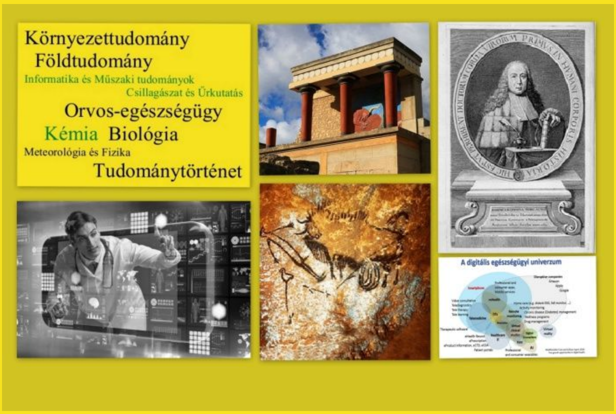
A MAGYAR TERMÉSZETTUDOMÁNYI TÁRSULAT TUDOMÁNYTÖRTÉNETI KÖTETEI

VI.

HAGYOMÁNY, ÉRTÉKMENTÉS ÉS INNOVÁCIÓ A TUDOMÁNYOK KÖRÉBEN



DIGITALIZÁLT VILÁG-TÉR-KÉP A TUDOMÁNYOK, A TECHNIKA ÉS AZ ORVOSLÁS KÖRÉBEN

A természetvizsgálók hagyományát, immár 180 éve, 1841-től őrizve, az azóta megrendezett évi konferenciák eszmeiségét folytatta 2021-ben is a DIGITALIZÁLT VILÁG-TÉR-KÉP témával. A természettudományi és társadalomtudományi kutatások ma már elképzelhetetlenek a digitalizáció nélkül. Mégis minden tudományág más és más aspektusban, módszerrel alkalmazza ezt a lehetőséget. E különbözőségek közös módszerét, eszközét kívánjuk nyomon követni egyaránt az élővilág minden szerveződési szintjén, a társadalmi területeken, tudományos és intézményes formában, a természettudományban, az orvostudományban, az antropológiában, a szociológiában, az informatikában, a szabad társadalomtudományban, földrajzi, klimatológiai, mérnöki-műszaki stb. rendszerekben egyaránt. A kötet a 2021. november 18.–19. időpontban, online, Zoom rendszerrel megtartott *Digitalizált világ-tér-kép a tudományok, a technika és az orvoslás körében* című konferencia előadásait tartalmazza

A MAGYAR TERMÉSZETTUDOMÁNYI TÁRSULAT
TUDOMÁNYTÖRTÉNETI KÖTETEI
6.

Sorozatszerkesztő: Dr. Forrai Judit

A Hagyomány, Értékmentés és Innováció a Tudományok történetében sorozat keretében

DIGITALIZÁLT VILÁG-TÉR-KÉP A TUDOMÁNYOK, A TECHNIKA ÉS AZ ORVOSLÁS KÖRÉBEN

Szerkesztő: Dr. Forrai Judit

Szövegszerkesztés, borítóterv és tipográfia: Pók Andrea

Budapest
2024

A MAGYAR TERMÉSZETTUDOMÁNYI TÁRSULAT TUDOMÁNYTÖRTÉNETI KÖTETEI
6.

Sorozatszerkesztő: Dr. Forrai Judit

Kiadja a Magyar Természettudományi Társulat
Budapest, 2024

Felelős kiadó: Dr. Tardy János

A kötet a 2021. november 18.–19. időpontban, online, Zoom rendszerrel megtartott *Digitalizált világ-tér-kép a tudományok, a technika és az orvoslás körében* című konferencia előadásait tartalmazza.
A kötetben másként nem jelölt webhelyek utolsó megtekintése: 2022. 12.16.

ISSN 2676-8852
ISBN ISBN 978-615-82104-6-1
ISBN 978-615-82104-7-8 [pdf]

Kötet DOI: http://doi.org/10.23716/MTTT.6.2024

Belovits-Print Kft.

Budapest

TARTALOM

I. TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A DIGITALIZÁLT VILÁG TÉR-KÉPE

II. EGÉSZSÉGÜGYI ELLÁTÓ HÁLÓZATBAN ALKALMAZOTT DIGITALIZÁCIÓ

III. EMBERI MŰKÖDÉS ÉS FEJLŐDÉSTÖRTÉNETE A DIGITALIZÁCIÓS VILÁG SEGÍTSÉGÉVEL

IV. PEDAGÓGIA ÉS A DIGITALIZÁCIÓ

V. DIGITALIZÁLT TÁRSADALOMTUDOMÁNYI KUTATÁSOK

VI. ELMÉLETI TÁRSADALOMTUDOMÁNYI KUTATÁSOK ÉS A DIGITALIZÁCIÓ

GEOMATEK– FÜGGVÉNYELK KÉPEI A MONITORON

KÁNTOR SÁNDORNÉ DR VARGA TÜNDE PHD (DE MatematikaI Intézet, nyugdíjas)
E-mail: tkantor@science.unideb.hu

DOI: http://doi.org/10.23716/MTTT.6.2024.09

Absztrakt
Felgyorsult digitális világunk igénye az, hogy okos eszközök segítsék mindennapi életünket, a tanulást és a kutatást. A matematika egyik legfontosabb alapfogalma a függvény. A vele kapcsolatos alapvető ismeretekre mindenkinek szüksége van. Az IKT eszközök alkalmazásával bepillantást nyerhetünk rejtélyes világukba, láthatóvá tehetjük őket a monitoron, miközben új felfedezésekkel lepnek meg bennünket, amit konkrét példákkal illusztrálunk.
Kulcsszavak: Matematika, függvények és gráfjaik, IKT eszközök.

Történeti előzmények

A 19. század végére merült fel nemzetközi szinten a matematikaoktatás megreformálása. Beke Manó tanárként Felix Klein ösztöndíjasa volt, nála ismerkedett meg a matematikatanítási reformeszmékkel. Az ő kezdeményezésére jött létre Magyarországon 1906-ban a Matematikai Reformbizottság. Szerinte a magyarországi tantervek rendszerességre, a részek közti tervszerű kapcsolatra, koncentrációra törekedtek, ezen kívül világos tendencia mutatkozott a matematikai tanítás gyakorlatias iránya felé. A tanterv kereste az élettel és a többi tantárggyal a kapcsolatot, tekintetbe vette a gazdasági élet szempontjait. A szigorúan tudományos tárgyalás helyett, inkább egy-egy rész feldolgozásával nyújtott bepillantást a matematika tudományos problémáinak a tárgyalásába. A függvények menetének vizsgálatában az összes külföldi tantervet megelőzte [1]

Beke Manó a Félix Klein által meghirdetett célokat akarta megvalósítani: a matematikaoktatás közelebb hozása a társadalmi élethez, a természettudományos gondolkodás átvitele a köztudatba, a függvény fogalmának a bevezetése, a függvényközpontú gondolkodás, grafikus ábrázolás, grafikus táblázatok készítése, a differenciál- és integrálszámítás bevitele a középiskolába.

Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba c. könyvében tárgyalta a következő feladatot:

[1] BEKE Manó – Mikola Sándor: *A középiskolai matematika tanítás* reformja (1909), Franklin, Budapest, XIV–XV., 21–29.

„Hogyan lehetne az $x^4 = 3x - 2$ negyedfokú egyenletet megoldani az $y = x^4$ görbe segítségével?”

Ezt a feladatot ma is kitűzhetjük diákjainknak, akik a GeoGebra program segítségével meg tudják oldani. Beke Manó a megoldásra azt javasolta, hogy ábrázoljuk ugyanabban a koordinátarendszerben az $y = x^4$ görbét és az $y = 3x–2$ egyenest. A görbe és az egyenes metszéspontjainak az abszcisszája adja a megoldásokat. Két metszéspont van, ezek abszcisszája leolvasható: $x_1 = 1$ és $x_2 \approx 0{,}815$.[2]

Rátz László, a *Mikola Sándor akadémikussal* közösen írt, *A függvények és az infinitézimális számítás elemeinek tanítása középiskoláinkban* tankönyvével kapcsolatos cikkében kifejtette:

„A függvény fogalma alkossa egész matematikai tanításunk gerincét. De míg a tanítás alsó fokán a görbék a jelenségek történetét mondják el, addig középfokon az algebra és geometria szoros kapcsolatát világítják meg, a felsőbb fokon pedig a differenciál- és integrálszámítás általánosabb módszereire vezetnek.

A függvény fogalmát gondosan kell előkészítenünk, időt kell engednünk tanítványainknak, míg azt teljesen átértik, s csak azután térhetünk át a függvények rendszeres tárgyalására.”[3]

Az iskolai tantervek igen lassan követték ezeket az elképzeléseket, csak az 1926-os tantervbe kerültek be és általánosan nem valósultak meg. Az 1940-es évek tankönyvei közül *Jónás Márton* tankönyvei valósították meg ezeket az elveket. A *Mennyiségtan a gimnáziumok és leánygimnáziumok VI. osztálya számára* nagyon pontosan, és teljesen modernül, tárgyalta az exponenciális és logaritmus függvényeket, megmutatta azok kapcsolatát is. A kitűzött feladatokkal elmélyítette az új ismereteket. Nagyon szépek az ábrák meglátszik, hogy a grafikus festőtanár *Gáborjáni Szabó Kálmán* készítette.[4]

Ezek a hasznos reformeszmék a gyakorlatban csak a 2. világháború utáni gyökeresen új tantervekben kerültek ismét elő, és indult meg a megvalósításuk. Ma már természetesek, sőt kiegészültek az IKT eszközök alkalmazásával.

A *Péter Rózsa – Gallai Tibor: Matematika a középiskolák I. osztálya (1950) számára* volt az első matematika tankönyv a második világháború után, ami új szempontok alapján készült. Megjelent benne a függvények ábrázolása, az egyenletek és egyenletrendszerek grafikus megoldása. A Péter Rózsa – Gallai I.

[2] BEKE Manó: *Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba* (1967), Gondolat, Budapest,. 36. oldal 3. feladat.

[3] RÁTZ László: A függvények és az infinitézimális számítás, In: BEKE Manó – MIKOLA Sándor: *A középiskolai matematika tanítás reformja* (1909), Franklin, Budapest, 143.

[4] JÓNÁS Márton: Mennyiségtan a gimnáziumok és leánygimnáziumok VI. osztálya számára (1945), 36–38.

matematika tankönyv után az igazi folytatás a *Varga Tamás és Faragó László* által írt tankönyv lett volna. A hiba az volt, hogy kötelezővé tették az 1978-as tantervet, ami felkészületlenül érte a tanárokat. Az új tanterv a terjedni kezdődő jót is lejáratta, és rossz hírbe keverte.

Varga Tamás a szputnyik korszakban élt. Azóta átléptünk a 21. századba, ami újabb kihívásokat hozott. A számítógép alaposan beleszólt az oktatásba, olyan távlatokat nyitott meg, amit az előzőekben el sem tudtunk képzelni. Okosabb és ügyesebb nálunk, olyat is megcsinál, amit mi nem tudunk.

A kor követelményeinek megfelelően, a modern IKT eszközöknek a felhasználásával, támaszkodva a hagyományokra és a konvenciókra, a feladat egy egészséges kompromisszum létrehozása az elmélet, a gyakorlat és az alkalmazás között, biztosítva függvények széles körű ismeretét. Tudomásul kell venni, hogy nem kell a középiskolában mindent precízen megtanítani. Szemléletesen kell előkészíteni és felfedeztetni a fogalmakat. A függvények, pl. a covid járvánnyal kapcsolatos információk grafikonjai, mindennapi életünk részévé váltak. Tudnunk kell őket leolvasni és következtetéseket levonni.

Az új korszak

Tankönyvíróként, illetve tehetséges diákok felkészítőjeként szembesültem, a fenti problémákkal, amit a lehetőségeim szerint igyekeztem megoldani. Nagy segítség volt a számomra, hogy egyidőben tanítottam az egyetemen matematika tanárszakos hallgatókat és a középiskolában speciális matematikai osztályokat.

Első elképzelésemet a „Bohóckönyv”, azaz *Matematikai feladatgyűjtemény I–II. a középiskolák tanulói számára (1987)* feladatai[5] és a hozzátartozó *Tanári Segédkönyv*[6] megoldásaiban fejtettem ki.

A Feladatgyűjtemény I. kötetében a *IV. fejezet*et kaptam kidolgozásra, aminek témája *Az egyenletek és egyenlőtlenségek* volt. Belecsempésztem az egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldását rengeteg ábrával, ami sok munkát adott a grafikusnak és meglepetést okozott a szerkesztőknek. Kiemelten foglalkoztam az abszolútértéket tartalmazó egyenletekkel és egyenlőtlenségekkel, amelyeket számítással is, és grafikusan is meg lehet oldani. A későbbiekben ezek a feladatok

[5] BARTHA Gábor – BOGDÁN Zoltán – CSÚRI József – DURÓ Lajosné – GYAPJAS Ferencné – KÁNTOR Sándorné – PINTÉR Lajosné: *Matematikai feladatgyűjtemény I. a középiskolák tanulói számára* (1987), 159–265, 472–521

[6] BARTHA Gábor – BOGDÁN Zoltán – CSÚRI József – DURÓ Lajosné – GYAPJAS Ferencné – KÁNTOR Sándorné – PINTÉR Lajosné: *Megoldások, útmutatások Matematikai feladatgyűjtemény* I (1995), 144–273.

megjelentek a versenyeken és az érettségin is. A számítógépes feldolgozást egy szakdolgozóm ki is próbálta a középiskolában. Tapasztalatai igen pozitívak voltak.[7]

A Feladatgyűjteménybe olyan feladatokat is beválasztottam, amelyeket nem standard módszerrel, azaz függvényvizsgálattal lehet megoldani. Ezeknek a különleges ötleteket igénylő, nehezebb feladatoknak a sorszámát egy csillaggal jelöltük meg. A feladatgyűjteményt a tanárok ma is használják. Ilyen feladat a következő:

*1403. *Hány megoldása van a valós számok halmazán a* $|\sin x| = \frac{2x}{201\pi}$ *egyenletnek?*

Ezt a feladatot gyakorlatilag csak az tudja megoldani, aki elkészíti a vázlatos rajzot, vagy kirajzoltatja a képernyőn.

A II. kötetben érettségire felkészítő feladatsorokat tűztem ki.[8] Itt már bőven szerepeltek olyan logaritmussal kapcsolatos feladatok, amelyek szokásos megoldása során alkalmazott módszer, a függvények szigorú monotonitására, ekvivalens átalakításra való hivatkozások, kétségeket és kíváncsiságot ébresztett fel bennem. Hipotézisemet a számítógépes ábrázolás beigazolta.

Ilyen feladat pl. a 17. feladatsor 6. feladata (122.) és a 22. feladatsor 3. feladata (159.).

122. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget!

$$\log_{2x+4}(x^2-x) > 1$$

159. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán és ábrázoljuk a számegyenesen a megoldáshalmazt.

$$1 + \log_{½}(3x - x^2) \geq 0.$$

Érettségi-felvételi feladatok

Az 1991. évi érettségi-felvételin kitűzött G 6. feladat:

---

[7] BALOGH Csaba: *Függvény transzformációk oktatása IKT eszközök segítségével* (2015), Tanári szakdolgozat, DE Matematikai Intézet.

[8] BARTHA Gábor – BOGDÁN Zoltán – DURÓ Lajosné – GYAPJAS Ferencné – HACK Frigyes – KÁNTOR Sándorné – KORÁNYI Erzsébet: *Matematikai feladatgyűjtemény II. a középiskolák tanulói számára* (1988), 386–394, 485–487.

BARTHA Gábor – BOGDÁN Zoltán – DURÓ Lajosné – GYAPJAS Ferencné – HACK Frigyes – KÁNTOR Sándorné – KORÁNYI Erzsébet: *Tanári kézikönyv Matematikai feladatgyűjtemény II.* (1988), 349–370.

6. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\log_{1991}(x-3) + \log_{1992}(x-3) = 3 - \lg(x^5 - 24).$$

A megoldás függvényvizsgálattal történik, azaz az értelmezési tartomány és monotonitás vizsgálatával. A bal oldalon álló $x \longrightarrow \log_{1991}(x-3) + \log_{1992}(x-3)$ függvény szigorúan monoton növekvő, értelmezési tartománya $x > 3$, értékkészlete $]-\infty;\infty[$. A jobb oldalon álló függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért a két függvény görbéje csak egy pontban metszheti egymást, így az egyenletnek csak egy gyöke lehet. Mindkét oldalon levő függvénynek az $x = 4$ helyen felvett értéke 0 (1. ábra), így ez az egyetlen megoldás.

1. ábra: Megoldás függvényvizsgálattal

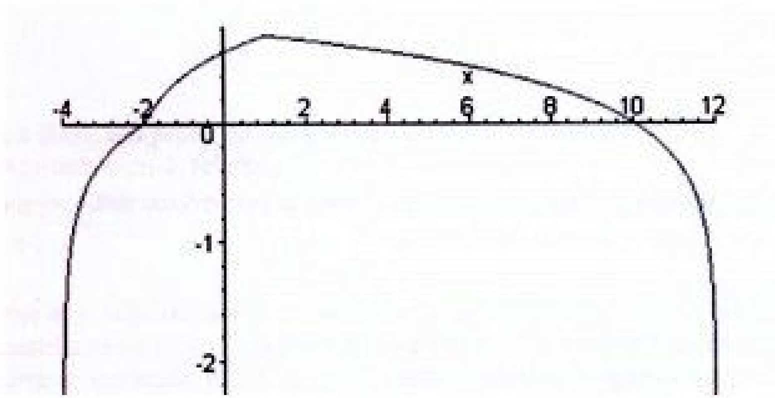
Szerintem csak annak nem nehéz a feladat megoldása, aki ismeri a megoldás módszerét. A Közgázra felvételizőknek problémát okozott az újszerűsége miatt. A NAT legújabb változata ezeket a feladatokat túl nehéznek ítélte a normál osztályok számára, törölte a logaritmusos egyenlőtlenségeket, a nehezebb logaritmusos és exponenciális feladatokat a tananyagból.

Egy nehezebb változat volt az 1994. N 6. feladat:

6. Álapítsa meg, hogy a következő kifejezés mely valós x értékekre értelmezhető! Van-e olyan legnagyobb és legkisebb értéke; ha van, mivel egyenlő, és mely x helyeken veszi fel?

$$\lg(4 - |x - 1| + ½ \cdot |x + 2|)$$

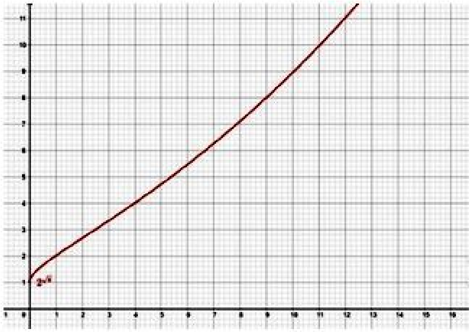
Itt is azzal kezdjük a megoldást, hogy az $f(x) = 4 - |x - 1| + ½ \cdot |x + 2|$ függvényt vizsgáljuk. Célszerű az ábra elkészítése. A továbbiakban a hivatalos megoldás a logaritmus függvény monotonitására hivatkozva adta meg a szélsőértékeket. Egyetemi gyakorlaton már úgy oldottuk meg, hogy az eredetileg megadott logaritmus függvényt számítógéppel rajzoltattuk ki, és azt elemeztük. (2. ábra)



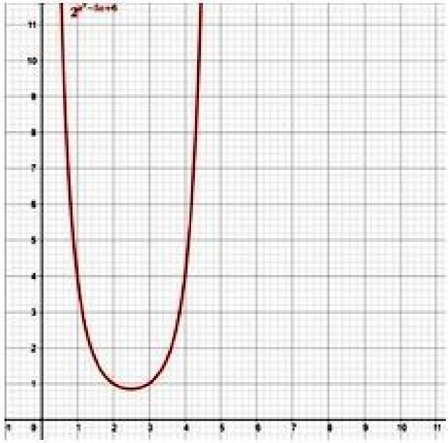
2. ábra: A logaritmus függvényt számítógéppel rajzoltattuk ki

Grafikonok készítése számítógép segítségével

Az egyik egyetemi gyakorlaton az $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$ és a $g(x) = 2^{x^2-5x+6}$ függvények tulajdonságait vizsgáltuk. Az *f(x)* függvényt nem sikerült jól ábrázolnunk a [0 ;1] intervallumon. Nehézkes volt a kicsi értékek behelyettesítése, a rajzon nem volt nyilvánvaló a konvexitás, vagyis az, hogy az $y = x+1$ egyeneshez képest hogyan halad a függvénygörbe a [0 ;1] intervallumon. A *g(x)* függvény monotonitásával kapcsolatban viszont ismét kétségeim voltak. Nyilvánvaló volt, hogy *g(x)* másodfokú függvény nem lehet szigorúan monoton, mert az $x \longrightarrow x^2 - 5x + 6$ másodfokú függvénynek minimuma van $x = 2,5$ -nél, pedig az exponenciális egyenletek, vagy egyenlőtlenségek megoldásánál arra hivatkozunk, hogy az $x \longrightarrow a^x$ exponenciális függvény $a > 1$ esetén szigorúan monoton növekvő. A felmerülő nehézségek tisztázására gyorsan, az óraközi szünetben, szobatársammal, Kovács Andrással együtt, Maple program segítségével ábrázoltuk a két függvényt (3. ábra, 4. ábra), és az órára a két kinyomtatott grafikonnal mentem vissza, amit körbe adtunk. Sikerét az mutatta, hogy az óra végére kézen-közön eltűnt a két papírlap, nem kaptam vissza. Ma ezt minden tanuló, nehézség nélkül el tudja készíteni számítógépes program segítségével.



3. ábra



4. ábra

Ennek a módszernek a következő feladattípusnál van jelentősége:[9]

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget: $2^{x^2-5x+6} > 1$.

A megoldás során ekvivalens átalakításra és arra szoktunk hivatkozni, hogy az $x \longrightarrow 2^x$ exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő, és kijön a helyes eredmény.

$2^{x^2-5x+6} > 2^0$, $x^2-5x+6>0$, $(x-2)(x-3)>0$, vagyis $x<2$, $x>3$.

Ezt a hitemet ingatták meg a Maple által rajzolt ábrák. Nem olyan a függvény képe, mint amilyennek mi elképzeltük, és amire hivatkozunk.

A tapasztalatokat felhasználtam a *Sümegi Lászlóval közös Elemi matematika* egyetemi jegyzet[10] készítésénél.

A 3. kötetben az abszolútértékkel kapcsolatos feladatok megoldásának módszerét mutattam be. Az abszolútértékes feladatok kedvelt témái a versenyeknek és az érettségin kitűzött feladatoknak, és megfigyelésem szerint nehézséget okoznak a diákoknak. Középiskolás diákjaimnál bevált a kézi rajzolás és a számolás

[9] Hasonló feladat a BARTHA Gábor – BOGDÁN Zoltán – CSÚRI József – DURÓ Lajosné – GYAPJAS Ferencné – KÁNTOR Sándorné –PINTÉR Lajosné: Matematikai feladatgyűjtemény I. a középiskolák tanulói számára (1987), 1232. feladat.

[10] KÁNTOR Sándorné – SÜMEGI László: Elemi Matematika III. Algebra (1996), 28–53, 133–240.

párhuzama. Az egyetemi hallgatók számára ez a módszer ismeretlen volt, ezért pótoltuk ismereteiket.

Egy egyszerű, de más megoldási módszert igénylő, feladatot tűztem ki a *VII. Abszolútérték* fejezetben.

9. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$||||x|-1|-1|-1|=\sqrt{2}$$

A megoldásban az $x \longrightarrow |x|$ abszolútérték függvény többszörös transzformációjával ábrázoltuk az $x \longrightarrow ||||x|-1|-1|-1|$ függvényt. A függvény szimmetrikus az y tengelyre. $x > 3$ és $x < -3$ esetén kapunk megoldást, de azt nem tudjuk pontosan leolvasni. Számolással kell meghatároznunk az $x-3=\sqrt{2}$, illetve a $-x-3=\sqrt{2}$ egyenletekből, mert a gyökök irracionálisak, $x_1=3+\sqrt{2}$, $x_2=-3-\sqrt{2}$.

A grafikus módszer alkalmazásának vannak hátrányai. A leggondosabb ábrázolás is csak közelítőleg pontos megoldás(oka)t ad, a racionális és irracionális gyökök leolvasása nehézkes, és csak bizonyos pontossággal kapjuk meg értéküket.

Az ábrázolás a tájékozódást segíti inkább elő, amit számításokkal kell kiegészíteni. Ma a diákok pl. a GeoGebra program segítségével meg tudják adni a pontos grafikonokat és a hozzájuk tartozó számértékeket.

Az érvényben levő tankönyvek és a számítógéppel történő függvényábrázolás, egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása

Érdemes kitérni arra, hogy az iskolai tankönyvekben hogyan tárgyalják a számítógép segítségével történő függvényábrázolást és az egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldását. Az érvényben levő tankönyvek közül a *Gondolkodni jó! Matematika 9 tankönyvet*[11] néztem meg, ami Excell program segítségével javasolja az egyenletek közelítő megoldását számítógép alkalmazásával.

Egy tanítási kísérletről

Balogh Csaba tanárimesterszak-matematikatanár szakdolgozóm *Függvény transzformációk oktatása IKT eszközök segítségével* (2015)[12] című tanári szakdolgozatában leírta, hogy hogyan végezte el a függvénytranszformációk

[11] HAJDU Sándor, CZEGLÉDY István, HAJDU Sándor Zoltán, KOVÁCS András: Matematika 9, Gondolkodni jó! (2009), 154–156.

[12] BALOGH Csaba: Függvény transzformációk oktatása IKT eszközök segítségével (2015), Tanári szakdolgozat, DE Matematikai Intézet.

oktatását, a GeoGebraTube-on[13] elérhető, szabadon felhasználható alkalmazások segítségével, elsősorban interaktív táblán, de legalább is számítógép és projektor felhasználásával. Bemutatta a függvényértékek transzformációi közül az alapfüggvény grafikus képének eltolását az *y* tengely mentén, és az *x* tengelyre való tükrözését, valamint a függvényváltozó transzformációi közül az alapfüggvény grafikus képének eltolását az *x* tengely mentén, és az *y* tengelyre való tükrözését az abszolútérték, a másodfokú, a négyzetgyök, és a reciprok alapfüggvényein keresztül. Ezek után közölt egy kétórás gyakorló feladatsort és beszámolt tanítási tapasztalatairól. A tanítási órák megtartása a Békéscsabai Szakképzési Centrum Trefort Ágoston Szakképző Iskolája és Kollégiumában történt, 2015 októberében a SZé/12/1. F középiskolai osztályban. Ebben az iskolában minden tanteremben rendelkezésre állt a számítógép és a projektor, laptophoz is hozzá lehetett jutni, saját elektronika szaktanterme volt interaktív táblával. Az abszolútérték, másodfokú-, négyzetgyök-, reciprok alapfüggvények grafikus képének alapos megismerése után fogtak hozzá függvénytranszformációkhoz, vagyis ahhoz, hogy a függvény hozzárendelési szabályának bizonyos változása, milyen geometriai transzformációt okoz a függvény képében.

Kifejezetten pozitívak voltak a diákok visszajelzései az interaktív táblás megoldásoknál. Kimehettek az interaktív táblához, irányíthatták az ábrázolást. Az animációs alkalmazások megmutatták a transzformációs lépés hatását az adott paraméter folytonos változtatásakor. Egy rajzot sokkal könnyebb volt elkészíteni a segítségével, mint a hagyományos iskolai táblán, vagy a füzetben, tehát a nagyszámú példa bemutatásához, gyakorlásához teljesen megfelelt. Viszont pont ezen a területen jelentkezett a hátrány is. Egyszerűen az óravázlatra szánt grafikonokat a tanulók nem tudták átvezetni segítség nélkül a füzetbe.

Az alkalmazásokat úgy készítették, hogy android rendszert futtató okos telefonokon, tableteken, a megfelelő applikáció telepítése után, használhatóak legyenek, vagyis a diákok bárhol használhatják, ha internet kapcsolattal rendelkeznek, így a tanuláshoz is és felkészüléshez is rendelkezésükre állt.

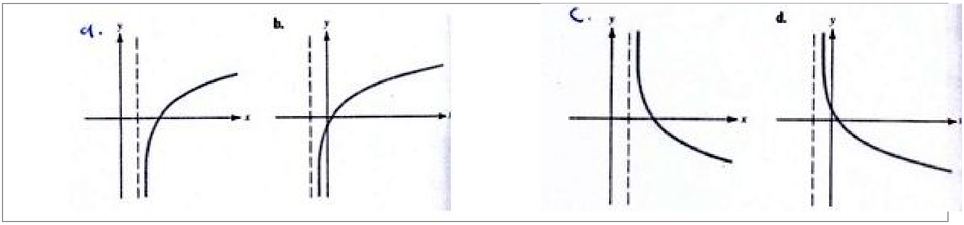
Tesztfeladatok, versenyfeladatok

A mai diákok szeretik a tesztet, mert a megoldás során úgy gondolják, hogy lehet totózni, amit viszont általában nem érdemes csinálni, mert nem jön be. A versenyzőim számára külön megtanítottam a tesztfeladatok optimális megoldási módszerét. A tanulás során érdemes megkövetelni az indoklást is. Erre szükségünk volt, mert szakköröseim részt vettek az amerikai matematikaverseny első és második fordulójában (AMC 10, AMC 12, AIME), ahol igen jó eredményeket

[13] https://tube.geogebra.org/material/simple/id/509727#material/1434397)

értünk el a nem angol anyanyelvű középiskolák versenyében. Tesztfeladatként tárgyaltuk a következő feladatot:

Az ábrák közül válassza ki, hogy melyik az $f(x) = \log_2(x-1)$ *függvény grafikonja. Válaszát indokolja!*

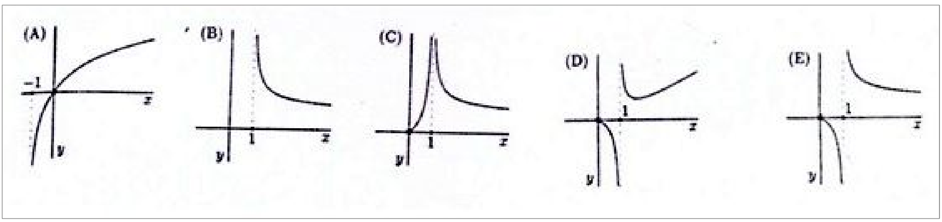


Ki kellett választani a megadott négy ábra közül az egyetlen helyes ábrát. Megoldási módszere a szokásos nem standard út, az értelmezési tartomány és monotonitás vizsgálata, vagy a számítógéppel való kirajzoltatás, ha erre lehetőség van.

Az értelmezési tartomány: $x > 1$. Mivel a logaritmus alapszáma 1-nél nagyobb , így a logaritmus függvény szigorúan monoton növekvő, tehát az a) ábra a helyes.

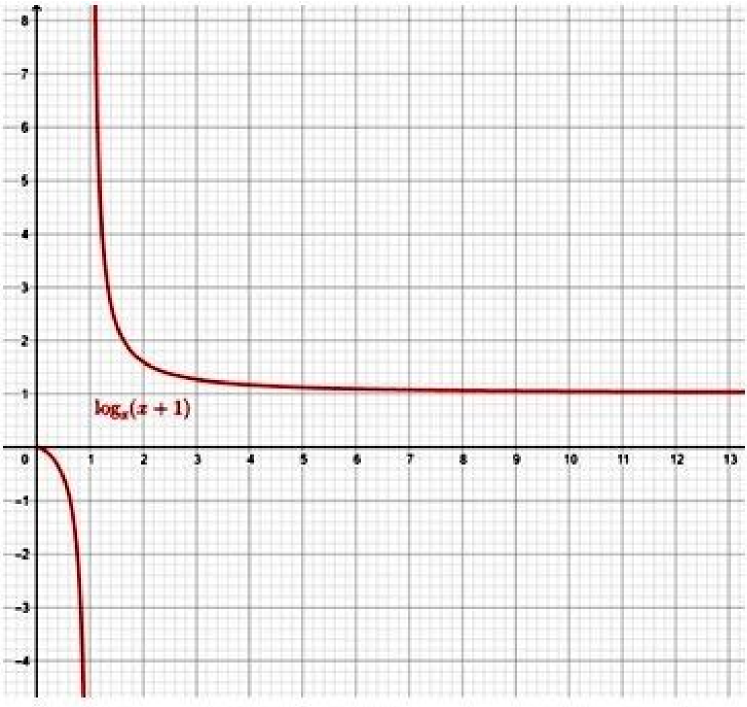
Ennek a megoldási módszernek egy másik, nehezebb változata fordult elő a középiskolások gyakorló versenytesztjében, ahol a megadott ábrák közül az $x \longrightarrow \log_x(x+1)$ helyes ábráját kellett kikeresni.

5. *A mellékelt ábrák közül válassza ki az* $f(x) = \log_x(x+1)$ *függvény grafikonját! Válaszát indokolja meg!*



Ezt a feladatot az egyetemi gyakorlatra készített feladatlapra is betettem, és tanártovábbképzési szemináriumon is kitűztem. Az algebrai úton való tárgyaláshoz a különböző alapú logaritmusok átszámítása, vagy az *e* alapú logaritmus ismerete szükséges, ami nem középiskolai anyag. A tanárok számára is nehéz volt a feladat. Házifeladatként algebrai úton csak egy hallgató tudta megoldani. A többiek számítógéppel rajzoltatták ki az ábrát, és annak ismeretében válaszoltak. A helyes válasz: E

A számítógéppel kirajzolt grafikon (5. ábra):



5. ábra

Versenyfeladat megoldásának ellenőrzése

A XII. Nemzetközi Magyar Matematika Versenyen (2003, Eger)[14] a 11. évfolyam 3. feladata a következő volt:
Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\log_3(2^x + 5) = \log_2(3^x - 5)$$

A feladat kitűzőjének megoldása:

„*Legyen x a megoldás, és* $y = \log_3(2^x+5)$. *Ekkor* $3^y = 2^x+5$ *és* $2^y = 3^x - 5$, *tehát* $3^y + 2^y = 3^x + 2^x$, *amiből* $x = y$, *vagyis* $3^x - 2^x = 5$ *következik. Ennek* $x = 2$

[14] KÁNTOR Sándorné, KÁNTOR Sándor: Nemzetközi Magyar Matematikaversenyek (2003), 67.

gyöke, és a bal oldalon álló függvények szigorú monotonitása miatt más gyöke nem lehet. Ez az eredeti egyenletnek is gyöke, tehát ez a megoldás."[15]

A későbbiekben a tanárok között vitatárgya volt a feladatra közölt megoldás, mert azt nem tartotta mindenki helyesnek. A KöMal, a 2010/9. számában közölte Ábrahám Gábornak a 2010. évi RLV-n tartott előadása alapján írt cikkét,[16] amiben a fenti példa megoldását is elemezte.

Mi az ellenőrzést grafikonok készítéssel végeztük el. GeoGebra programmal ábrázoltuk az egyenlet bal oldalán álló $f(x) = \log_3 (2^x + 5)$ függvényt, és az egyenlet jobb oldalán álló $g(x) = \log_2 (3^x - 5)$ függvényt, majd közös koordinátarendszerben meghatároztuk a metszéspontjukat. A számítógép igazolta, hogy az $x = 2$ megoldás helyes, még akkor is, ha a feladat kitűzője által adott válasz helyes volt, de az indoklás nem volt tökéletes.

Konklúzió

A 21. század diákjai számára lehetőséget kell biztosítani, hogy a függvények grafikonjait meg tudják szerkeszteni számítógépes programmal és meg tudják jeleníteni. A pandémia korszakában alkalmazott online tanítási módszer a digitalizáció előre törését jelentette, és megmutatta, hogy a matematika mellett erősíteni kell a tanulók informatikus gondolkodását.

Irodalom

ÁBRAHÁM G.: Az $f^{1}(x) = f(x)$ típusúegyenletekről, avagy az írástudók felelőssége és egyéb érdekességek, *KöMa*l 2010. 9. szám, 514–527.

BALOGH CS.: *Függvény transzformációk oktatása IKT eszközök segítségével* (2015), Tanári szakdolgozat, DE Matematikai Intézet, kézirat.

BARTHA G. – BOGDÁN Z. – CSÚRI J. – DURÓ Lajosné – GYAPJAS Ferencné – KÁNTOR Sándorné – PINTÉR Lajosné (1987): *Matematikai feladatgyűjtemény I. a középiskolák tanulói számára*, Tankönyvkiadó, Budapest.

BARTHA G. – BOGDÁN Z. – CSÚRI J. – DURÓ Lajosné – GYAPJAS Ferencné – KÁNTOR Sándorné – PINTÉR Lajosné (1995): *Megoldások, útmutatások Matematikai feladatgyűjtemény I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

BARTHA G. – BOGDÁN Z. – CSÚRI J. – DURÓ Lajosné – GYAPJAS Ferencné – HACK Frigyes – KÁNTOR Sándorné – KORÁNYI Erzsébet (1988): *Matematikai*

[15] KÁNTOR Sándorné, KÁNTOR Sándor: Nemzetközi Magyar Matematikaversenyek (2003), 198.

[16] ÁBRAHÁM Gábor: Az f -1(x)= f (x) típusú egyenletekről, avagy az írástudók felelőssége és egyéb érdekességek, KöMal 2010. 9. szám, 514–527.

feladatgyűjtemény II. a középiskolák tanulói számára, Tankönyvkiadó, Budapest.

BARTHA G. – BOGDÁN Z. – CSÚRI J. – DURÓ Lajosné – GYAPJAS Ferencné – HACK Frigyes – KÁNTOR Sándorné – KORÁNYI Erzsébet (1988): *Tanári kézikönyv Matematikai feladatgyűjtemény II.*, Tankönyvkiadó, Budapest.

BEKE Manó – MIKOLA Sándor(1909): *A középiskolai matematika tanítás reformja,* Franklin, Budapest.

BEKE Manó: Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba (1967), Gondolat, Budapest.

HAJDU Sándor, CZEGLÉDY István, HAJDU Sándor Zoltán, KOVÁCS András (2009): *Matematika 9. Gondolkodni jó!* Műszaki Kiadó, Budapest.

JÓNÁS Márton (1945): Mennyiségtan a gimnáziumok és leánygimnáziumok VI. osztálya számára, Debrecen, ORTE, OET, Debrecen, TREK nyomdája.

KÁNTOR Sándorné: Felvételi feladatok tematikus feldolgozásban (2003), Studium Bt, Debrecen.

KÁNTOR Sándorné, KÁNTOR Sándor: *Nemzetközi Magyar Matematikaversenyek 1992–2003* (2003), Studium, Debrecen.

KÁNTOR Sándorné: Fejezetek a matematikai analízis tanításának történetéből (2021), *Érintő* (BJMT e-matlap) 2021. szeptember, Tanóra.

KÁNTOR Sándorné – SÜMEGI László: Elemi *Matematika III. Algebra* (1996), Debrecen, Kossuth Egyetemi Kiadó.

PÉTER R. – GALLAI T.: *Matematika a középiskolák I. osztálya számára* (1950), Budapest, Tankönyvkiadó.

RÁTZ L., MIKOLA S. (1910, 1914): A függvények és az infinitézimális számítás elemei középiskolában, Franklin, Budapest.

Szoftverek: Excell, Maple, GeoGebra, GeoGebraTube In: https://tube.geogebra.org

Geometh – Images of functions on the monitor

The need for our accelerated digital world is that smart devices help our daily life, learning and research. One of the most important basic concepts in mathematics is function. Everyone needs basic knowledge about it. Using ICT tools, we can gain insight into their mysterious world, we make them visible on the monitor, while they are surprising us with new discoveries. We illustrate it with concrete examples.
Keywords: Mathematics, functions and their graphs, ICT tools.