A VÁLTOZTATÁSI HÁNYLAT ALKALMAZÁSA A PROPELLER-FÖLÜLET EGYENLETÉNEK LEFEJTÉSÉRE

MARTIN LAJOS

L. TAGTÓL.

Előadta a III. osztály ülésén 1877. márczius 5.

BUDAPEST, 1877.

A MAGYAR TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

(Az Akadémia épületében.)

Budapest, 1877. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

A VÁLTOZTATÁSI HÁNYLAT ALKALMAZÁSÁRÓL A PROPELLER-FÖLÜLET EGYENLETÉNEK LEFEJTÉSÉRE.

Dr. MARTIN LALOS levelező tagtól.

(Előadta a III. osztály ülésén 1877. márczius 5-én.)

Már hét éve, hogy első munkám a csavarokról a m. t. Akadémia előtt megfordult; hogy milyen sorsban részesült, ismeretes.

Szily Kálmán tagtárs úr, ki két első értekezésemet a leghevesebben megtámadta, a birálatára válaszoló harmadik értekezésem előtt azzal tért ki, hogy »lehozásom azért nem helyes, mivel variatió — számításon nem alapszik.« Furcsa egy ellenvetés, mely csak akkor volna helyes, ha Sz. úr a variátio-számítást, melyet három első értekezésem szándékosan kerülte volt, birálatában felemlítette volna; de mivel ez nem történt, nekem sem lehet hibául felróni, hogy a variátio-számításra nem reflektáltam, a miről különben a megkivántató felvilágosítást már régen megadtam volna, de minthogy Sz. úr számítása közrebocsátását megigérte volt, elébb ezt akartam bevárni. Sajnálom, hogy szavát négy álló éven át be nem váltotta.

Időközben Réthy Mór, kolozsvári collegámnak egy értekezése jelent meg a propeller és peripellerről, mely hasontárgyu értekezésemet megtámadja; ez kényszerít önvédelemre.

Bármily kész is vagyok helyreigazítást bárkitől is elfogadni: de R.-nek azon lefejtéseit, melyeket a prop. és perip.-ről adott, határozottan visszautasítom. Azt hiszem, hogy R., ha azon hibákról (számítási hibákról) értesűl, melyeket értekezésében elkövetett, maga is át fogja látni, hogy neki nem sikerűlt azt bebizonyítni, a mit bebizonyítni akart. Mert olyan értekezés, melyben az alapképletek hibásan vannak írva és helytelenül alkalmazva lettek, s melyben a végeredmény absurdum, ha egyáltalában valamit bizonyítni akar, az legfeljebb csak az lehet: hogy nem mindig tanácsos képleteket használni, mielőtt tisztában nem vagyunk az iránt, vajjon helyesek-e azok, vagy nem?

A mit állítunk, be is kell bizonyítnunk, lássuk tehát: miben van a hiba, hol van az absurdum s végre mi az eredmény, ha mindezt kerülvén, a propeller problemáját variátioszámítás útján megoldjuk.

I.

A »propeller és peripeller-fölületek elméletéhez« czímű értekezés 32 s köv. l. két határeset van letárgyalva, mely mindenekelőtt figyelemre méltó.

Köztudomásu dolog, hogy a variátiók azon alakjai, melyekben a variáló elemek variátiói részletkülzelés alól felszabadultak, mindig kettőre vezetnek: a főegyenletre és a határegyenletre. Amaz adja a görbe vagy fölület egyenletét, emez megint kimondja azon feltételeket, melyek mellett a fölület egyenletében előforduló állandóit meghatározni lehet; s a kivánt megoldás csak akkor lesz befejezve, ha a meghatározás sikerül. *A megoldás súlypontja tehát a határegyenletben fekszik,* mely megint a határfeltételektől függ; tehát természetesen itt kezdjük meg a vizsgálatot A határegyenlet alakja a határfeltételekhez képest igen különféleképp módosítható, de bárhogy is módosítsuk, a dolog mindig csak arra megy ki, hogy az egészelési állandók meghatároztassanak; ha pedig a meghatározás absurdumra vezet, az vagy annak a jele, hogy a meghatározás lehetetlen, vagy hogy a számításban hiba van. Vizsgáljuk most a két határesetet.

Az első így lett előterjesztve: »milyen alaku fölületdarab képezi a leghatályosabb propeller-szárnyat, ha ezen fölületdarabot egyrészről két közös tengelyü s adott sugarú körhenger, másrészről pedig két adott távolságú s a hengerek tengelyére merőleges sík vágja ki.« A felelet reá ez: »véges hosszúságú adott egyenes henger határain belől kiterjeszkedő propellerek közt *nem lehet a leghatályosabb se az Archim.-féle*, se a 10.)-ben foglalt általánosabb csavarfölület.«

A második eset így adatik elő: »melyik szolgáltatja a legjobb propellerszárnyat azon fölületdarabok közt, a melyek határvonalait egyrészről két közös tengelyű adott sugarú hengerre rajzolt különben ismeretlen vonalak, másrészről adott távolságú s a tengelyt merőlegesen metsző két egyenes képezik.« A melyre a felelet ez: »be van tehát bizonyítva, hogy a kitűzött feladatot *az Archimedes-féle csavarfölület megoldja.*

A kettőt összefoglalván, R. tehát azt akarja bebizonyítni, hogy az Archimedes fölületen két kiszelvény létezik: az egyik az első kérdés feltételei szerint van kivágva, s ez nem leghatályosabb; a második a második kérdés feltételei szerint van kimetszve, s ez leghatályosabb. Mind a kettő az Archimedes fölületből lévén kiszelve, a különbség csak a szegélyvonalakban lehet; lássuk tehát ezeket.

Az első kiszelvény fekszik két köztengelyü körhenger s két a tenglyre $\perp$ sík között; a két körhenger metszi az Archimedes fölületet két közönséges csavarvonalban, s a két sík metszi azt két a tengelyre $\perp$ egyenesben. A kiszelvény tehát körül van véve két csavarvonal s két a tengelyre $\perp$ egyenes által; s ezen kiszelvény, R. szerint, nem leghatályosabb.

A második kiszelvény határvonalai, a kérdés feltételei szerint, egyrészről két köztengelyü hengeren levő különben ismeretlen vonalak és másrészről két a tengelyre $\perp$ egyenes; R. a feleletben az Archim. fölületről szólván, vágjunk ki ebből egy ilyen szelvényt. Azon két határvonal, mely a hengeren van, nem lesz akkor többé két ismeretlen görbe, hanem lesz belőle két közönséges csavarvonal; minthogy pedig a másik két határvonal két a tengelyre $\perp$ egyenes: látjuk, hogy ezen a második kérdés feltételei szerint kivágott darabja az Archimedes-féle fölületnek ismét két csavarvonal s két a tengelyre $\perp$ egyenes által van körülvéve, s ilyen szelvény, R. szerint, a leghatályosabb.

Már most a körhengerek sugaraira nézve, úgyszintén az első esetben a két metsző síknak s a második esetben a két a tengelyre $\perp$ egyenesnek egymástóli távolságára nézve sem az első sem a második kérdésben, sem az azokra adott feleletekben megszorító feltétel kikötve nincs, mely a két kiszelvényre nézve különbséget szülne; tehát világos, hogy a két kiszelvény nem egyéb, mint ugyanazon darabja az Archim.-féle csavarfölületnek. Mint ilyen a kettő csak egyenlő hatásu lehet; ámde R. a két kiszelvényre nézve ellenkező eredményre jut, a mi absurdum; mert ugyanazon egy része a fölületnek nem lehet egyidejüleg leghatályosabb és nem-leghatályosabb is. A miből csak az következik, hogy vagy nem igaz az első, vagy nem igaz a második.

A hiba abban van, hogy R. a 17c) alatti kettős feltételt special esetekre alkalmazza, még mielőtt szabad volna azt tenni. Mert ha a 17c) alatti feltételekhez eljutottunk, azzal még nem értük el azon pontot, mely az abból vonható következtetések sora végét képezi; a ki tehát a 17c)-nél megáll, az mintegy féluton áll meg. A 17c) alatti kettős feltétel ugyanis egyelőre csak azt mondja ki, hogy a kifejezés:

$$V - \frac{\partial V}{\partial \pi}\pi$$

olyan függvénye az r és φ-nek, mely, ha r_0 és r_1 közt egészeltetik, mindig null, akár φ_1 akár φ_0 tétessék φ helyett. Ámde φ_1 és φ_0 tetszés szerinti értékek, világos tehát, hogy a két feltétel csak úgy teljesül, ha maga az egészelendő kifejezés minden tetszés szerinti φ_1 és φ_0-nál elenyészik, azaz kell hogy

$$V - \frac{\partial V}{\partial \pi}\pi = 0.$$

S ezzel a 17c) alatti kettős feltétel egygyé forr össze s ez egyszersmind zárpontja azon következtetéseknek, melyek a 17c)-ből vonhatók s csak most szabad az általános lehozatot special esetekre alkalmazni. Ha R. így teszi vala, szépen viszszajő azon 16c''') alatti feltételre, mely máris egyszer kimutatta, hogy az Archim. fölületből szelt kiszelvény nem leghatályosabb.

Különben a mi a két határeset letárgyalását illeti, ez oly furcsa módon megtörtént, mely határozottan mutatja, hogy R. a határegyenlet voltaképi hivatását egészen félreismerte. Mert ha ő a 16c''') alatti feltételt az r-nek a meghatározására tudja fordítni, akkor az olyan eljárás csak következzetlenség. Mert ama feltétel, mint a határegyenlet következménye, nem arra való, hogy vele a fölület egyenletében előforduló változóknak, hanem az abban meglévő egészelési állandók értékeit meghatározzuk, tehát nem r hanem a szerint kellett volna a 16c''')-at feloldani. És ha R. így teszi, rájő, hogy az a szerinte r függvénye volna, a mi absurdum, mivel ezen a nem lehet egyidejüleg állandó is, változó is.

Kimutatván azt, hogy R. az általa letárgyalt határesetekben absurdumot állít, lássuk most a még azonkivűl elkövetett feltünőbb hibákat.

2.

Ismeretes dolog, hogy az első variátióból nyert megoldás voltát a második variatió előjegye dönti meg. A végre a »Prop. és perip. fölül. elm.« 23 s köv. l. oly képlet lett használva, mely állítólag a második variatiót akarja kifejezni, de mely, közelebbről vizsgálva, azt a variatiót még akkor sem fejezi ki, ha az abból kimaradt úgynevezett határrészektől egészen eltekintünk. A hibás képlet nem csak 14) alatt, de egyebütt is egyaránt fordulván elő, sajtóhibának nem tekinthető; nem szenved kétséget, hogy az a szerző hibája, melyet mindjárt az értekezés kezdetén ejt, s mely egyszerűen abból áll, hogy a 14)-ben a jobb kéz felőli háromtagú kifejezés középső tagjából az odatartozó együttható kimaradt. Hogy a hibát constatáljuk, megteszszük a fáradságot s lehozzuk azt a második variátiót.

A végre vegyük elő a »prop. és perip.« 7-dik lapján álló 7) alatti képletet; szerinte van, ha az abban előforduló sajtóhibákat helyreigazítjuk:

$$S = 2\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} \partial r \partial\varphi\, V(r\varrho\pi).$$

Variáljuk azt, de hagyjuk ki a határrészeket, melyekre R. úgy se, legalább e helyen nem reflektál; továbbá hagyjuk ki még a határok kitételét is az egészelési jeleknél, akkor léptenkint lesz:

$$\frac{1}{2}\delta S = \iint \delta V . \partial r\, \partial\varphi$$

$$= \iint \left(\frac{\partial V}{\partial\varrho}\delta\varrho + \frac{\partial V}{\partial\pi}\delta\pi\right)\partial r\, \partial\varphi.$$

Ámde $\delta\varrho = \frac{\partial\delta z}{\partial r}$ és $\delta\pi = \frac{\partial\delta z}{\partial\varphi}$; ha most a részletes és teljes külzeléki hányadosakot Strauch szerint *) egy és két vonással kijelentjük, tekintve hogy:

$$\frac{\partial V}{\partial\varrho}\cdot\frac{\partial\delta z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V}{\partial\varrho}\delta z\right) - \frac{\partial\frac{\partial V}{\partial\varrho}}{\partial r}\delta z$$

és

$$\frac{\partial V}{\partial\pi}\cdot\frac{\partial\delta z}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial V}{\partial\pi}\partial z\right) - \frac{\partial\frac{\partial V}{\partial\pi}}{\partial\varphi}\partial z,$$

ha ezeket bevezetjük, az igenleges részek egészelése után fog maradni:

$$\frac{1}{2}\delta S = -\iint\left[\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial\varrho} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial V}{\partial\pi}\right]\delta z\,\partial r\,\partial\varphi$$

Ezen variátió-alak kerül ki tehát az első alakból, hogy ha δV helyett $-\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial\varrho} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial V}{\partial\pi}\right)\delta z$ tétetik. Legyen rövidség kedvéért:

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial\varrho} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial V}{\partial\pi} = U$$

akkor:

$$\frac{1}{2}\delta S = -\iint U\delta z\partial r\partial\varphi.$$

Ebből a második variátiót lefejtvén, lesz:

$$\frac{1}{2}\delta^2 S = \frac{1}{2}\delta(\delta S)$$

azaz

$$\frac{1}{2}\delta^2 S = -\delta\iint U\delta z\partial r\partial\varphi = -\iint\delta(U\delta z)\partial r\partial\varphi$$
$$= -\iint[U\delta^2 z + \delta U\delta z]\partial r\partial\varphi.$$

Miből, miután U a max. esetében elenyészik, marad:

$$\frac{1}{2}\delta^2 S = -\iint\delta U\,.\,\delta z\,\partial r\partial\varphi.$$

Hogy most a második variatió ezen alakjáról a R.-féle máso-

*) Dr. G. W. Strauch, Theorie und Anwendung des sogen. Variations-Calculs. Zürich II. Aufl. 1854.

dik variátióval felelkező alakjára lehessen átmenni, figyelembe veendő, hogy valamint az első variátió átalakítására szükséges volt hogy:

$$\delta V \text{ helyett}: -\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)}{\partial \varphi}\right].\delta z$$

írjuk, épen úgy leszen most szükséges, hogy per analogiam:

$$\delta U \text{ helyett}: -\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial \varrho}\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial \pi}\right)}{\partial \varphi}\right].\delta z$$

irassék. Ezt megtevén:

$$\frac{1}{2}\delta^2 S = +\iint\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial \varrho}\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial \pi}\right)}{\partial \varphi}\right]\delta z^2.\partial r\,\partial\varphi.$$

Ámde:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial \varrho}\right)}{\partial \varrho} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)}{\partial r}\right)}{\partial \varrho}\right] + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)}{\partial \varphi}\right)}{\partial \varrho}\right]$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho \partial \pi}\right);$$

és hasonlóformán:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial \pi}\right)}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho \partial \pi}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}\right)$$

tehát ha ezeket helyettesítjük:

$$\frac{1}{2}\delta^2 S = +\iint\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \varphi}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho \partial \pi}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}\right)\delta z^2 \partial r \partial \varphi$$

Ebből kitünik, hogy azon képlet, a melylyel R. a második variátiót akarja kifejezni, azt a variátiót épen nem fejezi ki, mert R. a háromtagú kifejezés középső tagját csak *egyszeresen* veszi, holott a lefejtés követeli, hogy a tag *kétszer* vétessék.

Ily körülmény közt világos, hogy a lehozások, melyek a hibás képleten nyugszanak, mint helytelen alapon állók elejtendők.

3.

Miután az elébbi szerint R. értekezése már akkora hibákat tartalmaz, nem csoda, ha az egész munka helyességét kétségbe vonjuk. S valóban, ha a kezdetét vizsgáljuk, mindjárt az elején tapasztaljuk, hogy szerzője egészen tájékozatlan fogott a munkához.

Hiszen ha képletet alkotunk, az első, hogy az alkatrészeket úgy illeszszük össze, a hogy a dolog természete azt kivánja; mert különben koczkáztatjuk, hogy képletünk egészen mást fejez ki, mintsem a mit ki akartunk vele fejezni. Igy ha propellerről szólunk, alatta oly alkotványt értünk, mely — ellenálló közeg közbevetésével — tengely körül végrehajtott forgást egyenes irányu mozgásba akar átváltoztatni; ellenben ha peripellerről szólunk, alatta megint oly alkotványt értünk, mely — ismét ellenálló közeg közbevetésével — egyenes irányú mozgást tengely körüli forgásba átváltoztat. A ki ezekre figyel, azonnal észreveszi a különbséget; az elsőnél a forgás, a másodiknál az egyenes irányú mozgás az *inditó* mozgás. A dolog természete megkivánja tehát, hogy a propellernél a forgás, a peripellernél pedig az egyenes irányú mozgás igenlegesen bevezettessék.

Ha tehát a fölületelem normalisa hajlása a z és v coordináta tengelyekhez — R. szerint — ugyancsak $(z_1 n)$ és $(v_1 n)$-el, továbbá az egyenes irányú, valamint a forgási sebességet u és $(r\omega)$-val kifejezzük, az ezekből eredő két oldalsebesség, mely a normális irányába esik:

$$u \cos(z_1 n) \text{ és } r\omega \cos(v_1 n)$$

ellenkező előjegyű ugyan, de hogy melyik legyen igenleges, melyik nemleges, arról nem a mi önkényünk, hanem egyedül az határoz, hogy mi legyen a fölület feladata; mely mindenesetre megkivánja, hogy az inditó mozgásból eredő componens sebesség positiv mennyiségnek tekintessék. Ebből az elvből indulva ki, világos, hogy a deréklői sebesség

a propellernél:

$$v_n = r\omega \cos(v_1 n) - u \cos(z_1 n)$$

a peripellernél ellenben

$$v_n = u\cos(z_1 n) - r\omega\cos(v_1 n)$$

képlet által fog kifejeztetni.

Ha tehát, R. jeleivel élvén,

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \pi;\ \frac{\partial z}{\partial r} = \varrho;\ \frac{u}{\omega} = k \text{ és } C\omega^2 = 1$$

teszszük, az erőkifejtések a propellernél:

$$Z = \int\!\!\int \partial r\,\partial\varphi .\ \frac{r(\pi - k)^2}{1 + \varrho^2 + \frac{\pi^2}{r^2}}$$

és a peripellernél:

$$M_z = \int\!\!\int \partial r\,\partial\varphi .\ \frac{r\pi(k - \pi)^2}{1 + \varrho^2 + \frac{\pi^2}{r^2}}$$

lesznek. S minthogy a propellerre vonatkozó képlet a Réthyétől lényegesen eltér, következik, hogy mindazon lehozások, melyek a hibás képleten nyugszanak, hibásak. Mert ha, R. szerint:

$$2V = \frac{r(\pi - k)^2}{1 + \varrho^2 + \frac{\pi^2}{r^2}},$$

és

$$s - 1 + \varrho^2 + \frac{\pi^2}{r^2}$$

teszszük, egymásután ezeket nyerjük:

$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} = -\,r\varrho(\pi - k)^2 s^{-2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = +\,r(\pi = k)\left(+ \varrho^2 + \frac{\pi k}{r^2}\right) s^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} = -\,2r(\pi - k)^2 s^{-2} + 4r\varrho^2(\pi - k)^2 s^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho \partial \pi} = -\,2r\varrho(\pi - k)s^{-2} + 4r^{-1}\pi\varrho(\pi - k)^2 s^{-3}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} = +\,rs^{-1} - r^{-1}(\pi - k)(5\pi - k)s^{-2} + 4r^{-3}\pi^2(\pi - k)^2 s^{-3}.$$

Egy szóval a képletek egészen más alakot nyernek.

Hogy R. lehozásai tehát azon alapon nem állanak, melyen kell hogy álljanak, mindezekből már világos. Lássuk már most a lefejtés menetét, ha mind azon hibákat kerüljük, melyeket R. elkövetett.

4.

A propeller tengelynyomása legyen a képlet által kifejezve:

$$Z = 2\int\int V \partial r \partial \varphi,$$

a melyben, mint már tudjuk:

$$2\,V = f(r\pi\varrho k)$$

és

$$f(r\pi\varrho k) = \frac{r(\pi - k)^2}{1 + \varrho^2 + \frac{\pi^2}{r^2}}$$

A feladat most az, olyan:

$$z = F(r\varphi)$$

függvényt a variátió-számítás útján kitalálni, melynél a Z tengelynyomás maximum vagy minimum. Mielőtt a kettős egészletet valamely míveletnek alávetjük, szükségesnek tartom a következőket előrebocsátani.

Tudvalevő dolog, hogy az ilyen egészlet variátióit két különböző alakban lehet előállítani; az egyik az, melyben a variált elemek részletkülzeléseknek vannak még alávetve, s a második az, a melyben azok a részletkülzelések alól már felszabadultak. Tehát két út áll előttünk: az egyik ha az első-, a második, ha a második variátió-alakot választjuk. R. egyenesen a második alakhoz nyul; hogy mi okból, azt nem mondja. Pedig a dolog most az: ha úgy valakinek kedve jönne, a mire különben, ha czélom szűk kerete azt most megengedné, magam is hajlandó volnék épen azt a variátió-alakot vizsgálni, melyet R. minden indokolás nélkül ignorál; és ha abból kiderűl, a mint az tényleg csakugyan van is, hogy három első értekezésem lefejtései nem mások, mint azon eredmény, mely kikerűl, ha azt az első variátió-alakot vizsgáljuk: akkor hová jut Szily úrnak azon ellenvetése, hogy lefejtéseim azért nem helyesek, mivel variátió-számításon nem nyugszanak?

De eltekintve attól, tegyük fel, hogy mi is egyenesen a második alakhoz fordulunk, akkor szükséges megint, hogy egészelési határokat bevezessünk. Legyenek

$$r_1 \quad \varphi_1 \quad r_0 \quad \varphi_0$$

a kérdéses határok. Mielőtt azokat a kettős egészletre alkalmazzuk, elébb tisztába kell jönnünk az iránt, vajjon feltétlenűl vagy csak feltételesen lehet-e határokat bevezetni. Mert van eset rá, hogy egy általános egészlet bizonyos határok közt véve, képtelenséget jelent, így pl.:

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

képtelenség, ha $a > 1$.

Hogy a képtelenség esete mindjárt eleve kizárassék vegyük elő a tengelynyomás képletét:

$$Z = 2\int\int V\partial r\partial\varphi$$

Ez nem más, mint azon eredmény, mely ki kerül, ha a külzeléki képlet:

$$\partial^2 Z = 2V\partial r\partial\varphi$$

kétszer egymásután egészeltetik; s a mely azon végtelen kis nyomást fejezi ki, mely a fölületnek egy tetszés szerinti pontjában fejlődik. A végtelen kis nyomás iránya függ a deréklő sebesség irányától, úgy hogy:

$\partial^2 Z \gtreqless o$ a szerint, a mint $v_n \gtreqless o$. De $v_n = o$ a szerint, a mint $(\pi - k) = o$.

A π egyelőre még határozatlan függvény; de bármely alakot adunk is neki, mindig csak két eset lesz gondolható: a π t. i. mindenesetre vagy állandó vagy változó; s a mig ez iránt megállapodás nincs, mind a kettőt kell egyaránt lehetőnek tekinteni.

Legyen tehát először a π állandó, akkor $(\pi - k) = \text{const.}$ s világos, hogy miután az egész kiszelvény nyomása a maxim. esetében csak $> o$ lehet, a $(\pi - k)$ is csak $> o$. De ily körülmény közt lesz $\partial^2 Z$ is, a fölület minden pontjában $> o$: azaz, ha π constans, akkor nincs fölületelem, a melyben $\partial^2 Z$ nemleges értéket kapna. Ebből viszont következik, hogy ama kettős egészlet oly természetü, hogy nemleges része nincs, ha π constans.

Legyen ezután megint a π változó: akkor addig is, míg más korlátozó feltétel fel nem merűl, fel kell tennünk, hogy a

π a $(+\infty)$-től a $(-\infty)$-ig változhat, minthogy pedig a k ugyanazon határok közt fekszik, világos hogy $\pi - k \gtreqless o$ lehet, tehát a $\partial^2 Z$ is $\gtreqless o$ ha π változó; még pedig $\partial^2 Z$ fölület azon pontjaira nézve igenleges, a melyekben $\pi > k$, ellenben nemleges, a melyekben $\pi < k$. Ha tehát az egészletet mint összegnek a határát tekintjük, úgy ama kettős egészlet, ha a π változó, két részből fog állani; az egyik rész az igenleges-, a másik rész a nemleges nyomásu elemeket fogja magában foglalni. S a két rész közös határát azon elemek fogják képezni, a melyekre nézve $\pi = k$. Ebből, miután $\pi = \frac{\partial z}{\partial \varphi}$, ha φ szerint egészelünk:

$$z = k\varphi + b$$

nyeretik, mely nem más, mint egyik projectiója azon görbének, mely az igenleges és nemleges rész közös határán elvonul. Hogy a görbe még más két projectiója nyeressék, figyelemben tartandó, hogy maga a görbe a propeller felszinén fekszik. A fölület, igaz ugyan, még nem ismerszik, de egyenlete mindenesetre ez:

$$z = F(r\varphi).$$

Ha most ebből és a már ismeretes projectió egyenletéből vagy a z vagy φ elimináltatik, a görbe másik két projectiója nyeretik; mely közől most csak az fontos, mely az $(r_1\varphi)$ coordinátasíkban fekszik s a melynek egyenlete ez:

$$k\varphi + b = F(r_1\varphi)$$

vagy φ szerint feloldva:

$$\varphi = \lambda(r).$$

Nevezzük ezt a görbét röviden λ görbének.

Ha ezek után $r_1\ \varphi_1\ r_0\ \varphi_0$ határokat ama kettős egészletre alkalmazzuk, a most letárgyalt két esetet kell szemmel tartanunk. Tegyük fel tehát először, hogy a meghatározandó fölület azok osztályához tartozik, a melyeknél a π változó, akkor maga az egészlet egy igenleges és nemleges nyomásu részből áll, melyek közös határában a λ görbe fekszik. Még pedig az egyik rész $r_1\ \varphi_1$ határoktól λ görbéig, a másik rész megint a görbétől $r_0\ \varphi_0$ határáig fog elterjeszkedni. Az elsőnek a nyomása lesz:

$$2\int_{r(\lambda)}^{r_1}\int_{\varphi(\lambda)}^{\varphi_1} V\partial r\partial\varphi\,;$$

a második résznek a nyomása megint:

$$2\int_{r_0}^{r(\lambda)}\int_{\varphi_0}^{\varphi(\lambda)} V\partial r\partial\varphi\,;$$

s az egész kiszelvény nyomása végtére:

$$Z=2\int_{r(\lambda)}^{r_1}\int_{\varphi(\lambda)}^{\varphi_1} V\partial r\partial\varphi-2\int_{r_0}^{r(\lambda)}\int_{\varphi_0}^{\varphi(\lambda)} V\partial r\partial\varphi.$$

A mely képletben a $r_1\ \varphi_1\ r_0\ \varphi_0$ határok még egészen tetszés szerintiek, ellenben az $r(\lambda)$ és $\varphi(\lambda)$ határok a λ görbéhez kötve vannak.

Ha pedig másodszor felteszszük, hogy a meghatározandó fölület azok osztályához tartozik, melyeknél a π constans, akkor, miután az ilyeneknél nemleges rész nincs, világos, hogy az egész kiszelvény hatása e képlet által lesz kifejezve:

$$Z=2\int_{r_0}^{r_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} V\partial r\partial\varphi,$$

a melyben tehát bizonyos λ görbéhez kötött határok nem fordulnak elő.

Mivel most előre nem lehet tudni, hogy milyen a π maximum esetében, világos, hogy mind a két egészlet-alak megvizsgálandó. Mert a ki csak az egyiket nyomozza, az már a priori felteszi, hogy a maximum mindazon megoldás közt nincs, melyek a másik alakból lehozhatók, a mi addig is, míg más körülmények fön nem forognak, félszeg egy eljárás volna. Igy, mivel R. csak azon alakot vizsgálja, mely constans π-nél jogszerű, világos hogy lehozásai már hiányosak, és mivel ő ezen constans π-re vonatkozó egészlet-alakból olyan megoldásokat is akar lehozni, melyeknél a π utólagosan változónak bizonyul be, eljárása egészen helytelen, mivel az egészlet alakja oly alapon áll, mely változó π-t kirekeszt. A ki pedig az ilyen eljárásban helytelenséget nem lát, az felteszi, hogy mi képesek vagyunk egy képletből még olyasmit is kikapni, a mire az, benső okoknál fogva, nem képes felelni.

Hogy ezeknek helyes értelmét még jobban kiemeljem, tegyük fel, hogy

$$2\int\int V\partial r\partial\varphi = \psi(r_1\varphi)$$

akkor:

$$2\int_{r(\lambda)}^{r_1}\int_{\varphi(\lambda)}^{\varphi_1} V\partial r\partial\varphi = \psi(r_1\varphi_1) - \psi(r_\lambda\varphi_1) - \psi(r_1\varphi_\lambda) + \psi(r_\lambda\varphi_\lambda)$$

$$2\int_{r_0}^{r(\lambda)}\int_{\varphi_0}^{\varphi(\lambda)} V\partial r\partial\varphi = \psi(r_\lambda\varphi_\lambda) - \psi(r_\lambda\varphi_0) - \psi(r_0\varphi_\lambda) + \psi(r_0\varphi_0)$$

ennek folytán lesz változó π-nél:

$$Z = \psi(r_1\varphi_1) - \psi(r_\lambda\varphi_1) - \psi(r_1\varphi_\lambda) + \psi(r_\lambda\varphi_0) + \psi(r_0\varphi_\lambda) - \psi(r_0\varphi_0).$$

Ellenben constans π-nél lesz:

$$Z = \psi(r_1\varphi_1) - \psi(r_1\varphi_0) - \psi(r_0\varphi_1) + \psi(r_0\varphi_0).$$

A mely két képlet nyilván mutatja, hogy a második képlet, mint speciál eset az elsőben bennefoglaltatik, de megfordítva az első nincs a másodikban bennfoglalva. A két képlet közt tehát lényeges különbség van, ugy hogy változó π-re vonatkozó megoldást a constans π-re vonatkozó képletből sem nem lehet, sem nem szabad lehozni.

5.

Ezeket előrebocsátván, variáljuk a két képletet: akkor, Strauch (Theorie und Anw. d. sogen. Variations-Calc. Zürich. 2-te Ausg. 1854.) jeleivel élvén, változó π-nél:

$$\frac{1}{2}\delta Z = \int_{\varphi_\lambda}^{\varphi_1}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial\varrho}\partial z\right) - \left(\frac{\partial V}{\partial\varrho}\right)_{r_\lambda}\right]\partial\varphi$$

$$-\int_{\varphi_0}^{\varphi_\lambda}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial\varrho}\partial z\right)_{r_\lambda} - \left(\frac{\partial V}{\partial\varrho}\partial z\right)_{r_0}\right]\partial\varphi$$

$$+\int_{r_\lambda}^{r_1}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\delta z\right)_{\varphi_1}-\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\delta z\right)_{\varphi_\lambda}\right]\partial r$$

$$-\int_{r_0}^{r_\lambda}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\delta z\right)_{\varphi_\lambda}-\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\delta z\right)_{\varphi_0}\right]\partial r$$

$$-\int_{r_\lambda}^{r_1}\int_{\varphi_\lambda}^{\varphi_1}\left[\frac{\partial \frac{\partial V}{\partial \varrho}}{\partial r}+\frac{\partial \frac{\partial V}{\partial \pi}}{\partial \varphi}\right]\delta z\,\partial r\,\partial \varphi$$

$$+\int_{r_0}^{r_\lambda}\int_{\varphi_0}^{\varphi_\lambda}\left[\frac{\partial \frac{\partial V}{\partial \varrho}}{\partial r}+\frac{\partial \frac{\partial V}{\partial \pi}}{\partial \varphi}\right]\delta z\,\partial r\,\partial \varphi$$

ellenben állandó π-nél lesz:

$$\frac{1}{2}\delta Z=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\delta z\right)_{r_1}-\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\delta z\right)_{r_0}\right]\partial \varphi$$

$$+\int_{r_0}^{r_1}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\partial z\right)_{\varphi_1}-\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\partial z\right)_{\varphi_0}\right]\partial r$$

$$-\int_{r_0}^{r_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left[\frac{\partial \frac{\partial V}{\partial \varrho}}{\partial r}+\frac{\partial \frac{\partial V}{\partial \pi}}{\partial \varphi}\right]\delta z\,\partial r\,\partial \varphi$$

A két képlet összehasonlítása mutatja tehát, hogy a *föegyenlet mind a két esetben egy és ugyanaz, de a határegyenletekben van lényeges eltérés.*

A *föegyenlet* mindkét esetben ez:

$$\frac{\partial \frac{\partial V}{\partial \varrho}}{\partial r}+\frac{\partial \frac{\partial V}{\partial \pi}}{\partial \varphi}=0.$$

A *határegyenletek* pedig

változó π-nél, rövid összevonás után, ezek:

$$\int_{\varphi_\lambda}^{\varphi_1}\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\delta z\right)_{r_1}.\,\partial\varphi - \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\delta z\right)_{r_\lambda}.\,\partial r + \int_{\varphi_0}^{\varphi_\lambda}\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\delta z\right)_{r_0}.\,\partial\varphi = 0$$

és

$$\int_{r_\lambda}^{r_1}\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\delta z\right)_{\varphi_1}.\,\partial r - \int_{r_0}^{r_1}\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\delta z\right)_{\varphi_\lambda}.\,\partial r + \int_{r_0}^{r_\lambda}\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\delta z\right)_{\varphi_0}.\,\partial r = 0,$$

állandó π-nél megint ezek:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\delta z\right)_{r_1} - \left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\delta z\right)_{r_0}\right].\,\partial\varphi = 0$$

és

$$\int_{r}^{r_1}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\delta z\right)_{\varphi_1} - \left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\delta z\right)_{\varphi_0}\right].\,\partial r = 0$$

6.

A főegyenlet másodrendű partiális differentiál-egyenlet Mind Szily, mind R. urak mindjárt neki fogtak a megoldásához, de eredmény nélkül; egy pár singulár esetet kivéve, mind a kettő kénytelen volt elállani, az utóbbi kérdésesnek tartja még, »hogy általános megoldása véges alakban egyáltalában előállítható-e vagy sem.« Azt hiszem, mielőtt a fáradságot veszszük a főegyenlet megoldásait keresni, elébb tisztában kell lennünk aziránt, vajjon lesze-e szükségünk a megoldásokra vagy nem; és csak akkor ha reá szorulunk, tegyük meg a munkát. Különben nem az a kérdés a dologban, hogy milyen alakban lehet az egyenlet megoldásait előállítni? a súlypont egészen máshol keresendő.

Ama főegyenletnek mint másodrendű differentiál-egyenletnek megoldásai egyáltalában három osztályba oszthatók fel; az elsőhöz az általános-, a másodikhoz az egyszerű singulár-, a harmadikhoz a kétszer singulár egészletek fognak tartozni. És az első osztálybeliek *két-,* a második osztálybeliek *egy* *arbiträr függvénynyel-,* a harmadosztálybeliek legalább is *két arbiträr állandóval* fognak birni.

Ámde bármilyenek is a főegyenlet megoldásai, azok közt mindig csak azokat lesz szabad használni, a melyek azon kettős egészlet természetével felelkeznek, a melyből a főegyenlet leszármazottnak tekintetik. Ha azon képletből indultunk ki, melynrl a π változónak tétetik fel, akkor a főeegyenletnek mindazon megoldásai kirekesztendők, melyeknél a π állandó; ellenben ha azon képletből indulunk ki, melyre nézve π állandónak tétetik fel, mindazon megoldások lesznek kirekesztendők, melyeknél a π változó. Ez okból tehát ama másodrendű differentiál-egyenletnek valamennyi megoldását két osztályba kell felosztanunk: az első osztályhoz azok fognak tartozni, melyeknél a π változó, a másodikhoz ismét azok fognak tartozni, a melyeknél a π állandó. A megkülönböztetés pedig azért szükséges, mivel a megoldás a π-nek természete szerint különböző határegyenleteknek kénytelen eleget tenni.

A mi most a főegyenletnek azon megoldását illeti, mely constans π-nél jogszerű, ez könnyen meghatározható. Mert feltéve hogy:

$\pi = a$, miután $\pi = \frac{\partial z}{\partial \varphi}$ lesz, ha mindjárt egészelünk:

$$z = a\varphi + b,$$

melyben a és b két arbiträr állandót jelent. Tekintve most, hogy a végrehajtott egészelés csak azt kivánja, hogy az egészelési állandó φ-től független legyen, b helyett: $[bf(r)]$-et is lehet tenni, a miből aztán:

$$z = a\varphi + bf(r)$$

nyeretik. Ez tehát mindazon fölületeknek az általános egyenlete, a melyeknél a π állandó. és a melyeknek a lehozása csak akkor jogszerű, ha mi azon képletből indulunk ki, a melynél constans π feltétetik.

Ámde az ezen általános egyenlet által kifejezett fölületek közt csak egyetlen egy van, mely a főegyenletnek eleget tesz. Lássuk a levezetését. Az utolsó egyenletet r szerint külzelvén lesz:

$$\varrho = \frac{\partial z}{\partial r} = bf'(r).$$

Ez oly kifejezés mely φ-től független és a π is mint állandó a φ-től független, a $2V$ pedig $=f(r\pi\varrho k)$, azért látjuk, hogy a φ a V-ben sem explicite, sem implicite elő nem fordul, világos tehát, hogy a φ a $\frac{\partial V}{\partial \pi}$ hányadosban sem fog előfordulni, tehát ha ezt φ szerint külzeljük:

$$\frac{\partial \frac{\partial V}{\partial \pi}}{\partial \varphi} = 0$$

leend. De ilyen körülményben a főegyenlet maga ezen alakba megy át:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)}{\partial r} = 0,$$

miből, ha egészelünk:

$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} = \text{const.}$$

következik.

Ha most $\frac{\partial V}{\partial \varrho}$-nak a 3. §-ban lefejtett értékében a π helyett a tétetik:

$$-\, r(a-k)^2_\varrho = \text{const.}\left(1 + \varrho^2 + \frac{a^2}{r^2}\right)^2$$

vagy ha $(a-k)^2$ állandó szorzó, a constanshoz csatoltatik:

$$-\, r\varrho = C\left(1 + \varrho^2 + \frac{a^2}{r^2}\right)^2$$

elsőrendű differentiál-egyenlet nyeretik, mely azon a módon egészelve, melyen R. azt megtette, ezeket adja:

$$\text{constans} = al$$

$$r = a\sqrt{\frac{l^2 s^4 + 1}{s-1}}$$

$$bf(r) = \frac{al}{2}\left\{\frac{3s^2}{2} - s - \text{log.nat.}(s-1) - \frac{2}{l}\text{arc.tg.}ls^2\right\} + \text{const.}$$

és

$$z = a\varphi + \frac{al}{2}\left\{\frac{3s^2}{2} - s - \text{log.nat.}(s-1) - \frac{2}{l}\text{arc.tg.}ls^2\right\} + \text{const.}$$

S ez most azon fölület egyenlete, mely a π constans s mely egyuttal a főegyenletnek eleget tesz. Az egyenletben három állandó fordul elő; a legvégén álló const. azonban az $(r_1 \varphi)$ coordinátasík parallel eltolásával elenyésztethető lévén, ha azt tehát kihagyjuk, még csak két állandó: a és l marad meg, mely aztán a határegyenlet által lesz meghatározandó. Minthogy most ezen állandó π-nél jogszerű egyenletben csak két állandó fordul elő, világos, hogy *az a főegyenletnek egy kétszer singular egészlete.* És ezen kétszer sing. egészleten kivűl nincs más megoldás, melynél a π állandó volna.

A többi megoldás tehát mind olyan, a melynél a π változó. A megoldások pedig vagy általános, vagy egyszerü singular egészletei lesznek a főegyenletnek. Ezek, vagy két, vagy egy arbiträr függvényt tartalmazván, ha ξ és χ két ily arbiträr függvény, az általános alakok által:

$$z = F(r\varphi\xi\chi)$$

vagy:

$$z = F(r\varphi\xi)$$

lesznek képviselve. S ezen két alakon kivűl más nincs, mely a főegyenletnek eleget tehetne és a melynél a π változó is.

Ezek mindazon megoldások, melyekről egyáltalában szó lehet.

7.

Ismervén a főegyenlet minden lehető megoldását, szükséges, hogy azokat meghatározzuk, a melyek a felelkező határegyenleteknek eleget tesznek, kirekesztvén azokat, a melyek a határegyenletnek eleget nem tesznek. Mert csak azon fölület lesz alkalmas, mely mind a főegyenletnek, mind a határegyenletnek, a határok bizonyos viszonya mellett, egyaránt megfelel; a mely fölület pedig a kettő közől akármelyiket is nem valósítja, nem lesz alkalmas. Mert ha a főegyenlet egyedül valósul, akkor az első variatió határrészei fognának megmaradni s ez okból az első variatió nem enyészvén el, a maximumhoz megkivántató egyik feltétel nem teljesül.

A végre vegyük először azon megoldásokat elő, a melyeknél a π változó. Ezek, mint már tudjuk, csak két alakkal birnak:

$$z = F(r\varphi\xi\chi) \text{ és } z = F(r\varphi\xi).$$

A határegyenlet, ha π változó, mint fönebb láttuk, az

$r_1\ \varphi_1\ r_0\ \varphi_0$ adott határokon kivül még $r_\lambda\ \varphi_\lambda$ határokat is tartalmaz. Amazok még egészen tetszés szerintiek, de ezek a λ görbéhez vannak kötve; a határegyenlet beigazítása tehát még csak az $r_1\ \varphi_1\ r_0\ \varphi_0$ határok megállapítása körül forog. A négy határra nézve csak két eset gondolható. Az első az, ha a négy adott határ független egymástól; a második eset az, ha a négy határ között valami függőség létezik. Hogy a kettő között melyik legyen megengedhető, azt csak maga a megoldás természete határozza meg, mely csak azt köti ki magának, hogy a benne előforduló arbiträr függvények, variabilis π mellett, meghatároztassanak.

Tegyük fel tehát először, hogy a négy határérték független egymástól, akkor világos hogy δz a négy független, de adott, tehát fix határra nézve elenyészik, úgy hogy $\delta z_{r_1}=o$; $\delta z_{r_0}=o$; $\delta z_{\varphi_1}=o$; δz_{φ_0}. Ez okból tehát a szorzatok: $\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\delta z\right)$ és $\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\delta z\right)$, ha a négy fix határra vonatkoztatjuk, megsemmisülvén, a felelkező egészletek is a két határegyenletben megsemmisülnek, marad tehát azokból:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\delta z\right)_{r_\lambda}\partial\varphi = 0 \text{ és } \int_{r_0}^{r_1}\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\delta z\right)_{\varphi_\lambda}\partial z = 0$$

a mi megint csak úgy teljesül, ha:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\delta z\right)_{r_\lambda} = 0 \quad \text{és} \left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\delta z\right)_{\varphi_\lambda} = 0.$$

Vizgáljuk a két feltételt. Ezekben váltakozva r_λ és φ_λ van mint jelző kitéve, melylyel csak azt jelentjük ki, hogy az első feltételben az r, a másodikban megint a φ csak azon értéksort futja át, a mely λ görbére vonatkozik. Az r és φ a két esetben tehát nem független, hanem λ görbétől függő érték; ennélfogva tehát a δz is ezen λ görbétől függvén, a zeroval identicus függvénynek nem tekinthető. Hogy tehát a két feltétel teljesüljön, kell hogy legyen:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)_{r_\lambda} = 0 \text{ és } \left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)_{\varphi_\lambda} = 0.$$

A két feltételben az r és φ jelző, mint már tudjuk, λ görbéhez van kötve. A λ görbe pedig kikerült a feltételből:

$$\pi = k.$$

Ezen r és φ tehát a k-nak függvényei. De mi a k? Ez olyan arbiträr állandó, melyről a propeller általános feltételeiben csak az lett kikötve, hogy a meghatározandó fölület minden pontjában ugyanazon egy értékkel birjon. Az nem zárja ki azt, hogy ezen k ugyanazon egy fölületnél esetről esetre majd ilyen, majd olyan értéket fel ne vehessen. De a λ görbe a k-tól függvén, alakját és fekvését a fölületen megváltoztatja, mihelyt a k értéke megváltozik. A k-nak ezen értékváltozása határhoz nincs kötve; tehát fel kell tennünk, hogy az a $+\infty$-től a $(-\infty)$-ig változhat. Ha most felteszszük, hogy ezen k a $(+\infty)$-től a $(-\infty)$-ig valamennyi értéken áthalad, akkor a λ görbe alakja és fekvése is minden lehető változáson megy keresztül. Tehát nincs pontja a fölületnek, melyen a λ görbe a k valamely értékénél keresztül ne mehessen. Ez arra vezet, hogy a λ görbéhez kötött r és φ jelzők, a fenti két feltételben, a λ görbével együtt a fölület minden pontjára vonatkoztatandók. Igy állván a dolog, a két feltételt még így is lehet irni:

$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} = 0 \text{ és } \frac{\partial V}{\partial \pi} = 0.$$

A mely azonban nem más, mint azon két feltétel, mely a már ismeretes kétszer singular esetnél előfordult, de a melynek itt azon okból nem lehet helyet adni, mivel a két feltétel csak állandó π-nél jogszerű, a mi a mostani esettel ellenkezik, mely épen felteszi, hogy a π változó.

E szerint látjuk tehát, hogy a határegyenlet, mihelyt a határok függetlenek, nem valósítható, ha π változó. Tegyük fel tehát másodszor, hogy a határok függők. Ha ezek függők, akkor φ_1 φ_0 és r_1 r_0 közt valamely relatio fog fenállani, mely nem más, mint azon görbe vonalak egyenletei, melyek a kiszelvény szegélyvonalait képezik. Ámde a határegyenlet ama szegélyvonalakra vonatkozó r_1 φ_1 r_0 φ_0 határokon kivül még a λ görbére vonatkozó r_λ φ_λ határokat is foglalja magában. A λ görbe pedig független ama szegélyvonalaktól s viszont ezek is attól függetlenek. Ennélfogva azon feltételeken kivül, melyek az $r_1\ \varphi_1\ r_0\ \varphi_0$ határok függőségéből előkerülő szegélyvonalakra vonatkoznak, még azon feltételek is fognak fönállani melyek a λ görbéhez csatolvák, s melyek szerint, mint már tudjuk, kell hogy legyen:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)_{r_\lambda} = 0 \text{ és } \left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)_{\varphi_\lambda} = 0$$

Minthogy pedig a λ görbe a mostani esetben k-nak a függvénye, mely k, mint már tudjuk, minden lehető értékre képes, világos hogy λ-tól függő két feltétel ugyanazon eredményre vezet, mint az elébb a független határok esetében; a mi ismét arra vezet, hogy a határegyenlet nem valósítható, miután a λ görbéből eredő feltétel csak állandó π-nél valósítható, mig ellenben a határegyenlet változó π-t tesz fel, a mi lehetetlen, miután a π nem lehet egyidejüleg állandó is, változó is.

Ezeket összefoglalván, látjuk, hogy a határegyenlet változó π-nél, akár független, akár függő határokat teszünk is fel, nem teljesül. Ebből következik, hogy a főegyenlet azon megoldásai, melyeknél a π változó, elejtendők, mivel szerintök a határegyenlet absurdumra vezet, mely onnan ered, hogy a λ görbétől függő feltétel állandó π-t követel, a mi a határegyenlet természetébe ütközik.

Azon fölületek sorában tehát, melyek a változó π-re vonatkozó osztályhoz tartoznak, egyetlen egy sincs, mely az akármilyen határok közt vett

$$Z = 2\iint V \partial r \partial \varphi$$

egészletet maximummá tenné.

Az általános és egyszer singular egészletek tehát nem vezetnek czélra.

8.

Tudván most azt, hogy a változó π semmire sem vezet, az állandó π-re vonatkozó eseteket kell megvizsgálnunk.

Ha π állandó, akkor csak egyetlen egy megoldás áll rendelkezésre. Szerinte van:

$$\pi = a$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} = al$$

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = r(\pi - k)\left(1 + \varrho^2 + \frac{\pi k}{r^2}\right)\left(1 + \varrho^2 + \frac{\pi^2}{r^2}\right)^{-2}$$

és

$$z = a\varphi + \frac{al}{2}\left\{\frac{3s^2}{2} - s - \text{log. nat.}\,(s-1) - 2l^{-1}\,\text{arc. tg.}\,ls^2\right\}$$

A határegyenlet pedig a mostani esetben csak arra fog szolgálni, hogy a fölület egyenletében előforduló a és l állandók meghatároztassanak. Ha ez sikerül, akkor kétség sincsen, hogy ama fölület az a és l-nek ezen értékeinél a kivánt maximumot megadja; ha ez azonban nem sikerül, bármi okból is, akkor ama fölület nem adja meg a kivánt maximumot. Mert ha az a és l-et a határegyenlet szerint meg lehetett határozni, akkor a δz-nek nem csak azon része fog megsemmisülni, melyből a főegyenlet előkerült, hanem még azon részei is elenyészni fognak, a melyekből a határegyenlet lehozatott, s miután a δz-nek ezeken kivül más része nincs, világos hogy a $\delta z = 0$ lesz. De ha az a és l a határegyenletből folyó feltételek által meg nem határozható, akkor a határegyenlet nem valósul, következéskép a határrészek nem enyésznek el és ennek folytán δz nem $= 0$; a maximumhoz megkivántató feltétel tehát nem teljesül.

A határegyenlet alakja a mostani esetben egyszerűbb; a λ görbétől függő részek nem fordulnak elő, noha ezek az állandók meghatározását nem gátolnák, mert olyan feltételeket vonnak maguk után, melyek a megvizsgálandó eset természetével nem ellenkeznek.

Ezek után vegyük elő az állandó π-re vonatkozó határegyenleteket. Az $r_1\,\varphi_1\,r_0\,\varphi_0$ határok iránt megállapodás még nem történvén, ismét két esettel állunk szemben: a határok lehetnek vagy függetlenek vagy függők. Ha először felteszszük hogy függetlenek, akkor δz-nek a határokra vonatkozó értékei mind semmisek lévén, maguk a szorzatok is; $\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\delta z\right)_{r_1}$; $\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\delta z\right)_{r_0}$; $\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\delta z\right)_{\varphi_1}$; $\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\delta z\right)_{\varphi_0}$ megsemmisülnek; minek folytán maguk az egészletek is elenyészvén, s a két határegyenlet identicussá válván. semmi sem maradna meg, mit az a és l

állandók meghatározására lehetne fordítni. A míg tehát a határok függetlenek, az a és l határozatlan marad. A problemát tehát fel nem oldottnak kell tekinteni, mert a fölület mindaddig nem szerkeszthető, a mig ezen a és l értéke a mértékegységben kifejezve nincs; a mi csak akkor lesz meg, ha a és l mint a k-nak függvénye lesz előállítva. Ezen k képezi a kapcsot, mely a képzeletet a valósággal összefűzi.

Független határokkal czélt nem érvén, tegyük fel másodszor, hogy a határok függők. A feltevés alatt a δz az r_1 φ_1 r_0 φ_0 határokra nézve már nem semmis, hanem oly függvény, mely az r_1 φ_1 r_0 φ_0 határok közt fönálló függőséghez kötve van. A függőség nem más, mint azon görbék kifejezései, melyek a kiszelvényt körülveszik. Ily körülmény közt kétféle lehet az eljárás. Lehet t. i. feltenni, hogy a V-ben csak a függő elemek variáltatnak, vagy lehet azt is feltenni, hogy a V-ben még független változók is variálnak. Hogy mi az eredmény e második esetben, azt már a R. értekezése mutatta: az eredmény t. i. negativ. Ha pedig az első eljárást követjük, akkor a fönebb lehozott határegyenletek jogszerűek, a melyek csak úgy valósulnak, ha egyidejüleg s egyenkint áll:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)_{r_1}=0;\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)_{r_0}=0;\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)_{\varphi_1}=0;\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)_{\varphi_0}=0;$$

Amde a fönebbi szerint volt:

$$\frac{\partial V}{\partial \varrho}=al;$$

a két első feltételből következik tehát hogy:

$$al = 0 \text{ azaz } l = 0.$$

S azzal a fölület egyenletében az egyik l állandó meg lett határozva. Ha értékét az egyenletébe bevezetjük, nyeretni fog:

$$z = a\varphi.$$

Ez nem más, mint az Archimedes-féle csavarfölület egyenlete, a melyben azonban az a állandó meghatározva még nincs. *A kétszer singulár eset tehát csak akkor nyujt reményt a maximumra, ha az Archimedes-féle csavarfölületet képez. Mihelyt pedig a feltétel nem teljesül,* mihelyt t. i. l nem semmis, *szó sem lehet arról, hogy a kétszer singular egyenlet által* *képviselt fölület maximumot adna.* mert ha $l \gtreqless o$, akkor $\frac{\partial V}{\partial \varrho}$ is $\gtreqless o$, s így a határegyenlet azon részei, melyek $\frac{\partial V}{\partial \varrho}$ hányadossal kapcsolatban állanak, nem enyésznek el, következéskép a δz-nek azon részei, a melyek a $\frac{\partial V}{\partial \varrho}$ hányadossal kapcsolatban állanak, megmaradnak, s így a maximumhoz megkívántató feltétel nem valósul.

Feltéve tehát, hogy $l=0$, s hogy ennélfogva a propeller Archim. fölületet képez, a mely ez egyenlet által

$$z = a\varphi$$

van repräsentálva, akkor hátra van még az a állandónak a meghatározása. Ha ez is sikerül, akkor kétség sincs, hogy az Archim. fölület a leghatályosabb propeller-szárnyat szolgáltatja, de ha — nem sikerül? — — nem akarok elébe vágni; határozzuk csak meg azt az a-t.

A még hátralevő állandó meghatározására rendelkezésünkre van azon két feltétel, a mely a határegyenletből még fönmaradt. Szerintök van:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)_{\varphi_1} = 0 \text{ és } \left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)_{\varphi_0} = 0.$$

A fönebbiek szerint volt:

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = r(\pi - k)\left(1 + \varrho^2 + \frac{\pi k}{r^2}\right)\left(1 + \varrho^2 + \frac{\pi^2}{r^2}\right)^{-2}$$

Miután a fölület az első határfeltételnek megfelelt, lesz:

$$\varrho = 0; \text{ és } \pi = a.$$

Ennek következtében lesz:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)_{\varphi_1} = \left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)_{\varphi_0} = r(a - k)\left(1 + \frac{ak}{r^2}\right)\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-2}.$$

A mi csak úgy valósúl, ha:

$$a - k = 0,$$

vagy:

$$1 + \frac{ak}{r^2} = 0,$$

vagy;

$$1 + \frac{a^2}{r^2} = \infty$$

Az elsőt feltéve, lenne: $a=k$. Ez valós érték, de el nem fogadható, mivel a tengely nyomását kifejező képlet $(a-k)^2$ tényezőt magában rejti; ha ez megsemmisül, vele együtt a nyomás is elenyészik, a mi nem lehet maximum.

A másodikot feltéve, lenne: $a=-\frac{r^2}{k}$, a mi azért nem fogadható el, mivel aszerint az a az r-nek függvénye volna, a mi absurdum, mert ezen a nem lehet egyidejüleg állandó is változó is.

A harmadikat téve fel, lenne megint $a=\infty$, ami szintén el nem fogadható, mivel az Archimedes-féle csavarfölület azon esetben, ha $a=\infty$, egy a forgási tengelyen keresztülmenő síkba degenerál, s az ilyen sík propellerhatást elő nem hozhat.

A három eseten kivül más nem lévén, következik tehát, hogy amaz Archim. fölület egyenletében előforduló a állandónak valós értéke nincs, a melynél a hátralevő határfeltétel teljesül. Mivel pedig ez így van, következéskép a határegyenlet felelkező része az Archim. fölületnél nem enyészik el, maga a határegyenlet tehát nem realizálható; ennek folytán a δz-nek azon részei, melyekből a határegyenlet kikerült, nem semmisek; a maximumhoz megkivántató sarkfeltétel tehát nem teljesül. Ebből következtetjük, *hogy még a kétszer singular egészlet sem vezet czélra.*

Azzal a főegyenletnek minden lehető megoldása ki van merítve. A végeredmény az: *hogy nincs fölület, mely akár függő, akár független határoknál az egészletet:*

$$Z = 2\int\int V \partial r \partial \varphi$$

maximummá tenné.

9.

Vessünk most egy rövid pillantást a multakra.

Első értekezésem egy az Akadémia körén kivül álló bizottságnak lett kiadva; birálata körülbelől az, melyet Kruspér tagtárs úr, második értekezésem felolvasása után, egészen magára vállalt volt s mely az elsővel együtt kinyomatott.

Ama bizottság kifogásolta azt, hogy azon képlet, melyből első alkalommal kiindultam, »olyan speciális eseten« alapszik, melyet a »későbbi eredmények nem igazolnak.« Mnthogy a bizottságnak ezen állítása csakugyan igaz, de minthogy az erre támaszkodó itélet, hogy lehozásom ez okból helytelen benső meggyőződésemmel ellenkezett: a második értekezésben a kifogásolt hiányt helyrehoztam. Kimutatván azt, hogy még azon esetben is, ha, azon általános nézpontból indulván ki, melyre a bizottság utalt, a képletet általánosítjuk, ennek megfejtése mégis megínt azon speciál képletre vezet vissza, melyet ama bizottság elkárhoztatott.

A második felolvasás után a dolog egészen szünetelt. Három év mulva, megúnván a várakozást, megsürgetésemre kitünt, hogy az akadémiai birálatok ellenkezőleg szólnak, tehát Szily úr lett mint harmadik biráló megbizva, ki nem is késett a rá következő osztályülésen azon birálatot bemutatni, mely kivánatára első értekezésemhez lett csatolva. A birálat hangsulyozza, hogy az általános képlet megfejtése két oly partiális differentiálquotienssel szolgál, melyek, ha a fölület differentiáljába átvitetnek, egy nem integrabilis differentiálegyenletre vezetnek. Minthogy Szily úrnak ezen állítása csakugyan igaz, de minthogy az abból vont következtetése: hogy lehozásom ez okból helytelen, benső meggyőződésem szerint nem igaz, igyekeztem egy harmadik értekezésben a felmerülő akadályt felvilágosítni. Kimutatván azt, hogy ama nem integrabilis egyenlet nem csak azt be nem bizonyítja, a mit Szily úr állít, hanem ellenkezőleg, hogy épen ezen nem integrabilis egyenlet bizonyság rá, hogy a mentelékes csavarnál előnyösebb csavar nincs.

Szily úr, a helyett hogy a tárgynál megmaradt s vagy elismerte vagy megczáfolta volna, a mi a harmadik értekezésben mondatik, azon váddal lépett föl, hogy számitásom a variatiószámítást kerüli.

Már most igaz, hogy a három értekezésem a variatiószámításra nem csak nem reflectál, de sőt óvatosan kerüli. Az ok azonban a mostani után magától is világos. Eljárásom hasonlít azon ismeretlen tájakon barangoló utas eljárásához, ki a meredek sziklát inkább körüljárja, hogysem megmászásán nyakát koczkáztassa. Igazán megvallom, nagyon el voltam csodálkozva, midőn Szily úr kijelentette volt, hogy ő a propeller problémát variatiószámítás utján megoldotta.

De hol állunk most?

A harmadik értekezés, melyet Szily úr a variatiószámítással agyonhallgattatni akart, most czáfolat nélkül maradt. A variatiószámítás az egyszer felmondta a szolgálatot. Tehát hol állunk most?

Én azt hiszem nem marad egyéb hátra, mint »szépen, csöndesen« még egyszer *azon »primitiv« eljáráshoz* visszatérni, melyet Szily úr rajtam oly igen neheztelt, s azzal együtt a második és harmadik értekezésben lehozottakat elfogadni.

A

TELJES HOLDFOGYATKOZÁS

1877. február 27-én

és az

1877. (Borelli) I. számu üstökös

SZINKÉPÉNEK MEGFIGYELÉSE

AZ Ó-GYALLAI CSILLAGDÁN.

KONKOLY MIKLÓS

L. TAGTÓL.

(Felolvasta a III. osztály ülésén 1877. márczius 5.)

BUDAPEST, 1877.

A M. T. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ HIVATALA.

(Az Akadémia épületében.)

Budapest, 1877. Nyomatott az A t h e n a e u m r. társ. nyomdájában

Teljes holdfogyatkozás

1877. február 27-én.

Theoria szerint a holdnak, a mint a föld árnyékába egészen belép, láthatatlanná kellene válnia. Ez az eset azonban csak igen ritkán fordúl elő, mert a hold még a teljes bemerüléskor is látható, és gyengén vörhenyes szinünek mutatkozik. Kepler 1601. deczember 9-én és 1620. junius 15; figyelte meg és irta le ezt a tüneményt. Hevel 1642. april 25-én és Londonban 1816. junius 10. ugyanezt látták többen. Kepler azt mondja: »a hold azért nem enyészik el egészen, mert a nap sugarai a föld légkörében megtöretve, behatolnak a geometriai árnyékkúpba, s a helyett, hogy ott teljes sötétség támadna, vörös vagy vörhenyes szin mutatkozik, mivel a nap sugarai, ha a föld légkörének legalsóbb részén hatolnak át, mindig vörösen látszanak.« Ebből azt is következteti Kepler, hogy a minő a levegő állapota ott, hol a nap sugarai a föld légkörét érik, olyan szin idéztetnék elő a holdon. Erre alapitva, Messier 1783-ban a hold felületét különböző szinben akarta megvilágitva látni, sőt már 1779-ben Helfenzrieder is vett észre egyenetlen megvilágitást. Az idősebb Herschel azt hitte, hogy a hold vörös szine az ő saját világitásától származnék; azonban a nagy tudós figyelmét kikerülte az, hogy ha ez lenne az ok, akkor a vörös szint minden ujholdkor kellene látni, a mi tudvalevőleg nem úgy van, ha csak a hold másodrendü világitását nem tartanók annak, minek oka azonban egészen máshol keresendő.

Ennél sokkal érdekesebb az az állitás, hogy a vörös fény a nap koronájától ered. Mivel a nap koronája sokkal nagyobb a napnál, nem is kell valami nagy sugártörésről gondoskodni, hogy a vörös fény támadásának okát kihozzuk;*) mert az árnyékkúp csúcsa, melyet ez idéz elő, a hold pályáján sokkal belül esik.

A február 27-iki holdfogyatkozásnál meg akartam győződni, vajjon a vörös fény csakugyan a nap koronájától eredhet-e?

Ha a vörös fény a koronától származik, akkor a korona három fényes csikjának okvetetlenül ép ugy meg kell látszania a spectroscopban, mint ahogy meglátszik a hydrogen vagy bármely izzó gáz csikja akkor, ha vele papirernyőt vagy bármi mást megvilágitunk. A reflectált fény t. i. csak azokat a csikokat idézi elő a spectrumban, melyeket az egyenesen jött fény előidézne, ha az elegendő fénynyel bir.

Erre alapitva, február 27-én, különböző szóró erejü spectroscopokat készitettem el magam mellé, hogy netalán szükséges változtatással időt ne veszitsek. Legelőször egy 5 prizmás nagy szóró erejü Browning-féle spectroscopot alkalmaztam, később egy kisebbet, szintén Browning-féle prizmákkal, de csekélyebb szóró erővel; az első hasadékkal és négyszeres nagyitásu távcsővel volt fölszerelve, a második hasadékkal ugyan, de távcső nélkül.

Midőn a hold földünk árnyéka közepébe ért, elkezdtem a vizsgálatot a nagy szóró spectroscoppal. A spectrum igen gyenge, folytonos volt, melyben lehetett látni a nátrium vonalon kivül az **E**, **b** csoportot s **F** vonalokat.

A spectrum az **F**-en túl már nem volt látható; azonban a látható rész elég gyenge volt arra, hogy bármilyen gyenge szines csikot meg lehessen benne látni. De szines csik seholsem mutatkozott. Hogy meggyőződjem arról, hogy nem a spectroscop nagy szétszóró ereje okozta a fénytelenséget, megkisérlettem a gyengébb szóró erejü spectroscopot, hol ismét ugyanazt láttam, mint az előbbiben. Megkisérlettem a hasadékot a hold különböző részére beállitani, de sem a spectrum intensitásában, sem más egyébben semmiféle különbséget sem vehettem észre.

---

*) A korona színe ugyan zöld s nem vörös.

E vizsgálat után valószinünek tartom, hogy a holdnak vörös szine a teljes fogyakozásnál nem származik a nap koronájának reflectált fényétől; vagy az olyan gyenge, hogy a reflexio által végkép elenyészik, mire a spectroscopba érne. Secchi kimondása szerint, azon vörös szin előidéztetésére nagy befolyással lehet azonban egy két nagy protuberantia.

A másik nézet: miszerint a hold vörös szine a teljes fogyatkozásnál csupán csak a légkörünkben megtört napsugaraktól származna, kétségbevonni ámbár nem lehet, de csodálatos az, hogy a Brewster-féle absorbtio vonalak a hold szinképében nem látszanak, holott olyan Fraunhofer vonalak, melyek azoknál sokkal gyengébbek, jól láthatók. Ilyenek a b csoport, s az E vas vonal.

Igen kivánatos volna, ha az augusztusi teljes fogyatkozás előtti délutánon olyan megfigyelők, kik nagy szóró erejü spectroscoppal birnak, a protuberantiák helyzetét meghatároznák, s a chromosphéráról pontos rajzot csinálnának, s a hold felületén netalántán felmerülő fényegyenetlenségeket szintén pontosan feljegyezve azokkal összehasonlitanák. Ámbár ezen megfigyelést nem tartom oly egyszerünek, mint az az első pillanatra mutatkozik, de épen nem kivihetetlen.

1877. I. számu (Borelli) üstökös szinképe.

Borelli ezt az üstököst ez év febr. 8-án Marseille-ben fedezte fel. Mozgása oly óriási, hogy a lefolyt néhány hét alatt az egész északi félgömböt befutotta. Az ó-gyallai csillagdán folytonos borult idő miatt nem lehetett felkeresni, ámbár, mint irták, felfedezésekor elég fényes volt. Később tisztábbak lettek az esték, de ekkor meg a hold gátolt. Addig, mig én a holdat vizsgáltam, a teljes fogyatkozás alatt inditványomra Dr. Schrader ur, azt megkereste.

Én még azon este, természetesen a holdfogyatkozás alatt, reánéztem a spectroscoppal és azonnal felismertem, hogy spectruma igen hasonló az Encke üstököséhez, s három szines csikból áll, melyek közől a középső legfényesebb, és leggyengébb az mely a spectrum kevesbbé törékeny vége felé áll.

Miután már a teljes fogyatkozás véget ért, nem volt időm rajta további méréseket tehetni, csak becsültem a vonalok helyzetét, melyeket scála részekben kifejezve a vöröstől számitva: 7, 10 és 14-en találtam; azonban márczius 1-én este sikerült 8 beállitást tennem; a 8 beállitásból a közép érték hullámhosszaságban kifejezve a következő:

		Hullámhosszaság
1877. márczius 1.	1	555.25 m. m. m.
8^h k. i.	2	518.70 m. m. m.
	3	476.61 m. m. m.

A spectrum fénye különben igen gyenge; az a vonal, mely a vöröshöz legközelebb áll, megvilágitott scálával csak néha látható, a csikok fényteljessége a következő arányban áll: 1, 5 és 3.

Márczius 2-án még 6 beállitást tettem, constatálandó a tegnapi megfigyeléseket. Ma a hold már későbben jött fel, több időm volt a scála megvilágitásával experimentálni, melyet a minimumra kellett lehozni.

Ha e hat beállitásból ismét közép értéket veszünk, úgy az egyes vonalak helyzete lesz:

		Hullámhosszaság
1877. márczius 2.	1	555.98 m. m. m.
8^h k. i.	2	516.60 m. m. m.
	3	476.47 m. m. m.

Ha ezen két estei megfigyelésnek ismét a középértékét veszem, azt hiszem az összesen 14 beállitásból igen közel jövök a csikok helyzetének valóságához, s a három csik hullámhosszasága a következő lesz:

		Hullámhosszaság
Közép 14 beállitásból	1	555.6 m. m. m.
	2	517.7 m. m. m.
	3	476.5 m. m. m.

Lecoque de Boisboudran szerint a szén-hydrogen vonalainak helyzete: 562. 9; 516.1 és 473.8. Az én méréseim az üstökös szinképén ettől igen csekély eltérést mutatnak, mint a következő táblácska mutatja:

Sorszám	☄ hullámhosszas.	Szénhydrogen hullámhosszas.	Δ Szénhydr.—☄ hullámhosszas.
1	555.6	562.9	7.3 m. m. m.
2	517.7	516.1	1.6 m. m. m.
3	476.5	473.8	2.7 m. m. m.

Ezek után azt hiszem, ki lehet mondani, hogy az 1877. évi Borelli-féle I. számu üstökösben szintén van szénhydrogén, mint az üstökösök legnagyobb részében, melyeket eddig a spectroscop hasadékán át vizsgáltak.

Polarizált fényt a legérzékenyebb polariscopokkal sem voltam képes láthatni.