AZ EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
CSILLAGÁSZATI TANSZÉKÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

3. szám

MARIK MIKLÓS

A TÖBBPERIÓDUSU VÁLTOZÓCSILLAGOK PERIÓDUSINGADOZÁSAINAK EGYSZERÜ MODELLJE

1976.

Készült az ELTE Sokszorositóüzemében
100 példányban
Felelős kiadó: Dr. Kátai Imre
Felelős vezető: Arató Tamás

ELTE 76236

Az alábbiakban egy olyan modellt vizsgálunk meg, amelyben a csillag alapperiódusa a pulzációval, szekundérperiódusa pedig a forgással van kapcsolatban /például úgy, hogy a csillagon egy nagy folt található/. Kimutatjuk, hogy modellünkben magyarázható az alap és szekundérperiódus O – C görbéinek tükröződése, továbbá formulát adunk meg a szekundérperiódus standard deviációjának az alap és szekundérperiódustól való függésére.

* * *

A csillag pulzáljon Π periódussal. A csillag pillanatnyi R sugara ekkor az R_o közepes sugár körül a következőképpen változik:

$$R = R_o\left(1 + A\cos\frac{2\pi}{\Pi}t\right) , \qquad /1/$$

ahol R_oA a pulzáció amplitúdója. A következőkben feltesszük, hogy $R_oA \ll R_o$.

A csillag forogjon a tengelye körül. Mivel a pulzáció miatt a sugár változik, a forgás szögsebessége, ω nem állandó, hanem:

$$\omega = \frac{N}{k\cdot M\cdot R^2} ,$$

ahol N az impulzusmomentum, M a csillag tömege és k egységnyi nagyságrendü szám. /k = 2/5, ha a csillag homogén sürüségeloszlású/. A csillag átlagos szögsebessége, $\bar{\omega}$ a következőképpen számitható ki:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\Pi}\int_0^{\Pi}\frac{N}{k\,M\,R^2}\,dt = \frac{N}{k\,M\,R_o^2\,\Pi}\int_0^{\Pi}\frac{dt}{\left(1 + A\cos\frac{2\pi}{\Pi}t\right)^2} = \frac{N}{k\,M\,R_o^2}\left(1 - A^2\right)^{-3/2} \qquad /2/$$

Igy a csillag átlagos forgási periódusa:

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi k \cdot M \cdot R_o^2 (1 - A^2)^{3/2}}{N} \qquad /3/$$

Ha a csillag nem pulzál /A = 0/, akkor forgási periódusa:

$$P_o = \frac{2\pi k\ M\ R_o^2}{N}\ .$$

Igy:

$$P = P_o \left(1 - A^2 \right)^{3/2}\ . \qquad /4/$$

Ez azt jelenti, hogy a pulzáció amplitúdójának növekedésével a forgási periódus csökken, azaz a csillag forgása gyorsul. Ha a forgási periódust a szekundérperiódussal azonositjuk, akkor ez azt jelenti, hogy a pulzáció amplitúdójának növekedésével a szekundérperiódus csökken. Ha például A 0-ról 0,05-re változik, akkor P 0,37%-al csökken.

* * *

Tegyük fel, hogy a pulzáció lineáris, azaz az amplitúdó rA, ahol r a csillag középpontjától mért távolság. Ekkor a helyi sugárváltozás a következőképpen irható fel:

$$r_1 = r \left(1 + A\cos \frac{2\pi}{\Pi} t\right).$$

A pulzáció sebessége az "r" helyen:

$$v = \frac{dr_1}{dt} = - \frac{2\pi A\ r}{\Pi} \sin \frac{2\pi}{\Pi} t\ .$$

A pulzáció kinetikus energiájr az r,r+dr gömbhéjban:

$$dE_p = \frac{1}{2}\ 4\pi r^2 \varrho(r) v^2 dr dt = \frac{8\pi^3 A^2 r^4 \varrho(r)}{\Pi^2} \sin^2 \frac{2\pi}{\Pi} t\ dr\ dt.$$

A pulzáció teljes kinetikus energiája időegységre számolva:

$$E_p = \frac{8\pi^3 A^2}{\Pi^2} \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} \int_0^{R_o} r^4 \varrho(r) \sin^2 \frac{2\pi}{\Pi} t\ dr\ dt =$$

$$= \frac{4\pi^3 A^2}{\Pi^2} \int_0^{R_o} r^4 \varrho(r) dr\ . \qquad /5/$$

Tegyük fel, hogy E_p = constans, ekkor:

$$\frac{A^2}{\Pi^2} = C,$$

ahol C konstans. Beirva ez utóbbit a /4/ egyenletbe, nyerjük, hogy:

$$P = P_o \left(1 - C\Pi^2 \right)^{3/2}\ . \qquad /6/$$

A /6/ képletből megállapitható, hogy Π növekedésével P csökken és forditva. Ez megmagyarázza az RR Lyraek alap és szekundérperiódusára vonatkozó O - C görbék tükröződését.

* * *

A csillag α szögelfordulására a következő egyenlet irható fel:

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{N}{k\ M\ R_o^2} \left(1 + A\cos \frac{2\pi}{\Pi} t\right)^{-2},$$

vagy:

$$d\alpha = \frac{N}{k\ M\ R_o^2} \left(1 + A\cos \frac{2\pi}{\Pi} t\right)^{-2} dt.$$

Az egyenletet integrálva:

$$\alpha(t) - \alpha(0) = \frac{N}{k\ M\ R_o^2} \int_0^t \frac{dt'}{\left(1 + A\cos \frac{2\pi}{\Pi} t'\right)^2} =$$

$$= - \frac{N}{k\ M\ R_o^2} \frac{\Pi}{2\pi} \frac{1}{1 - A^2} \left[\frac{A\sin\frac{2\pi}{\Pi}t}{1 + A\cos\frac{2\pi}{\Pi}t} - \frac{2}{\sqrt{1 - A^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-A}{1+A}}\, \operatorname{tg}\frac{\pi}{\Pi}t \right) \right]$$

$$/7/$$

Könnyen látható, hogy $\alpha(o) = 0$. /3/ felhasználásával /7/-ből a következő egyenletet kapjuk:

$$\alpha(t) = -\frac{\Pi}{P}\sqrt{1-A^2}\left[\frac{A\sin\frac{2\pi}{\Pi}t}{1+A\cos\frac{2\pi}{\Pi}t} - \frac{2}{\sqrt{1-A^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-A^2}{1+A}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{\Pi}t\right)\right]$$

/8/

A /8/ kifejezés alapján $t = Pi$ /$i = 1, 2, 3, \ldots$/ időpontokban megkaphatjuk a valódi $\alpha(Pi)$ szögelfordulásokat. Az ugyanezen időpontokhoz tartozó "számitott" elfordulások értéke: $2\pi i$. A Pi időpontokhoz tartozó számitott és mért elfordulások különbsége:

$$\Delta\alpha = 2\pi i - \alpha(Pi) \ .$$

A $\Delta\alpha$ elforduláshoz tartozó Δt időkülönbség /a $C - O$ értéke/:

$$C - O = \Delta t = \frac{P\Delta\alpha}{2\pi} = Pi - \frac{P}{2\pi}\alpha(Pi) =$$

$$= Pi + \frac{\Pi}{2\pi}\sqrt{1-A^2}\,\frac{A\sin\frac{2\pi}{\Pi}t}{1+A\cos\frac{2\pi}{\Pi}t} - \frac{\Pi}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-A^2}{1+A}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{\Pi}t\right)$$

Legyen $Pi = k\Pi + \psi_\Pi$, ahol k természetes szám és $0 \leqq \psi_\Pi < \Pi$. Ekkor:

$$C - O = \Delta t = k\Pi + \psi_\Pi + \frac{\Pi}{2\pi}\sqrt{1-A^2}\,\frac{A\sin\frac{2\pi}{\Pi}\psi_\Pi}{1+A\cos\frac{2\pi}{\Pi}\psi_\Pi} -$$

$$-\frac{\Pi}{\pi}\left[k\pi + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-A^2}{1+A}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{\Pi}\psi_\Pi\right)\right] =$$

$$= \psi_\Pi + \frac{\Pi}{2\pi}\sqrt{1-A^2}\,\frac{A\sin\frac{2\pi}{\Pi}\psi_\Pi}{1+A\cos\frac{2\pi}{\Pi}\psi_\Pi} - \frac{\Pi}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-A^2}{1+A}}\operatorname{tg}\frac{\pi\psi_\Pi}{\Pi}\right)$$

/9/

Osszuk el /9/ mindkét oldalát Π-vel és jelöljük $\frac{\psi_\Pi}{\Pi}$-t x-el. x Pi Π szerinti fázisa. Ekkor:

$$\frac{\Delta t}{\Pi} = x + \frac{1}{2\pi}\sqrt{1-A^2}\,\frac{A\sin 2\pi x}{1+A\cos 2\pi x} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-A^2}{1+A}}\operatorname{tg}\pi x\right)$$

/10/

Ha Π/P irracionális szám, akkor x egyenlő valószinüséggel esik a $(0,1)$ intervallum minden Δx szakaszára. Ilymódon /10/ a $\Delta t/\Pi$ szekunderperiódusingadozás eloszlásfüggvénye.

Könnyen látható, hogy $A \ll 1$ esetében $\Delta t/\Pi$ a következő kifejezéssel közelithető:

$$\frac{\Delta t}{\Pi} \approx \frac{A}{\pi}\sin 2\pi x \ . \qquad /11/$$

/11/ segitségével kiszámitható a szekundérperiódus szórásának σ_s standard deviációja:

$$\sigma_s^2 = \int_0^1 \Delta t^2\,dx = \frac{A^2}{\pi^2}\Pi^2\int_0^1 \sin^2 2\pi x\,dx = \frac{A^2}{\pi}\Pi^2 \ ,$$

vagyis

$$\sigma_s = \frac{A\Pi}{\sqrt{\pi}} \qquad /12/$$

Felhasználva a /4/ egyenletet nyerjük, hogy:

$$\sigma_s = \frac{\Pi}{\pi}\sqrt{1 - \left(\frac{P}{P_0}\right)^{2/3}} \ . \qquad /13/$$

σ_s tehát egyenesen arányos Π-vel, és P növekedésével csökken.