

A MAGYAR TERMÉSZETTUDOMÁNYI TÁRSULAT TUDOMÁNYTÖRTÉNETI KÖTETEI VII.

HAGYOMÁNY, ÉRTÉKMENTÉS ÉS INNOVÁCIÓ A TUDOMÁNYOK KÖRÉBEN



EMBER ÉS KÖRNYEZET KÖLCÖNHATÁSA



MAGYAR TERMÉSZETTUDOMÁNYI TÁRSULAT

A 2022. november 17–18. között megtartott konferenciát az *„Ember és környezet kölcsönhatása”* címen hirdettük meg. Célunk volt, hogy különböző tudományterületeken bemutassuk azt a kölcsönhatást, amely évezredek óta keresztül befolyásolták az emberek viszonyát a természeti és társadalmi környezettel, azok változásának kapcsolatát, hatását és alakulását. Bemutassuk az emberi tevékenység környezetet alakító hatását, a technika fejlődésének jelentőségét, törvényszerűségeit. Ismertessük az emberi tevékenység és a környezet viszonyának szabályozását, életfeltételek módosulását a változó környezetre és fordítva is, fókuszálva a pozitív hatásra és ugyanakkor a különböző ártalmakra és a lehetséges ártalmatlanításra, a megelőzésre. E konferencián vállamtunk fel új szemléletmódokat, az ökológia változások történeti vetületét és alakulását különböző tudományterületeken, értelmezni a természeti és társadalmi jelenségeket, mint pl. a közetek, élőlények, fajok, egyedek, tárgyak, gondolatok, eszmék formájában megjelenő kölcsönhatását az emberrel, az ember és környezete függvényében.

A kötet a 2022. november 17–18. időpontban, online, Zoom rendszerrel megtartott *Ember és környezet kölcsönhatása* című konferencia előadásait tartalmazza.

**A MAGYAR TERMÉSZETTUDOMÁNYI TÁRSULAT
TUDOMÁNYTÖRTÉNETI KÖTETEI
7.**

Sorozatszerkesztő: Dr. Forrai Judit

A Hagyomány, Értékmentés és Innováció a
Tudományok történetében sorozat keretében

**EMBER ÉS KÖRNYEZET
KÖLCSÖNHATÁSA**

Szerkesztő: Dr. Forrai Judit

Szövegszerkesztés, borítóterv és tipográfia: Pók Andrea

Budapest
2025

A MAGYAR TERMÉSZETTUDOMÁNYI TÁRSULAT TUDOMÁNYTÖRTÉNETI KÖTETEI 7.

Sorozatszerkesztő: Dr. Forrai Judit

Kiadja a Magyar Természettudományi Társulat
Budapest, 2025

Felelős kiadó: Dr. Tardy János



A kötetben másként nem jelölt webhelyek utolsó megtekintése: 2023. 12.15.

ISSN 2676-8852
ISBN 978-615-82104-9-2
ISBN 978-615-6957-00-9 [pdf]

Kötet DOI: <http://doi.org/10.23716/MTTT.7.2025>

Belovits-Print Kft.
Budapest

Minden jog fenntartva!

TARTALOM

FORRAI JUDIT dr., DSc, egyetemi tanár, orvostörténész (S.E., WJLF): Az ember és környezete, miért is fontos?	5
--	---

I. AZ ÉPÍTETT KÖRNYEZET

MOLNÁR F. Tamás DSc: Épített környezet: bérpalota plafonmagassági forradalma. A kérdezés tudománya	8
---	---

II. PEDAGÓGIA ÉS KÖRNYEZET KÜLÖNÖS TEKINTETTEL A MATEMATIKAOKTATÁSRA

MUNKÁCSY Katalin PhD: Az analízis fogalmainak kialakulása gyermekkorban. Rövid matematikatörténeti áttekintés és a fejlődéslélektani vizsgálatok néhány tapasztalata	18
KÁNTOR Sándorné VARGA Tünde PhD: Hogyan járul hozzá az iskolai matematikaoktatás az ember és környezete összhangjához?.....	25

III. BIOLÓGIAI ÉS TÁRSADALMI KÖRNYEZET

SZALAI György, KATONA József, KLENK Gusztáv, PINTÉR Zsolt, LEEL-ŐSSY Attila, HIRSCHBERG Andor, VELLAI Tibor, ROVÓ László, MOLNÁR József: Kölcsönhatás Genetikai örökségünk és a felgyorsult XXI. század kihívásai: villanyroller, DNS öregedése, virális, munkaterhelés és társadalmi kihívások	40
SÁRKÖZY Erika: Ökoszisztéma építés a gyorsan idősödő társadalomban: CédrusNet korosztályok és a szenior tudásgazdálkodás	49
SIMEK Ágnes: A hajléktalanok és környezetük együttthatása	66

IV. EMBER MŰVÉSZETI-, KULTURÁLIS KÖRNYEZETE

CSORBA F. László: A természetvizsgáló Csontváry	83
DERGEZ-RIPPL Dóra: Anatómiai látásmód a művészetben: Barcsay Jenő és Gerzson Pál az emberábrázolásról.....	91

V. AZ EMBER ÉS A VÍZ

SCHILLER Vera DR., bölcsészdoktorátus, nyugdíjas tanár, (SOTE) : Nílus és Parnassos	102
ZENTAI Judit Éva PhD: A víz és az ember ősi kapcsolata Japánban — rövid betekintés a víz felhasználásának történetébe	115

VI. ELMÉLETI TÁRSADALOMTUDOMÁNYI KUTATÁSOK	
HIDEG Éva DSc: A koevolúciós gondolat megjelenése és hatása a jövőkutatásban.....	129
Kiss Endre DSc: Mesterséges intelligencia, mint globális környezet	144

VII. ÉRZÉKENYÍTÉS, KÖRNYEZET-TERÁPIA ÉS RESZTORATÍV MÓDSZEREK

IMRINÉ Csákányos Melinda doktorandusz: Addikcióval terhelt személyek kapcsolódása resztoratív gyakorlatokkal a családi és egyéb közösségekhez.....	168
CSORBA Botond, HORVÁTH Balázs Zsigmond, NAGY Márton Zénó: A japán fegyvertartás helyzete gazdasági és kulturális aspektusból, összehasonlítva az európai és amerikai státussal	178
FORRAI Judit DSc: A makro és a mikrokörnyezet kölcsönhatása a gyógyulás és gyógyítás szolgálatában.....	188

II. PEDAGÓGIA ÉS KÖRNYEZET KÜLÖNÖS TEKINTETTEL A MATEMATIKAOKTATÁSRA

AZ ANALÍZIS FOGALMAINAK KIALAKULÁSA GYERMEKKORBAN

RÖVID MATEMATIKATÖRTÉNETI ÁTTEKINTÉS ÉS A FEJLŐDÉSLELEKTANI VIZSGÁLATOK NÉHÁNY TAPASZTALATA

MUNKÁCSY Katalin, PhD

E-mail: katalin.munkacsy@gmail.com

DOI: <http://doi.org/10.23716/MTT.7.2025.02>

Absztrakt

Ember és környezetének kapcsolatát pedagógiai szempontból is sokoldalúan vizsgálják. Vizsgálatunkban a gyerekek irányított módon mozognak a szabadban, miközben sokféle tapasztalatot szereznek. A kérdéseim, amire majd választ szeretnék adni: Mit vesznek észre a környezetükben a kisgyerekek azokból a jelenségekből, amelyeket később majd a matematikai analízis tárgyal? Hogyan lehet irányítani a tapasztalatszerzést? Mit mond minderről a matematikatörténet? Rövid matematikatörténeti áttekintést tervezek és a fejlődéslelektani vizsgálatok néhány tapasztalatát mutatom be.

Kulcsszavak: matematikai nevelés, a tanulók fogalmainak fejlesztése, érzékszervi és mozgásos tapasztalatok

1. Bevezetés

Az analízis, a matematika egyik részterülete, környezetünk fontos jellemzőjével, a mozgással foglalkozik. Korábbi előadásomban bemutattam [MUNKÁCSY 2022], a matematika történetében megfigyelhető, hogy az analízis körébe tartozó kérdések a gyakorlatban merültek föl, a gyakorlati igények jelentettek inspirációt a problémák megoldására. A megtalált algoritmusok matematikai háttere bizonytalan volt, ezért azok ismertetése néha misztikus magyarázatokat tartalmazott, vagy maguk a matematikusok titkolták el módszereiket. A nagy matematikusok a bizonytalan alapok ellenére jól alkalmazták az új módszereket, ezt talán úgy lehet megmagyarázni, hogy a formális definíciók hiánya ellenére a fogalmak szemléletes tartalmának mélyreható ismerete, a megérzések – esetükben jól működtek. Megmaradt-e az analízis szemléletessége?

2. A szigorú matematikai bizonyításokra és definíciókra épülő matematika intuitív eszközökkel történő előkészítése

Az analízis oktatásának ma világszerte elterjedt koncepciója szerint a kész elméletet, az analízis modern tudományát igyekszünk tanítani, és gyakran sem a történeti előzményeket, sem a diákok tapasztalatait nem vesszük figyelembe. Más matematikai tudományágakban már régóta alkalmazott alapelv, hogy nem a kész matematikát, hanem a születőben lévő matematikát kell tanítani annak érdekében, hogy a diákoknak személyes kapcsolatuk legyen az adott témával.¹ Ebben az írásban azt szeretném megmutatni, hogy az analízis nehéz fogalmai, szemléletes szinten, benne vannak a gyerekek tapasztalataiban. [SINCLAIR, 2018] Általában ezekre a tapasztalatokra az oktatás nem épít, így azok sokszor nem is idéződnek föl, ezért a tanulás hatékonysága nagyon alacsony.² [BRESSOUD 2015, 2016] nemzetközi kutatásai folyamatosan megmutatják, hogy az analízis a leginkább buktató tantárgy.

Mit látunk a környezetünkben? És még mit érzünk, tapasztalunk, túl a látványon?

A mozgás

A sokféle mozgás az élőlények egyik legfontosabb jellemzője. A legkisebb gyerekek is mozognak és figyelik mások mozgását. A legegyszerűbb mozgás, az egyenes vonalú egyenletes mozgás felismerése az embergyerekek veleszületett képessége. A gyerekpszichológiai kutatások a modern, és nagyon érzékeny szemmozgásvizsgáló eszközökkel megállapították, hogy a néhány hetes babák felismerik az egyenes vonalú egyenletes mozgást, azt megkülönböztetik más mozgásoktól. Az ezt bizonyító vizsgálatok lebonyolítását érdemes megismerni: egy ernyő mögött eltűnik, majd később előbukkan egy tárgy. A látványt a csecsemők egyszerűen tudomásul veszik, vagy érdeklődve, hosszabb ideig megfigyelik, attól függően, hogy hogyan mozgott (mennyire kiszámíthatóan mozgott a tárgy) az ernyő mögött. Ez a jól dokumentált jelenség az alapja a mozgásokról a későbbiekben megszerzett tapasztalatoknak. A kicsi gyerekekre vonatkozó mai gyereklelektani kutatások összefoglalóját írták meg a szerzők a gyermeki bölcsességről szóló könyvükben. [GROPNIK, 2015]

Az analízis a változásról szól, és a változások legnyilvánvalóbb formája a mozgás. A mozgás filozófiai, logikai és matematikai vizsgálata nehéz problémák sokaságát veti föl. Számunkra most az a legfontosabb, hogy a matematika, természetesen a fizika is, lehetőséget nyújt a mozgás lekottázására. Jól

¹ Bálint Ágnes pszichológussal beszélgettünk sokat az intuitív tanulás formális keretek közötti alkalmazásának lehetőségeiről.

² Stettner Eleonórával készítettünk olyan GeoGebra applikációkat, amelyek a diákok cselekvésére építve képeznek hidat a környezetből szerzett tapasztalatok és a formális matematika között.

megválasztott grafikonokkal le tudjuk írni a mozgásokat, és a „kottát” életre tudjuk kelteni. A mozgásokat, a szemlélettől kicsit már elszakadva, a függvényekkel tudjuk leírni. A grafikonok írására és olvasására visszatérünk, de előbb vizsgáljunk olyan tapasztalatokat, amelyekhez nem szükséges a függvények ismerete.

Pillanatnyi sebesség

Nem is gondolnánk, hogy a pillanatnyi sebesség érzékelése szintén gyerekkori élményünk. Észreveszi-e a két autó sebességének különbségét egy 6 éves gyerek, ha az egyik 60-nal, a másik 100-zal suhan el mellette? Melyik autó volt a gyorsabb? Igen, tudnak válaszolni a gyerekek. Kis sebességkülönbség esetén mi magunk is tévedhetünk, de a kérdést értelmesnek találjuk, ahogyan a gyerekek is. Kerestem kutatási adatokat arra vonatkozóan, hogyan érzékeljük a sebességet. Két feltételezéssel találkoztam. Az egyik szerint a szemünkben keletkező képeken az agyunk méri a tárgy elmozdulásának időtartamát és a megtett távolságot, ezekből pedig „átlagsebességet számol”. A másik feltételezés szerint vannak tárolt mintáink, és ahhoz hasonlítjuk az éppen megfigyelt mozgást. Matematikatanulási szempontból nem is az agy működési mechanizmusa az érdekes, hanem az, hogy van ez a képességünk. [PACK CC, Bensmaia SJ 2015]

A pillanatnyi sebesség fogalma az analízis tanulása során merül föl. Az átlagsebesség fogalma az iskolai oktatásban messze megelőzi a pillanatnyi sebességet, pedig ez utóbbi sokkal természetesebb, gyerek-közelibb fogalom. Jó lenne tudni minden diáknak, hogy amikor a pillanatnyi sebességet különbségi hányados függvény határértékeként, vagyis az átlagsebességek határértékeként definiálja tanárunk, akkor csak a definíció új, a fogalom nem az.

Szélsőérték

Szélsőérték feladatokat gyakran oldunk meg mindennapi életünk során. Kereshetjük a felszín maximumát adott térfogatú tészta esetében — és meg is tesszük, amikor a gyúrt tésztát vékonyra kinyújtjuk, hogy hamar kiszáradjon. És jól összegömbölyítjük, minimalizáljuk a felületét, ha azt akarjuk, hogy felhasználásig ne száradjon ki. A gyerekek sokkal jobban szeretik azt a problémát, hogy amikor az adott mennyiségű fondantból készítünk karácsonyfadíszet, majd azt olvasztott csokiba mártjuk, van-e a többinél kedvezőbb forma. Vagy lényegtelen, hogy milyen alakú díszeket mártunk a csokiba? (Azt hiszem, a természetes feltételezés, hogy a csokit jobban szeretjük, mint a fondantból készített édességet.)

A világot a matematika tanulása során leegyszerűsítve vizsgáljuk. Az egyszerű példákon keresztül jól megfigyelhetjük azokat az ötleteket, amelyekkel a sokkal bonyolultabb problémákat is kezelni lehet majd később.

Gyerekek szívesen rakosgatták a papír négyzeteket, természetesen a szélsőérték fogalma szóba sem került. A feladat a következő: 6 négyzetből rakj ki téglalapot! (Azt csak munka közben mondom el, ha szükséges, hogy a papírnégyzeteket ebben feladatban ne hajtsák össze, ne vágják szét, ne tegyék egymásra, és ne hagyjanak ki hézagokat.) Tudsz többfélét is? Mekkora a területe a kétféle téglalapnak? És mekkora a kerületük? Növelhetjük a négyzetek számát, eleinte még folytathatjuk a rakosgatást, később elég lerajzolni a megoldásokat, utána elég csak kiszámolni a téglalapok adatait. A kicsiknél itt vége is van, ez is egy játék volt a sok közül. A nagyobbaknál kereshetjük az általánosított megoldást a kérdésre: Mikor lesz legkisebb és mikor legnagyobb a kapott téglalapok kerülete? Mi a négyzetszámok és a prímszámok különleges szerepe?

Az érintő

Nézzük az érintőt, de még a függvények grafikonja nélkül. Könnyebb a térben vizsgálni, mint a síkban. Mindannyian észrevettük már, hogy egy sík lap néha hozzásimul egy felülethez, néha van ugyan egy közös pontjuk, de a két alakzat nem simul össze. A jelenséget könnyen megfigyelhetjük, ha egy könyvvel körbesétálunk egy szobában, és megnézzük, mikor siklik, mikor nem, vagyis egy szánkót és egy lejtőt képzelünk el. Én most egy templom példáját szeretném bemutatni. A templom hajója egy félgömb, a tornya egy, a félgömb mellé állított három oldalú gúla. Hol tudunk, és hol nem hozzásimítani egy sík lapot a felülethez?

A gömbön bárhol, a torony élein is a csúcán nem, máshol pedig igen.

Még most sem lesz grafikon, de már egyszerűbb, könnyebben áttinethető a látvány. Közelebb kerülünk a matematikai definícióhoz, és kezdünk távolodni a szemlélettől. Vasút feletti hídról, felüljáróról jól megfigyelhetők a sínek, és ha forgalmasabb helyen nézelődünk, biztosan látni fogjuk a váltókat is. Mit figyeljünk meg? Az egyenes sínthől elkanyarodik egy másik, vagy a másik irányból nézve: az ívből hajló sín pár csatlakozik az egyenesen haladóhoz, vagyis összesimul a két sín pár.

Az érintést még egyszerűbben a kör esetében figyelhetjük meg, bár ehhez el kell hagynunk a valódi, tárgyi környezetet. A világ gazdagságából néhány pont és vonal marad. Azt érezzük, hogy mi az érintő. A körérintő elemi úton definiálható, de úgy, hogy sajnos utalás sincs az összesimulásra, hanem egy szerkesztési utasítást adunk meg. Az érintési pontba rajzolt sugárra merőleges egyenes az érintő. Körül is írhatjuk az érintőt: egy közös pontja van a görbével, a közös pont közelében pedig az egyenes hozzásimul a görbéhez. A hozzásimul természetesen nem matematikai fogalom, de jól használható. Feladatok sokaságával érhető el, hogy a szemléletre

alapozott fogalom egyre inkább megegyezzen a korrekt módon definiált fogalommal.

A függvény

Az előzőektől eltérően a függvény fogalom nem alakul ki spontán módon, de kialakulása már kis korban segíthető azzal, ha sokféle mozgást vizsgálunk. Mi már el tudjuk mondani formalizáltan is (természetesen a gyerekek nem foglalkoznak ezzel), hogy egyenes vonalú, egyenletes sebességű, szakaszonként egyenletes és állandóan változó sebességű mozgásokat vizsgálunk Matematikai titkosírást, a grafikus ábrázolást, vagy más hasonlattal kottát alkalmazzuk tapasztalataink összegzésére, így közeledünk a függvény-fogalomhoz, és a függvény grafikonjának fogalmához. A gyerekekkel végezhető sokféle gyakorlatnak igencsak absztrakt formájával találkoztam a giesseni Matematikai Múzeumban. Ott egy képernyő előtti vörös szőnyegen kellett sétálgatni, miközben a kurzor kiírta mozgásunk út-idő grafikonját. És fordítva is működött: Úgy kellett előre-hátra lépegetni más-más sebességgel, hogy a kurzor a megadott grafikont fussa be. Sok megfigyelés után a gyerekek is kaphatnak ebben a témában írási és olvasási feladatot. A csoport egyik része megtervez egy mozgás-sorozatot, néhány egyszerű szabály figyelembe vételével: az előre kijelölt egyenes szakaszon kell haladni, fordulni és megállni csak a szakasz végpontjaiban és felezőpontjában szabad, összesen két sebesség, egy gyors és egy lassú van, valamint legfeljebb 5 szakaszból állhat az előírt mozgás. (Egyszer együtt dolgoztunk egy kedves pedagógus kollégával, aki táncot és mozgásművészetet tanított. Elborzadva figyelte, hogy a szépséges mozgások összessége helyett ennyire lecsupaszított, száraz valósággal dolgozunk. A matematikus kolléga pedig azért nézett csodálkozva, hogy miért tanítunk ilyen bonyolult dolgokat 13–14 éves gyerekeknek.) Egy tanuló megkapja grafikont, az utasításokat követi. A csoport másik része a látottak alapján, saját elképzelése szerint elkészíti a grafikont. Együtt megbeszéljük, hogy sikerült-e az első csoport által tervezett utat járta-e be a „kotta” alapján a tanuló, és jól jegyezte-e le a másik csoport. Azt is megbeszéljük, hogy a két grafikon közötti eltérések közül milyen eltérések nem számítanak és milyenek igen. A megfigyelhetőség érdekében kellett tennünk kikötéseket, mert egyébként a gyerekek fantáziája nagyon elszalad. A tengelyeken az egységek jelölésére nincs szükség, hiszen semmit sem mérünk pontosan. Így éppen az analízis tanulása szempontjából lényeges tulajdonságokat tudjuk megfigyelni a grafikonokon.

A függvényfogalom és az érintőfogalom szemléletes kialakítása nyomán a diákok olyan feladatok megoldására is képesek lesznek, amelyek sok idősebb, hosszabb és formális oktatáson átesett diák számára megoldhatatlan.

A korábban látott pillanatnyi sebesség tulajdonképpen egy út-idő függvény adott pontbeli érintőjének meredeksége. De mi az érintő? Nincs rá elemi definíció, az analízis keretein belül, a határérték fogalmára építve adható csak meg matematikai definíció.

3. Összegzés

A szemléletesen nyilvánvaló fogalmak definiálása technikailag is nehéz feladat, de még nehezebb azt elfogadtatni a kezdőkkel, hogy szükség van rá.³ Mi olyan tananyagstruktúrát próbálunk kidolgozni, ahol a definíciókat és a tételeket a bizonyításukkal együtt nem gyorsan letudjuk, hanem teljes egészében kihagyjuk. Arra számítunk, hogy a diákok egy részben felmerül az igény a matematikai háttér megismerésére, így később már a siker reményében térhetünk vissza rá. [MUNKÁCSY 2019, 2022]

A környezetről szerzett tapasztalatainkat sokféle szempont szerint elemezhetjük. Írásomban arra szerettem volna felhívni a figyelmet, hogy érdemes matematikus szemmel figyelni a világot, és ebben segítséget nyújtani a gyerekeknek is. A valóság egy-egy szűk szeletének tanulmányozása olyan ismeretek felé vezethet el, amelyek később megkönnyíthetik a felsőbb matematika, benne az analízis tanulását is.

Development of the concepts of mathematical analysis in childhood

The relationship between man and his environment is examined from a pedagogical point of view. In our study, children move outdoors in a controlled manner while gaining a wide variety of experiences. My questions I will want to answer are: What do young children notice in their environment about the phenomena that will be discussed later in mathematical analysis? How to influence the observation? What does the history of mathematics say about all this concepts? I am planning a brief review of some elements of the history of mathematics and presenting some of the experiences of developmental psychology research.

mathematics education, developing students' concepts, bodily experiences

Keywords: mathematics education, developing students' concepts, bodily experiences

³ Deák Ervinnel beszélgettünk kéziratban meglévő, *Az analízis tanítása* munkacímmel rendelkező kézírata alapján az analízis tanításának megoldatlan kérdéseiről.

Irodalom

1. BRESSOUD, D. (2015): Teaching and Learning of Calculus, The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education
2. BRESSOUD, D. et al. (2016): A historical perspective on teaching and learning calculus, Springer,
https://www.researchgate.net/publication/46700893_A_historical_perspective_on_teaching_and_learning_calculus
3. GOPNIK, A., KUHL, P., MELTZOFF, A. (2015): Hogyan gondolkodnak a kisbabák?
4. MUNKÁCSY K. (2022): Paradigmaváltás az Integrál. és Differenciálszámítás Történetében, n: Paradigmaváltás a tudományok, a technika és az orvoslás körében. A Magyar Természettudományi Társulat tudománytörténeti kötetei (5). Magyar Természettudományi Társulat, Budapest, pp. 24–29. ISBN 978-615-80623-2-9 <http://doi.org/10.23716/MTTT.5.2002.03>
5. MUNKÁCSY K.– STETTNER E. (2019): Analysis for Non-Mathematician Students, A Student-friendly Calculus, Varga100 conference, (4) (PDF) Analysis for Non-Mathematician Students (researchgate.net)
6. PACK CC, Bensmaia SJ (2015): Seeing and Feeling Motion: Canonical Computations in Vision and Touch. PLoS Biol 13(9): e1002271.
<https://doi.org/10.1371/journal.pbio.1002271>
7. SINCLAIR, Nathalie (2018): Role of the Senses in Mathematical Thinking and Learning