Sárközy András
az MTA levelező tagja

HIBRID PROBLÉMÁK A SZÁMELMÉLETBEN

Elhangzott 1998. november 4-én

A klasszikus számelmélet természetes számokból álló *speciális sorozatok* (prímszámok, négyzetszámok stb.) tulajdonságait vizsgálja. A 20. század elején Brun, majd Schnirelmann munkássága nyomán kezdődött az *általános sorozatok* (tipikusan sűrűségi feltételekkel karakterizált sorozatok) intenzív vizsgálata; e terület kiemelkedő egyénisége Erdős Pál volt. *Hibrid problémán* olyan problémát értek, melyben mind speciális, mind általános sorozat szerepel. E területen a munka lényegében a harmincas évek közepén kezdődött, és az utolsó húsz évben vált igazán intenzívvé. A „hibrid" jelzőt az a tény is indokolja, hogy e terület *technikailag is* átmenetet képez a másik két terület közt: a speciális sorozatok vizsgálata során az analitikus módszerek a legerőteljesebbek, az általános sorozatok vizsgálatát a kombinatorikus módszerek uralják, a hibrid problémák tárgyalása során pedig kombinatorikus és analitikus (főleg exponenciális összegekre épülő) módszerek egyaránt használatosak. A hibrid problémák vizsgálatát részben éppen ez a tény indokolja; e terület mintegy hidat képez a másik kettő közt, elősegíti az értékek, technikák, módszerek cseréjét, és ezzel gazdagítja mindkét területet.

A hibrid problémák durván *hat csoportba oszthatók:*

a) speciális sorozat és általános sorozat összege;

b) homogén additív problémák (tipikusan különbségsorozatok);

c) inhomogén additív problémák (tipikusan összegsorozatok);

d) részhalmaz összegek („subset sums");

e) multiplikatív problémák;

f) Ramsey típusú problémák.

Az alábbiakban e hat terület irodalmát szeretném áttekinteni, külön figyelmet fordítva természetesen az általam elért eredményekre.

Használni fogom az alábbi jelöléseket: A természetes, nemnegatív egész, illetve egész számok sorozatát (halmazát) N-nel, N_0-val, illetve Z-vel fogom jelölni. (E területen kissé pontatlanul, de nem értelemzavaró módon, általában nem szoktak különbséget tenni sorozatok és halmazok közt.) $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ... nemnegatív egész számokból álló sorozatokat jelölnek, és e sorozatok számosságfüggvényét $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, ...-szel fogom jelölni, tehát például

$$A(x) = |\{n : n \in \mathcal{A}, 0 < n \leq x\}|.$$

Az x valós szám egész részét $[x]$-szel, törtrészét $\{x\}$-szel, a legközelebbi egész számtól való távolságát pedig $||x||$-szel fogom jelölni, tehát $||x|| = \min(\{x\}, 1-\{x\})$. $d(n)$ az n szám pozitív osztóinak a számát, $P(n)$ n legnagyobb prímosztóját, $\omega(n)$ n különböző prímosztóinak a számát, $\Omega(n)$ pedig n prímosztóinak multiplicitással számolt számát jelöli.

Speciális sorozat és általános sorozat összege

Khintchin bizonyította a következő tételt:

1. TÉTEL (*Khintchin*, 1933): Ha $\mathcal{A} \subset N_0$, az $\mathcal{A}$ sorozat $\sigma(\mathrm{A}) = \inf\, n \in \mathrm{N} \dfrac{A(n)}{n}$ Schnirelmann-sűrűségére

$$0 < \sigma(\mathcal{A}) < 1 \tag{1}$$

teljesül, és a négyzetszámok sorozatát $\mathcal{N}$-nel jelöljük: $\mathcal{N} = \{0, 1, 4, ..., n^2, ...\}$, akkor

$$\sigma(\mathcal{A} + \mathcal{N}) > \sigma(\mathcal{A}) \tag{2}$$

(sőt,

$$\sigma(\mathcal{A} + \mathcal{N}) \geq \sigma(\mathcal{A}) + \frac{1}{2 \cdot 10^8}(1 - \sigma(\mathcal{A}))^2 \sigma(\mathcal{A})). \tag{2'}$$

Ha valamely nemnegatív egész számokból álló $\mathcal{N}$ sorozatra (2) minden (1) tulajdonságú sorozatra teljesül, akkor ezt az $\mathcal{N}$ sorozatot *lényeges komponensnek* nevezzük. Khintchin tétele szerint tehát a négyzetszámok sorozata lényeges komponens. Három évvel később Erdős általánosította ezt a tételt:

2. TÉTEL (*Erdős*, 1936): Ha $\mathcal{B}\subset\mathbb{N}$ h-adrendű bázis (azaz minden n természetes szám felírható $\mathcal{B}$ legfeljebb h elemének összegeként), akkor minden $\mathcal{A}\subset\mathbb{N}_0$ sorozatra

$$\sigma(\mathcal{A}+\mathcal{B})\geq\sigma(\mathcal{A})+\frac{1}{2h}(1-\sigma(\mathcal{A}))\sigma(\mathcal{A})$$

(tehát $\mathcal{B}$ lényeges komponens).

Az e területen elért korai eredmények közül még Lorentz és Plünnecke eredményei érdemelnek említést.

Minthogy én e területen soha nem dolgoztam (a felsorolt hat terület közül ez az egyetlen ilyen), ezért áttérek a következő témakörre.

Homogén additív problémák (különbségsorozatok)

Az additív hibrid problémák általános alakja az alábbi: vizsgálandó az

$$\alpha_1 a_{x_1}+\ldots+\alpha_k a_{x_k}=b_y,\ a_{x_1}\in\mathcal{A}_1,\ldots,a_{x_k}\in\mathcal{A}_k,\ b_y\in\mathcal{B}$$

egyenlet megoldhatósága, ahol $k\in\mathbb{N}$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ adott valós számok, $\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_k$ általános (tipikusan „sűrű") sorozatok, $\mathcal{B}$ adott speciális sorozat. Egy ilyen egyenletet akkor nevezünk *homogénnek*, ha $\mathcal{A}_1=\ldots=\mathcal{A}_k$ és $\alpha_1+\ldots+\alpha_k=0$; minden más esetben az egyenletet *inhomogénnek* mondjuk. A megkülönböztetést az a tény indokolja, hogy a két problématípus merőben különböző természetű; egy homogén egyenlet megoldhatatlansága általában sokkal erősebb megszorítást jelent a benne szereplő $\mathcal{A}$ sorozatra, mint egy formailag nagyon hasonló, de inhomogén egyenleté az $\mathcal{A}_i$ sorozatokra.

1977–78-ban Fürstenberg és én egymástól függetlenül bizonyítottuk az alábbi tételt:

3. TÉTEL. Ha az $A\subset\mathbb{N}$ végtelen sorozat $\bar{d}(A)\ (=\limsup n\to\infty\frac{A(n)}{n})$ *aszimptotikus felső sűrűsége* pozitív, akkor az

$$a-a'=x^2,\quad a,a'\in\mathcal{A},\quad x\in\mathbb{N} \tag{3}$$

egyenlet megoldható.

Pontosabban ez Fürstenberg megfogalmazása, én a tételt a következő, élesebb kvantitatív formában bizonyítottam (Lovász egy kérdésére válaszolva):

3'. TÉTEL: Ha $N>N_0$, $A\subset\{1,2,\dots,N\}$ és

$$A(N)>c\frac{N(\log\log N)^{2/3}}{(\log N)^{1/3}},$$

akkor a (3) egyenlet megoldható.

Fürstenberg bizonyításában ergodelméleti módszereket használt, míg én a Hardy–Littlewood-módszernek azt a változatát alkalmaztam és fejlesztettem tovább, melyet Roth a háromtagú számtani sorozatok vizsgálata céljából dolgozott ki. A háromtagú számtani sorozat problémája és a (3) egyenlet közt ugyanis az alábbi szoros kapcsolat van:

Nevezzünk egy $A\subset\mathbb{N}$ sorozatot „jónak"

a) a Roth-probléma esetében akkor, ha nem tartalmaz háromtagú számtani sorozatot, illetve

b) a (3) egyenlet esetén akkor, ha (3) megoldhatatlan.

A Roth-probléma esetén a Hardy–Littlewood módszer alkalmazhatóságának kierőszakolása az alábbi elemi tényre épül:

a) az $a_1q+c, a_2q+c,\dots, a_tq+c$ sorozat akkor és csak akkor „jó", ha az $a_1, a_2,\dots,a_t$ sorozat is az.

A (3) egyenlet esetében ez az alábbi gyengébb tulajdonsággal helyettesíthető:

b) az a_1q^2+c, $a_2q^2+c,\dots, a_tq^2+c$ sorozat akkor és csak akkor „jó", ha az $a_1, a_2,\dots$, a_t sorozat is az.

A (3) egyenletet követően vizsgáltam az

$$a-a'=p-1, \quad a,a'\in A, \quad p \text{ prím} \tag{4}$$

egyenlet megoldhatóságát is „sűrű" sorozatokban, és bizonyítottam:

4. TÉTEL (*Sárközy*, 1978): Ha $N>N_0$, $A\subset\{1,2,\dots,N\}$ és

$$A(N)>c\frac{N(\log\log\log)^3\log\log\log\log N}{(\log\log N)^2},$$

akkor a (4) egyenlet megoldható.

Nevezzük A-t ismét „jó"-nak, ha (4) megoldhatatlan. Most az alábbi gyenge tulajdonság teljesül:

c) az a_1+c, a_2+c, ... a_t+c sorozat akkor és csak akkor „jó", ha az a_1, a_2, ..., a_t sorozat is az.

Minthogy e gyenge tulajdonság már bármely homogén additív hibrid probléma esetén teljesül, ezért az itt alkalmazott módszerrel már bármely ilyen probléma tárgyalható.

A 3. és 4. tétel nyomán további mintegy 25-30 tudományos munka született, mely különbségsorozatokkal foglalkozik; ezek közül hármat szeretnék kiemelni. Vaughan 1981-ben írt könyvében analizálta Fürstenberg bizonyítását, és megállapította, hogy az ergodelmélet felhasználása nélkül is elmondható, és így kvantitatív becslés nyerhető, de nem jobb, mint a 3′. tételben. Pintz, Steiger és Szemerédi (1988) a 3′. tételben A(N)-re adott $\frac{N}{(\log N)^{1/3-\varepsilon}}$ alsó korlátot $\frac{N}{(\log N)^{c \log\log\log\log N}}$-re javították. Bergelson és Leibman a közelmúltban bizonyították, hogy ha az $A \subset \mathrm{N}$ végtelen sorozat aszimptotikus felső sűrűsége pozitív, akkor tetszőleges k-t megadva, található A-ban olyan k hosszúságú számtani sorozat, melynek differenciája négyzetszám.

1977-ben és 78-ban két, *Erdős*sel közös cikkben mind különbség-, mind összegsorozatokkal foglalkoztunk. Többek közt vizsgáltuk

$$\left(\frac{a \pm a'}{p}\right) = \pm 1$$

($(\frac{n}{p})$ a Legendre-szimbólum) megoldhatóságát a modulo p maradékosztályok halmazának nagy részhalmazaiban, és

$$a + a' = [n\alpha], \quad a, a' \in A, \quad n \in \mathrm{N}$$

megoldhatóságát „sűrű" A sorozatokban; ezek már részben összegsorozatokra vonatkozó, tehát inhomogén additív problémák.

Inhomogén additív problémák (összegsorozatok)

Erdős és Turán bizonyították az alábbi tételt:

5. TÉTEL (*Erdős* és *Turán*, 1934): Létezik olyan c pozitív állandó, hogy ha $A \subset \mathrm{N}$ véges sorozat, akkor

$$\omega\left(\prod_{a,\, a' \in A}(a + a')\right) > c \log |A|.$$

Továbbá sejtették, hogy ez a tétel általánosítható két különböző sorozatból vett elemek összegére. Ezt a sejtést jóval később Győry, Stewart és Tijdeman igazolták:

6. TÉTEL (*Győry, Stewart* és *Tijdeman,* 1986): Ha $|\mathcal{A}|\geq|\mathcal{B}|\geq 2$, akkor

$$\omega\left(\prod_{a\in\mathcal{A}}\prod_{b\in\mathcal{B}}(a+b)\right)>c\log|\mathcal{A}|.$$

Megjegyzendő, hogy míg Erdős és Turán szellemes elemi bizonyítást adtak tételükre, addig a 6. tétel bizonyítása Evertsenek egy S-egység egyenletek megoldásszámára vonatkozó mély eredményére épül. Erdős, Győry, Stewart és Tijdeman különböző irányokban továbbfejlesztették ezeket az eredményeket.

1963–64-ben – egymástól függetlenül – Erdős és Moser vetették fel a következő problémát: megadható-e tetszőlegesen nagy $\mathcal{A}\subset\mathbb{N}$ (véges) halmaz azzal a T tulajdonsággal, hogy $a, a'\in\mathcal{A}$, $a\neq a$ esetén $a+a'$ mindig négyzetszám? *Nicolas* (1977) és J. *Lagrange* (1981) találtak egy 6 elemű $\mathcal{A}$ halmazt ezzel a T tulajdonsággal. A közelmúltban Rivat-val és Stewarttal vizsgáltuk ezt a problémát, és – többek közt – igazoltuk:

7. TÉTEL (*Rivat, Sárközy* és *Stewart*, 1998): Ha $\mathcal{A}\subset\{1,2,\dots,N\}$ és $\mathcal{A}$ T tulajdonságú, akkor

$$|\mathcal{A}|<c\log N.$$

E tételnek az az érdekessége, hogy a bizonyítás szita-módszerre, nevezetesen Gallagher „nagyobb szitájára" épül, és ehhez mérten szokatlanul éles felső korlát adódik.

Az előző fejezet végén említettem két, *Erdős*sel közös cikkünket. Ezek egyikében vetettük fel a következő problémát: milyen lehet egy olyan $\mathcal{A}\subset\mathbb{N}$ végtelen sorozat felső sűrűsége, melyre

$$a+a'=x^2,\quad a,a'\in\mathcal{A}$$

megoldhatatlan? Megfogalmaztunk egy ezzel kapcsolatos sejtést, melyet Massias cáfolt, majd 1982-ben Lagarias, Odlyzko és Shearer megoldották a probléma moduláris analogonját, és 1983-ban további részeredményeket értek el.

1984-ben – Erdős Pál egy problémájából kiindulva – Baloggal közösen bizonyítottuk, hogy $N>N_0$ esetén

$$n_1+n_2+n_3=N,$$

$$P(n_1n_2n_3)<\exp(c(\log N\log\log N)^{1/2})\tag{5}$$

megoldható. (Megjegyzem, hogy ezt az eredményt később Sárközy Gábor, De la Breteche, illetve Harcos különböző irányokban élesítették, de az (5) felső korlátot – a c konstans értékétől eltekintve – máig sem javították.) Ez ugyan nem hibrid típusú tétel, de később a bizonyítást analizálva észrevettük, hogy hasonló módszerrel – a Hardy–Littlewood-módszer egy nemtriviális verziójával – az alábbi, jóval általánosabb tétel is bizonyítható:

8. TÉTEL (*Balog* és *Sárközy*, 1984): Ha $N>N_0$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}\subset\{1, 2,\dots, N\}$, és

$$|\mathcal{A}|,|\mathcal{B}|>\frac{N}{\exp(c_1(\log N\log\log N)^{1/2})},$$

akkor léteznek $a\in\mathcal{A}$, $b\in\mathcal{B}$ számok, melyekre

$$P(a+b)<\frac{N}{\exp(c_2(\log N\log\log N)^{1/2})}.$$

Ez volt az első olyan – meglehetősen meglepő és váratlan – eredmény, mely abba az irányba mutatott, hogy „sűrű" sorozatok összegsorozatának van egy meglehetősen feszes aritmetikai szerkezete. E tételből kiindulva, most már tudatosan kerestünk további ilyen jellegű eredményeket. Bizonyítottuk az alábbi két tételt (ezeket és a további tételek jelentős részét is itt kissé egyszerűsített formában ismertetem):

9. TÉTEL (*Balog* és *Sárközy*, 1984): Ha

$$\varepsilon>0,\ N>N_0(\varepsilon),\ \mathcal{A},\mathcal{B}\subset\{1,2,\dots,n\}\text{ és }|\mathcal{A}|,|\mathcal{B}|>\varepsilon N, \tag{6}$$

akkor léteznek olyan $a\in\mathcal{A}$, $b\in\mathcal{B}$ számok, hogy

$$P(a+b)>c(\varepsilon)\frac{N}{(\log N)^2}. \tag{7}$$

10. TÉTEL (*Balog* és *Sárközy*, 1984): (6)-ot feltéve, léteznek olyan $a\in\mathcal{A}$, $b\in\mathcal{B}$ számok és p prím, hogy

$$p^2\,|\,a+b \text{ és } p^2>c(\varepsilon)\frac{N}{(\log N)^7}.$$

Később Stewarttal élesítettük ezeket az eredményeket:

9'. TÉTEL (*Sárközy* és *Stewart*, 1986): A 9. tételben (7) helyett

$$P(a+b)>c(\varepsilon)N \tag{7'}$$

írható (tehát létezik $a\in\mathcal{A}$, $b\in\mathcal{B}$ és p prím, hogy $a+b=p\cdot O(1)$).

10′. TÉTEL (*Sárközy* és *Stewart*, 1988): Ha $k \in N$, akkor (6)-ot feltéve, léteznek olyan $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ számok és p prím, hogy

$$p^k \mid a+b \quad \text{és} \quad p^k > c(\varepsilon, k)N$$

(tehát $a+b=p^k O(1)$).

Később Ruzsa másik bizonyítást adott a 9′. tételre, és élesítette azt a „nem nagyon sűrű” sorozatok esetén.

Erdős, Maier és én bizonyítottuk, hogy „sűrű” sorozatok összegsorozata kielégít egy Erdős–Kac típusú tételt:

11. TÉTEL (*Erdős, Maier* és *Sárközy*, 1987): (6)-ot feltéve,

$$\frac{1}{|\mathcal{A}||\mathcal{B}|}\left|\left\{(a+b): a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}, \frac{\omega(a+b)-\log\log N}{(\log\log N)^{1/2}} < x\right\}\right| = \phi(x) + o(1),$$

ahol $\phi(x)$ a normális eloszlás eloszlásfüggvénye:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt.$$

Ezt a kételt később különböző irányokban élesítették Tenenbaum (1989), illetve Elliott és én (1988).

Erdős, Pomerance, Stewart és én vizsgáltuk $\omega(a+b)$ nagy értékeit:

12. TÉTEL (*Erdős, Pomerance, Sárközy* és *Stewart*, 1993): (6)-ot és $\varepsilon' > 0$-t feltéve, léteznek olyan $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ számok, hogy

$$\omega(a+b) > (1-\varepsilon')\frac{\log N}{\log\log N}.$$

Néhány további, a közelmúltban vizsgált összegsorozatokra vonatkozó probléma:

1. Erdőssel (1987) vizsgáltuk a következő kérdést: hány szám adható meg N-ig úgy, hogy bármely kettőnek az összege négyzetmentes szám legyen?
2. Stewarttal (1986) vizsgáltuk k tagú összegek „nagy” prímosztóit.
3. Pomerance, Stewart és én (1988) vizsgáltuk $a+b$ összegek „kis” prímosztóit.
4. Stewarttal (1994) becsültük a $\sum_{a, a' \in \mathcal{A}} d(a+a')$ összeget.
5. 1988-ban vizsgáltam a $\lambda(a+b) = \pm 1$, $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ egyenletek megoldhatóságát, ahol $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ a Liouville-függvényt jelöli.

6. Ostmann (1956), Hornfeck (1954, 1955), Pomerance, Sárközy és Stewart (1988) vizsgáltak olyan $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sorozatokat, hogy $a+b$ minden $a\in\mathcal{A}$, $b\in\mathcal{B}$-re prímszám.

7. Erdős és Shapiro (1957), majd Friedlander és Iwaniec (1993) becsülték a $\Sigma_{a\in\mathcal{A}}\Sigma_{b\in\mathcal{B}}\chi(a+b)$ ($\chi\neq\chi_0$ multiplikatív karakter) összeget.

8. Rivat, Stewart és én (1998) vizsgáltuk $\omega(a+b)$ maradékosztályokban való eloszlását (ez a *Részhalmaz összegek* fejezetben leírt probléma általánosítása).

9. Rivat és én (1997) vizsgáltuk $a+b=[n^c]$, $a\in\mathcal{A}$, $b\in\mathcal{B}$, $n\in\mathbb{N}$ megoldhatóságát.

E tételek közös mondanivalója durván úgy fogalmazható meg, hogy „sűrű" sorozatok összegsorozatai közel ugyanolyan feszes aritmetikai szerkezettel rendelkeznek, mint az egymást követő egész számok. Vizsgálva azt, hogy az összegsorozatok rendelkeznek-e az egymást követő egészek valamely aritmetikai tulajdonságával, vagy egyszerű kongruencia-ellenpélda adható, vagy pedig ha ilyen példa nincs, akkor az összegsorozatok rendelkeznek a kérdéses tulajdonsággal.

Az említett cikkek közt van több olyan, melyben az alkalmazott *technika* a Hardy–Littlewood-módszer valamely verziója. Egy-két cikk kombinatorikai módszereket használ, így például a 12. tétel bizonyításában kulcsszerepet játszik Katonának egy véges halmazok részhalmazainak metszetére vonatkozó tétele. A legtöbb bizonyítás azonban a „nagy szita" valamely verziójára épül, és e kérdéskör irodalma jelentősen hozzájárult a „nagy szita" különböző irányokba való kiterjesztéseihez (ilyenek például az összetett, illetve „nagy" modulusokra való kiterjesztések).

A 9'. és 10'. tételek szorosan összefüggnek a $||p\alpha||$, illetve $||p^k\alpha||$ számok eloszlásával.

Részhalmaz összegek

$\mathcal{A}\subset\mathbb{N}$ esetén jelöljük $\mathcal{P}(\mathcal{A})$-val az $\mathcal{A}$-ból képezhető részhalmaz összegek halmazát, azaz az $\Sigma_{a\in\mathcal{A}}\varepsilon_a a$ alakban írható számok halmazát, ahol $\varepsilon_a=0$ vagy 1, és $0<\Sigma_{a\in\mathcal{A}}\varepsilon_a<\infty$.

1986-ban Erdős vetette fel a következő problémát: adott $N\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$ esetén maximálisan hány szám adható meg N-ig úgy, hogy a belőlük képezett részhalmazösszegek közt nincs teljes k-adik hatvány? Jelöljük az ilyen tulajdonságú számok maximális számát $F(N,k)$-val. $F(N,k)$ aszimptotikus viselkedését $k\geq 10$ és $N\to\infty$ esetén Lipkin (1989), $6\leq k\leq 9$ esetén Alon és Freiman

(1988) írta le. 1994-ben meghatároztam $F(N, k)$ aszimptotikáját $k=4$ és 5 esetén is, és $k=2$ és 3 esetén javítottam a korábbi becsléseken.

Erdős és Freud sejtették 1986-ban, hogy

1. Ha $\mathcal{A} \subset \{1, 2,\dots, 3N\}$ és $|\mathcal{A}|>N$, akkor $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ tartalmaz 2^k alakú számot.

2. Ha $\mathcal{A} \subset \{1, 2,\dots, 4N\}$ és $|\mathcal{A}|>N$, akkor $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ tartalmaz négyzetmentes számot.

E két sejtést Erdős és Freiman igazolták 1990-ben. Nekik azonban „sok" különböző a-ra volt szükségük egy-egy 2 hatvány, illetve négyzetmentes szám előállításához. Ezért előbb Erdős, Nathanson és én (1988) végtelen sorozatok esetén, majd Nathanson és én (1989) véges sorozatokra kidolgoztunk egy olyan módszert, mellyel minden hasonló típusú részhalmazösszeg-problémánál igazolható, hogy korlátos sok tag elég, sőt jó explicit korlát adható.

A fenti két Erdős–Freud probléma esetén Lev (1996), illetve Filaseta (1987) meghatározták a minimálisan szükséges tagszámot.

Erdős, Stewart és én (1994) vizsgáltuk olyan részhalmaz összegek létezését, melyeknek van nagy prímosztójuk (a 9'. tétel részhalmaz összeg analogonja).

E fejezetben említett cikkeimben meghatározó szerepet játszik az alábbi tétel:

13. TÉTEL (*Sárközy*, 1994): Ha $N>2500$, $\mathcal{A} \subset \{1, 2,\dots, N\}$ és

$$|\mathcal{A}|>200(N\log N)^{1/2}, \tag{8}$$

akkor léteznek $d, y, z \in \mathbf{Z}$ számok, melyekre

$$1\le d<10^4 N|\mathcal{A}|^{-1},$$
$$z>7^{-1}\, 10^{-4}|\mathcal{A}|^2,$$
$$y<7\cdot 10^4 Nz|\mathcal{A}|^{-2}$$

és

$$\{yd,(y+1)d,\dots, zd\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{A}).$$

Korábban Alon és Freiman (1988) bizonyítottak egy hasonló, de lényegesen gyengébb tételt, $N^{2/3+\varepsilon}$-nal (8) jobb oldalán. Ugyanakkor a 13. tétel már a lehető legjobb, konstans szorzóktól és esetleg (8)-ban egy $(\log N)^{1/2}$ szorzótól eltekintve. A bizonyítás nehéz és hosszú, és fontos szerepet játszik benne Kneser tétele. Valamivel később tőlem függetlenül Freiman is bizonyította lényegében ugyanezt a tételt, érdekes módon ugyanazzal a – valószínűen szükségtelen – $(\log N)^{1/2}$ faktorral (8) jobb oldalán.

A 13. tétel felhasználásával szinte minden részhalmazösszeg-probléma tárgyalható, és a tételnek sok alkalmazása van más területeken is (például a partíciók elméletében).

Hegyvári és én (1998) vizsgáltunk $A \subset N$ sorozatokat azzal a tulajdonsággal, hogy $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ minden eleme négyzetszám.

Multiplikatív problémák

Diophantosz megadott 4 racionális számot azzal a T tulajdonsággal, hogy közülük bármely két különbözőnek a szorzatához 1-et adva, négyzetszámot kapunk. Azonnal felvetődik a kérdés, hogy megadható-e tetszőlegesen nagy $\mathcal{A}$ sorozat ezzel a T tulajdonsággal. Minden bizonnyal ez a legrégibb hibrid probléma. E témakörrel Fermat, Euler és E. Straus is foglalkoztak, és a közelmúltban Dujella és Gyarmati K. vizsgálták ezt a kérdést.

Iwaniec és én bizonyítottuk az alábbi tételt:

14. TÉTEL (*Iwaniec* és *Sárközy*, 1987): Ha $\varepsilon>0$, $N>N_0(\varepsilon)$, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \{1, 2, \dots, N\}$ és $|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}|>\varepsilon N$, akkor léteznek olyan $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ és $x \in N$ számok, hogy $|ab-x^2|<c(\varepsilon)(N \log N)^{1/2}$.

A bizonyítás az ún. „kettős nagy szitára" épül.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ esetén jelöljük $Q(\mathcal{A})$-val azon $q \subset N$, $q>1$ számok halmazát, melyek $q=\frac{a}{a'}$ (ahol $a, a' \in \mathcal{A}$) alakban írhatók; ezt a $Q(\mathcal{A})$-t az $\mathcal{A}$ halmaz hányadoshalmazának („quotient set") nevezzük. Behrend, illetve Erdős egy-egy klasszikus tétele szerint „sűrű" sorozatok hányadoshalmaza nem üres. Pomerance és én (1988) vizsgáltuk hányadoshalmazok aritmetikai szerkezetét.

Ugyancsak Pomerance és én (1987) vizsgáltuk azt, hogy „sűrű" $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sorozatok esetén milyen kicsivé tehető $|ab-p|$ ($a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, p prím), illetve a $P(n)<n^{\varepsilon}$ feltétel mellett $|ab-n|$ ($a \in \mathcal{A}$, $b \in B$).

1989-ben vizsgáltam a^2+b^2 (ahol $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ „sűrű" sorozatok) alakú számok nagy prímosztóit.

1992-ben bizonyítottam a 12. tétel multiplikatív analogonját:

15. TÉTEL (*Sárközy*, 1992): Ha $\varepsilon, \varepsilon'>0$, $N>N_0(\varepsilon, \varepsilon')$, $\mathcal{A} \subset \{1, 2, \dots, N\}$ és $|\mathcal{A}|>\varepsilon N$, akkor léteznek olyan $a, a' \in \mathcal{A}$ számok, hogy

$$\omega(aa'+1)>(1-\varepsilon')\frac{\log N}{\log\log N}.$$

Győryvel és Stewarttal bizonyítottuk a 6. tétel alábbi multiplikatív analogonját:

16. TÉTEL (*Győry, Sárközy* és *Stewart*, 1996): Ha $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \subset \mathbf{N}$ és $|\mathcal{A}| \geq |\mathcal{B}| \geq 2$, akkor

$$\omega\left(\prod_{a \in \mathcal{A}} \prod_{b \in \mathcal{B}} (ab+1)\right) > c \log |\mathcal{A}|.$$

E tétel kapcsán sejtettük a következőt: ha $a<b<c$ és $c \to \infty$, akkor $P((ab+1)(ac+1)(bc+1)) \to \infty$. E sejtéssel kapcsolatban Győry és én (1997), továbbá Stewart és Tijdeman (1997), valamint Bugeaud (1998) értek el részeredményeket.

Néhány további, a közelmúltban vizsgált multiplikatív hibrid probléma:

1. 1995-ben vizsgáltam $\Sigma_{a \in \mathcal{A}} \Sigma_{b \in \mathcal{B}}\, d(ab+1)$-et.

2. Erdőssel és T. Sós Verával (1995) – kombinatorikai eszközökkel – vizsgáltuk adott $k \in \mathbf{N}$ és „sűrű" $\mathcal{A} \in \mathbf{N}$ esetén $a_1 \dots a_k = x^2$, $a_1 < \dots < a_k$, $a_1, \dots a_k \in \mathcal{A}$, $x \in \mathbf{N}$ megoldhatóságát.

3. Rivat-val (1997) vizsgáltuk $ab = [n^c]$, $a \in \mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $n \in \mathbf{N}$ megoldhatóságát. (Ez a Piatetski–Shapiro-probléma sorozatokra vonatkozó analogonja.)

4. Elliottal (1997) igazoltuk a 11. tétel multiplikatív analogonját, azaz, hogyha $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ „sűrű" sorozatok, akkor az $\omega(ab+1)$ számok (ahol $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$) kielégítenek egy Erdős–Kac típusú tételt.

E témakörben nincsenek domináns módszerek. Kivétel talán a „nagy szita", melynek viszonylag sok alkalmazása van, mégpedig – a tárgyalt problémák multiplikatív jellegének megfelelően – annak Gallaghertől származó karakterverziója alkalmazható gyakran.

Ramsey típusú problémák

Roth sejtette, hogy létezik olyan c pozitív állandó, hogy bármely $k \in \mathbf{N}$-re $\mathbf{N}$-et k-színezve, $N > N_0$ esetén N-ig legaláb cN olyan n szám van, melynek létezik $a + a' = n$ alakú monochromatikus előállítása. Ezt Erdőssel és T. Sós Verával bizonyítottuk az alábbi élesebb formában:

17. TÉTEL (*Erdős, Sárközy* és *T. Sós*, 1989): Bármely $k \in \mathbf{N}$ és $\mathbf{N}$ bármely k-színezése esetén N-ig legalább $(\frac{1}{2} - o(1))N$ olyan páros n szám létezik, melynek van monochromatikus előállítása $a + a' = n$ alakban.

Ezt az eredményt kiterjesztettük különböző irányokban.

Erdős és én (1990) vizsgáltuk e probléma multiplikatív analogonját, azaz vizsgáltuk, hogy **N**-et k-színezve, legalább hány olyan n szám van N-ig, melynek van $aa'=n$ alakú monochromatikus előállítása.

Erdős és Alon (1996) becsülték a legkisebb olyan $k=k(n)$ számot, hogy az $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ halmaznak van olyan k-színezése, hogy az n szám nem írható fel monochromatikus részhalmaz összegként.

E témakörben természetesen a kombinatorikus számelmélet módszerei dominálnak.

Irodalom

1. Alon, N. and Erdős, P.: Sure monochromatic subset sums. *Acta Arith.*, 74 (1996) 269–272.
2. Alon, N. and Freiman, G.: On sums of subsets of a set of integers. *Combinatorica*, 8 (1988) 297–306.
3. Balog, A. and Sárközy, A.: On sums of sequences of integers, I, II. and III. *Acta Arith.*,44 (1984) 73–86; *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 44 (1984) 169–179 and *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 44 (1984) 339–349.
4. Bergelson, V. and Leibman, A.: Polynomial extensions of van der Waerden's and Szemerédi's theorems. *J. AMS*, sajtó alatt.
5. Bugeaud, Y.: On the greatest prime factor of (ab+1)(bc+1)(ca+1). *Acta Arith.*, 86 (1998) 45–49.
6. De la Breteche, R.: Sommes sans grand facteur premier. *Acta Arith.*, sajtó alatt.
7. Elliott, P. D. T. A. and Sárközy, A. The distribution of the number of prime divisors of sums a+b. *J. Number Theory*, 29 (1988) 94–99.
8. Elliot, P. D. T. A. and Sárközy, A.: The distribution of the number of prime divisors of numbers of form ab+1. In: *Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory*. Eds. A. Laurinčikas et al. VSP BV, Utrecht, 1997. 313–321.
9. Erdős, P.: On the arithmetical density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers. *Acta Arith.*, 1 (1936) 197–200.
10. Erdős, P. and Freiman, G.: On two additive problems. *J. Number Theory*, 34 (1990) 1–12.
11. Erdős, P., Maier, H. and Sárközy, A.: On the distribution of the number of prime factors of sums a+b. *Transactions Amer. Math. Soc.*, 302 (1987) 269–280.
12. Erdős, P., Nathanson, M. B. and Sárközy, A.: Sumsets containing infinite arithmetic progressions. *J. Number Theory*, 28 (1988) 159–166.
13. Erdős, P., Pomerance, C., Sárközy, A. and Stewart, C. L.: On elements of sumsets with many prime factors. *J. Number Theory*, 44 (1993) 93–104.
14. Erdős, P. and Sárközy, A.: On differences and sums of integers, I and II. *J. Number Theory*, 10 (1978) 430–450. and *Bull. Soc. Math. Gréce*, 18 (1977) 204–223.
15. Erdős, P. and Sárközy, A.: On divisibility properties of integers of the form a+a'. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 50 (1987) 117–122.
16. Erdős, P. and Sárközy, A.: On a conjecture of Roth and some related problems, II. In: *NumberTheory, Proceedings of the First Conference of the Canadian Number Theory Association*. Ed. R. A. Mollin, Walter de Gruyter. Berlin–New York, 1990. 125–138.

17. Erdős, P., Sárközy, A. and Stewart, C. L.: On prime factors of subset sums. *J. London Math. Soc.*, 49 (1994) 209–218.
18. Erdős, P., Sárközy, A. and T. Sós, V.: On a conjecture of Roth and some related problems, I. In: *Irregularities of Partitions, Algorithms and Combinatorics* 8. Eds. G. Halász and V. T. Sós. Springer Verlag, 1989. 47–59.
19. Erdős, P., Sárközy, A. and T. Sós, V.: On product representations of powers, I. *Europ. J. Combinatorics*, 16 (1995) 567–568.
20. Erdős, P. and Shapiro, N. H.: On the least primitive root of a prime. *Pacific J. Math.*, 7 (1957) 861–865.
21. Erdős, P. and Turán, P.: On a problem in the elementary theory of numbers. *Amer. Math. Monthly*, 41 (1934) 608–611.
22. Filaseta, M.: Sets with elements summing to squarefree numbers. *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, 11 (1987) 243–246.
23. Friedlander, J. and Iwaniec, H.: Estimates for character sums. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 119 (1993) 365–372.
24. Fürstenberg, H.: Ergodic behaviour of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions. *J. Analyse Math.*, 31 (1977) 204–256.
25. Győri, K. and Sárközy, A.: On prime factors of integers of the form (ab+1)(bc+1)(ca+1). *Acta Arith.*, 79 (1997) 163–171.
26. Győry, K., Sárközy, A. and Stewart, C. L.: On the number of prime factors of integers of form ab+1. *Acta Arith.*, 74 (1996) 365–385.
27. Győry, K., Stewart, C. L. and Tijdeman, R.: On prime factors of sums of integers, I. *Compositio Math.*, 59 (1986) 81–88.
28. Harcos, G.: Waring's problem with small prime factors. *Acta Arith.*, 80 (1997) 165–185.
29. Hegyvári, N. and Sárközy, A.: On Hilbert cubes in certain sets. *Ramanujan J.*, sajtó alatt.
30. Hornfeck, B.: Ein Satz über die Primzahlmenge. *Math. Z.*, 60 (1954) 271–273.
31. Hornfeck, B.: Berichtigung zur Arbeit: Ein Satz über die Primzahlmenge. *Math. Z.*, 62 (1955) 442–443.
32. Iwaniec, H. and Sárközy, A.: On a multiplicative hybrid problem. *J. Number Theory*, 26 (1987) 89–95.
33. Khitchin, A.: Über ein metrisches Problem der additiven Zahlentheorie. *Math. Sb. N. S.*, 40 (1933) 180–189.
34. Logarias, J. C., Odlyzko, A. M. and Shearer, J. B.: On the density of sequences of integers the sum of no two of wich is a square, I and II. *J. Comb. Theory*, 33 (1982) 167–185. and 34 (1983) 123–139.
35. Lagrange, J.: Six entiers dont les sommes deux à deux sont des carrès. *Acta Arith.*, 40 (1981) 91–96.
36. Lev, V. F.: Representing powers of 2 by a sum of four integers. *Combinatorica*, 16 (1996) 413–416.
37. Lipkin, E.: On representaton of r-powers by subset sums. *Acta Arit.*, 52 (1989) 353–366.
38. Nathanson, M. B. and Sárközy, A.: Sumsets containing long arithmetic progressions and powers of 2. *Acta Arith.*, 54 (1989) 147–154.
39. Nicolas, J. L.: Six nombres dont les sommes deux à deux sont des carrès. *Calculateur en Math.*, (1975, Limoges), *Bull. Soc. Math. France*, mém. 49–50 (1977) 141–143.
40. Ostmann, H.: *Additive Zahlentheorie*. Springer-Verlag, 1956.
41. Pintz, J., Steiger, W. L. and Szemerédi, E.: On sets of natural numbers whose difference set contains no squares. *J. London Math. Soc.*, 37 (1988) 217–231.

42. Pomerance, C. and Sárközy, A.: On products of sequences of integers. *Coll. Math. Soc. J. Bolyai*, 51 (1987) 447–463.
43. Pomerance, C. and Sárközy, A.: On homogeneous multiplicative hybrid problems in number theory. *Acta Arith.*, 49 (1988) 291–302.
44. Pomerance, C., Sárközy, A. and Stewart, C. L.: On divisors of sums of integers, III. *Pacific J. Math.*, 133 (1988) 363–379.
45. Rivat, J. and Sárközy, A.: A sequences analog of the Piatetski–Shapiro problem. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 74 (1997) 245–260.
46. Rivat, J., Sárközy, A. and Stewart, C. L.: Congruence properties of the Ω-function on sum sets. *Illinois J. Math.*, sajtó alatt.
47. Roth, K. F.: On certain sets of integers, I and II. *J. London Math. Soc.*, 28 (1953) 104–109. and 29 (1954) 20–26.
48. Ruzsa, J. Z.: Large prime factors of sums. *Studia Sci. Math. Hung.*, 27 (1992) 463–470.
49. Sárközy, A.: On difference sets of sequences of integers, I, II and III. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 31 (1978) 125–149., *Annales Univ. Sci. Eötvös*, 21 (178) 45–53. and *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 31 (1978) 355–386.
50. Sárközy, A.: On the number of prime factors of integers of the form a_i+b_j. *Studia Sci. Math. Hung.*, 23 (1988) 161–168.
51. Sárközy, A.: Hybrid problems in number theory. In: *Number Theory, New York 1985–88, Lecture Notes in Mathematics* 1383. Springer-Verlag, 1989. 146–169.
52. Sárközy, A.: On sums a+b and numbers ab+1 with many prime factors. *Grazer Math. Berichte*, 318 (1992) 141–154.
53. Sárközy, A.: Finite addition theorems, II. *J. Number Theory*, 48 (1994) 197–218.
54. Sárközy, A.: On the average value for the number of divisors of numbers of form ab+1. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 66 (1995) 223–245.
55. Sárközy, A. and Stewart, C. L.: On divisors of sums of integers, I, II and IV. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 48 (1986) 147–154.; *J. Reine Angew. Math.*, 365 (1986) 171–191. and *Canadian J. Math.*, 40 (1988) 788–816.
56. Sárközy, A. and Stewart, C. L.: On the average value for the number of divisors of sums a+b. *Illinois J. Math.*, 38 (1994) 1–18.
57. Sárközy, G. N.: On sums with small prime factors. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 67 (1995) 333–345.
58. Stewart, C. L. and Tijdeman, R.: On the greatest prime factor of (ab+1)(ac+1)(bc+1). *Acta Arith.*, 79 (1997) 93–101.
59. Tenenbaum, G.: Facteurs premiers de sommes d'entiers. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 106 (1989) 287–296.
60. Vaughan, R. C.: *The Hardy–Littlewood Method.* Cambridge Univ. Press, 1981.