

Vicsek Tamás

az MTA levelező tagja

# A TERMÉSZET GEOMETRIÁJA

Elhangzott 1996. május 23-án

A természetben előforduló objektumok (hegyek, fák, folyó- és érhálózatok, stb.) nem egyenesek, körök vagy kockák, hanem sokkal összetettebb formák. Az ilyen bonyolult geometriával bíró, ún. fraktálok kialakulásának leírása/megértése terén az elmúlt másfél évtizedben jelentős áttörés történt. A fraktálgeometria rövid áttekintése után összefoglalom néhány a témakörben elért eredményünket. Bemutatom, hogyan lehet a fraktál hegygerincek kialakulását kísérletileg modellezni, valamint beszámolok a komplex szerkezetű baktériumtelepek létrejöttének okaira irányuló vizsgálatainkról. Végül ismertetem az élőlények kollektív mozgását leíró modellünkben megfigyelhető érdekes átmeneteket.

## Bevezetés

Az ókori tudósok részéről csodálatos szellemi teljesítmény volt, hogy a környezetükben fellelhető formák absztrakciója segítségével felfedezték az egyszerű geometriai elemeket – az egyenest, a háromszöget, a kört, a síkot és a többi jól ismert szabályos alakzatot. A klasszikus euklideszi geometria iránti érdeklődést azóta is motiválta, hogy a természet néhány alapvető jelentőségű objektumára jól alkalmazható volt. Az ellipszis fontossá vált mint a bolygópályák, a gömb pedig mint Földünk alakja. Természetesen ezek a pályák nem teljesen elliptikusak, és a Föld sem gömb valójában, de számos esetben – pél-

dául a bolygómozgás előrejelzésében vagy a Föld gravitációs mezőjének vizsgálatában – ezek a közelítések tökéletesen megfeleltek. Az elméleti természettudomány hagyományos modelljei a számítások alkalmazhatósága érdekében általában sima görbéket és felületeket tételeztek fel.

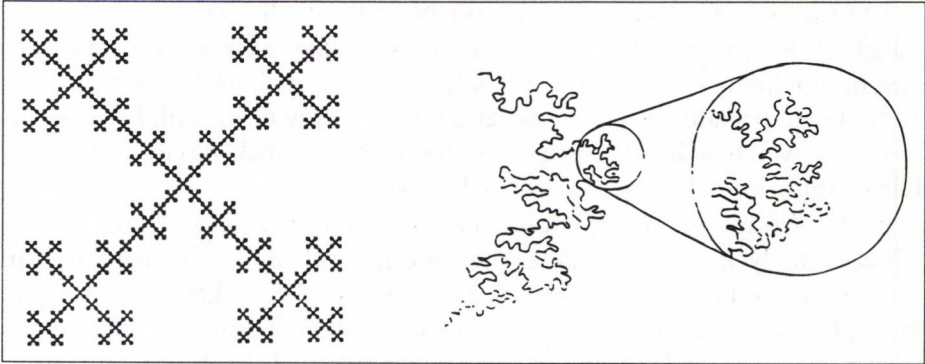
Ha azonban körülnézünk a világban, láthatjuk, hogy „a felhők nem gömbök, a hegyek nem kúpok, a tengerpart vonala nem körív, a fa kérge nem sima, és a villám sem egyenes vonalban halad” [1]. A csipkézett szélű felhők, a szigetek vagy tavak partvonalai, a hegyek többnyire sziklával vagy kisebb-nagyobb kiszögellésekkel tagolt felülete, a millió finom kis részlettel bíró, egymástól is különböző hópehelyalakzat, az ágas-bogas fák (lombkoronájuk nélkül), az égen átcikázó villám, a hold kráterekkel lyuggatott felülete és számos más természeti objektum egyáltalán nem sima, és sok nagyítási skálán is részletesen struktúrált. A természetben található formák sokkal változatosabbak, bonyolultabbak, mint a fent említett egyszerű alakzatok; „fittyet hánynak az euklideszi geometriának”, amelynek segítségével csak korlátozottan írhatók le.

Már a századforduló tájékán akadtak matematikusok, akik vizsgáltak rendkívül szabálytalan, mások által patológikusnak tartott görbéket és felületeket. Benoit Mandelbrot (litván származású matematikus, aki Franciaországban nőtt fel; jelenleg a New York állambeli T. Watson IBM-központ kutatója és a Yale egyetem professzora) 1975 körül hívta fel a figyelmet egyes bonyolult geometriájú alakzatok alapvető jelentőségére a természettudományokban és más területeken [1].

A fraktálobjektumok egyik közös tulajdonsága az is, hogy *önhasonlók*, skálainvariánsak. Ez azt jelenti, hogy ha először kivágunk egy részt belőlük, majd a kivágott darabot felnagyítjuk, az eredményül kapott alakzat (statisztikai értelemben) ugyanúgy fog kinézni, mint az eredeti (1. ábra). Például, ha egy repülőgépről lefényképezzük Norvégia fjordokkal tarkított partvonalát, akkor az így kapott bonyolult vonalról nyert általános benyomásunk eléggé hasonló lesz ahhoz a képhez, amit lényegesen közelebből, a sziklával szabdaltdalton állva látnánk.

Vagy képzeljük el, hogy letörünk egy szerteágazó faágot (télen, amikor nincsenek levelek rajta), és elsétálunk vele a fától néhány méterre, majd az ágat karnyújtásnyira tartva egyszerre nézzük a kezünkben tartott ágat és a fát. A két látvány igen hasonló lesz. Természetesen mindegyik egymástól nagyon különböző fa csak a saját ágaival önhasonló, a fenti kísérlet nem ismételhető meg, mondjuk, egy kőrisfa és egy fenyőág összevetésével. Az élővilágban az önhasonló geometria gyakran fontos funkcióval bír; például a fák esetében kis súly mellett nagy felületet biztosít, így az energiafelvétel–súly arány optimálisabb.





1. ábra. A geometriai önhasonlóságot úgy kell elképzelniünk, hogy az ezzel a tulajdonsággal rendelkező alakzat egy kis részét kinagyítva olyan ábrát kapunk, amelyik az eredetitől jellegében nem különbözik. Másképpen: a hosszúságskála változtatásakor minden léptéken túl egyre finomabb részletek jelennek meg, és ezek a részletek úgy viselkednek, mint az egész

A természetben előforduló fraktálok tulajdonságainak elméleti, kísérleti és számítógépes vizsgálatával az 1980-as évek elején kezdtem el foglalkozni. Azóta sok, a fraktálokkal kapcsolatos jelenséget tanulmányoztunk számos kollégával való együttműködésem során. Köszönetet mondok mindegyiküknek, elsősorban Kertész Jánosnak, Horváth Viktornak, Barabási Lászlónak, Czirók Andrásnak, Fereydoon Familynek, Paul Meakinnek, Benoit Mandelbrotnak és Eugene Stanleynek.

A terjedelmi korlátokra való tekintettel a jelen munkában néhány témát tudok csak vázlatosan érinteni. A fraktálgeometriára vonatkozó rövid áttekintés után összefoglalom az önaffin fraktálgeometriával rendelkező hegygerincek kialakulására, a komplex geometriával rendelkező baktériumtelepek növekedésére és a kollektív mozgások leírására irányuló kutatásaink eredményeit.

## Fraktálgeometria

A fraktálok két fő alaptípusát különböztetjük meg [1, 2]. A *térfogati* vagy *önhasonló* fraktálokra az a jellemző, hogy amikor egyre növekvő  $R$  sugarú tartományokat hasítunk ki belőlük, akkor az így kivágott rész tömege ( $M$ ) vagy térfogata a sugár tört (fractio) hatványával nő:

$$M(R) \sim R^D. \quad (1)$$

Itt  $D$  az úgynevezett fraktáldimenzió. Nyilvánvaló, hogy közönséges testek esetében  $D=d$ , ahol  $d=1, 2$  vagy  $3$ , attól függően, hogy a vizsgált objektum egy egyenes mentén, a síkon vagy a térben helyezkedik-e el. Fraktálokra azonban  $D < d$ , tehát például a háromdimenziós térben relatív térfogatuk  $R^D/R^d \rightarrow 0$ , ha  $R \rightarrow \infty$ . Az ilyen fraktálszerkezetű objektumok önhasonlók: ha egy kis részüket felnagyítjuk, visszakapjuk a teljes objektumot.

A felületi avagy önaffin fraktálok sehol sem differenciálható folytonos függvények, amelyek szintén rendelkeznek az önhasonlóság egy formájával, amit önaffinitásnak neveznek. Ebben az esetben a felületi fraktál egy kis részét kiragadva, azt anizotrop (irányfüggő) módon kell felnagyítanunk, hogy a kapott objektum egybevágjon a teljes eredeti fraktállal. Az ilyen függvényekre igaz, hogy az átlagos változásuk ( $\langle |\Delta Y(x)| \rangle$ ) valamilyen hatvány ( $H$ ) szerint nő annak a tartománynak a kiterjedésével ( $\Delta x$ ), amelyen a változást mérjük

$$\langle |\Delta Y(x)| \rangle \sim (\Delta x)^H. \quad (2)$$

A természeti jelenségek közül igen sok vezet a fenti két típusú fraktál valamelyikéhez. Térfogati fraktálnak megfelelő szerkezetűek például a villámok, a dendrites kristályok (hópelyhek) vagy a különböző viszkozitású folyadékok egymásba hatolásakor kialakuló mintázatok. Ha molekulákkal bombázunk egy felületet, az összetapadt molekulák egy önaffin felületet képeznek, de a (2) egyenlet szerint viselkedő felületet (vonalat) kapunk akkor is, ha egy itatóspapírt vízszintes szélével belemártunk egy színes folyadékba (pl. kávéba), és a nedvesedő terület határát tekintjük.

\*

Bár a fentiekben tárgyalt geometria sem túl egyszerű, a teljes képhez hozzátartozik, hogy számos természeti jelenség leírására még a közönséges fraktálokénál is összetettebb struktúrákra van szükség.

Ha egy fraktálgeometriával rendelkező fizikai objektum kölcsönhatásba kerül a környezetével, akkor a fraktál felülete mentén kialakul az adott körülményekre és geometriára jellemző eloszlás. Például ha egy komplikált felületű vezető anyagot elektromosan feltöltünk, akkor a felülete közvetlen közelében az elektromos tér nagyon nagy ingadozásokat mutat. Itt a csúcshatás és az árnyékolás jól ismert jelensége következtében a kiugró részeknél igen nagy, az öblös részek belsejében viszont közel nulla a térerősség, ami a cizellált fraktálfelületek esetében rendkívül élesen változó eloszlást eredményez a térerősségben.

Az ilyen eloszlás többnyire annyira bonyolult, hogy csak fraktáldimenziók végtelen hierarchiájával írható le.



## Fraktál hegygerincek kialakulása eróziós modellkísérletekben

### Motiváció

Feltehetően sokunk gyönyörködött már a magasabb mészkőhegységekben, például az Alpokban vagy a Kárpátokban látható változatos tájakban. Különösen megkapóak a festői en cizellált hegygerincek, amelyek környezete kedvelt célpontja a szép tájak látványa iránt vonzódo, kikapcsolódást kereső utazóknak, turistáknak. Gondolt-e azonban a kedves Olvasó arra, hogy milyen folyamatok eredményeként alakultak ki ezek a fenségesen szép hegyláncok? A válasz nem is olyan egyszerű, hiszen a formáknak előbb említett gazdagsága emberi léptékkal mérve nagyon hosszú idő alatt jön létre a mészkőhegységekben, ezért a pusztta megfigyelés útján való közvetlen megismerés nem járható út.

A következőkben szeretném bemutatni azokat a lehetséges mechanizmusokat, amelyek bonyolult szerkezetű hegygerincekhez vezethetnek. A geomorfológiai fejlődés tanulmányozására alkalmazott újszerű módszerünk lényege az volt, hogy a természetben nagy méretskálán végbemenő folyamatokat megpróbáltuk *kísérleti úton kicsiben, a laboratóriumban „lejátszani”* [3].

*Miért modellkísérletek?* Mint említettem, a mészkőhegységek szerkezetének kialakulása tipikusan többszáz millió évig tart. Nyilvánvalóan reménytelen vállalkozás megfigyelés útján direkt tapasztalatot szerezni a lejátszódo eróziós folyamatokról, ezért a hátrahagyott nyomok alapján csak különböző feltevésekre van mód. Egészen más a helyzet egy modellkísérletben, ahol néhányszor 10 perc alatt közvetlenül megfigyelhetjük, amint az eredetileg sima felület fel-durvul, és struktúrája hasonlatossá válik a hegységekéhez.

### Kísérleti hegyek

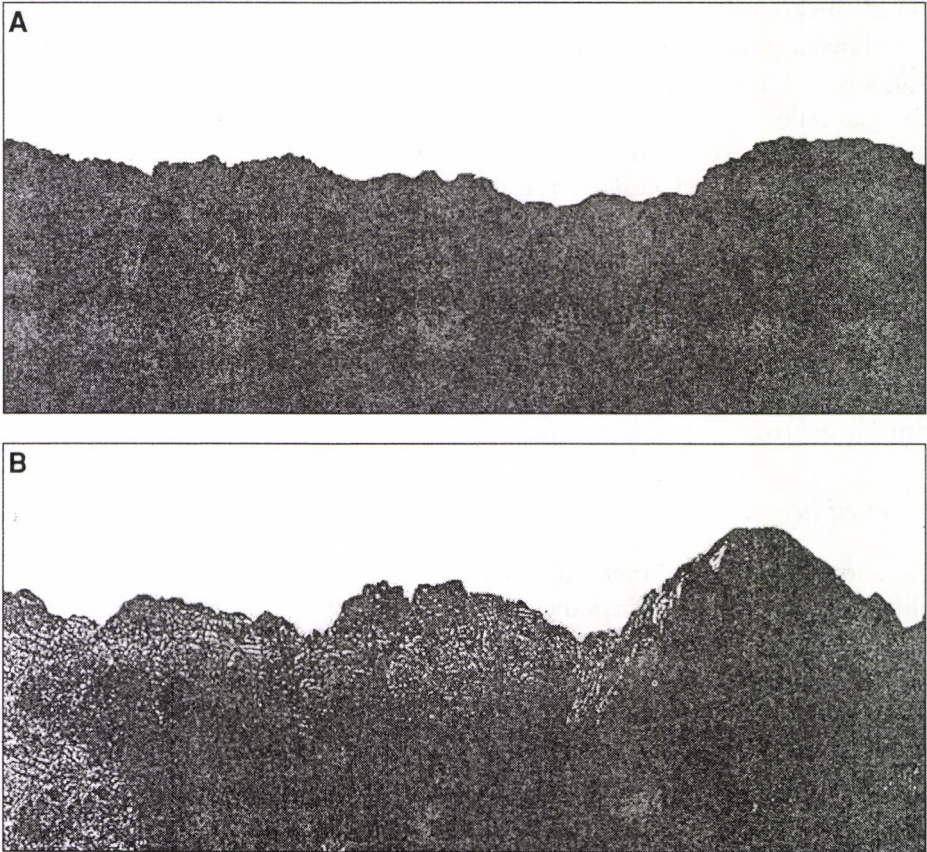
Korántsem egyszerű félméteres skálán hegyormokhoz vezető kísérletet összeállítani. Hosszas próbálkozás után jutottunk az alábbi rendszerhez:

1.) Elkészítettünk egy keveréket, amely fele-fele arányban állt közönséges, építkezéseken használatos kvarchomokból és virágföldből. Az általunk használt anyag jobb ismerete érdekében scanning elektronmikroszkóp és digitális képanalízis segítségével megállapítottuk a részecskék méreteloszlását a keverékben, és úgy találtuk, hogy a homokszemcsék átlagos mérete  $150 \mu$  körül volt, míg a virágföldben ennel jóval kisebb, de sokkal nagyobb részecskék is előfordultak. 2.) A keveréket kissé átnedvesítettük, és egy sima felületű „hegyet” alakítottunk ki belőle. Ez a hegygerinc egy alulról felfelé keskenyülő,

hosszirányban elnyújtott gúla formájú volt, és hosszúkás téglalap alakú teteje (a fennsík) mérete 60x18x4 cm volt. 3.) A kísérlet alatt 1500–3000 cm<sup>3</sup>/min sebességgel vizet permeteztünk erre a struktúrára, amelynek felülete az elfolyó víz által elszállított anyag és a mini földcsuszamlások hatására fokozatosan egyre durvábbá vált.

### *A kísérleti és a valódi hegyek hasonlóságáról*

A kísérleti eredmények kiértékelési módja miatt elsősorban a kialakult hegyek profilját vagy másképpen kontúráját vizsgáltuk. Ebből a célból háttérmegvilágítást alkalmaztunk, és úgy készítettünk felvételeket a kísérleti hegygerincekről. A 2a ábra egy ilyen felvételt mutat, míg a 2b ábrán egy valódi hegy

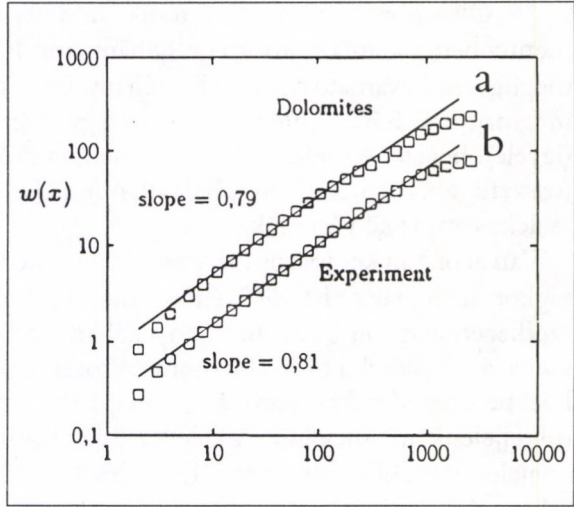


2. ábra. Egy kísérleti (a) és egy valódi (b) hegyprofil vizuális összevetése



látható, amelyet az Alpok olaszországi részén található Dolomitokról készült kép alapján reprodukáltunk. A két ábra jellegének figyelemre méltó hasonlósága jól demonstrálja, hogy a fraktálszerkezetű objektumok esetében nagyon különböző méretskálákon látható hasonló viselkedés, és ez a viselkedés létrejöhet erózió útján.

A kontúrok mint függvények kezelhetők, és ezért a (2) összefüggés teljesülését a megfelelő mennyiségek kiszámítása útján ellenőrizhetjük. Ábrázoljuk tehát az  $x$  kiterjedésű tartományok átlagos vastagságát! Ha  $\log w$  (a vastagság logaritmusa)  $\log x$  függvényében lineárisan nő, akkor teljesül a  $w \sim x^\alpha$  összefüggés, és a lineáris szakasz meredeksége éppen az  $\alpha$  exponens lesz. A 3. ábrán egy kísérleti és egy valódi hegygerinc kontúrjának kiértékeléséből nyert eredményt mutatunk be. Az adatok egy viszonylag hosszú tartományon át közel lineárisan változnak, és a kísérleti, valamint a valódi hegy profiljához tartozó meredekség- (durvasági exponens) értékek igen hasonlóak.



3. ábra. Kísérleti (a) és valódi (b) hegygerincekre meghatározott  $w$  vastagság-függvény logaritmikus skálán ábrázolva. A kísérleti és a valódi hegyre vonatkozó adatok egyaránt közel fekszenek a rajtuk áthúzott, kb. 0,8 meredekségű egyenesekhez. Ez a tény a hegygerincek önaffin jellegét igazolja

### Következtetések

Kísérleteinkben az eróziós folyamatok által létrehozott, festői, de a gyakorlat szempontjából is fontos geomorfológiai típust, a fraktál hegyeket vizsgáltuk. Megfigyeléseink egyik alapvető tanulsága, hogy a valódi hegygerincekkel rokon struktúrák elsősorban a földcsuszamlásos mechanizmussal alakulnak ki. Másfelől ez a mechanizmus csak akkor alakít ki fraktál hegyeket, ha a földcsuszamlások mérete egy széles tartományban változik; a sok kicsi beomlás mellett nem túl kis valószínűséggel jönnek létre „nagy”, a kísérleti hegy méretével összemérhető földcsuszamlások.

Az Olvasóban nyilván felvetődik az a természetes kérdés, hogy vajon mennyiben alkalmazhatóak egy néhányszor 10 cm-es kísérleti objektumon megfigyelt folyamatok a valódi, néhány km-es skálán lejátszódó jelenségek megmagyarázására. Különösen jogos egy ilyen felvetés annak a ténynek a figyelembevételével, hogy például az Alpok alapvetően mészkőből (összefüggő, „kemény” anyagból) áll, míg a kísérletet egy könnyen átzó, morzsálékos anyaggal végeztük.

Van azonban két fontos észrevétel, amely közvetve alátámasztja a két jelenségkör analógiáját. 1.) Elsőként kiemeljük, hogy a mészkőhegységek belső szerkezete nagyon bonyolult, lényegében a teljes kőállandó anyagát meg át van szelve a repedések hol finom, hol makroszkopikus (szintén fraktál) hálójával. Ezekbe a repedésekbe beszivárog a csapadék, és a hőmérséklet csökkenésekor (pl. éjjelenként) megfagy. A keletkező jég tágulása miatt kialakuló feszültség széjjelebb feszíti a már meglévő repedéseket, és egyúttal új repedéseket is létrehoz. Az eredetileg összefüggő sziklák egyre kevésbé kapcsolatban levő kisebb egységekre hasadnak szét. 2.) Abban a pillanatban, amikor a kapcsolat egy kiterjedt tartomány körül végleg meggyengül (a repedéshálózat egy felület mentén összefüggővé válik), ez a tartomány leomlik. A következő kép rajzoldódik tehát ki: A kísérletünkben használt homok- és földszemcsék a repedések által szétszabdalt sziklákat alkotó kődaraboknak felelnek meg, míg a beszivárgó, az összetapadt szemcséket egymástól elválasztó víz a köveket szétfeszítő jég módjára hat. Tehát: földcsuszamlás → kőomlás. Valóban, a Dolomitokban található hegyek lábainál hatalmas mennyiségű kőtörmelék figyelhető meg, amit a völgyekben folyó víz fokozatosan felold, ill. elszállít.

## Fraktál baktériumtelepek kialakulása

A biológiában a legkülönbözőbb eredetű, gazdag mintázatú fraktálok találkozzunk [2] – gondoljunk csak a (leveleit vesztett) fák sűrűn elágazó, különböző méreteken ismétlődő struktúrájára vagy éppen a testünket átszövő finom érhálózatra! De egyes sejteknek is lehet fraktálgeometriája, vannak idegsejtek, amelyek sok ezer ágas-bogas nyúlvánnyal rendelkeznek. Itt most egy fizikai koncepciók alapján interpretálható biológiai fraktálról fogok írni.

### *Kísérletek baktériumtelepekkel*

A Petri-csésze egy lapos üvegtálka, függőleges oldalfalakkal. Ha ebbe valamilyen szerves tápanyagot (pl. peptont) tartalmazó zselét teszünk (a zselében a tápanyag jól tud diffundálni), és a tálka közepén a zselé felületére egy baktériu-



mokat tartalmazó folyadékcseppet helyezünk, a baktériumok osztódásnak indulnak. Pár nap alatt a felületen kialakul a baktériumtelep, amelyik rendszert kör alakú, mert a tápanyag korlátlan mennyiségben hozzáférhető a telep felületén levő baktériumok számára.

A baktériumtelepek azonban gyakran igen kedvezőtlen környezeti feltételek között is képesek fejlődni. 1989-ben egy japán kutató megfigyelte, hogy a baktériumtelepben kialakulhatnak olyan bonyolult növekedési mintázatok, amelyeket korábban élettelen rendszerek nem egyensúlyi növekedési folyamataiban figyeltek meg. Az első kísérleti eredmények arra utaltak, hogy viszonylag *kevés tápanyag* jelenlétekor a tápanyagnak a zselében való diffúziója, valamint a baktériumok jellegzetes mozgása határozza meg a telepek ilyenkor igen bonyolult alakját.

Külföldi társszerzőinkkel való együttműködésünk során először a kísérleti úton növesztett baktériumtelepek geometriai tulajdonságait vizsgáltuk [4]. A különböző növekedési feltételek mellett végzett kísérletekben a paraméterek változtatása kiterjedt az alacsony tápanyagtartalomtól (0,1 g pepton/l) a táplálékban gazdag keverékig (10 g pepton/l) és a lágy szubsztrátumtól (1% agar-koncentráció) a keményig (4% agarkoncentráció). A telepek egy kb. 10 cm átmérőjű, csészealj formájú edény (Petri-csésze) alján elhelyezkedő, 3 mm vastag, tápanyagot (pepton) tartalmazó, zselészerű (agar-) réteg felületén növekedtek.

A növesztést 37 °C és 30% páratartalom mellett tartott Petri-csésze közepébe fecskendezett  $5\ \mu\text{l} \sim 10^5$  baktériumot tartalmazó cseppel kezdtük. A továbbiakban említett növekedési mintázatokat a *Bacillus subtilis* 168-as számú tenyészetéből származó bacillusok hozták létre. (Ez egy közönséges, az emberi táplálékban tipikusan előforduló baktériumfajta.)

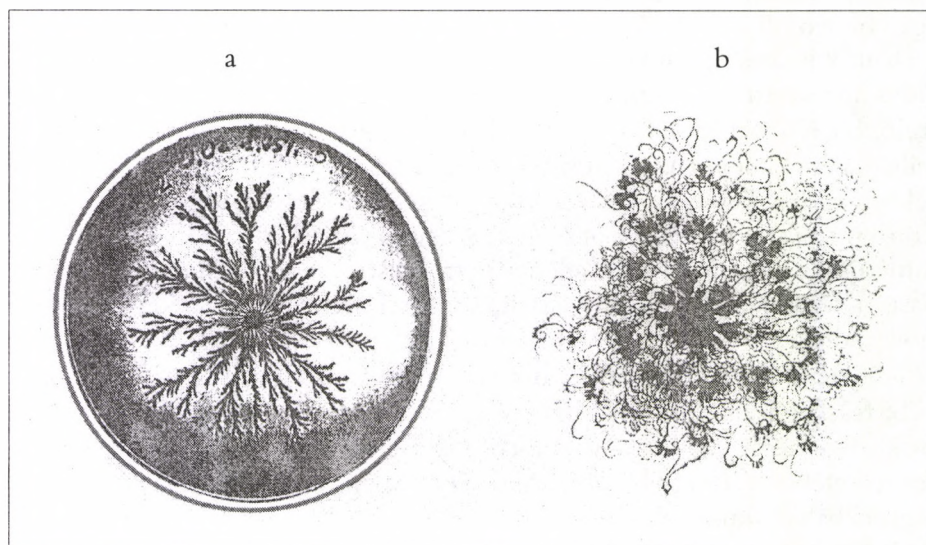
A tápanyagszegény feltételek között fejlődő baktériumtelepek egy része érdekes fraktál alakokat (például adott kiralitással rendelkező, „göndör” nyúlványokkal jellemezhető geometriával) mutatott [5].

### Modellek, értelmezés

A baktériumtelepek növesztése eredendően a komplexitás egy további fokozata az élettelen rendszerekhez képest, mivel az építő blokkok maguk is élő rendszerek, amelyek mindegyike saját autonóm (néha önző) önérdékkel és belső szabadsági fokkal bír. A növekedési modellbe a következő általános jellemzőket építettük be: (1) a táplálék diffúziója; (2) a baktériumok mozgása; (3) szaporodás és elpusztulás; (4) lokális kommunikáció az ún. kemotaxis útján. A tápanyag diffúzióját egy háromszögű rácson  $c$  tápanyag-koncentráció mellett a

diffúziós egyenlet segítségével írtuk le. A baktériumokat bolyongó részecskék reprezentálták [4].

Minden bolyongó részecskét leír a helye ( $\vec{r}_i$ ) és belső szabadsági foka (belső energiája,  $W_i$ ), amely aktivitására hatással van. A bolyongó részecske  $e$  sebességgel veszíti el belső energiáját. Belső energiája növelésére rögzített  $c$  sebességgel vesz fel tápanyagot, ha elegendő étel elérhető. Különben az elérhető mennyiséget veszi fel. Ha nincs elegendő táplálék egy idő-intervallumon belül (aminek következtében  $W_i$  nullára csökken), a bolyongó részecske mozdulatlaná válik (elpusztul). Ha elegendő az étel, akkor  $W_i$  nő, és amikor elér egy  $t_c$  küszöböt, a bolyongó részecske kettéválik (szaporodás).



4. ábra. a) Fraktál baktériumtelep. b) Ha a baktériumok nem tudnak mozgásuk közben szabadon elfordulni a mozgatószervük által kitüntetett meghatározott irányba, ilyen göndör, fraktál telepeket képeznek

A bolyongó részecskék rácson kívüli véletlen bolyongást végeznek egy jól definiálható kontúron belül. A kontúr minden egyes szegmense akkor mozdul el, ha  $N_c$ -szer beleütköztek a bolyongó részecskék. Ez a követelmény reprezentálja a lokális kommunikációt vagy a baktériumok együttes viselkedését.

Megjegyezzük, hogy az első közelítésben az  $N_c$ -szint az agar-koncentrációt jelenti, mivel a kontúr továbbmozdításához egy keményebb szubsztrátumon több ütközés szükséges.



### A modellegyenlet

$$\frac{\delta c(\vec{r}, t)}{\delta t} = D_c \nabla^2 c(\vec{r}, t) - \sum_{\text{aktív}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \min(c_r, c(\vec{r}, t)). \quad (3)$$

Ez a táplálékokra felírt diffúziós egyenlet ( $D_c$  a diffúziós állandó), amely a bolyongó részecskék táplálékfelvételét is tartalmazza (az utolsó tag).  $W_i$  időbeli változása

$$\frac{dW_i}{dt} = \min(c_r, c(\vec{r}_i, t)) - e. \quad (4)$$

Minden egyes időlépésben az aktív véletlen bolyongó részecskék  $d$  lépéshosszú  $[0, 2\pi]$  intervallumból egyenletesen választható  $\Theta$  szögű véletlen bolyongást végeznek. Így az új  $\vec{r}_i$  hely

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i + d(\cos \Theta, \sin \Theta). \quad (5)$$

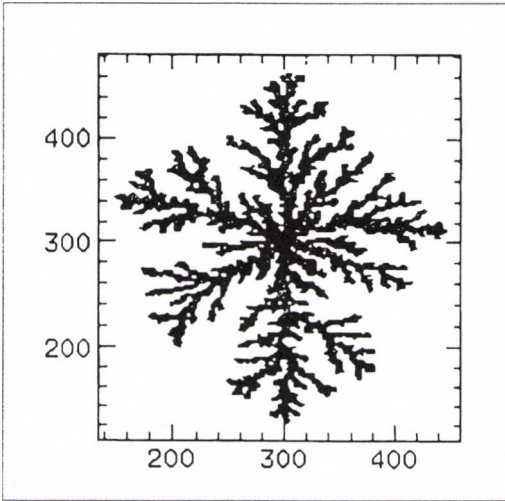
Ha az  $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i'$  metszi a kontúrt, akkor a lépést nem hajtjuk végre, és a kontúr megfelelő szegmensének számlálóját eggyel megnöveljük. Ha a számláló eléri az  $N_c$  értéket, a kontúrszegmens egy rácsegyiséggel áthelyeződik.

A jelenség komplexitása ellenére a fraktálstruktúra eredete jól értelmezhető: ha kevés a táplálék, hamar kifogy a telep határának közelében. Ekkor a telep kissé kidudorodó részei tápanyagban gazdagabb részbe érnek, és gyorsabban növekednek, mert itt a baktériumok gyorsabban szaporodnak. A dudor megnő, előrenyúló ággá válik, a hátramaradt részek az előlük elfogyasztott táplálék miatt nem nőnek tovább. Az előrenyúló ágon keletkezik egy újabb kis dudor, ez további elágazáshoz vezet, és az elágazások sokasága fraktálstruktúrát eredményez.

A numerikus szimulációk eredményeit a 5. ábra mutatja. A baktériumtelepek növekedéséhez hasonlóan a mintázatok tömörek magas tápanyag- (pepton-) szintnél, és fraktálok a csökkenő tápanyagszintre. Adott peptonszintre a mintázatok elágazóbbak, ahogy az agar-koncentráció (a zselé keménysége) nő.

Nyilvánvaló, hogy az 5. ábrán bemutatott eredmények nagyon biztatóak, és megragadják a megfigyelt mintázatok lényegét. Vannak azonban döntő minőségi különbségek is. Szükséges a kemotaxis figyelembevétele is.

Kemotaxison általában azt értik, hogy a mikroorganizmus mozgással reagál bizonyos vegyi anyagok koncentrációjának megváltozásakor. Szokás szerint a gradiens menti mozgás vagy a gradiens irányába vagy azzal ellenkező irányba



5. ábra. A baktériumtelepek növekedését számítógépes szimulációval is leírhatjuk. Az egyik numerikus kísérlet eredménye látható az ábrán

történik. Kemotaxikus választ létrehozhat egy külső kémiai mező vagy maguk a mikroorganizmusok, az utóbbit hívhatjuk kemotaxikus jelzésnek vagy kommunikációnak.

Bemutatjuk a kemotaxikus kommunikáció egyszerű modelljét. Minden lelassult (stacionárius) bolyongó részecske (vagy másképpen: azok a bolyongó részecskék, amelyek alacsony tápanyag-koncentrációnak vannak kitéve) rögzített  $s_r$  sebességgel kibocsát egy kommunikációs vegyi anyagot (hogy megkísérlje a többi baktériumot elűzni), és minden aktív bolyongó részecske  $c_c$  sebességgel

veszi fel ezt. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ez az egyszerű változtatás elegendő, hogy a növekedés minőségi lényegét megragadja. Egy realiztikusabb modellben ezek a sebességek a tápanyag és a kemotaxikus kommunikációs összetevők koncentrációjától függenének. A jelenlegi modellben a kommunikációs mező egyenlete:

$$\frac{\delta s(\vec{r}, t)}{\delta t} = D_s \nabla^2 s(\vec{r}, t) + \sum_{\text{stacioner}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) s_r - \sum_{\text{aktív}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \min(c_c, s(\vec{r}, t)). \quad (6)$$

Az aktív baktériumok mozgása változik a tisztán véletlen bolyongástól (egyenlő valószínűséggel minden irányban) a véletlen bolyongásig a kommunikációs mező gradiense mentén (magas valószínűségű a mozgás a jelző anyag irányában).

## Kollektív mozgás

Az élet egyik legjellemzőbb, legszembeszökőbb vonása a mozgás. Pontosabban az életet a mozgás speciális formái jellemzik, hiszen az élettelen anyag is örök mozgásban van. A biológiai mozgás sajátos jellegét az adja meg, hogy az



élő rendszerek *egyensúlytól távoli* állapotban vannak, és ebből eredően irányított folyamatok játszódnak le bennük. Egy magasabb szerveződési szintről tekintve, a biológiai mozgások sajátos funkciókkal rendelkeznek a faj fennmaradása szempontjából, vagy másképpen: olyan tulajdonságokat mutatnak, amelyek szelekciós előnyt jelentenek.

Gyakran a bonyolult geometria kialakulása éppen egy komplex kollektív mozgás eredménye.

Baktériumtelepekkel végzett kísérleteink azt mutatták, hogy a mikroorganizmusok mozgása adott feltételek mellett koordinálttá válik, és a baktériumok – a halakhoz vagy madarakhoz hasonlóan – csoportokban kezdenek mozogni. Ez leginkább akkor jelentkezett, amikor vonzó kemotaktikus kölcsönhatás jelenléte volt feltételezhető. Feladatunkul tűztük ki az ilyen csoportos, kollektív mozgás létrejöttének általános leírását a vonatkozó alapmodell megalkotása útján.

### *Kollektív viselkedés, szimmetriasértés, fázisátalakulás*

A sok egyforma objektumból („részecskékből”) álló rendszerek jellegzetes tulajdonsága, hogy valamilyen külső, fokozatosan változtatott paraméter  $t$  függvényében képesek viszonylag hirtelen megváltoztatni a tulajdonságaikat. Talán a legegyszerűbb, közismert példa a folyadékok megfagyása: a hőmérséklet fokozatos csökkentésekor a folyadék megfagy, szerkezete kristályossá válik, a molekulák kölcsönhatásának következtében egyszerre mintha mindegyik „tudná”, milyen szabályos struktúra szerint kell elhelyezkednie, egyik részecske sem bolyong tovább. Ez tipikus kollektív jelenség; a részecskék egyszerre, egymás hatására változtatják meg viselkedésüket.

Ha a hűtés lassú, és a hőmérsékleteloszlás a rendszerben homogén, egyensúlyi fázisátalakulásokat figyelhetünk meg. A természetben azonban tipikus, hogy az átalakulásokat kiváltó hatások erőssége gyorsan változik, és eloszlása sem egyenletes.

Akkor sincs egyensúlyban egy rendszer, ha bármilyen áramlás van jelen benne (pl. a hőmennyiség áramlása egyébként időben nem változó, két különböző hőmérsékletű pont között). Ilyenkor nem egyensúlyi átmeneteket lehet megfigyelni, amelyek a különbözőségek ellenére esetenként fontos közös vonásokat mutathatnak az egyensúlyi esettel. Mik ezek a lehetséges analógiák, amelyek a mélyebb megértést nagyban elősegíthetik? Mindkét típusú kollektív jelenség esetében fennáll, hogy egy külső paraméter változtatásakor annak egy adott  $t_c$  értékénél gyors változás történik a rendszer makroszkopikus viselkedését jellemző  $P$  mennyiségben. Ez a gyors változás lehet ugrásszerű vagy folyto-

nos, de az utóbbi esetben a változás hatványfüggvény formájában függ a paraméter aktuális és kritikus értékének különbségétől, tehát

$$P \sim |t - t_c|^\beta,$$

ahol  $\sim$  arányosságot jelöl.

Az átalakulások jellege gyakran nem függ a rendszerek részleteitől, így pl.  $\beta$  exponens értéke sok különböző fizikai rendszerre lehet egzaktul ugyanaz (univerzális), és ezért vált ezeknek az ún. kritikus exponenseknek a meghatározása a komplex rendszerek kutatásának egyik centrális feladatává.

### *Átmenet a rendezetlenből a rendezett mozgásba*

Ha azokat a jelenségeket kívánjuk megérteni, amelyek sok közel hasonló organizmus *kollektív mozgása* során figyelhetők meg, a statisztikus fizika területén felhalmozott tudásanyagot jól hasznosíthatjuk. Bizonyos feltételek mellett az organizmusok közötti, azok együttes mozgását domináló kölcsönhatás viszonylag egyszerű alakban is megfogalmazható; ezekben az esetekben az organizmusokat részecskéknak tekinthetjük, és a kölcsönhatást mint ütközési szabályt foghatjuk fel. A szimulációk során a megszokott algoritmusok használhatóak, azonban minőségileg új effektusokat várunk attól a figyelemre méltó különbségtől, hogy – nyílt rendszerek révén – az organizmusok kölcsönhatásakor *az impulzus és az energia nem marad meg*.

Ha a kollektív viselkedés kevésbé függ a részletektől, és valóban elsősorban a kölcsönhatás általános formája határozza meg, akkor azt várjuk, hogy nagyon *különböző organizmusok* is igen hasonló mozgásformákat mutathatnak. A fizikusok tipikusan az általános, univerzális összefüggések iránt érzékenyek, míg a gyakorlati (nem elméleti) biológiában az a szokásos, hogy a jelenségek specifikusságát hangsúlyozzák. Mi azt állítjuk, hogy modellünk egyaránt érvényes baktériumtelepekre, halrajokra, de még embercsoportok mozgására is.

Ezeknek a rendszereknek a legegyszerűbb modellje olyan részecskékből áll, amelyek egy síkon mozoghatnak, és *sebességük nagysága időben állandó*. Ez utóbbi feltétel azt veszi figyelembe, hogy a részecskék mindegyike „motorral” van ellátva, amely a disszipatív súrlódási erők ellenében dolgozik. Feltételezzük továbbá, hogy a részecskék igyekeznek *a helyi átlagsebességgel párhuzamosan* mozogni (az élőlények jellegzetes tulajdonsága, hogy mozgásukat koordinálják a közelükben lévő társaikkal, beleértve az embereket is), valamint a mozgásukat még egy véletlen fluktuáló erő is befolyásolja [6].

A modell viselkedését többek között Monte-Carlo-szimulációkkal térképezhetjük fel: A Monte-Carlo-módszer lényege, hogy egy sztochasztikus



egyenletrendszer vizsgálatokor numerikusan előállítjuk a kívánt statisztikának eleget tevő zajt, és – mintegy „mérést” végezve – meghatározzuk a keresett mennyiségeket.

Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a részecskék mozgásirányának relaxációja gyors a rendszer konfigurációjának megváltozásához képest, azaz a következő, hatékonyan számítógépre vihető kifejezéseket iterálhatjuk:

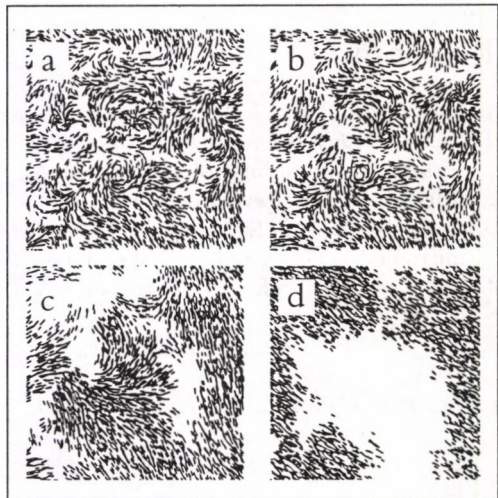
$$\vartheta_i(t + \Delta t) = \langle \vartheta(t) \rangle_i + \zeta_i \quad (7)$$

$$\vec{x}_i(t + \Delta t) = \vec{x}_i(t) + v_0 \left( \frac{\cos \vartheta_i}{\sin \vartheta_i} \right) \Delta t, \quad (8)$$

ahol  $\vartheta$  és  $\langle \vartheta(t) \rangle_i$ , az  $i$ -ik részecske mozgásirányát, helyzetét, valamint az egység-sugarú környezetének átlagos mozgásirányát jelöli. A  $\zeta_i$  egy Gauss-eloszlású fehér zaj  $\langle \zeta_i \zeta_{i'} \rangle = 2\eta^2 \delta_{i,i'} \Delta t$  autokorrelációs függvényvel, azaz a zaj erősségét  $\eta$  megválasztásával kontrollálhatjuk. Látható, hogy ezek az egyenletek  $\Delta t$ -től csak  $v_0 \Delta t$  formájában, illetve  $\eta$ -n keresztül függenek, így a továbbiak során feltételezhetjük, hogy  $\Delta t = 1$  és  $0 < v_0 \ll 1$ .

A modellben így összesen három kontrollparaméterünk maradt,  $\eta$ ,  $v_0$ , valamint a részecskék átlagsűrűsége  $\rho \equiv N/L^2$ , ahol  $N$  a részecskék száma,  $L$  pedig a rendszer lineáris mérete. Természetesen bennünket a – feltehetően univerzális – kollektív viselkedés érdekel, vagyis az  $N \rightarrow \infty$  „termodinamikai határesetet” vizsgáljuk, periodikus határfeltételekkel.

A 6. ábrán láthatjuk a modell tipikus viselkedését a kontrollparaméterek néhány értékére. Megfigyelhető, hogy nagy sűrűség és kis zaj mellett a rendszerben (önszervező módon, spontán szimmetriasértéssel) létrejön egy



6. ábra. Ez az ábra számítógépes szimuláció segítségével illusztrálja a mozgás összehangolódásának folyamatát. A kis szakaszok a pillanatnyi elmozdulás irányába mutatnak, és jól demonstrálják, hogy a kezdetben véletlenszerű, örvénylő mozgás hogyan alakul át kollektív koordinált helyváltoztatássá, valahogy úgy, ahogy egy madárcsapat rendeződik pillanatok alatt egy közös irányba repülő rajjává

a kölcsönhatási sugárnál lényegesen hosszabb távú rendeződés, amely az egész rendszeren átfolyó áramot hoz létre. Növelve a zajt vagy csökkentve a sűrűséget, ez a rendeződés eltűnik: kis sűrűségek esetén egymástól jórészt függetlenül mozgó „csapatokat” figyelhetünk meg, amelyek a zaj hatására sorra felbomlanak, illetve az „ütközések” során összeragadnak, nagyobb csapatokat létrehozva.

Két fontos eredményt kívánok itt kiemelni: 1.) a mozgás rendeződése fázisátalakulás-szerű, az összes részecskére számított átlagos sebesség a zaj csökkentésekor nulláról hatványfüggvény szerint ( $\beta \cong 0,4$ ) nő meg egy adott, véletlenszerűen szelektálódott irányba (szimmetriasértés). 2.) Ha kör alakú cellába kényszerítjük a részecskéket, elkezdenek körözni, ez a mozgás spontán alakul ki, hasonlóan ahhoz, ahogy egy kör alakú akváriumban néha együtt köröznek a halak, de megfigyeltük és értelmeztük ezt a viselkedést baktériumok esetében is. A Kába-kő körül Mekkában több tízezer ember mozog közel körpályán; ha az Olvasó belegondol, ez a jelenség szintén értelmezhető a modellünkkel.

## Irodalom

1. Mandelbrot, B. B.: *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, San Francisco, 1982.
2. Vicsek, T.: *Fractal Growth Phenomena*. World Scientific, New-Jersey – Singapore, 1992.;  
Vicsek, T., Matsushita, M., Shlesinger, M. (szerk.): *Fractals in Natural Sciences*. World Scientific, New-Jersey–Singapore, 1994.
3. Czirók, A., Somfai, E., Vicsek, T.: Experimental evidence for self-affine roughening in a micromodel of geomorphological evolution. *Phys. Rev. Lett.*, 71 (1993) 2154.
4. Ben-Jacob, E., Shochet, O., Tenenbaum, A., Cohen, I., Czirok, A., Vicsek, T.: *Nature*, 368 (1994) 46.
5. Ben-Jacob, E., Cohen, I., Shochet, O., Czirók, A., Vicsek, T.: *Phys. Rev. Lett.*, 75 (1995) 2899.
6. Vicsek, T., Czirók, A., Ben-Jacob, E., Cohen, I., Shochet, O.: *Phys. Rev. Lett.*, 75 (1995) 1226.