

TEVAN GYÖRGY

RELATIVISZTIKUS
ELEKTRODINAMIKA
RÖVIDEN

TYPOTEX

Relativisztikus elektrodinamika röviden

RELATIVISZTIKUS ELEKTRODINAMIKA RÖVIDEN



További információ a kiadó honlapján:
Farkas András: Bővebb a kvantummechanika
6. kiadása, Feynman módszerrel
Bólyai László: Általános relativitáselmélet
Fotó: Zoltán - Farkas András: Fény és gravitáció
Farkas András: Kvantummechanika
Farkas András: A relativitáselmélet alapjai
John D. Jackson: Klasszikus elektrodinamika
Farkas András - Farkas András: Fény és gravitáció
Farkas András - John A. Wheeler: Fény és gravitáció

További olvasnivaló a kiadó kínálatából:

- Patkós András: Bevezetés a kvantumfizikába:
6 előadás Feynman modorában
- Bódizs Dénes: Atommagsugárzások mérés technikái
- Frei Zsolt – Patkós András: Inflációs kozmológia
- Geszti Tamás: Kvantummechanika
- Hraskó Péter: A relativitáselmélet alapjai
- John D. Jackson: Klasszikus elektrodinamika
- Patkós András – Polónyi János: Sugárzás és részecskék
- Edwin F. Taylor – John A. Wheeler: Tér-időfizika

Tevan György

RELATIVISZTIKUS ELEKTRODINAMIKA RÖVIDEN



TYPOTEX



A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

© Tevan György, Typotex, 2013

Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

ISBN 978 963 279 317 7

ISSN 1788-2494

Lektorálta: Dr. Zombory László

Témakör: *fizika*

Kedves Olvasó!

Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!



Újabb kiadványainkról és akcióinkról
a www.typotex.hu és a [facebook.com/typotexkiado](https://www.facebook.com/typotexkiado)
oldalakon értesülhet.

Kiadja a Typotex Elektronikus Kiadó Kft.

Felelős vezető: Votisky Zsuzsa

A kötetet gondozta: Gerner József

Borítóterv: Tóth Norbert

Nyomta és kötötte: László András és Társa Nyomdaipari Bt.

Felelős vezető: László András



Tartalom

Előszó	7
1. Bevezetés	9
2. A téridő-világ	13
3. A Lorentz-transzformáció	19
4. Relativisztikus kinematika és kinetika	23
5. A négyes divergencia	31
6. A négyes áramsűrűség vektora	33
7. Antiszimmetrikus négyes tenzorok	39
8. A Maxwell-egyenletek négydimenziós alakja	45
9. Közégegyenletek	53
10. Energia-impulzus tenzor	59
11. A négyes hatásintegrál	67
12. Példák, alkalmazások	71
A., Relativisztikus egyenletesen gyorsuló mozgás	71
B., Rugalmatlan ütközés	73
C., Egyenesen, egyenletesen mozgó pontszerű töltés elektromágneses tere (vákuumban vagy levegőben)	75
D., Trouton–Noble-kísérlet	78
E., Unipoláris indukálás	80
F., H. A. Wilson kísérlete	83
G., Fizeau kísérlete	84
H., Elektromágneses síkhullám vákuumban (levegőben)	85

I., Töltött részecske gyorsítása	90
J., Töltés mozgása homogén elektrosztatikus térben	92
K., Töltés mozgása homogén mágneses térben	95
L., Mozgó töltés elektromágneses tere; Lienard-Wiechert-potenciálók	97
Irodalomjegyzék	105

Előszó

Bevezetés

Majdnem ötven év telt el azóta, hogy elektrotechnikai tevékenységem és elméleti villamosság-tani ismereteim mellett érdeklődni kezdtem a relativitás-elmélet, különösen a relativisztikus elektrodinamika iránt. Elsősorban Fodor György egyetemi jegyzetét [5], majd Novobátzky Károly egyetemi tankönyvét [8] tanulmányoztam, de más könyveket is. Megtetszett Vladimir Fock könyvében [4] a Lorentz-transzformáció bevezetési módja, és lineáris algebrai ismereteim alapján a négydimenziós tér-idő világ bevezetésére magam számára olyan módszert dolgoztam ki, amely jobban igazodik a mérnöki vektorszámítás írásmódjához, és ezzel a Lorentz-transzformáció és a speciális relativitáselmélet egyes eredményei áttekinthetőbben adódnak.

Öreg nyugdíjasként előszedtem idevonatkozó régi jegyzeteimet, és ismét átgondolva, esetenként újjakkal kiegészítve állítottam össze e rövid könyvet. Először az elméletet ismertetem, majd a szakirodalmak alapján példákat, alkalmazásokat válogattam.

A könyv megértéséhez a klasszikus elektrodinamika ismerete (pl. Simonyi Károly könyvei [10,11,12] és Vágó István könyve [15]), és a mérnököknek tanított vektoranalízis ismerete szükséges.

Itt köszönöm meg Dr. Zombory László professzornak lektori javaslatait, amiket figyelembe vettem. Megköszönöm továbbá a Magyar Tudományos Akadémia anyagi támogatását.

Budapest, 2013. június

Tevan György

1. fejezet

Bevezetés

A relativisztikus elektrodinamika a speciális relativitás elméletének részét képezi. Azzal foglalkozik, hogy milyen kapcsolat van különböző, egymáshoz képest egyenes vonalon, egyenletesen mozgó inerciarendszerekhez tartozó elektromágneses térjellemzők között, inerciarendszeren olyan vonatkoztatási rendszert értve, amelyben a magára hagyott (erőhatás nélküli) testek nyugalomban maradnak, vagy egyenesvonalú, egyenletes mozgást végeznek. A relativitáselmélet szerint **minden inerciarendszerben az ottani elektromágneses térjellemzőkkel érvényesek a Maxwell-egyenletek**, és így ezek megoldásából adódóan az is következik, hogy az elektromágneses hullámok vákuumban minden inerciarendszerben és minden irányban a vákuumbeli fénysebességgel terjednek. A speciális relativitáselméletet számtalan kísérlet támasztja alá. Az elmélet kialakulásának szempontjából döntő volt a Michelson-kísérlet (1881-ben, majd Morleyvel közösen megismételve 1887-ben), amely a fény terjedésének sebességét vákuumban az iránytól és a megfigyelő mozgásállapotától függetlennek találta.

A speciális relativitáselmélet kialakulásának történetével csak nagyon röviden foglalkozunk, a magyar nyelvű szakirodalmak is részletesen tárgyalják ezt. [5], [8], [10], [12], [16]. Az ún. *relativitási elvet*, tehát hogy egyetlen inerciarendszer sincs kitüntetett helyzetben, és ezért a természettörvényeknek mindegyik inerciarendszerben ugyanolyannak kell lenniük, már Galileo Galilei (1564-1642) is felismerte mechanikai vizsgálataiban. A róla elnevezett Galilei-transzformáció két inerciarendszer hely- és időkoordinátái között létesít kapcsolatot, amelyet itt vektoros formában írunk fel:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t; \quad t' = t. \quad (1)$$

Itt \mathbf{r} és t bármely pont helyzetvektora és időpontja a „vesszőtlen”, \mathbf{r}' és t' pedig ugyanannak a pontnak a „vesszős” inerciarendszerben, \mathbf{v} pedig a „vesszős” rendszer (egyenletes) mozgásának sebességvektora a „vesszőtlen” rendszerben. A mechanika mozgásegyenleteinek alakja változatlan, invariáns a Galilei-transzformációval szemben. Ezt pl. egyetlen tömegpont esetén a newtoni mozgástörvény alapján láthatjuk be, amely a vesszőtlen rendszerben: $m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$. Helyettesítve (1)-et és figyelembe véve, hogy a tömegpontok

közi erők csak kölcsönös helyzetüktől függ, és az a transzformációval nem változik, és ezért $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$, így

$$m \frac{d^2(\mathbf{r}' + \mathbf{v}t)}{dt^2} = \mathbf{F}' \text{ vagyis } m \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = m \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt'^2} = \mathbf{F}',$$

tehát a törvény alakja a „vesszős” rendszerben ugyanolyan. Ezt *kovarianciának* nevezik.

A Maxwell-egyenletek viszont nem invariánsak a Galilei-transzformációval szemben. Ugyan Heinrich Hertz (1857-1894) a Galilei-transzformációval szembeni invarianciát feltételezve állította fel a mozgó közegekre érvényesnek vélt egyenleteket. Az elektromágneses teret az ún. „éter” feszültségi állapotának tekintette, amit a mozgó közeg magával visz. A mozgó közegben az egyenleteket úgy módosította, hogy az idő szerinti parciális deriváltakat totálisokkal váltotta fel, és a térjellemzőket az inerciarendszertől *helytelenül* függetlennek tekintette.

A klasszikus elektrodinamikát Hendrick Anton Lorentz (1853-1928) foglalta egységes formába. Elektronelméletével a vákuumra vonatkozó Maxwell-egyenleteket alkalmazta mozgó közegekre, figyelembe véve a részecskéknek a mozgásból származó gerjesztéseit is. Ez a felfogás is feltételez egy nyugalmi inerciarendszert és az abszolút idő fogalmát. Később azonban (1904-es cikkében) olyan, a tér- és időkoordinátákra vonatkozó transzformációt közöl – a ma is Lorentz-transzformációnak nevezett –, amellyel szemben a Maxwell-egyenletek alakja változatlan. Ennek ellenére ragaszkodott az éter, az abszolút nyugalmi rendszer és az abszolút idő fogalmához, és az ezeket vitató kísérleti tényeket igyekezett másként értelmezni.

Julius Henri Poincaré (1854-1912) már 1904-ben kimondta az inerciarendszerek egyenértékűségét, és a Lorentz-transzformáció értelmezéséhez csatlakozva a relativitáselméleti téridő négydimenziós matematikai alakját vezette be és alkalmazta az elektrodinamika összefüggéseire.

Ilyen előzmények után a speciális relativitáselmélet következetes fizikai alakjának megjelenését Albert Einstein (1879-1955) 1905-ös cikkétől [„Zur Elektrodynamik bewegter Körper” – „Mozgó testek elektrodinamikájáról”] számítjuk. Álláspontja az, hogy *éter, abszolút nyugalmi rendszer, abszolút idő, és abszolút egyidejűség nincs. Az inerciarendszerek egyenrangúak, a fény vákuumban mindegyikben, minden irányban ugyanakkora sebességgel terjed és ez a rendszeridők mérésére is felhasználható. A relativitás elve úgy érvényesül, hogy a Maxwell-egyenletek a Lorentz-transzformációval kovariánsak, tehát alakjuk invariáns és ez az elv általános érvényű, ezért a mechanikai törvények korrekcióra szorulnak, mert alakjuk klasszikus formájukban a Galilei-transzformációval szemben invariánsak.*

A számításokat megkönnyítő négydimenziós téridő-világ teljes rendszerét Hermann Minkowski (1864-1919) dolgozta ki 1908-ban.

A relativitáselmélet szokásos tárgyalása a történeti fejlődést követi abban, hogy előbb vezetik be a Lorentz-transzformációt, és azután a négydimenziós Minkowski-teret. Ezt itt megfordítjuk, és a téridő-világot a lineáris algebra segítségével vezetjük be, továbbá a térben a közvetlen vektorkalkulust használjuk, mert így az összefüggések áttekinthetőbben adódnak. Minden fejezetben az SI-mértérendszerrel dolgozunk.

2. fejezet

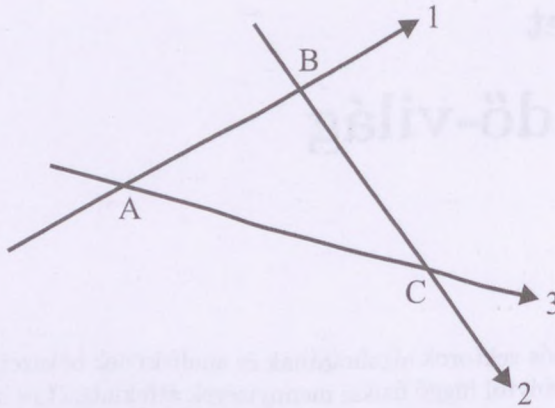
A téridő-világ

A háromdimenziós vektorok algebrájának és analízisének bevezetése nagyban elősegítette az iránytól függő fizikai mennyiségek áttekintését és kezelését, valamint a különböző koordináta-rendszerekbeli komponenseik meghatározását. Mivel a relativitáselmélet szerint nincs abszolút idő, más-más inerciarendszerben az idő is másként „telik”, azért olyan vektorokra van szükség, aminek egyik komponense az idő. Ezeket a vektorokat rendszerint úgy szokták bevezetni, hogy először a linearitás feltételezésével és a Maxwell-egyenletek alakjának változatlanságából, vagy pedig az inerciarendszerek egyenértékűségéből és a fénysebesség vákuumbeli állandóságából levezetik a Lorentz-transzformációt, és aztán vezetnek be egy, az időkoordinátával kiegészített olyan négydimenziós teret, amelyiknek koordináta-transzformációja éppen a Lorentz-transzformáció.

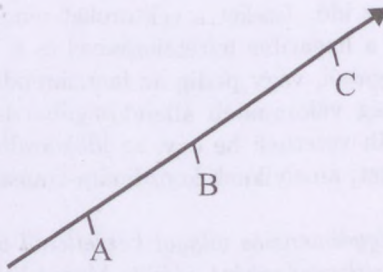
A következőkben a négydimenziós világot közvetlenül vezetjük be, és a Lorentz-transzformáció következményként adódik. Megemlítjük, hogy a speciális relativitáselmélet a háromdimenziós teret *euklideszinek* veszi, és ezt feltételezzük itt is. Elegendő két feltételből kiindulni [4].

- I. *Az egyik inerciarendszerben gyorsulás nélkül mozgó test a másikban is gyorsulás nélkül mozog.*
- II. *Az egyik inerciarendszerben a vákuumban fénysebességgel terjedő hullám a másikban is fénysebességgel terjed.*

Mozogjon egy pont egy inerciarendszerben egyenes vonalon, egyenletesen, akkor az I. szerint minden inerciarendszerben így mozog. A következőkben *a vizsgálat alapeleme* a mozgás egy véges része, amelyet **mozgásszakasznak** fogunk nevezni. A mozgásszakaszt minden inerciarendszerben egy háromdimenziós térbeli vektorral és egy időtartammal jellemezzük, és így jelöljük: (\mathbf{r}, t) , vagy egy másik inerciarendszerben: (\mathbf{r}', t') . (Itt, és a továbbiakban feltételezzük a távolságmérés és időmérés kivitelezhetőségét; az ezzel kapcsolatos nehézségekről és megvalósítási lehetőségekről pl. az [5], [8], [10], [12], [16] szakirodalomban olvashatunk). Az alábbiakban néhány műveletet értelmezzünk a mozgásszakaszokkal.



1. ábra. Mozgásszakaszok összeadásának értelmezése



2. ábra. Mozgásszakaszok számmal szorzásának értelmezése

1. definíció. Egy inerciarendszerben az (\mathbf{r}_1, t_1) és (\mathbf{r}_2, t_2) mozgásszakaszok összegén az $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2, t_1 + t_2)$ mozgásszakaszt értjük. Az 1. ábra az 1. egyenletes mozgás $\overline{AB} = \mathbf{r}_1$ szakaszának és a 2. egyenletes mozgás $\overline{BC} = \mathbf{r}_2$ szakaszának a 3. egyenletes mozgás $\overline{AC} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ szakaszába összegződését mutatja. Ez úgy valósul meg, hogy az 1. és 3. mozgó test az A pontban, az 1. és 2. mozgó test pedig a t_1 (ill. t'_1) idő múlva a B pontban, és a 2. és 3. mozgó test további t_2 (ill. t'_2) idő múlva a C pontban találkozik. Mint-hogy a találkozások ténye objektív, azért ez a definíció, tehát az összeadás az inerciarendszer megválasztásától független. Így tehát a „vesszős” rendszerben az $(\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2, t'_1 + t'_2)$ adatú mozgásszakasz azonos a „vesszőtlenben” az $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2, t_1 + t_2)$ adatúval.

2. definíció. Egy inerciarendszerben (\mathbf{r}, t) -vel jellemzett mozgásszakasz k -szoros $(k$ pozitív valós szám) a $(k\mathbf{r}, kt)$ adatú mozgásszakasz (2. ábra). Az ábrán pl. $k > 1$ esetén pl. $\overline{AB} = \mathbf{r}, t$ befutási idővel, $\overline{AC} = k\mathbf{r}, kt$ befutási idővel, ha pedig $0 < k < 1$, akkor $\overline{AC} = \mathbf{r}$, és befutási ideje t , $\overline{AB} = k\mathbf{r}$

és befutási ideje kt . Az értelmezésből világos, hogy ez a definíció, tehát a **számmal szorzás is rendszerfüggetlen**. A mozgásszakaszok összeadása *kommutatív* művelet, amit az 1. ábra alapján a következőképpen láthatunk be: a 2. mozgást párhuzamosan eltoljuk (euklideszi tér), hogy vonala az A ponton menjen át, az 1. mozgást pedig úgy, hogy a C ponton menjen át. Így az összeadandó mozgásszakaszok felcserélődnek, és az összeg térbeli része $\overline{AC} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$, változatlan marad, az időtagra pedig nyilván $t_2 + t_1 = t_1 + t_2$. Az *asszociativitás* bizonyítása egyszerűbben, párhuzamos eltolás nélkül adódik. Az összeadás a számmal szorzással pedig mindkét tényezőre nézve *disztributív* művelet. Ezt a mozgásszakaszra nézve úgy láthatjuk be, hogy az 1. ábrát *k-szorosára nagyítva (kicsinyítve) képzeljük*, és közben a mozgások sebességét változatlanul hagyjuk, ami az időtartamoknak is a k -val való szorzatát eredményezi. A számszorzóra nézve a disztributivitás pedig a 2. ábra alapján a mozgás egyenletességéből következik. Megemlítjük még, hogy a *mozgásszakaszok tetszőleges helyre párhuzamosan eltolhatók*.

Az összeadás műveletének megfordításával a *kivonás is értelmezhető, de a kisebbítendő csak hosszabb idejű mozgásszakasz lehet*, mert negatív időtartam nincs értelmezve. Ugyanezen okból a számmal szorzás száma sem lehet negatív. Ezeket a kivételeket felszámolandó a mozgásszakaszok fogalmát az **eseményintervallum** fogalmának bevezetésével általánosítjuk. Történjék az A pontban egy esemény és egy másik a B pontban, akkor az eseményintervallum valamely inerciarendszerben: $(\mathbf{r}_{AB}, t_{AB})$ adatú, ahol \mathbf{r}_{AB} az A-ból B-be mutató térvektor e rendszerben, és t_{AB} idővel *később* következik be a B esemény, mint az A esemény, ugyancsak e rendszerben mérve. Ez utóbbi *negatív*, ha a B esemény következik be előbb. A mozgásszakaszokra bevezetett műveletek tulajdonságaikkal együtt a következőképpen vihetők át az eseményintervallumokra. Az összeadás esetében az 1. ábra A, B, C pontjaiban egy-egy esemény következik be. A háromszög oldalainak megfelelő vektorok itt is összegződnek (bármelyik inerciarendszerben), az események közti időkre pedig valamely rendszerben $t_{AB} + t_{BC} = t_{AC}$, (negatív értékre is), mert az *időpontokkal* kifejezve: $(t_B - t_A) + (t_C - t_B) = t_C - t_A$. Az összeadandók felcserélhetősége és a többszörös összeadásnál az összeadandók tetszőleges csoportosíthatósága triviálisan adódik. A számmal szorzás értelmezése eseményintervallumra: a 2. ábra használatával: a k számmal szorzás az adott A és B pontbeli eseményhez olyan C pontot és C-beli eseményt rendel, amelyre $\overline{AC} = k \overline{AB}$, és $t_{AC} = k t_{AB}$; (ha $k < 0$, akkor az ábrán a C pont A-tól balra kerül). A számmal szorzásnak az összeadással kapcsolatos disztributivitása a mozgásszakaszokhoz hasonlóan látható be.

Végeredményben a *mozgásszakaszok és eseményintervallumok halmazára értelmezve van egy kommutatív és asszociatív összeadási, és egy az összeadásal disztributív számmal szorzási művelet, és e műveletek eredményei ugyan-*

abba a halmazba esnek. Ez pedig azt jelenti, hogy a halmaz **lineáris vektortér**. A továbbiakban ezeket a vektorokat *félkövéren és aláhúzással* jelöljük.

Bebizonyítjuk, hogy ez a vektortér **négydimenziós**. Legyenek ugyanis $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ és \mathbf{r}_3 lineárisan függetlenek, tehát nem egysíkúak a háromdimenziós térben, akkor $\underline{\mathbf{R}}_1 : (\mathbf{r}_1, t_1); \underline{\mathbf{R}}_2 : (\mathbf{r}_2, t_2); \underline{\mathbf{R}}_3 : (\mathbf{r}_3, t_3); \underline{\mathbf{R}}_4 : (\mathbf{0}, t_4)$ például *bázist* alkotnak, (tehát lineárisan függetlenek). Ugyanis tetszőleges $\underline{\mathbf{R}} : (\mathbf{r}, t)$ esetén található olyan k_1, k_2, k_3 szám, hogy $\mathbf{r} = k_1 \mathbf{r}_1 + k_2 \mathbf{r}_2 + k_3 \mathbf{r}_3 + k_4 \cdot \mathbf{0}$, és olyan k_4 , hogy $t = k_1 t_1 + k_2 t_2 + k_3 t_3 + k_4 t_4$ legyen, és ezzel: $\underline{\mathbf{R}} = k_1 \underline{\mathbf{R}}_1 + k_2 \underline{\mathbf{R}}_2 + k_3 \underline{\mathbf{R}}_3 + k_4 \underline{\mathbf{R}}_4$, a tetszőleges $\underline{\mathbf{R}}$ vektor a *négy* bázisvektor lineáris kombinációjaként áll elő. Ezeket a vektorokat röviden **négyes vektoroknak** is nevezik.

A fizika mérhető geometriai és fizikai mennyiségekkel foglalkozik, ezért ennek a lineáris vektortérnek *metrikusnak* kell lenni, azaz értelmezni kell a vektorok *abszolút értékét, normáját* és ennek következtében a vektorok skaláris szorzatát. A háromdimenziós euklideszi térben a normanégyszet a pithagoraszi $\mathbf{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2$. A négyes vektorok normanégyszetét, amelynek természetesen rendszerfüggetlennek kell lennie, úgy állapították meg, hogy a II. feltétel teljesüljön. Ennek felel meg a

3. definíció:

$$\underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{R}}^2 = \mathbf{r}^2 - c^2 t^2 = \mathbf{r}'^2 - c^2 t'^2. \quad (2)$$

Itt c a fénysebesség vákuumban. Valóban teljesül a II. feltétel, mert ha $\mathbf{r}^2 - c^2 t^2 = 0$, azaz fényhullám terjedéséről van szó a „vesszőtlen” rendszerben, akkor egyúttal $\mathbf{r}'^2 - c^2 t'^2 = 0$, tehát ugyanaz van a „vesszős” rendszerben, vagy fordítva. (A vektorok skaláris szorzatát ponttal, vagy a nélkül jelöljük.) A valós vektortérben a skaláris szorzatnak *kommutatív*nak, és az összeadással *disztributív*nak kell lennie, ezért fennáll a következő azonosság:

$$\underline{\mathbf{R}}_1 \cdot \underline{\mathbf{R}}_2 \equiv \frac{1}{4} \left[(\underline{\mathbf{R}}_1 + \underline{\mathbf{R}}_2)^2 - (\underline{\mathbf{R}}_1 - \underline{\mathbf{R}}_2)^2 \right].$$

Helyettesítve a (2) összefüggést az első jobb oldallal:

$$\underline{\mathbf{R}}_1 \cdot \underline{\mathbf{R}}_2 = \frac{1}{4} \left[(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)^2 - c^2 (t_1 + t_2)^2 - (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 + c^2 (t_1 - t_2)^2 \right].$$

elvégezve a műveleteket, és odaírva a (2) második jobb oldalából azonos módon nyertet, kapjuk:

$$\underline{\mathbf{R}}_1 \cdot \underline{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 - c^2 t_1 t_2 = \mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2 - c^2 t'_1 t'_2. \quad (3)$$

Ha $\underline{\mathbf{R}}_1 \cdot \underline{\mathbf{R}}_2 = 0$, akkor a négyes vektorok *ortogonálisak*.

A (2) normanégyszetre tekintve megállapítható, hogy az negatív, nulla és pozitív lehet, ezért ez egy **indefinit metrikájú lineáris vektortér**, amit

pszeudoeuklideszinek is neveznek. Ha a ct nagyobb $|\mathbf{r}|$ -nél, akkor a normanégyszet negatív, azt mondják erre az esetre, hogy ekkor a négyes vektor „időszerű”, és ez esetben a norma képzetes szám. Ha $|\mathbf{r}|$ nagyobb ct -nél, akkor a normanégyszet pozitív, a négyes vektort ilyenkor „téryszerű”-nek mondják.

Tekintsük azt a speciális mozgásszakasz négyes vektort, amelynél az adott inerciarendszerben a test $\frac{1(\text{hosszegység})}{c}$ ideig áll. Ezt egy időtengely egységvektorának tekinthetjük, és $\underline{\mathbf{e}}_t$ -vel jelöljük, tehát $\underline{\mathbf{e}}_t: (\mathbf{0}, \frac{1}{c})$. Ennek normanégyszete ugyanis a (2) összefüggés szerint:

$$\underline{\mathbf{e}}_t^2 = \mathbf{0}^2 - c^2 \left(\frac{1}{c}\right)^2 = -1 \quad (4)$$

A tetszőleges $\underline{\mathbf{R}} : (\mathbf{r}, t)$ négyes vektorral való skaláris szorzata a (3) képlet szerint: $\underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_t = \mathbf{r} \cdot \mathbf{0} - c^2 t \frac{1}{c} = -ct$, így tehát az $\underline{\mathbf{e}}_t$ -re ortogonális $\underline{\mathbf{R}} + (\underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_t) \underline{\mathbf{e}}_t$ négyes vektor az adott inerciarendszerben $(\mathbf{r}, t) + (-ct) \cdot (\mathbf{0}, \frac{1}{c}) = (\mathbf{r}, 0)$, tehát azonosítható az \mathbf{r} vektorral, tehát $\underline{\mathbf{R}} + (\underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_t) \underline{\mathbf{e}}_t = \underline{\mathbf{R}} - ct \underline{\mathbf{e}}_t = \mathbf{r}$, és így:

$$\underline{\mathbf{R}} = \mathbf{r} + ct \underline{\mathbf{e}}_t. \quad (5)$$

Hasonlóan a „vesszős” rendszerben $\frac{1(\text{hosszegység})}{c}$ ideig álló test mozgásszakasz négyes vektorát, azaz a vesszős rendszer időtengelyének egységvektorát $\underline{\mathbf{e}}'_t$ -vel jelölve a következők állnak fenn:

$$\underline{\mathbf{e}}'_t{}^2 = -1; \quad \underline{\mathbf{R}} = \mathbf{r}' + ct' \underline{\mathbf{e}}'_t. \quad (6)$$

Az $\underline{\mathbf{e}}_t$ és $\underline{\mathbf{e}}'_t$ vektorok normái az (5) és (6) képletek alapján $\sqrt{-1} = j$, tehát a *képzetes egység*. A szokásos négydimenziós Minkowski-térnél a képzetes egységet az időhöz és egyes fizikai mennyiségekhez kapcsolják tényezőként. Itt ez az $\underline{\mathbf{e}}_t$ és $\underline{\mathbf{e}}'_t$ bevezetésével intéződik el.

3. fejezet

A Lorentz-transzformáció

Mozogjon a „vesszős” rendszer a „vesszőtlen”-hez képest \mathbf{v} , a „vesszőtlen” a „vesszős”-höz képest $-\mathbf{v}$ sebességgel! A „vesszős” rendszerben t'_1 ideig *nyugalomban* lévő pont a „vesszőtlen”-ben \mathbf{v} sebességgel mozog t_1 ideig. Ennek a mozgásszakasznak négyes vektora mindkét rendszerben kifejezve az (5) és (6) képlet szerint:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{v} t_1 + c t_1 \mathbf{e}_t = c t'_1 \mathbf{e}'_t \quad (7)$$

A t'_1 az ún. *nyugalmi rendszerben* mérhető sajátidő. Ha a „vesszőtlen” rendszer a nyugalmi, és a sajátidő t_2 , akkor a pont a „vesszős” rendszerben $-\mathbf{v}$ sebességgel mozog t'_2 ideig, és a mozgásszakasz négyes vektora:

$$\mathbf{R}_2 = c t_2 \mathbf{e}_t = -\mathbf{v}' t'_2 + c t'_2 \mathbf{e}'_t. \quad (8)$$

A (2) és (3) képlet figyelembevételével

$$\mathbf{R}_1^2 = (\mathbf{v}^2 - c^2) t_1^2 = -c^2 t_1'^2; \quad \mathbf{R}_2^2 = -c^2 t_2^2 = (\mathbf{v}'^2 - c^2) t_2'^2;$$

$$\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2 = -c^2 t_1 t_2 = -c^2 t_1' t_2'.$$

Ezekből:

$$\frac{\mathbf{R}_1^2 \mathbf{R}_2^2}{(\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2)^2} = \frac{c^2 - \mathbf{v}^2}{c^2} = \frac{c^2 - \mathbf{v}'^2}{c^2};$$

tehát $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}'^2 = v^2$, a két rendszer egymáshoz képest egyforma v abszolút értékű sebességgel mozog. Továbbá \mathbf{R}_1^2 és \mathbf{R}_2^2 kétféle felírásából kapjuk, hogy

$$\frac{c^2 - v^2}{c^2} = \frac{t_1'^2}{t_1^2}; \quad \text{és} \quad \frac{c^2 - v^2}{c^2} = \frac{t_2^2}{t_2'^2}.$$

Bevezetve még a következő jelölést,

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (9)$$

az előző összefüggésekből a

$$t_1 = \kappa t_1' \quad \text{és} \quad t_2' = \kappa t_2 \quad (10)$$

képleteket nyerjük. Minthogy az előzők szerint t'_1 és t_2 egyaránt *sajátidők*, és $\kappa > 1$, azért a (10) egyenletek azt fejezik ki, hogy *a másik inerciarendszerben mért időtartam a sajátidőtartam hányszorosára nő meg*. Ez az ún. *idődilatáció*. Ezeknek figyelembevételével a (7) képletet t'_1 -vel, a (8)-at t_2 -vel osztva kapjuk: $\kappa \mathbf{v} + c \kappa \underline{\mathbf{e}}_t = c \underline{\mathbf{e}}'_t$ és $-\kappa \mathbf{v}' + c \kappa \underline{\mathbf{e}}'_t = c \underline{\mathbf{e}}_t$. Ezekből az alábbi négy összefüggést nyerjük:

$$\underline{\mathbf{e}}'_t = \kappa \left(\frac{\mathbf{v}}{c} + \underline{\mathbf{e}}_t \right) \quad (11a)$$

$$\underline{\mathbf{e}}_t = \kappa \left(-\frac{\mathbf{v}'}{c} + \underline{\mathbf{e}}'_t \right) \quad (11b)$$

$$\mathbf{v}' = \kappa \left(\mathbf{v} + \frac{v^2}{c} \underline{\mathbf{e}}_t \right) \quad (11c)$$

$$\mathbf{v} = \kappa \left(\mathbf{v}' - \frac{v'^2}{c} \underline{\mathbf{e}}'_t \right) \quad (11d)$$

[A (11c) és (11d) képlet a fenti két egyenlőségből $\underline{\mathbf{e}}'_t$ ill. $\underline{\mathbf{e}}_t$ kiküszöbölésével és a (9) képlet felhasználásával készült].

E képletek azt mutatják, hogy a \mathbf{v} , $\underline{\mathbf{e}}_t$, \mathbf{v}' , és $\underline{\mathbf{e}}'_t$ vektorok egyetlen kétdimenziós síkban vannak a négydimenziós tér-időben. Ezek közül \mathbf{v} és \mathbf{v}' a háromdimenziós térben vannak. Továbbá \mathbf{v} és $\underline{\mathbf{e}}_t$ az egyik inerciarendszerhez, \mathbf{v}' és $\underline{\mathbf{e}}'_t$ a másikhoz tartozik. E síkra négydimenziósan merőleges (ortogonális) sík, tehát amelyben minden vektor skaláris szorzata az előbbi sík minden vektorával nulla, a \mathbf{v} és \mathbf{v}' vektorokra háromdimenziósan is merőleges. Tehát *minden a mozgás irányára* (háromdimenziósan) *merőleges sík a két inerciarendszer közös síkja* [A \mathbf{v} -nek \mathbf{v}' -vel való skaláris szorzata (11c) szerint κv^2 , tehát egységvektoraik skaláris szorzata, vagyis közbezárt szögük koszinusza, $\cos \alpha = \kappa > 1$; így szögük *képzetes*; hasonlóan az $\underline{\mathbf{e}}_t$ és $\underline{\mathbf{e}}'_t$ egységvektorok skaláris szorzata (11a) szerint $-\kappa < -1$, tehát közbezárt szögük *komplex*. Ezek azért érdektelenek, mert ezeket a skaláris szorzatokat a következőkben nem használjuk.]

A Lorentz-transzformáció az *egy és ugyanannak az \mathbf{R}* négydimenziós tér-idő vektornak két különböző inerciarendszerbeli adatai közötti kapcsolatot fejezi ki. Az (5) és (6) kifejezések alapján:

$$\mathbf{r} + c t \underline{\mathbf{e}}_t = \mathbf{r}' + c t' \underline{\mathbf{e}}'_t.$$

Bontsuk fel \mathbf{r} -et \mathbf{v} -irányú és \mathbf{v} -re merőleges, \mathbf{r}' -t pedig \mathbf{v}' -irányú, és \mathbf{v}' -re merőleges vektorkomponensre (a háromdimenziós térben):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\perp + r_\parallel \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}'_\perp + r'_\parallel \frac{\mathbf{v}'}{v'} \quad (12)$$

Behelyettesítve ezeket az előző összefüggésbe:

$$\mathbf{r}_\perp + r_\parallel \frac{\mathbf{v}}{v} + ct \mathbf{e}_t = \mathbf{r}'_\perp + r'_\parallel \frac{\mathbf{v}'}{v} + ct' \mathbf{e}'_t.$$

A (11d) és (11b) helyettesítésével kapjuk:

$$\mathbf{r}_\perp + r_\parallel \frac{\kappa}{v} \left(\mathbf{v}' - \frac{v^2}{c} \mathbf{e}'_t \right) + ct\kappa \left(-\frac{\mathbf{v}'}{c} + \mathbf{e}'_t \right) = \mathbf{r}'_\perp + r'_\parallel \frac{\mathbf{v}'}{v} + ct' \mathbf{e}'_t.$$

A \mathbf{v}' -re és \mathbf{e}'_t -re merőleges sík a két rendszer közös síkja, továbbá egyenlővé téve e vektorok együtthatóit, a **Lorentz-transzformáció** képleteihez jutunk:

$$\mathbf{r}'_\perp = \mathbf{r}_\perp \quad (13a)$$

$$r'_\parallel = \kappa (r_\parallel - vt) \quad (13b)$$

$$t' = \kappa \left(t - \frac{1}{c^2} r_\parallel v \right) \quad (13c)$$

Ha $v \ll c$, akkor a (10) szerint $\kappa \cong 1$, és a (11a) és (11b) összevetésével $\mathbf{v}' \cong \mathbf{v}$, a (13a) és (13b) alapján tehát $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_\perp + r'_\parallel \frac{\mathbf{v}'}{v} = \mathbf{r}_\perp + r_\parallel + (vt) \frac{\mathbf{v}}{v} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$, a (13c)-ből pedig $t' \cong t$ adódik. Így *kis sebességeknél az (1) Galilei-transzformációt kapjuk*. A fordított transzformációt a vesszős és vesszőtlen jelölések cseréjével és $v \rightarrow -v'$ átírással nyerjük:

$$\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r}'_\perp \quad (14a)$$

$$r_\parallel = \kappa (r'_\parallel + vt') \quad (14b)$$

$$t = \kappa \left(t' + \frac{1}{c^2} r'_\parallel v \right) \quad (14c)$$

Mintegy egy inerciarendszerhez képest egyenes vonalon egyenletesen mozgó bármely testhez rögzíthetünk inerciarendszert, a (9) képlet szerinti κ valós volta kapcsán **csak olyan mozgás létezhet, amelyiknek sebessége nem nagyobb a vákuumbeli fénysebességnél**. Ennek következtében a mozgásszakaszokhoz tartozó $\mathbf{R} = \mathbf{v} + ct \mathbf{e}_t$ négyes vektor „időszerű”, mert normánégyszete (2) szerint negatív vagy 0.

A relativitás elve szerint a természetben egyik inerciarendszer sincsen kitüntetve, ezért a *fizikai törvényeknek minden inerciarendszerben ugyanolyan alakúnak, kovariánsnak kell lenniük*, az azokat kifejező egyenletek alakja a rendszertől független. A törvényeknek háromdimenziós, közvetlen írásmódú vektoregyenletekkel való leírása csupán azt biztosítja, hogy a (derékszögű) koordináta-rendszer eltolása és elforgatása esetén ugyanolyan alakú

egyenleteket kapunk. (A konkrét számításokat mindig valamely koordináta-rendszerben végezzük.) Ámde a relativitás elmélete szerint a törvények alakjának a Lorentz-transzformációval szemben kell invariánsnak lenni. Mint-hogy a Lorentz-transzformáció a bevezetett téridő-világ következményeként is felfogható, azért a törvényeknek közvetlen írásmódú, de a téridő-világ négydimenziós vektoregyenleteivel való leírása biztosítja nemcsak a háromdimenziós koordináta-rendszer eltolásával és elforgatásával, hanem az inerciarendszereknek egymáshoz képesti egyenesvonalú, egyenletes mozgásával szembeni kovarianciáját.

4. fejezet

Relativisztikus kinematika és kinetika

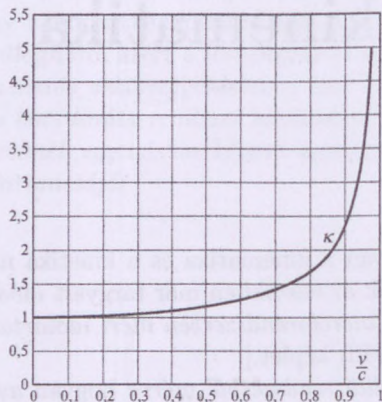
Az elektrodinamika kifejtéséhez szükség van a kinematika és a kinetika néhány tételére. Tulajdonképpen ide tartozik az előzőkben már tárgyalt *idődilatació*, ami azt mondja ki, hogy *a másik inerciarendszerben mért időtartam a sajátidőtartam hányszorosára nő meg*, [(10) képlet.]

A továbbiakban azt tárgyaljuk, hogy *álló rendszerből mérve* hogyan módosul egy test sebesség irányú hosszúsága a nyugalmi hosszhoz képest. A mérésnél itt az a probléma, hogy hogyan lehet a mozgó test elejének és végének a helyzetét *egyidejűleg* megállapítani. Ennek megoldása céljából a következő gondolati kísérletet végezzük. Egyenes vonalban, egyenletesen mozgó járműre a haladási irányba *mérőrúdat* helyezünk úgy, hogy kívülről látható legyen A haladási út mellett sűrűn elhelyezett álló megfigyelők (vagy eszközök) egymáshoz szinkronizált óráikkal mérik az időt. Mindegyik megfigyelő feljegyzi a mérőrúd eleje és vége szembeérkezésének időpontját. A *mozgási hossz* annak a két megfigyelőnek a helyzetkülönbsége, akiknek egyikénél a rúdvégi időpont megegyezik a másiknál a rúdelejeivel. Ezt a helyzetkülönbséget utólag akár ugyanazzal a mérőrúddal mérhetjük meg. Legyen a mozgó inerciarendszer a K' , az álló megfigyelőké a K , akkor a Lorentz-transzformáció (13b) képletéből különbségképzéssel adódó $\Delta r'_{\parallel} = \kappa (\Delta r_{\parallel} - v \Delta t)$ -ból az említett egyező időpontok miatt $\Delta t = 0$, ezért azt kapjuk, hogy az álló megfigyelők által mért hosszúság: $\Delta r_{\parallel} = \frac{\Delta r'_{\parallel}}{\kappa}$. Ezt a sebességirányú hosszúsággrövidülést *távolság-kontrakciónak* nevezik. (Lorentz és követői ezt a kontrakciót anyagi jellegűnek tekintették, és ezzel magyarázták pl. a Michelson-kísérlet negatív eredményét.)

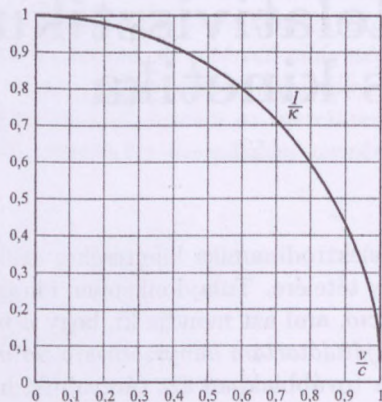
A Lorentz-transzformáció (13a) képletéből látszik, hogy *a sebességre merőleges irányban nincs kontrakció*. Ezért a *térfogat-kontrakció ugyanolyan mértékű, mint a sebességirányú távolság-kontrakció*. Összefoglaljuk azt, hogy egy másik inerciarendszerben hogyan változnak a paraméterek a saját, nyugalmi inerciarendszerbeli értékekhez képest, ez utóbbiakat 0 indexszel jelölve:

$$\frac{t}{t_0} = \kappa; \quad \frac{l_{\parallel}}{(l_{\parallel})_0} = \frac{1}{\kappa}; \quad \frac{V}{V_0} = \frac{1}{\kappa}. \quad (15)$$

A dilatáció mértékét a 3. ábra, a kontrakció mértékét a 4. ábra mutatja $\frac{v}{c}$ függvényében.



3. ábra. Az idődilatáció mértéke a sebesség függvényében



4. ábra. A sebességirányú távolságkontrakció mértéke a sebesség függvényében

A *relativisztikus sebességösszetevés* törvénye levezetésének megállapítása céljából a K rendszerhez képest \mathbf{v} sebességgel mozgó K' rendszerben mozogjon egy pont K' -höz képest \mathbf{u}' sebességgel. Keressük a pont \mathbf{w} sebességét a K rendszerben. Felírjuk a t ill. t' ideig tartó mozgásszakasz négyes vektorát mindkét rendszerben. A kétféle felírásnak egyenlőnek lenni, tehát:

$$\mathbf{w}t + ct \mathbf{e}_t = \mathbf{u}'t' + ct' \mathbf{e}'_t, \quad (*)$$

Beszorozzuk skalárisan ezt az egyenletet a (11b) egyenlettel, azaz $\mathbf{e}_t = \kappa(-\frac{v}{c} + \mathbf{e}'_t)$ -vel. [Bal oldalt a bal oldallal, jobb oldalt a jobb oldallal, figyelemmel a merőlegességekre és a (4) és (6) képletre], kapjuk:

$$-ct = \kappa \left(-u'_{\parallel} \frac{v}{c} t' - ct' \right), \text{ és ebből } \frac{t'}{t} = \frac{1}{\kappa \left(1 + \frac{u'_{\parallel} v}{c^2} \right)}. \quad (**)$$

A (*) egyenletet a (11d) egyenlettel, azaz $\mathbf{v} = \kappa \left(\mathbf{v}' - \frac{v^2}{c} \mathbf{e}'_t \right)$ -vel szorozva skalárisan az előbbihez hasonló módon: $w_{\parallel} v t = \kappa \left(u'_{\parallel} v t' + v^2 t' \right)$; innen $w_{\parallel} = \kappa \frac{t'}{t} (u'_{\parallel} + v)$; vagy felhasználva a (**) összefüggést,

$$w_{\parallel} = \frac{u'_{\parallel} + v}{1 + \frac{u'_{\parallel} v}{c^2}}, \quad (15a)$$

továbbá képezve a (*) egyenletnek a (11) vektorokra merőleges vetületét, és itt is használva a (***) képletet:

$$\mathbf{w}_\perp = \frac{\mathbf{u}'_\perp}{\kappa \left(1 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'}{c^2}\right)}. \quad (15b)$$

Látható – részben a (9) képletből –, hogy c -hez képest kicsiny sebességeknél $w_\parallel \cong u'_\parallel + v$, $\mathbf{w}_\perp \cong \mathbf{u}'_\perp$, tehát a sebességek vektorosan, a klasszikus módon adódnak össze. Ha pedig $u'_\parallel = c$, és $\mathbf{u}'_\perp = \mathbf{0}$, akkor $w_\parallel = c$, és $\mathbf{w}_\perp = \mathbf{0}$, tehát teljesül, hogy a fénysebesség állandó marad. Ha általánosabban, $|\mathbf{u}'| = c$, akkor a némi számolással kapható következő formulából látható be, hogy teljesül a fénysebesség állandósága:

$$1 - \frac{w^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'}{c^2}\right)^2}, \text{ ahol } w^2 = w_\parallel^2 + w_\perp^2, \text{ és } u'^2 = u'_\parallel^2 + u'_\perp^2 \quad (16)$$

A négyes sebességvektort a négyes mozgásszakasz vektorból és egy invariáns időtartamból, mégpedig a τ -val jelölt sajátidőből határozták meg. A mozgásszakasz vektora a K' nyugalmi rendszerben: $\underline{\mathbf{R}} = \mathbf{0} + c \tau \underline{\mathbf{e}}'_t = c \tau \underline{\mathbf{e}}'_t$, tehát a négyes sebesség, figyelembe véve a (11a) képletet is:

$$\underline{\mathbf{u}} = \frac{\underline{\mathbf{R}}}{\tau} = c \underline{\mathbf{e}}'_t = \kappa (\mathbf{v} + c \mathbf{e}_t). \quad (17)$$

A négyes sebesség abszolút értékének négyzete, tehát normanégyzete a K' rendszerben számolva a (2) és (6) felhasználásával:

$$\underline{\mathbf{u}}^2 = -c^2, \quad (18)$$

és a K rendszerben számolva, a (9) képletet is használva: $\underline{\mathbf{u}}^2 = \kappa^2 (v^2 - c^2) = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} (v^2 - c^2) = -c^2$, az előbbivel természetesen egyezően. A négyes sebesség tehát időszerű.

A négyes gyorsulás meghatározásánál az a probléma merül fel, hogy olyan rendszer, amelyben a magára hagyott test gyorsulva mozog, nem inerciális. Mozogjon egy pontszerű test az adott K inerciarendszerhez képest gyorsulással. A testhez rögzített nyugalmi rendszer tehát nem inerciális, de a test minden helyzetében felvehetünk oly K' inerciarendszert, amelyben a test (háromdimenziós) sebessége éppen 0. A „vesszős” rendszer tehát csak „kicsinyben”, differenciálisan inerciális. Tehát csak differenciális négyes mozgásszakasz vektorokról beszélhetünk: $d\underline{\mathbf{R}} = d\mathbf{r} + c dt \underline{\mathbf{e}}_t = c d\tau \underline{\mathbf{e}}'_t$, ahol $d\tau$ a sajátidő differenciálja. A négyes sebesség most, figyelembe véve, hogy $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$, $\underline{\mathbf{u}} = \frac{d\underline{\mathbf{R}}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} (\mathbf{v} + c \underline{\mathbf{e}}_t) = c \underline{\mathbf{e}}'_t$, egyezésben a (17) képlettel, mert a (11a) miatt a differenciális időkre is fennáll az idődilataációs kapcsolat:

$$\frac{dt}{d\tau} = \kappa. \quad (19)$$

Az előzőknek megfelelően a *négyes gyorsulást* is a sajátidővel számoljuk:

$$\underline{\mathbf{a}} = \frac{d\underline{\mathbf{u}}}{d\tau}. \quad (20)$$

A (20) és (18) felhasználásával

$$\underline{\mathbf{u}} \underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{u}} \frac{d\underline{\mathbf{u}}}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\underline{\mathbf{u}}^2) = 0, \quad (21)$$

tehát a *négyes gyorsulás és a négyes sebességvektor mindig ortogonálisak*. Minthogy a (17) szerint a K^1 rendszerben a négyes sebességnek csak időtagja van, ugyanitt a négyes gyorsulásnak az időtagja az ortogonalitás miatt 0, így négyzete pozitív, a *négyes gyorsulás „téryszerű”*.

A négyes gyorsulásnak a K inerciarendszerbeli alakját a (17), (19) és (20) képletek alapján kapjuk:

$$\underline{\mathbf{a}} = \frac{d}{d\tau} [\kappa (\mathbf{v} + c \underline{\mathbf{e}}_t)] = \frac{d}{dt} [\kappa (\mathbf{v} + c \underline{\mathbf{e}}_t)] \frac{dt}{d\tau} = \kappa \frac{d}{dt} (\kappa \mathbf{v}) + \kappa^2 c \frac{d\underline{\mathbf{e}}_t}{dt} + c \kappa \frac{d\kappa}{dt} \underline{\mathbf{e}}_t$$

Minthogy a „vesszőtlen” K rendszer nagyban is inerciális, azért $\underline{\mathbf{e}}_t$ állandó, tehát $\frac{d\underline{\mathbf{e}}_t}{dt} = \mathbf{0}$; továbbá a hármas gyorsulás, $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ helyettesítésével: $\underline{\mathbf{a}} = \kappa^2 \mathbf{a} + \kappa \frac{d\kappa}{dt} (\mathbf{v} + c \underline{\mathbf{e}}_t)$. A (9) képlet felhasználásával

$$\kappa \frac{d\kappa}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\kappa^2)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^2} \frac{1}{c^2} \cdot 2\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\kappa^4}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}),$$

tehát

$$\underline{\mathbf{a}} = \kappa^2 \mathbf{a} + \frac{\kappa^4}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{v} + \frac{\kappa^4}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \underline{\mathbf{e}}_t; \quad \underline{\mathbf{a}}_0 \equiv (\underline{\mathbf{a}})_{v=0} = \mathbf{a}_0; \quad (22)$$

A (22) második képlete azt fejezi ki, hogy a *négyes gyorsulás nyugalmi értéke a hármas gyorsulás nyugalmi értékével egyezik*. Ha a hármas gyorsulás vektorát a sebességre merőleges és sebesség irányú komponensre bontjuk, tehát $\mathbf{a} = \mathbf{a}_\perp + a_\parallel \mathbf{v}^0$, ahol \mathbf{v}^0 a sebességvektor egységvektora, akkor a (22) első összefüggése így alakul, figyelembe véve azt is, hogy a (9) alapján $\kappa^2 + \kappa^4 \frac{v^2}{c^2} = \kappa^4$:

$$\underline{\mathbf{a}} = \kappa^2 \mathbf{a}_\perp + \kappa^4 a_\parallel \left(\mathbf{v}^0 + \frac{v}{c} \underline{\mathbf{e}}_t \right) = \kappa^2 \mathbf{a}_\perp + \kappa^3 a_\parallel \mathbf{v}'^0, \quad (23a)$$

ahol a második jobb oldalt a (11c) képlet alapján írtuk fel. Ez pedig a négyes gyorsulás a nyugalmi, vesszős rendszerben felírva, mert a \mathbf{v} -re merőleges \mathbf{a}_\perp \mathbf{v}^1 -re is merőleges, és a nyugalmi rendszerben a négyes gyorsulásnak nincs „időtagja”. Tehát a *hármas gyorsulás komponensei a nyugalmi rendszerben:*

$$\mathbf{a}'_\perp = \kappa^2 \mathbf{a}_\perp, \quad \mathbf{a}'_\parallel = \kappa^3 a_\parallel. \quad (23b)$$

Newton mozgástörvénye relativisztikus alakjának meghatározása céljából abból indulunk ki, hogy e törvény a tapasztalat szerint kis sebességeknél jó közelítés, tehát a nyugalmi rendszerben pontosan érvényes. Ha m_0 a nyugalmi tömeg, \mathbf{a}_0 a nyugalmi hármass gyorsulás és V_0 a nyugalmi térfogat, amire az erő hat, akkor a *nyugalmi erősűrűség hármass vektora*: $\mathbf{f}_0 = \frac{m_0}{V_0} \mathbf{a}_0$. Továbbá meg kell említenünk, hogy az egy pontba koncentrált erő fogalma ugyan hasznos absztrakció, de térleméletesen szingularitás, mert az erő, mint testek kölcsönhatása, *véges térfogatra* hat. Ezért számolunk az erősűrűséggel. Minthogy a (22) második képlete szerint a nyugalmi négyes gyorsulás megegyezik a hármassal, a négyes erősűrűség a nyugalmi K' rendszerben $\frac{m_0}{V_0} \mathbf{a}_0$, és így a négyes erősűrűség tetszőleges inerciarendszerben, a (20) összefüggést is fityelembé véve:

$$\underline{\mathbf{f}} = \frac{m_0}{V_0} \underline{\mathbf{a}} = \frac{m_0}{V_0} \left(\frac{d\underline{\mathbf{u}}}{d\tau} \right). \quad (24)$$

Ha a K' nyugalmi rendszer a K rendszerhez képest \mathbf{v} sebességgel mozog, akkor a négyes erősűrűség a K rendszerben a (17) és (19) képletek helyettesítésével:

$$\underline{\mathbf{f}} = \frac{m_0}{V_0} \frac{d}{d\tau} (\kappa \mathbf{v} + \kappa c \mathbf{e}_t) = \frac{m_0}{V_0} \kappa \frac{d}{dt} (\kappa \mathbf{v} + \kappa c \mathbf{e}_t), \quad (25)$$

tehát a hármass erősűrűség: $\mathbf{f} = \frac{\kappa}{V_0} \frac{d}{dt} (m_0 \kappa \mathbf{v})$, ezért **az erő hármass vektora** a (14) harmadik összefüggésével:

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} \cdot V = \frac{d(m \mathbf{v})}{dt}, \quad (26a)$$

$$\text{ahol } m = \kappa m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (26b)$$

Ez tehát **Newton mozgástörvényének relativisztikusan is érvényes alakja**, azzal, hogy **a tömeg sebességfüggő**, ami azt jelenti, hogy *egy megfigyelő a hozzá képest v sebességgel mozgó test tömegét a (26b) szerint megnöveltnek észleli*. A (26b), a (14) harmadik képlete és a (26a) szerint a négyes erősűrűség (25) egyenletéből a következőt kapjuk:

$$\underline{\mathbf{f}} = \frac{1}{V} \left[\frac{d(m \mathbf{v})}{dt} + \frac{d(mc)}{dt} \mathbf{e}_t \right] = \frac{1}{V} \left[\mathbf{F} + \frac{d(mc)}{dt} \mathbf{e}_t \right].$$

Minthogy a (24) és (20) szerint a négyes erősűrűség arányos a gyorsulással, azért a (21) alapján ortogonális az $\underline{\mathbf{u}}$ négyes sebességvektorral, ezért

$$0 = \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}} = \frac{1}{V} \left[\mathbf{F} + \frac{d(mc)}{dt} \mathbf{e}_t \right] \cdot \kappa (\mathbf{v} + c \mathbf{e}_t) = \frac{\kappa}{V} \left[\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} - c \frac{d(mc)}{dt} \right], \quad \text{tehát}$$

$$\frac{d(mc^2)}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \quad (27)$$

és a négyes erősrűrség:

$$\underline{\mathbf{f}} = \frac{\mathbf{F}}{V} + \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c V} \mathbf{e}_t = \mathbf{f} + \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c} \mathbf{e}_t = \mathbf{f} + \frac{p_V}{c} \mathbf{e}_t = \mathbf{f} + c \cdot \left(\frac{p_V}{c^2} \right) \mathbf{e}_t, \quad (28)$$

tehát a négyes erősrűrség „időkomponense” a p_V teljesítménysűrség c^2 -ed része. A (27) t-szerinti integrálásából látható, hogy $m c^2$ energia:

$$W = m c^2. \quad (29)$$

(Az integrációs állandót Einstein 0-nak vette, ami utólag helyesnek bizonyult.) Ez az egyenlet a tömeg és energia ekvivalenciáját fejezi ki. A tömeg az energiának egy megjelenési formája.

A kinetikus (mozgási) energiának $v = 0$ -nál 0-nak kell lenni, tehát $T = W - (W)_{v=0}$, azaz a kinetikus energia:

$$T = m c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\kappa - 1). \quad (30)$$

Ha $\frac{v}{c} \ll 1$, akkor a (9) Taylor-sorából $\kappa \cong 1 + \frac{v^2}{2c^2}$, és így $T \cong m_0 \frac{v^2}{2}$, tehát megkaptuk a mozgási energia klasszikus képletét. Az m_0 nyugalmi tömeg és az $m_0 c^2$ nyugalmi energia természetesen inerciarendszertől független, invariáns mennyiségek, ez azonban nem jelenti változatlanságukat. Különböző folyamatokban energiaközléssel vagy elvonással változhat az értéke. Hőleadással járó kémiai folyamatnál (pl. égés) kis mértékben, (10^{-10} nagyságrenddel) csökken, az anyag melegítésével kis mértékben növekszik a nyugalmi tömeg és nyugalmi energia. Atommagfolyamatoknál (maghasadás, vagy fúziós reakció, pl. a Nap sugárzása) sokkal jelentősebben csökken m_0 értéke.

A (26b) és a (29) képletek összevetéséből látható, hogy a tömegek gyorsítása egyre nagyobb energiát igényel. A fénysebességet közelítve: $v \rightarrow c$ esetén $m \rightarrow \infty$ és $W \rightarrow \infty$.

Visszatérve a (26a) képletre, láthatjuk, hogy az nem más, mint Newton mozgástörvényének a következő, ismert alakja:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (31a)$$

ahol $\mathbf{p} = m \mathbf{v} = m_0 \kappa \mathbf{v}$ az impulzus. Minthogy $\kappa \mathbf{v}$ az $\underline{\mathbf{u}}$ négyes sebességvektor „térbeli” része, azért bevezették az impulzus négyes vektorát is:

$$\underline{\mathbf{p}} = m_0 \underline{\mathbf{u}} = m_0 (\kappa \mathbf{v} + \kappa c \mathbf{e}_t) = \mathbf{p} + \frac{W}{c} \mathbf{e}_t \quad (31b)$$

Ezzel az impulzus és energia a (13) Lorentz-féle módon transzformálódik úgy, hogy \mathbf{r} helyére \mathbf{p} , t helyére pedig $\frac{W}{c^2}$ kerül. A négyes impulzus normanegyzete a (18) képlet felhasználásával

$$\underline{\mathbf{p}}^2 = m_0^2 \underline{\mathbf{u}}^2 = -m_0^2 c^2. \quad (31c)$$

A klasszikus mechanika (hármás) impulzusvektorának és az energiának a megmaradási elve a négyes impulzusvektor megmaradási elvében foglalódik össze. A (31b) utolsó jobb oldala alapján a négyes impulzus normanégyzete $\underline{\mathbf{p}}^2 = \mathbf{p}^2 - \frac{W^2}{c^2}$, ezért a (31c)-ből nyerhető a

$$\frac{W^2}{c^2} = \mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2 \quad (31d)$$

képlet is. Ebből látszik, hogy az energia és az impulzus megmaradási elvéből a nyugalmi tömeg is következik. Megjegyezzük, hogy az energia és impulzus megmaradási elve csak külső erőtől mentes zárt rendszeren belül érvényes.

Az impulzussal ellentétben az \mathbf{F} erőt nem lehet négyes vektorra kiegészíteni, mert a t idő, ami szerint az impulzus négyes vektorát deriválni kell, inerciarendszer függő. Ezért az erő transzformációja nem Lorentz-féle, törvényének meghatározásához emiatt először az erősűrűséggel számolunk, ami négyes vektor, tehát használhatjuk hozzá a Lorentz-transzformációt. Rögzítjük a következőket:

1. A K inerciarendszerben a K' inerciarendszer \mathbf{v} (hármás) sebességgel mozog.

2. A vizsgálandó test, amelyre az erő hat, a K' rendszerhez képest \mathbf{u}' sebességű.

3. A test K rendszerbeli sebessége pedig \mathbf{w} .

Tehát ugyanaz a helyzet, mint a sebesség-összetevés tárgyalásánál. Az erősűrűségre a (28) képlet alapján alkalmazzuk a (13d) és (13e) Lorentz-transzformációs képleteket figyelembe véve, hogy a vesszős rendszerben az „időtag” az \mathbf{u}' sebességgel számolva [a (28)-beli \mathbf{v} helyett]):

$$\frac{1}{c^2} \mathbf{f}' \cdot \mathbf{u}' \equiv \frac{1}{c^2} \left(\mathbf{f}'_{\perp} \cdot \mathbf{u}'_{\perp} + f'_{\parallel} \cdot u'_{\parallel} \right),$$

tehát

$$\mathbf{f}_{\perp} = \mathbf{f}'_{\perp} \quad (32a)$$

$$f_{\parallel} = \kappa \left[f'_{\parallel} + \frac{v u'_{\parallel}}{c^2} f'_{\parallel} + \frac{v}{c^2} \mathbf{f}'_{\perp} \cdot \mathbf{u}'_{\perp} \right] \quad (32b)$$

A fenti összefüggéseket átírjuk erőkre, tekintetbe véve, hogy a K rendszerből nézve a \mathbf{w} sebességű test térfogata a (14) harmadik képlete szerint $\frac{V_0}{\kappa_w}$, a K' rendszerből nézve az \mathbf{u} sebességű test térfogata pedig $\frac{V_0}{\kappa_u}$, ahol V_0 a test nyugalmi térfogata, κ_w ill. κ_u képzése pedig a (9) képlet szerinti úgy, hogy \mathbf{v} helyére \mathbf{w} ill. \mathbf{u}' kerül; (a κ -án továbbra is κ_v értendő. Az erőkre átírás után

kapott egyenletek:

$$\frac{\kappa_w}{V_0} \mathbf{F}_\perp = \frac{\kappa_u}{V_0} \mathbf{F}'_\perp \quad (*)$$

$$\frac{\kappa_w}{V_0} F_{\parallel} = \kappa \left[\left(1 + \frac{u'_{\parallel} v}{c^2} \right) \frac{\kappa_u}{V_0} F'_{\parallel} + \frac{v}{c^2} \frac{\kappa_u}{V_0} (\mathbf{F}'_\perp \cdot \mathbf{u}'_\perp) \right] \quad (**)$$

A sebesség-összetevés (16) képletéből négyzetgyököt vonva, majd a reciprokát véve (9) alapján kapjuk:

$$\kappa_w = \left(1 + \frac{u'_{\parallel} v}{c^2} \right) \kappa \kappa_u,$$

Erre tekintettel a (*) egyenletből egyszerűsítés után az

$$\mathbf{F}_\perp = \frac{\mathbf{F}'_\perp}{\kappa \left(1 + \frac{u'_{\parallel} v}{c^2} \right)}, \quad (33a)$$

a (**) egyenletből pedig az

$$F_{\parallel} = F'_{\parallel} + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{\mathbf{F}'_\perp \cdot \mathbf{u}'_\perp}{1 + \frac{u'_{\parallel} v}{c^2}} \quad (33b)$$

transzformációs összefüggés adódik.

Ha $\mathbf{u}' = \mathbf{0}$, akkor a képletek így egyszerűsödnek:

$$\mathbf{F}_\perp = \frac{\mathbf{F}'_\perp}{\kappa} \quad \text{és} \quad F_{\parallel} = F'_{\parallel}. \quad (33c)$$

5. fejezet

A négyes divergencia

A négydimenziós vektor- és tenzoranalízis teljes és rendszeres kifejtése helyett a relativisztikus elektrodinamika igényeinek megfelelő helyen foglalkozunk a szükséges fogalmakkal, feltételezve a háromdimenziós vektoranalízis ismeretét. Az egyik legfontosabb négydimenziós operátor a *négyes divergencia*, amely négyes vektoreloszláshoz (vektor-vektor függvényhez) skaláreloszlást (skalár-vektor függvényt) rendel. Jelentsen ebben a fejezetben $\underline{\mathbf{R}}$ *négyes helyzetvektort*, akkor ha $\underline{\Phi}(\underline{\mathbf{R}})$ a négyes vektoreloszlás, azaz négyes vektor térben és időben, akkor $\underline{\text{div}} \underline{\Phi}$ skaláreloszlás. Ha a K inerciarendszerben

$$\underline{\Phi}(\underline{\mathbf{R}}) = \mathbf{g}(\underline{\mathbf{R}}) + c s(\underline{\mathbf{R}}) \mathbf{e}_t \equiv \mathbf{g} + c s \mathbf{e}_t, \text{ és } \underline{\mathbf{R}} = \mathbf{r} + c t \mathbf{e}_t,$$

akkor a háromdimenziós divergencia számítási szabályához hasonlóan, definiósszerűen

$$\underline{\text{div}} \underline{\Phi} = \text{div} \mathbf{g} + \frac{\partial s}{\partial t}, \quad (34)$$

ahol div a háromdimenziós divergencia, tehát csak az \mathbf{r} komponensei szerinti parciális deriváltakat tartalmazza; (a \mathbf{g} és $c s$ fizikai mennyiségek mértékegysége természetesen megegyezik.) A (34) képlettel értelmetlen négyes divergencia azonban csak akkor tekinthető *négyes operátornak*, ha *inerciarendszertől független*. Megvizsgálandó tehát, hogy ha a K' rendszerben

$$\underline{\Phi} = \mathbf{g}' + c s \mathbf{e}'_t, \text{ akkor a } d = \text{div}' \mathbf{g}' + \frac{\partial s'}{\partial t'} \quad (*)$$

ugyanazt a skaláreloszlást adja-e, mint a (34) képlet szerinti. (div' azt jelenti, hogy \mathbf{r}' komponensei szerint kell differenciálni.) A \mathbf{g}' felbontásával \mathbf{v}' -irányú, és arra merőleges komponensre írhatjuk, hogy

$$d = \text{div}'_{\perp} \mathbf{g}'_{\perp} + \frac{\partial g'_{\parallel}}{\partial r'_{\parallel}} + \frac{\partial s'}{\partial t'}. \quad (**)$$

A $\underline{\Phi}$ négyes vektor, ezért transzformációja Lorentz-féle, tehát a (13a), (13b), (13c) összefüggés alapján:

$$\mathbf{g}'_{\perp} = \mathbf{g}_{\perp}, \quad g'_{\parallel} = \kappa (g_{\parallel} - v s), \quad s' = \kappa \left(s - \frac{v}{c^2} g_{\parallel} \right),$$

továbbá a \mathbf{R} négyes helyzetvektorra vonatkozóan, a (13d), (13e), (13f) képletek szerint:

$$\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r}'_\perp, \quad r_\parallel = \kappa \left(r'_\parallel + v t' \right), \quad t = \kappa \left(t' + \frac{v}{c^2} r'_\parallel \right).$$

E transzformációs összefüggések első egyenletei alapján a (**) jobb oldalának első tagjára fennáll a következő azonosság: $\text{div}'_\perp \mathbf{g}'_\perp = \text{div}'_\perp \mathbf{g}_\perp = \text{div}_\perp \mathbf{g}_\perp$. A (***) összefüggés jobb oldalának második és harmadik tagja pedig az alábbiak szerint alakul:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g'_\parallel}{\partial r'_\parallel} &= \frac{\partial [\kappa (g_\parallel - v s)]}{\partial r_\parallel} \frac{\partial r_\parallel}{\partial r'_\parallel} + \frac{\partial [\kappa (g_\parallel - v s)]}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial r'_\parallel} \\ &= \kappa^2 \left(\frac{\partial g_\parallel}{\partial r_\parallel} - v \frac{\partial s}{\partial r_\parallel} \right) + \kappa^2 \frac{v}{c^2} \left(\frac{\partial g_\parallel}{\partial t} - v \frac{\partial s}{\partial t} \right); \\ \frac{\partial s'}{\partial t'} &= \frac{\partial [\kappa (s - \frac{v}{c^2} g_\parallel)]}{\partial r_\parallel} \frac{\partial r_\parallel}{\partial t'} + \frac{\partial [\kappa (s - \frac{v}{c^2} g_\parallel)]}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} \\ &= \kappa^2 v \left(\frac{\partial s}{\partial r_\parallel} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial g_\parallel}{\partial r_\parallel} \right) + \kappa^2 \left(\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial g_\parallel}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

tehát ezek összege:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g'_\parallel}{\partial r'_\parallel} + \frac{\partial s'}{\partial t'} &= \kappa^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial g_\parallel}{\partial r_\parallel} + (-\kappa^2 v + \kappa^2 v) \frac{\partial s}{\partial r_\parallel} \\ &\quad + \left(\kappa^2 \frac{v}{c^2} - \kappa^2 \frac{v}{c^2} \right) \frac{\partial g_\parallel}{\partial t} + \kappa^2 \left(-\frac{v^2}{c^2} + 1 \right) \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial g_\parallel}{\partial r_\parallel} + \frac{\partial s}{\partial t}, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a (9) képletet is. Így azután

$$d = \text{div}_\perp \mathbf{g}_\perp + \frac{\partial g_\parallel}{\partial r_\parallel} + \frac{\partial s}{\partial t} \equiv \text{div} \mathbf{g} + \frac{\partial s}{\partial t}.$$

Végeredményben a (*) képlettel egybevetve $\text{div}' \mathbf{g}' + \frac{\partial s'}{\partial t'} = \text{div} \mathbf{g} + \frac{\partial s}{\partial t}$, vagyis a (34) képlettel meghatározott négyes divergencia inerciarendszertől független skalárt ad.

(Megjegyezzük, hogy annak ismeretében, hogy a háromdimenziós divergenciához hasonlóan a négyes divergencia a négyes derivált tenzor (első) skálárinvariánsa, az invariancia közvetlenül adódik.) Megemlíjtjük továbbá, hogy a négyes divergenciával érvényes a *négydimenziós Gauss-tétel* is, csakhogy itt a „térfogat” négydimenziós, a „felület” pedig háromdimenziós. Ugyanis a háromdimenziós Gauss-tétel levezetésénél használt lépések alkalmazhatók négydimenzió esetén is.

6. fejezet

A négyes áramsűrűség vektora

Az elektromágneses teret villamos töltések és villamos áramok létesítik. Az áramok és töltések azonban nem függetlenek egymástól, mert az áramok a töltések mozgásából vagy változásából származnak.

Az áramsűrűség (hármás) vektorát és a töltéssűrűséget – mint ismeretes – az ún. folytonossági egyenlet kapcsolja össze: $\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Felhasználva a négyes divergencia (34) jelű képletét, ezt a következőképpen is írhatjuk:

$$\underline{\operatorname{div}} (\mathbf{J} + c \rho \mathbf{e}_t) = 0. \quad (*)$$

Mínthogy ez négyes egyenlet, a $\underline{\operatorname{div}}$ pedig négyes operátor, azért a (*) képletben a zárójelben álló kifejezésnek négyes vektornak kell lenni, és ez az áramsűrűség négyes vektora:

$$\underline{\mathbf{J}} = \mathbf{J} + c \rho \mathbf{e}_t, \quad (35a)$$

és a folytonossági egyenlet négydimenziós alakja:

$$\underline{\operatorname{div}}(\underline{\mathbf{J}}) = 0. \quad (35b)$$

Természetesen a négyes áramsűrűség-vektor transzformációja is Lorentz-féle, tehát a (13) jelű képletek alapján:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J}'_{\perp} &= \mathbf{J}_{\perp}, \quad \mathbf{J}_{\perp} = \mathbf{J}'_{\perp}, \\ J'_{\parallel} &= \kappa (J_{\parallel} - v \rho), \quad J_{\parallel} = \kappa (J'_{\parallel} + v \rho) \\ \rho' &= \kappa (\rho - \frac{v}{c^2} J_{\parallel}), \quad \rho = \kappa (\rho' + \frac{v}{c^2} J'_{\parallel}) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Vákuumban csak a szabad töltések mozgása ad áramot, ez a **konvektív** áram. A vezetővel együtt mozgó töltések ugyanilyen jellegű, tehát konvektív áramot adnak. Ezen kívül azonban a vezetőben a vezetőhöz képest is mozoghatnak töltések (pl. fémek szabad elektronjai), ezek adják a vezetésszerű vagy **konduktív** áramot.

A vezetővel együttmozgó, nyugalmi inerciarendszerben tehát a \mathbf{J}_0 (hármás) áramsűrűség vektor **konduktív áram sűrűsége**, a ρ_0 nyugalmi töltés nem ad áramot, ebből keletkezik mozgáskor a **konvektív** áram.

Ha a nyugalmi rendszer K' , akkor itt a *konvektív* áram komponensei:

$$\mathbf{J}'_{v\perp} = \mathbf{0}, \quad J'_{v\parallel} = 0, \quad \rho'_v = \rho_0,$$

a *konduktív* áram komponensei pedig a K' rendszerben:

$$\mathbf{J}'_{d\perp} = \mathbf{J}_{0\perp}, \quad J'_{d\parallel} = J_{0\parallel}, \quad \rho'_d = 0.$$

A K' rendszerhez képest \mathbf{v} sebességű K rendszerbeli komponenseket a (36) jelű képlet sor jobb feléből kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J}_{v\perp} &= \mathbf{0} \\ J_{v\parallel} &= \kappa (0 + \rho_0 v) = \kappa \rho_0 v \\ \rho_v &= \kappa \left(\rho_0 + \frac{v}{c^2} 0 \right) = \kappa \rho_0 \end{aligned} \right\} (*) \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{J}_{d\perp} &= \mathbf{J}_{0\perp} \\ J_{d\parallel} &= \kappa (J_{0\parallel} + 0 \cdot v) = \kappa J_{0\parallel} \\ \rho_d &= \kappa \left(0 + \frac{v}{c^2} J_{0\parallel} \right) = \kappa \frac{v}{c^2} J_{0\parallel} \end{aligned} \right\} (**)$$

Megszakítva a konduktív és konvektív áramsűrűség vizsgálatát, a (*) harmadik egyenlete alapján megállapítjuk, hogy a töltéshez képest mozgó rendszerben mérve a töltés sűrűsége κ -szorosára növekszik, ámde a (14) harmadik képlete szerint a térfogat kontrakciója is ugyanilyen mértékű, azaz

$$Q = \rho_v V = \kappa \rho_0 \frac{V_0}{\kappa} = \rho_0 V_0 = Q_0 \equiv Q', \quad (37a)$$

vagy általánosabban

$$Q = \int_{(V)} \rho_v dV = \int_{(V_0)} \kappa \rho_0 \frac{dV_0}{\kappa} = \int_{(V_0)} \rho_0 dV_0 = Q_0 \equiv Q', \quad (37b)$$

ahol V_0 ill. V a töltés térfogata a nyugalmi ill. mozgó rendszerben, tehát a **töltés az inerciarendszertől független invariáns skalár** mennyiség.

A (*) és (**) képletek második és harmadik sorából a nyugalmi (0-indexű) kiiktatásával kapjuk:

$$J_{v\parallel} = \rho_v v, \quad J_{d\parallel} = \rho_d \frac{c^2}{v}. \quad (***)$$

A teljes négyes áramsűrűség komponensei a K rendszerben a megfelelő konvektív és konduktív komponensek összege:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\perp} &= \mathbf{J}_{d\perp} + \mathbf{J}_{v\perp} = \mathbf{J}_{d\perp}, \\ J_{\parallel} &= J_{v\parallel} + J_{d\parallel}, = \rho_v v + \rho_d \frac{c^2}{v} \\ \rho &= \rho_v + \rho_d. \end{aligned}$$

ahol a második sorban felhasználtuk a (***) egyenlőségeket is. A második egyenletből a v -vel szorzott harmadikat levonva a

$$J_{\parallel} - \rho v = \left(\frac{c^2}{v} - v \right) \rho_d \equiv \frac{c^2}{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \rho_d \equiv \frac{c^2}{v \kappa^2} \rho_d$$

összefüggéshez jutunk, ahonnan a *konduktív töltés*:

$$\rho_d = \frac{\kappa^2}{c^2} v (J_{\parallel} - \rho v). \quad (38)$$

Az előbbiek alapján a *konvektív töltés*:

$$\rho_v = \rho - \rho_d, \quad (39)$$

továbbá a (*) első egyenlete és a (***) első egyenlete alapján a *konvektív (hármás) áramsűrűség vektor*:

$$\mathbf{J}_v = \rho_v \mathbf{v} = (\rho - \rho_d) \mathbf{v}, \quad (40)$$

végül a *konduktív (hármás) áramsűrűség vektor*:

$$\mathbf{J}_d = \mathbf{J} - \mathbf{J}_v = \mathbf{J} - (\rho - \rho_d) \mathbf{v} = \mathbf{J} - \rho \mathbf{v} + \rho_d \mathbf{v}. \quad (41)$$

Ha továbbra is a K^1 , a vesszős rendszer a nyugalmi, akkor a *négyes áramsűrűség*, a *négyes konduktív* és a *négyes konvektív áramsűrűség* ebben:

$$\underline{\mathbf{J}} = \mathbf{J}_0 + c \rho_0 \mathbf{e}'_t, \quad \underline{\mathbf{J}}_d = \mathbf{J}_0 + 0 \cdot \mathbf{e}'_t, \quad \underline{\mathbf{J}}_v = \mathbf{0} + c \rho_0 \mathbf{e}'_t \equiv -(\underline{\mathbf{J}} \underline{\mathbf{e}}'_t) \mathbf{e}'_t,$$

és így

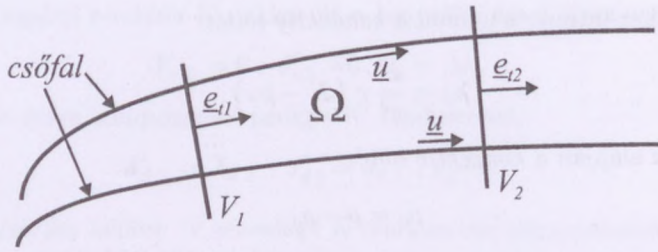
$$\underline{\mathbf{J}}_d = \underline{\mathbf{J}} - \underline{\mathbf{J}}_v.$$

A *négyes áramsűrűség felbontásának konduktív és konvektív része az inercia-rendszerből függetlennek kell lenni*, ezért a *négyes sebesség* (17) jelű képlete alapján a *konvektív és konduktív négyes áramsűrűség*:

$$\underline{\mathbf{J}}_v = -\frac{1}{c^2} (\underline{\mathbf{J}} \cdot \underline{\mathbf{u}}) \underline{\mathbf{u}}, \quad \underline{\mathbf{J}}_d = \underline{\mathbf{J}} + \frac{1}{c^2} (\underline{\mathbf{J}} \cdot \underline{\mathbf{u}}) \underline{\mathbf{u}}. \quad (42)$$

Látható, hogy $\underline{\mathbf{J}}_v$, a négyes konvektív áramsűrűség $\underline{\mathbf{u}}$ irányú, és a (18) felhasználásával az, hogy a $\underline{\mathbf{J}}_d$, a négyes konduktív áramsűrűség $\underline{\mathbf{u}}$ -ra merőleges. Az $\underline{\mathbf{u}}$ négyes sebességnek (17) képlet szerinti $\underline{\mathbf{u}} = \kappa (\mathbf{v} + c \mathbf{e}_t)$ kifejezését a (42) képletekbe helyettesítve, természetesen ugyancsak a (38), (39), (40) és (41) összefüggésekhez jutunk.

Ha anyagi pontok (töltéshordozók, vezetők) elhatárolt részének mozgását a négydimenziós térben úgy jellemezzük, hogy megalkotjuk az egyes anyagi pontok *világvonala*t, azaz azokat a vonalakat, amelyeknek *érintői a négyes sebességvektorok*, majd ezekből egy részt elhatárolunk, akkor *négydimenziós csövet* kapunk. Az 5. ábra ennek kétdimenziós vetületét mutatja. [7] A csőfal háromdimenziós hiperfelület, és érintői mindenütt a négyes sebességvektorok. Vágjuk el ezt a csövet két olyan háromdimenziós hipersíkkal, V_1 -gyel és V_2 -vel, amelyek merőlegesek valamely időtengelyre, tehát e hipersíkok vektorai



5. ábra. Négydimenziós cső kétdimenziós vetülete a töltésmegmaradás magyarázatához

térszerűek. A cső háromdimenziós hipersíkok közötti belseje egy Ω négydimenziós térrészt alkot. Erre a térrészre vonatkozóan írjuk fel a négyes áramsűrűsége a négydimenziós Gauss-tételt!

$$\int_{(\Omega)} \text{div } \underline{\mathbf{J}} d\Omega = \int_{(V_1)} \underline{\mathbf{J}} d\underline{\mathbf{V}}_1 + \int_{(V_2)} \underline{\mathbf{J}} d\underline{\mathbf{V}}_2 + \int_{(\text{CSŐFAL})} \underline{\mathbf{J}} d\underline{\mathbf{V}}_f,$$

ahol $d\underline{\mathbf{V}}_1, d\underline{\mathbf{V}}_2$ és $d\underline{\mathbf{V}}_f$ olyan négyes vektorok, amelyeknek abszolút értéke dV_1, dV_2 ill. dV_f , iránya pedig a hipersíkok ill. csőfal külső normálisa, amelyeknek egységvektora rendre: $-\underline{e}_{t1}, \underline{e}_{t2}$ ill. \underline{u} -ra merőleges egységvektor. A (35b) összefüggés szerint a Gauss-tétel bal oldala zérus, jobb oldala pedig az alábbi:

$$0 = c \int_{V_1} \rho_1 dV_1 - c \int_{V_2} \rho_2 dV_2 + \int_{V_f} \underline{\mathbf{J}}_d d\underline{\mathbf{V}}_f$$

(az első két tag esetében $\underline{\mathbf{J}} \underline{e}_t = (\underline{\mathbf{J}} + c\rho \underline{e}_t) \cdot \underline{e}_t = -c\rho$ kapcsán, a harmadik tag esetében pedig, minthogy $d\underline{\mathbf{V}}_f$ merőleges \underline{u} -ra, a (42) szerint a konvektív áramsűrűség kiesik.) Ha tehát **nincs konduktív áram**, vagy a zárt tartományba, (ami időbeni zártságot is jelent), **nem folyik ki vagy be konduktív áram** akkor

$$\int_{(V_1)} \rho_1 dV_1 = \int_{(V_2)} \rho_2 dV_2. \quad (43)$$

Ez a **töltés megmaradásának elve**. Megjegyezzük, hogy a levezetés során felhasználtuk a töltés invariáns skalár jellegét [l. (37) képlet], hiszen a hipersíkokon a kapott Q_1 és Q_2 nem függ a választott inerciarendszertől.

Az áramok és töltések hozzák létre az elektromágneses teret, az elektromágneses tér pedig erőhatást gyakorol az áramokra és töltésekre. Először az utóbbival foglalkozunk. Mint ismeretes, ezt az erőhatást az erősűrűség

hármás vektorának alábbi képlete fejezi ki (Lorentz-erő):

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{E} \equiv -\mathbf{B} \times \mathbf{J} + \rho \mathbf{E},$$

ahol \mathbf{B} a mágneses indukció, \mathbf{E} az elektromos térerősség hármás vektora, a \times pedig a csak a három dimenzióban létező vektorszorzás jele. A relativisztikus elektrodinamikában ezt az egyenletet kell négyes vektorokra átírni. A (28) jelű összefüggés szerint a négyes erőssűrűség negyedik komponense $\frac{p_v}{c}$, ahol itt a p_v teljesítménysűrűség az elektromágneses téré, tehát $p_v = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$. (Ha az \mathbf{E} térerősséget felbontva képzeljük vezetőbeli és „idegen” részekre, akkor a p_v első részéből a Joule-hőteljesítmény, a második részéből pedig teljesítményátadás vagy átvétel adódik.) Így az elektromágneses tér négyes erőssűrűsége:

$$\underline{\mathbf{f}}_e = \mathbf{f}_e + \frac{1}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) \underline{\mathbf{e}}_t = -\mathbf{B} \times \mathbf{J} + \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) \underline{\mathbf{e}}_t \quad (44)$$

A (35a) képlet szerint az áramsűrűség négyes vektora $\underline{\mathbf{J}} = \mathbf{J} + c\rho \underline{\mathbf{e}}_t$. Látható, hogy az $\underline{\mathbf{f}}_e$ és $\underline{\mathbf{J}}$ négyes vektorok közt valamilyen homogén lineáris kapcsolat van, ezért ezt a kapcsolatot *tenzorszorzással* fejezhetjük ki. Ehhez szükségünk van a háromdimenziós egységtenzorra, ami minden háromdimenziós térbeli vektort önmagába visz át. Ezt a tenzort, amelynek mátrixa minden hármás koordináta-rendszerben egységmátrix, a következőkben \mathbf{I} -vel jelöljük. Tehát

$$\mathbf{I}\mathbf{w} = \mathbf{w}, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{I})\mathbf{w} = \mathbf{a} \times \mathbf{w}, \quad \mathbf{w}(\mathbf{a} \times \mathbf{I}) = \mathbf{w} \times \mathbf{a}, \quad \text{de } \mathbf{I}\underline{\mathbf{e}}_t = \underline{\mathbf{0}}, \quad (45)$$

ahol az utolsó előtti összefüggést az magyarázza, hogy a vegyes vektorszorzatban a vektoriális szorzás jelét áthelyezhetjük, az utolsó egyenlőség pedig azt mutatja, hogy a hármás egységtenzor az időtengely egységvektorát nullázza.

Szükségünk van még a legegyszerűbb típusú tenzorra, a *diad*-ra, amelyet két vektor (pl. \mathbf{a} és \mathbf{b}) képez, és az egyik szokásos jelölése $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$, jelentése pedig:

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})\mathbf{w} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{w}) \equiv (\mathbf{b} \cdot \mathbf{w})\mathbf{a}; \quad \text{vagy } \mathbf{w}(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}, \quad \text{és} \quad (46)$$

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})(\mathbf{c} \circ \mathbf{d}) = (\mathbf{bc})(\mathbf{a} \circ \mathbf{d}).$$

A diad egyik vagy másik vektora, vagy mindkettő négyes vektor is lehet. Ezek után belátható a következő négyes vektoregyenlet helyessége, ha figyelembe vesszük a (44) képletet és azt is, hogy a hármás vektorok merőlegesek $\underline{\mathbf{e}}_t$ -re, és $\underline{\mathbf{e}}_t \cdot \underline{\mathbf{e}}_t = -1$.

$$\underline{\mathbf{f}}_e = \left(-\mathbf{B} \times \mathbf{I} - \frac{1}{c} \mathbf{E} \circ \underline{\mathbf{e}}_t + \frac{1}{c} \underline{\mathbf{e}}_t \circ \mathbf{E} \right) (\mathbf{J} + c\rho \underline{\mathbf{e}}_t) \equiv \underline{\underline{\mathbf{F}}} \underline{\underline{\mathbf{J}}} \quad (47)$$

Az első zárójeles $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ -et *négyes térerősség tenzornak* nevezik. Erre még visszatérünk.

7. fejezet

Antiszimmetrikus négyes tenzorok

A (47) képletbeli $\underline{\mathbf{F}}$ négyes térerősség tenzorral egyező típusú tenzorokkal foglalkozunk ebben a fejezetben. Legyen az általános jelölésük:

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}} = \mathbf{s} \times \mathbf{I} + \mathbf{q} \circ \underline{\mathbf{e}}_t - \underline{\mathbf{e}}_t \circ \mathbf{q}. \quad (48)$$

Megkeressük a $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ tenzor *mátrixát* derékszögű koordináta-rendszerben, amely-nél az x , y , z , ct tengelynek az egységvektorai rendre \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , $\underline{\mathbf{e}}_t$. A merőle-gességek figyelembevételével

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\mathbf{i} &= (s_x\mathbf{i} + s_y\mathbf{j} + s_z\mathbf{k}) \times \mathbf{i} - \underline{\mathbf{e}}_t(\mathbf{q}\mathbf{i}) = -s_y\mathbf{k} + s_z\mathbf{j} - q_x\underline{\mathbf{e}}_t, \\ \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\mathbf{j} &= (s_x\mathbf{i} + s_y\mathbf{j} + s_z\mathbf{k}) \times \mathbf{j} - \underline{\mathbf{e}}_t(\mathbf{q}\mathbf{j}) = s_x\mathbf{k} - s_z\mathbf{i} - q_y\underline{\mathbf{e}}_t, \\ \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\mathbf{k} &= (s_x\mathbf{i} + s_y\mathbf{j} + s_z\mathbf{k}) \times \mathbf{k} - \underline{\mathbf{e}}_t(\mathbf{q}\mathbf{k}) = -s_x\mathbf{j} + s_y\mathbf{i} - q_z\underline{\mathbf{e}}_t, \\ \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\underline{\mathbf{e}}_t &= -\mathbf{q} = -q_x\mathbf{i} - q_y\mathbf{j} - q_z\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Az első sort rendre \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} és $\underline{\mathbf{e}}_t$ -vel szorozva skalárisan, a mátrix első oszlopát kapjuk, a második sort szorozva, a mátrix második oszlopát, és így tovább, figyelemmel arra, hogy $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1$, $\underline{\mathbf{e}}_t^2 = -1$. Ily módon az alábbi mátrixot kapjuk:

$$[\underline{\underline{\mathbf{Q}}}] = \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y & -q_x \\ s_z & 0 & -s_x & -q_y \\ -s_y & s_x & 0 & -q_z \\ q_x & q_y & q_z & 0 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Ez a mátrix a (főátlóra nézve) *antiszimmetrikus*, ezért a (48) egyenlettel jellemzett tenzorokat is **antiszimmetrikus**nak nevezik.

Fontos kérdés, hogy ezek a tenzorok hogyan transzformálódnak, ha azt akarjuk, hogy a négyes egyenletek érvényesek legyenek a Lorentz-transzformációval nyert új vektorkomponensekkel is. Az a kérdés, hogy milyen \mathbf{s}' és \mathbf{q}' vektorokkal kell felírunk a (48) jobb oldalát, hogy **ugyanazt** a $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ tenzort kapjuk. Tehát

$$\mathbf{s}' \times \mathbf{I}' + \mathbf{q}' \circ \underline{\mathbf{e}}'_t - \underline{\mathbf{e}}'_t \circ \mathbf{q}' = \mathbf{s} \times \mathbf{I} + \mathbf{q} \circ \underline{\mathbf{e}}_t - \underline{\mathbf{e}}_t \circ \mathbf{q}, \quad (50)$$

ahol I' a vesszős rendszerbeli hármas egységtenzor, és \underline{e}'_t ugyanott az idő-egységvektor. Szorozzuk be az előbbi egyenletet (jobbról) a (11a), tehát az $\underline{e}'_t = \kappa \frac{v}{c} + \kappa \underline{e}_t$ egyenlettel (bal oldalt a bal oldallal, jobb oldalt a jobb oldallal, figyelembe véve az ortogonalitásokat)

$$-\mathbf{q}' = \frac{\kappa}{c} (\mathbf{s} \times \mathbf{v}) - \kappa \mathbf{q} - \frac{\kappa}{c} (\mathbf{q} \mathbf{v}) \underline{e}_t.$$

Mivel a (11c) szerint $\underline{e}_t = \frac{c}{\kappa v^2} (\mathbf{v}' - \kappa \mathbf{v})$, azért

$$\mathbf{q}' = -\frac{\kappa}{c} (\mathbf{s} \times \mathbf{v}) + \kappa \mathbf{q} + (\mathbf{v}' - \kappa \mathbf{v}) \frac{(\mathbf{q} \mathbf{v})}{v^2} = \frac{\kappa}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{s}) + \kappa [\mathbf{q} - (\mathbf{q} \mathbf{v}^0) \mathbf{v}^0] + q_{\parallel} \mathbf{v}'^0.$$

Mínt hogy a szögletes zárójelben lévő kifejezés \mathbf{q} -nak \mathbf{v} -re merőleges komponense, azért végül is:

$$\mathbf{q}' = q_{\parallel} \mathbf{v}'^0 + \kappa \left(\mathbf{q}_{\perp} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{s} \right) \equiv q_{\parallel} \mathbf{v}'^0 + \kappa \left(\mathbf{q}_{\perp} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{s}_{\perp} \right). \quad (*)$$

(A második jobb oldal azért írható, mert a vektorszorzat \mathbf{s} -nek \mathbf{v} -vel párhuzamos komponensét nullázza.) \mathbf{s}' meghatározása céljából szorozzuk be az (50) egyenletet (jobbról) a (11c), tehát a $\mathbf{v}' = \kappa \mathbf{v} + \kappa \frac{v^2}{c} \underline{e}_t$ egyenlettel!

Az eredmény: $\mathbf{s}' \times \mathbf{v}' - \underline{e}'_t (\mathbf{q}' \mathbf{v}') = \kappa (\mathbf{s} \times \mathbf{v}) - \kappa \underline{e}_t (\mathbf{q} \mathbf{v}) - \kappa \frac{v^2}{c} \mathbf{q}$. A (*)-ből látszik, hogy $\mathbf{q}' \mathbf{v}' = \mathbf{q} \mathbf{v}$, továbbá a (11a)-ból, hogy $\underline{e}'_t - \kappa \underline{e}_t = \frac{\kappa}{c} \mathbf{v}$, ezekkel

$$\begin{aligned} \mathbf{s}' \times \mathbf{v}' &= \kappa (\mathbf{s} \times \mathbf{v}) + \frac{\kappa}{c} [\mathbf{v} (\mathbf{q} \mathbf{v}) - \mathbf{v}^2 \mathbf{q}] \equiv \kappa (\mathbf{s} \times \mathbf{v}) + \frac{\kappa}{c} (\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} \equiv \\ &\equiv \kappa \left[\mathbf{s} + \frac{1}{c} (\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \right] \times \mathbf{v}. \end{aligned}$$

A bal oldalon \mathbf{s}' -nek \mathbf{v}' -irányú, az utolsó jobb oldalon \mathbf{s} -nek \mathbf{v} -irányú komponensét a \mathbf{v} -vel való vektorszorzás kiejti, és a merőleges komponensek maradnak meg:

$$\mathbf{s}'_{\perp} \times \mathbf{v}' = \kappa \left[\mathbf{s}_{\perp} + \frac{1}{c} (\mathbf{q}_{\perp} \times \mathbf{v}) \right] \times \mathbf{v}.$$

A merőlegességek miatt a vektorszorzat – előjeltől eltekintve – az abszolút értékek szorzatával egyenlő, tehát: $|\mathbf{s}'_{\perp}| \cdot |\mathbf{v}'| = \pm \kappa \left| \mathbf{s}_{\perp} + \frac{1}{c} (\mathbf{q}_{\perp} \times \mathbf{v}) \right| |\mathbf{v}|$; mivel $|\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}| = v$, továbbá $v = 0$ -nál $\mathbf{s}'_{\perp} = \mathbf{s}_{\perp}$, azért a $+$ jel érvényes. A \mathbf{v}' -re és \mathbf{v} -re merőleges térszerű sík közös lévén, írhatjuk:

$$\mathbf{s}'_{\perp} = \kappa \left(\mathbf{s}_{\perp} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{q}_{\perp} \right). \quad (**)$$

Legyen $\mathbf{m}'_1 = \mathbf{m}_1$ és $\mathbf{m}'_2 = \mathbf{m}_2$ a \mathbf{v} -re (és \mathbf{v}' -re), és egymásra is merőleges két egységvektor. Szorozva (jobbról) az (50) egyenletet az *első vektorral*, a

merőlegességek figyelembevételével: $\mathbf{s}' \times \mathbf{m}'_1 - \mathbf{e}'_t (\mathbf{q}' \mathbf{m}'_1) = \mathbf{s} \times \mathbf{m}_1 - \mathbf{e}_t (\mathbf{q} \mathbf{m}_1)$, majd ezt a második merőleges egységvektorral:

$$(\mathbf{s}' \times \mathbf{m}'_1) \mathbf{m}'_2 = (\mathbf{s} \times \mathbf{m}_1) \mathbf{m}_2 \text{ azaz } \mathbf{s}' (\mathbf{m}'_1 \times \mathbf{m}'_2) = \mathbf{s} (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2).$$

Mivel $\mathbf{m}'_1 \times \mathbf{m}'_2 = \pm \mathbf{v}'^0$, és $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 = \pm \mathbf{v}^0$, tehát $(\mathbf{s}' \mathbf{v}'^0) = (\mathbf{s} \mathbf{v}^0)$, azaz $s'_{\parallel} = s_{\parallel}$. Így a (***) képlettel együtt felírhatjuk az \mathbf{s} vektor transzformációját, és aláírjuk a (*) képletnek megfelelően a \mathbf{q} vektorét, valamint mindkét transzformáció megfordítását is:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{s}' &= s_{\parallel} \mathbf{v}'^0 + \kappa (\mathbf{s}_{\perp} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{q}_{\perp}); \\ \mathbf{q}' &= q_{\parallel} \mathbf{v}'^0 + \kappa (\mathbf{q}_{\perp} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{s}_{\perp}); \\ \mathbf{s} &= s'_{\parallel} \mathbf{v}^0 + \kappa (\mathbf{s}'_{\perp} + \frac{1}{c} \mathbf{v}' \times \mathbf{q}'_{\perp}) \\ \mathbf{q} &= q'_{\parallel} \mathbf{v}^0 + \kappa (\mathbf{q}'_{\perp} - \frac{1}{c} \mathbf{v}' \times \mathbf{s}'_{\perp}) \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

A fordított transzformáció képleteihez úgy jutottunk, hogy a vesszős mennyiségeket vesszőtlenre cseréltük, és fordítva, kivéve a merőleges komponensek sebességeinél, ahol a \mathbf{v} -t $-\mathbf{v}'$ -re. (Az előző levezetéseket a vesszős és vesszőtlen mennyiségek felcserélésével elvégezve, ez adódik ki.)

Az \mathbf{s} és \mathbf{q} vektorokból olyan kifejezések is képezhetők, amelyek a transzformációval nem változnak, **invariánsak**. Az (51) képletekből e két vektor transzformáltjainak skaláris szorzata a merőlegességek figyelembevételével:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}' \mathbf{q}' &= s_{\parallel} q_{\parallel} + \kappa^2 \left[\mathbf{s}_{\perp} \mathbf{q}_{\perp} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{q}_{\perp}) (\mathbf{v} \times \mathbf{s}_{\perp}) \right] = \\ &= s_{\parallel} q_{\parallel} + \kappa^2 \left\{ \mathbf{s}_{\perp} \mathbf{q}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} [\mathbf{q}_{\perp} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{s}_{\perp})] \right\} = \\ &= s_{\parallel} q_{\parallel} + \kappa^2 \left[\mathbf{s}_{\perp} \mathbf{q}_{\perp} - \frac{1}{c^2} v^2 (\mathbf{s}_{\perp} \mathbf{q}_{\perp}) \right] = s_{\parallel} q_{\parallel} + \mathbf{s}_{\perp} \mathbf{q}_{\perp} = \mathbf{s} \mathbf{q}, \end{aligned}$$

Tehát az $\mathbf{s} \mathbf{q}$ háromdimenziós skaláris szorzat a transzformációval szemben **invariáns**. (Ez nem triviális, csak a négyes vektorok skaláris szorzatai invariánsak triviálisan.) Bebizonyítjuk, hogy $\mathbf{s}^2 - \mathbf{q}^2$ is ilyen. Ugyancsak az (51) képletekből

$$\begin{aligned} \mathbf{s}' + \mathbf{q}' &= (s_{\parallel} + q_{\parallel}) \mathbf{v}'^0 + \kappa [(\mathbf{s}_{\perp} + \mathbf{q}_{\perp}) + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times (\mathbf{s}_{\perp} - \mathbf{q}_{\perp})], \\ \mathbf{s}' - \mathbf{q}' &= (s_{\parallel} - q_{\parallel}) \mathbf{v}'^0 + \kappa [(\mathbf{s}_{\perp} - \mathbf{q}_{\perp}) - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times (\mathbf{s}_{\perp} + \mathbf{q}_{\perp})]. \end{aligned}$$

A két felírt egyenlőség szorzata a merőlegességek felhasználásával:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}'^2 - \mathbf{q}'^2 &= s_{\parallel}^2 - q_{\parallel}^2 + \kappa^2 \left\{ \mathbf{s}_{\perp}^2 - \mathbf{q}_{\perp}^2 - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} [(\mathbf{s}_{\perp} - \mathbf{q}_{\perp}) \times (\mathbf{v} \times (\mathbf{s}_{\perp} + \mathbf{q}_{\perp}))] \right\} = \\ &= s_{\parallel}^2 - q_{\parallel}^2 + \kappa^2 \left[\mathbf{s}_{\perp}^2 - \mathbf{q}_{\perp}^2 - \frac{v^2}{c^2} (\mathbf{s}_{\perp}^2 - \mathbf{q}_{\perp}^2) \right] = s_{\parallel}^2 - q_{\parallel}^2 + \mathbf{s}_{\perp}^2 - \mathbf{q}_{\perp}^2 = \mathbf{s}^2 - \mathbf{q}^2. \end{aligned}$$

Végeredményben $\mathbf{s}\mathbf{q}$ és $\mathbf{s}^2 - \mathbf{q}^2$ a(48) antiszimmetrikus tenzorok invariánsai.

Az (51) transzformációs egyenletekből látható, hogy ezek nem változnak, ha \mathbf{s} helyére \mathbf{q} -t, és ugyanakkor \mathbf{q} helyére $-\mathbf{s}$ -et helyettesítünk. Az így a (48)-ból adódó

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_d = \mathbf{q} \times \mathbf{I} - \mathbf{s} \circ \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_t \circ \mathbf{s} \quad (52)$$

tenzort a $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ négyes tenzor *dual*-jának nevezik. [A relativitáselmélettel foglalkozó szakirodalmak általában indexes jelölésű vektorokkal és tenzorokkal számolnak, és a duáltenzorról megemlítik, hogy *pseudotenzor*. *Tükrözés esetén a pseudomennyiség mátrixa ellenkező előjelűen viselkedik, mint a megfelelő nem pseudomennyiség mátrixa*. Pl. egy „normális” hármas vektor, az ún. *poláris* vektor oszlop- (vagy sor)-mátrixa a koordináta-rendszer origóra való tükrözésénél *előjelet vált*, míg két poláris vektor vektoriális szorzatával kapott ún. *axiális* (hármas) vektor oszlop- (vagy sor)-mátrixa origóra tükrözésnél *változatlan* marad, ezért *pseudovektor*, mert a transzformációnál ellentétesen viselkedik, mint a poláris vektor. Egy poláris és axiális vektor skaláris szorzata, tehát három (hármas) vektor vegyesszorzata *pseudoskalár*, mert az origóra tükrözéskor a vegyesszorzat, mint determináns előjelet vált, és két egytípusú vektor skalárszorzata pedig nem. Négyes vektoroknál és tenzoroknál már nem tudunk szemléletes példát adni a pseudojellegre. Ha csak olyan Lorentz-transzformációkra szorítkozunk, amelyeknél a térbeli koordináta-rendszer *jobbsodrású*, az időtengely iránya pedig természetesen a *jövő* felé mutat, akkor a pseudomennyiségeket nem kell megkülönböztetni.]

Szükségünk lesz még a tenzor divergenciájának fogalmára. Ennek definíciója egy tetszőleges $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$ tenzorra:

$$(\mathbf{a} + \alpha \mathbf{e}_t) (\underline{\underline{\text{Div}}} \underline{\underline{\mathbf{L}}}) = \underline{\underline{\text{div}}} [(\mathbf{a} + \alpha \mathbf{e}_t) \underline{\underline{\mathbf{L}}}] , \quad (53)$$

ahol $\underline{\underline{\text{Div}}}$ a négyes tenzordivergencia jele, az $\mathbf{a} + \alpha \mathbf{e}_t$ egy *tetszőleges* négyes vektor, a $\underline{\underline{\text{div}}}$ pedig az 5. fejezetben már tárgyalt négyes divergencia jele. (A jobb oldalon a tenzor balról van szorozva a vektorral!). Minthogy a jobb oldal invariáns skalár, azért $\underline{\underline{\text{Div}}} \underline{\underline{\mathbf{L}}}$ *négyes vektor*, mely az $\mathbf{a} + \alpha \mathbf{e}_t$ négyes vektorral skaláris szorzatot ad. Alkalmazzuk az (53) definíciót a (48) antiszimmetrikus négyes tenzorra, tekintettel a (34) definícióra is!

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \alpha \mathbf{e}_t) (\underline{\underline{\text{Div}}} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}) &= \underline{\underline{\text{div}}} [(\mathbf{a} + \alpha \mathbf{e}_t) \underline{\underline{\mathbf{Q}}}] \equiv \underline{\underline{\text{div}}} [\mathbf{a} \times \mathbf{s} + (\mathbf{a}\mathbf{q}) \mathbf{e}_t + \alpha \mathbf{q}] \equiv \\ &\equiv \underline{\underline{\text{div}}} (\mathbf{a} \times \mathbf{s} + \alpha \mathbf{q}) + \frac{1}{c} \frac{\partial (\mathbf{a}\mathbf{q})}{\partial t} , \end{aligned}$$

vagyis a hármas divergencia szabályai szerint

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \alpha \mathbf{e}_t) (\underline{\underline{\text{Div}}} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}) &= -(\text{rot } \mathbf{s}) \mathbf{a} + \alpha \underline{\underline{\text{div}}} \mathbf{q} + \frac{1}{c} \mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \equiv \\ &\equiv (\mathbf{a} + \alpha \mathbf{e}_t) \left(-\text{rot } \mathbf{s} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \mathbf{e}_t \underline{\underline{\text{div}}} \mathbf{q} \right) . \end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{a} + \alpha \mathbf{e}_t$ tetszőleges, azért

$$\underline{\underline{Div}} \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{Div}} (\mathbf{s} \times \mathbf{I} + \mathbf{q} \circ \mathbf{e}_t - \mathbf{e}_t \circ \mathbf{q}) = -\text{rot } \mathbf{s} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \text{div } \mathbf{q} \mathbf{e}_t. \quad (54)$$

E képletből az is látszik, hogy a $\underline{\underline{Div}} \underline{\underline{Q}}$ tenzordivergencia független az (53) definícióban lévő $\mathbf{a} + \alpha \mathbf{e}_t$ állandó négyes vektortól. Az (52) szerinti $\underline{\underline{Q}}_d$ duális tenzor négyes divergenciáját annak figyelembevételével kapjuk, hogy \mathbf{s} helyére \mathbf{q} , és \mathbf{q} helyére $-\mathbf{s}$ kerül:

$$\underline{\underline{Div}} \underline{\underline{Q}}_d = \underline{\underline{Div}} (\mathbf{q} \times \mathbf{I} - \mathbf{s} \circ \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_t \circ \mathbf{s}) = -\text{rot } \mathbf{q} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + \text{div } \mathbf{s} \mathbf{e}_t. \quad (55)$$

8. fejezet

A Maxwell-egyenletek négydimenziós alakja

A (47) képlet szerint a négyes térerősség-tenzor

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = -\mathbf{B} \times I - \frac{1}{c} \mathbf{E} \circ \underline{\mathbf{e}}_t + \frac{1}{c} \underline{\mathbf{e}}_t \circ \mathbf{E}, \quad (56)$$

tehát a (48) jelölés szerint itt

$$\mathbf{s} = -\mathbf{B}, \quad \mathbf{q} = -\frac{1}{c} \mathbf{E}, \quad (*)$$

és így az $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ tenzor mátrixa derékszögű koordináta-rendszerben a (49) képlet szerint

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & \frac{1}{c} E_x \\ -B_z & 0 & B_x & \frac{1}{c} E_y \\ B_y & -B_x & 0 & \frac{1}{c} E_z \\ -\frac{1}{c} E_x & -\frac{1}{c} E_y & -\frac{1}{c} E_z & 0 \end{bmatrix}. \quad (57)$$

Az $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ tenzor duáljának divergenciája az (55) képlet szerint

$$\text{Div } \underline{\underline{\mathbf{F}}}_d = \frac{1}{c} \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{div } \mathbf{B} \underline{\mathbf{e}}_t.$$

Láthatjuk, hogy

$$\text{Div } \underline{\underline{\mathbf{F}}}_d = 0 \quad (58)$$

ekvivalens négyes változata Maxwell II. és III. egyenletének.

Az elektromágneses teret áramok és töltések gerjesztik, ezt – mint ismeretes – az I. és IV. Maxwell-egyenlet fejezi ki:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho,$$

ahol $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ az eltolási áramsűrűség, tehát a harmadik áramsűrűségfajta a konduktív és konvektív mellett. Írjuk át ezeket az egyenleteket négyes vektorokkal úgy, hogy a jobb oldalon a négyes áramsűrűség (35a) képlete álljon:

$$\text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial (c\mathbf{D})}{\partial t} + \text{div } (c\mathbf{D}) \underline{\mathbf{e}}_t = \mathbf{J} + c\rho \underline{\mathbf{e}}_t \equiv \underline{\underline{\mathbf{J}}}.$$

Összehasonlítva ezt a az (54) egyenlettel,

$$\mathbf{s} = -\mathbf{H}, \quad \mathbf{q} = -c\mathbf{D} \quad (**)$$

helyettesítéssel bevezethető a

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}} = -\mathbf{H} \times \mathbf{I} - c\mathbf{D} \circ \underline{\mathbf{e}}_t + \underline{\mathbf{e}}_t \circ c\mathbf{D} \quad (59)$$

négyes gerjesztettségi tenzor, amellyel az előző egyenlet a

$$\underline{\underline{Div}} \underline{\underline{\mathbf{G}}} = \underline{\underline{\mathbf{J}}} \quad (60)$$

alakot ölti, és ez ekvivalens négyes változata az I. és IV. Maxwell-egyenletnek.

A $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$ tenzor mátrixa derékszögű koordináta-rendszerben:

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & cD_x \\ -H_z & 0 & H_x & cD_y \\ H_y & -H_x & 0 & cD_z \\ -cD_x & -cD_y & -cD_z & 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Ismeretes, hogy *vákuumban*, (és közelítéssel levegőben)

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \text{és} \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0} \equiv c^2 \mu_0 \mathbf{D}.$$

Ezeket az $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ tenzor (56) jelű képletébe helyettesítve, tekintve az (59) egyenletet is, a következőt kapjuk:

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \mu_0 (-\mathbf{H} \times \mathbf{I} - c\mathbf{D} \circ \underline{\mathbf{e}}_t + \underline{\mathbf{e}}_t \circ c\mathbf{D}) \equiv \mu_0 \underline{\underline{\mathbf{G}}}. \quad (62)$$

Így tehát *vákuumban* az elektromágneses teret teljesen meghatározó (56)-(62) összefüggések négydimenziós vektor-tenzor képletek, tehát *egzakt természet-törvények*.

Általános esetben, közeg jelenlétében a négyes térerősség-tenzor és a négyes gerjesztettségi tenzor kapcsolatát a mágneszettség és elektromos polározás vektorának ismert

$$\mathbf{M} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}, \quad \text{és} \quad \mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

definíciói alapján írhatjuk fel. A négyes polarizációs tenzor:

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} - \mu_0 \underline{\underline{\mathbf{G}}} = -(\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}) \times \mathbf{I} - \frac{1}{c} (\mathbf{E} - c^2 \mu_0 \mathbf{D}) \circ \underline{\mathbf{e}}_t + \underline{\mathbf{e}}_t \circ \frac{1}{c} (\mathbf{E} - c^2 \mu_0 \mathbf{D}),$$

azaz, használva a $c^2 \varepsilon_0 \mu_0 = 1$ képletet is

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = -\mathbf{M} \times \mathbf{I} + c\mu_0 \mathbf{P} \circ \underline{\mathbf{e}}_t - \underline{\mathbf{e}}_t \circ c\mu_0 \mathbf{P}, \quad (63a)$$

és

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \mu_0 \underline{\underline{\mathbf{G}}} + \underline{\underline{\mathbf{P}}}. \quad (63b)$$

A polarizáció természetesen függ a gerjesztéstől, tehát $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ függ $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$ -től. A konkrétabb, speciális közegegyenletekkel a következő fejezet foglalkozik.

A négydimenziós egyenletek és az (51) képletek alapján felírhatók a térjellemező hármas vektorok komponenseinek inerciarendszerek közötti transzformációs képletei.

Ezek az $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ tenzor esetében az (51) képletek és a (*), azaz $\mathbf{s} = -\mathbf{B}$, $\mathbf{q} = -\frac{1}{c}\mathbf{E}$ alapján:

$$\left. \begin{aligned} B'_{\parallel} &= B_{\parallel}, & B_{\parallel} &= B'_{\parallel} \\ B'_{\perp} &= \kappa \left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp} \right), & B_{\perp} &= \kappa \left(\mathbf{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v}' \times \mathbf{E}'_{\perp} \right) \\ E'_{\parallel} &= E_{\parallel}, & E_{\parallel} &= E'_{\parallel}, \\ E'_{\perp} &= \kappa \left(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp} \right), & E_{\perp} &= \kappa \left(\mathbf{E}'_{\perp} - \mathbf{v}' \times \mathbf{B}'_{\perp} \right). \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Az $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ tenzor invariánsai $s\mathbf{q}$ és $s^2 - \mathbf{q}^2$ alapján:

$$\mathbf{B}\mathbf{E} \text{ és } \mathbf{B}^2 - \frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2. \quad (64^*)$$

A (64) képletsor negyedik sorában látjuk a villamos térerősség módosulásának pontosabb értékét „mozgási indukálás” formájában, amely csak kis sebességeknél ($\kappa \cong 1$) megy át a klasszikus értékbe. A második sor szerint villamos tér jelenlétében a mágneses tér is módosul kis mértékben a másik inerciarendszerben.

Az (59) egyenlet szerinti $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$ gerjesztettségi tenzor hármas térjellemezőinek transzformációs képletei az (51) összefüggés és (**), azaz $\mathbf{s} = -\mathbf{H}$, $\mathbf{q} = -c\mathbf{D}$ alapján:

$$\left. \begin{aligned} H'_{\parallel} &= H_{\parallel}, & H_{\parallel} &= H'_{\parallel}, \\ \mathbf{H}'_{\perp} &= \kappa \left(\mathbf{H}_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}_{\perp} \right), & \mathbf{H}_{\perp} &= \kappa \left(\mathbf{H}'_{\perp} + \mathbf{v}' \times \mathbf{D}'_{\perp} \right), \\ D'_{\parallel} &= D_{\parallel}, & D_{\parallel} &= D'_{\parallel} \\ \mathbf{D}'_{\perp} &= \kappa \left(\mathbf{D}_{\perp} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H}_{\perp} \right), & \mathbf{D}_{\perp} &= \kappa \left(\mathbf{D}'_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}' \times \mathbf{H}'_{\perp} \right) \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Az $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$ tenzor invariánsai $s\mathbf{q}$ és $s^2 - \mathbf{q}^2$ alapján:

$$\mathbf{H}\mathbf{D} \text{ és } \mathbf{H}^2 - c^2 \mathbf{D}^2. \quad (65^*)$$

A (65) képletsor második sorában (a κ szorzótól eltekintve) klasszikusan is magyarázható a töltésmozgással együtt járó mágneses tér. A negyedik sor

szerint kis mértékben a mozgó mágneses térrel is együtt jár töltésváltozás a másik inerciarendszerben.

Hasonlóan kapjuk a polarizációs térjellemzők transzformációs képleteit a (63a) jelű négyes polarizációs tenzor és az (51) képlet szerint (itt $\mathbf{s} = -\mathbf{M}$, $\mathbf{q} = c\mu_0 \mathbf{P}$):

$$\left. \begin{aligned} M'_{\parallel} &= M_{\parallel}, & M_{\parallel} &= M'_{\parallel}, \\ M'_{\perp} &= \kappa (\mathbf{M}_{\perp} + \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{P}_{\perp}), & \mathbf{M}_{\perp} &= \kappa (\mathbf{M}'_{\perp} - \mu_0 \mathbf{v}' \times \mathbf{P}'_{\perp}), \\ P'_{\parallel} &= P_{\parallel} & P_{\parallel} &= P'_{\parallel} \\ P'_{\perp} &= \kappa (\mathbf{P}_{\perp} - \varepsilon_0 \mathbf{v} \times \mathbf{M}_{\perp}), & \mathbf{P}_{\perp} &= \kappa (\mathbf{P}'_{\perp} + \varepsilon_0 \mathbf{v}' \times \mathbf{M}'_{\perp}). \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

A $\underline{\mathbf{P}}$ tenzor invariánsai $\underline{\mathbf{s}}\mathbf{q}$ és $\mathbf{s}^2 - \mathbf{q}^2$ alapján:

$$\mathbf{M}\mathbf{P} \text{ és } \mathbf{M}^2 - \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \mathbf{P}^2. \quad (66^*)$$

Az inerciarendszerhez képest mozgó elektromos polarizáció mágnesezettséggel, az inerciarendszerhez képest mozgó mágnesezettség elektromos polarizációval jár.

Itt tárgyaljuk még a *potenciál négydimenziós alakjának* meghatározását is. Minthogy nem kívánunk foglalkozni a négydimenziós vektoranalízis teljes apparátusával, a következők megértéséhez szükséges *négyes rotációt* definiálószerűen tárgyaljuk. E szerint a

$$\underline{\mathbf{q}}(\mathbf{R}) = \mathbf{q}(\mathbf{R}) + \gamma(\mathbf{R}) \mathbf{e}_t, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} + ct \mathbf{e}_t, \quad (67)$$

négyes vektorfüggvény rotációja az alábbi antiszimmetrikus négyes tenzor:

$$\underline{\text{rot}} \underline{\mathbf{q}} = \left(\text{grad} \gamma + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right) \times \mathbf{I} + \text{rot} \mathbf{q} \circ \mathbf{e}_t - \mathbf{e}_t \circ \text{rot} \mathbf{q}. \quad (68)$$

A (68) definíció szerinti antiszimmetrikus tenzor rotációjellegét például úgy láthatjuk be, hogy képezzük a derékszögű koordináta-rendszerbeli mátrixát. Ehhez felhasználjuk a (49) képletet azzal, hogy itt a (48) és (68) képletek összehasonlítása alapján \mathbf{s} helyére $\text{grad} \gamma + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}$, és \mathbf{q} helyére $\text{rot} \mathbf{q}$ kerül. Tehát

$$[\underline{\text{rot}} \underline{\mathbf{q}}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial q_z}{\partial t} & \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial q_y}{\partial t} & \frac{\partial q_y}{\partial z} - \frac{\partial q_z}{\partial y} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial q_z}{\partial t} & 0 & -\frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial q_x}{\partial t} & \frac{\partial q_x}{\partial z} - \frac{\partial q_z}{\partial x} \\ -\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial q_y}{\partial t} & \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial q_x}{\partial t} & 0 & \frac{\partial q_x}{\partial y} - \frac{\partial q_y}{\partial x} \\ \frac{\partial q_z}{\partial y} - \frac{\partial q_y}{\partial z} & \frac{\partial q_x}{\partial z} - \frac{\partial q_z}{\partial x} & \frac{\partial q_y}{\partial x} - \frac{\partial q_x}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \quad (68a)$$

(Az idő szerinti deriváltak a téridő-világ indefinit metrikája miatt szerepelnek *ellentétes előjellel* a rotációkomponensekben. Megjegyezzük még, hogy

a vektor rotációja alapján véve deriválttenzora antiszimmetrikus részének duálja, ami négy dimenzió esetén a fenti antiszimmetrikus tenzor, három dimenzió esetén pedig az ismert vektor.)

Vegyük a (68) antiszimmetrikus tenzor (54) képlet szerinti tenzordivergenciáját!

$$\underline{\text{Div rot } \mathbf{q}} = -\text{rot} \left(\text{grad } \gamma + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{q}) - \text{div} (\text{rot } \mathbf{q}) ,$$

tehát

$$\underline{\text{Div rot } \mathbf{q}} = \underline{\mathbf{0}} . \quad (69)$$

Mint hogy az (58) összefüggés szerint az $\underline{\mathbf{F}}$ négyes térerősség tenzor duáljának divergenciája is zérus, maga $\underline{\mathbf{F}}_d$ is egy négyes vektor rotációjaként írható fel. Az (56), az utána lévő (*), és (52) képletek összevetéséből tehát

$$\underline{\mathbf{F}}_d = -\frac{1}{c} \mathbf{E} \times \mathbf{I} + \mathbf{B} \circ \mathbf{e}_t - \mathbf{e}_t \circ \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{q} .$$

Összehasonlítva ezt a (68) egyenlettel, a keresett \mathbf{q} -ra a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \text{grad} (c\gamma) , \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{q} .$$

Ebből látszik, hogy a keresett hármas \mathbf{q} vektor éppen az \mathbf{A} hármas vektorpotenciál és γ a φ skalárpotenciál $\frac{1}{c}$ -szerese, mert

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi , \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} . , \quad (70a)$$

és az

$$\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \frac{1}{c} \varphi \mathbf{e}_t \quad (70b)$$

négyes vektor rotációja a négyes térerősségtenzor duálja:

$$\text{rot } \underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{F}}_d , \quad (71)$$

ezért $\underline{\mathbf{A}}$ -t **négyes potenciálnak** nevezik. Az $\underline{\mathbf{A}}$ négyes vektor jellegéből következik, hogy a négyes potenciál transzformációja Lorentz-típusú.

Speciálisan, stacionárius terek esetén vákuumban (levegőben) a skalárpotenciál a $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dV}{R} \equiv \frac{c^2\mu_0}{4\pi} \int \frac{\rho dV}{R}$ képlettel, a vektorpotenciál az $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} dV}{R}$ képlettel számítható, ahol R az észlelési pont és a töltés- vagy áramsűrűség helye közötti távolság. A (70b) és a (35a) alapján

$$\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \frac{1}{c} \varphi \mathbf{e}_t = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} + c\rho \mathbf{e}_t}{R} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}}{R} dV ,$$

és ebből közvetlenül látszik, hogy $\underline{\mathbf{A}}$ négyes vektor, mert $\underline{\mathbf{J}}$ is az.

Az elektromágneses tér vákuumban a négyes potenciállal egyszerűen kifejezhető. A (60) és (62) képletek összevonásával

$$\underline{\text{Div}} \underline{\mathbf{F}} = \mu_0 \underline{\mathbf{J}}. \quad (*)$$

A (48) és (52) egyenletekből láthatjuk, hogy $\left(\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_d\right)_d = -\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$, azaz hogy a négyes tenzor duáljának duálja a tenzor negatív értéke, tehát a (71) összefüggés, majd a (*) egyenlet alapján:

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = -(\underline{\text{rot}} \underline{\mathbf{A}})_d, \quad \underline{\text{Div}} [(\underline{\text{rot}} \underline{\mathbf{A}})_d] = -\mu_0 \underline{\mathbf{J}}. \quad (**)$$

A (68) képletet alkalmazva a (70b) négyes potenciálra:

$$\underline{\text{rot}} \underline{\mathbf{A}} = \left(\frac{1}{c} \text{grad } \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial t}\right) \times \underline{\mathbf{I}} + \text{rot } \underline{\mathbf{A}} \circ \underline{\mathbf{e}}_t - \underline{\mathbf{e}}_t \circ \text{rot } \underline{\mathbf{A}}.$$

Ezt a (**) második egyenletébe helyettesítjük a (48) és (55) egyenletek figyelembevételével:

$$-\text{rot } \text{rot } \underline{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2} \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{A}}}{\partial t^2} + \left[\frac{1}{c} \text{div } \text{grad } \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \underline{\mathbf{A}})\right] \underline{\mathbf{e}}_t = -\mu_0 \underline{\mathbf{J}}.$$

Mínt hogy $\text{div } \text{grad } \varphi = \Delta \varphi$, ahol Δ a (skaláris) Laplace-operátor, amely derékszögű koordináta-rendszerben $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ alakú, továbbá $\text{rot } \text{rot } \underline{\mathbf{A}} = \text{grad } \text{div } \underline{\mathbf{A}} - \Delta \underline{\mathbf{A}}$, ahol itt a vektorikus Δ -operátor áll, melynek hatása általános esetben a deriválttenzor divergenciája, tehát $\Delta \underline{\mathbf{A}} = \text{Div } \text{Grad } \underline{\mathbf{A}}$, és csak derékszögű koordináta-rendszerben olyan alakú, mint a skaláris Δ -operátor, azért az utolsó egyenletet így rendezhetjük át:

$$\Delta \underline{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{A}}}{\partial t^2} - \text{grad} \left(\text{div } \underline{\mathbf{A}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{1}{c} \left[\left(\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{div } \underline{\mathbf{A}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right] \underline{\mathbf{e}}_t = -\mu_0 \underline{\mathbf{J}}.$$

A (71) képlet a négyes potenciálnak csak a rotációját adja meg, tehát előírhatjuk a divergenciáját. Egyik lehetőségként legyen ez 0. Így a (70) és (34) egyenletek alapján:

$$\underline{\text{div}} \underline{\mathbf{A}} = \text{div } \underline{\mathbf{A}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \left(\frac{\varphi}{c}\right)}{\partial t} \equiv \text{div } \underline{\mathbf{A}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (72)$$

Ez az ún. Lorentz-feltétel. Tekintettel erre, előző összefüggésünk a következőre egyszerűsödik:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \left(\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \mathbf{e}_t = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

Bevezették a *négyes d'Alambert operátort* is négyzet jelöléssel, a következőképpen:

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (73)$$

Ezzel az előző kifejezésből és a (70b) képletből az alábbiakat kapjuk:

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}, \quad (74a)$$

vagy komponensenként

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}, \quad \square \varphi = -c^2 \mu_0 \rho \equiv -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (74b)$$

ahol \mathbf{J} és ρ a hely függvénye. [Egyébként tisztán formálisan $\square = (\nabla + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{e}_t)^2$, azaz a „négyes nabla operátor” normanégyzete.]

Ebben a fejezetben egyrészt azt láthatjuk, hogy megfelelő négydimenziós mennyiségekkel a Maxwell-egyenletek négydimenziós alakra hozhatók, és ezzel megkaphatók a hagyományos térjellelmezőknek inerciarendszerek közti transformálási szabályai, másrészt a négydimenziós tárgyalásmód még jobban hangsúlyozza az elektromos és mágneses jelenségek és mennyiségek elválaszthatatlanságát.

9. fejezet

Közegegyenletek

Először az Ohm-törvényt relativisztikus alakjával foglalkozunk. Ismeretes a klasszikus elektrodinamika differenciális Ohm-törvénye, amely *nyugalomban* lévő vezetőre adja meg a kapcsolatot az áramsűrűség és villamos térerősség (hármás) vektora között. Ha *homogén, izotróp* közegre szorítkozunk, akkor ez a törvény:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (75)$$

ahol a σ skalár a vezetőképesség. Mivel ez *álló* vezetőre vonatkozik, azért a bal oldalon *konduktív* áramsűrűség áll. Ezt az egyenletet kell négydimenziósra alakítani. Csakhogy a villamos térerősségnek nincs négyes alakja. Előbb erre van szükség. Ha a nyugalmi rendszer a vesszős, akkor a négyes térerősség tenzor az (56) képlet szerint e rendszerben felírva:

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = -\mathbf{B}' \times \mathbf{I}' - \frac{1}{c} \mathbf{E}' \circ \underline{\mathbf{e}}'_t + \frac{1}{c} \underline{\mathbf{e}}'_t \circ \mathbf{E}'.$$

Ebből következik, hogy

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} c \underline{\mathbf{e}}'_t = \mathbf{E}' \equiv \mathbf{E}' + 0 \cdot \underline{\mathbf{e}}'_t,$$

tehát a bal oldalon olyan négyes kifejezés áll, amely a nyugalmi inerciarendszerben a villamos térerősséget adja. Mivel $c \underline{\mathbf{e}}'_t$ a (17) képlet szerint a négyes sebességvektor nyugalmi értéke, azért a vezetőhöz képest állandó \mathbf{v} sebességgel mozgó inerciarendszerben a *négyes villamos térerősséget* az

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} \underline{\mathbf{u}} \equiv \underline{\underline{\mathbf{F}}} \kappa (\mathbf{v} + c \underline{\mathbf{e}}_t) \quad (76)$$

kifejezés értelmezi. A négyes Ohm-törvényt úgy kapjuk, hogy a (75) összefüggés bal oldala helyére a (42) képlet szerinti négyes konduktív áramsűrűség vektort, jobb oldalán pedig a hármás vektor helyére a (76) képlet szerinti négyes vektort tesszük:

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}}_d \equiv \mathbf{J}_d + c \rho_d \underline{\mathbf{e}}_t = \sigma \underline{\underline{\mathbf{E}}} \equiv \sigma \underline{\underline{\mathbf{F}}} \underline{\mathbf{u}}. \quad (77)$$

A (77) bal oldala a (41) egyenlet felhasználásával: $\mathbf{J}_d = \mathbf{J} - \rho \mathbf{v} + \rho_d \mathbf{v} + c \rho_d \mathbf{e}_t$, a jobb oldal pedig az (56) egyenlet alapján

$$\begin{aligned} \sigma \underline{\mathbf{F}} \mathbf{u} &= \sigma \left(-\mathbf{B} \times \mathbf{I} - \frac{1}{c} \mathbf{E} \circ \mathbf{e}_t + \frac{1}{c} \mathbf{e}_t \circ \mathbf{E} \right) \kappa (\mathbf{v} + c \mathbf{e}_t) = \\ &= \sigma \kappa \left(-\mathbf{B} \times \mathbf{v} + \mathbf{e}_t \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}}{c} + \mathbf{E} \right), \end{aligned}$$

tehát $c \rho_d = \sigma \kappa \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}}{c}$, és $\mathbf{J} - \rho \mathbf{v} + \rho_d \mathbf{v} = -\mathbf{B} \times \mathbf{v} + \mathbf{E}$.

Végül

$$\rho_d = \frac{\sigma \kappa}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}), \quad \mathbf{J} - \rho \mathbf{v} = \sigma \kappa \left[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})}{c^2} \mathbf{v} \right]. \quad (78)$$

Ezek a relativisztikus Ohm-törvény összefüggései. A c fénysebességhez képest kicsiny v sebességeknél

$$\rho_d \cong 0, \quad \mathbf{J} - \rho \mathbf{v} \cong \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

ahol a második képlet bal oldalán a mozgó vezető nem relativisztikus konduktív áramsűrűsége, jobb oldalán pedig a „mozgási” indukálással bővített villamos térerősség σ -szorososa áll.

A következőképpen is eljuthatunk az Ohm-törvény relativisztikus alakjához. A vezetővel együttmozgó, nyugalmi rendszerben: $J'_{\parallel} = \sigma E'_{\parallel}$, $\rho' = 0$, és $J'_{\perp} = \sigma \mathbf{E}'_{\perp}$.

Ezeket az összefüggéseket a (36) és (64) transzformációs képletekkel úgy alakítjuk át, hogy a „vesszős”, nyugalmi mennyiségek helyett a „vesszőtlen” mozgó rendszerbeli mennyiségek álljanak:

$$\begin{aligned} \kappa (J_{\parallel} - \rho v) &= \sigma E_{\parallel}, \quad \rho = \kappa \left(0 + \frac{v}{c^2} J'_{\parallel} \right) = \kappa \frac{v}{c^2} \sigma E'_{\parallel} = \kappa \frac{v}{c^2} \sigma E_{\parallel} = \sigma \kappa \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}}{c^2}, \\ \mathbf{J}_{\perp} &= \sigma \kappa (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}). \end{aligned}$$

Ezek az egyenletek megegyeznek a (78) jelűekkel, mert a (78) párhuzamos komponensének számításánál ott az \mathbf{E} párhuzamos komponense szorozójaként adódó $1 - \frac{v^2}{c^2}$ éppen $\frac{1}{\kappa^2}$ -tel egyenlő.

A továbbiakban állandó dielektromos tényezőjű és állandó mágneses permeabilitású, *homogén, izotróp anyagra* vonatkozóan keressük meg a relativisztikus összefüggéseket a \mathbf{B} , \mathbf{E} , \mathbf{H} és \mathbf{D} térjellelmező hármas vektorok között, ha a közeg a vizsgált inerciarendszerhez képest mozog. A közeg nyugalmi rendszerében az alábbi összefüggések állnak fenn:

$$\mathbf{D}'_{\parallel} = \varepsilon \mathbf{E}'_{\parallel}, \quad \mathbf{D}'_{\perp} = \varepsilon \mathbf{E}'_{\perp}, \quad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mu \mathbf{H}'_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \mu \mathbf{H}'_{\perp}.$$

A (64) és (65) transzformációs képletekkel átírjuk ezeket az egyenleteket abba az inerciarendszerbe, amelyben a közeg \mathbf{v} sebességgel mozog.

$$\begin{aligned} D_{\parallel} &= \varepsilon E_{\parallel}, \quad \kappa \left(\mathbf{D}_{\perp} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H}_{\perp} \right) = \varepsilon \kappa (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}), \\ B_{\parallel} &= \mu H_{\parallel}, \quad \kappa \left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp} \right) = \mu \kappa (\mathbf{H}_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}_{\perp}). \end{aligned} \quad (*)$$

Ezeknek az összefüggéseknek a felhasználásával tehát

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= D_{\parallel} \mathbf{v}^0 + \mathbf{D}_{\perp} = \varepsilon E_{\parallel} \mathbf{v}^0 + \varepsilon (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}) - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H}_{\perp}, \\ \mathbf{B} &= B_{\parallel} \mathbf{v}^0 + \mathbf{B}_{\perp} = \mu H_{\parallel} \mathbf{v}^0 + \mu (\mathbf{H}_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}_{\perp}) + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp}. \end{aligned}$$

azaz

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H}_{\perp} &= \varepsilon (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}) \\ \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp} &= \mu (\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}_{\perp}) \end{aligned} \right\}. \quad (79)$$

Célszerű a gerjesztési térjellemzőket a térerősségekkel kifejezni és fordítva. Ehhez a (79) képletekből egy-egy térjellemzőt ki kell iktatni.

Először a \mathbf{D} vektort küszöböljük ki. A (79) első képletéből a vektorszorzat kifejtési tételével

$$\mathbf{v} \times \mathbf{D}_{\perp} = \mathbf{v} \times \mathbf{D} = \varepsilon (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp} - v^2 \mathbf{B}_{\perp}) + \frac{v^2}{c^2} \mathbf{H}_{\perp},$$

Ezt a (79) μ -vel osztott második képletébe helyettesítjük:

$$\mathbf{H} - \frac{v^2}{c^2} \mathbf{H}_{\perp} - \varepsilon (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp} - v^2 \mathbf{B}_{\perp}) = \frac{\mathbf{B}}{\mu} - \frac{1}{c^2 \mu} \mathbf{v} \times \mathbf{E}.$$

Ámde a (*) második sorának első képletét is felhasználva

$$\mathbf{H}_{\perp} = \mathbf{H} - \mathbf{H}_{\parallel} = \mathbf{H} - \frac{\mathbf{B}_{\parallel}}{\mu} = \mathbf{H} - \frac{\mathbf{B} - \mathbf{B}_{\perp}}{\mu} = \mathbf{H} + \frac{\mathbf{B}_{\perp}}{\mu} - \frac{\mathbf{B}}{\mu},$$

ezzel

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \mathbf{H} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\mathbf{B}}{\mu} + \left(\varepsilon - \frac{1}{c^2 \mu}\right) \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp} + \left(\frac{v^2}{c^2 \mu} - \varepsilon v^2\right) \mathbf{B}_{\perp},$$

végül a (9) és a $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$ összefüggés figyelembevételével kapjuk:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} + \frac{\kappa^2}{c^2 \mu} (\varepsilon_r \mu_r - 1) (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp} - v^2 \mathbf{B}_{\perp}). \quad (80a)$$

A következőkben a \mathbf{D} vektort fejezzük ki, ezért a \mathbf{H} vektort küszöböljük ki. A (79) első egyenletéből a (80a) képlet helyettesítésével nyerjük:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \varepsilon (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_\perp) - \frac{1}{c^2 \mu} \left[\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{\kappa^2}{c^2} (\varepsilon_r \mu_r - 1) \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_\perp - v^2 \mathbf{B}_\perp) \right];$$

A következő lépésben a $\mathbf{v} \times \mathbf{B} \equiv \mathbf{v} \times \mathbf{B}_\perp$ azonosságot és a vektorszorzat kifejtési tételét használjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \left[\varepsilon - \frac{1}{c^2 \mu} + \frac{1}{c^2 \mu} \kappa^2 \frac{v^2}{c^2} (\varepsilon_r \mu_r - 1) \right] (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_\perp) + \\ + \frac{1}{c^2 \mu} \kappa^2 \frac{v^2}{c^2} (\varepsilon_r \mu_r - 1) \mathbf{E}_\perp, \end{aligned}$$

A szögletes zárójeles kifejezés a következőképpen írható át:

$$\frac{1}{c^2 \mu} (\varepsilon_r \mu_r - 1) \left(1 + \kappa^2 \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{\kappa^2}{c^2 \mu} (\varepsilon_r \mu_r - 1),$$

ahol a κ (9) képletét is felhasználtuk. Továbbá $\frac{1}{c^2 \mu} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\mu} = \frac{\varepsilon_0}{\mu_r}$. Így tehát

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \frac{\varepsilon_0 \kappa^2}{\mu_r} (\varepsilon_r \mu_r - 1) \left(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_\perp + \frac{v^2}{c^2} \mathbf{E}_\perp \right) \quad (80b)$$

A \mathbf{B} vektornak és az \mathbf{E} vektornak a \mathbf{H} és \mathbf{D} gerjesztésiékekkel való kifejezéseit hasonlóan kapjuk. A képleteket levezetés nélkül közöljük:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \frac{\mu_0}{\varepsilon_r} \kappa^2 (\varepsilon_r \mu_r - 1) \left(\frac{v^2}{c^2} \mathbf{H}_\perp - \mathbf{v} \times \mathbf{D}_\perp \right). \quad (80c)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} - \frac{\kappa^2}{c^2 \varepsilon} (\varepsilon_r \mu_r - 1) (\mathbf{v} \times \mathbf{H}_\perp + v^2 \mathbf{D}_\perp). \quad (80d)$$

A közegek polarizációs hatása természetesen az $\underline{\mathbf{F}}$ négyes térerősség tenzor és a $\underline{\mathbf{G}}$ gerjesztettségi tenzor között is kapcsolatot teremt. A „vesszős” nyugalmi rendszerben, az (59) képlet szerint felírt gerjesztettségi tenzort a következőképpen alakíthatjuk át, felhasználva a hármas térjellelmzőknek a közegpolarizáció okozta kapcsolatát:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{G}} &= -\frac{\mathbf{B}'}{\mu} \times \mathbf{I}' - c \varepsilon \mathbf{E}' \circ \underline{\mathbf{e}}'_t + \underline{\mathbf{e}}'_t \circ c \varepsilon \mathbf{E}' \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\mu} \left[-\mathbf{B}' \times \mathbf{I}' + c^2 \varepsilon \mu \left(-\frac{1}{c} \mathbf{E}' \circ \underline{\mathbf{e}}'_t + \underline{\mathbf{e}}'_t \circ \frac{1}{c} \mathbf{E}' \right) \right] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\mu} \left[-\mathbf{B}' \times \mathbf{I}' - \frac{1}{c} \mathbf{E}' \circ \underline{\mathbf{e}}'_t + \frac{1}{c} \underline{\mathbf{e}}'_t \circ \mathbf{E}' + (c^2 \varepsilon \mu - 1) \left(-\frac{1}{c} \mathbf{E}' \circ \underline{\mathbf{e}}'_t + \underline{\mathbf{e}}'_t \circ \frac{1}{c} \mathbf{E}' \right) \right] \end{aligned}$$

$$\equiv \frac{1}{\mu} \left[\underline{\mathbf{F}} + (\varepsilon_r \mu_r - 1) (-\underline{\mathbf{F}}\mathbf{e}'_t \circ \mathbf{e}'_t + \mathbf{e}'_t \circ \underline{\mathbf{F}}\mathbf{e}'_t) \right],$$

Mint hogy a nyugalmi rendszerben $c\mathbf{e}'_t = \underline{\mathbf{u}}$ (a négyes sebesség), azért a gerjesztettségi négyes tenzor a térerősség tenzorral kifejezve:

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}} = \frac{1}{\mu} \left[\underline{\mathbf{F}} + \frac{\varepsilon_r \mu_r - 1}{c^2} (\underline{\mathbf{u}} \circ \underline{\mathbf{F}}\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{F}}\underline{\mathbf{u}} \circ \underline{\mathbf{u}}) \right]. \quad (81a)$$

Hasonló levezetéssel kapjuk a négyes térerősség tenzort a gerjesztettségi tenzorral kifejezve:

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \mu \underline{\underline{\mathbf{G}}} + \frac{\mu_0}{\varepsilon_r} \frac{\varepsilon_r \mu_r - 1}{c^2} (\underline{\underline{\mathbf{G}}}\underline{\mathbf{u}} \circ \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}} \circ \underline{\underline{\mathbf{G}}}\underline{\mathbf{u}}). \quad (81b)$$

A nyugalmi rendszerhez képest \mathbf{v} sebességű inerciarendszerben a (17) képlet szerint $\underline{\mathbf{u}} = \kappa (\mathbf{v} + c\mathbf{e}_t)$ helyettesítendő. Ezekből a képletekből, elég bonyolultan, szintén levezethetők a (80) jelű összefüggések.

Ferromágneses vagy ferroelektromos anyagokra ezek a kifejezések valamilyen közepes permeabilitással vagy dielektromos tényezővel számolva is csak közelítő jellegűek.

Kristályos szigetelők anizotropok, azaz a \mathbf{D} és \mathbf{E} (hármás) vektorok közötti kapcsolat *irányfüggő*. Ebben az esetben a kapcsolatot háromdimenziós tenzorral fejezhetjük ki, mely a nyugalmi rendszerben érvényes:

$$\mathbf{D}' = \mathbf{K} \mathbf{E}' \quad (82a)$$

A tapasztalat szerint ez a hármás \mathbf{K} tenzor **szimmetrikus**, és a homogenitás további feltételezésével állandó, és nem függ a helytől. A szimmetrikus tenzorok *főtengelytéttele* szerint az \mathbf{E}' -t és \mathbf{D}' -t a sajátvektorok irányába eső komponensekre bonthatjuk, és így

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_1 + \mathbf{E}'_2 + \mathbf{E}'_3, \quad \mathbf{D}' = \varepsilon_1 \mathbf{E}'_1 + \varepsilon_2 \mathbf{E}'_2 + \varepsilon_3 \mathbf{E}'_3. \quad (82b)$$

A linearitás miatt érvényes a szuperpozíció elve, ezért a (80) jelű összefüggéseket oly módon használhatjuk, hogy minden főirányban külön-külön tesszük ezt a megfelelő ε_r és $\mu_r = 1$ -et helyettesítve a képletekbe. Az eredő térjellemző vektorok a főirányba esők vektoros összege. Ezek után pl. adott \mathbf{B} és \mathbf{E} vektorhoz úgy határozzuk meg a hozzájuk tartozó \mathbf{H} és \mathbf{D} vektort, hogy először a \mathbf{B} és \mathbf{E} vektort a kristály főirányaiba eső komponensvektorokra, $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ ill. $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ vektorokra bontjuk, majd minden komponensvektorhoz a (80a) és (80b) képlettel és a megfelelő dielektromos tényezővel kiszámítjuk a $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3$ ill. $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3$ komponensvektorokat, amelyeknek a vektoros összege szolgáltatja a keresett \mathbf{H} ill. \mathbf{D} vektort. Adott \mathbf{H} és \mathbf{D} esetén hasonlóan járunk el a (80c) és (80d) összefüggés használatával.

10. fejezet

Energia-impulzus tenzor

Az energia-impulzus négyes tenzor Maxwell hármass elektromágneses feszültségtenzorának négydimenziós kiterjesztése. A 6. fejezetben tárgyalt elektromágneses erősűrűség, a Lorentz-erősűrűség, vákuumban érvényes. Maxwell feszültségtenzorának (hármass) divergenciája az elektromágneses erősűrűség általánosabb kifejezését adja. A négyes tenzor divergenciája is erősűrűséget ad, és így, akárcsak a hármass, energiasűrűség dimenziójú, de kapcsolatba kerül az impulzus sűrűségével is, innen az elnevezés. Először a hármass tenzort vizsgáljuk. Ez:

$$\mathbf{T} = \mathbf{H} \circ \mathbf{B} + \mathbf{E} \circ \mathbf{D} - w_e \mathbf{I}, \quad (83a)$$

ahol \mathbf{I} a (hármass) egységtenzor, w_e pedig az elektromágneses tér energiasűrűsége. Ez *izotróp* közegben

$$w_e = \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}^2, \quad (83b)$$

és ekkor $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, és $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, és a \mathbf{T} tenzor *szimmetrikus*.

A \mathbf{T} feszültségtenzor divergenciájának meghatározásához szükség van két, nem egészen szokványos (hármass) vektoranalitikai összefüggésre. Az egyik: ha \mathbf{p} és \mathbf{s} vektor helyfüggő, akkor

$$\text{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{s}) = \mathbf{p} \text{Grad} \mathbf{s} + \mathbf{s} \text{Grad} \mathbf{p}, \quad (*)$$

ahol *Grad* a deriválttenzort képző operátor, és itt a deriválttenzor balról van szorozva vektorral [9].

A másik képletet ismertekből vezetjük le. Legyen \mathbf{a} és \mathbf{b} tetszőleges állandó vektorok, \mathbf{q} pedig helyfüggő vektor. Akkor

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \text{rot} \mathbf{q} &= \text{div} [\mathbf{q} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] = \text{div} [(\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b}] = \\ &= \mathbf{a} \text{grad}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b} \text{grad}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}), \end{aligned}$$

A bal oldalt, mint vegyes vektorszorzatot másként felírva, a jobb oldalon pedig használva a (*) egyenlőséget, a következő összefüggéshez jutunk:

$$\mathbf{b}(\text{rot} \mathbf{q} \times \mathbf{a}) = \mathbf{b}(\text{Grad} \mathbf{q}) \mathbf{a} - \mathbf{a}(\text{Grad} \mathbf{q}) \mathbf{b},$$

tehát \mathbf{b} tetszőlegessége miatt

$$(\text{Grad } \mathbf{q}) \mathbf{a} - \mathbf{a} \text{Grad } \mathbf{q} = \text{rot } \mathbf{q} \times \mathbf{a}. \quad (**)$$

A \mathbf{T} tenzor divergenciájának képzéséhez az (53) definíciónak három dimenzióra egyszerűsített alakját használjuk. Ha \mathbf{a} egy tetszőleges állandó vektor, akkor a (83a) összefüggés alapján $\mathbf{a} \text{Div } \mathbf{T} = \text{div} [(\mathbf{a} \mathbf{H}) \mathbf{B} + (\mathbf{a} \mathbf{E}) \mathbf{D} - w_e \mathbf{a}] = \mathbf{B} \text{grad } (\mathbf{a} \mathbf{H}) + (\mathbf{a} \mathbf{H}) \text{div } \mathbf{B} + \mathbf{D} \text{grad } (\mathbf{a} \mathbf{E}) + (\mathbf{a} \mathbf{E}) \text{div } \mathbf{D} - \mathbf{a} \text{grad } w_e$. Mivel $\text{div } \mathbf{B} = 0$, és $\text{div } \mathbf{D} = \rho$, továbbá a (83b) képletet és a (*) kifejezést is felhasználva

$$\begin{aligned} \text{grad } w_e &= \frac{1}{2} \mathbf{H}^2 \text{grad } \mu + \mu \mathbf{H} \text{Grad } \mathbf{H} + \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \text{grad } \varepsilon + \varepsilon \mathbf{E} \text{Grad } \mathbf{E} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{H}^2 \text{grad } \mu + \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \text{grad } \varepsilon + \mathbf{B} \text{Grad } \mathbf{H} + \mathbf{D} \text{Grad } \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Mindezekkel és a (*) további használatával

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \text{Div } \mathbf{T} &= \mathbf{a} (\text{Grad } \mathbf{H}) \mathbf{B} + \mathbf{a} (\text{Grad } \mathbf{E}) \mathbf{D} + \rho (\mathbf{a} \mathbf{E}) - \mathbf{B} (\text{Grad } \mathbf{H}) \mathbf{a} - \\ &\quad - \mathbf{D} (\text{Grad } \mathbf{E}) \mathbf{a} - \left(\frac{1}{2} \mathbf{H}^2 \text{grad } \mu + \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \text{grad } \varepsilon \right) \mathbf{a}, \end{aligned}$$

így az \mathbf{a} vektor tetszőlegessége miatt

$$\begin{aligned} \text{Div } \mathbf{T} &= (\text{Grad } \mathbf{H}) \mathbf{B} - \mathbf{B} (\text{Grad } \mathbf{H}) + (\text{Grad } \mathbf{E}) \mathbf{D} - \mathbf{D} (\text{Grad } \mathbf{E}) + \rho \mathbf{E} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{H}^2 \text{grad } \mu - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \text{grad } \varepsilon. \end{aligned}$$

Alkalmazva a (**) összefüggést, majd a Maxwell-egyenleteket az első négy tagra:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{B} + \text{rot } \mathbf{E} \times \mathbf{D} &= \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \times \mathbf{D} = \\ &= \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}, \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ a Poynting-vektor. Végül

$$\text{Div } \mathbf{T} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{H}^2 \text{grad } \mu - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \text{grad } \varepsilon + \varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = \mathbf{f}_e^* + \varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}. \quad (84)$$

A (84) (első) jobb oldalának első két tagja az áramra és töltésre ható (Lorentz-erő) sűrűsége, további két tagja a közeg inhomogenitásával kapcsolatos erő-sűrűség; az ötödik tag pedig az elektromágneses hullámokkal kapcsolatos erőhatás; ennek nagysága azonban hibás, mert áram, töltés és közeg nélkül lenne $\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}$ erő-sűrűség. Az első négy tag összegét jelöltük a (84) második

jobb oldalán \mathbf{f}_e^* -gal. (Megjegyezzük még, hogy ha ε és μ az anyag sűrűségének is függvénye, akkor az erősűrűség és a feszülstégtenzor kifejezése is kibővíti elektrosztrikciós és magnetostrikciós taggal.) Az eddig tárgyaltak a klasszikus elektrodinamika körébe tartoznak.

A négydimenziós kiterjesztéshez mindenekelőtt a négyes erősűrűség vektorát kell felírni. Ennek „tér”-komponensét a (84) képletből vesszük, „idő”-komponensét pedig a (44) egyenletből:

$$\underline{\mathbf{f}}_e = \mathbf{f}_e^* + \varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \frac{1}{c} (\mathbf{E} \mathbf{J}) \mathbf{e}_t.$$

A továbbiak egyszerűsítése végett az „idő”-komponenst átalakítjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \mathbf{J} &= \mathbf{E} \left(\text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H} - \underbrace{\mathbf{H} \left(\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)}_0 - \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \\ &= -\text{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mu \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{S} - \frac{\partial w_e}{\partial t}, \end{aligned}$$

ezzel a négyes elektromágneses erősűrűség:

$$\underline{\mathbf{f}}_e = \mathbf{f}_e^* + \varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} - \frac{1}{c} \left(\text{div } \mathbf{S} + \frac{\partial w_e}{\partial t} \right) \mathbf{e}_t. \quad (85)$$

(Az átalakított komponens természetesen fizikailag is értelmezhető.) A keresett négydimenziós $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ tenzort a következőképpen írjuk fel:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \mathbf{T} + \mathbf{l}_1 \circ \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_t \circ \mathbf{l}_2 + \lambda \mathbf{e}_t \circ \mathbf{e}_t. \quad (86)$$

Itt \mathbf{T} a Maxwell-féle hármas elektromágneses feszülstégtenzor, és az \mathbf{l}_1 , \mathbf{l}_2 hármas vektorok és a λ skalár úgy határozandó meg, hogy

$$\text{Div } \underline{\underline{\mathbf{T}}} = \underline{\mathbf{f}}_e \quad (87)$$

legyen. Az (53) definíciós egyenlet és a (86) képlet, majd a (34) definíciós egyenlet alapján:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \alpha \mathbf{e}_t) \text{Div } \underline{\underline{\mathbf{T}}} &= \text{div} [(\mathbf{a} + \alpha \mathbf{e}_t) \underline{\underline{\mathbf{T}}}] = \text{div} [\mathbf{a} \mathbf{T} - \alpha \mathbf{l}_2 + (\mathbf{a} \mathbf{l}_1 - \alpha \lambda) \mathbf{e}_t] = \\ &= \text{div} (\mathbf{a} \mathbf{T} - \alpha \mathbf{l}_2) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{a} \mathbf{l}_1 - \alpha \lambda) = \mathbf{a} \text{Div } \mathbf{T} - \alpha \text{div } \mathbf{l}_2 + \frac{1}{c} \mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial t} - \\ &\quad - \frac{1}{c} \alpha \frac{\partial \lambda}{\partial t} = (\mathbf{a} + \alpha \mathbf{e}_t) \left[\text{Div } \mathbf{T} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial t} + \left(\text{div } \mathbf{l}_2 + \frac{1}{c} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) \mathbf{e}_t \right], \end{aligned}$$

ahonnan

$$\underline{\underline{Div}} \underline{\underline{\mathbf{T}}} = \text{Div} \mathbf{T} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial t} + \left(\text{div} \mathbf{l}_2 + \frac{1}{c} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) \mathbf{e}_t.$$

Beírva a (84) kifejezésből a háromdimenziós $\text{Div} \mathbf{T}$ értékét:

$$\underline{\underline{Div}} \underline{\underline{\mathbf{T}}} = \mathbf{f}_e^* + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial t} + \left(\text{div} \mathbf{l}_2 + \frac{1}{c} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) \mathbf{e}_t.$$

A (87) követelmény teljesítése érdekében összehasonlítva ezt a (85) képlettel, egyrészt

$$\mathbf{l}_2 = -\frac{\mathbf{S}}{c} \text{ és } \lambda = -w_e \quad (88a)$$

adódik, másrészt, ha $\mathbf{l}_1 = \mathbf{0}$ -t választanánk, akkor megmaradna a hibás értékű $\mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}$ tag, ha pedig $\mathbf{l}_1 = -c \mu \varepsilon \mathbf{S}$, akkor ez a tag teljesen eltűnne. Belátható azonban, hogy a négyes $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ tenzornak szimmetrikusnak kell lenni. Ugyanis homogén, izotróp közegben a \mathbf{T} hármas Maxwell feszültség tenzor minden inerciarendszerben szimmetrikus; ha tehát a négyes $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ nem lenne szimmetrikus az \mathbf{e}_t irányú tagok asszimmetriája ($\mathbf{l}_1 \neq \mathbf{l}_2$) folytán, akkor a $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ másik inerciarendszerbe transzformált komponensmátrixának bal felső 3×3 -as része, azaz a \mathbf{T} Maxwell-tenzor komponensmátrixa is elvesztené a szimmetriáját; [a (11b) szerint \mathbf{e}_t nemcsak \mathbf{e}'_t -t, hanem \mathbf{v}' -t is behozza]. {Meggjegyezzük, hogy az impulzuszóránymomentum tételének teljesülése is megköveteli $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ szimmetriáját. [6],[8]}. Így tehát $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ szimmetrikus, vagyis (86) és (88a) alapján:

$$\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_2 = -\frac{\mathbf{S}}{c}, \quad (88b)$$

és az energia-impulzus tenzor a (86), (83a), (83b), (88a) és (88b) összefüggések alapján:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \mu \mathbf{H} \circ \mathbf{H} + \varepsilon \mathbf{E} \circ \mathbf{E} - w_e \mathbf{I} - \frac{1}{c} \mathbf{S} \circ \mathbf{e}_t - \mathbf{e}_t \circ \frac{1}{c} \mathbf{S} - w_e \mathbf{e}_t \circ \mathbf{e}_t. \quad (89a)$$

Ez az ún. Abraham-féle energia-impulzus tenzor [Max Abraham, (1875-1922) után]. Ez kifejezhető az $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ négyes térerősség tenzorral is, de ezt itt nem tárgyaljuk.

Az ehhez tartozó négyes tenzordivergencia a (88a)-t megelőző kifejezéséből

$$\underline{\underline{Div}} \underline{\underline{\mathbf{T}}} = \mathbf{f}_e^* + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} - \frac{1}{c} \left(\text{div} \mathbf{S} + \frac{\partial w_e}{\partial t} \right) \mathbf{e}_t,$$

és így a (84) képletre és az $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$ azonosságra tekintettel a hármas erőssűrűség:

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{H}^2 \text{grad} \mu - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \text{grad} \varepsilon + \frac{\mu_r \varepsilon_r - 1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}. \quad (89b)$$

Ezzel az előbbi egyenlet a

$$\text{Div } \underline{\underline{\mathbf{T}}} = \mathbf{f}_e - \frac{1}{c} \left(\text{div } \mathbf{S} + \frac{\partial w_e}{\partial t} \right) \underline{\mathbf{e}}_t \quad (89c)$$

alakot ölti. Látható, hogy a (hármás) erősűrűség (89b) képlete szerint áram, töltés és anyag nélküli ($\mu_r = \varepsilon_r = 1$) esetben nincs erőhatás, tehát a hármás feszültségtenzor (84) képlet szerinti divergenciájának hibája kiküszöbölődött.

Képezve (89a)-ból a $\underline{\underline{\mathbf{T}}}\mathbf{i}$, $\underline{\underline{\mathbf{T}}}\mathbf{j}$, $\underline{\underline{\mathbf{T}}}\mathbf{k}$, $\underline{\underline{\mathbf{T}}}\mathbf{e}_t$ négyes vektorokat, a $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ tenzor mátrixának oszlopvektorait kapjuk derékszögű koordináta-rendszerben, majd ezekből \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , \mathbf{e}_t -vel skalárisan szorozva a tenzor mátrixát:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} \mu H_x^2 + \varepsilon E_x^2 - w_e & \mu H_x H_y + \varepsilon E_x E_y & \mu H_x H_z + \varepsilon E_x E_z & \frac{S_x}{c} \\ \mu H_x H_y + \varepsilon E_x E_y & \mu H_y^2 + \varepsilon E_y^2 - w_e & \mu H_y H_z + \varepsilon E_y E_z & \frac{S_y}{c} \\ \mu H_x H_z + \varepsilon E_x E_z & \mu H_y H_z + \varepsilon E_y E_z & \mu H_z^2 + \varepsilon E_z^2 - w_e & \frac{S_z}{c} \\ \frac{S_x}{c} & \frac{S_y}{c} & \frac{S_z}{c} & -w_e \end{bmatrix} \quad (89d)$$

Ami a $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ tenzor transzformációját illeti, \mathbf{H} és \mathbf{E} transzformációival nem kell foglalkoznunk, mert a (64) és (65) összefüggésekben már megvannak. Az \mathbf{S} Poynting-vektor és a w_e elektromágneses energiasűrűség transzformációjának meghatározásához felírjuk a $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ tenzor „vesszőtlen” és „vesszős” alakjának egyenlőségét:

$$\begin{aligned} & \mu \mathbf{H} \circ \mathbf{H} + \varepsilon \mathbf{E} \circ \mathbf{E} - w_e \mathbf{I} - \frac{1}{c} \mathbf{S} \circ \underline{\mathbf{e}}_t - \underline{\mathbf{e}}_t \circ \frac{1}{c} \mathbf{S} - w_e \underline{\mathbf{e}}_t \circ \underline{\mathbf{e}}_t = \\ & = \mu \mathbf{H}' \circ \mathbf{H}' + \varepsilon \mathbf{E}' \circ \mathbf{E}' - w'_e \mathbf{I}' - \frac{1}{c} \mathbf{S}' \circ \underline{\mathbf{e}}'_t - \underline{\mathbf{e}}'_t \circ \frac{1}{c} \mathbf{S}' - w'_e \underline{\mathbf{e}}'_t \circ \underline{\mathbf{e}}'_t. \end{aligned}$$

Szorozzuk meg e tenzoregyenletet a (11b), tehát az $\underline{\mathbf{e}}_t = \kappa \left(-\frac{v}{c} + \underline{\mathbf{e}}'_t \right)$ vektoregyenlettel, (bal oldalt a bal oldallal, jobb oldalt a jobb oldallal, a merőlegességek figyelembevételével):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \mathbf{S} + w_e \underline{\mathbf{e}}_t = \\ & = -\frac{\kappa v}{c} \left(\mu H'_{\parallel} \mathbf{H}' + \varepsilon E'_{\parallel} \mathbf{E}' \right) + \frac{\kappa v}{c} w'_e \mathbf{v}'^0 + \kappa \frac{v}{c^2} S'_{\parallel} \underline{\mathbf{e}}'_t + \frac{\kappa}{c} \mathbf{S}' + \kappa w'_e \underline{\mathbf{e}}'_t. \end{aligned} \quad (*)$$

Ezt a vektoregyenletet is a (11b) vektoregyenlettel szorozva skalárisan, az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$-w_e = \frac{\kappa^2 v^2}{c^2} \left(\mu H'_{\parallel}{}^2 + \varepsilon E'_{\parallel}{}^2 \right) - \frac{\kappa^2 v^2}{c^2} w'_e - \frac{\kappa^2 v}{c^2} S'_{\parallel} - \frac{\kappa^2 v}{c^2} S'_{\parallel} - \kappa^2 w'_e,$$

rendezés után

$$w_e = \kappa^2 \left[w'_e + \frac{2v}{c^2} S'_{\parallel} - \frac{v^2}{c^2} \left(\mu H'_{\parallel}{}^2 + \varepsilon E'_{\parallel}{}^2 - w'_e \right) \right]. \quad (89e)$$

A sebességvektorok és idő-egységvektorok közös síkjára *merőleges* kétdimenziós térre vetítve a (*) négyes vektoregyenletet, az \mathbf{S} Poynting-vektor sebességre merőleges összetevő vektorát kapjuk:

$$\mathbf{S}_\perp = \kappa \mathbf{S}'_\perp - \kappa v \left(\mu H'_\parallel \mathbf{H}'_\perp + \varepsilon E'_\parallel \mathbf{E}'_\perp \right). \quad (89f)$$

A sebességgel párhuzamos komponensét úgy nyerjük, hogy a (*) vektoregyenletet a (11c), azaz $\mathbf{v}^0 = \kappa \left(\mathbf{v}'^0 - \frac{v}{c} \mathbf{e}'_t \right)$ -vel szorozzuk, (bal oldalt a bal oldallal, jobb oldalt a jobb oldallal, a merőlegességek figyelembevételével):

$$\frac{1}{c} S_\parallel = -\frac{\kappa^2 v}{c} \left(\mu H'^2_\parallel + \varepsilon E'^2_\parallel \right) + \frac{\kappa^2 v}{c} w'_e + \frac{\kappa^2}{c} S'_\parallel + \frac{\kappa^2 v^2}{c^3} S'_\parallel + \frac{\kappa^2 v}{c} w'_e,$$

vagy rendezés után

$$S_\parallel = \kappa^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) S'_\parallel - \kappa^2 v \left(\mu H'^2_\parallel + \varepsilon E'^2_\parallel - 2w'_e \right). \quad (89g)$$

A fordított transzformáció képleteihez úgy jutunk, hogy a „vesszős” és „vesszőtlen” mennyiségeket felcseréljük, és v helyett $-v$ -t írunk.

Vonjuk le a (84) egyenletből a (89b) egyenletet, a következő (hármass) összefüggést kapjuk:

$$\text{Div} T - \mathbf{f}_e = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}, \quad (90a)$$

mert $\frac{\mu_r \varepsilon_r}{c^2} = \mu \varepsilon$. Integrálva egy zárt (térszerű, hármass) térfogatra, és alkalmazva a Gauss-tételt:

$$\oint_{(A)} T d\mathbf{A} - \int_{(V)} \mathbf{f}_e dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \frac{\mathbf{S}}{c^2} dV. \quad (90b)$$

(A felhasznált tenzoros Gauss-tétel a tenzordivergencia értelmezése alapján vezethető vissza a vektorosra.) A (90b) bal oldalán a határfelületi erők és a térfogati erők eredője áll, tehát a (31a) alapján a jobb oldali integrál *impulzus*, a $\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}$ integrandusz ezért *impulzussűrűség*. Annak tisztázására, hogy minek az impulzussűrűsége, a (90b) egyenletet így írjuk át:

$$\oint_{(A)} T d\mathbf{A} = \int_{(V)} \mathbf{f}_e dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \frac{\mathbf{S}}{c^2} dV \equiv \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{p} + \int_{(V)} \mathbf{g} dV \right),$$

tehát az A zárt felülettel körülhatárolt V térfogatú közegre ható erő nemcsak a (89b) szerint az árammal, töltéssel, anyag-inhomogenitással kapcsolatos \mathbf{p}

impulzusnak, hanem a \mathbf{g} sűrűségű impulzusnak az idő szerinti deriváltjától is származik. Ezért a

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} \quad (91)$$

impulzussűrűség az **elektromágneses tér** (hármás) **impulzussűrűsége**. [Van ahol a $\underline{\mathbf{T}}$ tenzor (89d) mátrixában a negyedik oszlop három komponensét a \mathbf{g} komponenseivel írják át; továbbá a \mathbf{g} impulzussűrűség transzformációját nyilván az \mathbf{S} Poynting-vektoréból nyerhetjük c^2 -tel való osztással.] A (89c), (90a) és a (91) összefüggésekkel az energia-impulzus tenzor divergenciáját a következő alakban is kifejezhetjük:

$$\underline{\text{Div}} \underline{\mathbf{T}} = \text{Div} \mathbf{T} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} - \frac{1}{c} \left(\text{div} \mathbf{S} + \frac{\partial w_e}{\partial t} \right) \mathbf{e}_t. \quad (92)$$

Izolált rendszer határfelületén nincs erőhatás, a rendszer belsejében pedig az erők egyensúlyban vannak [8], tehát az egész térfogatban $\underline{\text{Div}} \underline{\mathbf{T}} = \mathbf{0}$, így a (92) jobb oldala is $\mathbf{0}$. Integrálva a térfogatra, és két helyen is alkalmazva a Gauss-tételt, rendezés után írhatjuk:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \left(\mathbf{g} + \frac{1}{c} w_e \mathbf{e}_t \right) dV = \int_{(A)} \mathbf{T} d\mathbf{A} - \left(\frac{1}{c} \int_{(A)} \mathbf{S} d\mathbf{A} \right) \mathbf{e}_t$$

A (31b) képletből láthatjuk, hogy az egyenlet bal oldalán az *impulzus négyes vektorának deriváltja* áll. Szétválasztva a „téryszerű” és „időszerű” komponensekre:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \mathbf{g} dV = \int_{(A)} \mathbf{T} d\mathbf{A}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} w_e dV = - \int_{(A)} \mathbf{S} d\mathbf{A}. \quad (93)$$

A (93) összefüggés első része azt mondja ki, hogy az *izolált rendszer impulzusa csak a felületén beáramló*, (az erő időintegráljának megfelelő) *impulzussal*, a második része pedig azt, hogy *a rendszer energiája csak a felületén beáramló*, (a teljesítmény időintegráljának megfelelő) *energiával növekedhet*. (A negatív előjel a külső felületi normális miatt adódik.) Ezek tehát az impulzusmegmaradási és energiamegmaradási tételek megnyilvánulásai az elektrodinamikában.

11. fejezet

A négyes hatásintegrál

E fejezetben szükségünk van a tenzorok legfontosabb *skalár-invariánsára*, és pedig arra, amelyik a *tenzornak homogén lineáris függvénye*. Ezt a tenzor **nyomának** nevezik, és a német Spur, vagy az angol trace után Sp-vel, ill. Tr-rel jelölik. (A tenzorok egy másik invariánsa pl. mátrixának determinánsa, vagy az antiszimmetrikus négyes tenzorok esetében a qs és q^2-s^2 alakú invariánsok, ezek azonban nem homogén lineáris függvényei tenzoruknak) A legegyszerűbb tenzortípusnak, a *diad*-nak a nyoma:

$$Sp(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad (94a)$$

ahol \mathbf{a} és \mathbf{b} akár hármas, akár négyes vektor lehet. Továbbá

$$Sp[\lambda(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) + \nu(\mathbf{c} \circ \mathbf{d})] = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \nu(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}), \quad (94b)$$

Legyen C háromdimenziós tenzor, amely a derékszögű koordináta-rendszerben az \mathbf{i} egységvektort \mathbf{c}_x -be, a \mathbf{j} egységvektort \mathbf{c}_y -ba, és a \mathbf{k} egységvektort \mathbf{c}_z -be viszi, akkor belátható, hogy

$$C = \mathbf{c}_x \circ \mathbf{i} + \mathbf{c}_y \circ \mathbf{j} + \mathbf{c}_z \circ \mathbf{k},$$

mert \mathbf{i} -vel, \mathbf{j} -vel, ill. \mathbf{k} -val szorozva (skalárisan, tekintettel a merőlegességekre) rendre \mathbf{c}_x -et, \mathbf{c}_y -t, ill. \mathbf{c}_z -t kapunk; tehát a C tenzor mátrixának oszlopvektorait. A tenzor nyomának (94b) szerinti homogén linearitása miatt

$$Sp(C) = \mathbf{c}_x \cdot \mathbf{i} + \mathbf{c}_y \cdot \mathbf{j} + \mathbf{c}_z \cdot \mathbf{k} = c_{xx} + c_{yy} + c_{zz}, \quad (94c)$$

tehát a hármas tenzor nyoma egyenlő a *mátrix diagonális elemeinek összegével*, azaz a *mátrix nyomával*.

Mínt hogy (derékszögű koordináta-rendszerben) a hármas egységtenzor mátrixa az egységmátrix, azért

$$Sp(I) = 3. \quad (94d)$$

Ha \underline{C} az indefinit metrikájú négydimenziós tér tenzora, akkor derékszögű koordináta-rendszerben

$$\underline{C} = \mathbf{c}_x \circ \mathbf{i} + \mathbf{c}_y \circ \mathbf{j} + \mathbf{c}_z \circ \mathbf{k} - \mathbf{c}_t \circ \mathbf{e}_t,$$

(az utolsó tag azért negatív előjelű, mert így lesz $\underline{\underline{\mathbf{C}}}\mathbf{e}_t = \mathbf{c}_t$), tehát

$$Sp(\underline{\underline{\mathbf{C}}}) = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k} - \mathbf{c}_t \mathbf{e}_t = c_{xx} + c_{yy} + c_{zz} - c_{tt}. \quad (94e)$$

vagyis a $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ tenzor mátrixának diagonális elemeit a (94e) képlet szerint kell összevonni.

Az antiszimmetrikus tenzorok nyoma zérus, mert mátrixainak főátlójában 0-k állanak, [l. a (49) mátrixot.] A szimmetrikus tenzorok nyoma is lehet zérus. Pl. az energia-impulzus tenzor nyoma a (89a), a (94b) és a (94d) összefüggések alapján ugyancsak zérus:

$$Sp(\underline{\underline{\mathbf{T}}}) = \mu \mathbf{H}^2 + \varepsilon \mathbf{E}^2 - 3w_e - 0 - 0 + w_e = 2w_e - 3w_e + w_e = 0;$$

[ugyanazt kapjuk a (89d) mátrixból is a (94e) képlettel]

Rátérve a variációsszámításon alapuló hatásintegrál témájára megjegyezzük, hogy itt feltételezzük a variációsszámítás alapjainak ismeretét. A vizsgálandó hatásintegrál:

$$S = \int_{(\Omega)} \left[\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{J}}} + \frac{1}{2} \int_{\underline{\underline{\mathbf{F}}}_0}^{\underline{\underline{\mathbf{F}}}} Sp(\underline{\underline{\mathbf{G}}}\underline{\underline{d\mathbf{F}}}) \right] d\Omega. \quad (95)$$

Ebben $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ a négyes potenciál, $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ a négyes áramsűrűség, $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$ a négyes gerjesztettségi tenzor, $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ a négyes térerősség tenzor és a külső integrál az Ω zárt négydimenziós tartományra vonatkozik. Megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek mellett $\delta\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ tetszőlegessége esetén a $\delta S = 0$ követelmény maga után vonja a Maxwell-egyenletek kielégülését; (itt $\delta\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ a négyes potenciál, δS a hatásintegrál variációja.)

A feltételek:

- rögzítjük az áramsűrűség négyes vektorát, tehát ezt nem variáljuk, (az áram- és töltéseloszlás adva van,) a négyes potenciál vektort variáljuk;
- az $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ tenzort a variálandó négyes potenciállal fejezzük ki, ami által az egyik Maxwell-egyenletcsoport, (a II. és III. egyenlet) eleve kielégül;
- az Ω zárt tartomány (háromdimenziós) határhiperfelületén az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ négyes potenciál elő van írva, tehát e hiperfelületen variációja, $\delta\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \mathbf{0}$.

A hatásintegrál előzőekben leírt tulajdonságának bizonyításához a belső integrált először a hármas térjellemzőkkel fejezzük ki.

Az (56) és (59) képletek szerint

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{G}}}\underline{\underline{d\mathbf{F}}} &= \\ &= (-\mathbf{H} \times \mathbf{I} - c\mathbf{D} \circ \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_t \circ c\mathbf{D}) \left(-d\mathbf{B} \times \mathbf{I} - \frac{1}{c} d\mathbf{E} \circ \mathbf{e}_t + \frac{1}{c} \mathbf{e}_t \circ d\mathbf{E} \right) = \end{aligned}$$

$$= \mathbf{H} \times (d\mathbf{B} \times \mathbf{I}) - \mathbf{e}_t \circ (c\mathbf{D} \times d\mathbf{B}) + \frac{1}{c} \mathbf{H} \times d\mathbf{E} \circ \mathbf{e}_t - \\ - (\mathbf{D} d\mathbf{E}) (\mathbf{e}_t \circ \mathbf{e}_t) + \mathbf{D} \circ d\mathbf{E}.$$

A jobb oldal első tagjának értelmezéséhez

$$\mathbf{H} \times (d\mathbf{B} \times \mathbf{I}) \mathbf{w} = \mathbf{H} \times (d\mathbf{B} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{H} \mathbf{w}) d\mathbf{B} - (\mathbf{H} d\mathbf{B}) \mathbf{w} = \\ = [(d\mathbf{B} \circ \mathbf{H}) - (\mathbf{H} d\mathbf{B}) \mathbf{I}] \mathbf{w}$$

ezért

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}} d\underline{\underline{\mathbf{F}}} = d\mathbf{B} \circ \mathbf{H} - (\mathbf{H} d\mathbf{B}) \mathbf{I} - \mathbf{e}_t \circ (c\mathbf{D} \times d\mathbf{B}) + \\ + \frac{1}{c} (\mathbf{H} \times d\mathbf{E}) \circ \mathbf{e}_t - (\mathbf{D} d\mathbf{E}) \mathbf{e}_t \circ \mathbf{e}_t + \mathbf{D} \circ d\mathbf{E},$$

tehát a (94b) és (94d) összefüggés alapján

$$Sp(\underline{\underline{\mathbf{G}}} d\underline{\underline{\mathbf{F}}}) = \mathbf{H} d\mathbf{B} - 3(\mathbf{H} d\mathbf{B}) - 0 + 0 + \mathbf{D} d\mathbf{E} + \mathbf{D} d\mathbf{E} = 2(\mathbf{D} d\mathbf{E} - \mathbf{H} d\mathbf{B}).$$

Így a (95)-ből a hatásintegrál:

$$S = \int_{(\Omega)} \left(\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{J}}} + \int_{\mathbf{E}_0}^{\mathbf{E}} \mathbf{D} d\mathbf{E} - \int_{\mathbf{B}_0}^{\mathbf{B}} \mathbf{H} d\mathbf{B} \right) d\Omega. \quad (96a)$$

A hatásintegrál variációja, figyelemmel az a., feltételre (a variációképzés és a hely és idő szerinti integrálás és differenciálás felcserélhetők):

$$\delta S = \int_{(\Omega)} (\underline{\underline{\mathbf{J}}} \delta \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \mathbf{D} \delta \mathbf{E} - \mathbf{H} \delta \mathbf{B}) d\Omega. \quad (96b)$$

Tekintettel a feltétel b., pontjára $\delta \mathbf{E}$ -t és $\delta \mathbf{B}$ -t a (70b) képletből adódó $\delta \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \delta \mathbf{A} + \frac{\delta \varphi}{c} \mathbf{e}_t$ négyes potenciál variációjának komponenseivel kell kifejezni, vagyis a hármas vektorpotenciál és a skalárpotenciál variációival. Felhasználva a (70a) összefüggéseket is: $\delta \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\delta \mathbf{A}) - \text{grad} (\delta \varphi)$, $\delta \mathbf{B} = \text{rot} (\delta \mathbf{A})$. Ezekkel

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} \delta \mathbf{E} - \mathbf{H} \delta \mathbf{B} &= -\mathbf{D} \frac{\partial}{\partial t} (\delta \mathbf{A}) - \mathbf{D} \operatorname{grad} (\delta \varphi) - \mathbf{H} \operatorname{rot} (\delta \mathbf{A}) \equiv \\
&\equiv -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \delta \mathbf{A}) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \delta \mathbf{A} - \operatorname{div} (\mathbf{D} \delta \varphi) + \delta \varphi \operatorname{div} \mathbf{D} + \\
&+ \operatorname{div} (\mathbf{H} \times \delta \mathbf{A}) - \delta \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H} \equiv -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \delta \mathbf{A}) - \operatorname{div} (\mathbf{D} \delta \varphi) + \\
&+ \operatorname{div} (\mathbf{H} \times \delta \mathbf{A}) + \underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{H} - c \operatorname{div} \mathbf{D} \mathbf{e}_t \right)}_{\delta \mathbf{A}} \left(\delta \mathbf{A} + \frac{\delta \varphi}{c} \mathbf{e}_t \right).
\end{aligned}$$

Ezeket a (96b) egyenletbe helyettesítve, az integrálásnál a $\frac{\partial}{\partial t}$ -s tag és a két divergenciás tag a Gauss-tétellel a határhiperfelületi értékekbe mennek át, ahol a c., feltétel miatt eltűnnek; ($\delta \underline{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ -ból $\delta \mathbf{A} = \mathbf{0}$ és $\delta \varphi = 0$ következik). Marad tehát:

$$\delta S = \int_{(\Omega)} \left[\underline{\mathbf{J}} \delta \underline{\mathbf{A}} + \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{H} - c \operatorname{div} \mathbf{D} \mathbf{e}_t \right) \delta \underline{\mathbf{A}} \right] d\Omega.$$

Mínt hogy a négyes áramsűrűség: $\underline{\mathbf{J}} = \mathbf{J} + c \rho \mathbf{e}_t$, azért

$$\delta S = \int_{(\Omega)} \left\{ \left[\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{H} \right) + c (\rho - \operatorname{div} \mathbf{D}) \mathbf{e}_t \right] \delta \underline{\mathbf{A}} \right\} d\Omega.$$

Tetszőleges $\delta \underline{\mathbf{A}}$ esetén a hatásintegrál variációja δS akkor, és csakis akkor zérus, ha

$$\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0}, \text{ és } \rho - \operatorname{div} \mathbf{D} = 0,$$

azaz, ha az I. és IV. Maxwell-egyenlet teljesül. Így a (95) hatásintegrál alapján beláttuk, hogy az elektrodinamika törvényei is levezethetők variációs elvből. E hatásintegrál általános jellegét mutatja, hogy nem használja a közeg-egyenleteket, és négydimenziós alakja biztosítja a Lorentz-transzformációval szembeni invarianciát.

12. fejezet

Példák, alkalmazások

Ebben a fejezetben példák és kísérletleírások vannak összeválogatva, részben átalakítva a különböző szakirodalmakból, a magyarázatokat hozzáigazítva az elméleti részhez és jelöléseikhez. A címek után megadjuk azokat a szakirodalmakat, ahol a példa ill. kísérlet leírása található.

A., Relativisztikus egyenletesen gyorsuló mozgás [6], [8], [16].

Mozogjon egy pont egyenesen, *állandó* saját gyorsulással. A K' nyugalmi, differenciális inerciarendszer a pont változó sebességével állandóan változik. Megvizsgáljuk a mozgást az állónak tekintett K inerciarendszerből. A [16] szakirodalom „gyakorlati” alkalmazást is fűz a számításhoz: űrrakétában az utasok az üzemanyagot úgy adagolják, hogy az ott mért gyorsulás állandó legyen, és kívülről figyeljük a rakéta mozgását.

Minthogy a (21) képlet szerint a négyes gyorsulás és a négyes sebesség ortogonálisak, és a K' nyugalmi rendszerben a négyes sebesség $c e'_t$, azért a négyes gyorsulásnak itt nincs „idő”-komponense, és a „tér”-komponense az egyenesvonalú mozgás miatt sebességirányú, azért

$$a'_t = 0, \text{ és } a'_\parallel \equiv a \text{ (állandó).}$$

A Lorentz-transzformáció (13e) összefüggése szerint a négyes gyorsulás a külső megfigyelő számára, tehát a K inerciarendszerben

$$\underline{a}_\parallel = \kappa \left(a'_\parallel + v \frac{a'_t}{c} \right) = \kappa a.$$

A (20), majd a (17), végül a (19) képlet alapján a K inerciarendszerben

$$\underline{a}_\parallel = \frac{d u_\parallel}{d \tau} = \frac{d(\kappa v)}{d \tau} = \frac{d(\kappa v)}{d t} \frac{d t}{d \tau} = \frac{d(\kappa v)}{d t} \kappa.$$

Összehasonlítva ezt az előző összefüggéssel: $\frac{d(\kappa v)}{d t} = a$. Ha $t = 0$ -nál $v = 0$, akkor $\kappa v = a t$, és a (9) összefüggéssel $\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = a t$, ahonnan a v sebességet

kifejezve kapjuk, hogy

$$v = \frac{a t}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{c} t\right)^2}}. \quad (97)$$

[Ugyanehhez az eredményhez jutunk a (23b) képlet felhasználásával. Ugyanis a vesszőtlen K inerciarendszerben a hármass gyorsulás komponensei:

$$\mathbf{a}_\perp = \frac{\mathbf{a}'_\perp}{\kappa^2} = \frac{\mathbf{0}}{\kappa^2} = \mathbf{0}, \quad \frac{dv}{dt} = a_{\parallel} = \frac{a'_{\parallel}}{\kappa^3} = \frac{a}{\kappa^3} = a \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^3,$$

tehát

$$\int_0^{\frac{v}{c}} \frac{d\left(\frac{v}{c}\right)}{\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^3} = \int_0^t \frac{a}{c} dt, \quad \text{azaz} \quad \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{a}{c} t,$$

és ez a (97) képlethez vezet.]

A $v = \frac{ds}{dt}$ összefüggés alapján integrálással kapjuk az út-idő kapcsolatot, előírva, hogy $t = 0$ -nál $s = 0$ legyen:

$$s = \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{a}{c} t\right)^2} - 1 \right]. \quad (98)$$

A (98) egyenletet átrendezve:

$$\left(\frac{a}{c^2} s + 1\right)^2 - \left(\frac{a}{c} t\right)^2 = 1,$$

ahonnan látszik, hogy az $s(t)$ függvénygörbe hiperbola.

A τ sajátidőt is ki lehet fejezni a K inerciarendszer t idejével:

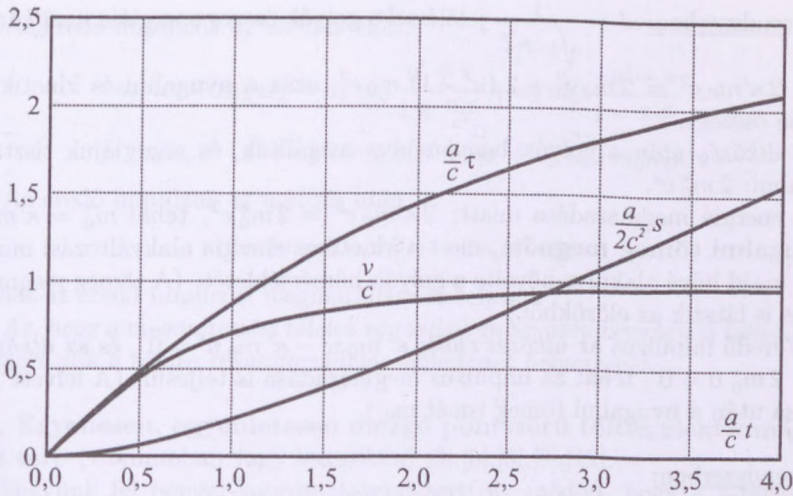
$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\kappa} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{a}{c} t\right)^2}{1 + \left(\frac{a}{c} t\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{c} t\right)^2}}.$$

Ha $t = 0$ -nál $\tau = 0$, akkor integrálás után:

$$\tau = \frac{c}{a} \operatorname{ar sh} \left(\frac{a}{c} t\right). \quad (99)$$

A 6. ábra mutatja a (97), (98), (99) függvények görbéit a dimenzió nélküli $\frac{a}{c} t$ függvényében, ahol t a K („külső”) rendszeridő. Az ábrából láthatjuk, hogy a v sebesség eleinte lineárisan, majd egyre kevésbé nő, és aszimptotikusan közelíti a c fénysebességet. Az út-idő függvénygörbe hiperbolája a kezdeti szakaszon parabolát közelít. A sajátidő kis értékeknél egyezik a „külső” idővel, majd egyre jobban lemaradva monoton nő.

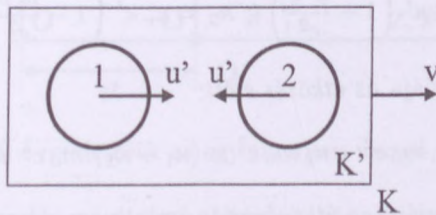
Tehát mindhárom görbe eleje az egyenletesen gyorsuló mozgás klasszikus esetének felel meg.



6. ábra. A sebesség, az út és a sajátidő a megfigyelő időjének függvényében relativisztikus egyenletesen gyorsuló mozgás esetén

B., Rugalmatlan ütközés [5], [8].

Két egyforma tömegű golyó ellentétes irányú sebességgel centrálisan ütközik rugalmatlanul. Legyen K' az az inerciarendszer, amelyben a golyók ütközés előtti sebessége egyenlő nagy és ellenkező irányú. (7. ábra.) Ez a sebesség u' . A K' inerciarendszer v sebességgel mozog a K inerciarendszerben, ahol az egyszerűség kedvéért a v sebesség párhuzamos a golyók ütközés előtti sebességével. Megvizsgáljuk mindkét inerciarendszerre vonatkozóan, hogy hogyan érvényesül az energiamegmaradás és impulzusmegmaradás az ütközés előtti és utáni állapotok között.



7. ábra. Szemléltető ábra a rugalmatlan ütközés tárgyalásához

Legyen a golyók nyugalmi tömege az ütközés előtt m_0 , az ütközés után pedig m_0^* .

A K' rendszerben: $\kappa' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}$ jelöléssel a golyók összes energiája az *ütközés előtt*: $2 \kappa' m_0 c^2 = 2 m_0 c^2 + 2 (\kappa' - 1) m_0 c^2$, azaz a nyugalmi és kinetikus energia összege.

Az *ütközés után* a golyók benyomódva megálltak, és energiájuk tisztán nyugalmi: $2 m_0^* c^2$.

Az energia megmaradása miatt: $2 \kappa' m_0 c^2 = 2 m_0^* c^2$, tehát $m_0^* = \kappa' m_0$, **a nyugalmi tömeg megnőtt**, mert a kinetikus energia alakváltozási munkává, majd hővé alakulva növelte a golyók hőmérsékletét. (A tömeg megmaradása is látszik az előzőkből.)

Az eredő impulzus az *ütközés előtt*: $\kappa' m_0 u' - \kappa' m_0 u' = 0$, és az *ütközés után*: $2 m_0^* \cdot 0 = 0$, tehát az impulzus megmaradása is teljesül. (A felvett hő leadása után a nyugalmi tömeg ismét m_0 .)

A K rendszerben:

A golyók u' sebessége párhuzamos a v sebességgel, tehát minden sebesség „párhuzamos”, ezért a következőkben ezt az indexet elhagyjuk. A sebességösszetevés (15a) képlete szerint a golyók sebessége K -ban:

$$w_1 = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}, \quad w_2 = \frac{-u' + v}{1 - \frac{u'v}{c^2}}.$$

További jelölések:

$$\kappa_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w_1^2}{c^2}}}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w_2^2}{c^2}}}, \quad \kappa_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

A (16) összefüggés négyzetgyökének reciprok értéke alapján a következők érvényesek:

$$\kappa_1 = \kappa_v \kappa' \left(1 + \frac{u'v}{c^2}\right), \quad \kappa_2 = \kappa_v \kappa' \left(1 - \frac{u'v}{c^2}\right).$$

A golyók összes energiája az *ütközés előtt*:

$$m_1 c^2 + m_2 c^2 = \kappa_1 m_0 c^2 + \kappa_2 m_0 c^2 \equiv (\kappa_1 + \kappa_2) m_0 c^2 \equiv 2 \kappa_v \kappa' m_0 c^2.$$

A golyók összes energiája az *ütközés után*, minthogy sebességük v , továbbá az $m_0^* = \kappa' m_0$ kifejezés felhasználásával:

$$2 m^* c^2 = 2 \kappa_v m_0^* c^2 \equiv 2 \kappa_v \kappa' m_0 c^2.$$

Tehát az energiamegmaradás teljesül.

Az eredő impulzus az ütközés előtt:

$$\begin{aligned} m_1 w_1 + m_2 w_2 &= \kappa_1 m_0 \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} + \kappa_2 m_0 \frac{-u' + v}{1 - \frac{u'v}{c^2}} = \\ &= m_0 \kappa_v \kappa' (u' + v) + m_0 \kappa_v \kappa' (-u' + v) \equiv 2 m_0 \kappa_v \kappa' v. \end{aligned}$$

Az eredő impulzus az ütközés után:

$$2 m^* v = 2 \kappa_v m_0^* v = 2 \kappa_v \kappa' m_0 v.$$

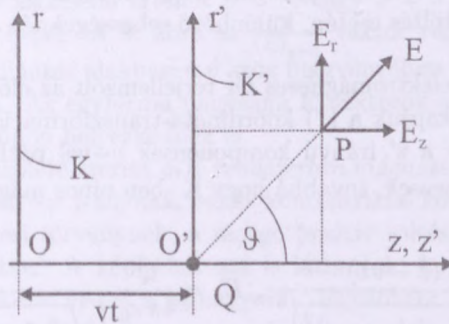
Tehát az eredő impulzus megmaradása is teljesül.

Az, hogy a megmaradási tételek egy másik inerciarendszerben is teljesülnek, megerősítik a tömeg transzformációs képletének helyességét.

C., Egyenesen, egyenletesen mozgó pontszerű töltés elektromágneses tere (vákuumban vagy levegőben) [3],[5],[6],[8],[12].

Vegyünk fel henger-koordináta-rendszert oly módon, hogy a z -tengely a töltés pályája legyen. (8. ábra) A Q töltéssel együttmozgó K' nyugalmi inerciarendszer az O' origóban lévő töltéssel együtt v sebességgel mozog egyenletesen a K inerciarendszerben z irányban. (8. ábra.) Ha $t = 0$ -nál az O és O' origók egybeesnek, akkor a Lorentz-transzformáció (13a) és (13b) képlete szerint a koordináták között az alábbi összefüggések állnak fenn:

$$r' = r, \quad \varphi' = \varphi, \quad z' = \kappa (z - vt). \quad (*)$$



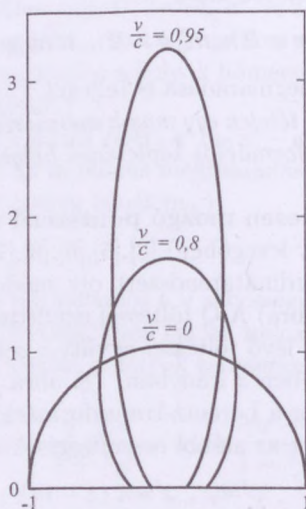
8. ábra. Koordináta-rendszerek az egyenletesen mozgó töltés tárgyalásához

A K' nyugalmi rendszerben csak elektrosztatikus tér van, amelyet Coulomb törvényével határozhatunk meg: az \mathbf{E}' vektor egyenese minden pontban átmege az O' origón, tehát a töltés helyén, és nagysága, valamint komponensei:

$$E' = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r'^2 + z'^2}, \quad E_z = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{z'}{(\sqrt{r'^2 + z'^2})^3},$$

$$E'_r = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{r'}{(\sqrt{r'^2 + z'^2})^3}.$$

(Az ábrában csak a „vesszőtlen” villamos térerősségeket tüntettük fel; a „vesszősök” ugyanott vannak.)



9. ábra. A villamos térerősség-vektor végpontjának poláris diagrammja egyenletesen mozgó töltés esetén, különböző sebességeknél

A K rendszerbeli elektromágneses tér térjellemezőit az előző és a (64) jobb oldali képletsorából kapjuk a (*) koordináta-transzformáció és annak figyelembevételével, hogy a z' irányú komponensek v -vel párhuzamosak, az r' irányúak arra merőlegesek, továbbá hogy K'-ben nincs mágneses tér, és a Q töltés invariáns:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\kappa (z - vt)}{[\sqrt{r^2 + \kappa^2 (z - vt)^2}]^3}, & E_r &= \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\kappa r}{[\sqrt{r^2 + \kappa^2 (z - vt)^2}]^3} \\ B_\varphi &= -\kappa \frac{v}{c^2} E'_r = -\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{v}{c^2} \frac{\kappa r}{[\sqrt{r^2 + \kappa^2 (z - vt)^2}]^3} = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} Q v \frac{\kappa r}{[\sqrt{r^2 + \kappa^2 (z - vt)^2}]^3} \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

(B_φ képletében a z irányú \mathbf{v} vektor és az r irányú \mathbf{E}_r vektor vektori szorzata a jobbsodrású hengerkoordináta-rendszerben a φ pozitív irányával ellentétes.) Mivel $\frac{E_r}{E_z} = \frac{r}{z-vt}$, az \mathbf{E} vektor egyenese a K rendszerben is átmegy a töltés pontján. Az \mathbf{E} vektor abszolút értéke a (100) első két összefüggése alapján:

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_z^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \kappa \frac{\sqrt{r^2 + (z-vt)^2}}{\left[\sqrt{r^2 + \kappa^2(z-vt)^2}\right]^3}.$$

Ha az O'P távolságot R -rel, a z -tengellyel bezárt szögét ϑ -val jelöljük, akkor

$$r = R \sin \vartheta, \quad z - vt = R \cos \vartheta.$$

Ezeket helyettesítve, a (9) összefüggés felhasználásával kapjuk:

$$\begin{aligned} E &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{\kappa}{\left(\sqrt{\sin^2 \vartheta + \kappa^2 \cos^2 \vartheta}\right)^3} \equiv \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta}\right)^3} \equiv \\ &\equiv (E)_{v=0} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta}\right)^3}. \end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy E legkisebb értékét $\vartheta = 0$, vagy $\vartheta = \pi$ esetén veszi fel, a legnagyobbat $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ -nél. A 9. ábra az $\frac{\mathbf{E}}{(E)_{v=0}}$ vektor végpontjának görbét mutatja polárkoordinátás alakban a ϑ szög függvényében $v = 0$, $v = 0.8c$ és $v = 0.95c$ esetben. Az egyforma nagyságú \mathbf{E} vektorok a hengerszimmetria miatt z -tengelyű kúpon helyezkednek el.

A (100) utolsó képlete szerint a K rendszerben mágneses teret is észlelünk, amelynek B -vonalai $-\varphi$ irányúak, tehát koncentrikus körök, és irányításuk megfelel a gerjesztési törvénynek, a mozgó pozitív töltést z -irányú konvektív áramnak tekintve. A képletből azt is láthatjuk, hogy a mágneses tér a z -tengely mentén $z = vt$ -nél a legnagyobb. Egyébként B_φ a Biot-Savart-törvény K -ra átszámított értéke.

Ebből a relativisztikus számításból egyszerűbben jutottunk eredményre, mint a klasszikus, retardált potenciálsból. Hangsúlyozzuk, hogyha a töltést és vele a K' inerciarendszert tekintjük állónak, és a megfigyelő K rendszere mozog hozzá képest $-\mathbf{v}$ állandó sebességgel, az *ugyanaz a helyzet*, a megfigyelő mágneses teret is észlel. Továbbá a tárgyalt példa is azt mutatja, hogy az elektromágneses tér felbomlása elektromos és mágneses térre relatív, inerciarendszertől függő, attól csak a négyes térerősség tenzorok függetlenek.

D., Trouton–Noble-kísérlet [2], [7], [8], [10], [12]

A klasszikus elektrodinamika feltételezett egy közeget, az étert. Az elmélet szerint az elektromágneses tér az éter feszültségi állapota, és az éterben terjed a fény is. A feltételezés szerint az éter egy kitüntetett inerciarendszerben, az állócsillagok rendszerében nyugszik. Ha itt elektromos töltések mozognak, az így adódó konvektív áramok az elektrosztatikus erőhatáson kívül mágneseseket is kifejtenek. Minthogy a Föld a Nap körül átlagosan 2.9 km/s sebességgel kering, az előbbieik alapján Trouton és Noble feltételezte, hogy egy nagyfeszültségre, (kb. 2000V-ra) feltöltött kondenzátorra – lemezei töltésének a Föld keringése folytán kialakuló ellenkező irányú konvektív áramok mágneses hatása révén – forgatónyomaték hat, amely a lemezeivel függőlegesen elhelyezett, torziószálra felfüggesztett csillámkondenzátort elfordítja. A várt nyomaték kicsiny, de az elmozdulás még mérhetőnek ígérkezett. Az 1903-ban gondosan elvégzett kísérlet eredménye azonban *negatív* volt: a kondenzátorra erősített tükörré irányított, majd visszavert fénysugár az ernyőn *mozdulatlan* volt.

A jelenség relativisztikusan a következőképpen magyarázható meg. A magyarázatot egyszerűsített modellen végezzük: egy közepén felfüggesztett szigetelőrúd végein pontszerűnek tekinthető $+Q$ ill. $-Q$ töltés van. A 10. ábra olyan K inerciarendszerben mutatja a szigetelőrudat felülnézetben, amelyben az elrendezés \mathbf{v} állandó sebességgel egyenes vonalon halad. A mágneses erőket és a nyomatékot a [12] szakirodalmat követve számítjuk.

A mozgó $-Q$ töltés létesítette mágneses indukció a $+Q$ töltés helyén a Biot–Savart-törvény szerint

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{(-Q \mathbf{v}) \times \mathbf{l}}{4 \pi l^3}.$$

A $+Q$ töltésre ható erő:

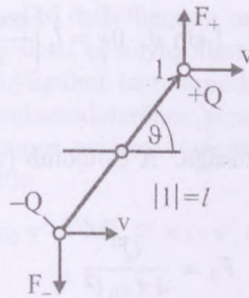
$$\mathbf{F}_+ = Q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4 \pi} Q^2 \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{l})}{l^3} = \frac{\mu_0}{4 \pi} Q^2 \frac{v^2 \mathbf{l} - (\mathbf{v} \mathbf{l}) \mathbf{v}}{l^3}.$$

A mozgó $+Q$ töltés által a $-Q$ töltésre ható erő hasonlóan: $\mathbf{F}_- = -\mathbf{F}_+$. Az erők nyomatéka:

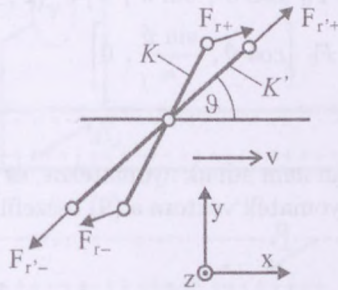
$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{l} \times \mathbf{F}_+ = \frac{\mu_0}{4 \pi} Q^2 \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{l}) (\mathbf{v} \mathbf{l})}{l^3}, \\ |\mathbf{M}| &= \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0 c^2} Q^2 \frac{v l \sin \theta \ v l \cos \theta}{l^3} = \frac{Q^2}{8 \pi \varepsilon_0 l} \frac{v^2}{c^2} \sin(2\vartheta). \end{aligned} \quad (101)$$

Minthogy a $+Q$ töltés potenciálja a $-Q$ töltés helyén: $U = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 l}$, és $\frac{1}{2} U Q = W_0$, a „rúd-kondenzátor” energiája (a nyugalmi rendszerben), azért az előző képlet a következő alakban is írható:

$$|\mathbf{M}| = W_0 \frac{v^2}{c^2} \sin(2\vartheta).$$



10. ábra. A Trouton–Noble-kísérlet egyszerűsített modellje



11. ábra. Modell a rugalmas ellenerők nyomatékának számításához a Trouton–Noble-kísérlethez

Bizonyítható, [7], hogy a mágneses nyomaték képletének ez az alakja lemez-kondenzátorokra is érvényes, akármilyen köztes dielektrikummal, (pl. csillámmal.)

Ez a nyomaték $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ -re, a sebességre merőleges irányba állítaná be a rudat. Eddig azonban figyelmen kívül hagytuk az elektrosztatikus Coulomb-erőt. Ez összenyomja a rudat, ami *rugalmas ellenerőket* ébreszt. Ezek a K' -nek nevezendő nyugalmi inerciarendszerben nyilván nem adnak nyomatékot, (mert a rúd egyenesébe esnek). A 11. ábra ezeket az ellenerőket mutatja a szigetelőrúddal együtt, mind a nyugalmi K' , mind a K inerciarendszerben, amihez képest K' v sebességgel mozog. A két helyzetet összerajzoltuk, annak figyelembevételével, hogy a rúd K -ban a (14) képlet szerint a sebesség irányában *kontrakciót* szenved, az erők pedig a (33c) képlet szerint arra merőlegesen. (A 11. ábrán a K rendszerbeli viszonyokat az áttekinthetőség kedvéért igen nagy sebesség esetére mutatjuk.) A rajzban vázolt Descartes-koordinátarendszerben a rúd vektora:

$$K'\text{-ben: } \mathbf{l}' = [l \cos \vartheta, l \sin \vartheta, 0] = l [\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0] ,$$

$$K\text{-ban: } \mathbf{l} = \left[\frac{l \cos \vartheta}{\kappa}, l \sin \vartheta, 0 \right] = l \left[\frac{\cos \vartheta}{\kappa}, \sin \vartheta, 0 \right],$$

ahol „ l ” a rúd nyugalmi hosszúsága. A Coulomb (vonzó)erő abszolút értéke a K' nyugalmi rendszerben:

$$F_0 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2},$$

ezzel a rugalmas ellenerő vektora:

$$\text{a } K'\text{-ben: } \mathbf{F}'_{r+} = F_0 [\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0]; \quad (\mathbf{F}'_{r-} = -\mathbf{F}'_{r+}),$$

$$\text{a } K\text{-ban: } \mathbf{F}_{r+} = F_0 \left[\cos \vartheta, \frac{\sin \vartheta}{\kappa}, 0 \right].$$

K' -ben ezek az erők nyilván nem adnak nyomatékot, és itt mágneses erők sincsenek, K -ban viszont a nyomaték vektora a (9) összefüggést és F_0 kifejezését is felhasználva:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_r &= \mathbf{l} \times \mathbf{F}_{r+} = F_0 l \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\cos \vartheta}{\kappa} & \sin \vartheta & 0 \\ \cos \vartheta & \frac{\sin \vartheta}{\kappa} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= F_0 l \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{1}{\kappa^2} - 1 \right) \mathbf{k} = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 l} \frac{v^2}{c^2} \sin(2\vartheta) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Ez pedig ugyanakkora nagyságú, de ellenkező irányú, mint a (101) képlet szerinti mágneses nyomaték, ezért **az eredő nyomaték zérus, a rúd nem fordul el.** A rúdra akár a nyugalmi, akár bármely más inerciarendszerben nem hat nyomaték. A csillámkondenzátorral ugyanez a helyzet.

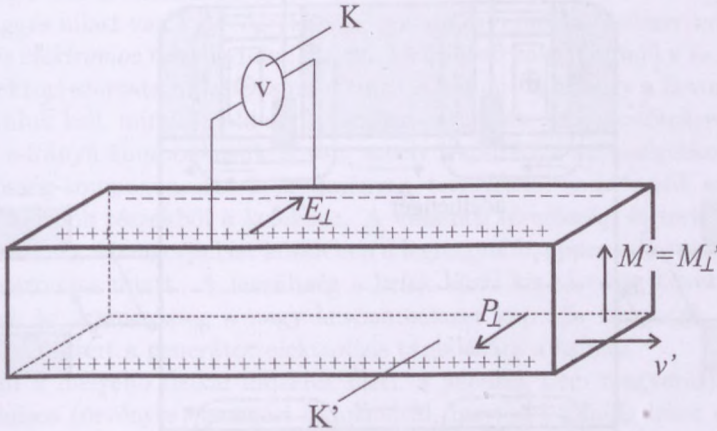
E kísérlet negatív eredményének az a jelentősége, hogy az elektrodinamika más területéről erősítette meg a Michelson–Morley-kísérletből a fényhullámokkal kapcsolatban már levont azt a következtetést, hogy *nincs ki-tüntetett inerciarendszer, a természeti törvények minden inerciarendszerben ugyanolyan alakúak.*

E., Unipoláris indukálás [5], [12].

A 12. ábra olyan derékszögű paralelepipedon (téglatest) alakú, vezető anyagú permanens mágneset mutat, amelynek egyik oldala igen (elvileg végtelen) hosszú a másik két oldalához képest, és úgy van mágnesezve, hogy az ábra szerinti alap- és fedőlapon vannak az állandó mágnes pólusai. Legyen a mágneses tér irányítottága az ábra szerinti, a mágnesezettség $\mathbf{M}' \cong \mathbf{B}'$ vektora

felfelé mutat. (Az utóbbi közelítő összefüggés a mágnes nagy permeabilitása miatt áll fenn $\mu_0 \mathbf{H}$ -nak \mathbf{B} melletti elhanyagolhatósága kapcsán.) Mozogjon a permanens mágnes a K' nyugalmi inerciarendszerével együtt \mathbf{v}' állandó sebességgel a V -mérő K inerciarendszeréhez képest: a V -mérő kitér, mert a mozgó mágnesezettség villamos polározottsággal jár a (66) képlet szerinti mértékben (itt most $\mathbf{P}_\perp' = 0$):

$$\mathbf{P}_\perp = \kappa \varepsilon_0 \mathbf{v}' \times \mathbf{M}'_\perp \cong \kappa \varepsilon_0 \mathbf{v}' \times \mathbf{B}'_\perp .$$



12. ábra. Az unipoláris indukció jelenségét magyarázó ábra

Így a K inerciarendszerben az elülső lapon pozitív, a hátsó lapon negatív felületi töltések keletkeznek, és ezek hatására alakul ki az \mathbf{E}_\perp erősségű villamos tér, amit a V -mérő kitérése jelez. Minthogy az elektromos polarizáció kifejezése $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}$, és itt ún. valódi töltések híján $\mathbf{D} = 0$, azért $\mathbf{E}_\perp = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}$, tehát

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp = -\kappa \mathbf{v}' \times \mathbf{M}'_\perp \cong -\kappa \mathbf{v}' \times \mathbf{B}'_\perp .$$

Mivel \mathbf{v}' és \mathbf{B}'_\perp nem függenek a helytől, azért $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, ami azt jelenti, hogy az unipoláris indukálással létrejött villamos tér **elektrosztatikus**. Ha az állandó mágneset tekintjük állónak, és a megfigyelő a V -mérővel az ellenkező irányban mozog \mathbf{v} sebességgel, akkor a térerősségre az

$$\mathbf{E} = \kappa \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cong \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

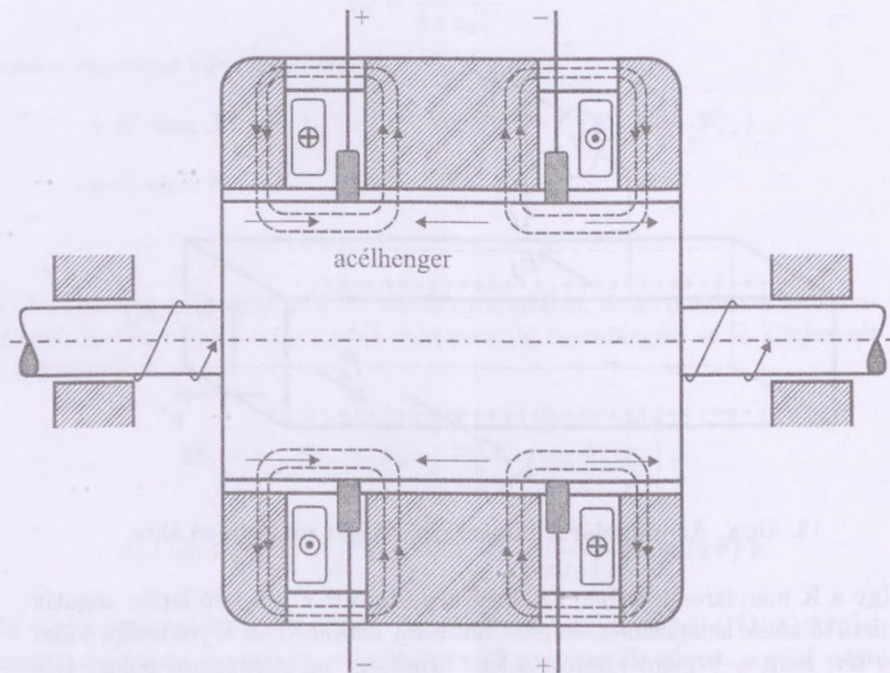
kifejezést kapjuk (a fénysebességhez képest kicsiny sebességeknél $\kappa \cong 1$). Ez a képlet megegyezik a szokásos mozgási indukció képletével. Ezzel kapcsolatban hangsúlyozta könyvében [12] Simonyi professzor, hogy ez a képletmegyezés

hamis fizikai magyarázathoz vezethet, hiszen a nem unipoláris indukálás örvényes teret létesít.

Ha a fizikai különbségektől eltekintve csak a kialakult elektromágneses térjellemzőket akarjuk meghatározni, akkor a (64) képletsorból $\mathbf{E}'_{\perp} = \mathbf{0}$ kapcsán is megkapjuk az

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} = -\kappa \mathbf{v}' \times \mathbf{B}'_{\perp}$$

összefüggést.



13. ábra. Unipoláris egyenáramú generátor keresztmetszeti rajza

A 13. ábra a gyakorlatban használható unipoláris (kommutátor nélküli) egyenáramú generátor géprajzát mutatja. (A rajz Frigyes és szerzőtársai „Elektrotechnika” könyvéből van átvéve.) A mágneses teret kétoldalt elhelyezett, egyenárammal táplált gerjesztőtekercs hozza létre. Az elektrotechnikai magyarázat szerint a tömör acélhenger forgatásával a B-vonalak metszése által az acélhenger-armatúrát teljesen körülvevő kefék közt feszültség indukálódik. Ha a kefékhez fogyasztó csatlakozik, akkor főleg tengelyirányban áram is folyik.

A relativisztikus elektrodinamikai magyarázat a következő lehet. Képzeltben helyezzünk a géphez olyan henger-koordináta-rendszert, amelynek z-tengelye a generátor valóságos tengelyének középre esik. A K inerciarendszer

itt az állónak tekintett külső tér, a K' inerciarendszer pedig az armatúrának bármely z -vel párhuzamos egyenese, de az is csak *pillanatnyi, differenciális inerciarendszer*, mert K -beli sebességének iránya a forgás miatt állandóan változik. A gép hengersizmetrikus kialakítása miatt bármelyik K' -ben, és bármely pillanatban a mágneses tér B'_r radiális komponense és a pillanatnyi, v'_φ tangenciális sebesség a (64) megfelelő transzformációs képlete szerint

$$E_z = \pm \kappa B'_r v'_\varphi \cong \pm B'_r v'_\varphi$$

erősségű axiális elektromos teret indukál a K rendszerbe. (A \pm a forgásiránytól függés miatt van.) A végtelen sok, pillanatnyi inerciarendszer *mindegyike axiális elektromos teret* indukál, mert a különböző helyű és idejű \mathbf{v} és \mathbf{B} vektorok vektori szorzata mindig és mindenütt z -irányú. Minthogy a B -vonalaknak záródniuk kell, mindkét oldalon visszakanyarodnak a gerjesztőtekercsek felé, ezért z -irányú komponensük is van, amely a φ -irányú sebességekkel radiális térerősség-komponenseket is eredményez, terheléskor ezek terelik az áramokat a belsőbb részekből a kefékhez. A villamos térerősség, és terheléskor az áramsűrűség a hengerpalást közelében a legnagyobb, éppen a B -vonalak belső elkanyarodása miatt. A feszültség a kefék közti kis távolság következtében kicsiny, az áramerősség a nagy keresztmetszet kapcsán nagy, (pl. 15 V és 30000 A), ezért a generátor elektrolízis táplálására alkalmas.

Ami a mélyebb fizikai hátteret illeti, a jelenség nem magyarázható meg a szokásos (örvényes) mozgási indukcióval, mert azt mindig lehet nyugalmi indukcióval is értelmezni, márpedig itt erről nem lehet szó, mert az armatúrában **a forgás folytán sincs olyan hurok, amelyben fluxusváltozás lenne**, hiszen az elrendezés teljesen hengersizmetrikus. Tehát a jelenség ennek a fejezetnek az elején tárgyalt fizikai képpel, a mozgással kialakuló, **elektromos polarizációval**, azaz relativisztikusan magyarázható megnyugtatóan.

Végül megemlíjtjük, hogy az unipoláris indukálás *egy másik megvalósítási lehetősége*, hogy egy vezető fémhengert forgatunk a tengelye körül axiális mágneses térben. Az indukált tér ez esetben radiális, és így a feszültséget a (vezető) forgástengely és a fémhenger palástja között vehetjük le.

F., H. A. Wilson kísérlete [2],[5],[7],[8].

Ez a kísérlet a (80b) összefüggés mérési ellenőrzésére szolgált abban az esetben, amikor nincs külső villamos tér ($\mathbf{E} = \mathbf{0}$), és a laboratóriumi mozgásoknak megfelelően $\frac{v^2}{c^2}$ elhanyagolható. Ebben az esetben a (80b) képlet a következő alakú:

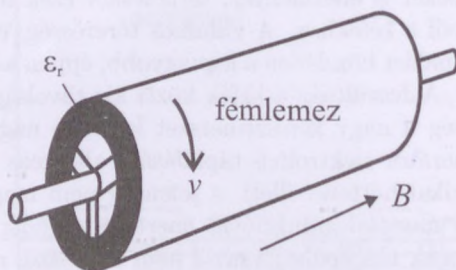
$$\mathbf{D} = \frac{\varepsilon_0}{\mu_r} (\varepsilon_r \mu_r - 1) \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Wilson üreges szigetelőanyag henger belső és külső palástját fémlémezekkel borította be (14. ábra), tehát lényegében hengeres kondenzátort használt,

amelyet küllőkkel erősített csapágyazott tengelyhez, így a berendezés forgatható volt. Állandó szögsebességgel forgatva, és homogén, axiális mágneses térbe helyezve, a szigetelőanyag villamosan polarizálódik, és a fémlemezek egymáshoz képest ellenkező polaritású töltések jelennek meg. Ezek megméréseivel meghatározható a felületi töltéssűrűség, ami egyenlő a D térjellemező értékével. A \mathbf{v} pillanatnyi sebességvektornak és a \mathbf{B} mágneses indukció vektorának merőlegessége, továbbá $\mu_r = 1$ miatt az ellenőrzendő képlet ebben az esetben:

$$D = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) v B,$$

és a mérések megegyeztek e képletből számítottakkal. Később M. Wilsonnal együtt olyan eszközzel ismételték meg a mérést, amelynél a szigetelőanyag pécsettviasz volt, amelybe acélgolyócskákat olvasztottak be. A mérés igazolta a μ_r -et is tartalmazó $D = \frac{\varepsilon_0}{\mu_r} (\varepsilon_r \mu_r - 1) v B$ képlet helyességét.



14. ábra. Wilson kísérletének vázlatja

G., Fizeau kísérlete. A fény fázissebességének mérése mozgó folyadékban [2], [5], [7], [8], [10]

Állandó keresztmetszetű, U alakú csőben vizet áramoltatott, amelyet felülről monokromatikus fénnel világított meg. Az U egyik szárában a víz v áramlási sebessége megnöveli, másik szárában lecsökkenti a fényhullám fázissebességét, és a kettő különbségéből adódó interferencia révén mérte le az eredő fázissebességeket. (Gyűjtőlencsével a két fénynyalábot egyesítette.) Az n törésmutatójú nyugvó folyadékban a fény terjedési sebessége $\frac{c}{n}$, és Fizeau a várt $\frac{c}{n} \pm v$ fázissebesség helyett a $v_e = \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ értéket mérte. Első ízben Laue (a [7] könyv szerzője) jött rá a magyarázatra, miszerint itt is a relativitáselmélet sebesség-összetevési képletét, ez esetben tehát a (15a) képletét kell használni, és így

$$v_e = \frac{\frac{c}{n} \pm v}{1 \pm \frac{c}{n} \frac{v}{c^2}} \cong \left(\frac{c}{n} \pm v\right) \left(1 \mp \frac{c}{n} \frac{v}{c^2}\right) = \frac{c}{n} \mp \frac{v}{n^2} \pm v - \frac{c}{n} \frac{v^2}{c^2} =$$

$$= \frac{c}{n} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \cong \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right),$$

jó egyezésben a mért értékkel, mert v kicsiny c -hez képest.

H., Elektromágneses síkhullám vákuumban (levegőben) [2], [5], [6], [7], [8]

Itt egymáshoz képest mozgó rendszerekben vizsgálják a hullámterjedés paramétereit. A gerjesztő eszköz álljon a K inerciarendszerben és mozogjon ehhez képest a K' inerciarendszer, és vele a megfigyelő \mathbf{v} sebességgel. Kérdés, hogy milyen összefüggés van az elektromágneses hullám K -beli és K' -beli paramétereit között. Felírjuk a K inerciarendszerre vonatkozóan a (monokróm) síkhullám térjellemzőinek ismert összefüggéseit:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{j\Phi}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 e^{j\Phi}, \quad \Phi = \omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c} \right),$$

ahol ω a körfrekvencia, t az idő, \mathbf{r} a helyzetvektor, \mathbf{n} pedig a hullámterjedés irányába mutató egységvektor, Φ pedig a szinuszosan változó térjellemzők fázisa. (Az $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \text{const.}$ síkon az időben szinuszosan változó térjellemzők egyenletesen oszlanak el.) Fennállnak továbbá a

$$\mathbf{H}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0, \quad \text{és} \quad \mathbf{E}_0 = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \mathbf{n} \times \mathbf{H}_0. \quad (102)$$

összefüggések, tehát $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ és \mathbf{n} (s így \mathbf{E}, \mathbf{H} és \mathbf{n}) egymásra merőleges, jobbsodrású vektorrendszert alkotnak. A K' inerciarendszerbeli térjellemzőket a (64) transzformációs képletekből nyerhetjük. Ezek a K -beli térjellemzők lineáris kombinációi, és így bennük az $e^{j\Phi}$ tényezők változatlanul jelennek meg. Ebből pedig az következik, hogy a Φ fázis invariáns skalár. Először ennek következményeit vizsgáljuk meg. A Φ fázist a következőképpen írjuk át:

$$\Phi = -\frac{1}{c} (\mathbf{r} + c t \mathbf{e}_t) \cdot (\omega \mathbf{n} + \omega \mathbf{e}_t).$$

Mint hogy a felírt első tényező négyes vektor, a második tényezőnek is annak kell lenni, hogy a skaláris szorzat invariáns skalár legyen. A

$$\mathbf{k} = \omega \mathbf{n} + \omega \mathbf{e}_t \equiv \omega \mathbf{n} + c \frac{\omega}{c} \mathbf{e}_t$$

négyes vektort *hullámvektornak* nevezik. Transzformációja tehát Lorentz-féle, így a (13) képletek szerint:

$$\omega' \mathbf{n}'_{\perp} = \omega \mathbf{n}_{\perp}; \quad \omega' \mathbf{n}'_{\parallel} = \kappa \left(\omega n_{\parallel} - v \frac{\omega}{c} \right); \quad \frac{\omega'}{c} = \kappa \left(\frac{\omega}{c} - \frac{v}{c^2} \omega n_{\parallel} \right).$$

Ha a hullámterjedés \mathbf{n} egységvektora a \mathbf{v} sebességvektorral α szöget zár be, akkor $n_{\parallel} = \cos \alpha$, és a harmadik transzformációs kifejezésből a frekvenciák arányára a következőt kapjuk:

$$\frac{f'}{f} = \frac{\omega'}{\omega} = \kappa \left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha \right) = \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (103a)$$

Ha a K' rendszerben az \mathbf{n}' és \mathbf{v}' vektorok közötti szög α' , akkor a második transzformációs egyenletből a (103a) képlet felhasználásával nyerjük:

$$\cos \alpha' = \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha}. \quad (103b)$$

Az első transzformációs összefüggésből pedig

$$\sin \alpha' = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sin \alpha}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha}$$

adódik. A (103 a) a Doppler-hatás relativisztikus kifejezése.

Ha különlegesen a megfigyelő mozgásának egyenese párhuzamos a hullámterjedés irányával, akkor $\alpha = 0$ vagy π és $\cos \alpha = +1$ vagy -1 , aszerint, hogy a megfigyelő távolabb, vagy közelebb kerül a hullámforráshoz. Ezekben az ún. longitudinális Doppler-hatás eseteiben a (103 a) képletből az

$$\frac{f'}{f} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}, \text{ ill. } \frac{f'}{f} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

kifejezéseket kapjuk, vagyis a megfigyelő távolodáskor kisebb frekvenciát, közeledéskor nagyobbat észlel, mint a forrás frekvenciája. A kapott összefüggések függetlenek attól, hogy a forrás távolodik (közeledik) az álló megfigyelőhöz, vagy fordítva. A klasszikus elmélet szerint álló forrás esetén $\frac{f'}{f} = 1 \mp \frac{v}{c}$, álló megfigyelő esetén az $\frac{f'}{f} = \frac{1}{1 \pm \frac{v}{c}}$ képlet érvényes úgy, hogy a felső előjel vonatkozik a távolodásra, az alsó a közeledésre. Megemlítjük, hogy fényhullám esetén a Doppler-hatás színváltozást jelent. Természetesen a relativisztikus értékek a pontosabbak.

Ha $\alpha = \frac{\pi}{2}$, tehát ha pl. a megfigyelő a hullám terjedési irányára merőlegesen halad, akkor a (103a)-ból $\frac{f'}{f} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Ezt az ún. transzverzális Doppler-hatást a klasszikus elmélet nem ismerte. Ennek nagysága csak nagy v értékre adhat észrevehető frekvencianövekedést.

A (103b) képlet azt mutatja, hogy α' nem egyezik meg α -val. Pl. fényhullám esetén a mozgó megfigyelő a valóságtól eltérő szögben látja a fényforrást.

Ez az **aberráció** jelensége. Ez magyarázza pl. J. Bradley 1727-es felfedezését, hogy az állócsillagok a földi szemlélők számára látszólagosan ellipszis pályán mozognak a föld keringésének ellenképeként.

Rátérve az amplitúdók transzformációjának vizsgálatára, célszerűbb az amplitúdók négyzetével számolni, amelyek a $\sin^2 \Phi$ szerinti változások átlagértékének kétszeresei. A (102) összefüggésekből

$$\mathbf{E}_0^2 = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \mathbf{H}_0^2, \quad \text{azaz} \quad \varepsilon_0 \mathbf{E}_0^2 = \mu_0 \mathbf{H}_0^2$$

Az energiasűrűség amplitúdója a (83b) képlet szerint

$$w_{e0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}_0^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H}_0^2 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0^2. \quad (104a)$$

Az energiasűrűség transzformációja a (89e) és (89g) képletek szerint összefügg a Poynting-vektorával. Ennek amplitúdója:

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{E}_0 \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{E}_0^2 \mathbf{n}, \quad (\text{mert } \mathbf{E}_0 \mathbf{n} = 0),$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \quad \text{ezért} \quad \frac{\mathbf{S}_0}{c} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0^2 \mathbf{n}. \quad (104b)$$

A K' inerciarendszerben is felírhatók ezek az összefüggések, mert \mathbf{E}'_0 és \mathbf{H}'_0 is merőlegesek egymásra, ugyanis a (64*) szerint $\mathbf{E}'_0 (\mu_0 \mathbf{H}'_0) = \mathbf{E}_0 (\mu_0 \mathbf{H}_0) = 0$. Továbbá K' -ben is fénysebességgel terjed a síkhullám. Tehát

$$w'_{e0} = \varepsilon_0 \mathbf{E}'_0{}^2; \quad \frac{\mathbf{S}'_0}{c} = \varepsilon_0 \mathbf{E}'_0{}^2 \mathbf{n}'. \quad (105)$$

Így $\mathbf{E}'_0{}^2$ transzformációs szabályát megkaphatjuk az energia-impulzus tenzor megfelelő komponenseinek transzformációs szabályából. (A következőkben az egyszerűbb jelölés céljából a 0 indexet elhagyjuk.)

A (89e) egyenletből kivonjuk a (89g) egyenlet $\frac{v}{c^2}$ -szeresét:

$$w_e - \frac{v}{c^2} S_{\parallel} = \kappa^2 \left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2} - 2 \frac{v^2}{c^2} \right) w'_e + \left(\frac{2v}{c^2} - \frac{v}{c^2} - \frac{v^3}{c^4} \right) S'_{\parallel} \right],$$

azaz $w_e - \frac{v}{c^2} S_{\parallel} = w'_e + \frac{v}{c^2} S'_{\parallel}$.

A (104) és (105) összefüggéseket $E = |\mathbf{E}_0|$ átjelöléssel, és az $n_{\parallel} = \cos \alpha$, és $n'_{\parallel} = \cos \alpha'$ figyelembevételével behelyettesítjük az utolsó egyenletbe:

$$\varepsilon_0 E^2 - \frac{v}{c} \varepsilon_0 E^2 \cos \alpha = \varepsilon_0 E'^2 + \frac{v}{c} \varepsilon_0 E'^2 \cos \alpha', \quad \text{tehát} \quad \frac{E'^2}{E^2} = \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha}{1 + \frac{v}{c} \cos \alpha'}.$$

A (103b)-re tekintettel

$$\frac{E'^2}{E^2} = \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha}{1 + \frac{v}{c} \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha}} = \frac{(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

$$\frac{E'}{E} = \kappa \left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha\right). \quad (106)$$

A (103a) képlettel összehasonlítva láthatjuk, hogy az *amplitúdó ugyanúgy transzformálódik, mint a frekvencia, tehát $\frac{E'}{f'} = \frac{E}{f}$ invariáns*. Természetesen ugyanez vonatkozik a mágneses térerősség amplitúdójára is.

Látjuk, hogy az elektromágneses síkhullám w_e energiasűrűsége E^2 -tel arányos, ezért $\frac{w'_e}{w_e} = \left(\frac{E'}{E}\right)^2$.

Az **energia** transzformációjának meghatározásához szükség van a térfogaterá is, ami a (14) harmadik képlete szerint fordítottan arányos a κ mennyiség transzformációjával. Ennek kiszámítására a sebességösszetevés (16) jelű kifejezése reciprokának négyzetgyökét vesszük a (9) képlet felhasználásával:

$$\kappa_K = \kappa \kappa_{K'} \left(1 + \frac{u'_{\parallel} v}{c^2}\right),$$

ahol κ_K ill. $\kappa_{K'}$ a megfelelő inerciarendszerbeli hullámsebességre vonatkozik, κ pedig a K' -nek K -hoz képesti v sebességére. Így a térfogatok aránya:

$$\frac{V'}{V} = \frac{\kappa_K}{\kappa_{K'}} = \kappa \left(1 + \frac{u'_{\parallel} v}{c^2}\right).$$

Figyelembe veendő, hogy a síkhullám mindkét rendszerben c sebességgel terjed, ezért a jobb oldalon u'_{\parallel} helyére $c \cos \alpha'$ írandó, a bal oldalakon pedig $\frac{0}{0} = \frac{\infty}{\infty}$ határozatlan érték. Az egyenlet jobb oldalának határozottsága miatt azonban a térfogatok *arányára* a helyes értéket kapjuk: $\frac{V'}{V} = \kappa \left(1 + \frac{v}{c} \cos \alpha'\right)$.

Felhasználjuk a (103b) képletet:

$$\frac{V'}{V} = \kappa \left(1 + \frac{v}{c} \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha}\right) \equiv \kappa \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha} \equiv \frac{1}{\kappa \left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha\right)},$$

tehát az energia transzformációs képlete:

$$\frac{W'}{W} = \frac{V' w'}{V w} = \frac{V'}{V} \left(\frac{E'}{E}\right)^2 = \frac{1}{\kappa \left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha\right)} \left[\kappa \left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha\right)\right]^2,$$

vagyis a (103a) összefüggést is tekintve

$$\frac{W'}{W} = \kappa \left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha\right) = \frac{f'}{f}. \quad (107)$$

Tehát a síkhullám energiája is úgy transzformálódik, mint a frekvenciája, $\frac{W}{f}$ invariáns.

A kvantumfizika szerint az f frekvenciájú hullámcsomag energiája $W = h f$. Így a h a Lorentz-transzformációval szemben is invariáns.

A fény, mint elektromágneses hullám nemcsak energiát visz magával, mégpedig felület- és időegységenként $|\mathbf{S}|$ értékűt, hanem *impulzust* is, és pedig térfogategységenként $|\mathbf{g}|$ értékűt, és a (91) képlet szerint

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2},$$

tehát \mathbf{S} -sel együtt \mathbf{g} iránya is egyezik a hullámterjedés irányával. Továbbá a (104a) és (104b) képletek felhasználásával, (az indexeket elhagyva)

$$\mathbf{g} = \frac{w}{c} \mathbf{n},$$

ahol w a fényhullám energiasűrűségének amplitúdója. Ha egy test $d\mathbf{A}$ vektorú felületelemét fénysugár (vagy más elektromágneses hullám) éri, akkor **arra nyomást gyakorol**.

Ha ugyanis a felületelemre nézve a beesési szög ϑ , akkor dt idő alatt az elemi felületen át

$$(\mathbf{g} d\mathbf{A}) c dt = \frac{w}{c} (\mathbf{n} d\mathbf{A}) c dt = -w |d\mathbf{A}| \cos \vartheta dt$$

az elemi impulzusváltozás, mert dt idő alatt a felületelembe a hullámnak $-(\mathbf{n} d\mathbf{A}) c dt$ hasábtérfogatnyi része hatol be. (A negatív előjel onnan adódik, hogy a sugárzás iránya és a felületi normális tompaszöveget zár be.) Az elemi impulzust dt -vel osztva azt kapjuk, hogy a fénysugarakat *teljesen elnyelő test* felületelemére $-d\mathbf{A}$ irányában, tehát a test belseje felé $|d\mathbf{F}| = w |d\mathbf{A}| \cos \vartheta$ nagyságú erő hat, ami $\frac{|d\mathbf{F}|}{|d\mathbf{A}|} = w \cos \vartheta$ amplitúdójú *nyomásnak* felel meg. Az időbeli gyors változás miatt az érzékelt nyomás a középérték, (ami az amplitúdó fele), tehát *teljesen elnyelő test felületére a nyomás:*

$$p = \bar{w} \cos \vartheta,$$

ahol \bar{w} -vel a középértéket jelöltük. A tökéletesen visszaverő felület esetén a visszaverődésnél egy ugyanolyan nagy, de ellenkező irányú impulzus keletkezik, mint a beesésnél, mert a visszaverődés szöge megegyezik a beesési szöggel. Ezért az impulzusváltozás kétszer akkora, mint a teljesen elnyelő felületnél, így a *tökéletesen visszaverő test felületére a nyomás:*

$$p = 2 \bar{w} \cos \vartheta.$$

A $d \leq 1$ *áteresztőképességű* (tehát $1 - d$ *elnyelőképességű*) és $r \leq 1$ *visszaverőképességű* lemezre a nyomás:

$$p = (1 + r - d) \bar{w} \cos \vartheta.$$

Eddig feltételeztük, hogy a test és felülete áll. Mozgó testekre vonatkozóan pl. úgy kaphatjuk meg a nyomást, hogy megvizsgáljuk általánosan a nyomás transzformációját.

Legyen most K a nyugalmi inerciarendszer, és mozogjon ez a K' rendszerben \mathbf{v} állandó sebességgel.

Felbontjuk az elemi (hármás) erőket \mathbf{v} -vel ill. \mathbf{v}^2 -vel párhuzamos, és arra merőleges komponensekre:

$$d\mathbf{F} = d\mathbf{F}_{\parallel} + d\mathbf{F}_{\perp}, \quad d\mathbf{F}' = d\mathbf{F}'_{\parallel} + d\mathbf{F}'_{\perp}.$$

A (33c) szerint a vesszős és vesszőtlen jelölések cseréjével

$$d\mathbf{F}'_{\parallel} = d\mathbf{F}_{\parallel} \quad d\mathbf{F}'_{\perp} = \frac{d\mathbf{F}_{\perp}}{\kappa},$$

Tehát, mivel a nyomóerő a felületi normálissal ellentétes irányú, azért

$$d\mathbf{F}' = -p' d\mathbf{A}' \quad \text{és} \quad d\mathbf{F} = -p d\mathbf{A}$$

és így

$$-p' d\mathbf{A}'_{\parallel} = -p d\mathbf{A}_{\parallel}, \quad -p' d\mathbf{A}'_{\perp} = -\frac{p d\mathbf{A}_{\perp}}{\kappa}.$$

Mivel a felületvektorok a felület normálisának irányában mutatnak, azért $d\mathbf{A}_{\parallel}$ és $d\mathbf{A}'_{\parallel}$ esetében *maga a felület \mathbf{v} -re ill. \mathbf{v}^2 -re merőleges*, $d\mathbf{A}_{\perp}$ és $d\mathbf{A}'_{\perp}$ esetében *maga a felület \mathbf{v} -vel ill. \mathbf{v}^2 -vel párhuzamos*, és így annak figyelembevételével, hogy a (14) szerint csak sebességirányban van kontrakció:

$$d\mathbf{A}'_{\parallel} = d\mathbf{A}_{\parallel}, \quad d\mathbf{A}'_{\perp} = \frac{d\mathbf{A}_{\perp}}{\kappa}.$$

Összehasonlítva ezeket az előző két összefüggéssel, arra jutunk, hogy

$$p' = p.$$

Tehát a **nyomás invariáns skalár**. (A levezetés független a sugárnyomásos alkalmazástól, ezért a kapott eredmény általános.) Esetünkben ez azt jelenti, hogy a mozgó felületre gyakorolt sugárnyomás *az álló felületre vonatkozó* v és v^2 értékekkel számítható.

Földünkön a nap sugárzása merőleges beesés esetén kb. $10^{-5} \frac{N}{m^2}$, nagyon kicsiny. A csillagok felületén a sugárzás nyomása összemérhető a gravitációs erőkkel.

I., Töltött részecske gyorsítása [5] (Követjük a megadott szakirodalom gondolatait.)

Egy m_0 nyugalmi tömegű, Q töltésű részecske álló állapotból indulva, U feszültség hatására v sebességre gyorsul fel. Meghatározandó a vsebesség.

A részecske $m_0 c^2$ energiája QU -val növekedett, ezért a megnövekedett mc^2 energia: $mc^2 = m_0 c^2 + QU$. Minthogy a (26b) összefüggés szerint $m = \kappa m_0$, azért

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2 + QU,$$

ahonnan

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{QU}{m_0 c^2}\right)^2},$$

végül

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{QU}{m_0 c^2}\right)^2}}.$$

Ha QU kicsiny $m_0 c^2$ -hez képest, akkor sorfejtéssel

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 - 2 \frac{QU}{m_0 c^2}\right)} = \sqrt{\frac{2QU}{m_0}}.$$

A közelítéssel kapott eredmény egyezik a klasszikus mechanikából kapottal, ugyanis e szerint a részecske kinetikus energiája a potenciális energiaváltozással egyenlő, azaz $\frac{1}{2} m_0 v^2 = QU$. Mekkora feszültségig használható a klasszikus formula? Ennek megállapítására írjuk elő, hogy a sorfejtés harmadik tagja (abszolút értékeket tekintve) ne legyen nagyobb a második tag 3%-ánál. Ennek a harmadik tagnak az együttthatója (az általánosított binomiális tétel szerint) $\frac{(-2)(-3)}{1.2} = 3$, tehát $3 \left(\frac{QU}{m_0 c^2}\right)^2 \leq 0.03 * 2 \frac{QU}{m_0 c^2}$, ahonnan a **határfeszültségre** az alábbi képletet nyerjük:

$$U_h = 0.02 \frac{m_0}{Q} c^2.$$

Elektronra:

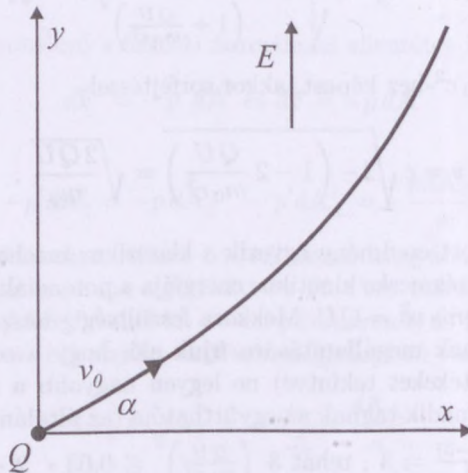
$$\frac{m_0}{Q} = \frac{1}{1.76 \cdot 10^{11}} \frac{kg}{As}, \text{ ezért } U_h = 0.02 \frac{9 \cdot 10^{16}}{1.76 \cdot 10^{11}} = 10227 V \cong 10 \text{ kV}.$$

Protonra:

$$\frac{m_0}{Q} = \frac{1}{0.96 \cdot 10^8} \frac{kg}{As}, \text{ ezért } U_h = 0.02 \frac{9 \cdot 10^{16}}{0.96 \cdot 10^8} = 18750000 V \cong 20 \text{ MV}.$$

J., Töltés mozgása homogén elektrosztatikus térben [6] [lásd még Simonyi K.: Elektronfizika, 1973.]

Feltételezve, hogy a töltésnek van kezdő sebessége, ennek vektora és a villamos térerősség vektora egy síkot határoz meg. A mozgás ebben a síkban megy végbe, mert nincs e síkra merőleges erő. E síkban egy x - y derékszögű koordináta-rendszert úgy veszünk fel, hogy y -tengelye a térerősség-vektorral párhuzamos legyen, és a töltött részecske a $t = 0$ időpontban az origóban van (15. ábra), és kezdősebességének \mathbf{v}_0 vektora az x tengellyel α szöget zár be. Az x - y koordináta-rendszer a megfigyelő K inerciarendszere. Felírjuk ebben a Newton-törvény (26a) alakjának x és y vetületét a Q töltés mozgásának tetszőleges pontjában, ha a sebességvektora e rendszerben $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$:

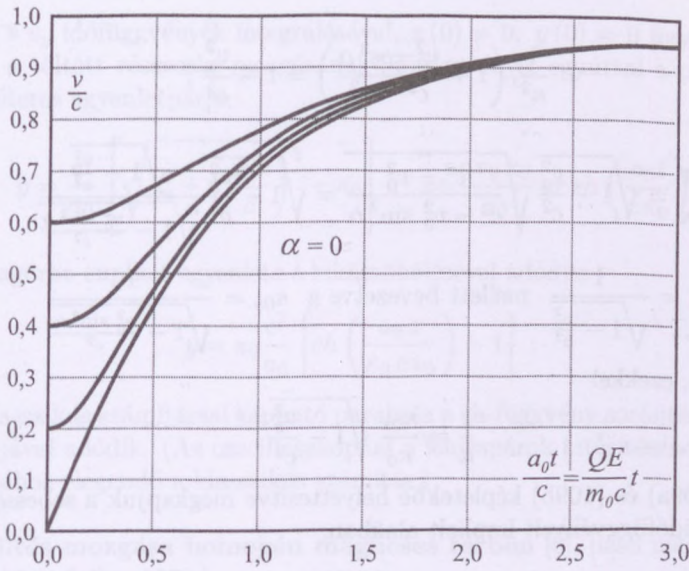


15. ábra. Koordináta-rendszer felvétele homogén elektrosztatikus térben mozgó töltéshez

$$\frac{d}{dt}(m v_x) = 0, \quad \frac{d}{dt}(m v_y) = Q E.$$

Itt m a töltött részecske tömege a K rendszerben. Nemcsak v_x és v_y változik pontról pontra, hanem m is, mert csak a részecske m_0 nyugalmi tömege nem változik a mozgás folyamán. Ez a töltéshez kötött pillanatnyi K' inerciarendszerhez tartozik, és a (26b) szerint

$$m = \kappa m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2}{c^2}}}.$$



16. ábra. Homogén elektrosztatikus térben mozgó töltés sebessége az idő függvényében

A mozgásegyenleteket átosztva a mozgás folyamán állandó m_0 értékkel, a következőt kapjuk:

$$\frac{d}{dt} (\kappa v_x) = 0; \quad \frac{d}{dt} (\kappa v_y) = \frac{QE}{m_0} \equiv a_0, \quad (108)$$

ahol a_0 gyorsulásdimenziójú, és állandó, mert E is az, valamint Q és m_0 invariáns. A (108) első egyenletéből $\kappa v_x = \text{const.}$ A konstans meghatározhatjuk az ismert kezdő sebességből. Ugyanis $t = 0$ -nál $(\kappa)_{t=0} = \kappa_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$, és

$(v_x)_{t=0} = v_0 \cos \alpha$, ezért $\text{const.} = \kappa_0 v_0 \cos \alpha$, és így $\kappa v_x = \kappa_0 v_0 \cos \alpha$, végül

$$v_x = \frac{\kappa_0 v_0 \cos \alpha}{\kappa} = \frac{c v_0 \cos \alpha}{\kappa \sqrt{c^2 - v_0^2}}. \quad (109a)$$

A (108) második egyenletének integrálásával, és $(v_y)_{t=0} = v_0 \sin \alpha$ figyelembevételével kapjuk:

$$v_y = \frac{a_0 t}{\kappa} + v_0 \sin \alpha. \quad (109b)$$

A κ mennyiség azonban függvénye v_x -nek és v_y -nek. A (109a) alapján a v_x -től való függést kiküszöböljük:

$$1 - \frac{1}{\kappa^2} = \frac{v^2}{c^2} = \frac{v_x^2 + v_y^2}{c^2} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{\kappa^2 (c^2 - v_0^2)} + \frac{v_y^2}{c^2};$$

innen

$$\frac{1}{\kappa^2} \left(1 + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{c^2 - v_0^2} \right) = 1 - \frac{v_y^2}{c^2},$$

azaz

$$\frac{1}{\kappa} = \sqrt{1 - \frac{v_y^2}{c^2}} \sqrt{\frac{c^2 - v_0^2}{c^2 - v_0^2 \sin^2 \alpha}} = \sqrt{1 - \frac{v_y^2}{c^2}} \frac{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{c^2}}}$$

$$\text{A } \kappa_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \text{ mellett bevezetve a } \kappa_{0s} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{c^2}}} \quad (110)$$

jelöléseket, ezekkel

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\kappa_{0s}}{\kappa_0} \sqrt{1 - \frac{v_y^2}{c^2}},$$

amit a (109a) és (109b) képletekbe helyettesítve megkapjuk a sebességkomponensek időfüggvényeit implicit alakban:

$$\left. \begin{aligned} v_y &= \frac{\kappa_{0s}}{\kappa_0} a_0 t \sqrt{1 - \frac{v_y^2}{c^2}} + v_0 \sin \alpha \\ v_x &= \kappa_{0s} v_0 \cos \alpha \sqrt{1 - \frac{v_y^2}{c^2}} \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

Ezekből kiszámítható a v_x és v_y időfüggvénye, és azok integrálásával a pályagörbe paraméteres egyenlete.

Bár az integrálás zárt alakban adódik, a számítás meglehetősen hosszadalmas, ezért ezzel itt nem foglalkozunk, hanem *csak az egyszerűen tárgyalható* $\alpha = 0$ esettel.

$\alpha = 0$ esetén a (110) jelű képlet szerint $\kappa_{0s} = 1$ és a (111) képletekből

$$v_y^2 = \left(\frac{a_0 t}{\kappa_0} \right)^2 \left(1 - \frac{v_y^2}{c^2} \right), \quad v_x = \frac{v_0 \kappa_0}{a_0 t} v_y,$$

végül

$$v_y = \frac{a_0 t}{\sqrt{\kappa_0^2 + \left(\frac{a_0 t}{c} \right)^2}}, \quad v_x = \frac{v_0 \kappa_0}{\sqrt{\kappa_0^2 + \left(\frac{a_0 t}{c} \right)^2}},$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\left(\frac{v_x}{c} \right)^2 + \left(\frac{v_y}{c} \right)^2} = \sqrt{\frac{\kappa_0^2 \left(\frac{v_0}{c} \right)^2 + \left(\frac{a_0 t}{c} \right)^2}{\kappa_0^2 + \left(\frac{a_0 t}{c} \right)^2}}.$$

A 16. ábrán a sebesség-idő függvénygörbéket látjuk különböző kezdősebességeket. Ha $v_0 = 0$, akkor az **A.**, példával egyező eredményt kapunk.

A v_x és v_y időfüggvények integrálásával, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ figyelembevételével a töltött részecske mozgásának időfüggvénye, egyúttal a pályagörbe paraméteres egyenletpárja:

$$y = \frac{c^2}{a_0} \left[\sqrt{\kappa_0^2 + \left(\frac{a_0 t}{c}\right)^2} - \kappa_0 \right]; \quad x = \frac{c v_0 \kappa_0}{a_0} \operatorname{ar sh} \left(\frac{a_0 t}{c \kappa_0} \right).$$

A pályagörbe explicit egyenlete t kiküszöbölésével adódik:

$$y = \kappa_0 \frac{c^2}{a_0} \left[\operatorname{ch} \left(\frac{a_0 x}{\kappa_0 c v_0} \right) - 1 \right].$$

A klasszikus számítással kapható parabola a ch -függvény sorfejtésének első két tagjával adódik. (Az oszcilloszkópnál a lemezpárok kitérítésének meghatározásához elegendő a klasszikus számítás.)

K., Töltés mozgása homogén mágneses térben [6], [lásd még Simonyi K.: Elektronfizika, 1973.]

Először azzal az esettel foglalkozunk, amelynél a töltött részecske *kezdő sebességvektorának nincs a mágneses indukcióval párhuzamos komponense*. Vegyünk fel Descartes-féle koordináta-rendszert úgy, hogy a z -tengely a \mathbf{B} vektorral párhuzamos, és ellentétes irányú legyen, az origó a részecske kezdőpontjában legyen, és az x -tengely a kezdő sebességvektor irányába mutasson (17. ábra). A mozgó töltésre a mágneses tér $\mathbf{F} = Q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ erővel hat, így merőleges lévén \mathbf{B} -re, mindig az x - y síkkal párhuzamos, és $\mathbf{v}_0 \times$ iránya miatt \mathbf{v} is e síkba esik, tehát *síkmozgásról van szó*. Az erő komponensekben:

$$F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} = Q \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & -B \end{vmatrix} = -Q v_y B \mathbf{i} + Q v_x B \mathbf{j},$$

tehát Newton mozgástörvénye a (26) képlet szerint:

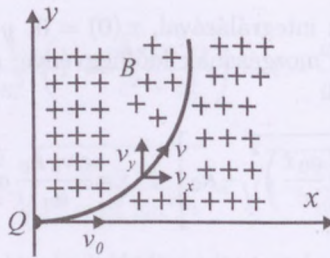
$$\frac{d}{dt} (\kappa m_0 v_x) = -Q v_y B, \quad \frac{d}{dt} (\kappa m_0 v_y) = Q v_x B.$$

Átosztva m_0 -lal, és bevezetve az $\left[\frac{1}{s}\right]$ dimenziójú

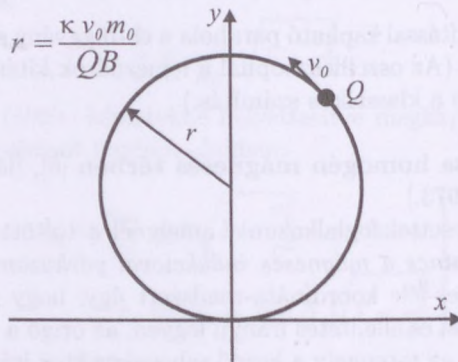
$$\frac{Q B}{m_0} = \frac{1}{T} \tag{112}$$

jelölést, a sebességkomponensekre az alábbi differenciálegyenlet-rendszert kapjuk:

$$\frac{d}{dt} (\kappa v_x) = -\frac{v_y}{T}; \quad \frac{d}{dt} (\kappa v_y) = \frac{v_x}{T}.$$



17. ábra. Koordináta-rendszer felvétele homogén mágneses térben mozgó töltéshez



18. ábra. Homogén mágneses térben mozgó töltés pályája

Az oldalak megcserélésével látható, hogy

$$0 = \kappa v_x \left(-\frac{v_y}{T} \right) + \kappa v_y \left(\frac{v_x}{T} \right) = \kappa v_x \frac{d}{dt} (\kappa v_x) + \kappa v_y \frac{d}{dt} (\kappa v_y) \equiv \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [(\kappa v_x)^2 + (\kappa v_y)^2] = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\kappa^2 v^2).$$

Ebből következik, hogy $\kappa^2 v^2 = \text{const.}$ Minthogy κ^2 is csak a v -től függ, azért

$$v = \text{const.} = v_0, \quad \kappa = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = \text{const.}, \quad (113)$$

Ezt figyelembe véve a differenciálegyenlet-rendszer:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{v_y}{\kappa T}, \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{v_x}{\kappa T},$$

tehát

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\frac{v_x}{\kappa^2 T^2},$$

és így

$$v_x = A_1 \cos \frac{t}{\kappa T} + A_2 \sin \frac{t}{\kappa T}, \quad v_y = -\kappa T \frac{dv_x}{dt} = A_1 \sin \frac{t}{\kappa T} - A_2 \cos \frac{t}{\kappa T}.$$

Mint hogy $t = 0$ -nál $v_y = 0$, és $v_x = v_0$, azért $A_2 = 0$, és $A_1 = v_0$, ezzel:

$$v_x = v_0 \cos \frac{t}{\kappa T}, \quad v_y = v_0 \sin \frac{t}{\kappa T}. \quad (114a)$$

Integrálva, és tekintettel arra, hogy $t = 0$ -nál $x = 0$, és $y = 0$, a pályagörbe paraméteres egyenletrendszere:

$$x = \kappa v_0 T \sin \frac{t}{\kappa T}, \quad y = \kappa v_0 T \left(1 - \cos \frac{t}{\kappa T}\right). \quad (114b)$$

A pályagörbe tehát $\kappa v_0 T = \frac{\kappa v_0 m_0}{Q B}$ sugarú, x -tengelyt érintő, az y -tengelyre szimmetrikus kör (18. ábra).

A mozgás szögsebessége:

$$\omega = \frac{1}{\kappa T} = \frac{Q B}{\kappa m_0}.$$

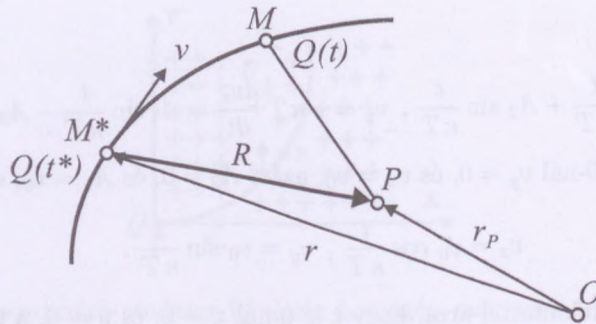
Láthatjuk, hogy itt a relativisztikus hatás csak a kör sugarának és a szögsebességének nagyságában nyilvánul meg.

Ha a kezdősebességnek \mathbf{B} -vel párhuzamos komponense is van, akkor – mint hogy erre nincs mágneses erőhatás, – a töltött részecske sebességének \mathbf{B} -vel párhuzamos komponense állandó marad, ezért végeredményben a pályagörbe csavarvonal.

L., Mozgó töltés elektromágneses tere; Lienard–Wiechert-potenciálok. [3], [6]

A [6] szakirodalom gondolatait követjük részletesebb kifejtésben. A 19. ábra egy a megfigyelő K inerciarendszerében mozgó töltött részecske pályáját mutatja. A t időpontban a töltés az M pontban van, egy előbbi, alább megtárgyalandó $t^* < t$ időpontban az M^* pontban, ahol a részecske K -beli sebessége \mathbf{v} . A feladat a mozgó töltés keltette elektromágneses tér jellemzőinek meghatározása a P észlelési pontban és t időpontban.

A klasszikus elektrodinamikából ismeretes, hogy nyugvó töltések és (konduktív) áramok esetén a megoldás a skaláris és vektoriális potenciálok meghatározásán keresztül vezethet, azaz a (74) egyenletek megoldásával. Mint ismeretes, stacionárius terek esetén vákuumban (levegőben) a skalárpotenciál a $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dV}{R}$ képlettel, a vektorpotenciál az $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} dV}{R}$ képlettel számítható, ahol R az észlelési pont és a töltés- vagy áramsűrűség helye közötti távolság. Az időben változó tereknél azonban a töltéseket és áramokat



19. ábra. Magyarázó ábra mozgó töltés potenciáljainak számításához

időben annyival kell késleltetni a képletek jobb oldalán, amennyi idő kell ahhoz, hogy a fénysebességgel terjedő hatás (tulajdonképpen el.m. hullám) az észlelési ponthoz jusson. Ez azt jelenti, hogy a képletekben a ρ -t és \mathbf{J} -t a t időpont helyett $t^* = t - \frac{R}{c}$ időpontban kell venni a t időpontban érvényes potenciálokhoz; itt R a töltés vagy áram helyének távolsága az észlelési ponttól. Ezek az ún. retardált potenciálok.

Mozgó töltés esetén a töltés helyét kell „retardálni”. Tehát pl. a 19. ábrán ahhoz, hogy a P észlelési pontban, és t időpontban megkapjuk a potenciálokat, nem az M pontban kell venni a késleltetett töltéserőértéket, hanem meg kell keresni azt a $t^* < t$ időpontot, és a részecske pályáján hozzátartozó M^* pontot, amelyre teljesül az alábbi összefüggés:

$$t^* = t - \frac{R}{c}, \text{ vagy } c(t - t^*) = R. \quad (115)$$

Itt $R = |\mathbf{R}|$, ahol \mathbf{R} az ábrán látható, az M^* pontból a P pontba mutató (hármass) vektor. Adott t időponthoz csak egyetlen t^* és M^* tartozik. [Ugyanis, ha ugyanahhoz a P észlelési ponthoz két olyan M_1^* és M_2^* pont lenne a pályán, a hozzájuk tartozó t_1^* , R_1 ill. t_2^* $> t_1^*$, R_2 adatokkal, amelyekre a (115) feltétel teljesül, akkor az $M_1^*PM_2^*$ háromszögre érvényes egyenlőtlenség felhasználásával a két pont közötti pályahosszra:

$$\begin{aligned} \text{ív}(M_1^*M_2^*) &\geq \overline{M_1^*M_2^*} > \overline{M_1^*P} - \overline{M_2^*P} = \\ &= R_1 - R_2 = c(t - t_1^*) - c(t - t_2^*) = c(t_2^* - t_1^*), \end{aligned}$$

lenne, ami azt jelentené, hogy a töltött részecske az M_1^* és M_2^* pontok között c -nél nagyobb átlagsebességgel mozogna, ami lehetetlen.]

A potenciálokat célszerű először a töltött részecske M^* -pontbeli, K' pillanatnyi **nyugalmi** inerciarendszerében felírni, mert itt konvektív áram sem

folyik, és ezért csak skalárpotenciál van. Így

$$\varphi' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R'} \text{ és } \mathbf{A}' = \mathbf{0},$$

tehát a négyes potenciál (70b) szerinti alakja a K' rendszerben:

$$\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{0} + \frac{1}{c} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R'} \underline{\mathbf{e}}_t' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{\mathbf{e}}_t'}{c^2 (t - t^*)'},$$

ahol $R' = c(t - t^*)'$ az \mathbf{R} vektor abszolút értéke a K' rendszerben. Hallgatólagosan feltételeztük azt is, hogy a (115) összefüggés a vesszős, nyugalmi rendszerben is érvényes. Valóban így van. Vezessük be ugyanis az M^* pontból kiinduló, c sebességű hatás (hullám) P pontig terjedő mozgásszakaszának négyes vektorát:

$$\underline{\mathbf{d}} = \mathbf{R} + c(t - t^*) \underline{\mathbf{e}}_t = \mathbf{R}' + c(t - t^*)' \underline{\mathbf{e}}_t'. \quad (116)$$

A (115) előírás szerint ennek normanégyzete zérus:

$$\underline{\mathbf{d}}^2 = \mathbf{R}^2 - c^2(t - t^*)^2 = 0 = (\mathbf{R}')^2 - [c(t - t^*)']^2,$$

tehát a (115) összefüggés fennáll a vesszős rendszerben is.

A P pontban a K rendszerbeli potenciálok meghatározása érdekében célravezető, ha a négyes potenciált négyes vektorokkal fejezzük ki. Ehhez felhasználjuk azt, hogy az $\underline{\mathbf{u}}$ négyes sebességvektor nyugalmi alakja a (17) képlet szerint $c\underline{\mathbf{e}}_t'$, tehát a (116) összefüggésből $\underline{\mathbf{u}}$ és $\underline{\mathbf{d}}$ skalárszorzata $\underline{\mathbf{u}}\underline{\mathbf{d}} = -c^2(t - t^*)'$, mindezzel a négyes potenciál felírt alakjából a következőt kapjuk:

$$\underline{\mathbf{A}} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\underline{\mathbf{u}}}{\underline{\mathbf{u}}\underline{\mathbf{d}}}.$$

Mint ahogy a négyes sebesség a K rendszerben $\underline{\mathbf{u}} = \kappa(\mathbf{v} + c\underline{\mathbf{e}}_t)$, azért

$$\underline{\mathbf{u}}\underline{\mathbf{d}} = \kappa(\mathbf{v} + c\underline{\mathbf{e}}_t) [\mathbf{R} + c(t - t^*) \underline{\mathbf{e}}_t] = \kappa [\mathbf{R}\mathbf{v} - c^2(t - t^*)] = \kappa(\mathbf{R}\mathbf{v} - cR),$$

és így

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\mathbf{v} + c\underline{\mathbf{e}}_t}{cR - \mathbf{R}\mathbf{v}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v}}{R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}} + \frac{1}{c} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{\mathbf{e}}_t}{R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}}$$

vagy szétválasztva

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\mathbf{v}}{R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}}, \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}}. \quad (117)$$

Ezek a Lienard–Wiechert-potenciálok.

A térjellemzők meghatározására a (70a) összefüggések szolgálnak:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi; \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Ebben t és \mathbf{r} szerinti deriváltak vannak, a (117) képletek pedig t^* -ra és \mathbf{r} -re vonatkoznak. Az átszámításhoz szükség van $\frac{dt^*}{dt}$ és $\text{grad } t^*$ értékére. Először a \mathbf{v} sebességgel kapcsolatos összefüggéseket tárgyaljuk, mert ezekre több helyen is szükségünk lesz. Az ábra alapján

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t^*} = \frac{\partial (\mathbf{r}_P - \mathbf{R})}{\partial t^*} = -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t^*}, \quad (118a)$$

továbbá

$$-\mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t^*} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{R}^2}{\partial t^*} = \frac{1}{2} \frac{\partial R^2}{\partial t^*} \equiv \frac{1}{2} \frac{dR^2}{dt^*} = R \frac{dR}{dt^*}, \quad (118b)$$

ahol $R = |\mathbf{R}|$.

A (118b) felírásánál azért tértünk át a totális differenciálásra, hogy hangsúlyozzuk a $\frac{dR}{dt^*}$ t -től is függését. A (115) kifejezésből

$$\frac{dR}{dt^*} \frac{dt^*}{dt} \equiv \frac{dR}{dt} = c \left(1 - \frac{dt^*}{dt} \right),$$

és ebből

$$\frac{dt^*}{dt} = \frac{c}{c + \frac{dR}{dt^*}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{c} \frac{dR}{dt^*}};$$

a (118b)-t is tekintve

$$\frac{dt^*}{dt} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{cR}} = \frac{R}{R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}}. \quad (118c)$$

Ugyancsak a (115) képletből, annak figyelembevételével, hogy a t időváltozó független \mathbf{r} -től:

$$\text{grad } t^* = -\frac{1}{c} \text{grad } R.$$

A R a \mathbf{r} változótól közvetlenül, és a t^* változón keresztül közvetetten is függ, továbbá a (118b) képletet is helyettesítve írhatjuk:

$$\text{grad } R = \text{grad } \sqrt{\mathbf{R}^2} + \frac{dR}{dt^*} \text{grad } t^* = \frac{2\mathbf{R}}{2\sqrt{\mathbf{R}^2}} - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{R} \text{grad } t^* = \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{R} \text{grad } t^*,$$

ezt az előző összefüggéssel összevetve kapjuk:

$$\text{grad } t^* = -\frac{\mathbf{R}}{c \left(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c} \right)}. \quad (118d)$$

A térjellemezők számításához a potenciálok t és \mathbf{r} szerinti deriváltjait egyaránt a t^* változón keresztül kell képezni, mert a töltött részecske mozgását egyértelműen t^* határozza meg. Így a (117) első képletével, és a (118c) képlettel:

$$-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t^*} \frac{dt^*}{dt} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \left[\mathbf{v} \frac{\frac{\partial R}{\partial t^*} - \frac{1}{c} \frac{\partial(\mathbf{R}\mathbf{v})}{\partial t^*}}{(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c})^2} - \frac{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t^*}}{R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}} \right] \frac{R}{R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}};$$

A (115) feltételből $\frac{\partial R}{\partial t^*} = -c$, (mert $t-t$ állandónak kell tekinteni), továbbá a (118a) felhasználásával:

$$\frac{\partial(\mathbf{R}\mathbf{v})}{\partial t^*} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t^*} \mathbf{v} + \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t^*} = -\mathbf{v}^2 + \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t^*}.$$

Ezeket és a $\mu_0 = \frac{1}{c^2 \epsilon_0}$ azonosságot az előbbi kifejezésbe helyettesítve kapjuk:

$$-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[-\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c})^3} R \frac{\mathbf{v}}{c} - \frac{\mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t^*}}{c^2 (R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c})^3} R \frac{\mathbf{v}}{c} - \frac{R \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t^*}}{c^2 (R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c})^2} \right]. \quad (119a)$$

A (117) második képletéből és a (118d) kifejezés felhasználásával, majd az előző kifejezéshez hasonló átalakításokkal kapjuk:

$$\begin{aligned} -\text{grad} \varphi &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t^*} \text{grad} t^* = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{\frac{\partial R}{\partial t^*} - \frac{1}{c} \frac{\partial(\mathbf{R}\mathbf{v})}{\partial t^*}}{(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c})^2} \left[\frac{-\mathbf{R}}{c (R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c})} \right] = \\ &= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{c^2} \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t^*}}{(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c})^3} \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (119b)$$

A villamos térerősség a (119a) és (119b) képletek összege:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c})^3} \left(\mathbf{R} - R \frac{\mathbf{v}}{c} \right) + \\ &+ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{(\mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t^*}) (\mathbf{R} - R \frac{\mathbf{v}}{c}) - R (R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t^*}}{c^2 (R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c})^3}; \end{aligned}$$

A kettős vektorszorzat kifejtési tételével belátható a második tag átalakítása:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \kappa^2 (R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c})^3} + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - R \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t^*}]}{c^2 (R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c})^3}. \quad (120a)$$

A mágneses indukció számításához az \mathbf{A} (hármass) vektorpotenciál rotációját kell venni. A (117) Lienard-Wichert második kifejezése alapján

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \text{rot} \frac{\mathbf{v}}{R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \left(\text{grad} \frac{1}{R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}} \right) \times \mathbf{v} + \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\text{rot} \mathbf{v}}{R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}};$$

A számításokat itt is a t^* változó közvetítésével kell végeznünk.

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \frac{1}{R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}} &= - \frac{\frac{\partial R}{\partial t^*} - \frac{\mathbf{v}}{c} \frac{\partial R}{\partial t^*} - \frac{\mathbf{R}}{c} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t^*}}{\left(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}\right)^2} \operatorname{grad} t^* = \\ &= - \frac{-c + \frac{v^2}{c} - \frac{\mathbf{R}}{c} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t^*}}{\left(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}\right)^2} \frac{-\mathbf{R}}{c \left(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}\right)} = - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \mathbf{R}}{\left(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}\right)^3} - \frac{\left(\mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t^*}\right) \mathbf{R}}{c^2 \left(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}\right)^3} \end{aligned}$$

A [9] szakirodalom (297) jelű képletének felhasználásával

$$\frac{\operatorname{rot} \mathbf{v}}{R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}} = \frac{\operatorname{rot} \mathbf{v}[t^*(\mathbf{r})]}{R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}} = \frac{-\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t^*} \times \operatorname{grad} t^*}{R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}} = \frac{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t^*} \times \mathbf{R}}{c \left(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}\right)^2}.$$

Így tehát

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{R}}{\kappa^2 \left(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}\right)^3} + \frac{\left(\mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t^*}\right) \mathbf{v} \times \mathbf{R}}{c^2 \left(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}\right)^3} + \frac{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t^*} \times \mathbf{R}}{c \left(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}\right)^2} \right]. \quad (120b)$$

Szorozzuk meg vektoriálisan a (120a) jelű képletet megelőző egyenletet $c\varepsilon_0 \frac{\mathbf{R}}{R}$ -rel!

$$\begin{aligned} c\varepsilon_0 \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{E}}{R} &= \\ &= \frac{Q}{4\pi} \frac{-\mathbf{R} \times \mathbf{v}}{\kappa^2 \left(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}\right)^3} + \frac{Q}{4\pi} \frac{-\left(\mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t^*}\right) \mathbf{R} \times \mathbf{v} - c \left(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}\right) \mathbf{R} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t^*}}{c^2 \left(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}\right)^3}; \end{aligned}$$

Összevetve ezt a (120b) kifejezéssel, látható, hogy

$$\mathbf{H} = c\varepsilon_0 \frac{\mathbf{R}}{R} \times \mathbf{E}. \quad (120c)$$

Tehát a mágneses és elektromos térerősség mindenütt merőlegesek egymásra, ezenkívül \mathbf{H} merőleges \mathbf{R} -re is. A (120a) összefüggésre tekintve láthatjuk, hogy a villamos térerősség képletének első tagja az R távolság *négzetével*, második tagja csak a *távolsággal fordítva arányos*. Az első taghoz tartozó elektromágneses teret *közelinek* nevezik, mert a mozgó töltéstől nagy távolságra elhanyagolható a második taghoz képest, amit *távoli* vagy *sugárzásos* térnek neveznek. A közeli tér a mozgó töltésnek *csak a sebességétől*, a távoli a *gyorsulásától* is függ, és gyorsulás nélkül nem is alakul ki. Azt is láthatjuk, hogy a távoli térnél \mathbf{E} is merőleges \mathbf{R} -re, tehát *elektromágneses hullámról*

van szó, amelynek terjedési iránya \mathbf{R} , és kisugárzott felületegységnyi teljesítménye a Poynting-vektor alapján:

$$\mathbf{S}_{sug} = \mathbf{E}_{sug} \times \mathbf{H}_{sug} = \mathbf{E}_{sug} \times \left(c\epsilon_0 \frac{\mathbf{R}}{R} \times \mathbf{E}_{sug} \right) = c\epsilon_0 \mathbf{E}_{sug}^2 \frac{\mathbf{R}}{R}, \text{ ahol}$$

$$\mathbf{E}_{sug} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R} \times \left[(\mathbf{R} - R\frac{\mathbf{v}}{c}) \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t^*} \right]}{c^2 \left(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c} \right)^3}.$$

Végül megemlítjük, hogy az itteni képletek jobb oldalán lévő minden mennyiséget a t^* időpontban kell venni, és így kapjuk meg a térjellemzőket a képletek bal oldalán a t időpontban.

W. Rindler: *Relativity*, 2. kiadás, Oxford, 1959. (Fordítás alapján.)

Dirac, P. A. M.: *The Principles of Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, 1958. (Fordítás alapján.)

Gruber, G.: *Relativitáselmélet*. Tankönyvtudományi igazgatóság kiadása, Budapest, 1953.

Landau, L. D.: *Lehrbuch der Physik*, 2. kötet, 11. fejezet, 11. szakfejezet. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972. (Fordítás alapján.)

Landau, L. D., Lifshitz, E. P.: *The Classical Theory of Fields*, Butterworths, London, 1962.

Landau, L. D., Lifshitz, E. P.: *Field Theory*, Butterworths, London, 1962.

Landau, L. D., Lifshitz, E. P.: *Field Theory*, Butterworths, London, 1962.

Landau, L. D., Lifshitz, E. P.: *Field Theory*, Butterworths, London, 1962.

Landau, L. D., Lifshitz, E. P.: *Field Theory*, Butterworths, London, 1962.

Landau, L. D., Lifshitz, E. P.: *Field Theory*, Butterworths, London, 1962.

Landau, L. D., Lifshitz, E. P.: *Field Theory*, Butterworths, London, 1962.

Landau, L. D., Lifshitz, E. P.: *Field Theory*, Butterworths, London, 1962.

Landau, L. D., Lifshitz, E. P.: *Field Theory*, Butterworths, London, 1962.

Landau, L. D., Lifshitz, E. P.: *Field Theory*, Butterworths, London, 1962.

Irodalomjegyzék

- [1] Bárdi, I.: The least action and the variational calculus in electrodynamics. *Periodica Polytechnica El. Eng.* Vol. 23, No. 2. Budapest, 1979.
- [2] Budó, Á. – Mátrai, T.: *Kísérleti fizika* III. kötet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.
- [3] Feynman, R.P. – Leighton, R.B. – Sands M.: *Mai fizika. 6.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1970. (Fordítás angolból.)
- [4] Fock, V.: *Theorie von Raum, Zeit, und Gravitation.* Akademie-Verlag, Berlin, 1960. (Fordítás oroszról.)
- [5] Fodor, Gy.: *Relativisztikus elektrodinamika.* Felsőoktatási jegyzetellátó vállalat, Budapest. 1955.
- [6] Landau, L.D. – Lifsic, E.M.: *Elméleti fizika II. Klasszikus erőterek.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1976. (fordítás oroszról.)
- [7] Laue, M.v.: *Die Relativitätstheorie, I. Die spezielle Relativitätstheorie.* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1961..
- [8] Novobátzky, K.: *A relativitás elmélete.* Tankönyvkiadó, Budapest. 1952.
- [9] Pach, Zs. Pné. – Frey, T.: *Vektor- és tenzoranalízis.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1970.
- [10] Simonyi, K.: *A fizika kultúrtörténete.* Gondolat Kiadó, Budapest, 1981.
- [11] Simonyi, K.: *Elméleti villamosságtan,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.
- [12] Simonyi, K.: *Villamosságtan,* Akadémiai kiadó, Budapest, 1983.
- [13] Szentmártony, T.: *Vektor-és tenzoranalízis.* Mérnöki Továbbképző Intézet, Egyetemi Nyomda, Budapest, 1948.
- [14] Tevan, Gy.: General expression of the action integral in electrodynamics. *Periodica Polytechnica El. Eng.* Vol. 27, No. 1. Budapest, 1983.
- [15] Vágó, I.: *Villamosságtan II. Elektromágneses terek.* Tankönyvkiadó Budapest, 1988.
- [16] Vermes, M.: *A relativitáselmélet.* Gondolat Kiadó, 1958. Studiumkönyvek 8.

A huszadik század elejére a fizikusok tökéletesen kidolgozták a klasszikus mechanikát és az elektrodinamikát, melyek segítségével a mechanikai, illetve elektromos és mágneses jelenségeket értelmezni tudták. E két nagy tudományterület között mégis ellentmondás feszült, amennyiben megbízható mérések igazolták (Michelson–Morley-kísérlet), hogy a fény sebessége vonatkoztatási rendszertől függetlenül állandó, ez a tény ugyanis szöges ellentétben állt az inerciális vonatkoztatási rendszerek közötti kapcsolatot megadó, régóta általánosan elfogadott és használt Galilei-transzformációkkal. Ez az ellentmondás hívta életre a (speciális) relativitáselméletet. Einstein két, egymásnak látszólag ellentmondó elvet posztulált: a fénysebesség állandóságát és az inerciarendszerek egyenértékűségét. Következmény: a tehetetlenségi rendszerek között kapcsolatot eddig leíró Galilei-transzformációkat fel kell váltani a Lorentz-transzformációkkal, a fizikai jelenségek leírását pedig az adott vonatkoztatási rendszerben érvényes térjellemzőkkel kell elvégezni. Tehát a hely, az idő, a sebesség, a gyorsulás a mozgásnak nem abszolút jellemzői, hanem mindig az adott vonatkoztatási rendszerhez igazítva kell tekinteni őket. Ugyanez igaz az elektromágneses teret leíró térjellemzőkre is. A relativisztikus elektrodinamika feladata meghatározni, hogy hogyan kell kiszámolnunk ezeket a térjellemzőket (vektorokat és tenzorokat), ha egyik inerciarendszerből egy másikra térünk át.

Tevan György könyve a hagyományos felépítéstől eltérően nem a Lorentz-transzformációk ismertetésével indul, hanem algebrai módszerekkel vezeti be a téridő-világot (egy speciális metrikájú négydimenziós teret), melyben a Lorentz-transzformációk már természetesen adódnak. A könyv további erénye, hogy számos gyakorlati példát tárgyal, ami nagy segítséget nyújt az olvasónak abban, hogy reális képet alkothasson a relativisztikus elektrodinamikáról, erről a fogalmi és számolástechnikai szempontból is nagyon nehéz területről.

2500 Ft

ISBN 978 963 279 317 7



9 789632 793177

FIZIKA
FELSŐFOKON



TYPOTEK

