Gáspár Zsolt
az MTA rendes tagja

A számítógépek hatása a tartószerkezetek mechanikájára

Elhangzott 1999. április 8-án

A tartószerkezetek mechanikája erőteljesen megváltozott az elmúlt harmincöt évben, vagyis azóta, hogy egyetemi tanulmányaim során először találkoztam e témával. Úgy látom, hogy a változás egyik fő oka, elősegítője a számítógépek megjelenése és használatuk elterjedése ezen a területen is.

Akkor polgári célra hazánkban még szinte sehol sem használtak elektronikus számítógépet, ma pedig elképzelhetetlen nélkülük a tartószerkezetek számítása. A mechanikának egy új ága alakult ki: a numerikus mechanika. Az ezzel foglalkozó kutatók, oktatók nemzeti társaságokba szerveződtek. Ezek közül az egyik legelső, a *Polish Association for Computational Mechanics* már 1973-ban megalakult, s idén már a 14. konferenciáját tartja. E nemzeti konferenciának nevezett rendezvény valójában már hosszú ideje nemzetközi. Az 1997-ben tartott 13. konferencián különböző országokból több mint kétszázan vettek részt, és száznyolcvan előadás hangzott el. A nemzeti társaságok nemzetközi szervezetet is alkottak: az *International Association for Computational Mechanics* központja Barcelonában van. Az egész világra kiterjedő nemzetközi szervezet létrejötte után alakultak szűkebb területeket összefogó, regionális nemzetközi szerveződések is. A magyar csoportot is magába foglaló *Central European Association for Computational Mechanics* (CEACM) Ausztria, Csehország, Horvátország, Lengyelország, Magyarország, Szlovákia és Szlovénia részvételével alakult meg az 1990-es évek elején. Sok folyóirat szakosodott a numerikus mechanika témakörére, például a CEACM is indított saját folyóiratot *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences* címmel. Többek között e társaság erkölcsi támogatásával Miskolcon is rendeztek nagy sikerű nemzetközi konferenciát *Numerical Methods and Computational Mechanics* címmel 1996-ban és 1998-ban.

A tartószerkezetek számításában bekövetkező változás bemutatásánál a téma szerteágazó volta miatt nem törekedhetek teljességre, ezért általában csak a hazai tapasztalatok köréből, sőt azon belül is főleg a Budapesti Műszaki Egyetem Építőmérnöki Karáról, a Mechanika Tanszék és az MTA–BME Tartószerkezetek Numerikus Mechanikája Kutatócsoport munkáiból hozok fel példákat. E két szervezeti egység elválaszthatatlan egymástól, a szobákban együtt ülnek az oktatók és kutatók. Én a kutatócsoport elődjében dolgoztam 24 évet, azóta a tanszék oktatója vagyok, de három évig a kutatócsoport egyik felének, most az egyesített csoportnak a vezetését is ellátom. A tanszéket már két éve – éppen a jelzett változásokat is mutatva – Tartószerkezetek Mechanikája Tanszéknek nevezik.

Helyzetkép az 1960-as évek közepéről

Hallgató koromban a merev testek statikája tantárgyban gyorsan megtanultuk az egyensúlyi egyenletek felírásának szabályait, majd a félév további részében azt tanultuk, hogy a különböző típusú tartószerkezeteknél milyen sorrendben milyen egyenleteket célszerű felírni ahhoz, hogy az ismeretleneket egyismeretlenes (legfeljebb kétismeretlenes) egyenletek sorozatából határozhassuk meg. (Megjegyzem, hogy – szerintem helyesen – most is így tanítjuk a statikát. Ezzel megismerhetik a hallgatók a tartók legfontosabb fajtáit, kialakulhat a statikai érzékük, megtanulhatnak megbízhatóan számolni.)

Az oktatás harmadik évében a tartók statikája tárgyban a statikailag határozatlan szerkezetekkel is foglalkoztunk. Az erőmódszernél csak a statikailag egyszeresen, kétszeresen és háromszorosan határozatlan szerkezeteket vizsgáltuk, sőt a háromszorosan határozatlan esetben egy speciális módszert, az ún. σ-ponti módszert tanultuk, melynél a három ismeretlen három egyismeretlenes egyenletből számítható. Elmozdulásmódszerrel már nagyobb ismeretlenszámmal is foglalkoztunk, de akkor elhanyagoltuk a normálerő hatását, és egy a mérnöki megfontolások alapján javasolt, szellemes iterációs eljárást, az ún. Cross-módszert tanultuk.

A kilencedik félévben ugyan megmutatták, hogy a tartórácsok statikai elemzéséhez milyen pontos összefüggések írhatók fel, de megoldásukra inkább vagy a kereszttartók hatásának egyenletes elkenését, vagy éppen ellenkezőleg, egyetlen helyettesítő kereszttartó alkalmazását javasolták.

Elektronikus számítógépekről csak a tizedik félévben hallottunk egy összesen hatórás népszerűsítő előadást.

Meg kell jegyezni, hogy a Műszaki Egyetemen Egerváry Jenő és munkatársai már jóval korábban megkezdték a felkészülést a számítógépek használatára a statikai feladatok mátrixos formában való megfogalmazásával [1, 2], melyeket speciális esetekben elektronikus számítógépek nélkül is meg lehetett oldani. Számológépeket természetesen már korábban is használtak, a kézzel tekerendő Brunsvigát, majd az elektromos meghajtású Mercedest.

Lineáris egyenletrendszerek

Közvetlenül a végzés után a Mechanika Tanszékre kerültem, ahol Szabó János vezetésével a tanszék már használta a kutatómunkában a számítógépet, az Egyetemi Számoló Központban lévő URAL-2 típusú számítógépet, melyet gépi kódban kellett programozni. A gép megbízhatóságára jellemző, hogy a tapasztalatokról beszámoló cikk [3] szerint „az elvégzendő műveletek számának növekedésével növekszik a gép által elkövetett véletlen jellegű hibák száma". Ez volt a csöves gépek kora. A feladatokat többször lefuttatták, és az eredményeket akkor lehetett elfogadni, ha kétszer ugyanazt kapták. Tíz percnél hosszabb futási idő esetén az eredményeket tízpercenként mágnesszalagra ki kellett menteni, hogy hibajelzés esetén a legutóbbi mentéstől lehessen folytatni a számítást. (Ezt a módszert követik a mostani szövegszerkesztők is!)
Az évek során aztán egyre közelebb kerültek a számítógépek oktatóinkhoz, kutatóinkhoz. Ennek a folyamatnak a főbb állomásai a következők:

- a SZTAKI-ban egy Minszk-22 gép,
- a BME-n egy Razdan-3 gép,
- a karon egy ODRA-1204 gép,
- két tanszéknek egy közös PDP 11/34 gép,
- a tanszéken egy MO8X gép,
- a kutatóknak a különböző PC-k, munkaállomások,
- speciális feladatokhoz nagy gépekhez vagy párhuzamos processzorú gépekhez hozzáférés.

Már az URAL–2 gépen is meg lehetett oldani „nagyobb" egyenletrendszereket. Először azokkal a tartószerkezetekkel foglalkoztak, amelyek jól modellezhetőek páros rendű parciális differenciálegyenletekkel (Laplace, Poisson, biharmonikus). Megoldásukra a differenciamódszert alkalmazták. Hogy mi számított „nagy" egyenletrendszernek? A 100 ismeretlen már elképzelhetetlenül nagy volt, illetve speciális esetekben, amikor Szabó János algoritmusával [4] a normál kontinuáns mátrix spektrálfelbontását felhasználva lehetett megoldani a feladatot, már 600 ismeretlennel is dolgoztak.

Az eredményeket nagyon gyorsan az iparban is használni lehetett. A Blaha Lujza téri aluljáró födémlemezének statikai számításánál [5] a peremfeltételek már nagyon szabálytalanok voltak, így a szinguláris terhek módszerét kellett alkalmazni. Ekkor ugyan az egyenletrendszert több jobb oldallal is meg kellett oldani, de a javasolt gyors módszer használata lehetővé vált. Az én első cikkem [6] is a differenciamódszert használta egy sarok-konzollemez számítására.

Rúdszerkezetek

A tartószerkezeteknek egy másik, nagyon gyakran alkalmazott típusa a rúdszerkezet. Ha egy egyenes tengelyű, állandó keresztmetszetű, lineárisan rugalmas anyagú rudakból felépített rúdszerkezetnél az elsőrendű elmélet közelítéseit használjuk, akkor a korábban is ismeretes összefüggéseknek mátrixos alakban történő felírásával egy hipermátrix együtthatójú lineáris egyenletrendszerhez jutunk [7]:

$$\begin{bmatrix} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

(Itt **v** a csomóponti elmozdulások, **q** a csomóponti terhek, **s** a rúderők, **t** a kinematikai terhek vektora; **G** az egyensúlyi, $\mathbf{G}^T$a geometriai és **F** a hajlékonysági mátrix.)

A csomóponti egyensúlyi egyenleteket egy közös, globális koordinátarendszerben, a rudakra vonatkozó kompatibilitási egyenleteket pedig a rudak saját, lokális koordináta-rendszerében felírva, rúdigénybevételeknek célszerűen a rúd végén lévő keresztmetszet igénybevételeit nevezve, a vektor elemei közt célszerű sorrendet betartva az együtthatómátrix szimmetrikus alakú lesz. A **G** mátrix méreteinek és rangjának elemzése alapján a rúdszerkezet statikailag és kinematikailag osztályozható (határozott, határozatlan, túlhatározott, illetve egyszerre határozatlan és túlhatározott). Az együtthatómátrix alkalmas particionálása után könnyen levezethetők az erő- és az elmozdulásmódszer, továbbá a statikailag határozatlan törzstartók módszerének képletei is.

Ez az egyenlet aztán sokféle irányban általánosítható volt.

– A vegyesen kapcsolt rúdszerkezetekre, melyeknél a rudak nem feltétlenül kapcsolódnak mereven egymáshoz, hanem pl. csuklós kapcsolatok is előfordulnak [8].

– A vékony falú, nyitott szelvényű rudak esetére, melyeknél a keresztmetszetek torzulásával is számolni kell [9].

– A képlékeny csuklók helyén az ott létrejövő relatív elfordulásnak megfelelő kinematikai terheket figyelembe véve a keretek rugalmas-képlékeny állapotváltozásának számítására [10] is alkalmas módszert lehetett kidolgozni.

– Sőt, a rúdszerkezetek köréből is ki lehetett lépni az elemek általánosításával, háromszög és tetraéder alakú elemek bevezetésével [11]. Ezeknél az új elemeknél a hajlékonysági mátrix előállítása jelent új nehézséget.

Ha az elsőrendű elméletet használjuk, akkor mindig felvetődhet a kérdés: elfogadhatók-e az ott alkalmazott közelítések? Nem kell-e az egyensúlyi egyenletekben az elmozdulások hatását is figyelembe venni? Ha az elmozdulások nagyok, akkor a kompatibilitási egyenlet csak infinitezimális elmozdulásokra érvényes, ezért az egyensúlyi egyenleteket is célszerű differenciálegyenletként felírni. Abban megjelenik a már kialakult rúderőknek a merevséget befolyásoló hatása, az ún. kiegészítő merevségi mátrix ($\mathbf{D}$). Így lett a lineáris állapotváltozási egyenletből állapotváltozási differenciálegyenlet, illetve az ismertnek feltételezett kiindulási állapot adataival együtt egy kezdetiérték-feladat [12]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}(\mathbf{v},\mathbf{s}) & \mathbf{G}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{G}^T(\mathbf{v}) & \mathbf{F}(\mathbf{v},\mathbf{s}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{v} \\ d\mathbf{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d\mathbf{q} \\ d\mathbf{t} \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0; \qquad \mathbf{t} = \mathbf{t}_0; \qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0; \qquad \mathbf{s} = \mathbf{s}_0.$$

Ahhoz, hogy ennek felhasználásával ki tudjuk számítani az előírt teherhez tartozó állapotjellemzőket, már iterációs eljárást kell alkalmazni. Ennek egyik kulcslépése a véges nagyságú teherváltozás hatásának lineáris közelítése után a hibavektorok számítása. Ha a rudak alakváltozása nem nagy, akkor a rudak hajlékonysági mátrixában csak a rúderők megváltozott iránya okoz változást [12], de nagyobb alakváltozások esetén rudanként egy-egy kezdetiérték-feladat numerikus megoldásával lehet a hibavektorokat számolni [13].

A nagy elmozdulások követésének egy másik lehetséges módja a számítási modell megváltoztatása: például merev elemek rugókkal való összekötése. Ilyen modellt használva elemeztem kétcsuklós ívtartókat [14]. Ha a nemlineáris állapotváltozást követni tudjuk, akkor természetesen rögtön felvetődik a kérdés, hogy egyparaméteres terhet tekintve a szerkezet mekkora teherparaméter esetén veszti el a stabilitását. Ilyen feladatoknál általánosított sajátérték-feladatokhoz jutunk:

$$(\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

ahol λ a teherparamétert, $\mathbf{x}$ a kihajlási alakot jellemző elmozdulásvektort jelöli. E modell alkalmazásával azonban nem csak olyan terhek esetén lehetett a kritikus teherparamétert meghatározni, melyek hatására a kritikus állapotig nem vagy csak elenyészően kicsiny elmozdulások jönnek létre [14].

Ugyanilyen típusú sajátérték-feladatra jutunk, ha nem a merev elemes modell kritikus terhét keressük [15], vagy a rúdszerkezet sajátrezgéseit számítjuk (melynél **A** a merevségi mátrix, λ a sajátrezgésszám négyzete, **B** a tömegmátrix –1-szerese, **x** a rezgésalakot jellemző vektor). Speciális peremfeltételek esetén a stabilitásvizsgálat [16] vagy dinamikai feladatnál a csillapítás figyelembevétele [17], esetleg a közelítő dinamikai elmozdulásfüggvények [18] már másodfokú λ-mátrixokat tartalmazó sajátérték-feladatra vezetnek. Eljárást dolgoztunk ki [19] magasabb fokú λ-mátrixok sajátérték-feladatának megoldására is:

$$(\mathbf{E}\lambda^n + \mathbf{A}_1\lambda^{n-1} + \mathbf{A}_2\lambda^{n-2} + \ldots + \mathbf{A}_{n-1}\lambda + \mathbf{A}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Sőt kimutattuk [20], hogy (n·m)-ed rendű mátrixok sajátérték-feladata is visszavezethető m-ed rendű mátrixokat tartalmazó n-ed fokú λ-mátrix sajátérték-feladatára.

A keretszerkezetek számítására fordított kutatások egyik gyakorlati célra való felhasználásaként megemlítem az acél hűtőtornyok vázának számítására kidolgozott programrendszerünket. Itt az építési folyamatot is figyelembe vevő módon automatikusan generáltuk a szerkezet hálózatát és a terheket. A szerkezet elmozdulásait és igénybevételeit az első- vagy másodrendű elmélet alapján is meg lehetett határozni. Számítottuk a kritikus teherparamétert, a legkisebb sajátfrekvenciákat és a hozzájuk tartozó rezgésalakokat, majd ezeket felhasználva a spektrálanalízissel a földrengésvizsgálatot is elvégeztük.

A keretszerkezeteknél jóval egyszerűbbnek tűnik a rácsos tartókhoz hasonló elemekből felépülő rúdhálók (kötélhálók) számítása. Itt az elemekben valóban csak normálerők keletkezhetnek, így az elemek alakváltozása sokkal egyszerűbben számítható, de gyakran olyan szerkezeteket használnak, melyek feszítés nélkül statikailag túlhatározottak lennének, és csak a feszítés hatására válnak a terhet hordani képes tartóvá. Egyidejűleg statikailag határozatlan és túlhatározott szerkezet csak speciális helyzetben jön létre, így az első gond egy kiindulási helyzet meghatározása. Ha az alaprajzában derékszögű kötélhálót választjuk segédhálónak, akkor a csomópontok magassági koordinátája megint a korábban már említett speciális alakú lineáris egyenletrendszerből számítható [21], alaprajzában nem derékszögű merev peremre és/vagy peremkábelekre feszített hálónál [22] megint a szinguláris terhek módszerét használtuk. Ha a kötelek találkozásánál a kapcsolati erőket csökkenteni kívánjuk, akkor célszerű főgörbületi vagy a geodetikus vonalakra illeszkedő hálót tervezni [23].

A kötélháló modelljét hosszú ideig használtuk ponyvaszerkezetek tervezéséhez [24] is, újabban tértünk át a membránmodell [25] használatára, mely alkalmasabb a ponyvák leszabási mintájának meghatározására, azokból a ponyva anizotrop tulajdonságát is figyelembe véve a tényleges szerelési alak számítására.

A végeselem-módszer

Közben az 1960-as években megkezdődött a végeselem-módszer diadalútja. E módszer mérnöki megfontolásokból indult ki: osszuk fel a tárcsát vagy lemezt véges sok egyszerű háromszög vagy négyszög alakú elemre, ezeknél határozzuk meg a sarokponti elmozdulások és a sarokponti erők kapcsolatát, majd a közös sarokpontok elmozdulásait egyenlőnek véve, felírhatók a sarokpontok egyensúlyi egyenletei [26]. Ezt a nagy egyenletrendszert megoldva megkapjuk a csomópontok elmozdulásait, majd újra csak ez egyes elemekkel kell külön-külön foglalkozni.

A kezdeti sikerek után megindult az elemgyártás. A különféle szerkezeti típusokra rengeteg különböző elemet vezettek be. Voltak egy-, két- és háromdimenziós elemek, különbözhetett az elemek alakja, a kitüntetett pontok száma, a pontokban az elmozdulási szabadságfok, az illesztések pontossága. A vizsgálatot végezhették derékszögű, ferdeszögű, görbe vonalú, hengeres, gömbi, paraméteres, természetes stb. koordináta-rendszerben. Figyelembe lehetett venni vagy el lehetett hanyagolni egyes hatásokat, pl. a nyírási alakváltozást. Nagy változatosság lehet a feltételezett anyagegyenletekben. Lehetett integrálni analitikusan vagy a különböző numerikus módszerekkel. Bevezették a „végtelen véges elemeket”. A kezdeti mérnöki intuíciót később a szigorú matematikai megközelítés váltotta fel, és ezt tanulják már a hallgatóink is [27, 28].

A tanszékünkön is elkészültek a gyakori tartószerkezetek (keret, tárcsa, lemez) statikai számításához szükséges programok. Kezdetben a tervezőintézetek számára a saját gépeinken számítottuk a problémáikat, majd az ő gépeikre telepítettük a programokat, később speciális célokra azokat továbbfejlesztettük. Most már a kis tervező kft.-knek is korszerű gépeken futó kitűnő programjaik vannak a napi feladatok megoldására.

Speciális problémák megoldása

Foglalkoztunk speciális problémákkal is. A hídszerű szerkezeteknél előnyös lehet a véges sávok módszere. E módszernél a kétváltozós bázisfüggvényeket két egyváltozós függvény szorzataként választják. Csak az egyik irányban osztják a tartományt véges részekre, a másik irányban egy ortogonális függvénysor első tagjait veszik fel [29], így a szerkezetre vonatkozó egyenletrendszer szétesik több, egymástól független, de jóval kisebb egyenletrendszerre. Az eredeti módszert Szilágyi továbbfejlesztette ferde, íves és többtámaszú hidakra is.

Roller [30] a kőzetösszletek vizsgálatánál figyelembe vette a kőzet húzásnak alig ellenálló sajátosságát és elasztoviszkózus tulajdonságát. Ezzel a modellel lehetett a bányaüregek hatására létrejövő elmozdulásokat és feszültségváltozásokat számítani. Jelentősen megváltoztatja a szükséges matematikai eszköztárat, ha az anyagegyenletekben nem sima függvények szerepelnek [31]. Bojtár [32] a lemezelemet több rétegből építette fel, és így figyelembe lehetett venni a vasbeton lemez acélbetéteinek és a húzott beton tönkremenetelének hatását is. A kompozit anyagok számítására is leggyakrabban helyettesítő, anizotrop anyagú modellt használnak [33]. Hasznos modell az építmények altalajának vizsgálatánál az ún. piramismodell, mely speciális rendben elhelyezkedő rugókból épül fel, és alkalmas akár síkbeli, akár térbeli feladatok elemzésére [34]. A rúdszerkezeteknél már bemutatott merev elemekből és rugós kapcsolatokból álló modell jól általánosítható panelszerkezetekre [35] is, sőt ez a modell a tényleges szerkezet felépítését is kiválóan tükrözi, ugyanis a szerkezet gyenge pontjai általában a panelek közti kapcsolatok, és a tönkremeneteli állapotban az elemek jó közelítéssel merevnek tekinthetők. Ez a modell alkalmas volt a panelvázas épületek vizsgálatára gázrobbanás esetén [36], melynél az esetleges progresszív összeomlás folyamatát is be lehetett mutatni a rugalmas–képlékeny állapotváltozás követésével.

Érdekes lehetőség a diszkrét elemekből álló szerkezetnek folytonos modellel való közelítése. A szabályos térbeli rúdszerkezetek csomópontjainak vizsgálatából differenciaegyenlet vezethető le. Ebből határátmenettel differenciálegyenletet kapunk [37]. Annak számítására pedig megint alkalmazható egy numerikus módszer, pl. a végeselem-módszer. Előfordulhat, hogy az eredeti ismeretlenszámnál jóval kevesebb ismeretlennel is megfelelő pontosságot kapunk.

Azonban más módon is ki lehet használni az eredeti szerkezet szabályos felépítését. A szerkezetet három rúdból álló, ún. triéderekből építjük fel, melyek mellett maradhatnak redundáns rudak is. A triéderekre épített számítási algoritmussal a teher növelése során kedvező módon, a triéderek esetleges módosításával követni lehet az egyes rudak stabilitásának elvesztését egészen a globális stabilitásvesztésig, amikor a szerkezet mechanizmussá válik [38].

Különleges feladatot jelent a szemcsés anyagok statikai vizsgálata [39, 40], mert ezek viselkedését erőteljesen befolyásolja a mikrostruktúrájuk. A jelenség jobb megértéséhez egy sok (bár a teljes szemcseszámhoz képest kevés) szemcséből álló részhalmazt választanak ki. Eddig főleg kétdimenziós modellt használtak, és a szemcséket az egyszerűség kedvéért kör alakúnak tekintették. Az átmérőket a vizsgálandó közeg szemeloszlásának megfelelően választják. Már komoly gondot jelent egy stabilis kiindulási szemcseelrendezés felvétele is. Megkülönböztetik a laza és a kötött szemcsés anyagot. Az előbbinél az érintkező szemcsék között nyomóerő és ennek nagyságától függő súrlódási erő léphet fel. A kötött anyagoknál bizonyos határig húzóerő és nyomaték is átadódhat. A tartomány oldalfalán erő- vagy elmozdulási terheket működtetve számítható az állapotváltozás. Laza szemcsés anyagnál az egyes szemcsék nagy elmozdulásokat végezhetnek, a szemcsék elrendeződése is jelentősen megváltozhat. A numerikus vizsgálatok eredményeit felhasználva lehet definiálni az alakváltozási és a feszültségi tenzort, és kellő számú szimuláció után remélhetőleg javaslatot tenni valamilyen kontinuummodell anyagegyenleteire is. A szemcsék közti erők megjelenítéséről a fraktáljelleg is kimutatható.

A kötött anyagoknál a terhelés hatására létrejövő repedésterjedés is követhető. Elemezték a beton és a betonacél közti kapcsolatot is. Itt a kör alakú elemek között különböző típusú kapcsolatokat is lehet definiálni, így több kör összekapcsolásával is létrehozhatók az adalékanyag szemcséi vagy a betonacél. Ezeknél sokkal gyengébb kapcsolat van a kötőanyag elemei között, valamint az adalékanyag, a betonacél és a kötőanyag között [41].

A szemcsés anyagok vizsgálatához kapcsolódva említek meg bizonyos diszkrét geometriai problémákat. Ezek az elhelyezési és fedési problémák ugyan a matematikához tartoznak, de megoldásukhoz a rúdszerkezetek merevségének vizsgálatára és az állapotváltozásukra kidolgozott módszereket is használtunk. A Tammes-problémánál adott számú egyforma kört kell a gömbön optimálisan elrendezni. Az elrendezést szemléltető gráf egy rúdszerkezetnek tekinthető, és optimális elrendezésnél a szerkezetnek vagy egy részének merevnek kell lennie [42]. A duális probléma a gömb adott számú, egyforma körökkel való lefedése. Itt a gráf sokkal bonyolultabb, de a helyettesítő rúdháló az optimális elrendezésben sajátfeszültségi állapotban is lehet [43]. Ha nem köröket, hanem gömbi ötszögeket kívánunk a gömbön elhelyezni, akkor a sajátfeszültségi állapotban az elemekre nem közös metszéspontú, hanem szétszórt erőrendszer hat, és így a feladat sokkal bonyolultabb lesz [44]. Ezek az elhelyezések és fedések a természetben és több tudomány tárgykörében is előfordulnak.

Matematikai programozás

A matematikai programozás a matematikai eszköztár egy különálló, nagy csoportja, melynek gyakorlati alkalmazását ugyancsak a számítógépek tették lehetővé. A feladatokat matematikai szempontból osztályozhatjuk a független változók, a célfüggvények és a feltételek típusa szerint. A független változók lehetnek

- valós folytonos,
- valós diszkrét,
- valószínűségi és
- fuzzy

változók is. A célfüggvények száma szerint megkülönböztethetjük az egy és a több célfüggvényes feladatokat. Valós változók esetén a célfüggvény lehet

- lineáris,
- kvadratikus,
- hiperbolikus,
- egyéb nemlineáris.

A valószínűségi változók esetén a célfüggvény eloszlásfüggvény lesz. A feltételek lehetnek egyenlőségi és egyenlőtlenségi feltételek. A bennük szereplő kifejezések lehetnek lineárisak vagy nemlineárisak.

Matematikai programozási feladatra juthatunk a tartószerkezetek optimális tervezésére [45], az állapotának meghatározására vagy annak megváltozására vonatkozó feladatoknál is [46].

Az állapotvizsgálati feladat például a képlékeny teherbírási határállapot vizsgálata, a beállási határállapot vizsgálata, amelyek linearizált képlékenységi feltételek esetén lineáris [47], egyébként nemlineáris programozási feladatra [48, 49] vezetnek. A feltételrendszer nemcsak szilárdsági, hanem elmozdulási vagy képlékeny alakváltozási megkötéseket is tartalmazhat [50]. Két test érintkezési feladatánál – az érintkezési nyomást, az érintkezési tartományt és a merevtestszerű elmozdulásra képes test eltolódásának mértékét változóknak tekintve, a testek közötti súrlódást elhanyagolva, az alakváltozásokat kicsinyeknek feltételezve – kvadratikus programozási feladatra jutunk [51]. Az anyagmodellben szereplő paraméterek identifikációjára is lehet a matematikai programozást használni [52].

Állapotváltozás vizsgálatára vonatkozó feladat például a rugalmas–képlékeny állapotváltozás, amely elsőrendű elmélet esetén kvadratikus, magasabb rendű elmélet esetén nemlineáris programozási feladatra vezet [53].

Ezek a feladatok egy minden adatában ismert szerkezetre vonatkoznak, és a célfüggvény a maximálandó teherparaméter vagy valamilyen minimálandó energiafüggvény. A feltételi rendszer pedig a képlékeny anyagmodell következtében egyenlőtlenségeket is tartalmaz, és a változók között is lehetnek előjelkorlátosak.

Az optimális tervezésnél a célfüggvény a szerkezet valamilyen optimálandó tulajdonsága, például a szerkezet súlya, térfogata, költsége, legnagyobb elmozdulása. A tervezési változók lehetnek például adott szerkezeti elrendezés mellett a keresztmetszetek méretei, adott topológiai elrendezés mellett a csomópontok koordinátái vagy a szerkezet topológiájának adatai. Az érintkező testek határoló felületének megfelelő kialakításával elérhető, hogy az érintkezési nyomás maximuma minimális legyen. A megoldást lineáris programozási feladat szolgáltatta [54]. Fémszerkezetek optimális tervezésének átfogó elemzését adja [55], bemutatva a különböző mérnöki feltételeket és a megoldási módszereket is. Több célfüggvényes matematikai programozást használ [56] vasbeton keretek esetére. Ekkor nem egyetlen megoldás, hanem egy megoldáshalmaz adódik.

A sztochasztikus programozási feladatoknál valószínűségi változók lehetnek a tartószerkezet teherjellemzői [57] vagy az anyagjellemzői [58].

Jelenlegi irányok

A numerikus mechanika közelmúlti konferenciáin a fontosabb nagyobb témák a következők.

A végeselem-módszer hibaanalízise, az eredmények pontosítása. A pontosság fokozásának főbb típusai:

– Az elemszám növelése, illetve a geometriai finitizálás kedvezőbb felvétele. Egy, eredetileg közel egyenletes elemfelosztás esetén a feszültségkoncentrációk közelében egy elem alakváltozási energiája nagyságrendekkel különbözhet a távolabbi elemek alakváltozási energiájától. Az elemfelosztást ennek figyelembevételével fokozatosan változtatva, nagyon egyenetlen felosztáshoz jutunk, de az ismeretlen szám lényeges változtatása nélkül is sokkal pontosabb eredmény adódik. Például egy tanulmány [59] bemutat egy síkbeli modellt, melynél a passzív földnyomás hatását vizsgálták. Az egymást követő újabb hálózatok már a feszültségek ábrázolása nélkül is jól szemléltetik a várható csúszási lapot. Még bonyolultabb a helyzet, ha a probléma érintkezési feladattal is kombinált. Egy másik kísérletben [60] két majdnem merev elem közé benyomtak egy rugalmas testet. A benyomódás mértékétől erősen függ a célszerű elemfelosztás.

– A geometriai finitizálást meghagyva az egy elemen belül használt közelítőfüggvény fokszámát növelik a szükségletnek megfelelően.

– Az előző két módszert kombinálják.

A többféle szerkezeti elem kölcsönhatását komplexen lehet elemezni, ha közös végeselemes modellt alakítanak ki. Például [61] egy kétszintes téglából készült épületet kétdimenziós elemekből épít fel, az anyag rugalmas, de csak nyomásnak ellenálló. Az alatta lévő puha talajt háromdimenziós elemekből építették fel. Kimutatták, hogy egy tíz méter mélységben létesítendő alagút fúrása milyen károkat okoz az épületben.

Nemcsak a végeselem-módszer használható teljesen általános geometriájú feladatok elemzésére, hanem általánosították a differenciamódszert is [62], melynél szabálytalan elrendezésű ponthalmaz esetén is fel lehet írni a különböző differenciaoperátorokat. Hasonló elven működik a japánok kidolgozta szabad hálózatú módszer [63] is, amely nagyon alkalmas a párhuzamos processzorú számítógépek által nyújtott előnyök kihasználására. Egy 64 processzoros HITACHI SR2201 gépen egy több mint egymillió szabadságfokú feladatot 20 perc alatt oldottak meg. A párhuzamos processzorú gépek megjelenése rövidebb futási időket tett lehetővé, de új feladatokat is jelentett. Az eljárásokat úgy kell átalakítani, hogy a processzorokat jól ki lehessen használni. A végeselem-módszer esetén a vizsgálandó terület kisebb tartományokra való bontása csak részben oldja meg a feladatot [64].

A párhuzamos processzorú gépek vagy a több gép összekapcsolásával létrehozott virtuális párhuzamos gépek előnyei jól használhatók az általunk kidolgozott letapogatásos szimplexmódszer esetén is. Ez a módszer egy n egyenletből álló $(n+1)$ ismeretlenes egyenletrendszer megoldáshalmazának közelítő meghatározására szolgál [65]. A vizsgálandó paraméter-tartományban szabályos rendszerben ponthálózatot veszünk fel. Ezekben a pontokban kiszámítjuk az egyenletrendszerben szereplő függvények értékeit. A pontokra szimplexeket illesztünk, ezekben a függvényeket lineárisan közelítjük. Így könnyen eldönthető, hogy keresztül megy-e a szimplexen valamelyik egyensúlyi út, avagy sem.

Ilyen feladatra jutunk például, ha a nyomott rúd egyensúlyi helyzeteinek meghatározásához a peremérték-feladatot egy olyan kezdetiérték-feladatnak tekintjük, melynél a rúd végén még bizonyos feltételeket is ki kell elégíteni. A rúd modelljének választható egy merev elemekből és rugalmas rugókból álló rúdlánc is [66], melynél az egyensúlyi helyzetek halmaza nagyon meglepő, bonyolult alakzat lesz. A rúdlánc térbeli kaotikus viselkedést mutat. Ezzel magyarázható a sok parazita egyensúlyi helyzet megjelenése. De a posztkritikus egyensúlyi utak között bizonyos rend is létrehozható, mert azok egy véges hosszúságú, de végtelen mélységű, szimbolikus dinamika segítségével címkézhetők. Ha a címkéknek csak a paritását nézzük, akkor egy önhasonló hierarchia szerint rendeződött halmazt kapunk [67]. Azt is vizsgálták, hogy milyen kezdőszögekhez és kitérésekhez nem rendelhető egyensúlyi rúdláncalak. Ezek az összes lehetséges kezdőszög és kitérés halmazában egy fraktált alkotnak [68].

A szimplexmódszer másik változata az útkövető eljárás. Ennél egy olyan szimplexből indulunk ki, melyen keresztülmegy a vizsgálandó egyensúlyi út.

A következő szimplexeket úgy kapjuk, hogy az előbbit tükrözzük arra az oldalára, melyre az egyensúlyi út kilépési pontja illeszkedik. Ezt a módszert alkalmaztuk rugalmas [69] és rugalmas-képlékeny anyagú keretek [70] egyensúlyi útjainak számítására, és használtuk-speciális érintkezési feladat esetén is [71]. Az utóbbi kettőnél jelentősen bonyolítja a számítást az, hogy új képlékeny csuklók, illetve érintkezési pontok keletkezése vagy korábbiak megszűnte megváltoztathatja a feladat dimenziószámát is.

Napjaink egyik gyorsan fejlődő tudományága a biomechanika. A végeselem-módszerrel elemezték a combcsontban a feszültségeloszlást természetes állapotban és a csípőprotézis elhelyezése után. Az elemek geometriai adatait és a csont sűrűségének változását CT-felvételek alapján lehet elkészíteni, a külső geometriát pedig többirányú röntgenkép felhasználásával [72]. Hiányzó fogakat pótolnak úgy is, hogy az állkapocsba beültetnek egy csavart, majd ehhez erősítik a pótlást. A csavar helyes kialakítását segítette az előzetes feszültséganalízis [73]. A szomszédos fogra ültetett konzolszerű pótlást, illetve a tartó fog maradványát és az azt körülvevő állkapocsrészt peremelemes módszerrel vizsgálták [74]. Ugyancsak a peremelemes módszert alkalmazták az agyban keletkező feszültségek számítására, ha a koponyát ütés érte [75].

Nemcsak a mechanikát használják a biológiában, hanem biológiai analógia alapján is készítenek algoritmusokat a mechanikában. Egyre többen foglalkoznak a neurális hálózatoknak a tartószerkezetek mechanikájában való alkalmazásával. Itt az agy működésének mechanizmusát szimulálják. A cellákat rétegekbe helyezik. A szomszédos rétegek cellái közt kapcsolatot tételeznek fel. A tanulási folyamatban sok eset bemenő és az elvárt kimenő adatait közlik a géppel. Ebből a gép a kapcsolatok paramétereit meghatározza anélkül, hogy a be- és kimenő adatok között fennálló összefüggésről előzetes információja lett volna [64, 76].

Szintén biológiai analógiára épül a genetikus algoritmus [64]. Ebben a többparaméteres rendszert a következő lépésekben optimálják:

– A paramétereknek véletlenszerűen néhány értéket választanak kettes számrendszerben. Ez a szülők generációja.

– A szülőket pároztatják, a paraméterérték néhány bitjét az egyik szülőtől, a többit a másik szülőtől örökli az utód. Ez a következő generáció.

– Néha egy-két bit értékét megváltoztatják, hogy a mutáció jelenségét szimulálják.

– Az új generáció tagjainál meghatározzák az optimálandó függvény értékét. Ezekhez valószínűségeket rendelnek, úgy, hogy a jobb függvényértékekhez nagyobb valószínűség tartozzék.

– Az előző valószínűségeket figyelembe véve véletlenszerűen kiválasztanak a szülők számával egyező számú egyedet. Ezekkel a második lépéstől kezdve az eljárás folytatható.

Néhány generáció után a legéletképesebbek, vagyis nagy valószínűséggel a legjobb megoldásokat szolgáltató paraméterértékek választódnak ki. Az eljárás jól ki tudja használni a párhuzamos számítógépek előnyeit.

A numerikus mechanika számára is nagyszerű lehetőségeket nyújtanak a szimbolikus programozási nyelvek [77], például a FORMAC, MACSYMA, MAPLE, muMATH, MATHEMATICA, REDUCE. Ezek a programok nemcsak numerikus műveletek elvégzésére képesek, hanem a változókkal mint paraméterekkel is tudnak műveleteket végezni, megkönnyítve ezzel a matematikai levezetéseket, egyszerűbbé téve a sorfejtésnél a magasabb fokú tagok hatásának figyelembevételét, a modellek paraméter-vizsgálatát. Így lehetett egy egyszerű tartónál a Göbner-bázis használatával az összes egyensúlyi utat megtalálni [78] vagy a katasztrófaelmélet felhasználásával a tökéletlenség-érzékenységi felület egyenletét meghatározni [79].

Zárszó

A számítógépek fejlődése – amint láttuk – forradalmi változásokat hozott a tartószerkezetek számításában. Az elsősorban mennyiségi változásokat jelentő számítási lehetőségek kialakulása (pl. nagyméretű egyenletrendszerek megoldási lehetősége) minőségi változásokat eredményezett. Több olyan elméletet, mely az irodalomban már jóval korábban megjelent, csak most lehetett gyakorlati célokra is felhasználni, de sok új elmélet kifejlesztésének is a számítástechnika fejlődése adta meg a kezdő lökést.

Biztosan vannak, akik azt gondolják, hogy ma már olyan fejlett programok kaphatók, amelyekkel a gyakorlatban előforduló minden fontosabb feladat megoldható. Lassanként esetleg a drága kísérletek is feleslegessé válnak, minden szimulálható már a számítógépeken, sőt a mérnöknek már gondolkoznia sem kell, elegendő a számítógép billentyűzetét nyomkodnia.

Valóban hatalmas volt a fejlődés az elmúlt évtizedekben, de nem állhatunk meg, nincs még itt a Kánaán. A legtöbb program még csak ellenőrzi, hogy a felvett geometriájú és szilárdságú modell el tudja-e viselni a felvett terheket vagy előírt kombinációikat. De ki mondja meg, hogy milyen szerkezetet válasszunk, hogyan válasszuk meg a kiindulási adatokat, milyen matematikai modellt vegyünk fel, milyen vizsgálatokat végeztessünk el, milyen közelítő módszert használjunk a megoldásához, hogyan ellenőrizzük az eredményeket? – hiszen a felhasználó mérnökön van a felelősség. Sokkal veszélyesebb egy helytelenül választott modellel kapott számítógépes eredmény, mint egy nagyon durva modellel elvégzett közelítő számítás, mert az előbbiekben hajlandók vagyunk feltétel nélkül bízni, az utóbbinál tudjuk, hogy csak közelítettük az értékeket.

Irodalom

1. Egerváry J.: Mátrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról. *MTA, III. Osztály Közleményei*, 1953, III (4).
2. Szabó J.: A térbeli tartórács egyenlete. Építéstudományi Intézet, *Tudományos Közlemények*, 1964, 34. köt. Budapest.
3. Nagy T.: Síkbeli feladatok gépi számításának tapasztalatai. *Mélyépítéstudományi Szemle,* 1966, XXVI (3), 132–138.
4. Szabó J.: A mátrixelmélet alkalmazása egyes szilárdságtani problémákat leíró parciális differenciálegyenletek közelítő megoldásánál. *Matematikai Kutató Intézet Közleményei,* 1956, I/4, 623–631.
5. Szabó J., Nagy T.: A Blaha Lujza téri aluljáró födémlemezének statikai ellenőrzése. *Mélyépítéstudományi Szemle,* 1966, XXVI (11), 489–496.
6. Gáspár Zs., Tassi G.: Vasbeton sarok-konzollemez számítása és vizsgálata. *Mélyépítéstudományi Szemle,* 1971, XXI (4), 178–180.
7. Szabó, J., Rózsa, P.: Die Matrizengleichung von Stabkonstruktionen (im Falle kleiner Verschiebungen). *Acta Techn. Hung.*, 1971, 71 (1–2), 133–148.
8. Kurutzné Kovács M.: Vegyesen kapcsolt statikailag határozatlan rúdszerkezetek gépi számításának tapasztalatai. *Építés–Építészettudomány*, 1973, IV (3–4), 327–343.
9. Kurutz, M.: Computer calculation of frameworks composed of thin-walled open sections. *Acta Techn. Hung.*, 1977, 84 (3–4), 269–279.
10. Kurutz, M.: Analysis of plastic load capacity of plane frameworks by kinematic loadings. *Periodica Polytechnica Civ. Eng.*, 1974, 18 (1–2), 71–81.
11. Szabó, J.: The equation of state-change of structures. *Periodica Polytechnica Mech. Eng.*, 1973, 17 (1), 55–71.
12. Szabó, J., Rózsa, P.: Grosse Verschiebungen von Stabkonstruktionen. *Acta Techn. Hung.*, 1972, 73 (1–2), 53–60.
13. Gáspár Zs.: *Rugalmas rúdszerkezetek nagy elmozdulásának vizsgálata.* Kandidátusi értekezés, Budapest, 1976.
14. Gáspár Zs.: Kétcsuklós másodfokú parabola alakú ívtartók stabilitásvizsgálata. *Mélyépítéstudományi Szemle,* 1972, XXII (1), 30–35.
15. Gáspár, Zs.: Stabilitätsprüfung von Stabkonstruktionen. *Acta Techn. Hung.*, 1972, 72 (3–4), 315–322.
16. Tarnai, T., Popper, Gy.: Solution of flexural-torsional problem of beams by series expansion in eigenfunctions of quadratic operator pencils. *Acta Techn. Hung.*, 1979, 89 (1–2), 237–254.
17. Popper, Gy., Gáspár, Zs.: A numerical method for the solution of the eigenvalue problem of damped vibrations. *Periodica Polytechnica Civ. Eng.*, 1974, 18 (1–2), 103–107.
18. Györgyi J.: Rúdszerkezetek önrezgésszámítása közelítő dinamikai elmozdulásfüggvények segítségével. *Építés–Építészettudomány,* 1974, X, (3–4), 317–330.

19. Popper Gy., Gáspár Zs.: Numerikus módszer m-ed fokú λ-mátrix sajátérték-feladatának megoldására. *Műszaki Tudomány,* 1979, 57 (1–2), 49–56.
20. Gáspár, Zs., Popper, Gy.: Solution of the algebraic eigenvalue problem by division into cells. *U. S. S. R. Comp. Math. and Math. Phys.,* 1981, 21 (2), 4–11.
21. Szabó, J., Berényi, M.: Numerical analysis of rectangular cable nets. *Acta Techn. Hung.,* 1972, 72 (3–4), 257–271.
22. Szabó, J., Gáspár, Zs.: Berechnung des auf Randkabel gespannten rechtwinkligen Seilnetzes. *Acta Techn. Hung.,* 1974, 77 (4), 365–378.
23. Gáspár, Zs.: Nach Hauptkrümmungslinien konstruirtes Seilnetz. *Acta Techn. Hung.,* 1976, 83 (1–2), 103–116.
24. Galaskó, Gy., Gáspár, Zs., Nouri-Baranger, T., Leon, J. C., Trompette, P., Veron, P.: Comparison of tent structures calculation in Hungary and France. *Acta Techn. Hung.,* 1995–96, 107 (1–2), 27–36.
25. Hincz K., Gáspár Zs.: Ponyvaszerkezetek szerelési alakjának meghatározása. *Építés–Építészettudomány,* 1998, XXVII (1–2), 41–67.
26. Argyris, J. H.: Matrix displacement analysis of plates and shells. *Ingenieur–Archiv,* 1966, XXXV, 102–142.
27. Popper Gy.: *A végeselem-módszer matematikai alapjai.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
28. Bojtár I., Gáspár Zs.: *Tartók statikája IV. A végeselem-módszer.* Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1992.
29. Szilágyi, Gy.: Inhomogeneous boundary conditions for finite strips. *Periodica Polytechnica Civ. Eng.,* 1981, 25 (3–4), 227–241.
30. Roller B.: Kőzetösszletek numerikus állapotvizsgálata. *MTA X. Osztályának Közleményei,* 1976, 9 (3–4), 217–244.
31. Kurutz, M.: Postbifurcation equilibrium paths due to nonlinear configuration-dependent conservative loading by using nonsmooth analysis. *J. of Mechanics of Structures and Machines,* 1997, 25 (4), 445–476.
32. Bojtár, I.: Analysis of spatial plate structures. *Periodica Polytechnica Civ. Eng.,* 1979, 23 (2), 135–147.
33. Kollár, L. P., Springer, G. S.: Stress analysis of anisotropic laminated cylinders and cylindrical segments. *Int. J. of Solids and Structures,* 1992, 29, 1499–1517.
34. Kaliszky, S., Galaskó, Gy.: Numerical applications of the pyramid model of subgrade analysis. *Periodica Polytechnica Civ. Eng.,* 1976, 20 (3–4), 63–81.
35. Bojtár, I., Wolf, K.: Discrete analysis of multistorey buildings, with respect to joint elasticity, *Periodica Polytechnica Civ. Eng.,* 1981, 25 (3–4), 133–142.
36. Kaliszky S., Nédli P., Tornyos Á., Wolf K.: Panelvázas szerkezetek dinamikai vizsgálata gázrobbanás esetén. *Építés–Építéstudomány,* 1986, XIX (3–4), 337–366.
37. Kollár, L., Hegedűs, I.: *Analysis and design of space frames by continuum method.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1985.
38. Szabó, J., Tarnai, T.: Analysis of critical and post-critical states of pin-jointed double-layer space grids fitted to surface of double curvature. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures,* 1998, 39, 91–95.
39. Bojtár, I., Bagi, K.: Numerical analysis of loose and bonded granular materials. *Mechanics of Materials,* 1993, 16, 111–118.

40. Bagi, K., Bojtár, I.: Numerical analysis of higher-order continua description of granual assemblies. In *Proc. of the fourth European Conf. on Numerical Methods in Geotechnical Engineering.* Springer, Wien, 1998, 253–262.
41. Ledniczky, K., Bojtár, I.: Numerical investigation of steel stress distribution and bond stress-slip relationship of reinforced concrete. *Acta Techn. Hung.,* megjelenés alatt.
42. Tarnai, T., Gáspár, Zs.: Improved Packing of equal circles on a sphere and rigidity of its graph. *Math. Proc. of the Camb. Phil. Soc.* 1983, 93 (2), 191–218.
43. Tarnai, T., Gáspár, Zs.: Covering a sphere by equal circles, and rigidity of its graph. *Math. Proc. of the Camb. Phil. Soc.,* 1991, 110, 71–89.
44. Tarnai, T., Gáspár, Zs., Szalai, L.: Pentagon packing models for „all-pentamer" virus structures. *Biophysical Journal,* 1995, 69, 612–618.
45. Kaliszky S.: Tartószerkezetek optimális tervezése. *Építés–Építészettudomány,* 1991, XXIV (1–2), 3–32.
46. Kaliszky S.: Képlékenységtan és matematikai programozás. *Építés–Építészettudomány,* 1996–97, XXVI (1–2), 3–30.
47. Nédli, P.: Plastic limit analysis of spatial large panel structures. *Periodica Polytechnica Civ. Eng.,* 1989, 33 (3–4), 171–181.
48. Nédli, P.: Elastic-plastic analysis of frames in case geometrical nonlinearity. *Acta Techn. Hung.,* 1995–96, 107 (1–2), 99–108.
49. Vásárhelyiné Szabó A., Grósz M.: Kontinuumok rugalmas-képlékeny állapotváltozásának vizsgálata nemlineáris programozással. *Építés–Építészettudomány,* 1986, XIX (3–4), 393–403.
50. Kaliszky, S.: Elasztoplastic analysis with limited plastic deformations and displacements. *Mech. Struct. & Mach.,* 1996, 24 (1), 39–50.
51. Páczelt I., Nándori F., Ecsedi I.: Néhány síkrugalmassági feladat megoldása kvadratikus programozás segítségével. *Műszaki Tudomány,* 1982, 62, 147–177.
52. Kaliszky, S., Popper, Gy., Lógó, J., Károlyi, Gy.: Identification of bilinear material models of nonlinear beams on nonlinear foundation. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences,* 1996, 3, 45–53.
53. Vásárhelyi, A., Lógó, J.: Mathematical modelling of processes in mechanics. *Structural Optimization,* 1994, 8, 138–144.
54. Páczelt I.: Az érintkezési nyomás megoszlásának optimálása. *Műszaki Tudomány,* 1980, 60, 111–146.
55. Farkas, J., Jármai, K.: *Analysis and optimum design of metal structures.* A. A. Balkema, Rotterdam, 1997.
56. Lógó, J., Vásárhelyi, A.: Pareto optima of reinforced concrete frames. *Periodica Polytechnica Civ. Eng.,* 1988, 32 (1–2), 87–96.
57. Vásárhelyiné Szabó A.: Panelszerkezetek határállapot-vizsgálata sztochasztikus terhek esetén. *Építés–Építészettudomány,* 1982, XV (1–2), 129–136.
58. Vásárhelyi, A.: Limit analysis and optimal plastic design by stochastic programming with uncertainties of material's quality. *Mech. Struct. & Mach.,* 1987, 15 (2), 153–165.
59. Hicks, M. A.: Adaptive mesh simulation of passive earth pressure failure. In *Proc. of the fourth European Conf. on Numerical Methods in Geotechnical Engineering.* Springer, Wien, 1998, 493–502.
60. Wriggers, P., Scherf, O.: Adaptive methods for contact problems. In *Proc. of the XIII Polish Conference on Computer Methods in Mechanics.* Poznań, 1997, 63–78.

61. Augarde, C. E., Burd, H. J., Houlsby, G. T.: Some experiences of modelling in soft ground using three-dimensional finite elements. In *Proc. of the fourth European Conf. on Numerical Methods in Geotechnical Engineering.* Springer, Wien, 1998, 603–612.
62. Krok, J., Orkisz, J.: Unified approach to the adaptive FEM and generalized FDM. Concept and tests. In *Proc. of the XIII Polish Conference on Computer Methods in Mechanics.* Poznań, 1997, 653–660.
63. Yagawa, G., Yamada, T., Furukawa, T.: Parallel computing with free mesh method: a kind of Meshless FEM. In *IUTAM Symposium on Discretization Methods in Structural Mechanics.* Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1999, 165–172.
64. Topping, B. H. V., Sziveri, J., Bahreininejad, A., Leite, J. P. B., Cheng, B.: Parallel processing, neural networks and genetic algorithm. In *Proc. of the XIII Polish Conference on Computer Methods in Mechanics.* Poznań, 1997, 35–61.
65. Gáspár, Zs., Domokos, G., Szeberényi, I.: A parallel algorithm for the global computation of elastic bar structures. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences,* 1997, 4 (1), 55–68.
66. Domokos, G., Holmes, P. J.: Euler's problem, Euler's method and the standard map. *J. of Nonlinear Sci.,* 1993, 3, 109–151.
67. Károlyi Gy., Domokos, G.: Symbolic dynamics of infinite depth: finding global invariants for BVPs. *Physica D,* 1999, 134, 316–336.
68. Károlyi, Gy.: *Examination of spatial chaotic equilibrium states of chains.* Doktori (PhD) disszertáció, BME, 1998.
69. Domokos, G., Gáspár, Zs.: A global, direct algorithm for path-following and active static control of elastic bar structures. *Mech. Struct. and Mach.,* 1995, 23 (4), 549–571.
70. Gáspár, Zs., Nédli, P.: Global numerical analysis of elasto-plastic frames. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences,* 1998, 5 (1), 93–100.
71. Domokos, G., Holmes, P., Royce, B.: Constrained Euler Buckling. *J. of Nonlinear Sci.,* 1997, 7, 281–314.
72. Polgár, K.: Stress analysis of artificial joints, inplants and bone – An interface of mechanics and medicine. In *Proc. of 1st Int. PhD Symposium.* Technical University of Budapest, 1996, 178–182.
73. Polgár, K., Bojtár, I.: Finite element analysis of screw-type dental implants. *Acta Techn. Hung.,* megjelenés alatt.
74. Lovas, A.: Some applications of the boundary element method in dental mechanics. In *Proc. of the Second World Congress of Hungarian Dentists.* Budapest, 1996.
75. Lovas, A.: Mechanical models of the human skull-brain system. *Acta Techn. Hung.,* 1995–96, 107 (1–2), 83–97.
76. Mucha, G., Waszczyszyn, Z.: Hybrid neural network/Computational program for bending analysis of elastoplastic beams. In *Proc. of the XIII Polish Conference on Computer Methods in Mechanics.* Poznań, 1997, 949–956.
77. Tummarakota, S., Junghsen, L.: Symbolic finite element modeling of structural systems. *J. Symbolic Computation,* 1996, 22, 105–119.
78. Gáspár, Zs., Károlyi, Gy., Popper, Gy.: Application of Gröbner basis theory to find global equilibrium paths of a simple arch. *Acta Techn. Hung.,* 1995–96, 107 (1–2), 39–47.
79. Kurutz, M., Gáspár, Zs.: Imperfection-sensitivity of stable-symmetric bifurcation model by using classical and catastrophe theory methods. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences,* közlésre beküldve.