Makkai Mihály
az MTA külső tagja

A KATEGÓRIAELMÉLET SZEREPE A MATEMATIKA MEGALAPOZÁSÁBAN

Elhangzott 1997. november 19-én

1. Az új, strukturalista megalapozás programja[1]

Néhány évvel ezelőtt figyelmem a matematikának egy az általánosan elfogadott halmazelméleti rendszertől lényegileg különböző, a kategóriaelméletre épülő, önálló megalapozása felé fordult. Ez a megalapozás, amelyet a matematika *strukturalista megalapozásának* nevezek, egészében jelenleg csak programként létezik; egyes részei azonban már megvalósultnak tekinthetők. A továbbiakban ezt a programot fogom, igen általános vonásaiban, felvázolni. Hangsúlyoznom kell, hogy nem célom teljes történeti áttekintést adni a kategóriaelméletnek a matematika alapjaira gyakorolt hatásáról, mondandóm egy elhatárolt program aspektusaira korlátozódik.

1 A szerző itt mond köszönetet a Magyar Tudományos Akadémia, az MTA Matematikai Kutató Intézete, és különösképpen a Németi István által vezetett Matematikai Logikai Csoport vendégszeretetéért. A szerző köszönetét fejezi ki a kanadai NSERC és a quebeci FCAR testületeknek az általuk a szerző kutatásaira fordított anyagi támogatásért.

2. A görögök hatása

Közismert, hogy az antik görögök mind a matematikában, mind pedig a filozófiában szellemtörténetileg meghatározót alkottak. A mai tudomány művelőjének, aki azt szokta meg, hogy a figyelemre méltó közlések a legutóbbi öt évben megjelent irodalomban keresendők, az antik művelődés általános jelentőségének tudatában is meglepő lehet annak felismerése, milyen erős és közvetlen hatású volt a régi görögök matematikája és filozófiája a matematika alapjairól való mai gondolkozásunkra. Még érdekesebb az a tény, hogy a görögség e két hagyatéka nem valamiféle ötvözetben, hanem egymástól elkülönülten hatott a matematika alapjaira. A görög matematikában alkalmazott *axiomatikus módszer* körülbelül száz évvel ezelőtt vált ismét a matematika alapjaira vonatkozó elképzeléseink lényeges elemévé.[2] A közbülső évezredek során a matematika fejlődésében az axiomatikus módszer nem játszott igazán fontos szerepet. A görög filozófia, elsősorban a *platóni ideák* tana, az elmúlt és a jelen században nagy hatással volt és továbbra is hatással van a matematika tárgyainak mibenlétére vonatkozó meggondolásainkra. Ez a hatás elsősorban Gottlob Frege matematikai logikáján és Georg Cantor halmazelméletén keresztül érvényesül.[3] A jelenleg az alapokban uralkodó szemléletet, a *matematikai realizmust* gyakran szokás egyszerűen *platonizmusnak* nevezni.[4] A matematika alapjául szolgáló, manapság majdnem általánosan elfogadott rendszer egy *platonista axiomatikus halmazelmélet*.

3. Az elsőrendű logika és a halmazelmélet

Az axiomatikus módszer modern kori újraéledése a matematika sajátos, képleteken alapuló nyelvének egy fontos kibővítésével, a *matematikai logika formális nyelvének* megalkotásával járt együtt. Ezt nagyrészt az analízis logikailag biztos alapokra való helyezésének igénye idézte elő. Elsősorban Karl Weierstrass tevékenységének eredményeképp létrejött a modern analízis logikailag komplex nyelvezete.[5] Például a határérték fogalmának ma már általánosan használt „epszilon-delta" formája, amely Weierstrass berlini diákjaiban oly élénk ellen-

2 A matematikai logika kifejlődését megelőző axiomatikus szemlélet klasszikus megfogalmazása David Hilbertnek a geometria alapjairól szóló, 1899-ben megjelent munkája [Hilbert 1899].

3 Ruzsa Imre és Máté András: *Bevezetés a modern logikába* című, újonnan megjelent könyve [Ruzsa/Maté 1997] igen alapos és élvezetes bevezetést nyújt egyebek között az említett cantori és fregei elméletekbe.

4 Lásd [Maddy 1990].

5 Az olvasó jó fogalmat alkothat Weierstrass hatásáról Hilbert híres, 1926-ban megjelent dolgozatából [Hilbert 1926], amely Weierstrass szerepének méltatásával kezdődik.

állást keltett, és még ma is a „gyakorlatban-fontos" differenciál/integrál kalkulus és a „csak-az-elméletben-érdekes" matematikai analízis választóvonala az egyetemi oktatásban, így fest:

$$\lim_{x \to a} f(x)=b \tag{1}$$

$$\overset{\text{def}}{\longleftrightarrow}$$

$$\forall \varepsilon\, (\varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta\, (\delta < 0 \wedge \forall x\, (0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon) \tag{2}$$

Az itt szereplő úgynevezett *kvantorok*: $\forall\varepsilon$: „minden ε-ra" és $\exists\delta$: „van olyan δ, amelyre", a modern logika felfedezése: a kvantoroknak primitív (tovább nem elemezhető) és alapvető logikai egységekként való felismerése elsősorban Gottlob Frege érdeme.[6] A fentebbiekből az (1) sor, a *definiendum* közönséges matematikai jelölésnek számít, és a mérnöki matematikát tanulók sem tiltakoznak ellene; jelentése az, hogy az *f* függvénynek az *a* helyen létezik határértéke, és az *b*-vel egyenlő. A *definiens* (2) logikai szimbolizmusa kevésbé jól ismert; ezt a mérnöki matematikát tanulók ha egyáltalán, akkor szavakban olvassák a következőképpen:

„Minden pozitív ε-hoz van olyan pozitív δ, hogy minden x-re, amely abszolút értékben δ-nál kevesebbel tér el a-tól, de nem egyenlő a-val, f(x) ε-nál kevesebbel tér el b-től."

A fenti szimbolikus kifejezésben megismerkedtünk az *elsőrendű logika* alapelemeivel; a kvantorokon kívül itt még a *konjunkció* ($\wedge$) és *implikáció* ($\rightarrow$) logikai műveleteit látjuk alkalmazva.

Az axiomatikus halmazelmélet mai formájában az elsőrendű logikában megfogalmazott *formális axiómarendszer*. Ebben, radikális módon, minden létezőként elismert individuum halmaz. Az „első" vagy „legkisebb" halmaz az üres halmaz, $\varnothing$, amelynek nincs egyetlen eleme sem.

Az egyetlen extralogikai primitív fogalom az *elemének-lenni reláció*, $\in$, amely az $x \in y$, „x az y-nak eleme" alakú összefüggésekben szerepel. A halmazelmélet szemléletesen elképzelt univerzuma, amelyet Cantor és Neumann János neveivel szokás megjelölni, halmazok halmazaiból áll, mindazon halmazból, amelyet az üres halmazból kiindulva, már meglévő halmazokból mint elemekből transzfinit iterációban képezni lehet.

6 L. [Ruzsa/Máté 1997].

Az elsőrendű logika az *egyenlőséget*[7], $x=y$, *logikai* fogalomnak, tehát minden kontextusban változatlan, eleve adott jelentéssel bíró fogalomnak tekinti. A halmazelméletben azonban lehetne az egyenlőséget az eleméneк-lenni relációból definiáltnak is tekinteni, az úgynevezett *extenzionalitási axióma* definícióként való kezelésével:

$$x = y \underset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y).$$

Szavakban: két halmaz, x és y, akkor és csak akkor *egyenlőek*, ha bármely további z halmazra (emlékezzünk, hogy a halmazok elemei is halmazok!), z akkor és csak akkor eleme x-nek, ha eleme y-nak. Az ártatlannak látszó *egyenlőség* és a vele rokon *azonosság* szerepének fontossága a következőkben nagymértékben meg fog növekedni. Ezt előkészítendő, megemlítem az alapvető egyenlőségi axióma-sémát, az *egyenlőek megkülönböztethetetlenségének* (latinosabban: *az identikusak indiszcernibilitásá*nak) elvét[8]:

$$\forall xy\vec{z}\,(x = y \rightarrow (\varphi\,(x, \vec{z}) \leftrightarrow \varphi\,(y, \vec{z})),$$

amely a platonizmus-realizmus alapján állva *logikai feltevés*, tehát bármely összefüggésben, nemcsak a halmazelméletben, feltételezett elv. Itt $\varphi\,(.,...)$ tetszőleges *formula*, az adott rendszerben nyelvtanilag helyesen felírt állítás; $\vec{z}$, a paraméter (inaktív változó), egy vagy több változó-szimbólum sorozatát jelöli.

Az elsőrendű logika szabatosan megfogalmazott *következtetési szabályokkal* rendelkezik. Az axiomatikus halmazelméletben, amely egy a sok lehetséges *formális rendszer* között, meghatározott, a logikai következtetési szabályok és a specifikus *Zermelo–Fraenkel*- (ZF-) féle halmazelméleti axiómákat alkalmazva halmazelméleti állításokat *formálisan bizonyítunk*.

Fontos hangsúlyozni, hogy a formális bizonyítások közeli rokonai a jól ismert *matematikai levezetéseknek*. Az utóbbiakban változókból, függvényekből és egyéb, bonyolultabb, elemekből álló *kifejezések* egyenlőségeit, időnként egyenlőtlenségeit manipuláljuk. (Az említett bonyolultabb elemekkel kapcsolatban gondoljunk a fentebb használt limeszjelölésre, továbbá a differenciál- és

7 A [Ruzsa/Máté 1997] könyv (melyet általános információ-forrásként tekintek azon olvasók számára, kik egyes használt terminusok jelentésének kívánnak utánanézni) nem használja az *egyenlő* szót, az *azonos*sal helyettesíti. Ebben a dolgozatban az „azonos" és „egyenlő" szavak mindegyikének fontos, de egymástól eltérő jelentése van; ezek a jelentések, remélhetőleg, világossá válnak a dolgozat olvasása folyamán. Megjegyezzük, hogy itt az „egyenlő" szót a matematika köznyelvével teljesen megegyező módon használom; ezzel szemben, az „azonos" szó jelentése inkább annak filozófiai használatával van kapcsolatban.

8 Ezt [Ruzsa/Máté 1997]-ban mint az *azonosak felcserélhetőségének* törvényét, Leibniz nevéhez kapcsolva találjuk meg, l. a 95. oldalt.

integrálszámítás jelöléseire, amelyek nyelvtani szerkezetük szempontjából közel állnak a kvantorokhoz. Matematikailag itt *operátorokról*, azaz függvényeken operáló függvényekről van szó.) A matematikai levezetések nyelvezete, amelynek nyelvtani szabályai tulajdonképpen igen bonyolultak, és a gyakorlatban ritkán világosan megfogalmazottak, a matematika *köznyelvének* egy fontos *rétegét* alkotja. A levezetések nyelvét nemcsak a szűkebb értelemben vett hivatásos matematikusok, hanem a matematika tudományos és mérnöki alkalmazói is kiterjedten használják. A matematikai logika formális rendszereinek formális bizonyításai nem valami idegen test a matematikában, hanem a matematika újkori köznyelve egy természetes továbbfejlesztésének elemei (az ógörög matematikusok nem ismerték a levezetéseket, de még az algebrai jelöléseket sem!).

A halmazelmélet manapság szokásos formalizálása viszonylag későn, Gödel [Gödel 1940] munkájában található meg először érett formájában.[9] Ez az alapvető mű azért is fontos, mert meggyőzően bemutatja, hogy a formális rendszer nem valami természetellenes eltorzítása a szemléletes elméletnek, hanem annak egy tökéletesebb megfogalmazása.

Itt meg kell jegyeznem, hogy a matematika alapjaival foglalkozó közelmúltbeli és jelenkori filozófiának véleményem szerint legjelentősebb fogyatékossága annak elmulasztása, hogy a matematika nyelvét *köznyelvként*, a tudományos és technikai élet köznyelveként tekintse és elfogadja. A mai filozófia vizsgálódásai nagymértékben a *nyelvre* irányulnak. Azonban a „nyelv" itt majdnem kizárólag a nem-technikai, általános vagy „természetes" köznyelvet jelenti. Az, amit a modern filozófia egyik fő hibájául rovok fel, a természetes nyelv lényegszerű elválasztása az úgynevezett technikai vagy szaknyelvektől és az előzőeknek döntő előnyben részesítése az utóbbiakkal szemben. A szaknyelvek valójában lényeges és egyben új vonásokkal rendelkező részei a nyelv totális valóságának. A szaknyelvi jelenségek között a matematika nyelvének elemei kiemelkednek fontosságukkal, egyrészt mivel a matematika módszertani és *nyelvi* alapul szolgál a természet- és mérnöki tudományok számára, de azért is, mert a matematika belső megalapozási és nyelvi problémái lényeges pontokon érintkeznek a filozófia alapkérdéseivel.

Egy formális rendszer legfontosabb vonása annak teljes szabatossága, szabályainak teljesen pontos és explicit tételezése. Ennek alapján például az axiomatikus halmazelméletben egy állítás egy adott *formális* bizonyításának helyessége

9 Többek között, a halmazelmélet modern axiomatizálásának történetéről egy rövid leírás található Robert Solovay-nek a [Gödel 1940] alatt idézett gyűjteményes Gödel-kötetben található, a Gödel említett munkájára vonatkozó bevezető megjegyzéseiben.

teljesen *objektív* kérdés, amelyet mechanikusan, akár számítógéppel is eldönthetünk; mindössze azt kell ellenőriznünk, vajon a következtetési szabályokat az előírásoknak megfelelően használta-e a formális bizonyítás.

A halmazok formális elméletét lehetséges a matematika egészének alapul szolgáló formális rendszerként tekinteni. A halmazelmélet tételeit elfogadott kulcsok szerinti fordításokban, a matematika legkülönbözőbb ágaiban kimondott tételekként értelmezhetjük. A halmazelméletnek a matematika alaptudományaként való általános elfogadása[10] azon a tényen alapul, hogy a fenti eljárással a matematika döntő részét sikerül a halmazelméleten belül értelmezni. Azonban fontos megjegyezni, hogy a matematika különböző részeinek halmazelméleti formalizálása ritkán történik meg egy a teljességet megközelítő módon. Ennek természetes oka az, hogy a matematika különböző ágainak mindegyike maga is rendelkezik a saját természetes, bár általában nem formalizált nyelvével, és az adott matematikai ágnak a halmazelmélet „tiszta", tehát az adott matematikai ág idiómáit nem tartalmazó nyelvére való átfogalmazása természetellenesnek tűnik.

4. Absztrakt struktúrák

A 20. század matematikájának megkülönböztető jegye az *absztrakt* (elvont) *struktúra* (rendszer) fogalma. Ezek között vannak az *algebrai struktúrák*, csoportok, testek stb.; a *kategóriák* maguk is idetartoznak. A modern geometria alapegységei, a tolopogikus terek, differenciálható sokaságok, algebrai varietások is *absztrakt struktúrák*. A sort tovább folytathatnánk a valószínűség-számítás, a kombinatorika, a funkcionálanalízis absztrakt struktúráival.

Az absztrakt matematikai struktúra tipikusan *halmazelméleti* fogalom. Azonban szemléletesen és történetileg a régebbi *naiv* halmazelméleten alapul, nem a ZF iteratív halmazfogalmán (a naiv halmazelmélet például nem tételezi fel, hogy minden matematikai objektum halmaz). Dolgozatomnak a célja az, hogy a halmaz fogalmának, vagy óvatosabban fogalmazva, a matematikai összesség fogalmának egy új, *strukturalistának* nevezett, végső rendben formalizált (tehát nem „naiv") elmélete felé vezető úton az első lépéseket leírjam. Erről az elméletről azt hiszem, hogy az absztrakt struktúra intuitív ideájának és matematikai szükségleteinek jobban megfelel, mint a szabványos ZF-megalapozás.

A „strukturalista halmazelmélet" elnevezésnek a hibája az, hogy ugyan vannak *halmazok* az új elméletben, de vannak más összességek is benne, amik nem

10 L. [Hilbert 1926], különösen a híres mondatot: „Senki sem fog kiűzni bennünket a Paradicsomból, amelyet Georg Cantor teremtett számunkra." (191. p. az újranyomásban).

halmazok. Mint ahogyan látni fogjuk, ebben a *strukturalista összességelméletben* a kategóriák a matematikai összességeknek egy a halmazénál általánosabb alaptípusaként jelennek meg, végtelen sok további, bonyolultabb összességtípussal együtt. A legközönségesebb példák kategóriákra az egyes struktúrafogalmak alá tartozó egyedeknek a kategóriái, a csoportok kategóriája, a topologikus terek kategóriája stb. Másrészről kategóriák által alkotott összességek már nem kategóriák többé, hanem kétdimenziós kategóriák (erre később visszatérünk). Ezek után természetes, hogy egy teljes képhez szükség van egy n-dimenziós kategóriafogalomra, minden egyes n természetes szám mellett.

A *strukturalista, strukturalizmus* szavakat itt egy szűk és új értelemben használom, amely azonban természetesen rokon a szokásossal. Matematikai strukturalizmuson legtöbbször a francia Bourbaki-iskola nézeteit szokás érteni; a híres Bourbaki-könyvsorozat a modern matematikának a struktúrafogalmak osztályozásán és gondos megválogatásán alapuló enciklopédikus kifejtését adja. Másrészről a filozófiai irodalomban fellelhető a matematikának egy úgynevezett strukturális filozófiája. Ennek az irányzatnak Paul Benaceraff a megalapítója, akinek nézetei rám is nagy hatással voltak; lásd [Benacerraf 1965] és [Makkai 199?]. A strukturalizmusnak, a szó itt használt jelentésében, a legfontosabb összetevője a kategóriaelmélet. Az a tény, hogy az itt hangoztatott nézetek újszerűnek hatnak, nagyrészt annak a következménye, hogy a filozófiai és a hivatalos matematikai-logikai irodalom kevéssé vesz tudomást a kategóriaelméletről.

Megjegyzendő azonban, hogy a strukturalista program viszonya a kategóriaelmélethez nem egyszerű. A kategóriaelmélet meglévő formájában nem elegendő a strukturalista program céljaira; szükség van mind a kategóriaelmélet meglévő fogalmainak revíziójára, mind pedig az elmélet kiterjesztésére. Mindemellett a strukturalista megalapozás teljes mértékben a Gottlob Frege által kezdeményezett és a matematikai logika által kidolgozott modern axiomatikus szemléletet követi, és ennyiben szemben áll a kategóriaelmélet jelenlegi gyakorlatával, amely – sajnos – *de facto* igen élesen elhatárolja magát a matematikai logika „formális” szemléletétől. A strukturalista program a ZF-féle megalapozást nem egyszerűen elveti, hanem egy attól lényegesen eltérő, de azzal összevethető és összevetendő rendszert javasol.

5. Őselemek és absztrakt halmazok

Az „absztrakt” jelző a „struktúra” szó mellett egy sajátos szemléletet takar: azt, hogy a struktúra alaphalmaza *absztrakt halmaz*, amelynek elemei önmagukban *karakternélküli* pontok, amelyek szerepe teljesen kimerül a struktúra alaprelációinak vagy műveleteinek hordozásában. Rögtön megjegyzendő, hogy az absztrakt halmaz ideája teljesen ellentétes a cantori vagy ZF típusú iteratív halmazéval. Minden cantori halmaz, és így a cantori halmazok minden eleme, *individuálisan meghatározott* az összes halmaz körében, ami a karakter-nélküliség ellentéte. (Ennek egy lehetséges matematikai kifejezése az a tény, hogy a cantori univerzumnak nincs nem-triviális automorfizmusa.) A karakter nélküli pontok szerepét a standard halmazelmélet művelői is felismerték, és ezeket *őselemeknek* nevezik[11]; a halmazelmélet felépíthető őselemek bevonásával is. Nos, az absztrakt struktúrák, természetüknél fogva, *őselemekből álló absztrakt halmazokra* épülnek.

De lehetséges, hogy *minden* struktúra absztrakt legyen? Az rendben van, hogy legyenek absztrakt csoportok; de úgy látszik, szükség van nem-absztrakt csoportokra is, hiszen például beszélünk az 1, 2, ..., *n* szimbólumok permutációinak csoportjáról; ennek elemei korántsem őselemek, hanem önálló struktúrával rendelkező egyedek, ti. permutációk.

Ennek az ellenvetésnek ellenére az itt képviselt radikális strukturalizmus álláspontja, miszerint *minden halmaz absztrakt*, és így például *minden csoport absztrakt csoport*, posszibilis álláspont, amelynek keretében lehetséges a csoportok és egyéb struktúrák matematikai elméletének természetes kifejtése. Ezt demonstrálandó, szükséges lenne elmerülni az absztrakt halmazok *kategóriájának* részleteiben. Ebben az absztrakt halmazok szegényes belső struktúráját a közöttük lévő *leképezések* (függvények) egészítik ki, lehetővé téve egy messzemenően kifejezésképes halmazelmélet felépítését. A permutációk fentebb említett csoportja ebben úgy jelenik meg, mint egy absztrakt csoport, amely további halmazok és leképzések segítségével meghatározott kapcsolatban áll a {1, 2, ..., *n*} halmazzal[12]. Ennek a kapcsolatnak a jelenléte kielégítően helyettesíti azt a körülményt, hogy a csoport *a mondott szimbólumok permutációiból áll*. Ez utóbbi körülmény természetesen szó szerint nem áll fenn, hiszen a csoport elemei most is csak őselemek. Ebben a felfogásban a permutációk csoportja nem egyszerűen egy bizonyos tulajdonságok által kitüntetett csoport, ahogyan azt szokásosan elképzeljük, hanem egy olyan összetettebb struktúra, amely egy absztrakt csoport és bizonyos további strukturális elemek együttese.[13]

---

11 [Ruzsa/Máté 1997] ezeket *ősob*oknak (ősobjektumoknak) nevezi.

12 Az olvasó itt kérdezheti: „De hogyan rögzítjük az (1, 2, ..., n) halmazt? Ezt talán, más halmazokkal ellentétben, egyértelműen ki tudjuk szemelni?" Ha a második kérdésre a válasz „igen" lenne, az a strukturalista elveknek ellentmondana. A strukturalista kifejtésben a természetes számok halmazát nem abszolute, hanem csak egy bijekció erejéig tudjuk kiszemelni (lényegében a másodrendű Peano-axiómák segítségével, amelyeknek van egy, F. W. Lawvere által talált, elegáns kategóriaelméleti megfogalmazása). Az 1, 2, ..., n elemek permutációi csoportjának fogalma a strukturalista felfogásban tartalmaz egy utalást a természetes számok strukturalista fogalmára.

13 [Lawvere 1976] a matematikának az absztrakt halmazokon alapuló, a toposzelmélet keretei között történő felépítését definitív módon írja le.

A strukturalizmus jelmondata ez lehet: nincsenek lényegek, csak viszonylatok vannak.

Az absztrakt struktúrák és az absztrakt halmazok tárgyalásakor az *egyenlőség* relációt használjuk külön-külön minden egyes halmaz elemeire, például az algebrai egyenlőségek felírásakor. De nem természetes két külön megadott halmaz A és B esetén arról beszélni, hogy az A-nak egy a eleme *egyenlő*-e vagy sem a B egy b elemével. Például ha veszünk két tetszőleges absztrakt csoportot, G-t és H-t, és ezeket kapcsolatba hozzuk, például egy harmadik csoportot képezünk belőlük, az absztrakt algebra álláspontjából nézve nem természetes a tárgyalást attól tenni függővé, hogy a G-nek egy eleme *egyenlő*-e H-nak egy elemével. Ehelyett megfelelő *leképzések* posztulálásával és használatával élünk. Összefoglalva: a strukturalista felfogásban minden (absztrakt) A halmazhoz van egy hozzá tartozó $=_A$ egyenlőségi reláció. Az $x =_A y$ kifejezés értelmes, midőn x és y az *A halmazon végigfutó változókként vannak deklarálva*; azonban az $x =_A y$ kifejezés értelmetlen, ha x vagy y esetleg más halmazok elemeit is jelenthetik.

A most mondottak már a strukturalista összességelmélet nyelvtanának kifejtéséhez tartoznak. Egy további, az előzőekkel összefüggő nyelvtani tény az, hogy az $x \in A$ kifejezésnek erősen megszorított szerepe van. Ha x a B halmaz egy elemét jelenti, akkor *nincs értelme* azt kérdezni, hogy $x \in A$ fennáll-e, hiszen ez azt kérdezné, hogy x *egyenlő-e* A egy elemével. Ha viszont x már eleve az A halmaz egy eleme, akkor $x \in A$ automatikusan igaz. Emiatt $x \in A$ nem egy valódi ítélet, mindössze egy *változó-deklaráció*. Például ebben a nyelvtanban nem lehet az $x \in A$ kifejezés *negációját* képezni. Vegyük észre, hogy a most leírtak azzal a következménnyel járnak, hogy *nem áll rendelkezésre két absztrakt halmaz egyenlőségének az extenzionalitás elvével való definíciója*. Ezért az absztrakt halmazok tárgyalásakor nem beszélhetünk ezek közötti *egyenlőségről*; ha ennek valamiféle szükségét érezzük, *leképezések* segítségével oldjuk meg a problémát.

Az absztrakt halmazok elméletének azok kategóriáján alapuló felépítése a *toposzelmélet* (lásd pl. [Mac Lane/Moerdijk 1994]. A toposz fogalmát Alexander Grothendieck vezette be az 1960-as években, az algebrai geometriában való alkalmazások céljából. Elsősorban F. William Lawvere érdeme az általánosabb *elemi toposz* fogalmának felfedezése. Egy elemi toposz az elsőrendű logikában felírt bizonyos axiómáknak eleget tevő kategória. Az elemi toposz fogalma lényeges alkotórésze a strukturalista megalapozásnak. Hangsúlyozandó azonban, hogy a toposz fogalma nem elegendő a strukturalista összességelmélet céljaira. Ha csak halmazokról kellene beszélnünk, akkor elegendő volna; azonban a halmazokon túlmenően vannak például *kategóriák* is (amelyre egy példa a halmazok toposza), és a kategóriák maguk egy újfajta összességet alkotnak, ami nem toposz, de nem is kategória, hanem *kétdimenziós kategória*.

6. Izomorfia

A csoport, amit itt csak példaként tekintünk, egyszerű absztrakt matematikai struktúra; egyetlen, az elemein végzett kétváltozós művelettel van megadva. Ezt az operációt, amely természetesen csoportról csoportra változik, a közönséges szorzásra használt jelöléssel, $x \cdot y$-ként írjuk.

Ha egy absztrakt csoport minden egyes, mint tudjuk, önmagában karakter nélküli elemét szisztematikusan kicseréljük egy másik karakter nélküli őselemre, vigyázva arra, hogy az elemek közötti operációs kapcsolatokat ne zavarjuk meg eközben, akkor a csoporton a lényeget illetően mit sem változtattunk. Az eredeti csoport G-vel, a leírt cserék eredményeként kapottat H-val jelölve, a G és H közötti kapcsolatot azzal lehet leírni, hogy azok *izomorfak* egymással.

Az izomorfia fogalmának meghatározása *leképezések* bevonásával történik. G és H *izomorfak*, szimbolikusan:

$$G \cong H,$$

ha léteznek olyan G-t H-ra és H-t G-re történő f és g leképezések, szimbólumokban:

$$f\colon G \to H, \quad g\colon H \to G,$$

amelyek a csoportok műveleteivel kompatibilisek:

minden esetben, midőn a G csoportban fennáll egy $x \cdot y = z$ alakú összefüggés, akkor $x' = f(x)$, $y' = f(y)$, $z' = f(z)$ mellett az $x' \cdot y' = z'$ reláció fennáll H-ban, és hasonlóképpen g-re (azt mondjuk, hogy f és g *csoport-homomorfizmusok*); továbbá

$$g \circ f = \mathrm{id}_G, \; f \circ g = \mathrm{id}_H,$$

amely képletek azt fejezik ki, hogy f és g egymásnak inverzei:

$$g(f(x)) = x \text{ és } f(g(x')) = x'$$

minden $x \in G$ és $x' \in H$ mellett.

Az adott esetben az f leképzés maga egy *izomorfizmusa* G-nek H-ra; hasonlóképpen, g egy izomorfizmusa H-nak G-re.

A homomorfizmus és az izomorfizmus, izomorfia minden „szokásos" struktúratípusnál fellépő, nélkülözhetetlen fogalmak. Az elnevezések változhatnak; például a topológikus terek esetén homomorfizmus helyett *folytonos leképezésről*, izomorfizmus helyett *homeomorfizmusról* beszélünk.

7. Az azonosság és a strukturalista követelmény

Az *„azonosság”* szó az *„identitás”* szó pontos fordítása. A latin szó töve „id”, magyarul „az”, a legalapvetőbb és legprimitívebb utalásmód, a rámutatás (osztenzio) nyelvi megfelelője. Az angol nyelvben igen gyakori az *identity* szó használata olyan összefüggésekben, mint „national identity”, „identity crisis”, „struggling with problems of identity”, amelyek mind egy dolog vagy személy *azonosságára, azonosíthatóságára* utalnak, arra, hogy milyen pontosan és jól lehet megmondani, *mi az*, illetve *ki ő*. A magyar TV-hírekben is hallottam már a „nemzetiségi identitás”-ról; kár, hogy „nemzetiségi azonosságot” nem mondunk.

Az „az” és az „azonosság”, valamint az „id” és az „identitás” között van nyelvtanilag az „azonos”, „identikus” relációt jelentő jelző. Michael Dummet oxfordi filozófus Gottlob Fregéről szóló könyvében[14] azt mondja, hogy Frege, akit a modern logika megalapítójának tekintünk, volt az első, aki az identikusnak lenni relációt az egyenlőnek lenni relációval azonosította, és a logika primitív alaprelációjává tette. Mindenesetre világos, hogy az egyenlőnek lenni reláció a matematika nyelvének egy nélkülözhetetlen eleme; a legegyszerűbb algebrai összefüggések is *egyenlőségek*. A standard halmazelmélet, amely ugyan sok mindenben módosítja a platóni-fregei álláspontot, ebben a tekintetben teljesen az utóbbi szemlélet alapján áll, és az egyenlőséget univerzálisan, bármely két létezőre alkalmazható, logikai, mondhatnánk *a priori* módon adott, bináris (kétváltozós) relációként tételezi.

Az absztrakt struktúrák természetes vagy „strukturalista” logikája és a platóni-fregei azonosságszemlélet között ellentmondás vagy legalábbis feszültség van. Az előbbi szerint a struktúrák tulajdonképpeni azonosságfogalma nem az *a priori* platóni-fregei egyenlőség, hanem az *izomorfia*. Két struktúra *lényegileg ugyanaz*, ha *izomorfak*. Egy adott struktúratípusra vonatkozó tulajdonság csak akkor legitim, matematikailag értelmes, ha az *azonosak megkülönböztethetetlensége* (identikusak indiszcernibilitása) klasszikus elvének eleget tesz, midőn „azonos”-on „izomorf”-at értünk; más szóval, ha a tulajdonság *izomorfiára nézve invariáns*: a tulajdonságot P-vel jelölve, tetszőleges adott típusú G és H struktúrákra (például csoportokra) fennáll a következő:

$$G \cong H \Rightarrow [P(G) \leftrightarrow P(H)]. \tag{3}$$

Az, hogy egy csoport *véges* vagy *végtelen*, hogy *ciklikus, Abel-féle, feloldható, nilpotens* vagy *szabad*, mind *csoportelméleti* tulajdonságok, amennyiben ha P bár-

14 [Dummet 1981], 542.

melyike a felsoroltaknak, és ha egy csoport P-vel rendelkezik, akkor minden vele izomorf csoport is rendelkezik P-vel. Azonban az, hogy a 17-es szám eleme egy csoportnak, nem csoportelméleti tulajdonság, mégpedig azért, mert ez a tulajdonság nem öröklődik egy csoportról egy vele izomorf csoportra: az elemek egy izomorf kicserélésével elérhetjük, hogy a 17 már nem szerepel a csoport elemei között. Nevezzük a (3)-ban foglalt összefüggést a P tulajdonságra vonatkozó *strukturalista megszorításnak*.

Nézzük meg közelebbről, mit jelent az, hogy az izomorfia, és nem az egyenlőség az absztrakt struktúrák helyes azonosságfogalma. Ennek az elvnek két, egymást támogató aspektusa van. A mondott elv egyrészt hasznos előírás, *norma* a matematikai gyakorlatot illetően, másrészt kényszerítő *tény*.

Az első aspektust illetően a gyakorló absztrakt matematikus majdnem öntudatlanul ellenőrzi azt, hogy egy általa vagy mások által javasolt, *csoportokra általában vonatkozó* (tehát nemcsak egy bizonyos szűkebb csoport-osztályt érintő) tulajdonság izomorfiára invariáns-e; ha ez nem teljesül, a tulajdonság elvetendő, illetve nem fogadható el mint valami, ami *csoportokra általában alkalmazható*. A tapasztalat azt mutatja, hogy ennek a normának követése az elmélet minőségére jó hatással van.

Másodszorra: a *tény* az, hogy amikor nem triviális esetekben azt tudjuk bizonyítani, hogy két különböző módon kapott absztrakt struktúra *egymással azonos*, akkor általában nem az igaz, hogy azok egymással *egyenlőek*, hanem az, hogy *izomorfak*. Gondoljunk az algebra *reprezentációs tételeire* (például a Boole-algebrákra vonatkozó Stone-féle reprezentációs tételre) vagy *struktúratételeire* (például a főideálgyűrűk feletti modulusokra vonatkozóra), amelyek mind egy-egy *izomorfiát* állítanak. Természetesen ezek a tételek azért *hasznosak*, mert a két azonosnak állított struktúra valóban ugyanúgy viselkedik minden fontos vonatkozásban, *hiszen minden fontos vonatkozás engedelmeskedik a strukturalista megszorításnak*, a fenti norma erejének következtében!

A strukturalista szemlélet konzekvens, radikális alkalmazása megköveteli, hogy például csoportok esetében

csak olyan csoportokra vonatkozó tulajdonság szerepelhessen egy matematikai összefüggésben, amely a (3)-ban leírt *strukturalista megszorításnak* eleget tesz.

Az itt közlendők egyik fő tézise az, hogy

lehetséges a matematika természetes kifejtése a leírt *strukturalista követelmény* szigorú betartása mellett.

Az „azonosság" szó értelme elemibbnek, elsődlegesebbnek tűnik, mint az „azonos" relációt jelentő szó értelme. Problematikus a logikának az a vonása, hogy csak a második dologgal foglalkozik, az elsővel nem. Frege tudta, hogy az azonosság fogalma mély és nehéz; ez húzódik meg második korszakának fő témája, az értelem és az utalás (jelölet) („Sinn" és „Bedeutung", „sense" és „reference") kapcsolatának vizsgálata mögött (lásd [Frege 1892]). Véleményem szerint a modern analitikus filozófia hiányossága, hogy az azonosság fogalmát nagymértékben kézenfekvőként fogadja el, trivializálja. A strukturalizmus mélyebb jelentősége abban van, hogy a bennünket körülvevő absztrakt valóság azonosságproblematikáját komolyan veszi.

Ezzel kapcsolatban utalok [Makkai 199?] cikkemre, amely Paul Benacerrafnak a matematikai-filozófiai strukturalizmust megalapító [Benacerraf 1965] cikkére alapozva nemcsak a matematika tárgyainak, hanem a „gyakorlati élet" absztrakt tárgyainak (mint például a versek vagy számítógépi programok) azonosságára vonatkozólag is igyekszik egy új szemléletet kialakítani. Idézett dolgozatom választ adhat olyan természetesen felmerülő kérdésekre is, mint például a következő: Hogyan lehetséges *„az A*-val jelölt halmaz"-ról beszélni, ha az, hogy két halmaz *egyenlő-e, ugyanaz*-e, elvileg eldönthetetlen kérdés (mint a strukturalizmusban, lásd az 5. szakaszt)?

8. A kategória fogalmának definíciója

A *kategória* fogalmát a matematika szokásos nyelvén, tehát *halmazelméletileg* megfogalmazva így definiáljuk. Egy **C** kategória a következő adatokkal és feltételekkel van megadva:

- *objektumok* egy O(**C**) osztálya (amennyiben egy „nagy" kategóriáról van szó, ez egy valódi osztály, azaz nem halmaz);
- *morfizmusoknak* egy A(**C**) osztálya;
- minden $f \in A(\mathbf{C})$ morfizmushoz adva van annak *forrása* d(f) és *célja* c(f), amelyek objektumok, midőn $d(f)=X$ és $c(f)=Y$, az $f{:}X \longrightarrow Y$, $X \xrightarrow{f} Y$ jelöléseket használjuk;
- minden $X \in O(\mathbf{C})$ objektumhoz hozzá van rendelve a kitüntetett *egység* $1_X{:}\, X \longrightarrow X$ morfizmus;
- midőn $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, egyértelműen meg vannak adva az f-nek és g-nek a kompozítuma, az $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ morfizmus;
- teljesülnek a következők:

$$X \xrightarrow{1_X} X \xrightarrow{f} Y :: f \circ 1_X = f$$
$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{1_Y} Y :: 1_Y \circ f = f$$
$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W :: h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

A $h = g \circ f$ reláció a morfizmusok által alkotott diagram (jelen esetben háromszög) *kommutativitásával* ekvivalens:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & \arrow[u, phantom, "\circ"] & Z \end{tikzcd}$$

A legkézenfekvőbb kategória a *halmazok kategóriája*, Set, amelyet már fentebb említettünk mint a toposzelmélet alapját. Sok egyéb matematikailag fontos kategória van, mint például a csoportok kategóriája, amelyben a morfizmusok a homomorfizmusok. A kategória fogalmára úgy kell tekintenünk, mint a 3. szakaszban részben vázolt *minimális halmazelmélet* egy analogonjára. A minimális halmazelmélettel szemben a kategória fogalmának sok természetes algebrai modellje van. Ezzel szemben ezek között csak kevés *toposz*, tehát olyan kategória, amely rendelkezik a halmazok kategóriájának specifikus tulajdonságaival.

9. A kiterjesztett kategóriaelmélet mint az azonosság és az összesség fogalmai új, komplex értelmezésének elmélete

Minden kategória rendelkezik objektumai izomorfiájának fogalmával; ezt ugyanúgy értelmezzük, mint fentebb a csoportok speciális esetében tettük, a homomorfizmus fogalma segítségével: egy izomorfizmus nem más, mint invertálható morfizmus. Azonban *nem jó* az objektumok *egyenlőségéről* beszélni. Ez egy gyakran ismételt diktum a kategóriaelméletben. Már fentebb említettük ennek azt a speciális esetét, hogy nem jó az absztrakt halmazok egyenlőségéről beszélni. A strukturalizmus, mint megalapozási kiindulás, nem tételezi fel, hogy egyáltalán *létezik* egyenlőségi reláció egy kategória objektumai között. Természetesen az objektumokra nézve az izomorfiát tekintjük a helyes azonosságfogalomnak.

Legyen $\boldsymbol{X}$ és $\boldsymbol{A}$ egy-egy kategória. Mit jelentene $\boldsymbol{X}$-nek és $\boldsymbol{A}$-nak az izomorfiája? Nyilván azt, hogy léteznek olyan struktúramegőrző $F : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{A}$ és $G : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{X}$ leképezések (funktorok), amelyek inverzei egymásnak, tehát minden esetben, amidőn $X \in O(\boldsymbol{X})$ és $A \in O(\boldsymbol{A})$, a $G(F(X))=X$, $F(G(A))=A$ relációk fennállnak. De ezek a relaciók objektumok egyenlőségét fejezik ki, olyasmit, amit – megegyezésünk szerint – nem használhatunk. Ezek szerint a kategóriák izomorfiájának fogalma nem áll rendelkezésre. De akkor nem lehetséges, hogy kategóriák egy kategória objektumai legyenek. Tehát azok az összességek, amelyek „kategóriákból állnak", nem lehetnek maguk is kategóriák. Egy ilyen összesség valami „másodfokú" vagy „két-dimenziós" kategória kell, hogy legyen, amely – durván szólva – úgy viszonylik a kategóriához, mint ahogy a kategória viszonylik a halmazhoz. Továbbá a kategóriák helyes azonosságfogalma valami olyasmi kell, hogy legyen, ami úgy viszonylik az izomorfiához, mint ahogy az izomorfia viszonylik az egyenlőséghez. A kategóriák helyes azonosságfogalma jól ismert, és a kategóriák *ekvivalenciája* nevet viseli. A fentieket ismételve, minden $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ természetes számra természetes módon felmerül az *n-dimenziós kategória* fogalmának és az n-dimenziós kategóriák azonossága megfelelő fogalmának szükségessége. Az is világossá válik, hogy nem elég n-dimenziós kategóriákról beszélni: ezek közötti leképezésekre és más egyebekre is szükség van.

A strukturalista megalapozás felé vezető úton ezzel elérkeztünk a legfontosabb felismeréshez. Eszerint ezen megalapozás univerzuma egy hierarchikusan szervezett, komplex valami, amelyben a különböző elemek azonosságfogalma más és más, és ezek az elvek maguk is komplex struktúrával rendelkeznek. Ennek az univerzumnak már a puszta definíciója egy nagymértékben nem triviális feladat, amiben ugyan a legutóbbi időkben fontos előrelépések történtek, de amelynek teljes megoldása még nem áll rendelkezésre.

Nem mondhatnám, hogy a fenti meggondolások általánosan elfogadottak lennének a matematikusok körében. Amiért azonban matematikailag nem vagyok elszigetelt, az a körülmény, hogy a strukturalista program által felvetett matematikai problémák más szempontokból is felmerülnek, és jelenleg igen nagy érdeklődésnek örvendenek.

Az úgynevezett *„weak n-category"*, *„gyenge n-kategória"* fogalmának meghatározása a kvantumcsoportok, a topologikus kvantummező-elmélet (topological quantum field theory), és egyéb rokon területeken dolgozók igen széles körében fontosnak tartott feladat.[15]

A Claudio Hermidával és John Powerral közösen nemrég írt [Hermida/Makkai/Power 199?] dolgozatunkban a mondott fogalomnak az ez idő szerint legexplicitebb definícióját, legkonkrétabb leírását adjuk. Az általunk bevezetett fogalomnak *multitopic category* (*multitopikus kategória*) a neve. A név a *multitop* új fogalmára utal, ami viszont a klasszikus geometriai *politop* egy „irányított" változata. Munkánkat nagymértékben befolyásolta John Baez és James Dolan nemrég nyilvánosságra hozott rokon témájú dolgozata

15 L. [Baez/Dolan 1995].

[Baez/Dolan 1998], amelyben „opetopic sets" és „opetopic category" szerepelnek, az operad algebrai-topológiai fogalmára való utalással.

A multitopikus kategória fogalma véleményem szerint a megfelelő általános strukturalista összességfogalom. Azonban ahhoz, hogy ezt valóban végérvényesen elfogadhassuk, még sok mindent kell tenni. A magasabb dimenziós kategóriák univerzumának sok intuitíve elvárt strukturális tulajdonságát még pontosan meg sem fogalmaztuk.

A legutóbbi időkben mások is, mint például Michael Batanin, előterjesztettek többé-kevésbé explicit definíciókat a gyenge n-dimenziós kategória fogalmára[16], azonban ezek, legalábbis közvetlenül, nem alkalmasak a strukturalista megalapozás céljaira.

Térjünk a *strukturalista követelmény általános meghatározására*. Eszerint a matematika formális nyelve olyan kell, hogy legyen, hogy

abban minden megfogalmazható állítás igazságértéke invariáns minden olyan transzformáció mellett, amely egy tetszőleges szabad változó értékét egy vele azonos *értékre változtatja, az „azonos" kifejezésnek az adott változó típusára érvényes azonosságfogalom szerinti értelmében.*

10. A kategóriaelmélet egyes alapfogalmainak revíziója

Jelenlegi formájában a kategóriaelmélet sok vonatkozásban a helyes választ adja a strukturalista kérdésekre; ugyanakkor, már egészen elemi esetekben is, szükségesnek mutatkozik a kategóriaelméleti fogalmak módosítása. A két kategóriát összekötő *funktor* fogalma nem más, mint a homomorfizmus standard algebrai fogalma a kategóriák esetében. Nem meglepő, hogy a funktor alapvető fogalom a kategóriaelméletben – strukturalista szempontból tekintve azonban nem megfelelő. Az **X** kategóriát az **A** kategóriába képező $F : \mathbf{X} \to \mathbf{A}$ funktor mellett tekintsük a következő predikátumot:

$$P(X, A) \underset{def}{\longleftrightarrow}$$

„az F funktor értéke az **X** kategória X objektuma mint argumentum mellett az **A** kategória A objektuma".

Vegyük észre, hogy ezt a predikátumot a szokásos matematikai jelölésben az

$$F(X) = A$$

egyenlőséggel, mégpedig az **A** kategória objektumaira vonatkozó egyenlőséggel jelöljük. Ez a predikátum nem tesz eleget a strukturalista megszorításnak:

16 [Batanin 1998].

midőn, X rögzítése mellett, az A objektumot egy vele izomorf objektumra változtatjuk, a predikátum igazságértéke általában nem változatlan, egyszerűen azért, mert a funktor értéke abszolúte egyértelműen – és nemcsak izomorfia erejéig egyértelműen – van megadva. A strukturalista követelmény olyan „funktor"-t kíván, amelynek objektumértékei csak a mondott lazább módon vannak meghatározva. Lehetséges-e a funktor fogalmának ilyenforma módosítása anélkül, hogy a kategóriaelméletben lényegi kárt tennénk? [Makkai 1996] dolgozatomban bevezettem az *anafunktor* fogalmát, és megmutattam, hogy ez – amellett, hogy strukturalista szempontból kifogástalan – a funktor klasszikus fogalmát kielégítően helyettesíti, sőt egy fontos, általánosan elfogadott szempontból még jobb is annál.

Gyakran előfordul, hogy egy funktor definíciójához minden lényeges adat rendelkezésre áll, a funktor mégsem határozható meg objektumértékeinek *ad hoc* kijelölése nélkül; továbbá, hogy ez a kijelölés sok esetben csak a kiválasztási axióma alkalmazásával lehetséges. Ez az eljárás szemben áll a kategóriaelmélet azon ideáljával, mely szerint konstrukciói lehetőség szerint *kanonikusak*, azaz ad hoc elemektől mentesek kell hogy legyenek. A leírt körülmény azt is lehetetlenné teszi, hogy a kategóriaelméletet a konstruktív vagy intuicionista halmazelméletben felépítsük. Kiderül, hogy a funktorok anafunktorokkal való helyettesítése megoldja ezeket a problémákat; a dolgozat címe erre utal. A kiválasztási axióma korlátlan alkalmazása mellett az anafunktor fogalma lényegében ekvivalens a funktoréval; az előző értéke csak a mondott axióma távollétében mutatkozik meg. Bár a dolgozat motivációja a strukturalista megalapozásban van, a tárgyalás alapja a standard halmazelmélet egy konstruktív változata; ennek oka természetesen az, hogy a strukturalista alapok befejezett formában még nem állnak rendelkezésre. Alapvető megfigyelés az, hogy a strukturalista kontextusban a kiválasztási axiómának az a formája, amelyben egy tetszőleges kategória objektumai közül választunk, egyáltalán nem fogalmazható meg, mivel nem áll rendelkezésre az objektumokra vonatkozó egyenlőségi reláció. A *kiválasztási axióma*, ami az úgynevezett klasszikus és konstruktivista nézetek egyik fő választóvonala, az egyetlen halmazon belüli választások esetétől eltekintve a strukturalista szemponttól idegen, éspedig nem valami doktriner elhatározás alapján, hanem az alapvető nyelvtani adottságok következményeként.

11. FOLDS: függő típusokon alapuló elsőrendű logika

A strukturalista program legbefejezettebb része annak *logikája*. Ezt a logikát *First Order Logic with Dependent Sorts*nak, *függő típusokon alapuló elsőrendű logikának* nevezem, és az angol kifejezés rövidítésével, FOLDS-ként fogok rá utalni (ha NATO-t mondhatunk a magyar nyelvben...). A FOLDS-ot tekintem a strukturalista programhoz történt legfontosabb hozzájárulásomnak. A FOLDS meghatározását és elméletét a [Makkai ??] monográfiában írtam le. Itt említem meg a strukturalista programról szóló [Makkai 1998] összefoglaló cikkemet, amelyben a FOLDS-ról részletesebben írok. Megjegyzendő, hogy a FOLDS alkalmazásaihoz szükség van az anafunktorokra, és a FOLDS ismerete nagyban elősegíti a multitopikus kategóriák megértését.

Hangsúlyozni kell, hogy a FOLDS elméletét (amely a FOLDS-ban megfogalmazott minden egyes formális elmélet szempontjából egy *meta*elmélet) a matematika klasszikus felépítésében, a szokásos halmazelmélet alapján adom meg. Ez szükségszerűen van így, hiszen a mondott elmélet igen erősen halmazelméleti jellegű, hasonlóan a jól ismert modellelmélethez, amely a klasszikus elsőrendű logika (meta)elmélete (lásd [Chang/Keisler 1991]). Jelenleg nem áll rendelkezésre más, mint a halmazelmélet rendszere, amelyben az elméletet ki lehetne fejteni; a strukturalista megalapozás maga még vár végső megfogalmazására. Természetesen ha a klasszikus szemléletet egyszerűen elvetném, vagy egyszerűen elfogadhatatlannak találnám, ez az eljárás nem lenne indokolható. De erről szó sincsen.

Másrészről azonban azt sem vonhatjuk le következtetésként, hogy a klasszikus halmazelmélet abszolút módon *szükséges* lenne a strukturalista megalapozás „megalapozásához”. Az a helyzet, amivel itt szembekerülünk, igen jól ismert mindazok előtt, akik egy új axiomatikus elmélet bevezetésének feladatával álltak szemben a matematikai logika kifejlődése során. Egyrészt fennáll az új formalizmus explicit, „elméletektől mentes”, „finitisztikus” specifikációjának abszolút követelménye, másrészt azonban az elmélet motivációjának, megértésének érdekében lehetséges és esetenként szükséges a formalizálandó elméleten túlmenő vagy éppen azzal bizonyos szempontból szemben álló elméletek felhasználása. Jó példa erre az intuicionizmus, az L. E. J. Brouwer által bevezetett, a klasszikussal élesen szemben álló megalapozási szemlélet. Az intuicionista matematika axiomatizálása során létrejött formális rendszerek metamatikai vizsgálatában az intuicionista megkötéseknek nem eleget tevő, „klasszikus matematikai” módszerek fontos szerepet játszanak. Végül még azt is megjegyzem, hogy a strukturalista módszerek fejlettebb formájukban előreláthatólag alkalmasak lesznek arra, hogy a metamatematikai vizsgálatok egy nagy részének alapjául szolgáljanak.

Amikor a FOLDS-ról kezdek beszélni, a kategóriaelmélet kutatóinak szeme elhomályosul. Pedig a FOLDS-nak éppen az a lényege, hogy barátságosan viszonyul a kategóriaelmélethez. Igaz ugyan az is, hogy önmagában a FOLDS olyasmi, mint amit általában a matematikai logikusok művelnek: szintaxis és szemantika, ezeknek egy úgynevezett modellelméletben való viszonyítása, deduktív formális rendszerek, teljességi tételek, interpoláció, definiálhatósági tételek, stb. Másrészről, az „amit prédikálsz, azt gyakorold is" elvvel összhangban, a strukturalista gyakorlatnak megfelelően a FOLDS tárgyalása a kategorikus logika részeként történik. Ez azt jelenti, hogy a FOLDS alapvető absztrakt *struktúrafogalma*, amely egy rögzített, de tetszőleges FOLDS-beli axiomatikus emélet fogalmának az algebrai megfelelője, kategóriákra épül. Ez a fogalom, *kvantifikációs fibráció (quantificational fibration)*, egészében véve új ugyan, de a kategorikus logikából ismerős elemekből tevődik össze. Ezek az elemek Lawvere „hyperdoctrine" nevű, az 1960-as években bevezetett fogalmához kapcsolódnak, de azóta már sok összefüggésben előfordultak. A kvantifikációs fibráció fogalma általánosítja a FOLDS fogalmát és egyben a biszimulációval (bisimulation) kapcsolatos Henessy–Milner logikát ([Henessy/Milner 1985]) is.

Most bemutatom néhány részletében a kategória fogalmának a FOLDS-ban történő axiomatizálását. Ez a FOLDS általános vonásairól is képet fog adni. A most következő leírást a korábbi 3. szakaszban a közönséges elsőrendű logikáról és az ott részben vázolt *minimális halmazelméletről* mondottakkal lehet párhuzamba vonni. Ahogyan az idézett helyen a halmazokról való szabatos beszéd szabályairól volt szó, úgy itt most azt fogjuk vázolni, *hogyan kell egy adott kategóriáról a strukturalista elveknek megfelelően szabatosan beszélni.*

Azonban emlékeztetnem kell arra, hogy míg az idézett helyen a halmazelmélet nyelvének elemeit lényegében teljesen leírtuk, korántsem igaz, hogy a kategóriákat tárgyaló FOLDS-alapú nyelv elemei a strukturalista összességelmélet céljaira általában elegendőek lennének; az előző 10. szakasz magasabb dimenziós kategóriái további, valójában végtelen sok FOLDS-beli primitív fogalmat igényelnek.

A primitív fogalmak a következő *szignatúra-kategóriában*[17] vannak megadva:

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[dr, "i"'] & E \arrow[d, shift right, "e_1"'] \arrow[d, shift left, "e_2"] & T \arrow[dl, shift right=2, "t_1"'] \arrow[dl, "t_2"] \arrow[dl, shift left=2, "t_3"] \\
& A \arrow[d, shift right, "d"'] \arrow[d, shift left, "c"] & \\
& O &
\end{tikzcd}
$$

17 Az, hogy a szignatúra maga is *kategória*, általános jelenség, és nincs kapcsolatban azzal, hogy itt most a *kategória* fogalmát akarjuk strukturalista módon leírni. Továbbá semmi ellentmondás nincs abban, hogy a „kategória" kifejezést használjuk, mielőtt a kategória fogalmának strukturalista változatát megadtuk volna. A tisztán szintaktikus, „elmélet nélküli" specifikációban nincsen utalás a kategória fogalmára; ennek a fogalomnak itteni előfordulása mindössze magyarázó, matematikai jelentőséggel bír.

Itt az $\mathcal{L}_{cat}$ szignatúra-kategória objektumai és morfizmusai közül a generáló morfizmusok vannak megadva; a további morfizmusok a (nem jelölt) egység-morfizmusok, és a generátorokból képezhető összes kompozítum; az utóbbiak közül bizonyosokat azonosítunk, a következő egyenlőségekkel:

$$di=ci$$
$$de_1=de_2,\ ce_1=ce_2,$$
$$ct_1=dt_2,\ dt_1=dt_3,\ ct_2=ct_3.$$

Mint látni fogjuk, az adott szignatúra felett leírt FOLDS-formulák a morfizmusokat közvetlenül nem említik; ezek közvetve szabályozzák azt, hogy mi számít jól formált formulának.

A formalizmus megértéséhez először azt kell látni, hogy minden (kis, tehát halmaznyi nagyságú) **C** kategória egy az $\mathcal{L}_{cat}$ kategóriát a halmazok kategóriájába leképező funktorral azonosítható. E funktort F-fel jelölve, $F(\mathrm{O})$ a **C** objektumainak halmaza, $F(\mathrm{A})$ morfizmusainak halmaza, a

$$F(\mathrm{d}){:}F(\mathrm{A})\rightarrow F(\mathrm{O})$$

függvény az adott kategória forrásfüggvénye. $F(\mathrm{I})$ az identitásmorfizmusok halmaza, $F(\mathrm{E})$ a morfizmusokra leszorított egyenlőség reláció, $F(\mathrm{T})$ pedig az összes kommutatív háromszög halmaza:

$$\mathrm{F(T)} = \left\{ \begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "g"] \arrow[d, phantom, "\bigcirc"] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & {} & Z \end{tikzcd} \right\}$$

Például a $ct_1=dt_2$ egyenlőség annak felel meg, hogy $c(f)=d(g)=Y$.

Az új szemlélet alapja az, hogy egy kategória egy $\mathcal{L}_{cat}$-szignatúrájú struktúra. Általában, egy tetszőleges $\mathcal{L}$ szignatúra-kategória mellett, egy $\mathcal{L}$-struktúra ugyanaz, mint egy $\mathcal{L}\rightarrow$Set alakú funktor[18].

Korántsem igaz azonban, hogy minden $\mathcal{L}_{cat}$-struktúra meghatároz egy kategóriát; ehhez az $\mathcal{L}_{cat}$-struktúrának további feltételeket kell kielégítenie. Ezek a feltételek a FOLDS-ban megfogalmazott *kategória-axiómák*.

18 Emlékezzünk arra, hogy a FOLDS szemantikáját a közönséges halmazelméletben tárgyaljuk, a FOLDS metaelméletének részeként. Ezért a funktor fogalma ellen a 10. szakaszban felhozott érvek most nem alkalmazhatók.

Ahelyett, hogy a FOLDS, a függő típusokon alapuló elsőrendű logika nyelvtanát általánosságban próbálnám leírni, példaként legyen itt annak az axiómának a felírása, hogy a *komponálható morfizmus-párok kompozítuma létezik*:

$$\begin{aligned}&\forall X \in \mathrm{O}.\ \ \forall Y \in \mathrm{O}.\ \ \forall Z \in \mathrm{O}.\\ &\qquad \forall f \in A(X,Y).\ \ \forall g \in A(Y,Z).\ \ \exists h \in A(X,Z)\\ &\qquad\qquad\qquad \exists w \in T(X,Y,Z,f,g,h).\end{aligned}$$

igaz.

Az első észrevétel az, hogy a változók *típusokkal* vannak ellátva; például, X, Y, Z mindegyikének típusa O. Továbbá vannak típusok (az angolban a „type” szó helyett a „sort”-ot használom), amelyek már deklarált változóktól *függenek*; például az A(X, Y) típus függ az X, Y O-típusú változóktól. A szignatúrának az a vonása, hogy az A objektumból két morfizmus, d és c, mutatnak az O objektumba, írja elő, hogy az A szimbólumot úgy kell használni, hogy utána kell tenni két O-típusú változót; az első, X a jelen esetben, felel meg d-nek, a második, Y-, c-nek. Az A(X, Y) *szemantikai* értelme az, hogy azon A-beli f elemekből áll, amelyekre d(f)=X és c(f)=Y; ez persze, midőn egy valódi kategóriáról van szó mint modellről, azzal egyenértékű, hogy f:X→Y.

A függő típusokat úgy tekintem, mint a strukturalista szemlélet lényeges elemeit. *Dolgokról általában csak már bizonyos előzőleg adott és rögzített jellegű dolgok jelenlétében, azokkal meghatározott viszonyban lehet beszélni.* És valóban, a kategóriaelmélet gyakorlatában van egy „érezhető”, de nem kimondott „szabály”, amely megköveteli, hogy egy morfizmusról csak azután beszéljünk, miután annak forrását és célját már bevezettük.

Függő típusok jól ismertek a matematikai logika irodalmában, lásd például [Marin–Löf 1973] és [Cartmell 1986]. Az említett helyeken található formalizmusok egyéb vonatkozásokban azonban egészen mások, mint a FOLDS, és főleg, nem rendelkeznek azzal a feljogosító vonással, ami a FOLDS lényege, az ti., hogy az azonosság egy általános fogalmához szolgál alapul (lásd az alábbi szakaszt).

A fenti formula feltűnő eleme, hogy a kommutálás *tényét* egy bizonyos (függő) típushoz tartozó, itt w-vel jelölt, elem *létezésével* rögzíti. Bizonyos

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & Z \end{tikzcd}$$

alakú, hat elemből álló képződmények (*diagramok*) olyanok, hogy van hozzájuk olyan w, amely a megfelelő T(Z, Y, Z, f, g, h) függő típushoz tartozik; ezek a diagramok a *kommutatív háromszögek*. A szignatúra már eldönti, hogy a T szimbólum csak olyan T(X, Y, Z, f, g, h) alakú összefüggésekben fordulhat elő, ahol a változók már a felírt háromszög formájában helyezkednek el egymáshoz képest; ez a szignatúrakategória morfizmusai közötti felírt egyenlőségekkel van kapcsolatban.

Megjegyzendő az egyenlőség speciális szerepe. Először is, mint azt már vártuk, semmilyen formában sem lehet beszélni objektumok, O-típusú változások, *egyenlőségéről*.

Az f és g „morfizmusok" *egyenlőségét* az $\exists u{\in}\mathrm{E}(X, Y, f, g)$.**igaz** formula fejezi ki; azonban ez csak akkor jól formált, ha az f és g változók $f \in \mathrm{A}(X, Y)$, $g{\in}\mathrm{A}(X, Y)$ formában, tehát az

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$$

„párhuzamos" alakzatban, vannak deklarálva. Más szóval: nem lehet két akármilyen morfizmus egyenlőségéről beszélni, csak olyanokéról, amelyekről már tudjuk, hogy párhuzamosak, ugyanazzal a forrással és ugyanazzal a céllal bírnak. A morfizmusok abszolút totalitása semmilyen formában nem szerepel a strukturalista kategóriaelméletben; csak egy adott (X, Y) objektum-páros mellett, az egyikből a másikba mutató morfizmusok összességéről lehet beszélni. Ez az összesség viszont történetesen *halmaz*, hiszen egy egyenlőség-relációval van ellátva. Ez emlékeztet arra a szokásos megkötésre, hogy egy kategória csak akkor „legitim", ha „hom-halmazai", a *hom* (X, Y) = A(X, Y) alakú összességek, *halmazok*, amely megkötés a szokásos értelemben azt jelenti, hogy ezek nem túl *nagyok*, nem *valódi osztályok*. (Ugyanakkor egy legitim kategória összes morfizmusai alkothatnak valódi osztályt.) A strukturalista szemléletben nincsenek halmazok és osztályok, nem létezik a „kis" és „nagy" összességek megkülönböztetése.

Az összes többi kategóriaaxióma is megfogalmazható FOLDS-ban. Sőt, olyan további feltételek is, mint az, hogy a kategória *toposz*, felírhatók a FOLDS-ban.

A 9. szakaszban említett multitopikus, magasabb dimenziós kategóriák is leírhatók a FOLDS-ban; az n-dimenziós esetben, a használt szignatúrakategória, $\mathcal{L}_n$, a legfeljebb ($n+1$)-dimenziós multitopok kategóriája, az $\mathcal{L}_{\mathrm{cat}}$-ban látható három helyett, $n+2$ szinttel rendelkezik. Ezeknek az $\mathcal{L}_n$ multitop-kategóriáknak a leírása eléggé nehéz feladat; ennek megoldása először a már fentebb említett, Hermidával és Powerral közös cikkemben történt meg. Ugyanakkor újból megjegyzendő, hogy a megoldásban lényegesen segített bennünket Baez és Dolan már szintén említett munkája.

12. Az általános azonosságfogalom

Honnan tudhatjuk, hogy a kategória fogalmának fentebbi FOLDS-beli meghatározása éppen a megfelelő?

A kategóriaelméletben közismert, hogy a *helyes*, a kategóriákra vonatkozó azonosságfogalom az *ekvivalencia*, egy az izomorfiánál gyengébb, de komplikáltabb fogalom. Két kategória $\boldsymbol{X}$ és $\boldsymbol{A}$ *ekvivalensek*, jelölésben $\boldsymbol{X}\cong\boldsymbol{A}$, ha léteznek olyan F: $\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{A}$, G: $\boldsymbol{A}\to\mathbf{X}$ funktorok,

$$X \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} A$$

amelyekre a $G \circ F$: $\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}$, $F \circ G$: $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}$ kompozítumok *izomorfak* az identitásfunktorokkal:

$$G \circ F : X \quad \mathrm{Id}_X \,,\, F \circ G \quad \mathrm{Id}_A$$

Ez az izomorfia fogalmának egy természetesnek tűnő általánosítása, azonban még nem mondtuk meg, mit jelent funktorok izomorfiája! Ezt most nem írom le részleteiben; a funktorok egy izomorfizmusa egy invertálható *természetes transzformácio*[19]: az utóbbi fogalom a kategóriaelmélet sajátos, megkülönböztető jegye, aminek értelmére sok, egyébként jól nevelt matematikust is ismételten emlékeztetni kell.

Annak, hogy miért ez a helyes azonosságfogalom a kategóriákra, az okai ugyanazok, *mutatis mutandis*, mint azt a 7. szakaszban leírtuk a közönséges absztrakt stuktúrák és az izomorfia viszonylatában.

Az első tény azt illetően, hogy a kategória fogalmának az előző szakaszban vázolt formális kodifikációja megfelelő, az, hogy

(4) a kategóriáknak minden az $\mathcal{L}_{\mathrm{cat}}$ szignatúra alapján, a FOLDS nyelvén megfogalmazott tulajdonsága a kategórikus ekvivalenciára nézve invariáns.

Megjegyzem, hogy a FOLDS az első olyan általános logikai nyelv, amely a mondott tulajdonsággal rendelkezik. Peter Freyd már régebben leírt egy diagrammatikus elemeket tartalmazó formalizmust ([Freyd 1976]), amely ugyancsak rendelkezik a kívánt tulajdonsággal, és amely végeredményben *ekvivalens* az $\mathcal{L}_{\mathrm{cat}}$-ra korlátozott FOLDS-szal, de a Freyd-féle formalizmus nem általános logikai nyelv, csak szűken a kategóriákra vonatkozik.

19 Párhuzamos funktorok közötti morfizmusok az úgynevezett *természetes transzformációk*; l. [Mac Lane 1971].

A FOLDS-on keresztül történő megközelítés helyességére mutató tények továbbmennek. A FOLDS formalizmusa azt is megmondja, *mi* egy adott struktúratípusra vonatkozó helyes azonosságelv.

A FOLDS egy tetszőleges $\mathcal{L}$ szignatúrájához hozzá van rendelve egy a tetszőleges M, N $\mathcal{L}$-struktúrákra vonatkozó $M \cong_{\mathcal{L}} N$ reláció, $\mathcal{L}$-ekvivalencia. Ennek formája a következő: $M \cong_{\mathcal{L}} N$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan P $\mathcal{L}$-struktúra, és az

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "m"'] \arrow[dr, "n"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

diagramban szereplő m, n morfizmusok[20], amelyek *szálanként (fiberwise) szürjektívek*. Ez utóbbi fogalom definíciója egy az $\mathcal{L}$ szignatúrakategória struktúrájára való hivatkozással történik; most ezt nem részletezem. A definíció formája mutatja, hogy a fogalom tisztán *szemantikai* jellegű; formulákra nem történik hivatkozás benne.

Midőn $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{cat}$, és M, N kategóriák (tehát nemcsak tetszőleges $\mathcal{L}$-struktúrák), M és N $\mathcal{L}$-ekvivalenciája, $M \cong_{\mathcal{L}} N$, egyenértékű azzal, hogy M és N ekvivalensek a klasszikus értelemben mint kategóriák. Ez a tény azonban nem tautologikusan igaz; bizonyításához (amely persze nem *nehéz*), a kiválasztási axiómára van szükség. Valójában az $\mathcal{L}$-ekvivalencia fogalma, $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{cat}$ esetében, a kategorikus ekvivalencia fogalmának egy revíziója, amely amellett, hogy a szokásos körülmények között megegyezik az eredetivel, a konstruktív halmazelméleti körülmények között jobban működik, mint az eredeti.[21]

A fenti (4)-gyel jelzett tény annak az általános ténynek a következménye, hogy tetszőleges $\mathcal{L}$ mellett az $\mathcal{L}$-feletti FOLDS-beli állítások $\mathcal{L}$-ekvivalenciára nézve invariánsak.

Ennél lényegesen több is érvényes. A FOLDS egész szintaxisa, logikai ekvivalencia erejéig, meg van határozva az $\mathcal{L}$-ekvivalencia fogalma által. A tény az, hogy egy adott a FOLDS szignatúra mellett ha P egy olyan, valamely tetszőleges $\mathcal{L}$-nál bővebb nyelvben elsőrendű logikában megfogalmazott tulajdonság, amely invariáns $\mathcal{L}$-ekvivalenciára:

$$P(M)\ \&\ M{\restriction}\mathcal{L}^{20}\iota \cong_{\mathcal{L}} N{\restriction}\mathcal{L} \Rightarrow P(N),$$

20 Ez hasonló ahhoz, ahogyan az anafunktor fogalma a funktorénak egy revíziója; l. a 10. szakaszt.

21 $M{\restriction}\mathcal{L}$ azt az $\mathcal{L}$-struktúrát jelenti, amelynek adatai az M struktúra $\mathcal{L}$-ra vonatkozó részeként vannak megadva; M egy az $\mathcal{L}$-nál bővebb szignatúra feletti struktúra.

akkor P már megfogalmazható a FOLDS-ban az $\mathcal{L}$ felett: van olyan φ FOLDS-beli formula az $\mathcal{L}$ szignatúra felett, hogy

$$P(M) \Leftrightarrow M\restriction\mathcal{L}\models\varphi.$$

Ez a tétel a FOLDS általános elméletének ez idő szerint legfontosabb eredménye. Azt fejezi ki, hogy a FOLDS szintaxisa *kifejezésképesség tekintetében teljes*; minden olyan tulajdonság, amelyről elvárható, hogy a FOLDS-ban kifejezhető legyen, valóban kifejezhető is. A FOLDS *deduktív teljessége* is fennáll, más szóval a klasszikus Gödel-féle teljességi tétel (lásd pl. [Chang/Keisler 1991]) egy a FOLDS-ra megfogalmazott természetes analogonja érvényes.

Mint mondottuk, a klasszikus kategorikus ekvivalencia egybeesik az $\mathcal{L}$-ekvivalencia megfelelő esetével. A tapasztalat azt mutatja, hogy ez a tény kiterjed a további, kategóriaelméletben használatos ekvivalenciafogalmakra is (megjegyzendő ugyan, hogy ez az egybeesés matematikailag nem triviális). A FOLDS-szal kapcsolatos legfontosabb felfedezésemnek annak felismerését tartom, hogy a FOLDS a kiterjesztett kategóriaelmélet különböző ekvivalenciafogalmainak egységes alapját adja. Megjegyzendő, hogy mindez az anafunktorok lényeges használata mellett történik. Például ha $\boldsymbol{X}$ és $\boldsymbol{A}$ bikategóriák (amely a 2-dimenziós kategória fogalmának egy klasszikus változata, lásd [Benabou 1967]), akkor $\boldsymbol{X}$ és $\boldsymbol{A}$ akkor és csak akkor *bi-ekvivalensek*[22], ha $\boldsymbol{X}^{\#}$ és $\boldsymbol{A}^{\#}$ $\mathcal{L}$-ekvivalensek; itt $\boldsymbol{X}^{\#}$ az $\boldsymbol{X}$-hez kanonikusan hozzárendelt *anabikategória*, egy olyan struktúra, amely a bikategória definíciójában lévő funktorokat anafunktorokkal helyettesíti, $\mathcal{L}$ pedig az anabikategória fogalmához illesztett FOLDS-szignatúra.

13. Záró megjegyzések

A fentiekben a strukturalista programnak csak a kezdő lépéseiről esett szó, és azokról is mindössze célzásszerűen, a tárgyalást a legáltalánosabb vonásokra korlátozva. Természetesen az érdeklődő olvasó többet megtudhat az idézett szakirodalomból. Azonban fontos megjegyezni, hogy a program nem befejezett, még egy igen alapvető értelemben sem: nem mondtuk meg világosan és kimerítően, mik a nyelvtani szabályok, mik a következtetési szabályok, és mik az axiómák. A tény az, hogy ezek még nem állnak végleges formában rendelkezésre, bár sok mindenről már látható, milyen formát fog ölteni.

A FOLDS-ot úgy vezettük be, mint a strukturalista megalapozás logikáját. Azonban vigyáznunk kell, mielőtt a közönséges elsőrendű logikával kapcsola-

22 Angolul „biequivalent", ez a bikategóriák elfogadott „azonosság"-fogalma.

tos tapasztalatainkat az új helyzetre alkalmaznánk. A klasszikus axiomatikus helyzet lényege, hogy egyetlen „homogén" univerzum van, a primitív relációk, operációk az egész univerzumon vannak definiálva, és a kvantorok az egész univerzumon futnak végig. A strukturalista univerzum *struktúrákból* áll; mindegyik struktúra egy meghatározott *szignatúrával rendelkezik;* végtelen sok, egymással összefüggő szignatúra van; és minden kvantor egy meghatározott szignatúrán belüli meghatározott típuson fut végig. Maga a *halmaz* már egy struktúrafajta („összesség egy egyenlőséggel"); a *csoport* egy újabb struktúra-fajta; a *kategória* egy újabb; de még a *halmazok kategóriája is egy újabb fajta* struktúra (ahelyett, hogy egyszerűen *egy bizonyos* kategória lenne). Amennyiben egy bizonyos struktúrán belül (például egy kategórián belül) vagyunk, a FOLDS deduktív mechanizmusa érvényesül az *adott szignatúra feletti* formulákra. De a felépítés lényege a különböző struktúrafajták közötti kölcsönhatások rendszere. Ez a szintaxis szintjén egy a különböző szignatúrákat egymással összekapcsoló formális eljárások rendszerét jelenti; erről a rendszerről fentebb nem esett szó. Ennek a rendszernek a jellegére némi fényt vet a [Makkai 1997] dolgozatokban bemutatott formalizmus. A strukturalista megalapozás formális rendszerének a teljes megfogalmazása még nem történt meg.

Végül hadd említsem meg, hogy a cél egy a cantori halmazelmélettől lényegesen eltérő rendszer felépítése, amelyben a cantori rendszer „kis" és „nagy" összességeinek megkülönböztetése helyett strukturális megkülönböztetésekkel élünk. Szándékosan olyan axiómákat fogunk felvenni, amelyek a cantori „nagyságrendi" szemléletnek *ellentmondanak*. Egy ilyen axióma lesz például két $\boldsymbol{X}$ és $\boldsymbol{A}$ kategória mellett az $\boldsymbol{X}$-ből $\boldsymbol{A}$-ba mutató (ana)funktorok $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}]$ kategóriájának létezése. Ha az olvasó meggondolja, hogy midőn $\boldsymbol{X}$ és $\boldsymbol{A}$ „nagy" kategóriák, úgy, a szokásos halmazelméletben, a $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}]$ kategória két $\boldsymbol{F}$ és $\boldsymbol{G}$ elemének hom $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$ hom-halmaza általában nem *kis* halmaz, akkor látni fogja, miért mond ellent a mondott axióma a cantori szemléletnek. Szemléletesen, azért nem lesz az új rendszer (remélhetőleg) belsőleg ellentmondásos, mert nem szükséges, hogy az $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}]$ kategória az összes funktort *valóban* tartalmazza ahhoz, hogy a rendszeren belül mint a mondott funktorok összessége szerepeljen. Azonban egy valóban ellentmondástalan, és mégis deduktíve erős strukturalista rendszer kidolgozása még sok munkát igényel.

Irodalom

[Baez/Dolan 1995] John C. Baez–James Dolan: Higher-Dimensional Algebra and Topological Quantum Field Theory. *Journal of Mathematical Physics*, 36 k., 6073–6105.

[Baez/Dolan 1998] John C. Baez–James Dolan: Higher-Dimensional Algebra III. n-Categories and the Algebra of Opetopes. *Advances in Mathematics,* 135, 145–206.

[Batanin 1998] M. A. Batanin: Monoidal globular categories as a natural environment for the theory of weak n-categories. *Advances in Mathematics,* 136, 39–103.

[Benabou 1967] Jean Benabou: Introduction to bicategories. *Lecture Notes in Mathematics*, 47 sz., 1–77. New York, Springer Verlag.

[Benacerraf 1965] Paul Benacerraf: What numbers could not be. *Philosophical Review*, 74 k., 47–73.

[Cartmell 1986] John Cartmell: Generalized algebraic theories and contextual categories. *Annals of Pure and Applied Logic*, 82 k., 209–243.

[Chang/Keisler 1991] C. C. Chang–H. J. Keisler: *Model Theory* (3. kiad.). Amsterdam, North-Holland, 1991.

[Dummett 1981] Michael Dummett: Frege: *Philosphy of Language* (2. kiad.) Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1981.

[Frege 1892] Gottlob Frege: Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 100 k., 25–50.

[Freyd 1976] Peter Freyd: Properties invariant within equivalence types of categories. *Algebra, Topology and Category Theory* (A. Heller–M. Tierney, szerk.). 55–61. New York, Academic Press.

[Gödel 1940] Kurt Gödel: The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory. *Annals of Mathematical Studies*, 3 k. Princeton, Princeton University Press. Újranyomva: *Kurt Gödel: Collected Works* (S. Feferman et al. szerk.). 2 k., 33–101. New York, Oxford University Press.

[Henessy/Milner 1985] M. C. Henessy–A. J. R. G. Milner: Algebraic Laws for Non-Determinism and Concurrency. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 32 k.

[Hermida/Makkai/Power 199?] On higher dimensional categories I. Sajtó alatt: *Journal of Pure and Applied Algebra*.

[Hilbert 1899] David: Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*. (7. kiad. (1930), Leipzig–Berlin, Teubner.

[Hilbert 1926] David Hilbert: Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, 95 k., 161–190. Újranyomás: *Philosophy of Mathematics* (P. Benacerraf–H. Putnam, szerk.), Cambridge (Anglia), Cambridge University Press (1983), 183–201.

[Lawvere 1976] F. W. Lawvere: Variable quantities and variable structures in topoi. In: *Algebra, Topology and Category Theory* (A. Heller–M. Tierney, szerk.). New York, Academic Press, 101–131.

[Mac Lane 1971] Saunders Mac Lane: *Categories for the Working Mathematician*. New York, Springer Verlag.

[Mac Lane/Moerdijk 1994] Saunders Mac Lane–Ieke Moerdijk: *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory* (2. újranyomás). New York, Springer Verlag.

[Maddy 1990] Penelope Maddy: *Realism in Mathematics*. Oxford, Clarendon Press.

[Makkai 1996] M. Makkai: Avoiding the axiom of choice in general category theory. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 108 k., 109–173.

[Makkai 1997] M. Makkai: Generalized sketches as a framework for completeness theorems. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 115 k., Part I: 49–79. Part II: 179–212. Part III: 241–274.

[Makkai 1998] Michael Makkai: Towards a categorical foundation of mathematics. *Logic Colloquium '95* (J. A. Makowsky–E. V. Ravve, szerk.). *Lecture Notes in Logic*, 11. sz., 153–190. New York, Springer Verlag.

[Makkai 199?] On structuralism in mathematics. Sajtó alatt: *Macnamara Festschrift* (R. Jackendoff, szerk). Cambridge (Mass), MIT Press.

[Makkai ??] First Order Logic with Dependent Sorts, with Applications to Category Theory. Sajtó alatt: *Lecture Notes in Logic*. New York, Springer Verlag.

[Martin-Löf 1973] Per Martin-Löf: An Intuitionist Theory of Types. *Proceedings of the Bristol Logic Colloquium*. Amsterdam, North-Holland.

[Ruzsa/Máté 1997] Ruzsa Imre–Máté András: *Bevezetés a modern logikába*. Budapest, Osiris Kiadó.