számú koordinátától függ.

Általános alakú Ψ transzformációra nem teljesül, hogy az eredményül kapott (12.5) vektormező is Cartan-mező, azaz (12.5) egy "hagyományos" alakú dinamikus rendszerből származtatható $\bar{N}$ felett. Ehhez meg kell követelni, hogy a prolongálás egy integrátorsor legyen, azaz

$$\frac{dv^{(j)}}{dt} = L_{\Psi_* \bar{f}} v^{(j)} = v^{(j+1)} = \psi_{j+2} \circ \Phi,$$

ahonnan (12.5) felhasználásával

$$L_{\Psi_* \bar{f}} v^{(j)} = (L_{\dot{\xi}} \psi_1) \circ \Phi \frac{\partial v^{(j)}}{\partial y} + \sum_{k \geq 0} (L_{\dot{\xi}} \psi_{k+1}) \circ \Phi \frac{\partial v^{(j)}}{\partial v^{(k)}} = (L_{\dot{\xi}} \psi_{j+1}) \circ \Phi.$$

Az utóbbi két egyenlet jobb oldalainak összehasonlításából azt kapjuk, hogy $\Psi_* \bar{f}$ akkor és csak akkor Cartan-mező $\bar{N}$ felett, ha minden pozitív j -re teljesül, hogy $L_{\dot{\xi}} \psi_{j+1} = \psi_{j+2}$. Az olyan koordináta-transzformációkat, amelyek Cartan-mezők integrál görbéit Cartan-mezők integrál görbéibe képezik le, Lie-Bäcklund transzformációknak nevezzük.

Az $(\bar{M}, \bar{f})$ és $(\bar{N}, \bar{g})$ irányított rendszereket Lie-Bäcklund ekvivalensnek mondjuk, ha létezik egy olyan invertálható és $C^{(\infty)}$ $\Psi : \bar{M} \rightarrow \bar{N}$ koordináta-transzformáció, amelynek minden eleme csak véges számú koordináta függvénye és $\Psi_* \bar{f} = \bar{g}$.

A Lie-Bäcklund transzformáció megőrzi a bemenetek számát és az egyensúlyi pontokat. Ebből például következik, hogy bármely két azonos számú bemenettel rendelkező lineáris irányítható rendszer Lie-Bäcklund ekvivalens.

12.1.3 Endogén állapot-visszacatolás

Dinamikusnak nevezzük azt a visszacsatolást, amely saját állapottal rendelkezik:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \beta(x, z, v) \\ u &= \alpha(x, z, v).\end{aligned}\tag{12.6}$$

Csak olyan visszacsatolásokkal foglalkozunk, ahol a visszacsatolt és az eredeti rendszer bemeneteinek a száma nem változik, azaz $\dim u = \dim v$. Alkalmazva (12.6)-ot az (12.1) rendszerre, a zárt kör viselkedését leíró differenciálegyenlet az

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= f(x, \alpha(x, z, v)) \\ \dot{z} &= \beta(x, z, v)\end{aligned}\tag{12.7}$$

alakban adódik. A dinamikus visszacsatolás nem feltétlenül őrzi meg az irányíthatóság tulajdonságát. Példa erre a lineáris rendszereknél gyakran használt állapotbecslő és állapot-visszacatolás együttes alkalmazása, ahol a zárt rendszert egy dinamikus visszacsatolás segítségével kapjuk, hiszen a visszacsatolás állapotai a becslő $\hat{x}$ állapotváltozói. Az így kapott zárt rendszer nem állapot-irányítható, hiszen a visszacsatolást pontosan úgy terveztük, hogy a becslő biztosítsa a becslés hibájának exponenciális csökkenését az $(\hat{x} - \hat{x}) = F(x - \hat{x})$ differenciálegyenlet szerint (F stabil és gyors), tehát nincs olyan bemenet, amely $\hat{x}$ alakulását függetlenné tenné x alakulásától. Azért, hogy az ehhez hasonló jelenségeket kizárjuk, az ún. endogén dinamikus visszacsatolások vizsgálatára szorítkozunk.

Endogén dinamikus visszacsatolás:

Legyen adott egy $(\bar{M}, \bar{f})$ rendszer. A (12.6) alakban adott visszacsatolást *endogén dinamikus visszacsatolásnak* nevezzük, ha a zárt körben kapott (12.7) egyenlettel felírt rendszer prolongálása Lie–Bäcklund ekvivalens az $(\bar{M}, \bar{f})$ rendszerrel.

12.1 Tétel: Tekintsük a $(\bar{M}, \bar{f})$ és $(\bar{N}, \bar{g})$ rendszereket. Ha e két rendszer Lie–Bäcklund ekvivalens, akkor létezik egy olyan (12.6) típusú endogén dinamikus állapot-visszacatolás és egy hagyományos koordináta-transzformáció (diffeomorfizmus), amely az

$$\dot{\hat{x}} = f(x, u)$$

rendszert egy véges számú integrátorral prolongált

$$\begin{aligned}\dot{y} &= g(y, w) \\ w^{(r+1)} &= v\end{aligned}$$

rendszerbe viszi át.

Differenciálisan sima rendszer:

Adott $(\bar{M}, \bar{f})$ rendszer differenciálisan sima (differentially flat), ha Lie–Bäcklund ekvivalens az

$$\bar{f}_{triv} = \sum_{j \geq 0} \sum_{i=1}^m y_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial y_i^{(j)}} \quad (12.8)$$

vektormezővel adott triviális rendszerrel. Az y vektor változóit (számuk megegyezik $(\bar{M}, \bar{f})$ bemeneteinek számával) sima (flat) kimeneteknek nevezzük.

12.1.4 Differenciálisan sima rendszerek tulajdonságai

A differenciálisan sima rendszer fenti definíciójából közvetlenül következnek az alábbiak.

Következmény: A differenciálisan sima rendszerek dinamikus állapot-visszacsatolással és egy koordináta-transzformációval linearizálhatók, hiszen (12.8) egy integrátorsorokból álló lineáris rendszer prolongálásával adódik. Emé tulajdonság miatt az y kimenetet szokás linearizáló kimenetnek is nevezni.

Következmény: Tekintsünk egy differenciálisan sima $(\bar{M}, \bar{f})$ rendszert, amelyet az $\dot{x} = f(x, u)$ rendszer prolongálásával kapunk. Jelölje Ψ azt a Lie–Bäcklund transzformációt, amely $(\bar{M}, \bar{f})$ -et a triviális rendszerbe viszi át, és jelölje Φ az inverz transzformációt. A differenciális simaság definíciójából következik, hogy létezik egy véges q , hogy

$$\begin{aligned} x &= \phi_1(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(q)}) \\ u &= \phi_2(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(q+1)}), \end{aligned} \quad (12.9)$$

amely x és u azonosan kielégíti a rendszert leíró $\dot{x} = f(x, u)$ egyenletet. Létezik továbbá egy véges p , melyre

$$y = \psi_1(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(p)}). \quad (12.10)$$

A (12.9) és (12.10) egyenletek szerint y és deriváltjai segítségével meghatározható x és u pályája, és kölcsönösen egyértelmű összefüggés van az $\dot{x} = f(x, u)$ egyenletet kielégítő $t \rightarrow (x(t), u(t))$ integrál görbék és a kellően reguláris $t \rightarrow y(t)$ időfüggvények között. Ez azt jelenti, hogy a differenciálisan sima rendszerek esetében található egy olyan változóhalmaz, amelyen belül a rendszert jelentő differenciális korlátozások eltűnnek. Ebben a függvény térben pedig pontosan annyi változó

található, amennyi a változók és a rendszert leíró egyenletek különbsége, azaz amennyi a bemenetek száma.

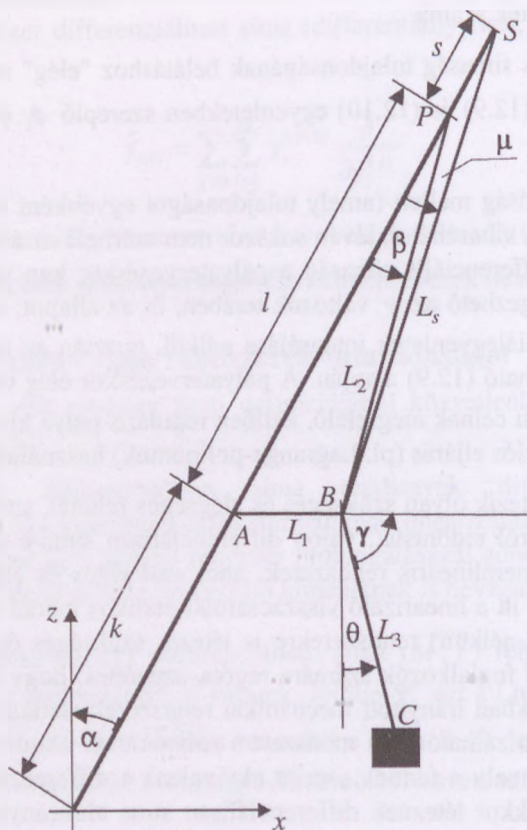
A differenciális simaság tulajdonságának belátáshoz "elég" megtalálni az y kiemenetet, illetve a (12.9) és (12.10) egyenletekben szereplő ϕ_1, ϕ_2 és ψ_1 függvényeket.

A linearizálhatóság mellett (amely tulajdonságot egyébként nem mindig lehet a valós rendszereken kihasználni, lévén sokszor nem mérhető az állapotvektor minden komponense) a differenciális simaság a pályatervezéskor kap szerepet. Ugyanis a pályatervezés elvégezhető az y változók terében, és az állapot, valamint a bemenet pályája a differenciálegyenletek integrálása nélkül, pusztán az idő szerinti deriváltakból meghatározható (12.9) alapján. A pályatervezéskor elég tehát az y változók terében az irányítási célnak megfelelő, kellően reguláris pálya kiválasztása valamely egyszerű interpolációs eljárás (pl. Lagrange-polinomok) használatával.

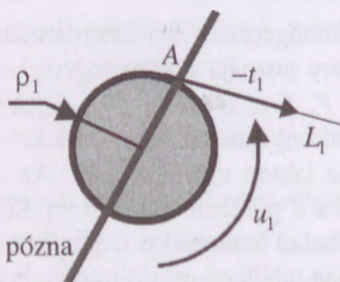
Jelenleg nem létezik olyan szükséges és elégséges feltétel, amely lehetővé tenné, hogy egy rendszerről eldöntsük, vajon differenciálisan sima-e vagy sem. Kivételt képeznek a SISO nemlineáris rendszerek, ahol szükséges és elégséges feltétel áll rendelkezésre [53], itt a linearizáló visszacsatolás statikus marad (ha létezik). Egyes sodrásmentes (drift-nélküli) rendszerekre is létezik szükséges és elégséges feltétel [60]. A robotikával foglalkozók számára régóta ismeretes, hogy a nyílt láncú, minden szabadságfokukban irányított mechanikai rendszerek statikus nemlineáris visszacsatolással linearizálhatóak (a módszert a robotikában nemlineáris szétcsatolásnak hívják [26]), amely a fentiek szerint ekvivalens a differenciális simaság tulajdonsággal. Ugyanakkor léteznek differenciálisan sima alulirányított és anholonom mechanikai rendszerek is. Ellenpélda az invertált inga modellje, amelyről belátható, hogy nem differenciálisan sima.

12.1.5 Hajódaru vezérlése a differenciális simaság elve alapján

Tekintsük az Amerikai Haditengerészet egy teherdarujának a 12.1. ábrán illusztrált síkbeli modelljét [61]. A daru póznája függőlegessel α szöget zár be. A póznán három csörlő kap helyet a P , A és S pontokban. Az A és S pontok távolsága a P ponttól rendre l és s . A sodronyokat csévélő csörlőket motorok forgatják, melyek sugarát a kötelek hosszához képest elhanyagoljuk. Az A és S pontokban található csörlők sodronyainak végei a B pontban található ún. kötélvezető elemhez rögzítettek. A kötélvezető elemen halad keresztül a C pontban található teherhez rögzített sodrony, amelyet a P pontban található csörlő csévél. Feltesszük, hogy a sodronyok nyúlásmentesek és tömegük elhanyagolható a teher tömegéhez képest. Szintén feltesszük, hogy a csörlőket mozgató motorok a mechanika dinamikájához képest gyors és pontos nyomatékuszabályozással vannak ellátva, tehát a rendszert leíró modell bemeneteinek a motorok által kifejtett nyomatékokat tekinthetjük.



12.1. ábra. A síkbeli hajódaru felépítése

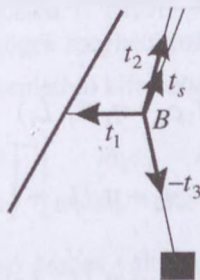


12.2. ábra. Az A pontban található csörlő felépítése

Jelölje rendre L_1 és L_5 a sodronyvezető elemhez rögzített kötelek hosszát az A és S csörlőktől mérve. A teherhez rögzített sodrony hossza a csörlőtől a sodronyvezető elemig L_2 , a sodronyvezető elemtől a teherig pedig L_3 . A sodronyok egymással, a póznával és a függőlegessel bezárt szögeit az ábrán látható módon a β , θ , γ , μ változók jelölik. A csörlők felépítését a 12.2. ábra szemlélteti, amelyen az A pontban található csörlőt ábrázoltuk. Hasonlóan az ábra jelöléseihöz, a P és S pontokban található csörlők sugarait rendre ρ_2 és ρ_s , a motorok csörlőre kifejtett nyomatékait pedig u_2 és u_s jelölik.

A fentiekben ismertetett síkbeli daru egy négy-szabadságfokú alulirányított rendszer (underactuated system), hiszen a beavatkozó szervek (motorok) száma csak három, ami kisebb a szabadságfokok számánál.

A daru esetében a feladat a teher pontos, gyors és lengésmentes mozgása. Pályatervezés alatt a daru esetében a vezérlési feladat megoldását értjük, azaz a motorok által kifejtett nyomatékok időfüggvényeinek meghatározását, amelyek a rendszert leíró modell névleges paraméterértékei esetén biztosítják, hogy a teher egy előírt referencia pálya mentén haladjon. A pályatervezési feladat megoldásához egyrészt meg kell vizsgálni, hogy vajon a teher milyen pályáihoz találhatóak egyáltalán ilyen időfüggvények, másrészt pedig módszert kell találni azok meghatározásához.



12.3. ábra. A sodronyokban ébredő feszültségek

Először meghatározzuk a rendszer modelljének egyenleteit, amelyeket geometriai és dinamikai összefüggések alapján kaphatunk meg. A sodronyok szögei alapján a

$$\begin{bmatrix} x_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k+l) \sin \alpha - L_2 \sin(\alpha - \beta) \\ (k+l) \cos \alpha - L_2 \cos(\alpha - \beta) \end{bmatrix} \quad (12.11)$$

$$\begin{bmatrix} x - x_B \\ z - z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_3 \sin \theta \\ -L_3 \cos \theta \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_B - k \sin \alpha \\ z_B - k \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \sin(\theta + \gamma) \\ -L_1 \cos(\theta + \gamma) \end{bmatrix} \quad (12.12)$$

$$\begin{bmatrix} x_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k+l+s) \sin \alpha - L_s \sin(\alpha - \mu) \\ (k+l+s) \cos \alpha - L_s \cos(\alpha - \mu) \end{bmatrix} \quad (12.13)$$

geometriai összefüggéseket írhatjuk fel, ahol (x_B, z_B) és (x, z) rendre a sodronyvezető elem és a teher koordinátái.

Jelölje T_1 , T_2 , T_3 és T_s az azonos indexszel jelölt sodronyszakaszokban ébredő feszültség előjeles nagyságát. A pozitív irányokat a 12.3. ábra szerint vesszük fel A nyúlásmentesség feltételéből következik, hogy $T_2 = T_3$, hiszen mindkét feszültség a teherhez rögzített sodronyban ébred. Az m tömegű teher mozgását az

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -T_3 \sin \theta \\ m(\ddot{z} + g) &= T_3 \cos \theta \end{aligned} \quad (12.14)$$

összefüggések szabják meg, ahol g a nehézségi gyorsulás. A B pontban található, m_0 tömegű sodronyvezető elem dinamikáját hasonló módon az

$$\begin{aligned} m_0\ddot{x}_B &= -T_1 \sin(\gamma + \theta) + T_3(\sin(\alpha - \beta) + \sin \theta) + T_s \sin(\alpha - \mu) \\ m_0(\ddot{z}_B + g) &= T_1 \cos(\gamma + \theta) + T_3(\cos(\alpha - \beta) - \cos \theta) + T_s \cos(\alpha - \mu) \end{aligned} \quad (12.15)$$

egyenletek írják le. Az egyenletek felírásakor kihasználtuk a $T_2 = T_3$ összefüggést. A csörlők dinamikáját a

$$\begin{aligned} \frac{J_1}{\rho_1} \ddot{L}_1 &= T_1 \rho_1 + \eta_1(L_1, \dot{L}_1) - u_1 \\ \frac{J_2}{\rho_2} (\ddot{L}_2 + \ddot{L}_3) &= T_3 \rho_2 + \eta_2(L_2 + L_3, \dot{L}_2 + \dot{L}_3) - u_2 \\ \frac{J_s}{\rho_s} \ddot{L}_s &= T_s \rho_s + \eta_s(L_s, \dot{L}_s) - u_s \end{aligned} \quad (12.16)$$

egyenletek írják le, ahol J_1 , J_2 és J_s a csörlők inerciája, η pedig a súrlódásból eredő tagokat jelenti.

A síkbeli daru (12.11)-(12.16) egyenletekkel adott modellje differenciálisan sima. Az y sima kimenet egy lehetséges megválasztása $y = (x, z, L_3)^T$. Ennek az állításnak bizonyításához elég belátni, hogy a modell összes változójának alakulása meghatározható y és idő szerinti deriváltjai segítségével.

Tekintsük elsőként a θ és a $T_3 = T_2$ változókat. A teher dinamikáját leíró (12.14) egyenletből kapjuk, hogy

$$\theta = \operatorname{atan} \frac{\ddot{x}}{\ddot{z} + g}; \quad T_3 = m((\ddot{z} + g) \cos \theta - \ddot{x} \sin \theta). \quad (12.17)$$

A (12.12) egyenletet felhasználva a sodronyvezető elem koordinátái az

$$\begin{bmatrix} x_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \frac{mL_2}{T_3} \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (12.18)$$

egyenlettel jellemezhetők, amelyben y elemei valamint a θ és T_3 változók szerepelnek, az utóbbiakról azonban már beláttuk, hogy y -nak és deriváltjainak függvényei. A sodronyok L_1 , L_2 és L_s hosszai a daru geometriájából a

$$\begin{aligned} L_1 &= \sqrt{(x_B - k \sin \alpha)^2 + (z_B - k \sin \alpha)^2} \\ L_2 &= \sqrt{(x_B - (k+l) \sin \alpha)^2 + (z_B - (k+l) \cos \alpha)^2} \\ L_s &= \sqrt{(x_B - (k+l+s) \sin \alpha)^2 + (z_B - (k+l+s) \cos \alpha)^2} \end{aligned} \quad (12.19)$$

kifejezésekből határozhatók meg, ahol az (x_B, z_B) koordinátákról már beláttuk, hogy y -nak és deriváltjainak függvényei. A sodronyok hosszait ismerve az ABP és ABS háromszögek oldalainak hossza is ismert y és deriváltjainak függvényében, ahonnan pedig a γ , β és μ szögek meghatározhatók szintén y -nak és deriváltjainak függvényében. A (12.15) egyenletből kifejezhető T_1 és T_s :

$$\begin{bmatrix} T_s \\ T_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\alpha - \mu) & -\sin(\gamma + \theta) \\ \cos(\alpha - \mu) & \cos(\gamma + \theta) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_0 \ddot{x}_B - T_3 \sin(\alpha - \beta) + \sin \theta \\ m_0 (\ddot{z}_B + g) - T_3 (\cos(\alpha - \beta) - \cos \theta) \end{bmatrix} \quad (12.20)$$

A kifejezés jobb oldalán található összes változóról beláttuk, hogy y -nak és deriváltjainak függvénye, következésképp ugyan ez igaz a bal oldalon található feszültségekre is.

Végezetül a (12.16) egyenletet u_1 , u_2 és u_s -re rendezve a rendszer bemeneteiről is belátható, hogy y -nak és idő szerinti deriváltjainak függvényei, amit bizonyítani akartunk.

A fenti egyenletek alapján $(y, \dot{y}, \ddot{y}, y^{(3)}, y^{(4)})$ ismeretében a rendszert leíró egyenletekben szereplő minden változó pályája meghatározható. Vegyük észre azonban, hogy a (12.17)–(12.20) egyenletek egyes pontokban szingulárisak válnak, például ha $\ddot{z} = -g$, azaz ha a teher "szabadon esik".

Tekintve, hogy y a teher koordinátáit is tartalmazza, a tehernek a szingularitásokat elkerülő tetszőleges, négyszer differenciálható pályájához tartozik a pályát generáló bemenet.

Tegyük fel, hogy a terhet T idő alatt egy adott $y_0 \in R^3$ nyugalmi állapotból (nulla sebességekkel és gyorsulásokkal indulva) előírt $y_1 \in R^3$ nyugalmi állapotba kívánjuk eljuttatni. Mivel a teher koordinátái az y sima kimenet elemei, így elég egy olyan pl. hatszor differenciálható $t \rightarrow y(t)$ időfüggvényt találni, amelyre: $y(0) = y_0$, $y(T) = y_1$, továbbá $\dot{y}(0) = \dots = y^{(6)}(0) = 0$ és $\dot{y}(T) = \dots = y^{(6)}(T) = 0$. Egyszerű megoldásnak kínálkozik az időben polinomiális függvények választása, mivel ekkor a fenti feltételeket kielégítő

$$x(t) = x_0 + (x_1 - x_0) \left(\frac{t}{T} \right)^7 \sum_{j=7}^{13} a_{x,j} \left(\frac{t}{T} \right)^{j-7} \quad z(t) = z_0 + (z_1 - z_0) \left(\frac{t}{T} \right)^7 \sum_{j=7}^{13} a_{z,j} \left(\frac{t}{T} \right)^{j-7}$$

tizenharmadfokú polinomok $a_{x,j}$ és $a_{z,j}$ együtthatói egy lineáris egyenletrendszer megoldásaiként számíthatók. Hasonló módon választható meg az y kimenet harmadik változójának, L_3 -nak a pályája is. A specifikált mozgás esetén a polinomok együtthatói mindhárom változó esetén azonosak:

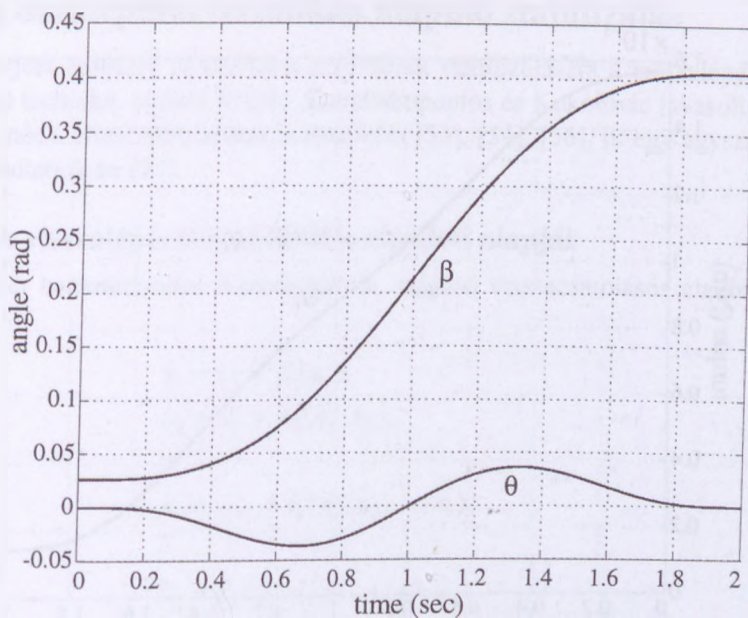
$$\begin{aligned} a_{13} &= 0.0924 \cdot 10^4 & a_9 &= 2.0020 \cdot 10^4 \\ a_{12} &= -0.6006 \cdot 10^4 & a_8 &= -0.9009 \cdot 10^4 \\ a_{11} &= 1.6380 \cdot 10^4 & a_7 &= 0.1716 \cdot 10^4 \\ a_{10} &= -2.4024 \cdot 10^4 \end{aligned}$$

A fenti polinomok választása esetében a teher a két végpont között egyenes vonalon halad. Természetesen más görbéket is választhatunk, például ha a munkatérben akadályokat kell a teherrel elkerülni.

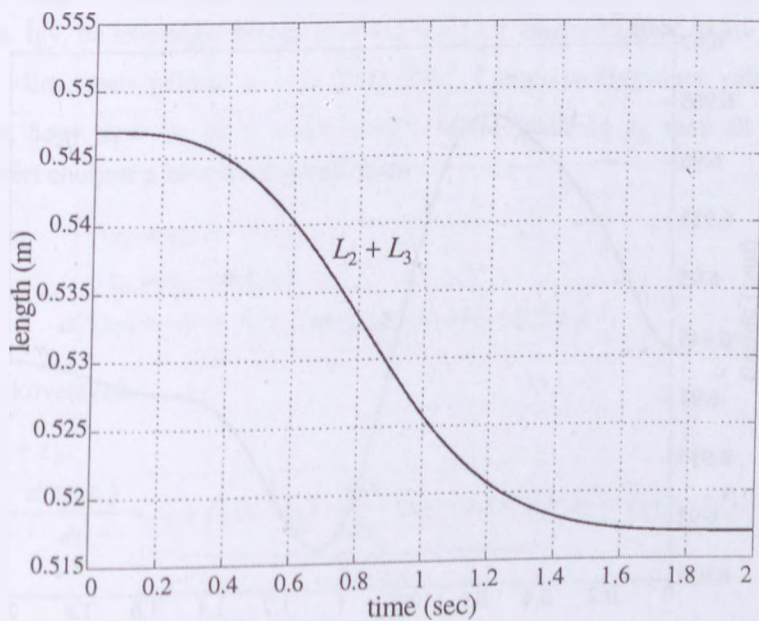
A pályatervezés eredményét a hajódaru kicsinyített (1:80) másához tartozó paraméterértékek mellett illusztráljuk. (A makett a franciaországi Ecole des Mines de Paris laboratóriumában készült [61].) A 0,5 kg tömegű teher az x tengely irányában 2 másodperc alatt egy kb. 15 cm hosszúságú utat tesz meg. Ez a valódi daru esetében 6 m/s átlagos sebességű elmozdulást jelentene.

A 12.4-12.7. ábrák rendre a θ és β szögeknek, a teherhez rögzített sodrony hosszának ($L_2 + L_3$), valamint az A és P pontokban található csörlőket forgató motorok nyomatékainak alakulását mutatják a teher előírt elmozdulása mentén. A motorok a csörlőket áttételen keresztül mozgatják.

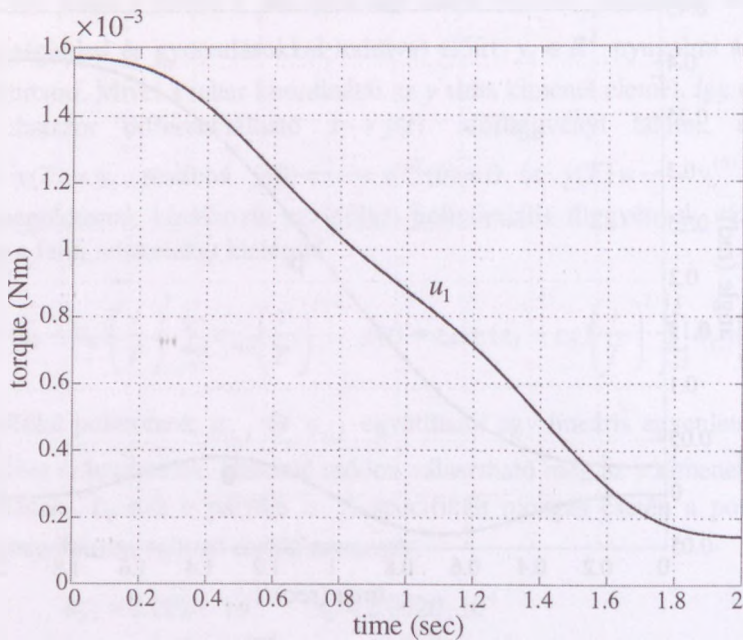
A teherdaru térbeli (3D) megvalósítása is differenciálisan sima (flat) rendszert eredményez, és az itt közölt eredmények kiterjeszthetők a 3D esetre is, lásd Kiss [61], ahol demonstrálva lett az is, hogy a flatness-elvű, pályatervezésen és követő szabályozáson alapuló irányítás egyértelmű előnyöket mutat a klasszikus lineáris PD-szabályozón alapuló véghelyzet-stabilizálással szemben.



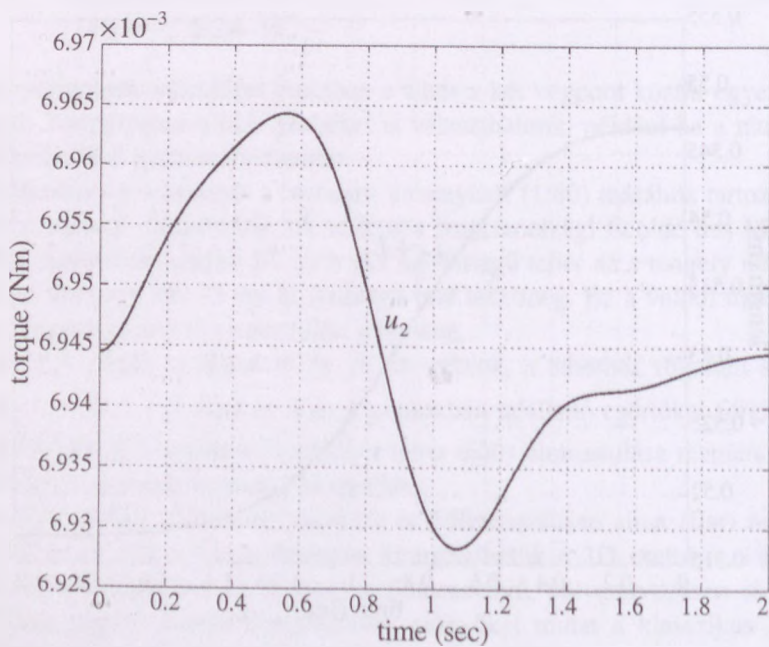
12.4. ábra. A θ és β szögek alakulása a teher vízszintes elmozdulása közben



12.5. ábra. Teherhez rögzített sodrony hosszának alakulása a teher vízszintes elmozdulása közben



12.6. ábra. Az A pontban található csörlőt forgató motor nyomatékának időfüggvénye



12.7. ábra. Az P pontban található csörlőt forgató motor nyomatékának időfüggvénye

12.2 Visszalépéses technikán alapuló stabilizálás

Egy elterjedt módszer nemlineáris rendszerek stabilizálására a visszalépéses (back-stepping) technika, melyet Kritic, Kanellakopoulos és Kokotovic javasoltak először [62]. A módszernek több alakja is ismeretes [53], [54], [56], itt egy egyszerűbb változatát mutatjuk be [25].

12.2.1 A visszalépéses stabilizálás elméleti alapjai

A módszer bemutatásához a rendszert ún. szigorú visszacsatolós alakban feltételezzük:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + f_1(x_1), \\ \dot{x}_2 &= x_3 + f_2(x_1, x_2), \\ &\vdots \\ \dot{x}_i &= x_{i+1} + f_i(x_1, x_2, \dots, x_i), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + u.\end{aligned}\tag{12.21}$$

Vegyük észre, hogy ebben az alakban $\dot{x}_i$ csak $x_1, x_2, \dots, x_i$ -től és affin módon x_{i+1} -től függ. Az ötlet a következő: Az x_2 felfogható "pszeudo-vezérlő jelnek" x_1 számára. Így, ha lehetséges lenne $x_2 = -x_1 - f_1(x_1)$ megvalósítása, akkor x_1 stabilizálttá válna, mert például a $v_1(x_1) = (1/2)x_1^2$ Ljapunov-függvényt választva azt kapnánk, hogy $\dot{x}_1 = -x_1$ és $\dot{v}_1 = x_1\dot{x}_1 = -x_1^2$. Mivel általában x_2 nem áll rendelkezésre, ezért ehelyett a következő javasolható:

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1, \\ z_2 &= x_2 - \alpha_1(x_1), \\ \alpha_1(x_1) &= -x_1 - f_1(x_1) \Rightarrow f_1(x_1) = -x_1 - \alpha_1(x_1),\end{aligned}\tag{12.22}$$

ahonnan következik

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -z_1 + z_2, \\ \dot{z}_2 &= \dot{x}_2 - \frac{d\alpha_1(x_1)}{dt} = x_3 + f_2(x_1, x_2) - \underbrace{\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(x_2 + f_1(x_1))}_{\tilde{f}_2(z_1, z_2)} = x_3 + \tilde{f}_2(z_1, z_2),\end{aligned}\tag{12.23}$$

$$\dot{v}_1 = x_1\dot{x}_1 = z_1(-z_1 + z_2) = -z_1^2 + z_1z_2.$$

Rekurzívan folytatva legyen

$$\begin{aligned} z_3 &= x_3 - \alpha_2(z_1, z_2), \\ v_2 &= \dot{v}_1 + \frac{1}{2}z_2^2, \end{aligned} \quad (12.24)$$

akkor

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= x_3 + \bar{f}_2(z_1, z_2) = z_3 + \alpha_2(z_1, z_2) + \bar{f}_2(z_1, z_2), \\ \dot{v}_2 &= \dot{v}_1 + z_2 \dot{z}_2 = -z_1^2 + z_1 z_2 + z_2 [z_3 + \alpha_2(z_1, z_2) + \bar{f}_2(z_1, z_2)]. \end{aligned} \quad (12.25)$$

Legyen

$$\alpha_2(z_1, z_2) = -z_1 - z_2 - \bar{f}_2(z_1, z_2), \quad (12.26)$$

akkor

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_1 + z_2, \\ \dot{z}_2 &= -z_1 - z_2 + z_3, \\ \dot{v}_2 &= -z_1^2 - z_2^2 + z_2 z_3. \end{aligned} \quad (12.27)$$

Általában az i -ik lépésben a következő választással élünk:

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= x_{i+1} - \alpha_i(z_1, z_2, \dots, z_i), \\ v_i &= \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_i^2), \\ \dot{z}_i &= z_{i+1} + \alpha_i(z_1, z_2, \dots, z_i) + \bar{f}_i(z_1, z_2, \dots, z_i), \\ \alpha_i(z_1, z_2, \dots, z_i) &= -z_{i-1} - z_i - \bar{f}_i(z_1, z_2, \dots, z_i), \end{aligned} \quad (12.28)$$

amivel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= -z_{i-1} - z_i + z_{i+1}, \\ \dot{v}_i &= -z_1^2 - z_2^2 - \dots - z_i^2 + z_i z_{i+1}. \end{aligned} \quad (12.29)$$

Az utolsó lépésben legyen a választás

$$\begin{aligned} \dot{z}_n &= \bar{f}_n(z_1, z_2, \dots, z_n) + u, \\ u &= \alpha_n(z_1, z_2, \dots, z_n) = -z_{n-1} - z_n - \bar{f}_n(z_1, z_2, \dots, z_n), \\ v_n &= \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2), \end{aligned} \quad (12.30)$$

akkor

$$\begin{aligned} \dot{z}_n &= -z_{n-1} - z_n, \\ \dot{v}_n &= -z_1^2 - z_2^2 - \dots - z_n^2. \end{aligned} \quad (12.31)$$

A visszalépéses technika lehetővé teszi egy $x \rightarrow z$ koordináta-transzformáció (diffeomorfizmus) fokozatos meghatározását és a rendszer linearizált alakra hozatalát:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} \quad (12.32)$$

$$u = -z_{n-1} - z_n - \bar{f}_n(z_1, z_2, \dots, z_n),$$

ahol a rendszer Ljapunov-függvénye és annak deriváltja

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2), \\ \dot{v}_n &= -z_1^2 - z_2^2 - \cdots - z_n^2. \end{aligned} \quad (12.33)$$

Sajnos, az iterációs lépések számának növekedésével a bevezetésre kerülő függvényekben a tagok száma robban, mivel az eredeti függvények többszöri deriválása válik szükségessé. Ez csak azért nem jelentkezett a fenti tárgyalásnál, mert elrejtette az $\bar{f}_i(z_1, z_2, \dots, z_i)$ jelölés.

12.2.2 Helikopter stabilizálása back-stepping módszerrel

A helikopter dinamikus modelljét a 2. fejezetben tárgyaltuk, a rendszeregyenleteket (2.172)-ben foglaltuk össze. Induljunk ki ezekből az egyenletekből, de az A orientációs mátrixot írjuk le a yaw (forgatás z körül φ szöggel), pitch (forgatás y körül ϑ szöggel) és roll (forgatás x körül ψ szöggel) YPR-szögekkel, és hagyjuk el a sebesség és a szögsebesség indexeit az egyszerűbb jelölés érdekében. Vezessük be a $\xi := p \in R^3$, $\eta := (\varphi, \vartheta, \psi)^T \in R^3$ és az $R := A$ jelölést, akkor

$$\begin{aligned} R(\vartheta) &= \begin{bmatrix} C_\varphi & -S_\varphi & 0 \\ S_\varphi & C_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\vartheta & 0 & S_\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\vartheta & 0 & C_\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\psi & -S_\psi \\ 0 & S_\psi & C_\psi \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C_\varphi & -S_\varphi & 0 \\ S_\varphi & C_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\vartheta & S_\vartheta S_\psi & S_\vartheta C_\psi \\ 0 & C_\psi & -S_\psi \\ -S_\vartheta & C_\vartheta S_\psi & C_\vartheta C_\psi \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$R(\eta) = \begin{bmatrix} C_\varphi C_\vartheta & C_\varphi S_\vartheta S_\psi - S_\varphi C_\psi & C_\varphi S_\vartheta C_\psi + S_\varphi S_\psi \\ S_\varphi C_\vartheta & S_\varphi S_\vartheta S_\psi + C_\varphi C_\psi & S_\varphi S_\vartheta C_\psi - C_\varphi S_\psi \\ -S_\vartheta & C_\vartheta S_\psi & C_\vartheta C_\psi \end{bmatrix}, \quad (12.34)$$

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -S_\vartheta & 0 & 1 \\ C_\vartheta S_\psi & C_\psi & 0 \\ C_\vartheta C_\psi & -S_\psi & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = W_\eta \dot{\eta}, \quad (12.35)$$

$$\dot{\eta} = W_\eta^{-1} \omega \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \frac{1}{C_\vartheta} \begin{bmatrix} 0 & S_\psi & C_\psi \\ 0 & C_\vartheta C_\psi & -C_\vartheta S_\psi \\ C_\vartheta & S_\vartheta S_\psi & S_\vartheta C_\psi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \quad (12.36)$$

A helikopter állapotegyenlete az (2.172) felhasználásával és a bevezetett új jelölésekkel a következő:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= v, \\ m\dot{v} &= -uR e_3 + mg e_3 + RLK^{-1} w, \\ \dot{R} &= R[\omega \times] \Leftrightarrow \dot{\eta} = W_\eta^{-1} \omega, \\ K\dot{\omega} &= -\omega \times (K\omega) + |Q_{MR}|e_3 - |Q_{TR}|e_2 + w - k_0 u. \end{aligned} \quad (12.37)$$

A rendszer bemenő jelei $u \in R^1$ és $w \in R^3$.

Adott: Követendő előírt sima trajektória $\xi(t) = (\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t))^T \in R^3$ és $\hat{\varphi}(t) \in R^1$.

Feladat: Olyan $(u, w_x, w_y, w_z) \in R^4$ visszacsatolás meghatározása, amely felhasználhatja a mért $\xi, \dot{\xi}, \eta, \dot{\eta}$ állapotváltozókat és a specifikált $\xi, \hat{\varphi}$ trajektória tetszőleges rendű deriváltjait, és amely mellett az

$$(\xi(t) - \hat{\xi}(t), \varphi(t) - \hat{\varphi}(t)) \in R^4 \quad (12.38)$$

hiba aszimptotikusan stabilis tetszőleges kezdeti feltétel esetén.

Bár a back-stepping módszer a korábban ismertetett formában nem alkalmazható, megőrizvén a módszer főbb jellegzetességeit a (12.32-32) alakkal rokon MIMO alakra hozzuk a rendszert megfelelő kompenzálás megválasztásával, feltéve, hogy a pozíció részben az $RLK^{-1}w$ csatoló hatás kicsi. A csatoló hatást később perturbációként fogjuk figyelembe venni.

A v mechanikai sebesség jelölésével való ütközés elkerülése érdekében a parciális Ljapunov-függvényeket v_i helyett S_i -vel fogjuk jelölni (storage function). Mivel a hibadinamikát akarjuk befolyásolni, ezért arra fogunk törekedni, hogy a koordináta-transzformáció után az állapotváltozók valamilyen értelemben vett hibát jelezzenek ki. A hibajeleket δ_i, ε_i -vel fogjuk jelölni, és ezek veszik át a korábban z_i -vel jelölt állapotváltozók szerepét.

Legyen $\delta_1 := \xi - \hat{\xi}$ a pozíció hiba és $S_1 := (1/2)|\delta_1|^2$ a parciális Ljapunov-függvény, akkor $\dot{S}_1 = \delta_1^T (\dot{\xi} - \dot{\hat{\xi}}) = \delta_1^T (v - \hat{v})$. Legyen v_d a v sebesség előírt (desired) értéke, amely egy elméleti vezérlő jelnek tekinthető, amely v helyére lép. Legyen

$$v_d := \hat{v} - \frac{1}{m}\delta_1 \Rightarrow \hat{v} = v_d + \frac{1}{m}\delta_1, \quad (12.39)$$

$$\text{akkor } \dot{\delta}_1 = v - \hat{v} = v - v_d - \frac{1}{m}\delta_1 = -\frac{1}{m}\delta_1 + \frac{1}{m}\underbrace{(mv - mv_d)}_{\delta_2} \Rightarrow$$

$$\dot{\delta}_1 = -\frac{1}{m}\delta_1 + \frac{1}{m}\delta_2, \quad (12.40)$$

$$\dot{S}_1 = \delta_1^T \dot{\delta}_1 = -\frac{1}{m}|\delta_1|^2 + \frac{1}{m}\delta_1^T \delta_2. \quad (12.41)$$

Legyen $\delta_2 := mv - mv_d$ a (skálázott) sebesség hiba és $S_2 := (1/2)|\delta_2|^2$ a parciális Ljapunov-függvény, akkor

$$\dot{S}_2 = \delta_2^T \dot{\delta}_2 = \delta_2^T (m\dot{v} - m\dot{v}_d) = \delta_2^T (-uR e_3 + mge_3 + RLK^{-1}w - m\dot{v}_d).$$

Az $RLK^{-1}w$ csatoló hatást átmenetileg el fogjuk hanyagolni, de később meg fog jelenni δ_2 blokk-sorában perturbációként. Vezessünk be két integrátort u elé, amelynek bemenete legyen a megválasztható $\bar{u}$:

$$\ddot{u} = \bar{u}. \quad (12.42)$$

Ezáltal elérjük, hogy az $u, \dot{u}$ belső változók és az $\ddot{u} = \bar{u}$ bemenő jel is bevonható a kompenzálásba. Ezen kívül mind $\bar{u} \rightarrow \xi$, mind pedig $w \rightarrow \xi$ relatív fokszáma 4 lesz (az utóbbinál $RLK^{-1}w$ elhanyagolása mellett). Vezessük be az η_d, u_d jelölést η, u előírt értékei számára, és legyen

$$X_d := u_d R(\eta_d) e_3 := m g e_3 - m \dot{v}_d + \delta_2 + \frac{1}{m} \delta_1, \quad (12.43)$$

ahol $X_d \in R^3$ egy elméleti vektor bemenet, melyet η_d és u_d együttesen határoznak meg. Mivel $uR(\eta)e_3$ a z_B tengely irányú felhajtóerő (lásd 2. fejezet), amely a transzlációs mozgást befolyásolja, ezért X_d ennek előírt értéke. A visszalépéses technikának megfelelően később szükség lesz X_d deriváltjára, amelyet a jobb oldal deriválásával fogunk meghatározni. Vegyük észre, hogy η_d, u_d deriválására nincs szükség emiatt. Határozzuk meg δ_2 és S_2 deriváltját:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_2 &= m\dot{v} - m\dot{v}_d = -uR(\eta)e_3 + mge_3 + X_d - mge_3 - \delta_2 - \frac{1}{m} \delta_1 \\ \delta_3 &:= X_d - uR(\eta)e_3, \end{aligned} \quad (12.44)$$

$$\dot{\delta}_2 = -\frac{1}{m} \delta_1 - \delta_2 + \delta_3, \quad (12.45)$$

$$\dot{S}_2 = \delta_2^T \dot{\delta}_2 = -|\delta_2|^2 - \frac{1}{m} \delta_1^T \delta_2 + \delta_2^T \delta_3. \quad (12.46)$$

Vegyük észre, hogy $\delta_3 = X_d - uR(\eta)e_3 = u_d R(\eta_d)e_3 - uR(\eta)e_3$ nem más, mint a transzlációs mozgást meghatározó előírt és a valódi felhajtóerő különbsége, és ebben az értelemben egy hiba jellegű vektor. További hiba legyen az orientáció φ szögének hibája:

$$\varepsilon_3 := \varphi - \hat{\varphi}. \quad (12.47)$$

Mind $\tilde{u} \rightarrow \delta_3$, mind pedig $w \rightarrow \varepsilon_3$ relatív fokszáma 2. Legyen a két hibát jellemző parciális Ljapunov-függvény $S_3 := (1/2)|\delta_3|^2 + (1/2)|\varepsilon_3|^2$, akkor deriváltja $\dot{S}_3 = \delta_3^T \dot{\delta}_3 + \varepsilon_3^T \dot{\varepsilon}_3$. Határozzuk meg a benne szereplő hibák deriváltjait:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_3 &= \dot{X}_d - \dot{u}R(\eta)e_3 - u\dot{R}(\eta)e_3 = \dot{X}_d - \dot{u}R(\eta)e_3 - uR(\eta)[\omega \times]e_3, \\ \dot{\varepsilon}_3 &= \dot{\varphi} - \dot{\hat{\varphi}}. \end{aligned}$$

Jelölje ω és $\dot{u}$ előírt értékét ω_d és $\dot{u}_d$. Élünk a következő választással:

$$\dot{u}_d R(\eta)e_3 + u_d R(\eta)[\omega_d \times]e_3 := \dot{X}_d + \delta_3 + \delta_2, \quad (12.48)$$

ahol R argumentumában nem η_d , hanem η szerepel.

Mivel $\omega_d \times e_3 = -e_3 \times \omega_d$, ezért $\dot{u}_d e_3 - e_3 \times (u_d \omega_d) = R^T(\eta)(\dot{X}_d + \delta_3 + \delta_2) \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_d \omega_{d,x} \\ u_d \omega_{d,y} \\ \dot{u}_d \end{pmatrix} = R^T(\eta)(\dot{X}_d + \delta_3 + \delta_2). \quad (12.49)$$

Mivel u_d már meg van választva, ezért $\omega_{d,x}, \omega_{d,y}, \dot{u}_d$ alkalmas megválasztásával a jobb oldal számára tetszőleges érték előírható. Ha ez megtörtént, akkor legyen

$$Y_d := R(\eta)[\dot{u}_d e_3 - e_3 \times (u_d \omega_d)] = \dot{X}_d + \delta_3 + \delta_2. \quad (12.50)$$

Tekintsük ezután δ_3 deriváltját:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_3 &= \dot{X}_d - \dot{u}R(\eta)e_3 - uR(\eta)[\omega \times]e_3 = -\delta_3 - \delta_2 + Y_d - \dot{u}R(\eta)e_3 - uR(\eta)[\omega \times]e_3, \\ \delta_4 &:= Y_d - \dot{u}R(\eta)e_3 - uR(\eta)[\omega \times]e_3, \end{aligned} \quad (12.51)$$

$$\dot{\delta}_3 = -\delta_2 - \delta_3 + \delta_4. \quad (12.52)$$

Vegyük észre, hogy $\omega_{d,z}$ még szabadon megválasztható maradt.

Tekintsük ezután az ε_3 hibakomponenst. Legyen $\dot{\phi}_d$ az előírt yaw-irányú parciális szögsebesség komponens, amelyet válasszunk meg

$$\dot{\phi}_d = \dot{\phi} - \varepsilon_3 \quad (12.53)$$

értéküre, akkor $\dot{\varepsilon}_3 = \dot{\phi} - \dot{\phi} = \dot{\phi} - \dot{\phi}_d - \varepsilon_3$,

$$\varepsilon_4 := \dot{\phi} - \dot{\phi}_d, \quad (12.54)$$

$$\dot{\varepsilon}_3 = -\varepsilon_3 + \varepsilon_4, \quad (12.55)$$

$$\dot{S}_3 = \delta_3^T \dot{\delta}_3 + \varepsilon_3^T \dot{\varepsilon}_3 = -|\delta_3|^2 - \delta_2^T \delta_3 + \delta_3^T \delta_4 - |\varepsilon_3|^2 + \varepsilon_3^T \varepsilon_4. \quad (12.56)$$

Meg kell még azonban mutatni, hogy $\dot{\phi}_d$ vezérelhető a szabadon maradt $\omega_{d,z}$ -vel. Tudjuk, hogy (12.36) alapján

$$\dot{\phi}_d = \frac{S_\psi}{C_\phi} \omega_{d,y} + \frac{C_\psi}{C_\phi} \omega_{d,z}, \quad (12.57)$$

ezért ha

$$0 < \frac{C_\psi}{C_\phi} < \infty \Leftrightarrow \psi, \dot{\psi} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (12.58)$$

teljesül, ami normális repülési módokban igaz, akkor tetszőleges $\dot{\varphi}_d$ beállítható ω_{dz} -vel.

Legyen az újabb két hibát jellemző parciális Ljapunov-függvény $S_4 := (1/2)|\delta_4|^2 + (1/2)|\varepsilon_4|^2$, akkor deriváltja $\dot{S}_4 = \delta_4^T \dot{\delta}_4 + \varepsilon_4^T \dot{\varepsilon}_4$. Határozzuk meg a benne szereplő hibák deriváltjait:

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_4 &= \dot{Y}_d - \ddot{u}R(\eta)e_3 - \dot{u}\dot{R}(\eta)e_3 - \dot{u}R(\eta)[\omega \times]e_3 - u\dot{R}(\eta)[\omega \times]e_3 - uR(\eta)[\dot{\omega} \times]e_3 = \\ &= \dot{Y}_d - \ddot{u}R(\eta)e_3 - 2\dot{u}R(\eta)[\omega \times]e_3 - uR(\eta)[\omega \times][\omega \times]e_3 - uR(\eta)[\dot{\omega} \times]e_3, \\ \dot{\varepsilon}_4 &= \ddot{\varphi} - \ddot{\varphi}_d.\end{aligned}$$

Alkalmazzuk a következő bemenő jel transzformációt:

$$\tilde{w} := K^{-1}\{-\omega \times (K\omega)\} + |Q_{MR}|e_3 - |Q_{TR}|e_2 + w - k_0u, \quad (12.59)$$

akkor az egyszerű

$$\dot{\omega} = \tilde{w} \quad (12.60)$$

alakhoz jutunk. (12.36) deriválásával kapjuk, hogy

$$\ddot{\eta} = -W_\eta^{-1}\dot{W}_\vartheta W_\eta^{-1}\omega + W_\eta^{-1}\dot{\omega} = -W_\eta^{-1}\dot{W}_\vartheta W_\eta^{-1}\omega + W_\eta^{-1}\tilde{w}, \quad (12.61)$$

$$\ddot{\varphi} = e_1\{-W_\eta^{-1}\dot{W}_\vartheta W_\eta^{-1}\omega + W_\eta^{-1}\tilde{w}\} = -e_1 W_\eta^{-1}\dot{W}_\vartheta W_\eta^{-1}\omega + \frac{S_\psi}{C_\vartheta} \tilde{w}_y + \frac{C_\psi}{C_\vartheta} \tilde{w}_z. \quad (12.62)$$

Tekintsük a parciális Ljapunov-függvény deriváltját:

$$\begin{aligned}\dot{S}_4 &= \delta_4^T \{\dot{Y}_d - \ddot{u}R(\eta)e_3 - 2\dot{u}R(\eta)[\omega \times]e_3 - uR(\eta)[\omega \times][\omega \times]e_3 - uR(\eta)[\tilde{w} \times]e_3\} + \\ &+ \varepsilon_4^T \{\ddot{\varphi} - \ddot{\varphi}_d\}.\end{aligned}$$

A következő két elvárást fogalmazzuk meg:

$$\ddot{u}R(\eta)e_3 - uR(\eta)[e_3 \times]\tilde{w} := \dot{Y}_d - 2\dot{u}R(\eta)[\omega \times]e_3 - uR(\eta)[\omega \times][\omega \times]e_3 + \delta_3 + \delta_4, \quad (12.63)$$

$$\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}_d - \varepsilon_3 - \varepsilon_4. \quad (12.64)$$

Ha ezek biztosíthatók, akkor

$$\dot{\delta}_4 = -\delta_3 - \delta_4, \quad (12.65)$$

$$\dot{\varepsilon}_4 = -\varepsilon_3 - \varepsilon_4, \quad (12.66)$$

$$\dot{S}_4 = \delta_4^T \dot{\delta}_4 + \varepsilon_4^T \dot{\varepsilon}_4 = -|\delta_4|^2 - \delta_3^T \delta_4 - |\varepsilon_4|^2 - \varepsilon_3^T \varepsilon_4. \quad (12.67)$$

Be kell még látni, hogy (12.63-64) szimultán kielégíthető alkalmas $\tilde{w}, \tilde{u}$ választással. (12.63) felírható a következő alakban is:

$$\begin{bmatrix} 0 & u & 0 \\ -u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{w}_x \\ \tilde{w}_y \\ \tilde{u} \end{pmatrix} = R^T(\eta) \{ \dot{Y}_d - 2\dot{u}R(\eta)[\omega \times]e_3 - \dot{u}R(\eta)[\omega \times][\omega \times]e_3 + \delta_3 + \delta_4 \}.$$

Látható, hogy $u \neq 0$ esetén a $\tilde{w}_x, \tilde{w}_y, \tilde{u}$ vezérlő jelek a jobb oldal ismeretében egyértelműen meghatározhatók. (12.64) egy másik alakja (12.62) felhasználásával:

$$\frac{C_\psi}{C_\phi} \tilde{w}_z = \ddot{\phi}_d - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + e_1 W_\eta^{-1} \dot{W}_\phi W_\eta^{-1} \omega - \frac{S_\psi}{C_\phi} \tilde{w}_y. \quad (12.68)$$

A jobb oldalon álló tagok mind számíthatók, ezekből $\tilde{w}_z$ egyértelműen meghatározható. Ezért a (12.63-64) feltételek egyszerre kielégíthetők.

Vezessük be az

$$\alpha = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \varepsilon_3, \varepsilon_4)^T \in R^{14} \quad (12.69)$$

állapotváltozót, amely a korábban definiált különféle hibákat tartalmazza irányítás közben. A hibák között $\delta_1 = \xi - \hat{\xi}$ a pozíció hiba, $\varepsilon_3 = \varphi - \hat{\varphi}$ pedig az orientáció yaw-szögének hibája. A rendszer állapotegyenlete a back-stepping módszerrel megtervezett irányítás mellett

$$\dot{\alpha} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m}I_3 & \frac{1}{m}I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m}I_3 & -I_3 & I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_3 & -I_3 & I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_3 & -I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} 0 \\ R(\eta)LK^{-1}w \\ \frac{m+1}{m}R(\eta)LK^{-1}w \\ \frac{2m^2+2m+1}{m^2}R(\eta)LK^{-1}w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12.70)$$

$$\dot{\alpha} = A\alpha + b(\vartheta, w),$$

ahol a jobb oldalon az első tag a fenti levezetések során kapott lineáris dinamika, ha a rotációs mozgásnak a translációs mozgásra kifejtett csatoló hatása elhanyagolható, míg a második tag ezt a perturbációnak felfogható csatoló hatást írja le [5]. Vegyük észre, hogy az α -dinamika utolsó két komponensében nincs perturbáció, és ezért ezek a stabilitás megítélése szempontjából kevésbé fontosak.

Perturbáció nélkül a lineáris rész stabilitását a pozitív definit

$$V = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{2}|\delta_1|^2 + \frac{1}{2}|\delta_2|^2 + \frac{1}{2}|\delta_3|^2 + \frac{1}{2}|\varepsilon_3|^2 + \frac{1}{2}|\delta_4|^2 + \frac{1}{2}|\varepsilon_4|^2 \Rightarrow$$

$$V = \frac{1}{2}|\gamma|^2, \quad \gamma := (|\delta_1|, |\delta_2|, |\delta_3|, |\delta_4|, |\varepsilon_3|, |\varepsilon_4|)^T \in \mathbb{R}^6, \quad (12.71)$$

Ljapunov-függvény biztosítaná, mert az $\dot{S}_1 + \dot{S}_2 + \dot{S}_3 + \dot{S}_4$ összegben az egymást kiejtő tagok (pl. $(1/m)\delta_1^T \delta_2$ az $\dot{S}_1$ -ban és $-(1/m)\delta_1^T \delta_2$ az $\dot{S}_2$ -ban stb.) következtében $\dot{V}$ negatív definit:

$$\dot{V} = -|\delta_1|^2 - |\delta_2|^2 - |\delta_3|^2 - |\varepsilon_3|^2 - |\delta_4|^2 - |\varepsilon_4|^2 = -|\gamma|^2. \quad (12.72)$$

Ha V csökkenése megáll, azaz $\dot{V} = 0$, akkor ebből következik $V = 0$, és ezért az összes hibakomponens eltűnik.

Perturbáció esetén azonban a Ljapunov-függvény nem szükségképpen monoton csökkenő. Legyen a perturbált esetben is $V = (1/2)|\gamma|^2$ a Ljapunov-függvény, akkor

$$\frac{dV}{dt} = \langle \text{grad } V, A\alpha + b(\eta, w) \rangle \leq$$

$$\leq -|\gamma|^2 + \left(|\delta_2| + \frac{m+1}{m}|\delta_3| + \frac{2m^2 + 2m + 1}{m^2}|\delta_4| \right) \|R(\vartheta)LK^{-1}\| |w|. \quad (12.73)$$

Mivel $R(\eta)L$ oszlopai a korlátos $R(\eta)$ orientációs mátrix oszlopai közül kerülnek ki (lásd 2. fejezet), K^{-1} pedig konstans pozitív definit mátrix (az inercia mátrix inverze), ezért létezik σ_0 véges pozitív szám, hogy $\|R(\vartheta)LK^{-1}\| < \sigma_0$. Vezessük be a

$$\pi_0 = (0, 1, (m+1)/m, (2m^2 + 2m + 1)/m^2, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^6 \quad (12.74)$$

jelölést, akkor

$$\dot{V} \leq -|\gamma|^2 + \langle \pi_0, \gamma \rangle \sigma_0 |w|. \quad (12.75)$$

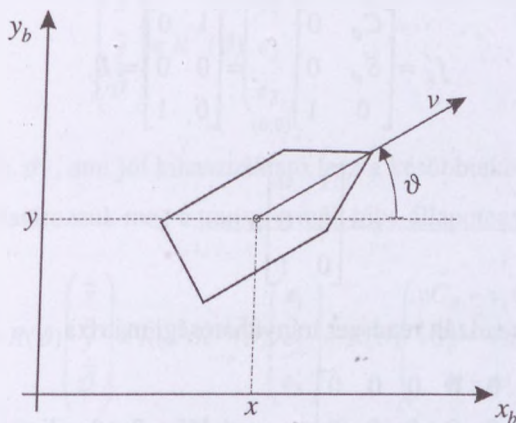
Ha tehát a rotációs mozgást alapvetően befolyásoló $w \in \mathbb{R}^1$ beavatkozó jeleket az

$$\langle \pi_0, \gamma \rangle \sigma_0 |w| \leq |\gamma|^2 \quad (12.76)$$

feltétel betartása mellett választjuk meg, akkor V monoton csökken és állandósult állapotban a hibák megszűnnek.

12.3 Mobilis robot irányítása

Egy kerekeken guruló, kormányozható mobilis robot (mobilis platform) vázlatos felépítését mutatja a 12.8. ábra.



12.8. ábra. Mobilis robot vázlatos felépítése

A mobilis robot tömegközéppontjának koordinátáit jelölje (x, y) a bázis koordináta-rendszerben, orientációját pedig a bázis koordináta-rendszer x_b tengelyéhez képest jelölje ϑ . Legyen a mobilis robot lineáris sebessége v , szögsebessége pedig ω . A mobilis robot kinematikai modellje

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \vartheta \\ \dot{y} &= v \sin \vartheta \\ \dot{\vartheta} &= \omega \end{aligned} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix}}_{\dot{z}} = \begin{bmatrix} C_{\vartheta} & 0 \\ S_{\vartheta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}}_u \Leftrightarrow \dot{z} = G(z)u. \quad (12.77)$$

Feltesszük, hogy az irányítás alacsonyabb hierarchiaszintjén sebesség szabályozások vannak megvalósítva, ezért az irányítás vizsgált szintjén v és ω tekinthetők vezérlő (beavatkozó) jelnek, amelyek alapjelként (referencia jelként) szolgálnak az alacsonyabb hierarchiaszint sebesség szabályozásai számára.

Vizsgáljuk meg, vajon lehet-e a $z=0$, $u=0$ egyensúlyi pont környezetében lineáris állapot-visszacsatolással stabilizálni a mobilis robotot, és ha nem, akkor mi javasolható. Ha a rendszert a $\dot{z} = f(z, u)$ alakban képzeljük el, akkor a $\dot{z} = Az + Bu$ linearizált rendszer a $(0,0)$ egyensúlyi pont környékén a következő módon határozható meg:

$$f(z, u) = \begin{pmatrix} C_\vartheta u_1 \\ S_\vartheta u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow f'_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -S_\vartheta u_1 \\ 0 & 0 & C_\vartheta u_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: A,$$

$$f'_u = \begin{bmatrix} C_\vartheta & 0 \\ S_\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =: B,$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u.$$

Világos, hogy a linearizált rendszer irányíthatósági mátrixa

$$M_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank } M_c = 2 < 3 = \dim z,$$

ezért a mobilis robot még a $(0,0)$ egyensúlyi helyzet környezetében sem stabilizálható állapot-visszacsatolással. Ezért nemlineáris $u = k(z)$, vagy nemlineáris és időben változó $u = k(z, t)$ visszacsatolás javasolható irányítási stratégiaként az egyensúlyi pont körüli helyzetszabályozásra (position control) vagy egy előírt pálya követő szabályozására (tracking control). Mint látni fogjuk, nem biztos, hogy a helyzetszabályozás a követő szabályozás speciális eseteként fogható fel, mert bizonyos stabilitási követelmények az álló (nyugalmi) helyzetet kizárhatják.

12.3.1 Mobilis robot irányítása statikus visszacsatolással

Legyen adott egy referencia robot pályája az

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= v_r C_{\vartheta_r} \\ \dot{y}_r &= v_r S_{\vartheta_r} \\ \dot{\vartheta}_r &= \omega_r \end{aligned} \quad (12.78)$$

alakban, és legyen a szabályozási hiba definíciója

$$\tilde{x} = x - x_r, \quad \tilde{y} = y - y_r, \quad \tilde{\vartheta} = \vartheta - \vartheta_r. \quad (12.79)$$

Vezessük be a következő (globális) hibatranszformációt:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} C_\vartheta & S_\vartheta & 0 \\ -S_\vartheta & C_\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{\vartheta} \end{pmatrix} = R(\vartheta) \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{\vartheta} \end{pmatrix} \quad (12.80)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{\vartheta} \end{pmatrix} = R^T(\vartheta) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

ahol $R(\vartheta) = \text{Rot}^T(z, \vartheta)$, ami jól kihasználható lesz a későbbiekben, mert $R^{-1} = R^T$ és $\dot{R}R^{-1} = [k \times] \omega$. Határozzuk meg a transzformált hiba állapotegyenletét:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{pmatrix} &= \dot{R}(\vartheta) \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{\vartheta} \end{pmatrix} + R(\vartheta) \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \\ \dot{\tilde{\vartheta}} \end{pmatrix} = \dot{R}(\vartheta) R^{-1}(\vartheta) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + R(\vartheta) \begin{pmatrix} vC_\vartheta - v_r C_{\vartheta_r} \\ vS_\vartheta - v_r S_{\vartheta_r} \\ \omega - \omega_r \end{pmatrix} = \\ &= [k \times] \omega \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} C_\vartheta & S_\vartheta & 0 \\ -S_\vartheta & C_\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} vC_\vartheta - v_r C_{\vartheta_r} \\ vS_\vartheta - v_r S_{\vartheta_r} \\ \omega - \omega_r \end{pmatrix} = \\ &= [k \times] \omega \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_\vartheta(vC_\vartheta - v_r C_{\vartheta_r}) + S_\vartheta(vS_\vartheta - v_r S_{\vartheta_r}) \\ -S_\vartheta(vC_\vartheta - v_r C_{\vartheta_r}) + C_\vartheta(vS_\vartheta - v_r S_{\vartheta_r}) \\ \omega - \omega_r \end{pmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v - v_r C_{e_3} \\ v_r S_{e_3} \\ \omega - \omega_r \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12.81)$$

Hajtsunk végre bemenő jel transzformációt is:

$$\begin{aligned} u_1 &:= v - v_r C_{e_3}, \\ u_2 &:= \omega - \omega_r. \end{aligned} \quad (12.82)$$

A transzformált hiba állapotegyenlete a következő alakban adható meg:

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ S_{e_3} \\ 0 \end{pmatrix} v_r + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (12.83)$$

Linearizálás az $e=0, u=0$ egyensúlyi helyzet környékén

Feltesszük, hogy a referencia robot v_r és ω_r sebessége konstans. A (12.38) állapot-egyenletet $\dot{e} = f(e, u)$ alakban elképzelve a linearizálás a következő eredményt adja az $(e, u) = (0, 0)$ egyensúlyi helyzet környékén:

$$f'_e(e, u) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{e_3} v_r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A := \begin{bmatrix} 0 & -\omega_r & 0 \\ \omega_r & 0 & v_r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (12.84)$$

$$f'_u(e, u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =: B. \quad (12.85)$$

Ekkor

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_r & 0 \\ \omega_r & 0 & v_r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_r & 0 \\ \omega_r & 0 & v_r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_r^2 & 0 & -\omega_r v_r \\ 0 & -\omega_r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

felhasználásával a linearizált rendszer $M_c = [B \ AB \ A^2 B]$ irányíthatósági mátrixa

$$M_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\omega_r^2 & -\omega_r v_r \\ 0 & 0 & \omega_r & v_r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (12.86)$$

ezért

$$\text{rank } M_c = 3 = \dim e, \text{ feltéve, hogy } \omega_r \text{ vagy } v_r \text{ nemnulla.} \quad (12.87)$$

Ha (12.87) teljesül (ami csak követő szabályozás esetén lehetséges, álló helyzetben, pl. dokkoláskor nem), akkor lehetséges lineáris állapot-visszacsatolással stabilizálni a mobilis robotot konstans vagy lassan változó referencia robot sebesség esetén.

Lineáris állapot-visszacsatolás

$$\begin{aligned} u_1 &:= -k_1 e_1, \\ u_2 &:= -k_2 \text{sign}(v_r) e_2 - k_3 e_3. \end{aligned} \quad (12.88)$$

A választott állapot-visszacsatolással a zárt rendszer állapotegyenlete $\dot{e}_1 = -\omega_r e_2 - k_1 e_1$, $\dot{e}_2 = \omega_r e_1 + v_r e_3$, $\dot{e}_3 = -k_2 \text{sign}(v_r) e_2 - k_3 e_3$ miatt a következő lesz:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} -k_1 & -\omega_r & 0 \\ \omega_r & 0 & v_r \\ 0 & -k_2 \operatorname{sign}(v_r) & -k_3 \end{bmatrix} e =: \tilde{A}e, \quad (12.89)$$

ahonnan következik

$$sI - \tilde{A} = \begin{bmatrix} s + k_1 & \omega_r & 0 \\ -\omega_r & s & -v_r \\ 0 & k_2 \operatorname{sign}(v_r) & s + k_3 \end{bmatrix},$$

$$\det(sI - \tilde{A}) = (s + k_1)\{s(s + k_3) + k_2|v_r|\} + \omega_r\{\omega_r(s + k_3)\}. \quad (12.90)$$

Válasszuk a következő paramétereket az állapot-visszacsatolásban:

$$k_3 := k_1 := 2\xi a; \quad k_2 := \frac{a^2 - \omega_r^2}{|v_r|}, \quad (12.91)$$

akkor a zárt rendszer karakterisztikus egyenlete a következő lesz:

$$\det(sI - \tilde{A}) = (s + k_1)\{s^2 + k_1s + k_2|v_r| + \omega_r^2\} = (s + 2\xi a)(s^2 + 2\xi a + a^2). \quad (12.92)$$

A zárt rendszernek ezért egy domináns konjugált komplex póluspárja (csillapítása ξ és csillapítatlan sajátfrekvenciája $\omega_0 = a$, valós része $-\xi\omega_0$) és egy ennél gyorsabb valós pólusa lesz ($-2\xi\omega_0$). Vegyük azonban észre, hogy ebben a formában az irányítás a helyzetszabályozás céljára nem alkalmazható, mivel ekkor $v_r = \omega_r = 0$ miatt a linearizált rendszer nem irányítható.

Sebesség skálázás

A fenti problémán a lineáris rendszerek elméletére alapozva kíván segíteni a sebesség skálázás. Ez egyrészt robusztusabbá teszi az irányítást lassan változó ω_r, v_r esetén, másrészt $v_r = \omega_r = 0$ esetén is használható beavatkozást eredményez:

$$a := \sqrt{\omega_r^2 + bv_r^2}, \quad b > 0,$$

$$k_1 := 2\xi\sqrt{\omega_r^2 + bv_r^2},$$

$$k_2 := \frac{a^2 - \omega_r^2}{|v_r|} = \frac{\omega_r^2 + bv_r^2 - \omega_r^2}{|v_r|} = b|v_r|, \quad (12.93)$$

$$k_3 := 2\xi\sqrt{\omega_r^2 + bv_r^2} = k_1.$$

Vegyük észre, hogy az irányítás definiált minden v_r, ω_r esetén, speciálisan $v_r = \omega_r = 0$ esetén $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, és ezért $u_1 = u_2 = 0$, tehát $v = \omega = 0$, ami álló helyzetben az elvárt beavatkozás.

A fenti módszerek a linearizált modellen alapultak, ezért csak lokális stabilitást eredményeznek, és nyitva hagyják, hogyan fog viselkedni a rendszer nagy hiba esetén. Vizsgáljuk ezért meg, nem lehet-e az állapot-visszacsatolás alakját lényegében megtartva, de nemlineárisra téve és kicsit korrigálva rajta, a globális stabilitásról valamit mondani. Erre pozitív válasz adható a Barbalat-lemmára alapozva bizonyos feltételek teljesülése esetén, amelyek azonban kizárják a helyzetszabályozást.

Nemlineáris visszacsatolás

$$\begin{aligned} u_1 &:= -k_1(v_r, \omega_r)e_1, \\ u_2 &:= -k_4 v_r \frac{S_{e_1}}{e_3} e_2 - k_3(v_r, \omega_r)e_3, \end{aligned} \quad (12.94)$$

ahol $k_1(\cdot), k_3(\cdot)$ folytonos és szigorúan pozitív függvények, $k_4 > 0$ konstans. Mint azt később látni fogjuk, a módszer csak

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_r(t) \neq 0 \quad \text{és} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \omega_r(t) \neq 0 \quad (12.95)$$

együttes teljesülése esetén használható (tehát helyzetszabályozás céljára nem).

Legyen a Ljapunov-függvény

$$V(e) = \frac{k_4}{2}(e_1^2 + e_2^2) + \frac{1}{2}e_3^2, \quad (12.96)$$

akkor a transzformált hiba (12.83) *nemlineáris* állapotegyenlete alapján

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= k_4 e_1(-\omega e_2 + u_1) + k_4 e_2(\omega e_1 + v_r S_{e_1}) + e_3 u_2 = \\ &= k_4 e_1(-\omega e_2 - k_1 e_1) + k_4 e_2(\omega e_1 + v_r S_{e_1}) + e_3 \left\{ -k_4 v_r \frac{S_{e_1}}{e_3} e_2 - k_3 e_3 \right\} = (12.97) \\ &= -k_1 k_4 e_1^2 - k_3 e_3^2 \leq 0. \end{aligned}$$

A Barbalat-lemma (lásd 9. fejezet) felhasználásával megmutatható, hogy

$$(v_r^2 + \omega_r^2)e_i \rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad t \rightarrow \infty, \quad (12.98)$$

de ebből csak akkor következik, hogy az $e_i(t)$ hiba tart nullához, ha teljesül (12.95).

12.3.2 Mobilis robot irányítása időben változó dinamikus visszacsatolással

A mobilis robotok irányítására eddig bemutatott módszerek vagy nem tudják a globális stabilitást biztosítani, vagy pedig nem használhatók egyszerre követő és helyszabályozásra. Létezik azonban olyan módszer, amely időben változó dinamikus állapot-visszacsatolással a problémát meg tudja oldani [27].

Induljunk ki a 12.8. ábrán bemutatott mobilis robot (12.77-79) egyenletekkel adott kinematikai modelljéből, a referencia robot pályájából és a szabályozási hiba definíciójából, de vezessünk be egy alkalmasabb hibatranszformációt, amely ugyan bonyolultabb, de előnyösebb irányítástechnikai tulajdonságú transzformált modellt eredményez. Legyen az $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\vartheta})^T \rightarrow (w, z_1, z_2)^T = (w, \tilde{z})^T$ hibatranszformáció a következő:

$$\begin{pmatrix} w \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{\vartheta}C_{\vartheta} + 2S_{\vartheta} & -\tilde{\vartheta}S_{\vartheta} - 2C_{\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ C_{\vartheta} & S_{\vartheta} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{\vartheta} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{\vartheta} \end{pmatrix}. \quad (12.99)$$

Mivel

$$\det A = -2 \text{ és } \text{adj } A = \begin{bmatrix} -S_{\vartheta} & 0 & -\tilde{\vartheta}S_{\vartheta} - 2C_{\vartheta} \\ C_{\vartheta} & 0 & -\tilde{\vartheta}C_{\vartheta} + 2S_{\vartheta} \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

ezért az inverz hibatranszformáció

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}S_{\vartheta} & 0 & \frac{1}{2}(z_1S_{\vartheta} + 2C_{\vartheta}) \\ -\frac{1}{2}C_{\vartheta} & 0 & \frac{1}{2}(z_1C_{\vartheta} - 2S_{\vartheta}) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12.100)$$

Legyen $v_1 := v$ és $v_2 := \omega$. Alkalmazzuk a következő $\bar{v} = (v_1, v_2)^T \rightarrow \bar{u} = (u_1, u_2)^T$ bemenő jel transzformációt:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_2 - v_{2r}, \\ u_2 &= v_1 + (-\tilde{x}S_{\vartheta} + \tilde{y}C_{\vartheta})v_2 - v_{1r}C_{\tilde{\vartheta}}, \end{aligned} \quad (12.101)$$

$$\bar{u} = T^{-1}\bar{v} - \begin{pmatrix} v_{2r} \\ v_{1r}C_{\tilde{\vartheta}} \end{pmatrix}, \text{ ahol } T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tilde{x}S_{\vartheta} + \tilde{y}C_{\vartheta} \end{bmatrix}.$$

Az inverz bemenő jel transzformáció, amely szükséges lesz a realizációhoz, mivel az irányítást $\bar{u}$ -ban fogjuk megtervezni, a következő:

$$\bar{v} = T\bar{u} + T \begin{pmatrix} v_{2r} \\ v_{1r} C_{\vartheta} \end{pmatrix}, \text{ ahol } T = \begin{bmatrix} \tilde{x} S_{\vartheta} - \tilde{y} C_{\vartheta} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12.102)$$

Vegyük észre, hogy $w \in R^1$ és $\bar{z}, \bar{u}, \bar{v} \in R^2$.

Határozzuk meg a mobilis robot transzformált állapotegyenletét:

$$\begin{aligned} w &= (-\tilde{\vartheta} C_{\vartheta} + 2S_{\vartheta})\tilde{x} + (-\tilde{\vartheta} S_{\vartheta} - 2C_{\vartheta})\tilde{y}, \\ z_1 &= \tilde{\vartheta}, \\ z_2 &= C_{\vartheta}\tilde{x} + S_{\vartheta}\tilde{y}, \end{aligned} \quad (12.103a)$$

$$\begin{aligned} \dot{w} &= (-\dot{\tilde{\vartheta}} C_{\vartheta} + \tilde{\vartheta} S_{\vartheta} \dot{\vartheta} + 2C_{\vartheta} \dot{\vartheta})\tilde{x} + (-\dot{\tilde{\vartheta}} C_{\vartheta} + 2S_{\vartheta})\dot{\tilde{x}} + 2S_{\vartheta} \dot{\vartheta} \tilde{x} + \\ &+ (-\dot{\tilde{\vartheta}} S_{\vartheta} - \tilde{\vartheta} C_{\vartheta} \dot{\vartheta} + 2S_{\vartheta} \dot{\vartheta})\tilde{y} + (-\dot{\tilde{\vartheta}} S_{\vartheta} - 2C_{\vartheta})\dot{\tilde{y}}, \end{aligned} \quad (12.103b)$$

$$\dot{z}_1 = \dot{\tilde{\vartheta}},$$

$$\dot{z}_2 = -S_{\vartheta} \dot{\vartheta} \tilde{x} + C_{\vartheta} \dot{\tilde{x}} + C_{\vartheta} \dot{\vartheta} \tilde{y} + S_{\vartheta} \dot{\tilde{y}},$$

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{x}_r = v_1 C_{\vartheta} - v_{1r} C_{\vartheta_r},$$

$$\dot{\tilde{y}} = \dot{y} - \dot{y}_r = v_1 S_{\vartheta} - v_{1r} S_{\vartheta_r}, \quad (12.103c)$$

$$\dot{\tilde{\vartheta}} = \dot{\vartheta} - \dot{\vartheta}_r = v_2 - v_{2r}.$$

(12.103a-c) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\dot{z}_1 = \dot{\tilde{\vartheta}} = v_2 - v_{2r} = u_1,$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= -S_{\vartheta} v_2 \tilde{x} + C_{\vartheta} (v_1 C_{\vartheta} - v_{1r} C_{\vartheta_r}) + C_{\vartheta} v_2 \tilde{y} + S_{\vartheta} (v_1 S_{\vartheta} - v_{1r} S_{\vartheta_r}) = \\ &= v_1 + (-S_{\vartheta} \tilde{x} + C_{\vartheta} \tilde{y}) v_2 - v_{1r} (C_{\vartheta} C_{\vartheta_r} + S_{\vartheta} S_{\vartheta_r}) = \\ &= v_1 + (-S_{\vartheta} \tilde{x} + C_{\vartheta} \tilde{y}) v_2 - v_{1r} C_{\tilde{\vartheta}} = u_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -(v_2 - v_{2r})(C_{\vartheta} \tilde{x} + S_{\vartheta} \tilde{y}) + v_2 (S_{\vartheta} \tilde{x} - C_{\vartheta} \tilde{y}) \tilde{\vartheta} + 2v_2 (C_{\vartheta} \tilde{x} + S_{\vartheta} \tilde{y}) + \\ &+ (-\tilde{\vartheta} C_{\vartheta} + 2S_{\vartheta})(v_1 C_{\vartheta} - v_{1r} C_{\vartheta_r}) + (-\tilde{\vartheta} S_{\vartheta} - 2C_{\vartheta})(v_1 S_{\vartheta} - v_{1r} S_{\vartheta_r}) = \\ &= [-(v_2 - v_{2r}) + 2v_2](C_{\vartheta} \tilde{x} + S_{\vartheta} \tilde{y}) - \\ &- \{v_1 + (-S_{\vartheta} \tilde{x} + C_{\vartheta} \tilde{y}) v_2 - v_{1r} (C_{\vartheta} C_{\vartheta_r} + S_{\vartheta} S_{\vartheta_r})\} \tilde{\vartheta} - \\ &- 2v_{1r} (S_{\vartheta} C_{\vartheta_r} - C_{\vartheta} S_{\vartheta_r}) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= (v_2 - v_{2r})(C_\vartheta \tilde{x} + S_\vartheta \tilde{y}) - \{v_1 + (-S_\vartheta \tilde{x} + C_\vartheta \tilde{y})v_2 - v_{1r}C_\vartheta\}\tilde{\vartheta} + \\
&\quad + 2\{v_{2r}(C_\vartheta \tilde{x} + S_\vartheta \tilde{y}) - v_{1r}S_\vartheta\} = \\
&= u_1 z_2 - u_2 z_1 + 2(v_{2r}z_2 - v_{1r}S_{z_1}).
\end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$J := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ antiszimmetrikus, kvadratikus alakja } \langle J\xi, \xi \rangle = 0, \forall \xi, \quad (12.104a)$$

$$f(\bar{z}) := v_{2r}z_2 - v_{1r}S_{z_1}, \quad (12.104b)$$

akkor a transzformált dinamikus modell a következő egyszerű alakot ölti:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{w}} &= \langle J \bar{u}, \bar{z} \rangle + f(\bar{z}), \\
\dot{\bar{z}} &= \bar{u}.
\end{aligned} \quad (12.105)$$

Írányítási algoritmus

Mérjük $\bar{z}$ hibáját egy később megválasztásra kerülő és időben változó $\bar{z}_d \in R^2$ -höz képest: $\tilde{z} := \bar{z}_d - \bar{z}$. A transzformált beavatkozó jelet időben változó, nemlineáris, dinamikus állapot-visszacsatolással állítjuk elő, amelynek paraméterei ki kell, hogy elégítsék a $k_1, k_2, \alpha_0, \alpha_1 > 0$ és $\min\{k_1, k_2\} > \alpha_1$ feltételeket később indokolandó stabilitási megfontolásokból. Az időben változó

$$\delta_d(t) := \alpha_0 \exp(-\alpha_1 t) \quad (12.106a)$$

fogja okozni az irányítási algoritmusban. Vegyük észre, hogy

$$\dot{\delta}_d(t) = -\alpha_0 \alpha_1 \exp(-\alpha_1 t) \Rightarrow \frac{\dot{\delta}_d(t)}{\delta_d(t)} = -\alpha_1 \text{ konstans.} \quad (12.106b)$$

A szabályozót a következő komponensek alkotják:

$$\begin{aligned}
\bar{u} &:= \bar{u}_a - k_2 \bar{z}, \\
\bar{u}_a &:= \frac{k_1 w + f}{\delta_d^2} J \bar{z}_d + \Omega_1 \bar{z}_d, \\
\dot{\bar{z}}_d &:= \frac{\dot{\delta}_d}{\delta_d} \bar{z}_d + \left(\frac{k_1 w + f}{\delta_d^2} + w \Omega_1 \right) J \bar{z}_d, \\
\|\bar{z}_d(0)\|^2 &:= \delta_d^2(0), \\
\Omega_1 &:= k_2 + \frac{\dot{\delta}_d}{\delta_d} + w \frac{k_1 w + f}{\delta_d^2}.
\end{aligned} \quad (12.107)$$

A dinamikus részt a szabályozóban z_d képviseli, állapotainak száma kettő és időben változó. Problémát okozhatna $\delta_d(t) \rightarrow 0$ miatt, ha az $u(t)$ irányításban az alábbi kritikus jelek nem maradnának korlátosak, ezért a stabilitás mellett ezek korlátosságát is bizonyítani kell:

$$\frac{k_1 w + f}{\delta_d^2} J \bar{z}_d, \frac{w(k_1 w + f)}{\delta_d^2} \bar{z}_d, \frac{w^2(k_1 w + f)}{\delta_d^2} J \bar{z}_d. \quad (12.108)$$

A három kritikus jel közül az első $\bar{u}_a$ -ban, a második Ω_1 -ben és a harmadik $w\Omega_1$ révén $\dot{\bar{z}}_d$ -ban fordul elő.

A dinamikus rész választását a következő motiválja:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \bar{z}_d, \bar{z}_d \rangle &= 2 \langle \bar{z}_d, \dot{\bar{z}}_d \rangle = 2 \langle \bar{z}_d, \frac{\delta_d}{\delta_d} z_d + \left(\frac{k_1 w + f}{\delta_d^2} + w\Omega_1 \right) J \bar{z}_d \rangle = \\ &= 2 \frac{\delta_d}{\delta_d} \langle \bar{z}_d, z_d \rangle, \end{aligned}$$

mivel $w, f, \Omega_1 \in R^1$ és J kvadratikusságát minden változóban, így $\bar{z}_d$ -ben is azonosan nulla. Ezért írható, hogy

$$\frac{d \langle \bar{z}_d, \bar{z}_d \rangle}{\langle \bar{z}_d, \bar{z}_d \rangle} = 2 \frac{\delta_d}{\delta_d} dt = \frac{2 d \delta_d}{\delta_d},$$

ahonnan integrálás után kapjuk, hogy

$$\ln \langle \bar{z}_d(t), \bar{z}_d(t) \rangle - \ln \langle \bar{z}_d(0), \bar{z}_d(0) \rangle = 2 \ln[\delta_d(t)] - 2 \ln[\delta_d(0)],$$

innen pedig következik

$$\|\bar{z}_d(t)\|^2 = \delta_d^2(t) \quad \text{és} \quad \|\bar{z}_d(0)\|^2 = \delta_d^2(0). \quad (12.109)$$

Mivel $f = 2(v_{2r} z_2 - v_{r1} S_{z1})$ és $\bar{z} = \bar{z}_d - \bar{z}$, ezért (12.109) felhasználásával a következő becslés adható:

$$|f| \leq 2\{|v_{2r}| |z_2| + |v_{r1}| |z_1|\} \leq 4\|\bar{v}_r\| \|\bar{z}\| \leq 4\|\bar{v}_r\| (\|\bar{z}_d\| + \|\bar{z}\|). \quad (12.110)$$

A becslést a későbbi vizsgálatoknál fogjuk felhasználni. Tekintsük ezután a zárt szabályozási kört, tehát a transzformált modellt a szabályozási algoritmussal, és használjuk ki (12.109)-et és a J mátrix tulajdonságait, így az antiszimetriát és azt, hogy $J^T = -J$, $J^T J = I$ és $J^2 = -I$.

Zárt szabályozási kör állapotegyenlete

$$\begin{aligned}
 \dot{w} &= \langle J\bar{u}, \bar{z} \rangle + f = \langle J[\bar{u}_a - k_2(\bar{z}_d - \bar{z})], \bar{z}_d - \bar{z} \rangle + f = \\
 &= \langle J\bar{u}_a, \bar{z}_d - \bar{z} \rangle + f = \langle J\bar{z}, \bar{u}_a \rangle - \langle J\bar{z}_d, \bar{u}_a \rangle + f = \\
 &= \langle J\bar{z}, \bar{u}_a \rangle - \langle J\bar{z}_d, \frac{k_1 w + f}{\delta_d^2} J\bar{z}_d + \Omega_1 \bar{z}_d \rangle = \\
 &= \langle J\bar{z}, \bar{u}_a \rangle - \frac{k_1 w + f}{\delta_d^2} \langle J^T J \bar{z}_d, \bar{z}_d \rangle + f = \\
 &= \langle J\bar{z}, \bar{u}_a \rangle - k_1 w,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{z}} &= \dot{\bar{z}}_d - \dot{\bar{z}} = \frac{\delta_d}{\delta_d} \dot{\bar{z}}_d + \left(\frac{k_1 w + f}{\delta_d^2} + w\Omega_1 \right) J\bar{z}_d - \bar{u} = \\
 &= \frac{\delta_d}{\delta_d} \bar{z}_d + \left(\frac{k_1 w + f}{\delta_d^2} + w\Omega_1 \right) J\bar{z}_d - \left[\frac{k_1 w + f}{\delta_d^2} J\bar{z}_d + \Omega_1 \bar{z}_d - k_2(\bar{z}_d - \bar{z}) \right] = \\
 &= -k_2 \bar{z} + wJ \left[\frac{k_1 w + f}{\delta_d^2} J\bar{z}_d + \Omega_1 \bar{z}_d \right] = \\
 &= -k_2 \bar{z} + wJ\bar{u}_a.
 \end{aligned}$$

A $\bar{z}$ állapotváltozóra áttérve a zárt rendszer állapotegyenlete a következő egyszerű alakot ölti:

$$\begin{aligned}
 \dot{w} &= -k_1 w + \langle J\bar{z}, \bar{u}_a \rangle, \\
 \dot{\bar{z}} &= -k_2 \bar{z} + wJ\bar{u}_a.
 \end{aligned} \tag{12.111}$$

Ezután már elvégezhetjük a stabilitásvizsgálatot Ljapunov direkt módszerével. Ehhez egy alkalmas V Ljapunov-függvényt választunk és megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek betartása mellett a nemlineáris rendszer exponenciálisan stabilis lesz.

Stabilitásvizsgálat

$$V := \frac{1}{2} w^2 + \frac{1}{2} \langle \bar{z}, \bar{z} \rangle,$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= w\dot{w} + \langle \bar{z}, \dot{\bar{z}} \rangle = w(-k_1 w + \langle J\bar{z}, \bar{u}_a \rangle) + \langle \bar{z}, -k_2 \bar{z} + wJ\bar{u}_a \rangle = \\
 &= -k_1 w^2 - k_2 \langle \bar{z}, \bar{z} \rangle \leq \\
 &\leq -\min\{k_1, k_2\} 2V,
 \end{aligned}$$

$$\frac{dV}{V} \leq -2 \min\{k_1, k_2\} dt \Rightarrow \ln V(t) - \ln V(0) \leq -2 \min\{k_1, k_2\} t,$$

$$V(t) \leq V(0) \exp(-2 \min\{k_1, k_2\} t). \quad (12.112)$$

Legyen $\psi := (w, \tilde{z}^T)^T \in R^3$, akkor $V = \|\psi\|^2 / 2$, és ezért gyököt vonva

$$\|\psi(t)\| \leq \|\psi(0)\| \exp(-\min\{k_1, k_2\} t). \quad (12.113)$$

Következmény:

- i) $w(t), \tilde{z}(t) \in L_\infty$.
- ii) $\tilde{z} = \bar{z}_d - \bar{z}$ és $\|\bar{z}_d(t)\| = |\delta_d(t)| \in L_\infty \Rightarrow \bar{z}_d, \bar{z} \in L_\infty$.
- iii) $\bar{z}(t), w(t) \in L_\infty \Rightarrow A^{-1}(t) \in L_\infty \Rightarrow \tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{\vartheta}(t) \in L_\infty$.
- iv) (12.109), (12.110), (12.113) és $\delta_d(t) = \alpha_0 \exp(-\alpha_1 t)$ miatt $\min\{k_1, k_2\} > \alpha_1$ esetén léteznek alkalmasan megválasztott $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3 > 0$ konstansok, hogy teljesül

$$\left\| \frac{k_1 w + f}{\delta_d^2} J \bar{z}_d \right\| \leq \xi_0 \exp\{-[\min\{k_1, k_2\} - \alpha_1] t\},$$

$$\left\| \frac{w(k_1 w + f)}{\delta_d^2} \bar{z}_d \right\| \leq \xi_2 \exp\{-[2 \min\{k_1, k_2\} - \alpha_1] t\},$$

$$\left\| \frac{w^2(k_1 w + f)}{\delta_d^2} J \bar{z}_d \right\| \leq \xi_3 \exp\{-[3 \min\{k_1, k_2\} - \alpha_1] t\},$$

következésképp $\bar{u}_d(t), \dot{\bar{z}}_d(t), \Omega_1(t), \bar{u}(t) \in L_\infty$.

- v) Feltehető, hogy $\bar{v}_r(t) \in L_\infty$, ezért a fentiek alapján és a T mátrix alakja miatt $\bar{v}(t) \in L_\infty$ is teljesül, amiből következik, hogy $\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{\vartheta}(t) \in L_\infty$.
- vi) $\|\bar{z}\| \leq \|\tilde{z}\| + \|\bar{z}_d\| \leq \|\psi(0)\| \exp(-\min\{k_1, k_2\} t) + \alpha_0 \exp(-\alpha_1 t)$ miatt létezik $\gamma_0 > 0$, hogy $|\tilde{x}(t)|, |\tilde{y}(t)|, |\tilde{\vartheta}(t)| \leq \beta_0 \exp(-\gamma_0 t)$, ahol β_0 kezdeti állapot függő és γ_0 nem függ a kezdeti állapottól.

Összefoglalva megállapítható, hogy a rendszer exponenciálisan stabilis, és az összes jel a rendszerben és a szabályozóban korlátos marad. Az irányítási törvény mind helyszetszabályozás, mind követő szabályozás esetén alkalmazható. A módszer továbbfejleszthető [27], kis módosítással a dinamikus modellre alapozva is megadható hasonló elvű globálisan stabilis irányítás.

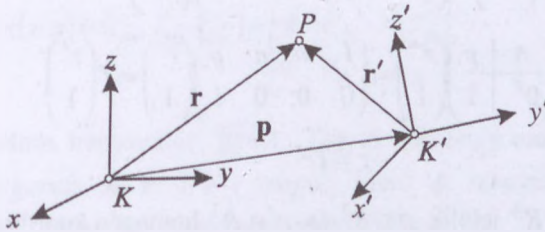
FÜGGELÉK

F1. FIZIKAI RENDSZEREK KINEMATIKAI ÉS DINAMIKAI ALAPJAI

Ebben a függelékben összefoglaljuk a fizikai rendszerek (robotok, repülőgépek, helikopterek stb.) kinematikai modelljeiben szerepet játszó különféle orientáció jellemzéseket, a pozíció és orientáció leírását homogén transzformációval, a tehetetlenségi mátrix fogalmát és a dinamikus modell felállításánál fontos szerepet játszó Lagrange-, Appell- és Newton–Euler-egyenleteket.

F1.1 Kinematikai alapfogalmak

Tekintsünk két derékszögű koordináta-rendszert (keretet), jelölje ezeket K és K' , és legyenek a bázisvektoraik rendre i, j, k és i', j', k' (lásd F1.1. ábra).



F1.1. ábra. Keret koncepció

Határozzuk meg a koordináta-rendszerek vektorai közötti kapcsolatot:

$$\begin{aligned} r' &= \rho'_x i' + \rho'_y j' + \rho'_z k', \\ i' &= a_{11}i + a_{21}j + a_{31}k, \\ j' &= a_{12}i + a_{22}j + a_{32}k, \\ k' &= a_{13}i + a_{23}j + a_{33}k, \\ p &= p_x i + p_y j + p_z k, \end{aligned} \tag{F1.1}$$

$$\begin{aligned} r &= \rho_x i + \rho_y j + \rho_z k = r' + p = (a_{11}\rho'_x + a_{12}\rho'_y + a_{13}\rho'_z + p_x)i + \\ &+ (a_{21}\rho'_x + a_{22}\rho'_y + a_{23}\rho'_z + p_y)j + (a_{31}\rho'_x + a_{32}\rho'_y + a_{33}\rho'_z + p_z)k. \end{aligned}$$

Ezek az összefüggések mátrix alakban is felírhatók:

$$\begin{pmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{felírva az} \\ i, j, k \text{ bázisban}}} \begin{pmatrix} \rho'_x \\ \rho'_y \\ \rho'_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad (\text{F1.2})$$

$$r = Ar' + p \quad (\text{F1.3})$$

Hozzávéve ehhez az $1=1$ azonosságot, a K és K' keretek közötti A orientáció változást és a keretek origója közötti p pozíció vektort összevonhatjuk egy T homogén transzformációban:

$$\begin{pmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p_x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & p_y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho'_x \\ \rho'_y \\ \rho'_z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{F1.4})$$

$$\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A & p \\ \hline 0^T & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} r' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l & m & n & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r' \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r' \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{F1.5})$$

$$r = Tr'. \quad (\text{F1.6})$$

Itt $r \in R^4$ és $r' \in R^4$ jelölik $\rho \in R^3$ és $\rho' \in R^3$ homogén koordinátáit.

A T homogén transzformáció két fontos jelentéssel rendelkezik:

- i) T megadja K' orientációját és pozícióját K -hoz képest.
- ii) T lehetővé teszi a P pont koordinátáinak meghatározását K -ban, ha ismerjük a koordinátáit K' -ben.

Célszerű a T homogén transzformációt indexekkel ellátni annak kihangsúlyozására, hogy a K' -höz tartozó l, m, n, p komponenseit a K bázisában kell megadni: $T_{K,K'}$. Jól látható, hogy az indexek sorrendje az értelmezésben lényeges.

Homogén transzformációk egymásutánja a homogén transzformációk szorzatával írható le:

$$T_1 T_2 = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & p_1 \\ \hline 0^T & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A_2 & p_2 \\ \hline 0^T & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1 A_2 & A_1 p_2 + p_1 \\ \hline 0^T & 1 \end{array} \right]. \quad (\text{F1.7})$$

F1.1.1 Az orientáció jellemzése forgatásokkal

Tekintsük először csak az *orientáció* megváltozását. Tegyük fel, hogy eredetileg K és K' egybeestek, és K valamelyik tengelye körül K' el lett forgatva φ szöggel, és tekintsük az elforgatás utáni állapotot. A továbbiakban az összefüggések egyszerűsítése érdekében bevezetjük a következő konvenciót a jelölésekre:

$$C_\varphi := \cos \varphi, \quad S_\varphi := \sin \varphi, \quad C_{\alpha\beta} := \cos(\alpha + \beta), \quad C_{12} := \cos(q_1 + q_2) \text{ stb.} \quad (\text{F1.8})$$

Akkor (F1.2) szerint az elemi forgatások (rotation) következők lesznek:

$$\text{Rot}(z, \varphi) = \underbrace{\begin{pmatrix} i'_{\text{rot}} & j'_{\text{rot}} & k'_{\text{rot}} \end{pmatrix}}_{\text{kifejezve } i, j, k\text{-ban}} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\varphi & -S_\varphi & 0 \\ S_\varphi & C_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{F1.9})$$

$$\text{Rot}(y, \varphi) = \begin{pmatrix} i'_{\text{rot}} & j'_{\text{rot}} & k'_{\text{rot}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_\varphi & 0 & S_\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\varphi & 0 & C_\varphi \end{bmatrix} \quad (\text{F1.10})$$

$$\text{Rot}(x, \varphi) = \begin{pmatrix} i'_{\text{rot}} & j'_{\text{rot}} & k'_{\text{rot}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\varphi & -S_\varphi \\ 0 & S_\varphi & C_\varphi \end{bmatrix} \quad (\text{F1.11})$$

Legyen t általános irányvektor, $\|t\|=1$. Tegyük fel, hogy eredetileg K és K' egybeestek, és forgassuk el K' -t a t tengely körül φ szöggel. A forgatás egy $\mathcal{R}ot(t, \varphi)$ lineáris transzformáció, amelynek mátrixa $\text{Rot}(t, \varphi)$:

$$x^{\text{rot}} = \mathcal{R}ot(t, \varphi)x = x \cos \varphi + t \langle t, x \rangle (1 - \cos \varphi) + t \times x \sin \varphi \quad (\text{F1.12})$$

$$\text{Rot}(t, \varphi) = C_\varphi I + (1 - C_\varphi)[t \circ t] + S_\varphi [t \times]. \quad (\text{F1.13})$$

Az összefüggés neve *Rodriguez-képlet*. Felhasználván a $[t \circ t]$ diadikus szorzat és a $[t \times]$ vektorszorzat mátrixának alakját (lásd könyv I. kötet F1. függelék [1]),

$$\begin{aligned} \text{Rot}(t, \varphi) &= \begin{pmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{pmatrix} = C_\varphi I + (1 - C_\varphi)[t \circ t] + S_\varphi [t \times] = \\ &= \begin{bmatrix} C_\varphi + (1 - C_\varphi)t_x t_x & (1 - C_\varphi)t_x t_y - S_\varphi t_z & (1 - C_\varphi)t_x t_z + S_\varphi t_y \\ (1 - C_\varphi)t_x t_y + S_\varphi t_z & C_\varphi + (1 - C_\varphi)t_y t_y & (1 - C_\varphi)t_y t_z - S_\varphi t_x \\ (1 - C_\varphi)t_x t_z - S_\varphi t_y & (1 - C_\varphi)t_y t_z + S_\varphi t_x & C_\varphi + (1 - C_\varphi)t_z t_z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{F1.14})$$

A forgatás inverze a visszaforgatás, tehát a forgatás t körül $-\varphi$ szöggel. Tudjuk, hogy az (F1.14) egyenletben szereplő $[t \circ t]$ szimmetrikus, $[t \times]$ antiszimmetrikus, $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ és $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$, ezért

$$[Rot(t, \varphi)]^{-1} = [Rot(t, \varphi)]^T. \quad (F1.15)$$

Ortonormált derékszögű koordináta-rendszerek esetén tehát az A orientációs mátrix inverze az A transzponáltja, és emiatt a T homogén transzformáció inverze is egyszerűen számítható:

$$A^{-1} = A^T \quad (F1.16)$$

$$T = \left[\begin{array}{c|c} A & p \\ \hline 0^T & 1 \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A^T & -A^T p \\ \hline 0^T & 1 \end{array} \right]. \quad (F1.17)$$

Az A orientációs rész a T homogén transzformációban $3 \times 3 = 9$ elemet tartalmaz. Ezek azonban nem függetlenek, mert i', j', k' egy ortonormált bázis, tehát $\|i'\| = \|j'\| = \|k'\| = 1$ és $\langle i', j' \rangle = \langle i', k' \rangle = \langle j', k' \rangle = 0$, ami 6 feltételt definiál a 9 elemre, és ezért az orientáció $9 - 6 = 3$ szabad paraméterrel jellemezhető. A Rodriguez-képlet esetén ez t és φ , ahol t egységvektor, és ezért csak 2 paramétere szabad.

A Rodriguez-képletén kívül az orientációnak más jellemzései is gyakoriak. Ha adott K és K' , és az origók közösek, akkor vehetjük K -nak egy másik példányát, és ebből kiindulva elemi forgatások sorozatával eljuthatunk K' -be. A másodpéldány elforgatott tengelyeit jelölhetjük vesszővel és kétvesszővel, a forgatások szögeit pedig rendre φ, ϑ, ψ -vel. A *robotikában* megszokott terminológiát használva beszélhetünk *Euler-szögekről*, ha z, y', z'' a forgástengelyek, és *roll, pitch, yaw* (RPY) szögekről, ha a forgástengelyek z, y', x'' . E szerint a konvenció szerint

$$\begin{aligned} A_{K,K'} &= Euler(\varphi, \vartheta, \psi) = Rot(z, \varphi) Rot(y', \vartheta) Rot(z'', \psi) = \\ &= \begin{bmatrix} C_\varphi & -S_\varphi & 0 \\ S_\varphi & C_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\vartheta & 0 & S_\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\vartheta & 0 & C_\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C_\varphi C_\vartheta C_\psi - S_\varphi S_\psi & -C_\varphi C_\vartheta S_\psi - S_\varphi C_\psi & C_\varphi S_\vartheta \\ S_\varphi C_\vartheta C_\psi + C_\varphi S_\psi & -S_\varphi C_\vartheta S_\psi + C_\varphi C_\psi & S_\varphi S_\vartheta \\ -S_\vartheta C_\psi & S_\vartheta S_\psi & C_\vartheta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (F1.18)$$

$$\begin{aligned}
A_{K,K'} &= RPY(\varphi, \vartheta, \psi) = Rot(z, \varphi) Rot(y', \vartheta) Rot(x'', \psi) = \\
&= \begin{bmatrix} C_\varphi & -S_\varphi & 0 \\ S_\varphi & C_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\vartheta & 0 & S_\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\vartheta & 0 & C_\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\psi & -S_\psi \\ 0 & S_\psi & C_\psi \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} C_\varphi C_\vartheta & C_\varphi S_\vartheta S_\psi - S_\varphi C_\psi & C_\varphi S_\vartheta C_\psi + S_\varphi S_\psi \\ S_\varphi C_\vartheta & S_\varphi S_\vartheta S_\psi + C_\varphi C_\psi & S_\varphi S_\vartheta C_\psi - C_\varphi S_\psi \\ -S_\vartheta & C_\vartheta S_\psi & C_\vartheta C_\psi \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{F1.19}$$

F1.1.2 Az orientáció jellemzése kvaterniókkal

Az orientáció jellemezhető *kvaterniókkal* is. A kvaterniók (Q) a háromdimenziós vektortér (R^3) kiterjesztését alkotják, amelyben szorzás (*), összeadás, számmal szorzás, konjugált és norma van definiálva. Legyen $q \in Q$, $w \in R^3$, $s, \alpha \in R^1$, akkor definíció szerint

$$\begin{aligned}
q &= (w, s) \\
\alpha q &= (\alpha w, \alpha s) \\
q_1 + q_2 &= (w_1, s_1) + (w_2, s_2) = (w_1 + w_2, s_1 + s_2) \\
q_1 * q_2 &= (w_1 \times w_2 + s_1 w_2 + s_2 w_1, s_1 s_2 - \langle w_1, w_2 \rangle) \\
\bar{q} &= (-w, s) \\
\|q\|^2 &= q * \bar{q} = (0, \|w\|^2 + s^2) = \bar{q} * q.
\end{aligned} \tag{F1.20}$$

Az alkalmazások szempontjából talán a legfontosabb tulajdonság, hogy

$$\|q_1 * q_2\| = \|q_1\| \cdot \|q_2\|. \tag{F1.21}$$

Mivel $s \in R^1$ és $(0, s) \in Q$, továbbá $w \in R^3$ és $(w, 0) \in Q$ azonosíthatók, ezért R^1 és R^3 be van ágyazva Q -ba. A kvaternió norma multiplikatív tulajdonsága alapján

$$\min_{\|q\|=1} \|q * r * \bar{q}\| = \min_{\|q\|=1} (\|q * r\| \cdot \|q\|) = \min_{\|q\|=1} \|q * r\| \tag{F1.22}$$

A kvaterniók és az A orientáció szoros kapcsolatban állnak. Minden A rotáció a Rodriguez-képlet szerint egy t egységvektor körüli φ szöggel való forgatás:

$$Ar = \cos \varphi \, r + (1 - \cos \varphi) \langle t, r \rangle r + \sin \varphi \, t \times r. \tag{F1.23}$$

Másrészt viszont bevezethetjük a

$$q := \left(\sin \frac{\varphi}{2} t, \cos \frac{\varphi}{2} \right) \quad (\text{F1.24})$$

kvaterniót ($\|q\| = \|t\| = 1$), ahonnan a Rodriguez-képlet felhasználásával kapjuk, hogy

$$q * (r, 0) * \bar{q} = (Ar, 0), \quad (\text{F1.25})$$

ezért $q * r * \bar{q}$ és Ar azonosíthatók. Világos, hogy ha az orientációt a $q = (w, s)$ kvaternióval jellemezzük, akkor ennek ismeretében A meghatározható, mert

$$\varphi = 2 \arccos(s), \quad t = w / \sin(\frac{\varphi}{2}) \Rightarrow A = C_\varphi I + (1 - C_\varphi)[t \circ t] + S_\varphi[t \times], \quad (\text{F1.26})$$

ahol

$$[t \circ t] = \begin{bmatrix} t_x t_x & t_x t_y & t_x t_z \\ t_y t_x & t_y t_y & t_y t_z \\ t_z t_x & t_z t_y & t_z t_z \end{bmatrix} \quad (\text{F1.27})$$

$$[t \times] = \begin{bmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{F1.28})$$

F1.1.3 Az inverz orientációs feladat megoldása

Ha szükség van az A orientáció

$$A = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} \quad (\text{F1.29})$$

numerikus ismeretében az orientáció forgatásokkal való jellemzésének meghatározására (inverz orientációs feladat), akkor a három szokásos jellemzés esetén a következőképp járhatunk el.

Az inverz Rodriguez-feladat megoldása:

$$\begin{aligned} C_\varphi &= \frac{l_x + m_y + n_z - 1}{2} \\ S_\varphi &= \frac{+\sqrt{(m_z - n_y)^2 + (n_x - l_z)^2 + (l_y - m_x)^2}}{2} \\ \varphi &= \text{atan2}(S_\varphi, C_\varphi) \in (-\pi, \pi] \end{aligned} \quad (\text{F1.30a})$$

$$\begin{aligned}
 t_x &= \sqrt{\frac{l_x - C_\varphi}{1 - C_\varphi}} \operatorname{sign}(m_z - n_y) \\
 t_y &= \sqrt{\frac{m_y - C_\varphi}{1 - C_\varphi}} \operatorname{sign}(n_x - l_z) \\
 t_z &= \sqrt{\frac{n_z - C_\varphi}{1 - C_\varphi}} \operatorname{sign}(l_y - m_x)
 \end{aligned} \tag{F1.30b}$$

A feladatnak végtelen sok megoldása van, ha $\varphi = 0$ ($C_\varphi = 1$). Valóban, nulla forgásszög esetén bármilyen t tengely megfelel.

Az inverz Euler-feladat megoldása:

$$i) \quad n_x^2 + n_y^2 \neq 0 \Rightarrow S_\vartheta \neq 0$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{n_y}{n_x}\right) + \begin{cases} 0 \\ \pi \\ -\pi \end{cases} \in (-\pi, \pi], \tag{F1.31a}$$

$$\left. \begin{aligned} S_\vartheta &= C_\varphi n_x + S_\varphi n_y \\ C_\vartheta &= n_z \end{aligned} \right\} \vartheta = \arctan \frac{C_\varphi n_x + S_\varphi n_y}{n_z}, \tag{F1.31b}$$

$$\left. \begin{aligned} S_\psi &= -S_\varphi l_x + C_\varphi l_y \\ C_\psi &= -S_\varphi m_x + C_\varphi m_y \end{aligned} \right\} \psi = \arctan \frac{-S_\varphi l_x + C_\varphi l_y}{-S_\varphi m_x + C_\varphi m_y}. \tag{F1.31c}$$

$$ii) \quad n_x = n_y = 0 \Rightarrow S_\vartheta = 0, \text{ szinguláris konfiguráció}$$

$$a) \quad n_z = C_\vartheta = 1 \Rightarrow \vartheta = 0 \quad (z = z')$$

$$\left. \begin{aligned} C_{\varphi\psi} &= l_x \\ S_{\varphi\psi} &= l_y \end{aligned} \right\} \varphi + \psi = \arctan\left(\frac{l_y}{l_x}\right) \Rightarrow \text{csak } \varphi + \psi \text{ határozható meg} \tag{F1.32}$$

$$b) \quad n_z = C_\vartheta = -1 \Rightarrow \vartheta = \pi \quad (z = -z')$$

$$\left. \begin{aligned} S_{\psi-\varphi} &= m_x \\ C_{\psi-\varphi} &= m_y \end{aligned} \right\} \psi - \varphi = \arctan\left(\frac{m_x}{m_y}\right) \Rightarrow \text{csak } \psi - \varphi \text{ határozható meg} \tag{F1.33}$$

Másrészt alkalmazható a Rodriguez-formula $i + di$, $j + dj$, $k + dk$ számára. Figyelembe véve, hogy $d\varphi$ kicsi, ezért például i esetén írható, hogy

$$i + di = i + d\varphi t \times i. \quad (\text{F1.42})$$

Definiáljuk az ω szögsebességet a következő módon:

$$\omega := \frac{t d\varphi}{dt} = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k = {}^0\omega_x i_0 + {}^0\omega_y j_0 + {}^0\omega_z k_0, \quad (\text{F1.43})$$

akkor

$$\begin{aligned} i' &= \omega \times i, \\ j' &= \omega \times j, \\ k' &= \omega \times k, \end{aligned} \quad (\text{F1.44})$$

$$[\omega \times] = A^{-1} A' \text{ és } [{}^0\omega \times] = A' A^{-1}. \quad (\text{F1.45})$$

Tekintsük most a P pontot, akkor r pozíciója, r' sebessége és r'' gyorsulása rendre

$$\begin{aligned} r_x i_0 + r_y j_0 + r_z k_0 &= \rho_x i + \rho_y j + \rho_z k + p_x i_0 + p_y j_0 + p_z k_0 \\ r'_x i_0 + r'_y j_0 + r'_z k_0 &= \rho'_x i + \rho'_y j + \rho'_z k + \rho_x i' + \rho_y j' + \rho_z k' + \\ &\quad + p'_x i_0 + p'_y j_0 + p'_z k_0 \\ r''_x i_0 + r''_y j_0 + r''_z k_0 &= \rho''_x i + \rho''_y j + \rho''_z k + 2(\rho'_x i' + \rho'_y j' + \rho'_z k') + \\ &\quad + \rho_x i'' + \rho_y j'' + \rho_z k'' + p''_x i_0 + p''_y j_0 + p''_z k_0. \end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelöléseket: $r = (r_x, r_y, r_z)^T$, $r' = (r'_x, r'_y, r'_z)^T$, ..., $p'' = (p''_x, p''_y, p''_z)^T$, akkor

$$\begin{aligned} r &= A\rho + p, \\ r' &= A\rho' + A'\rho + p', \\ r'' &= A\rho'' + 2A'\rho' + A''r + p'', \end{aligned} \quad (\text{F1.46})$$

ahol r és p koordinátái K_0 -ban, ρ koordinátái pedig K -ban vannak kifejezve.

Mivel $AA^{-1} = I \Rightarrow A'A^{-1} + A(A^{-1})' = 0, \Rightarrow (A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$, ezért

$$\begin{aligned} [\omega \times]' &= (A^{-1}A')' = (A^{-1})'A' + A^{-1}A'' = -A^{-1}A'A^{-1}A' + A^{-1}A'' = \\ &= -[\omega \times][\omega \times] + A^{-1}A'', \end{aligned} \quad (\text{F1.47})$$

$$\begin{aligned}\varepsilon &:= \dot{\omega}_x' i + \dot{\omega}_y' j + \dot{\omega}_z' k + \omega_x' i' + \omega_y' j' + \omega_z' k' = \dot{\omega}_x' i + \dot{\omega}_y' j + \dot{\omega}_z' k + \omega \times \omega \\ &= \dot{\omega}_x' i + \dot{\omega}_y' j + \dot{\omega}_z' k,\end{aligned}\quad (\text{F1.48})$$

ahol ε a szöggyorsulás. A P pont r' sebessége és r'' gyorsulása kifejezhető a mozgó K koordináta-rendszerben is:

$$A^{-1}r' = \rho' + A^{-1}A'\rho + A^{-1}p' = \rho' + \omega \times \rho + A^{-1}p', \quad (\text{F1.49})$$

$$\begin{aligned}A^{-1}r'' &= \rho'' + 2A^{-1}A'\rho + A^{-1}A''\rho + A^{-1}p'' = \\ &= \rho'' + 2\omega \times \rho' + \varepsilon \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho) + A^{-1}p''.\end{aligned}\quad (\text{F1.50})$$

Legyen $v_K := A^{-1}p'$, $a_K := A^{-1}p''$, $\omega_K := \omega$ és $\varepsilon_K := \varepsilon$ rendre K origójának sebessége, gyorsulása, szögsebessége és szöggyorsulása, akkor a P pont v_p sebességére és a_p gyorsulására teljesül

$$v_p = v_K + \omega_K \times \rho + \rho', \quad (\text{F1.51})$$

$$a_p = a_K + \varepsilon_K \times \rho + \omega_K \times (\omega_K \times \rho) + \rho'' + 2\omega_K \times \rho'. \quad (\text{F1.52})$$

Speciálisan, ha P egy merev test pontja, akkor $\rho' = \rho'' = 0$, $\omega_p = \omega_K$, $\varepsilon_p = \varepsilon_K$, és az összefüggés egyszerűbb alakot ölt.

F1.3 Merev testek inercia jellemzői

Tekintsük a $[\rho \times]^T [\rho \times]$ kifejezést:

$$\begin{aligned}[\rho \times]^T [\rho \times] &= \begin{bmatrix} 0 & \rho_z & -\rho_y \\ -\rho_z & 0 & \rho_x \\ \rho_y & -\rho_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \rho_y^2 + \rho_z^2 & -\rho_x \rho_y & -\rho_x \rho_z \\ -\rho_x \rho_y & \rho_x^2 + \rho_z^2 & -\rho_y \rho_z \\ -\rho_x \rho_z & -\rho_y \rho_z & \rho_x^2 + \rho_y^2 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (\text{F1.53})$$

Ha ρ az $[s]$ szegmens (merev test) egy tetszőleges pontja és dm a hozzá tartozó infinitezimális tömeg, akkor a $\mathcal{H}x := \int \rho \times (\rho \times x) dm$ lineáris transzformáció az inercia tenzor, amelynek pozitív definit mátrixa a $\mathbf{K}$ tehetetlenségi vagy inercia mátrix. (Az inercia mátrixot 'bold' $\mathbf{K}$ -val jelöljük a könyvnek ebben a részében, hogy elkerüljük az ütközést a koordináta-rendszer K jelölésével. Az I vagy J je-

lölést nem használjuk, mert ezek az egységmátrixot és a robot Jacobi-mátrixát jelölik. A könyv más részein a 'bold' $\mathbf{K}$ jelölést már elhagyjuk. A koordináta-rendszereket az ábrákon bekarikázott K -val jelöltük).

$$\mathbf{K} := \int_{[s]} [\boldsymbol{\rho} \times]^T [\boldsymbol{\rho} \times] dm = \begin{bmatrix} K_x & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{xy} & K_y & K_{yz} \\ K_{xz} & K_{yz} & K_z \end{bmatrix}, \quad (\text{F1.54})$$

ahol

$$K_x = \int_{[s]} (\rho_y^2 + \rho_z^2) dm, \quad (\text{F1.55})$$

$$K_{xy} = - \int_{[s]} \rho_x \rho_y dm, \quad (\text{F1.56})$$

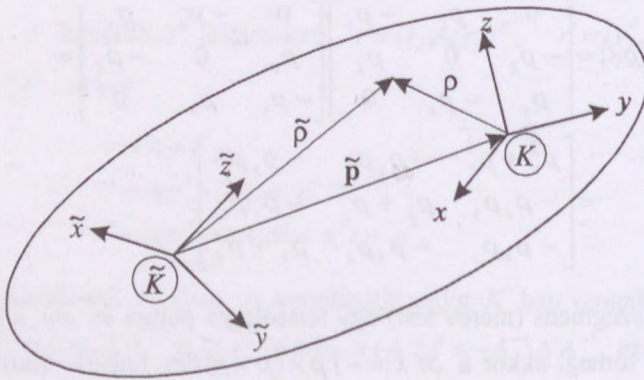
rendre az x tengelyre és az $[x, y]$ síkra vonatkozó tehetetlenségi (inercia) nyomaték, és $\mathbf{K}$ többi elemei hasonló módon vannak definiálva. (Megjegyezzük, hogy az irodalomban szokás a főátlón kívüli elemeket $-K_{xy}$, $-K_{xz}$, $-K_{yz}$ módon is jelölni.)

A tömeg és a tömegközéppont (center of mass) értelmezése

$$m = \int_{[s]} dm \quad \text{és} \quad m \rho_c = \int_{[s]} \rho dm. \quad (\text{F1.57})$$

Az $m \rho_c$ szorzatot szokás első momentumnak is nevezni.

Legyen K és $\tilde{K}$ két ortonormált koordináta-rendszer. Vizsgáljuk meg, hogyan függ a tehetetlenségi mátrix a vonatkoztatási pont (a koordináta-rendszer origójának) megválasztásától, lásd F1.3. ábra.



F1.3. ábra. Az inerciamátrix transzformációja

Mivel $\tilde{\rho} = \tilde{p} + \rho$ koordináta független alakban és

$$\begin{aligned} [\tilde{\rho} \times] [\tilde{\rho} \times] &= [(\tilde{p} + \rho) \times] [(\tilde{p} + \rho) \times] = \\ &= [\tilde{p} \times] [\tilde{p} \times] + [\tilde{p} \times] [\rho \times] + [\rho \times] [\tilde{p} \times] + [\rho \times] [\rho \times], \end{aligned}$$

ezért integrálás után a *Huygeno–Steiner-képlethez* jutunk, amelynek tenzor alakja

$$\mathcal{H}_{\tilde{p}} = \mathcal{H}_{\rho} - m[\tilde{p} \times][\tilde{p} \times] - [\tilde{p} \times][m\rho_c \times] - [m\rho_c \times][\tilde{p} \times], \quad (\text{F1.58})$$

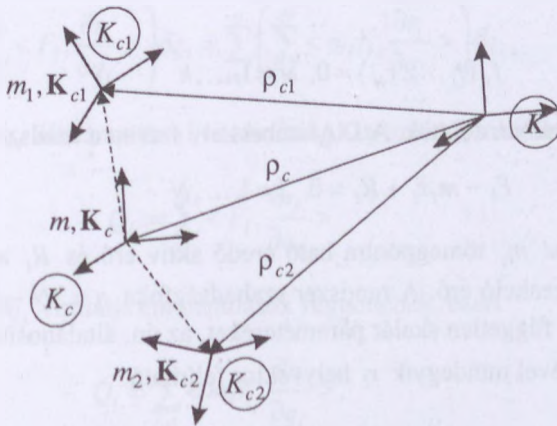
mátrix alakja pedig

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\tilde{p}} &= A_{\tilde{K}\tilde{K}} \mathbf{K}_{\rho} A_{\tilde{K}\tilde{K}}^T - m[\tilde{p} \times][\tilde{p} \times] - \\ &- [\tilde{p} \times][m A_{\tilde{K}\tilde{K}} \rho_c \times] - [(m A_{\tilde{K}\tilde{K}} \rho_c) \times][\tilde{p} \times]. \end{aligned} \quad (\text{F1.59})$$

Speciálisan, ha a koordináta-rendszer $K := K_c$ a tömegközéppontba van helyezve és $\tilde{K} := K$ egy tetszőleges koordináta-rendszer, akkor $m\rho_c = \int \rho \, dm = 0$, $\tilde{p} := \rho_c$,

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= A_{K,K_c} \mathbf{K}_{K_c} A_{K,K_c}^T - m[\rho_c \times][\rho_c \times] = \\ &= A_{K,K_c} \mathbf{K}_{K_c} A_{K,K_c}^T + m\|\rho_c\|^2 I - m[\rho_c \circ \rho_c], \end{aligned} \quad (\text{F1.60})$$

ami lehetővé teszi a koordináta-rendszer origójához tartozó inerciamátrix ($\mathbf{K}$) kiszámítását, ha ismeretes a tömegközéppont (ρ_c) és a tömegközépponthoz tartozó inerciamátrix ($\mathbf{K}_{K_c}$). Bár a K_c keret origója a tömegközéppontban van, az x_c, y_c, z_c tengelyek nem szükségszerűen a főtengelyek.



F1.4. ábra. Összetett rendszer eredő tehetetlenségi mátrixa

Alkalmazzuk ezt az eredményt két merev testből álló összetett rendszerre, lásd F1.4. ábra. Legyenek a két merev test inercia jellemzői $m_1, \rho_{c1}, \mathbf{K}_{c1}$ és $m_2, \rho_{c2}, \mathbf{K}_{c2}$, ahol az inercia mátrixok a merev testek tömegközéppontjához rögzített K_{ci} keretben vannak megadva. (A K keret robot esetén lehet például a Denavit–Hartenberg-keret, a két merev test a szegmens, valamint a szegmensre szerelt és a következő szegmenst mozgató motor.) A tömegközéppontok legyenek adottak K -ban. Feltesszük, hogy a K és K_c koordináta-rendszerek párhuzamosak. Alkalmazzuk a (F1.60) összefüggést rendre a $K_{c1}, K_c, \rho_{c1} - \rho_c, A_{K_c, K_{c1}} = A_{K, K_{c1}}$ és $K_{c2}, K_c, \rho_{c2} - \rho_c, A_{K_c, K_{c2}} = A_{K, K_{c2}}$ választás mellett.

Az eredő rendszer jellemezhető az $m, \rho_c, \mathbf{K}_c$ inercia jellemzőkkel:

$$m = m_1 + m_2 \text{ és } \rho_c = \frac{m_1 \rho_{c1} + m_2 \rho_{c2}}{m_1 + m_2}, \quad (\text{F1.61})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_c = & A_{K, K_{c1}} \mathbf{K}_{c1} A_{K, K_{c1}}^T - m_1 [(\rho_{c1} - \rho_c) \circ (\rho_{c1} - \rho_c)] + m_1 \|\rho_{c1} - \rho_c\|^2 I + \\ & + A_{K, K_{c2}} \mathbf{K}_{c2} A_{K, K_{c2}}^T - m_2 [(\rho_{c2} - \rho_c) \circ (\rho_{c2} - \rho_c)] + m_2 \|\rho_{c2} - \rho_c\|^2 I. \end{aligned} \quad (\text{F1.62})$$

F1.4 Lagrange-, Appell- és Newton–Euler-egyenletek

Tekintsünk egy N tömegpontból álló rendszert. Legyen az l -edik tömegpont tömege m_l és helyvektora r_l . Legyenek az $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N}$ koordináták révén adottak a helyvektorok egy rögzített ortonormált koordináta-rendszerben. Feltesszük, hogy a koordináták k holonóm és stacionárius korlátozásnak tesznek eleget, amelyek

$$f_v(r_1, \dots, r_N) = 0, \quad v = 1, \dots, k \quad (\text{F1.63})$$

skalár egyenlet alakban adottak. A D’Alambert-elv szerint a rendszer dinamikáját

$$F_l - m_l \ddot{r}_l + R_l = 0, \quad l = 1, \dots, N \quad (\text{F1.64})$$

írja le, ahol F_l az m_l tömegpontra ható eredő aktív erő és R_l a korlátozásoknak megfelelő eredő reakció erő. A rendszer szabadságfoka $n = 3N - k$. Ezért definiálhatunk $q_1, \dots, q_n$ független skalár paramétereket, az ún. általánosított koordinátákat, amelyek segítségével mindegyik r_l helyvektor felírható

$$r_l = r_l(q_1, \dots, q_n), \quad l = 1, \dots, N \quad (\text{F1.65})$$

alakban.

A mozgásegyenletek levezetéséhez alkalmazzuk a virtuális munka elvét. Legyen x a rendszer pozíciója a t időpillanatban. Ha x' egy lehetséges másik pozíciója a rendszernek ugyanebben a t időpillanatban, akkor $\delta x = x' - x$ elmozdulás hatására a rendszer x -ből x' -be hozható. A δx elmozdulást virtuális elmozdulásnak nevezzük, szemben a dt idő hatására bekövetkező dx elmozdulással, ahol az erők és korlátozások megváltozhatnak. Adjunk a rendszernek virtuális elmozdulást, és szorozzuk meg az egyenleteket a hozzá tartozó δr_l -lel, akkor kapjuk, hogy

$$\langle F_l - m_l \ddot{r}_l + R_l, \delta r_l \rangle = 0, \quad l = 1, \dots, N, \quad (\text{F1.66})$$

és összegzés után

$$\sum_{l=1}^N \langle F_l - m_l \ddot{r}_l + R_l, \delta r_l \rangle = 0. \quad (\text{F1.67})$$

Feltételezzük, hogy a korlátozások ideálisak, ezért

$$\sum_{l=1}^N \langle R_l, \delta r_l \rangle = 0, \quad (\text{F1.68})$$

$$\sum_{l=1}^N \langle F_l - m_l \ddot{r}_l, \delta r_l \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{l=1}^N \langle F_l, \delta r_l \rangle = \sum_{l=1}^N \langle m_l \ddot{r}_l, \delta r_l \rangle. \quad (\text{F1.69})$$

Következik (F1.65)-ből, hogy

$$\delta r_l = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r_l}{\partial q_i} \delta q_i, \quad (\text{F1.70})$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{l=1}^N \langle F_l, \frac{\partial r_l}{\partial q_i} \rangle \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{l=1}^N \langle m_l \ddot{r}_l, \frac{\partial r_l}{\partial q_i} \rangle \right) \delta q_i. \quad (\text{F1.71})$$

Definiáljuk a q_i általánosított koordinátához tartozó Q_i általánosított erőt

$$Q_i := \sum_{l=1}^N \langle F_l, \frac{\partial r_l}{\partial q_i} \rangle \quad (\text{F1.72})$$

alapján. Mivel a δq_i virtuális elmozdulások függetlenek, ezért

$$Q_i = \sum_{l=1}^N \langle m_l \ddot{r}_l, \frac{\partial r_l}{\partial q_i} \rangle, \quad (\text{F1.73})$$

ami felfogható egy absztrakt fizikai elvnek is.

F1.4.1 Lagrange-egyenlet

Az N tömegpontból álló rendszer kinetikus energiája

$$K = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m_l \dot{r}_l^2. \quad (\text{F1.74})$$

Mivel (F1.65) szerint

$$\dot{r}_l = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r_l}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad \text{és} \quad \frac{\partial \dot{r}_l}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial r_l}{\partial q_i}, \quad (\text{F1.75})$$

$$\ddot{r}_l = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial r_l}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 r_l}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j \right\}, \quad (\text{F1.76})$$

ezért

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{l=1}^N \left\langle m_l \dot{r}_l, \frac{\partial \dot{r}_l}{\partial \dot{q}_i} \right\rangle = \sum_{l=1}^N \left\langle m_l \dot{r}_l, \frac{\partial r_l}{\partial q_i} \right\rangle \quad (\text{F1.77})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{l=1}^N \left\langle m_l \ddot{r}_l, \frac{\partial r_l}{\partial q_i} \right\rangle + \sum_{l=1}^N \left\langle m_l \dot{r}_l, \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 r_l}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j \right\rangle \quad (\text{F1.78})$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_i} = \sum_{l=1}^N \left\langle m_l \dot{r}_l, \frac{\partial \dot{r}_l}{\partial q_i} \right\rangle = \sum_{l=1}^N \left\langle m_l \dot{r}_l, \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 r_l}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j \right\rangle. \quad (\text{F1.79})$$

Felhasználjuk, hogy sima függvény esetén a vegyes másodrendű parciális deriváltakra teljesül

$$\frac{\partial^2 x_v}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 x_v}{\partial q_j \partial q_i},$$

ezért

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} = \sum_{l=1}^N \left\langle m_l \ddot{r}_l, \frac{\partial r_l}{\partial q_i} \right\rangle = Q_i. \quad (\text{F1.80})$$

Az összefüggés érvényes összekapcsolt rendszerek esetén is az integrál tulajdonsága alapján. A q_i általánosított koordináta-hoz tartozó Q_i általánosított erő felbontható a τ_i meghajtó nyomatékra (erőre) és a $P(q)$ potenciális energia hatására, amely utóbbi $-\partial P / \partial q_i$. Ezért bevezethetjük a K kinetikus energiát, a P potenciális energiát, az $L = K - P$ Lagrange-függvényt és a τ_i meghajtó nyomatékot (erőt), amelynek segítségével a következő összefüggéshez jutunk:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \text{ Lagrange-egyenlet.} \quad (\text{F1.81})$$

Tekintsünk egy merev testet a hozzá rögzített koordináta-rendszerrel. Legyen a merev test origójának sebessége v és szögsebessége ω , akkor a merev test tetszőleges ρ helyvektorú pontja esetén

$$\begin{aligned} \langle v_\rho, v_\rho \rangle &= \langle v + \omega \times \rho, v + \omega \times \rho \rangle = \\ &= \langle v, v \rangle + 2 \langle v, \omega \times \rho \rangle + \langle \omega \times \rho, \omega \times \rho \rangle = \\ &= \langle v, v \rangle + 2 \langle \rho, v \times \omega \rangle + \langle [\rho \times]^T [\rho \times] \omega, \omega \rangle, \end{aligned}$$

és ezért a merev test K kinetikus energiájára teljesül

$$K = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle + m \frac{1}{2} \langle K \omega, \omega \rangle + \langle m \rho_c, v \times \omega \rangle, \quad (\text{F1.82})$$

ahol ρ_c a tömegközéppontja és K az inercia mátrixa a merev testnek, amely a merev testhez rögzített keret origójához tartozik. Ha a keret origója egybeesik a tömegközépponttal, azaz $\rho_c = 0$, akkor a merev test kinetikus energiája

$$K = \frac{1}{2} \langle v_c, v_c \rangle + m \frac{1}{2} \langle K_c \omega, \omega \rangle, \quad (\text{F1.83})$$

ahol $v_c = v + \omega \times \rho_c$ a tömegközéppont sebessége és K_c a tömegközépponthoz tartozó inercia mátrix.

F1.4.2 Appell-egyenlet

A "gyorsulás" energia vagy Gibbs-függvény N tömegpont esetén

$$G = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m_l \ddot{r}_l^2. \quad (\text{F1.84})$$

Mivel (F1.76) szerint

$$\frac{\partial \ddot{r}_l}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial r_l}{\partial q_i}, \quad (\text{F1.85})$$

és

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{l=1}^N \langle m_l \ddot{r}_l, \frac{\partial \ddot{r}_l}{\partial \dot{q}_i} \rangle = \sum_{l=1}^N \langle m_l \ddot{r}_l, \frac{\partial r_l}{\partial q_i} \rangle, \quad (\text{F1.86})$$

ezért (F1.73) alapján a következő egyszerű alakú Appell-egyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_i} = Q_i, \quad (\text{F1.87})$$

vagy

$$\frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i} = \tau_i. \quad (\text{F1.88})$$

Tekintsük a $\langle a_\rho, a_\rho \rangle$ kifejezést, akkor

$$\begin{aligned} \langle a_\rho, a_\rho \rangle &= \langle a + \varepsilon \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho), a + \varepsilon \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho) \rangle = \\ &= \langle a, a \rangle + \langle [\rho \times]^T [\rho \times] \varepsilon, \varepsilon \rangle + 2 \langle \rho, a \times \varepsilon \rangle + 2 \langle \rho, [\omega \times][\omega \times] a \rangle - \\ &\quad - 2 \langle \varepsilon, ([\rho \times]^T [\rho \times] \omega) \times \omega \rangle + \dots, \end{aligned}$$

ahol a nem részletezett tagok nem függenek $\ddot{q}$ -től. Ezért vehetjük a következő egyszerűsített Gibbs-függvényt:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2} \langle a, a \rangle + m + \frac{1}{2} \langle \mathbf{K} \varepsilon - 2(\mathbf{K} \omega) \times \omega, \varepsilon \rangle + \\ &\quad + \langle m \rho_c, a \times \varepsilon + \omega \times (\omega \times a) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{F1.89})$$

Speciálisan, ha a merev testhez rögzített koordináta-rendszer origója a tömegközéppontban van, akkor $\rho_c = 0$ és

$$G = \frac{1}{2} \langle a_c, a_c \rangle + m + \frac{1}{2} \langle \mathbf{K}_c \varepsilon - 2(\mathbf{K}_c \omega) \times \omega, \varepsilon \rangle, \quad (\text{F1.90})$$

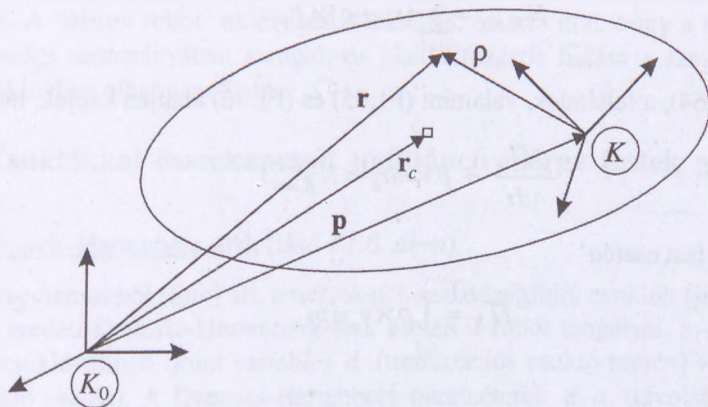
ahol $a_c = a + \varepsilon \times \rho_c + \omega \times (\omega \times \rho_c)$ a tömegközéppont gyorsulása és $\mathbf{K}_c$ a tömegközépponthoz tartozó inercia mátrix.

F1.4.3 Newton–Euler-egyenlet

Legyen K_0 és K rendre egy inercia keret és egy merev testhez rögzített, vele együtt mozgó keret. Legyen p a K_0 origójából a K origójába mutató pozíció vektor. Merev test helyett először tömegpontokból álló rendszert tekintünk, lásd F1.5. ábra.

A tömegpontokból álló rendszerre alkalmazható (F1.64) és vehető a következő összeg:

$$\sum_{l=1}^N m_l \ddot{r}_l = \sum_{l=1}^N F_l + \sum_{l=1}^N R_l. \quad (\text{F1.91})$$


 F1.5. ábra. Rögzített K_0 és mozgó K keret

Alkalmazván a Newton- és az Euler-elvet feltehető, hogy a *belső erők összege és a belső erők bármely pontra vett nyomatékának összege nulla*. Legyen a külső erők összege F_{ext} . Jelölje m és r_c az eredő tömeget és a tömegközéppontot, akkor (F1.91)-ből következik a Newton-egyenlet:

$$m\ddot{r}_c = F_{\text{ext}}. \quad (\text{F1.92})$$

Definiálja a perdületet (angular moment)

$$\Pi_K = \sum_{l=1}^N (r_l - p) \times m_l \dot{r}_l, \quad (\text{F1.93})$$

akkor

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_K}{dt} &= \sum_{l=1}^N (\dot{r}_l - \dot{p}) \times m_l \dot{r}_l + \sum_{l=1}^N (r_l - p) \times m_l \ddot{r}_l = \\ &= -\dot{p} \times \sum_{l=1}^N m_l \dot{r}_l + \sum_{l=1}^N (r_l - p) \times m_l \ddot{r}_l = \\ &= -\dot{p} \times m\dot{r}_c + \sum_{l=1}^N (r_l - p) \times m_l \ddot{r}_l, \end{aligned} \quad (\text{F1.94})$$

$$\frac{d\Pi_K}{dt} + \dot{p} \times m\dot{r}_c = \sum_{l=1}^N (r_l - p) \times m_l \ddot{r}_l. \quad (\text{F1.95})$$

Jelölje $N_{K,\text{ext}}$ a külső erők eredő nyomatékát:

$$N_{K,\text{ext}} = \sum_{l=1}^N (r_l - p) \times F_l, \quad (\text{F1.96})$$

akkor (F1.64), a feltételek, valamint (F1.95) és (F1.96) alapján kapjuk, hogy

$$\frac{d\Pi_K}{dt} + \dot{p} \times m\dot{r}_c = N_{K,\text{ext}}. \quad (\text{F1.97})$$

Merev test esetén

$$\Pi_K = \int_{[s]} \rho \times v_\rho dm, \quad (\text{F1.98})$$

ezért

$$\begin{aligned} \rho \times v_\rho &= \rho \times (v + \omega \times \rho) = \rho \times v + \rho \times (\omega \times \rho) = \\ &= \rho \times v - \rho \times (\rho \times \omega), \end{aligned}$$

felhasználásával írhatjuk, hogy

$$\Pi_K = m\rho_c \times v + \mathbf{K}\omega. \quad (\text{F1.99})$$

Felhasználván az integrál tulajdonságait, a mozgó koordináta-rendszerekben érvényes differenciálási szabályt és a (F1.97) összefüggést, kapjuk, hogy

$$\frac{d\Pi_K}{dt} = mv_c \times v + m\dot{r}_c \times a + \mathbf{K}\varepsilon + \omega \times (\mathbf{K}\omega), \quad (\text{F1.100})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_K}{dt} + v \times mv_c &= mv_c \times v + m\rho_c \times a + \mathbf{K}\varepsilon + \omega \times (\mathbf{K}\omega) + v \times mv_c = \\ &= \mathbf{K}\varepsilon + \omega \times (\mathbf{K}\omega) + m\rho_c \times a, \end{aligned} \quad (\text{F1.101})$$

$$\mathbf{K}\varepsilon + \omega \times (\mathbf{K}\omega) + m\rho_c \times a = N_{K,\text{ext}}. \quad (\text{F1.102})$$

Speciálisan, ha a K keret origója a tömegközéppontban van, akkor $\rho_c = 0$, és a következő Euler-egyenletet kapunk:

$$\mathbf{K}_c \varepsilon + \omega \times (\mathbf{K}_c \omega) = N_{K,\text{ext}}. \quad (\text{F1.103})$$

F1.5 Robotok kinematikai modellje

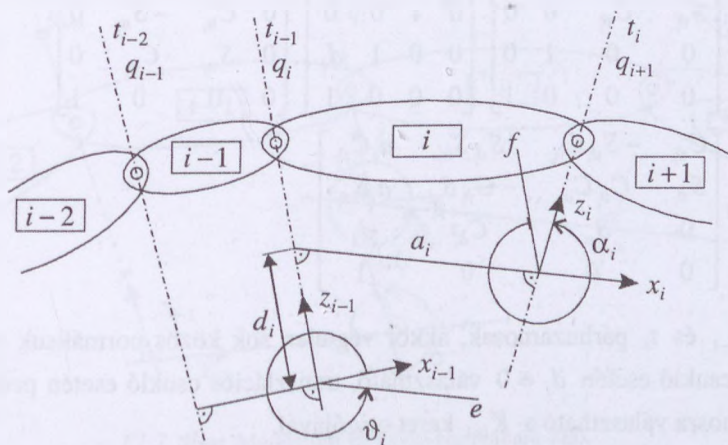
Számos, a gyakorlatban elterjedt ipari robot ún. nyíltláncú, elágazás nélküli merev robot, amelynek geometriai modelljét legtöbbször a Denavit–Hartenberg-alakkal írjuk le. A klasszikus eredeti Denavit–Hartenberg-alak mellett, elsősorban a dinami-

kus modell egyszerűsítése érdekében a módosított Denavit–Hartenberg-alakot is használják. A "merev robot" elnevezés idealizálás, és arra utal, hogy a robot garantált pontossági tartományában a rugalmas alakváltozások hatása a szegmensekben vagy a csuklókban elhanyagolható.

F1.5.1 Csuklókkal összekapcsolt nyíltláncú merev testek geometriai modellje

Eredeti Denavit–Hartenberg-alak (lásd F1.6. ábra)

A robot szegmensekből (link) áll, amelyeket 1-szabadságfokú csuklók (joint) kötnek össze. Az eredeti Denavit–Hartenberg-alak esetén a robot tengelyei z -tengely irányúak. A csuklótérő (joint variable) d (transzlációs csukló esetén) vagy ϑ (rotációs csukló esetén). A Denavit–Hartenberg-paraméterek d, a (távolság) és ϑ, α (szög).



F1.6. ábra. Eredeti Denavit–Hartenberg-alak

Tegyük fel, hogy a K_{i-1} keretet már felvettük. Az F1.6. ábrába berajzoltuk a z_{i-1} és x_{i-1} tengelyeket, ahol z_{i-1} iránya azonos az $[i-1]$ és az $[i]$ szegmenst összekötő t_{i-1} csuklótengely (joint axis) irányával. Legyen t_i az i -edik és az $i+1$ -edik szegmenst összekötő csuklótengely iránya. Legyen a K_i keret x_i tengelye merőleges a t_{i-1} és t_i tengelyekre. Legyen K_i origója az a pont, ahol x_i és t_i metszi egymást. Legyen e párhuzamos x_{i-1} -vel és menjen át K_{i-1} origóján, és legyen f párhuzamos z_{i-1} -gyel és menjen át K_i origóján. Akkor kitérő t_{i-1} és t_i tengelyek esetén

- i) ϑ_i a z_{i-1} tengely körüli forgatás szöge, amely az x_{i-1} tengelyt e -be forgatja ($e \parallel x_i$);
- ii) d_i az eltolás a z_{i-1} tengely mentén, amely az e egyenest x_i -be mozgatja;
- iii) a_i az eltolás az x_i tengely mentén, amely z_{i-1} és x_i metszéspontját K_i origójába mozgatja;
- iv) α_i az x_i tengely körüli forgatás, amely az f egyenest z_i -be forgatja.

A távolságok előjele pozitív, ha az eltolás $+z_{i-1}$ vagy $+x_i$ irányban történik. Hasonlóan a forgásszög pozitív, ha a forgatás z_{i-1} vagy x_i körül a jobb-csavar szabály szerint pozitív. A K_{i-1} és K_i közötti homogén transzformáció

$$\begin{aligned}
 T_{i-1,i} &= Rot(z, \vartheta_i) \cdot Trans(z, d_i) \cdot Trans(x, a_i) \cdot Rot(x, \alpha_i) = \\
 &= \begin{bmatrix} C_{\vartheta_i} & -S_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ S_{\vartheta_i} & C_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\alpha_i} & -S_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C_{\vartheta_i} & -S_{\vartheta_i} C_{\alpha_i} & S_{\vartheta_i} S_{\alpha_i} & a_i C_{\vartheta_i} \\ S_{\vartheta_i} & C_{\vartheta_i} C_{\alpha_i} & -C_{\vartheta_i} S_{\alpha_i} & a_i S_{\vartheta_i} \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{F1.104}
 \end{aligned}$$

Ha t_{i-1} és t_i párhuzamosak, akkor végtelen sok közös normálisuk van. Ekkor rotációs csukló esetén $d_i = 0$ választható, translációs csukló esetén pedig K_i origója azonosra választható a K_{i+1} keret origójával.

Ha t_{i-1} és t_i metszik egymást, akkor választható $a_i = 0$, és x_i párhuzamos $k_{i-1} \times k_i$ irányával.

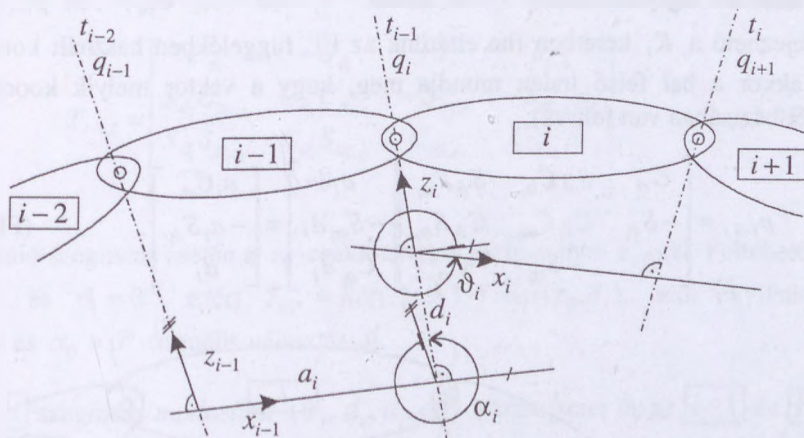
A $\square$ szegmens esetén z_0 egybeesik a t_0 tengellyel és x_0 merőleges z_0 -ra.

Az utolsó, $\overline{m}$ szegmens esetén z_m iránya tetszőleges és x_m merőleges a z_{m-1} és z_m irányokra.

Néhány speciális esetben (Descartes-féle TTT pozicionálás első x tengelye, vagy RPY orientáció utolsó x tengelye esetén) előnyösebb lehet, ha nem a z , hanem az x tengelyt választjuk azonosnak a csuklótengellyel. A $T_{i-1,i}$ homogén transzformáció továbbra is érvényben marad, de a csuklótávozót a_i vagy α_i lesz.

Módosított Denavit–Hartenberg-alak (lásd F1.7. ábra)

Robotirányítási szoftverek, különösen azok pályatervezéssel kapcsolatos részei gyakran használják az eredeti Denavit–Hartenberg-alakot. Mindazonáltal a dinamikus modell felállításához a módosított Denavit–Hartenberg-alak előnyösebb lehet [2]. A fő különbség, hogy a módosított Denavit–Hartenberg-alak esetén a K_i keret origója az $[i]$ szegmenst mozgató (most) t_i -vel jelölt csuklón helyezkedik el. A saját csukló tengely a z_i tengely, és az x_i tengely merőleges a z_i és z_{i+1} tengelyekre. Ez egyszerűsíti a dinamikus modell számítását, különösen ha a Newton–Euler-módszert használjuk, mert a τ_i meghajtó nyomaték közvetlenül az $[i]$ szegmensre ható f_i reakcióerő vagy n_i reakciónyomaték projekciója a t_i tengely irányára.



F1.7. ábra. Módosított Denavit–Hartenberg-alak

A módosított Denavit–Hartenberg-paraméterek a F1.7. ábra szerint vannak definiálva. Vegyük észre, hogy a t_i csuklótengely a K_i kerethez van rögzítve (ami változást jelent a tengelyek indexelésében az eredeti Denavit–Hartenberg-alakhoz képest). A szomszédos szegmensek közötti homogén transzformáció

$$T_{i-1,i} = \text{Trans}(x_{i-1}, a_i) \cdot \text{Rot}(x_{i-1}, \alpha_i) \cdot \text{Trans}(z_i, d_i) \cdot \text{Rot}(z_i, \vartheta_i) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\alpha_i} & -S_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{\vartheta_i} & -S_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ S_{\vartheta_i} & C_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

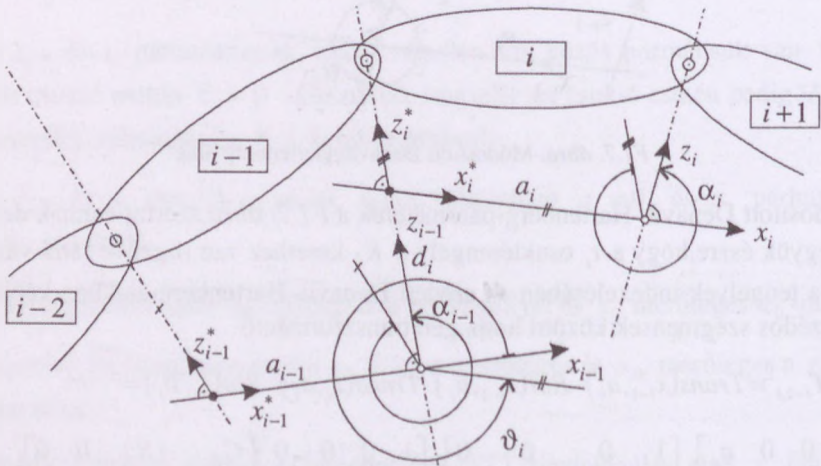
$$T_{i-1,i} = \begin{bmatrix} C_{\vartheta_i} & -S_{\vartheta_i} & 0 & a_i \\ S_{\vartheta_i} C_{\alpha_i} & C_{\vartheta_i} C_{\alpha_i} & -S_{\alpha_i} & -S_{\alpha_i} d_i \\ S_{\vartheta_i} S_{\alpha_i} & C_{\vartheta_i} S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{F1.105})$$

Vegyük észre, hogy $p_{i-1,i}$ a következő alakban dekomponálható:

$$p_{i-1,i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} a_i + \begin{pmatrix} 0 \\ -S_{\alpha_i} \\ C_{\alpha_i} \end{pmatrix} d_i, \quad (\text{F1.106})$$

ahol a második tag párhuzamos t_i -vel, mivel ${}^{i-1}t_i = (0 \ -S_{\alpha_i} \ C_{\alpha_i})^T$, és $p_{i-1,i}$ szintén kifejezhető a K_i keretben (ha eltérünk az F1. függelékben használt konvencióktól, akkor a bal felső index mondja meg, hogy a vektor melyik koordináta-rendszer bázisában van felírva):

$${}^i p_{i-1,i} = \begin{bmatrix} C_{\vartheta_i} & S_{\vartheta_i} C_{\alpha_i} & S_{\vartheta_i} S_{\alpha_i} \\ -S_{\vartheta_i} & C_{\vartheta_i} C_{\alpha_i} & C_{\vartheta_i} S_{\alpha_i} \\ 0 & -S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ -S_{\alpha_i} d_i \\ C_{\alpha_i} d_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i C_{\vartheta_i} \\ -a_i S_{\vartheta_i} \\ d_i \end{bmatrix}. \quad (\text{F1.107})$$



F1.8. ábra. Kapcsolat a K_{i-1}^* és K_i^* keretek között

Annak érdekében, hogy feltárjuk a kapcsolatot az eredeti és a módosított Denavit–Hartenberg-paraméterek között, bevezetjük a K_{i-1}^* és K_i^* kereteket a F1.8. ábrának megfelelően. Megmutatható, hogy a kapcsolat a K_{i-1}^* és K_i^* keretek között hasonló a módosított Denavit–Hartenberg-alak struktúrájához. A homogén transzformáció K_{i-1}^* és K_i^* között a következő:

$$\begin{aligned}
 T_{i-1,i} &= \text{Trans}(x_{i-1}, a_i) \cdot \text{Rot}(x_{i-1}, \alpha_i) \cdot \text{Trans}(z_i, d_i) \cdot \text{Rot}(z_i, \vartheta_i) = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\alpha_{i-1}} & -S_{\alpha_{i-1}} & 0 \\ 0 & S_{\alpha_{i-1}} & C_{\alpha_{i-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\vartheta_i} & -S_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ S_{\vartheta_i} & C_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 T_{i-1,i} &= \begin{bmatrix} C_{\vartheta_i} & -S_{\vartheta_i} & 0 & a_{i-1} \\ S_{\vartheta_i} C_{\alpha_{i-1}} & C_{\vartheta_i} C_{\alpha_{i-1}} & -S_{\alpha_{i-1}} & -S_{\alpha_{i-1}} d_i \\ S_{\vartheta_i} S_{\alpha_{i-1}} & C_{\vartheta_i} S_{\alpha_{i-1}} & C_{\alpha_{i-1}} & C_{\alpha_{i-1}} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{F1.108})
 \end{aligned}$$

Az induló szegmens esetén a z_0 csuklótengely párhuzamos z_1^* -gal. Feltehető, hogy $x_0 \parallel x_1$ és $\vartheta_1 = 0^\circ$, ezért $T_{01^*} = \text{Rot}(z_0, \vartheta_1) \cdot \text{Trans}(z_0, d_1)$, ami ekvivalens az $a_0 = 0$ és $\alpha_0 = 0^\circ$ formális választással.

Az $[i]$ szegmens módosított $\{\vartheta_i, d_i, a_i, \alpha_i\}$ paraméterei és az $[i-1]$ és $[i]$ szegmensek eredeti $(\vartheta_i, d_i, a_{i-1}, \alpha_{i-1})$ paraméterei azonosak. Ennek megfelelően, ha egy algoritmus a módosított Denavit–Hartenberg-alakon alapul, akkor a következő lehetőségeink vannak:

- 1) használhatjuk $T_{i-1,i}$ a módosított Denavit–Hartenberg-alakját és a K_i kerethez tartozó $m_i, m_i \rho_{ci}, K_i$ inercia paramétereket, vagy
- 2) használhatjuk a $T_{(i-1)^*,i^*}$ homogén transzformációt, amelyet az eredeti Denavit–Hartenberg-alakból vezettünk le, és a K_{i^*} keretre redukált $m_i, m_i \rho_{ci}^*, K_{i^*}$ inercia paramétereket.

A F1.1 és F1.2 táblázatok a módosított és az eredeti paraméterek közötti kapcsolatot mutatják be SCARA és PUMA robotok esetén.

F1.1 táblázat. A SCARA robot módosított Denavit–Hartenberg-paraméterei az eredeti paraméterekkel kifejezve

i	q_i	ϑ_i	d_i	a_i	α_i
1	ϑ_1	ϑ_1	d_1	0	0°
2	ϑ_2	ϑ_2	d_2	a_1	0°
3	d_3	0°	d_3	a_2	0°
4	ϑ_4	ϑ_4	0	0	0°

F1.2 táblázat. A PUMA robot módosított Denavit–Hartenberg-paraméterei az eredeti paraméterekkel kifejezve

i	q_i	ϑ_i	d_i	a_i	α_i
1	ϑ_1	ϑ_1	0	0	0°
2	ϑ_2	ϑ_2	0	0	-90°
3	ϑ_3	ϑ_3	d_3	a_2	0°
4	ϑ_4	ϑ_4	d_4	a_3	90°
5	ϑ_5	ϑ_5	0	0	-90°
6	ϑ_6	ϑ_6	d_6	0	90°

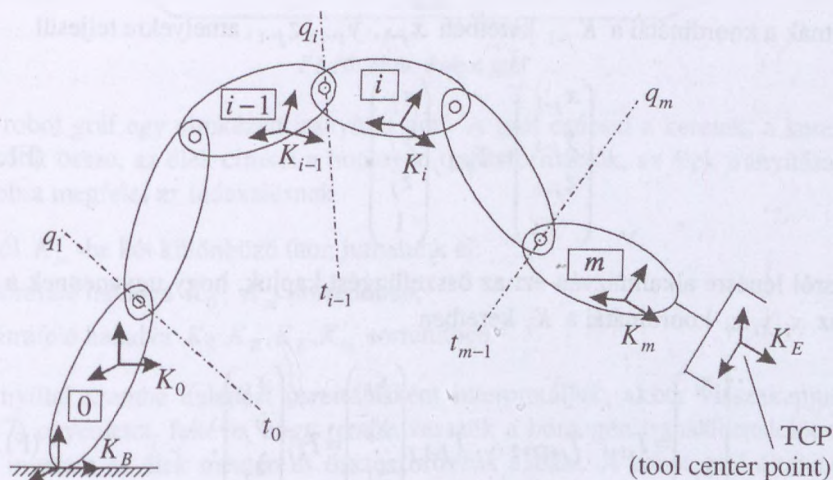
Ezek az összefüggések hasznosak, ha a robot geometriai és inercia paraméterei az eredeti Denavit–Hartenberg-keretben adottak, de a robotirányító szoftver a belsejében a módosított Denavit–Hartenberg-kereteket használja.

F1.5.2 Direkt geometriai feladat

Egy nyíltláncú, elágazás nélküli merev robot álljon a $[0]$, $[1]$, ..., $[m]$ szegmensekből (links) és a végberendezésből (end effector), amely lehet megfogó, szerszám stb. (gripper, tool). A szomszédos szegmenseket translációs vagy rotációs csuklók (prismatic or revolute joints) kötik össze. A translációs csuklók a szegmensnek a csukló tengely mentén történő elmozdulását, a rotációs csuklók a tengely körüli elfordulását teszik lehetővé. Legyen d vagy a a translációs csukló (T) mentén az elmozdulás. Hasonlóan jelölje ϑ vagy α a rotációs csukló (R) körüli forgásszöget. Közös nevük a q csuklóváltozó (joint variable).

A "nyíltláncú, elágazás nélküli robot" elnevezés arra utal, hogy a szegmensek megszámozhatók úgy, hogy minden szegmenst pontosan egy szegmens követ a számozás sorrendjében (az $[m]$ szegmenst a végberendezés követi), és az $[i]$ szegmens pozíciója és orientációja csak a megelőző szegmens pozíciójától és orientációjától, valamint az $[i-1]$ és $[i]$ szegmens közötti q_i csuklóváltozótól függ. A megelőző

szegmensek definiálják az $[i-1]$ szegmenshez rögzített K_{i-1} keret pozícióját és orientációját, míg q_i definiálja az $[i]$ szegmenshez rögzített K_i keret relatív pozícióját és orientációját K_{i-1} -hez képest, amely a $T_{K_{i-1}, K_i} = T_{i-1, i}$ homogén transzformációval jellemezhető. Az $[i-1]$ és $[i]$ szegmensek közötti csuklótengelyt t_{i-1} jelöli (lásd F1.9. ábra).



F1.9. ábra. Nyíltláncú, elágazás nélküli robot elvi sémája

A K_B keret a robot alapzatához van rögzítve. A K_0 keret a robot referencia kerete, amely azonos is lehetne K_B -vel, de rendszerint mégis eltér attól annak érdekében, hogy a csuklóváltóztól való függés egyszerűbb legyen. Az irányítással befolyásolható csuklóváltók a K_0 és K_m keretek között vannak. A K_B és K_0 , valamint a K_m és K_E közötti kapcsolat nem függ a csuklóváltóztól. A csuklók mind *egyszabadságfokúak* (one degree of freedom, 1-DOF) és a teljes robot m -DOF. A robot egyik lényeges jellemzője a *csuklóképlet* (joint formula). Például RRTRRR egy 6-DOF robotot jelöl, ahol minden csukló rotációs, kivéve a harmadikat, amelyik translációs. Annak érdekében, hogy a végberendezésnek mind a pozícióját, mind pedig az orientációját is megszorítás nélkül irányítani tudjuk, legalább 6 csukló szükséges ($m \geq 6$). A robot még ebben az esetben is csak egy *korlátozott munkatérben* (limited workspace) pozícionálható a szegmensek véges mérete és a csuklóváltók limitált értéktartománya miatt.

Humán analógiák alapján beszélhetünk törzsről ($[0]$ trunk), karról ($[1]$, $[2]$, $[3]$ arm), kézcsuklóról ($[4]$, $[5]$, $[6]$ wrist) és kézről (hand, gripper). A végberendezés

rendszerint cserélhető és az $\overline{m}$ szegmenshez rögzíthető, kitüntetett pontja pedig a *szerszámközéppont* (tool center point, TCP).

Az $\overline{i-1}$ szegmenshez rögzített K_{i-1} keret bárhol lehetne. A gyakorlatban gyakran használjuk a Denavit–Hartenberg konvenciót, ahol $\vartheta_i, d_i, a_i, \alpha_i$ határozza meg a K_{i-1} és K_i közötti $T_{i-1,i}$ homogén transzformációt. Ha kiválasztjuk a $\overline{j}$ szegmens egy P_j pontját, amelynek x_j, y_j, z_j a koordinátái a K_j keretben, akkor ugyanennek a pontnak a koordinátái a K_{j-1} keretben $x_{j-1}, y_{j-1}, z_{j-1}$, amelyekre teljesül

$$\begin{pmatrix} x_{j-1} \\ y_{j-1} \\ z_{j-1} \\ 1 \end{pmatrix} = T_{j-1,j} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{F1.109})$$

Lépésről lépésre alkalmazván ezt az összefüggést kapjuk, hogy ugyanennek a pontnak az x_i, y_i, z_i koordinátái a K_i keretben

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{pmatrix} = T_{i,i+1} \cdot T_{i+1,i+2} \cdots T_{j-1,j} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{pmatrix} = T_{i,j} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{F1.110})$$

ahol

$$T_{i,j} = T_{i,i+1} \cdot T_{i+1,i+2} \cdots T_{j-1,j}. \quad (\text{F1.111})$$

Itt $T_{i,j}$ írja le a koordináta-transzformációt, továbbá K_j relatív pozícióját és orientációját K_i -hez képest. Speciálisan

$$T_{0,m} = T_{0,1} \cdot T_{1,2} \cdots T_{m-1,m} = \left(\begin{array}{c|c} A_{0,m} & p_{0,m} \\ \hline 0^T & 1 \end{array} \right), \quad (\text{F1.112})$$

$$T_{B,E} = T_{B,0} \cdot T_{0,m} \cdot T_{m,E}. \quad (\text{F1.113})$$

Vegyük észre, hogy

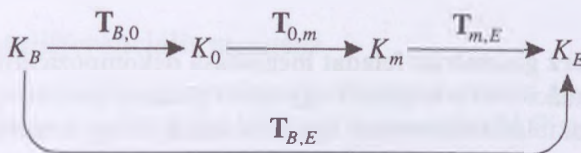
$$A_{0,m} = A_{0,1} \cdot A_{1,2} \cdots A_{m-1,m}, \quad (\text{F1.114})$$

$$A_{0,m}^{-1} = A_{m-1,m}^T \cdots A_{1,2}^T \cdot A_{0,1}^T, \quad (\text{F1.115})$$

$$T_{j,i}^{-1} = T_{i,j}^{-1} = T_{j-1,j}^{-1} \cdots T_{i+1,i+2}^{-1} \cdot T_{i,i+1}^{-1}, \quad (\text{F1.116})$$

$$T_{0,m}^{-1} = T_{B,0}^{-1} \cdot T_{B,E} \cdot T_{m,E}^{-1}. \quad (\text{F1.117})$$

Az utolsó egyenlet azt sugallja, hogy a robot egy ún. *robot gráffal* jellemezhető, lásd F1.10. ábra.



F1.10. ábra. Robot gráf

A robot gráf egy címkézett irányított gráf. A gráf csúcsai a keretek, a kereteket élek kötik össze, az élek címkéi a homogén transzformációk, az élek irányítása balról jobbra megfelel az indexelésnek.

K_0 -ból K_m -be két különböző úton juthatunk el:

- i) előre felé haladva K_0, K_m sorrendben,
- ii) hátra felé haladva K_0, K_B, K_E, K_m sorrendben.

Ha a nyíllal szembe haladást invertálásként interpretáljuk, akkor visszakapjuk az (F1.117) egyenletet, feltéve, hogy rendre vesszük a homogén transzformációt vagy annak inverzét az élek mentén és összeszorozzuk azokat. A robot gráf általánosítható összetettebb esetekre is (robot, szállítószalag, tárgy, kamera).

Szokás direkt geometriai feladatról beszélni, ha arra keresünk választ, hogyan függ $T_{B,E}$ vagy $T_{0,m}$ a $q = (q_1, \dots, q_m)^T$ csuklózóváltozó vektortól. Rendszerint az összefüggést szimbolikus (képletszerű) alakban keressük a robot Denavit–Hartenberg-paraméterei és (F1.112) felhasználásával:

$$\text{direkt geometriai feladat: } q \mapsto T_{0,m}. \quad (\text{F1.118})$$

A szimbolikus alak azért szükséges, hogy számítási módszert (lehetőleg analitikus megoldást) tudjunk adni a később vizsgálandó inverz geometriai feladat megoldására.

F1.5.3 Inverz geometriai feladat

Az inverz geometriai feladat célja a csuklózóváltozók meghatározása, ha adott a végberendezés pozíciója és orientációja. A csuklózóváltozók felhasználhatók referencia jelként (időfüggő alapjelként) a tengelyek szervohajtásai számára. A problémára mint

$$q = \text{solve } T_{0,m} \quad (\text{F1.119})$$

fogunk hivatkozni. A feladat transzcendens egyenletrendszer megoldását igényli, amelyet általában nem tudunk képletszerű (szimbolikus, analitikus) alakban megadni. A gyakorlat számára fontos egyik esetben azonban a feladat analitikusan is megoldható.

F1.1 Tétel (inverz geometriai feladat megoldása dekompozícióval): Ha az utolsó három tengely rotációs és a tengelyek egy közös pontban metszik egymást, akkor az inverz geometriai feladat felbontható egy pozíciónáló és egy orientáló részproblémára, amelyek szeparáltan megoldhatók.

Bizonyítás: Legyen például $m=6$ és a robot Denavit–Hartenberg-alakjában $a_4 = a_5 = a_6 = 0$ és $\alpha_6 = 0^\circ$, akkor

$$\begin{aligned}
 T_{0,6} &= \begin{bmatrix} l_{0,6} & m_{0,6} & n_{0,6} & p_{0,6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= T_{0,3} \begin{bmatrix} A_{3,4} & 0 \\ d_4 & 1 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{4,5} & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} l_{0,3} & m_{0,3} & n_{0,3} & p_{0,3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{3,6} & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} A_{0,6} & p_{0,3} + d_4 n_{0,3} + d_6 n_{0,6} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{F1.120}$$

és ezért

$$p_{0,3}(q_1, q_2, q_3) + d_4 n_{0,3}(q_1, q_2, q_3) = p_{0,6} - d_6 n_{0,6}, \tag{F1.121}$$

$$A_{3,6}(q_1, q_2, q_3) = A_{0,3}^T(q_1, q_2, q_3) [l_{0,6} \ m_{0,6} \ n_{0,6}]^T. \tag{F1.122}$$

Az eredeti inverz problémát két 3-DOF részfeladatra bontottuk. Az első feladat (F1.121), amely egy tiszta pozíciónáló részfeladat, amelynek megoldása legyen q_1, q_2, q_3 . Mivel megoldottuk az első feladatot, kiszámíthatjuk (F1.122) jobb oldalát és kereshetjük a második részfeladat megoldását a q_4, q_5, q_6 változóknak, amely egy tiszta orientáló részfeladat. A második részfeladat elterjedt ipari robotoknál gyakran vezet az inverz Euler vagy az inverz RPY feladatra, amelyek megoldását korábban már tárgyaltuk.

Megjegyzés: Általános Denavit–Hartenberg-paraméterekkel jellemezhető robotok esetén jelenleg nem ismeretesek módszerek az inverz geometriai feladat analitikus megoldására.

F1.5.4 A robot differenciális mozgása

A robot geometriai modellje egy nemlineáris függvénykapcsolat a csuklózváltozók és a megfogó pozíciója és orientációja között. A kapcsolatot lokálisan, az aktuális q konfigurációban linearizálva eljuthatunk a robot $J(q)$ Jacobi-mátrixához. A linearizálás differenciáláshoz kötődik, ami viszont felfogható a szuperpozíció elve alkalmazásának is. Fagyasszuk be minden csuklózváltozó aktuális értékét q_i kivételével, és adjunk q_i -nek dq_i változást. Akkor az $[i]$, $[i+1]$, ..., $[m]$ szegmensek egyetlen merev testet alkotnak, amely a t_{i-1} csuklótengely típusától függően elmozdul a tengely mentén dq_i -vel (T), vagy elfordul a tengely körül dq_i -vel (R). Utóbbi esetben K_m origójából merőlegest bocsáthatunk t_{i-1} -re, vehetjük a talppont és K_m origója közötti távolságot, és ezzel a sugárral fog K_m origója körmozgást végezni, amelynek szögsebessége $\dot{q}_i$, az origó sebességének iránya pedig merőleges a t_{i-1} és $p_{i-1,m}$ által meghatározott síkra. Vezessünk be egy κ_i maszk változót, amelyre $\kappa_i = 1$ rotációs csukló esetén (R), és $\kappa_i = 0$ transzlációs csukló esetén (T). Jelölje K_m origójának sebességét és szögsebességét rendre ${}^m v_m$ és ${}^m \omega_m$, akkor a szuperpozíció elve szerint

$${}^m v_m = \sum_{i=1}^m {}^m d_{i-1} \dot{q}_i, \quad (\text{F1.123})$$

$${}^m \omega_m = \sum_{i=1}^m {}^m t_{i-1} \dot{q}_i. \quad (\text{F1.124})$$

Az ${}^m d_{i-1}$ parciális sebesség és ${}^m t_{i-1}$ parciális szögsebesség rendre a következő:

$${}^m d_{i-1} = A_{i-1,m}^{-1} \{ (1 - \kappa_i) t_{i-1} + \kappa_i t_{i-1} \times p_{i-1,m} \}, \quad (\text{F1.125})$$

$${}^m t_{i-1} = A_{i-1,m}^{-1} \kappa_i t_{i-1}. \quad (\text{F1.126})$$

Azért, hogy az eredményt egyszerűbbé tegyünk, hagyjuk el $T_{i-1,m}$ -ben az indexeket:

$$T_{i-1,m} = \begin{bmatrix} l & m & n & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & p \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{F1.127})$$

Ha z_{i-1} a csuklótengely, mint az eredeti Denavit–Hartenberg-alak esetén, akkor $t_{i-1} = k_{i-1}$, és ezért $A^{-1} = A^T$ miatt a következő eredményekhez jutunk:

Rotációs csukló (R) esetén:

$$\begin{aligned} {}^m t_{i-1,x} &= l \cdot t_{i-1} = l \cdot k_{i-1} = l_z, \\ {}^m t_{i-1,y} &= m \cdot t_{i-1} = m \cdot k_{i-1} = m_z, \\ {}^m t_{i-1,z} &= n \cdot t_{i-1} = n \cdot k_{i-1} = n_z, \end{aligned} \quad (F1.128)$$

$$\begin{aligned} {}^m d_{i-1,x} &= l \cdot (t_{i-1} \times p) = l \cdot (k_{i-1} \times p) = \\ &= l^T \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = l^T \begin{pmatrix} -p_y \\ p_x \\ 0 \end{pmatrix} = -l_x p_y + l_y p_x, \end{aligned} \quad (F1.129)$$

$${}^m d_{i-1,y} = m \cdot (t_{i-1} \times p) = m \cdot (k_{i-1} \times p) = -m_x p_y + m_y p_x,$$

$${}^m d_{i-1,z} = n \cdot (t_{i-1} \times p) = n \cdot (k_{i-1} \times p) = -n_x p_y + n_y p_x.$$

Transzlációs csukló (T) esetén:

$${}^m t_{i-1} = 0, \quad (F1.130)$$

$$\begin{aligned} {}^m d_{i-1,x} &= l \cdot t_{i-1} = l \cdot k_{i-1} = l_z, \\ {}^m d_{i-1,y} &= m \cdot t_{i-1} = m \cdot k_{i-1} = m_z, \end{aligned} \quad (F1.131)$$

$${}^m d_{i-1,z} = n \cdot t_{i-1} = n \cdot k_{i-1} = n_z.$$

Bevezetve a

$$\Delta_{i-1} = \left[\begin{array}{c|c} [\kappa_i t_{i-1} \times] & (1 - \kappa_i) t_{i-1} \\ \hline 0^T & 0 \end{array} \right], \quad (F1.132a)$$

$${}^m \Delta_{i-1} = \left[\begin{array}{c|c} [{}^m t_{i-1} \times] & {}^m d_{i-1} \\ \hline 0^T & 0 \end{array} \right] \quad (F1.132b)$$

jelöléseket, írható hogy

$$\frac{\partial T_{i-1,m}}{\partial q_i} = \Delta_{i-1} T_{i-1,m} = T_{i-1,m} {}^m \Delta_{i-1}, \quad (F1.133)$$

$${}^m\Delta_{i-1} = T_{i-1,m}^{-1} \Delta_{i-1} T_{i-1,m}. \quad (\text{F1.134})$$

Az eredmények tömör alakra hozhatók, ha bevezetjük a robot ${}^m J_m$ Jacobi-mátrixát:

$${}^m J_m = \begin{bmatrix} {}^m d_0 & {}^m d_1 & \dots & {}^m d_{m-1} \\ {}^m i_0 & {}^m i_1 & \dots & {}^m i_{m-1} \end{bmatrix}, \quad (\text{F1.135})$$

$$\begin{pmatrix} {}^m v_m \\ {}^m \omega_m \end{pmatrix} = {}^m J_m \dot{q}. \quad (\text{F1.136})$$

Mivel a rögzített K_0 keretben

$${}^0 v_m = A_{0,m} {}^m v_m, \quad (\text{F1.137})$$

$${}^0 \omega_m = A_{0,m} {}^m \omega_m, \quad (\text{F1.138})$$

ezért

$${}^0 J_m = \begin{bmatrix} A_{0,m} & 0 \\ 0 & A_{0,m} \end{bmatrix} {}^m J_m, \quad (\text{F1.139})$$

$$\begin{pmatrix} {}^0 v_m \\ {}^0 \omega_m \end{pmatrix} = {}^0 J_m \dot{q}. \quad (\text{F1.140})$$

Következmény: Olyan esetekben, amikor az inverz geometriai feladat nem oldható meg analitikusan, meghatározhatjuk az (F1.136) vagy (F1.140) egyenlet $\dot{q}(t)$ megoldását a q konfiguráció környezetében, és ebből numerikus integrálással $q(t)$ értékét. Ha tehát a megfogó sebességét és szögsebességét írjuk elő a pozíció és orientáció helyett, akkor $\dot{q}$ meghatározható a Jacobi-mátrix $J_m^\#$ pszeudoinverze segítségével:

$$\dot{q} = {}^0 J_m^\# \begin{pmatrix} {}^0 v_m \\ {}^0 \omega_m \end{pmatrix}. \quad (\text{F1.141})$$

Ha $m=6$ és J_m nonszinguláris, akkor $J_m^\# = J_m^{-1}$. Azon q robot konfigurációkat, amelyek esetén J_m képtere nem a teljes R^6 tér ($\dim \text{range}(J_m) < 6$), szinguláris konfigurációknak nevezzük. Szinguláris konfigurációkban vannak olyan irányok, amelyek mentén vagy amelyek körül a robot nem mozgatható.

Ha $m > 6$, akkor a robot redundáns szabadságfokokkal rendelkezik, és célszerű a végtelen sok megoldás közül olyat kiválasztani, amelyre $\|\dot{q}\| \rightarrow \min$, mert ehhez tartozik a legrövidebb tranziens. Az optimális megoldás ekkor

$$\dot{q} = J_m^T (J_m J_m^T)^{-1} \begin{pmatrix} v_m \\ \omega_m \end{pmatrix}. \quad (\text{F1.142})$$

Ha $m < 6$, akkor az összes sebesség és szögsebesség előírást nem lehet egyidejűleg kielégíteni, mert kevesebb változó van, mint feltétel. Ekkor két lehetőség kínálkozik:

- i) Kiválaszthatunk v_m és ω_m komponensei közül pontosan annyit, amennyi $\dim \dot{q}$. Az ezekhez tartozó egyenleteket betartjuk, a többit figyelmen kívül hagyjuk. Például ha $\dim \dot{q} = 2$ és p_x, p_y csak q_1, q_2 -től függ, akkor választható v_x és v_y , és a hozzájuk tartozó két egyenletből meghatározható $\dot{q}_1$ és $\dot{q}_2$.
- ii) Választhatunk olyan $\dot{q}$ csuklósebességet, amely szimultán minimalizálja az egyenletek hibáját LS értelemben, amikor is a kompromisszum megoldás

$$\dot{q} = (J_m^T J_m)^{-1} J_m^T \begin{pmatrix} v_m \\ \omega_m \end{pmatrix}. \quad (\text{F1.143})$$

Fontossága miatt részletesebben vizsgáljuk a Jacobi-mátrix invertálását abban a speciális 6-DOF esetben, amikor az utolsó 3 tengely rotációs és a tengelyek egy közös (6^*) pontban metszik egymást:

$$T_{B,E} = T_{B,0} \cdot T_{0,3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{3,6} & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \cdot T_{6^*,E}, \quad (\text{F1.144})$$

$$T_{6^*,E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_{6,E}. \quad (\text{F1.145})$$

Feltesszük, hogy a végberendezés ${}^B v_E$ sebessége és ${}^B \omega_E$ szögsebessége a robot K_B báziskeretében adott. Akkor $\dot{q}$ a következő lépésekben határozható meg:

- i) A sebesség és szögsebesség kifejezhető K_E -ben:

$${}^E v_E = A_{B,E}^{-1} {}^B v_{B,E}; \quad {}^E \omega_E = A_{B,E}^{-1} {}^B \omega_E. \quad (\text{Fl.146})$$

ii) Meghatározható K_{6^*} origójának sebessége és szögsebessége:

$${}^{6^*} v_{6^*} = A_{6^*,E} \{ {}^E v_E + {}^E \omega_E \times (-A_{6^*,E}^{-1} p_{6^*,E}) \}, \quad (\text{Fl.147})$$

$${}^{6^*} \omega_{6^*} = A_{6^*,E} {}^E \omega_E. \quad (\text{Fl.148})$$

iii) Mivel ${}^{6^*} d_{i-1} = 0$, $i = 4, 5, 6^*$, ezért a Jacobi-mátrix speciális blokk alsó-háromszögmátrix

$${}^{6^*} J_{6^*} = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & C \end{array} \right]. \quad (\text{Fl.149})$$

Legyen $q_A = (q_1, q_2, q_3)^T$, $q_B = (q_4, q_5, q_6)^T$, akkor az inverz sebesség probléma két részfeladatra bontható, amelyben már csak 3×3 -as mátrixok zárt alakban számítható inverzei szerepelnek:

$$\dot{q}_A = A^{-1} {}^{6^*} v_{6^*}, \quad (\text{Fl.150})$$

$$\dot{q}_B = C^{-1} \{ -B A^{-1} {}^{6^*} v_{6^*} + {}^{6^*} \omega_{6^*} \}. \quad (\text{Fl.151})$$

F2. POLINOM- ÉS RACIONÁLIS MÁTRIXOK FAKTORIZÁCIÓJA

Ebben a függelékben összefoglaljuk az átviteli függvény mátrix minimális alakjának meghatározására szolgáló technikákat előbb a legnagyobb közös osztóra és a Sylvester rezultáns mátrixra alapozva, majd a Smith–McMillan-alak felhasználásával. Ez utóbbi lehetőséget ad a MIMO rendszer nulla helyeinek és pólusainak precíz értelmezésére is.

F2.1 Átviteli függvény mátrix minimális alakja

A többváltozós lineáris időinvariáns rendszer olyan $W(s)$ átviteli függvény mátrixszal jellemezhető, amelynek $w_{ij}(s) = b_{ij}(s) / a_{ij}(s)$ elemei racionális törtfüggvények (polinomok hányadosai). Az átviteli függvény *proper* (szigorúan proper), ha minden $w_{ij}(s)$ esetén a számláló polinom fokszáma kisebb vagy egyenlő (szigorúan kisebb) mint a nevező polinom fokszáma.

Jelölje ∂ a polinomfokszámot. Legyen $P(s)$ egy $(m \times n)$ típusú polinommátrix. A polinommátrix fokszáma $\partial[P(s)]$ az elemek fokszámának a maximuma. Mivel a polinommátrix oszlopai és sorai speciális mátrixok, ezért ebben az értelemben beszélhetünk a j -edik oszlop (column) $\partial c_j[P(s)]$ vagy az i -edik sor (row) $\partial r_i[P(s)]$ fokszámáról. A polinommátrix kifejezhető az *oszlopfokszám* szerint:

$$\begin{aligned} l &:= \max \{ \partial c_j \}, \\ S_{l-i} &:= \text{diag} (s^{\partial c_1 - i}, \dots, s^{\partial c_n - i}), \\ P(s) &= P_l S_l(s) + P_{l-1} S_{l-1}(s) + \dots + P_0, \end{aligned} \quad (\text{F2.1})$$

ahol P_i $(m \times n)$ típusú konstans mátrix, amelynek negatív s -hatványokhoz tartozó elemei nullák. A $P(s)$ polinommátrix oszlop-proper (column proper), ha

$$\Gamma_c[P(s)] := P_l \text{ maximális rangú.} \quad (\text{F2.2})$$

Hasonlóan lehetséges a *sor*fokszám szerinti felírás:

$$\begin{aligned} h &:= \max \{ r_i \}, \\ P(s) &= \tilde{S}_h(s) \tilde{P}_h + \tilde{S}_{h-1}(s) \tilde{P}_{h-1} + \dots + \tilde{P}_0, \\ \Gamma_r[P(s)] &:= \tilde{P}_h. \end{aligned} \quad (\text{F2.3})$$

Speciálisan, ha $P(s)$ $(m \times m)$ típusú (kvadratikus), akkor lehetséges a

$$q := \partial[P(s)],$$

$$P(s) = P_q s^q + P_{q-1} s^{q-1} + \dots + P_0 \quad (\text{F2.4})$$

felírás, és $P(s)$ proper, ha P_q maximális rangú. A determináns fokszám: $n = \partial \det[P(s)]$. Ha a mátrix oszlop- (sor-) proper, akkor $n = \sum \partial c_j$ ($n = \sum \partial r_i$). Az $P(s)$ polinommatrix *unimoduláris*, ha determinánsa nem nulla és konstans ($n = 0$).

A $P(s)$ polinommatrix elemi sortranszformációinak nevezzük:

1. két sor (i és j) felcserélését: $\rho_i \leftrightarrow \rho_j$
2. egy sor (i) szorzását egy nem nulla c skalárral: $\rho_i \leftarrow c \rho_i$
3. egy sor (i) helyettesítését önmagának és egy másik (j) sor $\pi(s)$ polinomszorosának összegével: $\rho_i \leftarrow \rho_i + \pi(s) \rho_j$.

Jelölje e_i az i -edik standard (oszlop) egységvektort. Az elemi sortranszformációknak a következő $(m \times m)$ típusú mátrixokkal balról való (left) szorzás felel meg ($e_i \in R^m$):

$$L_{\rho_i \leftrightarrow \rho_j} = [e_1, \dots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, e_i, e_{j+1}, \dots, e_m],$$

$$L_{\rho_i \leftarrow c \rho_i} = [e_1, \dots, e_{i-1}, c e_i, e_{i+1}, \dots, e_m],$$

$$L_{\rho_i \leftarrow \rho_i + \pi(s) \rho_j} = [e_1, \dots, e_{j-1}, e_j + \pi(s) e_i, e_{j+1}, \dots, e_m]. \quad (\text{F2.5})$$

Szükség lesz az elemi sortranszformációk inverzeire is:

$$L_{\rho_i \leftrightarrow \rho_j}^{-1} = L_{\rho_i \leftrightarrow \rho_j},$$

$$L_{\rho_i \leftarrow c \rho_i}^{-1} = L_{\rho_i \leftarrow c^{-1} \rho_i},$$

$$L_{\rho_i \leftarrow \rho_i + \pi(s) \rho_j}^{-1} = L_{\rho_i \leftarrow \rho_i - \pi(s) \rho_j}. \quad (\text{F2.6})$$

Az elemi oszloptranzformációknak a következő $(n \times n)$ típusú mátrixokkal jobbról való (right) szorzás felel meg ($e_i \in R^n$):

$$R_{\kappa_i \leftrightarrow \kappa_j} = [e_1, \dots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, e_i, e_{j+1}, \dots, e_n],$$

$$R_{\kappa_i \leftarrow c \kappa_i} = [e_1, \dots, e_{i-1}, c e_i, e_{i+1}, \dots, e_n],$$

$$R_{\kappa_i \leftarrow \kappa_i + \pi(s) \kappa_j} = [e_1, \dots, e_{i-1}, e_i + \pi(s) e_j, e_{i+1}, \dots, e_n]. \quad (\text{F2.7})$$

Az elemi oszloptranzformációk inverzei a következő (jobb oldali) tranzformációk:

$$\begin{aligned} R_{\kappa_i \leftrightarrow \kappa_j}^{-1} &= R_{\kappa_i \leftrightarrow \kappa_j}, \\ R_{\kappa_i \leftarrow c \kappa_i}^{-1} &= R_{\kappa_i \leftarrow c^{-1} \kappa_i}, \\ R_{\kappa_i \leftarrow \kappa_i + \pi(s) \kappa_j}^{-1} &= R_{\kappa_j \leftarrow \kappa_j - \pi(s) \kappa_i}. \end{aligned} \quad (\text{F2.8})$$

Világos, hogy az elemi sor- és oszloptranzformációk *unimoduláris* mátrixok. Minden unimoduláris mátrix elemi tranzformációkkal egységmátrixszá tranzformálható (egységmátrixból nyerhető).

Két azonos oszlopszámú polinommátrix $R(s)$ és $P(s)$ legnagyobb jobb oldali közös osztója (greatest common right divisor, GCRD) olyan jobb oldali osztó polinommátrixa mindkettőnek, amelynél nincs "nagyobb", vagyis amely bal oldali közös többszöröse minden más közös osztó polinommátrixnak (common right divisor, CRD): Ha tehát $G_R(s)$ a GCRD, akkor $R(s) = R_1(s)G_R(s)$ és $P(s) = P_1(s)G_R(s)$, $R(s) = R_2(s)G(s)$ és $P(s) = P_2(s)G(s) \Rightarrow G_R(s) = M(s)G(s)$.

Hasonló értelemben beszélhetünk legnagyobb bal oldali közös osztóról (greatest common left divisor, GCLD). A skalároktól eltérően GCRD (GCLD) csak egy unimoduláris szorzó erejéig egyértelmű.

Két polinommátrix relatív jobb oldali prím (relative right prime, RRP), ha GCRD-jük unimoduláris. Két polinommátrix relatív bal oldali prím (relative left prime, RLP), ha GCLD-jük unimoduláris.

Legyenek $D(s)$ és $N(s)$ tetszőleges $(n \times n)$ és $(m \times n)$ méretű (azonos oszlopszámú) polinommátrixok. Keressünk elemi sortranzformációkat (vagy ami ekvivalens, egy $U(s)$ unimoduláris mátrixot), hogy a jobb oldalon legalább m sor nulla legyen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U_{11}(s) & U_{12}(s) \\ U_{21}(s) & U_{22}(s) \end{bmatrix}}_{U(s)} \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n \\ \} m \end{matrix}, \quad (\text{F2.9})$$

Akkor az $R(s)$ $(n \times n)$ -es négyzetes mátrix $D(s)$ és $N(s)$ GCRD-je. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $D(s)$ és $N(s)$ RRP legyen, többféleképpen is megadható. Ezek közül kiemeljük a Bezout-egyenlőséget, a rang feltételt és az általánosított Sylvester rezultáns mátrixot.

Bezout egyenlőség: Létezik $X(s)$ és $Y(s)$ polinommátrix, hogy

$$X(s)N(s) + Y(s)D(s) = I_n. \quad (\text{F2.10})$$

Rang feltétel: Minden s érték esetén a $[D^T(s) \ N^T(s)]^T$ mátrix maximális rangú (más néven *irreducibilis*). Ezzel ekvivalens, hogy $N(s)$ és $D(s)$ sajátértékei között nincsenek közösek.

Általánosított Sylvester rezultáns mátrix: Létezik $A(s)$ és $B(s)$ relatív bal oldali prím (RLP) polinommátrix, hogy

$$\begin{aligned} \partial \det [D(s)] &= \partial \det [A(s)] =: p, \\ A(s)N(s) + B(s)D(s) &= 0_n. \end{aligned} \quad (\text{F2.11})$$

Legyen $N(s) = N_0 s^L + N_1 s^{L-1} + \dots + N_L$, és bontsuk fel hasonló módon az $A(s), B(s), D(s)$ polinommátrixokat is, majd képezzük az S_k általánosított Sylvester-mátrixokat:

$$S_k = \begin{bmatrix} N_0 & N_1 & \dots & N_L \\ D_0 & D_1 & \dots & D_L \\ 0 & N_0 & \dots & N_{L-1} & N_L \\ 0 & D_0 & \dots & D_{L-1} & D_L \\ & & & \vdots & \\ & & & N_0 & \dots & N_L \\ & & & D_0 & \dots & D_L \end{bmatrix} \quad 2k \text{ blokk sor,} \quad (\text{F2.12})$$

$$[A_0 \ B_0 \ A_1 \ B_1 \ \dots \ A_{k-1} \ B_{k-1}] S_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{F2.13})$$

Definiáljuk a következő mennyiségeket:

$$\begin{aligned} r_0 &= 0, & r_i &= \text{rank}(S_i), \\ \alpha_0 &= m + p, & \alpha_i &= r_i - r_{i-1}. \end{aligned} \quad (\text{F2.14})$$

i) Akkor α_i nemnövekvő függvénye i -nek.

ii) $p = r_v - m_v$, ahol v az első olyan egész, amelyre $\alpha_{v+1} = n$ teljesül.

Az utóbbi jellemzés lehetőséget ad a GCRD számítására *számelemű mátrixokon* végzett elemi transzformációk segítségével. Ehhez előbb bevezetjük a sor-echelon alak fogalmát:

- i) a sor vezető eleme 1, kivéve ha a sor nulla,
- ii) minden olyan oszlopban, amelyik valamelyik sor nem nulla vezető elemét tartalmazza, ez alatt az elem alatt már csak nullákat tartalmaz,
- iii) ha sor i és j nem nullák és $i < j$, akkor az i -edik sor vezető nem nulla eleme balra van a j -edik sor vezető nem nulla elemétől,
- iv) a nulla sorok a nem nulla sorok alatt helyezkednek el.

Algoritmus a GCRD meghatározására:

1. Legyen $L := \max\{\partial[N(s)], \partial[D(s)]\}$ a maximális fokszám. Képezzük az S_1 általánosított Sylvester-mátrixot. Hozzuk S_1 -et (számokon végzett) elemi sortranszformációkkal az $\mathcal{E}_1$ sor-echelon alakra. Legyen $r_1 = \text{rank}(\mathcal{E}_1)$. Ha $r_1 < n$, akkor csak triviális (végtelen fokszámú) GCRD létezik, ezért stop. Ellenkező esetben legyen $\mathcal{F} := \mathcal{E}_1$ és $k := 1$.
2. Legyen $k := k + 1$. Egészítsük ki $\mathcal{F}$ -et egy új k -adik blokkal úgy, hogy $\mathcal{E}_{k-1}$ -et (a kezdeti első oszlophoz képest) $m(k-1)$ oszloppal jobbra eltolva $\mathcal{F}$ alá helyezzük.
3. Redukáljuk $\mathcal{F}$ k -adik blokkját az $\mathcal{E}_k$ sor-echelon alakra. Ennek során az első $k-1$ blokból való elemi sortranszformációkkal elérjük, hogy a bővítés után is minden, az első $k-1$ blokból való sor vezető 1 eleme alatt nullák álljanak. Az így módosított k -adik blokkot ezután a k -adik blokkon belüli elemi sortranszformációkkal az $\mathcal{E}_k$ sor-echelon alakra hozzuk. Legyen $r_k := \text{rank}(\mathcal{F})$ és $\alpha_k := r_k - r_{k-1}$. Ha $\alpha_k \neq n$, akkor ugrás 2-re.
4. Legyen $v = k$. Az első nem nulla sor $\mathcal{E}_v$ -ből definiálja a GCRD együttható mátrixait csökkenő hatványok szerint rendezve a $G_R(s) = G_0 s^L + G_1 s^{L-1} + \dots + G_L$ alakban (például G_L helye $\mathcal{E}_v$ -ben az utolsó n oszlopban van).

Az átviteli függvény mátrix faktorizációi és a rendszer irányíthatósága és megfigyelhetősége között szoros összefüggés van. Legyen $W(s)$ szigorúan proper, akkor a polinom mátrixszokkal történő faktorizációkra fennáll:

- i) $W(s) = R(s)P^{-1}(s)$ irányítható, ha $P(s)$ oszlop-proper.
- ii) $W(s) = Q^{-1}(s)L(s)$ megfigyelhető, ha $Q(s)$ sor-proper.
- iii) $W(s) = R(s)P^{-1}(s)$ minimális (irányítható és megfigyelhető), ha $R(s)$ és $P(s)$ irreducibilis (RRP).

iv) $W(s) = Q^{-1}(s)L(s)$ minimális (irányítható és megfigyelhető), ha $Q(s)$ és $L(s)$ irreducibilis (RLP).

Algoritmus a minimális irányítható alak meghatározására:

1. Legyen az átviteli függvény mátrix $W(s) = [b_{ij}(s)/a_{ij}(s)]$. Jelölje $\tilde{a}_{ij}(s)$ a legkisebb közös többszörösét az átviteli függvény mátrix i -edik sorában álló $a_{i1}(s), \dots, a_{in}(s)$ nevezőknek, és legyen $\tilde{b}_{ij}(s) := \frac{b_{ij}(s)}{a_{ij}(s)} \tilde{a}_{ij}(s)$, ami a konstrukció szerint polinom. Legyen $\tilde{R}(s) := [\tilde{b}_{ij}(s)]$ és $\tilde{P}(s) := \text{diag}(\tilde{a}_{11}(s), \dots, \tilde{a}_{nn}(s))$.
2. Határozzuk meg az $\tilde{R}(s)$ és $\tilde{P}(s)$ polinommátrixok $G_R(s)$ GCRD-jét az előző algoritmussal.
3. Határozzuk meg a $G_R(s)$ polinommátrix inverzét: $G_R^{-1}(s)$.
4. Legyen $\bar{R}(s) = \tilde{R}(s)G_R^{-1}(s)$ és $\bar{P}(s) = \tilde{P}(s)G_R^{-1}(s)$.
5. Ha $\det(\Gamma_c[\bar{P}(s)]) \neq 0$, akkor $R(s) = \bar{R}(s)$ és $P(s) = \bar{P}(s)$ RRP és $W(s) = R(s)P^{-1}(s)$ minimális reprezentáció, stop.
6. Ha $\det(\Gamma_c[\bar{P}(s)]) = 0$, akkor meghatározandó egy $U_R(s)$ unimoduláris mátrix, amely a $\bar{P}(s)$ polinommátrixot $P(s) = \bar{P}(s)U_R(s)$ oszlop-proper alakra hozza. Legyen $R(s) := \bar{R}(s)U_R(s)$, akkor $W(s) = R(s)P^{-1}(s)$ minimális reprezentáció.

F2.2 Polinom mátrix Smith-alakja

Tetszőleges $P(s) = [p_{ij}(s)]_{m \times n}$ polinommátrix elemi sortranszformációk és oszloptranzformációk együttes alkalmazásával a sorok és oszlopok számától függően az

$$[E(s) \ 0] \ (m < n) \text{ vagy } \begin{bmatrix} E(s) \\ 0 \end{bmatrix} \ (m > n) \quad (\text{F2.15})$$

ún. Smith-alakra hozható, ahol

$$E(s) = \text{diag}(\bar{\epsilon}_1(s), \dots, \bar{\epsilon}_r(s)) \text{ polinommátrix} \quad (\text{F2.16})$$

és az $\bar{\epsilon}_i(s)$ polinomok normalizáltak (1 vezető együtthatójú, monik polinomok). Ha $m = n$, akkor a 0 blokk hiányzik.

Algoritmus a Smith-alak meghatározására:

1. Hozzuk elemi sor- és oszloptranzformációval (sor- és oszlopcserével) a $P(s)$ polinommátrix minimális fokszámú elemét az (1,1) pozícióba. Legyen ν_1 a minimális fokszám.
2. Elemi tranzformációval érjük el, hogy a (2,1) pozíciójú elem ν_2 fokszámára teljesüljön $\nu_2 < \nu_1$. Ha a (2,1) pozíciójú elem nullává válna, akkor ugrás a következő lépésre. Ellenkező esetben felcserélendő az első és második sor, és addig ismétlendő az eljárás, ameddig a (2,1) pozíciójú elem nullává nem válik.
3. Ismételjük meg a 2. lépést az első oszlop többi elemével.
4. Alkalmazzuk az eljárást az első sor minden elemére az első elem kivételével.
5. Visszaugrás a 2. lépésre, ha a 4. lépés folyamán nem nulla tag keletkezik az első oszlopban. Vegyük észre, hogy az (1,1) elem fokszáma minden ciklusban csökken mindaddig, amíg a következő alakú polinommátrix nem keletkezik:

$$\bar{P}_j(s) = \left[\begin{array}{c|ccccc} \bar{p}_{11}^{(j)}(s) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \end{array} \right], \quad (F2.17)$$

ahol $\bar{p}_{11}^{(j)}(s)$ normalizált (1 vezető együtthatójú, monik) polinom.

6. Ha $P_j(s)$ -nek van olyan eleme, amelynek fokszáma kisebb, mint az (1,1) pozícióban álló elem fokszáma, akkor az ezt az elemet tartalmazó oszlopot adjuk hozzá az első oszlophoz, és ismételjük meg a 2.-4. lépéseket. Ez addig folytatandó, amíg $\bar{p}_{11}^{(j)}(s)$ fokszáma kisebbé vagy legfeljebb egyenlővé nem válik $P_j(s)$ minden elemének fokszámánál. Ez a lépés tovább redukálja az (1,1) elem fokszámát.
7. Legyen $\bar{e}_1(s) := \bar{p}_{11}^{(j)}(s)$.
8. Ismételjük meg az eljárást 1.-8. lépéseit a $P_j(s)$ polinommátrixszal.

Alternatív lehetőség a Smith-alak meghatározására:

- i) Meghatározzuk $P(s)$ összes $(i \times i)$ méretű minor determinánsát.
- ii) Jelölje $\kappa_i(s)$ a $(i \times i)$ méretű minor determinánsok (normalizált) legnagyobb közös osztóját (GCD). Legyen $\kappa_0(s) := 1$.

iii) Az $\bar{\varepsilon}_i(s)$ polinomokra teljesül $\bar{\varepsilon}_i(s) := \frac{\kappa_i(s)}{\kappa_{i-1}(s)}$, és ezekkel $P(s)$ Smith-alakja

$$P_S(s) = \text{diag}(\bar{\varepsilon}_1(s), \dots, \bar{\varepsilon}_r(s), 0, \dots, 0). \quad (\text{F2.18})$$

Vegyük észre, hogy mivel az elemi sor-és oszloptranzformációk unimodulárisak, ezért léteznek $L(s), R(s), L^{-1}(s), R^{-1}(s)$ unimoduláris polinommátrixok, hogy

$$P_S(s) = L(s)P(s)R(s) \Leftrightarrow P(s) = L^{-1}(s)P_S(s)R^{-1}(s). \quad (\text{F2.19})$$

F2.3 Racionális mátrixok Smith–McMillan-alakja

Legyen $W(s) = [w_{ij}(s)]$ tetszőleges $(m \times m)$ méretű átviteli függvény mátrix, ahol $w_{ij}(s) = b_{ij}(s)/a_{ij}(s)$ racionális függvény. Jelölje $D_W(s)$ az $a_{ij}(s)$ nevezők legkisebb közös többszörösét, és hozzuk az átviteli függvény mátrixot a $W(s) = P(s)/D_W(s)$ alakra, ahol $P(s)$ polinommátrix, $D_W(s)$ skalár polinom.

Tudjuk, hogy a $P(s)$ polinommátrix elemi sor- és oszloptranzformációkkal az ekvivalens $P_S(s) = \text{diag}(\bar{\varepsilon}_1(s), \dots, \bar{\varepsilon}_r(s), 0, \dots, 0)$ Smith-alakra hozható. Ebből következik, hogy $W(s)$ ekvivalens a következő ún. Smith–McMillan-alakkal:

$$W_{SM}(s) = P_S(s)/D_W(s) = \text{diag}\left(\frac{\varepsilon_1(s)}{\delta_1(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_r(s)}{\delta_r(s)}, 0, \dots, 0\right), \quad (\text{F2.20})$$

ahol $\{\varepsilon_i(s), \delta_i(s)\}$ normalizált relatív prím polinomok, $i = 1, \dots, r$, továbbá $\varepsilon_i(s)$ faktora (osztója) $\varepsilon_{i+1}(s)$ -nek és $\delta_i(s)$ faktora (osztója) $\delta_{i-1}(s)$ -nek.

Átviteli függvény mátrix McMillan-fokszáma

A $W(s)$ mátrix McMillan-fokszáma definíció szerint a $p_p(s)$ polinom $\partial p_p(s)$ fokszáma.

Átviteli függvény mátrix pólusai

A $W(s)$ mátrix pólusai definíció szerint a $p_p(s) := \delta_1(s)\delta_2(s)\cdots\delta_r(s)$ polinom gyökei. Ha (A, B, C, D) realizációja $W(s)$ -nek, azaz $W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, akkor $W(s)$ pólusai és A sajátértékei azonosak.

Átviteli függvény mátrix nulla helyei

Háromféle zérus helyet (átviteli, blokkoló, invariáns) különböztetünk meg a rendszertechnikában.

- i) A $W(s)$ mátrix átviteli zérus (transmission zero) helyei definíció szerint a $p_z(s) := \varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\cdots\varepsilon_r(s)$ polinom gyökei. Vegyük észre, hogy az átviteli zérus a Smith–McMillan-alakhoz kötődik. Ha $W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ és $\exists D^{-1}$, akkor $\exists W^{-1}(s)$ is. Ekkor ha z_0 átviteli zérusa $W(s)$ -nek, akkor z_0 pólusa $W^{-1}(s)$ -nek.
- ii) Az $s = z_0$ helyet *blokkoló zérusnak* (blocking zero) nevezzük, ha $W(z_0) = 0$. Ha z_0 blokkoló zérus, akkor átviteli zérus is. Tegyük fel, hogy z_0 nem pólus, akkor z_0 átviteli zérus $\Leftrightarrow \text{rank}[W(z_0)] < \text{normalrank}[W(s)]$, ahol a $W(s)$ mátrix normálrangját úgy definiáljuk, hogy a maximuma $W(s)$ rangjának legalább egy komplex s szám esetén. Következésképp ha a bemenetek és kimenetek száma azonos és z_0 nem pólus, akkor z_0 átviteli zérus $\Leftrightarrow \det[W(z_0)] = 0$.
- iii) Ha $W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, akkor $s = z_0$ *invariáns zérus* (invariant zero) hely, ha

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - z_0 I & B \\ C & D \end{bmatrix} < \text{normalrank} \begin{bmatrix} A - sI & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Állapot-visszacsatolás és hasonlósági transzformáció nem változtatja meg az invariáns zérusokat. Ha (A, B, C, D) minimális realizációja $W(s)$ -nek, akkor z_0 átviteli zérus $\Leftrightarrow z_0$ invariáns zérusa a minimális realizációnak. Általában is igaz, hogy $W(s)$ minden átviteli zérusa $W(s)$ minden realizációjának invariáns zérusa.

Kvadratikus szakasz esetén ($m = n$, a bemenetek és a kimenetek száma egyenlő) az átviteli függvény determinánsa egyszerű alakú:

$$\det[W(s)] = K_\infty \frac{p_z(s)}{p_p(s)}. \quad (\text{F2.21})$$

Vegyük észre, hogy $p_z(s)$ és $p_p(s)$ nem szükségképpen relatív prímek. Ezért a $\det[W(s)]$ skalár jellemző nem elegendő a zérus helyek és a pólusok definiálására. Mindazonáltal $\det[W(s)]$ relatív fokszáma egyenlő a MIMO pólusok és zérusok számának különbségével.

A Smith–McMillan-alakon alapuló rendszerjellemezés egy ún. mátrix tört leírás (matrix fraction description, MFD), amely lehet jobb oldali (RMFD) és bal oldali (LMFD). Tudjuk, hogy léteznek $L(s)$ és $R(s)$ unimoduláris mátrixok úgy, hogy

$$W_{SM}(s) = L(s)W(s)R(s). \quad (F2.22)$$

Ha tehát $W(s)$ ($m \times m$) típusú átviteli függvény mátrix, akkor léteznek $\tilde{L}(s)$ és $\tilde{R}(s)$ ($m \times m$) méretű unimoduláris mátrixok úgy, hogy

$$W(s) = \tilde{L}(s)W_{SM}(s)\tilde{R}(s), \text{ például } \tilde{L}(s) = [L(s)]^{-1} \text{ és } \tilde{R}(s) = [R(s)]^{-1}. \quad (F2.23)$$

Legyen

$$N(s) := \text{diag}(\varepsilon_1(s), \dots, \varepsilon_r(s), 0, \dots, 0) \text{ és } D(s) := \text{diag}(\delta_1(s), \dots, \delta_r(s), 1, \dots, 1), \quad (F2.24)$$

akkor

$$\begin{aligned} W_{SM}(s) &= N(s)[D(s)]^{-1}, \\ W(s) &= \tilde{L}(s)N(s)[D(s)]^{-1}\tilde{R}(s) = \underbrace{\tilde{L}(s)N(s)}_{W_N(s)} \underbrace{[[\tilde{R}(s)]^{-1}D(s)]^{-1}}_{W_D(s)} =: \\ &=: W_N(s)[W_D(s)]^{-1}, \end{aligned} \quad (F2.25)$$

amelyet jobb oldali mátrix tört leírásnak (RMFD) nevezünk.

Megmutatható, hogy $W_D(s)$ ekvivalens egy $P(s)$ oszlop-proper mátrixszal, amiből következik, hogy a pólusokat definiáló $p_p(s)$ polinom fokszáma egyenlő a $P(s)$ oszlopai fokszámainak összegével. Világos, hogy az RMFD nem egyértelmű, mivel tetszőleges nonszinguláris $H(s)$ mátrix (jobb oldali közös faktor) esetén $W(s) = W_N(s)H(s)[W_D(s)H(s)]^{-1}$. Ha azonban $W_N(s)$ és $W_D(s)$ egyedüli közös faktora unimoduláris mátrixok, akkor a $(W_N(s), W_D(s))$ RMFD-t irreducibilisnek nevezzük. Ha az RMFD irreducibilis, akkor

- i) $s = z_i$ zérus helye $W(s)$ -nek $\Leftrightarrow W_N(z_i)$ rangja nem maximális,
- ii) $s = p_i$ pólusa $W(s)$ -nek $\Leftrightarrow W_D(p_i)$ szinguláris, ami azt jelenti, hogy $W(s)$ pólus polinomja $p_p(s) = \det[W_D(s)]$.

A bal oldali mátrix tört leírás (LMFD) hasonlóan képezhető, de a mátrixokat másként kell csoportosítani, kihasználva a diagonális mátrixok által kínált lehetőségeket:

$$\begin{aligned} W(s) &= \tilde{L}(s)[D(s)]^{-1}N(s)\tilde{R}(s) = \underbrace{[D(s)[\tilde{L}(s)]^{-1}]^{-1}}_{\overline{W}_D(s)} \underbrace{[N(s)\tilde{R}(s)]}_{\overline{W}_N(s)} =: \\ &=: [\overline{W}_D(s)]^{-1}\overline{W}_N(s). \end{aligned} \quad (F2.26)$$

A bal és jobb oldali mátrix leírásokat a Smith–McMillan-alakból vezettük le, ahol a faktorok polinom mátrixok voltak. A leírás azonban sokkal általánosabb, mivel a $W_N(s), W_D(s), \overline{W}_D(s), \overline{W}_N(s)$ mátrixok elemei általában racionális függvények. Általános alakhoz juthatunk úgy is, ha az MFD eredetileg kapott polinom mátrixait elosztjuk ugyanazzal a stabil polinommal.

Példa: Határozzuk meg a zérushelyeket és pólusokat, valamint a RMFD felbontást, ha az átviteli függvény mátrix

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{4}{(s+1)(s+3)} & \frac{-0.5}{s+1} \\ \frac{1}{s+3} & \frac{2}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix}.$$

A korábbi jelölésekkel $D_W(s) = (s+1)(s+3) = s^2 + 4s + 3$ és

$$P(s) = \begin{bmatrix} 4 & -0.5(s+3) \\ s+1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg $P(s)$ Smith-alakját elemi transzformációk felhasználásával:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{-(s+3)}{8} \\ s+1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(s+1) & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{-(s+3)}{8} \\ 0 & \frac{s^2 + 4s + 19}{8} \end{bmatrix},$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{s+3}{8} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{s^2 + 4s + 19}{8} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\varepsilon}_1 = 1,$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 + 4s + 19 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\varepsilon}_2 = s^2 + 4s + 19 \Rightarrow s_{1,2} = -2 \pm j\sqrt{15}.$$

Innen egyszerű számítással kapjuk, hogy $W(s)$ Smith–McMillan-alakja, zérushelyei és pólusai a következők:

$$\varepsilon_1 / \delta_1 = \bar{\varepsilon}_1 / D_W = \frac{1}{(s+1)(s+3)},$$

$$\varepsilon_2 / \delta_2 = \bar{\varepsilon}_2 / D_W = \frac{s^2 + 4s + 19}{(s+1)(s+3)} = \frac{(s+2-j\sqrt{15})(s+2+j\sqrt{15})}{(s+1)(s+3)},$$

$$W_{SM}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+3)} & 0 \\ 0 & \frac{s^2 + 4s + 19}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix},$$

$p_z(s) = s^2 + 4s + 19 = (s+2-j\sqrt{15})(s+2+j\sqrt{15})$ zérus hely polinom,

$p_p(s) = (s+1)^2(s+3)^2$ pólus polinom.

Az RMFD meghatározásához előbb képezzük az $L(s)$ és $R(s)$ eredő transzformációkat és ezek inverzeit:

$$L = L_3 L_2 L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(s+1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -2(s+1) & 8 \end{bmatrix},$$

$$R = R_1 = \begin{bmatrix} 1 & (s+3)/8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{L} = L^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ s+1 & 8 \end{bmatrix}, \quad \tilde{R} = R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -(s+3)/8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az RMFD meghatározása ezután már egyszerű:

$$W_N(s) = \tilde{L}N = L^{-1}N = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ s+1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 + 4s + 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ s+1 & \frac{s^2 + 4s + 19}{8} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} W_D(s) &= \tilde{R}^{-1}D = RD = \begin{bmatrix} 1 & (s+3)/8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+1)(s+3) & 0 \\ 0 & (s+1)(s+3) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (s+1)(s+3) & (s+1)(s+3)^2/8 \\ 0 & (s+1)(s+3) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$W(s) = W_N(s)[W_D(s)]^{-1},$$

$$W(s) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ s+1 & \frac{s^2 + 4s + 19}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+1)(s+3) & (s+1)(s+3)^2/8 \\ 0 & (s+1)(s+3) \end{bmatrix}^{-1}.$$

F3. KVADRATIKUS PROGRAMOZÁSI ALGORITMUSOK

A kvadratikus programozás alapfeladata a következő:

$$\min_x J(x) = \frac{1}{2} \langle Hx, x \rangle + \langle c, x \rangle + d, \quad (\text{F3.1a})$$

$$x \geq 0, \quad A_1 x = b_1, \quad A_2 x \leq b_2, \quad (\text{F3.1b})$$

ahol $x \in R^n$, $H \geq 0$ $n \times n$ méretű pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrix, $b_1 \in R^{m_1}$, $b_2 \in R^{m_2}$, $J'_x = Hx + c = g(x)$ a célfüggvény gradiense és $J''_x = H$ a célfüggvény Hess-mátrixa. A korlátozások egyenlőség és egyenlőtlenség alakjában adóttak. A minimum helyét d nem befolyásolja, ezért el is hagyható lenne.

Mivel $H \geq 0$ miatt $J(x)$ konvex és a korlátozások lineárisak, ezért a minimum szükséges feltétele nem túl szigorú feltételek teljesülésekor (pl. $Z^T H Z$ pozitív definit, lásd később) egyúttal elégséges feltétel is. A minimum szükséges feltételét a könyv I. kötete 12. fejezetének 12.1 tétel adja.

Ha A_i sorait rendre $a_{i1}^T, \dots, a_{im_i}^T$ jelölik, akkor $A_1 x = b_1$ ekvivalens $a_{1j}^T x - b_{1j} = 0$ -val, $j = 1, \dots, m_1$, és $A_2 x \leq b_2$ ekvivalens $a_{2j}^T x - b_{2j} \leq 0$ -val, $j = 1, \dots, m_2$. A skalár multiplikátorral szorzott $\lambda_{1j}(a_{1j}^T x - b_{1j})$ és $\lambda_{2j}(a_{2j}^T x - b_{2j})$ korlátozások rendre felírhatók a $\langle \lambda_1, A_1 x - b_1 \rangle = \langle A_1^T \lambda_1, x \rangle - \langle \lambda_1, b_1 \rangle$ és a $\langle \lambda_2, A_2 x - b_2 \rangle = \langle A_2^T \lambda_2, x \rangle - \langle \lambda_2, b_2 \rangle$ alakban is a λ_1 és λ_2 vektor multiplikátorokkal. Mivel $J'_x = Hx + c$ és $-x \leq 0$, ezért a minimum feltétele

$$Hx + c - \lambda + A_1^T \lambda_1 + A_2^T \lambda_2 = 0, \quad (\text{F3.2a})$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad \lambda_i x_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{F3.2b})$$

$$\lambda_{2i} \geq 0, \quad \lambda_{2i}(a_{2i}^T x_i - b_{2i}) = 0, \quad i = 1, \dots, m_2, \quad (\text{F3.2c})$$

$$A_1 x = b_1. \quad (\text{F3.2d})$$

F3.1 Aktív halmaz módszerek

F3.1.1 Egyenlőség alakjában adott korlátozások

Legyen az optimalizálási feladat

$$\min_x J(x) = \frac{1}{2} \langle Hx, x \rangle + \langle c, x \rangle + d, \quad (\text{F3.3a})$$

$$Ax = b, \quad (\text{F3.3b})$$

ahol A $m \times n$ típusú mátrix, amelynek sorai $a_1^T, \dots, a_m^T$.

Egy x pontot *megvalósítható pontnak* (feasible point) fogunk nevezni, ha kielégíti a korlátozást. Ha x_0 az optimális megvalósítható megoldás és x egy (nem optimális) megvalósítható megoldás, akkor $x_0 = x + p$, ahol p -t *megvalósítható iránynak* (feasible direction) fogjuk nevezni.

Feltesszük, hogy $m < n$ és $\text{rank}(A) = m$, különben ugyanis vagy redundáns, vagy pedig ellentmondó egyenletek szerepelnének a korlátozásban. Elvben tehát $n - m$ változót ki lehet küszöbölni a változók közül. Fejezzük ki x -et az $x = Yx_Y + Zx_Z$ alakban, ahol $AY = I$ és $AZ = 0$. Ekkor $Ax = x_Y$ és $Zx_Z \in \text{kernel}(A)$. Mivel $x_0 = Yx_{0Y} + Zx_{0Z}$, $Ax_0 = AYx_{0Y} + AZx_{0Z} = x_{0Y} = b$, $x = Yx_Y + Zx_Z$ és $Ax = AYx_Y + AZx_Z = x_Y = b = x_{0Y}$, ezért $x = Yx_{0Y} + Zx_Z$ és

$$p = x_0 - x = Z(x_{0Z} - x_Z) = Zp_Z \quad \text{és} \quad Ap = AZp_Z = 0. \quad (\text{F3.4})$$

A Lagrange-multiplikátor szabály szerint (F3.3a-b) optimális megvalósítható megoldása kielégíti a

$$J'_x(x_0) + A^T \lambda_0 = Hx_0 + c + A^T \lambda_0 = 0 \Rightarrow Hx_0 + c = -A^T \lambda_0 \quad (\text{F3.5a})$$

$$Z^T g(x_0) = -Z^T A^T \lambda_0 = 0^T \quad (\text{F3.5b})$$

feltételt, ahol kihasználtuk, hogy $g(x_0) = Hx_0 + c = J'_x(x_0)$ a gradiens az optimum helyén és $Z^T A^T = 0^T$.

Legyen x egy (közelítő) megvalósítható megoldás. Mivel $x_0 = x + p$ és $p = Zp_Z$, ezért

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle H(x+p), x+p \rangle + \langle c, x+p \rangle + d &= \\ &= \frac{1}{2} \langle Hp, p \rangle + \langle Hx, p \rangle + \frac{1}{2} \langle Hx, x \rangle + \langle c, p \rangle + \langle c, x \rangle + d = \\ &= \frac{1}{2} \langle Hp, p \rangle + \langle Hx + c, p \rangle + d + \frac{1}{2} \langle Hx, x \rangle + \langle c, x \rangle = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \langle Z^T H Z p_Z, p_Z \rangle + \langle Z^T g(x), p_Z \rangle + d + \frac{1}{2} \langle Hx, x \rangle + \langle c, x \rangle.$$

Az x (közelítő) megvalósítható megoldás ismeretében az optimális x_0 megvalósítható megoldás a következő, korlátozás nélküli optimalizálási feladat megoldásaként nyerhető:

$$\min_{p_Z} J(p_Z) = \frac{1}{2} \langle \hat{H} p_Z, p_Z \rangle + \langle \hat{c}, p_Z \rangle + \hat{d}, \quad (\text{F3.6a})$$

$$\hat{H} = Z^T H Z \geq 0, \quad (\text{F3.6b})$$

$$\hat{c} = Z^T g(x), \quad (\text{F3.6c})$$

$$\hat{d} = d + \frac{1}{2} \langle Hx, x \rangle + \langle c, x \rangle. \quad (\text{F3.6d})$$

Az optimális megoldás a $J'_{p_Z} = \hat{H} p_Z + \hat{c} = 0$ feltételből határozható meg:

$$Z^T H Z p_Z = -Z^T g(x), \quad (\text{F3.7a})$$

ahol $g(x) = Hx + c$ az eredeti célfüggvény gradiense a közelítő megoldás helyén. Ha "+" jelöli a Moore–Penrose pszeudoinverzét, akkor

$$p_Z = -(Z^T H Z)^+ Z^T g(x) \text{ és } p = Z p_Z \text{ megvalósítható irány.} \quad (\text{F3.7b})$$

A módszer alkalmazásához ismerni kell egy kezdeti x megvalósítható megoldást (initial feasible point) és meg kell határozni A -nak az Y, Z felbontását. A MATLAB szolgáltatásaival $Y = \text{pinv}(A)$ és $Z = \text{null}(A)$ megfelelne, de jelentős számítási idővel jár, és kevésbé előnyös iteratív alkalmazáskor, amikor A lépésről lépésre változhat.

A QR felbontást alkalmazva a következőképp járhatunk el:

- i) Képezzük az A^T mátrix QR felbontását a MATLAB `qr` függvényével. Akkor $A^T = Q * R$, ahol Q ortonormált, R felső háromszögmátrix, és ezért $A * Q = R^T = [R_1^T \ 0]$.
- ii) $Y = Q(:, 1:m) * (R_1^T)^{-1}$,
- iii) $Z = Q(:, m+1:n)$,
- iv) $x = Y * b$ megvalósítható megoldás.

Ha az iteráció során egy új $\hat{a}^T$ sort kell beszúrni, mert a feltételek bővülnek, akkor

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A \\ \hat{a}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T Q^T \\ \hat{a}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^T & 0 \\ \hat{a}^T Q \end{bmatrix} Q^T = \begin{bmatrix} \hat{R}_1^T & 0 \end{bmatrix} \hat{Q}^T,$$

ahol $\hat{Q} = QH$ és H Householder-mátrix. $\hat{Q}$ első $1, \dots, m$ oszlopa azonos Q oszlopokkal, míg a többi $m+1, \dots, n$ oszlopa lineáris kombinációja Q utolsó $m+1, \dots, n$ oszlopának.

Ha az iteráció során az s -edik sort el kell hagyni A -ból, mert a feltételek száma csökken, akkor $\hat{A}$ -nak eggyel kevesebb sora lesz, mint A -nak, ezért $\hat{A}Q = \begin{bmatrix} M & 0 \end{bmatrix}$, ahol M -nek az első $1, \dots, s-1$ sora azonos R_1^T soraival, és a maradék $s, \dots, m-1$ sorokban a diagonálisban lévő elemtől jobbra is van még egy nemnulla elem. M első háromszögmátrix alakra hozható síkbeli forgatás tarszformációkkal, amelyeket Q -ra jobbról kell alkalmazni. Ezek a forgatások nem befolyásolják Q utolsó $n-m$ oszlopát, ezért $\hat{Z}$ a régi Z mátrix lesz, kiegészítve egy extra oszloppal: $\hat{Z} = \begin{bmatrix} Z & \hat{z} \end{bmatrix}$, ahol $\hat{z}$ lineáris kombinációja Q első m oszlopának.

F3.1.2 Egyenlőtlenség alakjában adott korlátozások

Legyen az optimalizálási feladat

$$\min_x J(x) = \frac{1}{2} \langle Hx, x \rangle + \langle c, x \rangle + d, \quad (\text{F3.8a})$$

$$Ax \leq b, \quad (\text{F3.8b})$$

ahol A $m \times n$ típusú mátrix, amelynek sorai $a_1^T, \dots, a_m^T$.

Ha x egy megvalósítható pont, akkor $Ax \leq b$. Határozzuk meg az aktív korlátozásokat, amelyre $a_j^T x = b_j$, $j = 1, \dots, m_x$, és helyezzünk el minden ilyen a_j^T -t és b_j -t rendre egy A_1 mátrixban és egy b_1 vektorban, akkor $A_1 x = b_1$. Alkalmazzuk ezután az előző módszert az A_1 mátrixszal és a b_1 vektorral. A nem aktív korlátozások A_2 -be és b_2 -be kerülnek, tehát $A_2 x < b_2$.

Egy p irány ún. javító megvalósítható irány, ha $A_1 p \leq 0$ és $\langle g(x), p \rangle < 0$. Ekkor ugyanis $\lambda > 0$ esetén $J(x + \lambda p) \approx J(x) + \lambda \langle g(x), p \rangle \leq J(x)$, továbbá $A_1(x + \lambda p) = A_1 x + \lambda A_1 p \leq b_1$ és $A_2(x + \lambda p) = A_2 x + \lambda A_2 p < b_2$, feltéve, hogy

$\lambda > 0$ elég kicsi. Ezért a p irányban megfelelő lépésközzel továbblépve a $J(x)$ kritérium csökken és a korlátozás is teljesül.

A $P = P^T$ mátrixot projekciós mátrixnak nevezzük, ha $P^2 = P$. Például $P = I - A_1^+ A_1$ egy projekciós mátrix, ahol A_1^+ a Moore–Penrose pszeudoinverze A_1 -nek. Ha A_1 $m_1 \times n$ méretű és $\text{rank}(A_1) = m_1 < n$, akkor $P = I - A_1^T (A_1 A_1^T)^{-1} A_1$ szintén egy projekciós mátrix. Ha P projekciós mátrix és $p = -Pg(x)$, akkor p egy javító megvalósítható irány, mivel

$$\begin{aligned} \langle g(x), p \rangle &= \langle g(x), -Pg(x) \rangle = -\langle g(x), P^2 g(x) \rangle = -\langle Pg(x), Pg(x) \rangle = \\ &= -\|Pg(x)\|^2 < 0. \end{aligned}$$

Az A_1 -hez más technikával meghatározott $p = -Z(Z^T HZ)^+ Z^T g(x)$ irány is egy javító megvalósítható irány, mivel $A_1 Z = 0$ miatt $A_1 p = 0$, és p az x pontból a minimumhoz tartozó x_0 pontba mutat, tehát ebben az irányban a kritériumfüggvény csökken.

Vigyázni kell azonban milyen α lépéshosszt választunk, mert nagy lépéshossz esetén az új pont nem biztos, hogy megvalósítható (a korlátozásokat kielégítő) marad.

Ha nem sérülnének a korlátozások, akkor az *optimális válsztás*

$$\alpha_{opt} = \arg \min \varphi(\alpha) = \arg \min J(x + \alpha p)$$

lenne, amiből

$$\varphi'(\alpha) = \langle H(x + \alpha p) + c, p \rangle = \langle g(x), p \rangle + \alpha \langle Hp, p \rangle$$

miatt következik

$$\alpha_{opt} = -\frac{\langle g(x), p \rangle}{\langle Hp, p \rangle}. \quad (\text{F3.9})$$

Azonban egy *maximális lépéshossz* is megadható, amelynél nagyobb lépéshossznál már az eddig teljesülő inaktív korlátozások sérülnének. Jelölje az aktív és az inaktív korlátozások indexhalmazát rendre I_{A_1} illetve I_{A_2} , akkor egy eddig inaktív korlátozás sérülni kezdene, ha $a_{2i}^T(x + \alpha p) = b_{2i}$, $i \in I_{A_2}$, ezért a maximális lépéshossz

$$\alpha_{\max} = \min \left\{ \frac{b_{2i} - a_{2i}^T x}{a_{2i}^T p} : i \in I_{A_2} \right\}. \quad (\text{F3.10})$$

Egy másik problémát a *Lagrange-multiplikátorok* okozhatnak az optimum helyén. Egyenlőtlenség alakjában adott $Ax \leq b$ korlátozások esetén (F3.2a-b) speciális alakja

$$Hx + c + A^T \lambda = 0, \\ \lambda_i \geq 0, \quad \lambda_i (a_i^T x_i - b_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Látható, hogy az inaktív korlátozásokhoz tartozó multiplikátorok mind nullák: $\lambda_i = 0, i \in I_{A_2}$, ezért a feltételek egyszerűsödnek:

$$Hx + c = g(x) = -A_1^T \lambda_1 \text{ és } \lambda_1 \geq 0. \quad (\text{F3.11})$$

Meg kell tehát oldani a $g(x) = -A_1^T \lambda_1$ egyenletrendszert λ_1 -re és ellenőrizni kell, hogy λ_1 minden komponense pozitív-e. Ha vannak negatív komponensek is, akkor célszerű elhagyni mindazon feltételt az aktív halmazból, amelyik a legnagyobb abszolút értékű negatív multiplikátorhoz tartozik. Jelölje ezt $\lambda_{1,delete} = \min \{ \lambda_{1i} : \lambda_{1i} < 0, i \in I_{A_1} \}$, akkor az elhagyandó aktív feltételek:

$$I_{delete} = \{ i \in I_{A_1} : \lambda_{1i} = \lambda_{1,delete}, i \in I_{A_1} \}. \quad (\text{F3.12})$$

A teszthez a λ_1 Lagrange-multiplikátor meghatározható $\lambda_1 = -(A_1 A_1^T)^{-1} A_1 g(x)$ alapján, vagy ha már meghatároztuk az $A_1^T = Q * R$ felbontást, akkor MATLAB környezetben balosztással is:

$$\lambda_1 = -R \setminus Q' \cdot g(x). \quad (\text{F3.13})$$

F3.1.3 Kezdeti megvalósítható pont meghatározása

- i) Legyen a korlátozás $Ax \leq b$ alakú, ahol az A mátrix $m \times n$ méretű. Válasszunk egy tetszőleges x^0 kezdőpontot.
- ii) Legyen $d = Ax^0 - b$.
- iii) Ha $d = (d_1, \dots, d_m)^T \leq 0$, akkor stop (x^0 megvalósítható pont).
- iv) $d_{\max} = \max \{ d_i : 1 \leq i \leq m \}$.

v) Legyen $\hat{x} = (x^T \ z)^T$, $z \in R^1$, $\hat{A} = [A \ \mathbf{1}_{m,1 \times 1}]$, $\hat{J}(\hat{x}) = (0 \ \dots \ 0 \ 1)\hat{x} = z$ és $\hat{x}^0 = [x^{0T} \ d_{\max}]^T$. Oldjuk meg a következő (speciális lineáris programozási, LP) *segédproblémát*: $\min_{\hat{x}} \hat{J}(\hat{x}) = z$, $\hat{A}\hat{x} \leq b$, ahol $\hat{x}^0$ megvalósítható induló pont a segédfeladathoz. Bármilyen, az LP feladat megoldására alkalmas módszer (szimplex stb.) szóba jöhet, beleértve az aktív halmaz módszert is.

vi) Legyen $\hat{x}_{opt} = (x_{opt}^T \ z_{opt})^T = \arg \min_{\hat{x}} \hat{J}(\hat{x})$ a segédfeladat optimális megoldása.

Ha $z_{opt} = \hat{J}(\hat{x}_{opt}) < 0$, akkor x_{opt} az eredeti feladat egy megvalósítható pontja,

mivel $a_i^T x_{opt} - z_{opt} \leq b_i \Rightarrow a_i^T x_{opt} - b_i \leq z_{opt} \leq 0$, $i = 1, \dots, m \Rightarrow Ax_{opt} \leq b$.

Ellenkező esetben az eredeti feladatnak nincs megvalósítható megoldása.

Foglaljuk össze az aktív halmaz módszeren és a megvalósítható irányokon alapuló eddigi eredményeket egy algoritmusban.

F3.1.4 Az aktív halmaz módszeren és a megvalósítható irányokon alapuló QP algoritmus.

- 1) Határozzunk meg egy induló x^0 megvalósítható irányt (lásd előző LP segéd-probléma). Legyen $k = 0$.
- 2) Határozzuk meg x^k esetén az aktív és az inaktív korlátozásokat és az azokat azonosító $I_{A_1}, A_1, b_1, I_{A_2}, A_2, b_2$ jellemzőket.
- 3) Határozzuk meg a $g(x^k)$ gradienst és a p^k javító megvalósítható irányt.
- 4) Ha $p^k \neq 0$, akkor határozzuk meg $\alpha = \min\{\alpha_{opt}, \alpha_{\max}\}$ értékét. Legyen az új megvalósítható pont $x^{k+1} := x^k + \alpha p^k$, $k := k + 1$ és ugrás 2)-re.
- 5) Ha $p^k = 0$, akkor ellenőrizendő, hogy teljesül-e az optimum feltétele. Ehhez meg kell határozni a λ_1 Lagrange-multiplikátort az aktív korlátozásokhoz.
- 6) Ha $\lambda_1 \geq 0$, akkor optimumban vagyunk és stop.
- 7) Ha $\neg(\lambda_1 \geq 0)$, akkor meghatározandó $\lambda_{1,delete}$ és az aktív korlátozásokból elhagyandó feltételek I_{delete} indexhalmaza. Elvégzendő az aktív korlátozások redukciója és ugrás 2)-re.

Az algoritmus minden lépésére korábban már eljárásokat dolgoztunk ki.

F3.1.5 Általános nemlineáris programozási feladat (NLP)

$$\min F_0(x) \quad (\text{F3.14a})$$

$$F_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{F3.14b})$$

Megoldására a QP módszert *lokálisan*, az x^k aktuális közelítés környezetében alkalmazhatjuk a következő algoritmus szerint:

- 1) Válasszunk egy x^0 megvalósítható pontot, és legyen $k = 0$.
- 2) Linearizáljuk a nemlineáris függvényeket az x^k közelítő megoldás helyén, és vezessük be a következő jelöléseket: $\tilde{x} := x - x_k$, $g(x^k) := F_{0x}'(x^k)$, $H := F_{0xx}''(x^k)$, $a_i^T := F_{ix}'(x^k)$, $b_i := -F_i(x^k)$, $i = 1, \dots, m$.
- 3) Alkalmazzuk az aktív halmaz módszeren és a megvalósítható irányokon alapuló QP algoritmust, de annak 4) pontjában alkalmazzunk iránymenti keresést az $\alpha \geq 0$ skalárváltozóban $\alpha = \arg \min J(\alpha p^k)$ meghatározására, és tartsuk be az $F_i(x^k + \alpha p^k) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$ feltételt az iránymenti keresés során.
- 4) Az aktív halmaz módszer stop feltételének elérésekor legyen $x^{k+1} := x^k + \tilde{x}_{opt}$ és ugrás 1)-re, illetve valamilyen ésszerű leállási feltétel teljesülésekor (csak kicsit változó x^{k+1} , vagy a maximális iterációszám elérése) stop.

F3.1.6 Az Optimization Toolbox főbb szolgáltatásai

A MATLAB *Optimization Toolbox* függvényeket tartalmaz a különféle optimalizálási feladatok megoldására. Az ott használt jelölésekkel a feladat általános alakja

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ G(x) \leq 0, \quad vlb \leq x \leq vub, \end{aligned}$$

ahol x vektor, $f(x)$ skalárértékű optimalizálási kritérium, $G(x)$ vektorértékű korlátozás, vlb és vub az x vektor alsó, illetve felső korlátja.

Általános elvként elmondható, hogy a hívásoknál 'fun' egy olyan függvénynek a neve, amelyik a bemenetként kapott x -hez meghatározza $f(x)$ és $G(x)$ értékét, azaz $[f, G] = \text{fun}(x)$. Ha szerepel 'grad' a híváskor, akkor ez a függvény számítja az $df := f'(x)$ gradiens vektort és a $dG := G'(x)$ Jacobi-mátrixot, azaz $[df, dG] = \text{grad}(x)$. Ha nem szerepel 'grad' a híváskor, és a feladatban mégis

szükség van rá, akkor az optimalizálási eljárás ezeket f és G értékeiből approximálja. A $H := f''(x)$ Hess-mátrix közelítése numerikus approximációval kerül meghatározásra. Ha vlb vagy vub dimenziója kisebb x dimenziójánál, akkor x első komponensei közül csak annyi van alsó, illetve felső korlátozásnak alávetve, amennyi vlb , illetve vub dimenziója. Ha x_0 szerepel a híváskor és megvalósítható, akkor innen indul az optimalizálás, ellenkező esetben egy kezdeti segédprobléma automatikusan meghatározza az induló x_0 értéket. Ha a bemeneti paraméterek között szerepel *options*, akkor ez befolyásolja a közbenső lépések listázását, x_{opt} , illetve $f(x_{opt})$ pontosságát stb. A kimeneti paraméterek között x_{opt} a módszerrel megtalált optimális megoldás, és ha szerepel, akkor *options* információkat tartalmaz az optimalizálás folyamatáról.

A MATLAB *Optimization Toolbox* szolgáltatásai közül az eddigiekkel összefüggésben a következőket emeljük ki:

Nemlineáris programozás (NLP):

$[x_{opt}, options] = \text{constr}('fun', x_0, options, vlb, vub, 'grad')$

Kvadratikus programozás (QP):

$[x_{opt}, lambda, how] = \text{qp}(H, c, A, b, vlb, vub, neqstr)$

ahol az optimalizálási feladat $\min f(x) = \frac{1}{2} \langle Hx, x \rangle + \langle c, x \rangle$, $Ax \leq b$, $vlb \leq x \leq vub$ és *neqstr* az egyenlőség alakú korlátozások száma, amelyek A és b elején helyezkednek el. A *lambda* kimeneti paraméter elején a nem egyenlőség alakú korlátozásokhoz tartozó λ multiplikátorok állnak. Nulla λ_i érték inaktív korlátozást jelöl. A *lambda* végén álló értékek a $vlb \leq x$ és az $x \leq vub$ alakú korlátozások aktív vagy inaktív voltát mutatják. A *how* = 'ok' string érték azt mutatja, hogy az optimalizálás probléma nélkül zajlott, *how* = 'infeasible' jelzi, ha a feladatnak nincs megvalósítható x megoldása.

Lineáris programozás (LP):

$[x_{opt}, lambda, how] = \text{lp}(c, A, b, vlb, vub, x_0, neqstr)$

ahol a feladat $\min f(x) = \langle c, x \rangle$, $Ax \leq b$, $vlb \leq x \leq vub$ és *neqstr* az egyenlőség alakú korlátozások száma, amelyek A és b elején helyezkednek el. A *lambda* és *how* kimeneti paraméterek jelentése hasonló a QP esetéhez.

Az Optimization Toolbox függvényei korábban mind az aktív halmaz és a megvalósítható irányok módszerén alapultak. Ez vonatkozott az LP-re is, amely a QP-ben használt módszert alkalmazta. A MATLAB 6.x verzióban az Optimization Toolbox függvényeinek elnevezései és az optimalizálási algoritmusok részben módosultak. A kvázi Newton-módszerek körében alkalmazásra került a BFGS (Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno) módszer, amely a Hess-mátrixot a gradiens értékeiből $\lim_{i \rightarrow \infty} H_i \rightarrow H$ alakkal közelíti, valamint a DFP (Davidon–Fletcher–

Powell) módszer és a módosított DFP (Gill&Murray) módszer, amelyek a $\lim_{i \rightarrow \infty} H_i \rightarrow H^{-1}$ alakkal közelítenek. Mindhárom módszer H_{i+1} értékét H_i -ből, valamint a gradiens értékéből határozza meg (a DFP módszert a könyv I. kötetének 12. fejezetében mutattuk be [1]). Az NLP probléma keretprogramja a Schittkowski által javasolt SQP (Sequential Quadratic Programming) módszert használja, amely BFGS módszerrel frissíti a Lagrange-függvény Hess-mátrixát, QP részfeladattal határozza meg a keresési irányt és egy értékelő függvénnyel (merit function) bünteti a korlátozások megsértését az iránymenti keresés során.

F3.2 A kvadratikus programozási feladat visszavezetése lineáris komplementer problémára (LCP)

Tekintsük a kvadratikus programozás feladatát egyenlőtlenség alakjában adott korlátozások esetén:

$$\min_x J(x) = \frac{1}{2} \langle Hx, x \rangle + \langle c, x \rangle + d, \quad (\text{F3.15a})$$

$$x \geq 0, \quad Ax \leq b. \quad (\text{F3.15b})$$

A minimum szükséges feltételét a könyv I. kötete 12. fejezetének 12.3 tétele, a Kuhn–Tucker-tétel adja. Az optimum feltétele a $-x \leq 0$ korlátozáshoz tartozó λ_1 és az $Ax - b \leq 0$ korlátozáshoz tartozó λ_2 multiplikátorokkal a Kuhn–Tucker-tétel szerint

$$Hx + c - \lambda_1 + A^T \lambda_2 = 0, \quad (\text{F3.16a})$$

$$\lambda_{1i} \geq 0, \quad \lambda_{1i} x_i = 0, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{F3.16b})$$

$$\lambda_{2i} \geq 0, \quad \lambda_{2i} (a_i^T x - b_i) = 0, \quad a_i^T x - b_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (\text{F3.16c})$$

Ha bevezetjük az $Ax \leq b$ korlátozáshoz a $v \geq 0$ segédváltozót (slack variable), akkor ez a korlátozás is egyenlőség típusúvá válik: $Ax + v = b$. Az optimalizálási feladat transzformált alakja ekkor a következő lesz:

$$Ax + v = b, \quad (\text{F3.17a})$$

$$-Hx - A^T \lambda_2 + \lambda_1 = c, \quad (\text{F3.17b})$$

$$\langle x, \lambda_1 \rangle = 0, \quad \langle \lambda_2, v \rangle = 0, \quad (\text{F3.17c})$$

$$x, \lambda_1, \lambda_2, v \geq 0, \quad (\text{F3.17d})$$

vagy mátrix alakban

$$\begin{bmatrix} I_{m \times m} & 0_{m \times n} & 0_{m \times m} & A \\ 0_{n \times m} & I_{n \times n} & -A^T & -H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}. \quad (\text{F3.18})$$

Induláskor választható a korlátozás nélküli feladat $x = -H^{-1}c$, megoldása, valamint az ehhez tartozó kisegítő (slack) változó $v = b + AH^{-1}c$. Szorozzuk meg a (F3.18) egyenletet balról egy alkalmasan választott mátrixszal, amely a jobb oldalt az így meghatározott induló értékekkel teszi egyenlővé a szorzás után, akkor

$$\begin{bmatrix} I_{m \times m} & AH^{-1} \\ 0_{n \times m} & -H^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m \times m} & 0_{m \times n} & 0_{m \times m} & A \\ 0_{n \times m} & I_{n \times n} & -A^T & -H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & AH^{-1} \\ 0 & -H^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I_{m \times m} & AH^{-1} & -AH^{-1}A^T & 0_{m \times n} \\ 0_{n \times m} & -H^{-1} & H^{-1}A^T & I_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b + AH^{-1}c \\ -H^{-1}c \end{bmatrix},$$

és a változók sorrendcseréjével a bal oldalon

$$\begin{bmatrix} I_{m \times m} & 0_{m \times n} & -AH^{-1}A^T & AH^{-1} \\ 0_{n \times m} & I_{n \times n} & H^{-1}A^T & -H^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ x \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b + AH^{-1}c \\ -H^{-1}c \end{bmatrix}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$M = \begin{bmatrix} AH^{-1}A^T & -AH^{-1} \\ -H^{-1}A^T & H^{-1} \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} b + AH^{-1}c \\ -H^{-1}c \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{F3.19})$$

akkor a $q = w - Mz$, $w \geq 0$, $z \geq 0$, $\langle w, z \rangle = 0$ optimalizálási feladat transzformált új alakja az alábbi ún. *lineáris komplementer probléma* (LCP, linear complementary problem) lesz.

F3.2.1 Pivot lépés

Vonatkoztassunk el a vizsgált esettől és tekintsük a következő problémát:

$$q = w + Az, \text{ az } A = [a_{ij}] \text{ mátrix } m \times n \text{ méretű, } \text{rank}(A) = m, \quad (\text{F3.20a})$$

$$w \geq 0, \quad z \geq 0, \quad (\text{F3.20b})$$

$$\langle w, z \rangle = 0. \quad (\text{F3.20c})$$

Az A mátrix m oszlopa kiválasztható *bázisnak*, míg a maradék oszlopok a *nembázis* vektorok. Ennek megfelelően z is partíciónálható bázis változókra és nembázis változókra.

A következő terminológia szokásos:

- i) (w, z) egy megoldás, ha teljesül (F3.20a). Ezek a megoldások egy m -dimenziós L sokaságot alkotnak az $m + n$ dimenziós térben.
- ii) (w, z) egy megvalósítható (feasible) megoldás, ha teljesül (F3.20a-b). A megvalósítható megoldások K konvex halmaza félterek metszete (poliéder).
- iii) (w, z) egy komplementer megoldás, ha teljesül (F3.20a,b,c).

Az L megoldás halmaznak alternatív alakjai vannak. Tegyük fel, hogy $a_{sr} \neq 0$, w_s bázis és z_r nembázis vektor, akkor elvégezhetünk egy pivot lépést a (F3.20a)-egyenleten, amelynek során elosztjuk az s -edik egyenletet a_{sr} -rel, miáltal z_r együtthatója 1 lesz, majd ezt az egyenletet rendre a_{ir} értékével megszorozzuk és levonjuk az i -edik egyenletből, minden $i \neq s$ esetén. Ezáltal elérjük, hogy az így korrigált mátrixban a bázissá vált z_r oszlopa az e_s egységvektor lesz:

$$\begin{aligned} q_s &= w_s + a_{s1}z_1 + \dots + a_{s,r-1}z_{r-1} + a_{sr}z_r + a_{s,r+1}z_{r+1} + \dots + a_{sn}z_n \Rightarrow \\ \frac{1}{a_{sr}}q_s &= z_r + \frac{a_{s1}}{a_{sr}}z_1 + \dots + \frac{a_{s,r-1}}{a_{sr}}z_{r-1} + \frac{1}{a_{sr}}w_s + \frac{a_{s,r+1}}{a_{sr}}z_{r+1} + \dots + \frac{a_{sn}}{a_{sr}}z_n, \\ (q_i - \frac{1}{a_{sr}}a_{ir}q_s) &= w_i + (a_{i1} - \frac{a_{s1}}{a_{sr}}a_{ir})z_1 + \dots + (a_{i,r-1} - \frac{a_{s,r-1}}{a_{sr}}a_{ir})z_{r-1} + \\ &\quad - \frac{1}{a_{sr}}a_{ir}w_s + (a_{i,r+1} - \frac{a_{s,r+1}}{a_{sr}}a_{ir})z_{r+1} + \dots + (a_{in} - \frac{a_{sn}}{a_{sr}}a_{ir})z_n, \text{ ha } i \neq r. \end{aligned}$$

Egy pivot lépés után (F3.20a) új alakja a következő lesz:

$$q' = w' + A' z' . \quad (\text{F3.20a*})$$

Vegyük észre, hogy a (w_s, z_r) pár helyet cserélt. A pivotális séma pivot lépések sorozatából áll, amelynek folyamán minden alkalommal dönteni kell arról, mi legyen a pivot pár, és rendelkezni kell arról is, mikor kell leállni. A pivot lépések sorozata L -nek egy ekvivalens leírását eredményezi az (F.20a*) alakban, amelyben (w', z') a (w, z) változók egy permutációja. Egy w' bázis egy m elemből álló részhalmaza a teljes $m + n$ elemű (w, z) -nek, amely pivot lépések sorozata révén áll elő, a maradék változókból álló z' halmaz a nembázis halmaz. Egy új (w'_s, z'_r) pivot pár az előző alakhoz csatlakozó új bázis alakra vezet.

A $(w', z') = (q', 0)$ pont, amelyben minden nembázis változót nullává tettünk, egy ún. *asszociált bázispont*. L nemdegradált, ha minden bázispont pontosan n nulla elemet tartalmaz (és egzaktul m nemnulla elemet). Feltesszük, hogy a probléma nemdegradált, ezért a megoldásnak akkor van n nemnulla komponense, ha bázispont. A bázispont megvalósítható, ha $q' > 0$. A megvalósítható bázispont a K halmaz egy extrémális pontja. Minden z'_j nembázis változóhoz legfeljebb egy megvalósítható pivot lehetséges. Ehhez z'_j értéke 0-tól növelhető, amíg csak teljesül $w' \geq 0$. Az első alkalommal, mondjuk $z'_j = \bar{z}'_j$ esetén, amikor w' valamelyik komponense, mondjuk w'_s nullává válik, a hozzá tartozó pont egy csatlakozó megvalósítható bázispont lesz, amelyet a (w'_s, z'_j) pivot pár definiál. Ha a'_j jelöli az A' mátrix j -edik oszlopát, akkor a $0 \leq z'_j \leq \bar{z}'_j$ intervallum minden $q' = w' + z'_j a'_j$ pontja megvalósítható, és a K halmaz egy korlátos élet alkotja, amelynek végpontjai az intervallum végpontjaihoz tartoznak. Ha az oszlopvektorra teljesül $a'_j \leq 0$, akkor az él nem korlátos. A K halmaznak egzaktul n éle található egy extremum pontban.

Megvalósítható pivotális sémában (feasible pivotal scheme) a sorozat megvalósítható pivot párokból áll, amelyek t -edik lépése után

$$q' = w' + A' z' , \quad q' > 0 . \quad (\text{F3.21})$$

Ekkor először egy nembázis változó, mondjuk z'_r kerül kiszelektálásra. A pivot séma befejeződik, ha a hozzá tartozó oszlopvektorra $a'_r \leq 0$ teljesül, ellenkező esetben

a pivot elemet a z'_r extrémum pont definiálja. A pivot séma proper, ha nem ismétlődik benne bázis halmaz. Mivel a bázis halmazok száma véges, ezért a pivot séma mindig befejeződik.

F3.2.2 Lineáris komplementer probléma megoldása

Az LCP probléma standard alakja a következő:

$$q = w - Mz, \quad (\text{F3.22a})$$

$$w \geq 0, \quad z \geq 0, \quad (\text{F3.22b})$$

$$\langle w, z \rangle = 0. \quad (\text{F3.22c})$$

A további vizsgálatok során feltesszük, hogy $w, q, z \in R^m$ és M egy $m \times m$ méretű mátrix. Ha $q \geq 0$, akkor választható $z = 0$, amikor is $w = q \geq 0$, és az LCP megoldásához jutottunk. Ezért a továbbiakban feltehető, hogy $\exists q_i < 0$.

Vezessünk be egy pótlólagos z_0 skalár változót, amelynek értékét vonjuk le mindegyik egyenlet jobb oldalából:

$$q = w - Mz - 1z_0 = q + A\tilde{z}, \quad (\text{F3.23a})$$

ahol $1 = (1, \dots, 1)^T$ egy tiszta egyesekből álló vektor,

$$A = \begin{bmatrix} -M & -1 \end{bmatrix} \text{ és } \tilde{z} = \begin{bmatrix} z \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad (\text{F3.23b})$$

és a nembázis halmazok $n = m + 1$ eleműek.

Induláskor legyen $z = 0$, és növeljük $z_0 \geq 0$ értékét fokozatosan, amíg $q = w - 1z_0 \geq 0$ először bekövetkezik. Legyen ekkor $w_r = 0$ és (w_r, z_0) az első pivot pár. Az első pivot pár alkalmazása után $t = 1$ és teljesül

$$q' = w' + A' \tilde{z}', \quad q' \geq 0. \quad (\text{F3.24})$$

Generálunk egy megvalósítható pivot sorozatot, amelynek bázispontjaira teljesül

$$\langle w, z \rangle = 0, \text{ azaz } w_i z_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{F3.25})$$

Itt (F3.24)-hoz tartozik egy nembázis komplementer pár, pl. $t = 1$ esetén (w_r, z_r) . Ha a w_r komplementesének, azaz z_r -nek az értékét növeljük (F3.24)-ben, akkor (F3.25) továbbra is teljesülni fog. Ha elérhető, hogy egy pivot z_r -t bázissá teszi, akkor ez a pivot lesz a második pivot, amely a megvalósítható (F3.24) alakot eredményezi $t = 2$ esetén. Ellenkező esetben a szekvencia befejeződik.

Tegyük fel, hogy $t \geq 1$ darab pivotnak a sorozata a (F3.24) megvalósítható alakhoz vezetett, ahol (F3.25) teljesült minden keletkezett megvalósítható bázis pontra. Ha z_0 nembázis, akkor egy komplementer megoldást találtunk, nevezetesen a végső bázispontot, és a sorozat befejeződik. Ha z_0 még mindig bázis, akkor tegyük fel, hogy a t -edik lépésben nembázissá vált változó a (w_s, z_s) komplementer pár egyike. Mivel (F3.25) érvényesült, ezért a pár mindkét komponense nembázis. Ez az egyetlen ilyen pár. Az éppen nembázissá vált pár egyikének a komplementjét meg kell növelni. Ekkor vagy egy egyértelmű $(t+1)$ -edik pivotot kapunk, vagy a szekvencia befejeződik. Ez teljessé teszi a sémát.

Az LCP megoldására pivot elem kiválasztásokon és pivot szekvencián alapuló módszert dolgozott ki Lemke [51]. A megoldás a kezdeti ún. Lemke-tabló fokozatos módosításával határozható meg. Az algoritmus megfogalmazásához szükség van néhány definícióra.

A (w, z, z_0) megoldást *majdnem komplementer bázis megvalósítható megoldásnak* (ACBFS, almost complementary basic feasible solution) nevezzük, ha

- i) (w, z, z_0) bázis megvalósítható megoldás,
- ii) valamilyen $s \in \{1, \dots, m\}$ esetén sem w_s , sem pedig z_s nincs a bázisban,
- iii) z_0 bázis és pontosan egy változó nemnulla a (w_l, z_l) komplementer párban, minden $j \in \{1, \dots, m\}$ és $j \neq s$ esetén.

Ha adott egy (w, z, z_0) ACBFS, ahol w_s és z_s egyszerre nembázis, akkor egy *csatlakozó* (adjacent) ACBFS nyerhető, ha pivot lépéssel elérhető, hogy w_s vagy z_s bekerüljön a bázisba úgy, hogy nem z_0 kerül ki a bázisból. Ebből következik, hogy tetszőleges ACBFS-nek legfeljebb két csatlakozó ACBFS megoldása van. Ha növelve w_s vagy z_s értékét z_0 kimozdítható a bázisból vagy extrémális sugarat eredményez, akkor kettőnél kevesebb csatlakozó ACBFS megoldás van. Ha a probléma nemdegenerált, azaz minden bázisváltozó pozitív, akkor a Lemke-féle CPA algoritmus (Complementary Pivoting Algorithm) véges sok lépés után befejeződik.

Lemke-féle CPA algoritmus [52]:

Inicializáló lépés

Ha $q \geq 0$, akkor stop, és $(w, z) = (q, 0)$ egy komplementer bázis megvalósítható megoldás. Ellenkező esetben jelenítsük meg a rendszert tabló alakban. Legyen $q_s = \min\{q_i : 1 \leq i \leq m\}$, és módosítsuk a tablót az s sor és z_0 oszlop találkozási helyén lévő elemet választva pivot elemként. Ekkor a z_0 és a w_j , $j = 1, \dots, m$, $j \neq s$ bázis változók nemnegatívak. Legyen $y_s = z_s$ és ugrás a fő lépésre.

Fő lépés

1. Legyen d_s a módosított oszlop az aktuális táblóban az y_s változó alatt. Ha $d_s \leq 0$, akkor ugrás 4-re. Különben határozzuk meg az r indexet a következő minimális hányados teszt szerint, ahol $\bar{q}$ a jobb oldalon álló új vektor a pivot lépés után:

$$\frac{\bar{q}_r}{d_{rs}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{q}_i}{d_{is}} : d_{is} > 0 \right\}.$$

Ha az r sorban a bázis változó z_0 , akkor ugrás 3-ra. Különben ugrás 2-re.

2. A bázis változó az r sorban vagy w_l , vagy z_l , valamilyen $l \neq s$ esetén. Az y_s változó belép a bázisba és a tábló frissítésre kerül az r sorban és az y_s oszlopban álló pivot elem szerinti választással. Ha a bázist éppen elhagyó változó w_l , akkor $y_s = z_l$. Ha a bázist éppen elhagyó változó z_l , akkor $y_s = w_l$. Ugrás 1-re.
3. Itt y_s belép a bázisba és z_0 elhagyja a bázist. A z_0 sor és az y_s oszlop által definiált pivot elem választással komplementer bázis megvalósítható megoldáshoz jutunk, stop.
4. Leállás sugár szerinti terminálással. Az $R = \{(w, z, z_0) + \lambda d : \lambda \geq 0\}$ sugár minden pontja kielégíti (F3.22a-c)-t.. Itt (w, z, z_0) a majdnem komplementer bázis megvalósítható megoldás, amely az utolsó táblóhoz tartozik, és d egy extrémális iránya az (F3.22a-b) halmaznak. A d vektor elemei a következők:
- i) az y_s sorhoz tartozó elem 1,
 - ii) az aktuális bázis változókhöz tartozó elemek értéke $-d_s$,
 - iii) minden más elem nulla.

F3.1 Példa: LCP terminálás CBFS-sel, $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Inicializálás: $y_s = z_4$

	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	q
w_1	1	0	0	0	0	0	1	1	-1	2
w_2	0	1	0	0	0	0	-1	2	-1	2
w_3	0	0	1	0	-1	1	-2	2	-1	-2
w_4	0	0	0	1	-1	-2	2	-4	-1*	-6

1. iteráció: $y_s = z_3$

	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	q
w_1	1	0	0	-1	1	2	-1	5	0	8
w_2	0	1	0	-1	1	2	-3	6	0	8
w_3	0	0	1	-1	0	3	-4	6*	0	4
z_0	0	0	0	-1	1	2	-2	4	1	6

2. iteráció: $y_3 = z_1$

	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	q
w_1	1	0	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{3}$ *	0	0	$\frac{14}{3}$
w_2	0	1	-1	0	1	-1	1	0	0	4
z_4	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$
z_0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{10}{3}$

3. iteráció: $y_s = z_1$

	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	q
w_1	$\frac{3}{7}$	0	$-\frac{5}{14}$	$-\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{3}{14}$	1	0	0	2
w_2	$-\frac{3}{7}$	1	$-\frac{9}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{4}{7}$	$-\frac{11}{14}$	0	0	0	2
w_3	$\frac{2}{7}$	0	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{3}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{14}$	0	1	0	2
z_0	$-\frac{2}{7}$	0	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$ *	$\frac{1}{7}$	0	0	1	2

Leállítás: megoldás $(w_1, w_2, w_3, w_4, z_1, z_2, z_3, z_4)^T := \left(0, \frac{2}{5}, 0, 0, \frac{14}{5}, 0, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right)^T$

	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	q
w_1	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$-\frac{3}{10}$	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
w_2	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$-\frac{9}{10}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$
w_3	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$
z_0	$-\frac{2}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{14}{5}$

F3.2 Példa: LCP terminálás sugárral, $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Inicializálás: $y_s = z_4$

	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	q
w_1	1	0	0	0	0	0	-1	1	-1	1
w_2	0	1	0	0	0	0	1	-2	-1	4
w_3	0	0	1	0	1	-1	-2	2	-1	-2
w_4	0	0	0	1	-1	2	2	-2	-1*	-4

1. iteráció: $y_s = z_3$

	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	q
w_1	1	0	0	-1	1	-2	-3	3	0	5
w_2	0	1	0	-1	1	-2	-1	0	0	8
w_3	0	0	1	-1	2	-3	-4	4*	0	2
z_0	0	0	0	-1*	1	-2	-2	2	1	4

2. iteráció: $y_s = z_3$

	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	q
w_1	1	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{7}{2}$
w_2	0	1	0	-1	1	-2	-1	0	0	8
z_4	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	-1	1	0	$\frac{1}{2}$
z_0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	3

Leállítás: terminálás sugárral

$$\begin{aligned}
 R &= (w_1, w_2, w_3, w_4, z_1, z_2, z_3, z_4, z_0)^T := \\
 &= \left\{ \left(\frac{7}{2}, 8, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 3 \right)^T + \lambda (0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0)^T : \lambda \geq 0 \right\}.
 \end{aligned}$$

F4. A FUNKCIONÁLANALÍZIS ALAPJAI

Az irányításelmélet több területén is gyakran használják a valós függvénytan és a funkcionálanalízis eredményeit. A valós függvénytan eredményeiről jó áttekintést ad [50], az alapfogalmakat (mérhető tér, mérték, Lebesgue–Stieltjes-integral, abszolút folytonosság, Radon–Nikodym-tétel) ismertnek feltételezzük. A funkcionálanalízis iránt mélyebben érdeklődők számára számos könyv javasolható [47] [48] [49]. Ebben a függelékben összefoglaljuk azokat a fontosabb definíciókat és összefüggéseket, amelyek ismeretére a 10. fejezetben számítunk. A függelékben idézett lemmák és tételek bizonyításai megtalálhatók [19]-ben.

F4.1 Lineáris terek

Lineáris tér (vektor tér): Rendezett $(X, +, \cdot, F)$ hármas, ahol X egy Abel-csoport (kommutatív csoport, amelyben $+$ művelet van definálva), F egy test és $\cdot$ egy függvény $F \times X$ -ről X -be, amelynek értékét αx jelöli, és amellyel teljesül

- i) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,
- ii) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
- iii) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
- iv) $1x = x$, ahol 1 az F test multiplikatív egysége.

Konvex halmaz: Legyen X lineáris tér. $A \subset X$ konvex, ha $\forall x_1, x_2 \in A$ és $0 \leq \lambda \leq 1$ esetén $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in A$.

Konvex burok: Legyen X lineáris tér. $A \subset X$ konvex burka $\langle A \rangle := \{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i : \lambda_i \geq 0, a_i \in A, i = 1, \dots, n; \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1; n \text{ természetes egész} \}$.

Kúp: Legyen X lineáris tér. $K \subset X$ nulla csúcspontú kúp, ha $x \in A$ és $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in K$. Ha K nulla csúcspontú kúp, akkor az $x_0 + K$ halmaz x_0 csúcspontú kúp. Tulajdonságok:

- 1) K nulla csúcspontú kúp konvex $\Leftrightarrow$ ha $x, y \in K$ és $\alpha, \beta > 0$, akkor $\alpha x + \beta y \in K$.
- 2) Ha K nulla csúcspontú kúp, akkor nulla csúcspontú kúpok a következők is:
 - K^0 (belső pontok halmaza)
 - $\overline{K}$ (K lezártja)
 - $\langle K \rangle$ (K konvex burka)

Lineáris operátor: $A \in L(X \rightarrow Y)$, ahol X, Y lineáris terek az F test felett;
 $A: X \rightarrow Y$; $D(A)$ altere X -nek és $x, y \in X$ és $\lambda \in F$ esetén

$$1) \quad A(x + y) = Ax + Ay$$

$$2) \quad A(\lambda x) = \lambda Ax$$

Lineáris funkcionál: $f \in L(X \rightarrow R^1)$

F4.2 Topológikus terek

Topológikus tér: Legyen X alaphalmaz, $\tau = \{U\}$ az X alaphalmaz részhalmazainak egy rendszere. Azt mondjuk, hogy (X, τ) topológikus tér, ha teljesül, hogy

$$1) \quad \emptyset, X \in \tau,$$

$$2) \quad U_\alpha \in \tau, \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau,$$

$$3) \quad U_{\alpha_i} \in \tau, i = 1, \dots, n \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i} \in \tau.$$

A fenti axiómáknak eleget tevő τ elemei a nyílt halmazok. Tetszőleges számú nyílt halmaz uniója nyílt halmaz. Véges számú nyílt halmaz metszete nyílt halmaz. Az $F \subset X$ halmaz zárt, ha komplemente $F^c = X \setminus F$ nyílt halmaz.

Relatív topológia: Legyen (X, τ) topológikus tér, $A \subset X$. Az A halmaz relatív topológiája a $\tau_A = \{A \cap U : U \in \tau\}$ topológia.

Topológikus terek részben rendezése: Legyenek (X, τ_1) és (X, τ_2) topológikus terek. Azt mondjuk, hogy $\tau_1 \leq \tau_2$ (vagy τ_1 gyengébb topológia, mint τ_2), ha $\tau_1 \subset \tau_2$, azaz $U \in \tau_1 \Rightarrow U \in \tau_2$. Vegyük észre, hogy nem minden topológia hasonlítható össze.

Belső pont: Legyen (X, τ) topológikus tér, $M \subset X$. Azt mondjuk, hogy $x \in M$ belső pontja M -nek, ha $\exists U \in \tau$, hogy $x \in U \subset M$.

Torlódási pont: Legyen (X, τ) topológikus tér, $M \subset X$. Azt mondjuk, hogy $x_0 \in X$ torlódási pontja M -nek, ha tetszőleges $x_0 \in U$ és $U \in \tau$ esetén $M \cap \{U \setminus x_0\} \neq \emptyset$.

Topológikus tér bázisa: Azt mondjuk, hogy $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \tau$ a topológikus tér bázisa, ha $\forall U \in \tau$ nyílt halmaz előállítható $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ -beli halmazok egyesítéseként.

Környezet: Legyen (X, τ) topológikus tér és $x_0 \in X$. Azt mondjuk, hogy V az x_0 környezete, ha $\exists U \in \tau$, hogy $x_0 \in U \subset V$.

Környezetbázis: Jelölje $\{V(x)\}$ az x pont környezeteinek halmazát. Azt mondjuk, hogy $\{W(x)\}$ az x környezeteinek bázisa, ha $\{W(x)\} \subset \{V(x)\}$ és $V \in \{V(x)\} \Rightarrow \exists W \in \{W(x)\}$, hogy $W \subset V$.

Topológikus tér szubbázisa: Legyen (X, τ) topológikus tér, $S \subset \tau$, akkor S szubbázisa τ -nak, ha minden $x \in X$ és $V(x)$ környezete x -nek esetén $\exists \{S_1, \dots, S_n\} \subset S$, hogy $x \in \bigcap_{i=1}^n S_i \subset V(x)$.

Halmazrendszer által generált topológia: Legyen $S = \{S_\gamma : S_\gamma \subset X, \gamma \in \Gamma\}$ és $X = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S_\gamma$. Akkor létezik pontosan egy τ topológia, hogy S szubbázisa (X, τ) -nak. A τ topológia a leggyengébb topológia, amelyre $S \subset \tau$.

Sup topológia: Legyen adva az X halmazon a topológiáknak egy $\Phi = \{\tau_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ rendszere. Azt a topológiát, amelyet az $S = \{U : U \in \tau_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ szubbázis generál, sup Φ -nek nevezzük és $\vee \Phi$ -vel jelöljük.

Gyenge topológia: Legyen X tetszőleges halmaz, (Y, τ) topológikus tér, $f : X \rightarrow Y$ leképezés. Az X tér f szerinti $w(X, f)$ gyenge (weak) topológiájának azt a topológiát értjük, amelynek $S := \{f^{-1}(U) : U \in \tau\}$ a szubbázisa.

Szorathalmaz: Legyen a Γ indexhalmaz minden $\gamma \in \Gamma$ indexéhez hozzárendelve egy (X_γ, τ_γ) topológikus tér. Az $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ szorzathalmaz definíció szerint az összes f függvény halmaza, amelynek értelmezési tartománya $D(f) = \Gamma$, és amelyre $f(\gamma) \in X_\gamma$. Ha $\Gamma = \{1, \dots, n\}$ véges halmaz, akkor $\prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i$ a szokásos $X_1 \times \dots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in X_i, i = 1, \dots, n\}$.

Projekció: Legyen $X := \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ a szorzattér. Azt mondjuk, hogy $\pi_\gamma : X \rightarrow X_\gamma$ az X halmaz projekciója X_γ -ra, ha $\pi_\gamma(x) = x(\gamma)$.

Szorzat topológia: Legyen $\{(X_\gamma, \tau_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ topológikus terek nem üres rendszere és legyen $X := \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ a szorzattér. Az X szorzathalmazon értelmezett szorzat to-

pológia alatt azt a topológiát értjük, amelynek szubbázisa $S = \{\pi_\gamma^{-1}(U_\gamma) : U_\gamma \in \tau_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$. A szorzat topológia rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- i) A szorzat topológia bázisa $B = \{\times_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma : U_\gamma \in \tau_\gamma, \gamma \in \Gamma, U_\gamma = X_\gamma \text{ véges sok } \gamma \text{ kivételével}\}$.
- ii) Legyen $\Phi = \{\pi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, akkor a szorzathalmaz szorzat topológiája a $w(\times_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma, \Phi)$ gyenge topológia.

Szeperálható halmazok: Legyen (X, τ) topológikus tér, $A, B \subset X$. Azt mondjuk, hogy A és B nyílt halmazokkal szeperálhatóak, ha $\exists U_1, U_2 \in \tau, U_1 \cap U_2 = \emptyset$, hogy $A \subset U_1$ és $B \subset U_2$.

Hausdorff-féle topológikus tér (T_2 -tér): Az (X, τ) topológikus tér T_2 -tér, ha $\forall x, y \in X$ esetén $\exists V(x), V(y)$ környezet, hogy $V(x) \cap V(y) = \emptyset$.

Konvergencia: Legyen (X, τ) Hausdorff-féle topológikus tér. Azt mondjuk, hogy az $\{x_n\}$ sorozat konvergál x_0 -hoz, ha $\forall V(x_0) \in \{V(x_0)\}$ -hoz $\exists n_0(V(x_0))$, hogy ha $n \geq n_0$, akkor $x_n \in V(x_0)$.

Teljes inverz kép: Legyen $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_2)$ leképezés. Akkor a teljes inverz kép $f^{-1}(U_2) = \{x \in X : f(x) \in U_2 \subset Y\}$. Legyen $\tau_1 := \{f^{-1}(U_2) : U_2 \in \tau_2\}$, akkor τ_1 kielégíti a topológikus tér axiómáit.

Folytonos függvény: Azt mondjuk, hogy az f függvény folytonos X -en, ha $\tau_1 \leq \tau$. Az $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_2)$ függvény folytonos $\Leftrightarrow$

- i) $\forall Y$ -beli nyílt halmaz teljes inverz képe nyílt, azaz $U_2 \in \tau_2 \Rightarrow f^{-1}(U_2) \in \tau$,
- ii) tetszőleges $x \in X, f(x) = y$ és $V(y) \in \{V(y)\}$ -hoz $\exists V(x) \in \{V(x)\}$, hogy $f(V(x)) \subset V(y)$.

Centrált rendszer: Legyen X alaphalmaz és $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset X$. Azt mondjuk, hogy $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ centrált rendszer, ha $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset A \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n C_{\alpha_i} \neq \emptyset$.

Kompakt halmaz: Azt mondjuk, hogy az (X, τ) topológikus tér kompakt, ha $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \tau$ és $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X \Rightarrow \exists \{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset A$, hogy $\bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} = X$. Az (X, τ) topológikus tér kompakt $\Leftrightarrow$

- i) tetszőleges zárt centrált rendszerének közös része nem üres,
- ii) tetszőleges nyílt lefedőrendszeréből kiválasztható véges nyílt lefedőrendszer,
- iii) ha $f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ folytonos és (X, τ_1) kompakt, akkor Y kompakt,
- iv) kompakt halmaz zárt részhalmaza kompakt.

Lineáris topológikus tér: Legyen E lineáris tér, (E, τ) topológikus tér. Azt mondjuk, hogy (E, τ) lineáris topológikus tér, ha az összeadás és a számmal való szorzás folytonos függvények a megfelelő szorzattopológiák $(E \times E, \text{illetve } R^1 \times E)$ felett. Az (E, τ) lineáris topológikus tér rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- i) $V(x)$ környezete x -nek $\Leftrightarrow \exists 0 \in E$ -nek olyan $V(0)$ környezete, hogy $V(x) = x + V(0)$.
- ii) Ha $\{V(0)\}$ környezetbázisa $0 \in E$ -nek, akkor $x + \{V(0)\}$ környezetbázisa x -nek.

Nyelő halmaz: Legyen X lineáris tér. Azt mondjuk, hogy $A \subset X$ nyelő halmaz (absorbing set), ha minden $x \in A$ esetén létezik $\varepsilon > 0$, hogy $|\lambda| < \varepsilon \Rightarrow \lambda x \in A$.

Lokálisan konvex lineáris topológikus tér: Azt mondjuk, hogy az (E, τ) lineáris topológikus tér lokálisan konvex, ha $0 \in E$ -nek minden környezete tartalmazza $0 \in E$ -nek egy konvex környezetét.

Generált topológia: Legyen E lineáris tér, Γ körszerű és nyelő halmazok egy rendszere az E térben, amely olyan, hogy $\forall W_1 \in \Gamma$ esetén $\exists W_2 \in \Gamma$, hogy $W_2 + W_2 \subset W_1$. Azt a topológiát, amelyben a $0 \in E$ pont környezetei azok a $V \subset E$ halmazok, amelyekre $\exists W_1, \dots, W_n$, hogy $W_1 \cap \dots \cap W_n \subset V$, a Γ által generált topológiának nevezzük. A Γ rendszer neve: a $0 \in E$ pont környezet szubbázisa.

Generált gyenge topológia: Legyen E lineáris tér, Φ az E félnormáinak egy rendszere, vagy pedig az E lineáris térnek a lineáris topológikus terek egy rendszerére való leképezésének egy rendszere. Akkor a Φ által generált gyenge (weak) lineáris topológiának az $\{f^{-1}(V) : f \in \Phi, V \text{ körszerű nyelő környezet } 0\text{-nak } R(f)\text{-ben}\}$ rendszer által generált topológiát nevezzük. Jelölése $\sigma(E, \Phi)$. Megmutatható, hogy

- i) $\sigma(E, \Phi)$ és $w(E, \Phi)$ ekvivalens topológiák, tehát $\sigma(E, \Phi)$ a korábbi értelemben vett gyenge topológia,
- ii) speciálisan, ha (E, τ) lineáris topológikus tér, akkor $(E, \sigma(E, E'))$ lokálisan konvex lineáris topológikus tér, amelyben a topológiát a $\Gamma = \{\{x \in E : |f(x)| < \varepsilon\} : f \in E', \varepsilon > 0 \text{ valós szám}\}$ környezet szubbázis generálja.

Lineáris funkcionálok tere: Legyen E lineáris tér, $E^\# := \{f : E \rightarrow R^1 : f \text{ lineáris leképezés}\}$, $\hat{E} := \{\hat{x} : E^\# \rightarrow R^1 : \hat{x}(f) := f(x) \text{ minden } f \in E^\# \text{ esetén, } x \in E\}$, és legyen $L \subset E^\#$ altér. A lineáris funkcionálok terét (alterét) elláthatjuk topológiával:

- i) Az $E^\#$ tér gyenge* topológiájának a $\sigma(E^\#, \hat{E})$ topológiát nevezzük.
- ii) Az L altér gyenge* topológiájának a $\sigma(E^\#, \hat{E})$ topológiának L -en vett relatív topológiáját nevezzük. Megmutatható, hogy L gyenge* topológiája az $(R^1)^E$ szorzat tér relatív (szorzat) topológiája.

Vegyük észre, hogy a fenti definíció az E lineáris tér feletti lineáris funkcionálok terében ($E^\#$) vagy ezek alterén, például az E feletti folytonos lineáris funkcionálok terében ($L = E'$) definiálta a gyenge* (weak star) topológiát. Az alkalmazásokban az utóbbi eset jelentős, amikor is az E' tér gyenge* topológiája a $\Gamma = \{\{f \in E' : f(x) \in V\} : x \in E, V \text{ körszerű és nyelő környezete } 0\text{-nak } R^1\text{-ben}\}$ környezet szubbázis által van definiálva. Figyelembe véve, hogy R^1 -ben 0 -nak körszerű és nyelő környezeteit az ε -sugarú intervallumok alkotják, kapjuk, hogy az E' tér gyenge* topológiája a $\Gamma = \{\{f \in E' : |f(x)| < \varepsilon\} : x \in E \text{ és } \varepsilon > 0 \text{ valós szám}\}$ környezet szubbázis által generált topológia. E' a gyenge* topológiával szeparált lokálisan konvex lineáris topológikus tér.

Konjugált kúp: Legyen (E, τ) lineáris topológikus tér, $K \subset E$ nulla csúcspontú kúp. Akkor a $K^* := \{f \in E' : \text{minden } x \in K \text{ esetén } f(x) \geq 0\}$ halmazt a K kúp konjugált kúpjának nevezzük.

A konjugált kúp a lineáris programozás elméletéből ismert poláris kúpnak megfelelő fogalom. Az utóbbi elnevezést nem használjuk, mert a topológikus terek elméletében a poláris halmaz fogalma más célra van fenntartva [48] [49].

Lemma: Legyen (E, τ) lineáris topológikus tér, $K \subset E$ nulla csúcspontú kúp az E térben, $\langle K \rangle$ a K konvex burka, és jelölje a vonás a $\sigma(E, E')$ gyenge topológiában való lezárást. Akkor a konjugált kúpra teljesül $K^* = (\overline{K})^* = (\langle K \rangle)^*$.

Lemma: Legyen (E, τ) lineáris topológikus tér, $K \subset E'$ nulla csúcspontú kúp az E^* duális térben, $\langle K \rangle$ a K konvex burka, és jelölje a vonás a $\sigma(E', \hat{E})$ gyenge* topológiában való lezárást. Akkor a konjugált kúpra teljesül $K^* = (\overline{K})^* = (\langle K \rangle)^*$.

Lemma: Legyen (E, τ) lineáris topológikus tér, $\{K_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ a $\sigma(E, E')$ gyenge topológiában zárt, konvex és nulla csúcspontú kúpok egy rendszere, és legyen $\sum_{\gamma \in \Gamma} K_\gamma^*$ a $\sigma(E', \hat{E})$ gyenge* topológiában zárt, akkor $(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} K_\gamma)^* = \sum_{\gamma \in \Gamma} K_\gamma^*$.

Lemma (Dubovickij–Miljutyin [36], [19]): Legyen (E, τ) lineáris topológikus tér, és legyen $K_i \subset E$ nyílt, konvex, nulla csúcspontú kúp, $i = 1, \dots, n$; $\bigcap_{i=1}^n K_i \neq \emptyset$, akkor $(\bigcap_{i=1}^n K_i)^* = \sum_{i=1}^n K_i^*$.

F4.3 Metrikus, lineáris normált, Banach- és Hilbert-terek

Metrikus tér: (X, ρ) , ahol X absztrakt elemek halmaza és $\rho(x, y)$ távolság, azaz $x, y \in X \mapsto \rho(x, y)$ valós szám a következő tulajdonságokkal:

- 1) $\rho(x, y) \geq 0$ és $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- 3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Környezet: $S(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}$.

Cauchy-sorozat, teljesség:

Legyen (X, ρ) metrikus tér. Az $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ sorozat önmagában (Cauchy-) konvergens, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$, hogy $m, n \geq n_0 \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$. Az X metrikus tér **teljes**, ha minden önmagában konvergens sorozat konvergens X -ben, azaz $\exists x \in X$ torlódási pontja.

Félnorma: Legyen X lineáris tér, $p : X \rightarrow \mathbb{R}^1$ valósértékű függvény. Azt mondjuk, hogy $p(\cdot)$ félnorma (semi-norm), ha

- 1) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$,
- 2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

Félnorma esetén teljesül $p(0) = 0$, $p(x_1 - x_2) \geq |p(x_1) - p(x_2)|$, speciálisan $p(x) \geq 0$.

Lineáris normált tér: $(X, \|\cdot\|)$ az F test felett, ahol az X lineáris tér metrikus tér a

$\rho(x, y) = \|x - y\|$ távolsággal, azaz $x, y \in X$, $\lambda \in F \Rightarrow$

- 1) $\|x\| \geq 0$ és $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Banach-tér: $(X, \|\cdot\|)$ teljes lineáris normált tér.

Példák Banach-térre:

- 1) $E^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \text{ valós}\}$ vagy $C^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \text{ komplex}\}$. Néhány szokásos norma:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \text{ például } \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

- 2) $l = \{(x_1, \dots, x_i, \dots) : x_i \text{ komplex}\}$. Jellegzetes esetek:

$$l_p \rightarrow \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p \right)^{1/p} < \infty$$

$$l_\infty \rightarrow \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq \infty} |x_i| < \infty$$

- 3) $C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow C \text{ folytonos függvények}\}$, ahol a norma

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| < \infty$$

- 4) $\mathcal{L}_p(X, \mu)$, ahol $1 \leq p < \infty$: Lebesgue-mérhető függvények. Az $f, g \in \mathcal{L}_p$ függvényeket azonosnak tekintjük, ha $f - g = 0$ majdnem mindenütt (m.m.). A norma definíciója

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty$$

- 5) $\mathcal{L}_\infty(X, \mu)$ σ -véges mértéktér, ahol a norma

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup } |f(x)| := \inf \{a : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\} = \inf_{f=g \text{ m.m.}} \left\{ \sup_{x \in X} |g(x)| \right\}$$

- 6) Konjugált terek: $\mathcal{L}_p, \mathcal{L}_q$ és $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Korlátos lineáris operátor: $A \in K(X \rightarrow Y)$, ahol X, Y lineáris normált terek, A korlátos, ha $X \ni \forall$ korlátos halmazát Y korlátos halmazába viszi át. $A \in L(X \rightarrow Y)$ korlátos $\Leftrightarrow \exists c > 0$ állandó, hogy $\|Ax\| \leq c\|x\|$ minden $x \in X$ esetén.

Operátor norma: $A \in K(X \rightarrow Y)$ ún. indukált operátor normája és a korlátos lineáris operátorok tere az operátor normával a következőképp van értelmezve:

- 1) $\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| < \infty$
- 2) $K(X \rightarrow Y) = \{A \in L(X \rightarrow Y) : \|A\| < \infty\}$
- 3) $K(X \rightarrow Y)$ lineáris tér, és egyúttal Banach-tér is, ha X, Y Banach-tér

Folytonos függvény: $f : X \rightarrow Y$; X, Y lineáris normált tér; f folytonos az $x \in X$ pontban, ha $x \in \forall U(x)$ környezete esetén $\exists y = f(x)$ -nek $V(y)$ környezete, hogy $f(U) \subset V$. Az $f(x)$ függvény folytonos, ha $\forall x \in X$ pontban folytonos.

Korlátosság és folytonosság kapcsolata: X, Y lineáris normált tér esetén $A \in L(X \rightarrow Y)$ korlátos $\Leftrightarrow A$ folytonos.

Folytonos lineáris funkcionál: $f \in K(X \rightarrow R^1)$

- 1) $\exists c > 0$ állandó, hogy $|f(x)| \leq c\|x\|$, $\forall x \in X$ esetén
- 2) $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$; $|f(x)| \leq \|f\|\|x\|$, $\forall x \in X$ esetén

Duális tér: Legyen E lineáris normált tér. Az E tér duálisa $E' := K(E \rightarrow R^1)$, azaz a folytonos lineáris funkcionálok lineáris normált tere az $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$ normával.

Elválasztható halmazok: Legyen X lineáris normált tér és $A, B \subset X$. Azt mondjuk, hogy az A és B halmazok elválaszthatók (szigorúan elválaszthatók), ha $\exists f \neq 0$ folytonos lineáris funkcionál és $\alpha > 0$ valós szám, hogy $\forall x \in A, \forall x \in B$ esetén $f(x) \leq \alpha \leq f(y)$ (szigorúan elválasztható esetben $f(x) < \alpha < f(y)$).

Hahn-Banach-tétel: Legyen X lineáris normált tér és $A, B \subset X$. Ha A és B konvex halmazok, $A^0 \neq \emptyset$ (A -nak van belső pontja), $B \neq \emptyset$ és $A^0 \cap B = \emptyset$, akkor A és B elválaszthatók.

Hilbert-tér: H és $\langle f, g \rangle$ skalárszorzat a következő tulajdonságokkal:

- 1) H lineáris tér
- 2) $\forall f, g \in H$ elempárhoz hozzá van rendelve egy komplex szám $\langle f, g \rangle$ (a skalárszorzat), hogy
 $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle} \text{ (vonás jelöli a konjugáltat)}$$

$$\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle$$

$$\|f\| = (\langle f, f \rangle)^{1/2}$$

3) H teljes lineáris normált tér (Banach-tér)

4) H végtelen dimenziós

Ortogonalitás: $f \perp g$, ha $\langle f, g \rangle = 0$.

Pre-Hilbert tér: 3) vagy 4) nem teljesül.

Riesz-féle reprezentációs tétel: Ha $f \in H'$ folytonos lineáris funkcionál, akkor $\exists$ egyértelmű $g \in H$, hogy $\forall \varphi \in H$ esetén

$$f(\varphi) = \langle \varphi, g \rangle \text{ és } \|f\|_{H'} = \|g\|_H$$

Adjungált operátor: Legyen $A \in K(H \rightarrow H)$, akkor létezik egyértelmű $A^* \in K(H \rightarrow H)$ operátor, hogy $\forall \varphi, \psi \in H$ esetén $\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A^*\psi \rangle$. Elnevezés: A^* az A adjungáltja. Alapja: $f(\varphi) := \langle A\varphi, \psi \rangle$ esetén $f \in H'$. A Riesz-féle reprezentációs tétel szerint $\exists \psi^* \in H$, hogy $f(\varphi) = \langle \varphi, \psi^* \rangle$. Legyen $A^*\psi := \psi^*$, akkor $A^* \in K(H \rightarrow H)$; $(A^*)^* = A$ és $\|A^*\| = \|A\|$.

Önadjungált operátor: $A^* = A$

Példák duális terekre:

- 1) l_p duálisa $1 \leq p < \infty$ esetén l_q , ahol $(1/p) + (1/q) = 1$. Legyen $f \in l'_p = K(l_p \rightarrow R^1)$, akkor $\exists$ egyetlen $y = \{\eta_i\}_{i=1}^\infty \in l_q$, hogy $\forall x = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty \in l_p$ esetén $f(x) = \sum_{i=1}^\infty \eta_i \xi_i$ és $\|f\| = \|\eta\|_q$. Fordítva, $\forall y \in l_q$ ily módon $f \in l'_p$ funkcionált definiál. Figyelem: $l'_\infty \neq l_1$.
- 2) $\mathcal{L}_p(X, \mu)$ duálisa $1 \leq p < \infty$ esetén $\mathcal{L}_q(X, \mu)$, ahol $(1/p) + (1/q) = 1$. Az állítás alapja a Hölder egyenlőtlenség, amely szerint $f \in \mathcal{L}_p$, $g \in \mathcal{L}_q$, $(1/p) + (1/q) = 1$ esetén $\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$. Fordítva, $\forall g \in \mathcal{L}_q$ ily módon $f \in \mathcal{L}'_p$ funkcionált definiál. Figyelem: $\mathcal{L}'_\infty \neq \mathcal{L}_1$.
- 3) Hilbert-tér duálisa $H' = H$ (Riesz-féle reprezentációs tétel).

Gateaux-derivált: Legyen X, Y lineáris normált tér. $F: X \rightarrow Y$ Gateaux-értelemben differenciálható az $x_0 \in X$ pontban, ha $\exists A \in K(X \rightarrow Y)$, hogy

$$F(x_0 + th) - F(x_0) = Ath + \omega(x_0, th), \text{ ahol } \|\omega(x_0, th)\| = o_h(t),$$

azaz $\varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta(h, \varepsilon) > 0$, hogy $|t| < \delta$ esetén $\|\omega(x_0, th)\|/|t| < \varepsilon$.

Frèchet-derivált: Legyen X, Y lineáris normált tér. $F: X \rightarrow Y$ Frèchet-értelemben differenciálható az $x_0 \in X$ pontban, ha $\exists A \in K(X \rightarrow Y)$, hogy

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = Ah + \omega(x_0, h), \text{ ahol } \|\omega(x_0, h)\| = o(\|h\|),$$

azaz $\varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\|h\| < \delta$ esetén $\|\omega(x_0, h)\|/\|h\| < \varepsilon$.

F4.4 Részben rendezett terek

Részben rendezés reláció: $\geq \subset X \times X$ reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív. Jelölése:

$$(x, y) \in \geq \Leftrightarrow x \geq y.$$

$x \geq x$	reflexív
$x \geq y$ és $y \geq x \Rightarrow x = y$	antiszimmetrikus
$x \geq y$ és $y \geq z \Rightarrow x \geq z$	tranzitív

Pozitív kúp: Legyen E lineáris normált tér. $P \subset E$ pozitív kúp, ha

- i) P nulla csúcspontú konvex kúp,
- ii) P zárt halmaz,
- iii) $P^0 \neq \emptyset$ (van belső pontja),
- iv) $x \in P$ és $x \in -P \Rightarrow x = 0$.

Példák pozitív kúpra:

- 1) $P = \{(x_1, \dots, x_n) \in E^n : \forall x_i \geq 0\}$.
- 2) H Hilbert-tér, $E := \{A \in K(H \rightarrow H) : A \text{ önadjungált}\}$ Banach-tér,

$$P = \{A \in E : \langle Ax, x \rangle \geq 0, \forall x \in H \text{ esetén}\} \text{ pozitív kúp } E \text{-ben.}$$

min, max, sup, inf részbenrendezés esetén:

E Banach-tér, $x_0 \in Q \subset E$, P pozitív kúp $\Leftrightarrow \geq$ részben rendezés E -ben.

- 1) $x_0 = \max Q$, ha nem létezik $x \in Q$, hogy $x \geq x_0$ és $x \neq x_0$.
- 2) $x_0 = \min Q$, ha nem létezik $x \in Q$, hogy $x_0 \geq x$ és $x \neq x_0$.

3) $x_0 = \sup Q$, ha $x_0 \geq x$ minden $x \in Q$ esetén.

4) $x_0 = \inf Q$, ha $x \geq x_0$ minden $x \in Q$ esetén.

Mivel a $\geq$ részben rendezés nem "lineáris rendezés" (tehát Q -nak lehetnek olyan elempárjai, amelyek nem összehasonlíthatók), ezért $\max Q$ és $\min Q$ rendszerint nem egyértelműen definiált (több, akár végtelen sok is lehet belőlük a Q halmazon). Másrészt a $\geq$ részben rendezés antiszimmetrikus tulajdonsága miatt $\sup Q$ és $\inf Q$ egyértelműen definiált, feltéve, hogy létezik (az a tipikus, hogy nem létezik).

Konvex függvény:

Legyen E, E_0 lineáris normált tér, $P_0 \subset E_0$ pozitív kúp $\Leftrightarrow \geq$ részben rendezés E_0 -ban. Azt mondjuk, hogy $F : E \rightarrow E_0$ konvex leképezés, ha

$$x_1, x_2 \in E, 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda F(x_1) + (1 - \lambda)F(x_2) \geq F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2), \text{ azaz} \\ \lambda F(x_1) + (1 - \lambda)F(x_2) - F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \in P_0.$$

Pozitív funkcionál: Legyen E lineáris normált tér, $P \subset E$ pozitív kúp, amely $\geq$ részben rendezést definiál E -ben, $f : E \rightarrow R^1$, $f \in E'$. Azt mondjuk, hogy $f \geq 0$, azaz f pozitív funkcionál, ha $f(P) \geq 0$.

IRODALOMJEGYZÉK

1. **Lantos, B.:** *Irányítási rendszerek elmélete és tervezése I. Egyváltozós szabályozások.* Akadémiai Kiadó, 2001.
2. **Somló, J.–Lantos, B.–Cai, P.T.:** *Advanced robot control.* Akadémiai Kiadó, 1997.
3. **Stevens, B.L.–Lewis, F.L.:** *Aircraft control and simulation.* Wiley, 1992.
4. **McLean, D.:** *Automatic flight control systems.* Prentice Hall, 1990.
5. **Fantoni, I.–Lozano, R.:** *Non-linear control for underactuated mechanical systems.* Springer, 2002.
6. **Aström, K.J.–Wittenmark, B.:** *Computer-controlled systems.* Prentice Hall, 1997.
7. **Goodwin, G.C.–Sin, K.S.:** *Adaptive filtering, prediction and control.* Prentice Hall, 1984.
8. **Clarke, D.W.–Mohtadi, C.–Tuffs, P.S.:** *Generalized predictive control–Part I. The basic algorithm.* Automatica 1987 (23), pp. 137-148.
9. **Clarke, D.W.–Mohtadi, C.–Tuffs, P.S.:** *Generalized predictive control–Part II. Extensions and interpretations.* Automatica 1987 (23), pp. 149-160.
10. **Camacho, E.F.–Bordons, C.:** *Model predictive control.* Springer, 2000.
11. **Luenberger, D.G.:** *Observers for multivariable systems.* IEEE Trans. Aut. Control 1966 (11), pp. 190-197.
12. **Kautsky, J.–Nichols, N.K.–Van Doren, P.:** *Robust pole assignment in linear state feedback.* Int. J. Control 1985 (41), pp. 1129-1155.
13. **Kautsky, J.–Nichols, N.K.:** *Numerical Analysis Report NA/2/83.* Department of Mathematics, University of Reading, 1983.
14. **Roppenecker, G.:** *Vollständige modale Synthese linearer Systeme und ihre Anwendung zum Entwurf strukturbeschränkter Zustandsrückführungen.* Dissertation. VDI-Zeitschriften 1983 (8/59).
15. **Medanic, J.–Uskovic, Z.:** *The design of optimal output regulators for linear multivariable systems with constant disturbances.* Int. J. Control 1983 (37), pp. 809-830.
16. **Gilbert, E.G.:** *The decoupling of multivariable systems by state feedback.* SIAM J. Control 1969 (7), pp. 50-63.
17. **Lohmann, B.:** *Vollständige und teilweise Führungsentkopplung im Zustandsraum.* Dissertation. VDI-Zeitschriften 1991 (8/244).
18. **Franklin, G.F.–Powell, J.D.–Workman, M.L.:** *Digital control of dynamic systems.* Addison-Wesley, 1990.
19. **Lantos, B.:** *A funkcionálanalízis egy alkalmazása az irányítástechnikában. Optimalizálás részben rendezett terekben.* CSc doktori értekezés. MTA Budapest, 1976.

20. **Lantos, B.:** *Új elvek és módszerek a robotok irányításában és identifikációjában. DSc doktori értekezés.* MTA Budapest, 1993.
21. **Mosca, E.–Zhang, J.:** *Stable redesign of predictive control.* Automatica 1992 (28), pp. 1229-1233.
22. **Rawlings, J.B.–Muske, K.R.:** *The satbility of constrained receding horizon control.* IEEE Trans. Aut. Control 1993 (38), pp. 1512-1516.
23. **Rossiter, J.A.–Kouvaratakis, B.–Rice, M.J.:** *A numerically robust state-space approach to stable-predictive control strategies.* Automatica 1998 (34), pp. 65-73.
24. **Vidyasagar, M.:** *Nonlinear system analysis.* Prentice Hall, 1993.
25. **Sastry, S.:** *Nonlinear systems. Analysis, stability and control.* Springer, 1999.
26. **Lantos, B.:** *Robotok irányítása.* Akadémiai Kiadó, 1991, 1997, 2002.
27. **Dixon, W.E.–Dawson, A.M.–Zergeroglu, E.–Behal, A.:** *Nonlinear control of wheeled mobile robots.* Springer 2001.
28. **Aström, K.J.–Wittenmark, B.:** *Adaptive Control.* Addison-Wesley, 1989.
29. **Isermann, R.–Lachmann, K.H.–Matko, D.:** *Adaptive control systems.* Prentice Hall, 1992.
30. **Nazaruddin, Y.Y.:** *Adaptive Regelung von Ein- und Mehrgrössensystemen auf der Basis der Zustandsraumdarstellung.* Dissertation, Ruhr Universität, Bochum, 1994.
31. **Nazaruddin, Y.Y.–Unbehauen, H.:** *Design of a multivariable state-space adaptive controller and its application to a turbo-generator plant.* 5th IFAC Symposium Adaptive Systems in Control and Signal Processing ACASP95, Budapest, 1995, pp. 183-188.
32. **Slotine, J.E.–Li, W.:** *Adaptive manipulator control: A case study.* IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, Raleigh, 1987, pp. 1392-1400.
33. **Pontryagin, L.–Boltyanski, V.–Gamkrelidze, R.–Mitscenko, E.:** *The mathematical theory of optimal processes.* Wiley, 1962.
34. **Bellman, R.:** *Dynamic programming.* Princeton University Press, 1957.
35. **Dubovickij, A.Ja.–Miljutin, A.A.:** *Zadaci na ekstremum pri nalicsii ogranyicsenyij.* Zsurnal vicsisl. mat. i. mat. fiziki 1965 (3), pp. 395-453.
36. **Girszanov, I.V.:** *Lekcii po matematiceszkoi teorii eksztremalnih zadacs.* Izdatyelsztvo Moszkovszkovo Universziteta, 1970.
37. **Neustadt, L.W.:** *An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problems I-II.* SIAM J. Control, Vol. 4, 1966, pp. 505-207, Vol. 5, 1967, pp. 90-137.
38. **Canon, M.D.–Cullum, C.D.–Polak, E.:** *Theory of optimal control and mathematical programming.* McGraw-Hill, 1970.
39. **Hestenes, M.R.:** *Calculus of variations and optimal control theory.* Wiley, 1966.

40. **Kuhn, H.W.–Tucker, A.W.:** *Nonlinear programming*. Proceedings of The 2nd Berkeley Symposium on Mathematical statistics and Probability. Berkley, 1950, pp. 481-492.
41. **Neustadt, L.W.:** *A general theory of extremals*. Journal of Computer and Systems Sciences 1969 (3), pp. 57-92.
42. **Athans, M.–Geering, H.P.:** *Necessary and sufficient conditions for differentiable nonscalar-valued functions to attain extrema*. IEEE Trans. Automatic Control 1973 (18), pp.132-138.
43. **Geering, H.P.–Athans, M.:** *The infimum principle*. IEEE Trans. Automatic Control 1974 (19), pp. 485-494.
44. **Ritter, K.:** *Optimization theory in linear spaces III*. Mathematische Annalen 1970 (184), pp. 133-154.
45. **Dauer, J.P.–Stadler, W.:** *A survey of vector optimization in infinite-dimensional spaces. Part 2*. Journal of Optimization Theory 1986 (51), pp. 205-241.
46. **Lusternik, L.A.–Sobolew, W.I.:** *Elemente der Funktionalanalysis*. Akademie-Verlag, 1968.
47. **Dunford, N.–Schwartz, J.T.:** *Linear operators*. Interscience Publishers, 1958.
48. **Wilansky, A.:** *Funktional analysis*. Blaisdell Publishing Company, 1964.
49. **Kantorowitsch, L.W.–Akilow, G.P.:** *Funktionalanalysis in normierten Räumen*. Akademie-Verlag, 1964.
50. **Hewitt, E.–Stromberg, K.:** *Real and abstract analysis*. Springer, 1965.
51. **Lemke, C.E.:** *On complementary pivot theory*. In Mathematics of the decision sciences, ed. Dantzig, G.B-Veinott, A.F. American Mathematical Society 1968.
52. **Bazaraa, M.S.–Shetty, C.M.:** *Nonlinear programming. Theory and algorithms*. Wiley, 1979.
53. **Isidori, A.:** *Nonlinear control systems I*. 3rd edition. Springer, 1995.
54. **Isidori, A.:** *Nonlinear control systems II*. Springer, 1999.
55. **Nijmeijer, H.–van der Schaft, A.:** *Nonlinear dynamical control systems*. Springer, 1990.
56. **Van der Schaft, A.:** *L2-gain and passivity techniques in nonlinear control*. Springer, 2000.
57. **Fliess, M.–Lévine, J.–Martin, Ph.–Rouchon, P.A.:** *Lie-Bäcklund Approach to Equivalence and Flatness of Nonlinear Systems*. IEEE Trans. Automatic Control, 1999 (38), pp. 700-716.
58. **Fliess, M.–Lévine, J.–Martin, Ph.–Rouchon, P.:** *Linéarisation par bouclage dynamique et transformations de Lie-Bäcklund*. C.R. Acad. Sci. Paris, 1993 (I-317), pp. 981-986.
59. **Abraham, R.–Marsden, J.E.–Ratiu, T.:** *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer, 1988.

60. **Martin, Ph.–Rouchon, P.:** *Feedback linearization and driftless systems*. Journal Mathematics of Control, Signals, and Systems, 1994 (7), pp. 235-254.
61. **Kiss, B.:** *Motion planning and control of a class of flat and Liouvillian mechanical systems*. PhD Thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2001.
62. **Kristic, M.–Kanellakopoulos, I.–Kokotovic, P.:** *Nonlinear and adaptive control system design*. Wiley, 1995.



A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó Rt. igazgatója
Felelős szerkesztő: Nagy Tibor
Termékmenedzser: Hesz Margit
A nyomást és kötést az EFO Kiadó és Nyomda Kft. végezte
Felelős vezető: Fonyódi Ottó
Budapest, 2003
Kiadványszám: KMA1-063
Megjelent 45,05 (A/5) ív terjedelemben

Az irányítástechnika (az automatikus szabályozások és vezérlések tudománya) rohamosan fejlődik, eredményei nélkül ma már nem hozhatók létre biztonságos erőművi rendszerek, robotizált gyártórendszerek, repülőgépek és űrtechnikai berendezések.

A három kötetre tervezett sorozat eme második kötete az irányítástechnika korszerű irányzatait mutatja be. Szerves folytatása az első kötetnek, amely általános rendszerttechnikai ismereteket adott és bemutatta az egyváltozós szabályozások tervezési módszereit. Segítséget nyújt a tervezői rendszerek használatához, amelyek korszerű ismereteket igényelnek a szakembertől.

A kötet többváltozós (MIMO) rendszerek irányítási módszereit vizsgálja. Először az irányítástechnikai gyakorlatban fontos szerepet játszó robotok, repülő és helikopterek modelljeinek felállítását mutatja be egységes elvek alapján. Algoritmusokat ad a sztochasztikus (MVC, LQG) optimális irányítások tervezésére frekvenciatartományban. A prediktív irányítások tervezésére frekvenciatartománybeli és állapottérbeli módszereket mutat be, különös figyelmet fordítva a numerikus kérdésekre. Bemutatja a MIMO rendszerek Luenberger-féle normálalakjait. Módszert ad a pólusáthelyezésre, a minimálisrendű állapotmegfigyelő tervezésére, az állapot-visszacsatolás különféle közelítéseire (kimeneti visszacsatolás, projektív irányítás, általánosított PID szabályozás) és a többváltozós rendszer stabil szétcsatolására. Bemutatja az LQ optimális irányítást, a sztochasztikus állapotbecslést Kalman-szűrővel és az LQG optimális irányítás szeparációs elvét. Külön fejezet foglalkozik az adaptív irányítások elméleti alapjaival (bemenet-kimenet stabilitás, passzivitás), a különféle adaptív irányítási módszerekkel (MRAC, STAC), a robotok identifikációjával és a MIMO implicit adaptív irányítással. A kötet részletesen tárgyalja az optimális irányítások elméletének legfontosabb eredményeit skalárkritérium és nem skalárértékű kritérium esetén általános függvényterekben. Az eredményeket példák illusztrálják az optimális irányítás, állapotbecslés és halmazkritériumú optimalizálás területéről. A kötet egyik súlyponti része a nemlineáris rendszerek differenciálgeometriai (Lie-algebrái) elven történő irányításának vizsgálata. A differenciálgeometriai alapozás után először megadja az elérhetőség és a megfigyelhetőség általánosítását nemlineáris rendszerekre, majd az állapot-visszacsatolás elvén és a bemenet-kimenet visszacsatolás elvén alapuló linearizálási módszereket. Külön vizsgálja a differenciálisan sima rendszerek irányítását (flatness control), a visszalépéses (backstepping) technikát és az időinvariáns nemlineáris irányítást, amelyek alkalmazását hajódaru, helikopter és mobilis robot irányítása példáján mutatja be.

A kötet jól hasznosítható az egyetemi szabályozástechnikai szakirányú és PhD képzésben, és rendszertchnikailag megalapozza a sorozat további kötetét (III. Robusztus, LPV és Soft Computing módszerek).

AKADÉMIAI KIADÓ

BUDAPEST

www.akkrt.hu

www.szakkonyv.hu

ISBN 963 05 7991 x



9 789630 579919



Lantos Béla

IRÁNYÍTÁSI RENDSZEREK ELMÉLETE ÉS TERVEZÉSE II.

955.634