Grätzer György
az MTA külső tagja

Hálóelméleti függetlenségi tételek

Elhangzott 1999. szeptember 1-jén

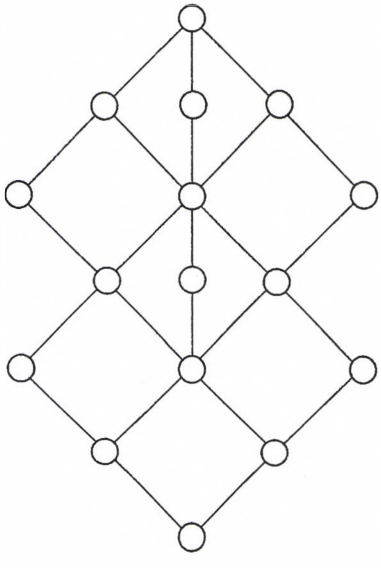
Ezt az előadást Fuchs László
akadémikusnak,
volt tanáromnak dedikálom.

1. Bevezetés

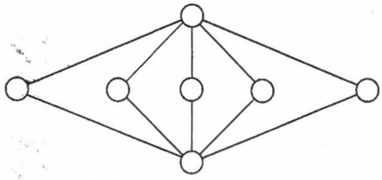
1.1. **Szimmetria**. A Magyar Tudomány 1999. márciusi száma a szimmetriáról közölt tíz cikket. Nekem különösen a művészeti cikkek ragadták meg az érdeklődésemet. Algebrában azt tanuljuk, hogy a szimmetria szép, viszont a túl sok szimmetria már unalmas. Milyen szépen fejezi ki a szimmetria szeretetét John Keats az *Óda egy görög vázához* című versében! Talán kevésbé ismeretes Thomas Mann pár sora a *Varázshegy*ből: „... az élet irtózott a tökéletes pontosságtól, halált sejtett benne, a halál titkát – és Hans Castrop érteni vélte, hogy régi korok pogány templomépítői miért építették oszloprendjeiket titkon és szánt szándékkal úgy, hogy kissé eltérjenek a teljes szimmetriától."

Az *1. ábra* hálója szép, mert szimmetrikus; a *2. ábra* hálója túl szimmetrikus, unalmas.

A *matematikában* a szimmetriát az automorfizmus-csoporttal mérjük. Az *1. ábrán* szereplő hálónak kételemű az automorfizmus-csoportja (csak egy igazi, nemtriviális automorfizmusa van). A *2. ábrán* szereplő hálónak 120 elemű az automorfizmus-csoportja! Az L háló automorfizmus-csoportját Aut L-lel jelöljük. Könnyen látható, hogy Aut L csoport, méghozzá valóban tetszőleges



1. ábra



2. ábra

csoport lehet: G. Birkhoff [4] bebizonyította, hogy minden G csoport reprezentálható Aut L formában.

1.2. **Zsugorítások**. Az Aut L konstrukció megadja az L háló egyik *kísérő struktúrá*ját. Most bevezetjük a második legfontosabb kísérő struktúrát.

Az A algebra egy Θ partíciója *kongruencia-reláció*, ha a Θ partíció blokkjain az algebra-operációk természetesen definiálhatók; így kapjuk a A/Θ algebrát, az A algebra „zsugorított" változatát. A kongruenciarelációk természetesen rendeződnek, egy hálót alkotnak, amit Con A-val jelölünk; az A algebra zsugorításainak hálója, amit hivatalosan úgy hívunk, hogy *kongruenciaháló*. Az univerzális algebrának egyik legjobban ismert eredménye a Con A jellemzése mint egy algebrai háló (G. Grätzer és E. T. Schmidt [9]).

A hálóelmélet egyik leghíresebb megoldatlan problémája a hálók kongruencia-hálóinak jellemzése. ([7]-ben erről sokat olvashatnak.)

1.3. **Függetlenségi problémák**. A hálóelméletkönyvemnek az első kiadásában [6] felvetettem azt a problémát, hogy egy háló szimmetriái és zsugorításai függetlenek-e egyástól? A II.18. probléma így hangzik:

Let L be a nontrivial lattice and let G be a group. Does there exist a lattice K such that K and L have isomorphic congruence lattices and the automorphism group of K is isomorphic to G?

Majd ezt követte II. 19. probléma:

If L is finite, can K chosen to be finite?

A kicsit furcsa megfogalmazás persze annak a következménye, hogy akkoriban nem volt ismert a hálók kongruencia-hálóinak jellemzése. 25 év alatt a helyzet nem változott.

Ebben az előadásban beszámolok arról, hogy a függetlenségi problémát, egy nagyon erős formában, Fred Wehrung francia matematikussal sikerült megoldanom.

2. A véges eset

A II. 19. probléma sokkal könnyebb, mint az általános eset, mivel a véges hálók esetében mind a hálók automorfizmus-csoportja, mind a hálók kongruencia-hálója egyszerűen jellemezhető.

G. Birkhoff bizonyítása véges G csoportra véges L hálót ad meg, amelyre Aut L izomorf G-vel.

A véges hálók kongruencia-hálóját R. P. Dilworth jellemezte (az első bizonyítás a G. Grätzer és E. T. Schmidt [9]-cikkben jelent meg): Egy véges háló kongruencia-hálója jellemezhető mint egy véges disztributív háló.

Ezen két tétel alapján a II. 19. probléma átírható a következő formára:

Legyen G egy véges csoport, és legyen D egy nemtriviális véges disztributív háló. Létezik-e egy véges háló, aminek az automorfizmus-csoportja izomorf G-vel, és a kongruencia-hálója izomorf D-vel?

Az 1970-es évek végén V. A. Baranskii [2], [3] és A. Urquhart [17] bebizonyították, hogy ilyen háló mindig létezik. Mindketten a D egy speciális reprezentációjából indultak ki, és ezt kiterjesztették úgy, hogy a kongruenciák megmaradjanak, és az automorfizmusok G-vel izomorf csoportot alkossanak.

Vajon mit tudunk a végtelen esetben csinálni? Körülbelül 15 évvel később G. Grätzer és E. T. Schmidt [10] mutattak rá egy új útra. Két definícióval kezdjük ennek a leírását.

1. A K háló egy *kongrugencia-megőrző kiterjesztése* az L hálónak, ha L egy részhálója K-nak, és L minden kongruenciájának *pontosan egy* kiterjesztése van K-ra.

Persze ebben az esetben Con $K \cong$ Con L. ($\cong$ az izomorfia jele.)

2. A K háló egy *automorfizmus-megőrző kiterjesztése* az L hálónak, ha L egy részhálója K-nak és

(i) L minden automorfizmusának *pontosan egy* kiterjesztése van K-ra.

(ii) L zárt a K automorfizmusaira nézve.

Persze ebben az esetben Aut $K \cong$ Aut L.

A következő tételt bizonyítottuk (G. Grätzer és E. T. Schmidt [10]):

Véges hálók erős függetlenségi tétele. *Tegyük fel, hogy L_C és L_A diszjunkt nemtriviális hálók. Akkor van egy véges háló K, amire a következő két feltétel teljesül:*

(i) *K kongruencia-megőrző kiterjesztése L_C-nek.*

(ii) *K automorfizmus-megőrző kiterjesztése L_A-nak.*

Tehát Con $K \cong$ Con L_C és Aut $K \cong$ Aut L_A, vagyis K reprezentálja mind az L_C kongruencia-hálóját, mind az L_A automorfizmus-csoportját.

Ebben a dolgozatban három problémát említettünk meg:

1. *Let L_C and L_A be disjoint lattices with more than one element. Does there exist a lattice K that is a congruence-preserving extension of L_C and an automorphism-preserving extension of L_A?*

2. *Let L_C and L_A be lattices with zero and with more than one element satisfying $L_C \cap L_A = \{0\}$. Does there exist a lattice K that is a congruence-preserving $\{0\}$-extension of L_C and an automorphism-preserving $\{0\}$-extension of L_A?*

3. *Is it true that every lattice with more than one element has a proper congruence-preserving extension?*

Az 1. probléma magában tartalmazza a II. 18. problémát. a 3. probléma illusztrálta, milyen keveset tudtunk erről a témáról. Hogy tudnánk kongruencia-megőrző kiterjesztést konstruálni megadott automorfizmus-csoporttal, ha nem tudunk semmiféle nemtriviális kongruencia-megőrző kiterjesztést találni?

3. A harmadik probléma megoldása

Ezt a problémát 1997-ben oldottuk meg (G. Grätzer és F. Wehrung [11]). Egy 1962-es konstrukcióból (E. T. Schmidt [15]) indultunk ki.

Legyen D egy null- és egységelemes disztributív háló, és legyen $M_3 = \{0, a, b, c, i\}$ az ötelemes moduláris nemdisztributív háló. Azt mondjuk, hogy $\langle x, y, z\rangle \in D^3$ *kiegyensúlyozott*, ha

$$x \wedge y = y \wedge z = z \wedge x.$$

Legyen $M_3[D]$ a D kiegyensúlyozott elemhármasainak részben rendezett halmaza.

Tétel. *$M_3[D]$ egy (moduláris) háló. $M_3[D]$ egy kongruencia-megőrző kiterjesztése a*

$$D \cong \{\langle x,0,0\rangle \mid x \in D\}$$

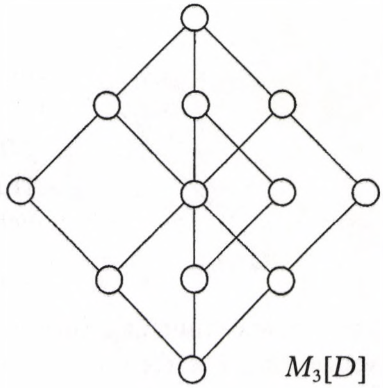
A *3. ábra* illusztrálja ezt a konstrukciót abban az esetben, ha D a háromelemű lánc. Nem disztributív D-re ez a konstrukció általában nem ad hálót (G. Grätzer és F. Wehrung [12]).

Legyen L egy tetszőleges háló; azt mondjuk, hogy $\langle x, y, z\rangle \in L^3$ egy *Boole-féle elemhármas*, ha

$$x = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$
$$y = (y \vee x) \wedge (y \vee z),$$
$$z = (z \vee x) \wedge (z \vee y).$$

Jelölje $M_3\langle L\rangle \subseteq L^3$ a Boole-féle elemhármasok részben rendezett halmazát.

Tétel. *Ha L egy nemtriviális háló, akkor* $M_3\langle L\rangle$ *kongruencia-megőrző kiterjesztése az* $L \cong \{\langle x, x, x\rangle \mid x \in L\}$ *részhálónak.* (G. Grätzer és F. Wehrung [11].)



$M_3[D]$

3. ábra

Ez persze a Schmidt-tétel általánosítása, mert ha L disztributív, akkor $M_3\langle L\rangle = M_3[D]$. (Ha L-nek van nulleleme, akkor $L \cong \{\langle x, 0, 0\rangle \mid x \in L\}$ is választható részhálónak.)

Ez a tétel megoldja a 3. problémát. Használható-e az eredmény a függetlenségi probléma megoldására? Erre a kérdésre a válasz pozitív. Schmidt $M_3[D]$ konstrukciója egy speciális esete a *tenzorszorzat* fogalmának, amit J. Anderson és N. Kimura [1], G. A. Fraser [5], és Z. Shmuely [16] vezettek be.

Legyenek A és B nullelemes hálók. Az A és B hálók $A \otimes B$ *tenzorszorzata* az a szabad $\{\vee, 0\}$-félháló, amit a $(A - \{0\} \times (B - \{0\})$ halmaz generál a

$$\langle a, b_0\rangle \vee \langle a, b_1\rangle = \langle a, b_0 \vee b_1\rangle,$$

$$\langle a_0, b\rangle \vee \langle a_1, b\rangle = \langle a_0 \vee a_1, b\rangle$$

relációkkal. A következő tétel a G. Grätzer, H. Lakser és R. W. Quackenbush [8] dolgozatban publikáltuk:

Tétel. *Legyenek A és B véges hálók. Ekkor* $A \otimes B$ *is egy véges háló, és a következő izomorfizmus teljesesül:*

$$\operatorname{Con} A \otimes \operatorname{Con} B \cong \operatorname{Con}(A \otimes B).$$

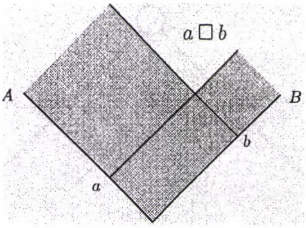
Schmidt eredménye az $A = M_3$ és $B = D$ disztributív speciális eset. A végtelen esetben persze $A \otimes B$ nem mindig háló. Az a döntő kérdés, hogy tudjuk-e általánosítani a tenzorszorzatot úgy, ahogy az $M_3\langle L\rangle$ konstrukció általánosította az $M_3[D]$ konstrukciót.

4. Dobozszorzat

Legyenek A és B tetszőleges hálók, és $\langle a, b\rangle \in A \times B$. Definiáljuk $A \times B$ egy részhalmazát, amit a *4. ábra* illusztrál:

$$a \,\square\, b = \{\langle x, y\rangle \in A \times B \mid x \leq a \text{ vagy } y \leq b\}.$$

Jelöljük $A \,\square\, B$-vel az A és B *dobozszorzatát*, amit az összes véges halmazelméleti metszetként definiálunk:



4. ábra

$$H = \cap(a_i \square b_i \mid i < n),$$

ahol n egy pozitív egész szám, és $\langle a_i \square b_i \rangle \in A \times B$ minden $i < n$-re.

Tétel. *Legyenek A és B tetszőleges hálók. Akkor $A \square B$ mindig hálót alkot.* (G. Grätzer és F. Wehrung [13].)

A dobozsorozat-konstrukció eleget tesz annak a feltételnek, hogy az eredmény mindig háló. Egyszerű példák mutatják, hogy Con($A \square B$) túl nagy a Con $A \otimes$ Con B-hoz viszonyítva. Ezért le kell csökkenteni az $A \square B$-t. Ehhez néhány további jelölésre van szükségünk:

$$\perp_L = \begin{cases} \{0_L\}, & \text{ha } L\text{-nek van nulleleme;} \\ \varnothing, & \text{ha } L\text{-nek nincsen nulleleme.} \end{cases}$$

Továbbá

$$\perp_{A,B} = (A \times \perp_B) \cup (\perp_A \times B).$$

$\langle a, b \rangle \in A \times B$-re definiáljuk az $A \times B$ egy részhalmazát:

$$a \boxtimes b = \{\langle x, y \rangle \in A \times B \mid x \leq a \text{ vagy } y \leq b\} \cup \perp_{A,B}.$$

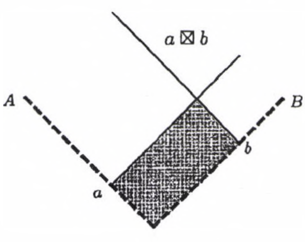
Azt mondjuk, hogy az $A \square B$ dobozszorzat H eleme *korlátozott,* ha benne van egy $a \boxtimes b$-ben ($\langle a, b \rangle \in A \times B$). Definiáljuk az A és B *háló-tenzorszorzatát* mint az $A \square B$ korlátozott elemeinek ideálját (az üres halmaz is ideál). Ha L egy háló, akkor $\mathrm{Con}_c L$ jelöli a Con L kompakt elemeinek a $\{\vee, 0\}$-félhálóját.

A következő eredmény általánosítja a Grätzer–Lakser–Quackenbush-tételt tetszőleges hálókra.

Tétel. *Legyenek A és B tetszőleges hálók. Ha $A \boxtimes B$ nem üres (például ha mind A-nak, mind B-nek van nulleleme, vagy ha A-nak vagy B-nek van null- és egységeleme), akkor a következő izomorfizmus teljesül:*

$$\mathrm{Con}_c\,(A \boxtimes B) \cong \mathrm{Con}_c\, A \otimes \mathrm{Con}_c\, B.$$

(G. Grätzer és F. Wehrung [13].)



5. ábra

Ez a tétel adja meg a legfontosabb alkotóelemet függetlenségi tételek bizonyításához. Ha A egy null- és egyégelemes egyszerű háló, akkor $A \boxtimes B$ egy kongruencia-megőrző kiterjesztése B-nek. Ez a konstrukció a kongruencia-megőrző kiterjesztések nagyon nagy osztályát írja le.

5. Automorfizmusok

Természetesen nekünk nem elég kongruencia-megőrző kiterjesztéseket konstruálni. Szükségünk van automorfizmus-megőrző kiterjesztésekre is. A következő tétel (G. Grätzer és F. Wehrung [13]) nagyon hasznos.

Tétel. *Tegyük fel, hogy az S és L hálók eleget tesznek a következő két feltételnek:*

(i) *S atomisztikus, és van null- és egységeleme.*

(ii) *L nemtriviális, merev (automorfizmus-mentes), és feszítés-felbonthatatlan.*

Ekkor van egy automorfizmus-megőrző beágyazás S-ből $S \boxtimes L$-be, amely megőrzi a nullát, ha L-nek van nulleleme, és így

$$\operatorname{Aut}(S \boxtimes L) \cong \operatorname{Aut} S.$$

A feszítés-felbonthatatlanság fogalmát most nem definiáljuk, kicsit technikailag bonyolult, és nem túl érdekes.

6. Függetlenségi tételek

Az előző két paragrafus eredményeit felhasználva be tudjuk bizonyítani a két függetlenségi tételt.

Erős függetlenségi tétel nullelemes hálókra. *Legyenek L_A és L_C tetszőleges nullelemes hálók, és tegyük fel, hogy L_C nemtriviális. Akkor van egy K háló, amelyik*

(i) *$\{0\}$-megőrző kiterjesztése mind L_A, mind L_C-nek;*

(ii) *automorfizmus-megőrző kiterjesztése L_A-nak;*

(iii) *kongruencia-megőrző kiterjesztése L_C-nek;*

továbbá L_C ideálja K-nak. Ha mind L_A, mind L_C megszámlálható, akkor K is megkonstruálható mint egy megszámlálható háló.

Erős függetlenségi tétel hálókra. *Legyenek L_A és L_C tetszőleges hálók, és tegyük fel, hogy L_C nemtriviális. Akkor van egy K háló, amelyik*

(i) *automorfizmus-megőrző kiterjesztése L_A-nak;*

(ii) *kongruencia-megőrző kiterjesztése L_C-nek.*

Ha mind L_A, mind L_C megszámlálható, akkor K is megkonstruálható mint egy megszámlálható háló.

A bizonyításhoz még sok más is kell, de remélem, az olvasó kapott valami elképzelést a szükséges módszerekről.

Érdekes megjegyezni, hogy a két tétel közül a második sokkal nehezebb, holott az első tűnik tartalmasabbnak. Ennek az az oka, hogy a háló-tenzorszorzatról sokkal többet tudunk abban az esetben, ha mindkét hálónak van nulleleme.

Egy egyszerű probléma illusztrálja, hogy változatlanul milyen keveset tudunk e témáról: *Tegyük fel valamelyik függetlenségi tételben, hogy* $|L_A| \leq \mathfrak{m}$ és $|L_C| \leq \mathfrak{m}$, *ahol* $\mathfrak{m}$ *egy nem megszámlálható végtelen számosság. Lehetséges-e egy olyan K hálót konstruálni, ami kielégíti a tételt, és amire* $|K| \leq \mathfrak{m}$?

Irodalom

1. Anderson, J. and Kimura, N.: The tensor product of semilattices. *Semigroup Forum*, 1968, 16, 83–88.
2. Baranskii, V. A.: On the independence of the automorphism group and the congruence lattice for lattices. Abstracts of lectures of the 15th All-Soviet Algebraic Conference, Krasnojarsk, Jury 1979, Vol. 1, p. 11.
3. –: Independence of lattices of congruences and groups of automorphisms of lattices (Russian). *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1984, 12, 12–17, 76. English translation: *Soviet Math.,* (Iz. VUZ), 1984, 28, 12, 12–19.
4. Birkhoff, G.: On groups of automorphisms (Spanish). *Rev. Un. Math. Argentina*, 1946, 11, 155–157.
5. Fraser, G. A.: The tensor product of semilattices. *Algebra Universalis*, 1878, 8, 1–3.
6. Grätzer, G.: *General Lattice Theory*. Pure and Applied Mathematics 75. Academic Press, Inc. (Harcourt Brace Jovanovich, Publishers), New York–London; Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der Exakten Wissenchaften, Mathematische Reihe, Band 52. Birkhäuser Verlag, Basel–Stuttgart; Akademie Verlag, Berlin, 1978, XIII + 381.
7. –: *General Lattice Theory*. Second Edition, Birkhäuser Verlag, Basel, 1998, XIX + 663.
8. Grätzer, G., Lakser, H. and Quakenbush, R. W.: The structure of tensor products of semilattices with zero. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1981, 267, 503–515.
9. Grätzer, G. and Schmidt, E. T.: On congruence lattices of lattices. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 1962, 13, 179–185.
10. –: The Strong Independence Theorem for automorphism groups and congruence lattices of finite lattices. *Beiträge Algebra Geom.*, 1995, 36, 97–108.
11. Grätzer, G. and Wehrung, F.: Proper congruence-preserving extensions of lattices. *Acta Math. Hungar.*, 1999, 85, 168–179.
12. Grätzer, G. and Wehrung, F.: The $M_3[D]$ construction and n-modularity. *Algebra Universalis*, 1999, 41, 87–114.
13. Grätzer, G. and Wehrung, F.: A new lattice contruction: the box product. *J. Algebra*, 1999, 221, 315–344.
14. Grätzer, G. and Wehrung, F.: The Strong Independence Theorem for automorphism groups and congruence lattices of arbitrary lattices. *Adv. in Appl. Math.*, megjelenés alatt.
15. Schmidt, E. T.: Über die Kongruenzverbänder der Verbände. *Publ. Math. Debrecen*, 1962, 9, 243–256.
16. Shmuely, Z.: The structure of Galois connections. *Pacific J. Math.*, 1974, 54, 209–225.
17. Urquhart, A.: A topological representation theory for lattices. *Algebra Universalis*, 1978, 8, 45–58.