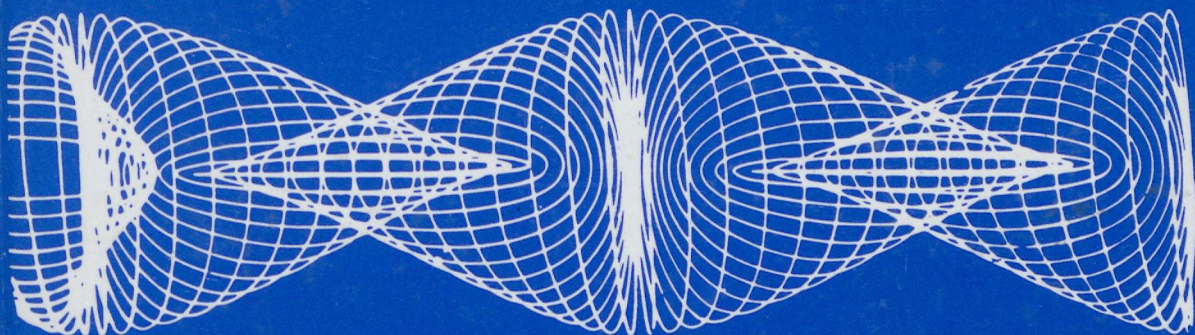


AKUSZTIKA



Pritz Tamás

REZGÉSCSÖKKENTŐ ANYAGOK DINAMIKAI TULAJDONSÁGAI

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST



Rezgéscsökkentő anyagok
dinamikai tulajdonságai

SOROZATSZERKEZÉS

TARTALOMJEGYZÉK

1. fejezet

2. fejezet

Alkalmazási példák • Bibliográfia



Akuszтика

SOROZATSZERKESZTŐ

TARNÓCZY TAMÁS

Akadémiai Kiadó • Budapest

Rezgéscsökkentő anyagok dinamikai tulajdonságai

135657

Pritz Tamás



Akadémiai Kiadó • Budapest

MTAK



018402

SOROZATSZERKESZTŐ

TARNÓCZY TAMÁS

ELŐZETES
KÖNYVTÁRI
SZÁMLA

ISBN 963 05 7318 0

Kiadja az Akadémiai Kiadó
1117 Budapest, Prielle Kornélia u. 19-35.

© Pritz Tamás, 1996

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a nyilvános előadás, a rádió- és televízióadás, valamint a fordítás jogát, az egyes fejezeteket illetően is.

Printed in Hungary

M. TUD. AKADEMIAI KÖNYVTÁRA

Könyvtár 267 / 19 99 SZ.

Tartalom

Előszó	ix
Bevezetés	1
A rezgéscsökkentés módszerei és anyagai	1
Az anyagok dinamikai tulajdonságai	2
A könyv tárgya és tárgyalásmódja	3
Irodalom	5
1. Ideálisan rugalmas viselkedés	7
1.1. Alapvető fogalmak	7
1.2. A Hooke-törvény	9
1.3. A deformáció típusai és a rugalmas állandók	10
Irodalom	13
2. Szilárd anyagok lineáris dinamikai viselkedése	14
2.1. Jelenségek	14
2.1.1. A lineáris dinamikai viselkedés alapvető jellegzetességei	14
2.1.2. A lineáris dinamikai viselkedés vizsgálata	16
2.1.2.1. Az anyag mint lineáris rendszer	16
2.1.2.2. Ugrásfüggvény szerinti terhelés. Kúszás és relaxáció	18
2.1.2.3. Impulzusfüggvény szerinti terhelés. Memória-függvény	22
2.2. A lineáris dinamikai viselkedés matematikai leírása	23
2.2.1. Integrálegyenlet	23
2.2.2. Differenciálegyenlet	24
2.3. A „viszkoelasztikus” anyag	25
Irodalom	27
3. A komplex modulus és a komplex Poisson-szám	28
3.1. A komplex modulus	28
3.1.1. Matematikai értelmezés	28
3.1.2. Fizikai jelentés	35
3.1.2.1. Rugalmas és nemrugalmas feszültség	35
3.1.2.2. Hízterézisgörbe	36
3.1.2.3. Energiaviszonyok	39
3.2. A komplex Poisson-szám	41

3.3. A komplex modulus és a komplex Poisson-szám összefüggése az anyagjellemző időfüggvényekkel	43
Irodalom	46
4. A különféle komplex modulusok és összefüggéseik	47
4.1. A különféle komplex modulusok	47
4.2. A dinamikai modulusok összefüggése	49
4.3. A veszteségi tényezők összefüggése	52
Irodalom	57
5. A komplex modulus és a komplex Poisson-szám mint frekvenciafüggvény	59
5.1. A komplex modulus-frekvencia függvény	59
5.1.1. A dinamikai és a veszteségi modulus összefüggése	59
5.1.2. A dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők frekvenciafüggése	63
5.1.3. A Cole-Cole-diagram és a „kapu”-diagram	67
5.1.4. A hiszteréziscsillapítás és kritikája	69
5.2. A komplex Poisson-szám-frekvencia függvény	72
5.3. A frekvenciafüggvények kapcsolata	74
Irodalom	76
6. Kísérleti tapasztalatok a rezgéscsökkentő anyagok dinamikai tulajdonságainak frekvenciafüggéséről	79
6.1. Gumik és gumyszerű anyagok	79
6.1.1. Dinamikai tulajdonságok széles frekvenciasávban	79
6.1.2. Polimerek rezgésszigetelésre és -csillapításra	84
6.2. Műanyaghabok	88
6.3. Parafa	92
6.4. Szálas anyagok	92
Irodalom	94
7. A komplex modulus frekvenciafüggésének matematikai leírása. Anyagmodellek	95
7.1. Célok és problémák	95
7.2. Modellezés a $\sigma - \epsilon$ differenciálegyenlet alapján	97
7.2.1. Egészrendű deriváltakon alapuló modellek. Mechanikai modellek rugóból és viszkózus csillapítóból	97
7.2.1.1. Az alapelemek	97
7.2.1.2. A Kelvin-Voigt-modell	98
7.2.1.3. A Maxwell-modell	101
7.2.1.4. A Zener-modell	104
7.2.1.5. Az általános $\sigma - \epsilon$ differenciálegyenlet mint anyagmodell	109

7.2.2.	Tört-deriváltakon alapuló modellek	111
7.2.2.1.	A tört-derivált modell általános alakja	111
7.2.2.2.	Az általánosított Kelvin-Voigt-modell	113
7.2.2.3.	Az általánosított Zener-modell	118
7.3.	Modellezés a $\sigma - \varepsilon$ integrálegyenlet alapján	126
	Irodalom	128
8.	A hőmérséklet hatása a polimerek dinamikai tulajdonságaira	131
8.1.	Bevezető megjegyzések	131
8.2.	Dinamikai tulajdonságok a hőmérséklet függvényében	132
8.3.	A hőmérséklet-frekvencia ekvivalencia elv	137
8.4.	A redukált változók módszere	140
	Irodalom	145
9.	A statikus terhelés hatása	147
9.1.	A statikus $\sigma - \varepsilon$ diagramok	147
9.2.	A dinamikai tulajdonságok változása a statikus terhelés hatására	151
9.3.	A dinamikai és a statikus modulus összefüggése	154
	Irodalom	157
10.	Az amplitúdó hatása (nemlinearitás)	159
10.1.	Szilárd anyagok nemlineáris dinamikai viselkedése	159
10.2.	Dinamikai modulus és veszteségi jellemzők a nemlineáris tartományban	161
10.2.1.	Definíciók	161
10.2.2.	A linearitás határa és a nemlinearitás mértéke	163
10.3.	Kísérleti tapasztalatok	165
10.3.1.	Gumik és gumyszerű anyagok	165
10.3.2.	Műanyaghabok	168
10.3.3.	Parafa	169
10.3.4.	Szálas anyagok	170
	Irodalom	171
11.	A dinamikai modulus és a veszteségi tényező mérése	173
11.1.	A kisamplitúdójú mérésekről általában	173
11.2.	A komplex Young- és nyírási modulus mérése	175
11.2.1.	Mérési alapelvek	175
11.2.2.	Mérések rugószerű próbatesteken	179
11.2.2.1.	A próbatestek komplex merevsége	179
11.2.2.2.	Közvetlen merevségi módszer	181
11.2.2.3.	Átviteli függvény módszer	184
11.2.2.4.	Rezonancia-módszer	189
11.2.3.	Mérések longitudinálisan rezgő rúdszerű próbatesteken	192
11.2.4.	Mérések hajlítási rezgést végző pálcaszerű próbatesteken	197
11.2.4.1.	Homogén pálca	197
11.2.4.2.	Rétegelt pálcák	201

11.3.	Mérések a nemlineáris tartományban.....	206
11.3.1.	A nagyamplitúdójú mérésekről általában.....	206
11.3.2.	Fázismódszerek.....	207
11.3.3.	Rezonancia-módszerek.....	208
	Irodalom.....	211
	Jelölések.....	214
	Tárgymutató.....	224

Előszó

A nem kívánt rezgések csökkentését, tovaterjedésük megakadályozását napjainkban leggyakrabban ún. passzív módszerekkel: szigeteléssel és/vagy csillapítással oldják meg. Ezen módszerek többségéhez olyan speciális anyagokra van szükség, amelyeknek mind a rugalmassága, mind az energiaelnyelő képessége, más szóval a belső súrlódása jóval nagyobb, mint a nagy szilárdságú szerkezeti anyagoké. A rezgéscsökkentő anyagok hatékonyságának megítélése, szakszerű és gazdaságos felhasználása csak a dinamikai rugalmasságuk és a belső súrlódásuk, egyszóval a dinamikai tulajdonságaik ismeretében lehetséges.

Ez a munka a hangfrekvenciás sávban rezgésszigetelésre és -csillapításra használt anyagok dinamikai rugalmasságával és belső súrlódásával foglalkozik. Érdeklődésünk középpontjában a nagy belső súrlódású polimerek: a gumik és a gumyszerű anyagok, valamint egyes műanyaghabok állnak, de figyelmet szentelünk a parafa és a különféle szálas anyagok dinamikai tulajdonságainak is. A könyv ismerteti az anyagok dinamikai viselkedésének alapvető jelenségeit és matematikai leírását, a dinamikai tulajdonságok mennyiségi jellemzésére használt komplex rugalmassági modulusokat, részletesen foglalkozik a frekvencia szerepével és ezzel kapcsolatban a dinamikai viselkedés matematikai modellezésével, vizsgálja továbbá a hőmérséklet, a statikus terhelés és az amplitúdó hatását, és végül összefoglalja a komplex rugalmassági modulusok mérés technikáját.

A könyv alapjául az a kutatóintézeti munka szolgál, amelyet a rezgéscsökkentő anyagok dinamikai tulajdonságainak vizsgálata és kutatása területén végeztem az elmúlt közel két évtizedben. Egyes elméleti és kísérleti eredmények itt kerülnek először publikálásra. A célom természetesen több volt, mint az elért eredmények összefoglalása; törekedtem azoknak olyan elméleti rendszerbe foglalására, ami lehetővé teszi egyrészt a kísérleti eredmények értelmezését, másrészt a dinamikai viselkedés mennyiségi leírását. Ehhez felhasználtam a nemzetközi szakirodalom eredményeit is, amiről az egyes fejezeteket záró viszonylag bő irodalomjegyzék tanúskodik.

A könyv írása során különösen fontosnak tartottam a fogalmak pontos definiálását és azok következetes használatát. Erre azért is helyeztem nagy hangsúlyt, mert a szakirodalom nyelvezete távolról sem egységes ezen a jellegzetesen interdiszciplináris területen, amely az akusztika, a reológia,

az anyagtudományok és a lineáris rendszerelmélet határai mentén terül el. A tárgyalásmódban az egyszerűsége törekedtem, ez jellemzi a matematikai apparátust is, amelynek színvonala nem magasabb annál, mint ami a műszaki vagy természettudományi egyetemi képzésben szokásos. Az elméleti részek megértése azonban mindenképpen megköveteli az olvasótól a komplex számok, a differenciál- és integrálszámítás, valamint az integráltranszformációk közül legalább a Fourier-transzformáció ismeretét.

A könyvet elsősorban a zaj- és rezgéscsökkentéssel foglalkozó azon szakembereknek ajánlom, akik ilyen anyagok alkalmazásával, vizsgálatával, kutatásával, vagy fejlesztésével foglalkoznak. A könyv felépítésénél arra is gondoltam, hogy felhasználható legyen az oktatásban és a tudományos továbbképzésben. Remélhető, hogy a munka általánosan érvényes részei felkeltik azok figyelmét is, akik más anyagok (pl. építőanyagok, közetek stb.) dinamikai viselkedése iránt érdeklődnek.

Köszönetet mondok mindazoknak, akik az elmúlt évek során kutatómunkámat támogatták és ezáltal a könyv létrejöttét közvetve vagy közvetlenül is elősegítették. Kedves kötelességemnek tartom, hogy az egyetemi évek óta eltelt hosszú idő ellenére elsőként azoknak mondjak köszönetet, akiktől az akusztikát tanultam; dr. Barát Zoltán egyetemi docensnek és dr. Tarnóczy Tamás professzornak. Dr. P. Nagy Józsefnek, a műszaki tudomány doktorának köszönettel tartozom azért, hogy érdeklődésemet a téma iránt sok évvel ezelőtt felkeltette. Örömmre szolgál, hogy e helyen mondhatok köszönetet dr. Talabér József professzornak, volt munkahelyem, a SZIKKTI volt igazgatójának, aki e szakterület jelentőségét felismerve ott-hont adott az Akusztikai Laboratóriumnak és annak működését mindvégig támogatta. Köszönetemet fejezem ki azoknak a külföldi kollégáknak, akik tanulmányútjaim során egyes részfeladatok megoldásában segítségemre voltak és lehetőséget biztosítottak a nyugodt munkavégzéshez, név szerint dr. D. J. Mead (Southampton, Anglia), néhai dr. C. D. Kovrigin (Moszkva), dr. K. Attenborough (Milton Keynes, Anglia) és dr. S. Lindblad (Lund, Svédország) professzoroknak.

Köszönettel tartozom dr. Tarnóczy Tamás professzornak azért, hogy mint az MTA Akusztikai Komplex Bizottságának elnöke és mint az Akusztika c. könyvsorozat szerkesztője támogatta e könyv kiadását. A lelkiismeretes, minden részletre kiterjedő lektori munkát is neki köszönöm meg.

Az ábrák szép kivitele Nagy Kálmánné kezét dicséri, a kézirat gondos gépeléséért, türelmes újra- és újragépeléséért Vámos Ildikót illeti köszönet.

A könyv kiadását Az építés fejlődéséért Alapítvány és az Ipar Műszaki Fejlődéséért Alapítvány, valamint az Országos Tudományos Kutatási Alap támogatta a T7243 sz. téma keretében. Az anyagi támogatásért ezúton is köszönetet mondok. Külön köszönettel tartozom Az építés fejlődéséért Alapítvány elnökének, dr. Petró Bálint professzornak és titkárnak, Bodor

Jánosnak, akik a könyv elindításában és a kiadás anyagi feltételeinek megteremtésében mindvégig segítségemre voltak. Köszönetemet fejezem ki továbbá Czakóné dr. Tímár Eszternek, az Ipar Műszaki Fejlődéséért Alapítvány munkatársának a kollegiális segítségéért.

Végül, de nem utolsósorban az Akadémiai Kiadó munkatársainak gondos munkáját és segítőkész együttműködését köszönöm meg.

A szerző

Bevezetés

A rezgéscsökkentés módszerei és anyagai

A zaj és rezgés elleni védelem napjaink igen fontos feladatává vált. Ezen belül különösen nagy jelentősége van a *rezgéscsökkentésnek*, mivel majd minden zaj forrása valamely tárgy, berendezés mechanikai rezgése. A rezgéscsökkentési feladatokat leggyakrabban ún. *passzív módszerekkel*, nevezetesen rezgésszigeteléssel és/vagy -csillapítással oldják meg.

Rezgésszigeteléssel lényegében azt igyekszünk megakadályozni, hogy egy rezgő berendezés rezgésbe hozzon egy másikat (pl. a gép az épület vázát) vagy, hogy egy szerkezetbe (pl. oszlopba) került rezgés továbbterjedjen. Ezt mindkét esetben például úgy lehet elérni, hogy a rezgő berendezés, illetve szerkezeti rész és a védett rész közé egy viszonylag lágy, rugalmas elemet helyezünk. (Megemlítjük, hogy a szerkezetbe került rezgést a hazai szakirodalomban gyakran *testhangnak*, a továtérjedésének, vagyis a hullámmozgásnak a megakadályozását pedig értelemszerűen *testhangszigetelésnek*, illetve *-gátlásnak* nevezik.)

Rezgéscsillapításra olyan esetekben van szükség, amikor egy kis veszteségű szerkezet vagy szerkezeti elem – például fémlemez – rezgésre gerjesztését nem lehet megakadályozni. A rezgéscsillapítás lényegében különbözik a szigeteléstől. Míg szigetelésnél a rezgési energiát mintegy „távol tartjuk” a védett résztől, addig csillapításnál ezt az energiát valamilyen módon „elvonjuk”, többnyire „elnyeletjük”, vagyis más energiává – általában hőenergiává – alakítjuk egy nagy belső súrlódású anyaggal. Ez utóbbi módszernél úgy járunk el, hogy a rezgő szerkezetet valamiképpen egyesítjük a csillapító anyaggal, például a fémlemez egyik oldalán bevonatot képezünk. Ily módon a csillapítandó szerkezet és rezgéscsillapító anyag együtt rezeg, és ez utóbbiban a rezgési energia egy része hővé alakul, tehát elvész. (A rezgéscsillapítás kézenfekvő módja természetesen az lenne, ha magát a szerkezetet viszonylag nagy belső súrlódású anyag(ok)ból készítenénk el. A hagyományos szerkezeti anyagokra – pl. acél, beton – azonban az igen kis veszteség jellemző. Igaz ugyan, hogy ismertek olyan eljárások, amelyekkel egyes anyagok, pl. a fémek belső súrlódását meg lehet növelni, valamint, hogy az újabb szerkezeti anyagok – a kompozitok – vesztesége kedvezőbb, mint a hagyományosaké, de ezek költséges eljárások, illetve anyagok és nem alkalmazhatók minden területen.)

Az elmondottakból következik, hogy a rezgéscsökkentési feladatok megoldásához olyan anyagokra van szükség, amelyek rugalmassági modulusa

jóval kisebb, a belső súrlódása pedig jóval nagyobb, mint a nagy szilárdságú szerkezeti anyagoké. Rezgésszigetelésnél elsősorban a nagy rugalmasság az alapvető követelmény, amire ezért főleg a gumik és gumyszerű anyagok (az elasztomerek), egyes műanyaghabok, a parafa és a szálas anyagok (kőzet- és üveggyapotok, nemezek) alkalmasak. Rezgés csillapításnál viszont a nagy belső súrlódás a fontos, ami ugyancsak egyes gumik és más amorf polimerek (pl. poliuretánok, bitumenek stb.) sajátja. Ebben a munkában összefoglalóan az itt felsoroltakat értjük *rezgés csökkentő anyagokon*, még akkor is, ha azokat nem kimondottan ilyen célra gyártották. Könyvünk tárgyát ezek az anyagok képezik, és nem foglalkozunk az előbb említett megnövelt belső súrlódású szerkezeti anyagokkal (fémek, kompozitok), bár elméleti vizsgálódásunk egyes eredményei rájuk is érvényesek, illetve alkalmazhatók.

Az anyagok dinamikai tulajdonságai

A szilárd anyagoknak a rugalmas tulajdonságukon kívül energiaelnyelő képességük is van. Ezt rendszerint a *belső súrlódásnak* tulajdonítják, ami alapvetően azzal kapcsolatos, hogy a valódi anyag rugalmas viselkedése sohasem tökéletes. A belső súrlódás következtében az anyag rezgésekor a mechanikai energia egy része elvész, általában hővé alakul, s ez a rezgés tér- és időbeli csillapodását eredményezi. A belső súrlódással kapcsolatos az is, hogy az anyagnak a rezgéskor megnyilvánuló ún. *dinamikai rugalmassága* eltér a statikus rugalmasságától. A dinamikai rugalmasságot és a belső súrlódást nevezzük összefoglalóan *dinamikai tulajdonságoknak*. A dinamikai viselkedés, illetve tulajdonságok ismerete majd minden anyagra vonatkozóan fontos lehet, de alapvetően szükséges azok esetében, amelyeket rezgés csökkentésre használnak. Ezek többsége ugyanis a viszonylag nagy belső súrlódásával tűnik ki anyagaink közül, amikor is a dinamikai rugalmasság több nagyságrenddel is különbözhet a statikustól. Azonkívül az ilyen célú anyagok hatékonyságának megítélése és szakszerű alkalmazása csak a dinamikai rugalmasságuk és a belső súrlódásuk ismeretében lehetséges.

A dinamikai tulajdonságok, elsősorban a belső súrlódás mennyiségi jellemzésének több módja is van. Statikus terheléskor az anyag rugalmasságát rendszerint egy számmal, a feszültség és a deformáció hányadosával definiált rugalmassági modulus-sal lehet megadni a lineáris viselkedés határában belül. Ezt a definíciót megtarthatjuk kismértékű dinamikai terhelés esetére is, de ekkor a feszültség és a deformáció helyére értelemszerűen valamilyen időfüggvényt kell írni. Ismeretes, hogy az időfüggvények hányadosa – bizonyos feltételek teljesülése esetében – komplex számot eredményez, amelyet ezért komplex rugalmassági modulus-nak nevezünk. Az, hogy a feszültség és a deformáció hányadosa nem valós, hanem komplex szám, annak a fizikai

ténynek matematikai kifejezése, hogy az anyagnak a rugalmasságán kívül belső súrlódása is van. A komplex szám valós része az anyag dinamikai rugalmasságával, képzetes része pedig a belső súrlódásával kapcsolatos. Ebben a felfogásban valamennyi rugalmassági modulus (térfogati, nyírási stb.) és a Poisson-szám is komplex mennyiségnek tekinthető. Ezeket, illetve összetevőiket azonban rendszerint már nem lehet egyetlen számmal megadni, mivel függvényei a frekvenciának és más fizikai változónak (hőmérséklet, statikus terhelés stb.) is.

A komplex modulus jól használható a dinamikai tulajdonságok mennyiségi jellemzésére, az anyagok belső súrlódásának összehasonlító értékelésére. A komplex modulussal való számolás viszonylag egyszerű és elegáns, használata a rezgéscsökkentési számítások elvégzéséhez különösen előnyös. Mindezek indokolják, hogy ebben a munkában végig a komplex modulusokat használjuk a dinamikai tulajdonságok mennyiségi jellemzésére.

A különféle anyagok dinamikai viselkedése, illetve tulajdonságai, különösképpen a belső súrlódása, és ezek matematikai leírása már jó ideje foglalkoztatja a kutatókat, de ez napjainknak is aktuális, sőt intenzíven fejlődő kutatási területe. A fejlődés dinamizmusát nem kis mértékben éppen azoknak az új és újabb anyagoknak – többnyire polimereknek – a megjelenése és továbbfejlődése adja, amelyeket nagy és növekvő mennyiségben használnak rezgéscsökkentésre, főleg -csillapításra. Az új anyagok fejlesztéséhez, tulajdonságaik mind pontosabb jellemzéséhez mérési módszereink tökéletesítésére, illetve újabb módszerekre van szükség. A rezgéscsökkentési számítási módszerek fejlődése és számítógépesítése pedig az anyagi tulajdonságok igényes matematikai leírását követeli meg, s ez fejlődést indukál a dinamikai viselkedés matematikai modellezésének és az új anyagmodellek kutatásának terén. Az új mérési és modellezési módszerek alkalmazásával hagyományos anyagaink tulajdonságairól is újabb, részletesebb ismereteket szerezhetünk, és ezek viselkedését a korábbiaknál pontosabban írhatjuk le.

A könyv tárgya és tárgyalásmódja

Ez a munka a passzív rezgéscsökkentésre: rezgésszigetelésre és -csillapításra használt anyagok dinamikai viselkedésével, illetve tulajdonságaival foglalkozik. Vizsgálódásunk tárgyát alapvetően az anyagok *lineáris viselkedése* képezi, de egy fejezetet a nemlinearitásnak is szentelünk, és röviden foglalkozunk ennek mérés technikájával is. Érdeklődésünk középpontjában a nagy belső súrlódású polimerek: a gumik és a gumyszerű anyagok, valamint egyes műanyaghabok állnak, de foglalkozunk olyan anyagokkal is, mint a parafa és a különféle szálal anyagok (kőzet- és üveggyapotok, nemezsek), amelyek

dinamikai tulajdonságaira vonatkozó korábbi ismereteink nem elég részletesek, sőt gyakran ellentmondók.

A könyv első hét fejezete a szilárd anyagok lineáris dinamikai viselkedésével és ennek matematikai leírásával foglalkozik. A fontosabb fogalmak ismertetése (1. fejezet) és az időtartománybeli viselkedés vizsgálata (2. fejezet) után munkánk középpontjában a frekvenciatartomány és a dinamikai tulajdonságok jellemzésére használt komplex rugalmassági modulus fogalma áll. Ismertetjük a komplex modulusnak és összetevőinek – a dinamikai modulusnak és a veszteségi jellemzőknek – matematikai értelmezését és fizikai jelentését (3. fejezet), majd megvizsgáljuk a különféle komplex modulusok közötti összefüggéseket (4. fejezet). Megállapítjuk a dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők frekvenciafüggésének alapvető és szükségyszerű jellegzetességeit (5. fejezet), és kísérleti eredményeket közlünk (6. fejezet). A frekvenciafüggés matematikai leírása céljából részletesen foglalkozunk anyagmodellek vizsgálatával (7. fejezet).

A frekvencia szerepe után megvizsgáljuk továbbá azon fizikai változók hatását, amelyek fontos szerepet játszanak mind az anyagok dinamikai viselkedésében, mind a rezgéscsökkentési gyakorlatban. Ismertetjük a hőmérséklet hatását polimerek esetében (8. fejezet), áttekintjük a statikus terhelés hatását elsősorban a rezgésszigetelő anyagoknál (9. fejezet), és végül az amplitúdó hatásával, vagyis az anyagok nemlineáris dinamikai viselkedésével foglalkozunk (10. fejezet).

A könyv utolsó, 11. fejezetében a dinamikai tulajdonságok mérési módszereit ismertetjük. A sokféle módszer közül csak azoknak az elvével és gyakorlati problémáival foglalkozunk, amelyeket napjainkban leggyakrabban használnak a rezgéscsökkentő anyagok dinamikai Young- és nyírási modulusának, valamint az illető veszteségi tényezők meghatározására, többnyire a hangfrekvenciás sávban.

A könyv tárgyalásmódja alapvetően *fenomenológiai*, amit a rezgéscsökkentő anyagok széles köre és különbözősége indokol. Munkánkban tehát csak a dinamikai viselkedés jelenségeivel és mennyiségi leírásával foglalkozunk anélkül, hogy vizsgálnánk az anyagszerkezeti okokat. Ehhez a *lineáris viszkoelaszticitás* fenomenológia elméletét, illetve ennek matematikai módszereit használjuk. Ezek a módszerek kifejlődésüket a polimerek nagymértékű elterjedésének köszönhetik, bár általános érvényűek, mivel hogy a *lineáris rendszerek* általános elméletén alapulnak. Éppen ez az, ami lehetővé teszi, hogy a különféle anyagok dinamikai viselkedését a szerkezetüktől függetlenül egységes módszerekkel vizsgáljuk, illetve írjuk le. Ez a magyarázata továbbá annak is, hogy az itt alkalmazott módszerekkel más területeken, például az elektromos hálózatok elméletében vagy a lineáris akusztikában is találkozhatunk. Különösen sok közös vonás van a polimerek dinamikai mechanikai tulajdonságainak és elektromos szigetelőképességének mennyiségi

leírásában. Mindezek nemcsak a könyv szakterületének interdiszciplináris jellegét jelzik, de rámutatnak fizikai világképünk egységességére is.

A könyv első hét fejezete lényegében ezen a fenomenológiai elméleten alapul. Az elmélet matematikai módszereit használjuk a frekvencia szerepének általános – az anyagtól független – érvényű megállapítására és mennyiségi leírására. A többi változó (hőmérséklet, statikus terhelés, amplitúdó) esetében viszont meg kell elégednünk a kísérleti eredmények áttekintésével és az ily módon levonható következtetések ismertetésével.

Szerkezeti kérdésekkel, anyagok leírásával munkánk nem foglalkozik. Arra azonban mindenképpen törekszük, hogy megadja a tipikus rezgéscsökkentő anyagok dinamikai modulusainak és veszteségi tényezőinek jellemző értékeit és ezek változásának jellegzetességeit valamennyi említett változó függvényében.

Ez ideig nem jelent meg olyan önálló monográfia, amely a rezgéscsökkentő anyagok széles körét átfogva vizsgálná azok dinamikai viselkedését. Egy korábbi munka [1] csak a rezgésszigetelőkkel foglalkozik, az utóbbi időben megjelent könyvrészletnek [2] és egy előadásgyűjteménynek [3] középpontjában pedig a rezgéscsillapító polimerek állnak. Jelen munka – a szükségszerű hasonlóságok mellett – több szempontból is különbözik az itt idézettektől. Az egyik eltérés, hogy ez a monográfia igyekszik átfogni a rezgéscsökkentő anyagok széles körét: rezgésszigetelőket és -csillapítókat, polimer és nem polimer alapúakat egyaránt. Egy további fontos eltérés, hogy míg a korábbi munkák középpontjában rendszerint csak a komplex nyírási és a Young-modulus áll, addig ez a könyv valamennyi komplex modulusal, valamint a komplex Poisson-számmal is foglalkozik és vizsgálja mind ezek összefüggéseit. Munkánk az eddig megjelentekhez képest lényegesen nagyobb hangsúlyt helyez a dinamikai viselkedés mennyiségi leírására is.

Irodalom

1. Roszin, G. Sz., *Izmerenie dinamicseszkih szvojsztv akuszticeszkih materialov*. Sztróizdat, Moszkva, 1972.
2. Nashif, A. D., Jones, D. I. G. and Henderson, J. P., *Vibration damping*. Wiley, New York, 1985.
3. Corsaro, R. D. and Sperling, L. H. (editors), *Sound and vibration damping with polymers*. American Chemical Society, Washington, D. C., 1990.

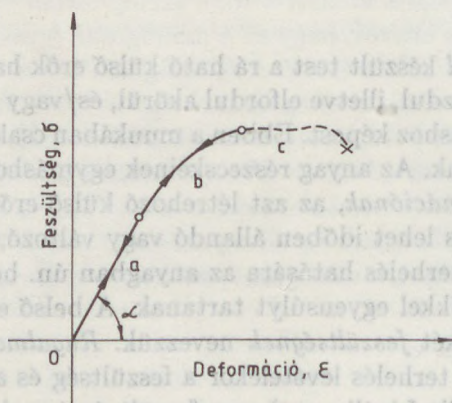
1. Ideálisan rugalmas viselkedés

Az első fejezetben röviden összefoglaljuk a szilárd anyagok deformációs viselkedésével kapcsolatos fontosabb fogalmakat és ismereteket. A fogalmak egyértelmű definiálása céljából ideális rugalmasságot tételezünk fel, amikor az időnek nincs szerepe a deformációs viselkedésben. A feszültség, deformáció, izotropia stb. meghatározása után ismertetjük a Hooke-törvényt, a deformáció típusait, és az utóbbiak kapcsán megadjuk a különféle rugalmas állandók definícióját homogén, izotrop anyagra vonatkozóan.

1.1. Alapvető fogalmak

Egy *szilárd anyagból* készült test a rá ható külső erők hatására az egyensúlyi helyzetéből elmozdul, illetve elfordul akörül, és/vagy az anyag részecskéi mozognak el egymáshoz képest. Ebben a munkában csak az utóbbi mozgásformával foglalkozunk. Az anyag részecskéinek egymáshoz képest jelentkező elmozdulását *deformációnak*, az azt létrehozó külső erőt pedig *terhelésnek* nevezzük. A terhelés lehet időben állandó vagy változó, vagyis *statikus*, illetve *dinamikus*. A terhelés hatására az anyagban ún. belső erők ébrednek, amelyek a külső erőkkel egyensúlyt tartanak. A belső erők felületegységre vonatkoztatott értékét *feszültségnek* nevezzük. *Rugalmas viselkedésről* beszélünk akkor, ha a terhelés levételekor a feszültség és a deformáció maradéktalanul megszűnik. Ideális esetben a feszültség és a deformáció összetartozó értékei pillanatszerűen, a terhelés ráadásával egyidejűleg alakulnak ki és annak levételekor azonnal meg is szűnnek. Ez egyben azt is jelenti, hogy a terheléskor befektetett energiát teljes egészében visszanyerjük a terhelés megszüntetésekor. Ezt *ideálisan rugalmas viselkedésnek* nevezzük, amikor is az időnek semmiféle szerepe nincs a feszültség és a deformáció kialakulásában, illetve megszűnésében, ami természetesen absztrakció. A rugalmasságtan rendszerint ezzel az alapfeltevéssel él [1, 2], és ezt tételezzük fel ebben a fejezetben is, de csak az alapvető fogalmak világos definiálása kedvéért. A továbbiakban ennek a munkának a középpontjában ugyanis éppen az a kérdés áll, hogy az idő milyen szerepet játszik a szilárd anyagok deformációs viselkedésében.

Az anyag rugalmas viselkedése jellemzésének szokásos módja az, hogy különböző nagyságú terheléseknél meghatározzuk a σ feszültséget és az ε deformációt, majd ezek összetartozó értékeit egy derékszögű koordináta-rendszerben mérjük fel. Ily módon nyerjük az ún. $\sigma - \varepsilon$ diagramot. Egy tipikus $\sigma - \varepsilon$ diagramot – amelyet például henger alakú próbatest húzásakor kaphatunk – az 1.1. ábrán vázoltunk. A $\sigma - \varepsilon$ görbén rendszerint három szakaszt lehet megkülönböztetni. A kezdeti a) szakaszra a lineáris arányosság jellemző. Ezen túl – a b) szakaszon – a feszültség és a deformáció összefüggése mindinkább eltér a lineáristól; ez a *nemlineáris viselkedés* tartománya. Az anyag azonban még ezen a szakaszon is – egy bizonyos határig – rugalmasan viselkedik, vagyis a terhelés levételekor a deformáció maradéktalanul megszűnik. Az a) és b) szakaszon berajzolt nyílak azt jelzik, hogy a terhelés növelése és csökkentése ugyanazon egyenes, illetve görbe mentén játszódik le, ami az ideális rugalmasság feltételezéséből következik. Mindezek már nem érvényesek a b) szakasz feletti tartományra, ahol az anyagok többsége *képlékeny*, vagyis vissza nem alakuló deformációt szenved (c) szakasz). A terhelést tovább növelve pedig az anyag roncsolódása következik be, a próbatest elszakad vagy eltörik.



1.1. ábra. A $\sigma - \varepsilon$ diagram.

A lineáris tartomány feletti viselkedés jellege szempontjából az anyagok között igen nagy eltérések vannak. Ezekkel a kérdésekkel nem foglalkozunk és két fejezet kivételével mindvégig feltételezzük a lineáris viselkedést.

Az anyagot *homogénnek* és *izotropnak* nevezzük, ha annak rugalmas viselkedése nem függ a helytől, illetve az iránytól. Ellenkező esetben *inhomogenitásról*, illetve *anizotropiáról* beszélünk. Ebben a munkában az elméleti tárgyalást a homogén, izotrop anyagokra korlátozzuk, mivel a rezgéscsökkentésre nagy mennyiségben használt gumik és gumyszerű anyagok általában ilyenek. Egyes rezgéscsökkentő anyagok (pl. műanyaghabok, közet- és

üvegyapot lemezek) esetében ezek a feltételek azonban nem, vagy csak közelítőleg teljesülnek. A kisebb gond a homogenitással van, mivel elegendően nagy mintát véve az ilyen anyagból – pl. egy műanyaghabból – az kvázihomogénnek tekinthető. Az anizotropiával pl. egy üvegyapot lemeznél viszont mindenképpen számolni kell. Elméleti vizsgálataink egyes eredményei – amelyek célja a különféle fizikai változók, elsősorban a frekvencia hatásának megállapítása – általánosságuknak köszönhetően azonban az ilyen anyagokra is érvényesek, valamely irányhoz tartozó deformációs viselkedésük leírására. Hasonlóképpen, az utolsó fejezetben ismertetett mérési módszerek – kellő körütekintéssel – az anizotrop anyagok vizsgálatára is használhatók.

1.2. A Hooke-törvény

Egy adott terhelésnél az anyagban ébredő feszültség és a keletkező deformáció nagysága az anyag *rugalmas tulajdonságától*, egyszóval a *rugalmasságától* függ. A szilárd anyagok között igen nagy különbségek vannak rugalmas tulajdonságuk, illetve viselkedésük szempontjából. Nyilvánvaló, hogy ugyanazon terhelés esetében például az acél jóval kisebb deformációra képes, mint a gumi. Valamennyi anyag közös jellemzője viszont az, hogy „kis-mértékű” terhelésnél, illetve a deformációnak egy bizonyos „kis” értékéig a feszültség és a deformáció lineárisan arányos egymással, amit az 1.1. ábra is szemléltet. Ezt a *lineáris viselkedést* a Hooke-törvény fogalmazza meg, nevezetesen:

$$\sigma = M\varepsilon, \quad (1.1)$$

ahol σ és ε a feszültség, illetve a deformáció általában, az M pedig az anyag *rugalmassági modulusa*. Ennek értéke az anyagon kívül a deformáció típusától is függ.

Munkánk alapvetően azzal a kérdéssel foglalkozik, hogyan lehet mennyiségileg jellemezni az anyag rugalmas tulajdonságát. A lineáris viselkedés tartományában ez egyértelműen lehetséges a rugalmassági modulussal, amelyet a feszültség és a deformáció hányadosa definiál:

$$M = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (1.2)$$

ahol α a $\sigma - \varepsilon$ egyenesnek az 1.1. ábrán bejelölt hajlásszöge. A lineáris tartományban a rugalmassági modulus értéke nyilvánvalóan nem függ sem a feszültségtől, sem a deformáció nagyságától. (Megemlítjük, hogy az anyag rugalmasságát megadhatnánk természetesen az ε/σ hányadossal, vagyis az M reciprokával is, amelyet rendszerint *engedékenységnak* neveznek a szak-

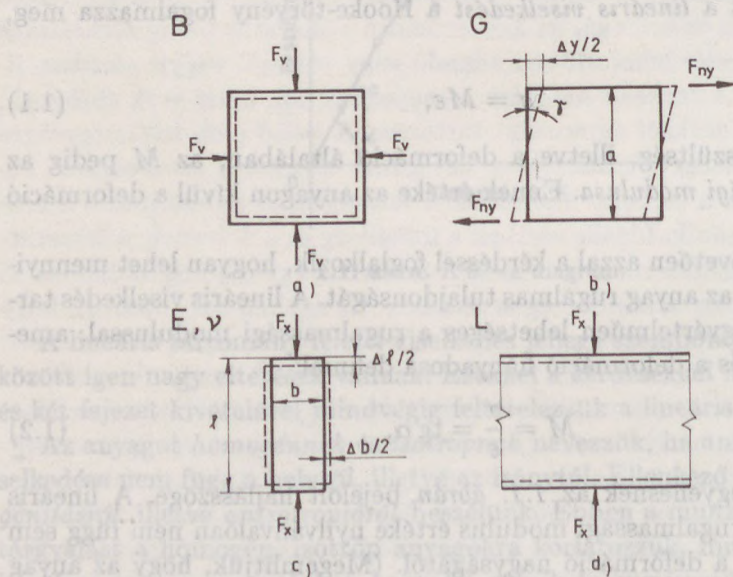
irodalomban. Ebben a munkában azonban kizárólag az M -et használjuk a rugalmasság jellemzésére.)

1.3. A deformáció típusai és a rugalmas állandók

A deformációnak két alapvető típusa van [1, 2]. Az egyiknél a testnek csak a térfogata változik, míg az alakja állandó marad; ez a *térfogati deformáció*. A másik típusú deformációnál a testnek csak az alakja változik (eltorzul), de a térfogata állandó marad; ezt *nyírásnak* nevezzük. Ezen deformációk kapcsán két, egymástól független rugalmassági modulust lehet definiálni.

A térfogati deformációra az 1.2a ábra mutat példát, amelyen egy kocka minden irányú egyenletes (hidrosztatikus) összenyomása látható. (Természetesen ábrázolhattuk volna a kocka minden irányú húzását, vagyis kitágulását is.) A térfogati deformáció értékét az összenyomás hatására bekövetkezett relatív térfogatváltozás, vagyis a ΔV térfogatcsökkenés és az eredeti V térfogat hányadosa adja:

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} \quad (1.3)$$



1.2. ábra. A deformáció típusai és az azok alapján definiálható rugalmas állandók: — eredeti állapot; - - - deformált állapot.

A σ_v térfogati feszültség pedig a kocka lapjaira ható nyomással azonos:

$$\sigma_v = \frac{F_v}{S} \quad (1.4)$$

ahol F_v jelöli a nyomóerőt, S pedig az egyik lapnak a felületét. A σ_v feszültség és az ε_v deformáció hányadosa az anyag *térfogati rugalmassági modulusát* definiálja, amelyet B -vel jelölünk:

$$B = \frac{\sigma_v}{\varepsilon_v} = \frac{F_v/S}{\Delta V/V}. \quad (1.5)$$

A deformáció másik alapvető típusára – a nyírásra – az 1.2b ábrán látható példa ugyancsak egy kocka alakú test esetében. A nyírási deformáció értékét az F_{ny} nyíróerővel azonos irányban létrejött elmozdulás és a test arra merőleges méretének hányadosával számítjuk, amely (az 1.2b ábra jelöléseivel):

$$\varepsilon_{ny} = \frac{\Delta y}{a} = \operatorname{tg} \gamma, \quad (1.6)$$

ahol γ a nyírási szög. Lineáris rugalmas viselkedés kismértékű deformációnál figyelhető meg, vagyis, ha $\Delta y \ll a$, amikor is

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma. \quad (1.7)$$

A σ_{ny} nyírófeszültséget a nyíróerő és a kocka lapfelületének hányadosával számítjuk:

$$\sigma_{ny} = \frac{F_{ny}}{S}. \quad (1.8)$$

A nyírófeszültség és -deformáció hányadosa a *nyírási modulus* adja:

$$G = \frac{\sigma_{ny}}{\varepsilon_{ny}} = \frac{F_{ny}/S}{\operatorname{tg} \gamma} \approx \frac{F_{ny}/S}{\gamma}. \quad (1.9)$$

A valóságban ritka az az eset, amikor egy anyag deformációja tisztán csak térfogati vagy csak nyírási. Ismeretes viszont, hogy bármilyen deformáció felbontható a két alapvető deformáció összegére. Ilyen összetett deformációs állapotot eredményez például egy egyenes hasáb alakú (vagy henger alakú) próbatest hosszirányú terhelése, egytengelyű húzása vagy nyomása. A nyomásnak kitett próbatestet és annak deformált állapotát az 1.2c ábra mutatja. Látható, hogy míg a próbatest hossza rövidül, addig nő az oldalirányú mérete. (Húzás esetében természetesen csökken az oldalirányú méret.) A próbatest ezen kétirányú méretváltozása, illetve deformációja alapján két újabb jellemzőt lehet definiálni. *Young-modulus*nak nevezzük a hosszirányú

feszültség és deformáció hányadosát:

$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}, \quad (1.10)$$

ahol σ_x a hosszirányú feszültség, amely az F_x nyomóerő felületegységnyi értéke:

$$\sigma_x = \frac{F_x}{S}, \quad (1.11)$$

az ε_x pedig a hosszirányú deformációt jelöli, amelynek értékét a próbatest relatív hosszváltozása adja:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l}. \quad (1.12)$$

(A Young-modulussal kapcsolatban megemlítjük, hogy azt gyakran csak rugalmassági modulusnak nevezik a műszaki gyakorlatban).

A próbatest oldal- és hosszirányú deformációinak arányát *Poisson-számnak* nevezzük:

$$\nu = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}, \quad (1.13)$$

ahol ε_y jelöli az oldalirányú deformációt, amelynek értéke:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta b}{b}, \quad (1.14)$$

és itt Δb az oldalirányú méret megváltozása. A Poisson-szám minőségileg különbözik a rugalmassági modulusoktól, hiszen azt nem a feszültség és a deformáció, hanem két deformáció hányadosa definiálja. Szilárd anyagok Poisson-számának értéke 0 és 0.5 között van [1].

A fenti rugalmassági modulusokon kívül az akusztikában fontos szerepet játszik az ún. *longitudinális modulus*, amely az oldalirányban nagy kiterjedésű közegben szabályozza a longitudinális hullám terjedési sebességét (1.2d ábra). Ez határozza meg például egy lépéshangszigetelő járóburkolat merevségét is. A longitudinális modulus definíciója a Young-modulusával azonos, az értéke azonban attól eltérő, mivel ilyen kiterjedésű közegben oldalirányú deformáció nem lehetséges. Azonos viszont e két rugalmassági modulus értéke akkor, ha az anyag Poisson-száma nulla, vagyis ha nem keletkezik oldalirányú deformáció.

A rugalmassági modulusokat és a Poisson-számot összefoglalóan *rugalmas állandóknak* nevezzük. Homogén, izotrop anyag lineáris rugalmas viselkedésének egyértelmű jellemzéséhez két rugalmas állandó szükséges. Két rugalmas állandó ismeretében pedig bármely harmadikat számítani lehet. Az ehhez szükséges összefüggéseket az 1.1. táblázat foglalja össze [3]. A

táblázatban bekereteztük a rezgéscsökkentési számításoknál leggyakrabban előforduló nyírási és Young-modulus, valamint a Poisson-szám összefüggéseit.

1.1. táblázat. A rugalmas állandók összefüggései.

	(G, B)	(G, E)	(G, ν)	(E, ν)
B	---	$\frac{EG}{9G-3E}$	$\frac{2}{3}G \frac{1+\nu}{1-2\nu}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$
G	---	---	---	$\frac{E}{2(1+\nu)}$
E	$\frac{9GB}{3B+G}$	---	$2G(1+\nu)$	---
ν	$\frac{3B-2G}{6B+2G}$	$\frac{E}{2G} - 1$	---	---
L	$B + \frac{4}{3}G$	$G \frac{4G-E}{3G-E}$	$2G \frac{1-\nu}{(1-2\nu)}$	$E \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

Irodalom

1. Landau, L. D. és Lifsic, E. M., *Elméleti fizika VII. Rugalmasságtan*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.
2. Nagy Károly, *Elméleti mechanika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.
3. Schreiber, E., Anderson, O. L. and Soga, N., *Elastic constants and their measurement*. McGraw-Hill, New York, 1973. p.6.

2. Szilárd anyagok lineáris dinamikai viselkedése

Ebben a fejezetben a szilárd anyagok dinamikai deformációs viselkedésével és annak az időtartománybeli matematikai leírásával foglalkozunk. Az alapvető dinamikai jelenségek (deformációkésés, hiszterézis, energiadiSSIPáció, modulusnövekedés) áttekintése után ismertetjük a dinamikai viselkedés vizsgálatának módszereit és az ezek alkalmazásakor nyerhető ún. anyagjellemző időfüggvényeket; nevezetesen a kúszási, a relaxációs és a memóriafüggvényt. Foglalkozunk a feszültség és a deformáció közötti általános összefüggéssel, amelyet az időtartományban egy integrál- vagy egy differenciálegyenlettel lehet megadni. A fejezet végén a „viszkoelasztikus” jelző jelentéséről vitatkozunk.

2.1. Jelenségek

2.1.1. A lineáris dinamikai viselkedés alapvető jellegzetességei

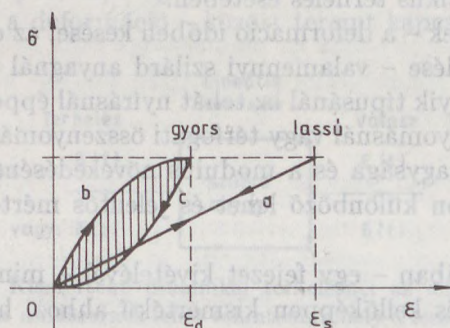
Az előző fejezetben – az ideális rugalmassággal – feltételeztük, hogy a feszültség és a deformáció teljes értéke a terhelés ráadásakor pillanatszerűen alakul ki. Ez esetben, ha a feszültség megváltozik, akkor egyidejűleg megváltozik a deformáció értéke is, és így hányadosuk bármely időpillanatban ugyanazt a számot – az illető rugalmassági modulust adja. Ideális rugalmasság esetén tehát az időnek semmiféle szerepe nincs az anyag viselkedésében; vagyis az ugyanolyan tulajdonságokat mutat *statikus* és *dinamikai terheléskor* egyaránt, legyen az utóbbi bármilyen jellegű is.

Mindez természetesen absztrakció; a valódi anyag deformációjának teljes értéke nem képes azonnal, a terhelés ráadásával egyidejűleg kialakulni. A deformáció ugyanis mindig az anyag szerkezetének bizonyos mértékű átrendeződésével, vagyis belső egyensúlyi állapotának valamiféle megváltozásával jár. Az új egyensúlyi állapot kialakulásához pedig több-kevesebb időre van szükség, amit az anyag ún. *nemrugalmas (anelasztikus) tulajdonságának* tulajdonítunk.

A nemrugalmas tulajdonságoknak nincs különösebb jelentőségük akkor, ha az anyag viselkedését statikus, vagyis időben állandó terheléssel vizsgáljuk úgy, hogy a feszültség és a deformáció összetartozó értékeit jóval a

terhelés ráadása után, az új egyensúlyi állapot beállítását követően határozzuk meg. Ezt statikus vizsgálatnak nevezzük, amellyel az anyag ún. *statikus rugalmas viselkedését* és a *statikus rugalmassági modulusát* lehet megállapítani. Nyilvánvaló, hogy a σ és az ε így meghatározott értéke lényegében megfelel annak, amit akkor tapasztalhatnánk, ha az anyag ideálisan rugalmas lenne.

Az előbbiekkal szemben a nemrugalmas tulajdonságok alapvetően fontos szerepet játszanak dinamikai terheléskor. Ekkor ugyanis nincs elegendő idő az anyag szerkezetének átrendeződésére, és így a deformáció teljes értéke nem képes a feszültséggel egyidejűleg kialakulni. Következésképpen dinamikai terheléskor a deformáció változása időben késik a feszültségéhez képest. Alapvetően ez az oka annak, hogy a szilárd anyag *dinamikai viselkedése* két fontos szempontból is eltér a statikus, illetve az ideális rugalmas viselkedéshez képest, amit vázlatosan a 2.1. ábra szemléltet.



2.1. ábra. A feszültség és a deformáció pillanatértékeinek összefüggésére a terhelés igen lassú változtatásakor egy egyenest (a), gyors változtatásakor pedig egy hiszterézisgörbét (b, c) kapunk.

Az ábra a) egyenese statikus terhelésnél, illetve a terhelés igen lassú változása esetében mutatja a σ és az ε összefüggését. Ekkor a terhelést növelve és csökkentve ugyanazt az egyenest kapjuk, feltéve, hogy a terhelés változtatása olyan lassan történik, hogy valóban elegendő idő áll rendelkezésre a teljes deformáció kialakulásához. A terhelés gyors változtatásakor ehhez viszont nincs elegendő idő, és ezért a terhelés növelésekor és csökkentésekor két különböző görbét (b) és c)) kapunk. Az így kialakuló hurkot *hiszterézisgörbének* nevezzük. A hiszterézisgörbe azt jelzi, hogy a terhelés megszüntetésekor csak részben lehet visszanyerni a megterheléskor befektetett energiát. A két energia különbsége hővé alakul és elvész – *disszipálódik* az anyagban.

Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy az energiadisszipáció a deformáció késésének, vagyis az anyag nemrugalmas tulajdonságának a következménye, és nagysága a hiszterézisgörbe vonalkázott területével arányos. A disszipá-

ció rendszerint bonyolult fizikai mechanizmusok eredménye, amelyek – az anyagtól függően – igen eltérők lehetnek. Tekintettel arra, hogy mechanikai rendszereknél az energiadiSSIPációt rendszerint valamiféle súrlódás okozza, ezért ezt az anyagok esetében is gyakran az ún. *belső súrlódásnak* tulajdonítják. Az egyszerűség kedvéért ebben a munkában is összefoglalóan *belső súrlódásról* beszélünk; legyen az energiadiSSIPáció bármely fizikai mechanizmus eredménye; és anélkül, hogy vizsgálnánnak annak fizikai okait.

A 2.1. ábra a szilárd anyagok dinamikai viselkedésének egy másik fontos jelenségét is szemlélteti. Az ábrán látható, hogy dinamikai terheléskor a deformáció legnagyobb értéke (ϵ_d) kisebb annál, mint ami statikus terheléskor kialakulna (ϵ_s). Ennek oka ugyancsak az, hogy a terhelés gyors változásakor a deformáció teljes értékének kialakulásához nincs elegendő idő. Következésképpen az anyag dinamikai terheléskor mutatott rugalmassága – a *dinamikai rugalmassága* – kisebb, vagyis a rugalmassági modulusa nagyobb, mint statikus terhelés esetében.

A fenti jelenségek – a deformáció időbeli késése, az energiadiSSIPáció és a modulus növekedése – valamennyi szilárd anyagnál megfigyelhetők és a deformáció mindegyik típusánál is; tehát nyírásnál éppen úgy, mint egytengelyű húzásnál és nyomásnál vagy térfogati összenyomásnál és kitágulásnál. A *belső súrlódás* nagysága és a modulus növekedésének mértéke azonban anyagonként nagyon különböző lehet és jelentős mértékben függ a deformáció típusától is.

Ebben a munkában – egy fejezet kivételével – mindvégig feltételezzük azt, hogy a terhelés kellőképpen kismértékű ahhoz, hogy az anyag dinamikai viselkedése *lineáris* legyen. Ez utóbbin – általánosan fogalmazva – ugyanazt értjük, mint az előző fejezetben, vagyis, hogy a feszültség és a deformáció között – amelyek most időfüggvények – lineáris arányosság van. Ezzel kapcsolatban fontos megjegyezni, hogy nem jelenti az anyag nemlineáris viselkedését, hogy a hiszterézisgörbe görbe vonalú. A hiszterézisgörbe ugyanis a feszültség és a deformáció pillanatértékeinek összefüggését írja le, így annak alakja – az anyag lineáris tartományában – alapvetően a terhelő időfüggvény jellegétől függ. Az anyag lineáris viselkedését az jelenti, hogy a hiszterézisgörbe alakja nem változik a terhelés nagyságával. A lineáris dinamikai viselkedés feltételére a későbbiek során visszatérünk és azt pontosabban is megfogalmazzuk.

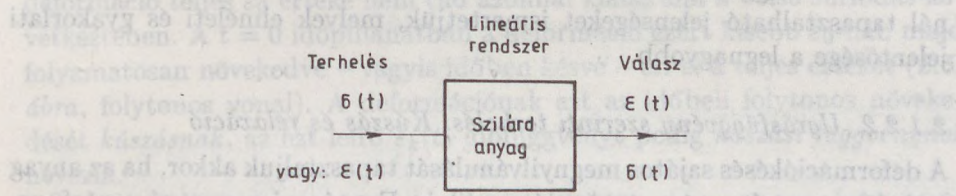
2.1.2. A lineáris dinamikai viselkedés vizsgálata

2.1.2.1. Az anyag mint lineáris rendszer

Egy rezgéscsökkentő anyag hatékonyságának megítéléséhez, valamint a szakszerű felhasználásához a dinamikai rugalmasságára és a *belső súrlódására* jellemző mennyiségeket kell ismerni. Összefoglalóan elsősorban ezeket

értjük *dinamikai tulajdonságokon* ebben a munkában. Ezen tulajdonságok meghatározása az anyag dinamikai viselkedésének, vagyis a dinamikai feszültség és deformáció összefüggésének vizsgálata révén lehetséges.

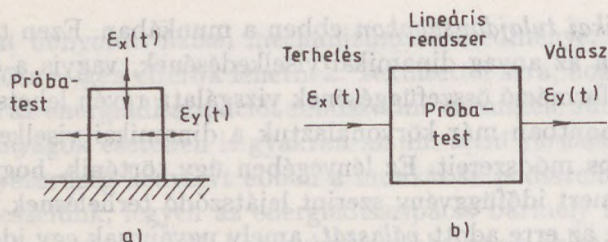
Az előző pontban már körvonalaztuk a dinamikai viselkedés vizsgálatának általános módszereit. Ez lényegében úgy történik, hogy az anyagot valamilyen ismert időfüggvény szerint lejátszódó terhelésnek vetjük alá és megvizsgáljuk az erre adott *válaszát*, amely ugyancsak egy időfüggvény. A terhelés lehet a feszültség, amikor is a deformáció a válasz, de a vizsgálat fordítva is végezhető. A válaszfüggvény jellemzői – a terhelésen kívül – a vizsgált anyagtól függenek, annak analízisével tehát meg lehet határozni a dinamikai tulajdonságokat. Ez a módszer lényegében ugyanaz, mint amit a fizika és a technika több területén széleskörűen használnak a különféle *lineáris rendszerek* ismeretlen paramétereinek meghatározására [1]. Kismértékű dinamikai terheléseknél az anyagot is ilyen (természetes) lineáris rendszernek tekinthetjük, éspedig olyanak, amely két mennyiség – többnyire a feszültség és a deformáció – között teremt kapcsolatot (2.2. ábra).



2.2. ábra. Kismértékű dinamikai terhelésnél az anyagot egy olyan lineáris rendszernek lehet tekinteni, amely a feszültség és a deformáció között teremt kapcsolatot.

Következésképpen a lineáris rendszerek vizsgálatára alaposan kidolgozott elméleti és kísérleti módszerek [1] alkalmazhatók az anyagok dinamikai viselkedésének és tulajdonságainak meghatározására is. A módszer nagy előnye az általánossága, mivel azzal bármely típusú deformáció (pl. nyírás, húzás-nyomás stb.) esetében is vizsgálható a σ és az ϵ összefüggése. A módszer értelemszerűen alkalmazható továbbá a Poisson-számot meghatározó deformációk közötti összefüggés vizsgálatára is (2.3a ábra). Az előbbi fel fogásban ugyanis egy lineáris rendszernek tekinthetjük azt a próbatestet is, amely oldal- és hosszirányú deformációinak hányadosa a Poisson-számot definiálja (2.3b ábra).

Egy lineáris rendszer és így valamely anyag dinamikai viselkedésének vizsgálatát természetes módon az idő függvényében, vagyis az *időtartományban* végezzük. A terhelés elvileg bármilyen időfüggvény szerinti lehet, de a gyakorlatban csak néhány használatos. Ideálisan rugalmas esetben az időfüggvény választásának nincs jelentősége, mivel ekkor a terhelés és a válasz egyidejűleg változik, és így a hányadosuk minden időpillanatban egy



2.3. ábra. Egy lineáris rendszernek (b) lehet tekinteni azt a próbatestet (a) is, amely oldal- és hosszirányú deformációjának hányadosa a Poisson-számot definiálja.

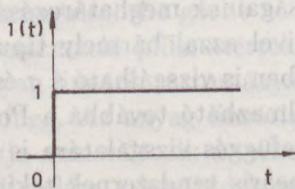
és ugyanazt a számot – valamely rugalmassági modulust, illetve a Poisson-számot adja. Valódi anyagnál viszont várható, hogy ez a hányados – a terhelés és a válasz közötti időeltérés következtében – ugyancsak egy időfüggvényt eredményez, amelynek jellege nyilván függ a vizsgálathoz választott időfüggvénytől is. Az anyagok (és a lineáris rendszerek) vizsgálatához használt időfüggvények közül az alábbiakban csak azt a kettőt és az azoknál tapasztalható jelenségeket ismertetjük, melyek elméleti és gyakorlati jelentősége a legnagyobb.

2.1.2.2. Ugrásfüggvény szerinti terhelés. Kúszás és relaxáció

A deformációkésés sajátos megnyilvánulását tapasztaljuk akkor, ha az anyag terhelése *ugrásfüggvény* szerint játszódik le. Egységnyi nagyságú ugrásfüggvényt – az *egységugrást* – a 2.4. ábra mutatja, amelynek a definíciója:

$$I(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ 1, & \text{ha } t > 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

ahol t az idő.

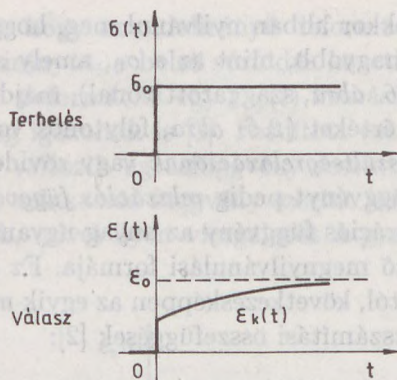


2.4. ábra. Az egységugrás-függvény.

Elsőként tételezzük fel, hogy a feszültség változik ugrásfüggvény szerint, ennek nagysága legyen σ_0 (2.5. ábra), vagyis

$$\sigma(t) = \sigma_0 I(t). \quad (2.2)$$

Ideálisan rugalmas esetben a deformációválasz ugyancsak ugrásfüggvény lesz, mivel ekkor az minden időpillanatban képes követni a feszültség vál-

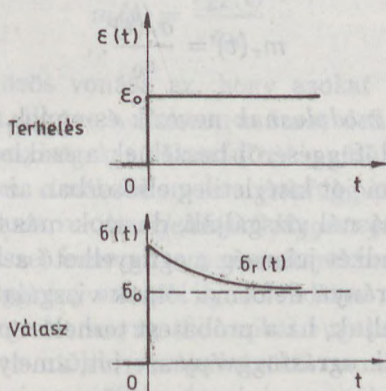


2.5. ábra. A kúszást akkor tapasztaljuk, ha a feszültség ugrásfüggvény szerint változik.

tozását (2.5. ábra, szaggatott vonal). Ezzel szemben a valódi anyagnál a deformáció teljes ϵ_0 értéke nem tud azonnal kialakulni a belső súrlódás következtében. A $t = 0$ időpillanatban a deformáció ezért kisebb ϵ_0 -nál, majd folyamatosan növekedve – vagyis időben késve – éri el a teljes értékét (2.5. ábra, folytonos vonal). A deformációnak ezt az időbeli folytonos növekedését *kúszásnak*, az ezt leíró $\epsilon_k(t)$ időfüggvényt pedig *kúszási függvénynek* nevezik.

A késési jelenséget akkor is megfigyelhetjük, ha maga a deformáció változik ugrásfüggvény szerint (2.6. ábra), amely legyen ϵ_0 nagyságú, vagyis

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 I(t). \quad (2.3)$$



2.6. ábra. A feszültségrelaxáció deformációugrás esetében figyelhető meg.

A deformáció késése ekkor abban nyilvánul meg, hogy a feszültségválasz a $t = 0$ időpillanatban nagyobb, mint az a σ_0 , amely az ideálisan rugalmas esetben kialakulna (2.6. ábra, szaggatott vonal), majd az csökken az idővel, amíg el nem éri a σ_0 értéket (2.6. ábra, folytonos vonal). A σ -nak ezt az időbeli csökkenését *feszültségrelaxációnak* vagy röviden csak *relaxációnak*, az ezt leíró $\sigma_r(t)$ időfüggvényt pedig *relaxációs függvénynek* nevezik.

A kúszási és a relaxációs függvény az anyag ugyanazon dinamikai tulajdonságainak különböző megnyilvánulási formája. Ez a két függvény tehát nem független egymástól, következésképpen az egyik meghatározható a másik ismeretében. Az átszámítási összefüggések [2]:

$$\frac{1}{\sigma_0 \varepsilon_0} \int_0^t \varepsilon_k(t - \tau) \sigma_r(\tau) d\tau = t, \quad (2.4a)$$

vagy

$$\frac{1}{\sigma_0 \varepsilon_0} \int_0^t \sigma_r(t - \tau) \varepsilon_k(\tau) d\tau = t, \quad (2.4b)$$

ahol τ egy integrálási változó.

Az anyag statikus terhelésekor annak rugalmas tulajdonságát a rugalmassági modulussal jellemeztük, amely definíció szerint a feszültség és a deformáció hányadosa. Ezt a definíciót megtarthatjuk a dinamikai terhelés esetére is, de ekkor a feszültség és a deformáció helyére az illető időfüggvényeket kell írni, amelyek hányadosa várhatóan ugyancsak valamilyen időfüggvényt eredményez. Ilyen, rugalmassági modulus dimenziójú időfüggvényt kapunk akkor, ha a $\sigma_r(t)$ relaxációs függvényt elosztjuk a deformációugrás ε_0 nagyságával, mely:

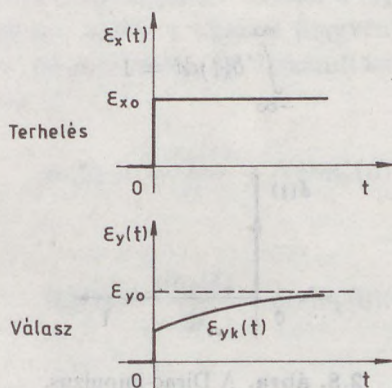
$$m_r(t) = \frac{\sigma_r(t)}{\varepsilon_0}. \quad (2.5)$$

Az $m_r(t)$ -t *relaxációs modulusnak* nevezik és ennek alapján gyakran a rugalmassági modulus időfüggéséről beszélnek a szakirodalomban.

A kúszást és a relaxációt kísérletileg elsősorban az egytengelyű húzásnál, nyomásnál vagy a nyírásnál vizsgálják, de azok más típusú deformációknál is megfigyelhetők. Mindkét jelenség megfigyelhető a 2.3a ábrán vázolt próbatest oldal- és hosszirányú deformációinak vizsgálatánál is. A kúszást ez esetben akkor tapasztaljuk, ha a próbatest terhelése olyan, hogy a hosszirányú deformáció változik ugrásfüggvény szerint, amely legyen ε_{x0} nagyságú, vagyis

$$\varepsilon_x(t) = \varepsilon_{x0} I(t). \quad (2.6)$$

Fizikailag nyilvánvaló, hogy az oldalirányú deformáció időben csak késve képes követni a hosszirányút, a belső súrlódás következtében. Következésképpen az oldalirányú deformációt egy $\varepsilon_{yk}(t)$ kúszási függvény írja le (2.7. ábra), amit kísérletileg igazoltak is [3]. Fordított esetben, vagyis ha az oldalirányú deformáció változik ugrásfüggvény szerint, akkor a hosszirányú deformáció válasz egy relaxációs függvény szerint játszódik le. Ezzel azonban nem foglalkozunk, mivel ilyen vizsgálatot a gyakorlatban igen nehéz lenne megvalósítani.



2.7. ábra. Az oldalirányú deformáció változását egy kúszási függvény írja le, ha a hosszirányú deformáció ugrásfüggvény szerint változik.

Az $\varepsilon_{yk}(t)$ ismeretében – az $m_r(t)$ relaxációs modulusához hasonlóan – definiálható egy időfüggő $\nu_k(t)$ Poisson-szám is, oly módon, hogy a kúszási függvényt elosztjuk a terhelés ε_{x0} nagyságával, vagyis

$$\nu_k(t) = \frac{\varepsilon_{yk}(t)}{\varepsilon_{x0}}. \quad (2.7)$$

Az $m_r(t)$ és a $\nu_k(t)$ közös vonása az, hogy azokat úgy nyertük, hogy a rugalmassági modulus, illetve a Poisson-számot definiáló hányadosok nevezőjében szereplő mennyiségeket választottuk ugrásfüggvénynek.

A lineáris rendszerek elméletében az ugrásfüggvény szerinti terhelésre (gerjesztésre) adott választ *rendszerjellemező függvénynek* nevezik, mivel ennek ismeretében a rendszer ismeretlen paraméterei meghatározhatók. A relaxációs és a kúszási függvény szintén ilyen rendszer-, illetve *anyagjellemező időfüggvény*. Ezek jellege az anyag dinamikai rugalmasságától és a belső súrlódásától függ, de ez utóbbi mennyiségeket nem lehet közvetlenül és egyszerűen megállapítani az időfüggvények ismeretében.

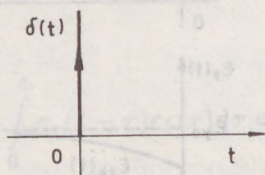
2.1.2.3. Impulzusfüggvény szerinti terhelés. Memóriafüggvény

A kúszási és a relaxációs függvényhez hasonlóan rendszer-, illetve anyagjellemző időfüggvényt kapunk *Dirac-impulzus* terhelés esetében is. A $\delta(t)$ -vel jelölt Dirac-impulzus végtelen rövid ideig ható, végtelen nagy amplitúdójú, egységnyi területű impulzus (2.8. ábra), amelynek matematikai definíciója:

$$\delta(t) = 0, \quad \text{ha } t \neq 0 \quad (2.8a)$$

és

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.8b)$$



2.8. ábra. A Dirac-impulzus.

A Dirac-impulzusra adott válasz neve *súlyfüggvény* a lineáris rendszerek elméletében. A feszültség és a deformáció összefüggésének vonatkozásában itt most csak azt az esetet tekintjük, amikor a deformáció játszódik le Dirac-impulzus szerint, amely legyen:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \delta(t). \quad (2.9)$$

Az erre adott $\sigma_m(t)$ feszültségválaszt – vagyis a súlyfüggvényt – a deformációterhelés nagyságával (pontosabban a Dirac-impulzus területével) osztva rugalmassági modulus dimenziójú időfüggvényt kapunk, nevezetesen

$$m(t) = \frac{\sigma_m(t)}{\varepsilon_0}. \quad (2.10)$$

Az $m(t)$ -t az anyagtanban *memóriafüggvénynek* nevezik. (Az elnevezés magyarázatát a 2.2.1. pontban adjuk meg.)

A súly- és a memóriafüggvény ugyancsak definiálható az anyag bármely típusú deformációjakor és a Poisson-szám vonatkozásában is. Ez utóbbihoz tételezzük fel azt, hogy a 2.3a ábrán vázolt próbatest hosszirányú deformációja Dirac-impulzus szerinti, amely legyen

$$\varepsilon_x(t) = \varepsilon_{x0} \delta(t). \quad (2.11)$$

Az ennek hatására keletkező $\varepsilon_{ym}(t)$ oldalirányú deformációt (amely súlyfüggvény) ε_{x0} -val elosztva egy időfüggő Poisson-számot kapunk:

$$\nu_m(t) = \frac{\varepsilon_{ym}(t)}{\varepsilon_{x0}}. \quad (2.12)$$

A $\nu_m(t)$ – az $m(t)$ -hez hasonlóan – ugyancsak memóriafüggvény.

A súly- és memóriafüggvények elméleti jelentősége nagy, de a gyakorlatban nem játszanak szerepet, mivel a mérésükhöz szükséges Dirac-impulzust még közelítőleg is nehéz megvalósítani. Ezeket a függvényeket azonban számítani lehet a relaxációs, illetve a kúszási függvény ismeretében, amelyek viszont többé-kevésbé jól mérhetők. Az átszámítási összefüggések a memóriafüggvényekre felírva [1]:

$$m(t) = \frac{dm_r(t)}{dt} + \delta(t)m_r(0) \quad (2.13)$$

és

$$\nu_m(t) = \frac{d\nu_k(t)}{dt} + \delta(t)\nu_k(0). \quad (2.14)$$

2.2. A lineáris dinamikai viselkedés matematikai leírása

2.2.1. Integrálegyenlet

Egy anyag dinamikai viselkedésének matematikai leírása a feszültség és a deformáció közötti általános összefüggés megadását jelenti. A Hooke-törvény erre természetesen nem megfelelő, mivel nem veszi számításba a dinamikai terheléskor keletkező nemrugalmas feszültségeket. Nem megfelelők az előző pont szerinti anyagjellemző időfüggvények sem, mivel nem általában, hanem csak adott jellegű terhelő időfüggvények esetében írják le a feszültség és a deformáció összefüggését.

Az általános összefüggés felírásának két módja ismeretes. Az egyik azon a feltételezésen alapul, hogy a feszültség értéke valamely időpillanatban függ a deformáció korábbi értékeitől is, éspedig oly módon, hogy a korábbi feszültségek összeadódnak. A feltételezés Boltzmanntól [4] származik, aki után ezt *Boltzmann-féle szuperpozíciós elvnek* nevezik. Az elv matematikai megfogalmazása egy *integrálegyenlethez* vezet, amelynek egyik lehetséges alakja az alábbi:

$$\sigma(t) = \int_0^t m(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau, \quad (2.15)$$

ahol m a (2.10)-zel definiált memóriafüggvény. Ennek elnevezését fizikai jelentése indokolja, ami az itteni egyenletből kiolvasható. Nevezetesen, az m azt mutatja meg, hogy a feszültség értéke egy t pillanatban milyen mértékben függ a deformációnak τ idővel korábbi értékétől, vagyis, hogy miként „emlékezik” az anyag a deformációs előéletére. A feszültség és a deformáció összefüggése az előző pontbeliek figyelembevételével megadható a relaxációs modulussal is, nevezetesen

$$\sigma(t) = m_r(0)\varepsilon(t) + \int_0^t \frac{dm_r(t-\tau)}{d\tau} \varepsilon(\tau) d\tau. \quad (2.16)$$

Az integrálegyenlet általános érvényű, mivel azzal a szilárd anyagok bármely típusú deformációja esetén is leírható a σ és az ε összefüggése. Általános érvényű abból a szempontból is, hogy lényegében a lineáris rendszerek egyik alapegyenlete, amely értelemszerűen a terhelés (illetve gerjesztés) és a válasz közötti összefüggést írja le. Következésképpen – a 2.1.2.1. pontbelieket figyelembe véve – az integrálegyenlettel megadható a Poisson-számot definiáló deformáció-idő függvények összefüggése is. Ezt formálisan felírhatjuk a fenti integrálegyenletek alapján úgy, hogy a σ helyére ε_y -t, az ε helyére pedig ε_x -et helyettesítjük, figyelembe véve, hogy most az $m(t)$ szerepét a $\nu_m(t)$ memóriafüggvény, az $m_r(t)$ relaxációs modulus szerepét pedig a $\nu_k(t)$ kúszási függvény veszi át. Ezekkel

$$\varepsilon_y(t) = \int_0^t \nu_m(t-\tau) \varepsilon_x(\tau) d\tau, \quad (2.17)$$

vagy

$$\varepsilon_y(t) = \nu_k(0)\varepsilon_x(t) + \int_0^t \frac{d\nu_k(t-\tau)}{d\tau} \varepsilon_x(\tau) d\tau. \quad (2.18)$$

2.2.2. Differenciálegyenlet

A $\sigma - \varepsilon$ általános összefüggés megadásának egy másik módja azon a megfontoláson alapul, hogy az anyag dinamikai terhelésekor keletkező feszültség nemcsak a deformáció nagyságától, hanem annak változásának mértékétől is függ. Ez nyilvánvaló, ha például viszkózus jellegű belső súrlódást tételezünk fel. Ekkor az anyag deformálásakor keletkező feszültség lényegében két részből tevődik össze. Az egyik rész a deformáció nagyságával arányos, úgy, mint az ideális rugalmasság esetében. A másik rész pedig a deformációváltozás sebességével arányos, úgy, mint a viszkózus folyadéknál. Ekkor tehát a $\sigma - \varepsilon$ összefüggésben az idő szerinti deriváltak is szerepet játszanak,

ami így egy *differenciálegyenlethez* vezet. Ennek a legegyszerűbb alakját először Maxwell [5] írta fel, majd azt jóval később Alfrey [6] általánosította:

$$\begin{aligned}\sigma(t) + b_1 \frac{d\sigma(t)}{dt} + \dots + b_n \frac{d^n \sigma(t)}{dt^n} = \\ = a_0 \varepsilon(t) + a_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \dots + a_m \frac{d^m \varepsilon(t)}{dt^m},\end{aligned}\quad (2.19)$$

ahol $a_0, a_1, \dots, a_m$ és $b_1, \dots, b_n$ anyagtól függő állandók. A deriváltak rendjéről kezdetben feltételezték, hogy egész szám, de a későbbi kutatások megmutatták, hogy törtszám is lehet. Az utóbbinak különösen nagy jelentősége van a dinamikai viselkedés mennyiségi leírásában, ezért ezzel a kérdéssel később részletesebben is foglalkozunk.

A $\sigma - \varepsilon$ összefüggést leíró integrál- és differenciálegyenlet egymástól nem független, ezek ugyanannak a fizikai jelenségnek a különböző matematikai megfogalmazásai. Tehát a (2.19) egyenlet is általános; vagyis a szilárd anyagok bármely típusú deformációja esetén érvényes. Általános továbbá abból a szempontból is, hogy megfelel a lineáris rendszerek differenciális formájú alapegyenletének. Következésképpen, ezzel is megadható a Poisson-számot definiáló deformációk mint időfüggvények összefüggése, nevezetesen

$$\begin{aligned}\varepsilon_y(t) + b'_1 \frac{d\varepsilon_y(t)}{dt} + \dots + b'_n \frac{d^n \varepsilon_y(t)}{dt^n} = \\ = a'_0 \varepsilon_x(t) + a'_1 \frac{d\varepsilon_x(t)}{dt} + \dots + a'_m \frac{d^m \varepsilon_x(t)}{dt^m},\end{aligned}\quad (2.20)$$

ahol $a'_0, a'_1, \dots, a'_m$ és $b'_1, \dots, b'_n$ szintén anyagállandók.

2.3. A „viszkoelasztikus” anyag

Az anyagok között igen nagy különbségek vannak a belső súrlódás szempontjából, ami a nemrugalmas tulajdonsággal kapcsolatos. A szilárd anyagok belső súrlódásának már a korai vizsgálatok is feltételezték, hogy az viszkózus erővel van összefüggésben, éppúgy, mint a folyadékok esetében. Később, a polimerek elterjedésével ez a vélekedés általánossá vált, ezeket ezért rendszerint úgy tekintik, mintha az ideálisan rugalmas (elasztikus) anyag és a viszkózus folyadék valamiféle kombinációja lenne. Ez az elképzelés vezetett a *viszkoelasztikus* elnevezés kialakulásához. A polimerek különösen nagy belső súrlódással tűnnek ki az anyagok közül, ezért elterjedésük szükségszerűen együtt járt dinamikai viselkedésük intenzív vizsgálatával és a viszkoelaszticitás elméletének nagymértékű kifejlődésével [7–23]. Ezekben a munkákban már rendszerint *viszkoelasztikus tulajdonságokról* beszélnek,

és összefoglalóan *viszkoelasztikus viselkedésnek* nevezik a dinamikai terheléskor tapasztalható olyan jelenségeket, mint a kúszás vagy a relaxáció. A feszültség és a deformáció általános összefüggését leíró differenciál- és integrálegenletet pedig általában úgy említik, mint a *lineáris viszkoelaszticitás alapegyenleteit*. Az előző pontban láttuk azonban, hogy ezek az egyenletek más szilárd anyagok esetében is érvényesek, hiszen felírásuknál semmiféle kikötést nem kell tenni az anyagra, illetve a belső súrlódás természetére vonatkozóan. Az ún. viszkoelasztikus viselkedés jelenségei pedig más anyagoknál ugyancsak megfigyelhetők – mind a kisebb modulusú rezgéscsökkentő anyagok (pl. közet- és üveggyapotok), mind a nagy szilárdságú szerkezeti anyagok (pl. fémek, üvegek, kerámiák, beton stb. [8, 12, 20]) esetén – bár többnyire kisebb mértékben, mint a polimereknél.

Mindezekből következik, hogy ha a viszkoelasztikus elnevezést elfogadjuk és következetesen használjuk, akkor elvileg valamennyi szilárd anyag ilyennek nevezhető. A gyakorlatban azonban csak azokat az anyagokat nevezik viszkoelasztikusnak, amelyeknél ez a tulajdonság domináns, vagyis amelyeknek viszonylag nagy a belső súrlódásuk, és ennek természete közel van a viszkózushoz. Más anyagok megnevezésére ezt a jelzőt nem használják, de szokás azok viszkoelasztikus viselkedéséről, illetve tulajdonságairól beszélni. A viszkoelasztikus jelzőt széleskörűen használják továbbá az ideálistól eltérő, vagyis a *nem tökéletes rugalmasság* összefoglaló megnevezésére.

A viszkoelasztikus jelző jelentéstartalmával kapcsolatos problémák miatt több szerző megfelelőbbnek tartja a „*nem tökéletes rugalmasság*”, illetve a „*nem tökéletesen rugalmas anyag*”, vagy az „*anyag nemrugalmas (anelasztikus) tulajdonsággal*”, valamint a „*rugalmas anyag belső súrlódással*” elnevezések használatát. Rabotnov [20] pedig az „*emlékező rugalmasság*”, illetve az „*emlékező rugalmasságú anyag*” megnevezést javasolja és használja is a könyvében, amit a Boltzmann-féle integrálegenlet, illetve az abban szereplő memóriafüggvény fizikai jelentése indokol.

Rövidségének és általános elterjedtségének köszönhetően ebben a munkában is használjuk a viszkoelasztikus jelzőt, de csak azon anyagok – többnyire a polimerek – összefoglaló megnevezésére, amelyeknél ez indokolt, valamint a viszkózus csillapítót tartalmazó anyagmodellekkel kapcsolatban. Nem használjuk viszont a viszkoelasztikus viselkedés, illetve tulajdonságok kifejezést, mivelhogy a sokféle rezgéscsökkentő anyagra megfelelőbbnek tartjuk az ezeknél általánosabb dinamikai viselkedés, illetve tulajdonságok megnevezést, ahogy az a könyv címében is szerepel.

Irodalom

1. Fodor Gy., *Lineáris rendszerek analízise*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1967.
2. Findley, W. N., Lai, J. S. and Onaran, K., *Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials*. North-Holland, Amsterdam, 1976. p.85.
3. Theocaris, P. S., Creep and relaxation contraction ratio of linear viscoelastic materials. *Journal of Mechanics and Physics of Solids* **12**, 125-138 (1964).
4. Boltzmann, L., Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. *Annalen der Physik, Supplement* **7**, 624 (1876).
5. Maxwell, J. C., *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, London **A 157**, 52 (1867).
6. Alfrey, T., Non-homogeneous stresses in viscoelastic media. *Quarterly of Applied Mathematics* **2**, 113-119 (1944).
7. Alfrey, T., *Mechanical behaviour of high polymers*. Interscience, New York, 1948.
8. Zener, C., *Elasticity and anelasticity of metals*. University of Chicago Press, Chicago, 1948.
9. Gross, B., *Mathematical structures of the theories of viscoelasticity*. Hermann, Paris, 1953.
10. Staverman, A. J. and Schwarzl, F., Linear deformation behaviour of high polymers, in: *Die Physik der Hochpolymeren*, Vol. IV. Edited by Stuart, H. A., Springer-Verlag, Berlin, 1956.
11. Bland, D. R., *The theory of linear viscoelasticity*. Pergamon, Oxford, 1960.
12. Mason, W. P. (editor), *Properties of polymers and nonlinear acoustics*. *Physical Acoustics*, Vol.II., Part B, Academic Press, New York, 1965. Chs. 7 to 9.
13. Flügge, W., *Viscoelasticity*. Blaisdell, Toronto, 1967.
14. McCrum, N. G., Read, B. E. and Williams, G., *Anelastic and dielectric effects in polymeric solids*. Wiley, London, 1967.
15. Mózes Gy. és Vámos E., *Reológia és reometria*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.
16. Ferry, J. D., *Viscoelastic properties of polymers*. Wiley, New York, 1970.
17. Christensen, R. M., *Theory of viscoelasticity - an introduction*. Academic Press, New York, 1971.
18. Pipkin, A. C., *Lectures on viscoelasticity theory*. Springer-Verlag, New York, 1972.
19. Vinogradov, G. V. i Malkin, A. Ja., *Reologija polimerov*. Himija, Moszkva, 1977.
20. Rabotnov, Ju. N., *Élementü naszledsztennoj mehaniki tverduh tel*. Nauka, Moszkva, 1977.
21. Ward, I. M., *Mechanical properties of solid polymers*. Wiley, Chichester, 1979.
22. Verhás J., *Termodinamika és reológia*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
23. Tschoegl, N. W., *The phenomenological theory of linear viscoelastic behaviour*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

3. A komplex modulus és a komplex Poisson-szám

A komplex modulus a frekvenciatartományban írja le az anyag dinamikai viselkedését, vagyis a feszültség és a deformáció közötti összefüggést. Ebben a fejezetben ismertetjük a komplex modulus matematikai definícióját és foglalkozunk annak, illetve összetevőinek – a dinamikai modulusnak és a veszteségi jellemzőknek – fizikai jelentésével. Megmutatjuk ez utóbbiak összefüggését a rugalmas és a nemrugalmas feszültséggel, az ellipszis hiszterézisgörbe jellemzőivel, valamint a rugalmas és a disszipációs energiával. Ismertetjük továbbá a komplex Poisson-szám matematikai definícióját és fizikai jelentését. Befejezésül megadjuk a komplex modulus és komplex Poisson-szám, illetve ezek összetevőinek összefüggését az anyagjellemző időfüggvényekkel.

3.1. A komplex modulus

3.1.1. Matematikai értelmezés

Az előző fejezetben az anyag dinamikai viselkedését az idő függvényében, vagyis az időtartományban vizsgáltuk. Ennek megfelelően a dinamikai tulajdonságok jellemzésére is időfüggvényeket (relaxációs modulus, memória-függvény stb.) kaptunk. Ezek ismeretében azonban nem lehet közvetlenül megállapítani a dinamikai rugalmasságra és a belső súrlódásra jellemző mennyiségeket, amelyek alapvetően szükségesek a rezgéscsökkentési feladatok megoldásához. Az anyagjellemző időfüggvényekkel kapcsolatban problémát jelent továbbá az is, hogy a rezgéscsökkentési feladatokat rendszerint nem az idő-, hanem a *frekvenciatartományban* oldjuk meg. Ilyen esetekben, ha a dinamikai tulajdonságokat időfüggvényekkel vennénk számításba, akkor az bonyolult, nehezen kezelhető integro-differenciálegyenletekhez vezetne. Ezért a dinamikai tulajdonságokat is a frekvenciatartományban célszerű megadni, éspedig oly módon, ami lehetővé teszi a dinamikai rugalmasságra és a belső súrlódásra jellemző mennyiségek elkülönítését. Mindez akkor lehetséges, ha az anyag viselkedését *harmonikus függvény* szerinti terhelésekre vizsgáljuk.

Ehhez tételezzük fel, hogy a feszültség koszinuszos függvény szerint változik, amely legyen

$$\sigma(t) = \hat{\sigma} \cos \omega t, \quad (3.1)$$

ahol $\hat{\sigma}$ a *feszültségamplitúdó*, ω a *körfrekvencia* R/s-ban;

$$\omega = 2\pi f, \quad (3.2)$$

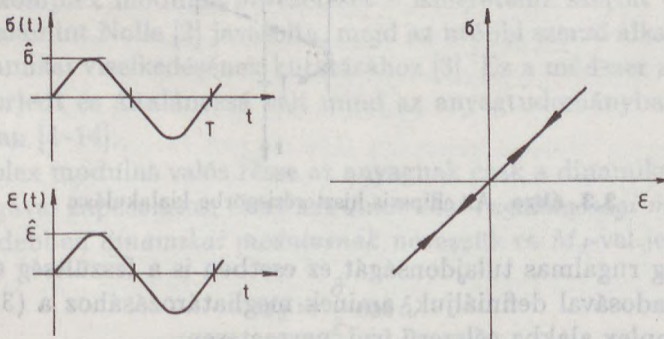
és itt f a *frekvencia* Hz-ben;

$$f = \frac{1}{T}, \quad (3.3)$$

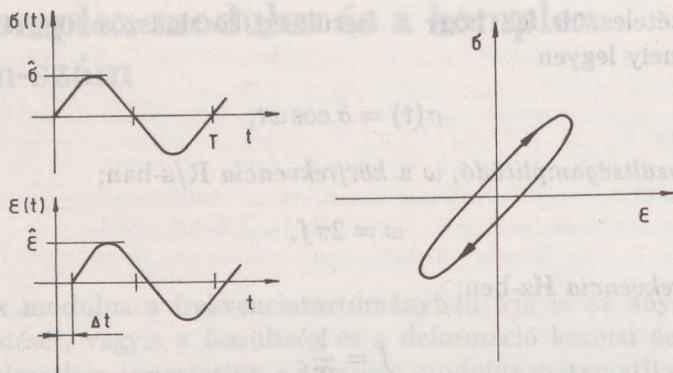
amelyben T a *periódusidő*. Amennyiben a $\hat{\sigma}$ olyan kicsi, hogy az anyag viselkedése lineáris, akkor a deformációt is egy ω frekvenciájú koszinuszos függvény írja le, de az csak késve képes követni a feszültség változását a belső súrlódás következtében, vagyis

$$\varepsilon(t) = \hat{\varepsilon} \cos \omega(t - \Delta t), \quad (3.4)$$

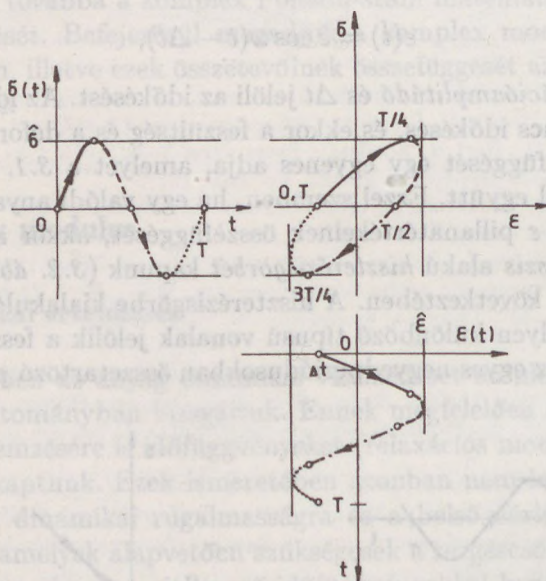
ahol $\hat{\varepsilon}$ a *deformációamplitúdó* és Δt jelöli az időkést. Az ideális rugalmasság esetében nincs időkést, és ekkor a feszültség és a deformáció pillanatértékeinek összefüggését egy egyenes adja, amelyet a 3.1. ábra mutat az időfüggvényekkel együtt. Ezzel szemben, ha egy valódi anyagnál szerkesztjük meg a σ és ε pillanatértékeinek összefüggését, akkor arra az egyenes helyett egy *ellipszis* alakú *hiszterézisgörbét* kapunk (3.2. ábra), a két függvény időeltérése következtében. A hiszterézisgörbe kialakulását a 3.3. ábra szemlélteti, amelyen különböző típusú vonalak jelölik a feszültségnek és a deformációnak az egyes negyedperiódusokban összetartozó pillanatértékeit.



3.1. ábra. Az ideális rugalmasság esetében a feszültség és a deformáció egyidejűleg változik, és a pillanatértékek összefüggését egy egyenes adja.



3.2. ábra. A belső súrlódás hatására a deformáció késve követi a feszültség változását, és a pillanatértékek összefüggését egy ellipszis alakú hiszterézisgörbe írja le harmonikus függvények esetében.



3.3. ábra. Az ellipszis hiszterézisgörbe kialakulása.

Az anyag rugalmas tulajdonságát ez esetben is a feszültség és a deformáció hányadosával definiáljuk, aminek meghatározásához a (3.1)-et és a (3.4)-et komplex alakba célszerű írni, nevezetesen:

$$\sigma(t) = \hat{\sigma} e^{i\omega t}, \quad (3.5)$$

$$\varepsilon(t) = \hat{\varepsilon} e^{i\omega t}, \quad (3.6)$$

ahol $j = \sqrt{-1}$ a képzetes egység, e a természetes logaritmus alapszáma, $\hat{\sigma}$ és $\hat{\varepsilon}$ pedig az ún. *komplex amplitúdók*, amelyek most:

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}, \quad (3.7)$$

és

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon} e^{-j\delta}, \quad (3.8)$$

mivel a feszültség kezdőfázisa 0, a δ pedig a feszültség és a deformáció közötti fázisszög, amely a Δt időkééséből ered:

$$\delta = \omega \Delta t. \quad (3.9)$$

Ezekkel a feszültség- és a deformáció-időfüggvények hányadosa:

$$\overline{M} = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)} = \frac{\hat{\sigma} e^{j\omega t}}{\hat{\varepsilon} e^{j\omega t}} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} e^{j\delta} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} \cos \delta + j \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} \sin \delta, \quad (3.10)$$

ahol M a rugalmassági modulust jelöli általában – a deformáció típusától függetlenül. Látható, hogy ez komplex szám, ezért *komplex rugalmassági modulusnak*, vagy röviden *komplex modulusnak* nevezik. Látható továbbá, hogy ez egy időtől független mennyiség, mivel a hányados képzésekor a t időváltozó „kiesett”.

Az, hogy a feszültség és a deformáció hányadosa nem valós, hanem komplex számot eredményezett – annak a fizikai ténynek a matematikai kifejezése, hogy az anyagnak a rugalmasságán kívül belső súrlódása is van. Ez utóbbi következtében a rezgési energia egy része az anyagban elvész, rendszerint hővé alakul. A különféle energiaveszteségek ily módon történő számításba vétele jól ismert a fizika és a technika más területén is, amire példaként említhetjük az elektromos impedanciát vagy a dielektromos állandót. A komplex modulus bevezetését – ismereteink szerint – Alfrey és Doty [1], valamint Nolle [2] javasolta, majd az utóbbi szerző alkalmazta is a gumik dinamikai viselkedésének kutatásához [3]. Ez a módszer azóta széles körben elterjedt és általánossá vált mind az anyagtudományban, mind az akusztikában [4–14].

A komplex modulus valós része az anyagnak csak a dinamikai rugalmas tulajdonságával kapcsolatos, ezért azt *dinamikai rugalmassági modulusnak*, illetve rövidebben *dinamikai modulusnak* nevezzük és M_d -vel jelöljük:

$$M_d = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} \cos \delta. \quad (3.11)$$

(Az M_d -t a szakirodalomban *valós* vagy *tárolási modulusnak* is nevezik. Az utóbbi elnevezés arra utal, hogy az anyagban tárolt és maradéktalanul visszanyerhető ún. *rugalmas energia* ezzel az összetevővel van összefüggésben, ahogy azt a 3.1.2.3. pontban megmutatjuk.) A komplex modulus kép-

zetes része az anyag belső súrlódásából ered, következésképpen az elvesző energiával kapcsolatos, ezért azt *veszteségi modulusnak* nevezzük és M_v -vel jelöljük:

$$M_v = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} \sin \delta. \quad (3.12)$$

(Az M_v -t esetenként *képzetes* vagy *imaginárius modulusnak* is nevezik.) A két modulus hányadosa az ún. *veszteségi tényező*, amit η -val jelölünk:

$$\eta = \frac{M_v}{M_d} = \operatorname{tg} \delta. \quad (3.13)$$

Ezekkel a komplex modulus az alábbi alakba írható:

$$\overline{M} = M_d + jM_v = M_d(1 + j\eta), \quad (3.14)$$

amely megadható továbbá az abszolút értékével és a fázisszögével is; ez utóbbit *veszteségi szögnek* nevezik:

$$\overline{M} = M e^{j\delta} = M(\cos \delta + j \sin \delta), \quad (3.15)$$

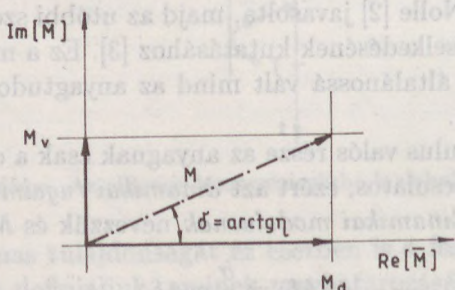
ahol M jelöli a komplex modulus abszolút értékét, amelyet röviden *abszolút modulusnak* nevezünk:

$$M = |\overline{M}| = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} = M_d(1 + \eta^2)^{1/2} \quad (3.16)$$

és

$$\delta = \arctg \eta. \quad (3.17)$$

A komplex modulus mint komplex számot ábrázoló vektort a 3.4. ábrán vázoltuk, amelyen bejelöltük valamennyi fent említett jellemzőt.



3.4. ábra. A komplex modulus vektor.

A veszteségi modulus, tényező és szög az anyag belső súrlódására jellemző mennyiségek, amelyeket összefoglalóan *veszteségi jellemzőknek* nevezünk. Ezek közül azonban csupán a veszteségi modulus az, amely csak

a belső súrlódással kapcsolatos; a veszteségi tényező és szög értéke a dinamikai modulustól is függ. Ennek ellenére az akusztikában rendszerint a veszteségi tényezőt használják a belső súrlódás jellemzésére, aminek két oka is van. Az egyik az, hogy rendszerint a veszteségi tényező szerepel az akusztikai – pl. a rezgések idő- vagy térbeli csillapodását leíró egyenletekben. A másik ok pedig az, hogy az anyagok belső súrlódásának összehasonlítása a veszteségi tényező ismeretében egyszerű. Ez utóbbi alapján osztályozni is szokták az anyagokat kis, illetve nagy veszteségűekre. Viszonylag nagy veszteségről beszélünk akkor, ha $\eta > 0,1$. Ellenkező esetben, a kis veszteségű anyagoknál a fenti összefüggések egyszerűbb alakba írhatók, nevezetesen:

$$M \approx M_d \quad (3.18a)$$

$$\delta \approx \eta, \quad (3.18b)$$

mivel $\eta^2 \ll 1$.

A (3.10) egy adott ω frekvencián adja meg az anyag komplex modulusát, egy másik frekvencián erre egy másik komplex számot kapunk. A dinamikai tulajdonságok ugyanis változnak a frekvenciával, amit gyakran *diszperzió*nak is neveznek. Következésképpen a komplex modulus nem más, mint egy komplex frekvenciafüggvény, vagyis

$$\overline{M}(j\omega) = M_d(\omega) + jM_v(\omega) = M_d(\omega)[1 + j\eta(\omega)]. \quad (3.19)$$

Előbb láttuk, hogy a komplex modulus időtől független mennyiség. Ezekből következik, hogy a komplex modulus nem az idő-, hanem a frekvenciatartományban írja le az anyag dinamikai tulajdonságait.

A 2.1.2. pontban megmutattuk, hogy az anyagot a dinamikai viselkedésének vizsgálatakor olyan lineáris rendszernek tekinthetjük, amely a feszültség és a deformáció között teremt kapcsolatot. Ennek, valamint a (3.10) definíció alapján azt a fontos megállapítást tehetjük, hogy a *komplex modulus* formálisan úgy tekinthető, mint egy lineáris rendszer *átviteli függvénye*. (Terhelés: a deformáció, válasz: a feszültség.)

Az elmondottak figyelembevételével a komplex modulus az előbbinél általánosabban is definiálható a lineáris rendszerek elmélete alapján [15]; nevezetesen a frekvenciatartományba transzformált feszültség- és deformáció-időfüggvények hányadosával. Erre a *Fourier-transzformáció* ad lehetőséget, amely az idő- és a frekvenciatartomány között teremt kapcsolatot. Ezzel

$$\overline{M}(j\omega) = \frac{\overline{\sigma}(j\omega)}{\overline{\varepsilon}(j\omega)}, \quad (3.20)$$

ahol $\overline{\sigma}(j\omega)$ és $\overline{\varepsilon}(j\omega)$ a $\sigma(t)$, illetve az $\varepsilon(t)$ időfüggvény Fourier-transzformáltja. Ez például a feszültségfüggvényre felírva:

$$\bar{\sigma}(j\omega) = \mathcal{F}\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (3.21)$$

ahol $\mathcal{F}$ jelöli a Fourier-transzformációt, és itt a $\sigma(t)$ – az $\varepsilon(t)$ -vel együtt – harmonikustól eltérő függvény is lehet. Egyszerűen belátható, hogy harmonikus időfüggvények esetében a (3.20) a komplex amplitúdók hányadosát adja a (3.10) definícióval összhangban.

A (3.20) egyenlet a frekvenciatartományban írja le a feszültség és a deformáció közötti összefüggést általános esetben. Az időtartományban ezt az összefüggést pl. a (2.15) integrálegyenlet, illetve a (2.19) differenciálegyenlet adja. A (3.20) tehát nemcsak formailag, hanem tartalmilag is analógja az időtartománybeli alapegyenleteknek. Következésképpen a (3.20) egyenletet úgy is tekinthetjük, mint *anyagtörvényt a frekvenciatartományban*.

Az előbbiekből nyilvánvaló, hogy ha egy rezgéscsökkentési feladatnál az anyag dinamikai tulajdonságait a komplex modulussal vesszük számításba, akkor eldöntöttük, hogy a feladatot a frekvenciatartományban oldjuk meg. Ha ezután a feszültség- vagy a deformáció-időfüggvények ismeretére is szükségünk van – harmonikustól eltérő terheléseknél –, akkor azokat az *inverz Fourier-transzformációval* határozhatjuk meg. Ennek alkalmazásával például a feszültség-idő függvény:

$$\sigma(t) = \mathcal{F}^{-1}\bar{\sigma}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.22)$$

Fejezzük ki a $\bar{\sigma}(j\omega)$ -t a (3.20)-ból:

$$\bar{\sigma}(j\omega) = \bar{M}(j\omega)\bar{\varepsilon}(j\omega), \quad (3.23)$$

majd helyettesítsük az $\bar{M}(j\omega)$ helyére (3.19)-et. Ezzel a (3.22) integrál:

$$\sigma(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [M_d(\omega) + jM_v(\omega)]\bar{\varepsilon}(j\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad (3.24)$$

ahol $\bar{\varepsilon}(j\omega)$ valamely tetszőleges $\varepsilon(t)$ időfüggvény Fourier-transzformáltja. Látható tehát, hogy a $\sigma(t)$ meghatározható bármely $\varepsilon(t)$ időfüggvény esetében, feltéve, hogy ismert a dinamikai és a veszteségi modulus frekvenciafüggése.

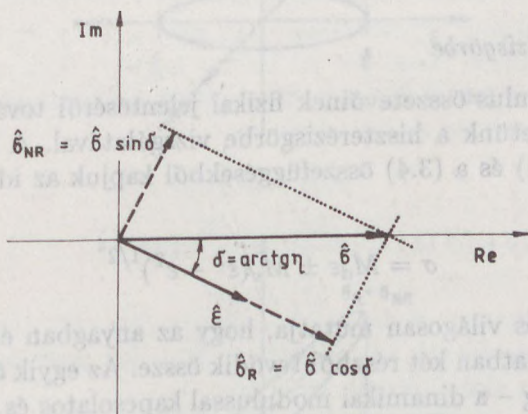
A komplex modulussal kapcsolatban hangsúlyozni szükséges, hogy definiálásának alapvető feltétele az anyag lineáris viselkedése. Ekkor egy adott ω frekvenciájú terhelésre adott válasz ugyanolyan frekvenciájú harmonikus függvény. Ez csak akkor áll fenn, ha a feszültség- és deformációamplitúdók

összefüggése lineáris, és sem a dinamikai modulus, sem a veszteségi jellemzők értéke nem függ az amplitúdók nagyságától. Ez esetben a (3.10), illetve a (3.20) definíciót úgy is tekinthetjük, mint a Hooke-törvény általánosítását dinamikai terhelés esetére. A linearitást gyakran *kisamplitúdójú viselkedésnek* is nevezik, mivel az rendszerint az amplitúdónak csak egy bizonyos „kis” értéke alatt áll fenn. Ennek az amplitúdónak az értéke az anyagtól és a rugalmassági modulustól függően igen különböző lehet. A lineáris viselkedés feltételére az alábbiakban – az energiaviszonyok ismeretében – egy másik definíciót is adunk; az amplitúdó hatásának pedig később egy egész fejezetet szentelünk.

3.1.2. Fizikai jelentés

3.1.2.1. Rugalmas és nemrugalmas feszültség

A komplex modulusnak, illetve összetevőinek fizikai jelentéséről szemléletes képet kapunk, ha a komplex feszültség- és a deformációamplitúdókat mint vektorokat tekintjük. Ezeket a 3.5. ábra szemlélteti, amelyen a feszültségvektort felbontottuk a deformációval egybeeső és arra merőleges összetevőkre.



3.5. ábra. A feszültség és a deformáció komplex amplitúdói mint vektorok.

A deformációval fázisban lévő feszültség az anyagnak csak a rugalmas-ságával kapcsolatos, ez tehát a rugalmas feszültség, amelyet σ_R -rel jelölünk. Amplitúdója:

$$\hat{\sigma}_R = \hat{\sigma} \cos \delta. \quad (3.25)$$

Ezt összevetve a (3.11) összefüggéssel megállapítható, hogy a dinamikai modulust a rugalmas feszültségösszetevő és a deformáció hányadosa definiálja:

$$M_d = \frac{\hat{\sigma} \cos \delta}{\hat{\epsilon}} = \frac{\hat{\sigma}_R}{\hat{\epsilon}}. \quad (3.26)$$

A feszültség másik összetevője 90° -kal siet a deformációhoz képest, aminek oka az anyag belső súrlódása, illetve a nemrugalmas tulajdonsága. Ez az összetevő a nemrugalmas feszültség, amelyet σ_{NR} -rel jelölünk és amelynek amplitúdója:

$$\hat{\sigma}_{NR} = \hat{\sigma} \sin \delta. \quad (3.27)$$

A (3.27) és a (3.12) összehasonlításából megállapítható, hogy a veszteségi modulust a nemrugalmas feszültség és a deformáció hányadosa definiálja:

$$M_v = \frac{\hat{\sigma} \sin \delta}{\hat{\epsilon}} = \frac{\hat{\sigma}_{NR}}{\hat{\epsilon}}. \quad (3.28)$$

A (3.16) összefüggést tekintve látható továbbá, hogy a feszültség és a deformáció teljes értéke között az abszolút modulus teremt kapcsolatot. A (3.17) pedig azt mutatja, hogy a veszteségi tényező a deformációkésés fázisszögével arányos.

3.1.2.2. Hiszterézisgörbe

A komplex modulus összetevőinek fizikai jelentéséről további hasznos információt nyerhetünk a hiszterézisgörbe vizsgálatával. A hiszterézisgörbe egyenletét a (3.1) és a (3.4) összefüggésekből kapjuk az időváltozó kizárásával:

$$\sigma = M_d \epsilon \pm M_v (\hat{\epsilon}^2 - \epsilon^2)^{1/2}. \quad (3.29)$$

Ez az összefüggés világosan mutatja, hogy az anyagban ébredő feszültség minden időpillanatban két részből tevődik össze. Az egyik összetevő – a rugalmas feszültség – a dinamikai modulussal kapcsolatos és a deformációval lineárisan arányos (3.6a ábra):

$$\sigma_R = M_d \epsilon. \quad (3.30)$$

A másik összetevő – a nemrugalmas feszültség – a veszteségi modulussal kapcsolatos:

$$\sigma_{NR} = \pm M_v (\hat{\epsilon}^2 - \epsilon^2)^{1/2}. \quad (3.31a)$$

Ez utóbbi az alábbi alakba írható:

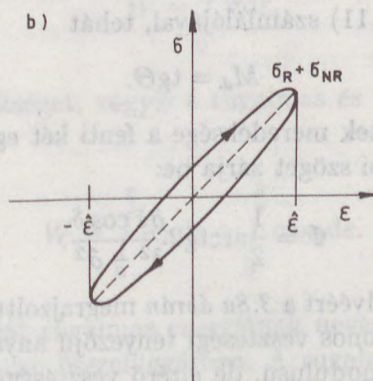
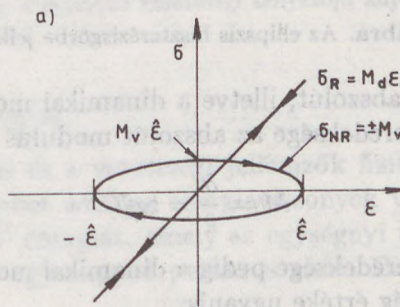
$$\frac{\varepsilon^2}{\hat{\varepsilon}^2} + \frac{\sigma_{NR}}{(M_v \hat{\varepsilon})^2} = 1, \quad (3.31b)$$

amely egy ellipszis egyenlete (3.6a ábra).

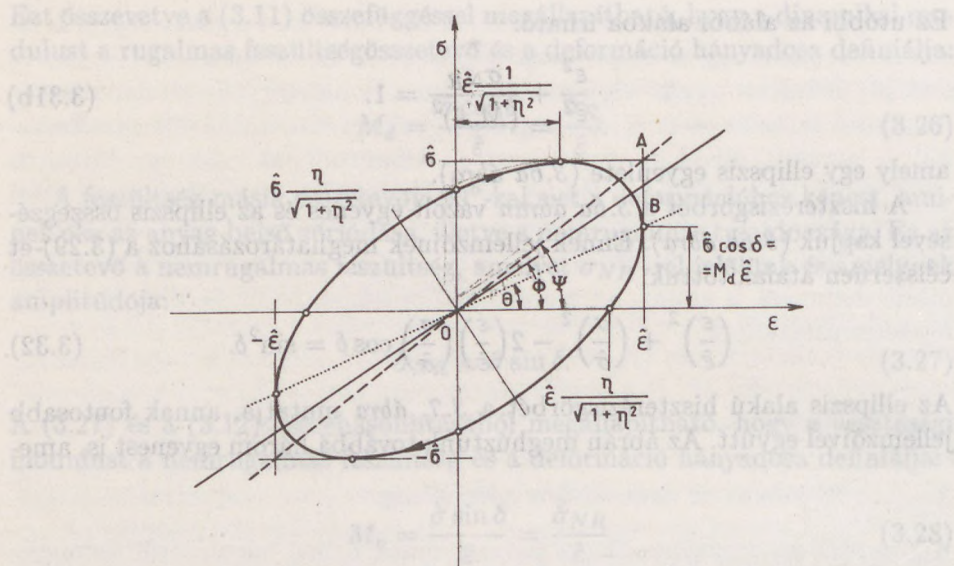
A hiszterézisgörbét a 3.6a ábrán vázolt egyenes és az ellipszis összegzésével kapjuk (3.6b ábra). Ennek jellemzőinek meghatározásához a (3.29)-et célszerűen átalakítottuk:

$$\left(\frac{\varepsilon}{\hat{\varepsilon}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{\hat{\sigma}}\right)^2 - 2\left(\frac{\varepsilon}{\hat{\varepsilon}}\right)\left(\frac{\sigma}{\hat{\sigma}}\right) \cos \delta = \sin^2 \delta. \quad (3.32)$$

Az ellipszis alakú hiszterézisgörbét a 3.7. ábra mutatja, annak fontosabb jellemzőivel együtt. Az ábrán meghúztunk továbbá három egyenest is, ame-



3.6. ábra. A feszültség pillanatértékeinek összetevői: a) rugalmas és nemrugalmas feszültség; b) hiszterézisgörbe – a fenti két feszültség összege.



3.7. ábra. Az ellipszis histerézisgörbe jellemzői.

lyek meredeksége az abszolút, illetve a dinamikai modulussal kapcsolatos. Az $O - A$ egyenes meredeksége az abszolút modulus értékét adja:

$$M = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} = \operatorname{tg} \psi. \quad (3.33)$$

Az $O - B$ egyenes meredeksége pedig a dinamikai modulus értékét adja. A B pontban a feszültség értéke ugyanis:

$$\sigma(\hat{\varepsilon}) = \hat{\sigma} \cos \delta,$$

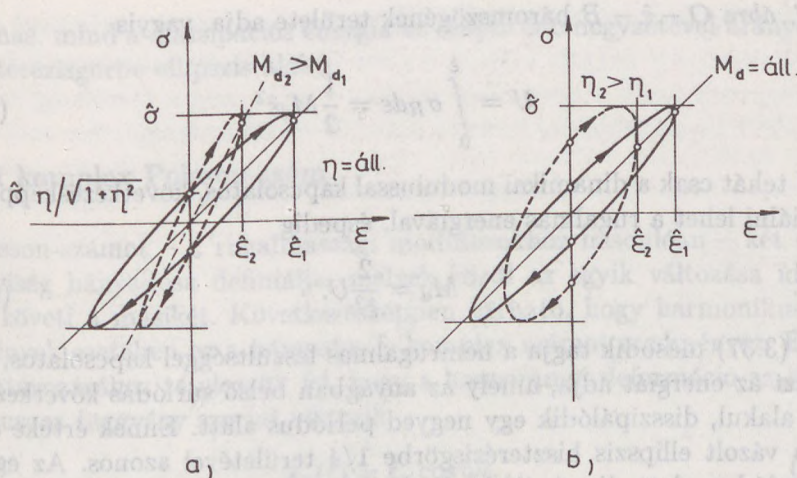
amely megegyezik a (3.11) számlálójával, tehát

$$M_d = \operatorname{tg} \theta. \quad (3.34)$$

Az ellipszis főtengelyének meredeksége a fenti két egyenesé között van, és az ε tengellyel az alábbi szöget zárja be:

$$\Phi = \frac{1}{2} \arctg 2 \frac{\hat{\sigma} \hat{\varepsilon} \cos \delta}{\hat{\varepsilon}^2 - \hat{\sigma}^2}. \quad (3.35)$$

A szemléletesség kedvéért a 3.8a ábrán megrajzoltuk két különböző dinamikai modulusú, de azonos veszteségi tényezőjű anyag histerézisgörbéjét. Az azonos dinamikai modulusú, de eltérő veszteségű anyagok histerézisgörbéit pedig a 3.8b ábrán vázoltuk.



3.8. ábra. a) Azonos veszteségi tényezőjű, de különböző dinamikai modulusú anyagok histerézisgörbéi. b) Azonos dinamikai modulusú, de különböző veszteségi tényezőjű anyagok histerézisgörbéi.

3.1.2.3. Energiaviszonyok

A dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők fizikai jelentésére szemléletes magyarázatot lehet adni az energiaviszonyok vizsgálatával is. Ehhez számítsuk ki azt a W energiát, amely az egységnyi térfogatú anyag deformálásához szükséges egy negyed periódus alatt. Ennek értékét az alábbi integrál adja:

$$W = \int_0^{\hat{\varepsilon}} \sigma d\varepsilon, \quad (3.36)$$

ahol σ a teljes feszültséget, vagyis a rugalmas és nemrugalmas feszültség összegét jelöli, tehát

$$W = \int_0^{\hat{\varepsilon}} \sigma_R d\varepsilon + \int_0^{\hat{\varepsilon}} \sigma_{NR} d\varepsilon. \quad (3.37)$$

A (3.37) első tagját rugalmas energiának nevezik, mivel az csak a rugalmas feszültséggel van összefüggésben. A rugalmas energia reverzibilis, vagyis az a következő negyed periódusban teljes egészében visszanyerhető. Az anyag tehát tárolja ezt az energiát és ennek alapján azt a szakirodalomban gyakran *tárolt energiának* is nevezik. Jelöljük ezt U -val, amely értékét

a 3.7. ábra $O - \hat{\varepsilon} - B$ háromszögének területe adja, vagyis

$$U = \int_0^{\hat{\varepsilon}} \sigma_R d\varepsilon = \frac{1}{2} M_d \hat{\varepsilon}^2. \quad (3.38a)$$

Az U tehát csak a dinamikai modulussal kapcsolatos, következésképpen azt definiálni lehet a rugalmas energiával, éspedig

$$M_d = \frac{2}{\hat{\varepsilon}^2} U. \quad (3.38b)$$

A (3.37) második tagja a nemrugalmas feszültséggel kapcsolatos, az tehát azt az energiát adja, amely az anyagban belső súrlódás következtében hővé alakul, disszipálódik egy negyed periódus alatt. Ennek értéke a 3.6a ábrán vázolt ellipszis hiszterézisgörbe $1/4$ területével azonos. Az egy teljes periódus alatt disszipálódó D energia tehát egyenlő az ellipszis által közrezárt területtel:

$$D = \oint \sigma_{NR} d\varepsilon = 4 \int_0^{\hat{\varepsilon}} \sigma_{NR} d\varepsilon = 4 \int_0^{2\pi/\omega} \sigma_{NR} \frac{d\varepsilon}{dt} dt. \quad (3.39)$$

A (3.31a) helyettesítése és az integrálás elvégzése után kapjuk:

$$D = \pi M_v \hat{\varepsilon}^2. \quad (3.40a)$$

Ebből pedig következik, hogy a veszteségi modulust a disszipációs energiával is lehet definiálni, nevezetesen

$$M_v = \frac{D}{\pi \hat{\varepsilon}^2}. \quad (3.40b)$$

A (3.38a)-ból, illetve a (3.40a)-ból látható, hogy mind a disszipációs, mind a rugalmas energia a deformációamplitúdó négyzetével arányos. A hányadosuk tehát nem függ az amplitúdótól:

$$\frac{D}{U} = 2\pi \frac{M_v}{M_d}, \quad (3.41)$$

amelyből kapjuk a veszteségi tényező definícióját az energiákkal:

$$\eta = \frac{D}{2\pi U}. \quad (3.42)$$

A veszteségi tényező tehát a teljes deformációs periódus alatt disszipálódó energia és a rugalmas energia maximumának hányadosával arányos. A definícióból következik, hogy az η értéke 0 és ∞ közötti lehet.

A fentiek alapján egy újabb definícióját adhatjuk meg az anyag lineáris dinamikai viselkedésének; nevezetesen ez csak akkor áll fenn, ha mind a

rugalmas, mind a disszipációs energia az amplitúdó négyzetével arányos, és a hiszterézisgörbe ellipszis alakú.

3.2. A komplex Poisson-szám

A Poisson-számot – a rugalmassági modulusokhoz hasonlóan – két olyan mennyiség hányadosa definiálja, melyek közül az egyik változása időben késve követi a másikat. Következésképpen várható, hogy harmonikus időfüggvények esetében ez a hányados is komplex számot eredményez. Ennek meghatározásához tételezzük fel, hogy a hosszirányú deformáció az alábbi koszinuszos függvény szerint változik:

$$\varepsilon_x(t) = \hat{\varepsilon}_x \cos \omega t. \quad (3.43)$$

Lineáris esetben az oldalirányú deformációt is ω frekvenciájú koszinuszos függvény írja le, amely az anyag belső súrlódásának következtében késik a hosszirányúhoz képest, vagyis

$$\varepsilon_y(t) = \hat{\varepsilon}_y \cos \omega(t - \Delta t_\nu), \quad (3.44)$$

ahol Δt_ν jelöli az időkésést. Ezeket az időfüggvényeket a hányadosuk meghatározásához ugyancsak komplex alakba célszerű írni, nevezetesen

$$\varepsilon_x(t) = \hat{\varepsilon}_x e^{j\omega t}, \quad (3.45)$$

$$\varepsilon_y(t) = \hat{\varepsilon}_y e^{j\omega t}, \quad (3.46)$$

ahol $\hat{\varepsilon}_x$ és $\hat{\varepsilon}_y$ a komplex amplitúdók, amelyek

$$\hat{\varepsilon}_x = \hat{\varepsilon}_x, \quad (3.47)$$

$$\hat{\varepsilon}_y = \hat{\varepsilon}_y e^{-j\delta_\nu}, \quad (3.48)$$

és itt δ_ν a deformációk közötti fázisszöget jelöli, amely az oldalirányú deformáció Δt_ν késéséből ered:

$$\delta_\nu = \omega \Delta t_\nu. \quad (3.49)$$

Ezekkel:

$$\bar{\nu} = \frac{\varepsilon_y(t)}{\varepsilon_x(t)} = \frac{\hat{\varepsilon}_y e^{j\omega t}}{\hat{\varepsilon}_x e^{j\omega t}} = \frac{\hat{\varepsilon}_y}{\hat{\varepsilon}_x} e^{-j\delta_\nu} = \frac{\hat{\varepsilon}_y}{\hat{\varepsilon}_x} \cos \delta_\nu - j \frac{\hat{\varepsilon}_y}{\hat{\varepsilon}_x} \sin \delta_\nu. \quad (3.50)$$

Látható tehát, hogy ez esetben is az időtől független komplex mennyiséget kaptunk, amelyet ezért *komplex Poisson-számnak* nevezünk. Látható

továbbá, hogy a komplex Poisson-szám képzetes része – a komplex modulusétól eltérően – negatív előjelű. Ez abból ered, hogy most a számlálóban lévő függvény késik a nevezőben lévőhöz képest, míg a feszültség és a deformáció hányadosánál ez fordítva van. Írható tehát, hogy

$$\bar{\nu} = \nu_d - j\nu_v = \nu_d(1 - j\eta_\nu), \quad (3.51)$$

ahol ν_d a *dinamikai Poisson-szám*:

$$\nu_d = \frac{\hat{\varepsilon}_y}{\hat{\varepsilon}_x} \cos \delta_\nu, \quad (3.52)$$

ν_v a *veszteségi Poisson-szám*:

$$\nu_v = \frac{\hat{\varepsilon}_y}{\hat{\varepsilon}_x} \sin \delta_\nu, \quad (3.53)$$

az η_ν pedig a veszteségi tényező:

$$\eta_\nu = \frac{\nu_v}{\nu_d} = \operatorname{tg} \delta_\nu. \quad (3.54)$$

A komplex Poisson-szám ugyancsak egy komplex frekvenciafüggvény, vagyis az is a frekvenciatartományban írja le az oldal- és a hosszirányú deformációk közötti összefüggést, tehát

$$\bar{\nu}(j\omega) = \nu_d(\omega) - j\nu_v(\omega) = \nu_d(\omega)[1 - j\eta_\nu(\omega)]. \quad (3.55)$$

Ezt figyelembe véve a komplex Poisson-számnak is a (3.50)-nél általánosabb definíciója adható a Fourier-transzformáció segítségével, nevezetesen

$$\bar{\nu}(j\omega) = \frac{\bar{\varepsilon}_y(j\omega)}{\bar{\varepsilon}_x(j\omega)}, \quad (3.56)$$

ahol a $\bar{\varepsilon}_y(j\omega)$ és $\bar{\varepsilon}_x(j\omega)$ a deformáció-időfüggvények Fourier-transzformáltjai, amelyek a harmonikustól eltérők is lehetnek.

A komplex Poisson-szám matematikai értelmezése megfelel a komplex modulusénak. Formálisan tehát a $\bar{\nu}(j\omega)$ is úgy tekinthető, mint egy lineáris rendszer átviteli függvénye. A komplex modulus fizikai jelentésére vonatkozó megállapítások azonban csak értelemszerűen érvényesek a komplex Poisson-száma, illetve annak összetevőire. Az például ebben az esetben is fennáll, hogy a deformációk pillanatértékeinek összefüggésére ellipszist kapunk a derékszögű koordinátarendszerben. Ezzel szemben a komplex Poisson-szám összetevőivel nem lehet definiálni az anyagban tárolt és disszipálódott rezgési energiát.

3.3. A komplex modulus és a komplex Poisson-szám összefüggése az anyagjellemző időfüggvényekkel

A komplex modulus és a komplex Poisson-szám a frekvenciatartományban írja le az anyag dinamikai tulajdonságait. A 2.1. pontban láttuk, hogy ezeket a tulajdonságokat megadhatjuk az anyagjellemző időfüggvények valamelyikével is, amilyen például a relaxációs modulus vagy a memóriafüggvény. A frekvencia- és időfüggvények egymástól nem függetlenek, egymásba átszámíthatók. Az átszámítást elvégezhetjük például a 2.2.1. pontbeli integrálegenletből kiindulva oly módon, hogy a feszültség, illetve a deformáció helyére harmonikus függvényeket írunk. Ennél egyszerűbben és elegánsabban is célhoz juthatunk azonban a Fourier-transzformáció alkalmazásával; a komplex modulus és a komplex Poisson-szám (3.20), illetve (3.56) általános definíciójának figyelembevételével.

Tekintsük elsőként a komplex modulus összefüggését az időfüggvényekkel, éspedig a memóriafüggvénnyel. Az előzőekben láttuk, hogy a memóriafüggvényt akkor kapjuk, ha a deformáció terhelés a (2.9) szerinti Dirac-impulzus, vagyis $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \delta(t)$, amelynek Fourier-transzformáltja [15]:

$$\bar{\varepsilon}(j\omega) = \mathcal{F}\varepsilon_0 \delta(t) = \varepsilon_0. \quad (3.57)$$

Ekkor a feszültségválasz a $\sigma_m(t)$ súlyfüggvény, amelynek a (3.21) szerinti Fourier-transzformáltja:

$$\bar{\sigma}_m(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_m(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.58)$$

Helyettesítsük (3.57)-et és (3.58)-at a komplex modulus (3.20) szerinti egyenletébe és vegyük figyelembe, hogy a memóriafüggvény $m(t) = \sigma_m(t)/\varepsilon_0$, ekkor

$$\bar{M}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} m(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (3.59)$$

amelyet valós és képzetes részre választva kapjuk a dinamikai és veszteségi moduluszt:

$$M_d(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} m(t) \cos \omega t dt, \quad (3.60)$$

$$M_v(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} m(t) \sin \omega t dt. \quad (3.61)$$

A (3.59)-ből kiolvasható, hogy a komplex modulus nem más, mint a frekvenciatartományba transzformált memóriafüggvény. Az is kiolvasható belőle, hogy $\overline{M}(j\omega)$ és $m(t)$ Fourier-transzformált párt alkotnak, következésképpen a memóriafüggvény a komplex modulus inverz Fourier-transzformáltja:

$$m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{M}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.62)$$

A fentiekhez hasonlóan határozhatjuk meg a komplex modulus összefüggését a relaxációs modulussal. Ehhez azt kell feltételezni, hogy a terhelés a (2.3) szerinti deformációugrás, vagyis $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 I(t)$, amelynek Fourier-transzformáltja [15]:

$$\overline{\varepsilon}(j\omega) = \mathcal{F}\varepsilon_0 I(t) = \varepsilon_0 \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right]. \quad (3.63)$$

A feszültségválasz ekkor a $\sigma_r(t)$ relaxációs függvény, amelynek a (3.21) szerinti Fourier-transzformáltját, valamint a (3.63)-at a (3.20)-ba helyettesítve célszerű átalakítások után kapjuk:

$$\overline{M}(j\omega) = j\omega \int_{-\infty}^{\infty} m_r(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (3.64)$$

amelyből:

$$M_d(\omega) = \omega \int_{-\infty}^{\infty} m_r(t) \sin \omega t dt + M_0, \quad (3.65)$$

$$M_v(\omega) = \omega \int_{-\infty}^{\infty} m_r(t) \cos \omega t dt, \quad (3.66)$$

ahol

$$M_0 = \overline{M}(0) = M_d(0). \quad (3.67)$$

Végül írjuk fel a relaxációs függvényt, illetve modulust a komplex modulussal kifejezve, melyet a fentiekhez hasonlóan kapunk:

$$m_r(t) = \frac{\sigma_r(t)}{\varepsilon_0} = \frac{M_0}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{M}(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.68)$$

A komplex Poisson-szám és az anyagjellemző időfüggvények összefüggését ahhoz hasonlóan határozhatjuk meg, ahogy a komplex modulus esetében

tettük. Ezeket az összefüggéseket azonban levezetés nélkül is felírhatjuk a komplex Poisson-szám és a komplex modulus definíciójának formai azonosságai alapján. A komplex Poisson-szám (3.56) definíciója ugyanis formálisan megegyezik a komplex modulus (3.20) definíciójával, ha az utóbbiban szereplő $\bar{\sigma}(j\omega)$ helyére $\bar{\varepsilon}_y(j\omega)$ -t, az $\bar{\varepsilon}(j\omega)$ helyére pedig $\bar{\varepsilon}_x(j\omega)$ -t helyettesítjük. Következésképpen a komplex Poisson-szám és a megfelelő időfüggvények – nevezetesen a $\nu_m(t)$ memóriafüggvény és a $\nu_k(t)$ kúszási függvény összefüggését leírhatjuk a fenti összefüggésekkel az értelemszerű helyettesítések elvégzése után. Ily módon tehát belátható, hogy a komplex Poisson-szám nem más, mint a $\nu_m(t)$ memóriafüggvény frekvenciatartománybeli megfelelője, vagyis

$$\bar{\nu}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \nu_m(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (3.69)$$

és így

$$\nu_d(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \nu_m(t) \cos \omega t dt, \quad (3.70)$$

$$\nu_v(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \nu_m(t) \sin \omega t dt. \quad (3.71)$$

A (3.69)-ből pedig következik, hogy

$$\nu_m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\nu}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.72)$$

A komplex Poisson-szám összefüggése a $\nu_k(t)$ kúszási függvénnyel pedig formailag a komplex modulus és a relaxációs modulus összefüggésével egyezik meg. Ennek alapján írható, hogy

$$\bar{\nu}(j\omega) = j\omega \int_{-\infty}^{\infty} \nu_k(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (3.73)$$

amelyből

$$\nu_d(\omega) = \omega \int_{-\infty}^{\infty} \nu_k(t) \sin \omega t dt + \nu_0, \quad (3.74)$$

$$\nu_v(\omega) = -\omega \int_{-\infty}^{\infty} \nu_k(t) \cos \omega t dt, \quad (3.75)$$

ahol

$$\nu_0 = \bar{\nu}(0) = \nu_d(0). \quad (3.76)$$

Továbbá

$$\nu_k(t) = \frac{\nu_0}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\nu}(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.77)$$

A fenti összefüggések segítségével meg lehet határozni a komplex modulus és a komplex Poisson-szám, illetve ezek összetevőinek frekvenciafüggését valamely anyagjellemző időfüggvény ismeretében. Ezen időfüggvények pedig kiszámíthatók az illető frekvenciafüggvények birtokában. Az átszámítás problémáját az okozza, hogy ahhoz az idő-, illetve a frekvenciafüggvényeket elvileg az illető változó valamennyi értékére – 0 és ∞ között – kellene ismerni. Közelítő módszerekkel azonban az átszámítás akkor is elvégezhető, ha a kérdéses függvény az illető változónak csak korlátozott tartományában ismeretes.

Irodalom

1. Alfrey, T. and Doty, P., The method of specifying the properties of viscoelastic materials. *Journal of Applied Physics* **16**, 700–713 (1945).
2. Nolle, A. W., Methods for measuring dynamic mechanical properties of rubber-like materials. *Journal of Applied Physics* **19**, 753–774 (1948).
3. Nolle, A. W., Dynamic mechanical properties of rubber-like materials. *Journal of Polymer Science* **V**, 1–54 (1949).
4. Kolsky, H., *Stress waves in solids*. Dover Publications, New York, 1963.
5. Mason, W. P. (editor), *Properties of polymers and nonlinear acoustics*. *Physical Acoustics*, Vol. II., Part B, Academic Press, New York, 1965. Chs. 7 to 9.
6. Judin, E. Ja., Oszipov, G. L., Fedoszeeva, E. N., Blohina, I. P. i Kiszénisszkaja, R. D., *Zvukopogloszajuscie i zvukoizoljacionnue materialü*. Sztrojizdat, Moszkva, 1966.
7. Cremer, L. und Heckl, M., *Körperschall*. Springer-Verlag, Berlin, 1967.
8. Snowdon, J. C., *Vibration and shock in damped mechanical systems*. Wiley, New York, 1968.
9. Skudrzyk, E., *Simple and complex vibratory systems*. The Pennsylvania State University Press, University Park and London, 1968.
10. Kovrigin, Sz. D., Zaharov, A. V. i Geraszimov, A. I., *Bor'ba sz sumami v grazhdanszkijh zdaniyah*. Sztrojizdat, Moszkva, 1969.
11. Beranek, L. L. (editor), *Noise and vibration control*. McGraw-Hill, New York, 1971.
12. Harris, C. M. and Crede, C. E. (editors), *Shock and vibration handbook*. McGraw-Hill, New York, 1976.
13. White, R. G. and Walker, J. G. (editors), *Noise and vibration*. Ellis Horwood, Chichester, 1982.
14. Nashif, A. D., Jones, D. I. G. and Henderson, J. P., *Vibration damping*. Wiley, New York, 1985.
15. Fodor Gy., *Lineáris rendszerek analízise*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1967.

4. A különféle komplex modulusok és összefüggéseik

A szilárd anyag dinamikai terhelésekor valamennyi rugalmas állandóját – a különféle rugalmassági modulusokat és a Poisson-számot is – komplex mennyiségnek lehet tekinteni. Ebben a fejezetben ezen komplex mennyiségek, illetve összetevőik – a dinamikai modulusok és a dinamikai Poisson-szám, valamint a veszteségi tényezők – közötti összefüggésekkel foglalkozunk, homogén, izotrop anyagok esetében. Megmutatjuk, hogy mind a dinamikai modulusok, mind a veszteségi tényezők közötti összefüggések jól vizsgálhatók a dinamikai Poisson-szám függvényében akkor, ha az anyag vesztesége viszonylag kicsi. Áttekintjük a dinamikai modulusok összefüggéseit, amelyek kis veszteség esetében ugyanazok, mint a rugalmas állandóké. Megmutatjuk, hogy a veszteségi tényezők összefüggése szigorúan kötött; a modulusokhoz tartozók közül a nyírási a legnagyobb, a térfogati pedig a legkisebb.

4.1. A különféle komplex modulusok

Az előzőkben a komplex modulus definiálásához nem kellett kikötni a deformáció típusát; az M tehát bármely rugalmassági modulus lehet. Következésképpen dinamikai terheléskor egy anyag mindegyik rugalmassági modulusa komplex mennyiségnek, és pedig komplex frekvenciafüggvénynek tekinthető, tehát

$$\overline{B}(j\omega) = B_d(\omega) + jB_v(\omega) = B_d(\omega)[1 + j\eta_B(\omega)], \quad (4.1)$$

$$\overline{G}(j\omega) = G_d(\omega) + jG_v(\omega) = G_d(\omega)[1 + j\eta_G(\omega)], \quad (4.2)$$

$$\overline{E}(j\omega) = E_d(\omega) + jE_v(\omega) = E_d(\omega)[1 + j\eta_E(\omega)], \quad (4.3)$$

$$\overline{L}(j\omega) = L_d(\omega) + jL_v(\omega) = L_d(\omega)[1 + j\eta_L(\omega)], \quad (4.4)$$

ahol a „d” index a dinamikai modulust, a „v” index a veszteségi modulust jelöli, a veszteségi tényezők indexe pedig az illető modulusra utal. Az előző

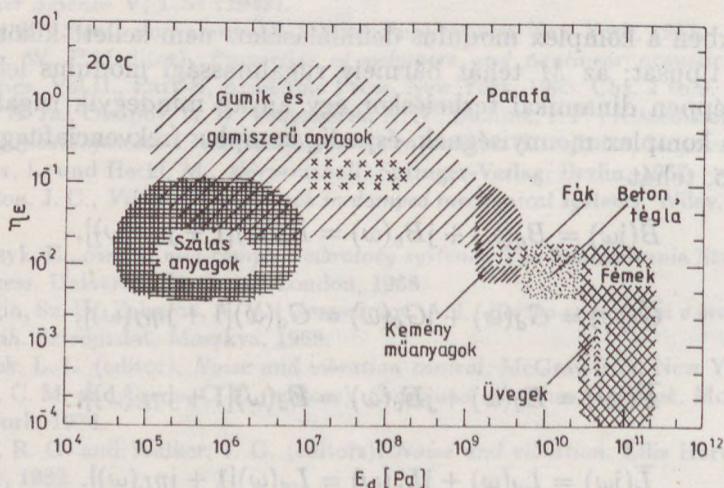
fejezetben láttuk továbbá, hogy dinamikai terheléskor a Poisson-szám is komplex frekvenciafüggvény, vagyis

$$\bar{\nu}(j\omega) = \nu_d(\omega) - j\nu_v(\omega) = \nu_d(\omega)[1 - j\eta_\nu(\omega)].$$

A deformáció két alaptípusának megfelelően két független rugalmassági modulus és ennek megfelelően két független komplex modulus van; nevezetesen a $\bar{B}$ térfogati és a $\bar{G}$ nyírási. Következésképpen két független dinamikai modulus (B_d, G_d) és két független veszteségi modulus (B_v, G_v), illetve veszteségi tényező (η_B, η_G) létezik. Ez utóbbi nyilván abból ered, hogy a belső súrlódásnak is két alapvető típusa van; az egyik a térfogati, a másik a nyírási deformációval kapcsolatos [1, 2].

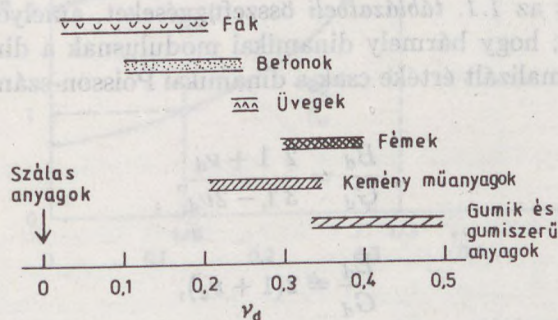
Az 1. fejezetben láttuk, hogy egy homogén, izotrop anyag lineáris rugalmas viselkedésének egyértelmű jellemzéséhez legalább két rugalmas állandóra van szükség. Ezek ismeretében bármely harmadikat számítani lehet az 1.1. táblázatban összefoglalt összefüggésekkel. Ennek megfelelően a komplex modulusok és a komplex Poisson-szám közül is legalább kettő – tehát összesen négy – mennyiség ismerete szükséges egy homogén, izotrop anyag dinamikai viselkedésének egyértelmű jellemzéséhez. A két komplex mennyiség ismeretében bármely harmadikat ugyancsak számítani lehet. Erre gyakran van szükség például akkor, ha egy komplex modulusot közvetve, számítással határozzunk meg másik kettő mért értékének ismeretében.

A rugalmassági modulusok közül a 4.1. ábrán adjuk meg a műszaki gyakorlatban fontos szerepet játszó dinamikai Young-modulus és az illető



4.1. ábra. A dinamikai Young-modulus és az illető veszteségi tényező jellemző értékei tipikus rezgéscsökkentő és szerkezeti anyagoknál.

veszteségi tényező jellemző értékeit és nemcsak a tipikus rezgéscsökkentő, hanem több szerkezeti anyagra vonatkozólag is. Az ábra egyben azt is szemlélteti, hogy a rezgéscsökkentő anyagok a viszonylag kis rugalmassági modulusokkal és a nagy veszteségi tényezőjükkel különböznek a szerkezeti anyagoktól. (Az itteni anyagok között olyanok is szerepelnek, amelyek inhomogének és anizotropok – pl. a szálal anyagok, a fák stb. –, bár ebben a munkában és különösképpen ebben a fejezetben ennek az ellenkezőjét tételezzük fel. Az összehasonlíthatóság kedvéért azonban szükségesnek tartottuk az ilyen anyagok adatait is közölni; ezek esetében a gyakorlatban szokásos terhelési irányhoz tartozó értékeket vettük figyelembe.) A 4.2. ábrán a dinamikai Poisson-szám tájékoztató értékeit közöljük, de az η_ν veszteségi tényező nélkül, mivel arról sajnos a legtöbb anyag esetében nincs adat.



4.2. ábra. A dinamikai Poisson-szám jellemző értékei.

4.2. A dinamikai modulusok összefüggése

A különféle komplex modulusok közötti összefüggéseket úgy lehet meghatározni, hogy az 1.1. táblázatban szereplő rugalmas állandókat a megfelelő komplex mennyiségekkel helyettesítjük [2,3]. Ily módon – a komplex algebra segítségével – igazolható, hogy a dinamikai modulusok összefüggései ugyanazok, mint a rugalmas állandóké, de csak akkor, ha a szóban forgó két veszteségi tényező négyzete, illetve kettőjük szorzata 1-nél jóval kisebb. Ez a feltétel a veszteségi tényezőknek még viszonylag nagyobb értékeinél is teljesül, nevezetesen akkor, ha $\eta < 0.3$. A 4.1. táblázatban példaként megadtuk a dinamikai nyírási modulus, dinamikai Young-modulus és dinamikai Poisson-szám közötti pontos összefüggéseket is, a veszteségi tényezők szerepének szemléltetése céljából.

Az áttekinthetőség kedvéért az alábbiakban a viszonylag kis veszteség feltételezésével vizsgáljuk meg a dinamikai modulusok összefüggéseit. Ehhez

4.1. táblázat. A dinamikai nyírási és Young-modulus, valamint a dinamikai Poisson-szám összefüggése általános esetben.

	(G_d, E_d)	(G_d, ν_d)	(E_d, ν_d)
G_d	---	---	$\frac{E_d}{2} \frac{1+\nu_d(1-\eta_E\eta_\nu)}{(1+\nu_d)^2+(\nu_d\eta_\nu)^2}$
E_d	---	$2G_d[1+\nu_d(1+\eta_G\eta_\nu)]$	---
ν_d	$\frac{E_d}{2G_d} \frac{1+\eta_E\eta_G}{1+\eta_G^2} - 1$	---	---

tekintsük tehát az 1.1. táblázatbeli összefüggéseket, amelyek vizsgálatával megállapítható, hogy bármely dinamikai modulusnak a dinamikai nyírási modulusra normalizált értéke csak a dinamikai Poisson-számtól függ, nevezetesen

$$\frac{B_d}{G_d} = \frac{2}{3} \frac{1+\nu_d}{1-2\nu_d}, \quad (4.5)$$

$$\frac{E_d}{G_d} = 2(1+\nu_d), \quad (4.6)$$

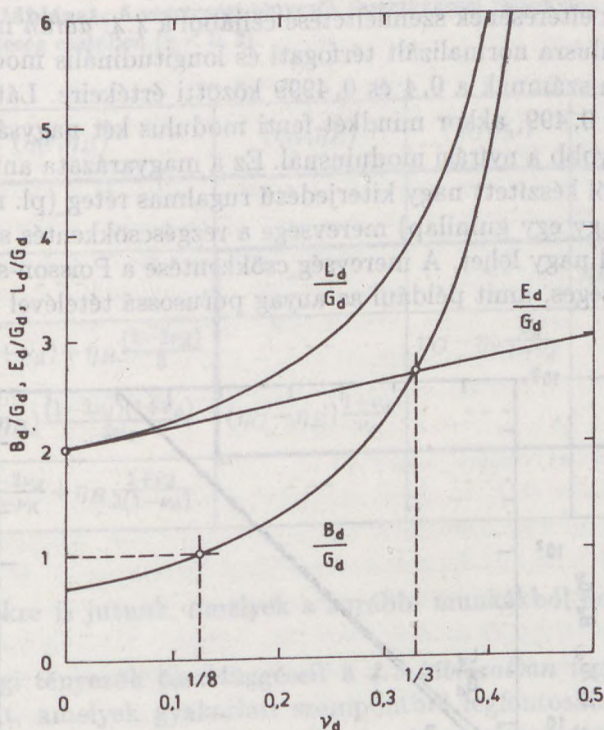
$$\frac{L_d}{G_d} = 2 \frac{1-\nu_d}{1-2\nu_d}. \quad (4.7)$$

Következésképpen célszerűnek látszik a dinamikai modulusok összefüggését a dinamikai Poisson-szám függvényében vizsgálni. Ez annál is inkább indokolt, mert a dinamikai Poisson-szám értéktartománya jól ismert; 0 és 0,5 között van (4.2. ábra).

A dinamikai térfogati, Young- és longitudinális modulusnak a dinamikai nyírási modulusra normalizált értékeinek változását a 4.3. ábrán rajzoltuk meg a dinamikai Poisson-szám függvényében, a (4.5)-(4.7) összefüggések alapján. Látható, hogy valamennyi dinamikai modulus normalizált értéke nő a dinamikai Poisson-szám növelésével. Látható továbbá, hogy a ν_d bármely értékénél a dinamikai nyírási modulus mindig kisebb, mint a dinamikai Young-modulus, amelynél viszont a $\nu_d = 0$ eset kivételével nagyobb a dinamikai longitudinális modulus; vagyis ha $\nu_d \geq 0$, akkor

$$G_d < E_d \leq L_d. \quad (4.8)$$

A dinamikai térfogati modulus helye ebben a sorban a ν_d értékétől függően változik. Nevezetesen,



4.3. ábra. A dinamikai modulusok normalizált értékei a dinamikai Poisson-szám függvényében.

– ha $0 < \nu_d \leq 1/8$, akkor

$$B_d \leq G_d < E_d < L_d, \quad (4.9a)$$

– ha $1/8 < \nu_d \leq 1/3$, akkor

$$G_d < B_d \leq E_d < L_d, \quad (4.9b)$$

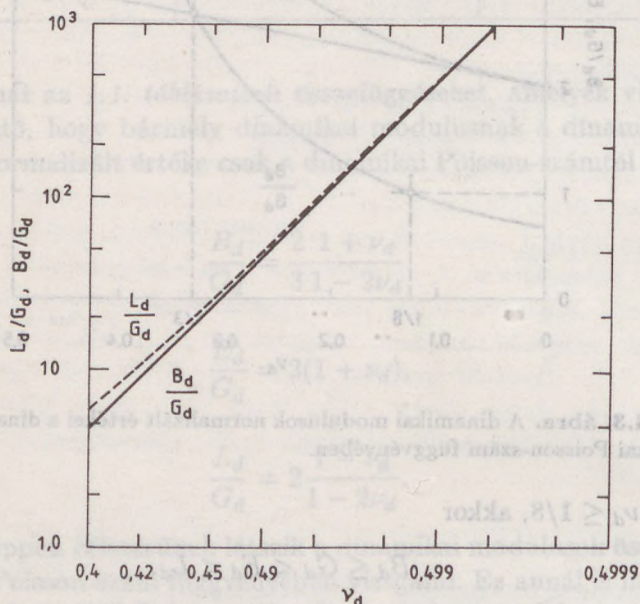
– ha $1/3 < \nu_d < 1/2$, akkor

$$G_d < E_d < B_d < L_d. \quad (4.9c)$$

A dinamikai térfogati modulus határértéke ($\nu_d \rightarrow 0,5$) azonos a dinamikai longitudinális modulusával.

A 4.3. ábrán az is látható, hogy a 0,4-nél kisebb Poisson-számú anyagoknál a különféle modulusok között nincs nagyságrendi eltérés. Ennél nagyobb Poisson-szám esetében viszont a térfogati és a longitudinális modulus több nagyságrenddel is meghaladhatja a Young-modulus és a nyírási modulus értékeit, míg ez utóbbiak hányadosa max. 3 lehet. Ennek igen nagy jelentősége van a gumiknál, mivel ezek Poisson-száma rendszerint 0,5-höz közeli.

A modulusok eltéréseinek szemléltetése céljából a 4.4. ábrán megrajzoltuk a nyírási modulusra normalizált térfogati és longitudinális modulus változását a Poisson-számnak a 0,4 és 0,4999 közötti értékeire. Látható, hogyha például $\nu_d = 0,499$, akkor mindkét fenti modulus két nagyságrenddel, kb. 500-szor nagyobb a nyírási modulusnál. Ez a magyarázata annak, hogy egy ilyen anyagból készített nagy kiterjedésű rugalmas réteg (pl. műanyag padlóburkolat vagy egy gumilap) merevsége a rezgéscsökkentés szempontjából kedvezőtlenül nagy lehet. A merevség csökkentése a Poisson-szám csökkentésével lehetséges, amit például az anyag pórusossá tételével lehet elérni.



4.4. ábra. A térfogati és a longitudinális modulus jóval nagyobb a nyírási modulusnál akkor, ha a Poisson-szám 0,5-höz közeli.

4.3. A veszteségi tényezők összefüggése

Homogén, izotrop anyagok veszteségi tényezői közötti összefüggések vizsgálatával korábban Theocaris [4], majd Waterman [5] foglalkozott. Tárgyalásmódjuk azonban nem teszi lehetővé az összefüggések egyszerű áttekintését. Az itteni módszer a fenti szerzőkétől eltérő, mivel a veszteségi tényezők összefüggését – a dinamikai modulusokhoz hasonlóan – a dinamikai Poisson-szám függvényében vizsgáljuk [6]. Ennek eredményeként olyan

4.2. táblázat. A veszteségi tényezők összefüggései viszonylag kis veszteség esetében ($\eta < 0,3$).

	(η_G, η_B)	(η_G, η_E)	(η_G, η_ν)	(η_E, η_ν)
η_B	---			
η_G	---	---	---	$\eta_E + \eta_\nu \frac{\nu_d}{1+\nu_d}$
η_E	$\eta_G \frac{2}{3}(1+\nu_d) + \eta_B \frac{(1-2\nu_d)}{3}$	---	$\eta_G - \eta_\nu \frac{\nu_d}{1+\nu_d}$	---
η_ν	$(\eta_G - \eta_B) \frac{(1-2\nu_d)(1+\nu_d)}{3\nu_d}$	$(\eta_G - \eta_E) \frac{1+\nu_d}{\nu_d}$	---	---
η_L	$\eta_G \frac{2}{3} \frac{1-2\nu_d}{1-\nu_d} + \eta_B \frac{1+\nu_d}{3(1-\nu_d)}$	---	---	---

következtetésekre is jutunk, amelyek a korábbi munkákból nem voltak ismertek.

A veszteségi tényezők összefüggéseit a 4.2 táblázatban foglaltuk össze, de csak azokat, amelyek gyakorlati szempontból legfontosabbak és amelyek lehetővé teszik a veszteségi tényezők egymáshoz viszonyított értékeinek meghatározását. Az összefüggések levezetésénél ugyancsak felhasználtuk a viszonylag kis veszteség feltételét. A táblázat vastagon bekeretezett része a gyakorlati szempontból fontos nyírási és Young-modulushoz, valamint a Poisson-számhoz tartozó veszteségi tényezők közötti összefüggéseket tartalmazza. Az első oszlopban pedig a két alapvető veszteséggel: a nyírással és a húzóval kifejezve adtuk meg a többi veszteségi tényezőt, nevezetesen a Young-modulushoz és a longitudinális modulushoz, valamint a Poisson-számhoz tartozót. Ez utóbbiak vizsgálatával állapíthatjuk meg a veszteségi tényezők egymáshoz viszonyított értékeit. Tekintsük ehhez a veszteségi tényezőknek a nyírási veszteségre normalizált értékeit:

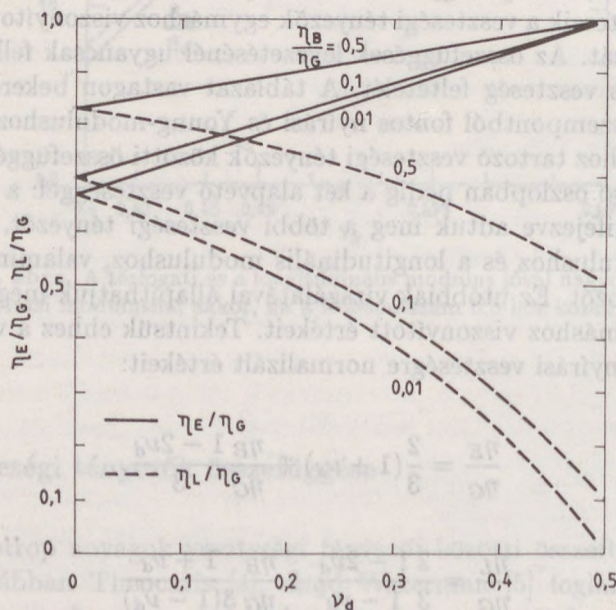
$$\frac{\eta_E}{\eta_G} = \frac{2}{3}(1+\nu_d) + \frac{\eta_B}{\eta_G} \frac{1-2\nu_d}{3}, \quad (4.10)$$

$$\frac{\eta_L}{\eta_G} = \frac{2}{3} \frac{1-2\nu_d}{1-\nu_d} + \frac{\eta_B}{\eta_G} \frac{1+\nu_d}{3(1-\nu_d)}, \quad (4.11)$$

$$\frac{\eta_\nu}{\eta_G} = \left(1 - \frac{\eta_B}{\eta_G}\right) \frac{(1-2\nu_d)(1+\nu_d)}{3\nu_d}. \quad (4.12)$$

Látható, hogy a normalizált veszteségek értéke ugyancsak vizsgálható a dinamikai Poisson-szám függvényében. Ezek változását a ν_d függvényében a 4.5.-4.7. ábrák mutatják. A görbék paramétere a két alapvető veszteség hányadosa, amelynek 1-nél kisebb értékeket adtunk, mivel a kísérleti tapasztalatok szerint a térfogati veszteség kisebb a nyírásinál [2, 3, 7-10]. Ezzel kapcsolatban fontos megjegyezni azt, hogy az η_B/η_G -t a vizsgálat egyszerűsége és az eredmények áttekinthetősége kedvéért tekintjük paraméternek, és korántsem állítjuk, hogy ennek értéke független lenne a dinamikai Poisson-szám értékétől [10]. Nyilvánvaló ugyanis, hogy például $\nu_d = 0,5$ esetében az η_B szükségszerűen nulla, hiszen ekkor az anyag összenyomhatatlan (B_d végtelen nagy). Következésképpen a $\nu_d = 0,5$ esetében az η_B/η_G paraméter sem lehet nullától különböző, ezért az ezzel paraméterezett függvénygörbék nem húzhatók be a $\nu_d = 0,5$ pontba. A 4.5. - 4.7. ábrákat tekintve az alábbi következtetéseket vonhatjuk le.

A 4.5. ábrán látható, hogy a Young-modulus veszteségi tényezője kisebb, mint a nyírási modulusé akkor, ha $\nu_d < 0,5$. Az η_E és η_G eltérése annál nagyobb, minél kisebb a dinamikai Poisson-szám és az η_B/η_G értéke. A $\nu_d = 0,5$ esetében azonos a két veszteségi tényező és gyakorlatilag azonos akkor is, ha ν_d értéke közel van 0,5-höz. Ha például $\nu_d = 0,49$ és $\eta_B/\eta_G = 0,1$, akkor $\eta_E/\eta_G = 0,9933$. Ez jellemző lehet egyes gumikra szor-



4.5. ábra. A Young- és a longitudinális modulus normalizált veszteségi tényezője a dinamikai Poisson-szám függvényében.

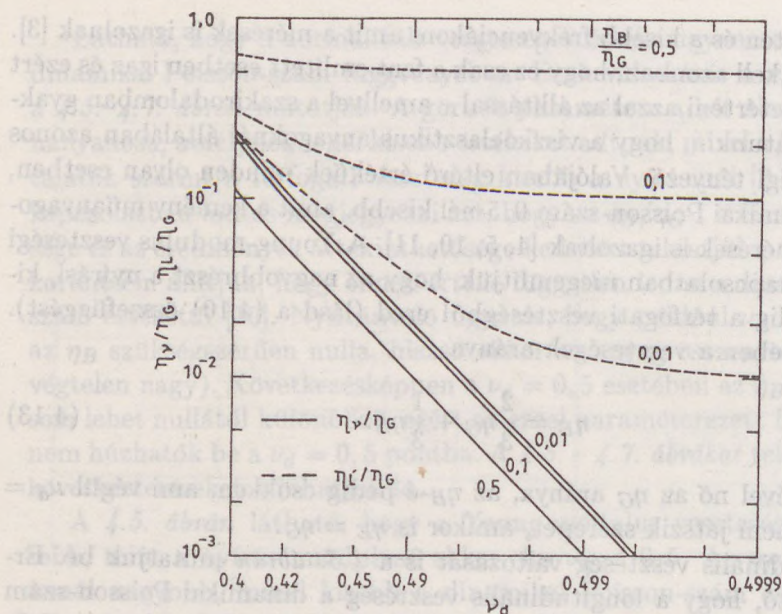
bahőmérsékleten és a kisebb frekvenciákon, amit a mérések is igazolnak [3]. Hangsúlyozni kell azonban, hogy ez csak a fent említett esetben igaz és ezért nem lehet egyetérteni azzal az állítással – amellyel a szakirodalomban gyakran találkozhatunk –, hogy a viszkoelasztikus anyagoknál általában azonos a két veszteségi tényező. Valójában eltérő értékűek minden olyan esetben, amikor a dinamikai Poisson-szám 0,5-nél kisebb, amit a kemény műanyagokon végzett mérések is igazoltak [4, 5, 10, 11]. A Young-modulus veszteségi tényezőjével kapcsolatban megemlítjük, hogy az nagyobb rész a nyírási, kisebb rész pedig a térfogati veszteségből ered (lásd a (4.10) összefüggést). A $\nu_d = 0$ esetében a veszteségek aránya:

$$\eta_E = \frac{2}{3}\eta_G + \frac{1}{3}\eta_B. \quad (4.13)$$

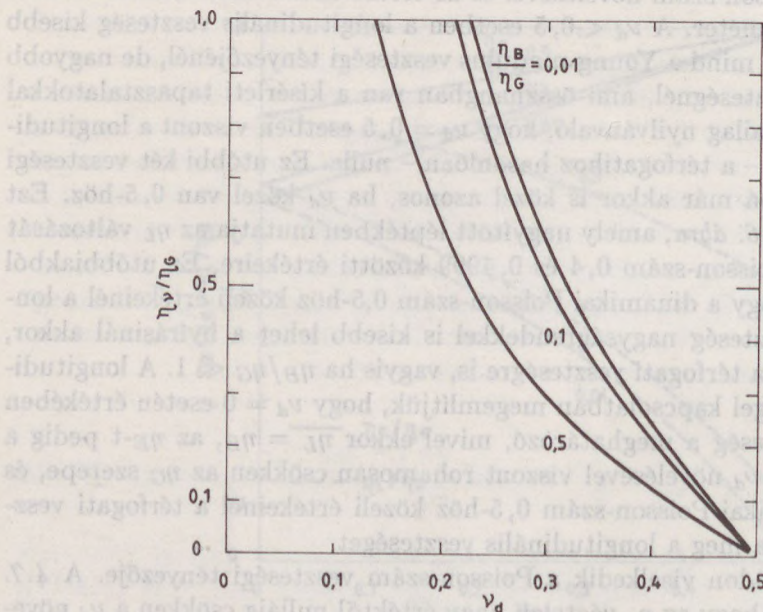
A ν_d növelésével nő az η_G aránya, az η_B -é pedig csökken, ami végül $\nu_d = 0,5$ -nél már nem játszik szerepet, amikor is $\eta_E = \eta_G$.

A longitudinális veszteség változását is a 4.5. ábrán mutatjuk be. Erről leolvasható, hogy a longitudinális veszteség a dinamikai Poisson-szám bármely értékénél kisebb a nyírási veszteségnél. Látható továbbá – ami fizikailag is nyilvánvaló –, hogy $\nu_d = 0$ esetében a longitudinális veszteségi tényező azonos a Young-modulusával. A longitudinális veszteség csökken a dinamikai Poisson-szám növelésével és az értéke annál kisebb, minél kisebb az η_B/η_G paraméter. A $\nu_d < 0,5$ esetben a longitudinális veszteség kisebb mind a nyírási, mind a Young-modulus veszteségi tényezőjénél, de nagyobb a térfogati veszteségnél, ami összhangban van a kísérleti tapasztalatokkal [5, 9, 12]. Fizikailag nyilvánvaló, hogy $\nu_d = 0,5$ esetben viszont a longitudinális veszteség – a térfogatihoz hasonlóan – nulla. Ez utóbbi két veszteségi tényező továbbá már akkor is közel azonos, ha ν_d közel van 0,5-höz. Ezt szemlélteti a 4.6. ábra, amely nagyított léptékben mutatja az η_L változását a dinamikai Poisson-szám 0,4 és 0,4999 közötti értékeire. Ez utóbbiakból a dinamikai Poisson-szám 0,5-höz közeli értékeinél a longitudinális veszteség nagyságrendekkel is kisebb lehet a nyírásnál akkor, ha ez jellemző a térfogati veszteségre is, vagyis ha $\eta_B/\eta_G \ll 1$. A longitudinális veszteséggel kapcsolatban megemlítjük, hogy $\nu_d = 0$ esetén értékében a nyírási veszteség a meghatározó, mivel ekkor $\eta_L = \eta_E$, az η_E -t pedig a (4.13) adja. A ν_d növelésével viszont rohamosan csökken az η_G szerepe, és végül a dinamikai Poisson-szám 0,5-höz közeli értékeinél a térfogati veszteség határozza meg a longitudinális veszteséget.

Érdekes módon viselkedik a Poisson-szám veszteségi tényezője. A 4.7. ábrán látható, hogy az η_ν végtelen nagy értéktől nulláig csökken a ν_d növelésével, és hogy annál nagyobb, minél kisebb az η_B/η_G paraméter. (Az, hogy az η_ν végtelen nagygyá válik, ha a ν_d nullához tart, nyilvánvaló az $\eta_\nu = \nu_\nu/\nu_d$ definícióból, feltéve, hogy $\nu_\nu \neq 0$, illetve, hogy a ν_ν „lassabban” tart nul-



4.6. ábra. A longitudinális modulus és a Poisson-szám normalizált veszteségi tényezőjének változása a dinamikai Poisson-szám 0,5-höz közeli értékeinél.



4.7. ábra. A dinamikai Poisson-szám és normalizált veszteségi tényezőjének összefüggése.

lához, mint a ν_d . A veszteségi tényezők összehasonlíthatósága céljából a 4.6. ábrán ugyancsak nagyított léptékben ábrázoltuk az η_ν/η_G változását a $\nu_d \geq 0,4$ értékekre. Erről leolvasható, hogy a dinamikai Poisson-szám 0,4 feletti értékeinél az η_ν a legkisebb valamennyi veszteségi tényező közül. Az η_ν értéke igen kicsi lehet a 0,5-höz közeli Poisson-szám esetében; pl. ha $\nu_d > 0,492$, akkor: $\eta_\nu < 0,01\eta_G$. Végül $\nu_d = 0,5$ -nél $\eta_\nu = 0$, vagyis a Poisson-szám valóssá válik. (Ez egyébként látható a 4.2. táblázat második oszlopában lévő összefüggésből is, amely szerint az η_ν az η_G és η_E különbségével arányos, az pedig $\nu_d = 0,5$ -nél nulla, ahogy azt korábban megállapítottuk.) Az előbbi állítással ugyancsak gyakran lehet találkozni a szakirodalomban olyan megfogalmazásban, hogy a viszkoelasztikus anyagok Poisson-száma valós. Az előbbiekből azonban nyilvánvaló, hogy ez csak akkor áll fenn, ha a dinamikai Poisson-szám 0,5 vagy ahhoz nagyon közeli. Mindamellett a (4.12)-ből leolvasható, hogy a Poisson-szám valós, vagyis az η_ν veszteségi tényező nulla lehet $\nu_d < 0,5$ esetén is akkor, ha $\eta_G = \eta_B$.

Az elmondottakat összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a veszteségi tényezők közötti összefüggés szigorúan kötött és jól vizsgálható a dinamikai Poisson-szám függvényében. A modulusokhoz tartozó veszteségi tényezők közül az η_G a legnagyobb, amelynél kisebb sorrendben az η_E , az η_L , és a legkisebb az η_B . A veszteségi tényezők tehát úgy csökkennek, ahogy a deformáció nyírásból térfogatiba megy át. A Poisson-szám veszteségi tényezőjének helye a fenti sorban a ν_d és az η_B/η_G értékétől függ. Az η_ν értéke nagyobb lehet a nyírási veszteségnél is, ha ν_d nullához közeli de kisebb is lehet, mint a térfogati veszteség, ha ν_d értéke 0,5-höz közeli.

Irodalom

1. Mason, W. P. (editor), *Properties of polymers and nonlinear acoustics. Physical Acoustics*, Vol.II., Part B, Academic Press, New York, 1965. Chs. 7 and 9.
2. Ferry, J. D., *Viscoelastic properties of polymers*. Wiley, New York, 1970.
3. Read, B. E. and Dean, G. E., *The determination of dynamic properties of polymers and composites*. Adam Hilger, Bristol, 1978.
4. Theocaris, P. S., Interrelation between dynamic moduli and compliances in polymers. *Kolloid-Zeitschrift und Zeitschrift für Polymere* **235**, 1182–1188 (1969).
5. Waterman, H. A., Relations between loss angles in isotropic linear viscoelastic materials. *Rheologica Acta* **16**, 13–42 (1977).
6. Pritz, T., Relations among complex moduli for linear viscoelastic materials. *Proceedings of Noise Control Conference, Cracow*, 1985. Vol.II. pp.693–698.
7. Heydeman, P., The dynamic compressibility of highpolymers in the frequency range from 0,1 c/s to 60 c/s. *Acustica* **9**, 446–452 (1959).
8. Lifshitz, J. M. and Kolsky, H., The propagation of spherically divergent stress pulses in linear viscoelastic solids. *Journal of Mechanics and Physics of Solids* **13**, 361–376 (1965).

9. Waterman, H. A., Determination of the complex moduli of viscoelastic materials with the ultrasonic pulse method (Part I). *Kolloid-Zeitschrift und Zeitschrift für Polymere* **192**, 1-8 (1963).
10. Yee, A. F. and Takemori, M. T., A new technique for measuring volume and shear relaxation in solid polymers: dynamic Poisson's ratio. *American Chemical Society Division of Polymer Chemistry, Preprints* 758-761 (1979).
11. Paipetis, S. A., Theocaris, P. S. and Stassinakis, C. A., Complex moduli derived from the vibrations of a Timoshenko beam. *Acustica* **44**, 27-34 (1980).
12. Naake, H. J. and Tamm, K., Sound propagation in plates and rods of rubber elastic materials. *Acustica* **8**, 65-76 (1958).

1. Mason, W. P. (ed.), *Properties of polymers and nonlinear acoustics*. Physical Acoustics, Vol. II, Part B. Academic Press, New York, 1963. Chs. 7 and 8.
2. Ferry, J. D., *Viscoelastic properties of polymers*. Wiley, New York, 1970.
3. Read, B. E. and Dean, G. J., *The determination of dynamic properties of polymers and composites*. Adam Hilger, Bristol, 1978.
4. Theocaris, P. S., *Interrelation between dynamic models and compliance in polymers*. *Kolloid-Zeitschrift und Zeitschrift für Polymere* **235**, 1182-1188 (1982).
5. Waterman, H. A., *Relations between loss angles in isotropic linear viscoelastic materials*. *Zeitschrift für Naturforschung* **16**, 13-15 (1971).
6. Fritz, T., *Relations among complex models for linear viscoelastic materials*. *Proceedings of Noise Control Conference, Prague, 1965*. Vol. II, pp. 693-698.
7. Buehler, R., *The dynamic compressibility of high polymers in the frequency range from 0.1 cps to 100 cps*. *Journal of Polymer Science A*, **7**, 1-10 (1969).
8. Labadie, J. M. and Kinsler, H., *The propagation of ultrasonic waves in polymers*. *Journal of Acoustical Society of America* **13**, 361-376 (1965).

5. A komplex modulus és a komplex Poisson-szám mint frekvenciafüggvény

A frekvencia az akusztikában a legfontosabb fizikai változó. Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy az okság elvéből kiindulva az anyagtól függetlenül meg lehet állapítani a dinamikai tulajdonságok frekvenciafüggésének alapvető jellegzetességeit. Igazoljuk, hogy bármely dinamikai modulus monoton nő, a dinamikai Poisson-szám pedig monoton csökken a frekvencia növelésével. Valamennyi veszteségi tényező frekvenciafüggésének jellege viszont hasonló, mindnek legalább egy maximuma van. Megmutatjuk, hogy a dinamikai modulusok frekvenciafüggésének mértéke annál nagyobb, minél nagyobb az anyag belső súrlódása. Bebizonyítjuk, hogy a dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők együttesen még egy szűkebb frekvenciasávban sem lehetnek állandók. Befejezésül felvázoljuk valamely homogén, izotrop anyag valamennyi dinamikai modulusának és veszteségi tényezőjének frekvenciafüggését, egy veszteségi maximum feltételezésével.

5.1. A komplex modulus–frekvencia függvény

5.1.1. A dinamikai és a veszteségi modulus összefüggése

Az előzőkben láttuk, hogy a komplex modulus a frekvenciatartományban írja le az anyag dinamikai viselkedését, illetve tulajdonságait. Egy valódi szilárd anyag dinamikai viselkedése *diszperzív*, vagyis mind a dinamikai, mind a veszteségi modulusa függ a frekvenciától. Ebben a fejezetben az alapvető célunk az, hogy ismereteket szerezzünk a komplex modulus–frekvencia függvény tulajdonságairól és a frekvenciafüggés jellegzetességeiről, de a lehető legegyszerűbben, az egyszerű fizikai szemléletből kiindulva. Ilyen módon azonban nem tudunk érdemi megállapításokat tenni a komplex modulus–frekvencia függvényre, vagyis az anyag frekvenciatartománybeli viselkedésére vonatkozóan. (Az egyetlen megállapítás az lehet, hogy a nulla frekvenciától indulva a veszteségi modulus nőni kezd, hiszen 0 Hz-en az értéke nyilvánvalóan nulla.) Ezzel szemben az időtartománybeli viselkedés egyik fontos jellemzőjét ismerjük, nevezetesen azt, hogy a valódi anyag viselkedése *kauzális*, vagyis eleget tesz az *okság elvének*. Eszerint a terhelés kezdete előtt nem keletkezhet válasz, ami fontos megszorítást jelent az anyagjellemző

időfüggvényekre vonatkozóan. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a kauzális viselkedés, illetve az anyagjellemző időfüggvények ezen tulajdonsága alapján lényegi információkat nyerhetünk a komplex modulus-frekvencia függvény tulajdonságairól, és olyan következtetéseket lehet levonni a frekvenciafüggés jellegére vonatkozóan, amelyek valamennyi valódi anyagra is érvényesek, szerkezetüktől függetlenül. Erre az anyagjellemző időfüggvények és a komplex modulus közötti összefüggések (3.3. pont) adnak lehetőséget. A vizsgálathoz elvileg bármelyik időfüggvényt választhatjuk, de a fizikai szemléletesség kedvéért a feszültségrelaxációs függvénnyel célszerű dolgozni.

Tekintsük tehát a relaxációs függvény és a komplex modulus kapcsolatát leíró (3.68) összefüggést, amelynek célszerű átalakításával a (3.19) helyettesítése után kapjuk:

$$\sigma_r(t) = \frac{\varepsilon_0}{2} M_0 + \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[M_d(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} + M_v(\omega) \frac{\cos \omega t}{\omega} \right] d\omega - j \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[M_d(\omega) \frac{\cos \omega t}{\omega} + M_v(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} \right] d\omega. \quad (5.1a)$$

A (3.65) illetve (3.66) összefüggésből kiolvasható, hogy $M_d(\omega) = M_d(-\omega)$ és $M_v(\omega) = -M_v(-\omega)$. Ezekből pedig következik, hogy az (5.1a) első integrandusza páros, a második pedig páratlan függvénye ω -nak. Ennek alapján az írható, hogy:

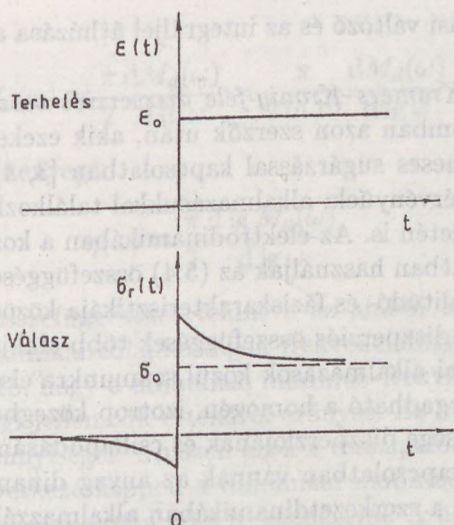
$$\sigma_r(t) = \frac{\varepsilon_0}{2} M_0 + \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_0^{\infty} M_d(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_0^{\infty} M_v(\omega) \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega. \quad (5.1b)$$

Az okság elvének értelmében a deformációterhelés előtt nem keletkezhet feszültségválasz, vagyis $\sigma_r(t) = 0$ ha $t < 0$. Ilyen a 2.6. ábrán vázolt relaxációs függvény, az 5.1. ábrán pedig egy nemkauzális feszültségválasz látható. Az okság feltételét az (5.1b)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$-\frac{M_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} M_d(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} M_v(\omega) \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega. \quad (5.2)$$

Ebből nyilvánvaló, hogy a dinamikai és a veszteségi modulus egymástól nem független, hanem kölcsönösen meghatározzák egymást. Következésképpen a relaxációs függvény számítható akár csak a dinamikai modulus vagy csak a veszteségi modulus ismeretében, nevezetesen

$$\sigma_r(t) = \varepsilon_0 \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} M_d(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega, \quad (5.3a)$$



5.1. ábra. A terhelés kezdete előtti válasz az okság elvének megsértését jelenti.

vagy

$$\sigma_r(t) = \varepsilon_0 \left[M_0 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty M_v(\omega) \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega \right]. \quad (5.3b)$$

A dinamikai és a veszteségi modulus összefüggései az (5.3a,b) alapján meghatározhatók, amelyeket itt azonban levezetés nélkül közlünk. Ezeket az összefüggéseket kölcsönözhetjük ugyanis a lineáris rendszerek elméletéből, mivelhogy a komplex modulus matematikailag úgy tekinthető, mint egy lineáris rendszer átviteli függvénye. A lineáris rendszerelméletből pedig jól ismert, hogy egy lineáris, kauzális rendszer átviteli függvényének valós és képzetes része között egy integráltranszformáció – a *Hilbert-transzformáció* – teremt kapcsolatot [1]. Ennek több alakja is ismert, amelyek közül itt példaként az alábbiakkal írjuk fel a dinamikai és a veszteségi modulus összefüggését:

$$M_d(\omega) = \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} M_v(\omega) \frac{1}{\omega - y} dy, \quad (5.4a)$$

$$M_v(\omega) = -\frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} M_d(\omega) \frac{1}{\omega - y} dy, \quad (5.4b)$$

ahol y egy integrálási változó és az integráljel áthúzása az integrál főértékét jelenti.

Az előbbieket *Kramers–Kronig-féle diszperziós összefüggéseknek* is nevezik a szakirodalomban azon szerzők után, akik ezeket elsőként használták az elektromágneses sugárzással kapcsolatban [3, 4]. Az összefüggések azonban általános érvényűek; alkalmazásukkal találkozhatunk a fizika és a technika több területén is. Az elektrodinamikában a komplex dielektromos állandóval kapcsolatban használják az (5.4) összefüggéseket [5]. Az elektromos hálózatok amplitúdó- és fázis karakterisztikája közötti kapcsolat leírása céljából Bode [6] a diszperziós összefüggések több alakját is kidolgozta. Az akusztikai célú korai alkalmazások közül számunkra elsősorban az érdekes, hogy így módon megadható a homogén, izotrop közegben terjedő hanghullám terjedési sebessége diszperziójának és csillapodásának összefüggése [7], melyek közvetlen kapcsolatban vannak az anyag dinamikai tulajdonságaival. Újabban pedig a szerkezetdinamikában alkalmazzák mind gyakrabban a Hilbert-transzformációt, bonyolult mechanikai szerkezetek átviteli függvényének vizsgálatában [8, 9].

A komplex modulus valós és képzetes része közötti kapcsolat leírására kezdetben Gross [10], majd több szerző is [11–13] használta a diszperziós összefüggéseket. Ezek különösen jól hasznosíthatók a komplex modulus kísérleti meghatározásában akkor, ha annak egyik összetevőjét – rendszerint a veszteségi modulus, illetve tényezőt – csak igen pontatlanul tudjuk mérni. Az összefüggések birtokában ugyanis elvileg elegendő csak az egyik összetevő frekvenciafüggését mérni, a másik abból már kiszámítható. Az átszámításnál az okozhat gondot, hogy a mért összetevő változását elvileg minden frekvencián (0 Hz-től ∞ Hz-ig) ismerni kellene, míg a mérések rendszerint csak egy viszonylag szűk frekvenciasávra korlátozódnak. Közelítő módszerekkel azonban az átszámítás ilyen adatok birtokában is elvégezhető [13].

Levezethetők továbbá olyan közelítő összefüggések, amelyekkel meghatározható a dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők közötti kapcsolat egy szűkebb frekvenciasávban, illetve annak közepén, a teljes frekvenciafüggés ismerete nélkül. Ezeket a diszperziós összefüggések általános alakjának vizsgálatával határozták meg a közelmúltban [14], de ugyanezre az eredményre jutottak mások az anyagjellemző időfüggvényekből kiindulva már jóval korábban [15]. Így módon igazolható, hogy egy adott frekvencián a dinamikai és a veszteségi modulus között az alábbi összefüggés van:

$$M_v(\omega) \approx \frac{\pi}{2} \omega \frac{dM_d(\omega)}{d\omega}, \quad (5.5a)$$

feltéve, hogy mindkét jellemző frekvenciafüggése kismértékű, vagyis nem mutatnak például rezonanciaszerű változásokat. Az (5.5a) az alábbi alakba

is írható:

$$M_v(\omega) \approx \frac{\pi}{2} \frac{dM_d(\omega)}{d \ln \omega} = \frac{\pi}{2 \ln 10} \frac{dM_d(\omega)}{d \lg \omega}, \quad (5.5b)$$

és ezzel a veszteségi tényező:

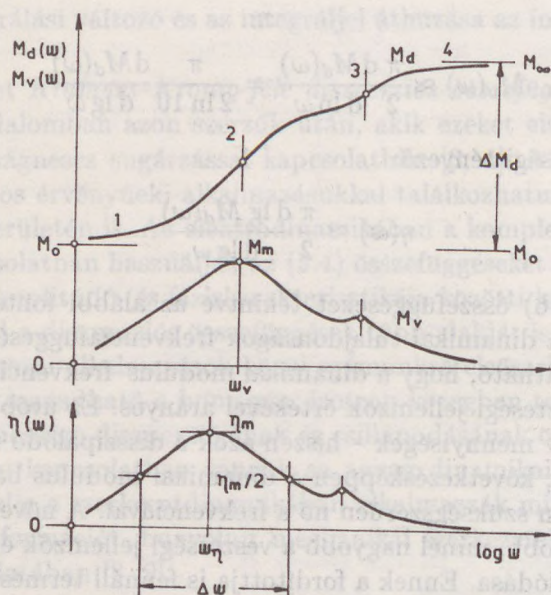
$$\eta(\omega) \approx \frac{\pi}{2} \frac{d \lg M_d(\omega)}{d \lg \omega}. \quad (5.6)$$

Az (5.5), (5.6) összefüggéseket tekintve az alábbi fontos megállapításokat tehetjük a dinamikai tulajdonságok frekvenciafüggésére, illetve azok kapcsolatára. Látható, hogy a dinamikai modulus-frekvencia függvény meredeksége a veszteségi jellemzők értékével arányos. Ez utóbbiak egy valódi anyagnál pozitív mennyiségek – hiszen azok a disszipálódó rezgési energiával arányosak –, következésképpen a dinamikai modulus bármely frekvenciatartományban szükségszerűen nő a frekvenciával. A növekedés meredeksége annál nagyobb, minél nagyobb a veszteségi jellemzők értéke, vagyis az anyag belső súrlódása. Ennek a fordítottja is fennáll természetesen, vagyis, ha egy anyag dinamikai modulusa nagymértékben változik a frekvenciával, akkor bizonyos, hogy annak nagy a belső súrlódása.

5.1.2. A dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők frekvenciafüggése

A dinamikai tulajdonságok frekvenciafüggésének jellegzetességeit a szakirodalomban rendszerint valamely anyagmodell vizsgálatával, vagyis a $\sigma - \varepsilon$ elméleti összefüggéséből kiindulva állapítják meg. Ehhez általában a (2.19) differenciálegyenlet egy speciális alakját választják, következésképpen az így meghatározott frekvenciafüggvények is speciálisak, még akkor is, ha jól tükrözik a dinamikai tulajdonságok változásának alapvető jellegzetességeit. Ennél általánosabb következtetésekre juthatunk azonban az (5.5a,b) általános érvényű összefüggések alapján és egyszerű fizikai megfontolások figyelembevételével. Az 5.2. ábrán látható frekvenciafüggvényeket így módon rajzoltuk meg, ezeket, illetve ezek jellemző szakaszait az alábbiakban diszkutáljuk.

A veszteségi modulus nyilvánvalóan nulla a nulla frekvencián, hiszen ha nincs mozgás, akkor nincs súrlódás sem. Ennek megfelelően itt nulla a dinamikai modulus-frekvencia függvény meredeksége is; az értéke pedig az M_0 statikus modulusával azonos. A frekvencia növelésével szükségszerűen növekedésnek indul a veszteségi modulus és azzal nő a dinamikai modulus-frekvencia függvény meredeksége, következésképpen magának a modulusnak az értéke is (1. szakasz). A dinamikai tulajdonságoknak a fentiekhez hasonló jellegű változását állapíthatjuk meg a nagy frekvenciákra is, abból a feltételezésből kiindulva, hogy a dinamikai modulus egy véges, M_∞ -nel



5.2. ábra. A dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők frekvenciafüggésének jellegzetességei két veszteségi maximumot feltételezve.

jelölt határértékhez tart (4. szakasz). (Ellenkező esetben a dinamikai modulus minden határon túl nőne a frekvencia növelésével, vagyis az anyag végül végtelen merevnek tűnne, ami nem felel meg a fizikai valóságnak.) Ebből és a dinamikai modulus monoton növekedéséből az következik, hogy az $M_d(\omega)$ függvény határmeredeksége nulla. Ez utóbbiból pedig – az előbb elmondottak szerint – az következik, hogy a veszteségi modulus nullához tart a nagyobb frekvenciákon. A frekvencia növelésével az anyag tehát egyre inkább úgy viselkedik, mintha nem lenne belső súrlódása, vagyis, mintha ideálisan rugalmas lenne. Így módon az M_∞ nem csak a dinamikai modulusnak, hanem a komplex modulusnak is nagyfrekvenciás határértéke, vagyis:

$$M_\infty = \overline{M}(\infty) = M_d(\infty). \quad (5.7)$$

A veszteségi modulus kis- és nagyfrekvenciás viselkedéséből szükségszerűen következik továbbá, hogy annak legalább egy maximuma van (2. szakasz). Az (5.5b) összefüggésből nyilvánvaló, hogy ezen a szakaszon legnagyobb a dinamikai modulus-frekvencia függvény meredeksége is, és hogy annak itt inflexiós pontja van. A fenti gondolatmenet nem zárja ki egynél több maximum létezését, amikor is a dinamikai modulus függvénynek ugyan-csak egynél több inflexiós pontja létezik (3. szakasz). A veszteségi tényező definíciójából ($\eta = M_v/M_d$), valamint az (5.6) összefüggésből következik továbbá, hogy az η frekvenciafüggésének jellegzetességei lényegében meg-

felelnek a veszteségi modulusra megállapítottaknak. Egyszerűen belátható, hogy a veszteségi tényező maximuma megelőzi a veszteségi modulusét. A veszteségi jellemzők maximumát ebben a munkában röviden *veszteségi maximumnak* nevezzük. A szakirodalomban ugyanezt értik a *relaxációs maximum* néven, amivel összhangban az illető frekvenciát *relaxációs frekvenciának* nevezik. Ez utóbbi elnevezéseket az indokolja, hogy a maximum helye és nagysága szoros összefüggésben van a relaxációs függvény jellemzőivel, ahogy azt a 7. fejezetben az anyagmodellek vizsgálata során több esetben is megmutatjuk.

A fenti megfontolások alapján a dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők frekvenciafüggésének csupán a jellegzetességeit állapítottuk meg és semmiféle következtetést nem vontunk le a függvények mennyiségi jellemzőire vonatkozóan. A dinamikai modulus-frekvencia függvény ilyen mennyiségi jellemzője a nulla frekvenciához tartozó értéke (M_0), a nagyfrekvenciás határértéke (M_∞), valamint a meredeksége az inflexió pontjában. A veszteségi modulus és tényező függvények mennyiségi jellemzői pedig: a maximum értéke (M_m , η_m) és az ahhoz tartozó frekvencia (ω_v , ω_η), a növekedés és a csökkenés meredeksége a maximum alatt, illetve felett, a frekvenciagörbe szimmetriája és szélessége. Ez utóbbi jellemzésére az ún. *félértékszélességet* ($\Delta\omega$) szokás használni, amin azon két frekvencia különbségét értik, amelyeken az illető veszteségi jellemző értéke a maximumának a felére csökken (5.2. ábra, $\eta(\omega)$ görbe). A félértékszélesség nyilvánvalóan összefüggésben van a frekvenciafüggvény meredekségével. Mindezek a mennyiségi jellemzők az illető anyagtól függnék, következésképpen igen különbözők lehetnek, melyeket kísérleti úton, mérésekkel lehet meghatározni.

Az (5.5), (5.6) összefüggés birtokában, illetve ugyancsak egyszerű fizikai megfontolások alapján azonban bizonyos következtetéseket vonhatunk le a frekvenciafüggvények egyes mennyiségi jellemzőire, és pedig elsősorban azok meredekségére. Az egyik következtetés az $M_d(\omega)$ függvény meredekségére, valamint változásának mértékére vonatkozik. Az (5.5) és az (5.6) összevalamint szerint ez a meredekség annál nagyobb, minél nagyobb a veszteségi modulus, illetve tényező értéke. Ez utóbbiból, valamint a dinamikai modulus monoton növekedéséből az következik, hogy minél nagyobb a veszteségi modulus, illetve tényező, annál nagyobb a dinamikai modulus változásának mértéke, vagyis

$$M_\infty - M_0 = \Delta M_d \sim M_m \sim \eta_m. \quad (5.8)$$

Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy ha az anyagnak nem lenne belső sűrűsödése (az ideális rugalmasság esete), akkor a dinamikai modulus a frekvenciától függetlenül állandó lenne. A dinamikai modulus frekvenciafüggése gyakorlati szempontból elhanyagolhatóan kicsi lehet a kis veszteségű anyagoknál is.

A dinamikai modulus változását egy adott frekvenciasávban – ω_1 és ω_2 között – megbecsülhetjük az (5.6) összefüggés segítségével. Ehhez vegyük az (5.6) integrálját az ω_1 és ω_2 frekvenciák között:

$$\frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \eta(\omega) d \lg \omega \approx \lg M_d(\omega_2) - \lg M_d(\omega_1). \quad (5.9)$$

Tételezzük fel, hogy az η frekvenciafüggése elhanyagolható ebben a frekvenciasávban, ekkor

$$\lg M_d(\omega_2) - \lg M_d(\omega_1) \approx \frac{2}{\pi} \eta (\lg \omega_2 - \lg \omega_1), \quad (5.10a)$$

amelyből

$$\frac{M_d(\omega_2)}{M_d(\omega_1)} \approx \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^{\frac{2\eta}{\pi}}. \quad (5.10b)$$

Látható, hogy az M_d változása a veszteségi tényezővel és a frekvenciasáv szélességével arányos. Példaként számítsuk ki a dinamikai modulus változását ott, ahol legnagyobb mértékű, vagyis a veszteségi maximum környezetében. Legyen a frekvenciasáv szélessége pl. 3 dekád, és tételezzük fel, hogy a veszteségi maximum olyan lapos, hogy az η változását gyakorlatilag el lehet hanyagolni ezeken a frekvenciákon. Ezek figyelembevételével (5.10)-ből azt kapjuk, hogy ha a veszteségi tényező értéke 0,01, akkor 5%-nál kisebb a dinamikai modulus relatív változása és még $\eta = 0,1$ esetében sem haladja meg az 55%-ot. Ha viszont $\eta = 1,0$, akkor a dinamikai modulus értéke kb. 80-szorosára nő, vagyis közel két nagyságrendet is változik a 3 dekád széles frekvenciasávban.

Az egyszerű fizikai szemlélet alapján következtetést vonhatunk le a veszteségi modulus-frekvencia függvény meredekségére vonatkozóan is. Az alábbi gondolatmenettel belátható, hogy annak a növekedési meredeksége maximum 1 lehet, vagyis az legfeljebb lineárisan nőhet a frekvenciával. A lineáris növekedés ugyanis a folyadékra jellemző, amikor is a Newton-féle sűrűlódási törvény értelmében:

$$\sigma = \mu \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (5.11a)$$

ahol μ a viszkozitás. Harmonikus rezgés esetén

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = j\omega\mu, \quad (5.11b)$$

vagyis

$$M_v = \omega\mu, \quad (5.11c)$$

mivel

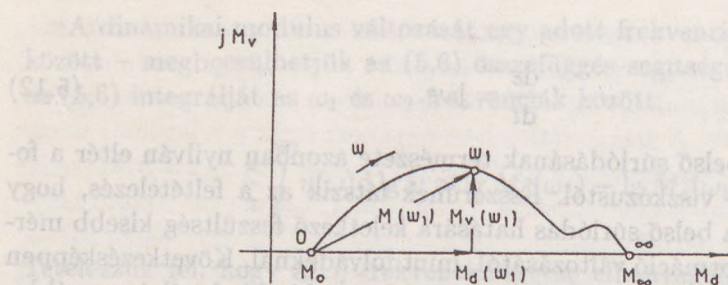
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = j\omega\varepsilon. \quad (5.12)$$

A szilárd anyag belső súrlódásának természete azonban nyilván eltér a folyadékra jellemző viszkózustól. Ésszerűnek látszik az a feltételezés, hogy szilárd anyagnál a belső súrlódás hatására keletkező feszültség kisebb mértékben függ a deformáció változásától, mint folyadéknál. Következésképpen a veszteségi modulus növekedésének meredeksége kisebb 1-nél és annál kisebb, minél távolabb van a belső súrlódás természete a viszkózustól. Ez még inkább érvényes a veszteségi tényező növekedési meredekségére, mivelhogy a dinamikai modulus minden esetben nő a frekvenciával. Erre a kérdésre a 7. fejezetben – az anyagmodellek keresésekor – visszatérünk, és azt részletesebben is kifejtjük.

A dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők frekvenciafüggésére levont következtetések elvileg bármely szilárd anyag bármely komplex modulusa (nyírási, térfogati stb.) esetében is érvényesek, hiszen az elméleti vizsgálatok során semmiféle kikötést nem kellett tenni az utóbbiakra vonatkozóan. A frekvenciafüggés ezen jellegzetességeit a legkülönbözőbb anyagokon, de elsősorban a polimereken végzett mérések igazolják [16–18]. Tipikus rezgéscsökkentő anyagokra vonatkozó kísérleti eredményeket a következő fejezetben mutatunk be.

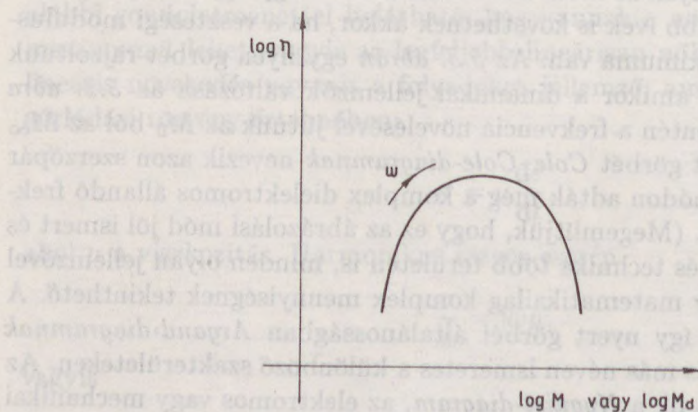
5.1.3. A Cole–Cole-diagram és a „kapu”-diagram

Az eddigiekben a dinamikai és veszteségi modulus, illetve ezek változását egy-egy frekvenciafüggvénnyel adtuk meg. Megadhatjuk azonban oly módon is, hogy a dinamikai modulus és a veszteségi modulus egy adott frekvenciához tartozó értékét a komplex számsíkban mérjük fel, és az így kapott ponthoz odaírjuk az illető frekvencia értékét. Így egy ív alakú görbét kapunk, amelyet újabb ívek is követhetnek akkor, ha a veszteségi modulusnak egynél több maximuma van. Az 5.3. ábrán egy ilyen görbét rajzoltunk meg arra az esetre, amikor a dinamikai jellemzők változása az 5.2. ábra szerinti. A görbe mentén a frekvencia növelésével jutunk az M_0 -ból az M_∞ pontba. Az így nyert görbét *Cole–Cole-diagramnak* nevezik azon szerzőpár után [19], akik ily módon adták meg a komplex dielektromos állandó frekvenciafüggő értékeit. (Megemlítjük, hogy ez az ábrázolási mód jól ismert és használatos a fizika és technika több területén is, minden olyan jellemzővel kapcsolatban, amely matematikailag komplex mennyiségnek tekinthető. A komplex számsíkon így nyert görbét általánosságban *Argand-diagramnak* nevezik, de az más és más néven ismeretes a különböző szakterületeken. Az elektronikában ilyen pl. a *Nyquist-diagram*, az elektromos vagy mechanikai impedanciával kapcsolatban pedig rendszerint *helygörbéről* beszélnek.)



5.3. ábra. A Cole-Cole-diagram két veszteségi maximum esetében.

A Cole-Cole-diagramot eredeti alakjában csak igen ritkán használják a rezgéscsökkentő anyagok dinamikai tulajdonságainak megadására. Ennek csak az egyik oka az, hogy kevésbé szemléletes, mint a frekvenciafüggvények formájában történő közlés. A másik, nyomósabb ok az, hogy az eredeti Cole-Cole-diagrammal – amelynél a valós és a képzetes tengely is lineáris léptékű – nem lehet áttekinthetően megadni a dinamikai tulajdonságok változását akkor, ha az több nagyságrendet is kitesz. A nagyságrendi változások pedig éppen a rezgéscsökkentésre nagy mennyiségben használt polimerekre jellemzők. Ilyen anyagoknál áttekinthető ábrázolás csak akkor lehetséges, ha a valós és a képzetes tengely is logaritmikus léptékű. Ez a módszer az utóbbi időkben elterjedt, de a képzetes tengelyre nem a veszteségi modulust, hanem a veszteségi tényező értékeit, a vízszintes tengelyre pedig a komplex modulus abszolút értékét, vagy továbbra is a dinamikai modulust mérik fel (5.4. ábra). Az így nyert görbét az alakja után „kapu”-diagramnak vagy „fordított U”-diagramnak nevezik. Ezt az ábrázolási módot csak a közelmúltban javasolták [20] a rezgéscsillapító polimerek komplex modulusának



5.4. ábra. A „kapu”-diagram.

megadására, de ma már nemzetközi szabvány is rögzíti [21]. Ennek az ábrázolási módnak az egyik előnye a kísérleti eredmények értékelésében van, mivel ekkor különösen jól elkülönülnek a kiugró, hibás mérési pontok. Polimerek esetében további előny az, hogy ily módon egy diagrammal lehet megadni a dinamikai tulajdonságok változását mind a frekvencia, mind a hőmérséklet hatására. (A frekvencia és a hőmérséklet együttes hatásával később, a 8. fejezetben részletesen is foglalkozunk.)

5.1.4. A hiszteréziscsillapítás és kritikája

Több szerkezeti anyag (fémek, fa stb.) belső súrlódásának korai vizsgálatakor Kimball és Lovell [22] azt tapasztalta, hogy annak mértéke, nevezetesen az egy rezgési periódus alatt disszipálódó energia egy viszonylag keskeny sávban nem függ a frekvenciától. Ezt gyakran jellemzőnek tartják egyes rezgésszigetelő anyagokra is a hangfrekvenciás sáv egy szűkebb tartományában. A szakirodalomban az ilyen típusú súrlódást *szerkezeti csillapításnak* nevezték el azzal a feltételezéssel, hogy a frekvenciától való függetlenség a teljes frekvenciatartományban fennáll. A szerkezeti csillapításon kívül ugyanezt értik a *szulárdtest-csillapítás* vagy a *hiszteréziscsillapítás*, illetve a *hiszterézismodell* kifejezésen is. (Az utóbbi elnevezés arra a nyilvánvaló tényre utal, hogy az energiadisszipáció a hiszterézisgörbével kapcsolatos.) Az energiadisszipációnak a hiszterézismodellel történő számításba vétele később általánossá vált, elsősorban a szerkezetdinamikával foglalkozók körében, és pedig oly módon, hogy valamely rugalmas elem esetében a frekvenciától függetlenül állandónak tekintik nemcsak a veszteségi tényezőt, hanem a dinamikai merevséget is [23–25]. Egy ilyen rugalmas elem anyagának a komplex modulusa tehát:

$$\overline{M} = M_d(1 + j\eta), \quad (5.13)$$

lenne, ahol M_d =áll. és η =áll.

Ez a modell azonban nyilvánvalóan ellentmondásban van az 5.1.2. pontban elmondottakkal, amely szerint a komplex modulus összetevői kisebb vagy nagyobb mértékben bármely tartományban függenek a frekvenciától. Az ellentmondás különösen nyilvánvaló akkor, ha a hiszterézismodell viselkedését az időtartományban vizsgáljuk, mivel az nem tesz eleget az okság elvének [26]. Ebből pedig az következik, hogy a hiszterézismodell nem felel meg a valóságnak, holott a dinamikai tulajdonságoknak a frekvenciától való függetlensége – egyes kísérleti munkák szerint – maga a fizikai valóság. Ennek az ellentmondásnak a feloldása több szerző érdeklődését is vonzotta, és napjainkig tartó vitához vezetett [27–34]. Az alábbiakban is erre a kérdésre keressük a választ, de a korábbi szerzőktől eltérő módon [35].

A hiszterézismodell kauzalitását a szerzők többsége impulzusjellel gerjesztett egyszabadságfokú rezgőrendszer válaszfüggvényének vizsgálatával tanulmányozta, melynek rugalmas elemét a frekvenciától független komplex merevséggel jellemezte [26, 32–34]. A vizsgálat azonban ennél egyszerűbben is elvégezhető akkor, ha csak magát a rugalmas elemet, és pedig anyagának a komplex modulusát tekintjük. Gerjesztésnek, illetve terhelésnek pedig ez esetben deformációugrást célszerű választani, mivel ekkor a feszültségválasz a kísérletekből jól ismert relaxációs függvény. (A kauzalitást vizsgálhatnánk természetesen az (5.4a,b) összefüggések alapján is. Az itteni eljárást azért választottuk, mert ily módon – mint látni fogjuk – kideríthetők a hiszterézismodell nemkauzális viselkedésének fizikai okai is.)

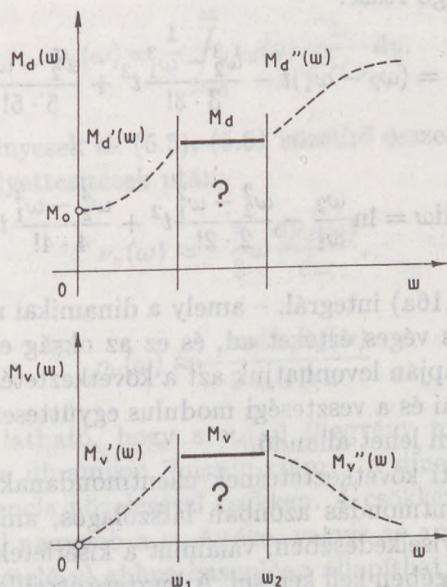
A vizsgálathoz tekintsük a relaxációs függvény és a komplex modulus kapcsolatát leíró (5.1b) összefüggést. Ebből látható, hogy kauzalitási probléma keletkezik akkor, ha a komplex modulus állandóságát 0 Hz-től valamennyi frekvenciára feltételezzük. Ezt az (5.1b) második integrálja okozza, amely ekkor

$$M_v \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega = \infty, \quad t > 0 \quad \text{vagy} \quad t < 0,$$

és így végtelen nagy feszültséget ad nemcsak a terhelés utáni, hanem az azelőtti időkre is. Ez fizikailag abszurd és az okság elvének megsértését jelenti. Az alapvető problémát az okozza, hogy a veszteségi modulusról feltételeztük, hogy állandó egészen nulla frekvenciáig, ami nyilván nem felel meg a valóságnak. A nulla frekvencián ugyanis a veszteségi modulus szükségszerűen nulla, hiszen ha nincs mozgás, akkor nincs súrlódás sem. Egyes szerzők a kauzalitási probléma megoldásának kulcsát ebben látják; a kérdéses integrál ugyanis konvergenssé tehető az $M_v(0) = 0$ előírással. Amennyiben például $M_v(\omega) = a\omega^\alpha$, ahol $0 < \alpha < 1$, akkor [36]

$$\int_0^{\infty} M_v(\omega) \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega = \frac{a\pi}{2 \cos \frac{(1-\alpha)\pi}{2} \Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}, \quad (5.14)$$

ahol Γ a gamma-függvényt jelöli. A fenti integrál csak $t > 0$ -ra létezik és ezekre véges értéket ad. Belátható azonban, hogy a veszteségi modulus ilyen viselkedése csak szükséges, de nem elégséges a kauzalitáshoz. Fizikailag nyilvánvaló ugyanis, hogy a veszteségi modulus mellett a dinamikai modulus sem lehet állandó 0 Hz-ig. Itt ugyanis a feszültség és a deformáció hányadosa a statikus modulusal azonos, amely mind az elmélet, mind a kísérleti tapasztalatok szerint kisebb a dinamikai modulusnál. A fentiekből az következik, hogy egy valódi anyagnál 0 Hz-től kiindulva, kezdetben a dinamikai modulus is és a veszteségi modulus is szükségszerűen nő a frekvenciával. Ezek után azt a kérdést kell feltennünk, hogy eleget tesz-e az okság elvé-



5.5. ábra. A dinamikai és a veszteségi modulus feltételezett frekvenciafüggése a kauzalitás vizsgálatához.

nek egy olyan modell, amelynél a dinamikai tulajdonságok állandók egy adott frekvencia felett. Általánosabb következtetésre juthatunk akkor, ha a kérdést egy frekvenciasávra vonatkoztatjuk. Ez utóbbi megválaszolásához tételezzük fel, hogy a dinamikai és a veszteségi modulus állandó az ω_1 – ω_2 sávban, de azon kívül mindkettő függ a frekvenciától, amit az 5.5. ábrán vázoltunk. A vizsgálathoz ismét az (5.1) relaxációs függvényt választjuk, amelynek integráljait három részre bontjuk:

$$\begin{aligned} \sigma_r(t) = & \frac{\varepsilon_0}{2} M_0 + \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_0^{\omega_1} M_d'(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} M_d \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega + \\ & + \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_{\omega_2}^{\infty} M_d''(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_0^{\omega_1} M_v'(\omega) \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega + \\ & + \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} M_v \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega + \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_{\omega_2}^{\infty} M_v''(\omega) \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Tételezzük fel továbbá, hogy az ω_1 alatt és az ω_2 felett a dinamikai és a veszteségi modulus frekvenciafüggése olyan, hogy nem okoznak kauzalitási problémát. Ekkor a kauzalitást a középső integrálok viselkedése határozza

meg, ezek időtől függő része:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = (\omega_2 - \omega_1)t - \frac{\omega_2^3 - \omega_1^3}{3 \cdot 3!} t^3 + \frac{\omega_2^5 - \omega_1^5}{5 \cdot 5!} t^5 - \dots, \quad (5.16a)$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega = \ln \frac{\omega_2}{\omega_1} - \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2 \cdot 2!} t^2 + \frac{\omega_2^4 - \omega_1^4}{4 \cdot 4!} t^4 - \dots \quad (5.16b)$$

Látható, hogy az (5.16a) integrál, – amely a dinamikai modulussal kapcsolatos – a $t < 0$ -ra is véges értéket ad, és ez az okság elvének megsértéséhez vezet. Ennek alapján levonhatjuk azt a következtetést, hogy egy valódi anyagnál a dinamikai és a veszteségi modulus együttesen még egy szűkebb frekvenciasávban sem lehet állandó.

Ennek az elméleti következtetésnek ellentmondanak egyes kísérleti tapasztalatok. Az ellentmondás azonban látszólagos, aminek okát az illető anyagok dinamikai viselkedésében, valamint a kísérletek pontosságában és nem kellő részletességében kell keresni. A hiszteréziscsillapítással kapcsolatban ugyanis még napjainkban is gyakran idézik Kimball és Lovell [22] korai méréseit annak ellenére, hogy azok csak egy viszonylag szűk frekvenciasávra ($\sim 2\text{ Hz} - 200\text{ Hz}$) vonatkoznak. Ez más szerzők munkáira is jellemző, akik a dinamikai tulajdonságok állandóságát csak egynéhány pontban végzett mérés alapján és csak a gyakorlat szempontjainak figyelembevételével jelentik ki. A frekvenciafüggés azonban – mint láttuk – szükségszerű, de az egyes anyagoknál egy szűkebb frekvenciasávban olyan kismértékű lehet, amit csak rendkívül pontos mérésekkel lehet kimutatni. Legyen a frekvenciafüggés bármily kismértékű – az már megszünteti a kauzalitási problémát.

5.2. A komplex Poisson-szám-frekvencia függvény

A komplex Poisson-szám-frekvencia függvény tulajdonságait lényegében ugyanúgy vizsgálhatjuk, mint ahogy azt a komplex modulusok esetében tettük, minthogy formálisan az is úgy tekinthető, mint egy lineáris rendszer átviteli függvénye. Következésképpen a komplex Poisson-szám valós és képzetes része között is kölcsönös meghatározottság van, éspedig közöttük is a Hilbert-transzformáció teremt kapcsolatot. Ezt felírhatjuk az (5.4a,b) összefüggések alapján, annak figyelembevételével, hogy a képzetes rész ez esetben negatív előjelű. Ily módon kapjuk, hogy

$$\nu_d(\omega) = -\frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \nu_v(y) \frac{1}{\omega - y} dy, \quad (5.17a)$$

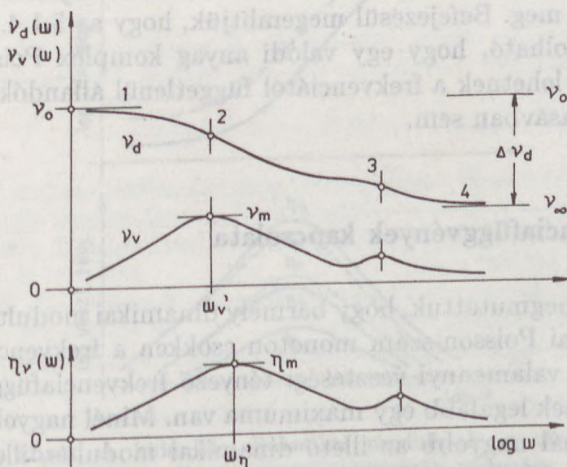
$$\nu_v(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \nu_d(y) \frac{1}{\omega - y} dy. \quad (5.17b)$$

Nyilvánvalóan érvényesek az (5.5), (5.6) közelítő összefüggések is, amelyek az értelemszerű helyettesítések után:

$$\nu_v(\omega) \approx -\frac{\pi}{2} \omega \frac{d\nu_d(\omega)}{d\omega}, \quad (5.18)$$

$$\eta_v(\omega) \approx -\frac{\pi}{2} \frac{d \lg \nu_d(\omega)}{d \lg \omega} \quad (5.19)$$

alakúak. Ezekből látható, hogy a $\nu_d(\omega)$ függvény meredeksége negatív, következésképpen a dinamikai Poisson-szám – a dinamikai modulusokkal szemben – a frekvencia növelésével csökken. A csökkenés meredeksége annál nagyobb, minél nagyobb a ν_v értéke, vagyis az anyag belső sűrűlődása. Ennek figyelembevételével ahhoz hasonlóan állapíthatjuk meg a dinamikai Poisson-szám és az illető veszteségi jellemzők frekvenciafüggésének jellegzetességeit, mint ahogy azt a komplex modulusok esetében végeztük. Az ottani gondolatmenetet követve az 5.6. ábrán vázoltuk a $\nu_d(\omega)$, $\nu_v(\omega)$ és az $\eta_v(\omega)$ függvényeket, illetve azok jellemző szakaszait. Látható, hogy a veszteségi jellemzők frekvenciafüggésének jellegzetességei lényegében megfelelnek az 5.2. ábrán vázoltaknak, azzal az eltéréssel, hogy itt az $\eta_v(\omega)$ veszteségi tényező maximuma a $\nu_v(\omega)$ maximuma után jelenik meg. Ez esetben sem



5.6. ábra. A dinamikai Poisson-szám és az illető veszteségi jellemzők frekvenciafüggésének jellegzetességei két veszteségi maximumot feltételezve.

kizárt, hogy a $\nu_v(\omega)$ -nak (és az $\eta_v(\omega)$ -nak is) egynél több maximuma, és így a $\nu_d(\omega)$ -nak egynél több inflexiós pontja is legyen (3. szakasz). A $\nu_d(\omega)$ nagyfrekvencián ν_∞ -hez tart, amely egyben a komplex Poisson-számnak is határértéke, vagyis

$$\nu_\infty = \bar{\nu}(\infty) = \nu_d(\infty). \quad (5.20)$$

A $\nu_d(\omega)$, $\nu_v(\omega)$ és az $\eta_v(\omega)$ függvények mennyiségi jellemzői, nevezetesen a ν_0 és ν_∞ értéke, a veszteségi jellemzők maximuma (ν_m , η_m), azok helye (ω'_v , ω'_η), valamint a félértékszélesség, továbbá a frekvenciafüggvények meredeksége természetesen ez esetben sem határozhatók meg a fentiek alapján; azok a kérdéses anyagtól függően igen eltérőek lehetnek. Az 5.1.2. pontbeli gondolatmenetet követve az viszont ez esetben is megállapítható, hogy a ν_0 és ν_∞ eltérése, vagyis a dinamikai Poisson-szám diszperziójának mértéke a veszteségi jellemzők maximumával arányos, vagyis

$$\nu_0 - \nu_\infty = \Delta\nu_d \sim \nu_m \sim \eta_m. \quad (5.21)$$

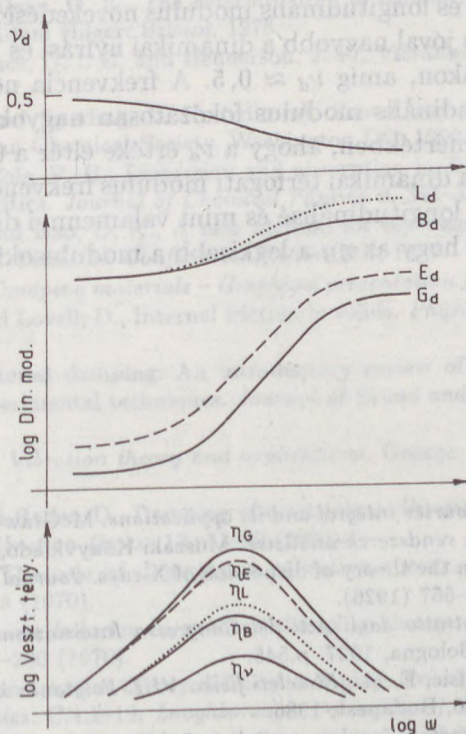
A komplex modulusokkal szemben a szakirodalomban alig található mérési eredmény a komplex Poisson-szám összetevőinek frekvenciafüggéséről. A kísérleti eredmények kis száma részben azzal magyarázható, hogy a Poisson-számot nehéz közvetlenül mérni, ezért rendszerint közvetve határozzák meg, két komplex modulus mért értékének ismeretében. A rendelkezésre álló néhány kísérleti eredmény azonban – amelyek zöme kemény műanyagokra, éspedig elsősorban a poli(metil-metakrilát)-ra (plexiüvegre) vonatkozik [16, 37–40] – igazolja az itteni elméleti megállapításokat. Az egyes rezgéscsökkentő anyagokra vonatkozó kísérleti eredményeket a következő fejezetben adjuk meg. Befejezésül megemlítjük, hogy az 5.1.4. pontbeliekhez hasonlóan igazolható, hogy egy valódi anyag komplex Poisson-számának összetevői sem lehetnek a frekvenciától függetlenül állandók, még egy szűkebb frekvenciasávban sem.

5.3. A frekvenciafüggvények kapcsolata

Az előzőkben megmutattuk, hogy bármely dinamikai modulus monoton nő, míg a dinamikai Poisson-szám monoton csökken a frekvencia növelésével. Ezzel szemben valamennyi veszteségi tényező frekvenciafüggésének jellege hasonló, mindnek legalább egy maximuma van. Minél nagyobb a veszteségi maximum, annál nagyobb az illető dinamikai modulus, illetve a dinamikai Poisson-szám frekvenciafüggésének mértéke. Az előző fejezetben láttuk, hogy a veszteségi tényezők közül a nyírási modulushoz tartozó a legnagyobb, amelynél kisebb sorrendben a Young-, a longitudinális és a térfogati

modulushoz tartozó. Még ez utóbbinál is kisebb lehet a Poisson-szám veszteségi tényezője akkor, ha ν_d értéke 0,5-höz közeli. Láttuk továbbá, hogy a veszteségi tényezők, valamint a dinamikai modulusok egymáshoz viszonyított értékei, illetve azok változásai jól vizsgálhatók a dinamikai Poisson-szám ismeretében.

Az 5.7. ábrán példaként ezek figyelembevételével rajzoltuk meg a különféle dinamikai modulusok, a dinamikai Poisson-szám és az illető veszteségi tényezők frekvenciafüggését egy tipikus gumi vagy gumyszerű anyag esetében. Ehhez feltételeztük, hogy az anyagnak csak egy veszteségi maximuma van, és hogy annak helye mindegyik veszteségi tényező esetében kb. ugyanazon a frekvencián található. Feltételeztük továbbá, hogy a ν_d értéke 0,5-höz közeli a kisebb frekvenciákon, és hogy a nagyobb frekvenciákon sem kisebb, mint 0,4, valamint, hogy az η_ν a legkisebb a veszteségi tényezők közül. Az előző fejezetben láttuk, hogy ez esetben az η_ν -nél jóval nagyobb a nyírási modulushoz és a Young-modulushoz tartozó veszteségi tényező. Ez utób-



5.7. ábra. A különféle dinamikai modulusok, a dinamikai Poisson-szám és az illető veszteségi tényezők változása a frekvencia függvényében, csak egy veszteségi maximum esetében.

biak viszont kb. azonosak azokon a kisebb frekvenciákon, ahol $\nu_d \approx 0,5$, de a frekvencia növelésével az η_E mindinkább elmarad az η_G -hez képest, és annál nagyobb lesz a különbségük, minél kisebbé válik a dinamikai Poisson-szám a nagyobb frekvenciákon (4.5. ábra). Ugyanez mondható el a térfogati és a longitudinális veszteségi tényező egymáshoz viszonyított értékéről is, melyek viszont kisebbek – rendszerint jóval kisebbek – a fenti két veszteségi tényezőnél, különösképpen a dinamikai Poisson-szám 0,5-höz közeli értékeinél (4.5. és 4.6. ábra).

A veszteségi tényezők értékei közötti eltérések magyarázzák a különféle dinamikai modulusok frekvenciafüggésének eltérő mértékét. Ezek közül legnagyobb a dinamikai nyírási modulus növekedésének mértéke, annak megfelelően, hogy a veszteségi tényezők közül az η_G a legnagyobb. Ennél valamivel kisebb mértékű a dinamikai Young-modulus növekedése, az E_d értéke kb. 3-szor nagyobb a G_d -nél a kisebb frekvenciákon, ahol $\nu_d \approx 0,5$, majd a frekvencia növelésével csökken ezek különbsége a ν_d csökkenésének megfelelően (4.3. ábra). A fenti modulusokhoz képest jóval kisebb mértékű a dinamikai térfogati és longitudinális modulus növekedése. E két modulus értéke közel azonos és jóval nagyobb a dinamikai nyírási és Young-modulusnál a kisebb frekvenciákon, amíg $\nu_d \approx 0,5$. A frekvencia növelésével azonban a dinamikai longitudinális modulus fokozatosan nagyobb lesz a térfogatnál, éspedig olyan mértékben, ahogy a ν_d értéke eltér a 0,5-től (4.3. ábra). Következésképpen a dinamikai térfogati modulus frekvenciafüggésének mértéke kisebb, mint a longitudinális és mint valamennyi dinamikai modulusé annak megfelelően, hogy az η_B a legkisebb a modulusokhoz tartozó veszteségi tényezők közül.

Irodalom

1. Papoulis, A., *The Fourier integral and its applications*. McGraw-Hill, New York, 1962.
2. Fodor Gy., *Lineáris rendszerek analízise*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1967.
3. Kronig, R. de L., On the theory of dispersion of X-rays. *Journal of the Optical Society of America* **12**, 547–557 (1926).
4. Kramers, H. A., *Estratto dagli Atti del Congresso Internazionale dei Fisici, Como*. Nicollo Zonichelli, Bologna, 1927. p.545.
5. Landau, L. D. és Lifsic, E. M., *Elméleti fizika VIII. Folytonos közegek elektrodinamikája*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
6. Bode, H. W., *Hálózatok és visszacsatolt erősítők tervezése*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1961.
7. Ginzburg, V. L., Ob obscej szvjazi mezsdu pogloscseniem i diszpersziej zvukovüh voln. *Akuszticeszkij zszurnal* **1**, 31–39 (1955).
8. Goyder, H. G. D., Some theory and applications of the relationship between the real and imaginary parts of a frequency response function provided by Hilbert transforms.

- Proceedings of Conference on Advances in Structural Dynamics, Southampton, 1980.*
pp. 89–97.
9. Simon, M. and Tomlinson, G. R., Use of Hilbert transform in modal analysis of linear and non-linear structures. *Journal of Sound and Vibration* **96**, 421–436 (1984).
 10. Gross, B., *Mathematical structures of the theories of viscoelasticity*. Hermann, Paris, 1953.
 11. Sermergor, T. D., O diszperszionnüh szootnosénijah dlja uprugoszti i podatlivoszti. *Prikladnaja matematika i tehnicsezskaja fizika* **1**, 96–102 (1960).
 12. Garcia-Moliner, F. and Thomson, R., Linear response functions and the phenomenological equations of internal friction. *Journal of Applied Physics* **37**, 83–89 (1966).
 13. Kennedy, I. and Tomlinson, G. R., Torsional vibration transmissibility characteristics of reinforced viscoelastic flexible pipes. *Journal of Sound and Vibration* **122**, 146–169 (1988).
 14. O' Donnell, M., Jaynes, E. T. and Miller, J. G., Kramers-Kronig relationship between ultrasonic attenuation and phase velocity. *Journal of the Acoustical Society of America* **69**, 696–701 (1981).
 15. Staverman, A. J. and Schwarzl, F., Linear deformation behaviour of high polymers, in: *Die Physik der Hochpolymeren*, Vol.IV. Edited by Stuart, H. A., Springer-Verlag, Berlin, 1956. p.28.
 16. Read, B. E. and Dean, G. E., *The determination of dynamic properties of polymers and composites*. Adam Hilger, Bristol, 1978.
 17. Nashif, A. D., Jones, D. I. G. and Henderson, J. P., *Vibration damping*. Wiley, New York, 1985.
 18. Corsaro, R. D. and Sperling, L. H. (editors), *Sound and vibration damping with polymers*. American Chemical Society, Washington DC, 1990.
 19. Cole, K. S. and Cole, R. H., Dispersion and absorption in dielectrics. I. Alternating current characteristics. *Journal of Chemical Physics* **9**, 341–351 (1941).
 20. Jones, D. I. G. and Rao, D. K., A new method for representing damping material properties. *ASME Vibration Conference, Boston MA*, 1987.
 21. ISO 10112:1991. *Damping materials – Graphical presentation of the complex modulus*.
 22. Kimball, A. L. and Lovell, D., Internal friction in solids. *Physical Review* **30**, 948–959 (1927).
 23. Bert, C. W., Material damping: An introductory review of mathematical models, measures and experimental techniques. *Journal of Sound and Vibration* **29**, 129–153 (1973).
 24. Thomson, W. T., *Vibration theory and applications*. George Allen and Unwin, London, 1976.
 25. Birchak, J. R. and Rader, D., Damping of mechanical vibrations and acoustic waves. *The Shock and Vibration Digest* **12**, 11–30 (1980).
 26. Crandall, S. H., The role of damping in vibration theory. *Journal of Sound and Vibration* **11**, 3–18 (1970).
 27. Naylor, V. D., Some fallacies in modern damping theory. *Journal of Sound and Vibration* **11**, 278–280 (1970).
 28. Milne, R. D., A constructive theory of linear damping. *Proceedings of Symposium on Structural Dynamics*. C.4.1–19. Loughborough University of Technology, 1970.
 29. Milne, R. D., Remarks on linear damping theory. *Journal of Sound and Vibration* **12**, 377–386 (1970).
 30. Scanlan, R. H., Linear damping models and causality in vibrations. *Journal of Sound and Vibration* **13**, 499–509 (1970).
 31. Cunningham, H. J., In defense of modern damping theory in flutter analysis. *Journal of Sound and Vibration* **14**, 142–144 (1971).

32. Jones, D. I. G., Transient response of damped space systems. *24th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Lake Tahoe, Nevada, 1983*. Paper AIAA 83-0900, pp. 304-313.
33. Milne, H. K., The impulse response function of a single degree of freedom system with hysteretic damping. *Journal of Sound and Vibration* **100**, 590-593 (1985).
34. Jones, D. I. G., The impulse response function of a damped single degree of freedom system. *Journal of Sound and Vibration* **106**, 353-356 (1986).
35. Pritz T., Complex modulus of elasticity, hysteretic damping and causality. *Proceedings of Noise Control Conference, Cracow, 1988*. Vol.I. pp. 271-274.
36. Dwight, H. B., *Tables of integrals and other mathematical data*. Macmillan, New York, 1961. p.223.
37. Nederveen, C. J., An apparatus for measuring E and G moduli between 1 and 100 Hz. *Rheologica Acta* **3**, 2-8 (1963).
38. Theocaris, P. S., Interrelation between dynamic moduli and compliances in polymers. *Kolloid-Zeitschrift und Zeitschrift für Polymere* **235**, 1182-1188 (1969).
39. Paipetis, S. A., Theocaris, P. S. and Stassinakis, C. A., Complex moduli derived from the vibrations of a Timoshenko beam. *Acustica* **44**, 27-34 (1980).
40. Theocaris, P. S., The influence of quality of adhesion on the damping characteristics of a two-layer compound beam. *Journal of Composite Materials* **20**, 558-578 (1986).

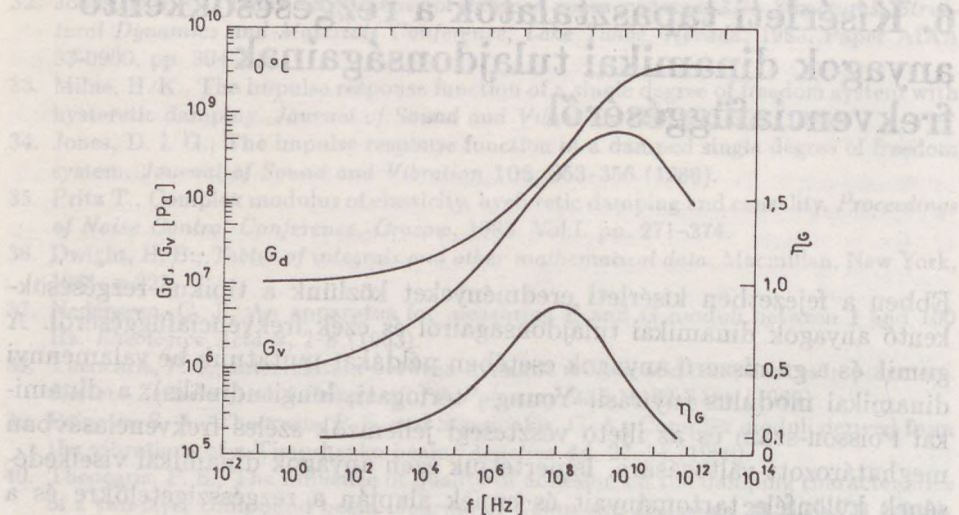
6. Kísérleti tapasztalatok a rezgéscsökkentő anyagok dinamikai tulajdonságainak frekvenciafüggéséről

Ebben a fejezetben kísérleti eredményeket közlünk a tipikus rezgéscsökkentő anyagok dinamikai tulajdonságairól és ezek frekvenciafüggéséről. A gumik és a gumyszerű anyagok esetében példákat mutatunk be valamennyi dinamikai modulus (nyírási, Young-, térfogati, longitudinális), a dinamikai Poisson-szám és az illető veszteségi jellemzők széles frekvenciasávban meghatározott változására. Ismertetjük ezen anyagok dinamikai viselkedésének különféle tartományait és ennek alapján a rezgésszigetelőkre és a -csillapítókra történő osztályozását. Foglalkozunk a műanyaghabok, a papírral, a szálaló anyagok dinamikai Young-modulusával és veszteségi tényezőjével, valamint ezek változásával a hangfrekvenciás sávban.

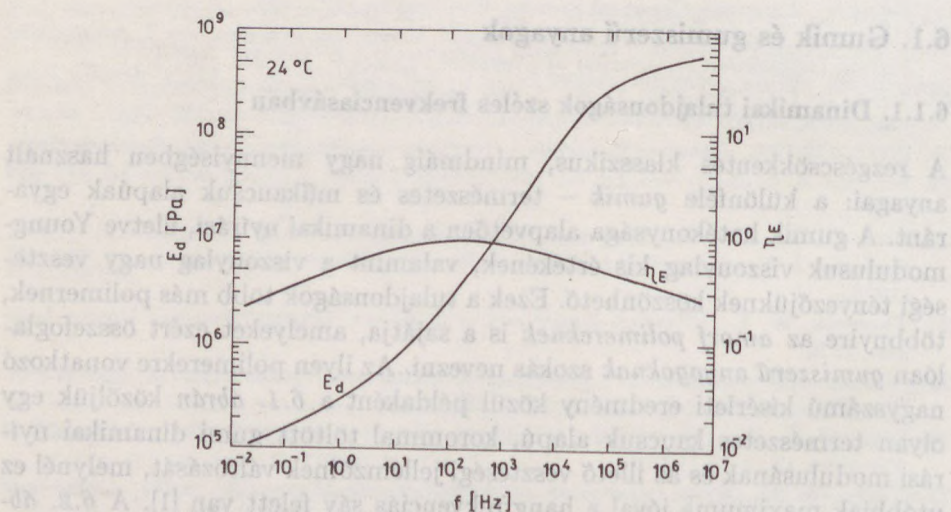
6.1. Gumik és gumyszerű anyagok

6.1.1. Dinamikai tulajdonságok széles frekvenciasávban

A rezgéscsökkentés klasszikus, mindmáig nagy mennyiségben használt anyagai: a különféle *gumik* – természetes és műkaucsuk alapúak egyaránt. A gumik hatékonysága alapvetően a dinamikai nyírási, illetve Young-modulusuk viszonylag kis értékének, valamint a viszonylag nagy veszteségi tényezőjüknek köszönhető. Ezek a tulajdonságok több más polimernek, többnyire az *amorf polimereknek* is a sajátja, amelyeket ezért összefoglalóan *gumyszerű anyagoknak* szokás nevezni. Az ilyen polimerekre vonatkozó nagyszámú kísérleti eredmény közül példaként a 6.1. ábrán közöljük egy olyan természetes kaucsuk alapú, korommal töltött gumi dinamikai nyírási modulusának és az illető veszteségi jellemzőinek változását, melynél ez utóbbiak maximuma jóval a hangfrekvenciás sáv felett van [1]. A 6.2. ábrán pedig egy olyan, akril alapú polimer dinamikai Young-modulusának és veszteségi tényezőjének változása látható, melynél ez utóbbi maximuma a hangfrekvenciás sávba esik [2]. A 6.3. ábra továbbá a dinamikai térfogati és longitudinális modulus, valamint az ezekhez tartozó veszteségi tényezők változására mutat példát, ugyancsak egy olyan sztirol-butadién guminál, amelynek veszteségi maximuma a hangfrekvenciás sáv felett van [3]. A dinamikai Poisson-szám és az illető veszteségi tényező frekvenciafüggésére a

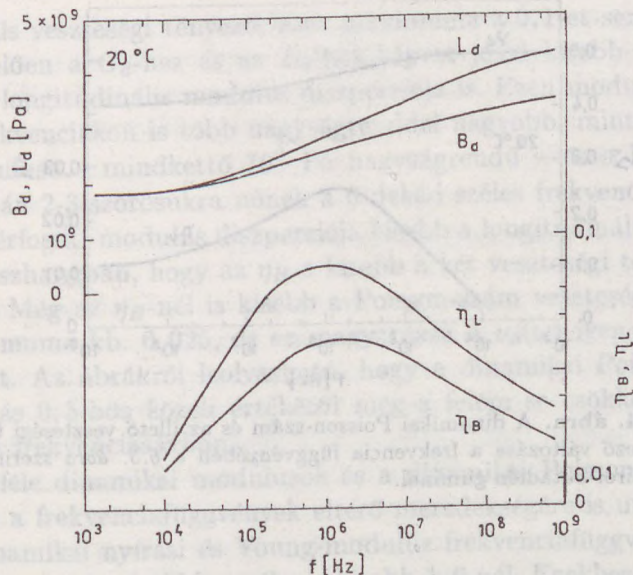


6.1. ábra. A dinamikai nyírási modulus és a veszteségi jellemzők frekvenciafüggése egy természetes kaucsuk alapú, korommal töltött guminál (Payne és Scott [1]).



6.2. ábra. A dinamikai Young-modulus és az illető veszteségi tényező frekvenciafüggése egy akril alapú polimernél (Nashif, Jones és Henderson [2] 438. old.).

6.4. és 6.5. ábrán láthatók példák. A 6.4. ábrán az előbb említett sztirol-butadién gumi dinamikai Poisson-számát és veszteségi tényezőjét mutatjuk be. Ez utóbbiakat – gumikra vonatkozó irodalmi adatok hiányában – a di-



6.3. ábra. A dinamikai térfogati és longitudinális modulus, valamint az illető veszteségi tényezők a frekvencia függvényében egy sztírol-butadién guminál, 1003 kg/m^3 (Wada és Ochiai [3]). (A veszteségi tényezőket a [3] közlemény 10. ábráján adott veszteségi és dinamikai modulusok értékeiből számítottuk).

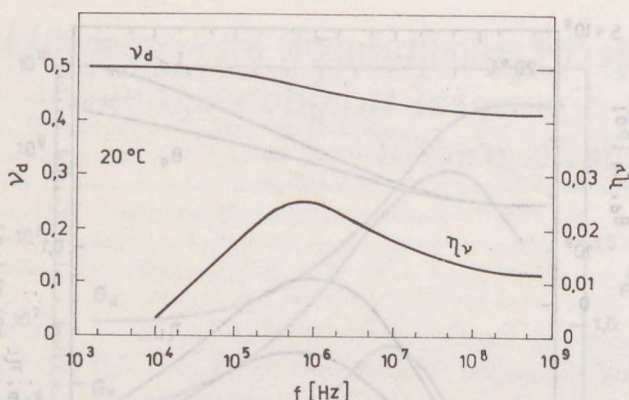
namikai térfogati és longitudinális jellemzők mért értékeiből (6.3. ábra) számítottuk a 4. fejezetből vett alábbi összefüggésekkel:

$$\nu_d = \frac{3 - L_d/B_d}{3 + L_d/B_d},$$

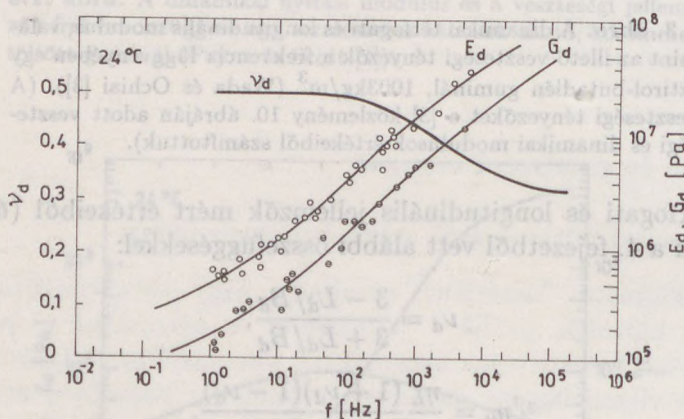
$$\eta_\nu = \frac{\eta_L (1 + \nu_d)(1 - \nu_d)}{\eta_B (1 - 2\nu_d)}.$$

A 6.5. ábrán pedig az akril alapú polimer dinamikai Poisson-számának változása látható, amelyet a dinamikai nyírási és Young-modulus mért értékeiből határoztak meg [2]. (Az η_ν veszteségi tényezőről sajnos nincs adat.)

A 6.1.-6.5 ábrákon jól látható, hogy a kísérleti frekvenciafüggvények alapvető jellegzetességei; nevezetesen a dinamikai modulusok növekedése, a dinamikai Poisson-szám csökkenése, a veszteségi jellemzők változása, valamint a veszteségi modulus és tényező maximumának relatív elhelyezkedése jól megfelel az 5. fejezetben megállapítottaknak. Látható továbbá, hogy mindezen jellegzetességek megfigyeléséhez és valamennyi jellemző érték megállapításához (a dinamikai modulusok és a dinamikai Poisson-szám határértékei, a veszteségi jellemzők maximumai) igen széles, rendszerint legalább 8–10 dekád frekvenciasáv szükséges. Az ábrák összehasonlításából



6.4. ábra. A dinamikai Poisson-szám és az illető veszteségi tényező változása a frekvencia függvényében a 6.3. ábra szerinti sztirol-butadién guminál.



6.5. ábra. A dinamikai Poisson-szám változása a frekvencia függvényében a 6.2. ábra szerinti akril alapú polimernél (Nashif, Jones és Henderson [2] 77. old.).

pedig az olvasható le, hogy jelentős eltérés van a dinamikai nyírási, illetve a Young-modulus és a térfogati, illetve a longitudinális modulus, valamint a dinamikai Poisson-szám diszperziója között. Ezt az eltérést alapvetően a veszteségi tényezők közötti különbség magyarázza. Az ábrákról leolvasható, hogy a veszteségi tényezők közül a nyírási és a Young-modulushoz tartozó a legnagyobb, ezek maximuma 1,0-hez közeli érték. Ennek megfelelően a dinamikai nyírási és Young-modulus diszperziója a legnagyobb; mindkettő több nagyságrendet is nő, míg eléri a 10^9 Pa nagyságrendű nagyfrekvenciás értéket. Az η_G -hez és az η_E -hez képest jóval kisebb a térfogati és a

longitudinális veszteségi tényező; ezek maximuma a 0,1-et sem éri el. Ennek megfelelően a G_d -hez és az E_d -hez képest jóval kisebb a dinamikai térfogati és longitudinális modulus diszperziója is. Ezen modulusok értéke a kisebb frekvenciákon is több nagyságrenddel nagyobb, mint a nyírási és Young-modulusé – mindkettő 10^9 Pa nagyságrendű – és a kezdeti értékről csupán 2-3-szorosukra nőnek a 6 dekád széles frekvenciasávban. A dinamikai térfogati modulus diszperziója kisebb a longitudinális modulusénál azzal összhangban, hogy az η_B a kisebb a két veszteségi tényező közül (4.5. ábra). Még az η_B -nél is kisebb a Poisson-szám veszteségi tényezője; ennek maximuma kb. 0,025, és ez magyarázza a $\nu_d(\omega)$ igen kis mértékű diszperzióját. Az ábrákról leolvasható, hogy a dinamikai Poisson-szám a kisfrekvenciás 0,5-höz közeli értékéről még a felére se csökken le a több dekád széles frekvenciasávban.

A különféle dinamikai modulusok és a dinamikai Poisson-szám eltérő diszperziója a frekvenciafüggvények eltérő meredekségére is utal. A legnagyobb a dinamikai nyírási és Young-modulus frekvenciafüggvények meredeksége, de ezek legnagyobb értéke is kisebb 1,0-nél. Ezekhez képest jóval kisebb és igen kicsi a meredekség a dinamikai térfogati, valamint a longitudinális modulus esetében. Még ez utóbbiaknál is kisebb a dinamikai Poisson-szám-frekvencia függvények meredeksége. Ugyanezek mondhatók el a veszteségi jellemzők növekedési, illetve csökkenési meredekségéről is. Az ábrákról leolvasható továbbá, hogy a veszteségi modulus- és a veszteségi tényező-frekvencia függvények félértékiséssége 4-5 dekád körül van. Ezt a viszonylag nagy sávzélességet alapvetően az illető frekvenciafüggvények növekedési, illetve csökkenési meredekségének a viszonylag kis, 0,5 körüli értéke magyarázza.

Mindezek, nevezetesen a veszteségi tényezők értékei, valamint a dinamikai modulusok diszperziója közötti különbségek, a frekvenciafüggvények meredeksége, továbbá a frekvenciafüggvények közötti összefüggések összhangban vannak a 4. és az 5. fejezetbeli elméleti megállapításokkal, illetve következtetésekkel.

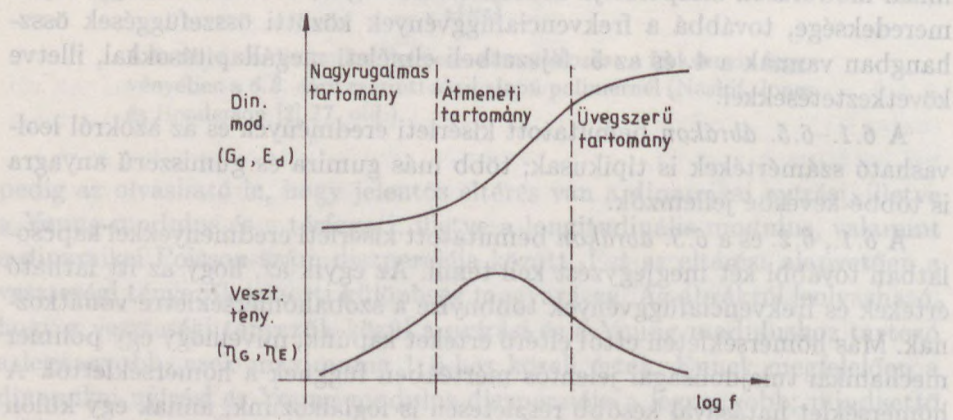
A 6.1.–6.5. ábrákon bemutatott kísérleti eredmények és az azokról leolvasható számértékek is tipikusak; több más gumira és gumyszerű anyagra is többé-kevésbé jellemzők.

A 6.1., 6.2. és a 6.3. ábrákon bemutatott kísérleti eredményekkel kapcsolatban további két megjegyzést kell tenni. Az egyik az, hogy az itt látható értékek és frekvenciafüggvények többnyire a szobahőmérsékletre vonatkoznak. Más hőmérsékleten ettől eltérő értéket kapunk, mivelhogy egy polimer mechanikai tulajdonságai jelentős mértékben függnak a hőmérséklettől. A hőmérséklet hatásával később részletesen is foglalkozunk, annak egy külön fejezetet szentelünk. A másik megjegyzés a kísérleti eredmények frekvenciasávjára vonatkozik. Ez minden esetben olyan széles, amelyben közvetlenül

több különféle mérési módszer alkalmazásával sem lehet meghatározni a dinamikai tulajdonságokat. Az itt idézett frekvenciafüggvényeket is közvetett módon határozták meg; egy szűkebb frekvenciasávban és több, különböző hőmérsékleten végzett mérés alapján. Ennek módszerét is később, a 8. fejezetben ismertetjük.

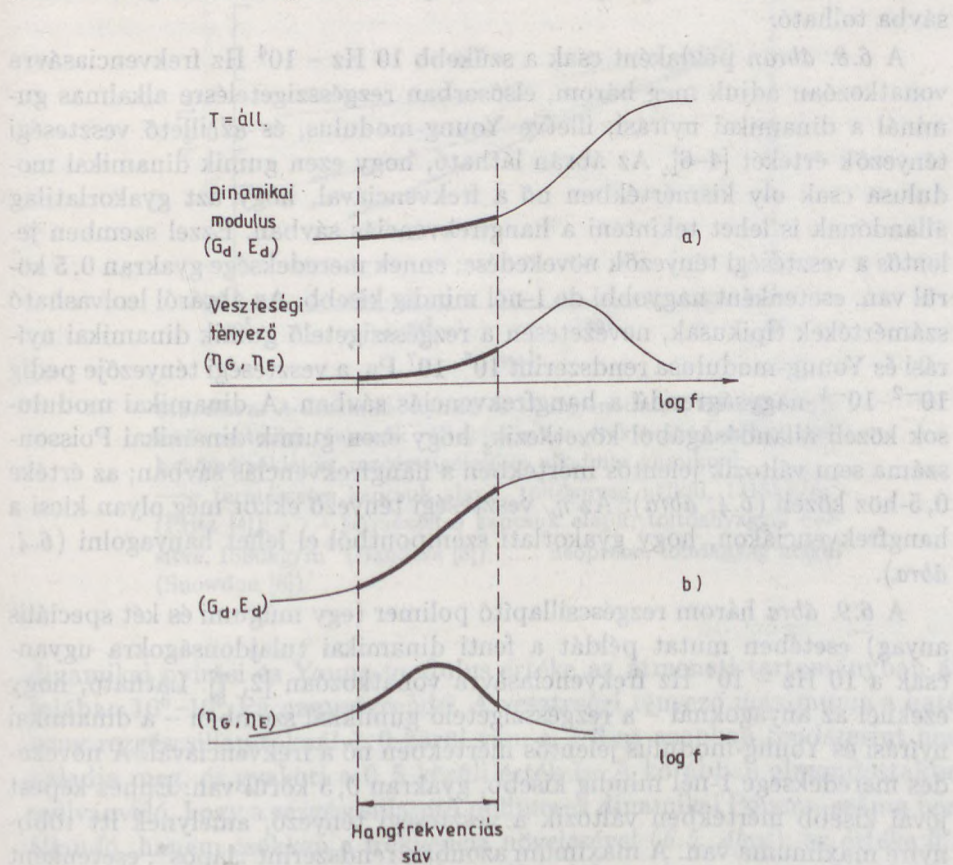
6.1.2. Polimerek rezgésszigetelésre és -csillapításra

A gumik és a gumiszerű anyagok dinamikai nyírási és Young-modulusának nagymértékű növekedéséből nyilvánvaló, hogy azok csak a kisebb frekvenciákon mutatnak valóban gumiszerű tulajdonságokat. A frekvencia növelésével a gumik egyre merevebbnek tűnnek, majd az igen nagy frekvenciákon úgy viselkednek, mint például egy kemény műanyag. Gumik és gumiszerű anyagok esetében a dinamikai modulus – elsősorban a nyírási vagy a Young-modulus – és a veszteségi modulus, illetve tényező frekvenciafüggése alapján az anyag dinamikai viselkedésének három tartományát lehet megkülönböztetni (6.6. ábra). A *gumiszerű viselkedés tartományának* nevezik azt a kisfrekvenciás részt, ahol a dinamikai modulus a legkisebb. Az anyag itt nagy rugalmas deformációkra képes, ezért gyakran *nagyrugalmas tartományról* is beszélnek. Az ezt követő *átmeneti tartományt* a dinamikai modulus nagymértékű növekedése és a veszteségi jellemzők maximuma jelzi. (A szakirodalomban ezt gyakran *relaxációs tartománynak* is nevezik.) Az átmeneti tartomány feletti frekvenciákon a dinamikai modulus olyan nagy, hogy a gumi kemény, merev anyaghoz hasonló tulajdonságokat mutat; ezért ezt az *üvegszerű viselkedés tartományának* nevezik. Az, hogy ezek a tartományok milyen frekvenciákra esnek, függ az illető anyagtól, valamint a hőmérséklettől is.



6.6. ábra. Gumik és gumiszerű anyagok dinamikai viselkedésének három tartománya.

Előbb láttuk, hogy mindhárom tartomány átfogásához igen széles; 8-10 dekád frekvenciasáv szükséges, míg a rezgéscsökkentés szempontjából fontos hangfrekvenciás sáv nem szélesebb, mint 3 dekád. A gumikat és a gumiszerű anyagokat két nagy csoportba lehet sorolni a hangfrekvenciás sávban mutatott dinamikai viselkedésük alapján, amit a 6.7. ábra szemléltet. Az egyik csoportba azok tartoznak, amelyek gumiszerű tartománya esik a hangfrekvenciás sávba (6.7a ábra). Ekkor viszonylag kicsi a dinamikai nyírási és Young-modulus értéke, ami elsősorban a rezgésszigetelés esetében követelmény. A szobahőmérsékleten és annak környezetében ez jellemző a természetes kaucsuk alapú gumikra és több műgumira (pl. sztirol-butadién, butil, poliizoprén stb.), amelyekbe rendszerint valamilyen töltőanyagot, általában kormot kevernek mechanikai tulajdonságaik javítására, elsősorban szakítószilárdságuk és kopásállóságuk növelése céljából. A 6.1. ábra szerinti gumi is elsősorban rezgésszigetelésre lehet alkalmas a hangfrekvenciákon.

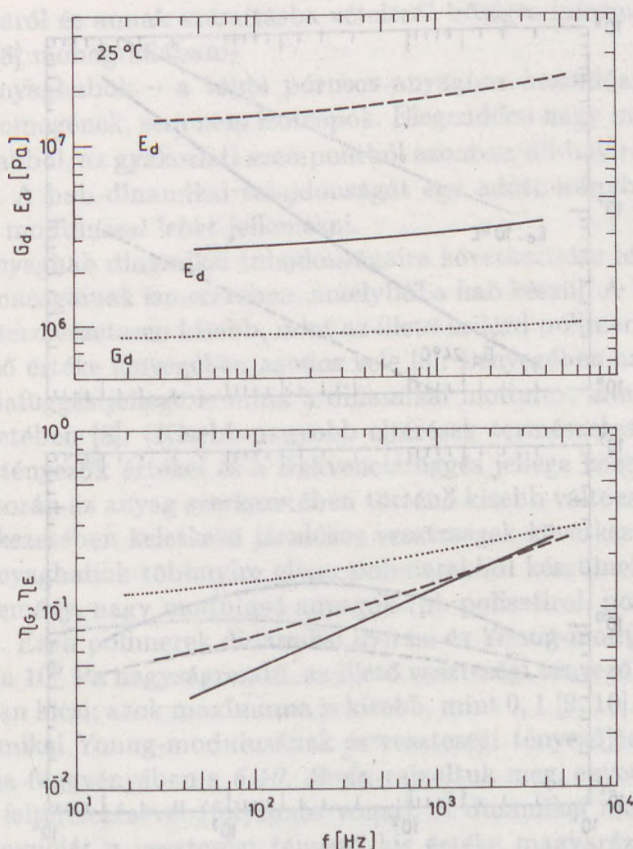


6.7. ábra. A gumik és a gumiszerű anyagok csoportosítása a dinamikai tulajdonságaik frekvenciafüggése alapján: a) rezgésszigetelők, b) rezgéscsillapítók.

A gumik és a gumyszerű anyagok másik csoportjába azok tartoznak, amelyek átmeneti tartománya, vagyis a veszteségi jellemzők maximuma a hangfrekvenciás sávba esik (6.7b ábra). Ezek ezért elsősorban rezgéscsillapításra lehetnek alkalmasak, feltéve, hogy az η_G illetve az η_E maximuma kellőképpen nagy; nevezetesen 1,0 nagyságrendű, vagy ahhoz közeli értékű. Az ilyen nagy veszteségi tényező az amorf polimerek sajátja. Rezgéscsillapításra ezért napjainkban többnyire ezen polimereket, nevezetesen egyes műgumikat (pl. klór-butil gumit), bitumeneket, poliuretánokat vagy pl. poli(vinil-acetát)-ot és annak kopolimerjeit használják. Ilyen speciális rezgéscsillapító anyag a 6.2. ábra szerinti akril alapú polimer is. A veszteségi maximum értéke és frekvenciája az illető anyagtól függ, de azok vegyészeti beavatkozással (pl. vulkanizálással, töltőanyagok adagolásával, kopolimerizációval stb.) megváltoztathatók. Ilyen módon például a 6.1. ábra szerinti természetes kaucsuk alapú gumi veszteségi maximuma is a hangfrekvenciás sávba tolható.

A 6.8. ábrán példaként csak a szűkebb $10 \text{ Hz} - 10^4 \text{ Hz}$ frekvenciasávra vonatkozóan adjuk meg három, elsősorban rezgésszigetelésre alkalmas guminál a dinamikai nyírási, illetve Young-modulus, és az illető veszteségi tényezők értékét [4-6]. Az ábrán látható, hogy ezen gumik dinamikai modulusa csak oly kismértékben nő a frekvenciával, hogy azt gyakorlatilag állandónak is lehet tekinteni a hangfrekvenciás sávban. Ezzel szemben jelentős a veszteségi tényezők növekedése; ennek meredeksége gyakran 0,5 körül van, esetenként nagyobb, de 1-nél mindig kisebb. Az ábráról leolvasható számértékek tipikusak, nevezetesen a rezgésszigetelő gumik dinamikai nyírási és Young-modulusa rendszerint $10^5 - 10^7 \text{ Pa}$, a veszteségi tényezője pedig $10^{-2} - 10^{-1}$ nagyságrendű a hangfrekvenciás sávban. A dinamikai modulusok közeli állandóságából következik, hogy ezen gumik dinamikai Poisson-száma sem változik jelentős mértékben a hangfrekvenciás sávban; az értéke 0,5-höz közeli (6.4. ábra). Az η_v veszteségi tényező ekkor még olyan kicsi a hangfrekvenciákon, hogy gyakorlati szempontból el lehet hanyagolni (6.4. ábra).

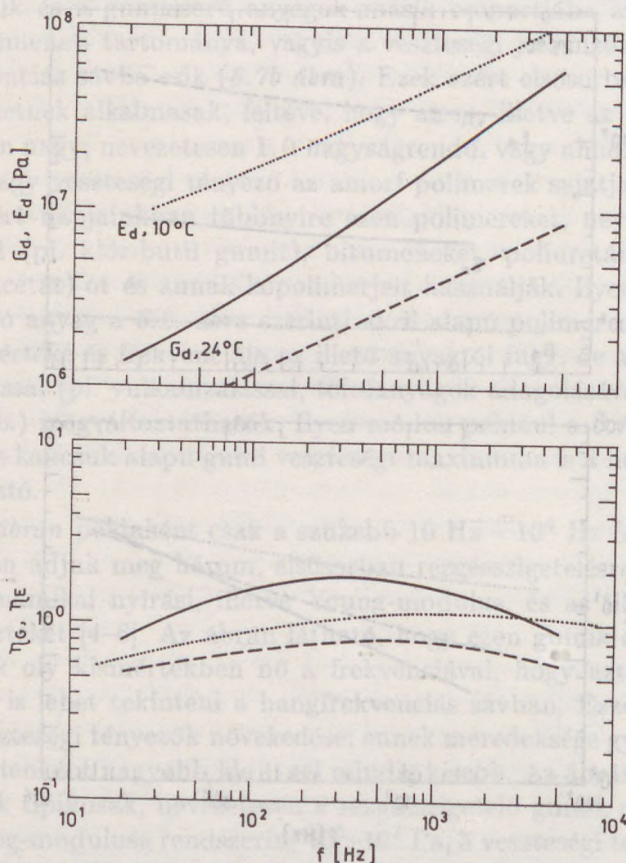
A 6.9. ábra három rezgéscsillapító polimer (egy műgumi és két speciális anyag) esetében mutat példát a fenti dinamikai tulajdonságokra ugyancsak a $10 \text{ Hz} - 10^4 \text{ Hz}$ frekvenciasávra vonatkozóan [2, 7]. Látható, hogy ezeknél az anyagoknál – a rezgésszigetelő gumikkal szemben – a dinamikai nyírási és Young-modulus jelentős mértékben nő a frekvenciával. A növekedés meredeksége 1-nél mindig kisebb, gyakran 0,5 körül van. Ehhez képest jóval kisebb mértékben változik a veszteségi tényező, amelynek itt többnyire maximuma van. A maximum azonban rendszerint „lapos”, esetenként olyannyira, hogy annak pontos helyét is nehéz megállapítani a viszonylag szűk hangfrekvenciás sávban végzett mérésekkel. Az ábráról leolvasható értékek ez esetben is tipikusak; nevezetesen rezgéscsillapító polimereknél a



6.8. ábra. A dinamikai nyírási és Young-modulus, valamint az illető veszteségi tényezők változása a hangfrekvenciás sávban, szobahőmérsékleten, rezgésszigetelésre alkalmas gumiknál:

— természetes kaucsuk alapú, töltőanyag nélkül, 1215kg/m^3 (Pritz [4]); - - természetes kaucsuk alapú, töltőanyaggal erősítve, 1580kg/m^3 (Bandera [5]); neoprene, töltőanyag nélkül (Snowdon [6]).

dinamikai nyírási és Young-modulus értéke az átmeneti tartományban általában 10^6 – 10^8 Pa nagyságrendű. A veszteségi tényező maximuma a hatékony rezgéscsillapítóknál 1,0 körül van, a 2–3-at azonban rendszerint nem haladja meg, és gyakori a 0,5 körüli érték is. A korábban elmondottakból nyilvánvaló, hogy a rezgéscsillapító polimerek dinamikai Poisson-száma nem állandó, hanem csökken a frekvencia növelésével (6.5. ábra); az értéke 0,5 és 0,4–0,3 között van a hangfrekvenciás sávban. Az η_ν veszteségi tényező értéke ekkor nem hanyagolható el, és a hangfrekvenciás sávban maximuma van.



6.9. ábra. A dinamikai nyírási és Young-modulus, valamint az illető veszteségi tényező változása a hangfrekvenciás sávban szoba-hőmérsékleten, illetve annak közelében speciális rezgéscsillapító polimereknél: — (Nashif, Jones és Henderson [2] 382. old.); - - - (uo. 417. old.); klór-butil gumi 35%-os koromtartalommal (Capps [7]).

6.2. Műanyaghabok

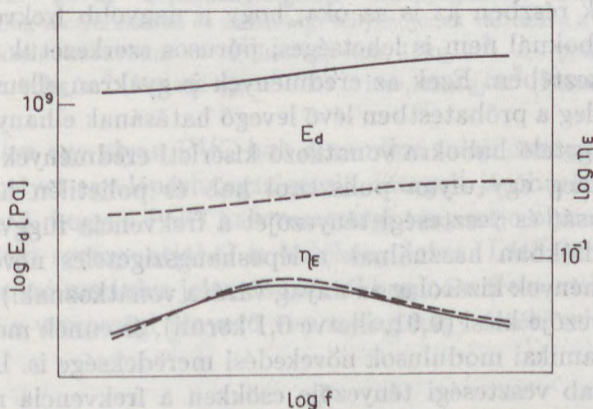
A gumikon és gumyszerű anyagokon kívül rezgéscsökkentési célra nagy mennyiségben használnak viszonylag lágy, vagyis kis rugalmassági modulusú műanyaghabokat. Egy műanyaghab – és bármely más pórusos anyag – dinamikai viselkedése a váz anyagán és a pórusszerkezeten kívül a pórusokban lévő levegőtől, illetve annak a vázzal való kölcsönhatásától is függ. A levegő lényegesen befolyásolhatja a hab dinamikai viselkedését, de annak hatása rendszerint függ a váz tulajdonságától is. Ebben a munkában csak a váz (a levegő nélküli hab) dinamikai tulajdonságaival foglalkozunk. (A le-

vegő hatásáról és annak számításba vételéről bőséges információ található például a [8] monográfiában.)

A műanyaghabok – a többi pórusos anyaghoz hasonlóan – általában sem nem homogének, sem nem izotropok. Elegendően nagy mintát véve egy műanyaghabból, az gyakorlati szempontból azonban többnyire homogénnek tekinthető. A hab dinamikai tulajdonságát egy adott irányban ugyancsak a komplex modulussal lehet jellemezni.

A műanyaghab dinamikai tulajdonságaira következtetni lehet azon polimer tulajdonságainak ismeretében, amelyből a hab készül. A hab dinamikai modulusa természetesen kisebb, mint az illető szilárd polimeré, de a veszteségi tényező értéke lényegében azonos vele [8]. Lényegében azonos továbbá a frekvenciafüggés jellege is mind a dinamikai modulus, mind a veszteségi tényező esetében [8]. (Kisebb-nagyobb eltérések természetesen lehetnek a veszteségi tényezők értékei és a frekvenciafüggés jellege között; egyrészt a habosítás során az anyag szerkezetében történő kisebb változások, másrészt a hab szerkezetében keletkező járulékos veszteségek következtében.)

A műanyaghabok többnyire olyan polimerekből készülnek, amelyek viszonylag kemény, nagy modulusú anyagok (pl. polisztirol, polietilén, poliuretán stb.). Ezen polimerek dinamikai nyírási és Young-modulusa szobahőmérsékleten 10^9 Pa nagyságrendű, az illető veszteségi tényezők értéke pedig kimondottan kicsi; azok maximuma is kisebb, mint 0,1 [9, 10]. Egy ilyen polimer dinamikai Young-modulusának és veszteségi tényezőjének változását a frekvencia függvényében a 6.10. ábrán rajzoltuk meg, egyetlen veszteségi maximum feltételezésével (folytonos vonal). A dinamikai modulus kismértékű diszperzióját a veszteségi tényező kis értéke magyarázza. Ezeknél a polimereknél kismértékű a veszteségi tényező frekvenciafüggése is; a maxi-



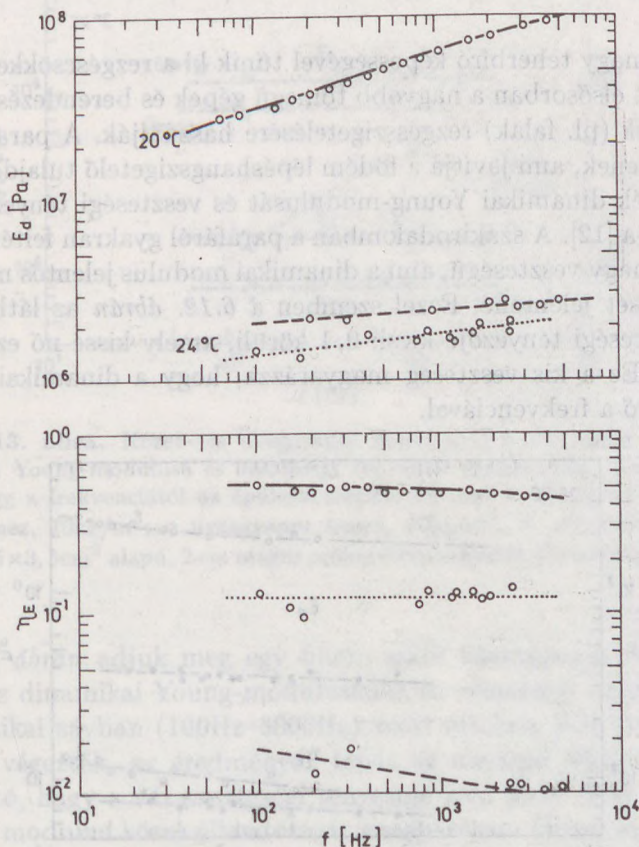
6.10. ábra. A dinamikai Young-modulus és a veszteségi tényező változása a frekvencia függvényében egy kemény polimernél (—) és az abból készült műanyaghabnál (---).

mum tehát igen lapos [9, 10]. Mindezek lényegében jellemzők az illető polimerből készült műanyaghabra is, azzal az eltéréssel természetesen, hogy az utóbbi dinamikai modulusa jóval kisebb az alapanyagénál (szaggatott vonal). A dinamikai tulajdonságok frekvenciafüggésének megállapításához ez esetben is igen széles frekvenciasáv szükséges. Következésképpen a viszonylag keskeny hangfrekvenciás sávban egy ilyen műanyaghab veszteségi tényezője – amely viszonylag kicsi – nőhet, csökkenhet, vagy közel állandónak is tűnhet, a maximumának elhelyezkedésétől függően. A hab dinamikai modulusa viszont minden esetben nő a frekvenciával. Mindezekből nyilvánvaló, hogy az ilyen műanyaghaboknál nem kell számolni a váz dinamikai tulajdonságainak jelentős mértékű frekvenciafüggésével.

A kis veszteségű műanyaghabok elsősorban rezgésszigetelésre lehetnek alkalmasak feltéve, hogy dinamikai modulusuk értéke kellőképpen alacsony. Egy műanyaghab alkalmas lehet továbbá rezgéscsillapításra akkor, ha az olyan polimerből készül, amelynek veszteségi tényezője elegendően nagy a hangfrekvenciákon. Ez esetben nagy lesz a hab vázáinak veszteségi tényezője is, amikor is számolni kell a dinamikai tulajdonságok – elsősorban a dinamikai modulus – jelentős frekvenciafüggésével, az 5.1.2. pontban elmondottaknak megfelelően.

A rezgéscsökkentésre alkalmas műanyaghabok dinamikai tulajdonságairól lényegesen kevesebb eredmény található a szakirodalomban, mint a gumikról és gumyszerű anyagokról. A gyakorlatban ezek az anyagok rendszerint húzó-nyomó terhelésnek vannak kitéve, ezért mérésel majd minden esetben az illető terhelési irányhoz tartozó Young-modulust és veszteségi tényezőt határozzák meg. Ezek az adatok többnyire csak a hangfrekvenciás sávra, de gyakran még annak is csupán egy szűk tartományára korlátozódnak. Ennek részben az is az oka, hogy a nagyobb frekvenciákon való vizsgálat a haboknál nem is lehetséges; pórusos szerkezetük és inhomogenitásuk következtében. Ezek az eredmények is gyakran ellentmondásosak, amit valószínűleg a próbatestben lévő levegő hatásának elhanyagolása okoz.

A rezgésszigetelő habokra vonatkozó kísérleti eredmények közül a 6.11. ábrán adjuk meg egy olyan polisztirol hab és polietilén hab dinamikai Young-modulusát és veszteségi tényezőjét a frekvencia függvényében, melyeket úszópadlóknak használnak a lépéshangszigetelés növelése céljából [11]. (Az eredmények kizárólag az anyag vázára vonatkoznak.) Mindkét hab veszteségi tényezője kicsi (0,01, illetve 0,1 körüli), és ennek megfelelően kismértékű a dinamikai modulusok növekedési meredeksége is. Látható, hogy a polisztirol hab veszteségi tényezője csökken a frekvencia növelésével, a maximuma tehát feltehetőleg a hangfrekvenciás sáv alatt van. A polietilén habnál viszont nem lehet megállapítani a veszteségi tényező frekvenciafüggésének jellegét, annak változása valószínűleg olyan kismértékű ezeken a frekvenciákon, amit elfednek a mérési hibák.

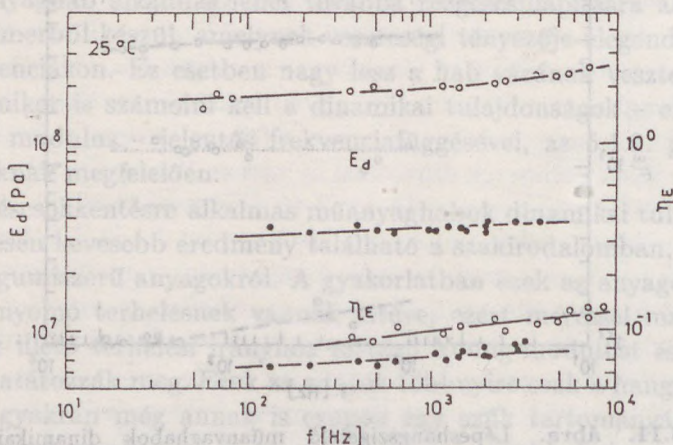


6.11. ábra. Lépéshangszigetelő műanyaghabok dinamikai Young-modulusának és veszteségi tényezőjének változása a hangfrekvenciás sávban: - - - Polisztirol hab, 11kg/m^3 ; polietilén hab, 30kg/m^3 (Pritz [11]); — PVC hab, 450kg/m^3 (Pritz [12]).

A 6.11. ábra egy olyan PVC hab dinamikai tulajdonságainak változását is mutatja, melyet egy lépéshangszigetelő, rétegelt járóburkolatról fejtettek le [12]. Látható, hogy a PVC hab veszteségi tényezője olyan nagy, hogy az rezgéscsillapítás szempontjából is hatékony lehet. Látható továbbá, hogy most a dinamikai modulus jelentős mértékben nő a frekvenciával, ami összhangban van a veszteségi tényező viszonylag nagy értékével.

6.3. Parafa

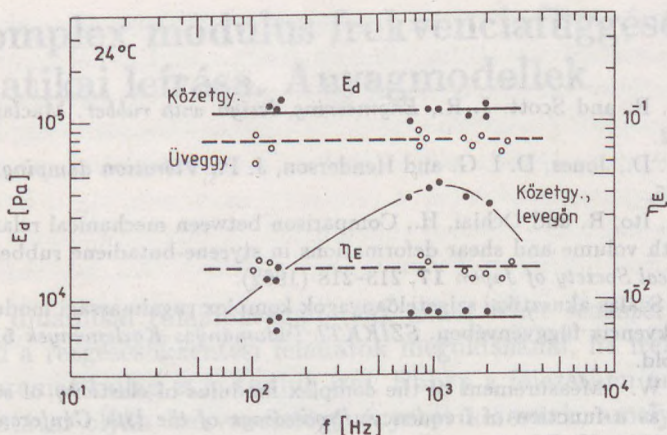
A parafa a nagy teherbíró képességével tűnik ki a rezgéscsökkentő anyagok közül. Ezért elsősorban a nagyobb tömegű gépek és berendezések, valamint épületelemek (pl. falak) rezgésszigetelésére használják. A parafából padlókat is készítenek, ami javítja a földem lépéshangszigetelő tulajdonságát. Két parafatermék dinamikai Young-modulusát és veszteségi tényezőjét a 6.12. ábra mutatja [12]. A szakirodalomban a parafáról gyakran feltételezik, hogy viszonylag nagy veszteségű, ami a dinamikai modulus jelentős mértékű frekvenciafüggését jelentené. Ezzel szemben a 6.12. ábrán az látható, hogy a parafa veszteségi tényezője kicsi; 0,1 körüli, amely kissé nő ezeken a frekvenciákon. Ez a kis veszteség magyarázza, hogy a dinamikai modulus is csak kissé nő a frekvenciával.



6.12. ábra. Parafatermékek dinamikai Young-modulusa és veszteségi tényezője a frekvencia függvényében: ● 180kg/m³; ○ padlólap, 470kg/m³ (Pritz [12]).

6.4. Szálas anyagok

A szálas anyagok közül a kőzet- és üvegyapotokat nagy mennyiségben használják úszopadlóknak szigetelőanyagként a födémek lépéshangszigetelésének növelésére, valamint a kisebb súlyú gépészeti berendezések rezgésszigetelésére. Ezek dinamikai tulajdonságainak frekvenciafüggéséről korábban számos, egymásnak ellentmondó kísérleti eredményt közöltek. Az újabb kutatások szerint azonban a kőzet- és üvegyapot anyagoknál nem kell számolni a váz dinamikai tulajdonságainak frekvenciafüggésével [13]. Példa-



6.13. ábra. Kőzet- és üveggyapot lemezeknél a váz dinamikai Young-modulusa és veszteségi tényezője gyakorlatilag nem függ a frekvenciától az épületakusztikai sávban: ● kőzetgyapot lemez, 70kg/m^3 ; ○ üveggyapot lemez, 80kg/m^3 . A méréseket $3,5 \times 3,5\text{cm}^2$ alapú, 2 cm magas próbatestenen végezték (Pritz [13]).

ként a 6.13. ábrán adjuk meg egy finom szálú kőzetgyapot és egy üveggyapot lemez dinamikai Young-modulusának és veszteségi tényezőjének az épületakusztikai sávban (100Hz–3000Hz) mért értékeit [13]. (A méréseket vákuumban végezték, az eredmények tehát az anyagok vázára vonatkoznak.) Látható, hogy a váz veszteségi tényezője igen kicsi: 0,01 körüli, ami a dinamikai modulus közel állandóságát magyarázza. (Ilyen kis veszteségi tényezőnél a dinamikai modulus növekedése az (5.10) összefüggés szerint a 100 Hz–3000 Hz frekvenciasávban elvileg csak 2% körüli). Látható továbbá, hogy a veszteségi tényező is gyakorlatilag állandónak tekinthető ezeken a frekvenciákon, bár valamiféle változás elvileg szükségszerű. A mérési eredmények szórása azonban túl nagy, a mérési frekvenciasáv pedig túl keskeny ahhoz, hogy meg lehessen állapítani az η_E változásának jellegét. Megemlítjük, hogy a gyakorlatban egy kőzet- vagy üveggyapot lemeznél a veszteségi tényező eredő értéke jóval nagyobb a fentiniél a pórusokban áramló levegő hatásának következtében. Ennek szemléltetése céljából a 6.13. ábrán megadtuk a veszteségi tényező levegőn mért értékeit is a kőzetgyapot próbatest esetében [13].

A kőzet- és üveggyapotok mellett *nemezeket* is gyakran használnak rezgésszigetelésre és a födémek lépéshangszigetelésének növelésére. A nemezek veszteségi tényezője jóval nagyobb, mint a kőzet- és üveggyapot lemezeké; például egy nemezpadlón végzett mérések szerint az η_E értéke 0,1 és 0,2 között van [12]. A veszteségi tényező ezen értékek megfelelően a dinamikai modulus kissé, de nem elhanyagolható mértékben nő a frekvenciával [12].

1. Payne, A. R. and Scott, J. R., *Engineering design with rubber*. Maclaren, London, 1960. p.32.
2. Nashif, A. D., Jones, D. I. G. and Henderson, J. P., *Vibration damping*. Wiley, New York, 1985.
3. Wada, Y., Ito, R. and Ochiai, H., Comparison between mechanical relaxations associated with volume and shear deformations in styrene-butadiene rubber. *Journal of the Physical Society of Japan* **17**, 213-218 (1962).
4. Pritz, T., Szálas akusztikai szigetelőanyagok komplex rugalmassági modulusának mérése a frekvencia függvényében. *SZIKKTI Tudományos Közlemények* **51**, Budapest, 1977. 44.old.
5. Bandera, W. , Measurement of the complex modulus of elasticity of some acoustic materials as a function of frequency. *Proceedings of the 13th Conference of AICB, Sarajevo*, 1984. No.7.3.
6. Snowdon, J. C., *Vibration and shock in damped mechanical systems*. Wiley, New York, 1968. p.10.
7. Capps, N. R., Effect of cure systems and reinforcing fillers on dynamic mechanical properties of chlorobutyl elastomers for potential vibration-control applications. *Rubber Chemistry and Technology* **59**, 103-122 (1986).
8. Hilyard, N. C., Dynamic mechanical behaviour, in: *Mechanics of cellular plastics*, edited by Hilyard, N. C., Applied Science Publishers, London, 1982.
9. Ferry, J. D., *Viscoelastic properties of polymers*. Wiley, New York, 1970.
10. Read, B. E. and Dean, G. E., *The determination of dynamic properties of polymers and composites*. Adam Hilger, Bristol, 1978.
11. Pritz, T., Dynamic Young's modulus and loss factor of plastic foams for impact sound isolation. *Journal of Sound and Vibration* **178**, 315-322 (1994).
12. Pritz, T., Dynamic properties of floor covering materials. *Proceedings of the 15th International Congress on Acoustics, Trondheim*, 1995. Vol.2. pp. 617-620.
13. Pritz, T., Frequency dependence of frame dynamic characteristics of mineral and glass wool materials. *Journal of Sound and Vibration* **106**, 161-169 (1986).

7. A komplex modulus frekvenciafüggésének matematikai leírása. Anyagmodellek

Egy anyag dinamikai tulajdonságait csak akkor lehet szakszerűen számításba venni a rezgéscsökkentési feladatok megoldásánál, ha frekvenciafüggésüket matematikailag is le tudjuk írni. Ebben a fejezetben anyagmodellek vizsgálatával olyan frekvenciafüggvényeket keresünk, amelyekkel a lehető legpontosabban leírható a dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők kísérletileg tapasztalt változása. Megmutatjuk, hogy az ideális rugóból és a viszkózus csillapítóból felépülő, régóta használt mechanikai modellek (Kelvin–Voigt, Maxwell, Zener) erre nem alkalmasak, mert a velük előállítható frekvenciafüggvények meredeksége mindig nagyobb a kísérletileg tapasztaltakhoz képest. Megmutatjuk továbbá, hogy valóságghű frekvenciafüggvényekhez az említett modellek általánosításával juthatunk; éspedig oly módon, hogy a dinamikai viselkedésüket leíró $\sigma - \varepsilon$ differenciálegyenletben az egészrendű deriváltakat egynél kisebb rendű, ún. tört-deriváltakkal helyettesítjük. Befejezésül röviden foglalkozunk a frekvenciafüggvényeknek az anyagjellemző időfüggvények ismeretében történő keresésével.

7.1. Célok és problémák

Az 5. és a 6. fejezetben elmondottakból nyilvánvaló, hogy a dinamikai modulus és a veszteségi jellemzőket rendszerint nem lehet egyetlen számmal jellemezni, mivelhogy azok a frekvencia függvényei. Különösen jelentős mértékű frekvenciafüggés jellemzi a viszonylag nagy belső súrlódású, polimer alapú rezgéscsökkentő anyagokat. Következésképpen a rezgéscsökkentési alkalmazásoknál az anyag dinamikai tulajdonságait csak akkor lehet szakszerűen számításba venni, ha frekvenciafüggésüket matematikailag is le tudjuk írni. Ebben a fejezetben az a célunk, hogy olyan frekvenciafüggvényeket keressünk, amelyekkel a lehető legpontosabban leírható a dinamikai tulajdonságok változása egy szűkebb vagy szélesebb frekvenciasávban.

Az 5. fejezetben elméletileg megmutattuk, hogy a dinamikai tulajdonságok frekvenciafüggésének alapvető jellegzetességei valamennyi anyagnál hasonlóak; nevezetesen a dinamikai modulus monoton nő a frekvenciával, a veszteségi jellemzőknek pedig egy vagy több maximumuk van. A kísérleti

eredmények arról tanúskodnak, hogy a rezgéscsökkentő anyagok többségére csak egy veszteségi maximum jellemző. Ezért a továbbiakban az ilyen frekvenciafüggvények keresésével foglalkozunk. Tekintettel arra, hogy a függvényeket alapvetően gyakorlati célból – a rezgéscsökkentési számításokhoz – keressük, egyes esetekben megfelelnek azok is, amelyek csak egy szűkebb, 2–3 dekád frekvenciasávra (pl. a veszteségi maximum alatti frekvenciákra, vagy csak annak környezetére) vonatkoznak. Általában azonban olyan függvényeket keresünk, amelyek majd minden frekvencián, vagyis jóval a veszteségi maximum alatt és felett is, legalább 8–10 dekádon át jól tükrözik az anyag dinamikai viselkedését. Ez utóbbiakra – a teljességre való törekvés igényén túlmenően – azért is szükség van, mert a dinamikai terhelés gyakran impulzusos, vagy zaj jellegű, ami széles sávú harmonikus terhelésnek felel meg.

Egy anyag dinamikai modulusát és veszteségi jellemzőit mérésekből ismerjük. A frekvenciafüggvények keresésében egyik kézenfekvő módnak ezen mérési adatok analízise látszik [1]. Kereshetjük továbbá a frekvenciafüggvényeket az időtartományban végzett mérések alapján is – valamely anyagjellemző időfüggvénynek ismeretében oly módon, hogy azt a frekvenciatartományba transzformáljuk. Ezeknél a módszereknél előny, hogy fizikailag valós frekvenciafüggvényekhez juthatunk. A függvények kauzálisak is lesznek akkor, ha előállításuk során ügyelünk arra, hogy teljesüljenek a diszperziós összefüggések. Az azonban már korántsem biztos, hogy ezek a frekvenciafüggvények általános érvényűek, vagyis, hogy más anyagok esetében is megfelelők.

Általános érvényű frekvenciafüggvényekhez a $\sigma - \varepsilon$ általános elméleti összefüggéséből kiindulva juthatunk. A 2.2. pontban láttuk, hogy ezt az összefüggést az időtartományban integrál- vagy differenciálegyenlettel lehet felírni. A differenciálegyenlet szolgál azon anyagmodellek alapjául, amelyekkel a gyakorlatban a leggyakrabban találkozunk. Ilyenek a rugóból és a viszkózus csillapítóból álló, régóta használt szemléletes mechanikai modellek, valamint az utóbbi időben kifejlesztett ún. tört-derivált matematikai modell. Ezek a modellek kauzálisak is, de – az elméleti jellegükből következően – egyáltalán nem biztos, hogy valóságok, vagyis, hogy a viselkedésük összhangban van a kísérleti tapasztalatokkal. A differenciálegyenlet egyúttartóinak a megválasztásával azonban számos, különféle viselkedésű modellt lehet kialakítani, ami lehetőséget ad valóságghű frekvenciafüggvények keresésére. További előny ennél a módszernél, hogy a differenciálegyenlet ismeretében a frekvenciafüggvények viszonylag egyszerűen előállíthatók. Mindezek indokolják, hogy vizsgálatunk középpontjába a differenciálegyenleten alapuló modelleket állítsuk. Röviden foglalkozunk továbbá az integrálegyenleten alapuló modellezéssel is.

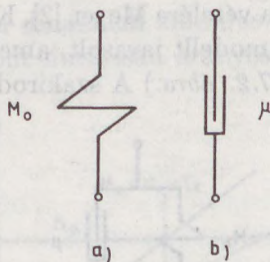
Az előzőkhöz hasonlóan a modellek vizsgálata során sem kell kikötést tenni a deformáció típusára vonatkozóan. Az alábbiak tehát elvileg bármely komplex modulusra is érvényesek. A modellek vizsgálatát és értékelését azonban – a gyakorlat szempontjait szem előtt tartva – többnyire a komplex nyírási és Young-modulusra gondolva végezzük.

7.2. Modellezés a $\sigma - \varepsilon$ differenciálegyenlet alapján

7.2.1. Egészrendű deriváltakon alapuló modellek. Mechanikai modellek rugóból és viszkózus csillapítóból

7.2.1.1. Az alapelemek

Az anyagok dinamikai viselkedésének leírására legkorábban kifejlesztett modellek a 7.1. ábrán vázolt két alapelemből: az *ideális* (veszteség nélküli)



7.1. ábra. A mechanikai modellek két alapeleme: a) ideális rugó, b) viszkózus csillapító.

rugóból és a viszkózus csillapítóból, illetve ezek kombinációiból állnak. Az utóbbi alapelemet egy viszkózus folyadékban mozgó dugattyú jelképezi. A rugó az anyag rugalmasságát, a csillapító pedig belső súrlódását veszi számításba. A feszültség és a deformáció összefüggését a rugónál a Hooke-törvény adja:

$$\sigma = M_0 \varepsilon, \quad (7.1)$$

ahol M_0 a rugómerevség, amely azonos az anyag rugalmassági modulusával ideálisan rugalmas esetben. A csillapító egyenlete pedig a Newton-féle súrlódási törvény, amely szerint a feszültség a deformációsebességgel arányos, vagyis

$$\sigma = \mu \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (7.2)$$

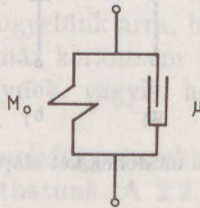
ahol μ a folyadék viszkozitása. Az alapelemek számának növelésével és azok különféle összekötésével igen sokféle modellt lehet kialakítani. A viszkózus

csillapító (7.2) egyenletéből nyilvánvaló, hogy az ilyen modellek bármelyikénél a $\sigma - \varepsilon$ összefüggést az időtartományban lineáris differenciálegyenlet írja le.

A dinamikai viselkedés ilyen modellezésével már akkor is foglalkoztak, amikor még csak kevés kísérleti eredmény állt rendelkezésre, és így nem volt lehetséges a modellek pontosságának vizsgálata. Ennek ellenére később ez a módszer általánosan elterjedt és mindmáig használatos, ami sokkal inkább szemléletességének, mint pontosságának köszönhető. Ezért a sokféle lehetséges modell közül itt csak azokkal foglalkozunk, amelyek legalább minőségileg helyesen tükrözik a dinamikai tulajdonságok változását valamely frekvenciatartományban. Ezeknél meghatározzuk a relaxációs és a kúszási függvényeket is, amelyek ismerete további lehetőséget ad a modellek értékeléséhez.

7.2.1.2. A Kelvin-Voigt-modell

A belső súrlódás számításba vételére Meyer [2], Kelvin [3] és Voigt [4] – egymástól függetlenül – olyan modellt javasolt, amelynél a rugó és a csillapító párhuzamosan van kötve (7.2. ábra.) A szakirodalomban ez *Kelvin-Voigt-*



7.2. ábra. A Kelvin-Voigt-modell.

modell néven terjedt el. Ennél a modellnél a deformáció azonos a két alapelemen, az eredő feszültséget pedig az azokon ébredő feszültségek összege adja, vagyis

$$\sigma(t) = M_0 \varepsilon(t) + \mu \frac{d\varepsilon(t)}{dt}. \quad (7.3a)$$

A modell viselkedésének vizsgálatához μ helyére az alábbi együtthatót célszerű írni:

$$\sigma(t) = M_0 \varepsilon(t) + M_0 \tau_k \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (7.3b)$$

ahol

$$\tau_k = \frac{\mu}{M_0}. \quad (7.4)$$

A τ_k idő dimenziójú mennyiség, amely fizikai jelentését a későbbiek során állapítjuk meg.

A komplex modulus meghatározásához helyettesítsük (3.5)-öt és (3.6)-ot a (7.3b)-be és vegyük figyelembe, hogy most az idő szerinti deriválás a $j\omega$ -val való szorzással helyettesíthető, ezzel

$$\overline{M}(j\omega) = M_0(1 + j\omega\tau_k). \quad (7.5)$$

Ebből pedig leolvasható, hogy:

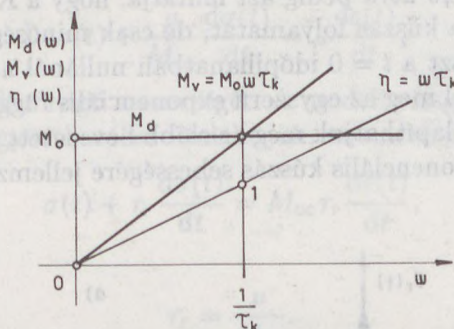
$$M_d = M_0, \quad (7.6)$$

$$M_v(\omega) = M_0\omega\tau_k \quad (7.7)$$

és így

$$\eta(\omega) = \omega\tau_k. \quad (7.8)$$

Ennél a modellnél tehát a dinamikai modulus nem függ a frekvenciától, a veszteségi jellemzők viszont lineárisan arányosan nőnek azzal (7.3. ábra).



7.3. ábra. A Kelvin-Voigt-modellnél a dinamikai modulus nem függ a frekvenciától, a veszteségi modulus és a veszteségi tényező pedig lineárisan nő azzal.

Ezt összevetve az 5.2. ábra függvényeivel nyilvánvaló, hogy a Kelvin-Voigt-modell nem képes leírni egy valódi anyag dinamikai viselkedését minden frekvencián. A modell viselkedése teljesen eltér a valóságtól a nagyobb frekvenciákon, ahol mindkét veszteségi jellemző – és így az abszolút modulus is – a végtelenhez tart, míg egy valódi anyagnál a veszteségi jellemzők nullához közelítenek, az abszolút modulus pedig véges értékhez tart. A modell viselkedése viszont minőségileg megfelel a valódi anyagokénak a veszteségi maximum alatti frekvenciákon, ahol a dinamikai modulus még alig változik, és a veszteségi jellemzők nőnek a frekvenciával. Mennyiségi szempontból azonban a Kelvin-Voigt-modell viselkedése még ezeken a frekvenciákon

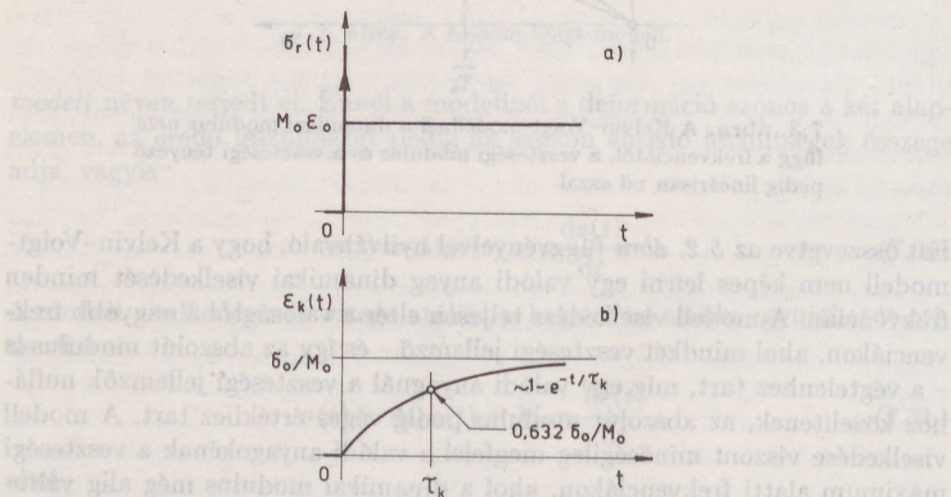
sem megfelelő, mert – mint az előző fejezetben láttuk – a veszteségi jellemzők növekedési meredeksége a valóságban elmarad a lineáristól.

A Kelvin–Voigt-modell anomális viselkedése jól tanulmányozható a relaxációs és a kúszási függvény vizsgálatával is. Ezeket a (7.3b) differenciálegyenlet megoldásával kapjuk, ε_0 nagyságú deformációugrás, illetve σ_0 nagyságú feszültségugrás esetében:

$$\sigma_r(t) = M_0 \varepsilon_0 + M_0 \varepsilon_0 \tau_k \delta(t), \quad (7.9)$$

$$\varepsilon_k(t) = \frac{\sigma_0}{M_0} (1 - e^{-t/\tau_k}), \quad (7.10)$$

ahol $t \geq 0$. Ezeket a függvényeket a 7.4. ábrán vázoltuk. A 7.4a ábrát tekintve nyilvánvaló, hogy a modell nem képes leírni a feszültségrelaxációt. Fizikailag abszurd ugyanis, hogy a feszültség értéke végtelen nagy a $t = 0$ időpillanatban és az sem felel meg a valóságnak, hogy az $M_0 \varepsilon_0$ állandó értékű bármely $t > 0$ időre. (A feszültség végtelen nagy kezdeti értéke egyébként összhangban van azzal, hogy a komplex modulus nagyfrekvencián végtelenhez tart.) A 7.4b ábra pedig azt mutatja, hogy a Kelvin–Voigt-modell ugyan képes leírni a kúszás folyamatát, de csak minőségileg. A valóságban a deformáció egyrészt a $t = 0$ időpillanatban nullánál nagyobb, másrészt a növekedése nem felel meg az egyszerű exponenciális függvénynek. A kúszási függvény kapcsán állapíthatjuk meg az előbb bevezetett τ_k fizikai jelentését. Ez a tényező az exponenciális kúszás sebességére jellemző, amit *retardációs*

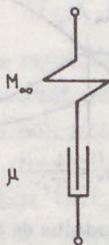


7.4. ábra. A Kelvin–Voigt-modell relaxációs (a) és kúszási (b) függvénye.

időnek neveznek. A (7.10)-ből leolvasható, hogy ez az az idő, amely alatt a deformáció eléri végértékének az $(1 - 1/e)$ -szeresét, azaz kb. 63%-át.

7.2.1.3. A Maxwell-modell

A Maxwell-modell [5] sorosan kötött rugóból és csillapítóból áll (7.5. ábra). Ennél a kötési módnál a feszültség azonos a modell két eleménél, míg a



7.5. ábra. A Maxwell-modell.

deformáció különböző. Egyszerűen belátható, hogy ekkor az alábbi differenciaegyenlet írja le a σ és az ϵ közötti összefüggést:

$$\sigma(t) + \frac{\mu}{M_\infty} \frac{d\sigma(t)}{dt} = \mu \frac{d\epsilon(t)}{dt}, \quad (7.11a)$$

ahol most M_∞ jelöli a rugó merevségét. A modell vizsgálatához ez esetben is célszerű, ha az együtthatókat átalakítjuk, nevezetesen:

$$\sigma(t) + \tau_r \frac{d\sigma(t)}{dt} = M_\infty \tau_r \frac{d\epsilon(t)}{dt}, \quad (7.11b)$$

ahol

$$\tau_r = \frac{\mu}{M_\infty}. \quad (7.12)$$

A komplex modulust az előzőekhez hasonlóan kapjuk:

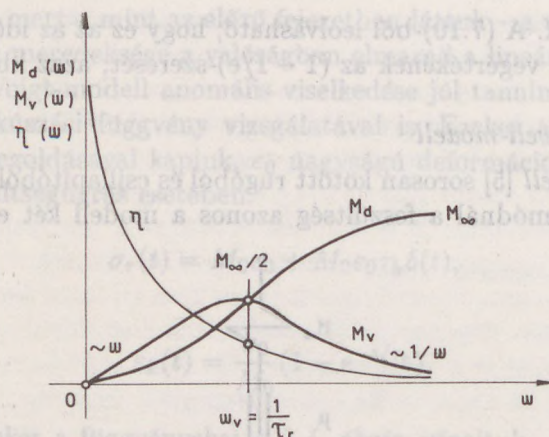
$$\overline{M}(j\omega) = M_\infty \frac{j\omega\tau_r}{1 + j\omega\tau_r}, \quad (7.13)$$

amelyből

$$M_d(\omega) = M_\infty \frac{(\omega\tau_r)^2}{1 + (\omega\tau_r)^2}, \quad (7.14)$$

$$M_v(\omega) = M_\infty \frac{\omega\tau_r}{1 + (\omega\tau_r)^2}, \quad (7.15)$$

$$\eta(\omega) = \frac{1}{\omega\tau_r}. \quad (7.16)$$



7.6. ábra. A dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők frekvenciafüggése a Maxwell-modellnél.

A dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők változását a frekvencia függvényében a 7.6. ábra mutatja. A dinamikai modulus növekedése megfelel a valóságnak, az viszont nem, hogy az M_d értéke a nulla frekvencián zérus. (Ez annak a következménye, hogy a modell differenciálegyenletéből hiányzik a $\sigma - \varepsilon$ statikus összefüggését kifejező tag.) Nagyfrekvencián a dinamikai modulus az M_∞ -hez, vagyis a rugó merevségéhez tart. A dinamikai modulussal szemben a veszteségi modulus viselkedése minőségileg minden frekvencián megfelel a valóságnak. Ennek maximuma van az

$$\omega_v = \frac{1}{\tau_r} \quad (7.17)$$

frekvencián, ahol

$$M_m = M_v(\omega_v) = \frac{M_\infty}{2}. \quad (7.18)$$

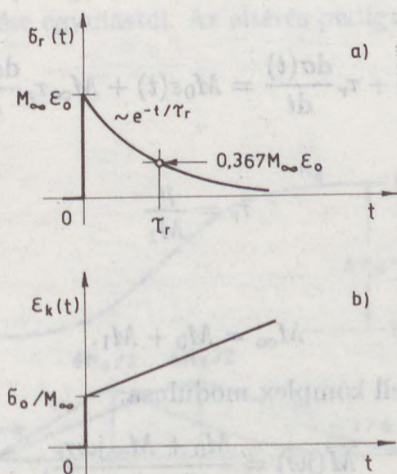
A veszteségi tényező viselkedése azonban nem reális, mivel értéke minden frekvencián vele fordított arányban csökken. Az η tehát a nulla frekvenciához közeledve végtelenhez tart, ami a dinamikai modulus anomális kisfrekvenciás viselkedésének a következménye. Ezeket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a Maxwell-modell viselkedése nem felel meg a valóságnak minden frekvencián, de az minőségileg jól írja le a dinamikai tulajdonságok változását a nagyobb frekvenciákon, különösen a veszteségi maximum felett (pl. egy gumi üvegszerű tartományában), ahol a veszteségi jellemzők csökkennek, a dinamikai modulus pedig véges értékhez tart. Mennyiségi szempontból azonban a modell viselkedése ezeken a frekvenciákon sem megfelelő, mivel pl. a veszteségi jellemzők csökkenésének meredeksége a valóságban kisebb, mint a modell szerinti reciprok változás (6.2. ábra).

A Maxwell-modell anomáliája és pontatlansága a relaxációs és a kúszási függvényt tekintve is nyilvánvaló, amelyeket a (7.11b) differenciálegyenlet megoldásával kapunk:

$$\sigma_r(t) = M_{\infty} \varepsilon_0 e^{-t/\tau_r}, \quad (7.19)$$

$$\varepsilon_k(t) = \frac{\sigma_0}{M_{\infty}} \left(1 + \frac{t}{\tau_r}\right). \quad (7.20)$$

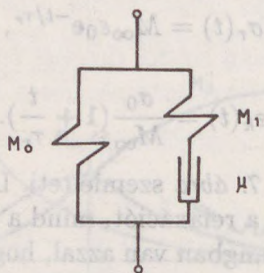
Ezeket a függvényeket a 7.7. ábra szemlélteti. Látható, hogy a modell minőségileg képes leírni mind a relaxációt, mind a kúszást, de csak a nullához közeli kis időkre. (Ez összhangban van azzal, hogy a modell csak a nagyobb frekvenciákon tükrözi helyesen a dinamikai tulajdonságok változását.) Az idő múlásával a feszültség nullához tart, a deformáció növekedése pedig minden határon túl folytatódik. Ez viszont a folyadékokra és nem pedig a szilárd anyagokra jellemző. Mennyiségi szempontból a modell viselkedése a nullához közeli időken sem megfelelő, mivel a valóságban a relaxáció és a kúszás folyamata nem felel meg az itteni exponenciális, illetve lineáris változásnak. Befejezésül állapítsuk meg a τ_r fizikai jelentését, amire a (7.19) egyenlet ad lehetőséget. Látható, hogy τ_r a relaxáció sebességére jellemző állandó, amelyet *relaxációs időnek* neveznek. Ez az az idő, amely alatt a feszültség változó része kezdeti értékének az $1/e$ részére, vagyis kb. 37%-ára csökken.



7.7. ábra. A Maxwell-modell relaxációs (a) és kúszási (b) függvénye.

7.2.1.4. A Zener-modell

A dinamikai viselkedést pontosabban leíró anyagmodellhez jutunk akkor, ha a Maxwell-moddal párhuzamosan kapcsolunk egy rugót (7.8. ábra).



7.8. ábra. A Zener-modell – a szabályos lineáris viszkoelasztikus test.

Ennek a modellnek megfelelő differenciálegyenletet először Zener [6] írta fel és ezért gyakran *Zener-modellnek* nevezik, de ugyanezt érték *szabályos lineáris viszkoelasztikus testen* is. A σ és az ϵ közötti összefüggésre ekkor az alábbi differenciálegyenlet vezethető le:

$$\sigma(t) + \frac{\mu}{M_1} \frac{d\sigma(t)}{dt} = M_0 \epsilon(t) + \frac{\mu(M_0 + M_1)}{M_1} \frac{d\epsilon(t)}{dt}. \quad (7.21a)$$

Az együtthatókban szereplő M_0 , M_1 és μ jelentése a 7.8. ábráról olvasható le. A modell viselkedésének vizsgálatához a (7.21a)-t az alábbi együtthatókkal célszerű felírni:

$$\sigma(t) + \tau_r \frac{d\sigma(t)}{dt} = M_0 \epsilon(t) + M_\infty \tau_r \frac{d\epsilon(t)}{dt}, \quad (7.21b)$$

ahol

$$\tau_r = \frac{\mu}{M_1} \quad (7.22)$$

és

$$M_\infty = M_0 + M_1. \quad (7.23)$$

Ezekkel a Zener-modell komplex modulusa:

$$\overline{M}(j\omega) = \frac{M_0 + M_\infty j\omega \tau_r}{1 + j\omega \tau_r}, \quad (7.24a)$$

amellyel a szakirodalomban gyakran az alábbi alakban találkozunk:

$$\frac{\overline{M}(j\omega) - M_\infty}{M_0 - M_\infty} = \frac{1}{1 + j\omega \tau_r}. \quad (7.24b)$$

A komplex modulus összetevői:

$$M_d(\omega) = \frac{M_0 + M_\infty(\omega\tau_r)^2}{1 + (\omega\tau_r)^2}, \quad (7.25)$$

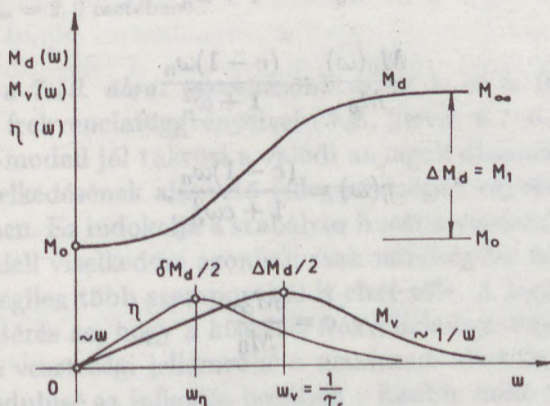
$$M_v(\omega) = \frac{(M_\infty - M_0)\omega\tau_r}{1 + (\omega\tau_r)^2}, \quad (7.26)$$

$$\eta(\omega) = \frac{(M_\infty - M_0)\omega\tau_r}{M_0 + M_\infty(\omega\tau_r)^2}. \quad (7.27)$$

Ezeket a frekvenciafüggvényeket a 7.9. ábrán rajzoltuk meg. Látható, hogy a dinamikai modulus monoton nő a frekvenciával, értéke a nulla frekvencián M_0 , a nagyfrekvencián pedig az M_∞ -hez tart. A veszteségi jellemzők értéke 0 Hz-en nulla, és mindkettő nullához tart a nagyobb frekvenciákon is. Az ismert módon belátható, hogy a veszteségi modulus maximuma ugyancsak az $\omega_v = 1/\tau_r$, a veszteségi tényezőé pedig az

$$\omega_\eta = \frac{1}{\tau_r} \left(\frac{M_0}{M_\infty} \right)^{1/2} = \omega_v \left(\frac{M_0}{M_\infty} \right)^{1/2} \quad (7.28)$$

frekvencián van. A veszteségi tényező maximuma tehát kisebb frekvencián jelentkezik, mint a veszteségi modulusé, és annál kisebbben, minél nagyobb az M_∞ és az M_0 eltérése egymástól. Az eltérés pedig a veszteségi jellemzők



7.9. ábra. A Zener-modell minőségileg jól tükrözi a dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők frekvenciafüggésének alapvető jellegzetességeit.

maximumával arányos, nevezetesen:

$$M_m = M_v(\omega_v) = \frac{\Delta M_d}{2}, \quad (7.29)$$

$$\eta_m = \eta(\omega_\eta) = \frac{\delta M_d}{2}, \quad (7.30)$$

ahol

$$\Delta M_d = M_\infty - M_0 \quad (7.31)$$

és

$$\delta M_d = \frac{\Delta M_d}{\sqrt{M_\infty M_0}}. \quad (7.32)$$

A δM_d -t *modulus-defektnek* nevezik. A (7.26) és (7.27) függvényeket tekintve látható, hogy mindkét veszteségi jellemző lineárisan nő a frekvenciával a maximum alatt, és azzal fordított arányban csökken felette. Igazolható, hogy a félértékszélességek értéke: 1,14 dekád.

A dinamikai modulus diszperziója és a veszteségi tényező közötti összefüggés szemléltetése céljából a 7.10. ábrán megrajzoltuk a dinamikai tulajdonságok változását az $\eta_m = 0,5$ és $2,0$ esetében. Az ábra a modulusok M_0 -ra normalizált értékeit mutatja, amelyeket az alábbi alakba írt (7.25)–(7.27) összefüggésekkel számítottunk az ω_n normalizált frekvencia függvényében:

$$\frac{M_d(\omega)}{M_0} = \frac{1 + c\omega_n^2}{1 + \omega_n^2}, \quad (7.33)$$

$$\frac{M_v(\omega)}{M_0} = \frac{(c-1)\omega_n}{1 + \omega_n^2}, \quad (7.34)$$

$$\eta(\omega) = \frac{(c-1)\omega_n}{1 + c\omega_n^2}, \quad (7.35)$$

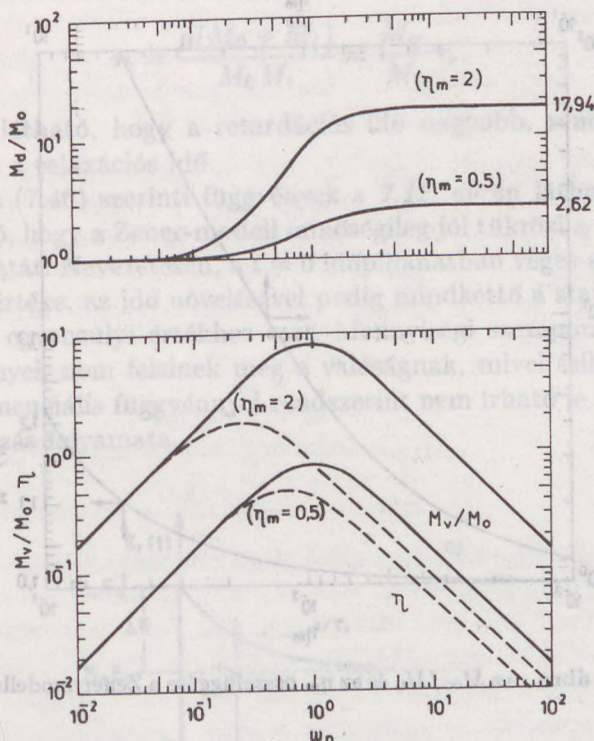
ahol

$$c = \frac{M_\infty}{M_0} \quad (7.36)$$

és

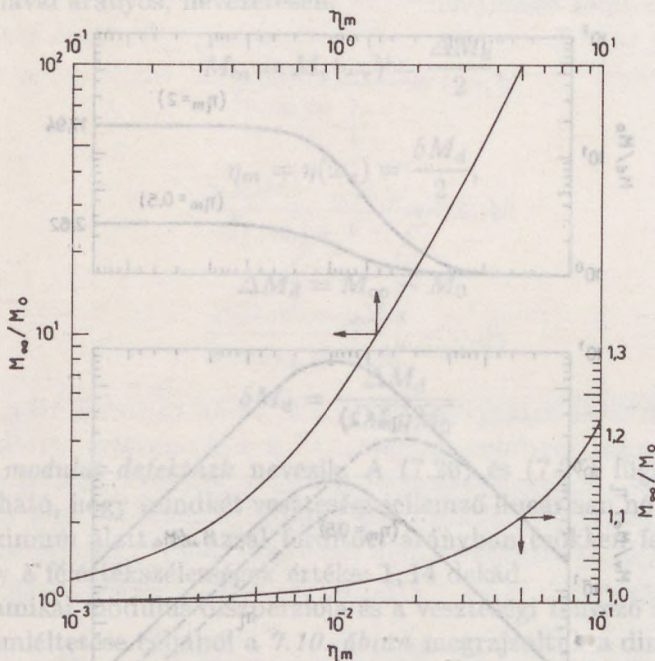
$$\omega_n = \omega\tau_r = \frac{\omega}{\omega_v}. \quad (7.37)$$

A 7.11. ábrán megadtuk továbbá az M_∞/M_0 és az η_m értékeinek összefüggését.



7.10. ábra. A dinamikai és a veszteségi modulus M_0 -ra normalizált értékek, valamint a veszteségi tényező változása a Zener-modell szerint, a normalizált frekvencia függvényében, $\eta_m = 0,5$ és $\eta_m = 2,0$ esetében.

A 7.9. és a 7.10. ábrát összehasonlítva az 5. és 6. fejezet elméleti, illetve kísérleti frekvenciafüggvényeivel (5.2., illetve 6.1–6.3. ábrák) látható, hogy a Zener-modell jól tükrözi a valódi anyagok dinamikai, illetve viszkoelasztikus viselkedésének alapvető jellegzetességeit egyetlen veszteségi maximum esetében. Ez indokolja a szabályos lineáris viszkoelasztikus test elnevezést. A modell viselkedése azonban csak minőségileg felel meg a valóságnak, mennyiségileg több szempontból is eltér tőle. A leginkább szembeötlő mennyiségi eltérés az, hogy a kísérleti frekvenciafüggvények meredeksége – nevezetesen a veszteségi jellemzőké a maximum alatt és felett, valamint a dinamikai modulusé az inflexiós pontban – kisebb, mint a Zener-modellnél. Ennek megfelelően a valódi anyagoknál az $M_v(\omega)$ és az $\eta(\omega)$ függvények félértékszélessége nagyobb, mint a modell szerinti 1,14 dekád. (Emlékeztünk rá, hogy a 6. fejezetben idézett gumiknál és gumyszerű anyagoknál a félértékszélesség értéke 4–5 dekád körüli.) Az elméleti és kísérleti frekven-



7.11. ábra. Az M_∞/M_0 és az η_m összefüggése a Zener-moddélnél.

ciafüggvények eltérő meredekségével kapcsolatos az is, hogy a veszteségi jellemzők maximuma és a dinamikai modulus kísérletileg tapasztalt változása közötti összefüggés nem felel meg a (7.29), illetve (7.30) egyenletnek.

Vizsgáljuk meg végül a Zener-moddell relaxációs és kúszási függvényét is. Ezeket a (7.21b) differenciálegyenlet megoldásával kapjuk ε_0 , illetve σ_0 nagyságú ugrásfüggvény-terhelés feltételezésével. A relaxációs függvény:

$$\sigma_r(t) = M_0 \varepsilon_0 + \Delta \sigma e^{-t/\tau_r}, \quad (7.38)$$

ahol $\Delta \sigma$ az ún. *túlfeszültség*, amely

$$\Delta \sigma = M_\infty \varepsilon_0 - M_0 \varepsilon_0 = \Delta M \varepsilon_0, \quad (7.39)$$

a τ_r pedig a relaxációs idő, amely értékét a (7.22) adja. A kúszási függvény:

$$\varepsilon_k(t) = \frac{\sigma_0}{M_0} - \Delta \varepsilon e^{-t/\tau_r}, \quad (7.40)$$

ahol $\Delta \varepsilon$ az ún. *deformáció-hiányt* jelöli, amely

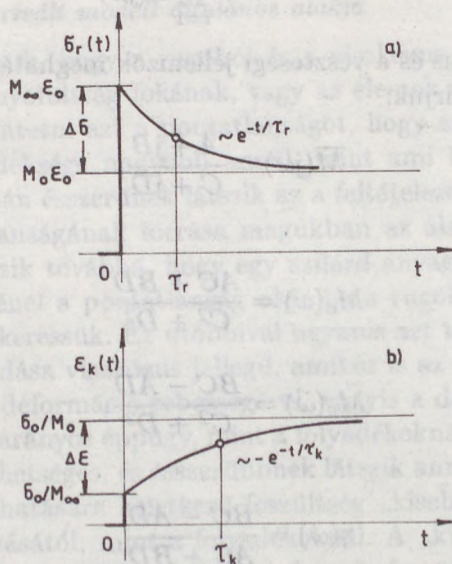
$$\Delta \varepsilon = \frac{\sigma_0}{M_0} - \frac{\sigma_0}{M_\infty}, \quad (7.41)$$

a τ_k pedig a retardációs idő:

$$\tau_k = \frac{\mu(M_0 + M_1)}{M_0 M_1} = \frac{M_\infty}{M_0} \tau_r. \quad (7.42)$$

Ez utóbbiból látható, hogy a retardációs idő nagyobb, rendszerint jóval nagyobb, mint a relaxációs idő.

A (7.38) és (7.40) szerinti függvények a 7.12. ábrán láthatók. Ezekből megállapítható, hogy a Zener-modell minőségileg jól tükrözi a relaxáció és a kúszás folyamatát. Nevezetesen, a $t = 0$ időpillanatban véges a feszültség és a deformáció értéke, az idő növelésével pedig mindkettő a statikus állapotnak megfelelő egyensúlyi értékhez tart. Mennyiségi szempontból azonban ezek a függvények nem felelnek meg a valóságnak, mivel szilárd anyagnál egyszerű exponenciális függvénnyel rendszerint nem írható le sem a relaxáció, sem a kúszás folyamata.



7.12. ábra. A Zener-modell minőségileg jól írja le a relaxációt és a kúszást.

7.2.1.5. Az általános $\sigma - \varepsilon$ differenciálegyenlet mint anyagmodell

A rugóból és viszkózus csillapítóból álló modelleknél a feszültség és a deformáció összefüggésére minden esetben lineáris differenciálegyenletet kapunk. Ennek alapján Alfrey [7] feltételezte, hogy szilárd anyagnál a feszültség és a deformáció összefüggését egy általános, lineáris differenciálegyenlet írja le, amelyet a 2.2. pontban már említettünk. Ebben a felfogásban a (2.19)

differenciálegyenlet úgy tekinthető, mint egy általános anyagmodell, melyet itt az alábbi alakba írunk:

$$\sigma(t) + \sum_{i=1}^n b_i \frac{d^i \sigma(t)}{dt^i} = a_0 \varepsilon(t) + \sum_{i=1}^m a_i \frac{d^i \varepsilon(t)}{dt^i}, \quad (7.43)$$

ahol a_0 , a_i és b_i anyagtól függő állandók. A későbbiek során ez a vélekedés általánossá vált, majd azt is igazolták, hogy a (7.43)-nak termodinamikai alapjai vannak, melyben szigorúan kötött az m és n értékének kapcsolata, nevezetesen: csak $m = n$ vagy $m = n + 1$ lehet [8].

Az általános modell komplex modulusát a (7.43) differenciálegyenlet megoldásával kapjuk:

$$\overline{M}(j\omega) = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^m a_i (j\omega)^i}{1 + \sum_{i=1}^n b_i (j\omega)^i}. \quad (7.44)$$

A dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők meghatározásához a (7.44)-et az alábbi alakba írjuk:

$$\overline{M}(j\omega) = \frac{A + jB}{C + jD}, \quad (7.45)$$

amelyből

$$M_d(\omega) = \frac{AC + BD}{C^2 + D^2}, \quad (7.46)$$

$$M_v(\omega) = \frac{BC - AD}{C^2 + D^2}, \quad (7.47)$$

és így

$$\eta(\omega) = \frac{BC - AD}{AC + BD}, \quad (7.48)$$

ahol

$$A = a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - \dots, \quad (7.49a)$$

$$B = a_1 \omega - a_3 \omega^3 + a_5 \omega^5 - \dots, \quad (7.49b)$$

$$C = 1 - b_2 \omega^2 + b_4 \omega^4 - \dots, \quad (7.49c)$$

$$D = b_1 \omega - b_3 \omega^3 + b_5 \omega^5 - \dots, \quad (7.49d)$$

Nyilvánvaló, hogy a (7.43) állandóinak megfelelő megválasztásával előállíthatjuk az előzőekben vizsgált modellek bármelyikét. Az állandók számának növelésével pedig bonyolultabb frekvenciafüggvényeket is nyerhetünk,

mint az említett modellekkel. Teljesen általános esetben a (7.43), illetve a (7.44) egyenletben elvileg valamennyi állandó nullától különbözik. Ennek a modellnek előnye az általánossága, de az állandók nagy száma bonyolult, nehezen kezelhető frekvenciafüggvényekhez vezethet. Igazolható továbbá, hogy még ily módon se állíthatók elő olyan függvények, amelyek meredeksége széles frekvenciatartományban összhangban lenne a kísérleti tapasztalatokkal. A (7.44) szerinti függvényeknél például a veszteségi jellemzők a maximumuk alatt a frekvenciával mindig lineárisan nőnek, míg például a gumyszerű anyagokon mért függvények meredeksége rendszerint 0,5 körül van. Ezek a problémák arra ösztönözték a kutatókat, hogy olyan modellt keressenek, amely a fentínél egyszerűbb, de jobban megfelel a valóságnak. Ezt az ún. tört-derivált modellben találták meg.

7.2.2. Tört-deriváltakon alapuló modellek

7.2.2.1. A tört-derivált modell általános alakja

Az előzőekben láttuk, hogy a rugóból és a viszkózus csillapítóból felépülő modelleknél a bonyolultság fokának, vagy az elemek számának növelésével sem lehet megszüntetni azt a pontatlanságot, hogy az elméleti frekvenciafüggvények meredeksége nagyobb annál, mint ami kísérletileg tapasztalható. Ennek alapján ésszerűnek látszik az a feltételezés, hogy a mechanikai modellek pontatlanságának forrása magukban az alapelemekben van. Az is ésszerűnek látszik továbbá, hogy egy szilárd anyag dinamikai viselkedésének modellezésénél a pontatlanság okát ne a rugóban, hanem a viszkózus csillapítóban keressük. Ez utóbbival ugyanis azt tételezzük fel, hogy az anyag belső súrlódása viszkózus jellegű, amikor is az ennek hatására keletkező feszültség a deformáció sebességével, vagyis a deformáció idő szerinti első deriváltjával arányos éppúgy, mint a folyadékoknál. Szilárd anyagnál ez azonban aligha lehetséges, és ésszerűbbnek látszik annak feltételezése, hogy a belső súrlódás hatására keletkező feszültség „kisebb mértékben” függ a deformáció változásától, mint a folyadékoknál. A „kisebb mértékű” változást matematikailag úgy lehet kifejezni, hogy a feszültség a deformációnak az 1-nél kisebb rendű deriváltjával; az ún. tört-deriváltjával arányos, vagyis

$$\sigma(t) \sim \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \varepsilon(t), \quad (7.50)$$

ahol $0 < \alpha < 1$. Egy függvény tört-deriváltját a gamma-függvény révén lehet definiálni, nevezetesen [1]:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \varepsilon(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\varepsilon(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad (7.51)$$

amely harmonikus függvények esetében az alábbi egyszerű alakba írható [1]:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \varepsilon(t) = (j\omega)^\alpha \varepsilon(t). \quad (7.52)$$

Ez utóbbiból pedig nyilvánvaló, hogy ha a $\sigma - \varepsilon$ összefüggésben tört-deriváltak szerepelnek, akkor a komplex modulus kifejezésében 1-nél kisebb kitevőjű hatványfüggvények jelennek meg. Ily módon pedig olyan kis meredekségű frekvenciafüggvényeket is elő lehet állítani, ami a mechanikai modellekkel nem lehetséges.

A tört-derivált modell eredetét feltehetően Nutting [9] és Gemant [10] korai kísérleti megfigyelésében, illetve elméleti munkájában kereshetjük. Nutting a kísérletei során azt tapasztalta, hogy a kúszás és a relaxáció folyamata a nagy belső súrlódású viszkoelasztikus anyagoknál nem exponenciális, hanem hatványfüggvény szerint játszódik le. Később Gemant pedig elméletileg megállapította, hogy ilyen időfüggvények esetében a dinamikai tulajdonságok változását a frekvenciatartományban 1-nél kisebb kitevőjű hatványfüggvények írják le. Ez utóbbi alapján jutott Gemant arra a következtetésre, hogy a $\sigma - \varepsilon$ összefüggést az időtartományban 1-nél kisebb rendű deriváltakkal lehet megadni [11]. Érdekes, hogy a Gemant említett közleményét követő kb. két évtizedben csak néhány dolgozat [12–14] foglalkozott a tört-derivált modellel, amelynek említése hiányzik a viszkoelaszticitás tárgyú könyvek többségéből is. Később a 60-as évek végétől Caputo, valamint Caputo és Mainardi [15–21] foglalkozott intenzíven a modell elméleti vizsgálatával és gyakorlati alkalmazásával. Céljuk elsősorban az volt, hogy ily módon vegyék számításba a közetek veszteségi tényezőjét, amely a kísérletek szerint a hangfrekvenciás sávban közel állandó. A modellt alkalmasnak találták továbbá fémek és üvegek belső súrlódásának jellemzésére az átmeneti tartományban [18, 19]. Caputo munkáival egyidőben más szerzők is használták ezt a modellt különféle anyagok, elsősorban a műanyagok, valamint a fémek viszkoelasztikus viselkedésének jellemzésére [22–26]. Széles körű alkalmazásra azonban csak a rezgéscsillapító polimerek területén talált a modell. Ezen anyagok nagymértékű elterjedésével ugyanis hatékonyságuk megítéléséhez és szakszerű felhasználásukhoz mindinkább szükségessé vált dinamikai tulajdonságaik mennyiségi jellemzése [1, 27–42].

A tört-deriváltak bevezetésével már nem építhetők fel rugóból és viszkózus csillapítóból álló szemléletes mechanikai modellek, ehelyett „csupán” a feszültség és deformáció közötti matematikai összefüggést lehet felírni. Ennek általános alakját a (7.43)-ból kapjuk oly módon, hogy az egész rendű deriváltakat tört-deriváltakkal helyettesítjük [1, 27, 29, 33]:

$$\sigma(t) + \sum_{i=1}^n b_i D^{\beta_i} [\sigma(t)] = a_0 \varepsilon(t) + \sum_{i=1}^m a_i D^{\alpha_i} [\varepsilon(t)], \quad (7.53)$$

ahol D a (7.51) szerinti tört-deriválást jelentő operátor; a_i , b_i , α_i és β_i anyagállandók; az utóbbiak értéke: $0 < \alpha_i < 1$, $0 < \beta_i < 1$. A komplex modulust a (7.52) figyelembevételével kapjuk:

$$\overline{M}(j\omega) = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^m a_i (j\omega)^{\alpha_i}}{1 + \sum_{i=1}^n b_i (j\omega)^{\beta_i}}. \quad (7.54)$$

Ebben az általános összefüggésben szereplő α_i és β_i kitevők megválasztásával az elméleti és a kísérleti frekvenciafüggvények meredekségét többé-kevésbé összhangba lehet hozni. Igazolták, hogy a tört-derivált modell eleget tesz a kauzalitás elvének is [28, 37, 41]. A modell (7.53) általános alakja természetesen nem jelent egyszerűsítést a (7.43) differenciálegyenleten alapulóhoz képest. Erre az általános alakra azonban nincs is szükség, mivelhogy – az eddigi tapasztalatok szerint – már néhány állandóval is igen jól leírható a dinamikai tulajdonságok változása a legkülönbözőbb anyagoknál [27–34, 37, 39–40]. Az állandók variálásával ez esetben is több, különböző viselkedésű modellt lehet kialakítani. Ezek közül a továbbiakban csak olyanokkal foglalkozunk, amelyek gyakorlati szempontból a legfontosabbak, nevezetesen, amelyek alkalmasak a dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők frekvenciafüggésének leírására a veszteségi maximum alatt vagy annak környékén, illetve a teljes frekvenciatartományon át. Ilyenekhez a Kelvin–Voigt és a Zener-modell általánosításával juthatunk.

7.2.2.2. Az általánosított Kelvin–Voigt-modell

Az egyik legegyszerűbb tört-derivált modellnél a (7.53) differenciálegyenletben a_0 és a_1 kivételével valamennyi együttható zérus (három paraméteres modell):

$$\sigma(t) = a_0 \varepsilon(t) + a_1 \frac{d^{\alpha_1} \varepsilon(t)}{dt^{\alpha_1}}. \quad (7.55a)$$

Ezt úgy is tekinthetjük, mint a (7.3) differenciálegyenlet, vagyis, mint a Kelvin–Voigt-modell általánosítását. Ennek figyelembevételével (7.55a)-t az alábbi együtthatókkal célszerű felírni:

$$\sigma(t) = M_0 \varepsilon(t) + M_0 \tau_k^\alpha \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha}, \quad (7.55b)$$

ahol $\alpha = \alpha_1$.

A modell komplex modulusát a (7.52) figyelembevételével kapjuk:

$$\overline{M}(j\omega) = M_0[1 + (j\omega\tau_k)^\alpha], \quad (7.56)$$

ahol

$$(j\omega)^\alpha = \cos(\alpha\pi/2)\omega^\alpha + j\sin(\alpha\pi/2)\omega^\alpha. \quad (7.57)$$

Ezzel a komplex modulus összetevői, az alábbi normalizált alakba írva:

$$\frac{M_d(\omega)}{M_0} = 1 + \cos(\alpha\pi/2)\omega_n^\alpha, \quad (7.58)$$

$$\frac{M_v(\omega)}{M_0} = \sin(\alpha\pi/2)\omega_n^\alpha, \quad (7.59)$$

$$\eta(\omega) = \frac{\sin(\alpha\pi/2)\omega_n^\alpha}{1 + \cos(\alpha\pi/2)\omega_n^\alpha}, \quad (7.60)$$

ahol

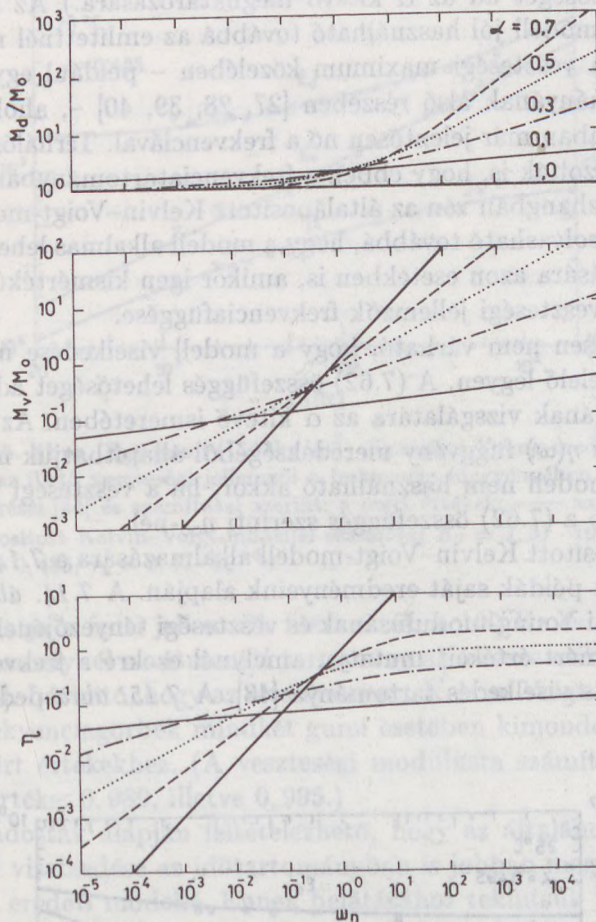
$$\omega_n = \omega\tau_k. \quad (7.61)$$

A dinamikai és veszteségi modulus M_0 -ra normalizált értékeinek, valamint a veszteségi tényezőnek a változását a 7.13. ábrán rajzoltuk meg az ω_n normalizált frekvencia függvényében az $\alpha = 1, 0; 0, 7; 0, 5; 0, 3$ és $0, 1$ értékeire. (Az $\alpha = 1, 0$ esetében az eredeti Kelvin-Voigt-modellt kapjuk.) Látható, hogy most – az eredeti modellel szemben – a dinamikai modulus nő a frekvenciával és annál nagyobb mértékben, minél kisebb az α . (Ez alól kivétel az $\alpha = 1$ eset, amikor is a (7.58)-ban lévő frekvenciafüggvény együtt-hatója nulla.) A veszteségi jellemzők is nőnek a frekvencia növelésével, de az α értékétől függően kisebb meredekséggel, mint a Kelvin-Voigt-modellnél. A veszteségi modulus a dinamikai modulushoz hasonlóan minden határon túlnő, és mindkettő az ω^α függvény szerint; következésképpen a veszteségi tényező a nagyobb frekvenciákon állandó értékhez tart, nevezetesen:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \eta(\omega) = \eta_\infty = \operatorname{tg}(\alpha\pi/2). \quad (7.62)$$

Ennél a modellnél tehát egyik veszteségi jellemzőnek sincs maximuma, ami azonban nem felel meg a valóságnak.

Az általánosított Kelvin-Voigt-modell tehát nem képes leírni egy valódi anyag dinamikai viselkedését minden frekvencián. Jól leírja azonban a dinamikai tulajdonságok változását a veszteségi maximum alatti kisebb frekvenciákon – pl. egy gumi nagyrugalmas tartományában –, ahol a dinamikai modulus még alig változik, viszont a veszteségi tényező a frekvenciával je-



7.13. ábra. A dinamikai és a veszteségi modulus M_0 -ra normalizált értékek, valamint a veszteségi tényezőnek változása az általánosított Kelvin-Voigt-modell szerint a normalizált frekvencia függvényében.

lentősebb mértékben nő. A (7.58)-ból látható, hogy ez a viselkedés azokon a frekvenciákon jellemző, amelyeken

$$\cos(\alpha\pi/2)\omega_n^\alpha \ll 1, \quad (7.63)$$

amikor is

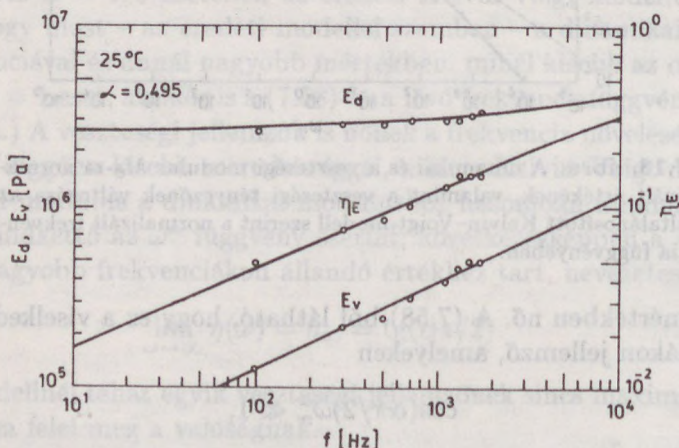
$$M_d \approx M_0, \quad (7.64a)$$

$$\eta(\omega) \approx \sin(\alpha\pi/2)\omega_n^\alpha. \quad (7.64b)$$

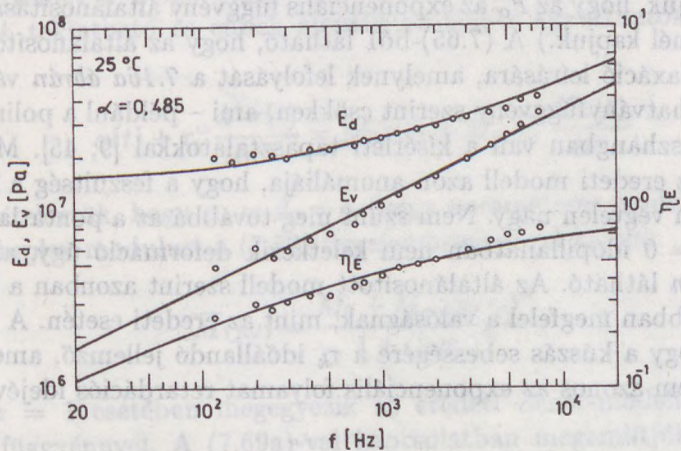
(Az utóbbi összefüggés a veszteségi tényező mért értékeinek ismeretében egyszerű lehetőséget ad az α kitevő meghatározására.) Az általánosított Kelvin–Voigt-modell jól használható továbbá az említettnél nagyobb frekvenciákon is a veszteségi maximum közelében – például egy polimer átmeneti tartományának alsó részében [27, 28, 39, 40] –, ahol a dinamikai modulus általában már jelentősen nő a frekvenciával. Térhálós polimerekre elméletileg igazolták is, hogy ebben a frekvenciatartományban a molekuláris elmélet összhangban van az általánosított Kelvin–Voigt-moddal [32]. A 7.13. ábráról leolvasható továbbá, hogy a modell alkalmas lehet a dinamikai viselkedés leírására azon esetekben is, amikor igen kismértékű a dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők frekvenciafüggése.

Természetesen nem várható, hogy a modell viselkedése minden anyag esetében megfelelő legyen. A (7.62) összefüggés lehetőséget ad a modell alkalmazhatóságának vizsgálatára az α kitevő ismeretében. Az α értékét az $M_v(\omega)$ vagy az $\eta(\omega)$ függvény meredekségéből állapíthatjuk meg. Nyilvánvaló, hogy a modell nem használható akkor, ha a veszteségi tényező mért értéke nagyobb a (7.62) összefüggés szerinti η_∞ -nél.

Az általánosított Kelvin–Voigt-modell alkalmazására a 7.14. és 7.15. ábrákon láthatók példák saját eredményeink alapján. A 7.14. ábra egy olyan gumi dinamikai Young-modulusának és veszteségi tényezőjének a 100 Hz és 2 kHz között mért értékeit mutatja, amelynél ezekre a frekvenciákra esik a nagy rugalmas viselkedés tartománya [43]. A 7.15. ábra pedig egy másik



7.14. ábra. Egy gumi (1215 kg/m^3) dinamikai Young-modulusa és az illető veszteségi jellemzői a frekvencia függvényében Pritz mérései [43] és számításai szerint: o mért értékek; — az általánosított Kelvin–Voigt-moddal számítva; $E_0 = 2,71 \cdot 10^6 \text{ Pa}$, $\alpha = 0,495$, $\tau_k = 7,9 \text{ s}$.



7.15. ábra. Egy gumi (1552 kg/m^3) dinamikai Young-modulusa és az illető veszteségi jellemzői a frekvencia függvényében Pritz mérései [44] és számításai szerint; $\circ$ mért értékek; — az általánosított Kelvin-Voigt-moddal számítva; $E_0 = 1,31 \cdot 10^7 \text{ Pa}$, $\alpha = 0,485$, $\tau_k = 2,47 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

guminál mutatja a fenti jellemzők mért értékeit 100 Hz és 10 kHz között, de olyannál, amelynél az átmeneti tartomány alsó része esik a mérési frekvenciákra [44]. Látható, hogy az általánosított Kelvin-Voigt-moddal alapján számított frekvenciagörbék mindkét gumi esetében kimondottan jól illeszkednek a mért értékekhez. (A veszteségi modulusra számított korrelációs együttható értéke: 0,989, illetve 0,995.)

Az elmondottak alapján feltételezhető, hogy az általánosított Kelvin-Voigt-moddal viselkedése az időtartományban is jobban megfelel a valóságnak, mint az eredeti modellé. Ennek belátásához tekintsük ismét a relaxációs és a kúszási függvényt, amelyeket úgy kapunk, hogy az eredeti modell (7.9) függvényében szereplő $\delta(t)$ Dirac-impulzust az $1/t^\alpha \Gamma(1-\alpha)$ függvénnyel, illetve a (7.10) -ben lévő e^{-t/τ_k} exponenciális függvényt a Mittag-Leffler-függvénnyel helyettesítjük [19]. Ezekkel

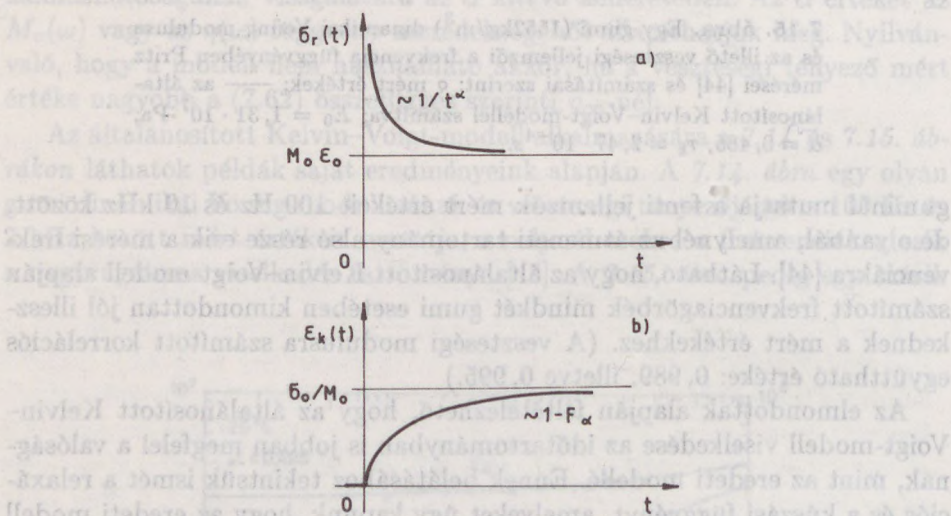
$$\sigma_r(t) = M_0 \varepsilon_0 + M_0 \varepsilon_0 \frac{1}{(t/\tau_k)^\alpha \Gamma(1-\alpha)}, \quad (7.65)$$

$$\varepsilon_k(t) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \left\{ 1 - F_\alpha[-(t/\tau_k)^\alpha] \right\}, \quad (7.66)$$

ahol F_α az α -ad rendű Mittag-Leffler-függvény:

$$F_\alpha[-(t/\tau_k)^\alpha] = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(t/\tau_k)^{\alpha p}}{\Gamma(\alpha p + 1)}. \quad (7.67)$$

(Megemlítjük, hogy az F_α az exponenciális függvény általánosítása; ez utóbbit $\alpha = 1$ -nél kapjuk.) A (7.65)-ből látható, hogy az általánosított modell képes a relaxáció leírására, amelynek lefolyását a 7.16a ábrán vázoltuk. A feszültség hatványfüggvény szerint csökken, ami – például a polimerek esetében – összhangban van a kísérleti tapasztalatokkal [9, 45]. Megmaradt azonban az eredeti modell azon anomáliája, hogy a feszültség a $t = 0$ időpillanatban végtelen nagy. Nem szűnt meg továbbá az a pontatlanság sem, hogy a $t = 0$ időpillanatban nem keletkezik deformáció úgy, ahogy az a 7.16b ábrán látható. Az általánosított modell szerint azonban a kúszás folyamata jobban megfelel a valóságnak, mint az eredeti esetén. A (7.66)-ból látható, hogy a kúszás sebességére a τ_k időállandó jellemző, amely természetesen nem azonos az exponenciális folyamat retardációs idejével.



7.16. ábra. Az általánosított Kelvin-Voigt-modell relaxációs (a) és kúszási (b) függvénye.

7.2.2.3. Az általánosított Zener-modell

Az általánosított Kelvin-Voigt-modellt ugyancsak tökéletesíteni lehet azáltal, hogy a (7.55) bal oldalán számításba vesszük a feszültség idő szerinti deriváltját is, vagyis

$$\sigma(t) + b_1 \frac{d^{b_1} \sigma(t)}{dt^{b_1}} = a_0 \varepsilon(t) + a_1 \frac{d^{a_1} \varepsilon(t)}{dt^{a_1}}. \quad (7.68a)$$

Ez az egyenlet a *Zener-modell* (7.21) differenciálegyenlete *általánosított alakjának* tekinthető és ennek alapján az alábbi együtthatókkal célszerű felírni:

$$\sigma(t) + \tau_r^\alpha \frac{d^\alpha \sigma(t)}{dt^\alpha} = M_0 \varepsilon(t) + M_\infty \tau_r^\alpha \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha}, \quad (7.68b)$$

ahol feltételeztük, hogy $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha$ (négy paraméteres modell).

A komplex modulust a (7.52) figyelembevételével kapjuk:

$$\overline{M}(j\omega) = \frac{M_0 + M_\infty (j\omega\tau_r)^\alpha}{1 + (j\omega\tau_r)^\alpha}, \quad (7.69a)$$

amely $\alpha = 1$ esetében megegyezik az eredeti Zener-modellre levezetett (7.24a) függvénnyel. A (7.69a)-val kapcsolatban megemlítjük, hogy Cole és Cole [46] kísérleti megfigyelései alapján már jóval korábban is javasolt egy ilyen függvényt a komplex dielektromos állandó frekvenciafüggésének leírására. A szerzőpár a (7.24b) egyenletet módosította az α kitevő bevezetésével ugyancsak azért, hogy összhangba hozza az elméleti és kísérleti frekvenciafüggvények meredekségét. A (7.69a) ezért *Cole-Cole-egyenlet* néven is ismert, amelyet a szakirodalom rendszerint az alábbi alakban idéz:

$$\frac{\overline{M}(j\omega) - M_\infty}{M_0 - M_\infty} = \frac{1}{1 + (j\omega\tau_r)^\alpha}. \quad (7.69b)$$

A komplex modulus összetevőit célszerű átalakítások után kapjuk, melyeket itt az alábbi normalizált alakban adunk meg:

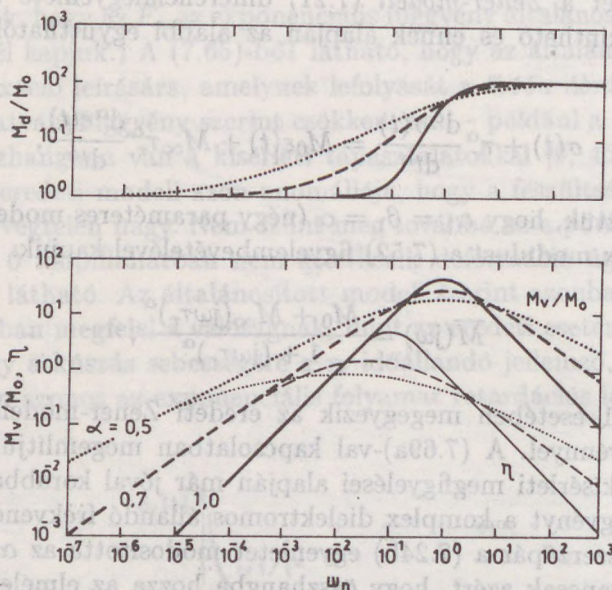
$$\frac{M_d(\omega)}{M_0} = \frac{1 + (c + 1) \cos(\alpha\pi/2) \omega_n^\alpha + c \omega_n^{2\alpha}}{1 + 2 \cos(\alpha\pi/2) \omega_n^\alpha + \omega_n^{2\alpha}}, \quad (7.70)$$

$$\frac{M_v(\omega)}{M_0} = \frac{(c - 1) \sin(\alpha\pi/2) \omega_n^\alpha}{1 + 2 \cos(\alpha\pi/2) \omega_n^\alpha + \omega_n^{2\alpha}}, \quad (7.71)$$

$$\eta(\omega) = \frac{(c - 1) \sin(\alpha\pi/2) \omega_n^\alpha}{1 + (c + 1) \cos(\alpha\pi/2) \omega_n^\alpha + c \omega_n^{2\alpha}}, \quad (7.72)$$

ahol most is $c = M_\infty/M_0$ és $\omega_n = \omega\tau_r$.

A normalizált modulusok és a veszteségi tényező változását a 7.17. ábrán rajzoltuk meg 10 dekád széles frekvenciasávban, $\alpha = 1, 0; 0,7$ és $0,5$ értékeire, $M_\infty/M_0 = 100$ feltételezésével. Látható, hogy a frekvenciafüggvények jellege jól megfelel a Zener-modellre ($\alpha = 1, 0$) megállapítottaknak,



7.17. ábra. A dinamikai és a veszteségi modulus M_0 -ra normalizált értékének, valamint a veszteségi tényezőnek változása az általánosított Zener-modell szerint, a normalizált frekvencia függvényében $M_\infty/M_0 = 100$ esetében.

a mereedségük azonban eltérő attól. A dinamikai modulus ez esetben is M_0 -tól M_∞ -ig nő a frekvencia növelésével; a növekedés mereedsége annál kisebb, minél kisebb az α értéke. A veszteségi jellemzők nulláról indulnak, majd mindkettő ω^α szerint nő a frekvenciával, a maximumon túl pedig $1/\omega^\alpha$ szerint csökkennek. A veszteségi modulus maximuma az $\omega_n = \omega_v \tau_r = 1$ normalizált frekvencián van, vagyis itt is: $\omega_v = 1/\tau_r$. A veszteségi modulus maximumát ez esetben is megelőzi a veszteségi tényezőé, amely az

$$\omega_\eta = \frac{1}{\tau_r} \left(\frac{1}{c} \right)^{1/2\alpha} = \omega_v \left(\frac{M_0}{M_\infty} \right)^{1/2\alpha} \quad (7.73)$$

frekvencián jelenik meg. Látható, hogy az $\eta(\omega)$ maximumának helyét az α is befolyásolja; minél kisebb az α , annál inkább balra tolódik a veszteségi tényező maximuma a veszteségi moduluséhoz képest. A veszteségi jellemzők maximuma – az eredeti modellhez hasonlóan – ugyancsak a dinamikai modulus diszperziójával arányos, nevezetesen:

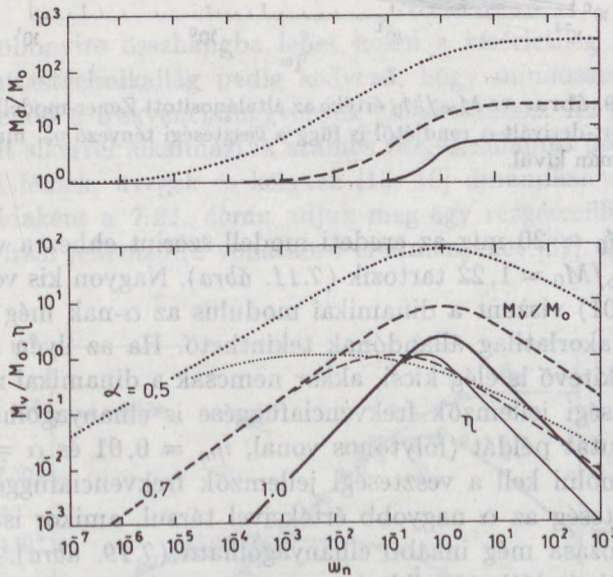
$$M_m = \frac{\Delta M_d}{2} \frac{\sin(\alpha\pi/2)}{1 + \cos(\alpha\pi/2)}, \quad (7.74)$$

$$\eta_m = \frac{\delta M_d}{2} \frac{\sin(\alpha\pi/2)}{1 + \frac{c+1}{2\sqrt{c}} \cos(\alpha\pi/2)}, \quad (7.75)$$

ahol ΔM_d és δM_d a (7.31), illetve a (7.32) szerinti. A (7.75)-öt az alábbi egyszerűbb alakba írhatjuk akkor, ha $c = M_\infty/M_0 \gg 1$, ami a gumikra és a gumyszerű anyagokra jellemző:

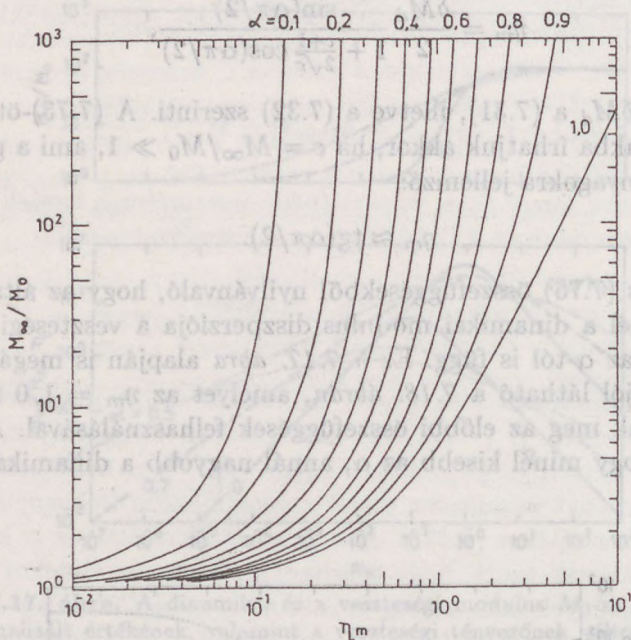
$$\eta_m \approx \operatorname{tg}(\alpha\pi/2). \quad (7.76)$$

A (7.74) és (7.75) összefüggésekből nyilvánvaló, hogy az általánosított Zener-modellnél a dinamikai modulus diszperziója a veszteségi jellemzők értékén kívül az α -tól is függ. Ez a 7.17. ábra alapján is megállapítható, de különösen jól látható a 7.18. ábrán, amelyet az $\eta_m = 1,0$ feltételezésével rajzoltunk meg az előbbi összefüggések felhasználásával. Az ábráról leolvasható, hogy minél kisebb az α , annál nagyobb a dinamikai modulus diszperziója.



7.18. ábra. A dinamikai és a veszteségi modulus M_0 -ra normalizált értékek, valamint a veszteségi tényezőnek változása az általánosított Zener-modell szerint, a normalizált frekvencia függvényében, $\eta_m = 1,0$ esetében.

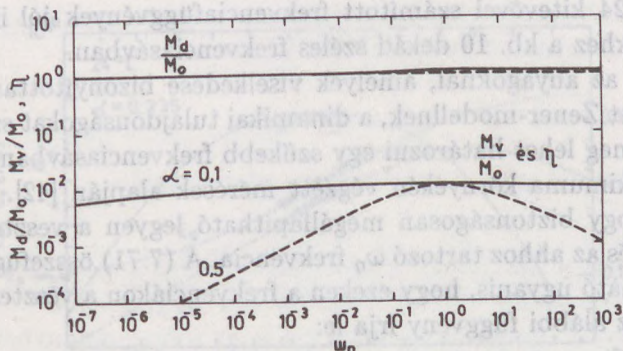
Az M_∞/M_0 változását az η_m függvényében a 7.19. ábrán adjuk meg α különböző értékeire. Erről leolvasható, hogy az általánosított Zener-modell szerint a dinamikai modulusnak jelentős diszperziója lehet még kis veszteség esetében is, ha az α kellőképpen kicsi. Például, ha $\eta_m = 0,1$ és $\alpha = 0,1$,



7.19. ábra. Az M_{∞}/M_0 értéke az általánosított Zener-modellnél a tört-derivált α rendjétől is függ a veszteségi tényező η_m maximumán kívül.

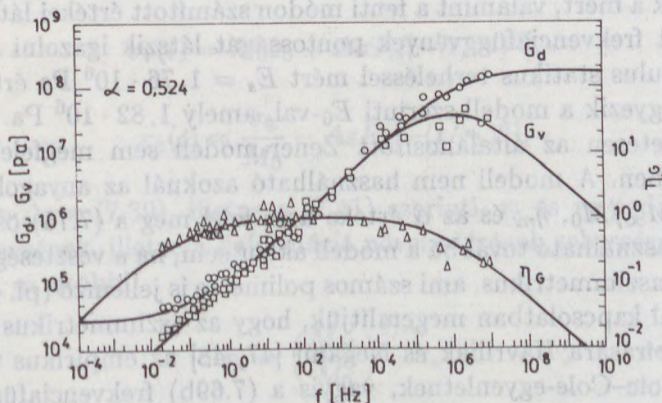
akkor $M_{\infty}/M_0 \approx 20$ míg az eredeti modell szerint ehhez a veszteségi tényezőhöz $M_{\infty}/M_0 = 1,22$ tartozik (7.11. ábra). Nagyon kis veszteségeknél (pl. $\eta_m < 0,01$) viszont a dinamikai modulus az α -nak még a kisebb értékeinél is gyakorlatilag állandónak tekinthető. Ha az ilyen kis veszteség mellett az α kitevő is elég kicsi, akkor nemcsak a dinamikai modulus, hanem a veszteségi jellemzők frekvenciafüggése is elhanyagolható, amire a 7.20. ábra mutat példát (folytonos vonal, $\eta_m = 0,01$ és $\alpha = 0,1$). Ezzel szemben számolni kell a veszteségi jellemzők frekvenciafüggésével akkor, ha a kis veszteség az α nagyobb értékeivel társul, amikor is a dinamikai modulus változása még inkább elhanyagolható (7.19. ábra). Erre ugyancsak a 7.20. ábrán látható példa (szaggatott vonal, $\eta_m = 0,01$ és $\alpha = 0,5$). Az utóbbi elmondottakból nyilvánvaló, hogy az általánosított Zener-modell alkalmas azon kis veszteségű szerkezeti anyagok dinamikai viselkedésének leírására, amelyek dinamikai modulusa és a veszteségi tényezője a mérési tapasztalatok szerint „gyakorlatilag állandó, nem függ a frekvenciától”.

Az általánosított Zener-modell viselkedését összehasonlítva a kísérleti tapasztalatokkal megállapítható, hogy a megvizsgált modellek közül széles frekvenciasávban ez a legalkalmasabb a dinamikai tulajdonságok változásának leírására. A frekvenciafüggvények meredekségét az α kitevő megvá-



7.20. ábra. Az általánosított Zener-moddennél a dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők a frekvenciától függetlenül gyakorlatilag állandók akkor, ha a veszteségi tényező és a tört-derivált rendje is igen kicsi (itt: $\eta_m = 0,01$ és $\alpha = 0,1$). Ha viszont az igen kis veszteség az α nagyobb értékeivel társul (itt $\alpha = 0,5$), akkor csak a dinamikai modulus állandó, míg a veszteségi jellemzők változnak a frekvenciával.

lasztásával többnyire összhangba lehet hozni a kísérletileg megállapítottakkal. Számítástechnikailag pedig kedvező, hogy mindössze néhány paraméter elegendő a frekvenciafüggvények előállításához. Az általánosított Zener-modellt sikerrel alkalmazták számos rezgéscsillapító polimer [29, 31, 39], valamint fémek, üvegek és kőzetek [18, 19] dinamikai viselkedésének leírására. Példaként a 7.21. ábrán adjuk meg egy rezgéscsillapító polimer dinamikai nyírási jellemzőire vonatkozó eredményeket [31]. Látható, hogy



7.21. ábra. Egy rezgéscsillapító polimer dinamikai nyírási modulusa és az illető veszteségi jellemzői a frekvencia függvényében (Rogers [31]): $\circ$, $\square$, $\triangle$ mért értékek; — az általánosított Zener-moddennél számítva.

az $\alpha = 0,524$ kitevővel számított frekvenciafüggvények jól illeszkednek a mért értékekhez a kb. 10 dekád széles frekvenciasávban.

Azoknál az anyagoknál, amelyek viselkedése bizonyítottan megfelel az általánosított Zener-modellnek, a dinamikai tulajdonságokat széles frekvenciasávra is meg lehet határozni egy szűkebb frekvenciasávban, a veszteségi tényező maximuma környékén végzett mérések alapján [42]. Ennek a feltevése az, hogy biztonságosan megállapítható legyen a veszteségi tényező maximuma és az ahhoz tartozó ω_η frekvencia. A (7.71) összefüggés vizsgálataival igazolható ugyanis, hogy ezeken a frekvenciákon a veszteségi modulus változását az alábbi függvény írja le:

$$M_v(\omega) \approx b \sin(\alpha\pi/2)\omega^\alpha, \quad (7.77)$$

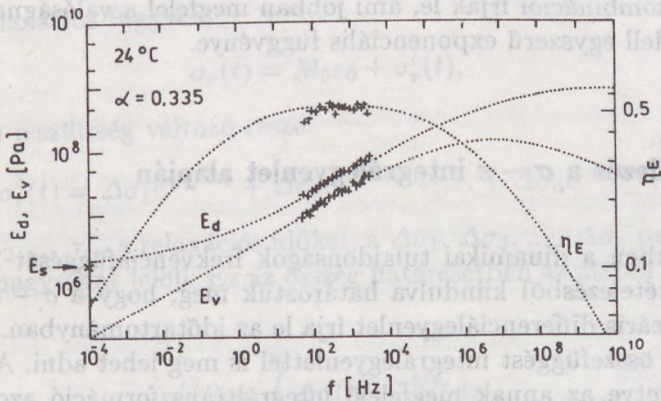
ahol

$$b = M_\infty \tau_r^\alpha. \quad (7.78)$$

Ennek alapján pedig az $M_v(\omega)$ függvény mért értékeire történő görbeillesztéssel a b -t és az α -t meg lehet határozni. Ez utóbbival és az η_m mért értékével pedig a (7.75)-ből kiszámolhatjuk a $c = M_\infty/M_0$ értékét. A c , α és az ω_η mért értékével a (7.73)-ból a τ_r -t lehet meghatározni. A τ_r , valamint az α ismeretében az M_∞ kiszámítható a (7.78)-ból, végül ezzel: $M_0 = M_\infty/c$. Ily módon rendelkezésünkre áll az általánosított Zener-modell négy paramétere (M_0 , M_∞ , α és τ_r), amelyek ismeretében elvileg bármely frekvenciára számítani lehet a dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők értékeit. Erre mutat példát a 7.22. ábra, amelyen egy viszonylag nagy testsűrűségű PVC hab dinamikai Young-modulusának és az illető veszteségi jellemzőinek a mért, valamint a fenti módon számított értékei láthatók [42]. A számított frekvenciafüggvények pontosságát látszik igazolni az, hogy a Young-modulus statikus terheléssel mért $E_s = 1,76 \cdot 10^6$ Pa értéke lényegében megegyezik a modell szerinti E_0 -val, amely $1,82 \cdot 10^6$ Pa.

Természetesen az általánosított Zener-modell sem megfelelő minden anyag esetében. A modell nem használható azoknál az anyagoknál, amelyeknél az M_∞/M_0 , η_m és az α értéke nem felel meg a (7.75) összefüggésnek. Nem használható továbbá a modell akkor sem, ha a veszteségi modulus maximuma aszimmetrikus, ami számos polimerre is jellemző (pl. 6.3. ábra). Ez utóbbival kapcsolatban megemlítjük, hogy az aszimmetrikus veszteségi maximum leírására Havriliak és Negami [47, 48] az empirikus úton megállapított Cole-Cole-egyenletnek, vagyis a (7.69b) frekvenciafüggvénynek alábbi módosítását javasolta:

$$\frac{\overline{M}(j\omega) - M_\infty}{M_0 - M_\infty} = \frac{1}{[1 + (j\omega\tau_r)^\alpha]^\beta}, \quad (7.79)$$



7.22. ábra. Egy PVC hab (450 kg/m^3) dinamikai Young-modulusa és veszteségi jellemzői a frekvencia függvényében: + mért dinamikai értékek, $f_\eta = 500 \text{ Hz}$, $\eta_m = 0,53$; $\times E_s = 1,76 \cdot 10^6 \text{ Pa}$; az általánosított Zener-modell alapján számított értékek; $E_0 = 1,82 \cdot 10^6 \text{ Pa}$, $E_\infty = 1,14 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, $\alpha = 0,335$, $\tau_r = 2,13 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ (Pritz [42]).

ahol $0 < \beta < 1$ empirikus állandó. Ez az összefüggés *Havriliak-Negami-egyenlet* néven ismert, amelynek alkalmazhatóságát több rezgéscsillapító polimer esetében is igazolták [49, 50].

Végül vizsgáljuk meg az általánosított Zener-modell viselkedését az időtartományban is. A relaxációs és a kúszási függvényt ez esetben is meghatározhatjuk úgy, hogy az eredeti modell megfelelő függvényeiben szereplő exponenciálisokat az α -ad rendű Mittag-Leffler-függvénnyel helyettesítjük [19], vagyis

$$\sigma_r(t) = M_0 \varepsilon_0 + \Delta \sigma F_\alpha[-(t/\tau_r)^\alpha], \quad (7.80)$$

$$\varepsilon_k(t) = \frac{\sigma_0}{M_0} - \Delta \varepsilon F_\alpha[-(t/\tau_k)^\alpha], \quad (7.81)$$

ahol $\Delta \sigma$ és $\Delta \varepsilon$ a (7.39), illetve a (7.41) szerinti, τ_r és τ_k pedig a feszültség csökkenésének, illetve a deformáció növekedésének sebességére jellemző időállandó, ez utóbbi:

$$\tau_k = \left(\frac{M_\infty}{M_0} \right)^{1/\alpha} \tau_r. \quad (7.82)$$

A (7.80) és a (7.81) összefüggésből kiolvasható, hogy a feszültség, illetve a deformáció kezdeti értéke, valamint a végtelenben vett határértéke összhangban van a fizikai elvárásokkal éppúgy, mint a Zener-modellnél. A feszültség és a deformáció változásait most azonban hatványfüggvények, il-

letve ezek kombinációi írják le, ami jobban megfelel a valóságnak, mint az eredeti modell egyszerű exponenciális függvénye.

7.3. Modellezés a $\sigma - \epsilon$ integrálegyenlet alapján

Az eddigiekben a dinamikai tulajdonságok frekvenciafüggését lényegében abból a feltételezésből kiindulva határoztuk meg, hogy a $\sigma - \epsilon$ összefüggést egy lineáris differenciálegyenlet írja le az időtartományban. Ismeretes, hogy ezt az összefüggést integrálegyenlettel is meg lehet adni. Az integrálegyenlet, illetve az annak megfelelő integráltranszformáció azonban csak az mutatja meg, hogy hogyan számíthatók a frekvenciafüggvények akkor, ha ismerjük az anyag viselkedését az időtartományban; vagyis az integrál magjában szereplő anyagjellemző időfüggvényt. Az integrálegyenleten alapuló modellezés kulcsa tehát az anyagjellemző időfüggvények valamelyikének: a memória-, a relaxációs, vagy a kúszási függvénynek ismeretében van. Az anyagjellemző időfüggvényt felírhatjuk elméleti megfontolások vagy kísérleti tapasztalatok alapján. Ez utóbbi esetben a modellezéshez csak a többé-kevésbé jól mérhető relaxációs vagy kúszási függvény jöhet számításba. Még ha ezek analitikus alakját sikerül is előállítani, akkor további gondot okozhat a frekvenciafüggvények meghatározásához szükséges integrálok kiszámítása. Az analitikus számítás ugyanis csak egy-két egyszerűbb időfüggvény esetében lehetséges, míg másoknál csak a numerikus eljárások vezetnek eredményre. Bizonyára mindezek szerepet játszanak abban, hogy ez a modellezési módszer nem terjedt el. Ennek ellenére a módszer perspektivikusnak látszik, mivel alkalmazásához csak egy időfüggvény szükséges, amelynek tulajdonságaira vonatkozó elméleti megkötések ismertek [51], illetve amelynek mérése egyszerűbb lehet, mint két frekvenciafüggvényé sok dekád széles sávban.

A továbbiakban csak a relaxációs függvény ismeretében történő modellezésre mutatunk példákat. Elsőként tételezzük fel, hogy a relaxáció exponenciális jellegű, és a $\sigma_r(t)$ legyen azonos a Zener-modell (7.38) függvényével. A komplex modulus-frekvencia függvényt a (3.64) integráltranszformáció elvégzésével nyerjük, ami természetesen azonos lesz a Zener-modell differenciálegyenlete alapján levezetett (7.24) függvénnyel [52]. Láttuk azonban, hogy ezek a frekvenciafüggvények mennyiségi szempontból nem felelnek meg a valóságnak, mivel szilárd anyagoknál a relaxáció folyamata is eltér az egyszerű exponenciális függvénytől. A lineáris viszkoelaszticitás elméletében általánosan elterjedt az a módszer, hogy az exponenciálistól eltérő relaxációt (vagy kúszást) is exponenciális függvények összegével próbálják meg leírni, amit az ezekkel való számolás előnyeinek megőrzése indokol [45]. Ily

módon a relaxációs függvény:

$$\sigma_r(t) = M_0 \varepsilon_0 + \sigma'_r(t), \quad (7.83a)$$

ahol $\sigma'_r(t)$ a feszültség változó része:

$$\sigma'_r(t) = \Delta\sigma_1 e^{-t/\tau_{r1}} + \Delta\sigma_2 e^{-t/\tau_{r2}} + \dots + \Delta\sigma_n e^{-t/\tau_{rn}}, \quad (7.83b)$$

és itt $\tau_{r1}, \tau_{r2}, \dots, \tau_{rn}$ a relaxációs időket, a $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ pedig a túlfeszültségek nagyságát jelöli. Ez az összeg határesetben az alábbi integrálhoz vezet [45]:

$$\sigma'_r(t) = \int_0^{\infty} \Delta\sigma(\tau_r) e^{-t/\tau_r} d\tau_r, \quad (7.84)$$

ahol $\Delta\sigma(\tau_r)$ az ún. *relaxációs spektrum*. Az exponenciálistól eltérő relaxáció fenti módon történő leírása láthatóan nem jár semmiféle előnnyel a frekvenciafüggvények keresésénél, hiszen ahhoz egy újabb függvény – a relaxációs spektrum – ismeretére van szükség. A frekvenciafüggvények meghatározásához ezért zárt alakban célszerű felírni a relaxációs függvényt, ami a fizikai valóság megismerése szempontjából is előnyös.

Fizikailag valós frekvenciafüggvényekhez pedig csak valós, tehát kísérleteken alapuló relaxációs függvény birtokában juthatunk. Ilyen például az alábbi hatványfüggvény:

$$\sigma_r(t) = E_0 \varepsilon_0 + \Delta\sigma \frac{1}{1 + (t/\tau_1)^p}, \quad (7.85)$$

valamint az ún. *Kohlrausch-függvény*:

$$\sigma_r(t) = E_0 \varepsilon_0 + \Delta\sigma e^{-(t/\tau_2)^q}, \quad (7.86)$$

amelyekben τ_1, τ_2, p és q empirikus állandókat jelölnek [45]. (Ezeket a függvényeket polimerek egytengelyű húzása során állapították meg, amire az E_0 Young-modulus is utal.) A dinamikai tulajdonságok frekvenciafüggését ez esetben is meghatározhatjuk a (3.64) integrál kiszámításával, de ez most nem olyan egyszerű, mint az exponenciális függvénynél. A (7.85) függvény esetében erre nincs is szükség, mivelhogy az lényegében megfelel az általánosított Zener-modell relaxációs függvényének, és így nyilván ugyanez vonatkozik az illető frekvenciafüggvényekre is. A Kohlrausch-függvény esetében pedig numerikus vizsgálattal igazolható, hogy annak is ugyanolyan jellegű frekvenciafüggvények felelnek meg, mint az általánosított Zener-modellnek, és hogy azok meredeksége a q kitevőtől függ [53].

Irodalom

1. Nashif, A. D., Jones, D. I. G. and Henderson, J. P., *Vibration damping*. Wiley, New York, 1985.
2. Meyer, O., *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 78, 130–135 (1874).
3. Lord Kelvin (Thomson, W.), Elasticity. *Encyclopaedia Britannica* (1875).
4. Voigt, W. Über die innere Reibung fester Körper, insbesondere der Metalle. *Ann. d. Phys.* 47, 671–693 (1892).
5. Maxwell, J. C., *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 157, 49 (1867).
6. Zener, C., *Elasticity and anelasticity of metals*. The University of Chicago Press, Chicago, 1948. p.43.
7. Alfrey, T., Non-homogeneous stresses in visco-elastic media. *Quarterly of Applied Mathematics* 2, 113–119 (1944).
8. Verhás J., Müller Z., A lineáris viszkoelaszticitás termodinamikai elmélete és testmodelljeinek osztályozása. *Műanyag és Gumi* 14, 49–54 (1977).
9. Nutting, P. G., A new general law of deformation. *Journal of the Franklin Institute*, 191, 679–685 (1921).
10. Gemant, A., A method of analyzing experimental results obtained from elasto-viscous bodies. *Physics* 7, 311–317 (1936).
11. Gemant, A., On fractional differentials. *Philosophical Magazine* 25, 540–549 (1938).
12. Scott Blair, G. W., Veinoglou, B. C. and Caffyn, J. E., Limitation of the Newtonian time scale in relation to non-equilibrium rheological states and a theory of quasi-properties. *Proceedings of Royal Society, Series A* 189, 69–87 (1947).
13. Rabotnov, Ju. N., Ravnoveszje uprugoj szredü sz poszledejsztviem. *Prikladnaja matematika i mehanika* 12, 53 (1948).
14. Graham, A., The phenomenological method in rheology. *Research* 6, 92–96 (1953).
15. Caputo, M., Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. *Annali Geofisica* 19, 383–393 (1966).
16. Caputo, M., Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. II. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 13, 529–539 (1967).
17. Caputo, M., *Elasticità e Dissipazione*. Zanichelli, Bologna, 1969.
18. Caputo, M. and Mainardi, F., A new dissipation model based on memory mechanism. *Pure Applied Geophysics* 91, 134–147 (1971).
19. Caputo, M. and Mainardi, F., Linear models of dissipation in anelastic solids. *Rivista del Nuovo Cimento* 1, 161–198 (1971).
20. Caputo, M., Vibrations of an infinite viscoelastic layer with a dissipative memory. *Journal of the Acoustical Society of America* 56, 897–904 (1974).
21. Caputo, M., Vibrations of an infinite plate with a frequency independent Q. *Journal of the Acoustical Society of America* 60, 634–639 (1976).
22. Slominsky, G. L., Laws of mechanical relaxation processes in polymers. *Journal of Polymer Science, C*, No.16, 1667–1672 (1967).
23. Smit, W. and de Vries, H., Rheological models containing fractional derivatives. *Rheological Acta* 9, 524–534 (1970).
24. Calleja, R.D. and Guzman, G.M., Aplicación del metodo de las derivadas fraccionales para la obtención de espectros de tempos de relajación a partir de datos viscoelasticos dinamicos. *Anales de Fisica de la Real Sociedad Española de Fisica y Quimica* 71, 277–279 (1975).
25. Rabotnov, Ju. N., *Élementü naszledsztvvennoj mehaniki tverdüh tel.* Nauka, Moszkva, 1977.

26. Sesztopal, V. O., *Reologicseszkie szvojsztva csisztüh metalloov pri vüszokih temperaturah*. Metallurgija, Moszkva, 1978.
27. Bagley, R. L., *Application of generalized derivate to viscoelasticity*. Air Force Materials Laboratory, TR-79-4103, 1979.
28. Bagley, R. L. and Torvik, P. J., A generalized derivate model for an elastomer damper. *Shock and Vibration Bulletin* **49**, 135-143 (1979).
29. Bagley, R. L. and Torvik, P. J., Fractional calculus - a different approach to the finite element analysis of viscoelastically damped structures. *Proceedings of the 22nd Structural Dynamics and Material Conference (AIAA)*, No.81-0484, 1-7 (1981).
30. Rogers, L., On modelling viscoelastic behavior. *Shock and Vibration Bulletin* **51**, 55-69 (1981).
31. Rogers, L., Operators and fractional derivate for viscoelastic constitutive equations. *Journal of Rheology* **27**, 351-372 (1983).
32. Bagley, R. L. and Torvik, P. J., A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Rheology* **27**, 201-210 (1983).
33. Bagley, R. L. and Torvik, P. J., Fractional calculus - a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA Journal* **21**, 741-748 (1983).
34. Torvik, P. J. and Bagley, R. L., On the appearance of the fractional derivate in the behaviour of real materials. *ASME Journal of Applied Mechanics* **51**, 294-298 (1984).
35. Koeller, R. C., Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. *ASME Journal of Applied Mechanics* **51**, 299-307 (1984).
36. Torvik, P. J. and Bagley, R. L., A different view of viscous damping. *Shock and Vibration Bulletin* **55**, 81-84 (1985).
37. Bagley, R. L. and Torvik, P. J., On the fractional calculus model of viscoelastic behaviour. *Journal of Rheology* **30**, 133-155 (1986).
38. Koeller, R. C., Polynomial operators, Stieltjes convolution, and fractional calculus in hereditary mechanics. *Acta Mechanica* **58**, 251-264 (1986).
39. Torvik, P. J. and Bagley, R. L., Fractional derivatives in the description of damping materials and phenomena. *The Role of Damping in Vibration and Noise Control ASME DE-5*, 125-135 (1987).
40. Pritz T., Modelling frequency dependences of dynamic characteristics of acoustic materials. *Proceedings of the 13th International Congress on Acoustics, Beograd*, 1989. Vol.3. pp. 385-388.
41. Gaul, L., Klein, P. and Kemple, S., Damping description involving fractional operators. *Mechanical Systems and Signal Processing* **5**, 81-88 (1991).
42. Pritz T., Four parameter fractional derivative model of viscoelastic materials. *Proceedings of Inter-Noise 93, Leuven*, 1993. pp. 1801-1804.
43. Pritz T., Szálas akusztikai szigetelőanyagok komplex rugalmassági modulusának mérése a frekvencia függvényében. *SZIKKTI Tudományos Közlemények* **51**, Budapest, 1977. 44.old.
44. Pritz T., Transfer function method for investigating the complex modulus of acoustic materials: spring-like specimen. *Journal of Sound and Vibration* **72**, 317-341 (1980).
45. Vinogradov, G. V. and Malkin, A. Ja., *Rheology of polymers*. Mir, Moscow, 1980. p.86.
46. Cole, K. S. and Cole, R. H., Dispersion and absorption in dielectrics. I. Alternating current characteristics. *Journal of Chemical Physics* **9**, 341-351 (1941).
47. Havriliak, S. and Negami, S., A complex plane analysis of α -dispersions in some polymer systems. *Journal of Polymer Science: Part C*, No.14, 99-117 (1966).
48. Havriliak, S. and Negami, S., A complex plane representation of dielectric and mechanical relaxation processes in some polymers. *Polymer* **8**, 161-210 (1967).

49. Hartmann, B., Lee, G. F. and Lee, J. D., Relaxation time related to molecular structure in polyurethanes. *Proceedings of the 14th International Congress on Acoustics, Beijing, 1992*. A8-4.
50. Lee, G. F., Lee, J. D., Hartmann, B. and Rathnamma, D., Damping properties of PTMG/PPG blends. *Proceedings of Damping '93, San Francisco, 1993*. Vol. 3. ICA 1-19.
51. Christensen, R. M., Restrictions upon viscoelastic relaxation functions and complex moduli. *Transactions of the Society of Rheology* **16**, 603-614 (1972).
52. Pritz T., On frequency dependences of dynamic characteristics of viscoelastic materials. *Proceedings of 9th Conference on Acoustics, Budapest, 1988*. pp. 83-88.
53. Hedvig P., Üveges állapotú műanyagok kúszása és feszültségrelaxációja. *Műanyag és Gumi* **27**, 22-32 (1990).

8. A hőmérséklet hatása a polimerek dinamikai tulajdonságaira

A rezgéscsökkentésre nagy mennyiségben használt szerves polimerek, nevezetesen a gumik és gumyszerű anyagok dinamikai viselkedésében a hőmérsékletnek meghatározó szerepe van. Ebben a fejezetben azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogyan befolyásolja a hőmérséklet az ilyen polimerek dinamikai viselkedését. Ismertetjük a dinamikai viselkedés különféle tartományait és ennek kapcsán a polimerek állapotait. Megmutatjuk, hogy a hőmérséklet változtatásának ellentétes, de mennyiségileg ugyanolyan hatása van, mint a frekvenciának, amit a hőmérséklet-frekvencia ekvivalencia elv fogalmaz meg. Ez az elv lehetővé teszi, hogy megállapítsuk egy polimer dinamikai tulajdonságainak változását széles frekvenciatartományban, egy keskenyebb tartományban, de több hőmérsékleten végzett mérés alapján.

8.1. Bevezető megjegyzések

Az előző fejezetekben a figyelem középpontjába a frekvencia szerepét állítottuk és csak ennek függvényében vizsgáltuk a dinamikai tulajdonságok változását az anyag lineáris tartományában. Kétségtelen, hogy az akusztikában a frekvencia a legfontosabb változó, de nem az egyetlen, amely befolyásolja a dinamikai tulajdonságokat. Ez utóbbi szempontból fontos változókat két nagy csoportba sorolhatjuk. Az egyik csoportba azok tartoznak, amelyek a dinamikai terhelés jellegével kapcsolatosak; ezek közül az egyik a frekvencia, a másik pedig a terhelés nagysága, vagyis az amplitúdó. A másik csoportba sorolható változók, illetve tényezők a dinamikai terhelés jellegétől függetlenek és az alkalmazás körülményeire jellemzők. Ezek közé tartozik például a statikus terhelés nagysága, a hőmérséklet, a nedvesség, vagy a napsugárzás hatása, valamint egyes esetekben a vegyi behatások is; pl. az olaj szerepe gumiknál. (Harmadik nagy csoportba sorolhatnánk természetesen az anyagszerkezeti kérdéseket, amelyekkel azonban nem foglalkozunk ebben a munkában.)

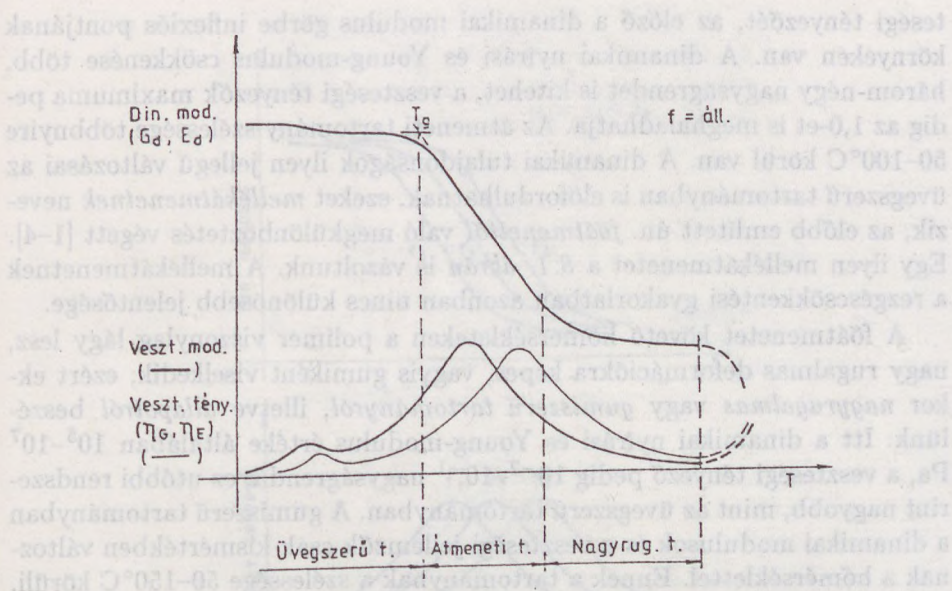
A felsorolt változók jelentősége az anyagtól és az alkalmazási területtől függően nagyon eltérő lehet. Ebben és a következő két fejezetben ezen változók szerepével foglalkozunk, de csak azokéval, amelyek jelentősége a rez-

géscsökkenés területén a legnagyobb. Ezek közé a hőmérséklet, a statikus terhelés, valamint az amplitúdó sorolható. Elsőként a hőmérséklet hatását vizsgáljuk meg, de csak a nempórusos gumiknál és gumiszerű anyagoknál. Ezen anyagok hőérzékenysége ugyanis egyrészt közismerten jelentős, másrészt az ezekből készített rezgésszigetelők és -csillapítók gyakran vannak kitéve változó hőmérsékletű igénybevételeknek (pl. egy gépjármű rezgéscsillapító bevonata). Ezzel szemben más rezgéscsökkenő anyagoknál a hőmérsékletnek, illetve annak változásának gyakorlatilag nincs szerepe, az anyagok kis hőérzékenysége és alkalmazási területe következtében. Ez utóbbira példaként említhetjük az épületakusztikai célú alkalmazásokat, ahol a rezgéscsökkenő anyagok többségének (pl. parafa, kőzet- és üveggyapotok) a hőérzékenysége kicsi és rendszerint nem jelentős a hőmérsékletváltozás mértéke. A hőmérséklet hatásának vizsgálatához is feltételezzük az anyag lineáris viselkedését, vagyis, hogy az amplitúdó kellőképpen kicsi.

8.2. Dinamikai tulajdonságok a hőmérséklet függvényében

A rezgéscsökkenési feladatok megoldására különösen nagy mennyiségben használnak szerves polimereket; rezgésszigetelésre a különféle gumik, rezgéscsillapításra pedig ugyancsak egyes gumik és más amorf polimerek (pl. poliuretánok, bitumenek) alkalmasak. Ezen polimerek közös jellemzője, hogy mechanikai tulajdonságaik jelentős mértékben változnak a hőmérséklettel, éspedig olyannyira, hogy ennek változtatásával az eredetitől teljesen eltérő, más tulajdonságú anyaghoz juthatunk. Például egy olyan amorf polimer, amely szobahőmérsékleten gumiként viselkedik, a hőmérséklet csökkentésével ezt a tulajdonságát fokozatosan elveszti és keménnyé, merevvé válik. Ennek a fordítottja is fennáll, vagyis a szobahőmérsékleten kemény, nagy rugalmassági modulusú polimer a nagyobb hőmérsékleteken gumiszerű tulajdonságokat mutathat. Ilyen eltérő hőmérsékleteken nagyságrendi különbségek lehetnek mind a dinamikai modulus, mind a veszteségi jellemzők értékei között, és jelentősen megváltozhat frekvenciafüggésük jellege is [1–5].

A mechanikai tulajdonságok változása hő hatására jól tanulmányozható egyszerű statikus vizsgálattal, például valamely rugalmassági modulus mérésével, de ezt nyilván dinamikai terheléssel kell végezni ahhoz, hogy a belső súrlódás változását is nyomon követhessük. A rugalmassági modulusok közül pedig vagy a nyírási vagy a Young-modulust célszerű mérni, mivel ezek változnak a legnagyobb mértékben és ezáltal leginkább alkalmasak a hőmérséklet hatásának megállapításához. Amorf polimereknél a dinamikai Young-modulus és az illető veszteségi jellemzők tipikus változását a T hőmérséklet függvényében – az ún. *termomechanikai görbét* – a 8.1. ábrán vázoltuk



8.1. ábra. A dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők hőmérsékletfüggésének jellegzetességei amorf polimereknél.

azzal a feltételezéssel, hogy a mérés olyan kis frekvencián történt, amelyen a dinamikai modulus még közel azonos a statikussal.

Az ábra alapján a *mechanikai viselkedés* három *tartományát* lehet megkülönböztetni, melyek a *polimer* különböző *állapotait* jelzik. Alacsony hőmérsékleteken a polimerek kemény, gyakran merev, nagy rugalmassági modulusú anyagok, ezért ez esetben *üvegszerű tartományról*, illetve *állapotról* beszélünk. Azt a hőmérsékletet, amely alatt ez a viselkedés jellemzővé válik, *üvegesedési hőmérsékletnek* nevezzük és T_g -vel jelöljük. (Megemlítjük, hogy a szakirodalom nem egységes az üvegesedési hőmérséklet definiálásában. Ebben a munkában a dinamikai modulus hőmérsékletfüggését leíró görbe meredekségének változásával definiált hőmérsékletet tekintjük T_g -nek [3], ahogy azt a 8.1. ábra is mutatja.) Szobahőmérsékleten üvegszerű állapotban vannak a kemény műanyagként ismert polimerek (PVC, polisztirol stb.). Az üvegszerű állapotú polimereknél a dinamikai nyírási és Young-modulus értéke rendszerint 10^9 Pa, a veszteségi tényező pedig 10^{-3} – 10^{-2} nagyságrendű. Az üvegszerű tartományban a dinamikai modulus csak kissé csökken a hőmérséklet növelésével, míg a veszteségi tényező növekedése jelentős lehet.

A hőmérséklet növelésével az *átmeneti tartományba* jutunk, ahol a dinamikai modulus nagymértékben csökken, mialatt a veszteségi modulus és a veszteségi tényező rohamosan nő, majd egy maximum elérése után mindkettő csökkenni kezd. A veszteségi modulus maximuma megelőzi a vesz-

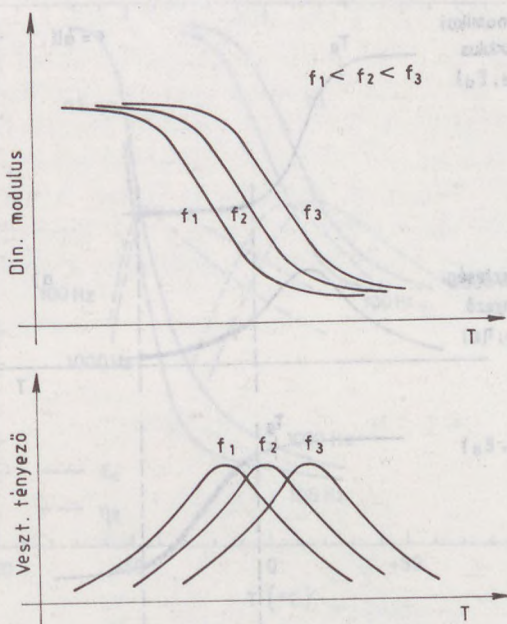
teségi tényezőét, az előző a dinamikai modulus görbe inflexiós pontjának környékén van. A dinamikai nyírási és Young-modulus csökkenése több, három-négy nagyságrendet is kitehet, a veszteségi tényezők maximuma pedig az 1,0-et is meghaladhatja. Az átmeneti tartomány szélessége többnyire 50–100°C körül van. A dinamikai tulajdonságok ilyen jellegű változásai az üvegszerű tartományban is előfordulhatnak, ezeket *mellékátmenetnek* nevezik, az előbb említett ún. *főátmenettől* való megkülönböztetés végett [1–4]. Egy ilyen mellékátmenetet a 8.1. ábrán is vázoltunk. A mellékátmenetnek a rezgéscsökkentési gyakorlatban azonban nincs különösebb jelentősége.

A főátmenetet követő hőmérsékleteken a polimer viszonylag lágy lesz, nagy rugalmas deformációkra képes, vagyis gumiként viselkedik; ezért ekkor *nagyrugalmas* vagy *gumiszerű tartományról*, illetve *állapotról* beszélünk. Itt a dinamikai nyírási és Young-modulus értéke általában 10^5 – 10^7 Pa, a veszteségi tényező pedig 10^{-2} – 10^{-1} nagyságrendű; ez utóbbi rendszert nagyobb, mint az üvegszerű tartományban. A gumiszerű tartományban a dinamikai modulusok és a veszteségi jellemzők csak kismértékben változnak a hőmérséklettel. Ennek a tartománynak a szélessége 50–150°C körüli. A gumiszerű tartomány feletti hőmérsékleteken a polimerek folyásnak indulnak vagy elbomlanak; az előző a lineáris, az utóbbi a térhálós polimerek – a gumik – sajátja.

A 8.1. ábra hőmérsékletgörbéi egy adott, viszonylag kis frekvenciához tartoznak. Ha a hőmérsékletfüggés vizsgálatát ennél nagyobb frekvencián megismételjük, akkor a dinamikai modulus értéke valamennyi hőmérsékleten nagyobb lesz, mivelhogy a frekvencia növelésével a modulus nő, de a növekedés az átmeneti tartományban jóval nagyobb mértékű, mint az üvegszerű vagy a nagyrugalmas tartományban. Ebből következik, hogy a frekvencia növelésével a dinamikai modulus hőmérsékletfüggését leíró görbék alapvetően jobbra tolódnak el, amit a 8.2. ábra szemléltet. Ezzel összhangban jobbra tolódnak el a veszteségi jellemzők maximumai is, de ezek közül a 8.2. ábra csak a veszteségi tényező görbék vándorlását mutatja.

A hőmérsékletfüggés jellegzetességei bármely típusú deformációnál is megfigyelhetők, vagyis valamennyi dinamikai modulus a hőmérséklet növelésével csökken, és valamennyi veszteségi jellemzőnek maximuma van. A gumiknál és a gumiszerű anyagoknál azonban a dinamikai térfogati és a longitudinális modulus csökkenése jóval kisebb mértékű, mint a nyírási és a Young-modulusé [1, 2]. A dinamikai modulusokkal szemben a dinamikai Poisson-szám a hőmérséklet növelésével nő, míg a hozzá tartozó veszteségi tényező ugyancsak egy maximumon megy át [6, 7].

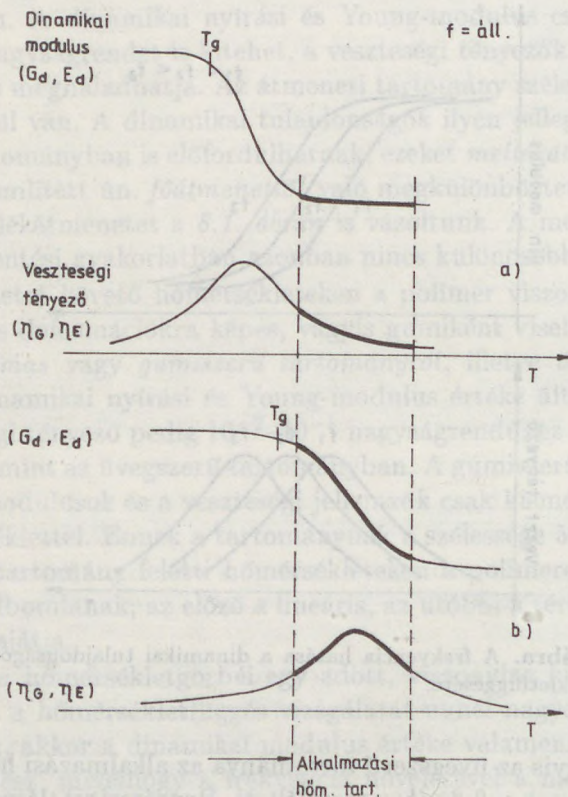
Valamely polimer alkalmazási területét lényegében annak alapján lehet megállapítani, hogy milyen állapotban van az alkalmazási hőmérséklet(ek)en, figyelembe véve természetesen a dinamikai terhelés frekvenciáját is. Rezgéscsökkentésre a polimer akkor lehet alkalmas, ha az üvegesedési hő-



8.2. ábra. A frekvencia hatása a dinamikai tulajdonságok hőmérsékletfüggésére.

mérséklete, vagyis az üvegszerű tartománya az alkalmazási hőmérséklet(ek) alá esik, ahogy azt a 8.3. ábra szemlélteti. Rezgésszigetelésnél elsősorban a kis dinamikai modulus a követelmény, ezért erre a célra az alkalmazási hőmérsékleten nagyrugalmas állapotban lévő polimerek lehetnek megfelelők (8.3a ábra). Rezgéscsillapításnál viszont a nagy veszteség a fontos, amire azok a polimerek lehetnek alkalmasak, amelyek átmeneti tartománya esik az alkalmazási hőmérsékletekre (8.3b ábra), feltéve, hogy a veszteségi maximum elég nagy.

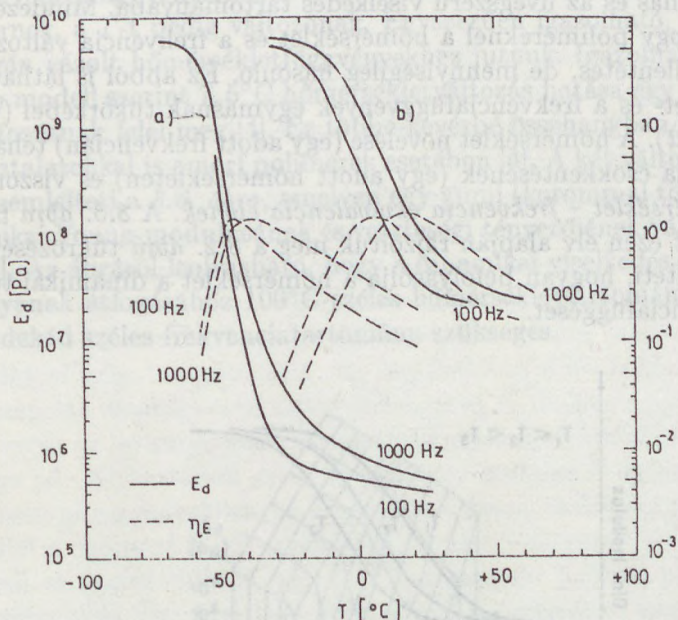
A gumik és a gumiszerű anyagok üvegesedési hőmérséklete rendszerint jóval a szobahőmérséklet alatt van. Példaként a 8.4. ábrán adjuk meg egy természetes kaucsuk alapú guminál [8] és egy rezgéscsillapító polimernél [5] a dinamikai Young-modulus és a veszteségi tényező hőmérsékletfüggését 100 Hz-en és 1000 Hz-en. Látható, hogy a gumi üvegesedési hőmérséklete -50 – -60°C körüli, és hogy már kb. -20°C felett nagyrugalmas állapotban van. Ez a magyarázata annak, hogy a gumiból szobahőmérsékleten hatékony rezgésszigetelő elemeket, rugókat lehet készíteni. A rezgéscsillapító polimer üvegesedési hőmérséklete viszont -20 – -10°C körül van, és ennek az átmeneti állapota esik a szobahőmérséklet környezetére. Mindamellet a 8.4. ábrát tekintve nyilvánvaló, hogy ez a gumi alacsony hőmérsékleten



8.3. ábra. Rezgészigetelésre és -csillapításra az alkalmazási hőmérsékleten nagyrugalmas (a), illetve átmeneti állapotban (b) lévő polimer lehet alkalmas.

rezgészillapításra; a rezgészillapító polimer pedig nagyobb hőmérsékleteken rezgészigetelésre is alkalmas lehet. Hasonlóképp, egy olyan kemény műanyag, amelynek üvegesedési hőmérséklete jóval a szobahőmérséklet felett van (pl. PVC), hatékony rezgészillapítóként használható a T_g -je feletti hőmérsékleteken.

Megemlítjük, hogy az üvegesedési hőmérsékletet vegyészeti beavatkozással változtatni lehet. Gumiknál a T_g például növelhető a kéntartalom növelésével, és így az átmeneti tartomány a pozitív hőmérsékletek irányába tolható el [9]. Ily módon lehet a gumiból szobahőmérsékleten hatékony rezgészillapítót készíteni. Vegyészeti beavatkozással az átmeneti tartomány szélessége is növelhető, amit pl. töltőanyagok adagolásával, vagy különböző átmeneti tartományú polimerek összekeverésével lehet megvalósítani. Ezzel egyidejűleg azonban csökken a veszteségi jellemzők maximuma [10–12],



8.4. ábra. A dinamikai Young-modulus és az illető veszteségi tényező változása a hőmérséklet függvényében: a) természetes kaucsuk alapú gumi (Nashif [8]); b) rezgéscsillapító polimer (Nashif, Jones és Henderson [5] 434. old.).

amit amorf polimerek esetében az alábbi összefüggés fejez ki [10, 11]:

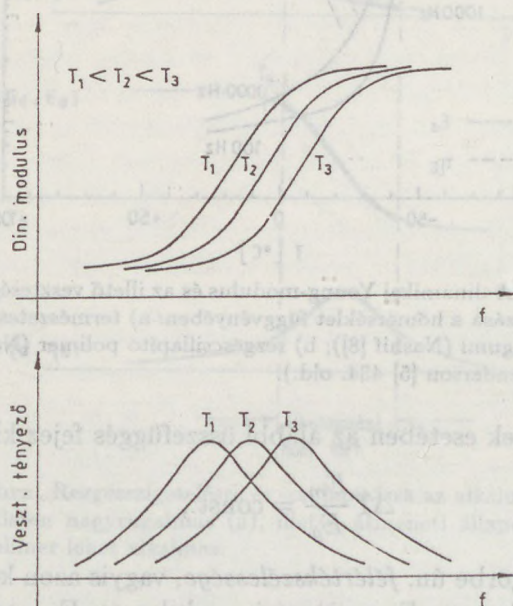
$$\Delta T \frac{E_m}{E_g} = \text{const.}, \quad (8.1)$$

ahol ΔT az $E_v(T)$ görbe ún. *félértékszélessége*, vagyis azon két hőmérséklet különbsége, amelyeken az E_v veszteségi modulus az E_m maximumának a felére csökken, E_g pedig a dinamikai Young-modulus értéke az üvegszerű tartományban.

8.3. A hőmérséklet–frekvencia ekvivalencia elv

A 6. fejezetben láttuk, hogy gumiknál és gumiszerű anyagoknál – vagyis olyan polimereknél, amelyek az alkalmazási hőmérsékleten nagyrugalmas vagy átmeneti állapotban vannak – a frekvencia változtatásával is eljuthatunk a dinamikai viselkedésnek egy másik tartományába. A nagyrugalmas állapotban lévő gumiknál a frekvencia növelésével az átmeneti, majd az üvegszerű tartományba jutunk. Egy rezgéscsillapító polimer átmeneti tartományából pedig a frekvencia csökkentésével, illetve növelésével jutunk a

nagyrugalmas és az üvegszerű viselkedés tartományába. Mindezekből nyilvánvaló, hogy polimereknél a hőmérséklet és a frekvencia változtatásának a hatása ellentétes, de mennyiségileg hasonló. Ez abból is látható, hogy a hőmérséklet- és a frekvenciafüggvények egymásnak tükörképei (vö. 8.4. és 6.1. ábrákat). A hőmérséklet növelése (egy adott frekvencián) tehát megfelel a frekvencia csökkentésének (egy adott hőmérsékleten) és viszont; ezt nevezzük *hőmérséklet – frekvencia ekvivalencia elvnek*. A 8.5. ábra frekvenciafüggvényeit ezen elv alapján rajzoltuk meg a 8.2. ábra tükrözésével, amely azt szemlélteti, hogyan befolyásolja a hőmérséklet a dinamikai tulajdonságok frekvenciafüggését.



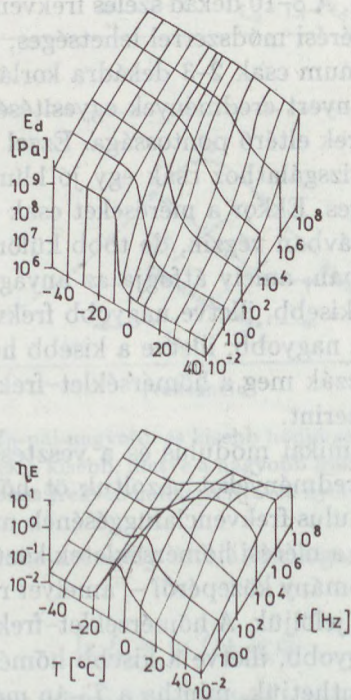
8.5. ábra. A hőmérséklet hatása a dinamikai tulajdonságok frekvenciafüggésére.

A hőmérséklet és a frekvencia ellentétes hatása egyszerű mennyiségi vizsgálattal is megmutatható. Ehhez tekintsük a τ_r relaxációs idő függését a hőmérséklettől, amit például az alábbi Arrhenius-típusú összefüggéssel lehet megadni [3, 4]:

$$\tau_r = \tau_0 e^{\frac{\Delta H}{RT}}, \quad (8.2)$$

ahol τ_0 egy állandó, ΔH az aktivációs energia, R az általános gázállandó és T a hőmérséklet K-ben. Ebből látható, hogy a T növelésével a relaxációs idő csökken, amiből következik a hőmérséklet és a frekvencia ellentétes hatása. Ennek belátásához helyettesítsük a (8.2)-t például a Zener-modell (7.25)–

(7.27) frekvenciafüggvényeiben szereplő τ_r helyére és tekintsük a frekvenciát paraméternek, a T -t pedig változónak. Egyszerűen igazolható, hogy ekkor a 8.2. ábrán vázolt hőmérsékletfüggvényekhez jutunk. Igazolható továbbá, hogy ezen modell szerint 7, 5°C hőmérsékletváltozás hatása egy dekád frekvenciaváltozásnak felel meg [4]. Ez többé-kevésbé összhangban van a kísérleti tapasztalatokkal is amorf polimerek esetében [4]. A két változó együttes hatását szemlélteti a 8.6. ábra, amelyen egy gumi (korommal töltött Buna-N) dinamikai Young-modulusának és veszteségi tényezőjének változásai láthatók [13]. Az ábráról leolvasható, hogy a dinamikai viselkedés mindhárom tartományának átfogásához 100°C széles hőmérséklettartomány, vagy legalább 10 dekád széles frekvenciatartomány szükséges.



8.6. ábra. Egy gumi dinamikai Young-modulusának és veszteségi tényezőjének változása a hőmérséklet és a frekvencia függvényében (Nolle [13]).

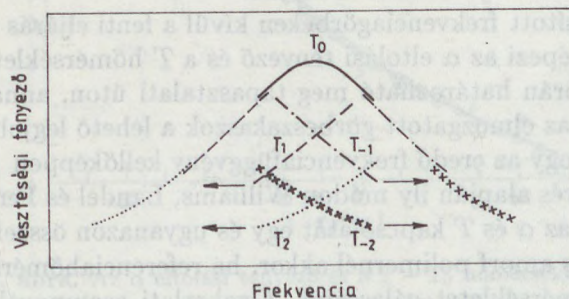
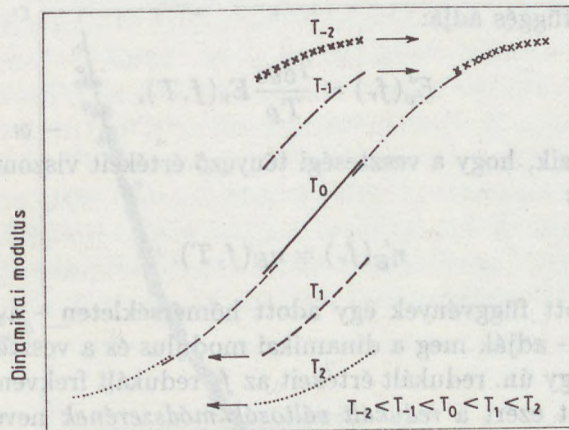
8.4. A redukált változók módszere

A hőmérséklet–frekvencia ekvivalencia elvnek különösen nagy a gyakorlati jelentősége, gyakran használják a dinamikai tulajdonságok kísérleti meghatározásában. Ennek alapján ugyanis az egyik változó függvényében végzendő mérést helyettesíteni lehet a másik változó függvényében történővel és viszont. Ezen a módon a dinamikai tulajdonságokat olyan frekvenciákon vagy hőmérsékleteken is meg lehet határozni, amelyeken azokat közvetlenül nem mértük. Ezt a módszert elsősorban a frekvenciafüggés meghatározására használják, minthogy a dinamikai tulajdonságok vizsgálata olyan széles frekvenciasávban, amely átfogja az anyag viselkedésének mindhárom tartományát, sokkal több problémával jár, mint ugyanennek vizsgálata a hőmérséklet függvényében. A 8–10 dekád széles frekvenciasáv átfogása ugyanis csak több különböző mérési módszerrel lehetséges, mivel az egyes módszerek sáv szélessége maximum csak 2–3 dekádra korlátozódik. Az egyes frekvenciatartományokban nyert eredmények egyesítésénél pedig gondot okozhat a különféle módszerek eltérő pontossága. Ezzel szemben a hőmérséklet függvényében történő vizsgálathoz csak egy jó klímakamra és megbízható mérési módszer szükséges. Ekkor a méréseket csak egy viszonylag keskeny (1–3 dekád) frekvenciasávban végzik, de több különböző hőmérsékleten és olyan széles tartományban, amely átfogja az anyag mindhárom állapotát. A mérési frekvenciánál kisebb, illetve nagyobb frekvenciához tartozó dinamikai tulajdonságokat a nagyobb, illetve a kisebb hőmérsékleteken végzett mérések alapján határozzák meg a hőmérséklet–frekvencia ekvivalencia elv alapján, a következők szerint.

A 8.7. ábrán a dinamikai modulus és a veszteségi tényező vizsgálatakor kapott jellegzetes eredményeket vázoltuk öt hőmérsékletre. Tekintsük először a dinamikai modulus frekvenciafüggésének meghatározását. A mért frekvenciagörbék, illetve a mérési hőmérsékletek közül válasszunk ki egyet – célszerűen a mérési tartomány közepéről –, amelyet referenciának tekintünk a továbbiakban és T_0 -val jelöljük. A hőmérséklet–frekvencia ekvivalencia elv értelmében az ennél nagyobb, illetve a kisebb hőmérsékleteken nyert frekvenciagörbéket úgy tekinthetjük, mintha a T_0 -án mértük volna, de kisebb, illetve nagyobb frekvenciákon. Következésképpen, ha a különböző hőmérsékleteken mért görbéket a kisebb, illetve a nagyobb frekvenciák irányába toljuk el, akkor végül egy többé-kevésbé folytonos görbét kapunk. Ily módon a kétváltozós függvényt lényegében egyváltozós frekvenciafüggvényre lehet redukálni. Az új változót ezért *redukált frekvenciának* nevezzük, amely

$$f_r = f\alpha(T), \quad (8.3a)$$

ahol α az ún. *eltolási tényező*. Ez azt mutatja meg, hogy milyen mértékben mozgattuk el a mért görbeszakaszokat vízszintes irányban. A mozgítás



8.7. ábra. A T_0 -nál nagyobb és kisebb hőmérsékleten mért frekvenciagörbéknek a kisebb, illetve a nagyobb frekvenciák irányába tolásával folytonos frekvenciafüggvényeket nyerünk.

egyszerű, mivel a frekvenciatengely általában logaritmusos léptékű, amikor is

$$\lg f_r = \lg f + \lg \alpha. \quad (8.3b)$$

Az új frekvenciafüggvény megszerkesztésénél a mért görbeszakaszokat azonban még függőlegesen is mozgatni kell, vagyis a dinamikai modulus értékeit módosítani kell az alábbi összefüggés szerint [1, 5, 9] (a Young-modulusra felírva):

$$E'_d(f_r) = \frac{T_0 \varrho_0}{T \varrho} E_d(f, T), \quad (8.4)$$

ahol E'_d a dinamikai modulusnak az f_r redukált frekvenciára átszámított értéke; ϱ_0 és ϱ az anyag sűrűsége a T_0 , illetve a T hőmérsékleteken, mindkettő K-ben mérve. A veszteségi modulus és a veszteségi tényező esetében

az eljárás a fentiekhez hasonló. A veszteségi modulus átszámított értékeit az alábbi összefüggés adja:

$$E'_v(f_r) = \frac{T_0 \varrho_0}{T \varrho} E_v(f, T), \quad (8.5)$$

amiből következik, hogy a veszteségi tényező értékeit viszont nem kell módosítani, vagyis

$$\eta'_E(f_r) = \eta_E(f, T). \quad (8.6)$$

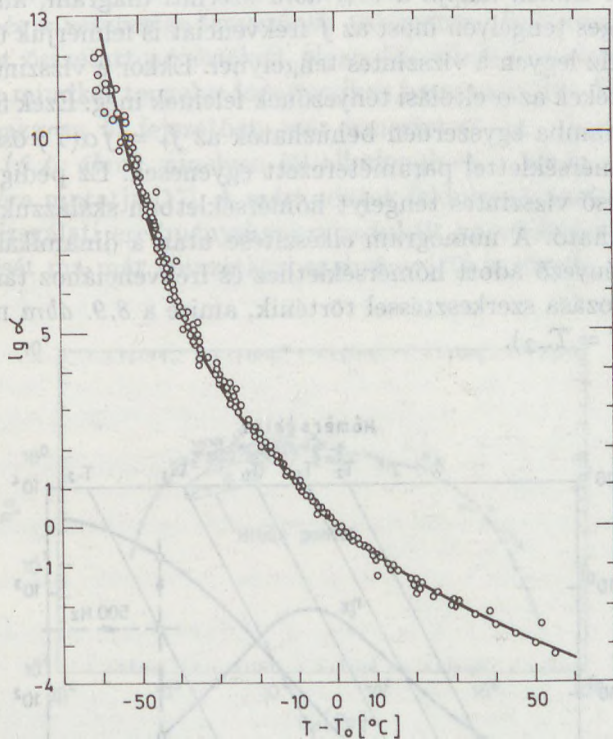
Az így előállított függvények egy adott hőmérsékleten – a T_0 *referencia-hőmérsékleten* – adják meg a dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők átszámított, vagy ún. redukált értékeit az f_r redukált frekvencia függvényében. Az eljárást ezért a *redukált változók módszerének* nevezik, és az így szerkesztett függvényeket pedig *redukált* vagy *általánosított frekvenciagörbéknek*, illetve *mestergörbéknek* is hívják.

Az általánosított frekvenciagörbéken kívül a fenti eljárás eredményének szerves részét képezi az α eltolási tényező és a T hőmérséklet összefüggése. Ez az eljárás során határozható meg tapasztalati úton, annak figyelembevételével, hogy az elmozgatott görbeszakaszok a lehető legjobban illeszkedjenek, vagyis, hogy az eredő frekvenciafüggvény kellőképpen „sima” legyen. Nagyszámú mérés alapján ily módon Williams, Landel és Ferry [14] megállapította, hogy az α és T kapcsolatát egy és ugyanazon összefüggéssel lehet megadni számos amorf polimernél akkor, ha referenciahőmérsékletnek a T_g üvegesedési hőmérsékletet választjuk. Gyakorlati szempontból azonban a $T_g + 50^\circ\text{C}$ -ot célszerű referenciahőmérsékletnek választani, amikor is

$$\lg \alpha(T) = \frac{-8,86(T - T_0)}{101,6 + (T - T_0)}. \quad (8.7)$$

Ez az ún. *WLF-egyenlet*, amellyel gyakran találkozhatunk a műanyagfizikában. Az $\lg \alpha$ értékeinek változását a 8.8. ábrán adjuk meg a $T - T_0$ hőmérséklet-különbség függvényében a (8.7) egyenlet alapjául szolgáló kísérleti eredményekkel együtt [15]. A kísérleti tapasztalatok szerint a WLF-egyenlet a $T_0 \pm 50^\circ\text{C}$ hőmérséklet-tartományban, vagyis T_g és $T_g + 100^\circ\text{C}$ között használható jól. Az $\alpha(T)$ összefüggés természetesen az előbbtől eltérő is lehet, a vizsgált anyagtól és a referenciahőmérséklet választásától függően. Erre számos más empirikus összefüggést is kidolgoztak, elsősorban a rezgéscsillapító polimerek vizsgálatával kapcsolatban [5, 16, 17]. Az $\alpha(T)$ -nek az utóbbi időben gyakran használt alakját [17] a (8.2) Arrhenius-összefüggésből kiindulva lehet levezetni:

$$\lg \alpha(T) = \frac{T_A}{T} - \frac{T_A}{T_0}, \quad (8.8)$$



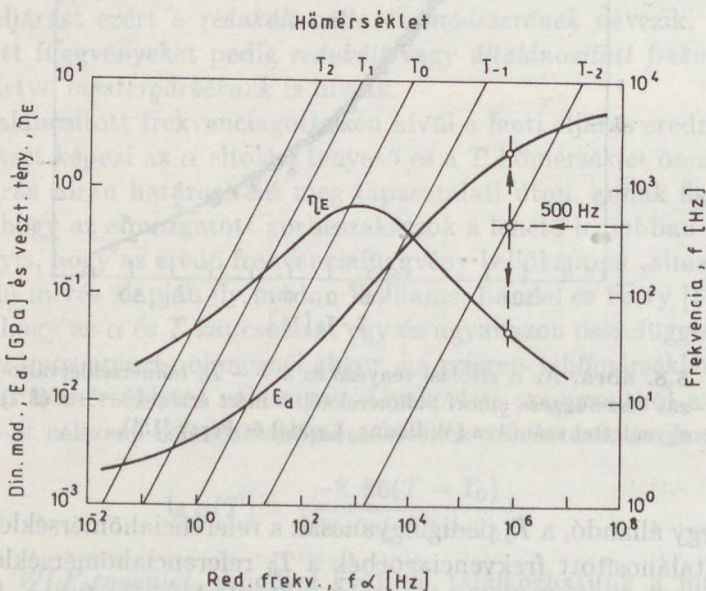
8.8. ábra. Az α eltolási tényező és a $T - T_0$ hőmérsékletváltozás összefüggése amorf polimereknél: o mért értékek; — a (8.7) egyenlettel számítva (Williams, Landel és Ferry [15]).

ahol T_A egy állandó, a T_0 pedig ugyancsak a referenciahőmérsékletet jelenti.

Az általánosított frekvenciagörbék a T_0 referenciahőmérsékleten adják meg az anyag dinamikai tulajdonságait széles frekvenciasávban. Ezek ismeretében más hőmérsékleten is meg lehet állapítani a dinamikai tulajdonságokat valamely frekvencián, feltéve, hogy ismert az $\alpha(T)$ összefüggés. Az eljárás ekkor a következő; az $\alpha(T)$ diagramról először leolvassuk a T_0 -tól eltérő T hőmérséklethez tartozó α -t, és ennek ismeretében kiszámítjuk a kérdéses f frekvenciához tartozó $f_r = f\alpha(T)$ redukált frekvenciát, majd az általánosított frekvenciagörbékről leolvassuk az f_r -hez tartozó dinamikai modulust és veszteségi tényezőt. Az eljárás egyszerű, de némiképp kényelmetlenné teszi az, hogy ehhez két diagram használata szükséges. Az eljárás elvégzését pedig gyakran lehetetlenné teszi az, hogy az általánosított frekvenciagörbéket az $\alpha(T)$ diagram nélkül adják meg.

Ezeknek a problémáknak a megoldását jelenti a Jones [18] által kidolgozott ún. *redukált hőmérséklet nomogram* készítése, amelyre a 8.9. ábránk

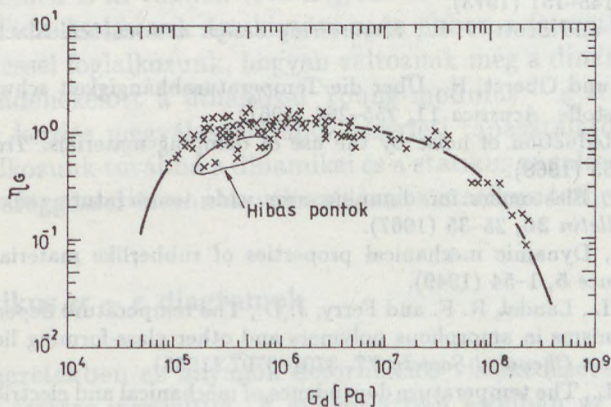
mutat példát. Ennek alapja a 8.7. ábra szerinti diagram, amelynek jobb oldali függőleges tengelyén most az f frekvenciát is felmérjük úgy, hogy annak értéke 1 Hz legyen a vízszintes tengelynél. Ekkor a vízszintes tengelyen felmért $f\alpha$ értékek az α eltolási tényezőnek felelnek meg. Ezek figyelembevételével a diagramba egyszerűen behúzhatók az $f_r = f\alpha(T)$ összefüggésnek megfelelő, hőmérséklettel paraméterezett egyenesek. Ez pedig lehetővé teszi, hogy a felső vízszintes tengelyt hőmérsékletben skálázzuk, ahogy az a 8.9. ábrán látható. A nomogram elkészítése után a dinamikai modulus és a veszteségi tényező adott hőmérséklethez és frekvenciához tartozó értékének meghatározása szerkesztéssel történik, amire a 8.9. ábra mutat példát ($f=500$ Hz, $T = T_{-2}$).



8.9. ábra. A redukált hőmérséklet-nomogram.

Az általánosított frekvenciagörbék olyan nagyszámú adat alapján szerkesztik meg, melyeket általában több próbatesten, különböző hőmérsékleteken, esetenként viszonylag hosszú időn át végzett mérésekkel kapnak. Ezért a mért adatok hibája rendszerint nem azonos, egyes hőmérsékleteken a pontatlanságuk igen nagy lehet, különösképpen a veszteségi tényező esetében. Az ilyen kiugróan hibás adatokat célszerű kihagyni a vizsgálatból, mivel megnehezítik a kellőképpen „sima”, általánosított frekvenciagörbék előállítását. A mérési eredményeknek a frekvencia függvényében történő ábrázolásánál (hőmérséklettel parametrizált görbeszakaszok, 8.7. ábra) azonban rendszerint nem lehet egyértelműen eldönteni a mért adatok megfelelőség-

gét. A kiugróan hibás adatok jól kiszűrhetők viszont akkor, ha a dinamikai modulusnak és a veszteségi tényezőnek valamennyi frekvencián és hőmérsékleten mért összetartozó értékeit olyan koordináta-rendszerben mérjük fel, amelynek mindkét tengelye logaritmikus beosztású [19]. Ekkor a mérési pontok halmaza az 5. fejezetben már ismertetett ún. „kapu”-diagramot eredményezi (5.4. ábra), amelyen jól elkülönülnek a hibás adatok, ahogy azt a 8.10. ábra mutatja [17]. A mért adatok feldolgozásának ezt a módját, valamint a vizsgálati eredményeknek a redukált hőmérséklet nomogramon történő közlését ma már nemzetközi szabvány [20] is rögzíti.



8.10. ábra. A „kapu”-diagramon jól elkülönülnek a hibás mérési adatok (Jones [17]).

Az általánosított frekvenciagörbékkel kapcsolatban hangsúlyozni szükséges, hogy azok a dinamikai tulajdonságokat olyan frekvenciákon adják meg – egy szűk sáv kivételével –, ahol méréseket nem végeztünk. Ezeknek az értékeknek a pontossága a frekvenciagörbék megszerkesztésének módjától, vagyis alapvetően az eltolási tényező érvényességétől, illetve pontosságától függ. Ezért az általánosított frekvenciagörbéről leolvasott értékeket kellő óvatossággal kell kezelni. Ez a magyarázata annak, hogy ezzel a kérdéssel, nevezetesen az eltolási tényezővel és az azzal szerkesztett frekvenciagörbék pontosságával több, az utóbbi időben megjelent munka foglalkozik [21–25].

Irodalom

1. Mason, W. P. (editor), *Properties of polymers and nonlinear acoustics*. Physical Acoustics, Vol. II., Part B, Academic Press, New York, 1965. Chs. 7 to 9.
2. Ferry, J. D., *Viscoelastic properties of polymers*. Wiley, New York, 1970.

3. Perepecsko, I. I., *Akusticheskie metody issledovaniya polimerov*. Himija, Moskva, 1973.
4. Murayama, T., *Dynamic mechanical analysis of polymeric material*. Elsevier, Amsterdam, 1978.
5. Nashif, A. D., Jones, D. I. G. and Henderson, J. P., *Vibration damping*. Wiley, New York, 1985.
6. Waterman, H. A., Relations between loss angles in isotropic viscoelastic materials. *Rheologica Acta* **16**, 13-42 (1977).
7. Yee, A. F. and Takemori, M. T., A new technique for measuring volume and shear relaxation in solid polymers: dynamic Poisson's ratio. *American Chemical Society, Division of Polymer Chemistry, Preprints* 758-761 (1979).
8. Nashif, A. D., Materials for vibration control in engineering. *Shock and Vibration Bulletin* **43**, 145-151 (1973).
9. Payne, A. R. and Scott, J. R., *Engineering design with rubber*. MacLaren, London, 1960.
10. Linhardt, F. und Oberst, H., Über die Temperaturabhängigkeit schwingungsdämpfender Kunststoffe. *Acustica* **11**, 255-264 (1961).
11. Oberst, H., Reduction of noise by the use of damping materials. *Trans. Roy. Soc. A* **263**, 441-453 (1968).
12. Owens, F. S., Elastomers for damping over wide temperature ranges. *Shock and Vibration Bulletin* **36**, 25-35 (1967).
13. Nolle, A. W., Dynamic mechanical properties of rubberlike materials. *Journal of Polymer Science* **5**, 1-54 (1949).
14. Williams, M. L., Landel, R. F. and Ferry, J. D., The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids. *Journal of the American Chemical Society* **77**, 3701-3707 (1955).
15. Williams, M. L., The temperature dependence of mechanical and electrical relaxations in polymers. *Journal of Physical Chemistry* **59**, 95-96 (1955).
16. Jones, D. I. G., Temperature - frequency dependence of dynamic properties of damping materials. *Journal of Sound and Vibration* **33**, 451-470 (1974).
17. Jones, D. I. G., On temperature - frequency analysis of polymer dynamic mechanical behaviour. *Journal of Sound and Vibration* **140**, 85-102 (1990).
18. Jones, D. I. G., A reduced-temperature nomogram for characterization of damping material behavior. *Shock and Vibration Bulletin* **48**, 13-22 (1978).
19. Jones, D. I. G. and Rao, D. K., A new method for representing damping material properties. *ASME Vibration Conference, Boston MA*, 1987. pp. 143-149.
20. ISO 10112, 1991. *Damping materials - Graphical representation of the complex modulus*.
21. Rogers, L., Temperature shift considerations for damping materials. *Shock and Vibration Bulletin* **56**, 139-146 (1986).
22. Jones, D. I. G., Nashif, A. D. and Rao, D. K., Investigation of shift factors in material damping. ASME Paper 87-WA/Aero-7, *ASME Winter Annual Meeting, Boston MA*, 1987. pp. 1-7.
23. Rogers, L., An accurate temperature shift function and a new approach to modeling complex modulus. *Proceedings of the 60th Shock and Vibration Symposium, Virginia Beach*, 1989. pp. 1-19.
24. Lewis, T., Nashif, A. D. and Jones, D. I. G., Frequency - temperature dependence of polymer complex modulus properties. *Proceedings of Damping '89, Florida*, 1989. Vol. II, FAC-1-32.
25. Oyadiji, S. O. and Tomlinson, G. R., Establishing the validity of the master curve technique for complex modulus data reduction. *Proceedings of Damping '91, San Diego, California*, 1991. Vol. I., DBC-1-20.

9. A statikus terhelés hatása

A rezgésszigetelő anyagok általában nemcsak dinamikai, hanem jelentős statikus terhelésnek is ki vannak téve a gyakorlatban. Ezen anyagok statikus deformációs viselkedésének áttekintése után ebben a fejezetben elsősorban azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogyan változnak meg a dinamikai tulajdonságok – mindenekelőtt a dinamikai Young-modulus – a statikus terhelés hatására. A kérdés megválaszolásához kísérleti tapasztalatokra támaszkodunk. Foglalkozunk továbbá a dinamikai és a statikus rugalmassági modulus közötti összefüggéssel és annak változásával a statikus terhelés hatására.

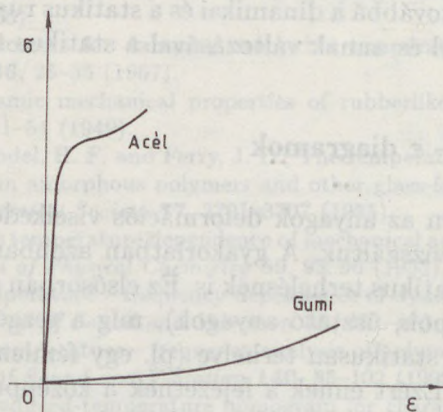
9.1. A statikus $\sigma - \epsilon$ diagramok

Az előző fejezetekben az anyagok deformációs viselkedését csak a dinamikai terhelés esetére vizsgáltuk. A gyakorlatban azonban az anyagok gyakran vannak kitéve statikus terhelésnek is. Ez elsősorban a rezgésszigetelőkre jellemző (pl. gépalapok, úsztató anyagok), míg a rezgéscsillapító anyagok általában nincsenek statikusan terhelve (pl. egy fémlemezre felvitt rezgéscsillapító bevonat). Ezért ennek a fejezetnek a középpontjába a rezgésszigetelő anyagokat állítjuk, amelyek olyan különböző szerkezetűek lehetnek, mint például egy gumi és egy üvegyapot lemez. Tekintettel arra, hogy a rezgésszigetelő anyagok zöme leggyakrabban egytengelyű nyomásnak van kitéve, ezért csak ezen terhelés hatásával, vagyis a Young-modulus változásával foglalkozunk. Mindamellett az itt elmondottak értelemszerűen érvényesek más, például nyíró terhelés esetére, amely főleg a gumiból és más elasztomerekből készített rezgésszigetelő elemeknél gyakori.

Rezgésszigetelő anyagoknál a statikus terhelés hatásával két szempontból is foglalkoznunk kell. Az egyik az, hogy a rezgésszigetelés tervezéséhez ismerni kell az anyag deformációját – az összenyomódását az adott statikus terhelésnél. A másik szempont pedig az, hogy az anyag dinamikai tulajdonságai is megváltoznak a statikus terhelés hatására. Mindkét szempontból alapvető fontosságú a feszültség és a deformáció statikus értékeinek összefüggését leíró $\sigma - \epsilon$ diagram ismerete.

A $\sigma - \epsilon$ diagram többnyire jól ismert mind a szigetelőanyagok, mind számos más anyag esetében. Különösen sok kísérleti tapasztalat halmozó-

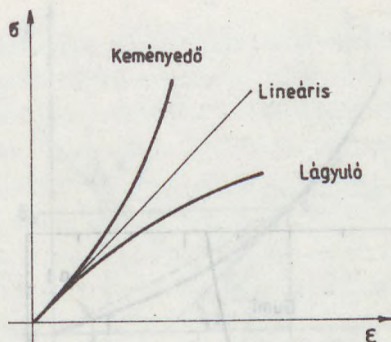
dott fel a nagy szilárdságú szerkezeti anyagokra vonatkozóan. A szerkezeti és a rezgésszigetelő anyagok $\sigma - \epsilon$ diagramja közötti legszembetűnőbb különbség az, hogy az utóbbiak igen nagy deformációkra is képesek az anyag tönkremenetele, roncsolódása nélkül. A rezgésszigetelők viszonylag kis rugalmassági modulusa következtében a nagyobb deformációk létrehozásához természetesen jóval kisebb erők szükségesek, mint szerkezeti anyagoknál a kisebb deformációkhoz. Az elmondottakat szemlélteti a 9.1. ábra, amelyen egy acél és egy gumi $\sigma - \epsilon$ diagramja látható egytengelyű nyomás esetében. Az ábra a szigetelőanyagok egy másik közös tulajdonságát is szemlélteti, nevezetesen azt, hogy azok $\sigma - \epsilon$ diagramja a nagyobb deformációkon – de még jóval az anyag roncsolódása előtt – mindinkább eltér a lineáristól. Ezt nemlineáris viselkedésnek nevezzük, amelyet a $\sigma - \epsilon$ diagrammal, vagy a $\sigma(\epsilon)$ függvénykapcsolat megadásával lehet jellemezni.



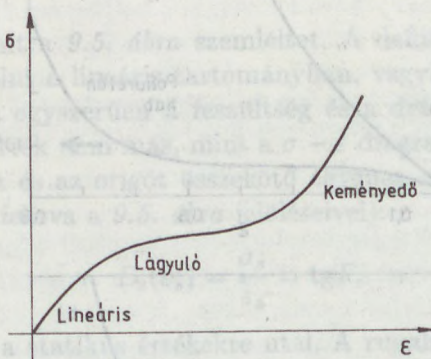
9.1. ábra. Az acélra és a gumira jellemző $\sigma - \epsilon$ diagram egytengelyű nyomás esetében.

A 9.2. ábrán a nemlineáris viselkedés két alapesetét ábrázoltuk. Mindkettőnél az anyag kezdetben – a kis deformációkon – lineárisan viselkedik. Az a) görbe szerint viselkedő anyag terhelésekor a lineáris szakaszon túl mind nagyobb és nagyobb erő kell a deformáció azonos mértékű növeléséhez. Ezért ezt keményedő anyagnak, illetve keményedő $\sigma - \epsilon$ diagramnak nevezzük. A b) görbe szerinti viselkedés az előzővel éppen ellentétes, vagyis az anyag lágyul a terhelés növelésével. A 9.3. ábrán egy olyan $\sigma - \epsilon$ diagram látható, amely a lineáris szakasz után előbb lágyuló jellegű, majd pedig keményedővé válik.

A 9.4a,b ábrákon példaként tipikus rezgésszigetelő anyagok $\sigma - \epsilon$ diagramjait adjuk meg egytengelyű nyomás esetében. A 9.4a ábrán az látható, hogy a gumi nyomásra keményedik, míg a nyílt pórusú, kis testsűrűségű



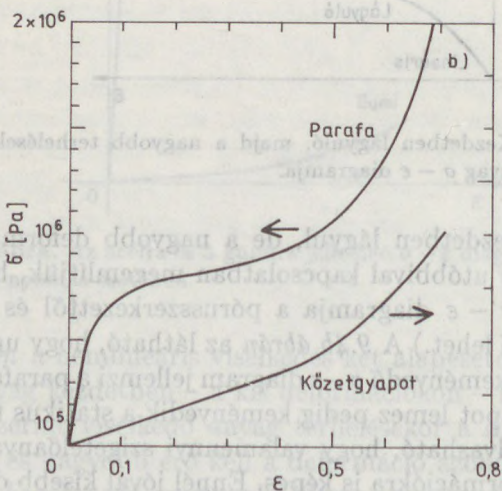
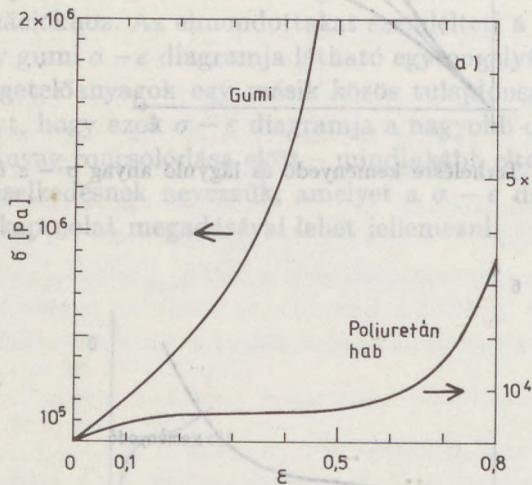
9.2. ábra. Terhelésre keményedő és lágyuló anyag $\sigma - \varepsilon$ diagramja.



9.3. ábra. Kezdetben lágyuló, majd a nagyobb terheléseknél keményedő anyag $\sigma - \varepsilon$ diagramja.

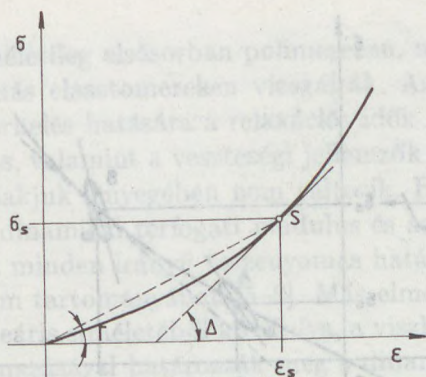
lágú poliuretánhab kezdetben lágyul, de a nagyobb deformációkon ez is keményedni kezd. (Ez utóbbival kapcsolatban megemlítjük, hogy a különféle műanyaghabok $\sigma - \varepsilon$ diagramja a pórusszerkezettől és a sűrűségtől függően nagyon eltérő lehet.) A 9.4b ábrán az látható, hogy ugyancsak kezdetben lágyuló, majd keményedő $\sigma - \varepsilon$ diagram jellemzi a parafát; a 80kg/m^3 testsűrűségű kőzetgyapot lemez pedig keményedik a statikus terhelés hatására. Az ábrákról leolvasható, hogy valamennyi szigetelőanyag igen nagy, 50%-nál nagyobb deformációkra is képes. Ennél jóval kisebb deformációnál van viszont a lineáris viselkedés határa, vagyis amíg az anyagok követik a Hooke-törvényt. Ez a határ anyagonként más és más; a 9.4a, b ábrán bemutatottaknál kb. 5% és 15% között van, kivéve a kőzetgyapot lemezt, amely $\sigma - \varepsilon$ diagramja még a kb. 30-40% összenyomódásnál is lineáris.

A lineáris tartományban az anyag rugalmasságát egyértelműen jellemezni lehet a feszültség és a deformáció hányadosával, vagyis a rugalmassági modulussal, amelynek értéke nem függ a terhelés nagyságától. Ugyanez



9.4. ábra. Rezgészigetelő anyagok $\sigma - \varepsilon$ diagramja egytengelyű nyomás esetében. Szakirodalmi források: gumi (Snowdon [1]); poliuretán hab, 35kg/m^3 (Hatae [2]); parafa (Dart és Guth [3]); kőzetgyapot lemez, 80kg/m^3 (Siewert [4]).

nem mondható el a nemlineáris tartományról, ahol a rugalmassági modulus nemcsak hogy változik a statikus terheléssel, de definiálni is többfé-



9.5. ábra. A statikus rugalmassági modulus definiálása a $\sigma - \varepsilon$ diagram nemlineáris szakaszán.

leképpen lehet, amit a 9.5. ábra szemléltet. A definiálás egyik lehetséges módja ugyanaz, mint a lineáris tartományban, vagyis a rugalmassági moduluszt továbbra is egyszerűen a feszültség és a deformáció hányadosával számítjuk. Ez az érték nem más, mint a $\sigma - \varepsilon$ diagramon a statikus terhelést kijelölő pontot és az origót összekötő egyenes meredeksége, vagyis (a Young-modulusra felírva a 9.5. ábra jelöléseivel):

$$E_s(\varepsilon_s) = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_s} = \operatorname{tg} \Gamma, \quad (9.1)$$

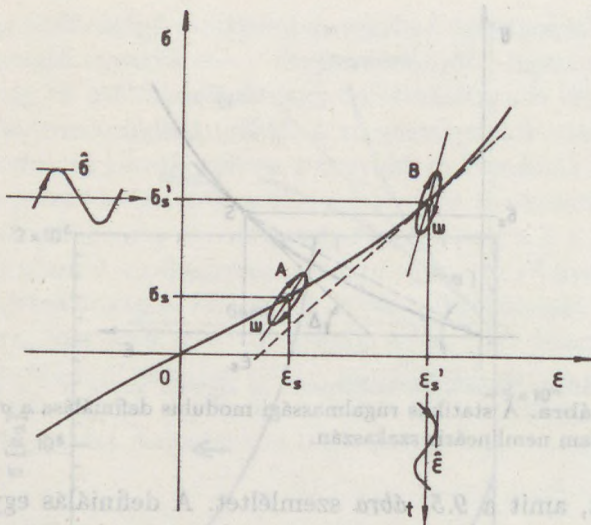
ahol az „s” index a statikus értékekre utal. A rugalmassági modulus definiálható továbbá a $\sigma - \varepsilon$ diagram illető pontjához húzott érintő meredekségével is, vagyis

$$E'_s(\varepsilon_s) = \left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon_s} = \operatorname{tg} \Delta. \quad (9.2)$$

A fenti két rugalmassági modulus természetesen nem azonos, eltérésük az anyag nemlinearitásának jellegétől és mértékétől függ. Keményedő anyagnál, illetve a $\sigma - \varepsilon$ diagram keményedő szakaszán: $E'_s > E_s$, míg lágyuló esetben: $E'_s < E_s$.

9.2. A dinamikai tulajdonságok változása a statikus terhelés hatására

Statikus és dinamikai terhelésnek egyidejűleg kitett anyagnál a feszültség és a deformáció statikus és dinamikai értékeinek összefüggéseit a 9.6. ábrán vázoltuk. A statikus $\sigma - \varepsilon$ diagramról feltételeztük, hogy az kezdetben lineáris, majd keményedő jellegű. A dinamikai terhelésről pedig azt tételeztük fel, hogy az kisamplitúdójú, ω frekvenciájú harmonikus függvény szerinti,



9.6. ábra. A feszültség és a deformáció összefüggését leíró függvények statikus és dinamikai terhelésnek egyidejűleg kitett anyag-nál.

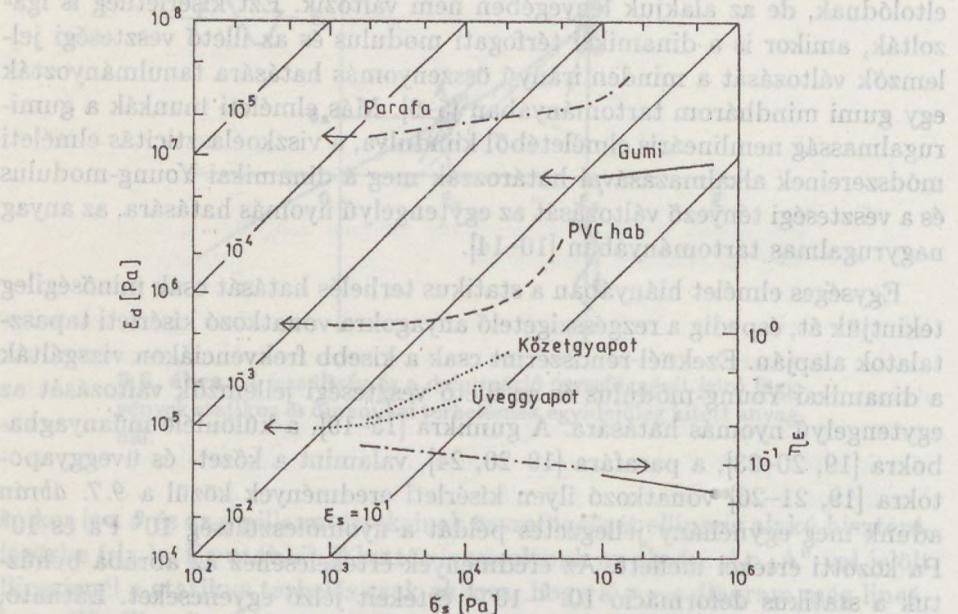
amikor is a σ és az ε pillanatértékeinek összefüggését ellipszis alakú hiszterézisgörbe írja le. Ez utóbbiból kettőt is vázoltunk az ábrán. Az „A”-val jelölt ellipszisenél a statikus terhelés csak akkor, hogy a $\sigma - \varepsilon$ diagram még lineáris, a „B” ellipszisenél viszont már a nemlineáris szakaszon vagyunk. Mindkét ellipszis főtengelyének meredekségét – amely a dinamikai modulus arányos – nagyobbra vettük a $\sigma - \varepsilon$ diagram illető pontbeli meredekségénél, mivel a dinamikai modulus a frekvenciával nő és így annak értéke elvileg mindig nagyobb a statikus modulusnál. Ezenfelül a dinamikai modulus értékét, vagyis az ellipszis meredekségét a statikus terhelés is befolyásolja, ahogy azt ebben a pontban megmutatjuk. Ez utóbbi figyelembevételével rajzoltuk meg a „B” ellipszist, nevezetesen főtengelyének nagyobb meredekségével azt tételeztük fel, hogy a $\sigma - \varepsilon$ diagram keményedő szakaszán – a statikus modulusához hasonlóan – a dinamikai modulus is nagyobb, mint a lineáris szakaszon.

Nem ismeretes olyan elméleti módszer, amellyel a dinamikai tulajdonságok változását a statikus terhelés hatására olyan általánosan – az anyagtól és a deformáció típusától függetlenül – lehetne meghatározni, mint a frekvencia hatására. A dinamikai tulajdonságok változása a terhelés nagyságán és az illető anyagon kívül a deformáció típusától, sőt annak irányától is függ. Bizonyára szerepe van továbbá a frekvenciának, polimereknek pedig a hőmérsékletnek is, vagyis annak, hogy a dinamikai tulajdonságok változását az anyag viselkedésének mely tartományában vizsgáljuk. A statikus

terhelés hatását elméletileg elsősorban polimereken, nevezetesen a nempórusos gumikon és más elasztomereken vizsgálták. Az egyik elmélet [5–9] szerint a statikus terhelés hatására a relaxációs idők megváltoznak, és így a dinamikai modulus, valamint a veszteségi jellemzők frekvenciafüggvényei eltolódnak, de az alakjuk lényegében nem változik. Ezt kísérletileg is igazolták, amikor is a dinamikai térfogati modulus és az illető veszteségi jellemzők változását a minden irányú összenyomás hatására tanulmányozták egy gumi mindhárom tartományában [5–9]. Más elméleti munkák a gumi-rugalmasság nemlineáris elméletéből kiindulva, a viszkoelaszticitás elméleti módszereinek alkalmazásával határozzák meg a dinamikai Young-modulus és a veszteségi tényező változását az egytengelyű nyomás hatására, az anyag nagyrugalmas tartományában [10–14].

Egységes elmélet hiányában a statikus terhelés hatását csak minőségileg tekintjük át, éspedig a rezgésszigetelő anyagokra vonatkozó kísérleti tapasztalatok alapján. Ezeknél rendszerint csak a kisebb frekvenciákon vizsgálták a dinamikai Young-modulus és az illető veszteségi jellemzők változását az egytengelyű nyomás hatására. A gumikra [15–19], a különféle műanyaghabokra [19, 20–23], a parafára [19–20, 24], valamint a kőzet- és üvegyapokokra [19, 21–26] vonatkozó ilyen kísérleti eredmények közül a 9.7. ábrán adunk meg egynéhány jellegzetes példát a nyomófeszültség 10^2 Pa és 10^6 Pa közötti értékei mellett. Az eredmények értékeléséhez az ábrába behúztuk a statikus deformáció 10^{-5} – 10^{-1} értékeit jelző egyeneseket. Látható, hogy valamennyi itteni anyagnál a dinamikai Young-modulus nő a statikus terhelés hatására. Ezzel szemben a veszteségi tényező csökken, de erről sajnos csak a gumi és a parafa esetében van irodalmi adat. A dinamikai modulus növekedése és a veszteségi tényező csökkenése kb. azonos mértékű, következésképpen valószínű, hogy a veszteségi modulus nem változik jelentős mértékben. A dinamikai modulus növekedése általában annál nagyobb mértékű, minél lágyabb az anyag és minél nagyobb az összenyomódása. Az ábrán látható továbbá az, hogy a szigetelőanyagok relatív összenyomódása a statikus terhelés itteni legnagyobb értékeinél sem haladja meg a 10^{-1} -et, amelyeken a $\sigma - \varepsilon$ diagram még többnyire lineáris (9.4a, b ábra), vagyis a statikus modulus állandó. Ezzel szemben a dinamikai modulus határozottan nő a terhelés hatására és a növekedés még 10^{-2} -nél kisebb statikus deformációkon is megfigyelhető. Mindezekből nyilvánvaló, hogy a dinamikai tulajdonságok változása alapvetően az anyagban keltett statikus feszültséggel van összefüggésben, ami feltehetően érvényes a $\sigma - \varepsilon$ diagram nemlineáris szakaszára is. Az utóbbi feltevést az is alátámasztja, hogy egyes anyagoknál – pl. a parafánál [24] és a kőzetgyapot lemezeknél [25] – a $\sigma - \varepsilon$ diagram lágyuló jellegű szakaszán is tapasztalták a dinamikai modulus növekedését, vagyis ahol a statikus rugalmassági modulus csökken a terhelés növelésével. Mindamellet az olyan műanyaghaboknál, amelyek nagymértékben lágyul-

nak a statikus terhelés hatására – a dinamikai modulus is csökken a $\sigma - \varepsilon$ diagram illető szakaszán [20]. Következésképpen a dinamikai tulajdonságok változását a statikus $\sigma - \varepsilon$ diagram nemlinearitása is befolyásolja.



9.7. ábra. Rezgésszigetelő anyagok dinamikai Young-modulusának és veszteségi tényezőjének változása a statikus nyomófelesztés függvényében. Szakirodalmi források: gumi (Roszin [19] 141. old.); PVC hab, 170kg/m^3 (Kovrigin, Zaharov és Geraszimov [23] 97. old.); parafa, 214kg/m^3 (Roszin [19] 160. old.); kőzetgyapot lemez, 90kg/m^3 (Friberg, Ahlrik és Ktövergard [25] 41. old.); üveggyapot lemez, 70kg/m^3 (Pritz).

9.3. A dinamikai és a statikus modulus összefüggése

A dinamikai modulus mérése viszonylag bonyolult, költséges laboratóriumi műszereket és képzett személyzetet igényel. Ezzel szemben a statikus rugalmassági modulus meghatározása jóval egyszerűbb eszközökkel, különösebb szakképzettség nélkül, üzemi körülmények között is elvégezhető. Ezért indokoltak azok a törekvések, hogy a dinamikai moduluszt a statikus mérések révén határozzák meg. Más esetben a cél ennek éppen a fordítottja, vagyis, hogy a statikus mérést – amely általában nem olyan pontos, mint a dinamikai és roncsolódással is járhat – a jól reprodukálható, roncsolásmentes dinamikai vizsgálattal lehessen helyettesíteni. Mindkét eljárás természete-

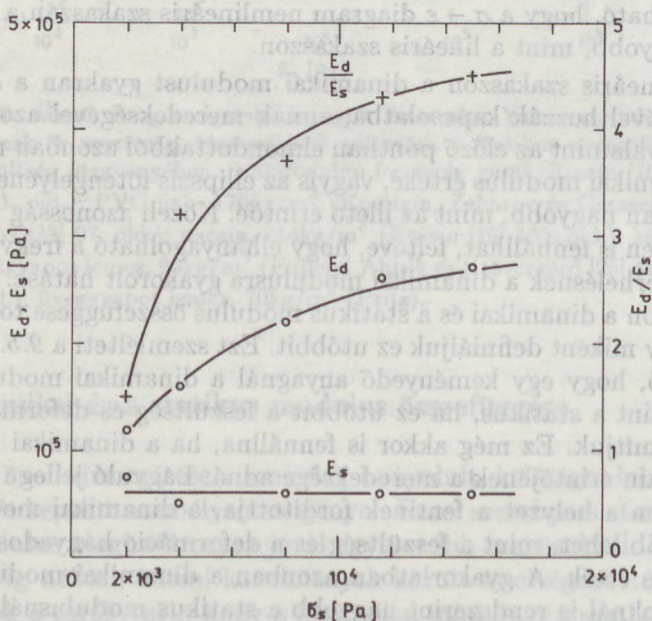
sen csak akkor lehet eredményes, ha ismerjük a dinamikai és a statikus rugalmassági modulus közötti összefüggést.

Ilyen összefüggéseket elméleti úton csak akkor lehetne meghatározni, ha ismernénk egy anyagnál a dinamikai és a statikus rugalmassági modulus viselkedését mindazon fizikai változók függvényében, amelyek befolyásolják értéküket. A változók közül a modulusok összefüggése szempontjából a statikus terhelésnek és a frekvenciának van alapvető szerepe. Az előzőekben azonban láttuk, hogy ezen változók hatását leíró általános összefüggések egyáltalán nincsenek, sőt rendszerint még egy adott anyag esetében sem ismertek. Ezek hiányában a dinamikai és a statikus modulusok összefüggését itt csak minőségileg vizsgáljuk meg, és csak egy közös változónak – a statikus terhelésnek a függvényében, vagyis a $\sigma - \varepsilon$ diagram mentén. Tekintsük ehhez ismét a 9.6. ábrát, és vizsgáljuk először a rugalmassági modulusok összefüggését a $\sigma - \varepsilon$ diagram lineáris szakaszán. Itt a statikus modulus állandó, annak értékét a $\sigma - \varepsilon$ diagram meredeksége adja. Ennél elvileg mindig nagyobb a dinamikai modulus értéke – vagyis az ellipszis főtengelyének a meredeksége – egyrészt a frekvencia, másrészt a statikus terhelés hatásának következtében. A két modulus azonban gyakorlatilag azonos lehet akkor, ha az anyagon nincs statikus terhelés, illetve annak hatása elhanyagolható, és ha a frekvencia még kicsi, illetve a dinamikai modulus alig változik a frekvenciával. A statikus terhelés növelésével nő a dinamikai modulusok értéke, és ezért várható, hogy a $\sigma - \varepsilon$ diagram nemlineáris szakaszán a modulusok eltérése nagyobb, mint a lineáris szakaszon.

A nemlineáris szakaszon a dinamikai modulust gyakran a $\sigma - \varepsilon$ diagram érintőjével hozzák kapcsolatba; annak meredekségével azonosítják. A fentiekből, valamint az előző pontban elmondottakból azonban nyilvánvaló, hogy a dinamikai modulus értéke, vagyis az ellipszis főtengelyének meredeksége általában nagyobb, mint az illető érintőé. Közeli azonosság természetesen ez esetben is fennállhat, feltéve, hogy elhanyagolható a frekvenciának és a statikus terhelésnek a dinamikai modulusra gyakorolt hatása. A nemlineáris szakaszon a dinamikai és a statikus modulus összefüggése továbbá attól is függ, hogy miként definiáljuk ez utóbbit. Ezt szemlélteti a 9.5. ábra, amelyen látható, hogy egy keményedő anyagnál a dinamikai modulus mindig nagyobb, mint a statikus, ha ez utóbbit a feszültség és deformáció hányadosával számítjuk. Ez még akkor is fennállna, ha a dinamikai modulust a $\sigma - \varepsilon$ diagram érintőjének a meredeksége adná. Lágyuló jellegű $\sigma - \varepsilon$ diagram esetében a helyzet a fentiek fordítottja, a dinamikai modulus tehát elvileg kisebb lehet, mint a feszültség és a deformáció hányadosával számított statikus érték. A gyakorlatban azonban a dinamikai modulus még az ilyen anyagoknál is rendszerint nagyobb a statikus modulusnál; egyrészt a frekvencia, másrészt a statikus terhelés hatásának következtében.

A dinamikai és a statikus rugalmassági modulus közötti összefüggést kísérletileg elsősorban a rezgésszigetelő anyagokon, különösképpen az úsztató anyagokon vizsgálták. Ezeken többnyire a Young-modulust mérték az anyag

egytengelyű statikus összenyomása esetében és csak a kisebb frekvenciákon. A kísérleti eredmények zöme gumikra [16, 19, 22, 27], valamint a kőzet- és üvegyapot lemezekre [22–26] vonatkozik, míg a műanyaghabokra [20, 22] és a parafára [24] csak egy-két adat van. Valamennyi kísérleti munka szerint a dinamikai Young-modulus nagyobb, mint a statikus – bármiképpen definiáljuk is az utóbbit – és ez még akkor is fennáll, ha a $\sigma - \varepsilon$ diagram lágyuló jellegű [20, 24]. A modulusok eltérése elsősorban a statikus terhelésnek, nem pedig a frekvenciának tulajdonítható, mivelhogy ezen anyagoknál a kisebb frekvenciákon elhanyagolhatóan kismértékű a dinamikai modulus növekedése, ahogy azt a 6. fejezetben megmutattuk. A dinamikai és a statikus Young-modulus hányadosa a nyomófeszültség hatására általában nő, és értéke a 9.7. ábra szerinti terheléseknél kb. 2 és 5 között van. Példaként a 9.8. ábrán ismételtén megadjuk a 9.7. ábra szerinti, 90kg/m^3 testsűrűségű kőzetgyapot lemezre a dinamikai Young-modulus változását a statikus terhelés függvényében, de az E_s statikus modulus és az E_d/E_s értékeivel együtt [25]. (A statikus moduluszt ez esetben a feszültség és a deformáció hányadosával számították.) Az ábra egyben alátámasztja az előző pontban elmondottakat is, nevezetesen, hogy a dinamikai modulus akkor is nő a statikus terhelés hatására, ha a statikus modulus azzal nem változik, vagyis, ha a $\sigma - \varepsilon$ diagram még lineáris.



9.8. ábra. A Young-modulus dinamikai és statikus értékei, valamint hányadosuk változása a nyomófeszültség függvényében egy kőzetgyapot lemeznél (90kg/m^3 , 5 cm vastag) Friberg, Ahlrik és Ktövergard [25] mérései szerint.

Irodalom

1. Snowdon, J. C., Vibration isolation: Use and characterization. *The Journal of the Acoustical Society of America* **66**, 1245–1274 (1979).
2. Hatae, M. T., Packaging design, in: *Shock and vibration handbook*, edited by Harris, C. H. and Creede, C. E., McGraw-Hill, New York, 1976. p.41–44.
3. Dart, S. L. and Guth, E., Elastic properties of cork. *Journal of Applied Physics* **17**, 314–318 (1946).
4. Siewert, F., Die Bedeutung des statischen Elastizitätsmoduls bei der Anwendung von Mineral- wolle-Erzeugnissen. *Baustoffindustrie* B3, 25–27 (1978).
5. McKinney, J. E., Belcher, H. V. and Marvin, R. S., The dynamic compressibility of a rubber-sulfur vulcanizate and its relation to free volume. *Transactions of the Society of Rheology* **IV**, 347–362 (1960).
6. Marvin, R. S. and McKinney, J. E., Volume relaxations in amorphous polymers, in: *Physical Acoustics*, Vol.II., Part B, edited by Mason, W. P., Academic Press, New York, 1965.
7. Ferry, J. D., *Viscoelastic properties of polymers*. Wiley, New York, 1970.
8. Bartenev, G. M. and Kuznetsova, I. A., Influence of pressure on relaxation properties of elastomers. *Polymer Mechanics* **10**, 381–388 (1974).
9. Cole, J. E., The effects of frequency, amplitude and load on the dynamic properties of elastomers. *Shock and Vibration Bulletin* **49**, 105–117 (1979).
10. Goldberg, W. and Lianis, G., Behavior of viscoelastic media under small sinusoidal oscillations superposed on finite strain. *Journal of Applied Mechanics* **35**, 433–440 (1968).
11. Sullivan, J. L., Morman, K. N. and Pett, R. A., A non-linear viscoelastic characterization of a natural rubber gum vulcanizate. *Rubber Chemistry and Technology* **53**, 805–822 (1980).
12. Sullivan, J. L. and Demery, V. C., The nonlinear viscoelastic behavior of a carbon-black-filled elastomer. *Journal of Polymer Science* **20**, 2083–2101 (1982).
13. Sullivan, J. L., Viscoelastic properties of a gum vulcanizate at large static deformations. *Journal of Applied Polymer Science* **28**, 1993–2003 (1983).
14. Nashif, A. D., Jones, D. I. G. and Henderson, J. P., *Vibration damping*. Wiley, New York, 1985. p.105.
15. Mey, S. and Amerongen, G. J., Dynamic-mechanical characteristics of rubber compounds. *Rubber Chemistry and Technology* **29**, 1215–1232 (1956).
16. Jackson, R. S., King, A. J. and Maguire, C. R., Determination of the static and dynamic elastic properties of resilient materials. *Acustica (Beihefte)* **6**, 164–167 (1956).
17. Cardillo, R. M., Dynamic testing of elastomer mountings. *Journal of Applied Polymer Science* **8**, 53–71 (1964).
18. Kljasko, L. N., Moksancev, V. V. i Rosin, G. Sz., Vibro- i zvukoizolacionnūe szvojsztva rezinū. V kn. „Bor'ba sz sumami i vibracijami”. Sztrójizdat, Moszkva, 1966.
19. Roszin, G. Sz., *Izmerenie dinamicseszkij szvojsztv akuszticeszkij materialov*. Sztrójizdat, Moszkva, 1972.
20. Furrer, W., Die Messung von Körperschalldämmstoffen in Laboratorien. *Acustica (Beihefte)* **6**, 160–163 (1956).
21. Roszin, G. Sz., O dinamicseszkij harakterisztikah zvuko- i vibroizolacionnūh materialov. *Akuszticeszkij szurnal* **9**, 492–494 (1963).
22. Zaborob, V. I., Kljasko, L. N. i Roszin, G. Sz., *Bor'ba sz sumom metodami zvukoizolacii*. Sztrójizdat, Moszkva, 1964.

23. Kovrigin, Sz. D., Zaharov, A. V. i Geraszimov, A. I., *Bor'ba sz sumami v grazhdanszkikh zdaniyah*. Sztrojizdat, Moskva, 1969.
24. Vér, I. L., Measurement of dynamic stiffness and loss factor of elastic mounts as a function of frequency and static load. *Noise Control Engineering* **3**, 37-42 (1974).
25. Friberg, R., Ahlrik, M. and Ktövergärd, K., Measurement of the dynamic stiffness for mineral wool. *Rockwool Report A-8123*, Skövde, 1981.
26. Gudmundsson, S., Transmission of structure-borne sound at various types of junctions with thin elastic layers. *Report of the Lund Institute of Technology*, TVBA-3016, Lund, 1984.
27. Vascuk, D. B. i Roszin, G. Sz., Zavisimoszti mezdu dinamicseszkimi i sztaticszeszkimi karakterisztikami rezin na natural'nom i szinteticseszkikh kaucukah. *VIII Vseszozjuznaja akuszticeszskaja konferencija*, Moskva, 1973. sz. 181-184.
28. Mikhlin, G. G., *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
29. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
30. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
31. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
32. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
33. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
34. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
35. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
36. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
37. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
38. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
39. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
40. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
41. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
42. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
43. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
44. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
45. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
46. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
47. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
48. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
49. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
50. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
51. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
52. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
53. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
54. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
55. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
56. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
57. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
58. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
59. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
60. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
61. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
62. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
63. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
64. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
65. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
66. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
67. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
68. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
69. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
70. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
71. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
72. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
73. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
74. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
75. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
76. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
77. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
78. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
79. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
80. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
81. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
82. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
83. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
84. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
85. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
86. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
87. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
88. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
89. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
90. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
91. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
92. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
93. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
94. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
95. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
96. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
97. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
98. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
99. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.
100. G. G. Mikhlin, *Integral Equations*. Mir Press, Moscow, 1959.

10. Az amplitúdó hatása (nemlinearitás)

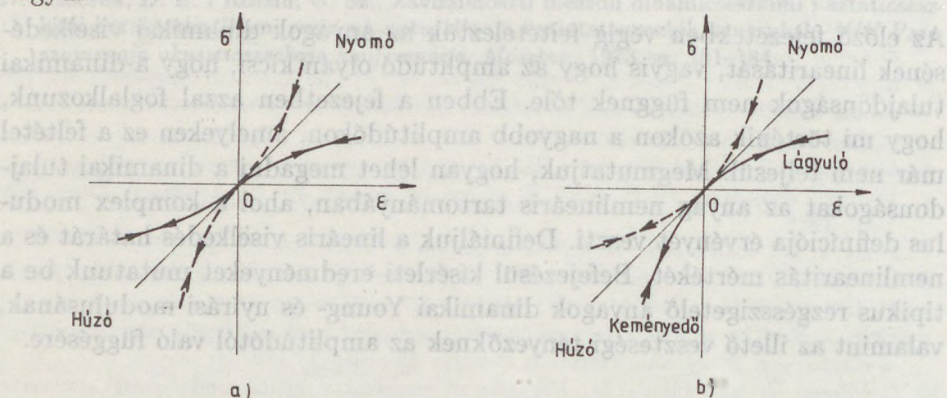
Az előző fejezetekben végig feltételeztük az anyagok dinamikai viselkedésének linearitását, vagyis hogy az amplitúdó olyan kicsi, hogy a dinamikai tulajdonságok nem függenek tőle. Ebben a fejezetben azzal foglalkozunk, hogy mi történik azokon a nagyobb amplitúdókon, amelyeken ez a feltétel már nem teljesül. Megmutatjuk, hogyan lehet megadni a dinamikai tulajdonságokat az anyag nemlineáris tartományában, ahol a komplex modulus definíciója érvényét veszti. Defináljuk a lineáris viselkedés határát és a nemlinearitás mértékét. Befejezésül kísérleti eredményeket mutatunk be a tipikus rezgésszigetelő anyagok dinamikai Young- és nyírási modulusának, valamint az illető veszteségi tényezőknek az amplitúdótól való függésére.

10.1. Szilárd anyagok nemlineáris dinamikai viselkedése

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a dinamikai terhelés viszonylag kismértékű, vagyis hogy az anyag viselkedése lineáris. Linearitás alatt – általánosan fogalmazva – azt értjük, hogy érvényes a Boltzmann-féle szuperpozíciós elv. Ez esetben az anyag harmonikus függvény szerinti terhelésekor a feszültség- és a deformációamplitúdók lineárisan arányosak egymással, a hiszterézisgörbe ellipszis alakú és nem függ az amplitúdótól sem a dinamikai modulus, sem a veszteségi jellemzők értéke. A kísérleti tapasztalatok szerint azonban a linearitás a dinamikai terhelésnek, illetve az amplitúdónak csak egy bizonyos, az anyagra jellemző értéke alatt áll fenn. Ennél nagyobb terheléseknél az amplitúdók összefüggése eltér a lineáristól, és mind a dinamikai modulus, mind a veszteségi jellemzők értéke változik az amplitúdóval. Ezt *nemlineáris dinamikai viselkedésnek* nevezzük, de ugyanezt értjük a *nagyamplitúdójú viselkedésen* is.

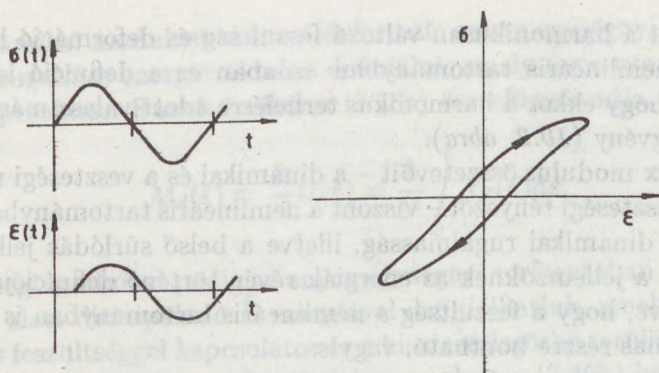
Az előző fejezetben már foglalkoztunk az anyagok nemlineáris rugalmas viselkedésével, de csak statikus terhelés esetében, amikor is annak jellemzése az egyértékű $\sigma - \varepsilon$ diagrammal lehetséges. Az óttaniakhoz hasonlóan az egyértékű $\sigma - \varepsilon$ diagram dinamikai terhelés esetében is használható, de csak a dinamikai rugalmasság nemlinearitásának megadására. Hangsúlyoznunk kell, hogy a *dinamikai $\sigma - \varepsilon$ diagram* rendszerint nem azonos a statikussal, éspedig olyannyira nem, hogy jellegük is eltérő lehet. A 10.1. ábra ilyen

nemlineáris dinamikai $\sigma - \varepsilon$ diagramokat mutat egytengelyű húzó-nyomó terhelés esetében és azzal a feltételezéssel, hogy nincs belső súrlódás. A 10.1a ábra szerint viselkedő anyagok nemlinearitása nyomásra és húzásra hasonló – lágyuló, illetve keményedő jellegű. Ezzel szemben a 10.1b ábra szerint viselkedő anyagoknál a nemlinearitás jellege függ a terhelés irányától is. Egy ilyen anyag tehát másképp viselkedik a nyomási és a húzási félperiódusban; ha az egyikben keményedik, akkor az azt követő félperiódusban lágyul.



10.1. ábra. Nemlineáris, dinamikai $\sigma - \varepsilon$ diagramok belső súrlódás nélküli esetben.

A σ és az ε összefüggése a valóságban a belső súrlódás következtében a fenténél bonyolultabb. A valódi anyagok nagymértékű dinamikai terhelésekor is megfigyelhetők mindazon jelenségek, amelyek a lineáris tartományban tapasztalhatók (deformációkésés, hiszterézis, kúszás, relaxáció, stb.), de mindezek nemlineáris hatásokkal társulnak [1–3]. Így például a kúszás és a relaxáció folyamata már nemcsak az időtől, hanem a terhelés nagyságától is függ. Nagyamplitúdójú harmonikus terheléskor pedig a σ és az ε pillanatértékeinek összefüggését egy olyan hiszterézisgörbe írja le, amelynek alakja eltér a lineáris esetre jellemző ellipszistől. A hiszterézisgörbe alakja az anyag dinamikai rugalmasságának és a belső súrlódásának nemlinearitásától függ, következésképpen változik az amplitúdóval. Egy ilyen hiszterézisgörbét a 10.2. ábrán rajzoltunk meg azzal a feltételezéssel, hogy az anyag lágyul a terhelés hatására. Az ábrán megrajzoltuk a deformációválaszt is; ez egy torz szinuszfüggvény, ami több szempontból is eltérést jelent a lineáris esethez képest. Egyrészt most nyilvánvalóan nemlineáris összefüggés van a feszültség- és a deformációamplitúdók között. Másrészt ez a válaszfüggvény olyan frekvenciájú összetevőket is tartalmaz, amelyek nem szerepelnek a gerjesztő jelben. Harmadrészt pedig a deformációválasz és a feszültség közötti időkésés függ az amplitúdótól is, ha a belső súrlódás mértéke szintén nemlineáris.



10.2. ábra. A nemlineáris tartományban a hiszterézisgörbe alakja eltér az ellipszistől, és a szinuszos feszültség terhelésre adott deformációválaszt egy torz szinuszfüggvény írja le.

A szakirodalomban igen kevés eredmény található a hiszterézisgörbék kísérleti vizsgálatáról, és ezek zöme sem a rezgéscsökkentő, hanem a szerkezeti anyagokra vonatkozik [4, 5]. Különösen kevés munka foglalkozik a hiszterézisgörbék egyenletének meghatározásával, ami inkább fizikai megfontolások, mint a kísérleti tapasztalatok alapján történik [4, 6–10]. Ezeket az egyenleteket is elsősorban a kis veszteségű szerkezeti anyagokra dolgozták ki, melyek közül példaként a Davidenkov-féle egyenletet idézzük [4]:

$$\sigma = E \left\{ \varepsilon \mp \frac{\alpha}{q} [(\dot{\varepsilon} \pm \varepsilon)^q - 2^{q-1} \dot{\varepsilon}^q] \right\}, \quad (10.1)$$

ahol α és q anyagállandó.

10.2. Dinamikai modulus és veszteségi jellemzők a nemlineáris tartományban

10.2.1. Definíciók

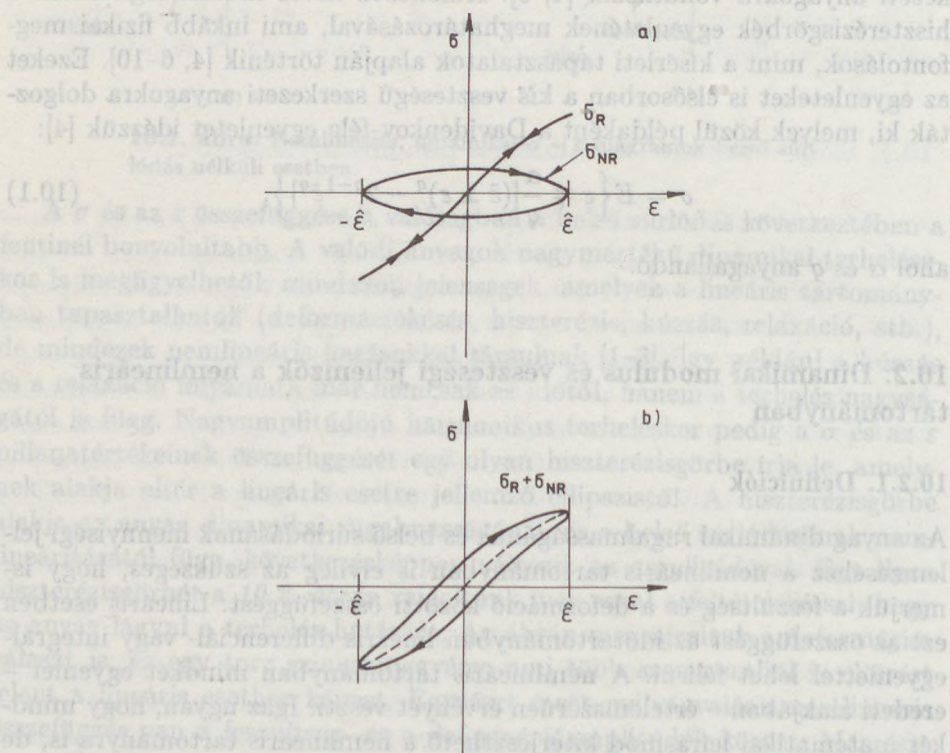
Az anyag dinamikai rugalmasságának és belső súrlódásának mennyiségi jellemzéséhez a nemlineáris tartományban is elvileg az szükséges, hogy ismerjük a feszültség és a deformáció közötti összefüggést. Lineáris esetben ezt az összefüggést az időtartományban lineáris differenciál- vagy integrálegyenlettel lehet felírni. A nemlineáris tartományban mindkét egyenlet – eredeti alakjában – értelemszerűen érvényét veszti. Igaz ugyan, hogy mindkét matematikai leírásmód kiterjeszthető a nemlineáris tartományra is, de ez a gyakorlati számításokhoz nehezen használható, bonyolult nemlineáris egyenletekhez vezet [1–3]. Ezért tekintsük ehelyett a frekvenciatartományt, ahol a lineáris dinamikai tulajdonságokat a komplex modulussal lehet meg-

adni, amelyet a harmonikusan változó feszültség és deformáció hányadosa definiál. A nemlineáris tartományban azonban ez a definíció is érvényét veszti, mivelhogy ekkor a harmonikus terhelésre adott válasz már nem harmonikus függvény (10.2. ábra).

A komplex modulus összetevőit – a dinamikai és a veszteségi modulus, valamint a veszteségi tényezőt – viszont a nemlineáris tartományban is meghatározhatjuk a dinamikai rugalmasság, illetve a belső súrlódás jellemzésére. Erre ezeknek a jellemzőknek az energiák révén történő definíciója ad lehetőséget, feltéve, hogy a feszültség a nemlineáris tartományban is rugalmas és nemrugalmas részre bontható, vagyis:

$$\sigma = \sigma_R(\varepsilon) + \sigma_{NR}(\varepsilon). \quad (10.2)$$

Itt a $\sigma_R(\varepsilon)$ egyértékű nemlineáris függvény, a $\sigma_{NR}(\varepsilon)$ pedig kétértékű függvény, amelynek alakja eltér az ellipszistől. Ilyen függvényeket és eredőjüket – a hiszterézisgörbét – a 10.3. ábrán vázoltunk.



10.3. ábra. A feszültség pillanatértékeinek összetevői a nemlineáris tartományban: a) rugalmas és nemrugalmas feszültség; b) hiszterézisgörbe – a fenti két feszültség összege.

A dinamikai modulust ekkor a deformált anyag egységnyi térfogatában tárolt U rugalmas energiával lehet definiálni, amely a σ_R rugalmas feszültséggel kapcsolatos. Ennek értékét a (3.38a) összefüggés adja, amelyből

$$M_d(\hat{\varepsilon}) = \frac{2}{\hat{\varepsilon}^2} U(\hat{\varepsilon}) = \frac{2}{\hat{\varepsilon}^2} \int_0^{\hat{\varepsilon}} \sigma_R(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (10.3)$$

A veszteségi modulust pedig az anyag egységnyi térfogatában az egy rezgési periódus alatt disszipálódó D energiával definiálhatjuk, amely a σ_{NR} nem-rugalmas feszültséggel kapcsolatos és a hiszterézisgörbe területével arányos. A D energiát a (3.39) összefüggés adja, amelyet a (3.40b)-be helyettesítve kapjuk a veszteségi modulus definícióját:

$$M_v(\hat{\varepsilon}) = \frac{D(\hat{\varepsilon})}{\pi \hat{\varepsilon}^2} = \frac{1}{\pi \hat{\varepsilon}^2} \oint \sigma_{NR}(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (10.4)$$

Ezek ismeretében a veszteségi tényezőt ugyanúgy lehet számítani, mint a lineáris tartományban, vagyis

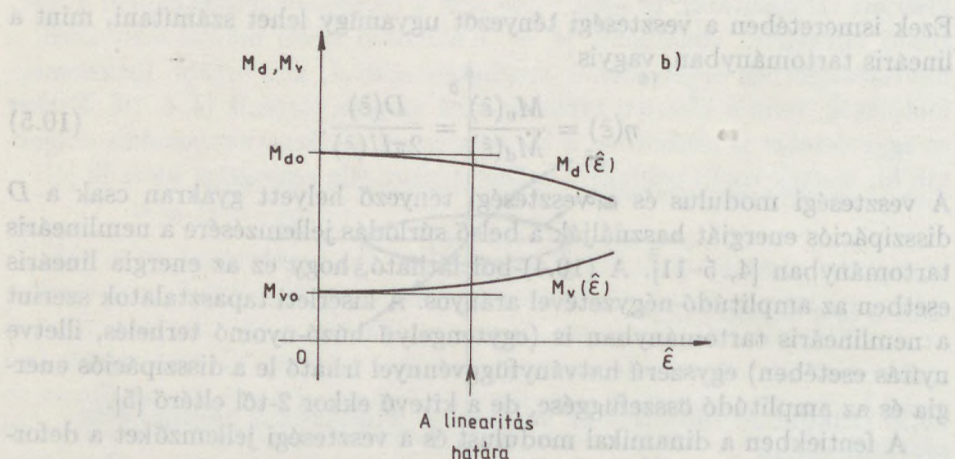
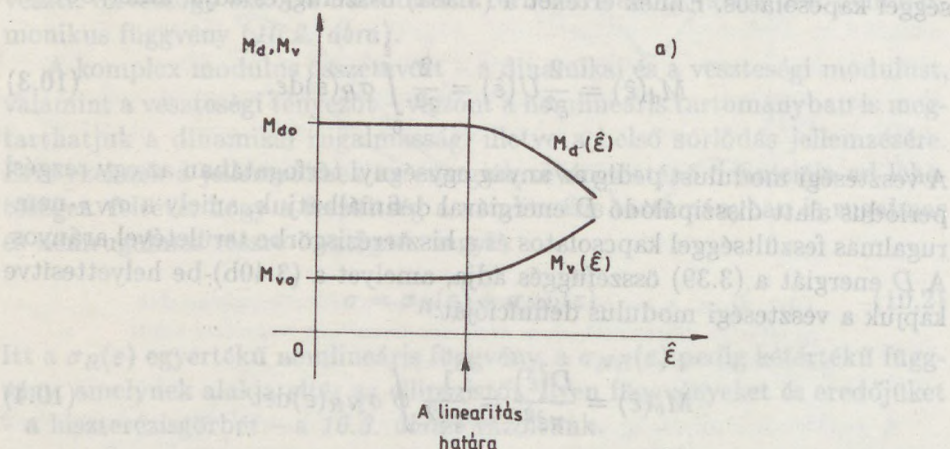
$$\eta(\hat{\varepsilon}) = \frac{M_v(\hat{\varepsilon})}{M_d(\hat{\varepsilon})} = \frac{D(\hat{\varepsilon})}{2\pi U(\hat{\varepsilon})}. \quad (10.5)$$

A veszteségi modulus és a veszteségi tényező helyett gyakran csak a D disszipációs energiát használják a belső súrlódás jellemzésére a nemlineáris tartományban [4, 5–11]. A (10.4)-ből látható, hogy ez az energia lineáris esetben az amplitúdó négyzetével arányos. A kísérleti tapasztalatok szerint a nemlineáris tartományban is (egytengelyű húzó-nyomó terhelés, illetve nyírás esetében) egyszerű hatványfüggvénnyel írható le a disszipációs energia és az amplitúdó összefüggése, de a kitevő ekkor 2-től eltérő [5].

A fentiekben a dinamikai modulust és a veszteségi jellemzőket a deformációamplitúdó függvényében adtuk meg. Ezek kifejezhetők természetesen a feszültségamplitúdó függvényében is. Ebben a munkában azonban minden esetben a deformációamplitúdótól való függést használjuk a nemlineáris viselkedés jellemzésére. Ennek egyik oka az, hogy a kísérleti eredményeket is rendszerint így adják meg, mivel egyszerűbb mérni egy próbatest deformációját, mint az abban ébredő feszültséget. A másik ok pedig az, hogy ily módon lehetséges a különféle anyagok nemlineáris viselkedésének közvetlen összehasonlítása.

10.2.2. A linearitás határa és a nemlinearitás mértéke

A 10.4. ábrán a dinamikai és a veszteségi modulus változását ábrázoltuk azzal a feltételezéssel, hogy az előző csökken, míg az utóbbi nő a defor-



10.4. ábra. A linearitás határának definiálása a dinamikai és a veszteségi modulusnak a deformációamplitúdótól való függése alapján

mációamplitúdó növelésével. A 10.4a ábra szerinti anyagnál a nemlineáris viselkedés a deformációnak csak egy bizonyos, jól meghatározható értéke felett jelentkezik. Azt az amplitúdót, amely a lineáris és a nemlineáris tartományt egymástól jól megkülönböztethetően elválasztja – a *linearitás határának* nevezzük. A 10.4a ábrával szemben a 10.4b ábrán a nemlineáris viselkedés bármely kis amplitúdónál is megfigyelhető, de az csak egy bizonyos amplitúdó felett domináns. Az ilyen anyagoknál a nemlinearitás határának megállapítása némiképp önkényes, s ez attól függ, hogy mekkora eltérést engedünk meg a nulla amplitúdóhoz tartozó értékekhez képest. A lineari-

tás határa a dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők vonatkozásában más és más amplitúdónál lehet.

A *linearitás mértékén* a lineáris viselkedéstől való eltérést értjük. Ennek a számszerű jellemzéséhez a dinamikai és veszteségi modulus amplitúdófüggését az alábbi alakba írjuk:

$$M_d(\hat{\varepsilon}) = M_{d0} + m(\hat{\varepsilon}) = M_{d0}[1 + m_n(\hat{\varepsilon})], \quad (10.6)$$

$$M_v(\hat{\varepsilon}) = M_{v0} + v(\hat{\varepsilon}) = M_{v0}[1 + v_n(\hat{\varepsilon})], \quad (10.7)$$

ahol $M_{d0} = M_d(0)$, $M_{v0} = M_v(0)$; ezek a nulla amplitúdóhoz tartozó értékeket jelölik, továbbá

$$m_n(\hat{\varepsilon}) = \frac{m(\hat{\varepsilon})}{M_{d0}} \quad (10.8)$$

és

$$v_n(\hat{\varepsilon}) = \frac{v(\hat{\varepsilon})}{M_{v0}} \quad (10.9)$$

a nemlinearitás mértékére jellemző függvények. Rezgéscsökkentő anyagoknál *kismértékűnek* nevezzük a *nemlinearitást* akkor, ha a lineáris értéktől való eltérés nem nagyobb, mint kb. 10%, vagyis ha: $m_n(\hat{\varepsilon}) < 0,1$; illetve $v_n(\hat{\varepsilon}) < 0,1$.

Valamennyi előbbi definíció a deformáció típusától függetlenül, vagyis bármely dinamikai modulusra és veszteségi jellemzőre is érvényes. Ezek közül a továbbiakban csak a nyírási és Young-modulus változásaival foglalkozunk. Ezt az indokolja, hogy a rezgéscsökkentő anyagok közül elsősorban a rezgésszigetelők azok, amelyek különösen nagy amplitúdójú rezgéseknek lehetnek kitéve, és ezeknél a terhelés jellege rendszerint egytengelyű húzás-nyomás, illetve nyírás.

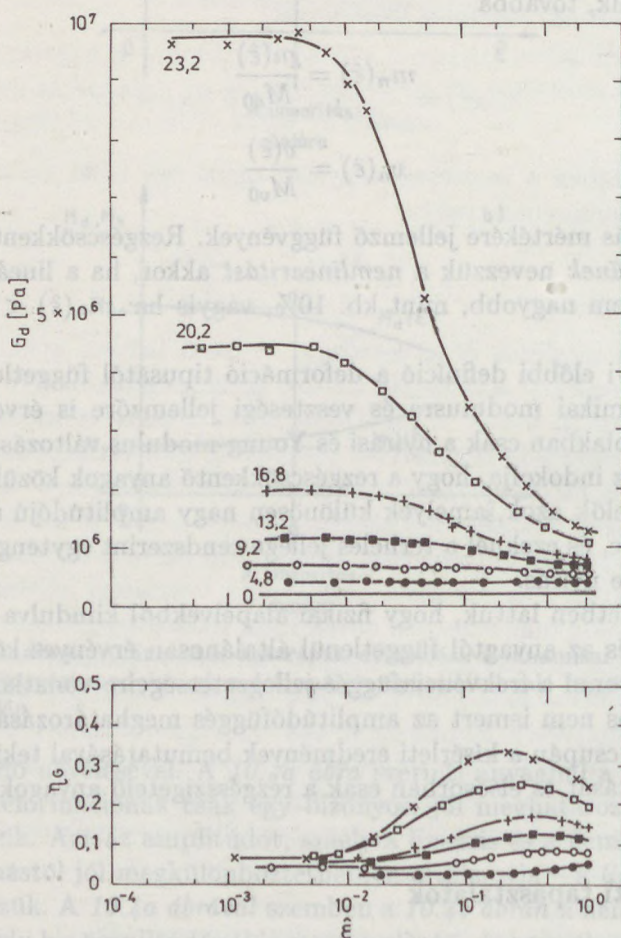
Az 5. fejezetben láttuk, hogy fizikai alapelvekből kiindulva a deformáció típusától és az anyagtól függetlenül általánosan érvényes következtetéseket lehet levonni a frekvenciafüggés jellegzetességeire vonatkozóan. Ilyen módszer sajnos nem ismert az amplitúdófüggés meghatározására. Ezért a továbbiakban csupán a kísérleti eredmények bemutatásával tekintjük át az amplitúdó hatását és elsősorban csak a rezgésszigetelő anyagoknál.

10.3. Kísérleti tapasztalatok

10.3.1. Gumik és gumiszerű anyagok

A dinamikai tulajdonságoknak az amplitúdótól való függését kísérletileg a gumikon és a gumiszerű anyagokon tanulmányozták a legrészletesebben. A kísérleti eredmények zöme a gumik nagyrugalmas viselkedésének tartomá-

nyára, vagyis a kisebb frekvenciákra vonatkoznak, ahol azok nagy amplitúdójú rezgéseknek lehetnek kitéve. A kísérleti tapasztalatok szerint a vulkanizált, de töltőanyagot nem tartalmazó gumik igen nagy deformációamplitúdókig, akár 100%-ig is gyakorlatilag lineárisan viselkednek [12, 13]. A gumikba azonban rendszerint valamilyen töltőanyagot, általában kormot kevernek elsősorban mechanikai tulajdonságaik javítása céljából. A töltőanyagok hatására nemcsak a mechanikai tulajdonságok változnak meg (pl. nő a rugalmassági modulus), hanem jelentős nemlineáris hatások is jelentkeznek. A töltőanyag ezen hatását a 10.5. ábra szemlélteti egy butilgumi

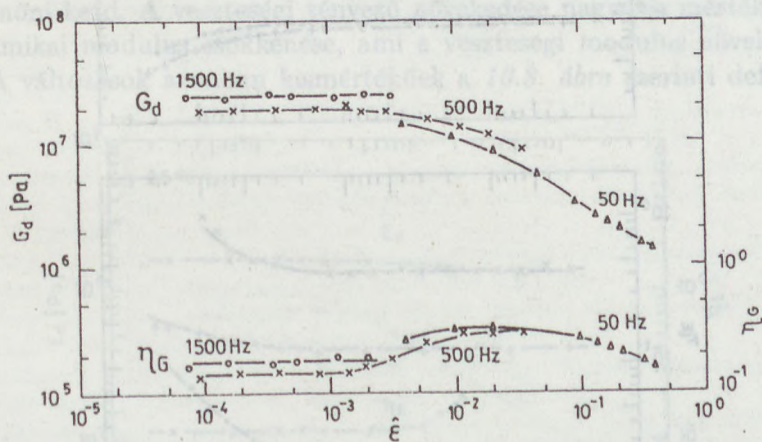


10.5. ábra. Különböző koromtartalmú butilgumiknál a dinamikai nyírási modulus és a veszteségi tényező változása a deformációamplitúdó függvényében, 1 Hz-en mérve. A görbékhez írt számok a korom mennyiségét jelentik térfogatszázalékban kifejezve (Payne és Whittaker [13]).

esetében [13]. Látható, hogy egy bizonyos deformáció felett a dinamikai nyírási modulus csökken, a veszteségi tényező pedig az amplitúdó növelésével kezdetben nő, majd egy maximum után csökken. Látható továbbá, hogy a koromtartalom növelésével nő a nemlineáris viselkedés jelentősége; nevezetesen csökken a linearitás határa és nő a nemlinearitás mértéke. Az ábráról az is leolvasható, hogy a dinamikai modulus nemlinearitásának mértéke nagyobb, mint a veszteségi tényezőé. Például 23,2% koromtartalom esetében míg a dinamikai modulus értéke kb. tizedrészére csökken, addig a veszteségi tényező csupán néhányszorosára nő.

A nemlineáris viselkedés ugyanezen jellegzetességei figyelhetők meg a 10.6. ábrán is egy sztírol-butadién gumi (70% koromtartalommal) esetében [12]. Ennél a guminál az amplitúdófüggés vizsgálatát három, nagyságrendileg eltérő frekvencián; 50, 500 és 1500 Hz-en végezték el. Az ábrán jól látható, hogy a nemlinearitást gyakorlatilag nem befolyásolja a frekvencia nagyságrendi változása.

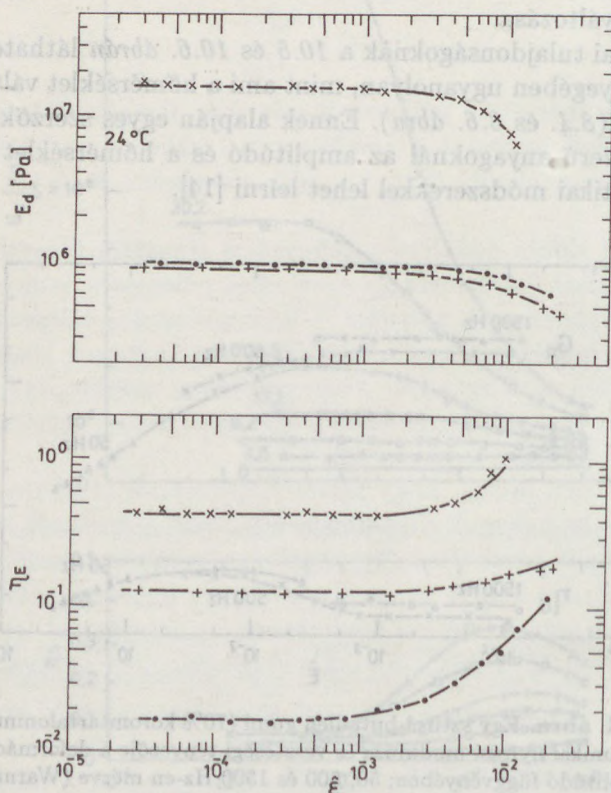
A dinamikai tulajdonságoknak a 10.5 és 10.6. ábrán látható változásainak jellege lényegében ugyanolyan, mint ami a hőmérséklet változtatásakor tapasztalható (8.4. és 8.6. ábra). Ennek alapján egyes szerzők feltételezik, hogy a gumiszerű anyagoknál az amplitúdó és a hőmérséklet hatását hasonló matematikai módszerekkel lehet leírni [14].



10.6. ábra. Egy sztírol-butadién gumi (70% koromtartalommal) dinamikai nyírási modulusa és veszteségi tényezője a deformáció-amplitúdó függvényében; 50, 500 és 1500 Hz-en mérve (Warnaka [12]).

10.3.2. Műanyaghabok

A 10.7. ábrán a dinamikai Young-modulus és az illető veszteségi tényező változását közöljük a deformációamplitúdó függvényében olyan műanyaghaboknál (polisztirol, polietilén és PVC), amelyeket elsősorban emeletközi földémek lépéshangszigetelésének növelése céljából alkalmaznak [15, 16]. A polisztirol és a polietilén habot úszópadlóknál használják, a PVC hab pedig járóburkolatok alsó rugalmas rétegét képezi. (Az eredmények a levegő nélküli anyagokra, vagyis a habok vázára vonatkoznak.) Látható, hogy mindhárom hab nemlineáris viselkedése lényegében hasonló; a linearitás határa mindegyiknél kb. 10^{-3} amplitúdónál van, amely felett a dinamikai modulus csökkenni, a veszteségi tényező pedig nőni kezd.

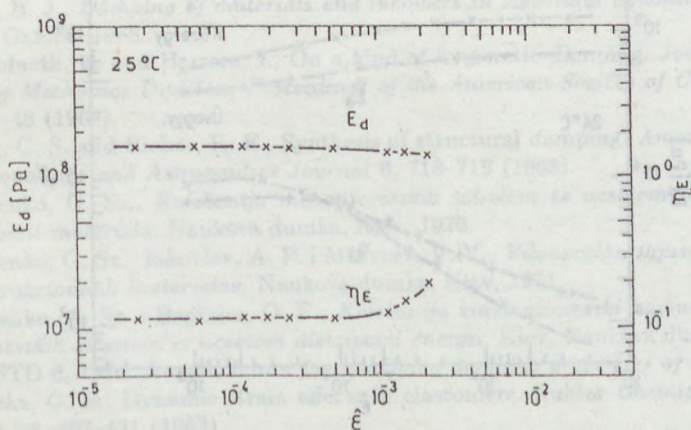


10.7. ábra. Lépéshangszigetelő műanyaghabok dinamikai Young-modulusa és a veszteségi tényezője a deformációamplitúdó függvényében. Mérési frekvencia: 50...150 Hz. ●—● Polisztirol hab, 11kg/m^3 ; +—+ polietilén hab, 30kg/m^3 (Pritz [15]); ×—× PVC hab, 300kg/m^3 (Pritz [16]).

Egy műanyag hab nemlineáris viselkedése – más pórusos anyagokhoz hasonlóan – a pórusokba zárt levegő hatásától eltekintve a polimer váz anyagától és a habszerkezet geometriai nemlinearitásától (pl. a pórusfalak kihajlása) függ. A kísérleti tapasztalatok szerint a nempórusos polimerek nemlineáris viselkedése hasonló, nevezetesen a linearitás határa 10^{-3} deformációamplitúdó körül van, amely felett a dinamikai modulus az amplitúdó növelésével minden esetben csökkenni, a veszteségi tényező pedig nőni kezd [14]. Ezek ugyanazok a jellegzetességek, mint amelyek a 10.7. ábrán is láthatók. Ennek alapján, valamint figyelembe véve, hogy az itteni műanyaghabok sűrűsége, szerkezete és a pórusok mérete igen különböző – valószínűnek látszik, hogy a linearitás határát és a dinamikai tulajdonságok azt követő változását lényegében a váz anyaga határozza meg. A nagyobb amplitúdókon, amelyeken szükségszerűen szerephez jut a habszerkezet nemlinearitása is, a különféle habok viselkedése természetesen jelentős mértékben eltérhet egymástól és a váz anyagától.

10.3.3. Parafa

A 10.8. ábrán egy parafapadlólap dinamikai Young-modulusának és veszteségi tényezőjének a deformációamplitúdó függvényében mért értékeit adjuk meg [16]. Látható, hogy – a polimerekhez hasonlóan – az amplitúdó növelésével a dinamikai modulus ugyancsak csökkenni, a veszteségi tényező pedig nőni kezd. A veszteségi tényező növekedése nagyobb mértékű, mint a dinamikai modulus csökkenése, ami a veszteségi modulus növekedésére utal. A változások azonban kismértékűek a 10.8. ábra szerinti deformáci-

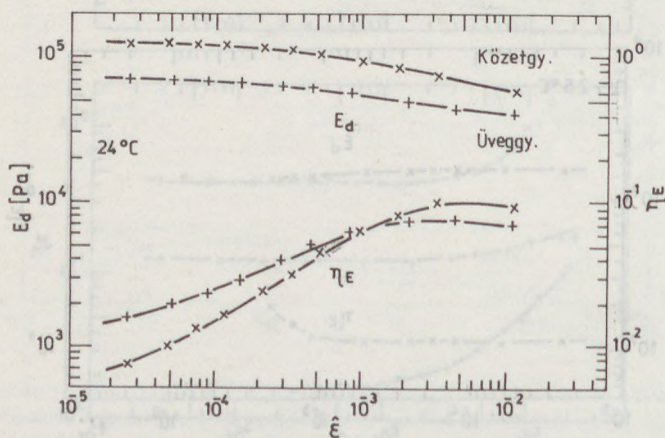


10.8. ábra. Egy parafa padlólap (470kg/m^3) dinamikai Young-modulusa és a veszteségi tényezője a deformációamplitúdó függvényében. Mérési frekvencia: 150...200 Hz (Pritz [16]).

őkon, jóval kisebbek, mint például a műanyaghabok esetében. A linearitás határa viszont – az előbb említett anyagokhoz hasonlóan – ugyancsak kb. 10^{-3} deformációamplitúdóra tehető. Figyelemre méltó, hogy a dinamikai viselkedés linearitási határa általában jóval kisebb annál, mint ami statikus terheléskor figyelhető meg, vagyis amíg a statikus $\sigma - \varepsilon$ diagram még lineáris (9.4. ábra).

10.3.4. Szálas anyagok

A szálas anyagok nemlineáris viselkedése több szempontból is eltér az eddigiekben ismertetetthez képest. Ezek az eltérések láthatók a 10.9. ábrán, amelyen tipikus, finomszálú közet- és üveggyapot lemezek esetében adjuk meg a dinamikai Young-modulus és a veszteségi tényező változását a deformációamplitúdó függvényében [17]. (Az eredmények kizárólag az anyagok vázára vonatkoznak, mivelhogy a méréseket vákuumban végezték.) A szálas anyagoknál – más anyagokhoz hasonlóan – a dinamikai modulus kezdetben csökken, a veszteségi tényező pedig nő a deformációamplitúdó növelésével. A dinamikai tulajdonságok változása a szálas anyagoknál azonban folyamatos, rendkívül kis amplitúdókon is megfigyelhető. A linearitás határát ezért most csak önkényesen lehet definiálni, a dinamikai tulajdonságoknak a lineáris értéktől való megengedett eltérése alapján. Ha ez pl. 10%, akkor a 10.9. ábra szerinti anyagoknál a linearitás határa kb. 10^{-4} deformációamplitúdónál van a dinamikai modulus esetében, míg a veszte-



10.9. ábra. Egy kőzetgyapot (80kg/m^3) és egy üveggyapot (70kg/m^3) lemeznél a váz dinamikai Young-modulusa és veszteségi tényezője a deformációamplitúdó függvényében. Mérési frekvencia: 100...200 Hz (Pritz [18]).

ségi tényező vonatkozásában ez a határ kb. $5 \cdot 10^{-6}$ amplitúdóra tehető. A dinamikai modulus és a veszteségi tényező linearitási határának eltérése azzal kapcsolatos, hogy lényeges különbség van e két jellemző nemlinearitásának mértéke között; nevezetesen az E_d csökkenése jóval kisebb mértékű, mint az η_E növekedése. (A 10.3.1. pontban említett gumiknál ez fordítva van.) A 10^{-5} – 10^{-2} deformációtartományban mindkét szál anyag dinamikai modulusa kb. csak a felére csökken, míg a veszteségi tényezők értéke kb. a tízszeresére nő. Ez utóbbiból következik, hogy a veszteségi modulus is jelentős mértékben nő az amplitúdó növelésével. Befejezésül megemlítjük, hogy ezen anyagok nemlinearitása már olyan kis deformációkon is jelentős, amelyeken a szálak anyaga (kőzet, tüveg) lineárisan viselkedik. Ennek alapján feltételezhető, hogy a nemlineáris viselkedés jellegzetességei alapvetően a szálak szerkezetével és nem pedig a szálanyag tulajdonságával kapcsolatosak.

Irodalom

1. Lockett, F. J., *Nonlinear viscoelastic solids*. Academic Press, London, 1972.
2. Findley, W. N., Lai, J. S. and Onaran, K., *Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic solids*. North-Holland, Amsterdam, 1976.
3. Ward, I. M., *Mechanical properties of solid polymers*. Wiley, Chichester, 1979.
4. Panovko, Ja. G., *Vnutrennee trenie pri kolebanijah uprugih szisztem*. FM, Moszkva, 1960. sz.86.
5. Lazan, B. J., *Damping of materials and members in structural dynamics*. Pergamon Press, Oxford, 1968.
6. Rosenbluth, E. and Herrera, I., On a kind of hysteretic damping. *Journal of Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers* **90**, 37–48 (1964).
7. Chang, C. S. and Bieber, R. E., Synthesis of structural damping. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* **6**, 718–719 (1968).
8. Piszarenko, G. Sz., *Kolebanija mechanicszkij szisztem sz ucsetom neszoversennoj uprugosztj materiala*. Naukova dumka, Kiev, 1970.
9. Piszarenko, G. Sz., Jakovlev, A. P. i Matveev, V. V., *Vibropogloszcsajuscie szvojsztva konsztrukcionnih materialov*. Naukova dumka, Kiev, 1971.
10. Piszarenko, G. Sz. i Boginics, O. E., *Kolebanija kinematicszki vozbuzsdaemuh mechanicszkij szisztem sz ucsetom disszipacii energii*. Kiev, Naukova dumka, 1981.
11. ASA STD 6, 1976. *Nomenclature for specifying damping properties of materials*.
12. Warnaka, G. E., Dynamic strain effects in elastomers. *Rubber Chemistry and Technology* **36**, 407–421 (1963).
13. Payne, A. R. and Whittaker, R. E., Low strain dynamic properties of filled rubbers. *Rubber Chemistry and Technology* **44**, 440–478 (1971).
14. Warnaka, G. E. and Miller, H. T., Strain-frequency-temperature relationships in polymers. *Journal of Engineering for Industry. Transactions of the ASME, Ser.B.*, **90**, 491–498 (1968).

15. Pritz, T., Dynamic Young's modulus and loss factor of plastic foams for impact sound isolation. *Journal of Sound and Vibration* **178**, 315-322 (1994).
16. Pritz T., Dynamic Young's modulus and loss factor of floor covering materials. *Applied Acoustics* (1996). (Nyomdában)
17. Pritz, T., Nonlinearity of frame dynamic characteristics of mineral and glass wool materials. *Journal of Sound and Vibration* **136**, 263-274 (1990).

11. A dinamikai modulus és a veszteségi tényező mérése

Az anyagok dinamikai modulusát és veszteségi tényezőjét mérésekből ismerjük. A mérési elvek és a megvalósításuk során felmerülő problémák áttekintése után ebben a fejezetben azokkal a mérési módszerekkel foglalkozunk, amelyeket leggyakrabban használnak a rezgéscsökkentő anyagok dinamikai Young- és nyírási modulusának, valamint az illető veszteségi tényezők lineáris értékének meghatározására a hangfrekvenciás sávban. Ismertetjük ezen dinamikai tulajdonságok mérésének módszereit rugószerű próbatesteken, longitudinálisan rezgő rúdszerű próbatesteken, valamint hajlítási rezgést végző pálcaszerű próbatesteken, homogén és rétegelt pálcák esetében. A fejezetet záró részben a nemlineáris tartománybeli mérésekkel, vagyis az amplitúdótól való függés meghatározásával foglalkozunk.

11.1. A kisamplitúdójú mérésekről általában

Valamely komplex modulus kísérleti meghatározását elvileg legegyszerűbben a definíciója alapján végezhetjük, az 1.2. ábrán vázolt elrendezésben. Az eljárás lényege, hogy az illető anyagból készített próbatestet kisamplitúdójú rezgésnek vetjük alá és mérjük azokat a mennyiségeket – a feszültséget és a deformációt –, amelyek a kérdéses modulus definíciójában szerepelnek. Az ilyen eljárások egyszerűnek tűnnek, és azokat esetenként alkalmazzák is, de ily módon csak azokon a kisebb frekvenciákon lehet meghatározni a dinamikai tulajdonságokat, amelyeken a próbatest méretei jóval kisebbek a hullámhossznál. A különféle anyagok vizsgálatára ezért számos más, az előbbinél rendszerint bonyolultabb módszert is kidolgoztak, amelyeket több könyvben is összefoglaltak [1–9]. Valamennyi módszer lényege ugyan csak az, hogy a dinamikai tulajdonságokat egy adott geometriájú próbatest rezgéseinek vizsgálatával határozzák meg. A rezgés típusát (húzó-nyomó, hajlítási vagy nyírási stb.) a mérendő modulustól függően választják meg. Az, hogy a vizsgálatra melyik módszer megfelelő, elsősorban magától az anyagtól – a dinamikai modulusától és veszteségi tényezőjétől – függ, valamint attól is, hogy milyen méretű és formájú próbatestet lehet belőle készíteni. A módszer kiválasztásában döntő jelentősége van továbbá annak,

hogy melyik komplex modulust kell meghatározni, milyen frekvenciákon és hőmérsékleten, statikus terheléssel vagy anélkül.

A lineáris tartományban végzett mérések célja rendszerint a frekvencia és/vagy a hőmérséklet hatásának meghatározása. A legtöbb ilyen célú mérési módszert a gumik [1] és más polimerek valamely komplex modulusának meghatározására dolgozták ki. Ezekkel a módszerekkel a hangfrekvenciás sávban, alatta vagy felette; az infrahang, illetve az ultrahang tartományban lehet meghatározni a dinamikai tulajdonságokat. Valamennyi módszer közös jellemzője, hogy a mérési frekvenciasáv szélessége nem nagyobb, mint 1–3 dekád. Ezzel szemben egy polimer mindhárom tartományának átfogásához legalább 8–10 dekád széles frekvenciasáv szükséges. Ilyen széles sávban a vizsgálat egyik lehetséges módja a több, általában három vagy négy mérési módszer alkalmazása. A többféle módszerre azért is szükség van, mert a 8–10 dekád széles frekvenciasávban a dinamikai tulajdonságok három-négy nagyságrendet is változhatnak. Ezért aztán az a mérési módszer, amely jól megfelel a kisebb frekvenciákon – pl. egy gumi nagyrugalmas tartományában, ahol a veszteségi tényező kicsi –, teljesen használhatatlan lehet nagyobb frekvenciákon, a nagy veszteségű átmeneti tartományban. A többféle módszerrel történő vizsgálatot azonban csak ritkán alkalmazzák, mivel egyrészt költséges (a különféle módszerekhez más és más kísérleti berendezés szükséges), másrészt mert rendszerint gondot okoz az egyes frekvenciasávokban kapott eredmények illeszkedése az eltérő pontosságuk miatt. Ehelyett a polimerek dinamikai tulajdonságainak változását a széles frekvenciasávban általában közvetve; a hőmérséklet – frekvencia ekvivalencia elv alkalmazásával határozzák meg egy szűkebb frekvenciasávban és több hőmérsékleten végzett mérés alapján.

A szilárd anyagok különféle modulusainak meghatározására nagyon sok mérési módszer ismeretes. A módszereket több szempont alapján is csoportosíthatjuk. Az egyik szempont magának a mérendő modulusnak a típusa lehet. Eszerint az egyik nagy csoportba azok a módszerek sorolhatók, amelyek a komplex nyírási és Young-modulus meghatározására szolgálnak. Ezekről lényegileg különböznek a komplex térfogati és longitudinális modulus, valamint a komplex Poisson-szám mérési módszerei. A rezgécscsökkentési gyakorlatban elsősorban a Young- vagy a nyírási modulust fontos ismerni, ezért a továbbiakban ezeknek a mérési módszereivel foglalkozunk. A komplex térfogati vagy longitudinális modulus meghatározására vonatkozóan elsősorban a polimerekkel foglalkozó munkákban található részletes információ [2, 3, 6, 8].

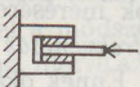
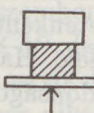
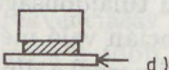
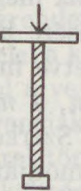
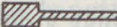
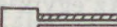
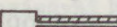
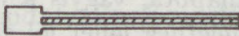
11.2. A komplex Young- és nyírási modulus mérése

11.2.1. Mérési alapelvek

A rezgéscsökkentő anyagok mérésére olyan módszerek terjedtek el, amelyekkel alapvetően a *hangfrekvenciás sávban* lehet meghatározni a dinamikai tulajdonságokat [4, 9]. Ennek oka egyrészt az, hogy a szokásos akusztikai műszerek is ebben a frekvenciasávban használhatók, másrészt, hogy egyes anyagoknál, illetve alkalmazásoknál elegendő csak a hangfrekvenciákon ismerni a dinamikai tulajdonságokat, sőt esetenként (pl. úsztatóanyagoknál) egyetlen frekvencián való mérés is megfelelő. Ha valamely guminál vagy rezgéscsillapító polimernél a dinamikai tulajdonságok változását széles frekvenciasávban kell ismerni, akkor azt az említett módon, a hőmérséklet – frekvencia ekvivalencia elv segítségével állapítják meg.

A komplex Young- és nyírási modulus mérésére használatos módszerek alapvetően a *próbatestek* geometriájában, illetve méreteiben, a *szerkezeti elrendezésben*, a gerjesztett *rezgés típusában*, a *mérőjel jellegében* és a *mért mennyiségekben* különböznek egymástól. Szerkezeti elrendezésen a próbatest rögzítésének és rezgésre gerjesztésének módját, valamint az ahhoz kapcsolódó mechanikai elemek összességét értjük. A próbatest megválasztásában és a szerkezeti elrendezés kialakításában az alábbi két szempont alapvető fontosságú, mivel azok döntően megszabják a dinamikai tulajdonságok meghatározásában elérhető pontosságot. Az egyik az, hogy a próbatest a lehető *legegyszerűbb geometriájú* legyen, és olyan, amelynek rezgését matematikailag pontosan le tudjuk írni. A másik szempont pedig az, hogy a próbatest végeinek állapota, vagyis a *határfeltételek* olyanok legyenek, amelyeket nemcsak elméletileg lehet jól számításba venni, hanem jól meg is valósíthatók. Példaként megemlítjük, hogy az oly gyakran alkalmazott merev rögzítést természetesen csak közelítőleg lehet megvalósítani.

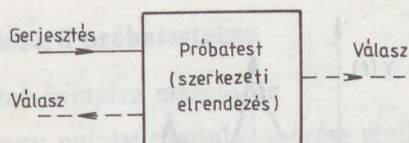
A rezgéscsökkentő anyagok komplex Young- és nyírási modulusának mérésére leggyakrabban használt próbatesteket és szerkezeti elrendezéseket a 11.1. ábrán foglaltuk össze. Ezeket a próbatesteket a méreteik, illetve méretarányaik alapján két nagy csoportba lehet sorolni. Az egyik csoportba azok tartoznak, amelyek valamennyi mérete azonos nagyságrendű. Ezek a próbatestek viszonylag kicsik, a méreteik mm vagy cm nagyságrendűek. A mérést ekkor azokon a frekvenciákon végezzük, amelyeken a próbatest valamennyi mérete jóval kisebb a hullámhossznál; következésképpen rugónak lehet tekinteni és ezért *rugószerű próbatestnek* nevezzük. A rugószerű próbatesteken rendszerint a hangfrekvenciás sáv középső vagy alsó részében végeznek méréseket. A másik csoportba sorolható próbatestek hossza jóval nagyobb az oldalirányú méretüknél; az előbbi rendszerint dm nagyságrendű. Ilyenkor a dinamikai tulajdonságokat azokon a frekvenciákon határozzák meg,

Próbatest	$\bar{E}$	$\bar{G}$	Mérési módszer
Rúgszerű	 a)	 b)	Közvetlen merevségi (impedancia, hiszterézis)
	 c)	 d)	Átviteli függvény
Rúdszerű	 e)		Rezonancia
Pálcaszerű	 f)		Rezonancia
	 g)		
	 h)		
	 i)		

11.1. ábra. Probatestek és szerkezeti elrendezések a rezgéscsökkentő anyagok komplex nyírási és Young-modulusának méréséhez.

amelyeken a próbatest hossza összemérhető a hullámhosszal. A mérés során ekkor a próbatestnek mint rúdnak, illetve pálcának rezgéseit vizsgálják, ezeket ezért *rúdszerű*, illetve *pálcaszerű probatesteknek* nevezzük. Az ilyen probatestekkel általában a közepes vagy a nagyobb hangfrekvenciákon lehet méréseket végezni, de gyakran átfogható az egész hangfrekvenciás sáv is.

Kisamplitúdójú rezgéseknél a próbatestet, illetve az azt magába foglaló szerkezeti elrendezést *lineáris rendszernek* lehet tekinteni. Ebben a felfogásban a lineáris rendszer ismeretlen paramétereinek meghatározásával állapíthatjuk meg az anyag dinamikai tulajdonságait. A vizsgálat lényege, hogy a próbatestet egy ismert időfüggvény szerint rezgésre gerjesztjük és mérjük



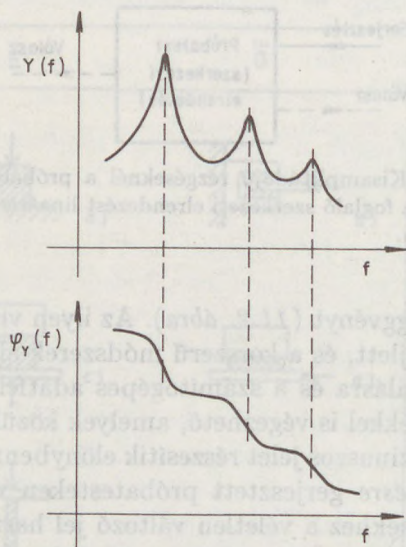
11.2. ábra. Kisamplitúdójú rezgéseknél a próbatestet, illetve az azt magába foglaló szerkezeti elrendezést lineáris rendszernek lehet tekinteni.

az arra adott válaszfüggvényt (11.2. ábra). Az ilyen vizsgálatok mérés technikája ma már igen fejlett, és a korszerű módszerek alkalmazásával lehetőség van az automatizálásra és a számítógépes adatfeldolgozásra. A mérés különféle időfüggvényekkel is végezhető, amelyek közül a komplex modulus meghatározásához a szinuszos jelet részesítik előnyben; vagyis a mérést *harmonikus kényszerrezgésre* gerjesztett próbatesteken végzik. Mindamellett az automatizált mérésekhez a véletlen változó jel használata is előnyös. A gerjesztő- és válaszjel mérése történhet azonos helyen, például a gerjesztési pontban, vagy különböző helyeken, például a próbatest két végénél (11.2. ábra). Mindkét mért mennyiség lehet akár az erő, akár valamely mozgásjellemző. Bármelyiket válasszuk is – harmonikus rezgések esetében –, ezek hányadosa egy komplex mennyiség, amely az alábbi alakba írható:

$$\bar{Y} = Y e^{j\varphi_Y} = \frac{\text{válaszfüggvény}}{\text{gerjesztőfüggvény}}, \quad (11.1)$$

ahol Y az abszolút értéket, φ_Y pedig a fázist jelöli. Ezek függvényei a frekvenciának, a próbatest geometriájának és anyagi tulajdonságainak, nevezetesen a sűrűségnek, a dinamikai modulusnak és a veszteségi tényezőnek. Az abszolút érték és a fázis jellegzetes frekvenciafüggését a 11.3. ábrán vázoltuk egy olyan próbatest, illetve szerkezeti elrendezés esetére, amely több szabadságfokú rezgőrendszernek tekinthető. Az abszolút érték maximumai a rendszer rezonanciáit jelzik.

A mért mennyiségeket és a mérési helyeket, valamint azok variációs lehetőségeit tekintve számos mérési módszert lehet kialakítani. Valamennyi módszernél a komplex modulus valós és képzetes részének meghatározásához legalább két mennyiség mérésére van szükség. A mért mennyiségek alapján a mérési módszerek két nagy csoportját lehet megkülönböztetni. Az egyik csoportba azok sorolhatók, amelyeknél a gerjesztő- és a válaszjel amplitúdóján kívül mérik a kettő közötti fázisszöget is. Az utóbbi alapján ezeket összefoglalóan *fázismódszereknek* nevezzük. A másik csoportba pedig az ún. *rezonancia-módszerek* tartoznak, amelyekkel a vizsgálatot a rezonanciákon végzik a rezonanciajellemzők mérésével. A rezonancia-módszer az előzőnél jóval egyszerűbb lehet, mivel ahhoz általában nincs szükség a fázisszög mé-



11.3. ábra. A válaszjel és a gerjesztőjel hányadosával képzett függvény abszolút értékének és a fázisának változása a frekvencia függvényében, több szabadságfokú rezgőrendszer esetében.

résére; elegendő a válaszjel amplitúdójának vizsgálata a frekvencia függvényében. A rezonancia-módszerrel azonban csak adott frekvenciá(ko)n lehet meghatározni a dinamikai tulajdonságokat, míg a fázismódszerrel ez elvileg bármely frekvencián lehetséges a vizsgálati sávon belül.

Valamennyi mérési módszer alkalmazásakor alapvetően fontos a lineáris viselkedés ellenőrzése. Ennek egyik módja az, hogy a mérés megkezdése előtt változtatjuk a gerjesztőjel amplitúdóját, ezzel nem változhat a válaszjelnek sem az amplitúdója, sem a fázisa. A másik módszer akkor használható, ha ismerjük az anyag lineáris viselkedésének határát. Ekkor a gerjesztőjel amplitúdóját úgy kell beállítani, hogy a próbatest deformációja kisebb legyen a linearitás határánál. Amennyiben a próbatest deformációja inhomogén, akkor természetesen a deformáció legnagyobb értékét kell a linearitás határa alatt tartani.

A mérési módszerek közül több ma már annyira kiforrott, hogy azokat nemzeti és nemzetközi szabványok is rögzítik. Ezért itt csupán a mérési módszerek elvét és az alkalmazásuk során felmerülő gyakorlati problémákat ismertetjük. Egyéb részletkérdésekkel, gyári mérőkészülékekkel vagy kísérleti eszközökkel nem foglalkozunk. Mindamellet megadjuk azokat az irodalmi forrásokat, amelyekben az olvasó további részletes információt találhat. A mérési módszereket a próbatestek szerint csoportosítva (rugó-, rúd- és pálcaszerű próbatestek) ismertetjük, a 11.1. ábrán vázolt szerkezeti elrendezések sorrendjében.

11.2.2. Mérések rugószerű próbatesteken

11.2.2.1. A próbatestek komplex merevsége

A komplex Young- vagy nyírási modulus mérése elvileg az olyan próbatesten a legegyszerűbb, amelyet rugóval lehet modellezni. Ez azokon a frekvenciákon lehetséges, amelyeken a próbatest méretei jóval kisebbek a hullámhossznál. Ekkor a komplex modulust lényegében a próbatest *komplex merevségének* mérésével határozzuk meg, amely

$$\bar{k} = \frac{\bar{F}_r}{\bar{X}} = k_d(1 + j\eta_k), \quad (11.2)$$

ahol F_r a próbatestben ébredő erő, az ún. *rugóerő* amplitúdója, X a próbatest rezgéselmozdulásának amplitúdója (a két vég elmozdulás-amplitúdójának különbsége), k_d és η_k pedig a próbatest *dinamikai merevsége*, illetve *veszteségi tényezője*. Az utóbbiak ismeretében egyszerűen számíthatjuk a komplex modulus összetevőit, de csak akkor, ha a próbatest deformációja homogén. Ez esetben ugyanis például a húzott-nyomott próbatest komplex merevsége:

$$\bar{k} = \bar{E} \frac{S}{l} = E_d(1 + j\eta_E) \frac{S}{l}, \quad (11.3)$$

amelyből

$$k_d = \frac{S}{l} E_d \quad (11.4a)$$

és

$$\eta_k = \eta_E, \quad (11.4b)$$

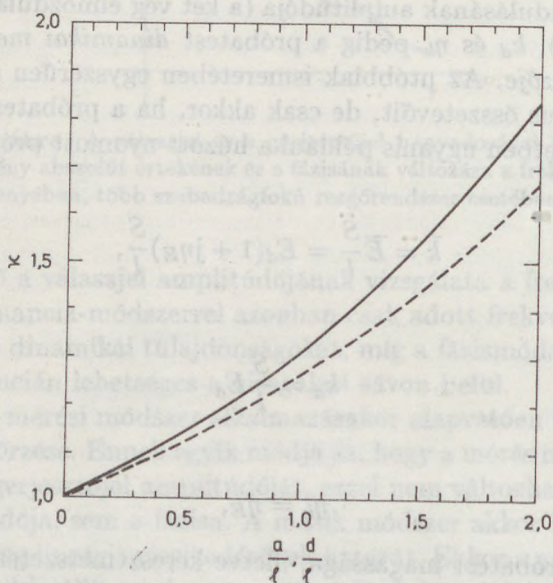
ahol l és S a próbatest magassága, illetve keresztmetszetének területe. (A nyírt próbatest komplex merevségét is a (11.3) összefüggéssel számíthatjuk a komplex nyírási modulus értelemszerű helyettesítésével.)

A rugószerű próbatest deformációja azonban általában nem homogén a *véghatás* miatt. A húzott-nyomott próbatest inhomogén deformációs állapotát az okozza, hogy a rögzített végeknél gátolt az oldalirányú elmozdulás, amely a Poisson-hatás következtében keletkezik. Ennek eredményeként a próbatest deformációja inhomogén lesz; megnő a dinamikai merevsége és szélső esetben megváltozhat a veszteségi tényezője is. (A véghatással természetesen nem kell számolni akkor, ha a próbatest anyagának Poisson-száma nulla vagy nullához közeli.) A nyírt próbatestnél pedig az vezet inhomogén deformációhoz, hogy az oldalfelületek szabadon deformálódhatnak, és így feszültségmentesek. Következésképpen a nyírófeszültség a próbatestben nem állandó, hanem csökken az oldalfelületek felé haladva, és emellett a

próbatest el is hajolhat. Ezek a hatások a nyírt próbatest merevségének csökkenéséhez vezetnek. A dinamikai merevség megváltozását mindkét próbatestnél egy κ *formatényezővel* lehet számításba venni. Ezzel például a húzott-nyomott próbatest dinamikai merevsége:

$$k_d = \kappa \frac{S}{l} E_d. \quad (11.5)$$

A formatényező értéke függ a dinamikai Poisson-számtól, a próbatest alakjától és méreteinek arányától. Húzott-nyomott próbatestnél: $\kappa \geq 1$, és annál nagyobb, minél laposabb a próbatest és minél nagyobb a Poisson-szám. Példaként a 11.4. ábrán rajzoltuk meg négyzet és kör alapú próbatest



11.4. ábra. Négyzet alapú (—) és kör alapú (---) próbatestek formatényezője az oldalirányú méret és a magasság hányadosának függvényében (Roszin [4]).

formatényezőjének változását az oldalirányú méret és a magasság arányának függvényében azzal a feltételezéssel, hogy a Poisson-szám 0,5, amikor is

$$\kappa = \left(1 - \frac{thql}{ql}\right)^{-1}, \quad (11.6)$$

ahol

$$q = \sqrt{18}/a, \quad \text{illetve} \quad q = \sqrt{24}/d, \quad (11.7a, b)$$

és itt a a négyzet oldalát, d pedig az átmérőt jelöli [4]. Az előbbivel szemben a nyírt próbatestnél: $\kappa \leq 1$, és annál kisebb, minél magasabb a próbatest és minél kisebb a Poisson-szám. A formatényező pontos értékét azonban ez ideig még nem sikerült meghatározni egyik próbatestre sem, bár ezt a kérdést számos szerző vizsgálta elméletileg és kísérletileg egyaránt. A húzott-nyomott próbatestre vonatkozó eredményeket a [10] közlemény foglalja össze. A formatényező értéke mind a mai napig a rugószerű próbatesteken végzett mérések pontosságának a legkritikusabb pontja. Ezért a mérésekhez lehetőleg olyan méretarányú próbatesteket kell használni, amelyeknél a vég hatás elhanyagolható.

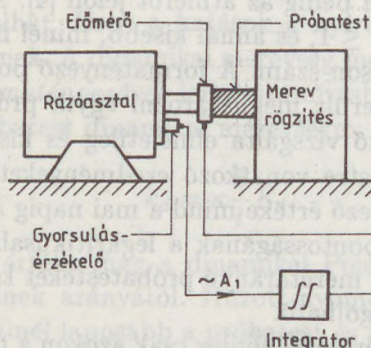
A komplex merevség mérésével elvileg csak azokon a frekvenciákon lehet meghatározni a dinamikai tulajdonságokat, amelyeken a próbatest valóban rugóként viselkedik. Ez akkor áll fenn, ha a próbatest valamennyi mérete jóval kisebb a hullámhossznál, amely pl. a húzott-nyomott próbatest esetében (a veszteséget elhanyagolva):

$$\lambda_l = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{\kappa E_d}{\varrho}}. \quad (11.8)$$

Következésképpen a vizsgálat felső határfrekvenciája annál nagyobb lehet, minél nagyobb a dinamikai Young-modulus és a formatényező értéke, és minél kisebbek a próbatest méretei. A legkisebb méretű próbatesteket a gumikból és a gumiszerű anyagokból lehet készíteni, de ezeknél sem célszerű mm nagyságrend alá menni. Az ilyen méretű próbatestekkel elérhető felső határfrekvencia még a nagyobb dinamikai modulusú anyagoknál is többnyire csak a hangfrekvenciás sáv közepére esik. Még ekkora határfrekvenciát sem lehet elérni a viszonylag lágy, pórusos anyagok vizsgálatakor. Ennek oka egyrészt az, hogy ezen anyagokból készíthető próbatestek legkisebb mérete rendszerint csak cm nagyságrendű lehet a pórusos szerkezetük miatt. Másrészt az ilyen anyagokban kialakuló hullámhossz már néhány száz Hz felett cm nagyságrendű a viszonylag kis dinamikai modulusuk eredményeként.

11.2.2.2. Közvetlen merevségi módszer

A komplex Young- vagy nyírási modulus kísérleti meghatározását lényegében a definíciójuk alapján végezhetjük a 11.1a,b ábra szerinti szerkezeti elrendezésekben, a rugószerű próbatest komplex merevségének mérésével. Ez rendszerint úgy történik, hogy mérjük a próbatestre ható harmonikus erő és a hatására keletkező rezgéselmozdulás nagyságát, valamint az ezek közötti fázisszöveget. A szerkezeti elrendezés egy gyakorlati megvalósítására a 11.5. ábrán látható példa a komplex Young-modulus mérése esetében. Ennél az elrendezésnél az erőt a próbatest „elején” mérjük (pl. egy piezoelektromos



11.5. ábra. Elrendezés a közvetlen merevségi módszerhez.

átalakítóval), a rezgéselmozdulást pedig a rázóasztal A_1 rezgésgyorsulásának mérésével határozzuk meg kétszeres integrálás után. Ezek ismeretében a próbatest komplex merevsége:

$$\bar{k} = k_d(1 + j\eta_k) = \frac{\bar{F}_1}{\bar{X}_1} = \frac{F_1}{X_1} e^{j\delta}, \quad (11.9)$$

ahol F_1 és X_1 az erő, illetve a rezgéselmozdulás amplitúdója a próbatest gerjesztett végénél és δ az ezek közötti fázisszög. A dinamikai Young-modulust a (11.9)-ből kapjuk a (11.5) figyelembevételével:

$$E_d = \frac{l}{\kappa S} \frac{F_1}{X_1} \cos \delta. \quad (11.10)$$

A veszteségi tényező pedig:

$$\eta_E = \operatorname{tg} \delta, \quad (11.11)$$

feltéve, hogy $\eta_k = \eta_E$.

Az ilyen eljárást újabban *közvetlen merevségi módszernek* nevezik, mivel a dinamikai tulajdonságokat a próbatest merevségének közvetlen mérésével határozzuk meg. Esetenként ugyanezt értik *impedancia-módszeren* is, bár ez az elnevezés általánosabb érvényű. Az impedancia-módszer elnevezést az indokolja, hogy ha rezgéselmozdulás helyett rezgéssebességet mérünk, akkor az erő és az utóbbi hányadosa a próbatest *mechanikai impedanciáját* adja.

A közvetlen merevségi módszer egyik előnye, hogy lehetőséget ad a histerézisgörbe megfigyelésére. Ez például úgy történhet, hogy az F_1 erő és az X_1 elmozdulás jeleit – amelyek a feszültséggel, illetve a deformációval arányosak – egy oszcilloszkóp lemezpárjaira vezetjük, ügyelve arra, hogy megőrizzük a két jel közötti fázisszöget. Lineáris esetben az oszcilloszkóp ernyőjén egy ellipszist látunk. Az ellipszis alakjának és esetleges torzulá-

sainak tanulmányozásával ellenőrizni lehet az anyag lineáris viselkedését, illetve megállapítható az attól való eltérés jellege. Az ellipszis paramétereinek mérésével pedig meg lehet határozni az anyag dinamikai modulusát és veszteségi jellemzőit. Ezt az eljárást *hiszterézis-módszernek* nevezik, amelyet azonban csak ritkán használnak pontosságának nyilvánvaló korlátai miatt.

A merevségi módszer viszonylagos egyszerűségével magyarázható, hogy a századfordulótól kezdve mindmáig használják. A módszert tárgyaló közlemények közül itt csak néhány, az utóbbi időben megjelentet idézünk, amelyek a rezgéscsökkentő anyagok dinamikai tulajdonságainak a hangfrekvenciás sávban történő meghatározásával foglalkoznak [11–14]. A dinamikai tulajdonságok mérésére kifejlesztett célkészülékek is rendszerint a merevségi módszer elvén működnek [12].

A merevségi módszer alkalmazásakor – látszólagos egyszerűsége ellenére – valójában gond van a pontos vizsgálat mindkét alapvető feltételével (11.2.1. pont); nevezetesen a próbatest rezgés-, illetve deformációs állapotának ismeretével és az egyik határfeltétel megvalósíthatóságával. Az előző pontban láttuk ugyanis, hogy a próbatest deformációs állapotát, és így a komplex merevségét csak akkor tudjuk pontosan számítani, ha a vég hatás elhanyagolható. A próbatest végének merev rögzítését (11.1a,b ábra) pedig csak közelítőleg lehet megvalósítani – nagy tömegű és/vagy igen merev szerkezettel (11.5. ábra). Ez utóbbi véges tömege, illetve merevsége hibát okozhat a dinamikai modulus, de különösképpen a veszteségi jellemzők meghatározásában, mivel a befogószerkezetben a rezgési energia egy része rendszerint elvész. A rögzítés tökéletlenségéből eredő hiba annál nagyobb lehet, minél nagyobb a vizsgált anyag dinamikai modulusa és minél kisebb a veszteségi tényezője.

A merevségi módszernél további két mérés technikai probléma is gondot okozhat. Az egyik az erő mérésével kapcsolatos, ami gyakran a gerjesztés helyén – a próbatest „elején” történik [13, 14]. Ez esetben azonban nem lehet közvetlenül mérni a próbatestre ható erőt, mivel a próbatest és az erőmérő között a gyakorlatban kisebb-nagyobb tömeg van. (A nyírási modulus mérése esetében ez nyilvánvaló, a Young-modulus mérésénél pedig a próbatest felületét letakaró fémlemez képezi ezt a tömeget.) Igaz ugyan, hogy a tömegerőt egyszerűen és pontosan számításba lehet venni, de az a frekvencia növelésével nő, és így egy bizonyos frekvencián túl olyan nagy lesz a próbatest rugóerejéhez képest, hogy ez utóbbit már nem lehet pontosan meghatározni. Ez a probléma elkerülhető, ha az erőt nem a gerjesztés helyén, hanem a próbatest másik végénél mérjük, ez utóbbi és a rögzítő szerkezet közé helyezett átalakítóval [11, 12]. Ily módon közvetlenül a próbatest rugóerejét lehet meghatározni, és ezért ezt a módszert szabványosították a gumik és más elasztomerek vizsgálatára [15, 16], illetve alkalmazzák a gyári

célkészülékekben [12]. Mindamellet enél a módszernél az erőmérő átalakító véges merevsége az előbb említett rögzítési hiba forrása lehet.

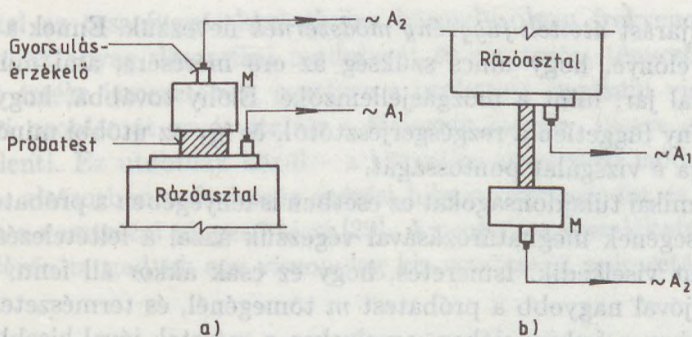
A másik méréstechnikai probléma a fázisszög mérésével kapcsolatos. A (11.11)-ből látható, hogy a fázisszög a veszteségi tényezővel arányos, kis veszteség esetében pedig: $\eta_E \approx \delta$. Következésképpen a kis veszteségű anyagoknál a fázisszög olyan kicsi, amelynek értékét nem lehet pontosan meghatározni még a precíziós műszerekkel sem. Például, ha $\eta_E = 0,1$, akkor $\delta \approx 5,7^\circ$, amelynek mérésében pl. $0,5^\circ$ -os hiba kb. 10%-os pontatlanságot okoz az η_E értékében. Ha viszont $\eta_E = 0,01$, akkor a fázismérés fenti hibája már kb. 100%-os pontatlansághoz vezethet az η_E meghatározásában. A merevségi módszer ezért elsősorban a nagyobb veszteségű anyagok vizsgálatára alkalmas.

A merevségi módszernél a próbatest deformációjának számítása és ezáltal a linearitás ellenőrzése csak akkor egyszerű, ha a vég hatás elhanyagolható. Ellenkező esetben ugyanis a próbatest deformációja inhomogén, amelynek számítására csak közelítően pontos és bonyolult összefüggések vannak [4]. Az ilyen próbatesteknél ezért a linearitás ellenőrzését a gerjesztőjel változtatásával célszerű végezni; azzal nem változhat sem a dinamikai merevség, sem a veszteségi tényező értéke.

11.2.2.3. Átviteli függvény módszer

A közvetlen merevségi módszernek azon problémáit, amelyek a próbatest végének merev rögzítésével, valamint az erő mérésével kapcsolatosak, elkerülhetjük akkor, ha a komplex modulus méréséhez a 11.1c,d ábra szerinti szerkezeti elrendezést választjuk [4, 17–21]. Ez esetben a próbatest egyik vége egy tömeghez, a másik vége pedig a rezgésgerjesztőhöz van rögzítve, amellyel azt hosszirányú, illetve nyírási rezgésre gerjesztjük. Az elrendezés gyakorlati megvalósítására a 11.6. ábrán látható példa a komplex Young-modulus mérése esetében. Ezeknek a szerkezeti elrendezéseknek több előnyük is van elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt.

Az előnyök közül első helyen a határfeltételeket kell említeni, amelyek itt nemcsak elméletileg vehetők pontosan számításba, de jól meg is valósíthatók. A próbatest egyik vége ugyanis egy tömeghez kapcsolódik, az egyetlen olyan mechanikai elemhez, amely széles frekvenciasávban jól megvalósítható. A próbatest másik végének dinamikai állapota pedig a rezgésgerjesztő által meghatározott, amelynek rezgőmozgását igen pontosan lehet mérni. A határfeltételek szempontjából az is fontos, hogy egyszerűen és jól megvalósítható a próbatest végeinek merev és súrlódásmentes kapcsolódása a rezgésgerjesztőhöz, illetve a tömeghez (pl. ragasztással). Ez egyúttal a járulékos – külső – veszteségek csökkentése szempontjából is előnyös. A külső veszteségek különösen kis értéken tarthatók a komplex Young-modulus vizs-



11.6. ábra. Elrendezés a komplex Young-modulus meghatározásához az átviteli függvény mérésével, rugószerű próbatesteken.

gálatakor, ha karcsú próbatestet használhatunk (11.6b ábra), mivel ekkor igen kicsi a próbatest azon felülete, amely a rezgésgerjesztővel, illetve a tömeggel érintkezik. A karcsú próbatest használatának előnye az, hogy ekkor a véghatás elhanyagolható ($\kappa = 1$) és így elkerülhető a rugószerű próbatest deformációs állapotának pontatlan ismeretéből eredő hiba. Ezeknél a szerkezeti elrendezéseknél az is előnyös továbbá, hogy egyszerűen megoldható a próbatest statikus terhelése és annak változtatása.

Az elrendezések nagy előnye mérés technikai szempontból az, hogy a próbatest mindkét végének rezgőmozgását közvetlenül mérni lehet. A méréshez napjainkban rendszerint piezoelektromos gyorsulásérzékelőket használnak (11.6. ábra), amelyek nem zavarják meg a próbatest rezgését, illetve a tömre rögzített érzékelő hatását pontosan számításba lehet venni. Következésképpen ezeknél az elrendezéseknél a vizsgálatot a végek rezgőmozgásának, illetve az ily módon meghatározható átviteli függvénynek mérésével célszerű végezni, amely

$$\bar{T}(j\omega) = T e^{j\varphi} = \frac{\bar{X}_2}{\bar{X}_1}, \quad (11.12)$$

ahol X_1 és X_2 a rezgéselmozdulás amplitúdója a próbatest gerjesztett, illetve a tömeghez csatlakozó végénél, T az átviteli függvény abszolút értéke, amelyet átvitelinek nevezünk a továbbiakban:

$$T = \frac{X_2}{X_1} \quad (11.13)$$

és végül φ az $\bar{X}_1$ és $\bar{X}_2$ közötti fázisszög. A vizsgálat történhet a V rezgés sebesség vagy az A rezgés gyorsulás mérésével is, mivel

$$\bar{T} = \frac{\bar{X}_2}{\bar{X}_1} = \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} = \frac{\bar{A}_2}{\bar{A}_1}. \quad (11.14)$$

Az ilyen eljárást *átviteli függvény módszernek* nevezzük. Ennek a módszernek az is előnye, hogy nincs szükség az erő mérésére, ami mindig több problémával jár, mint a mozgásjellemzőké. Előny továbbá, hogy az átviteli függvény független a rezgésgerjesztőtől, és így az utóbbi minősége nem befolyásolja a vizsgálat pontosságát.

A dinamikai tulajdonságokat ez esetben is lényegében a próbatest komplex merevségének meghatározásával végezzük azzal a feltételezéssel, hogy az rugóként viselkedik. Ismeretes, hogy ez csak akkor áll fenn, ha az M végtömeg jóval nagyobb a próbatest m tömegénél, és természetesen ekkor is csak azokon a frekvenciákon, amelyeken a méretek jóval kisebbek a hullámhossznál. Ezeken a frekvenciákon a próbatest mint rugó és a végtömeg a jól ismert *egyszabadságfokú rezgőrendszert* alkotja. Az átviteli függvényt és annak összefüggését az anyag dinamikai tulajdonságaival a tömeg-rugó rendszer rezgőmozgását leíró differenciálegyenlet megoldásával határozhatjuk meg, amelyet itt a komplex Young-modulus vizsgálatának esetére írunk fel. Az alábbiak értelemszerűen érvényesek a nyírási modulus vizsgálatára is. A differenciálegyenlet az erők egyensúlya alapján:

$$M \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = F_r[x(t)], \quad (11.15)$$

ahol x a próbatest rezgéselmozdulása:

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t). \quad (11.16)$$

Harmonikus rezgés esetében a (11.15) az alábbi alakba írható, a (11.2) figyelembevételével:

$$\bar{k}(j\omega)[\bar{X}_1(j\omega) - \bar{X}_2(j\omega)] - \omega^2 M \bar{X}_2(j\omega) = 0, \quad (11.17)$$

amelyből az átviteli függvény:

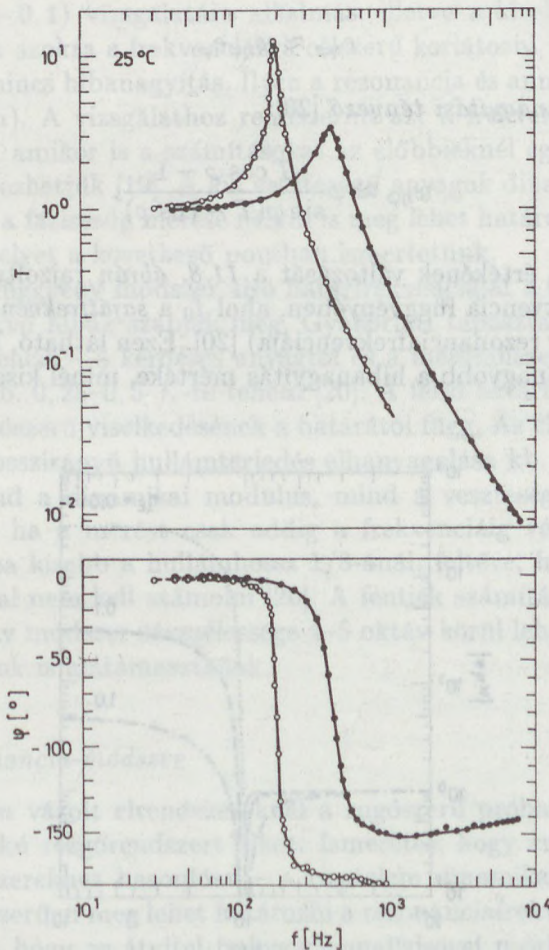
$$\bar{T}(j\omega) = \frac{\bar{X}_2}{\bar{X}_1} = \frac{k_d(1 + j\eta_k)}{k_d(1 + j\eta_k) - \omega^2 M}. \quad (11.18)$$

A dinamikai Young-modulust és a veszteségi tényezőt a (11.18)-ból kapjuk a valós és a képzetes rész szétválasztásával, valamint a (11.5), illetve a (11.4.b) figyelembevételével:

$$E_d = \frac{4\pi^2 f^2 l M}{\kappa S} \frac{T \cos \varphi - T^2}{2T \cos \varphi - T^2 - 1}, \quad (11.19)$$

$$\eta_E = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - T}. \quad (11.20)$$

Ezekkel az összefüggésekkel elvileg bármely olyan frekvencián számítani lehet az anyag dinamikai modulusát és veszteségi tényezőjét a T és a φ mért értéke ismeretében, amelyen a próbatest rugóként viselkedik. A gyakorlati problémát az átvitel és a fázisszög mérése, illetve ezek mérési hibája jelenti. Ez utóbbiak közül – a közvetlen merevségi módszerhez hasonlóan – elsősorban a fázisszög mérési hibája okoz gondot és ugyancsak akkor, ha a veszteségi tényező kicsi [20]. A probléma szemléltetése céljából a 11.7. ábrán megadtuk egy viszonylag kis veszteségű poliuretán hab pró-



11.7. ábra. Rugószerű próbatesteken mért átviteli függvény abszolút értéke és fázisa a frekvencia függvényében (Pritz [20]):

○—○ poliuretán hab, 32kg/m^3 , $2.3 \times 2.3 \times 2.2\text{cm}^3$; ●—● gumi, 1552kg/m^3 , $1 \times 1 \times 0.5\text{cm}^3$.

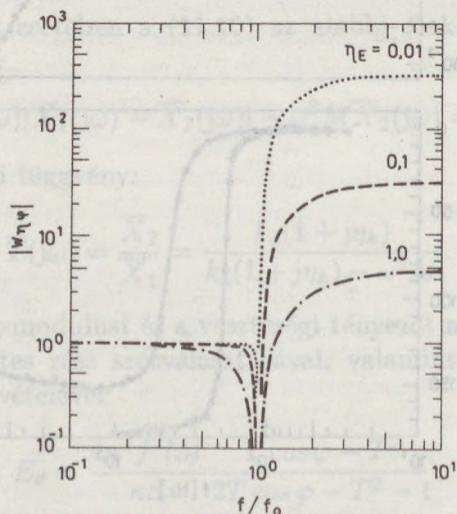
batesten ($2,3 \times 2,3 \times 2,2 \text{ cm}^3$) és egy nagyobb veszteségű gumi próbatesten ($1 \times 1 \times 0,5 \text{ cm}^3$) mért átviteli függvény abszolút értékét és fázisát [20]. A T maximuma a tömeg-rugó rendszer f_r rezonanciafrekvenciáján van. Látható, hogy ha a veszteség kicsi, akkor a fázisszög a rezonancia alatt igen közel van 0° -hoz, aminek mérése a frekvencia csökkenésével növekvő mértékű pontosságot igényel. A rezonancia felett a fázisszög jól mérhető, de itt az okoz gondot, hogy a φ mérési hibája felnagyítódik a számított mennyiségek, és pedig elsősorban a veszteségi tényező értékében. A módszer hibanalízisével igazolható, hogy a veszteségi tényezőnek a fázisszög e_φ relatív mérési hibájából eredő pontatlansága:

$$e_{\eta\varphi} \approx w_{\eta\varphi} e_\varphi, \quad (11.21)$$

ahol $w_{\eta\varphi}$ a hibanagyítási tényező [20]:

$$w_{\eta\varphi} \approx \varphi \frac{T \cos \varphi - 1}{\sin \varphi (T - \cos \varphi)}. \quad (11.22)$$

A $w_{\eta\varphi}$ abszolút értékének változását a 11.8. ábrán rajzoltuk meg az f/f_0 normalizált frekvencia függvényében, ahol f_0 a sajátfrekvencia (a veszteség nélküli rendszer rezonanciafrekvenciája) [20]. Ezen látható, hogy a rezonancia felett annál nagyobb a hibanagyítás mértéke, minél kisebb a veszteségi



11.8. ábra. A $w_{\eta\varphi}$ hibanagyítási tényező abszolút értékének változása a normalizált frekvencia függvényében (Pritz [20]).

tényező. A (11.22) vizsgálatával belátható [20], hogy ezeken a frekvenciákon:

$$|w_{\eta\varphi}| \approx \frac{\pi}{\eta_E}. \quad (11.23)$$

Következésképpen, ha például $\eta_E = 0,01$, akkor 1% hiba a fázisszög mérésében kb. 300% hibát okoz az η_E számított értékében. A hibanagyítás ellensúlyozására a kis veszteségű anyagoknál a fázisszög olyan pontos mérésére lenne szükség, amit általában még precíziós műszerekkel sem lehet elérni. Ezért az átviteli függvény módszer elsősorban a nagyobb veszteségű anyagok ($\eta_E > 0,1$) vizsgálatára alkalmas, illetve a kisebb veszteségűek vizsgálatát csak azokra a frekvenciákra célszerű korlátozni, ahol a fázisszög jól mérhető és nincs hibanagyítás. Ilyen a rezonancia és annak szűk környezete (11.8. ábra). A vizsgálatához rendszerint azt a frekvenciát választják, ahol $\varphi = -90^\circ$, amikor is a számításokat az előbbieknél egyszerűbb összefüggésekkel végezhetjük [19]. A kis veszteségű anyagok dinamikai tulajdonságait azonban a fázisszög mérése nélkül is meg lehet határozni rezonancia-módszerrel, amelyet a következő pontban ismertetünk.

Az átviteli függvény módszer alsó határfrekvenciáját a frekvencia csökkenésével növekvő hibák szabják meg. Gyakorlati tapasztalatok szerint az alsó határfrekvencia – a kérdéses anyagtól és a mérőműszerek pontosságától függően – kb. 0,25–0,5 f_r -re tehető [20]. A felső határfrekvencia pedig a próbatest rugószerű viselkedésének a határától függ. Az elméleti vizsgálatok szerint a hosszirányú hullámterjedés elhanyagolása kb. 10%-nál kisebb hibát okoz mind a dinamikai modulus, mind a veszteségi tényező meghatározásában, ha a mérést csak addig a frekvenciáig végezzük, amíg a próbatest hossza kisebb a hullámhossz $1/8$ -ánál, feltéve, hogy oldalirányú hullámmozgással nem kell számolni [20]. A fentiek számításba vételével az átviteli függvény módszer sáv szélessége 4–5 oktáv körül lehet, amit a kísérleti tapasztalatok is alátámasztanak.

11.2.2.4. Rezonancia-módszer

A 11.1c,d ábrán vázolt elrendezéseknél a rugószerű próbatest és a tömeg egy szabadságfokú rezgőrendszert alkot. Ismeretes, hogy ez esetben – más rezonáns rendszerekhez hasonlóan – a rugóelem dinamikai tulajdonságait viszonylag egyszerűen meg lehet határozni a rezonanciafrekvencián. A módszer lényege az, hogy az átvitel frekvenciaanalízisével megkeressük a rezonancia helyét – ez az átvitel maximumánál van – és mérjük a rezonanciajellemzőket; nevezetesen a rezonanciafrekvenciát, a -nagyítást vagy a -sáv szélességet. Ezek ismeretében az anyag dinamikai tulajdonságait számítani lehet, az ehhez szükséges összefüggéseket a (11.18) átviteli függvény

abszolút értékének vizsgálatával határozhatjuk meg:

$$T = \left\{ \frac{1 + \eta_k^2}{[1 - (\frac{f}{f_0})^2]^2 + \eta_k^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (11.24)$$

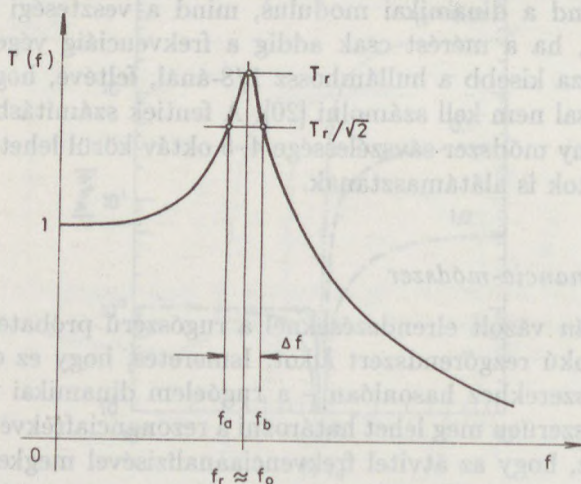
ahol f_0 a tömeg-rugó rendszer sajátfrekvenciája:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k_d}{M} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (11.25)$$

Az átvitel változását a frekvencia függvényében a 11.9 ábrán vázoltuk. A maximum az f_r rezonanciafrekvencián van, amely csak elhanyagolható mértékben tér el az f_0 sajátfrekvenciától akkor, ha a veszteség kicsi. Következésképpen a rezonanciafrekvencia mért értékének ismeretében a (11.25)-ből a próbatest dinamikai merevségét számítani lehet. Ennek ismeretében pedig a dinamikai Young-modulust számíthatjuk a (11.5) figyelembevételével:

$$E_d = \frac{1}{\kappa} 4\pi^2 l \frac{M}{S} f_r^2. \quad (11.26)$$

A veszteségi tényező meghatározására két módszer is ismert. Az egyiknél az átvitel nagyságát mérjük a rezonanciafrekvencián, amit rezonancia-



11.9. ábra. A rezonanciafrekvencia, -nagyítás és -sávszélesség értelmezése.

gyításnak nevezzük:

$$T_r = T(f_r) = \frac{X_2(f_r)}{X_1(f_r)}. \quad (11.27)$$

A (11.24) vizsgálatával belátható, hogy kis veszteség esetében:

$$\eta_E \approx \frac{1}{T_r}, \quad (11.28)$$

feltéve, hogy $\eta_k = \eta_E$. A másik módszernél az ún. rezonancia-sáv szélességet mérjük. Ez alatt rendszerint azon két frekvencia különbségét értjük, amelyeken az átvitel maximumának a $\sqrt{2}$ -ed részére csökken, vagyis (a 11.9. ábra jelöléseivel):

$$\Delta f = f_b - f_a. \quad (11.29)$$

A (11.24) vizsgálatával igazolható, hogy:

$$\eta_E \approx \frac{\Delta f}{f_r}, \quad (11.30)$$

feltéve, hogy a veszteség kicsi és hogy elhanyagolható mértékű a dinamikai modulus frekvenciafüggése a Δf sávban.

A rezonancia-módszer előnye a közvetlen merevségi vagy az átviteli függvény módszerhez képest az egyszerűségében van, mivel nincs szükség a fázisszög mérésére, sőt a rezgélmozdulás értékét sem kell mérni, elegendő változásának a vizsgálata. A módszer viszont csak a kis veszteségű anyagok mérésére alkalmas és csak egy frekvencián; a rezonancián. Igaz ugyan, hogy a rezonanciafrekvenciát változtatni lehet – a próbatest méreteivel és a terhelő tömeggel –, de az így elérhető sáv szélesség közel sincs akkora, mint az előbb említett módszereké. Ezért ezt a rezonancia-módszert rendszerint csak az egy frekvencián végzett minősítő jellegű szabványos vizsgálatokra [22], vagy más változók (pl. a statikus terhelés, hőmérséklet) hatásának vizsgálatára használják [23]. Ez utóbbi vizsgálatokat esetenként olyan elrendezésben végzik, amelyeknél a próbatest alsó vége mereven rögzítve van. A rezgésre gerjesztés ekkor a tömeg oldalról történik a frekvenciától független állandó amplitúdójú erővel, a rezonanciát pedig a tömeg rezgőmozgásának frekvenciaanalízisével keresik meg. A dinamikai tulajdonságok meghatározása ez esetben is az előzőekben leírt módon lehetséges. Ennél az elrendezésnél azonban – a közvetlen merevségi módszerhez hasonlóan – hibaforrás lehet a vég merev rögzítésének tökéletlensége, továbbá az erő mérésére is szükség van, ami több gonddal jár, mint a rezgőmozgásé.

A rezonancia-módszerrel végzett vizsgálat során különösen fontos a linearitás ellenőrzése. A rezonanciafrekvencián ugyanis igen nagy lehet a próbatest deformációja, és annál nagyobb, minél kisebb a veszteségi tényező,

ami éppen a rezonancia-módszerrel vizsgált anyagok sajátja. A nemlinearitást ekkor arról lehet felismerni, hogy a gerjesztőjel amplitúdójával változik mind a rezonanciafrekvencia, mind a rezonancianagyítás értéke. Egyes szigetelőanyagoknál a linearitás határa olyan kis amplitúdókon van, hogy a mérést nem is lehet a lineáris tartományban végezni. A rezonanciajellemzők lineáris értékét ekkor approximációval határozzuk meg több, különböző amplitúdóval végzett mérés alapján [22].

11.2.3. Mérések longitudinálisan rezgő rúdszerű próbatesteken

Ismeretes, hogy egy viszonylag hosszú, karcsú rúdban a longitudinális (hosszirányú) rezgések terjedési sebességét és csillapodását az anyag dinamikai Young-modulusa, illetve veszteségi tényezője szabályozza azokon a frekvenciákon, amelyeken az oldalirányú méret jóval kisebb a hullámhossznál. Ez ad elvi lehetőséget a dinamikai Young-modulus és a veszteségi tényező meghatározására rúdszerű próbatestek longitudinális rezgésének vizsgálatával. A rúdszerű próbatest általában hosszú és karcsú; de tömzsi, sőt akár lapos is lehet az olyan anyagoknál, amelyeknél oldalirányú mozgás nem keletkezik, vagyis amelyek Poisson-száma nulla. Ez utóbbi esetekben ugyanis a Young-modulus szabályozza a hosszirányú hullámterjedést a longitudinális modulus helyett az oldalirányú mérettől függetlenül (1.1. táblázat).

A rúdszerű próbatest használatának több előnye is van a rugószerűvel szemben. A legfontosabb, hogy ily módon elkerülhető a rugószerű próbatest deformációs állapotának, vagyis rezgésének pontatlan ismeretéből eredő hiba. A rúdszerű próbatest longitudinális rezgése az előbb említett frekvenciákon ugyanis pontosan leírható a jól ismert egydimenziós hullámegyenlettel. A dinamikai tulajdonságok vizsgálatát különféle határfeltételű (szabad-szabad végű, szabad-rögzített végű stb.) próbatesteken, többféle módszerrel is végezhetjük. Amennyiben a 11.1e ábrán vázolt szerkezeti elrendezést választjuk, akkor teljesülhet a pontos vizsgálat másik alapfeltétele is (11.2.1. pont), nevezetesen, hogy a határfeltételeket nemcsak matematikailag lehet pontosan számításba venni, de azok jól meg is valósíthatók. Ez az elrendezés lehetővé teszi a mérés technikai szempontból igen kedvező átviteli függvény módszernek az alkalmazását [4, 18, 24–26]. További előny az, hogy a dinamikai tulajdonságokat szélesebb frekvenciasávban lehet meghatározni, mint a rugószerű próbatesten. Mindezek magyarázzák, hogy a rezgéscsökkentő, valamint az egyéb célú viszkoelasztikus anyagok dinamikai tulajdonságait mind gyakrabban határozzák meg rúdszerű próbatesten az átviteli függvény mérésével, a 11.1e ábra szerinti elrendezésben.

Az átviteli függvényt és annak összefüggését az anyag dinamikai tulajdonságaival a rúdszerű próbatest longitudinális rezgését leíró hullám-

egyenlet megoldásával határozhatjuk meg. Harmonikus rezgés esetében ez az egyenlet az alábbi alakba írható:

$$\frac{d^2 \bar{U}(x)}{dx^2} - \bar{\gamma}^2 \bar{U}(x) = 0, \quad (11.31)$$

ahol U jelöli a keresztmetszetek elmozdulás-amplitúdóját a próbatest hosszával párhuzamos x tengely irányában, $\bar{\gamma}$ a komplex terjedési állandó:

$$\bar{\gamma} = j \frac{\omega}{\bar{c}_l} = \alpha + j\beta, \quad (11.32)$$

és itt α a csillapítási állandó, β a fázisállandó, $\bar{c}_l$ pedig a komplex terjedési sebesség:

$$\bar{c}_l = \left[\frac{E_d(1 + j\eta_E)}{\rho} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (11.33)$$

Az átviteli függvényt a (11.31) megoldásával kapjuk a határfeltételek figyelembevételével [25]:

$$\bar{T} = \left(\operatorname{ch} \bar{\gamma} l + \frac{M}{m} \bar{\gamma} l \operatorname{sh} \bar{\gamma} l \right)^{-1}. \quad (11.34)$$

A T^{-1} -et valós és képzetes részre bontva:

$$T^{-1} \cos \varphi = \operatorname{ch} d \beta l \cos \beta l + \\ + (M/m)(d \beta l \operatorname{sh} d \beta l \cos \beta l - \beta l \operatorname{ch} d \beta l \sin \beta l), \quad (11.35a)$$

$$-T^{-1} \sin \varphi = \operatorname{sh} d \beta l \sin \beta l + \\ + (M/m)(d \beta l \operatorname{ch} d \beta l \sin \beta l + \beta l \operatorname{sh} d \beta l \cos \beta l), \quad (11.35b)$$

ahol

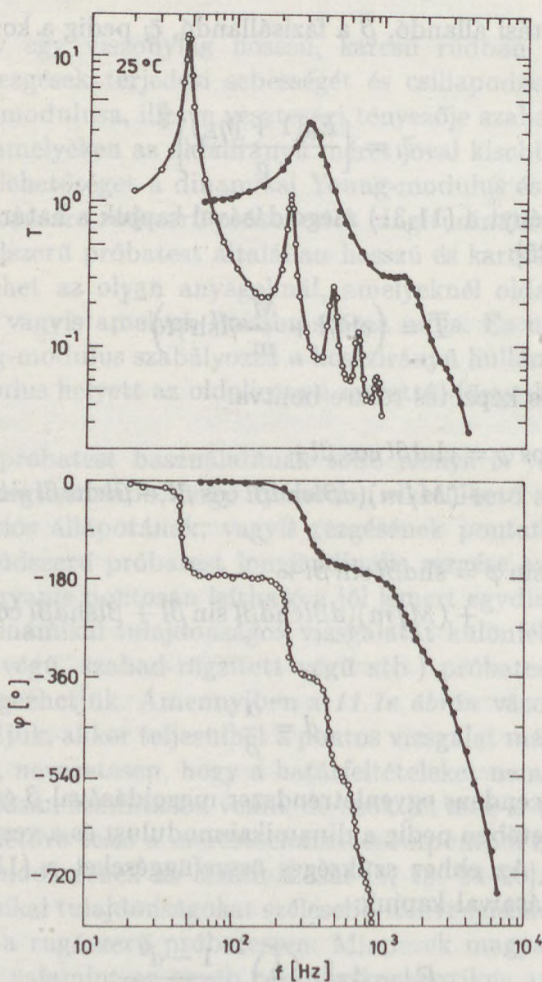
$$d = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (11.36)$$

A (11.35) transzcendens egyenletrendszer megoldásával β és d meghatározható; ezek ismeretében pedig a dinamikai modulust és a veszteségi tényezőt számítani lehet. Az ehhez szükséges összefüggéseket a (11.32) és (11.33) célszerű átalakításaival kapjuk:

$$E_d = 4\pi^2 \rho \left(\frac{f}{\beta} \right)^2 \frac{1 - d^2}{(1 + d^2)^2}, \quad (11.37)$$

$$\eta_E = \frac{2d}{1 - d^2}. \quad (11.38)$$

Az átvitel és a fázisszög változásának szemléltetésére példaként a 11.10 ábrán megadjuk egy rúdszerű poliuretán hab próbatesten ($2,2 \times 2,2 \times 10,8 \text{ cm}^3$) és egy gumi próbatesten ($0,5 \times 0,5 \times 5 \text{ cm}^3$) mért értékeket [25]. (A próbatestek anyaga ugyanaz volt, mint a 11.2.2.3. pontban említett rugószerű próbatesteké.) Az átvitel maximumai a rezonanciákat jelzik. A poliuretán hab próbatestnél az éles maximumok az anyag kis veszteségére utalnak, amikor is a fázisszög -180° -hoz, illetve annak páratlan számú több-



11.10. ábra. Rúdszerű próbatesteken mért átviteli függvény abszolút értéke és fázisa a frekvencia függvényében (Pritz [25]):

$\circ$ — $\circ$ poliuretán hab, 32 kg/m^3 , $2,2 \times 2,2 \times 10,8 \text{ cm}^3$; $\bullet$ — $\bullet$ gumi, 1552 kg/m^3 , $0,5 \times 0,5 \times 5 \text{ cm}^3$.

szőröséhez van közel a rezonanciák közötti frekvenciasávokban. A kísérleti tapasztalatok [25] és az elméleti vizsgálatok [27, 28] szerint az átvitel és a fázisszög mérése közül a rúdszerű próbatestnél is elsősorban az utóbbi okozhat gondot, különösképpen a veszteségi tényező meghatározásában. A rezonanciák közötti frekvenciákon ugyanis a fázisszög mérési hibája felnagyítódik a veszteségi tényező számított értékében és annál nagyobb mértékben, minél kisebb az anyag vesztesége. A probléma ez esetben is elkerülhető, ha a méréseket a rezonanciák szűk környezetére korlátozzuk, ahol a fázisszög jól mérhető és hibanagyítással sem kell számolni [25, 27, 28]. A vizsgálatra rendszerint azokat a frekvenciákat választjuk, ahol a fázisszög -90° és annak páratlan számú többszöröse [24, 26]. Ekkor további előny, hogy a számítások a (11.35)-nél valamivel egyszerűbb összefüggésekkel végezhetők. Ez utóbbi módszer természetesen a nagyobb veszteségű anyagok vizsgálatára is alkalmas, de az előnyei elsősorban a kis veszteség esetében nyilvánvalók.

A kis veszteségű anyagok vizsgálata az előbbinél egyszerűbben, a fázisszög mérése nélkül is elvégezhető a rúdszerű próbatestre alkalmazott rezonancia-módszerrel [25]. Ennek lényege itt is az, hogy az átvitel maximumainak megkeresésével megmérjük a rezonanciafrekvenciákat, amelyek ismeretében a dinamikai Young-modulust lehet meghatározni. A számítási összefüggést a (11.37)-ből kapjuk az $1 - d^2/(1 + d^2)^2 \approx 1$ és a $\beta \approx \beta_0$ közelítések helyettesítésével, ahol β_0 a fázisállandót jelöli a veszteség nélküli esetben:

$$E_d = 4\pi^2 \rho l^2 \frac{f_p^2}{\zeta_p^2}. \quad (11.39)$$

Itt f_p a p -edik rezonanciafrekvencia, a $\zeta_p = (\beta_0 l)_p$ pedig a próbatest p -edik sajátfrekvenciájához tartozó hullámszám; ez utóbbi értékeit az alábbi transzcendens egyenlet megoldásai adják [25]:

$$\operatorname{ctg} \zeta_p = \frac{M}{m} \zeta_p. \quad (11.40)$$

A (11.39) összefüggés és ezáltal a dinamikai modulus meghatározásának pontossága romlik egyrészt a veszteségi tényező, másrészt a p rendszám növelésével. Ezt az $1 - d^2/(1 + d^2)^2 \approx 1$ közelítés pontatlanságán kívül az okozza, hogy a rezonanciafrekvenciához tartozó hullámszám (elvileg ezzel kellene számolni az E_d -t) eltér a sajátfrekvenciához tartozótól, és pedig annál nagyobb mértékben, minél nagyobb a veszteségi tényező és a rezonancia rendszáma [25].

A veszteségi tényezőt a rúdszerű próbatestnél is meghatározhatjuk akár a rezonancianagyítás – vagyis a T maximális értékeinek – akár a rezonanciasáv szélesség mérésével. A maximumok mért értéke ismeretében a veszteségi

tényező az alábbi közelítő összefüggéssel számítható [25]:

$$\eta_E \approx \frac{2}{T_p \zeta_p} \left[1 + 2 \frac{M}{m} + \left(\frac{M}{m} \right)^2 \zeta_p^2 \left(1 + \frac{\sin^2 \zeta_p}{\zeta_p^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (11.41)$$

ahol T_p jelöli a p -edik maximum értékét. A sávszélesség mért értéke ismeretében pedig ez esetben is a (11.30) szerinti összefüggéssel számolhatunk, amely az itteni mennyiségekkel:

$$\eta_E = \frac{\Delta f_p}{f_p}, \quad (11.42)$$

ahol Δf_p a sávszélesség a p -edik rezonancián. Ez utóbbi módszer azonban itt is csak akkor megfelelő, ha a dinamikai modulus frekvenciafüggése elhanyagolható az illető frekvenciákon. Mindkét fenti módszernél figyelembe kell venni továbbá, hogy azok pontossága csökken mind a veszteségi tényező, mind a rendszám növelésével.

Rúdszerű próbatestnél a vizsgálat alsó határfrekvenciáját lényegében az első rezonanciafrekvencia szabja meg. A felső határfrekvencia pedig az oldalirányú mérettől függ, amely a frekvencia növelésével mind kevésbé hanyagolható el a λ_l hullámhosszhoz képest; ez utóbbi (a veszteséget elhanyagolva):

$$\lambda_l = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{E_d}{\rho}}. \quad (11.43)$$

Az ebből eredő hiba a frekvencián kívül függ a próbatest keresztmetszetétől, a dinamikai Poisson-szám és az ahhoz tartozó veszteségi tényező értékétől is [29]. Négyzet vagy kör keresztmetszetű próbatestnél a hiba gyakorlati szempontból elhanyagolható, kb. 1%-nál kisebb addig a frekvenciáig, amíg az oldalirányú méret kisebb a hullámhossz 1/10-énél, feltéve, hogy a Poisson-szám valós, 0,5 értékű. Ennél nagyobb lehet a felső határfrekvencia akkor, ha a dinamikai Poisson-szám 0,5-nél kisebb és akkor is, ha veszteségi tényezője nullától különböző [29].

Befejezésül fontos megemlíteni, hogy a rúdszerű próbatest deformációs állapota nem homogén; általános esetben a deformáció maximumok és minimumok között változik a hossztengety mentén. Ez elvileg nem befolyásolja a dinamikai tulajdonságok meghatározásának pontosságát akkor, ha az anyag homogén és a deformáció legnagyobb értéke is kisebb a lineáritás határánál. Ezzel szemben a csak kvázihomogénnek tekinthető anyagok (pl. műanyaghabok, üveggyapotok, nemezek stb.) mérésekor a deformáció inhomogén eloszlása és annak a frekvenciával való változása a lineáris tartományban is a mérési eredmények kisebb-nagyobb szórásához vezethet. A hiba természetesen nő, ha a deformációmaximumok meghaladják a li-

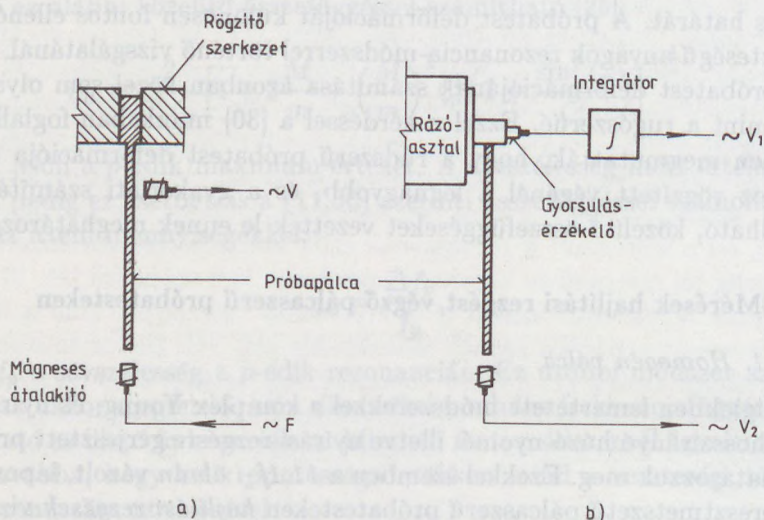
nearitás határát. A próbatest deformációját különösen fontos ellenőrizni a kis veszteségű anyagok rezonancia-módszerrel történő vizsgálatánál. A rúd-szerű próbatest deformációjának számítása azonban közel sem olyan egyszerű, mint a rugószerűé. Ezzel a kérdéssel a [30] munkában foglalkoztak, amelyben megmutatták, hogy a rúdszerű próbatest deformációja a rázóasztalhoz rögzített végénél a legnagyobb, és a gyakorlati számításokhoz használható, közelítő összefüggéseket vezettek le ennek meghatározására.

11.2.4. Mérések hajlítási rezgést végző pálcaszerű próbatesteken

11.2.4.1. Homogén pálca

Az eddigiekben ismertetett módszerekkel a komplex Young- és nyírási modulust hosszirányú húzó-nyomó, illetve nyírási rezgésre gerjesztett próbatesteken határozzuk meg. Ezekkel szemben a 11.1f-i ábrán vázolt, lapos, néyszög keresztmetszetű pálcaszerű próbatesteken *hajlítási rezgések* vizsgálata révén mérjük a dinamikai tulajdonságokat, éspedig azokon a frekvenciákon, amelyeken a hosszirányú méret összemérhető a *hajlítási hullám hosszával*. A vizsgálatot rezonancia-módszerrel végezzük, amelynek lényege itt is az, hogy a dinamikai modulust és a veszteségi tényezőt a rezonanciafrekvencia, illetve a sáv szélesség mérésével határozzuk meg. A rezonancia-módszer természetesen ez esetben is csak akkor alkalmazható, ha a pálca veszteségi tényezője kellőképpen kicsi. Ha a kis veszteség mellett az anyag elég merev ahhoz, hogy az abból készített próbatest öntartó legyen, akkor a vizsgálathoz a 11.1f ábra szerinti *homogén pálcát* használhatjuk. Ezt a módszert elsősorban a kemény műanyagok és más szerkezeti anyagok mérésére használják, de megfelelő lehet az üvegszerű állapotú rezgéscsillapító polimerek esetében is.

A vizsgálat különböző szerkezeti elrendezésekben végezhető attól függően, hogy milyenek a határfeltételek (a pálca mindkét vége szabad, vagy az egyik vége szabad, a másik pedig mereven rögzített stb.), és hogy miként történik a rezgésre gerjesztés és a pálca rezgésének mérése. A 11.11. ábrán látható az a két elrendezés, amelyet napjainkban leggyakrabban használnak. Mindkét elrendezésben a pálca egyik vége elhajlásmentesen rögzítve van, a másik vége szabadon rezeg. A két elrendezés között azonban lényeges különbség van a pálcavég rögzítésének módja, valamint a rezgésgerjesztés és -mérés szempontjából. A 11.11a ábra szerinti elrendezésnél a pálca egyik vége mereven rögzítve van egy igen merev és/vagy nagy tömegű szerkezetben, a rezgésre gerjesztés a szabad végnél, a rezgés mérése pedig a rögzített vég közelében történik, mágneses átalakítók alkalmazásával. Ennek az igen gyakran használt elrendezésnek több gyakorlati, mérés technikai problémája van. Az alapvető gond az, hogy az egyik határfeltételt – a pálcavég merev rögzítését – nem lehet tökéletesen megvalósítani. A véges merevségű és

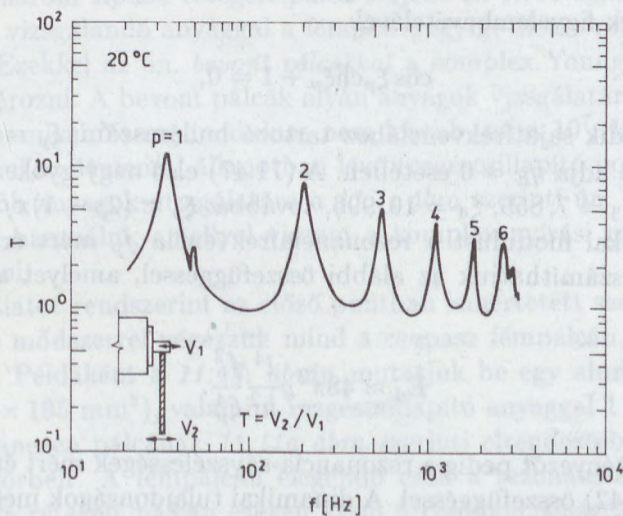


11.11. ábra. Pálcaszerű próbatesteknél a rezgésre gerjesztés és a rezgésmérés módjai.

tömegű rögzítőszerkezetet a pálca végére átvitt erő rezgésbe hozhatja, aminek következtében egyrészt járulékos veszteségek keletkezhetnek, másrészt a próbapálca effektív – rezgő – hossza ellenőrizhetetlen mértékben eltérhet a geometriai értéktől. Mindezek jelentősége annál nagyobb lehet, minél kisebb a pálca vesztesége, mivel rezonanciafrekvenciákon a gerjesztőerőnek a veszteségi tényező reciprokával felnagyított értéke hat a rögzítő szerkezetre [31]. Az elrendezés másik problémája a rezgés mérésével kapcsolatos, amit olyan helyen végeznek, ahol általában csak az első 4–5 rezonanciát lehet megbízhatóan megállapítani. Ennek egyik oka az, hogy egyes nagyobb rendszámú rezonanciákon a pálca rezgésképének csomópontja az érzékelő átalakító elé kerül. A másik ok pedig az, hogy a viszonylag nagy méretű mágneses átalakítóval nem érzékelhetők azok a nagyobb rendszámú rezonanciák, amelyek a pálcának két ellenfázisú maximuma alakul ki az átalakító előtt. Ez utóbbi probléma elkerülhető, ha a mérést a pálcára rögzített gyorsulásérzékelővel végezzük. A gyorsulásérzékelő tömege azonban befolyásolja a pálca rezgését, és hatásának elhanyagolása a rezonancia rendszámától függő hibát okoz [32]. Ennél az elrendezésnél gondot okozhat továbbá a rezgésgerjesztés módja is, ami a pálca szabad végénél történik. Ekkor igen könnyű *torziós rezgéseket* is kelteni a hajlítási rezgések mellett, melyek megzavarhatják a mérést és a rezonanciafrekvenciák azonosítását.

Valamennyi előbb említett probléma elkerülhető akkor, ha a mérést a 11.11b ábra szerinti elrendezésben végezzük. Ez esetben a próbapálca egyik végét a rezgésgerjesztő rázóasztal lapjához rögzítjük (pl. ragasztással), és mérjük mindkét vég rezgőmozgását. Az elrendezés analóg az előző pontbeli

átviteli függvény módszernél használttal azzal az eltéréssel, hogy a pálca végéhez nem kapcsolódik tömeg. A szerkezeti elrendezés alapvető előnye a határfeltételek jó megvalósíthatóságában van. A próbapálca rögzített végének dinamikai állapota ugyanis a rázóasztal által meghatározott, s ennek rezgését igen pontosan tudjuk mérni. A próbapálca végének felragasztásával a külső veszteségeket minimális értéken lehet tartani, és a rezgő hossz nem térhet el a geometriai értéktől. Előny továbbá, hogy ekkor a torziós rezgések gerjesztése is elkerülhető. Lazán csatolt mágneses (vagy kapacitív) átalakítóval pedig a pálca szabad végének rezgése jól mérhető anélkül, hogy azt az érzékelő számottevően befolyásolná. A szabad végnél történő rezgésmérés előnye, hogy valamennyi létező rezonanciát érzékelni lehet, mivel a rezonanciákon a pálca rezgésképe a végnél mindig maximuma van. A rezonanciákat ez esetben is a két vég rezgőmozgásának mérésével, illetve az így módon meghatározható átvitel frekvenciaanalízisével kereshetjük meg. Példaként a 11.12. ábrán megadjuk egy homogén pálcának ($3 \times 11 \times 200 \text{ mm}^3$) a fenti módon meghatározott rezonanciagörbéit. (A pálca olyan rezgéscsillapító anyagból készült, amely a mérési hőmérsékleten üvegszerű állapotú.)



11.12. ábra. Rezgéscsillapító anyagból készített homogén pálcának ($3 \times 11 \times 200 \text{ mm}^3$) a 11.11b ábra szerinti elrendezésben feljegyzett rezonanciagörbéi (Pritz).

A dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők számításához feltételezzük, hogy a pálca anyaga homogén és izotrop, és hogy hajlítási rezgését a Bernoulli-Euler-féle hullámegyenlet írja le. Ez harmonikus rezgés esetében

az alábbi alakba írható:

$$\frac{d^2 \bar{W}(x)}{dx^4} - \bar{k}^4 \bar{W}(x) = 0, \quad (11.44)$$

ahol W jelöli a keresztmetszeteknek a pálca hossztengetelyével egybeeső x tengelyre merőleges elmozdulásamplitúdóját, továbbá $\bar{k}$ a hajlítási hullám komplex terjedési állandója, amely

$$\bar{k} = \sqrt{\omega}^4 \sqrt{\frac{m}{E_d(1 + j\eta_E)Il}}, \quad (11.45)$$

és itt m a pálca tömege, l a hossza, I pedig a keresztmetszetnek az x tengelyre vett tehetetlenségi nyomatéka. Téglalap keresztmetszetenél:

$$I = \frac{bh^3}{12}, \quad (11.46)$$

ahol b a szélességet, h pedig a vastagságot jelöli. Rezonancia-módszerrel a kis veszteségű anyagok vizsgálhatók, amikor a pálca rezonanciafrekvenciái csak elhanyagolható mértékben térnek el a sajátfrekvenciáktól. Az utóbbiak helyét a (11.44) differenciálegyenlet megoldásával kereshetjük meg a határfeltételek figyelembevételével:

$$\cos \xi_p \operatorname{ch} \xi_p + 1 = 0, \quad (11.47)$$

ahol ξ_p a p -edik sajátfrekvenciához tartozó hullámszám; $\xi_p = (k_0 l)_p$ és itt k_0 -t a (11.45) adja $\eta_E = 0$ esetében. A (11.47) első négy gyöke: $\xi_1 = 1,875$, $\xi_2 = 4,694$, $\xi_3 = 7,855$, $\xi_4 = 10,996$, továbbá: $\xi_p \approx (2p - 1)\pi/2$, ha $p > 4$.

A dinamikai modulust a rezonanciafrekvencia f_p mért értéke és a ξ_p ismeretében számíthatjuk az alábbi összefüggéssel, amelyet a (11.45)-ből kapunk:

$$E_d \approx 48\pi^2 \varrho \frac{l^4}{h^2} \frac{f_p^2}{\xi_p^4}. \quad (11.48)$$

A veszteségi tényezőt pedig a rezonancia-sáv szélességek mért értékéből számítjuk a (11.42) összefüggéssel. A dinamikai tulajdonságok meghatározásában – az előző pontban elmondottakhoz hasonlóan – pontatlanságot okoz, hogy a pálca sajátfrekvenciájához tartozó hullámszám eltér a rezonanciafrekvenciához tartozótól. Az eltérés és ezáltal a dinamikai tulajdonságok meghatározásának pontatlansága nő mind a veszteségi tényező értékével, mind a rendszám növelésével.

A módszerrel a mérés csak addig a frekvenciáig végezhető, amíg a pálca hajlítási rezgése valóban leírható a (11.44) differenciálegyenlettel. Ez azokon a frekvenciákon lehetséges, amelyeken a pálca h vastagsága jóval kisebb a

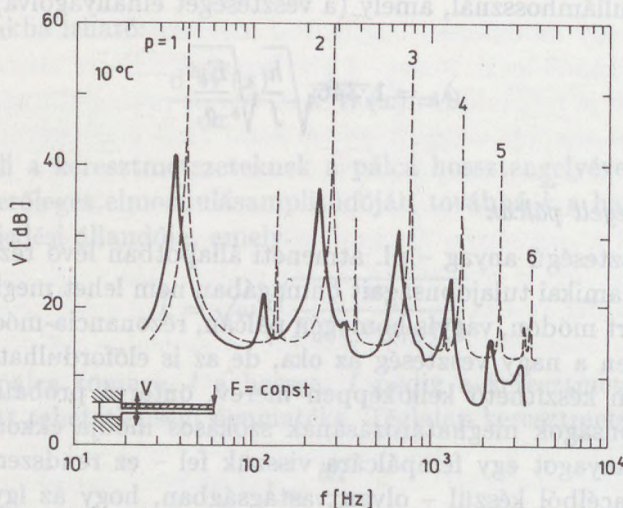
λ_h hajlítási hullámhossznál, amely (a veszteséget elhanyagolva):

$$\lambda_h = 1,346 \sqrt{\frac{h}{f}} \sqrt[4]{\frac{E_d}{\rho}}. \quad (11.49)$$

11.2.4.2. Rétegelt pálcák

Egy nagy veszteségű anyag – pl. átmeneti állapotban lévő rezgéscsillapító polimer – dinamikai tulajdonságait önmagában nem lehet meghatározni az előzőekben leírt módon, vagyis homogén pálcán, rezonancia-módszerrel. Ennek alapvetően a nagy veszteség az oka, de az is előfordulhat, hogy ilyen anyagból nem készíthető kellőképpen merev, öntartó próbatest. A dinamikai tulajdonságok meghatározásának szokásos módja ekkor az, hogy a vizsgálandó anyagot egy fémpálcára visszük fel – ez rendszerint alumíniumból vagy acélból készül – olyan vastagságban, hogy az így kialakított *rétegelt pálca* eredő vesztesége elég kicsi legyen a rezonancia-módszer alkalmazásához. Ez esetben mérést végzünk előbb a csupasz fémpálca, majd a rétegelt pálca rezonanciáin, és az így kapott adatok ismeretében kiszámítjuk a kérdéses anyag dinamikai modulusát és veszteségi tényezőjét. A vizsgálatra három típusú rétegelt pálca terjedt el. A 11.1g,h ábra szerinti pálcáknál a vizsgálandó anyaggal a fémpálca egyik, illetve mindkét oldalát vonjuk be. Ezekkel az ún. *bevont pálcákkal* a komplex Young-modulust lehet meghatározni. A bevont pálcák olyan anyagok vizsgálatára alkalmasak, amelyek dinamikai Young-modulusa nem kisebb, mint 10^7 – 10^8 Pa. Ez jellemző például az átmeneti állapotban lévő rezgéscsillapító polimerekre. Az ennél lágyabb anyagok vizsgálatára a 11.1i ábra szerinti ún. *szendvics pálcát* célszerű használni, amellyel viszont a komplex nyírési modulust lehet meghatározni.

A vizsgálatot rendszerint az előző pontban ismertetett szerkezeti elrendezésben és módszerrel végezzük mind a csupasz fémpálcán, mind a rétegelt pálcán. Példaként a 11.13. ábrán mutatjuk be egy alumínium pálcának ($1 \times 10 \times 195$ mm³), valamint rezgéscsillapító anyaggal 1 mm vastagon bevont ugyanezen pálcának 11.11a ábra szerinti elrendezésben feljegyzett rezonanciagörbéit. A fémpálcán elegendő csak a rezonanciafrekvenciákat mérni, míg a rétegelt pálcán ezeken kívül a rezonancia-sáv szélességeket is mérjük a veszteségi tényező meghatározásához. A vizsgálandó anyag dinamikai modulusát és veszteségi tényezőjét a mért mennyiségek ismeretében számíthatjuk, feltéve, hogy teljesülnek azok a feltételek, amelyeket a számítási összefüggések levezetéséhez követeltek meg. Ezek megegyeznek a homogén pálcánál felsoroltakkal azzal kiegészítve, hogy a fémpálca veszteségi tényezője jóval kisebb a vizsgálandó anyagéhoz képest, és hogy nincs csúszás az anyagrétegek között, vagyis a deformáció a határfelületeken azonos.



11.13. ábra. Alumínium pálca ($1 \times 10 \times 195 \text{ mm}^3$) rezonancia-görbéi közvetlenül (—) és rezgéscsillapító anyaggal 1 mm vastagságban egyik oldalon bevonva (- - -). A mérést a 11.11a ábra szerinti elrendezésben végezték (Pritz).

Az egy oldalon bevont pálca esetében Oberst [33] dolgozott ki összefüggéseket a dinamikai Young-modulus és a veszteségi tényező számítására. Oberst a *semleges szál* helyzetének megkeresésével meghatározta a bevont pálca *komplex hajlítási merevségét*, amelyet valós és képzetes részre bontva vezette le az alábbi összefüggéseket:

$$\left(\frac{f_p}{f_{fp}}\right)^2 \frac{m}{m_f} = \frac{1 + 2BHK + B^2H^4}{1 + AH}, \quad (11.50)$$

ahol

$$B = \frac{E_d}{E_f}, \quad H = \frac{h_a}{h_f}, \quad K = 2 + 3H + 2H^2, \quad (11.51 - 53)$$

amelyekben f_p és f_{fp} a bevont pálca, illetve a fémpálca p -edik rezonancia-frekvenciája, m és m_f a bevont pálca, illetve a fémpálca rezgő hosszának tömege, E_d és E_f a bevonat, illetve a fém dinamikai modulusa és végül h_a és h_f a bevonat, illetve a fémpálca vastagsága. A bevonat dinamikai Young-modulusának számításához a (11.50) egyenletet B -re kell megoldani; ennek eredménye:

$$B = r - s, \quad (11.54)$$

ahol

$$r = \left(\frac{Q-1}{H^4} + q^2 \right)^2, \quad (11.55)$$

$$s = \frac{1}{H^3} \left(K - \frac{Q}{2} \right) \quad (11.56)$$

és itt

$$Q = \left(\frac{f_p}{f_{fp}} \right)^2 \frac{m}{m_f}. \quad (11.57)$$

Látható, hogy a bevonat dinamikai Young-modulusát ez esetben is a rezonanciafrekvenciák mért értékének ismeretében számíthatjuk. A bevonat veszteségi tényezőjét pedig a dinamikai modulusok hányadosának meghatározása után lehet számítani az alábbi összefüggéssel:

$$\eta_E = \eta \frac{1+BH}{BH} \frac{1+2BHK}{4K+2BH^3+B^2H^4-1}, \quad (11.58)$$

ahol η a bevont pálcá veszteségi tényezőjét jelöli. (Ez utóbbit a rezonanciasávszélesség mérésével határozzuk meg.)

A mindkét oldalon szimmetrikusan bevont pálcánál a semleges szál helyzete ismert, a keresztmetszet szimmetriavonalában van. Ennek köszönhetően a dinamikai Young-modulus és a veszteségi tényező számítására az előbbieknél lényegesen egyszerűbb összefüggések adódnak, amelyek Nashif [34] munkája alapján:

$$E_d = E_f \frac{Q-1}{L}, \quad (11.59)$$

$$\eta_E = \eta \left(1 + \frac{1}{BL} \right), \quad (11.60)$$

ahol

$$L = 6H + 12H^2 + 8H^3. \quad (11.61)$$

A többi betű jelentése ugyanaz, mint az egy oldalon bevont pálcánál; a (11.52)-vel definiált H vastagság arányban h_a az egyik oldalon lévő bevonat vastagságát jelöli.

A mérési eljárás az előbbiekkal megegyezik a szendvics pálcá (11.1i ábra) esetében is, amellyel viszont nem a Young-, hanem a dinamikai nyírási

modulust és az illető veszteségi tényezőt lehet meghatározni. A számítási összefüggéseket Ross, Ungar és Kerwin [35] levezetései alapján közöljük, célszerűen átalakított formában:

$$G_d = \frac{E_f h_f h_a \xi_p}{2l^2} \frac{(Q-1)N/2 - (Q-1)^2 N^2 - (QN\eta)^2}{-(Q-1)N/2 + (Q-1)^2 N^2 + (QN\eta)^2 + 0,25}, \quad (11.62)$$

$$\eta_G = \frac{QN\eta}{(Q-1)N - (Q-1)^2 2N^2 - 2(QN\eta)^2}, \quad (11.63)$$

ahol

$$N = \frac{1}{6(1+H)^2}, \quad (11.64)$$

és a többi betű jelentése értelemszerűen azonos az előbbiekkal, a h_f pedig csak az egyik oldalon lévő fémplaca vastagságát jelöli.

Mindhárom rétegelt pálcánál a számítási összefüggésekben szerepel a $Q-1$ kifejezés. Ennek értéke a csupasz fémplaca és a rétegelt pláca rezonanciafrekvenciáinak, valamint tömegének eltérésére jellemző. Minél kisebbek ezek az eltérések, annál közelebb van a $Q-1$ értéke a nullához, amikor is a frekvencia vagy a tömeg mérésénél elkövetett bármely kis hiba felnagyítva jelenik meg mind a dinamikai modulus, mind a veszteségi tényező számított értékében [34, 36]. A mérési hibák közül a frekvenciáé a kritikus, amelynek szerepét a [36] munkában határozták meg az egy oldalon és a mindkét oldalon bevont pálcákra. Ezeknél a frekvenciamérés hibája pontatlanságot okoz a B mennyiség számított értékében és ez vezet a dinamikai Young-modulus és a veszteségi tényező pontatlanságához. A B azon pontatlansága, amely a frekvenciamérés hibájából ered:

$$e_{Bf} \approx w_{Bf} e_f, \quad (11.65)$$

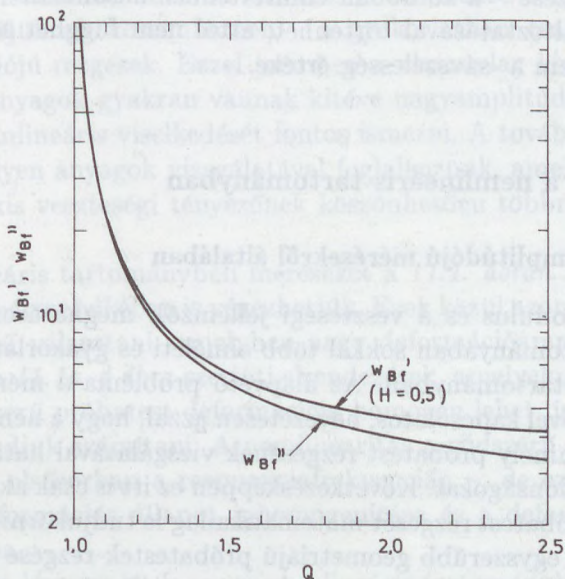
ahol e_f az f_p/f_{fp} frekvenciaarány relatív hibáját, w_{Bf} pedig a hibanagyítási tényezőt jelöli. Ez utóbbi az egy oldalon bevont pláca esetében:

$$w'_{Bf} = \frac{Q}{H^4} \left[\frac{1}{r(r-s)} + \frac{H}{r} \right], \quad (11.66)$$

és a mindkét oldalán bevont pálcánál:

$$w''_{Bf} = 2 \frac{Q}{Q-1}. \quad (11.67)$$

A hibanagyítási tényezők változását a 11.14. ábrán adjuk meg a Q függvényében. Látható, hogy a hibanagyítás mértéke annál nagyobb, minél közelebb van Q értéke 1-hez, ami vékony és/vagy lágy bevonatoknál fordulhat



11.14. ábra. A hibanagyítási tényező változásai a Q mennyiség függvényében az egy oldalán (w'_{Bf}) és a mindkét oldalán (w''_{Bf}) bevont próbapálca esetében (Pritz [36]).

elő. A hibanagyítást a H vastagságarány megfelelő megválasztásával lehet elkerülni [37]. Mindkét típusú bevont pálca, valamint a szendvics pálca használatakor a megbízható vizsgálathoz olyan vastagságarány szükséges, hogy a $Q - 1$ értéke 0,1-nél nagyobb legyen, vagyis hogy teljesüljön az

$$\left(\frac{f_p}{f_{fp}}\right)^2 \frac{m}{m_f} > 1,1 \quad (11.68)$$

egyenlőtlenség [9, 38].

A kísérleti tapasztalatok azonban arról tanúskodnak, hogy még a gondosan tervezett rétegelt pálcákkal végzett vizsgálatok pontatlansága is nagyobb az előzőekben ismertetett módszerekénél. Azonos körülmények között a szendvics pálcával nyert eredmények pontatlansága a legnagyobb [38]. A pontatlanságok oka – véleményünk szerint – egyrészt a módszerek bonyolultságában, közvetett jellegében, másrészt a próbatestek viszonylag nagy méretében és az inhomogén deformációs állapotukban keresendő. Az ilyen nagy méretű próbatesteknél ugyanis a hibáknak számos olyan forrása lehet, mint az anyag inhomogenitása, a keresztmetszet változása a hossz tengely mentén, a bevonat és a fém tökéletlen tapadása, a hőmérsékleteloszlás egyenetlensége stb. Pontatlanságot okozhat továbbá a nemlinearitás is, de ennek elsősorban csak a kis veszteségű fémpálca mérésénél lehet jelentősége. A li-

nearitás ellenőrzése – a korábban említettekhez hasonlóan – a gerjesztőjel nagyságának változtatásával történhet; attól nem függhet sem a rezonanciafrekvencia, sem a -sávszélesség értéke.

11.3. Mérések a nemlineáris tartományban

11.3.1. A nagyamplitúdójú mérésekről általában

A dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők meghatározása az anyag nemlineáris tartományában sokkal több elméleti és gyakorlati gonddal jár, mint a lineáris tartományban. Az alapvető probléma a mérési módszerek közvetett jellegével kapcsolatos, nevezetesen azzal, hogy a nemlineáris tartományban is valamely próbatest rezgésének vizsgálatával határozzuk meg a dinamikai tulajdonságokat. Következésképpen ez itt is csak akkor lehet eredményes, ha a próbatest rezgését matematikailag le tudjuk írni. Az előzőekben láttuk, hogy az egyszerűbb geometriájú próbatestek rezgése az anyag lineáris tartományában, vagyis a viszonylag kis amplitúdókon és bizonyos feltételek teljesülése esetében valamiféle lineáris differenciálegyenlettel (pl. az egydimenziós hullámegyenlettel) pontosan leírható. Ezzel szemben a nagyamplitúdójú rezgések leírása – ami értelemszerűen nemlineáris differenciálegyenlethez vezet – csak korlátozott pontossággal lehetséges. Gondot okoz már magának a nemlineáris differenciálegyenletnek a felírása is, hiszen ahhoz ismerni kellene a dinamikai tulajdonságok amplitúdófüggését, éppen azt, aminek meghatározása a mérés célja. Még ha ez ismert is – pl. feltételezzük a nemlineáris viselkedés jellegét –, akkor is gondot okoz a differenciálegyenlet megoldása, ami csak a nemlinearitás egyszerűbb eseteire ismert. Az ezekre kidolgozott megoldási módszerek is csak közelítőleg pontosak és csak „kismértékű” nemlinearitások esetében, vagyis az amplitúdónak egy bizonyos „kis” értékéig használhatók. Következésképpen a nemlineáris differenciálegyenlet megoldásával kapott számítási összefüggésekkel csak korlátozott pontossággal és csak bizonyos amplitúdóig lehet meghatározni a dinamikai tulajdonságokat.

A nagyamplitúdójú mérések másik problémája a rezgéscsökkentő anyagok természetével kapcsolatos. Ezek egy része viszonylag nagy belső súrlódású polimer, amelyek dinamikai tulajdonságai jelentős mértékben változnak a hőmérséklettel. Egy ilyen polimer tartós rezgetésekor a hővé alakuló rezgési energia melegíti az anyagot, és így a dinamikai tulajdonságok megváltoznak a mérés alatt. A hőfejlődés annál nagyobb, minél nagyobb az amplitúdó és a veszteségi tényező. Következésképpen ez a probléma különösen nagy gondot okozhat a nagy veszteségű rezgéscsillapító polimerek átmeneti tartományában végzett méréseknél. Szerencsére az ilyen anyagok

nemlineáris viselkedése kevésbé érdekes, mivel ezekre – éppen nagy veszteségi tényezőjüknek köszönhetően – a gyakorlatban csak ritkán hatnak nagyamplitúdójú rezgések. Ezzel szemben a viszonylag kis veszteségű rezgésszigetelő anyagok gyakran vannak kitéve nagyamplitúdójú rezgéseknek, ezért ezek nemlineáris viselkedését fontos ismerni. A továbbiakban elsősorban csak az ilyen anyagok vizsgálatával foglalkozunk, amelyeknél viszont a hőfejlődés a kis veszteségi tényezőnek köszönhetően többnyire elhanyagolható.

A nemlineáris tartománybeli méréseket a 11.1. ábrán vázolt szerkezeti elrendezések bármelyikében is végezhetjük. Ezek közül azonban azt az elrendezést célszerű választani, amelyben nagy deformációamplitúdót lehet elérni. Ilyenek a 11.1a–d ábra szerinti elrendezések, amelyeknél további előny, hogy a rugószerű próbatest deformációja homogén lehet, így annak értékét egyszerűen tudjuk számítani. A nemlinearitás a rúdszerű próbatesteken is vizsgálható – elsősorban a rezonanciafrekvencián –, de ez esetben gondot okozhat a deformációs állapot inhomogenitása és a deformációamplitúdó meghatározása.

A vizsgálat lényege itt is az, mint a lineáris tartományban, nevezetesen, hogy a próbatestet ismeretlen paraméterű átviteli rendszernek tekintjük, amely azonban most nemlineáris. A vizsgálat célja az ismeretlen paraméterek, a dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők meghatározása a deformációamplitúdó (vagy a feszültségamplitúdó) függvényében, amelyet a gerjesztő jel nagyságával lehet változtatni. A mérést formálisan ugyanazon módszerekkel végezhetjük, mint a lineáris tartományban, ahol két nagy csoportot különböztettünk meg, a fázis- és a rezonancia- módszereket (11.2.1. pont).

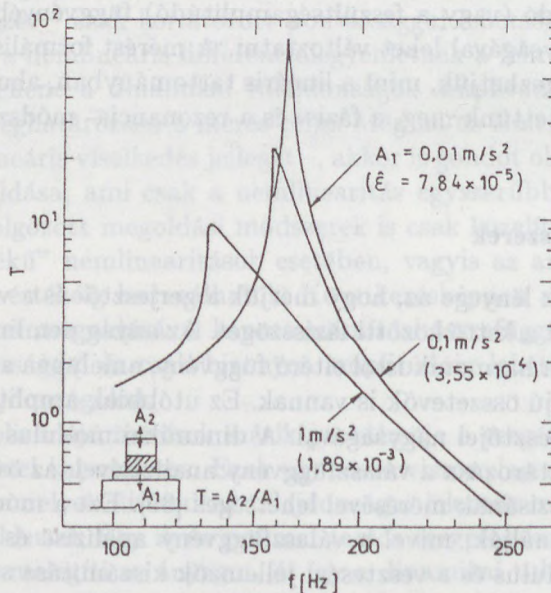
11.3.2. Fázismódszerek

A fázismódszerek lényege az, hogy mérjük a gerjesztő- és a válaszjel amplitúdóját, valamint a kettő közötti fázisszöveget. Az anyag nemlineáris tartományában a válasz a harmonikustól eltérő függvény, amelyben a gerjesztőjeltől eltérő frekvenciájú összetevők is vannak. Ez utóbbiak amplitúdója és fázisa is változik a gerjesztőjel nagyságával. A dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők meghatározása a válaszfüggvény analízisével, az összetevők amplitúdójának és fázisának mérésével lehetséges [39]. Ezt a módszert azonban csak ritkán használják, mivel a válaszfüggvény analízise és ennek alapján a dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők kiszámítása számos elméleti és mérés technikai problémával jár, különösen a kisebb veszteségű anyagoknál. Ehelyett a gyakorlatban az a módszer terjedt el, hogy a válaszfüggvényből kiszűrjük az *alapharmonikust* – a gerjesztőjellel megegyező frekvenciájú összetevőt –, mérik annak amplitúdóját és fázisát, majd a lineáris eset

összefüggéseivel számítják ki a dinamikai modulus és a veszteségi jellemzők értékeit. Ezek az értékek természetesen nem pontosak, de alkalmasak a lineáritás határának és a nemlineáris viselkedés jellegének megállapítására. Mindamellett az így meghatározott dinamikai tulajdonságok hibája gyakorlati szempontból elhanyagolhatóan kicsi lehet addig az amplitúdóig, amíg a nemlinearitás mértéke kicsi.

11.3.3. Rezonancia-módszerek

Rezonancia-módszereken azokat az eljárásokat értjük, amelyeknél a dinamikai tulajdonságokat a rezonanciajellemzők (rezonanciafrekvencia, -nagyítás, -sávszélesség) mérésével határozzák meg. A rezonanciajellemzők értéke a lineáris tartományban nem függ a gerjesztőjel amplitúdójától, és a rezonanciagörbe lényegében szimmetrikus. Ezzel szemben az anyag nemlineáris tartományában a rezonanciagörbe aszimmetrikussá válik és a gerjesztőjel amplitúdójának változtatásával változik az alakja, valamint valamennyi rezonanciajellemző értéke. Ezt szemlélteti a 11.15. ábra, amelyen egy rugószerű közetgyapot próbatesten, a 11.1c ábra szerinti elrendezésben, különböző nagyságú gerjesztőjeleknél feljegyzett rezonanciagörbék láthatók [40].



11.15. ábra. A 11.1c ábra szerinti elrendezésben különböző nagyságú gerjesztőjelekkel feljegyzett rezonanciagörbék rugószerű közetgyapot próbatest esetében ($84,9 \text{ kg/m}^3$, $3,5 \times 3,5 \times 1,25 \text{ cm}^3$) (Pritz [40]).

(Az ábrán A_1 a rázóasztalnak a frekvenciától független gyorsulásamplitúdóját, az $\hat{\varepsilon}$ pedig a próbatestnek a rezonanciafrekvenciához tartozó deformációamplitúdóját jelenti.) A rezonanciafrekvenciának és -nagyításnak a változása a dinamikai tulajdonságok nemlinearitásának következménye; következésképpen az előzők mérésével az utóbbiakat elvileg meg lehet határozni. Általános esetben azonban reménytelen vállalkozás a dinamikai modulus és a veszteségi tényező meghatározása a rezonanciajellemzők mért értékeiből, mivel egyrészt a rezonanciafrekvenciát a dinamikai moduluson kívül a veszteségi tényező és annak nemlinearitása is befolyásolja, másrészt a rezonancianagyítás a veszteségi tényezőtől kívül a rezonanciagörbe elhajlásától, vagyis a dinamikai modulus nemlinearitásától is függ. Az alapvető gond azonban mégis az, hogy a dinamikai tulajdonságok számítási összefüggéseinek levezetéséhez eleve ismerni kellene az anyag nemlineáris viselkedését. Ezeket a problémákat a gyakorlatban egyszerűen megkerülik, ugyancsak oly módon, hogy a dinamikai tulajdonságokat a nemlineáris tartományban is lényegében ugyanúgy határozzák meg, mint a lineárisban. A vizsgálatkor a válaszból kiszűrjük az alapharmonikust, és a rezonanciagörbe maximumának megkeresésével növekvő amplitúdójú gerjesztéseknél mérjük a rezonanciafrekvencia és -nagyítás értékeit, majd a dinamikai tulajdonságokat a lineáris eset összefüggéseivel számítják ki. A módszer nyilvánvalóan alkalmas a linearitás határának megállapítására, és az így meghatározott értékek hibája a nemlineáris viselkedés kezdeti szakaszán gyakorlati szempontból elhanyagolhatóan kicsi lehet. A hiba az amplitúdó növelésével természetesen nő, de belátható, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetében ezek az értékek alkalmasak a nemlinearitás jellegének megállapítására.

A dinamikai modulus meghatározása szempontjából a kis veszteség az alapvető feltétel, ami amúgy is szükséges a rezonancia-módszer alkalmazásához. Ez esetben ugyanis a veszteségi tényező – nemlineáris viselkedésének jellegétől függetlenül – csak elhanyagolható mértékben befolyásolja a rezonanciafrekvenciát, amely a terhelő tömegén kívül a próbatest merevségétől, vagyis az anyag dinamikai modulusától függ. Következésképpen kis veszteségű anyagnál a rezonanciafrekvencia változása valóban csak a dinamikai modulus nemlinearitására jellemző, amit elméletileg igazoltak is [41]. Ebben a munkában a 11.1c ábra szerinti tömeg-rugó rendszer nagyamplitúdójú rezgéseinek vizsgálatával meghatározták a dinamikai tulajdonságok és a rezonanciajellemzők összefüggéseit. A rendszer nemlineáris rezgését leíró differenciálegyenletet – ez formálisan a (11.15)-nek felel meg, de a benne szereplő F_r rugóerő itt nemlineáris függvénye az x rezgéselmozdulásnak – azzal a feltételezéssel oldották meg, hogy a veszteség kicsi, és hogy a dinamikai modulus amplitúdófüggése kismértékű, amely az alábbi hatványfüggvénynek írható le:

$$E_d(\hat{\varepsilon}) = E_{d0}(1 - e\hat{\varepsilon}^n), \quad (11.69)$$

ahol E_{d0} a dinamikai modulus lineáris értéke, e és n anyagállandók, továbbá $e\hat{\varepsilon}^n \ll 1$. A differenciálegyenlet közelítő megoldásával megállapítható, hogy az itteni egyenlőtlenséggel definiált amplitúdókon:

$$f_r^2(\hat{\varepsilon}) \approx f_{r0}^2(1 - g\hat{\varepsilon}^n), \quad (11.70)$$

amelyben f_r a rezonanciagörbe maximumával definiált rezonanciafrekvencia, f_{r0} az utóbbi értéke a lineáris tartományban, továbbá

$$g = \frac{n+2}{2}eJ(n), \quad (11.71)$$

ahol

$$J(n) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} |(\cos \psi)^{n+2}| d\psi, \quad (11.72)$$

és itt ψ egy integrálási változó [41].

Az előzőekben láttuk, hogy a dinamikai modulus a lineáris tartományban a rezonanciafrekvencia négyzetével arányos. A (11.69) és a (11.70) összehasonlításából pedig az látható, hogy a lineáris tartományt követő nagyobb amplitúdókon ugyanolyan típusú függvény írja le a dinamikai modulus és a rezonanciafrekvencia négyzetének változását. Következésképpen, ha a dinamikai modulust a nemlineáris tartományban is egyszerűen a lineáris eset összefüggéseivel számítjuk, akkor az amplitúdófüggés így meghatározott jellege megfelel a valódinak. (Ugyanerre az eredményre jutottak egyébként a rúdszerű próbatest nemlineáris longitudinális rezgésének analízise során is [42].) A (11.71) és a (11.72) összefüggések vizsgálatával igazolható továbbá, hogy a (11.69)-ben és a (11.70)-ben szereplő e , illetve g állandó eltérése gyakorlati szempontból nem jelentős, különösképpen az n kisebb értékeinél. Ebből pedig az következik, hogy a dinamikai modulusnak a lineáris eset összefüggésével számított értékei az $e\hat{\varepsilon}^n \ll 1$ amplitúdókon csak kis hibával térnek el a valódiaktól.

Valamivel bonyolultabb a helyzet a veszteségi tényezőt illetően, amelyet a lineáris tartományban a rezonancianagyítás reciprokával számítunk. A nemlineáris tartományban az így számított értékek azonban csak akkor jellemzők valóban a veszteségi tényezőre, ha a rezonancianagyítást csak elhanyagolható mértékben befolyásolja a rezonanciagörbe elhajlása, ami a dinamikai modulus nemlinearitásának következménye. Ez azokon a kisebb amplitúdókon áll fenn, amelyeken a dinamikai modulus nemlinearitásának

mértéke kicsi, amikor is a fent idézett elméleti vizsgálat [41] szerint:

$$\eta_E(\hat{\varepsilon}) \approx \frac{1}{T_r} \frac{(f_r/f_{r0})^2}{E_d/E_{d0}}, \quad (11.73)$$

amelyben az előbb elmondottak értelmében:

$$\frac{(f_r/f_{r0})^2}{E_d/E_{d0}} \approx 1, \quad (11.74)$$

feltéve, hogy $e\hat{\varepsilon}^n \ll 1$. Az ennél nagyobb amplitúdókon a rezonancianagyítás reciprokával számított értékek csak akkor fogadhatók el közel pontosnak, ha a veszteségi tényező nemlinearitásának mértéke jóval nagyobb, mint a dinamikai modulusé. Ez esetben ugyanis a rezonancianagyítás változását alapvetően a veszteségi tényező nemlinearitása okozza, és a változásban alig játszik szerepet a rezonanciagörbe elhajlása, vagyis a dinamikai modulus nemlinearitása. Ellenkező esetben – ha a dinamikai modulus és a veszteségi tényező nemlinearitása hasonló mértékű – a rezonancianagyítás reciprokával számított veszteségi tényezőt csak tájékoztató jellegűnek lehet tekinteni. A helyzet hasonló a nagyobb veszteségű anyagok vizsgálatakor is, feltéve, hogy a rezonancia helyét még meg lehet állapítani.

Irodalom

1. Scott, J. R., *Physical testing of rubbers*. Maclaren, London, 1965.
2. Mason, W. P. (editor), *Properties of polymers and nonlinear acoustics*. *Physical Acoustics*, Vol.II., Part B, Academic Press, New York, 1965. Chs.7 and 9.
3. Ferry, J. D., *Viscoelastic properties of polymers*. Wiley, New York, 1970.
4. Roszin, G. Sz., *Izmerenie dinamiczeszkij szvojsztv akuszticeszkij materialov*. Sztróizdat, Moszkva, 1972.
5. Schreiber, E., Anderson, O. L. and Soga, N., *Elastic constants and their measurement*. McGraw-Hill, New York, 1973.
6. Perepecsko, I. I., *Akuszticeszkij metodü issledovanija polimerov*. Himija, Moszkva, 1973.
7. Malkin, A. Ja., Aszkadzskij, A. A. i Kovriga, V. V., *Metodü izmerenija mehaniceszkij szvojsztv polimerov*. Himija, Moszkva, 1978.
8. Read, B. E. and Dean, G. E., *The determination of dynamic properties of polymers and composites*. Adam Hilger, Bristol, 1978.
9. Nashif, A. D., Jones, D. I. G. and Henderson, J. P., *Vibration damping*. Wiley, New York, 1985.
10. Pritz T., Viszkoelasztikus tömbök dinamikai merevsége és veszteségi tényezője. *Kép- és Hangtechnika* 32, 129–136 (1986).
11. Wilson, W. J., Evolution and uses of transmitted force measurement. *Proceedings of the Symposium on The Measurement of Dynamic Properties of Elastomers and Elastomeric Mounts*, Detroit, 1973. pp.49–53.

12. Chesneau, C., Cavaille, J. Y. and Laures J. P., Complex modulus measurements over a wide range of frequencies and material characteristics through the confrontation of two instruments. *Proceedings of Damping '89, Florida*, 1989. Vol.II. FAD 1-22.
13. Sattinger, S. S., Direct method for measuring the dynamic shear properties of damping polymers, in: *Sound and vibration damping with polymers*, edited by Corsaro, R. D. and Sperling, L. H. American Chemical Society, Washington, DC, 1990. pp.79-91.
14. Allen, B. R. and Pinson, E. D., Complex stiffness data for three viscoelastic materials by the direct complex stiffness method. *Proceedings of Damping '91, San Diego, California*, 1991. Vol.2. EAE 1-14.
15. BS 903, 1976. *Method of testing vulcanized rubber. Part A24 Measurement of dynamic moduli*.
16. DIN 53 513, 1983. *Prüfung von Kautschuk und Elastomeren; Bestimmung der viskoelastischen Eigenschaften von Elastomeren*.
17. Adkins, R. L., Design considerations and analysis of a complex modulus apparatus. *Experimental Mechanics* **6**, 362-367 (1966).
18. Vascsuk, D. B. i Roszin, G. Sz., Opredelezenie dinamiczeszkih szvojsztv rezintü v diapazone csasztot 100-3000 Hz. *Kaucsuk i rezina* **9**, 31-33 (1969).
19. Mertz, K., Ermittlung dynamischer Eigenschaften weichelastischer Werkstoffe. *Fein-gerätetechnik* **27**, 74-76 (1978).
20. Pritz, T., Transfer function method for investigating the complex modulus of acoustic materials: spring-like specimen. *Journal of Sound and Vibration* **72**, 317-341 (1980).
21. Sim, S. and Kim, K. J., A method to determine the complex modulus and Poisson's ratio of viscoelastic materials for FEM applications. *Journal of Sound and Vibration* **141**, 71-82 (1990).
22. ISO 9052, 1987. *Acoustics-Determination of dynamic stiffness. Part 1: Materials used under floating floors in dwellings*.
23. Jones, D. I. G., Temperature-frequency dependence of dynamic properties of damping materials. *Journal of Sound and Vibration* **33**, 451-470 (1974).
24. Norris, D. M., Jr. and Young, W.-C., Complex modulus measurements by longitudinal vibration testing. *Experimental Mechanics* **10**, 93-96 (1970).
25. Pritz, T., Transfer function method for investigating the complex modulus of acoustic materials: rod-like specimen. *Journal of Sound and Vibration* **81**, 359-376 (1982).
26. Madigosky, W. M. and Lee, G. F., Improved resonance technique for materials characterization. *The Journal of the Acoustical Society of America* **73**, 1374-1377 (1983).
27. Buchanan, J. L., Numerical solution for the dynamic moduli of a viscoelastic bar. *The Journal of the Acoustical Society of America* **81**, 1775-1786 (1987).
28. Kim, K. J. and Ahn, T. K., Sensitivity analysis for estimation of complex modulus of viscoelastic materials by non-resonance method. *Journal of Suond and Vibration* **76**, 543-561 (1994).
29. Pritz, T., Apparent complex Young's modulus of a longitudinally vibrating viscoelastic rod. *Journal of Sound and Vibration* **77**, 93-100 (1981).
30. Pritz, T., Dynamic strain of a longitudinally vibrating viscoelastic rod with an end mass. *Journal of Sound and Vibration* **85**, 151-167 (1982).
31. Snowdon, J. C., *Vibration and shock in damped mechanical systems*. Wiley, New York, 1968. p.304.
32. Pritz, T., Investigation of mechanical impedance of beam vibrating in bending modes. *Proceedings of the 6th Conference on Acoustics, Budapest*, 1976. No.1.9.
33. Oberst, H. and Frankenfeld, K., Über die Dämpfung der Biegeschwingungen dünner Bleche durch fest haftende Beläge. *Acustica (Beihefte)* **2**, 181-194 (1952).
34. Nashif, A. D., New method for determining damping properties of viscoelastic materials. *Shock and Vibration Bulletin* **36**, 37-47 (1967).

35. Ross, D., Ungar, E. E. and Kerwin Jr. E. M., Damping of plate vibrations by means of viscoelastic laminae. *Proceedings of Colloquium on Structural Damping*, ASME, New York, 1959. pp. 49-87.
36. Pritz, T., Analysis of errors in investigating the complex modulus of viscoelastic materials by the coated beam method. *Journal of Sound and Vibration* **60**, 319-334 (1978).
37. Pritz, T., Choice of thickness ratio of a coated beam used for investigating the complex modulus of viscoelastic materials. *Journal of Sound and Vibration* **66**, 155-164 (1979).
38. ASTM Standard E 758, 1983. *Standard method for measuring vibration-damping properties of materials*.
39. Danko, D. M. and Svarovsky, J. E., An application of minicomputers of elastomeric damping coefficients and other properties. *Proceedings of the Symposium on The Measurement of Dynamic Properties of Elastomers and Elastomeric Mounts*, Detroit, 1973. pp. 59-72.
40. Pritz, T., Non-linearity of frame dynamic characteristics of mineral and glass wool materials. *Journal of Sound and Vibration* **136**, 263-274 (1990).
41. Pritz, T., Measurement of the nonlinear dynamic characteristics of vibration isolation materials. *Proceedings of the 12th International Congress on Acoustics*, Toronto, 1986. Vol.II. D5-6.
42. Vaughan, N. D. and Adams, R. D., The longitudinal vibration of cylindrical bars with an amplitude-dependent modulus. *Journal of Sound and Vibration* **80**, 71-80 (1982).

Jelölések

A latin és a görög ábécé valamennyi kis- és nagybetűje sem elegendő a könyvben előforduló mennyiségek jelölésére. Ezért több mennyiség jelölésére is ugyanazt a betűt kellett használnunk, de egy-egy fejezeten belül ezt igyekeztünk elkerülni.

Az időfüggvényeket kisbetűvel jelöltük és mindig feltüntettük a t időváltozót, pl. $\varepsilon(t)$. A komplex mennyiségeket felülvonás jelzi, pl. $\overline{T}$, az abszolút értéket pedig maga a betű, vagyis: $T = |\overline{T}|$. Az amplitúdót nagybetű, vagy a kisbetű-felé rajzolt „tető” jelöli, pl. $\hat{\varepsilon}$. Következésképpen a komplex amplitúdó jelölése nagybetű esetén felülvonás, pl. $\overline{\hat{X}}$, kisbetű esetén pedig felülvonás és tető, pl. $\hat{\overline{\varepsilon}}$.

Latin betűk

Betű	Jelentés	Fejezet*
a	kocka oldala	1.
	együttható az $M_v(\omega)$ függvényben	5.
	négyzet alapú próbatest oldala	11.
$a_0, a_1, \dots, a_m$	állandók a $\sigma - \varepsilon$ differenciálegyenletben	2.
	állandók az $\overline{M}(j\omega)$ függvényben	7.
$a'_0, a'_1, \dots, a'_m$	állandók az $\varepsilon_x - \varepsilon_y$ differenciálegyenletben	2.
A	rezgésyorsulás-amplitúdó	11.
$A(\omega)$	frekvenciafüggvény, (7.49a) egyenlet	7.
A_1, A_2	rezgésyorsulás-amplitúdó a próbatest végeinél	11.
b	hasáb alakú próbatest oldalirányú mérete	1.
	együttható az $M_v(\omega)$ függvényben	7.
	pálcaszerű próbatest szélessége	11.

* A meghatározás, illetve az első előfordulás helye

$b_1, \dots, b_n$	állandók a $\sigma - \varepsilon$ differenciálegyenletben	2.
$b'_1, \dots, b'_n$	állandók az $\varepsilon_x - \varepsilon_y$ differenciálegyenletben	2.
Δb	oldalirányú méretváltozás	1.
B	térfogati rugalmassági modulus	1.
	a bevonat és a fém pálcá dinamikai Young-modulusának hányadosa	11.
$\bar{B}$	komplex térfogati rugalmassági modulus	4.
$B(\omega)$	frekvenciafüggvény, (7.49b) egyenlet	7.
B_d	dinamikai térfogati modulus	4.
B_v	vesztési térfogati modulus	4.
c	$= M_\infty / M_0$	7.
$\bar{c}_l$	a longitudinális hullám komplex terjedési sebessége rúdszerű próbatestben	11.
$C(\omega)$	frekvenciafüggvény, (7.49c) egyenlet	7.
d	henger alakú próbatest átmérője	11.
	a longitudinális hullám csillapítási és fázisállandójának hányadosa	11.
D	disszipációs energia	2.
D	tört-deriválást jelölő operátor	7.
$D(\omega)$	frekvenciafüggvény, (7.49d) egyenlet	7.
e	$= 2.71828 \dots$, a természetes logaritmus alapszáma	3.
e	együttható az $E_d(\hat{\varepsilon})$ függvényben, (11.69) egyenlet	11.
e_f, e_φ	a frekvencia, illetve a fázisszög relatív mérési hibája	11.
$e_{Bf}, e_{\eta\varphi}$	a B , illetve az η számított értékének a frekvencia, illetve a fázisszög mérési hibájából eredő pontatlansága	11.
E	Young-modulus	1.
$\bar{E}$	komplex Young-modulus	4.
E_d	dinamikai Young-modulus	4.
E'_d	a redukált változók módszerével meghatározott E_d	8.
E_{d0}	az amplitúdótól függő dinamikai Young-modulus lineáris határértéke, vagy a nulla amplitúdóra extrapolált értéke	11.
E_f	fém pálcá dinamikai Young-modulusa	11.
E_g	polimer dinamikai Young-modulusa az üvegszerű tartományban	8.
E_m	az $E_v(T)$ maximuma	8.

E_s	a feszültség és a deformáció hányadosával számított statikus Young-modulus	7.
E'_s	a $\sigma - \varepsilon$ görbe merevedségéből számított statikus Young-modulus	9.
E_v	veszteségi Young-modulus	4.
E'_v	a redukált változók módszerével meghatározott E_v	8.
E_0	a dinamikai Young-modulus értéke nulla frekvencián	7.
f	frekvencia Hz-ben	3.
f_a, f_b	a rezonancia-sávszélességet meghatározó, a rezonancia alatti, illetve feletti frekvencia	11.
f_{fp}	fém-pálca p -edik rezonanciafrekvenciája	11.
f_p	a rúd- vagy a pálcaszerű próbatest p -edik rezonanciafrekvenciája	11.
f_r	redukált frekvencia	8.
	tömeg-rugó rendszer rezonanciafrekvenciája	11.
f_{r0}	az amplitúdótól függő rezonanciafrekvencia lineáris határértéke vagy a nulla amplitúdóra extrapolált értéke	11.
f_η	az $\eta_E(\omega)$ maximumának helye	11.
f_0	tömeg-rugó rendszer sajátfrekvenciája	11.
Δf	rezonancia-sávszélesség	11.
F_{ny}	nyíróerő	1.
F_r	a rugószerű próbatestben ébredő erő amplitúdója	11.
F_v	térfogati nyomó- vagy húzóerő	1.
F_x	hosszirányú nyomó- vagy húzóerő	1.
F_1	erőamplitúdó a rugószerű próbatest gerjesztett végénél	11.
F_α	α -ad rendű Mittag-Leffler-függvény	7.
$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$	Fourier-transzformáció és annak inverze	3.
g	együttható az $f_r(\hat{\varepsilon})$ függvényben, (11.70) egyenlet	11.
G	nyírási modulus	1.
$\overline{G}$	komplex nyírási modulus	4.
G_d	dinamikai nyírási modulus	4.
G_v	veszteségi nyírási modulus	4.
h	pálcaszerű próbatest vastagsága	11.
h_a	rétegelt pálcáknál a vizsgálandó anyagréteg vastagsága	11.

h_f	a fém pálcza vastagsága	11.
H	vastagságarány a rétegelt pálcáknál	11.
ΔH	aktivációs energia	8.
i	$= 1, \dots, m, n$, index	7.
I	tehetetlenségi nyomaték	11.
j	$= \sqrt{-1}$, a képzetes egység	3.
$J(n)$	a (11.72) szerinti függvény	11.
$\bar{k}$	a rugószerű próbatest komplex merevsége	11.
	a hajlítási hullám komplex terjedési állandója	11.
k_d	a rugószerű próbatest dinamikai merevsége	11.
k_0	a $\bar{k}$ terjedési állandó veszteség nélküli esetben	11.
$K(H)$	az egy oldalon bevont pálcánál a H vastagságaránytól függő mennyiség,	
	(11.53) egyenlet	11.
l	hasáb vagy henger alakú próbatest magassága	1.
	rúd- és pálcaszerű próbatest hossza	11.
Δl	hosszváltozás	1.
L	longitudinális modulus	1.
$\bar{L}$	komplex longitudinális modulus	4.
$L(H)$	a mindkét oldalon bevont pálcánál a H vastagságaránytól függő mennyiség,	
	(11.61) egyenlet	11.
L_d	dinamikai longitudinális modulus	4.
L_v	vesztési longitudinális modulus	4.
m	indexhatár	2.
	próbatest tömege	11.
$m(t)$	memóriafüggvény	2.
m_f	fém pálcza rezgő hosszának tömege	11.
$m(\hat{\varepsilon})$	a dinamikai modulus nemlineáris viselkedését leíró függvény	10.
$m_n(\hat{\varepsilon})$	az $m(\hat{\varepsilon})$ a dinamikai modulus lineáris értékére normalizálva	10.
$m_r(t)$	relaxációs modulus	2.
M	rugalmassági modulus általában	1.
	abszolút modulus	3.
	terhelő tömeg	11.
$\bar{M}$	a komplex rugalmassági modulus általában	3.
M_d	a dinamikai (valós, vagy tárolási) modulus általában	3.
$M'_d(\omega),$ $M''_d(\omega)$	a kauzalitás vizsgálatához felvett függvények	5.

M_{d0}	az amplitúdótól függő dinamikai modulus lineáris határértéke vagy nulla deformációra extrapolált értéke	10.
M_0	a dinamikai és a komplex modulus értéke nulla frekvencián	3.
M_1	rugómerevség	7.
M_∞	a dinamikai és a komplex modulus nagyfrekvenciás határértéke	5.
δM_d	modulus-defekt	7.
ΔM_d	$= M_\infty - M_0$	5.
M_m	az $M_v(\omega)$ maximuma	5.
M_v	a veszteségi (képzetes vagy imaginárius) modulus általában	3.
$M'_v(\omega),$ $M''_v(\omega)$	a kauzalitás vizsgálatához felvett függvények	5.
M_{v0}	az amplitúdótól függő veszteségi modulus lineáris határértéke vagy nulla amplitúdóra extrapolált értéke	10.
n	indexhatár	2.
$N(H)$	kitevő az $E_d(\hat{\varepsilon})$ függvényben, (11.69) egyenlet	11.
p	szendvics pálcánál a H vastagságaránytól függő mennyiség, (11.64) egyenlet	11.
	kitevő a Mittag-Leffler-függvényben	7.
	kitevő empirikus relaxációs függvényben, (7.85) egyenlet	7.
q	a rezonancia- és a sajátfrekvencia rendszáma rúd- és pálcaszerű próbatesteknél	11.
	kitevő a Kohrausch-függvényben	7.
	kitevő a Davidenkov-féle egyenletben	10.
	a rugószerű próbatest oldalirányú méretétől függő mennyiség, (11.7a,b) egyenletek	11.
Q	rétegelt pálcánál a (11.57) egyenlet szerinti mennyiség	11.
r	a (11.55) egyenlet szerinti mennyiség	11.
R	általános gázállandó	8.
s	a (11.56) egyenlet szerinti mennyiség	11.
S	keresztmetszeti terület	1.
t	idő	2.
Δt	a deformáció késése a feszültséghez képest	3.

Δt_v	az oldalirányú deformáció késése a hosszirányúhoz képest	3.
T	periódusidő	3.
	hőmérséklet	8.
	átvitel	11.
$\bar{T}$	átviteli függvény	11.
T_A	állandó az Arrhenius-egyenletben	8.
T_g	üvegesedési hőmérséklet	8.
T_p	rúdszerű próbatest átvitelének p -edik maximuma (p -edik rezonancianagyítás)	11.
T_r	tömeg-rugó rendszer átvitelének maximuma (rezonancianagyítás)	11.
T_0	referenciahőmérséklet	8.
ΔT	a veszteségi modulus-hőmérséklet görbe félértékisélessége	8.
U	rugalmas (tárolt) energia	3.
$U(x)$	rúdszerű próbatestnél a keresztmetszet hosszirányú rezgélmozdulásának amplitúdója	11.
$v(\hat{\varepsilon})$	a veszteségi modulus nemlineáris viselkedését leíró függvény	10.
$v_n(\hat{\varepsilon})$	a $v(\hat{\varepsilon})$ a veszteségi modulus lineáris értékére normalizálva	10.
V	térfogat	1.
	rezgésebbesség-amplitúdó	11.
V_1, V_2	rezgésebbesség-amplitúdók a próbatest végeinél	11.
ΔV	térfogatváltozás	1.
$w_{Bf}, w'_{Bf},$ $w''_{Bf}, w_{\eta\varphi}$	hibanagyítási tényezők	11.
W	a rugalmas és a disszipációs energia összege	3.
$W(x)$	pálcaszerű próbatestnél a keresztmetszet oldalirányú rezgélmozdulásának amplitúdója	11.
x	koordinátatengely	1.
$x(t)$	rezgélmozdulás-idő függvény	11.
X	rezgélmozdulás-amplitúdó	11.
X_1, X_2	rezgélmozdulás-amplitúdó a próbatest végeinél	11.
y	integrálási változó, (5.4a,b) és (5.17a,b) egyenletek	5.
Δy	nyírási elmozdulás	1.
$\bar{Y}$	a válasz- és a gerjesztőfüggvény komplex hányadosa általában	11.

Görög betűk

α	a $\sigma - \varepsilon$ egyenes hajlásszöge	1.
	a tört-derivált rendje	7.
	kitevő frekvenciafüggvényekben	5.
	kitevő a relaxációs és a kúszási függvényben	7.
	kitevő az α -ad rendű Mittag-Leffler függvényben	7.
	kitevő a Havriliak-Negami egyenletben	7.
	eltolási tényező a redukált változók módszerénél	8.
	állandó a Davidenkov-féle egyenletben	10.
	longitudinális hullám csillapítási állandója	11.
α_i	i -edik tört-derivált rendje	7.
β	kitevő a Havriliak-Negami-egyenletben	7.
	longitudinális hullám fázisállandója	11.
β_i	i -edik tört-derivált rendje	7.
β_0	a β fázisállandó veszteség nélküli esetben	11.
γ	nyírási szög	1.
$\bar{\gamma}$	a longitudinális hullám komplex terjedési állandója	11.
Γ	gamma-függvény	5.
	a statikus $\sigma - \varepsilon$ görbe valamely pontját az origóval összekötő egyenes hajlásszöge	9.
δ	fázisszög a feszültség és a deformáció között	3.
	a komplex modulus fázisszöge (veszteségi szög)	3.
	fázisszög az erő és a rezgéselmozdulás között	11.
$\delta(t)$	Dirac-impulzus	2.
δ_ν	fázisszög a hossz- és az oldalirányú deformáció között	3.
	komplex Poisson-szám fázisszöge (veszteségi szög)	3.
Δ	a statikus $\sigma - \varepsilon$ görbe érintőjének hajlásszöge	9.
ε	a deformáció általában	1.
ε_d	dinamikai deformáció	2.
$\varepsilon_k(t)$	kúszási függvény	2.
ε_{ny}	nyírási deformáció	1.
ε_s	statikus deformáció	2.
ε_v	térfogati deformáció	1.

ε_x	hosszirányú deformáció	1.
ε_{x0}	hosszirányú deformációugrás nagysága	2.
ε_y	oldalirányú deformáció	1.
$\varepsilon_{yk}(t)$	kúszási függvény	2.
$\varepsilon_{ym}(t)$	súlyfüggvény	2.
ε_0	deformációugrás nagysága	2.
	deformáció Dirac-impulzus területe	2.
$\Delta\varepsilon$	deformáció-hiány kúszásnál	7.
ζ_p	longitudinálisan rezgő próbatest p -edik sajátfrekvenciájához tartozó hullámszám	11.
η	a veszteségi tényező általában	3.
η_B	térfogati veszteségi tényező	4.
η_E	a Young-modulus veszteségi tényezője	4.
η'_E	a redukált változók módszerével meghatározott veszteségi tényező	8.
η_G	nyírási veszteségi tényező	4.
η_k	rugószerű próbatest veszteségi tényezője	11.
η_L	longitudinális veszteségi tényező	4.
η_m	az $\eta(\omega)$ maximuma	7.
η_ν	a Poisson-szám veszteségi tényezője	4.
η_∞	a veszteségi tényező nagyfrekvenciás határértéke (általánosított Kelvin-Voigt modell)	7.
Θ	a dinamikai modulust meghatározó egyenes hajlásszöge	3.
κ	a rúgószerű próbatest formatényezője	11.
λ_h	hajlítási hullámhossz	11.
λ_l	longitudinális hullámhossz	11.
μ	viszkozitás	5.
ν	Poisson-szám	1.
$\bar{\nu}$	komplex Poisson-szám	3.
ν_d	dinamikai Poisson-szám	3.
$\nu_k(t)$	$= \varepsilon_{yk}(t)/\varepsilon_{x0}$	2.
ν_m	a $\nu_v(\omega)$ maximuma	5.
$\nu_m(t)$	memóriefüggvény	2.
ν_v	veszteségi Poisson-szám	3.
ν_0	a dinamikai és a komplex Poisson-szám értéke nulla frekvencián	3.
ν_∞	a dinamikai és a komplex Poisson-számnak a nagyfrekvenciás határértéke	5.
$\Delta\nu_d$	$= \nu_0 - \nu_\infty$	5.

ξ_p	hajlítási rezgést végző próbatest p -edik sajátfrekvenciájához tartozó hullámszám	11.
π	$= 3.14159 \dots$	3.
ϱ	sűrűség	8.
ϱ_0	sűrűség a T_0 referencia-hőmérsékleten	8.
σ	a feszültség általában	1.
$\sigma_m(t)$	súlyfüggvény	2.
σ_{ny}	nyírófeszültség	1.
σ_{NR}	nemrugalmas feszültség	3.
$\sigma_r(t)$	relaxációs függvény	2.
$\sigma'_r(t)$	relaxációs függvényben a feszültség változó része	7.
σ_R	rugalmas feszültség	3.
σ_s	statikus feszültség	9.
σ_v	térfogati feszültség	1.
σ_x	hosszirányú feszültség	1.
σ_0	a feszültségugrás nagysága	2.
$\Delta\sigma$	túlfeszültség relaxációnál	7.
$\Delta\sigma_1, \dots, \Delta\sigma_n$	túlfeszültségek több relaxációs idő esetében	7.
$\Delta\sigma(\tau_r)$	relaxációs spektrum	7.
τ	integrálási változó, (2.4), (2.15)–(2.18)	2.
	egyenletek	2.
τ_k	retardációs idő	7.
	időálló kúszási függvényben	7.
τ_r	relaxációs idő	7.
	időálló relaxációs függvényben	7.
	empirikus állandó a Cole–Cole- és Havriliak–Negami-egyenletben	7.
$\tau_{r1}, \dots, \tau_{rn}$	relaxációs idők	7.
τ_0	állandó az Arrhenius-egyenletben	8.
τ_1, τ_2	időálló empirikus relaxációs függvényekben, (7.85), illetve (7.86) egyenlet	7.
φ	a $\bar{T}$ átviteli függvény fázisszöge	11.
φ_y	fázisszög a válasz- és a gerjesztőfüggvény között általában	11.
Φ	az ellipszis hiszterézisgörbe főtengelyének hajlásszöge	3.
ψ	integrálási változó, (11.72) egyenlet	11.
Ψ	az abszolút modulus értékét meghatározó egyenes hajlásszöge	3.
ω	$= 2\pi f$, körfrekvencia R/s-ban	3.
ω_n	normalizált frekvencia	7.

ω_v, ω'_v az $M_v(\omega)$, illetve a $\nu_v(\omega)$ maximumának helye 5.
 $\omega_\eta, \omega'_\eta$ az $\eta(\omega)$, illetve az $\eta_\nu(\omega)$ maximumának helye 5.
 ω_1, ω_2 sávhatár-frekvenciák 5.
 $\Delta\omega$ félértékszélesség 5.

C, Cs

Cole-Cole-egyenlet 119, 124

Cole-Cole-diagram 67, 68

callapítási állomás 193

D 84I bővíthető kénnyelvű 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

terhelési ábrák 148

Tárgymutató

A, Á

alapharmonikus 207

amplitúdó

- , feszültség 29, 163
- , deformáció 29, 163
- , erő 182
- , komplex 31
- , rezgéselmozdulás 179, 182, 185

anelasztikus (nemrugalmas) tulajdonság 14

anizotropia 8

anyag

- , anizotrop 8, 49
- , emlékező rugalmasságú 26
- , gumyszerű 2, 79, 165
- , homogén 8, 48, 52
- , inhomogén 8, 49
- , izotrop 8, 48, 52
- , kis veszteségű 33, 49
- , lépéshangszigetelő 91, 168
- nemrugalmas (anelasztikus) tulajdonsággal 26
- , nem tökéletesen rugalmas 26
- , pórusos 88, 169
- , rezgéscsillapító 1, 86, 135
- , rezgéscsökkentő 2
- , rezgésszigetelő 85, 86, 147, 154, 165
- , szálal 2, 92, 170
- , szilárd 7

–, terhelésre keményedő 148

–, terhelésre lágyuló 148

–, úsztató 155

–, viszkoelasztikus 25

anyagjellemző időfüggvény 21, 28, 43, 60, 126

anyagtörvény a frekvenciatartományban 34

Argand-diagram 67

Arrhenius-összefüggés 138, 142

általánosított frekvenciagörbe 142

átalakító

–, erőmérő 184

–, kapacitív 199

–, mágneses 197–199

–, piezoelektromos 181

átmenet

–, fő 134

–, mellék 134

átmeneti állapot 136

– tartomány 84, 116, 117, 133, 135

átvitel 185

átviteli függvény 33, 42, 61, 72, 185, 193

átviteli függvény módszer 186, 192

B

belső súrlódás 16, 19, 28, 31–33, 67, 97, 111, 160

bitumenek 86,132
Boltzmann-féle szuperpozíciós elv
23

C, CS

Cole-Cole-egyenlet 119, 124
Cole-Cole-diagram 67, 68
csillapítási állandó 193

D

deformáció 7
– amplitúdó 29, 163
–, dinamikai 17, 151
– hiány 108
–, hosszirányú 12, 20–22, 41, 42
–, képlékeny 8
–, nyírási 11, 48
–, oldalirányú 12, 20, 21, 23, 41, 42
–, statikus 16, 151
–, térfogati 10, 48
– típusa 10

deformációkésés 15, 160

deformációs állapot
–, homogén 179, 205
–, inhomogén 179, 196
–, összetett 11

differenciálegyenlet, a feszültség és
a deformáció közötti általános
25, 110, 113

dinamikai longitudinális modulus
47, 50, 51, 75, 76, 79, 81
– merevség, rugószerű próba-
testé 179
– nyírási modulus 47, 50, 51,
75, 76, 79, 80
– Poisson-szám 42, 48–57, 73–
76, 79, 82

– (rugalmassági) modulus 31,
36, 38, 46, 49, 61–63, 154,
163
– térfogati modulus 47, 50, 51,
75, 76, 79, 81
– tulajdonságok 2, 17
– Young-modulus 47, 48, 50,
51, 75, 76, 79, 80

Dirac-impulzus 22, 23, 43

diszperzió 33, 59, 62

diszperziós összefüggések, Kra-
mers-Kronig-féle 62

disszipáció 15

E, É

egységugrás-függvény 18

elasztomer 2, 153

eltolási tényező 140, 142, 145

energia

–, aktivációs 138
–, disszipációs 46, 163
–, rugalmas 31, 39, 163
–, tárolt 39

engedékenységi 9

erő 7

– amplitúdó 182
–, belső 7
–, gerjesztő 198
–, harmonikus 181
–, külső 7
–, nyíró 11
–, nyomó 11, 12
–, rugó 179, 209

F

fázisállandó 193

fázismódszer 177, 207

fázisszög 31, 41, 177, 182, 184, 185,
189

feszültség 7

- amplitúdó 29, 163
- , dinamikai 17, 151
- , hosszirányú 12
- , nemrugalmas 36, 39, 40, 162
- , nyíró 11
- , rugalmas 35, 39, 162
- , statikus 151
- , térfogati 11
- túl 108, 127

feszültség-deformáció diagram 8, 148

- , keményedő 148
- , lágyuló 148

feszültségrelaxáció 19, 20

félértékisélesség 65, 137

„fordított U”-diagram 68

formatényező 180

Fourier-transzformáció 33

- , inverz 34

Fourier-transzformált pár 44

frekvencia 29

frekvenciaanalízis 191, 199

frekvenciatartomány 28

G, GY

gázállandó, általános 138

gerjesztés (terhelés) 21

gerjesztőfüggvény 177

gumi 150, 153, 154, 156

- , Buna N 139
- , butil 85, 166
- , klór-butil 86, 88
- , műkaucsuk alapú 79, 85, 86
- , poliizopren 85
- , rezgéscsillapító 85
- , rezgésszigetelő 85
- , sztirol-butadién 79–82, 85, 167

- , természetes kaucsuk alapú 79, 80, 87, 135, 137

gumiszerű anyag 79

- állapot 134
- (viselkedés) tartomány(a) 84, 134

gyorsulásérzékelő 185

H

hajlítási hullám 197

- hullámhossz 197, 201
- merevség, komplex 202
- rezgés 173, 197

harmonikus függvény 28

határfeltétel 175

határfrekvencia

- , alsó 189, 196
- , felső 181, 189, 196

Havriliak-Negami-egyenlet 125

helygörbe 67

hibanagyítási tényező 188, 204, 205

Hilbert-transzformáció 61, 72

hiszteréziscsillapítás 69

hiszterézisgörbe 15, 16, 36–39, 160–162, 182

- , ellipszis 29, 30, 37, 40
- Davidenkov-féle egyenlete 161

hiszterézismodell 69

hiszterézis-módszer 183

Hooke-törvény 9, 23, 97, 149

- általánosítása 35

hőérzékenység 132

hőmérséklet-frekvencia ekvivalencia elv 138

hullámegyenlet

- , Bernoulli-Euler-féle 199
- , egydimenziós 192, 206

hullámhossz 173
–, hajlítási 197, 201
–, longitudinális 181, 196
hullámszám 195, 200
húzás, minden irányú 10
–, egytengelyű 11

I

időtartomány 17
impedancia-módszer 182
impulzusfüggvény 22
inhomogenitás 8
integrálegyenlet, Boltzmann-
féle 23, 26, 126

K

„kapu”-diagram 68, 145
kauzalitás 70
kisamplitúdójú mérés 173
Kohlrausch-függvény 127
komplex amplitúdó 31
– hajlítási merevség 202
– longitudinális modulus 47
– merevség, rugószerű próba-
testé 179, 182
– nyírási modulus 47, 48
– Poisson-szám 41, 44, 45, 48
– (rugalmassági) modulus 31,
43, 44
– térfogati modulus 47, 48
– terjedési állandó 193, 200
– terjedési sebesség 193
– Young-modulus 47
komplex modulus-frekvencia függ-
vény 33, 59
komplex Poisson-szám-frekvencia
függvény 42, 72
kopolimer 86
kopolimerizáció 86

körfrekvencia 29
kőzetgyapot lemez 93, 149, 150,
153, 154, 156, 170
Kramers-Kronig-féle diszperziós
összefüggések 62
kúszás 19, 26
kúszási függvény 19, 45, 100, 103,
108, 117, 125, 126

L

linearitás határa 164
– mértéke 165
lineáris rendszer 4, 17, 33, 42, 176,
177
lineáris rendszerek elmélete 4, 33,
61
lineáris viszkoelaszticitás alape-
gyenletei 26
– fenomenológiai elmélete 4
longitudinális hullámhossz 181,
196
– rezgés 192
longitudinális modulus 12

M

mechanikai impedancia 182
memóriafüggvény 22–24, 26, 43,
45
merevségi módszer, közvetlen 182
mestergörbe 142
Mittag-Leffer-függvény 117
modell
–, általánosított Kelvin-Voigt-
113
–, általánosított Zener- 119
–, hiszterézis 69
–, Kelvin-Voigt- 98
–, Maxwell- 101
–, mechanikai 96, 97

modell
–, tört-derivált 112, 113
–, viszkoelasztikus 26
–, Zener- 104

modulus
–, abszolút 32, 36, 38
–, dinamikai (rugalmassági) 31, 36, 38, 40, 49, 61–63, 154, 163
–, imaginárius 32
–, képzetes 32
–, komplex (rugalmassági) 31, 43, 44
–, longitudinális 12
–, nyírási 11
–, relaxációs 20, 24, 44
–, rugalmassági 9, 18
–, statikus (rugalmassági) 15, 151, 154, 155
–, tárolási 31
–, térfogati rugalmassági 11
–, valós 31
–, veszteségi 32, 36, 40, 61–63, 163
–, Young- 11, 13

modulus-defekt 106

műanyag, kemény 133, 136

műanyaghab 88, 153, 168

N, NY

nagyamplitúdójú mérés 206

nagyrugalmas állapot 134
– (viselkedés) tartomány(a)
84, 114, 116, 134

nemez 93

nemlinearitás 165, 206

neoprene 87

nemrugalmas tulajdonság 14, 15

Nyquist-diagram 67

nyírási 10

nyírási modulus 11

– szög 11

nyíróerő 11

nyomás

–, egytengelyű 11, 147, 153

–, minden irányú (hidrosztatikus) 10, 153

O

okság elve 59, 60

P

parafa 92, 149, 150, 153, 154, 156, 169

pálca

–, bevont 201

–, egyoldalon bevont 202

–, homogén 197

–, mindkét oldalon szimmetrikusan bevont 203

–, rétegelt 201

–, szendvics 201, 203

periódusidő 29

Poisson-szám 12, 13, 17, 18, 22, 24, 25

polietilén hab 90, 91, 168

polimer 4, 25, 26, 84, 89

–, akril alapú 79, 80–82

–, amorf 2, 79, 86, 132, 142, 143

–, állapotai 133

–, lineáris 134

–, rezgéscsillapító 86, 88, 123, 124, 135, 137, 142

–, térhálós 116, 134

poli (metil-metakrilát) 74

polisztirol 133

– hab 90, 91, 168

poliuretán 86, 89, 132

– hab 149, 150

poli (vinil-acetát) 86

próbatest

- , pálcaszerű 176, 197, 198
- , rúdszerű 176, 192, 194–197, 210
- , rugószerű 175, 179, 185, 187, 189

PVC 133

- hab 91, 124, 125, 154, 168

R

rázóasztal 182, 199

redukált frekvencia 140

- hőmérséklet nomogram 143
- változók módszere 142

referenciahőmérséklet 142

relaxáció 20, 26

- , feszültség 19, 20

relaxációs modulus 20, 24, 44

- függvény 20, 44, 60, 100, 103, 108, 117, 125–127
- idő 103, 108, 127, 138, 153
- maximum 65
- spektrum 127
- frekvencia 65
- tartomány 84

rendszerjellemező függvény 21

retardációs idő 100, 109, 118

rezgés

- , hajlítási 173, 197
- , harmonikus 66, 177
- , húzó-nyomó 173
- , kényszer 177
- , longitudinális (hosszirányú) 192, 210
- , nagyamplitúdójú 206
- , nemlineáris 209, 210
- , nyírási 173
- típusa 173, 175
- , torziós 198

rezgéscsillapítás 186

rezgéscsökkentés, passzív 1

rezgéselmozdulás 182, 185

rezgésgyorsulás 185

rezgése sebesség 185

rezgés szigetelés 1, 86

rezgőrendszer

- , egyszabadságfokú 186, 189
- , több szabadságfokú 177, 178

rezonancia 177, 195, 199

rezonanciafrekvencia 188–190, 195, 200, 208, 210

rezonancia görbe 199, 208, 210

rezonancia-módszer 177, 189, 195, 197, 200, 201, 208

rezonancia nagyítás 190, 191, 195, 208, 210

rezonancia-sávszélesség 191, 195, 196, 208

rugalmas állandók 12, 48

- tulajdonság 9

rugalmasság 9, 31

- , dinamikai 16, 28

- , emlékező 26

- , ideális 14, 17, 29

- , nem tökéletes 26

rugalmassági modulus 9, 18

rugó, ideális 97

rugóerő 179, 209

S, SZ

sajátfrekvencia 188, 195, 200

semleges szál 202, 203

statikus (rugalmassági) modulus 15, 151, 154, 155

súlyfüggvény 22, 23, 43

súrlódás

- , belső 16, 19, 28, 31–33, 67, 97, 111, 160
- , viszkózus 24

súrlódási törvény, Newton-féle 66,
97

szabályos lineáris viszkoelasztikus
test (Zener-modell) 104

szerkezetdinamika 62

szerkezeti csillapítás 69

szerkezeti elrendezés 175, 176

szilárdtest-csillapítás 69

T

tehetetlenségi nyomaték 200

terhelés 7

–, dinamikai 7, 16, 151, 152

–, harmonikus 28

–, statikus 7, 15, 16, 147, 149,
151, 152

terjedési állandó, komplex 193,
200

–, sebesség, komplex 193

termomechanikai görbék 132

térfogati rugalmassági modulus 11

testhang 1

testhanggátlás 1

testhangszigetelés 1

tömeg-rugó rendszer 186, 190, 209

tört-deriválás operátora 113

tört-derivált 111

U, Ü

ugrásfüggvény 18

üvegesedési hőmérséklet 133, 135,
136

üveggyapot lemez 93, 153–156,
170

üvegszerű állapot 133

– (viselkedés) tartomány(a)
84, 133

V, W

válaszfüggvény 17, 177, 207

veszteségi jellemzők 32

–, longitudinális modulus 47

–, maximum 65

–, modulus 32, 36, 40, 61–63,
163

–, nyírási modulus 47, 48, 79,
80

–, Poisson-szám 42, 48, 73, 74

–, szög 32

–, tényezők 32, 36, 38, 40, 163

–, térfogati modulus 47, 48

–, Young-modulus 47

veszteségi tényező 32, 36, 38, 40,
163

–, longitudinális 47, 53, 55–57,
74–76, 79, 81

–, nyírási 47, 53–57, 74–76, 79,
80

–, térfogati 47, 53, 55, 57, 74–
76, 79, 81

–, Poisson-számhoz tartozó 42,
48, 53, 55–57, 73–76, 79, 82

–, rugószerű próbatesté 179

–, Young-modulushoz tartozó
47, 48, 53–55, 57, 74, 76, 79,
80

vég hatás 179

viselkedés

–, dinamikai 15–17

–, diszperzív 59

–, gumiszerű 84

–, ideálisan rugalmas 7

–, kauzális 59

–, kisamplitúdójú 35

–, lineáris 9, 11, 16, 34, 40, 178

–, nagyamplitúdójú 159

–, nagy rugalmas 134

viselkedés

- , nemlineáris 8, 148, 159, 206
- , rugalmas 7, 12
- , statikus rugalmas 15
- , üvegszerű 84
- , viszkoelasztikus 26

viszkoelaszticitás 25

viszkoelasztikus anyag 25

- tulajdonságok 25

- viselkedés 26

viszkózitás 66, 97

viszkózus csillapító 97

- súrlódás 24

WLF-egyenlet 142

Y

Young-modulus 11, 13



A szilárd anyagok dinamikai terhelésekor, rezgésekor tapasztalható jelenségek, illetve tulajdonságok — elsősorban az energiaveszteség, valamint a dinamikai rugalmasság kérdései — régóta foglalkoztatják a kutatókat, de ez napjainknak is intenzíven fejlődő kutatási területe. Ezen kérdések megválaszolása alapvetően fontos az akusztikai alkalmazások úgyszólván bármely területén ahhoz, hogy az anyagi tulajdonságokat szakszerűen számításba lehessen venni.

A szerző a hangfrekvenciás sávban passzív rezgéscsökkentésre: szigetelésre és csillapításra használt anyagok dinamikai rugalmasságával és veszteségi tulajdonságával foglalkozik. Ismerteti a dinamikai tulajdonságok mennyiségi jellemzésének módját, foglalkozik a dinamikai viselkedés modellezésével, és megvizsgálja mindazon fizikai változók hatását, amelyek fontos szerepet játszanak mind az anyagok viselkedésében, mind a rezgéscsökkentési gyakorlatban. A munka a dinamikai tulajdonságok mérési módszereinek ismertetésével zárul.

A könyv elsősorban a zaj- és rezgéscsökkentéssel foglalkozó szakemberekhez szól, de felhasználható az egyetemi oktatásban és tudományos továbbképzésben is. Haszonnal forgathatják továbbá azok is, akik más szilárd anyagok dinamikai viselkedése iránt érdeklődnek.





Olyan

PRITZ TAMÁS • REZGÉS CSÖKTŐ ANYAGOK DOLKAI TULAJDONSÁGAI