tanulmányok

114/1980

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

RELÁCIOS ADATMODELL LOGIKAI ÉS STRUKTURÁLIS VIZSGÁLATA

Irta:

Demetrovics János
a mat. tud. kandidátusa

Tanulmányok 114/1980.

A kiadásért felelős:

DR VÁMOS TIBOR

ISBN 963 311 111 0
ISSN 0324 - 2951

Készült a SZÁMOK KSH nyomdájában
225/1980.

1. Bevezetés

Az adatbáziskezelő rendszereket többféleképpen szoktuk osztályozni, de a leginkább használatos osztályozás aszerint történik, hogy a felhasználó szempontjából miként valósul meg az "adatok" és az adatok közti "kapcsolatok" ábrázolása. Eszerint három adatmodell tipust különböztetünk meg: hierarchikust, hálózatost és relációst. Az E.F. Codd által bevezetett relációs adatmodell [10] az adatkezelés egyik legigéretesebb eszköze.

A relációs megközelitésben a kapcsolatokat ugyanúgy ábrázoljuk, mint a valós világ többi adatát, azaz n-esek segitségével. A relációs adatmodell nem a gépi oldal lehetőségeit igyekszik kihasználni, illetve bőviteni, hanem a felhasználó szempontjából indul ki és azt a célt tüzi ki, hogy a felhasználó a számára a lehető legszemléletesebb formában ábrázolhassa ill. dolgozhassa fel adatait.

A relációs adatmodell az adatbázisok logikai szerkezetének leirására alkalmas eszköz. Ez a modell az adattárolást szemléletes formában, mátrix alakban valósitja meg. A relációs adatbázis egy egységét, a Codd-féle relációt táblázatként, pontosabban mátrix alakban képzeljük el. A mátrix sorai az adatrekordok, az oszlopai pedig a tulajdonságok, más szóval az attributumok. A Codd-féle reláció ezek szerint egy homogén file.

A pontos definició a következő:

Legyen Ω egy nem üres véges halmaz $(\Omega=\{a_1,\dots,a_n\})$. Ω feletti relációknak / R / nevezzük az Ω halmazon értelmezett függvények véges halmazait. Tehát, ha R egy reláció Ω felett, és $h \in R$, akkor h az Ω halmazon értelmezett függvény. A relációkat szemléletesen kétdimenziós táblázatként ábrázoljuk: ha R egy reláció az Ω felett és $R=\{h_1,h_2,\dots, h_k\}$, akkor az R reláció táblázata:

	a_1	a_2	...	a_n
h_1	$h_1(a_1)$			$h_1(a_n)$
h_2	$h_2(a_1)$			$h_2(a_n)$
h_k	$h_k(a_1)$			$h_k(a_n)$

R elemeit R sorainak nevezzük, Ω pedig az attributumok halmaza. Vegyük észre, hogy az R reláció sorait hagyományos értelemben rekordoknak nevezzük.

A relációban nem engedjük meg, hogy két sor azonos legyen.

Szokásos még a következő, az imént adottól némileg eltérő definició is.

Minden egyes attributumhoz tartozik egy D_a halmaz, azon dolgok halmaza, amelyek az a attributum "értékei" lehetnek. A D_a halmazt az a attributum **érték-készletének** vagy domainjének nevezzük. A reláció a domainek szorzatterének egy részhalmaza. A pontos definició a következő:

<u>1.1 Definició.</u> Legyen Ω egy véges halmaz és $a \in \Omega$ esetén D_a egy nem üres halmaz. Az $R \subseteq \underset{a \in \Omega}{\times} D_a$ halmazokat Ω feletti relációknak nevezzük.

Ha R egy reláció az Ω felett és $h \in R$, akkor h egy függvény

$$h : \Omega \to \bigcup_{a \in \Omega} D_a,$$

és világos, hogy

$$(\forall a)(a \in \Omega \Rightarrow h(a) \in D_a).$$

Ez a definició a relációs adatmodell konkrét alkalmazására tekintettel követeli meg az attributumok adott domainjeiből való értékválasztást.

A relációs adatmodellek elméletének két fő területe van: az egyik a relációs adatmodell szerkezetének megfelelő módszerek kidolgozása az adatok közti összefüggések feltárására és lehetőleg kényelmes kezelésére. Az e területen elért eredmények alapvetően kétféle módot nyujtanak az összefüggések absztrakt leirására; a funkcionális függések illetve a metszet-függések fogalmait.

A másik fő terület a relációs adatmodellek lekérdezésének vizsgálata. Itt az alapvető feladat minél hatékonyabb és a felhasználói igényeket minél jobban kielégitő lekérdező nyelv definiálása.

Dolgozatunkban a funkcionális függéssel és ennek további három analogonjával foglalkozunk. A 4. részben érintjük a lekérdezéssel kapcsolatos problémakört is.

Egy relációs adatbázis feladata általánosan fogalmazva az információszolgáltatás. Ennek hatékony eszköze az adatok közötti összefüggések feltárása. Relációs adatmodell alkalmazásakor ezen összefüggések egyik fontos formája az E.F. Codd [10] által bevezetett funkcionális függés [3].

1.2 Definició. Legyen Ω egy attributumhalmaz és R egy Ω feletti reláció. Ha $A\subseteq\Omega$, $B\subseteq\Omega$ és

$$(\forall h,g\in R)((\forall a\in A)(h(a)=g(a)) \Rightarrow (\forall b\in B)(h(b)=g(b))),$$

akkor azt mondjuk, hogy B funkcionálisan függ A -tól az R relációban, jelekben $A \overset{f}{\underset{R}{\to}} B$.

Az $A \overset{f}{\underset{R}{\to}} B$ tehát azt jelenti, hogy az R bármely sorának B-beli attributumokhoz tartozó értékeit "meghatározzák" az A-beli attributumokhoz tartozó értékek.

Legyen R egy Ω feletti reláció. Jelöljük F_R -rel az R relációban fennálló funkcionális függések halmazát; azaz

$$F_R = \{(A,B): A\subseteq\Omega,\ B\subseteq\Omega,\ A \overset{f}{\underset{R}{\to}} B\}.$$

Az F_R halmazt az R relációban fennálló funkcionális függőségek teljes családjának nevezzük. Az F_R teljes családot azért érdemes vizsgálni, mert ha adott egy reláció, melynek ismerjük funkcionális függőségeit, akkor ezeket felhasználhatjuk bizonyos, az adatbázisra vonatkozó információk tömöritésére és számitógép memória kihasználásának lényeges javitására.

A funkcionális függéssel analóg módon definiálhatunk három további, a relációs adatmodell alkalmazásakor az adatok közti összefüggések hatékony leirására alkalmas függést; a duális, erős és gyenge függést [14].

1.3 Definició. Legyen R egy reláció az Ω attributum-halmaz felett, legyenek továbbá A és B az Ω részhalmazai.

Ha $(\forall h,g\in R)((\exists a\in A)(h(a)=g(a)) \Rightarrow (\exists b\in B)(h(b)=g(b)))$,

akkor B duálisan függ A-tól R-ben $(A \underset{R}{\overset{d}{\rightarrow}} B)$;

ha $(\forall h,g\in R)((\exists a\in A)(h(a)=g(a)) \Rightarrow (\forall b\in B)(h(b)=g(b)))$,

akkor B erősen függ A-tól R-ben $(A \underset{R}{\overset{s}{\rightarrow}} B)$;

ha $(\forall h,g\in R)((\forall a\in A)(h(a)=g(a)) \Rightarrow (\exists b\in B)(h(b)=g(b)))$,

akkor B gyengén függ A-tól R-ben $(A \underset{R}{\overset{w}{\rightarrow}} B)$.

Egy R relációban fennálló duális, erős és gyenge függések halmazát $\mathcal{D}_R$ -rel, $\mathcal{S}_R$ -rel illetve $\mathcal{W}_R$ -rel jelöljük.

Nevezzük teljes Y -családoknak ($Y \in \{f,d,s,\mathcal{W}\}$) a $P(\Omega) \times P(\Omega)$ azon részhalmazait, melyek Ω feletti relációknak megfelelő tipusú függés halmazai. Egy R reláció logikai struktúráján $\mathcal{F}_R$, $\mathcal{D}_R$, $\mathcal{S}_R$, $\mathcal{W}_R$ teljes családokat értjük.

A duális és gyenge függések ismerete nagyban segitheti és gyorsithatja a relációs adatmodellek információszolgáltatását olyan esetekben, amikor a felhasználó nem ismer minden, a kivánt információ nyeréséhez általában szükséges attributumértéket, illetve amikor tulajdonságok egy halmazáról csak részleges információkra van szüksége.

Erős függések fennállása nagy relációknak kisebbekre való szétvágását és ezzel a tárolás helyigényének jelentős csökkentését teszi lehetővé. Ez a szétvágás a funkcionális függés esetére E.F. Codd [11], [18] által leirttal analóg módon történik.

A relációs adatmodellek elméletének egyik fő problémája: adott tipusú függések teljes családjainak belső jellemzése - axiomatizálása. W.W. Armstrong alapvető cikke [3] a teljes f-családokra ad axiómarendszert. Axiómarendszerével azonban a teljes f-családokra vonatkozó fontos, kombinatorikai jellegü problémák [7], [8], [9] nehezen kezelhetőek; [8]-ban adott Armstrong axiómarendszerének olyan módositása, melynek alapján bizonyos tipusú problémák kényelmesen tárgyalhatók [7,23].

E dolgozat egyik célja olyan axiómarendszer kidolgozása, amely a teljes f-családok kombinatorikus jellemzőit irja le. **Ezen kivül foglalkozunk még a teljes családok elméletének két problémájával és a lineáris relációkkal. Végül egy konkrét rendszer leirását adjuk meg relációs adatmodellben.**

A 2. és a 3. részben a teljes Y -családok ($Y \in \{f,d,s,W\}$) kombinatorikus struktúráját vizsgáljuk és lineáris relációkkal foglalkozunk.

A 2.2 részben megfogalmazzuk a funkcionális és a duális függések teljes családjai között fennálló dualitást (2.1. Lemma), majd hasonló szerkezetü axiómákat (F-, D,- S- és W -axiómák) adunk a teljes f-,d- és s -családok és az üres kezdőtagú függést nem tartalmazó teljes W -családok jellemzésére (2.1 Tétel).

A 2.3. részben rámutatunk a 2.2-ben adott axiómák hasonlóságának okára. Definiáljuk a mátrixok egyenlőséghalmazának fogalmát és bebizonyitjuk, hogy jellemzi őket az a tulajdonságuk, hogy bármely három sor által meghatározott három egyenlőséghalmaz Δ -rendszert alkot (2.2 Tétel). A 2.2 Tételre támaszkodva megfogalmazzuk az F-, D,- S,- és W -axiómára hasonlitó F',-D',- S',- és W' -axiómákat, és bebizonyitjuk, hogy ezek ekvivalensek vesszőtlen megfelelőikkel, a W' -axiómát kivéve (2.3 Tétel).

Végül a 2.4 Tételben bebizonyitjuk, hogy az F'-, D'- S'- és W'-axiómák jellemzik a teljes f-, d-, s- és W -családokat [21,27].

A 3. részben két, teljes f -családokra vonatkozó kombinatorikus problémát vizsgálunk. Az első: meghatározni a minimális S(n) (s(n)) számot, mellyel egy n elemü halmaz minden teljes f -családja (antilánca [10],[21]) reprezentálható egy legfeljebb S(n)(s(n)) soros reláció funkcionális függéseinek (kijelölt kulcsainak) rendszereként.

A másik probléma teljes f -családok minimális számosságú generátorrendszereinek jellemzése és e számosság meghatározása. A 3.3 és 3.5 Tételekben a következőket igazoljuk:

$$\frac{1}{n^2}\binom{n}{[n/2]} \leq s(n) \leq \binom{n}{[n/2]} + 1 \qquad \text{és}$$

$$\frac{1}{n^2}\binom{n}{[n/2]} \leq S(n) \leq \frac{3}{2}\binom{n}{[n/2]} + 1.$$

A teljes f -családok minimális számosságú generátorrendszereit a teljes családok maximális jobboldalainak metszetirreducibilis elemeivel jellemezzük (3.7 Tétel) és megmutatjuk, hogy egy n elemü halmaz feletti teljes f -családnak létezik legfeljebb $\frac{3}{2}\binom{n}{[n/2]}$ számosságú generátorrendszere (3.8 Következmény).

Ezután lineáris relációkra vonatkozó tételeket bizonyitunk. /Egy reláció lineáris, ha sorainak halmaza eltér a Q^n Q feletti vektortérben, ahol Q a racionális számok teste. Igy persze lineáris reláció vagy egy soros, vagy végtelen sok sora van; a logikai strukturáját azonban nyilvánvalóan már véges sok sora is mutatja./

Megmutatjuk, hogy lineáris reláció minden funkcionális függése lineáris (3.9 Tétel) és igy a kijelölt kulcsok azonos számosságúak (3.10 Lemma) [20].

A 3.13 lemmában bebizonyitjuk, hogy egy n elemü halmaz $[n/2]$ számosságú részeinek rendszere lineáris reláció kijelölt kulcsainak rendszere, és rámutatunk, hogy a bizonyitás módszerével az $[n/2]$ helyett tetszőleges $k \leq n$ irható (3.16 Következmény) [19].

A lineáris relációk teljes f -családjainak axiomatizálása ekvivalens a Q felett koordinátázható matroidok belső jellemzésével, ami a matroidelmélet egy nehéz, megoldatlan problémája.

Végül a 4. részben egy gyakorlati példán illusztráljuk a relációs adatmodell alkalmazásának hatékonyságát. Az MTA SZTAKI által a Nádudvari Vörös Csillag Termelőszövetkezet Kukorica és Iparinövény Termelési Egyesülése részére készülő raktárnyilvántartási rendszer adatbázisának két legnagyobb és az információszolgáltatás szempontjából legbonyolultabb egységének relációs adatmodellben való szervezését irjuk le.

A 4.1-ben általános áttekintést adunk a rendszerről.

A 4.2 részben megadjuk a relációs adatstruktúrát és kiszámitjuk a relációs adatmodell alkalmazásával elért helymegtakaritást; ez az eredeti helyigény mintegy 40 %-a.

A 4.3-ban a relációs adatmodell lekérdezéséről irunk. Rámutatunk arra, a raktárnyilvántartási rendszernek feltehető kérdések olyanok, amelyek hatékony algoritmussal rövidithetők és igy a relációs adatmodell alkalmazásával nem növekszik túlzottan a rendszer válaszideje.

2. Funkcionális függés általánositása

Az E.F. Codd által bevezetett funkcionális függőség fogalma (1.2. Definició) azt jelenti, hogy B funkcionálisan függ az A -tól, ha bármely $g,h \in R$ esetén

$$(1) \quad (\forall a \in A)(g(a)=h(a)) \Rightarrow (\forall b \in B)(g(b)=h(b))$$

fennáll, ahol $A,B \subseteq \Omega$.

Az (1) formula azt jelenti, hogy ha az R reláció két sora azonos minden A -beli helyen, akkor azok azonos értékeket vesznek fel minden B -beli helyen is.

Formálisan kiindulva az (1) formulából a funkcionális függőség fogalmát a kvantorok lehetséges változtatásaival természetes módon lehet általánositani. Igy még három különböző függőség fogalmat lehet definiálni, amelyek szintén jellemzőek a relációkra.

Vegyük észre, hogy az (1) formulában kétszer szerepel a $\forall$ kvantor. Ha ezeket a kvantorokat az összes lehetséges módon helyettesitjük a $\exists$ és $\forall$ kvantorokkal, akkor az alábbi formulákat kapjuk:

$$(2) \quad (\exists a \in A)(g(a)=h(a)) \Rightarrow (\exists b \in B)(g(b) = h(b)) ;$$

$$(3) \quad (\exists a \in A)(g(a)=h(a)) \Rightarrow (\forall b \in B)(g(b) = h(b)) ;$$

$$(4) \quad (\forall a \in A)(g(a)=h(a)) \Rightarrow (\exists b \in B)(g(b)= h(b)).$$

A (2) formula azt jelenti, hogy ha az R reláció két sora azonos értéket vesz fel valamely A -beli helyen, akkor a két sor azonos valamely B -beli helyen is. Nevezzük a (2) formula által definiált függést duálisnak és jelöljük $A \overset{d}{\underset{R}{\rightarrow}} B$ -vel ill. $\mathcal{D}_R=\{(A,B): A \overset{d}{\underset{R}{\rightarrow}} B,\ A,B \subseteq \Omega\}$.

A (3) formula pontosan azt jelenti, hogy ha az R reláció két sora azonos valamely A -beli helyen, akkor a két sor azonos értékeket vesz fel minden B -beli helyen is. Az ilyen függést nevezzük erős függésnek és jelöljük $A \overset{s}{\underset{R}{\rightarrow}} B$ -vel ill. $\mathcal{S}_R=\{(A,B): A \overset{s}{\underset{R}{\rightarrow}} B,\ A,B \subseteq \Omega\}$.

A (4) formula a funkcionális függés egy ujabb általánositását adja. Ez pontosan azt jelenti, hogy ha az R reláció két sora azonos értékeket vesz fel minden A -beli helyen, akkor azok azonos értéket vesznek fel valamely B -beli helyen is. Nevezzük ezt a függés tipust gyenge függésnek és jelöljük ezt $A \overset{w}{\underset{R}{\rightarrow}} B$ -vel, ill. $\mathcal{W}_R=\{(A,B): A \overset{w}{\underset{R}{\rightarrow}} B\}$.

Tetszőleges $R\ \Omega$ feletti reláció és $y \in \{f,d,s,w\}$ -re legyen $Y_R=\{(A,B): A,B \subseteq \Omega$ és $A \overset{y}{\underset{R}{\rightarrow}} B\}$, $(Y=F,\mathcal{D},\mathcal{S},\mathcal{W})$. Az Y_R halmazt az R -beli y -függőségek teljes családjának, vagy röviden y -családjának nevezzük. Konkrét y -család esetén (pl. $y=f$) beszélhetünk a funkcionális függőségek teljes családjáról is.

Természetes követelmény meghatározni az y -családok számára azokat a legáltalánosabb tulajdonságokat, amelyek minden Y_R -re teljesülnek függetlenül az R relációtól.

E.F. Codd, amikor a relációs adatmodell alapjait lerakta, rámutatott a funkcionális függések jelentőségére, de mivel ezek általános tulajdonságait nem ismerte, dolgozataiban [11,13] számos példát mutatott be különböző funkcionális függőségekre a normalizálás kapcsán, hogy mikor mit kell csinálni. W.W. Armstrong [3,4] munkái óta már tudjuk, hogy kevesebb példa is elegendő a normalizálás megértéséhez, ha a funkcionális függőségek teljes családjainak a legáltalánosabb tulajdonságait ismerjük. Sőt ezek az általános tulajdonságok határozzák meg a "projekció" és "join" müveletek helyes használatát is.

Dolgozatunk 2. részében az y - függőségek legáltalánosabb - azaz minden R reláció esetén teljesülő - tulajdonságaival foglalkozunk. Ezeket a tulajdonságokat axiomatizáljuk.

A funkcionális függőségek matematikai strukturáját elsőként W.W. Armstrong tanulmányozta [3,5] . Ő axiomatizálta elsők között a funkcionális függőségek teljes családját [3] . Számos dolgozat foglalkozik azoknak a tulajdonságoknak a leirásával, amelyek a reprezentáló reláció konkrét választásától függetlenül fennállnak a teljes családok strukturájában.

C. Delobel [15,16] dolgozata egy olyan axiomarendszert vezetett be, mely könnyen érthető, de "túl sok" axiomából áll. A [8,20] dolgozatokban az axiomák számának csökkentését tüzik ki célul a szerzők. A funkcionális függőségek teljes családjának a leirásához szükséges axiomák számát végső soron sikerült egyre lecsökkenteni [8]. Ezzel a levezethetőségre épülő tételek könnyen bizonyithatók [27,32].

G.Czédli [14] kezdte el elsőként vizsgálni a teljes d - családokat és a teljes s -családokat. Axiomarendszerei - ugyanúgy, mint az eddigiek [7,14,16,20] - logikai természetüek abban az értelemben, hogy a függőségek definicióira támaszkodnak és nem a teljes y -családok kombinatórikus strukturáját vizsgálja. Ezzel magyarázható az is, hogy a [14] -ban a teljes w -családra nem sikerül az Armstrong axiomarendszeréhez hasonlót megadni.

Dolgozatunk 2. fejezetében minden Y -családot axiomatizálunk (a 2.2 -ban F -, D -, S - ill. a 2.3 -ban az F'-, D'-, S'- és W' axiomarendszerek). Ezek az axiomarendszerek a teljes y -családok kombinatorikus strukturáját emelik ki.

A 2.2. részben új axiómákat adunk a teljes f -, d - és s- családok jellemzésére és bebizonyitjuk, hogy ezek ekvivalensek a [3,7,14] dolgozatokban ismertetekkel.

A 2.3. fejezetben bevezetjük az egyenlőség halmaz fogalmát és axiomatizáljuk az eddig még nem jellemzett teljes w-családokat. Továbbá mutatunk egy lényeges különbséget a gyenge függés és a többi között.

2.1. Függőségek a relációkban

A funkcionális függőségek gyakorlati jelentőségét számos dolgozat vizsgálja. Dolgozatunk mostani részében egy egyszerü konkrét példát ismertetünk a duális függőség szemléltetésére és ennek kapcsán rámutatunk a többféle függőségfogalom tanulmányozásának szükségességére. A most közlendő példát elsőként G. Czédli [14] dolgozata tanulmányozta. Legyen Ω = {szerző, cim, terem, polc}. Az alábbi táblázatban megadunk egy R Ω feletti relációt, amely egy tizennyolc könyvvel felszerelt könyvtár adatait tartalmazza.

szerző	cim	terem	polc
1	1	1	2
2	2	1	3
3	3	1	1
4	4	1	2
5	5	2	3
6	6	2	1
7	7	2	2
8	8	2	3
9	9	3	1
lo	lo	3	2
11	11	3	3
12	12	3	1
1	4	1	1
5	8	3	3
4	1	1	3
7	lo	3	2
6	lo	2	2
6	9	2	1

A könyvtár három teremből áll, mindegyik teremben három, egyenként két könyv befogadó képességü polc van elhelyezve. A könyvtár ugy van megszervezve, hogy

$\{\text{szerző, cim}\} \overset{d}{\underset{R}{\rightarrow}} \{\text{terem, polc}\}$. Továbbá $i = 1,2,\dots,12$-re

az $\left[\frac{i+3}{4}\right]$ -ik terem $(1+3\{\frac{i}{3}\})$ -ik polcán található az a könyv, amelynek a szerzője is és cime is i. (Itt $[x]$ és $\{x\}$ az x valós szám egész-, illetve törtrészét jelöli). A könyvtárba érkező olvasó, aki a keresett könyv szerzőjét vagy cimét ismeri – legyen i az ismert attributum értéke – megtalálhatja a könyvet, ha végignézi az $\left[\frac{i+3}{4}\right]$ -ik termet és az $1+3\{\frac{i}{3}\}$ -ik polcokat a másik két teremben. Nem szükséges az egész könyvtárat végignéznie.

A példa kapcsán most megkiséreljük végiggondolni, hogy az ujonnan bevezetett függőségek milyen előnyöket rejthetnek magukban egyes konkrét relációk esetén.

1. A gyakorlat olyankor is felvetheti az információszolgáltatás kérdését, amikor nem ismerjük az összes A-beli attributum értékét, csak legalább egyet. Mint pl. a könyvtár látogatója. Az erős és d-függőség éppen ezzel a szituációval kapcsolatos.

2. Egy függőséget függvényekkel megadva az információszolgáltatás meggyorsitható. Nem biztos, hogy a keresgélés elkerülhető, de legalább a táblázatnak csak egy részében kell keresgélni.

3. Ha A és B között különböző függőségek is fellépnek, akkor mód nyilik a legkedvezőbb függőség kiválasztására és függvényekkel történő megadására. Ezek a függvények esetleg - mint példánkban is - egyszerüen megadhatók. Első látásra a funkcionális függőség tünik a legelőnyösebbnek, hiszen azt függvényekkel megadva elkerülhető a táblázatban történő keresgélés időigényes feladata. Azonban egy "bonyolult" függvényt szintén csak táblázattal tudunk megadni, és igy a behelyettesitési érték meghatározása egy másik - esetenként elég terjedelmes - táblázatban történő keresgélést tesz szükségessé. Korábbi példánkban
$\{$szerző, cim$\}$ $\overset{f}{\underset{R}{\rightarrow}}$ $\{$terem, polc$\}$ is teljesül, de az ezen funkcionális függőséget megadó függvény értéktáblázata megegyezik R -rel. Gyorsabban megtalálunk egy könyvet a példa ismertetése során leirt módon. Azaz e konkrét esetben célszerübb a $\{$szerző, cim$\}$ $\overset{d}{\underset{R}{\rightarrow}}$ $\{$terem, polc$\}$ d-függőséget választani.

4. Előfordulhat, hogy A és B között nincs funkcionális függőség, de egy másik tipusu függőség fellép.

2.2. A teljes f-,d- és s-családok leirása

Ebben a részben új axiómákat adunk a teljes f-,d- és s-családok jellemzésére és megfogalmazunk egy axiómát olyan teljes w-családokra, melyek nem tartalmaznak üres kezdőtagú függést. Bebizonyitjuk, hogy axiómáink ekvivalensek a nekik megfelelő "régiekkel" [4,14,15]. Az axiómák hasonlóságának igazi okát a 2.3 -ban irjuk le és ott axiomatizáljuk a teljes w -családokat is. A funkcionális függőségek alapján (φ -axiomarendszer) úgy tünt, hogy a különböző - funkcionális, duális, erős és gyenge-függőségeket logikai úton kell vizsgálni. Dolgozatunk jelenlegi fejezetében rámutatunk, hogy ezeket könnyebb az F -axioma alapján vizsgálni.

Az F-, D-, S- ill. F'-, D'-, S'- és W'-axiomák közötti kapcsolat meglátása után, minden funkcionális függésre ill. teljes f -családra vonatkozó tételt könnyü átvinni más függőségekre ill. teljes családokra.

A teljesség kedvéért leirjuk a teljes f-, d- és s-családdok [3] -ben és [14] -ben megadott axiómarendszereit. Legyen adva az Y halmazrendszer, ahol $Y \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$ és $P(\Omega)$ az Ω halmaz hatvány halmaza.

φ - axiómarendszer:

Azt mondjuk, hogy az $Y(Y=F)$ halmazrendszer kielégiti a φ - axiómarendszert, ha tetszőleges A,B,C és D halmazra $(A,B,C,D \subseteq \Omega)$ teljesülnek a következő feltételek:

(F1) $(A,A) \in F$;

(F2) ha $(A,B) \in F$ és $(B,C) \in F$, akkor $(A,C) \in F$;

(F3) ha $(A,B) \in F$ és $C \supseteq A$, $D \subseteq B$, akkor $(C,D) \in F$;

(F4) ha $(A,B) \in F$ és $(C,D) \in F$, akkor $(A \cup C, B \cup D) \in F$.

ν- axiómarendszer:

Azt mondjuk, hogy az $Y(Y=\mathcal{D})$ halmazrendszer kielégiti a ν- axiómákat ha tetszőleges A,B,C és D halmazra teljesülnek az alábbi feltételek:

(D1) $(A,A) \in \mathcal{D}$;

(D2) ha $(A,B) \in \mathcal{D}$ és $(B,C) \in \mathcal{D}$, akkor $(A,C) \in F$;

(D3) ha $(A,B) \in \mathcal{D}$ és $C \subseteq A$, $B \subseteq D$, akkor $(C,D) \in \mathcal{D}$;

(D4) ha $(A,B) \in \mathcal{D}$ és $(C,D) \in \mathcal{D}$, akkor $(A \cup C, B \cup D) \in \mathcal{D}$;

(D5) ha $(A,\emptyset) \in \mathcal{D}$, akkor $A \neq \emptyset$.

γ- axiómarendszer:

Azt mondjuk, hogy az $Y(Y=S)$ halmazrendszer kielégiti a γ-axiomarendszert ha tetszőleges A,B,C és D halmazra teljesülnek az alábbi feltételek:

S1) $(\forall a \in \Omega)$ $(\{a\},\{a\}) \in S$;

S2) ha $(A,B) \in S$ és $(B,C) \in S$ és $B \neq \emptyset$, akkor $(A,C) \in S$;

S3) ha $(A,B) \in S$ és $C \subseteq A$, $D \subseteq B$, akkor $(C,D) \in S$;

S4) ha $(A,B) \in S$ és $(C,D) \in S$, akkor $(A \cap C, B \cup D) \in S$;

S5) ha $(A,B) \in S$ és $(C,D) \in S$, akkor $(A \cup C, B \cap D) \in S$.

Különböző függőségek tulajdonságait számos dolgozat tanulmányozta napjainkig [6,26,30,34]. Ezek fő célja a teljes családok axiomatizálása volt. Ezen belül is két fő irányzatot figyelhetünk meg: a könnyen érthető, egyszerüen kezelhető axiomarendszerek megadása [4,16,34] ill. a minimális számosságú axiomarendszer leirása [8,20] volt a cél. A φ-,ν- és γ-axiomarendszerek az f-,d- és s-családok konkrét relációktól független általános tulajdonságait irják le. Ez azt jelenti egyrészt, hogy ha adott egy konkrét R reláció az Ω felett, akkor az F_R, D_R és S_R halmazrendszerek kielégitik a φ-, ν- és γ- axiomarendszereket, másrészt pedig, ha adott $Y \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$ halmazrendszer kielégiti a φ-, ν- ill. γ-axiomarendszert, akkor létezik az Ω felett olyan R reláció, amelyre $Y = Y_R$ teljesül $(Y \in \{F,D,S\})$.

Először a teljes f- és a teljes d-családok közt fennálló dualitást fogalmazzuk meg pontosan a φ- és a ν- axiomák alapján:

2.1. Lemma: Legyen $F \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$ olyan halmazrendszer, amelyre $(A,B) \in F$, $B \neq \emptyset$ esetén $A \neq \emptyset$. Ekkor az F halmaz rendszerre igazak a φ -axiómák akkor és csak akkor, ha $\mathcal{D} = \{(B,A) : (A,B) \in F\}$ rendszerre teljesülnek a ν -axiómák.

Bizonyitás: A bizonyitás nyilvánvalóan következik a megfelelő axiómákból. Jegyezzük meg, hogy az $(A,B) \in F$ $B \neq \emptyset \to A \neq \emptyset$ feltétel (D5) miatt szükséges.

2.1. Megjegyzés: Tegyük fel, hogy $F \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$ kielégiti a φ -axiómákat és legyen $F' = F \setminus \{(\emptyset,B) : B \neq \emptyset\}$. Ekkor F' -re teljesülnek 2.1. Lemma feltételei, és ha $A \subseteq \Omega$, $A \neq \emptyset$ akkor $(\forall B \subseteq \Omega)((A,B) \in F \longleftrightarrow (A,B) \in F')$. Ez mutatja 2.1. Lemma feltételének technikai jellegét.

2.2. Megjegyzés: Jegyezzük még meg, hogy ha egy $F \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$ kielégiti a φ -axiómákat, akkor 2.1. Lemma és 2.1. Megjegyzés alapján F -hez a

$$\mathcal{D}(F) = \{(B,A) : (A,B) \in F \text{ és } B \neq \emptyset \to A \neq \emptyset\}$$

definicióval rendelt $\mathcal{D}(F)$ halmaz kielégiti a ν -axiómákat. Igy persze különböző F -ekhez rendelhettük ugyanazt a halmazt.

Most leirjuk a teljes f-,d- és s-családokat jellemző új axiomákat, amelyek felépitése azonos, valamint ezek analogonját a gyenge függésekre. A 2.3 Tételben majd bebizonyitjuk, hogy ez utóbbi axióma nem jellemez minden teljes w -családot, csak az olyan w -családokat, amelyekben nincs üres kezdő tagú gyenge függőség, azaz $\emptyset \overset{w}{\underset{R}{\nrightarrow}} B$ alakú.

F-axióma:

Az $F \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$ halmazrendszer kielégiti az F -axiomát akkor és csak akkor, ha

$\forall (X,Y) \in (P(\Omega) \times P(\Omega) \setminus F)$ $\exists E \subseteq \Omega$ úgy, hogy

(i) $X \subseteq E$ és $Y \nsubseteq E$; és ha

(ii) $(A,B) \in F$ és $A \subseteq E$, akkor $B \subseteq E$ teljesül.

D-axióma:

A $\mathcal{D} \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$ halmazrendszer kielégiti a D-axiómát, akkor és csak akkor, ha

$\forall (X,Y) \in (P(\Omega) \times P(\Omega) \setminus \mathcal{D})$ $\exists E \subseteq \Omega$ úgy, hogy

(i) $X \cap E \neq \emptyset$ és $Y \cap E = \emptyset$; és ha

(ii) $(A,B) \in \mathcal{D}$ és $(A \cap E) \neq \emptyset$, akkor $B \cap E \neq \emptyset$ teljesül.

S-axióma:

Az $S \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$ halmazrendszer kielégiti az S-axiómát, akkor és csak akkor, ha

$\forall (X,Y) \in (P(\Omega) \times P(\Omega) \setminus S)$ $\exists E \subseteq \Omega$ úgy, hogy

(i) $X \cap E \neq \emptyset$ és $Y \not\subseteq E$; és ha

(ii) $(A,B) \in S$ és $A \cap E \neq \emptyset$, akkor $B \subseteq E$ teljesül.

W-axióma:

A $W \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$ halmazrendszer kielégiti a W-axiómát akkor és csak akkor, ha

$\forall (X,Y) \in (P(\Omega) \times P(\Omega) \setminus W)$ $\exists E \subseteq \Omega$ úgy, hogy

(i) $X \subseteq E$ és $Y \cap E = \emptyset$; és ha

(ii) $(A,B) \in W$ és $A \subseteq E$, akkor $B \cap E \neq \emptyset$ teljesül.

Most megmutatjuk, hogy a φ-, ν- és γ -axiómarendszerek ekvivalensek a megfelelő F-, D- és S -axiómákkal.

2.1 Tétel: (a) Legyen $F \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$. F kielégiti a φ -axiómákat akkor és csak akkor, ha F kielégiti az F -axiómát.

(b) Legyen $\mathcal{D} \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$. $\mathcal{D}$ kielégiti a ν -axiómákat akkor és csak akkor, ha $\mathcal{D}$ kielégiti a D-axiómát.

(c) Legyen $S \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$. S kielégiti a γ -axiómákat akkor és csak akkor, ha S kielégiti az S-axiómát.

Bizonyitás: (a) Tegyük fel először, hogy F kielégiti a φ -axiómákat. Bebizonyitjuk, hogy ekkor F kielégiti az F -axiómát.

Legyen $(X,Y) \in P(\Omega) \times P(\Omega) \setminus F$ tetszőleges. Állitjuk, hogy ekkor

(5) létezik olyan E halmaz $(E \subseteq \Omega)$, amelyre $X \subseteq E$ és $(E,Y) \in P(\Omega) \times P(\Omega) \setminus F$, továbbá, ha $E' \supset E$, akkor $(E',Y) \in F$ teljesül, azaz létezik maximális olyan X -et tartalmazó része Ω -nak, amelytől Y nem függ. Ez világos, hiszen $(\Omega,\Omega) \in F$ az (F1) axióma szerint és igy (F3) axióma miatt $(\Omega,Y) \in F$ teljesül, mig $(X,Y) \notin F$.

Megmutatjuk, hogy az (5) szerinti E halmaz teljesiti az F -axióma (i) és (ii) feltételeit. Az (i) feltétel nyilvánvaló, mert $E \supseteq X$ az E halmaz megfelelő választása szerint és ha $E \supseteq Y$ fennállna, akkor (F1) és (F3) axiómák miatt $(E,Y) \in F$ teljesülne, ami ellentmondás. Az F -axióma (ii) feltételének bizonyitásához válasszunk egy tetszőleges olyan $(A,B) \in F$ -et, amelyre $A \subseteq E$ teljesül. Tegyük fel indirekt, hogy $B \not\subseteq E$. Ekkor E' halmazt választjuk úgy, hogy $E' := E \cup B \supset E$ és igy $(E',Y) \in F$ teljesül az (5) szerint. De ekkor $(E,E) \in F$ az (F1) axióma miatt és igy $(E,E') \in F$ teljesül az (F4) axióma miatt, mert $E = E \cup A$ és $E' = E \cup B$. S végül $(E,Y) \in F$ teljesül az (F2) axióma miatt, mivel $(E,E') \in F$ és $(E',Y) \in F$. Ellentmondásra jutottunk, hiszen $(E,Y) \in F$ lehetetlen (5) szerint.

A forditott irány bizonyitása könnyü. Példaként bebizonyitjuk, hogy ha F -re igaz az F -axióma, akkor F -re teljesül a φ -axiómarendszer (F2) axiómája is. Tegyük fel indirekt, hogy $(A,B)\in F$, $(B,C)\in F$ és $(A,C)\in P(\Omega)\times P(\Omega)\setminus F$. Az F -axióma szerint létezik E halmaz $(E\subseteq\Omega)$ úgy, hogy $A\subseteq E$ és $C\nsubseteq E$ teljesül. Az $(A,B)\in F$ miatt $A\subseteq E$ és $B\subseteq E$. A $(B,C)\in F$ és $B\subseteq E$ miatt pedig $C\subseteq E$ ami ellentmondás.

(b) Ennek az állitásnak a bizonyitását 2.1 Lemmát felhasználva végezzük el. Legyen $F=\{(A,B):(B,A)\in \mathcal{D}\}$. A 2.1 Lemma miatt elég bizonyitanunk, hogy F akkor és csak akkor elégiti ki az F -axiómát, ha $\mathcal{D}$ kielégiti a D-axiómát.

Tegyük fel, először, hogy F -re teljesül az F-axióma. Az F -axióma szerint az $(X,Y)\in P(\Omega)\times P(\Omega)\setminus F$ -hez létezik olyan E halmaz, hogy $X\subseteq E$ és $Y\nsubseteq E$ és ha $(A,B)\in F$ és $A\subseteq E$, akkor $B\subseteq E$. A továbbiakban jelöljük ezt a halmazt $E(X,Y)$ -al, azaz $E(X,Y)=E$. Ekkor az $(Y,X)\in P(\Omega)\times P(\Omega)\setminus \mathcal{D}$ az $\Omega\setminus E(X,Y)$ halmazon kielégiti a D -axióma (i) és (ii) feltételeit, mivel az $(X,Y)\in P(\Omega)\times P(\Omega)\setminus F$ akkor és csak akkor, ha $(Y,X)\in P(\Omega)\times P(\Omega)\setminus \mathcal{D}$. Ebből következik, hogy a $\mathcal{D}$ halmazrendszer valóban kielégiti a D -axiómát.

Ugyanigy belátható, hogy ha $\mathcal{D}$ -re igaz a D-axióma, akkor F -re igaz az F -axióma.

(c) Tegyük fel először, hogy S -re igazak a γ -axiómák. Bebizonyitjuk, hogy ekkor S kielégiti az S-axiómát. Legyen $(X,Y) \in P(\Omega) \times P(\Omega) \setminus S$. Mutassuk meg, hogy ekkor

(6) létezik olyan $a (a \in X)$ és E halmaz $(E \subseteq \Omega)$ úgy, hogy $a \in E$, $(\{a\},E) \in S$ és ha $E' \supset E$, akkor

$$(\{a\},E') \in P(\Omega) \times P(\Omega) \setminus S.$$

Először mutassuk meg, hogy létezik olyan $a (a \in X)$, amelyre $(\{a\},Y) \in P(\Omega) \times P(\Omega) \setminus S$ mert ellenkező esetben (S5) ismételt alkalmazása $(X,Y) \in S$ -et eredményezné. Legyen tehát $a \in X$ olyan, hogy $(\{a\},Y) \in P(\Omega) \times P(\Omega) \setminus S$. Ekkor az (S4) axióma miatt létezik olyan $b (b \in Y)$, hogy $(\{a\},\{b\}) \in P(\Omega) \times P(\Omega) \setminus S$ ugyanis ha $\forall b (b \in Y)$ az $(\{a\},\{b\}) \in S$ teljesülne, akkor az (S4) axióma többszöri alkalmazása $(\{a\},Y) \in S$. Végül az (S1) és (S3) axiómák miatt létezik olyan $E (E \subseteq \Omega)$ halmaz, hogy $a \in E$ és $(\{a\},E) \in S$ és ha $E' \supset E$, akkor $(\{a\},E') \notin S$. Ezzel (6)-t bebizonyitottuk.

Az S halmazrendszer elégitse ki a γ -axiómarendszert és legyen $(X,Y) \in P(\Omega) \times P(\Omega) \setminus S$. Azt állitjuk, hogy akkor a (6) által meghatározott E halmaz kielégiti az S -axióma (i) és (ii) feltételeit. Valóban, az $a \in E$ következik, hogy ; $X \cap E \neq \emptyset$. Ezenkivül, mivel $(\{a\},E) \in S$ és $(\{a\},\{b\}) \notin S$ miatt (S3) axiómából következik, hogy $Y \not\subseteq E$.

Bizonyitsuk be az **S** -axióma (ii) feltételét is.

Legyen $(A,B) \in S$ olyan, hogy $A \cap E \neq \emptyset$. Tegyük fel indirekt, hogy $B \not\subseteq E$. Legyen $c \in A \cap E$ és $d \in B \cap (\Omega \setminus E)$. Ekkor az (S3) ill (S1) axiómákból következik, hogy $(\{c\},\{d\}) \in S$ ill. $(\{c\},\{c\}) \in S$. Igy az (S5) axiómának megfelelően $(\{a,c\}, \{c\}) \in S$. Az (S3) axiómát használva azt kapjuk, hogy $(\{a\}, \{c\}) \in S$ tehát $(\{a\}, \{d\}) \in S$ az (S2) miatt. Végül is az (S4) axióma alapján $(\{a\}, E \cup \{d\}) \in S$ ami ellentmondás, mert $E' := E \cup \{d\} \supset E$.

Ha S kielégiti az s -axiómát, akkor könnyen végiggondolható, hogy S -re igazak a γ -axiómák is. Ezt az (a) állitáshoz hasonlóan lehet bebizonyitani. Bizonyitsuk be például, hogy az (S1) axióma teljesül. Tegyük fel, hogy létezik olyan a $(a \in \Omega)$, hogy $(\{a\}, \{a\}) \notin S$. Akkor az S-axióma alapján létezik olyan E halmaz, hogy $\{a\} \cap E \neq \emptyset$ és $(\Omega \setminus E) \cap \{a\} \neq \emptyset$. Ez ellentmond annak, hogy $|\{a\}|=1$ vagyis, $(\{a\}, \{a\}) \in S$.

Ezzel a 2.1 Tételt bebizonyitottuk.

2.3. Egyenlőség halmaz és a függőségek

Dolgozatunk jelen részében a relációk egyenlőséghalmazával foglalkozunk, majd ezek egyszerü jellemzését adjuk meg. E jellemzésre támaszkodva megfogalmazzuk az F'-, D'-, S'- és W' - axiómákat. Ezek az axiómák lényegében nem mások, mint a megfelelő függések definicióinak átfogalmazásai az egyenlőséghalmazokra. Bebizonyitjuk, hogy az F'-, D'- és S'- axiómák rendre ekvivalensek F-, D- és S- axiómákkal illetve, hogy a W -axióma nem ekvivalens a W' -vel. /2.2 Tétel/.

Végül bebizonyitjuk, hogy az F'-, D'-, S'- és W'- axiómák rendre jellemzik a teljes f-,d-,s- és w-családokat.

2.1 Definició: Legyen R reláció Ω felett és legyen h,g az R reláció két sora. Definiáljuk h és g sorok egyenlőséghalmazát, az $E(h,g)$ halmazt a következő módon:

$$E(h,g) = \{a \in \Omega : h(a) = g(a)\}.$$

Az $\{E(h,g) : h,g \in R$ és $h \neq g\}$ halmazt az R reláció egyenlőséghalmazának nevezzük és ε_R -rel jelöljük. A relációk egyenlőséghalmazának jellemzéséhez szükséges a következő definició.

2.2 Definició: Legyen A egy halmazrendszer. Azt mondjuk, hogy A Δ -rendszer, ha tetszőleges A,B,C és D

$(A,B,C,D \in \mathcal{A},\ A \neq B,\ C \neq D)$ halmazok esetén $A \cap B = C \cap D$.

2.3 Megjegyzés: Könnyen látható, hogy egy $\mathcal{A}$ halmazrendszer akkor és csak akkor Δ -rendszer, ha tetszőleges $(A,B \in \mathcal{A},\ A \neq B)$ halmaz esetén $A \cap B = \cap \mathcal{A}$.

2.2 Tétel: (a) Legyen R egy reláció Ω felett és legyenek h,f,g sorai R relációnak. Ekkor az $\{E(f,g), E(h,g), E(f,h)\}$ halmazrendszer Δ -rendszer.

(b) Legyen $\varepsilon = \{E_{i,j} : 1 \leq i < j \leq k\}$ olyan halmazrendszer Ω részhalmazaiból amelyre igaz a következő: $\{E_{i,j}, E_{i,\ell}, E_{j,\ell}\}$ halmazrendszer Δ -rendszer, ha $1 \leq i < j < \ell \leq k$. Ekkor létezik olyan R reláció az Ω felett, amelynek ε az egyenlőséghalmaza; azaz $\varepsilon = \varepsilon_R$.

Bizonyitás: (a) Szimmetria okokból nyilván elég bizonyitani, hogy $a \in E(h,g) \cap E(g,f)$ - ből következik, hogy $a \in E(h,f)$. Ez valóban igy van, hiszen

$$a \in E(h,g) \cap E(g,f) \Longleftrightarrow h(a) = g(a) = f(a) \to$$
$$\to h(a) = f(a) \Longleftrightarrow a \in E(h,f).$$

(b) Definiálunk egy R relációt az Ω felett, amelynek k sora van: $h_1, h_2, \ldots, h_k$. Legyen $h_1(a)=0$, ha $a \in \Omega$. Tegyük fel, hogy egy $n < k$ -ra $h_1, h_2, \ldots, h_n$ már definiáltak úgy, hogy $1 \leq i < j \leq n$ esetén

$E(h_i,h_j) = E_{i,j}$. Legyen $a \in \Omega$ esetén

$$h_{n+1}(a) = \begin{cases} h_i(a), & \text{ha } 1 \leq i \leq n \text{ és } a \in E_{i,n+1}; \\ \max\{h_i(b) : 1 \leq i \leq n,\ b \in \Omega\} + 1, & \text{ha } a \notin \bigcup_{i=1}^{n} E_{i,n+1}. \end{cases}$$

Ekkor, vegyük észre először, hogy a h_{n+1} sor jól definiált.

Ehhez azt kell bebizonyitani, hogy az $a \in E_{i,n+1} \cap E_{j,n+1}$ esetén $h_i(a) = h_j(a)$. Valóban, az $a \in E_{i,n+1} \cap E_{j,n+1}$ -ből következik, hogy $a \in E_{i,j}$ mert $\{E_{i,j}, E_{i,n+1}, E_{j,n+1}\}$ halmazrendszer Δ -rendszert alkot a feltevés szerint és igy $E_{i,j} = E(h_i,h_j)$ miatt $h_i(a) = h_j(a)$.

Vegyük észre továbbá, hogy ha $1 \leq i \leq n$ és $a \notin E_{i,\ n+1}$ ugyanis akkor $h_i(a) \neq h_{n+1}(a)$. Ugyanis ha $a \notin \bigcup_{i=1}^{n} E_{i,\ n+1}$, akkor h_{n+1} definiciója szerint $h_i(a) \neq h_{n+1}(a)$.
Ha pedig $a \in E_{j,n+1}$, akkor $h_j(a) = h_{n+1}(a)$ és $h_j(a) \neq h_i(a)$, mert az $\{E_{i,j}, E_{i,n+1}, E_{j,n+1}\}$ halmazrendszer Δ -rendszer volta miatt $a \notin E_{i,j} = E(h_i,h_j)$.
Az előbb emlitett két észrevételből könnyen következik, hogy

$E_{i,n+1} = E(h_i,h_{n+1})$, ha $1 \leq i \leq n$.

Tehát a $\{h_1,h_2,\ldots, h_k\} = R$ relációra $\varepsilon_R = \varepsilon$.

Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

A különböző függések és a sorok egyenlőséghalmazának definiciói alapján nem nehéz látni, hogy a következő F'-, S'-, D'- és W'- axiómák a függések definicióinak átfogalmazásai egyenlőséghalmazokra.

F' - axióma:

Az $F (F \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega))$ halmazrendszer kielégiti az F'-axiómát, akkor és csak akkor, ha létezik olyan k és olyan $\{E_{i,j} : 1 \leq i < j \leq k,\ E_{i,j} \subseteq \Omega\}$ halmazrendszer, amely kielégiti az alábbi feltételeket:

(i) ha $(X,Y) \in P(\Omega) \times P(\Omega) \setminus F$, akkor létezik olyan i,j $(1 \leq i < j \leq k)$, hogy $X \subseteq E_{i,j}$ és $Y \not\subseteq E_{i,j}$;

(ii) ha $(A,B) \in F$ és $A \subseteq E_{i,j}$, akkor $B \subseteq E_{i,j}$, ahol $1 \leq i < j \leq k$;

(iii) tetszőleges i,j,ℓ számokra $(1 \leq i < j < \ell \leq k)$ az $\{E_{i,j}, E_{i,\ell}, E_{j,\ell}\}$ halmazrendszer Δ -rendszert alkot.

D' -axióma:

A $\mathcal{D}$ $(\mathcal{D} \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega))$ halmazrendszer kielégiti a D' -axiómát, akkor és csak akkor, ha létezik olyan k és $\{E_{i,j} : 1 \leq i < j \leq k, E_{i,j} \subseteq \Omega\}$ halmazrendszer, amely kielégiti az alábbi feltételeket:

(i) ha $(X,Y) \in P(\Omega) \times P(\Omega) \setminus \mathcal{D}$, akkor létezik, olyan i,j $(1 \leq i < j \leq k)$, hogy $X \cap E_{i,j} \neq \emptyset$ és $Y \cap E_{i,j} = \emptyset$;

(ii) ha $(A,B) \in \mathcal{D}$ és $A \cap E_{i,j} \neq \emptyset$, akkor $B \cap E_{i,j} \neq \emptyset$, ahol $1 \leq i < j \leq k$;

(iii) tetszőleges i,j,ℓ számokra $(1 \leq i < j < \ell \leq k)$ az $\{E_{i,j}, E_{i,\ell}, E_{j,\ell}\}$ halmazrendszer Δ-rendszert alkot.

S' - axióma:

Az $S(S \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega))$ halmazrendszer kielégiti az S'-axiómát, akkor és csak akkor, ha létezik olyan k és $\{E_{i,j}: 1 \leq i < j \leq k, E_{i,j} \subseteq \Omega\}$ halmazrendszer, amely kielégiti az alábbi feltételeket:

(i) ha $(X,Y) \in P(\Omega) \times P(\Omega) \setminus S$, akkor létezik olyan $i,j\,(1 \leq i < j \leq k)$, hogy $X \cap E_{i,j} \neq \emptyset$ és $Y \not\subseteq E_{i,j}$;

(ii) ha $(A,B) \in S$ és $A \cap E_{i,j} \neq \emptyset$, akkor $B \subseteq E_{i,j}$, ahol $1 \leq i < j \leq k$;

(iii) tetszőleges $i,j,$ számokra $(1 \leq i < j < \ell \leq k)$ az $\{E_{i,j}, E_{i,\ell}, E_{j,\ell}\}$ halmazrendszer Δ-rendszert alkot.

W' -axióma:

A $W(W \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega))$, halmazrendszer kielégiti a W'- axiómát, akkor és csak akkor, ha létezik olyan k és $\{E_{i,j}: 1 \leq i < j \leq k, E_{i,j} \subseteq \Omega\}$ halmazrendszer, amely kielégiti az alábbi feltételeket:

(i) ha $(X,Y) \in P(\Omega) \times P(\Omega) \setminus W$, akkor létezik, olyan i,j $(1 \leq i < j \leq k)$, hogy $X \subseteq E_{i,j}$ és $Y \cap E_{i,j} = \emptyset$;

(ii) ha $(A,B) \in W$ és $A \subseteq E_{i,j}$, akkor $B \cap E_{i,j} \neq \emptyset$, ahol $1 \leq i < j \leq k$;

(iii) tetszőleges i,j,ℓ számokra $(1 \leq i < j < \ell \leq k)$ az $\{E_{i,j}, E_{i,\ell}, E_{j,\ell}\}$ halmazrendszer Δ-rendszert alkot.

2.4 Megjegyzés: Az F'-axióma által meghatározott $E_{i,j}$ halmaz nem más mint a maximális elem [3,6] azaz, ha $(A,B) \in F$ és $A \subseteq E_{i,j}$, akkor $B \subseteq E_{i,j}$. Hasonló módon be lehet vezetni a maximális elem fogalmát a d-, s- és w-függésekre ill. teljes családokra, és a [8,9,16] dolgozatok eredményeihez hasonlókat lehet kapni.

2.3 Tétel: Legyen $Y \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$, $Y \in \{\mathbf{F},\mathbf{D},\mathbf{S}\}$ és $Y \in \{F, D, S\}$.

(a) Az Y halmazrendszer kielégiti az $\mathbf{Y}$-axiómát akkor és csak akkor, ha az Y halmazrendszer kielégiti az $\mathbf{Y}'$-axiómát.

(b) Legyen Ω egy tetszőleges véges halmaz $(|\Omega| \geq 3)$. Ekkor létezik olyan $W (W \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega))$ halmazrendszer, amely kielégiti a $\mathbf{W}$-axiómát, de nem elégiti ki a $\mathbf{W}'$-axiómát.

Bizonyitás:

(a) Tegyük fel, hogy $Y (Y=F)$ kielégiti az $\mathbf{F}$-axiómát. Mutassuk meg, hogy ekkor $Y (Y=F)$ kielégiti az $\mathbf{F}'$-axiómát is. Valóban, $(X,Y) \in P(\Omega) \times P(\Omega) \setminus F$-ra legyen $E(X,Y) \subseteq \Omega$ az a halmaz, amely az $\mathbf{F}$-axióma szerint az (X,Y)-hoz létezik és legyen továbbá

$\{E_2,\dots, E_k\} = \{E(X,Y):(X,Y) \in P(\Omega) \times P(\Omega) \setminus \mathcal{F}\}.$

Definiáljuk az $\{E_{i,j} : 1 \leq i < j \leq k\}$ halmazrendszert az alábbi módon:

Legyen $E_{1,j} = E_j$, ha $1 < j \leq k$ és

legyen $E_{i,j} = E_i \cap E_j$, ha $1 < i < j \leq k$.

Azt állitjuk, hogy ekkor az $\{E_{i,j}: 1 \leq i < j \leq k\}$ halmaz mutatja, hogy az $\mathcal{F}$ halmazrendszer kielégiti az F'-axiómát. Valóban triviális, hogy az F'-axióma (i) pontja teljesül. Legyen $(A,B) \in \mathcal{F}$ és feltételezzük, hogy $A \subseteq E_{i,j}$ $(1 \leq i < j \leq k)$, azaz $A \subseteq E_j$, ha $i=1$ ill. $A \subseteq E_i \cap E_j$, ha $i > 1$. Az F-axióma (ii) pontja és az $E_2, E_3,\dots, E_k$ halmazok definiciója szerint igy $B \subseteq E_{ij}$. Ez azt jelenti, hogy az F'-axióma (ii) pontja teljesül. Most bizonyitsuk be, hogy az F'-axióma (iii) pontja is igaz. Legyen $(1 \leq i < j < \ell \leq k)$.

Ha $i=1$, akkor $E_{i,j} = E_j$, $E_{i,\ell} = E_\ell$ és $E_{j,\ell} = E_j \cap E_\ell$, tehát $\{E_{i,j}$ $E_{i,\ell}$, $E_{j,\ell}\}$ bármely két elemének metszete $E_j \cap E_\ell$ és igy ez a halmazrendszer Δ-rendszert alkot.

Ha $i > 1$, akkor $E_{i,j} = E_i \cap E_j$, $E_{i,\ell} = E_i \cap E_\ell$ és $E_{j,\ell} = E_j \cap E_\ell$. Ezért az $\{E_{i,j}, E_{i,\ell}, E_{j,\ell}\}$ halmaz bármely két elemének metszete $E_i \cap E_j \cap E_\ell$. Ezt azt jelenti, hogy az $\{E_{i,j}, E_{i,\ell}, E_{j,\ell}\}$ Δ - rendszer.

Ha az $\mathcal{F}$ halmazrendszer kielégiti az F'-axiómát, akkor nyilvánvaló, hogy kielégiti az F-axiómát is. Ezzel az

$Y=\mathcal{F}$ esetet bebizonyitottuk. Tegyük fel most, hogy Y kielégiti a $\mathcal{D}$ -axiómát azaz $Y=\mathcal{D}$. Mutassuk meg, hogy $Y(Y=\mathcal{D})$ akkor kielégiti a $\mathcal{D}'$ -axiómát is. Valóban, $(X,Y)\in P(\Omega)\times P(\Omega)\setminus\mathcal{D}$ -ra legyen $E(X,Y)\subseteq\Omega$ a $\mathcal{D}$-axióma szerint az (X,Y) -hoz létező halmaz és legyen

$$\{E_1,E_2,\dots,E_k\}=\{E(X,Y) : (X,Y)\in P(\Omega)\times P(\Omega)\setminus\mathcal{D}\}.$$

Definiáljuk az $\{E_{i,j} : 1\leqq i<j\leqq 2k\}$ halmazrendszert a következőképpen:

legyen $E_{2i-1,2i}=E_i$, ha $1\leqq i\leqq k$, továbbá, ha $1\leqq i<j\leqq 2k$ és $E_{i,j}$ még nem definiált, akkor pedig legyen $E_{i,j}=\emptyset$.

Azt állitjuk, hogy ekkor $\{E_{i,j} : 1\leqq i<j\leqq 2k\}$ halmaz és $\mathcal{D}$ kielégitik a $\mathcal{D}'$-axiómát. Könnyü belátni, az (i) pont teljesülését. Vegyük észre, hogy ha az $E_{i,j}$ halmaz nem egyenlő egyetlenegy $E(X,Y)$ halmazzal sem, akkor $E_{i,j}=\emptyset$ és ezért $((A,B)\in\mathcal{D}\ \&\ A\cap E_{i,j}\neq\emptyset\rightarrow B\cap E_{i,j}\neq\emptyset)$. Ez azt jelenti, hogy a (ii) pontja a $\mathcal{D}'$-axiómának szintén teljesül. A (iii) pont azért igaz, mert ha $1\leqq i<j<\ell\leqq 2k$, akkor $\{E_{i,j}, E_{i,\ell}, E_{j,\ell}\}$ halmaz legalább két eleme $\emptyset$, tehát az $\{E_{i,j}, E_{i,\ell}, E_{j,\ell}\}$ halmaz Δ -rendszert alkot. Ha Y kielégiti a $\mathcal{D}'$-axiómát, akkor nyilván kielégiti a $\mathcal{D}$ -axiómát is.

Az olvasóra bizzuk annak bizonyitását, hogy ha $Y(Y=\mathcal{S})$ kielégiti az $\mathcal{S}$ -axiómát, akkor Y kielégiti az $\mathcal{S}'$-axiómát is. /Ez az eset hasonlóan bizonyitható, mint az $Y=\mathcal{F}$ eset./

(b) Az egyszerüség kedvéért legyen $\Omega=\{a,b,c\}$, /az általános esetben $\{c\}$ szerepét $\Omega\setminus\{a,b\}$ játsza/. Legyen $\mathcal{W}=\{(A,B)\in P(\Omega)\times P(\Omega) : A\subseteq\{a\}\to a\in B$ és $A\subseteq\{b\}\to b\in B\}$.

Vegyük észre, hogy a $\mathcal{W}$ halmazrendszer kielégiti a W-axiómát. Valóban, $\mathcal{W}$ kielégiti a W-axiómát, mert ha $(X,Y)\in P(\Omega)\times P(\Omega)\setminus\mathcal{W}$, akkor vagy $X\subseteq\{a\}$ és $a\notin Y$, vagy $X\subseteq\{b\}$ és $b\notin Y$. Az első esetben $E=\{a\}$, a második-ban $E=\{b\}$ mutatja, hogy igaz a W-axióma.

Azt állitjuk, hogy a most definiált $\mathcal{W}$ halmazrendszer nem elégiti ki W'-axiómát. Valóban, tegyük fel indirekt, hogy $\varepsilon=\{E_{i,j}: 1\leq i<j\leq k\}$ mutatja a W'-axióma teljesülését $\mathcal{W}$ halmazrendszerre. Ekkor

(7) $\{a\}\in\varepsilon$ és $\{b\}\in\varepsilon$,

mert $(\{a\},\Omega\setminus\{a\})\notin\mathcal{W}$ és $(\{b\},\Omega\setminus\{b\})\notin\mathcal{W}$.

(8) $\emptyset\notin\varepsilon$ és $\{c\}\notin\varepsilon$,

mert $(\emptyset,\Omega)\in\mathcal{W}$ és $(\{c\},\Omega\setminus\{c\})\in\mathcal{W}$.

Az $\{a\}$ és $\{b\}$ ε-beli halmazok; "elhelyezkedésüket" tekintve két esetet különböztetünk meg:

(9) $\{a\}=E_{i,j}$ és $\{b\}=E_{i,\ell}$.

Ekkor, mivel az $\{E_{i,j}, E_{j,\ell}, E_{i,\ell}\}$ halmaz Δ-rendszert alkot, az $E_{j,\ell}$ halmaz csak $\emptyset$ vagy $\{c\}$ lehet, ami ellentmond (8)-nak.

(lo) $\{a\}=E_{i,j}$ és $\{b\}=E_{\ell,m}$, ahol $|\{i,j,\ell,m\}|=4$.

Mivel a bizonyitásban csak az

$E_{i,j}, E_{i,\ell}, E_{i,m}, E_{j,\ell}, E_{j,m}, E_{\ell,m}$ halmazokkal foglalkozunk azért feltehető, hogy $i=1$, $j=2$, $\ell=3$, $m=4$. Azt vizsgáljuk meg, hogy $E_{1,3}$ halmaz mi lehet. Az $E_{1,3}=\{a\}$ és az $E_{1,3}=\{b\}$ esetek a (9) esethez vezetnek.

$E_{1,3} \neq \{c\}$ és $E_{1,3} \neq \emptyset$ a (8) miatt.

$E_{1,3} \neq \{b,c\}$, mert

$\{E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,3}\}$ halmaz Δ-rendszer, és igy ha $E_{1,3}=\{b,c\}$, akkor $E_{2,3}=\emptyset$, ami ellentmond (8)-nak. Ez végső soron azt jelenti, tehát, hogy $a \in E_{1,3}$. Igy $a \in E_{2,3}$,

mert $\{E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,3}\}$ halmaz Δ-rendszer.

$a \notin E_{2,4}$, mert $\{E_{2,3}, E_{2,4}, E_{3,4}\}$ halmaz Δ-rendszer.

Igy $E_{2,4} \subseteq \{b,c\}$. $E_{2,4} \neq \{c\}$ és $E_{2,4} \neq \emptyset$ (8) miatt és $E_{2,4} \neq \{b\}$ a (9) eset miatt. Tehát $E_{2,4}=\{b,c\}$.

Igy $b \in E_{2,3}$, mert $\{E_{2,3}, E_{2,4}, E_{3,4}\}$ halmaz Δ-rendszer.

Végül, igy $E_{1,3}=\{a,c\}$, mert az

$\{E_{2,3}, E_{1,2}, E_{1,3}\}$ halmaz Δ-rendszer.

$\{E_{1,3}, E_{1,4}, E_{3,4}\}$ halmaz Δ-rendszer, s

$E_{1,3} \cap E_{3,4}=\emptyset$, $E_{1,3} \cup E_{3,4}=\Omega$, ezért

$E_{1,4}=\emptyset$, ami ellentmond (8)-nak.

Ezzel a 2.3 Tétel (a) és (b) pontját is bebizonyitottuk.

2.5 Megjegyzés: A 2.3 Tétel lényeges különbséget mutat a gyenge és a többi függés között. Ez a különbség lényegében az, hogy az $\emptyset$ kezdőtagú függések csak a gyenge függésnél birnak más tulajdonságokkal, mint a nem $\emptyset$ kezdőtagúak. Jegyezzük még meg, hogy az F'-axiómában szereplő $E_{i,j}$ halmazok /és persze az F-axiómabeli E halmazok/ maximális jobboldalak; ennek alapján analóg módon definiálható a többi függésre is a maximális függés fogalma és Armstrong erre vonatkozó eredményei /a maximális jobboldalak metszetre zártságát kivéve/ nehézség nélkül adaptálhatók. Végül bebizonyitjuk, hogy axiómáink valóban jellemzik a teljes családokat.

2.4 Tétel: Legyen $Y \subseteq P(\Omega)\times P(\Omega)$, $Y \in \{F,D,S,W\}$ és $Y' \in (F',D',S',W')$. Ekkor Y kielégiti az Y'(F'-,D'-,S'- ill. W')axiómát akkor és csak akkor, ha létezik olyan R reláció az Ω halmaz felett, amelyre $Y = Y_R$.

Bizonyitás: Tegyük fel először, hogy Y kielégiti az Y'-axiómát valamely $Y \in \{F, D, S, W\}$ -re. Ekkor az Y'-axióma (iii) feltétele és 2.2 Tétel (b) pontja szerint létezik olyan R reláció, amelynek egyenlőséghalmaza az Y'-axióma által garantált halmazrendszer $(\varepsilon=\{E_{i,j}: 1 \leq i < j \leq k\})$. Az R reláció egyenlőséghalmazának definiciója és az Y'-axióma (i) és (ii) feltételei miatt nyilvánvaló, hogy ekkor Y az R megfelelő tipusú függéseinek rendszere és igy $Y = Y_R$.

Forditva, ha $R(R=\{h_1,h_2,\dots,h_k\})$ egy reláció Ω felett, akkor $\varepsilon_R = \{E(h_i, h_j) : 1 \leq i < j \leq k\}$ halmaz mutatja, hogy az R reláció f-, d-, s- ill. w -függéseinek halmazai kielégitik az F'-, D'-, S'- ill. W' -axiómát.

Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

3. Teljes f -családok generálása és reprezentálása relációkkal

Jelölje a továbbiakban F_R az R reláció funkcionális függőségeinek halmazát, azaz

$$F_R = \{(A,B) : A \overset{f}{\underset{R}{\rightarrow}} B\}.$$

Igy $F_R \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$. Nevezzük teljes f -családoknak azon Y részhalmazait a $P(\Omega) \times P(\Omega)$ rendszernek melyek valamely Ω feletti reláció funkcionális függőségei, azaz egy $Y \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$ teljes f -család akkor és csak akkor, ha létezik olyan R reláció Ω felett, amelyre $Y = F_R$.

A funkcionális függőségek vizsgálata során az első feladat a teljes f -családok absztrakt jellemzése volt. Ez W.W. Armstrongnak [3] sikerült először. Bebizonyitotta, hogy egy $Y \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$, akkor és csak akkor teljes f -család, ha Y-ra teljesülnek a φ -axióma feltételei (2.2 fejezet).

A funkcionális függések további vizsgálata során felmerült problémák a teljes f -családok kombinatorikus struktúrájával állnak szoros kapcsolatban [8, 9, 19, 27].

Dolgozatunk jelen fejezetében a teljes f -családok elméletének két problémájával és a lineáris relációkkal fogunk foglalkozni. E problémák a következő általános kérdéshez kapcsolódnak: általában mennyi "információ" elegendő egy teljes f -család leirásához. Armstrong bebizonyitotta, hogy minden teljes f -családhoz létezik olyan reláció, amely az adott teljes f -családot reprezentálja. Ugyanakkor azt is tudjuk, hogy ugyanazt a relációt különbözőféleképpen lehet reprezentálni relációkkal. Nagyon fontos probléma az adott f -családhoz tartozó relációk "minimalizálása", vagyis kiválasztani az adott f -családot reprezentáló relációk közül azt, amelynek a mérete (sorainak száma (S(n))) legkisebb. Ezt a problémát érdemes vizsgálni "csak" a kijelölt kulcsokat figyelembe véve is. Igy ugyanis egy időben több teljes f -családot vizsgálhatunk, mivel általában több olyan teljes f -család van, amelynek ugyanaz a kulcsrendszere.

Ezen kivül, dolgozatunk további részében a lineáris relációkat vizsgáljuk és rámutatunk arra a tényre, hogy a függésekre való megszoritás miatt - csak lineáris funkcionális függéseket engedünk meg - a tételek lényegesen eltérnek az általános elmélettől.

3.1 Teljes f-családok és relációk

Ebben a paragrafusban becslést adunk $S(n)$ -re és $s(n)$ -re (ld. 3.3 Definició). A probléma pontos megfogalmazása a következő: Legyen $|\Omega| = n$. Mi az a legnagyobb $S(n)$ $(s(n))$ természetes szám, amelyre igaz a következő: Létezik olyan $Y \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$ teljes f-család (($K \subseteq P(\Omega)$ - Sperner rendszer, kijelölt kulcs rendszer) úgy, hogy ha R egy olyan reláció az Ω felett, amelyre $Y = Y_R$ $(K = K(F_R))$, akkor az R sorainak a száma legalább $S(n)$ $(s(n))$.

3.1 Definició: Legyen $F \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$ egy teljes f-család és legyen $(A,B) \in F$. Ekkor azt mondjuk, hogy (A,B) maximális függése az F halmazrendszernek, ha tetszőleges B' halmazra $(B' \supseteq B)$ az $(A,B') \in F$ következik, hogy $B' = B$.

Jelöljük $M(F)$ -el az F teljes család maximális függéseinek halmazát. Egy B halmaz $(B \subseteq \Omega)$ maximális jobboldal az F teljes családra nézve, ha létezik olyan A halmaz $(A \subseteq \Omega)$, amelyre $(A,B) \in M(F)$. A továbbiakban jelöljük $I(F)$ -el az F teljes család maximális jobboldalainak halmazát.

3.1 Lemma: Legyen $F \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$. Ekkor

$$I(F) = \{ B \subseteq \Omega : (\forall (A,C) \in F)(A \subseteq B \to C \subseteq B) \}.$$

A 3.1 Lemma egyszerü bizonyitását az olvasóra bizzuk.

3.2 Következmény: Legyen $F \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$ egy teljes f-család. Ekkor $I(F)$ metszetre zárt halmazrendszer, azaz $B, B' \in I(F)$ -ből következik, hogy $B \cap B' \in I(F)$.

Bizonyitás: 3.1 Lemma szerint $I(F)=\{B \subseteq \Omega : (A,C) \in F,\ A \subseteq B \to C \subseteq B\}$.
Legyenek B, B' tetszőleges elemei $I(F)$ halmazrendszernek. Megmutatjuk, hogy $B \cap B' \in I(F)$. Ehhez azt kell bizonyitani, hogy $(A,C) \in F$, $A \subseteq B \cap B'$ esetén $C \subseteq B \cap B'$. Valóban, ha $A \subseteq B \cap B'$, akkor $A \subseteq B$, $A \cap B'$, ezért $C \subseteq B$, $C \subseteq B'$, mert $B, B' \in I(F)$. Igy $C \subseteq B \cap B'$ valóban. A 3.2 Következményt ezzel bebizonyitottuk.

3.2 Definició: Legyen $F \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$ egy teljes f-család. Egy A halmaz $(A \subseteq \Omega)$ kulcsa a teljes f-családnak ill. az R relációnak, ha $(A,\Omega) \in F$ teljesül. Az A halmaz kijelölt kulcsa (kulcs jelöltje) az F teljes családnak, ill. az R relációnak ha $(A,\Omega) \in F$ teljesül, és minden olyan A' halmazra $(A' \subseteq A)$ amelyre $(A',\Omega) \in F$ teljesül, igaz az is, hogy $A' = A$.
Jelölje $K(F)$ az F teljes f-család kijelölt kulcsainak rendszerét.
Jegyezzük meg, hogy ha F teljes család, akkor $K(F)$ Sperner -rendszer, azaz, ha $K_i, K_j \in K$, akkor $K_i \not\subseteq K_j$ és igy

$$|K(F)| \leq \binom{n}{[n/2]} \qquad [35].$$

3.3 Definició: Legyen $n > 0$ egy természetes szám és $|\Omega|=n$. Jelölje $s(n)$ azt a legnagyobb természetes számot, amelyre létezik olyan $K \subseteq P(\Omega)$ Sperner-rendszer, hogy:

ha R olyan reláció Ω halmaz felett, amelyre $K = K(F_R)$, akkor az R reláció sorainak száma legalább $s(n)$.

3.1 Megjegyzés: Ha $K \subseteq P(\Omega)$ Sperner-rendszer, akkor létezik olyan R reláció Ω felett, amelyre $K = K(F_R)$, ez [3,20]-ben bizonyitott, de a 3.3 Tételből is következik.

3.3 Tétel: $\frac{1}{n^2}\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]} \leq s(n) \leq \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]} + 1.$

Bizonyitás: Először a felső korlát helyességét bizonyitjuk. Legyen $|\Omega|=n$ és $K \subseteq P(\Omega)$ egy tetszőleges Sperner rendszer. Legyen L az Ω azon részhalmazainak rendszere, mely halmazrendszer egyetlen elemét sem tartalmazzák és maximálisak erre a tulajdonságra, azaz

$$L=\{X \subseteq \Omega : (A \in K \to A \nsubseteq X) \quad \text{és} \quad (Y \supsetneq X) \to (\exists A \in K)(A \subseteq Y)\}.$$

Világos, hogy L Sperner-rendszer és igy a [35] miatt $|L| \leq \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$.
Jelölje k az L számosságát és soroljuk fel az L Sperner rendszer elemeit $X_1, X_2, \ldots, X_k$ alakban. Konstruálunk R Ω feletti relációt úgy, hogy az R reláció sorainak száma $k+1$ és $K(F_R)=K$, azaz az R reláció kijelölt kulcsainak rendszere, $K(F_R)$ azonos az adott K Sperner rendszerrel. Legyenek az R reláció sorai $(h_0, h_1, \ldots, h_k)$ a következők: $h_0(a) = 0$, minden $a \in \Omega$ -ra, és ha i olyan, hogy $1 \leq i \leq k$, akkor

$$h_i(a) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad a \in X_i; \\ i, & \text{ha} \quad a \in \Omega \setminus X_i. \end{cases}$$

Legyen $R = \{h_o, h_1, \ldots, h_k\}$. Azt állitjuk, hogy ekkor $K(F_R) = K$.

Bizonyitsuk be először, hogy ha az A halmaz eleme a K Sperner rendszernek, akkor az A halmaz kijelölt kulcsa az R relációnak, azaz $A \in K(F_R)$. Valóban, ha $A \in K$, akkor az R reláció bármely két sora különbözik az A halmaz legalább egy elemén, mivel $A \nsubseteq X_i$, ha $1 \leqq i \leqq k$. Tehát az A halmaz kulcsa az R relációnak. Az A halmaz kijelölt kulcsa az R relációnak, mert ha létezik olyan B halmaz $(B \subseteq A)$, amelyre igaz, hogy $(B,\Omega) \in F$, akkor K Sperner-rendszer volta miatt B halmaz nem tartalmazza K egyetlen elemét sem. Ezért létezik olyan $i (1 \leqq i \leqq k)$, hogy $B \subseteq X_i$. $K \subseteq P(\Omega)$ és L definiciója miatt $X_i \neq \Omega$, igy $h_o \neq h_i$, de $B \subseteq X_i$ miatt $(\forall b \in B)(h_o(b) = h_i(b))$. Igy a B halmaz nem kulcsa az R relációnak. Ezzel beláttuk, hogy $K \subseteq K(F_R)$.

A továbbiakban bizonyitsuk be, hogy az R reláció minden kijelölt kulcsa a K Sperner rendszer eleme is, azaz $K(F_R) \subseteq K$. Tegyük fel indirekt, hogy létezik olyan B, hogy $B \in K(F_R) \setminus K$. Állitás első része szerint $K \subseteq K(F_R)$ és $K(F_R)$ Sperner-rendszer, ezért a B halmaz nem tartalmazza K egyetlen elemét sem. Igy létezik olyan $i (1 \leqq i \leqq k)$, hogy $B \subseteq X_i$. Az előbb azonban láttuk, hogy ekkor B nem kulcsa az R relációnak, ami ellentmondás.

Tehát $K(F_R) \subseteq K$ és igy végül $K = K(F_R)$. Ezzel az alsó korlát helyességét bebizonyitottuk. Most bizonyitsuk be a felső korlát helyességét. Állitásunkat két könnyen látható észrevétellel kezdjük:

(1) Ha R egy s-soros reláció, akkor létezik olyan R' s-soros reláció is, amelyben legfeljebb s szimbólum fordul elő és amelyre $F_R = F_{R'}$ és igy persze $K(F_R)=K(F_{R'})$ is teljesül.

(2) Ha R egy, s-soros reláció és $s' > s$, akkor létezik olyan R' s'-soros reláció is, amelyre $F_R = F_{R'}$ és igy persze $K(F_R) = K(F_{R'})$ is teljesül. Az (1) és (2) észrevételek alapján legfeljebb s- soros relációk kijelölt kulcsainak rendszerei legfeljebb $s(n)^{s(n).n}$ sokan vannak. Másrészt egy n-elemü halmaznak több, mint $2^{\binom{n}{[n/2]}}$ Sperner-rendszere van, tehát

$$s(n)^{s(n)\cdot n} > 2^{\binom{n}{[n/2]}}, \text{ azaz}$$

$$s(n) \,.\, n \,.\, \log_2 s(n) > \binom{n}{n/2}.$$

Jelölje $a(n)$ az $\binom{n}{[n/2]}$-et és legyen t olyan függvény, hogy

(3) $$a(n)/n \geq t(a(n)) \,.\, \log_2 t(a(n)) \,.$$

Ekkor $s(n) \geq t(a(n))$, mert ha $s(n) < t(a(n))$, akkor $a(n) < n\cdot s(n)\cdot \log_2 s(n) < n\cdot t(a(n))\cdot \log_2 (t(a(n)))$, ami ellentmondás. Könnyü ellenőrizni, hogy ha $t(a(n))=a(n)/n^2$,

akkor (3) teljesül a t függvényre, tehát $s(n) \geq \frac{1}{n^2}\binom{n}{[n/2]}$.
Ezzel a felső korlátot és magát a tételt is bebizonyitottuk.

<u>3.4 Következmény:</u> $\frac{1}{n^2}\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]} \leq S(n)$.

<u>3.5 Tétel:</u>
$$S(n) \leq \frac{3}{2}\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]} + 1.$$

<u>Bizonyitás:</u> W.W. Armstrong bebizonyitotta, hogy ha $I \subseteq P(\Omega)$ metszetre zárt, akkor pontosan egy olyan F teljes család van, amelyre $I = I(F)$. Ezért elég bizonyitanunk, hogy ha $I \subseteq P(\Omega)$ metszetre zárt, akkor létezik egy legfeljebb $\frac{3}{2}\binom{n}{[n/2]} + 1$ soros R reláció, amelyre $I = I(F_R)$. Legyen tehát $I \subseteq P(\Omega)$ halmazrendszer metszetre zárt. Legyen
$$N = \{Y \in I : Y \neq \cap\{Y' \in I : Y' \supseteq Y,\ Y' \neq Y\}\}.$$
Ekkor az N halmazrendszer olyan, hogy ha $Y \neq Y'$ és $Y, Y' \in N$, akkor $Y \cap Y' \notin N$. D. Kleitman [29] tétele szerint ekkor
$$|N| = k \leq \frac{3}{2}\binom{n}{[n/2]}.$$
A 3.6 Lemmában bebizonyitjuk, hogy a legszükebb olyan metszetre zárt rendszer, amely N-et tartalmazza, éppen az I halmazrendszer. Ezért elegendő egy olyan R relációt konstruálnunk, melynek legfeljebb $\frac{3}{2}\binom{n}{[n/2]} + 1$ sora van, és amelyre $N \subseteq I(F_R) \subseteq I$. Legyen $N = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$ és legyen R az a reláció, amelyet 3.3 Tétel bizonyitásában konstruáltunk, azzal a kivétellel, hogy az X_i halmaz

helyére az $\underline{Y}_i$ halmazt irjuk, ha $i=1,2,\dots k$. Nyilvánvaló, hogy ekkor $N \subseteq I(F_R) \subseteq I$. Ezzel állitásunkat bebizonyitottuk.

3.2 Generátorrendszer jellemzése

Most rátérünk a generátorrendszer jellemzésével kapcsolatos problémára, melyet W.W. Armstrong [4] vizsgált először. A feladat pontos megfogalmazása a következő. Legyen $F \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$ teljes f-család. Jellemezzük az F minimális számosságú generátorrendszereit.

<u>3.4 Definició:</u> Legyen $F \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$ egy f-teljes család. Azt mondjuk, hogy egy $F' \subseteq F$ generálja az F teljes családot, ha minden olyan R relációra az Ω felett, amelyre $F' \subseteq F_R$ teljesül, arra az $F \subseteq F_R$ összefüggés is igaz.

A [4] dolgozatban logikai jellemzése adott a teljes családok minimális számosságú generátorrendszereinek. Ezen jellemzés egy kombinatorikus ekvivalensét adjuk a 3.7 Tételben és becsüljük ezt a "minimális számosságot" a 3.8 Következményben.

<u>3.5 Definició:</u> Legyen $F \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$ teljes család. Jelölje ekkor $N(F)$ az $I(F)$ metszetirreducibilis elemeit, azaz

$$N(F) = \{Y \in I(F) : Y \neq \cap \{Y' \in I(F) : Y' \supseteq Y,\ Y' \neq Y\}\}$$

Azt mondjuk, hogy egy $M \subseteq I(F)$ metszet-generálja az $I(F)$-et, ha $I(F) = \{\cap M' : M' \subseteq M\}$.

3.6 Lemma: Egy $M \subseteq I(F)$ akkor és csak akkor metszetgenerálja az $I(F)$ halmazrendszert, ha $N(F) \subseteq M$.

Bizonyitás: A következő bizonyitás hálóelméletben jólismert. Ha M metszet-generálja $I(F)$ halmazrendszert, akkor $N(F) \subseteq M$ nyilvánvalóan.

Azt kell még bizonyitanunk, hogy $N(F)$ metszetgenerálja $I(F)$ halmazrendszert. Tegyük fel, hogy ez nem igaz és legyen $X \in I(F)$ egy maximális számosságú, amelyre $X \neq \cap\{Y \in N(F) : Y \supseteq X\}$. Ekkor persze $X \notin N(F)$, azaz

(4) $X = \cap\{X' \in I(F) : X' \supseteq X,\ X' \neq X\}$.

Ha $X' \supseteq X$, $X' \neq X$, akkor $|X'| > |X|$ és igy

(5) $X' = \cap\{Y \in N(F) : Y \supseteq X'\}$.

De a (4) és az (5) alapján $X = \cap\{Y \in N(F) : Y \supseteq X\}$, ami ellentmondás. Ezzel lemmánkat bebizonyitottuk.

3.7 Tétel: Legyen F egy teljes f -család és $F' \subseteq F$. Ekkor F' minimális számosságú generátorrendszere F teljes családnak, akkor és csak akkor, ha

(6) $(\forall Y \in N(F))\ (\exists A_Y \subseteq \Omega)\ (F' = \{(A_Y, Y) : Y \in N(F)\}$.

Bizonyitás: Ha F' halmazrendszer kielégiti a (6) formula feletételeit, akkor nyilván generálja F teljes családot.

Tegyük fel, hogy F' generálja F -et. $(A,B) \in F'$ -re legyen B' maximális olyan halmaz, hogy $B' \supseteq B$ és $(A,B') \in F$. Ekkor $F'' = \{(A,B') : (A,B) \in F'\}$ is generálja F teljes családot és $|F''| \leq |F'|$. Nyilvánvaló, hogy $\{B' : (\exists A)((A,B') \in F'')\}$ metszetgenerálja $I(F)$ halmazrendszert, és igy 3.6 Lemma szerint $|N(F)| \leq |F''| \leq |F'|$. Továbbá, ha $|N(F)| = |F''| = |F'|$, akkor $N(F) = \{B' : (\exists A)((A,B') \in F')\}$ teljesül. Ezzel a 3.7 Tételt bebizonyitottuk.

3.8 Következmény: Ha $F \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$ teljes f -család és $|\Omega| = n$, akkor létezik olyan F' generátorrendszere az f- teljes családnak, amelyre

$$|F'| \leq \frac{3}{2}\binom{n}{[n/2]}.$$

3.3 Lineáris relációk

Dolgozatunk jelen részében a lineáris relációkkal foglalkozunk. Bérügyi adatfeldolgozásnál általában csak a 4 alapmüveletet használják és nagyon sürün csak olyan homogén file-ok szerepelnek, amelyben a funkcionális függőségek lineárisak. Rámutatunk arra a tényre, hogy a lineáris relációk esetében néhány - máig is - megoldatlan kombinatorikai problémába ütközünk.

Jelölje Q a racionális számesetet és Q^n a racionális számokból álló n hosszúságú sorozatok halmazát. Ekkor Q^n természetes módon n -dimenziós vektortér a Q felett.

3.6 Definició: Egy R reláció az Ω felett lineáris, ha R sorainak halmaza altér a Q^n n -dimenziós vektortérben.

3.7 Definició: Legyen R reláció az Ω felett, és $R \subseteq Q^n$, $(A,B) \in F_R$. Az (A,B) funkcionális függés lineáris az R relációban, ha minden b elemre $(b \in B)$ -re léteznek $\alpha_{a,b} \in Q : a \in A$ együtthatók úgy, hogy ha $h \in R$ akkor, $h(b) = \sum_{a \in A} \alpha_{a,b}\, h(a)$.

3.9 Tétel: Ha R lineáris reláció az Ω felett és $(A,B) \in F_R$, akkor (A,B) lineáris függés R-ben, azaz lineáris reláció minden függése lineáris.

Bizonyitás: Az egyszerüség kedvéért tegyük fel, hogy $|B|=1$, azaz $B=\{b\}$. Ez feltehető, mert $(A,B) \in F_R$ akkor és csak akkor, ha $(A,\{b\}) \in F_R$ minden $b \in B$ -re, továbbá (A,B) lineáris funkcionális függés az R relációban akkor és csak akkor, ha $(A,\{b\})$ lineáris R-ben minden $b \in B$ elemre.

Legyen S az R relációnak a Q^A -ra való vetülete. Nyilvánvaló, hogy S altere Q^A -nak. Ha $\underline{x} \in R$, akkor $Pr_A(\underline{x}) \in S$ az $\underline{x}$ vetülete. $(A,\{b\}) \in F_R$ miatt $f:S \to Q$ a következő definicióval függvény: legyen $\underline{x} \in R$ esetén

$f(pr_A(\underline{x})) = \underline{x}(b)$, azaz az $\underline{x}$ vektor b -dik koordinátája. Azt állitjuk, hogy f lineáris leképezés. Valóban,

(7) ha $\underline{x}, \underline{y} \in R$,

akkor $\underline{x} + \underline{y} \in R$. Igy a pr_A lineáris volta miatt

$$pr_A(\underline{x}+\underline{y}) = (pr_A(\underline{x}) + pr_A(\underline{y})) \in S.$$

$$(\underline{x}+\underline{y})(b) = \underline{x}(b) + \underline{y}(b) \quad \text{ezért}$$

$$f(pr_A(\underline{x}) + pr_A(\underline{y})) = f(pr_A(\underline{x}+\underline{y})) = \underline{x}(b)+\underline{y}(b) =$$
$$= f(pr_A(x))+f(pr_A(\underline{y})).$$

(8) ha $\underline{x} \in R$, $\alpha \in Q$, akkor $pr_A(\alpha x)=\alpha \cdot pr_A(\underline{x}) \in S$ és

$$f(\alpha \cdot pr_A(\underline{x})) = f(pr_A(\alpha \cdot \underline{x}) = (\alpha \cdot \underline{x})(b) = \alpha \cdot x(b) = \alpha \cdot f(pr_A(\underline{x})).$$

Az S lineáris altér Q^A -ban, ezért az f függvény kiterjeszthető Q^A -ra egy $\tilde{f}$ lineáris leképezéssé, igy van $\{\alpha_{a,b} : a \in A\} \subseteq Q$ úgy, hogy minden $\underline{x} \in Q^A$ -ra,

$\tilde{f}(\underline{x}) = \sum_{a \in A} \alpha_{a,b}\, \underline{x}(a)$. A $\tilde{f}$ kiterjeszti az f függvényt, tehát f a kivánt alakú. Ezzel állitásunkat bebizonyitottuk.

Ha $R \subseteq Q^n$ lineáris reláció, akkor R -relációnak vagy egyetlen sora van, vagy végtelen sok. Az R logikai strukturáját azonban az R relációnak már véges sok sora is tükrözi, hiszen $P(\Omega)^2 = \{(A,B) : A \subseteq \Omega,\ B \subseteq \Omega\}$ véges és ha $(A,B) \in P(\Omega)^2$ nem funkcionális függés az R relációban, akkor ezt az R relációnak már két sora is mutatja.

Mivel a lineáris függések gyakorlati szempontból fontosak, sürün előfordulnak, érdemes megvizsgálni, hogy melyek azok a függésrendszerek amelyek realizálódhatnak lineáris relációban.

3.10 Lemma: Ha $R \subseteq Q^n$ lineáris reláció az Ω felett, és K_1, K_2 kijelölt kulcsa F_R teljes f -családnak, akkor

$$|K_1| = |K_2|.$$

Bizonyitás: Legyen $R' \subseteq R$ olyan reláció az Ω halmazon, amelynek véges sok sora van és amelyre $F_{R'} = F_R$. A 3.9 Tétel szerint $F_{R'}$ minden eleme lineáris függés. Könnyen meggondolható, hogy $K \subseteq \Omega$ kulcsa $F_{R'}$ teljes f-családnak, akkor és csak akkor, ha a $\{(h(a): h \in R'), a \in K\}$ vektorhalmaz maximális lineárisan független részhalmaza $\{h(a): h \in R': a \in K\}$ -nak. Igy, ha $K \subseteq \Omega$ kulcs, akkor K elemszáma egyenlő az R' mátrixának rangjával. A lemmát bebizonyitottuk.

3.11 Következmény: Ha $R \subseteq Q^n$ lineáris reláció, akkor F_R teljes f -család minden kulcsának pontosan annyi eleme van, amekkora R dimenziója. A 3.10 Lemma szerint tehát nem igaz, hogy minden teljes f -család lineáris reláció függésrendszere lehet.

Most bebizonyitjuk, hogy létezik olyan n -változós lineáris R reláció az Ω felett, amelyben a kijelölt kulcsok száma $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ és nem létezik olyan n -változós reláció, amelyben ennél több kijelölt kulcs lehetne.

3.12 Lemma: Egy tetszőleges n -változós lineáris R relációban maximum $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ kijelölt kulcs lehet.

Bizonyitás: Az egyszerüség kedvéért mindegyik tartományt jelöljük a sorszámával. Igy egy tetszőleges kijelölt kulcs nem más, mint az $\{1,2,\ldots,n\} = \Omega$ halmaz egy bizonyos részhalmaza. Jelöljük K-val a kijelölt kulcsok halmazát. Nyilvánvaló, hogy egy R relációnak legalább egy kijelölt kulcsa van -$\{1,2,\ldots,n\}$- és maximum $2^n - 1$ kulcsa kijelölt kulcsa lehet. A kijelölt kulcs definiciójából következik, hogy a kijelölt kulcsok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy ha

(9) $(n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots, n_{i_h}) \in K$ és $(n_{j_1}, n_{j_2}, \ldots, n_{j_m}) \in K$

az R reláció kijelölt kulcsai, akkor igaz, hogy

$$\{n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots, n_{i_h}\} \not\subseteq \{n_{j_1}, n_{j_2}, \ldots, n_{j_m}\}$$

és

$$\{n_{j_1}, n_{j_2}, \ldots, n_{j_m}\} \not\subseteq \{n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots, n_{i_h}\} .$$

Ez azt jelenti, hogy nekünk az Ω halmaz azon részhalmazainak a halmazát kell kiválasztani, amelyek együttesen rendelkeznek a (9) tulajdonsággal. Pontosabban, ezen részhalmazok halmaza közül azt, amelyiknek a számossága a legnagyobb.

Könnyü belátni, hogy $n = 2m$ esetén a (9) feltételnek eleget tesz például az az S_1 halmaz, amely nem más, mint az Ω halmaz összes m hosszúságú $\{n_{i1}, n_{i2}, \ldots, n_{im}\}$ részhalmaza.

Ha $n=2m+1$, akkor a (9) feltételt például kielégiti az a S_2 ill. S_3 halmaz, amelynek minden eleme m ill. $m+1$ hosszúságú.

Az $S_i\,(i=1,2,3)$ halmazok olyan halmazok, amelyek kielégitik a (9) tulajdonságot. Nekünk az ilyen tulajdonságúak közül azt kell kiválasztani, amelynek a számossága a legnagyobb.

Könnyü bebizonyitani - és a Sperner-tételből is következik - , hogy a legnagyobb számosságú éppen az általunk megjelölt S_i halmaz. Ismert tény [35]

hogy az S_i halmaz számossága $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ pontosabban,

ha $n = 2m$, akkor $\binom{2m}{m}$; ha pedig $n = 2m+1$, akkor

$$\binom{n}{[n/2]} = \binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1} .$$

A 3.12 Lemmát bebizonyitottuk.

A 3.13 Lemmában bebizonyitjuk, hogy létezik olyan lineáris R reláció, amelyben éppen annyi kijelölt kulcs van, mint amennyit a 3.12 Lemma kimond.

<u>3.13 Lemma:</u> Létezik olyan lineáris R reláció, amelyben $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ kulcsjelölt van.

<u>Bizonyitás:</u> Az általánosság megszoritása nélkül tegyük fel, hogy $n=2m$. Ebben az esetben olyan példát kell konstruálnunk,

hogy az S_1 halmaz minden $\{n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots, n_{i_m}\} \subset \Omega$ eleme generálja az Ω halmazt, de az $\{n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots, n_{i_m}\}$ egyetlen $\{n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots, n_{i_t}\}$ valódi részhalmaza se generálja az Ω halmazt $(t < m)$.

Az n-változós R reláció minden tartományának minden értéke legyen pozitiv egész szám a következő módon: Az $i (i=1,2,\ldots,m)$ tartományba egy x_i változó kerüljön, amelynek az értékkészlete pozitiv egész szám.

Az $m+i$ $(i = 1,2,\ldots,m)$ tartományokat pedig az $1,2,\ldots,m$ tartományok értékei adják meg. Az $m+i$ tartomány értéket a

$$2^{i}x_1 + 2^{2i}x_2 + 2^{3i}x_3 + \ldots + 2^{(m-1)i}x_{m-1} + 2^{mi}x_m$$

lineáris függvény adja meg. Az általánosság megszoritása nélkül tegyük fel, hogy minden R elemet úgy adunk meg, hogy előbb $1,2,\ldots$ majd végül az n attributum értéket adjuk meg.

Igy tehát az R reláció a következő $2m$ lineáris függvényből áll:

$$F = \{x_i, \sum_{j=1}^{m} 2^{ji}x_j, \quad i=1,2,\ldots,m\}.$$

Nyilvánvaló, hogy az állitásunk érdekében elégséges bebizonyitani azt, hogy az F függvényrendszer bármely tagja lineárisan függ az F rendszer bármely m tagjától, és egyetlen tagja sem függ egyetlen $t (t < m)$ tagból álló függvényrendszertől sem. Ennek érdekében be kell bizonyitani azt, hogy bármely m egyenlet megoldása megadja a többi m egyenlet értékét, és egyetlenegy egyenletrendszer, melynek számossága kisebb, mint m nem adja meg egyetlen egyenletnek sem az értéket.

Ennek igazolására elég bebizonyitani, hogy egyetlenegy m számosságú egyenletrendszernek sem 0 a determinánsa. Könnyü belátni, hogy ennek érdekében elég megmutatni azt, hogy a $\sum_{j=1}^{m} 2^{ji} x_j$ $(i=1,2,\dots,m)$ egyenletrendszer által meghatározott D determináns egyetlen D_k részdeterminánsának sem 0 az értéke. Ez egyszerüen következik az F lineáris függvényrendszer tetszőleges m függvénye által meghatározott determináns kifejtési szabályából.

Legyen

$$D = \begin{vmatrix} 2^{11} & 2^{21} & 2^{31} & \dots & 2^{(m-1)1} & 2^{m1} \\ 2^{12} & 2^{22} & 2^{32} & \dots & 2^{(m-1)2} & 2^{m2} \\ 2^{13} & 2^{23} & 2^{33} & \dots & 2^{(m-1)3} & 2^{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2^{1(m-1)} & 2^{2(m-1)} & 2^{3(m-1)} & & 2^{(m-1)(m-1)} & 2^{m(m-1)} \\ 2^{1m} & 2^{2m} & 2^{3m} & & 2^{(m-1)m} & 2^{mm} \end{vmatrix}$$

A D determináns sorait i -vel, oszlopait pedig j -vel jelöljük, $i,j = 1,2,\dots, m$.

Be kell bizonyitani, hogy a D determináns tetszőleges $D_k = (1 \leq k \leq m)$ részdeterminánsának az értéke nem 0, azaz

$$D_k = \begin{vmatrix} 2^{j_1 i_1} & 2^{j_2 i_1} & \dots & 2^{j_k i_1} \\ 2^{j_1 i_2} & 2^{j_2 i_2} & \dots & 2^{j_k i_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2^{j_1 i_k} & 2^{j_2 i_k} & & 2^{j_k i_k} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

ahol $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$ és $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq m$.

3.2 Megjegyzés: A D_k részdetermináns értelemszerüen azt jelenti, hogy ismerjük az n változós R relációnak l -edik és h -adik értelmezési tartományainak az értéket, ahol

$1 \leq l \leq m$ és $l \neq j_1, j_2, \ldots, j_k$, valamint a $h = m+i_s, s = 1,2,\ldots,k$.
A D_k determináns kifejtéséből következik, hogy a $D_k k!$ összegből áll, amelyek mindegyike

$$2^{i_1 j_{l_k} + i_2 j_{l_{k-1}} + \ldots + i_k j_{l_1}}$$

alakú hatvány, ahol $j_{l_s} \neq j_{l_t}$, ha $s \neq t$ és $\{j_{l_1}, j_{l_2}, \ldots, j_{l_k}\} = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$.

Bizonyitsuk be, hogy ezek közül a hatványok közül létezik egyetlenegy legkisebb hatvány, mégpedig a

$$2^{i_1 j_k + i_2 j_{k-1} + \ldots + i_{k-1} j_2 + i_k j_1} = M.$$

Elég bebizonyitani, hogy az

$$(10) \quad i_1 j_k + i_2 j_{k-1} + \ldots + i_{k-1} j_2 + i_k j_1 < i_1 j_{l_1} \; i_2 j_{l_{k-1}} + \ldots + i_{k-1} j_{l_2} + i_k \cdot j_{l_1}$$

egyenlőtlenség fennáll, ha legalább egy $i_s j_{k-s+1} \neq i_s \cdot j_{l_{k-s+i}}$.
Valóban, bontsuk fel a (10) egyenlőtlenséget k darab egyenlőtlenség összegére a következőképpen:

$$i_1 (j_k + j_{k-1} + \ldots + j_2 + j_1) \leq i_1 (j_{l_k} + j_{l_{k-1}} + \ldots + j_{l_2} + j_{l_1})$$

$$(i_2 - i_1) \cdot (j_{k-1} + \ldots + j_2 + j_1) \leq (i_2 - i_1) \cdot (j_{l_{k-1}} + \ldots + j_{l_2} + j_{l_1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(i_{k-1} - i_{k-2}) \cdot (j_2 + j_1) \leq (i_{k-1} - i_{k-2}) \cdot (j_{l_2} + j_{l_1})$$

$$(i_k - i_{k-1}) \cdot j_1 \leq (i_k - i_{k-1}) \cdot j_{l_1}.$$

Nyilvánvaló, hogy legalább egy egyenlőtlenség szigorú.

Igy sikerült bebizonyitani, hogy a D_k determináns mindegyik összeadandójából ki lehet emelni $2^{i_1 j_k + i_2 j_{k-1} + \ldots + i_k j_1} = M$, s mellette a 2 valamilyen pozitiv hatványa szerepel és az 1 is csak egyszer, azaz $D_k = M(1 \pm 2^{A_1} \pm 2^{A_2} \pm \ldots 2^{A_{k!-1}})$,

ahol $A_j \geq 1 \quad (j=1,2,\ldots,k!-1)$.

Ez azt jelenti, hogy $D_k \neq 0$.

A lemmát bebizonyitottuk.

A 3.12 és 3.13 lemmából következik az alábbi tétel.

3.14 Tétel: Létezik olyan n-változós lineáris R reláció amelyben a lehetséges kijelölt kulcsok száma $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ és nem létezik olyan reláció, amelyben a kijelölt kulcsok száma ennél több lenne.

3.3. Megjegyzés: A 3.12 Lemmában szereplő R reláció konstrukciójából következik, hogy nincs benne egyetlen nem triviális funkcionális függőség sem.

A [38] dolgozatban a szerzők bebizonyitották, hogy ha a nem triviális függőségek száma $k \leq \sqrt{n}$, akkor létezik olyan n - változós R reláció, amelyben a lehetséges kulcsok száma $\sqrt{n!}$.

A 3.15 Tételben egyrészt adunk a nem triviális funkcionális függőségek számára egy lehetséges becslést. Másrészt pedig példát konstruálunk annak a ténynek az illusztrálására, hogy a nem triviális funkcionális függőségek magas száma "lényegében" nem csökkenti a lehetséges kijelölt kulcsok számát.

3.15 Tétel: Legyen $k = \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$. Létezik olyan $n+1$ fokú lineáris T reláció, amelyben legalább k funkcionális függőség van és a kijelölt kulcsok száma is k.

Bizonyitás: Vegyük a 3.13 Lemmában szereplő n-változós lineáris R relációt és bővitsük ki $(n+1)$-változós lineáris T relációvá, úgy hogy az $n+1$ attributumértéke ne függjön az előző n attributum egyetlen részhalmazának az értékétől sem. Vagyis az $n+1$ attributum legyen teljesen független.

Nyilvánvaló, hogy az R reláció minden kijelölt kulcsa ebben a T relációban egy nem triviális funkcionális függőséget jelent és a nem triviális funkcionális függőségek száma $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ a T relációban.

A T reláció kijelölt kulcsai pedig nem mások, mint az $1,2,\ldots,m,\ldots,n$ halmaz tetszőleges m elemü részhalmazai és az $(n+1)$ attributum $(n=2m)$.

Könnyü belátni, hogy az $(n+1)$-változós T reláció kijelölt kulcsainak a számossága is $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

A tételt bebizonyitottuk.

A lineáris relációk függésrendszereinek axiómatizálása nagyon nehéz feladat, mert egy $K \subseteq P(\Omega)$ lineáris reláció függésrendszerének kijelölt kulcsrendszere akkor és csak akkor, ha K a Q felett koordinátázható matroid. A koordinátázható matroidok belső jellemzése pedig a véges kombinatorika régóta vizsgált, máig is megoldatlan problémája.

<u>3.16 Következmény:</u> Ha $|\Omega| = n$, $k \leqq n$, $K = \{A \subseteq \Omega : |A| = k\}$, akkor K egy lineáris reláció kulcsrendszere[20].

A 3.14 Tétel bizonyitásában használt módszer segitségével könnyü belátni, hogy igaz a 3.16 Következmény.

4. Relációs adatmodell alkalmazása

4.1 A rendszer általános leirása

A KITE számára az MTA SZTAKI raktárnyilvántartási rendszert készit. A KITE /Kukorica és Iparinövény Termelési Egyesülés/ mintegy 350 termelőszövetkezet egyesülése különböző feladatok ellátására, melyek közül az egyik legfontosabb: gondoskodni az országban müködő mezőgazdasági gépek alkatrészellátásáról. Az alkatrész nagy részét külföldről /szocialista és tőkés országokból/ kell beszerezni. A KITE,alkatrészraktárai három fő tipusba sorolhatók: konszigánciós, egyedi bizományos és AGROKER bizományos raktárak. Konszigánációs raktárat a nagyobb alkatrészgyártó cégek létesitettek a KITE-nél /John Deere, Becker, Rau, stb./; az ilyen raktárakban levő alkatrészek letétben vannak a KITE-nél, a szállitó cégnek a KITE a hazai partnereknek történt eladás után fizet. Az egyedi bizományos raktárakban az egyedi szerződések által beszerzett alkatrészek vannak, mig az AGROKER bizományos raktár lényegében olyan konszignációs raktár, melynek tulajdonosa az AGROKER.

A rendszer feladata az egyes raktárok készleteinek naprakész nyilvántartása és lekérdezése, a raktárakból való kiszolgálás segitése és a partneri igények nyilvántartásával kapcsolatos döntések támogatása. Ezenkivül vannak speciális feladatok az egyes raktárakban /pl. rendelésjavaslat, stb./.

Mielőtt a KITE-nek készitett rendszerterv [38] alapján leirjuk a rendszer adatállományát relációs adatmodellben, röviden ismertetjük a rendszert érintő fő fogalmakat és tevékenységeket. Dolgozatunkban a rendszernek két fő részével foglalkozunk: az alkatrésznyilvántartással és az előrendelésnyilvántartással.

Az alkatrészek azonositása a rendszerben /jelenleg pedig kézzel kitöltött kartonokon/ ún. cikkszámokkal és a raktárral történik. Egy cikkszám általában nem határoz meg egy alkatrészt, mert ugyanaz a cikkszám több raktárban is előfordulhat. Egy alkatrészt a cikkszám, raktár azonosit. A különböző egységáron való előfordulást /külföldi alkatrészeknél ez előfordulhat a devizaszorzók, vám változása, stb. miatt/ a cikkszámon jelezzük - erre nem térünk ki. Adott raktárban adott alkatrész új cikkszáma az a cikkszám, melyen a szállitó felé aktuálisan megrendelés adható fel; régi cikkszám az új cikkszám előtti utolsó cikkszám /alkatrészek cikkszáma megváltozhat/. Az alkatrészeket forgalmuk nagysága és a forgalmukról készitett statisztika megbizhatósága alapján négy tipusba soroljuk; ezek a tipusok a rendelésfeladást könnyitik /az egyik tipusba pl. olyan alkatrészek tartoznak, melyek "múltja" elegendő alapot ad algoritmusként megfogalmazható rendelésstratégia követésére; ezekre az alkatrészekre a rendszer mennyiségi rendelésjavaslatot ad/. Mivel a rendszernek a rendelésfeladást támogató részével itt nem foglalkozunk, az alkatrésztipusok pontos definicióját sem irjuk le.

A KITE által forgalmazott alkatrészek mintegy 50-féle mezőgazdasági gép alkatrészigényét fedik. Egy alkatrész több géptipusban is előfordul és esetleg más-más darabszámmal /pl. elképzelhető, hogy egy traktorban adott csapágyból 30 db, egy kombájnban 20 db van/; a cikkszámok mellett ezt különböző okokból fel kell tüntetni. A géptipusok közül az első az alkatrész géptipusa. Az alkatrészeknek mintegy 10-féle készletét kell nyilvántartani - ezek főleg a kiszolgálást és a rendelést érintik, ezért ezzel csak a lekérdezésnél foglalkozunk részletesebben.

Az alkatrészigények két formában jelentkezhetnek: akut igény illetve előrendelés. Az akut igény vagy azonnali kiszolgálással kerül kielégitésre vagy előrendelésként jelentkezik. Mivel a kiszolgálás nem támaszt jelentős nyilvántartási feladatokat, azért itt nem érintjük.

Egy előrendelést egy partner /ez lehet KITE-tag, nem KITE-tag, KITE belső: pl. KITE-mühely, stb./ egy raktárbeli egy géptipushoz tartozó egy aktualitással / mikortól tart rá igényt/ kért alkatrészekre adhat. Az előrendeléseknek a megfelelő KITE-szakember prioritást /P2/ ad. Mivel egy előrendeléssel lehetnek azonnal meg nem oldható problémák, azért az "állapotkód"-ot minden elfogadott előrendelésen "élő"-re kell állitani; csak az élő előrendelések jelentenek a rendszer számára tényleges igényt.

Az előrendelésen minden egyes kért alkatrészhez egy pozició tartozik. Pozicióként is adható prioritás /P3/. A prioritások az igények automatikus kielégitési sorrendjét határozzák meg. Mivel egy adott pozición jelentkező igényt nem biztosan a kért cikkszámon elégitenek ki /cikkszámváltozás, stb./, azért a végleges cikkszám tükrözi az előrendelés tényleges igényét. A végleges cikkszám raktára természetesen lehet más, mint a kért cikkszámé, ezért, tekintettel a raktárak egyenkénti áttekinthetőségére, a végleges raktár is feltüntetendő.

Az előrendelésként jelentkező igények kielégitése a következő módon történik: az előrendelések aktualitása és a P3, P2 prioritások alapján a rendszer előjegyzési javaslatot készit. Az előjegyzési javaslatot elbirálják és a jóváhagyott illetve kivülről megadott előjegyzésekről a kiértesitési dátum napján értesitik az előrendelést feladó partnert. Az előjegyzések általában 8 napos határidejüek, de a lejárat dátuma kivülről is állitható. A lejárt határideju előjegyzésekről szakember dönt.

Az előjegyzésbe vétel és a kiszolgálás automatikusan maga után vonja az érintett cikkszámok megfelelő készleteinek és statisztikai adatainak módositását, de ezzel itt nem foglalkozunk.

A rendszer magját az alkatrésznyilvántartás és az előrendelésnyilvántartás valamint az ezekről való információszolgáltatás képezi.

A 4.2 részben leirjuk e két nyilvántartás megszervezését relációs adatmodellben. A törzsadatállományokra nem térünk ki. Ugy gondoljuk, hogy a 4.2-ben leirtak jól mutatják a relációs adatmodell alkalmazhatóságát és előnyeit.

A 4.3-ban a 4.2-ben leirt relációs adatbázis lekérdezésével foglalkozunk. Részletesen kitérünk a relációs adatstruktura okozta viszonylag nagy válaszidő csökkentésének problémájára is.

4.2 Adatstruktúra szervezése relációs modellben

A következőkben leirjuk a KITE számára készitendő raktárnyilvántartási rendszer két legfontosabb nyilvántartását relációs adatmodellben. Kiszámitjuk a relációs adatmodell alkalmazásával elért helymegtakaritást - amihez képest ezt a megtakaritást mérjük, az a rendszertervben [38] leirt adatstruktura. Természetesen részletesen foglalkozunk a relációs adatstruktúra tervezésénél felhasznált funkcionális függésekkel.

A különböző relációk helyigényének kiszámitásakor a következő adatokat használtuk fel /ezek az adatok szolgáltak alapul a rendszer helyigényének felmérésére a valóságban is/:

1. előrendelések száma maximum 10 000;
2. előrendeléspoziciók száma maximum 100 000 /azaz az egy előrendelésen levő poziciók száma átlagosan maximum 10/;
3. előjegyzéspoziciók száma maximum 200 000 /azaz az egy előrendeléspozicióhoz tartozó előjegyzések átlaga maximum 2/;
4. egy partner maximum 5 géptipust használ, azaz legfeljebb 5 géptipusra ad előrendelést;
5. partnerek száma maximum 500;
6. 50 000 /cikkszám, raktár/ pár van maximum;
7. 30 000 cikkszám létezik maximum;
8. 20 raktár létezik;
9. 50 géptipus létezik

10. 150 különböző lejárati dátum van az előjegyzésekre /a lejárt előjegyzéseket elbirálják/.

ELŐRENDELÉSNYILVÁNTARTÁS ATTRIBUTUMAI

A_1	-	előrendelés sorszáma	/5/
A_2	-	feladás dátuma	/6/
A_3	-	aktualitás	/1/
A_4	-	megrendelő	/3/
A_5	-	géptipus	/2/
A_6	-	raktár	/2/
A_7	-	P2 prioritás	/3/
A_8	-	élő poziciók száma	/4/
A_9	-	javasolt előjegyzés-poziciók száma	/4/
A_{10}	-	állapotkód /"élő", "nem élő"/	/1/
A_{11}	-	pozició sorszáma	/3/
A_{12}	-	kért cikkszám	/6/
A_{13}	-	végleges cikkszám	/6/
A_{14}	-	végleges raktár	/2/
A_{15}	-	darabszám	/3/
A_{16}	-	előjegyzett dbszám	/3/
A_{17}	-	előjegyzésjavaslat db	/3/

A_{18}	- hátralék	/3/
A_{19}	- P3 prioritás	/3/
A_{20}	- előjegyzéspozició sorszáma	/3/
A_{21}	- lekötés dátuma	/6/
A_{22}	- lejárat dátuma	/6/
A_{23}	- kiértesités dátuma	/6/
A_{24}	- cikkszám	/6/
A_{25}	- raktár	/2/
A_{26}	- előjegyzett db	/3/
A_{27}	- hátralék	/3/
A_{28}	- állapotkód /"javasolt", "nem kiértesitett", "kiértesitett", "lejárt"/	/1/

Az attributumok után zárójelben álló számok az attributumra vonatkozó adat karakterigényét jelentik. Tehát egy előrendelés - előrendeléspozició - előjegyzéspozició rekord helyigénye 99 karakter és igy, 1., 2. és 3. alapján az előrendelésnyilvántartás helyigénye 200 000 • 99 = 19 800 000 karakter.

Az előrendelésnyilvántartás attributumai között a következő funkcionális függések állnak fenn:

$\{A_1, A_{11}, A_{20}\}$ kijelölt kulcs, hiszen a sorszámok éppen a rekordazonositás céljára szolgálnak.

$\{A_1, A_{11}\} \mapsto \{A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16}, A_{17}, A_{18}, A_{19}\}$, mert $\{A_1, A_{11}\}$ azonositja az előrendeléspoziciót;

$\{A_2, A_4, A_5\} \to \{A_1, A_3, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}\}$, mert egy partner (A_4), egy nap (A_2) egy géptipusra(A_5) legfeljebb egy előrendelést ad le, azaz $\{A_2, A_4, A_5\}$ azonositja az előrendelést.

$\{A_5\} \mapsto \{A_6\}$, mert egy géptipus minden alkatrésze egy raktárhoz tartozik.

$\{A_8\} \to \{A_{10}\}$, mert A_{10} = "élő" akkor és csak akkor, ha $A_8 \neq 0$.

$\{A_4, A_5\} \mapsto \{A_7\}$, mert a P2 prioritás megállapitásánál az előrendelő kiléte /KITE-belső, KITE-tag, nem KITE-tag a sorrend/ és a géptipus /milyen munkálatokat végeznek/ a meghatározók.

$\{A_1, A_{11}, A_{21}\}$ kijelölt kulcs, mert egy előrendeléspozicióhoz egy nap legfeljebb egy előjegyzés keletkezik.

$\{A_{23}\} \mapsto \{A_{22}\}$, mert a kiértesités jogi okokból 8 napos határidővel jár.

$\{A_{22}\} \mapsto \{A_{28}\}$, mert $A_{22} = 0$, akkor és csak akkor, ha A_{28} javasolt; ha $A_{22} \neq 0$, akkor $A_{22} - 8 = A_{23}$ és igy aszerint, hogy A_{23} elmúlt-e, "kiértesitett" vagy "nem kiértesitett"; ha A_{22} is elmúlt, akkor "lejárt".

Ezen funkcionális függések alapján az előrendelésnyilvántartást a következőképpen bontjuk hat normálformájú relációra ([5],[10],[11],[18]) :

R_1 reláció attributumai: A_5, A_6;

R_2 reláció attributumai: A_4, A_5, A_7;

R_3 reláció attributumai: $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_8, A_9, A_{10}$;

R_4 reláció attributumai: $A_1, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16}, A_{17}, A_{18}, A_{19}$;

R_5 reláció attributumai: A_{22}, A_{23}, A_{28};

R_6 reláció attributumai: $A_1, A_{11}, A_{20}, A_{21}, A_{23}, A_{24}, A_{25}, A_{26}, A_{27}, A_{28}$;

R_1 relációban legfeljebb 50 rekord van 9. miatt;

R_2 relációban legfeljebb 500 • 5 rekord van a 4. és 5. miatt;

R_3 relációban legfeljebb 10 000 rekord van, mert $\{A_2, A_4, A_5\}$-től függ R_3 reláció attributumhalmaza és az 1. miatt;

R_4 relációban legfeljebb 100 000 rekord van 2. miatt;

R_5 relációban legfeljebb 150 rekord van a 10. miatt;

és végül R_6 relációban legfeljebb 200 000 rekord van 3. miatt.

R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 és R_6 reláció rekordhosszai rendre 4,8,26, 37,13 és 38 karakter; igy e hat reláció helyigénye összesen:

$50 \cdot 4 + 2500 \cdot 8 + 10\,000 \cdot 26 + 100\,000 \cdot 37 + 150 \cdot 13 + 200\,000 \cdot 38 =$
$= 11\,582\,150$ karakter.

Most rátérünk az alkatrésznyilvántartásra.

AZ ALKATRÉSZNYILVÁNTARTÁS ATTRIBUTUMAI:

$/A_{13}=/$	E_1	- cikkszám	/6/
$/A_{14}=/$	E_2	- raktár	/2/
	E_3	- tipus	/1/
	E_4	- minimális készlet	/2/
	E_5	- egységár	/3/
	E_6	- vámtarifaszám	/2/
	E_7	- géptipusok dbszámmal	/40/
	E_8	- megnevezés kódja	/2/
	E_9	- raktári hely	/4/
	E_{10}	- régi cikkszám	/6/
	E_{11}	- új cikkszám	/6/
	E_{12}	- müszaki leirás	/20/
	E_{13}	- készletek	/50/
	E_{14}	- utolsó eladás dátuma	/6/
	E_{15}	- mennyiségegység	/1/

6. alapján az alkatrésznyilvántartás helyigénye $50\ 000 \cdot 151 = 7\ 550\ 000$ karakter.

Az alkatrésznyilvántartás attributumai között a következő funkcionális függések állnak fenn:

$\{E_1, E_2\}$ kijelölt kulcs, hiszen a /cikkszám, raktár/ azonositja az alkatrészt.

$\{E_2\} \rightarrow \{E_{15}\}$ mert egy raktárban tárolt alkatrészek mennyiség **egysége azonos.**

$\{E_1\} \rightarrow \{E_7, E_8, E_{10}, E_{11}, E_{12}\}$ nyilvánvalóan, hiszen egy cikkszámhoz funkciót tekintve egy alkatrész tartozik.

Ezen funkcionális függések alapján az alkatrésznyilvántartást a következőképpen bontjuk normálformájú relációkra:

R_7 reláció attributumai E_2, E_{15};

R_8 reláció attributumai $E_1, E_7, E_8, E_{10}, E_{11}, E_{12}$;

R_9 reláció attributumai $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_9, E_{13}, E_{14}$;

R_7 relációban legfeljebb 20 rekord van, a 8. miatt;

R_8 relációban legfeljebb 30 000 rekord van, a 7. miatt, és végül;

R_9 relációban legfeljebb 50 000 rekord van, a 6. miatt.

R_7, R_8 és R_9 reláció rekordhosszai rendre 3, 80 és 76 karakter; igy e három reláció helyigénye összesen:

$20 \cdot 3 + 30\,000 \cdot 80 + 50\,000 \cdot 76 = 6\,200\,060$ karakter.

4.3. A rendszer megszoritott relációs kifejezésekkel való lekérdezése

Az előzőekben leirt relációs adatmodell lekérdezésére a megszoritott relációs kifejezéseket használjuk.

4.1. Definició /1/ Kiválasztás:

Legyen R egy reláció az X attributumhalmazon, $A \in X$ és c egy konstans.

Az A=c kiválasztás, $\sigma_{A=c}(R)$ az a reláció, melynek sorai R-nek azon sorai, melyeknek értéke A-ban c; azaz

$$\sigma_{A=c}(R) = \{ r \in R : r(A) = c \}.$$

/2/ Vetités:

Legyen R egy reláció az X attributumhalmazon és $Y \subseteq X$.

R vetitése Y-ra, $\pi_Y(R)$ az a reláció, melynek attributumhalmaza Y és sorai az R sorainak Y-ra való megszoritásai; azaz

$$\pi_Y(R) = \{ r\restriction_Y : r \in R \} .$$

/3/ Egyesités:

Legyen R_1 X-en, R_2 pedig Y-on reláció.

R_1 és R_2 egyesitése, $R_1 \bowtie R_2$ az a reláció, melynek attributumhalmaza $X \cup Y$ és sorai azok az $X \cup Y$-on értelmezett függvények, melyeknek X-re vett megszoritása R_1-nek, Y-ra vett megszoritása pedig R_2-nek sora; azaz

$R_1 \bowtie R_2 = \{ r : r$ értelmezési tartománya $X \cup Y$ és

$$r\restriction_X \in R_1, \quad r\restriction_Y \in R_2 \} .$$

E három operációval kapható kifejezések a megszoritott relációs kifejezések. Megszoritott relációs kifejezés értéke tehát reláció.

Most megfogalmazzuk a rendszerrel szembeni konkrét kérdéseket megszoritott relációs kifejezések formájában.

1. Előrendelések

Az előrendelés - előrendeléspozició - előjegyzéspozició rekordokat a következő megszoritott relációs kifejezés eredménye tartalmazza:

$$\bowtie_{i=1}^{6} R_i = R .$$

Ezenkivül természetesen még sokféle kérdés tehető fel az előrendelésnyilvántartásról, a vetités és a kiválasztás felhasználásával;

pl. adott partner /c/ előrendelései:

$$\pi_X(\sigma_{A_4=c}(R)), \quad \text{ahol} \quad X=\{A_1,A_2,\ldots,A_{10}\}.$$

2. Előrendelések adott cikkszámra

Ezt a kérdést azért nem soroltuk az előző nagy kérdéscsoporthoz, mert nem pusztán a felhasználó felé nyújtott információszolgáltatással függ össze, hanem a rendszer bizonyos belső programjai /pl. a rendelésjavaslat-készitő program/ is használják. Legyen c egy adott cikkszám d pedig adott raktár. Ekkor /c,d/ párral adott alkatrészre /c a végleges cikkszám/ élő előrendelésekről szükséges információt tartalmazza a következő megszoritott relációs kifejezés értéke:

$\pi_Y(\sigma_{A_{10}}\sigma_{A_{14}=d}\sigma_{A_{13}=c}(\bowtie_{i=1}^{6} R_i)) = R'$, ahol

$Y = \{A_1,A_2,A_3,A_4,A_7,A_{15},A_{19},A_{21},A_{22},A_{23},A_{26},A_{28}\}$

3. Alkatrészek

Az alkatrésznyilvántartás teljes rekordjait a $\bowtie_{i=7}^{9} R_i=P$ ' kifejezés értéke tartalmazza.

Természetesen a két nyilvántartásról együttes információ is kérhető; pl.

$\pi_{\{E_1,E_2,E_{13}\}}(R_9 \bowtie \pi_Y(P))$ eredménye tájékoztat az alkatrészek készleteiről és az igényekről egyszerre /emlékeztetünk arra, hogy az A_{13} attributum megegyezik az E_1 attributummal, az A_{14} pedig az E_2-vel/.

A relációs kifejezések megválaszolásánál az egyetlen időigényes müvelet két reláció egyesitésének meghatározása. Ezért célszerü a kifejezések megválaszolása előtt a lehető legrövidebb alakra hozni a megválaszolandó kifejezést. Ennek során persze ügyelni kell arra, hogy a legrövidebb alakra hozás időigénye alatta maradjon a rövidités által nyert időnek.

4.2. Definició

Legyenek E_1 és E_2 megszoritott relációs kifejezések.

Legyenek $R_1,\ldots,R_n$ azok a relációk, melyeken E_1 és E_2 operál. Jelölje X_i az R_i reláció attributumhalmazát $(i=1,\ldots,n)$.

Ha $P_1,\ldots,P_n$ relációk $X_1,\ldots X_n$-en rendre, akkor $E_1[P_1,\ldots,P_n]$ jelöli azt a megszoritott relációs kifejezést, melyet E_1-ben R_i helyére P_i-t irva kapunk /hasonlóan definiált $E_2[P_1,\ldots,P_n]$/.

Azt mondjuk, hogy E_1 és E_2 erősen ekvivalensek, ha tetszőleges X_i-n értelmezett P_i relációkra $(i=1,\ldots n)$ $E_1[P_1,\ldots,P_n] = E_2[P_1,\ldots,P_n]$, mint relációk.

Ha $E_1[P_1,\ldots,P_n] = E_2[P_1,\ldots,P_n]$ teljesül minden olyan $P_1,\ldots,P_n$ relációsorozatra, melyre létezik I reláció $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ -n, hogy $1 \leq i \leq n$ esetén $P_i = \pi_{X_i}(I)$, akkor E_1 és E_2 ekvivalensek. /Ilyenkor $E_1[P_1,\ldots,P_n]$ helyett $E_1[I]$-t irunk./

Könnyen látható, hogy ha egy relációs adatmodell egy nagy relációnak funkcionális függések szerinti szétvágásával keletkezik, akkor az adatmodell relációin operáló ekvivalens kifejezések megegyeznek az adatmodell relációin, ezért adott kifejezést megválaszolni egyenértékü vele ekvivalens megválaszolásával; azaz a kifejezés röviditésénél elég arra vigyázni, hogy a rövidebb ekvivalens legyen az eredetivel.

Hatékony röviditő algoritmus általában nem létezik ([1],[2]); a kifejezések egy széles osztályára azonban igen. Ennek pontos megfogalmazásához szükségünk van a megszoritott relációs kifejezések táblázattal való reprezentálására ([1],[2]).

<u>Táblázat</u> alatt olyan speciális mátrixot értünk, melyben négyféle tipusú jel szerepel. Ezek a következők:

/1/ <u>megkülönböztetett változók</u>; ezeket a-val jelöljük, esetleg indexelve;

/2/ <u>nem megkülönböztetett változók</u>; ezeket indexelt b-vel jelöljük;

/3/ <u>konstansok</u>; ezek jelölésére a c betüt használjuk, indexelve is;

/4/ <u>blank</u> .

Táblázat első sora a táblázat összegezője; ebben a sorban csak megkülönböztetett változó, konstansjel és blank szerepel; a táblázat többi sorában a blank nem szerepel. Megköveteljük továbbá, hogy a táblázat különböző oszlopaiban nem fordulhat elő azonos jel és ha egy sor valamely oszlopban megkülönböztetett változó, akkor ez a megkülönböztetett változójel szerepel a táblázat összegezőjében is /természetesen az összegezőben ugyanabban az oszlopban, mint a sorban, hiszen különböző oszlopokban nincs azonos jel/.

A következőkben megszoritott relációs kifejezéseken olyan operációkat is értünk, melyek operandusai attributumhalmazok /sémák/. A szövegből mindig világos lesz, hogy melyik értelmezést használjuk.

Megszoritott relációs kifejezések reprezentálása táblázattal:

1. Ha az E megszoritott relációs kifejezés az X séma és $Y \supseteq X$, akkor az E Y-on értelmezett táblázata, T, a következő: T összegező sorában megkülönböztetett változó van az X-beli oszlopokban és blank az $(Y \setminus X)$-beli oszlopokban. T-nek egyetlen további sora van, mely az X-beli oszlopokon megegyezik a T összegezőjével, az $(Y \setminus X)$-beli oszlopokon pedig nem megkülönböztetett változó az értéke.

2. Ha az E megszoritott relációs kifejezés $\sigma_{A=c}(E_1)$ alakú, és T_1 az E_1 megszoritott relációs kifejezés táblázata, akkor E táblázata, T, a következő:

   /i/ ha T_1 összegezője A-ban blank, vagy c-től különböző konstans, akkor $T=\emptyset$;

   /ii/ ha T_1 összegezője A-ban az <u>a</u> megkülönböztetett változójel, akkor T-t úgy kapjuk, hogy T_1-ben <u>a</u>-t mindenhol c-re cseréljük;

   /iii/ ha T_1 összegezője A-ban c, akkor $T=T_1$.

3. Ha az E megszoritott relációs kifejezés $\pi_X(E_1)$ alakú és T_1 az E_1 táblázata, akkor E táblázata, T, a következő: T_1 minden X-en kivüli oszlopában blank-kel helyettesitjük T_1 összegezőjének nem blank értékeit és nem megkülönböztetett változókkal a sorok megkülönböztetett változó értékeit.

4. Ha az E megszoritott relációs kifejezés $E_1 \bowtie E_2$ alakú és T_1 az E_1, T_2 pedig az E_2 táblázata, akkor E táblázata, T, a következő:
feltehetjük, hogy a T_1-ben szereplő nem megkülönböztetett változójelek halmaza diszjunkt a T_2-ben szereplőékétől, továbbá, hogy T_1 és T_2 azonos oszlopaiban megkülönböztetett változójelek azonosak.

/i/ ha T_1 és T_2 valamely közös oszlopában összegezőik különböző konstansok, akkor $T=\emptyset$;

/ii/ ha /i/ nem áll fenn, akkor T sorai T_1 sorai és T_2 sorai. T összegező sora a következő:

/a/ ha T_1 és T_2 összegezői közül valamelyiknek értéke egy oszlopban konstans, akkor T-nek ebben az oszlopában minden megkülönböztetett változó helyett ez a konstans szerepel, és T összegezőjének értéke is c.

/b/ ha /a/ nem áll fenn, és T_1 és T_2 összegezői közül valamelyiknek az a megkülönböztetett változó az értéke, akkor T összegezője is az a értéket veszi fel a szóbanforgó oszlopban.

/c/ ha sem /a/ sem /b/ nem állnak fenn, akkor T összegezőjének értéke blank.

4.3 Definició

Legyen T egy táblázat; jelölje S a T szimbolumainak halmazát. T értékelésének nevezzük a ρ függvényt, ha ρ S-en értelmezett, értékei konstansok és ha $c \in S$ konstans, akkor $\rho(c) = c$.

Ha ρ értékelése T-nek, akkor ρ -t a következőképpen terjesztjük ki T soraira és összegezőjére:
legyen w_0 a T összegezője; $w_1,\ldots,w_n$ a T sorai.
Ekkor $\rho(w_i)=(\rho(X)$, X értéke w_i-nek) /jegyezzük meg, hogy $\rho(w_0)$ azokon az attributumokon értelmezett melyeken értéke nem blank; mig $i \geq 1$ esetén $\rho(w_i)$ T attributumhalmazán értelmezett/.
Ha I olyan reláció, melynek attributumhalmaza megegyezik T attributumhalmazával, akkor legyen

$$T(I) = \{\rho(w_0) : \rho \text{ olyan értékelése T-nek, hogy } \rho(w_i) \text{ sora I-nek minden } 1 \leq i \leq n\text{-re}\}.$$

<u>4.1 Tétel([2])</u>: Legyen E megszoritott relációs kifejezés és T táblázata T-nek. Ekkor minden olyan I-re melyre $E[I]$ értelmes. $T(I)=E[I]$.
A tétel bizonyitása E bonyolultsága szerinti indukcióval könnyen elvégezhető.

<u>Példa</u>: Tekintsük az előrendelések lekérdezésének egy megszoritott relációs kifejezését, $E=\pi_X(\bowtie_{i=1}^{6} R_i)$-t, ahol

$$X = \{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_7,A_{11},A_{12},A_{15},A_{18},A_{19},$$
$$A_{20},A_{21},A_{22},A_{23},A_{24},A_{26},A_{28}\},$$

és az R_1,R_2,R_3,R_4,R_5,R_6 attributumhalmazai pedig rendre a következők:

$\Omega_1 = \{A_5,A_6\}$,

$\Omega_2 = \{A_4,A_5,A_7\}$,

$\Omega_3 = \{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_8,A_9,A_{10}\}$,

$\Omega_4 = \{A_1,A_{11},A_{12},A_{13},A_{14},A_{15},A_{16},A_{17},A_{18},A_{19}\}$,

$\Omega_5 = \{A_{22},A_{23},A_{28}\}$,

$\Omega_6 = \{A_1,A_{11},A_{20},A_{21},A_{23},A_{24},A_{25},A_{26},A_{27},A_{28}\}$,

Legyen $\Omega = X \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4 \cup \Omega_5 \cup \Omega_6$.

R_i táblázata (i=1,2,...,6) egy sort és az összegezőt tartalmazza, jelölje ezt w_i illetve v_i.

$w_i(A_j) = v_i(A_j) = a_j$, ha $A_j \in \Omega_i$ és

$w_i(A_j) = b_{i,j}$; $v_i(A_j)$ blank, ha $A_j \notin \Omega_i$.

$\overset{6}{\underset{i=1}{\times}} R_i$ táblázata igy hat soros; a sorok $w_1,\dots,w_6$; az összegező, w_o pedig olyan, hogy $w_o(A_j) = a_j$, ha $A_j \in \bigcup_{i=1}^{6} \Omega_i$; $w_o(A_j)$ blank, ha $A_j \notin \bigcup_{i=1}^{6} \Omega_i$; mivel $\Omega = \bigcup_{i=1}^{6} \Omega_i$, azért igy w_o nem tartalmaz blank-et.

$\overset{6}{\underset{i/1}{\bowtie}} R_i$ táblázata tehát:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$b_{1,1}$	$b_{1,2}$	$b_{1,3}$	$b_{1,4}$	a_5	a_6	$b_{1,7}$	$b_{1,8}$	$b_{1,9}$	$b_{1,10}$	$b_{1,11}$	$b_{1,12}$	$b_{1,13}$
$b_{2,1}$	$b_{2,2}$	$b_{2,3}$	a_4	a_5	$b_{2,6}$	a_7	$b_{2,8}$	$b_{2,9}$	$b_{2,10}$	$b_{2,11}$	$b_{2,12}$	$b_{2,13}$
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$b_{3,6}$	$b_{3,7}$	a_8	a_9	a_{10}	$b_{3,11}$	$b_{3,12}$	$b_{3,13}$
a_1	$b_{4,2}$	$b_{4,3}$	$b_{4,4}$	$b_{4,5}$	$b_{4,6}$	$b_{4,7}$	$b_{4,8}$	$b_{4,9}$	$b_{4,10}$	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$b_{5,1}$	$b_{5,2}$	$b_{5,3}$	$b_{5,4}$	$b_{5,5}$	$b_{5,6}$	$b_{5,7}$	$b_{5,8}$	$b_{5,9}$	$b_{5,10}$	$b_{5,11}$	$b_{5,12}$	$b_{5,13}$
a_1	$b_{6,2}$	$b_{6,3}$	$b_{6,4}$	$b_{6,5}$	$b_{6,6}$	$b_{6,7}$	$b_{6,8}$	$b_{6,9}$	$b_{6,10}$	a_{11}	$b_{6,12}$	$b_{6,13}$

A_{14}	A_{15}	A_{16}	A_{17}	A_{18}	A_{19}	A_{20}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{25}	A_{26}	A_{27}	A_{28}
a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}
$b_{1,14}$	$b_{1,15}$	$b_{1,16}$	$b_{1,17}$	$b_{1,18}$	$b_{1,19}$	$b_{1,20}$	$b_{1,21}$	$b_{1,22}$	$b_{1,23}$	$b_{1,24}$	$b_{1,25}$	$b_{1,26}$	$b_{1,27}$	$b_{1,28}$
$b_{2,14}$	$b_{2,15}$	$b_{2,16}$	$b_{2,17}$	$b_{2,18}$	$b_{2,19}$	$b_{2,20}$	$b_{2,21}$	$b_{2,22}$	$b_{2,23}$	$b_{2,24}$	$b_{2,25}$	$b_{2,26}$	$b_{2,27}$	$b_{2,28}$
$b_{3,14}$	$b_{3,15}$	$b_{3,16}$	$b_{3,17}$	$b_{3,18}$	$b_{3,19}$	$b_{3,20}$	$b_{3,21}$	$b_{3,22}$	$b_{3,23}$	$b_{3,24}$	$b_{3,25}$	$b_{3,26}$	$b_{3,27}$	$b_{3,28}$
a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	$b_{4,20}$	$b_{4,21}$	$b_{4,22}$	$b_{4,23}$	$b_{4,24}$	$b_{4,25}$	$b_{4,26}$	$b_{4,27}$	$b_{4,28}$
$b_{5,14}$	$b_{5,15}$	$b_{5,16}$	$b_{5,17}$	$b_{5,18}$	$b_{5,19}$	$b_{5,20}$	$b_{5,21}$	a_{22}	a_{23}	$b_{5,24}$	$b_{5,25}$	$b_{5,26}$	$b_{5,27}$	a_{28}
$b_{6,14}$	$b_{6,15}$	$b_{6,16}$	$b_{6,17}$	$b_{6,18}$	$b_{6,19}$	a_{20}	a_{21}	$b_{6,22}$	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}

Végül $\pi_X(\bowtie_{i=1}^{6} R_i)$ táblázatát úgy nyerjük $\bowtie_{i=1}^{6} R_i$ táblázatból, hogy $\Omega \setminus X$ attributumain értékeit blankre, a sorokét pedig új, nem megkülönböztetett változókra cseréljük.

Ezekután rátérünk a kifejezésröviditésre. Könnyen meggondolható, hogy az egyesités ($\bowtie$) müveletigénye exponenciális függvénye az egyesitendő táblázatok méretének. Ezért egy kifejezésröviditő algoritmus akkor hatékony, ha a kifejezés táblázatának méretétől polinomiálisan függ a müveletigénye.

[1]-ben bizonyitott, hogy az adott kifejezéssel ekvivalens legrövidebb kifejezés megtalálása polinomiálisan ekvivalens a "3-satisfibility" problémával; tehát NP-teljes.

Van azonban a megszoritott relációs kifejezéseknek egy széles osztálya, az ún. egyszerü kifejezések ([1]), melyre létezik polinom idejü kifejezésröviditő algoritmus.

4.4 Definició: A T táblázat egyszerü, ha T olyan oszlopaiban, melyekben van többször előforduló nem megkülönböztetett változójel, ezen a jelen kivül minden más jel csak egyszer fordul elő.

Az E megszoritott relációs kifejezés egyszerü, ha táblázata egyszerü.

4.2 Tétel ([1]): Létezik olyan algoritmus, mely egyszerü megszoritott relációs kifejezéshez táblázatának méretétől polinomiálisan függő müvelettel megtalálja az ekvivalens legrövidebb /azaz legkevesebb sorú táblázattal rendelkező/ megszoritott relációs kifejezést.

Könnyen meggondolható, hogy a rendszerünknél szóbajövő kérdések megszoritott relációs kifejezéseinek táblázatai egyszerüek.

Most röviden leirjuk, hogyan lehet adott egyszerü táblázathoz a vele ekvivalens legkevesebb sorral rendelkező táblázatot konstruálni([2]).

4.5 Definició:

Legyen T egy táblázat és h,g két sora T-nek. Azt mondjuk, hogy h fedi g-t, ha

/a/ ha A olyan attributum, hogy h(A) megkülönböztetett változó, akkor g(A) is megkülönböztetett változó

/b/ ha A olyan attributum, hogy h(A) konstans, akkor h(A)=g(A).

Ha S T soraiból álló halmaz, akkor X fedi S-et, ha S minden elemét fedi.

4.6 Definició:

Legyen T egy egyszerü táblázat és S a T sorainak részhalmaza, h pedig a T egy sora.

$CL_h(S)$-sel jelöljük és az S h-lezárásának nevezzük azt a minimális, S-et tartalmazó halmazt, amelyre a következő teljesül:

ha $g_1 \in CL_h(S)$ és g_2 a T egy sora úgy, hogy valamely A attributumra $g_1(A)$ és $g_2(A)$ ugyanaz az ismételt nem megkülönböztetett változó és $h(A) = g_1(A)$, akkor

$g_2 \in CL_h(S)$.

A táblázatminimalizáló algoritmus a következő:

Legyen T egy egyszerü táblázat. Legyen $h \neq g$ két sora T-nek. Ha h fedi $CL_h(\{g\})$ -t, akkor T helyett $T \setminus (CL_h(\{g\}) \setminus \{h\})$-t vegyük, ha nem, akkor marad T. Folytassuk az igy nyert táblázattal.

4.3 Tétel [(2)]: A táblázatminimalizáló algoritmus a T méretétől polinomiálisan függő müvelet elvégzése után T-vel ekvivalens minimális sok sort tartalmazó táblázatot eredményez.

Irodalomjegyzék

1. Aho, A.V., Sagiv, Y. and Ullman, J.D.
Efficient Optimization of a Class of Relational Expressions
ACM Trans. Database Systems 4. /1979/ 4, 435-454.

2. Aho, A.V., Sagiv, Y., Ullman, J.D.
Equivalences among relational expressions
SIAM J. COMPUT., 8 /1979/, 218-246.

3. Armstrong, W.W.
Dependency structures of data base relationships
Information Processing 74, North-Holland Publ. Co. /1974/, 580-583.

4. Armstrong, W.W.
On the generation of dependency structures of relational data bases
Publication 272, Université de Montréal /1977/

5. Armstrong, W.W., Delobel, C.
Decomposition and functional dependencies in relations
Publication 271, Université de Montréal /1979/

6. Beeri C., Bernstein, P.A.
Computational Problems Related to the Design of Normal Form Relational Schemas
ACM Trans. on Database Systems, 4, /1979/ 1, 30-59.

7. Beeri, C., Fagin, R., Howard, J.H.
A complete axiomation for functional and multivalued dependencies in database relations
Proc. ACM SIGMOD, Int. Conf. on Manage. of Data, Toronto, Canada, /1977/, 47-61.

8. Békéssy, A., Demetrovics, J.
Contribution to the theory of data base relations
Discrete Math. 27 /1979/, 1-10.

9. Békéssy, A., Demetrovics, J., Hannák, L., Frankl, P., Katona, Gy.
On the number of maximal dependencies in a data base relation of fixed order
Discrete Math. 30 /1980/ 83-88.

10. Codd, E.F.
A relational model for large shared data banks
Comm. ACM, 13 /1970/ 377-387.

11. Codd, E.F.
Further normalization of the data base relational model
Data Base Systems, R. Rustin, ed. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, /1972/ 33-64.

12. Codd, E.F.
Relational completeness of data base sublanguages
Data Base Systems, R. Rustin ed. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, /1972/ 65-98.

13. Codd, E.F.
Recent investigations in relational database systems
Information Processing 74, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, /1974/, 1017-1021.

14. Czédli, G.
Függőségek relációs adatbázis modellben
Alk. Mat. Lapok /1980/

15. Delobel, C., Casey, R.G.
Decomposition of a data base and the theory of Boolean switching functions
IBM J. Res. and Develop. 17 /1972/ 5, 374-386.

16. Delobel, C., Casey, R.G., Bernstein, P.A.
Comment on "Decomposition of a data base and the theory of Boolean switching functions"
IBM J. Res. and Develop. 21 /1977/ 5, 484-485.

17. Demetrovics, J.
On the number of candidate keys
Informations Procéssing Letters 7 /1978/ 6, 266-269.

18. Demetrovics, J.
Relációs adatbázis modell
MTA SZTAKI Közlemények 20 /1978/ 21-33.

19. Demetrovics, J.
Homogén file kulcsairól
Alkalmazott Matematikai Lapok 3 /1977/ 185-191.

20. Demetrovics, J.
On the equivalence of candidate keys with Sperner systems
Acta Cybernetica 4 /1979/ 3, 247-252.

21. Demetrovics, J.
Candidate keys and antichains
SIAM J. Alg. Disc. Meth. 1 /1980/ 1, 92.

22. Demetrovics, J.
O klucsah odnonarodnüh fájlov
Kibernetika /Kiev/ megjelenés alatt.

23. Demetrovics, J., Gyepesi, Gy.
Obobsenie funkcionalnüh zaviszimosztej v reljacionnoj modeli dannüh
MTA SZTAKI Közlemények 24 /1980/ 55-78.

24. Demetrovics, J., Gyepesi, Gy.
On the functional dependency and some generalizations of it
ACM Transactions on Database Systems /megjelenés alatt/

25. Demetrovics, J., Gyepesi, Gy.
A note on candidate keys and full families
SIAM J. Alg. Disc. Meth. /megjelenés alatt/

26. Fagin, R.
Multivalued dependencies and a new normal form for relational databases
ACM Trans. Database Syst. 2 /1977/ 3, 262-278.

27. Fagin, R.
Functional dependencies in a relational database and propositional logic
IBM J. Res. and Develop. 21 /1977/ 6, 534-544.

28. Karp, R.M.
Reducibility among combinatorial problems
Complexity of Computer Computations, R. E. Miller and J.W. Thatcher eds., Plenum Press, New York, /1972/ 85-104.

29. Kleitman, D.
On a combinatorial problem of Erdős
Proc. AMS /1966/ 139-141.

30. Maier, D., Mendelzon, A.O., Sagiv, Y.
Testing Implications of Data Dependencies
ACM Trans. Database Systems 4 /1979/ 4, 455-469.

31. Rissanen, J.
Independent components of relations
ACM Trans. Database Syst. 2 /1977/ 4, 317-325.

32. Rissanen, J., Delobel, C.
Decomposition of files, a basis for data storage and retrieval
Res. Rep. RJ1220, IBM Res. Lab., San Jose, Calif., /1975/ 211-223.

33. Smith, J.M., Smith, D.C.P.
Database abstractions: Aggregation
Comm. ACM 20 /1977/ 6, 405-413.

34. Smith, J.M., Smith, D.C.P.
Database abstractions: Aggregation and generalization
ACM Trans. Database Syst. 2 /1977/ 2, 105-133.

35. Sperner, E.
Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge
Mathematische Zeitschrift 27 /1928/ 544-548.

36. Yu, C.T., Johnson, D.T.
On the complexity of finding the set of candidate keys for a given set of functional dependencies
Information Processing Letters 5 /1976/ 100-101.

37. Zloof, M.M.
Query-by-example: A data base language
IBM Syst. J. 16 /1977/ 4, 324-343.

38. Urbánszki, F., Hannák, L., Gyepesi, Gy.
Rendszerterv a KITE-nél
MTA SZTAKI Tanulmány /elfogadva/

T a r t a l o m j e g y z é k

oldal

99/1979 Ivics József: KGST Riga

100/1979 Téli iskola

1980-ban jelentek meg:

101/1980 Gerencsér László - Hangos Katalin: Diszkrét lineáris sztochasztikus rendszerek önhangoló szabályozása

102/1980 Pásztorné Varga Katalin: Rekurziv eljárás

103/1980 Gerencsér Piroska - Szép Endre - Zilahy Ferenc Marton Zsolt: Robotmegfogók adaptivitása I.

104/1980 Knuth Előd - Radó Péter - Tóth Arpád: Az SDLA előzetes ismertetése

105/1980 E. Knuth - P. Radó - A. Tóth: Preliminary description of SDLA

106/1980 Prékopa András: Sztochasztikus programozási modellek és alkalmazásuk

107/1980 Kelle Péter: Megbizhatósági készletmodellek és alkalmazásuk

108/1980 Almásy Gedeon: Mérlegegyenletek és mérési hibák

109/1980 Békéssy A. - Demetrovics J. - Gyepesi Gy.: Relációs adatbázis logikai szintü vizsgálata funkcionális függőségek szempontjából

110/1980 Gaál A. - Soltész J. - Ruda M. - Ratkó I.: Tanulmányok a statisztikai adatfeldolgozásról

111/1980 Benedikt Szvetlána: Nem ismételhető döntéshozatal analizise kockázattal járó esetekben

112/1980 Verebély Pál: Többprocesszoros, osztott intelligenciáju grafikus rendszerek tervezési és megvalósitási kérdései

113/1980 V. Visegrádi Téli iskola