24. η

CASSIOPEIAE KETTŐS CSILLAG

MOZGÁSÁRÓL.

IRTA

Dr. GRUBER LAJOS.

EGYETEMI MAGÁNTANÁR.

A III. osztály ülésén 1877. jan. 8. előterjesztette Kondor Gusztáv.

BUDAPEST. 1877.

A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

(Az Akadémia épületében.)

Budapest, 1877. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

24. η Cassiopeiae kettös csillag mozgásáról.

Dr. GRUBER LAJOS-tól.

η Cassiopeiae mint kettős csillag már I-ső Herschel által fedeztetett fel, ki azt 1779. körül észlelte és a harmadik (III. 3.) osztályba sorozta. Struve csillag jegyzékében 60 sz. alatt fordul elő; egy 4-ed és egy 8-ad rendü csillagból áll, melyek helyzet-szöge (ang. posit.) a 93 évi észlelési időköz alatt 86·6 fokkal változott. Miután egymástóli távolságukban szintén jelentékeny változás figyeltetett meg, e kettős-csillagrendszer pályaszámitása ma már meglehetős biztossággal eszközölhető. De mielőtt az észleleteket pályaszámitás céljából megbeszélném, össze akarom állítani a fốcsillag megfigyeléseit, és azokból az egész rendszer látszólagos mozgását levezetni. Az eddig közlött mozgások ugyan, a »The madras gen. Cat.«-ban lévőt kivéve, meglehetősen össze-egyeznek, azért még sem tartom fölöslegesnek azt újból leszármaztatni.

A különböző csillag-jegyzékekben elő forduló positiók, észlelési idők szerint rendezve a következők:

I. Táblázat.

sz.	év	Rectascensio	Declinatio	kútforrás	AR. 1850.	Dcl. 1850.
1	1755	$0^h 34^m 27^s 70$	$+ 56^0 30' 32'' 4$	Bradley 79	$0^h 39^m 50^s 32$	$+ 57^0 1' 51'' 7$
2	1800	—	—	(Piazzi) Bradley	55.81	30 .5
3	1800	0 37 2.92	+ 56 45 7.3	Lalande 1271	53.60	35 .8
4	1830	0 38 52.07	+ 56 54 40.6	Argelander 19	40 0.53	25 .8
5	1835	0 39 9.91	+ 56 56 15.1	Mad. Cat. 230	1.27	11 .5

sz.	év	Rectascensio	Declinatio	kútforrás	AR. 1850.	Dcl. 1850.
6	1836	0h 39m 14s14	+ 56° 56 35″9	Rümker 185	0h 40m 2s06	+ 57° 1′ 12″.4
7	1840	0 39 28.00	+ 56 57 47.3	Robinson 164	2.26	4 .8
8	1840	0 39 (30)	+ 56 57 53.85	Greenw. Cat. (1843)	—	11 .4
9	1845	0 39 45.57	+ 56 59 30.1	Radcliffe 211	2.71	8 .8
10	1845	0 39 44.92	+ 56 59 27.7	Grombr. 146	2.06	6 .4
11	1845	0 39 45.59	+ 56 59 30.2	Twelve Years Cat. 46	2.73	8 .9
12	1850	0 40 3.39	+ 57 1 7.31	Green. App. II. 46	3.39	7 .3
13	1860	0 40 39.13	+ 57 4 19.1	» » I. 56	4.81	1 .7
14	1860	0 40 39.28	+ 57 4 18.6	Sec. Radcl. 80	4.96	1 .2
15	1864	0 40 53.45	+ 57 5 36.5	Greenw. Cat. 91	5.37	0 .1
16	1866	0 41 0.69	+ 57 6 14.7	Engelman	5.76	0 58 .8
17	1872	0 41 (22)	+ 57 8 8.46	Radcliffe 35.	—	52 .2

Ezekből nyerjük:

		évi változás.
AR. 1850·0 =	$0^h 40^m 3^s320$	$+ 0^s1459$
Dcl. 1850·0 =	$+ 57^0 1' 6''58$	$- 0''500$

mely értékek 1. táblázatban még a következő hibákat hagyják fenn:

	AR.-ban;	Dcl.-ban		AR.-ban;	Dcl.-ban
1	+ 0ˢ86	— 2″.4	11	+ 0·14	— 0 ·2
2	— 0·21	— 1 ·1	12	+ 0·07	+ 0 ·7
3	— 2·42	+ 4 ·2	13	+ 0·03	+ 0 ·1
4	+ 0·13	+ 9 ·2	14	+ 0·18	— 0 ·4
5	+ 0·13	— 2 ·6	15	+ 0·01	+ 0 ·5
6	+ 0·78	— 1 ·2	16	+ 0·11	+ 0 ·2
7	+ 0·40	— 6 ·8	17	—	— 3 ·4
8	—	— 0 ·2			
9	+ 0·52	— 0 ·3			
10	— 0·53	— 2 ·7			

Miután az ujabb észleletek a fentebbi értékek által igen szépen ki vannak fejezve, nem tartottam szükségesnek a későbbi positióknak nagyobb súlyt tulajdonitani, s az egész rendszer mozgása e két egyenletben van képviselve:

$$\alpha = 0^h 40^m 3^s 320 + 0^s 1459\ [\text{év} - 1850.]$$

$$\delta = +57^\circ 1' 6'' 58 - 0'' 500\ [\text{év} - 1850.]$$

A csillagpár helyzetszögi és távolsági mérései 1872-ben kezdődnek, s rövid megszakadás után századunk kezdetén, 1820. óta rendesen történnek. Miután könnyebb áttekintés végett az ugyan egy észlelőtől származó és rövid időközre vonatkozó észleleteket csak közép értékben közlöm, következő 2. táblázathoz jutok. A helyzetszögek mindannyian

$$d\theta = [20''056(\text{év}-1850.) + 0''000\,045(\text{év}-1850.)^2] \sin\alpha . \sec.\delta$$

képlet szerint számittattak át az 1850-iki normal délkörre, hol θ a helyzetszöget, α és δ a főcsillag egyenes emelkedését és elhajlását jelenti. Hasonlólag a távolságmérések, a mennyire lehetséges*) volt, Struve-re számitvák át

2. Táblázat.

korszak	Helyzet-szög	Távol-ság	Észlelő	korszak	Helyzet-szög	Távol-ság	Észlelő
1780·15	—	11''3	Herschel I.	1838·68	92°·70	9''477	Galle
1782·40	60°·22	—	»	1840·14	97 ·84	8 ·977	Kaiser
1803·10	70 ·85	—	»	1841·76	97 ·74	9 ·247	Mädler
1814·10	74 ·66 (?)	9''697	Bessel	1844·57	100 ·15	8 ·648	»
1820·20	80 ·70	10 ·092	Hersch II. South	1851·78	107 ·68	7 ·725	»
1821·04	80 ·66	8 ·605	W. Struve	1851·88	106 ·85	8 ·132	Miller
1826·50	84 ·38	9 ·890	»	1853·20	109 ·28	7 ·585	Mädler
1828·83	86 ·51	10 ·188	Herschel II.	1855·12	110 ·79	7 ·625	»
1829·59	86 ·56	10 ·068	»	1856·40	113 ·84	7 ·517	Dembowski
1830·67	87 ·36	9 ·978	»	1857·30	114 ·26	7 ·146	Mädler
1830·75	86 ·27	10 ·070	Bessel	1859·27	115 ·68	6 ·964	»
1831·75	88 ·75	9 ·562	Herschel II.	1862·20	119 ·22	6 ·964	»
1832·05	87 ·63	9 ·780	Struve	1864·22	123 ·95	6 ·835	Dembowski
1832·87	88 ·70	9 ·544	Dawes	1865·59	125 ·50	6 ·525	Engelman
1835·26	91 ·25	9 ·520	Struve	1868·18	131 ·26	6 ·405	Dembowski
1836·74	92 ·14	9 ·395	»	1872·11	138 ·17	6 ·000	»
1837·62	92 ·56	9 ·638	Encke	1875·56	145 ·45	5 ·483	Gruber

*) Struve Mensur. microm. CXXXVIII. Struve (1822.) $\Sigma = \Sigma' - 0''185$

Herschel II. és South (1823.) $\Sigma = Sh - 0''588$

South (1825.) $\Sigma = S - 0''428$

Herschel II. (1829.) $\Sigma = h - 0''312$

Dawes (1832.) $\Sigma = D - 0''196$

Herschel (1832.) $\Sigma = h' - 0''128$

Bessel (1831.) $\Sigma = B - 0''003$

Ezen adatokat a számitásra közvetlenül nem alkalmazom, hanem mint ilyen esetben felette czélszerű, y szegvényekként rajzoltam fel magamnak a helyzetszögeket*) és távolságokat az időhöz mint x szegvényhez egy derékszögü szegvény-rendszerben. Az így nyert pontokon keresztül a legalkalmasabb görbe vonalat szemmérték szerint húzván, 2·5 évről 2·5 évre a következő értékeket olvashatjuk le, melyek egyszersmind a későbbi számitás alapjául szolgálnak. — ϱ a távolságot jelezi.

3. Táblázat.

korszak	θ.	ϱ.
1810	73°55	—
1812·5	75·28	—
1815	76·96	10''60
1817·5	78·59	10·60
1820	80·21	10·50
1822·5	81·81	10·43
1825	83·43	10·33
1827·5	85·11	10·20
1830	86·86	9·96
1832·5	88·71	9·76
1835	90·68	9·52
1837·5	92·78	9 27
1840	94·99	9·06
1842·5	97·32	8·87
1845	99·77	8·60
1847·5	102·33	8·30
1850	105·00	8·05
1852·5	107·83	7·76
1855	110·87	7·53
1857·5	114·15	7·27
1860	117·69	7·01
1862·5	121·49	6·80
1865	125·56	6·59
1867·5	129·96	6·35
1870	134·68	6·10
1872·5	139·70	5·85
1875	145·00	5·60

*) Természetesen ív mértékben.

A kettős csillagok egymáshozi mozgásában nem vagyunk képesek más törvényt feltételezni, mint azt, mely az egész mindenséget a mennyire ismerjük kormányozza, s azért itt is a Newton-féle alaptételből kell kiindulnunk. A főcsillag látirányára merőleges és annak közép pontján keresztül menő síkot alap (xy) síknak veszem, melyben x északnak, y nyugot felé számitandó, s melyre z mint harmadik szegvény függőleges és a föld felé való irányban tevőleges (positiv).

Ha továbbá r a két csillag térbeni távolságát, t az időt, és μ a rendszer Gauss-féle állandóját fejezi ki, akkor a három mozgási egyenlet leend:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2}+\mu.\dfrac{x}{r^3}=0 \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2}+\mu.\dfrac{y}{r^3}=0 \\[2ex] \left[\dfrac{d^2z}{dt^2}+\mu.\dfrac{z}{r^3}=0\right] \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.)$$

$$\text{és } x^2+y^2+z^2=r^2$$

Legyen k^2 naprendszerünk Gauss-féle állandója, $m'+m''$ a kettős csillagrendszer egész tömege, kifejezve a naptömeg egységében, nemkülönben R földünk távolsága a naptól, és π a csillag évi látszöge (parallaxis). Ha most az utóbbi két mennyiség segélyével az egyenes vonalu szegvényeket ív másodperczekre változtatjuk*), μ helyébe lép:

$$\mu=\frac{k^2.(m'+m'')\,\pi^3}{R^3}$$

Képviselje a a kettős csillag pályájának, — mely természetesen kerekény leend, — fél nagy tengelyét, g és γ pedig egyrészt a föld, másrészt a kisérő csillag középső szögsebességét, úgy nyilván:

$$g^2=\frac{k^2\,(1+m)}{R^3},\ \text{és}\ \gamma^2=\frac{\mu}{a^3}=\frac{k^2\,(m'+m'')\,\pi^3}{R^3.a^3}$$

hol m a föld tömege. Ebből következik:

$$\frac{g^2}{\gamma^2}=\frac{1+m}{m'+m''}.\left(\frac{a}{\pi}\right)^3=T^2 \quad \ldots\ldots \quad (2.)$$

ha T a kettős csillag forgási idejét — években — jelenti.

---

*) $x=x''\dfrac{R}{\pi}$; $y=y''\dfrac{R}{\pi}$; $z=z''\dfrac{R}{\pi}$ és $r=r''\dfrac{R}{\pi}$

A (2.) egyenletből, ha π ismeretes a rendszer tömegét lehet számitani, de az másrészt $m' + m'' = 1 + m$ tévén az ugynevezett feltételes (hypotheticus) látszög számitására is szolgálhat.

A helyzet-szögek mérése lényegesen pontosabb a távolság méréseknél, s azért a pálya elemeinek leszármaztatásánál csak is a nagy tengely megállapitásában szokás a távolságokra figyelmet forditani. Létezik azonban bizonyos összefüggés a látszólagos távolok (ϱ) és a helyzetszögek (ϑ) között, mely könnyen arra szolgálhat, hogy a ϑ-k a távolok értelmében még kissé javittassanak, s ily formán a távolság-méréseknek is csekély befolyás engedtessék az eredményre. Az előbb mondottak szerint ugyanis: $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$, miután ϑ északról nyugoton keresztül számittatik körben, és $r = \varrho \sec \varepsilon$, ha ε a vezér sugár vetületi szöge.

Ezeket az (1.) egyenletekbe helyettesitvén, az első két egyenlet ismert átváltoztatások után átmegyen a következő különzéki egyenletbe:

$$0 = 2 \frac{d\varrho}{dt} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} + \varrho \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

miből egészelés utján: $\frac{1}{2} \varrho^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \text{állandó} = \chi$ . . (3.)

$\varrho^2 \frac{d\vartheta}{dt}$ nem más mint felület-gyorsaság, tehát a felület-gyorsaság Keppler-féle törvénye a vetületi kúpszeletre is érvényes, csak azon megjegyzéssel, hogy ϱ a vetületi kúpszeletnek nem vezérsugara, minthogy a vetületben a gyúpontok nem fedik egymást. (3.) továbbá egyenlő:

$d\vartheta = 2\chi . \frac{dt}{\varrho^2}$; újból T és t határok között

egészelve: $$\vartheta = \Theta + 2\chi \int_T^t \frac{dt}{\varrho^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (4.)$$

hol Θ a T-nek megfelelő helyzetszög.

A fent nevezett összefüggés (3.) és (4.) által van adva. A helyzetszögek javitására lényegben ugyanazon módot fogom követni, melyet Dr. Schur W. használt 70 p. Ophiuchi kettős csillagnál, csak $\frac{d\theta}{dt}$; és az egészlet számitására más képletet akarok magamnak keresni, mely ha talán nem is egyszerűbb, de nézetem szerint pontosabb mint az, melylyel Schur élt. Taylor tantéte szerint általánosan:

$$\theta = f(T+nw) = f(T) + \frac{nw}{1} \cdot f'(T) + \frac{(nw)^2}{1.2} f''(T) + $$
$$+ \frac{(nw)^3}{1.2.3} f'''(T) + \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{in infinitum.}$$

Ha tehát $f'(T)$-t azaz $\frac{d\theta}{dt}$-t 3 megelőző és 3 következő θ-ból számitom, az által tekintetbe veszem még a 6-od rendü különzéki hányadost is. θ értékei legyenek sor szerint: ${}_3\theta\; {}_2\theta\; {}_1\theta\; \theta\; \theta_1\; \theta_2\; \theta_3$, akkor:

$$\theta_3 - {}_3\theta = 6.(w) f'(T) + \frac{27}{3} . (w)^3 f'''(T) + \frac{243}{60} . (w)^5 \overset{V}{f}(T)$$

$$\theta_2 - {}_2\theta = 4.(w) f'(T) + \frac{8}{3} . (w)^3 f'''(T) + \frac{32}{60} . (w)^5 \overset{V}{f}(T)$$

$$\theta_1 - {}_1\theta = 2.(w) f'(T) + \frac{1}{3} . (w)^3 f'''(T) + \frac{1}{60} . (w)^5 \overset{V}{f}(T)$$

A baloldal a 3. táblázatból ismeretes lévén, $f'''(T)$ és $\overset{V}{f}(T)$ kiküszöbölhető, s marad:

$$2f'(T) = 2\frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{2.w}(\theta_1 - {}_1\theta) - \frac{19}{63.w}(\theta_2 - {}_2\theta) + \frac{1}{30.w}(\theta_3 - {}_3\theta) \quad (5.)$$

w jelen esetben 2·5 (év). A (4.) képlet föntebbi megjelzés szerint irható:

$$\theta = \Theta + 2\chi \int_{T}^{T+nw} \frac{dt}{\varrho^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4.a)$$

Ezeket előre bocsájtva, χ számítása (3.) és (5.) szerint nem leend nehéz, és a 4. táblázat magyarázatra nem szorul.

4. Táblázat.

év	$\frac{d\theta}{dt}$	χ
1815	0·658	36·97
1817·5	0·647	36·35
1820	0.642	35·39
1822·5	0·648	35·41
1825	0·656	35·00
1827·5	0·681	35·43
1830	0·716	35·51
1832·5	0·760	36·20
1835	0·812	35·96
1837·5	0·860	36·95
1840	0·905	37·14
1842·5	0·954	37·36
1845	0·999	36·94
1847·5	1·041	35·86
1850	1·093	35·41
1852·5	1·167	35·14
1855	1·259	35·69
1857·5	1·359	35·91
1860	1·464	35·97
1862·5	1·567	36·23
1865	1·687	36·63
1867·5	1·820	36·69
1870	1·944	36·17
1872.5	2·056	35·18
	Közép	36 06

A csekély összeegyezés χ értékeiben nem lehet feltünő, miután egy hiba ϱ-ban közép értékben tízszeresítve megy át χ-re. Egy pillantás a ϱ görbe vonalára könnyen meggyőz, hogy a (3.) táblázat leolvasásánál ejthettünk meg hibákat, melyek χ egyenetlenségeit teljesen megmagyarázhatják: utólagos javitások azonban elvileg meg nem engedhetők. Az egészlet: $\int_T^{T+nw} \frac{dt}{\varrho^2}$ kiszámitására $\frac{1}{\varrho^2}$-t sorba bontom n hatványai szerint; de miután $t = T + nw$, tehát $n = \frac{t-T}{w}$.

Mint kiindulási évet $T=1850$. veszem, s a kifejtést n harmadik hatványáig viszem. E czélra jó lesz csak az ujabb észleleteket felhasználni, én azokat 1825-től 1875-ig vettem figyelembe, s az így nyert 21 egyenlet, a legkisebb négyzetek alkalmazásba vétele mellett, a következő kifejezésre vezetett:

$$\frac{1}{\varrho^2}=0{\cdot}015442+0{\cdot}0010042\,\frac{(t-T)}{w}+0{\cdot}00004848\,\frac{(t-T)^2}{w^2}$$
$$+\,0{\cdot}000000867\,\frac{(t-T)^3}{w^3}$$

miből látni, hogy nem is volt szükséges n magasabb hatványáig menni, az öszténvezők jelen esetben oly annyira fogynak. Továbbá:

$$\int_T^t\frac{dt}{\varrho^2}=w\left\{0{\cdot}015442\frac{(t-T)}{w}+0{\cdot}0005021\,\frac{(t-T)^2}{w^2}\right.$$
$$\left.+\,0{\cdot}00001616\frac{(t-T)^3}{w^3}+0{\cdot}000000217\,\frac{(t-T)^4}{w^4}\right\}$$

s végül:

$$\theta=\Theta+[\overline{0{\cdot}44473}.n+\overline{8{\cdot}95681}.n^2+\overline{7{\cdot}46446}.n^3+\overline{5{\cdot}59248}.n^4] \quad (6.)$$

A vizszintes vonalak alatt álló számok n össztényezőinek logarithmusai.

Hogy most már a javított helyzet-szögeket nyerhessük, Θ-t a 3. táblázat θ-iból fogom meghatározni. Az eredmények a következők:

1815	Θ =	104°·69	1835	Θ =	104°·70	1857·5	Θ =	104°·90
1817·5	=	4 ·77	1837·5	=	4 ·78	1860	=	4 ·88
1820	=	4 ·81	1840	=	4 ·87	1862·5	=	4 ·92
1822·5	=	4 ·79	1842·5	=	4 ·93	1865	=	4 ·92
1825	=	4 ·74	1845	=	5 ·00	1867·5	=	4 ·94
1827·5	=	4 ·70	1847·5	=	5 ·02	1870	=	4 ·96
1830	=	4 ·67	1850	=	5 ·00	1872·5	=	4 ·93
1832.5	=	4 ·67	1852·5	=	4 ·95	1875	=	4 ·80
			1855	=	4 ·92			

$$\Theta=104^{\circ}{\cdot}85$$

Ezen értéket (6.) egyenletbe helyettesítvén, a következő javított helyzet-szögeket nyerjük, melyekkel számításainkat megkezdhetjük.

5. Táblázat.

Év	θ	Év	θ	Év	θ
1815	77°·12	1835	90°·83	1857·5	114°·10
1817·5	78 ·67	1837·5	92 ·85	1860	117 ·66
1820	80 ·25	1840	94 ·97	1862·5	121 ·42
1822·5	81 ·87	1842·5	97 ·24	1865	125 ·50
1825	83 ·54	1845	99 ·62	1867·5	129 ·87
1827·5	85 ·26	1847·5	102 ·15	1870	134 ·57
1830	87 ·04	1850	104 ·85	1872·5	139 ·62
1832·5	88 ·89	1852·5	107 ·73	1875	145 ·05
		1855	110 ·80		

E számok és ϱ-nak 3. táblázat alatti értékei képezik normal positióinkat.

A mikor e dolgozatot megkezdtem, pályaszámitásra a Herschel-féle módszert akartam alkalmazni, mely a Mem. R. Ast. S. Vol. V. p. 171—222, és Vol. XVIII. p. 47—68 van leirva. Szándékomtól eltértem nemcsak azért, mivel itt a vetületi ellipsis kis részével és mint meggyőződtem nem igen jó távolság mérésekkel van dolgunk, hanem azért is, mivel időközben 2 pályaszámitás lett közölve, melyek nyomán könynyebben véltem czélhoz jutni. De mielőtt javitásról lehet szó, a két pálya pontosságát kell közelebb vizsgálnunk. Az egyiket M. Dunér számitotta, elemei a Bull. Intern. 1875. aug. 12-ki 224. száma szerint a következők:

A periastron ideje $= 1748{\cdot}413$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 245^\circ{\cdot}91 \\ \Omega &= 50{\cdot}83 \\ i &= 68{\cdot}46 \\ \varphi &= 38{\cdot}812 \end{aligned}\right\} \text{Aequin. 1850.}$$

Évi mozgás $= + 2^\circ{\cdot}04112$

Fél nagy tengely $= 10''\,6812$

Körülforgási idő $= 176{\cdot}374$ év

Ezen elemek, a positiókat öt-öt évre számitván, a következő látszólagos helyeket szolgáltatják; a sarkszegvényekhez mellékrovatban hozzá irtam a 3. és 5. táblázattól való eltéréseket is, még pedig oly értelemben hogy: észlelet — számitás.

6. Táblázat.

év	ϑ.	Δ. ϑ.	ρ.	Δ. ρ.
1780	59°·30	—0·34*)	11″ 08	+0″ 2
85	61 ·88		11 ·54	
90	64 ·32		11 ·81	
95	66 ·70		11 ·92	
1800	69 ·03	+0·35*)	11 ·89	
05	71 ·42		11 ·78	
10	73 ·87		11 ·52	
15	76 ·45	+0·67	11 ·21	—0 ·61
20	79 ·18	+1 07	10 ·82	—0 ·32
25	82 ·14	+1·40	10 ·38	—0 ·05
30	85 ·38	+1·66	9 ·89	+0 ·07
35	88 ·99	+1·84	9 ·35	+0 ·17
40	93 ·02	+1·95	8 ·79	+0 ·27
45	97 ·62	+2·00	8 ·21	+0 ·39
50	102 ·97	+1·88	7 ·64	+0 ·41
55	109 ·14	+1·66	7 ·08	+0 ·45
60	116 ·30	+1·36	6 ·56	+0 ·45
65	124 ·65	+0·85	6 ·10	+0 ·49
70	134 ·13	+0·44	5 ·73	+0 ·37
75	144 ·59	+0·46	5 ·49	+0 ·11
80	156 ·08		5 ·38	

Fentebbi összeállitásban a különbségek mind a helyzetszögben, mind a távolságban oly rendszeresen és határozott irányban lépnek fel, hogy azok a pályaelemek változtatása által mindenesetre igen csekély mértékre hozhatók.

A másik elem-rendszer Dr. Dobercktől származik, s a »Nature 1876. 328. sz.« szerint így hangzik:

Periastron átmenet 1909·24
☊ (csomó) 39° 57′
ω (Periastron távolsága a csomótól) 223°20′
i hajlásszög 53° 50′
e=sin φ (központ kivüliség) 0·5763
a (fél nagy tengely) 9″83
körülforgási idő 222·435 év.

A megegyezés Dunér számitásával csekély.

---

*) 0°34 1782·4-re; +0°35 1803·1-re vonatkozik mint Herschel egyes észleleteire.

Ha ezen elemek alapján szintén számitom a látszólagos helyeket, a 6. táblázathoz hasonlóan nyerendem a következőt·

7. Táblázat.

év	θ.	$\Delta.\ \theta$.	ϱ.	$\Delta.\ \varrho$.
1780	61°·37	—2°11*)	13·60	—2″ 3
85	63 ·40		13·47	
90	65 ·51		13·29	
95	67 ·70		13·07	
1800	69 ·97	—0·58*)	12·78	
05	72 ·34		12·46	
10	74 ·83		12·10	
15	77 ·50	—0·38	11·70	—1 ·10
20	80 ·35	—0·10	11·26	—0 ·76
25	83 ·42	+0·12	10·79	—0 ·46
30	86 ·83	+0·21	10·30	—0 ·34
35	90 ·59	+0·24	9·78	—0 ·26
40	94 ·75	+0·22	9·24	—0 ·18
45	99 ·46	+0·16	8·69	—0 ·09
50	104 ·78	+0·07	8·14	—0 ·09
55	110 ·93	—0·13	7·60	—0 ·07
60	117 ·98	—0·32	7·08	—0 ·07
65	126 ·06	—0·56	6·59	0 ·00
70	135 ·25	—0·68	6·17	—0 ·07
75	145 ·63	—0·58	5·84	—0 ·24
80	157 ·18		5·61	

A hibák ezen összeállitásban szintén igen szép törvényszerűséget követnek, s feltünő, hogy két oly annyira különböző elemrendszer az észleleteknek mégis annyira-menynyire megfelel azon határok között, melyre észleleteink épen kiterjednek, mi, ha sokat mondunk, a fél pályát foglalja magában. Ezek szerint nyilvánvaló, hogy csekély eltérések az utolsó két táblázatban nagy befolyással lehetnek az elemek változtatására, miket tehát annyira mint lehetséges mellőznünk kell, ha pályát akarunk nyerni, mely a jövő század észleleteinek csak közelitőleg is megfeleljen. Az új elemrendszer megállapitásánál kevesebb gond forditandó a távolságmérési eltérésekre

*) —2·11. 1732·4-re ; —0·58, 1803·1-re vonatkozik.

mint hibásabb adatokra, hanem figyelmünket első sorban a helyzetszögekben fönmaradt hibákra kell irányozni. E czélból megjegyzem, hogy ez elemek lényegben 2 csoportra oszlanak, az első csoportot képezik a periastron ideje, a körülforgási idő, s a központ-kivüliség, míg a többi a második csoporthoz tartozik. Az első csoport elemei, mint észlelő álláspontunktól függetlenek, a Keppler-féle törvényeknek alávetett, úgynevezett phoronomicus elemek függetlenül javittathatnak a többitől. E végre ismét szolgálhat (3.) egyenletünk, csak kissé más alakban. A (3.) egyenlet azt mondja, hogy a vezérsugár vetülete a vetületi ellipsisben az időhöz arányos háromszög-fölületeket ir meg. Másrészt ugyanaz áll a vezérsugárról a pálya síkjára nézve; tehát a pályában és a vetületben egyenlő idők alatt megirt háromszög-fölületek szintén állandó arányt képeznek, mely, mint nem nehéz átlátni $= 1 : \cos i$. — Ha hat korszaknak megfelelő vezérsugarait (rad. vect) és valódi eltéréseit (wahre Anomalien) viszonylagosan, $r\ r_1\ r_2\ r_3\ r_4\ r_5$ és $v\ v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5$-tel jelölöm, a fennkifejezett törvény jelekben így hangzik:

$$\frac{r\,r_1 \sin(v-v_1)}{r_1\,r_5 \sin(v_1-v_5)} = \frac{\varrho\,\varrho_1 \sin(\theta-\theta_1)}{\varrho_1\,\varrho_5 \sin(\theta_1-\theta_5)} \quad \text{hasonlóan:}$$

$$\frac{r\,r_2 \sin(v-v_2)}{r_2\,r_5 \sin(v_2-v_5)} = \frac{\varrho\,\varrho_2 \sin(\theta-\theta_2)}{\varrho_2\,\varrho_5 \sin(\theta_2-\theta_5)} \quad \text{hol } \theta \text{ és } \varrho$$

ugyanazon korszakokra vonatkoznak. E két egyenletet egymással osztván, leend:

$$\frac{\sin(v_1-v).\sin(v_2-v_5)}{\sin(v_2-v).\sin(v_1-v_5)} = \frac{\sin(\theta_1-\theta).\sin(\theta_2-\theta_5)}{\sin(\theta_2-\theta).\sin(\theta_1-\theta_5)} = P$$

ugyan ily módon nyerünk továbbá:

$$\frac{\sin(v_1-v).\sin(v_3-v_5)}{\sin(v_3-v).\sin(v_1-v_5)} = \frac{\sin(\theta_1-\theta).\sin(\theta_3-\theta_5)}{\sin(\theta_3-\theta).\sin(\theta_1-\theta_5)} = Q \qquad (7.)$$

$$\frac{\sin(v_1-v).\sin(v_4-v_5)}{\sin(v_4-v).\sin(v_1-v_5)} = \frac{\sin(\theta_1-\theta).\sin(\theta_4-\theta_5)}{\sin(\theta_4-\theta).\sin(\theta_1-\theta_5)} = S$$

(7.) egyenlet csoportozat középső tagjai által P, Q és S. közvetlenül adva van, s így nem marad más hátra, mint a valódi eltéréseket ($v\ v_1\ v_2\ \ldots\ v_5$), melyek a phoronomicus elemek függvényei, úgy változtatni, hogy egyenleteink kielégittessenek.

P, Q és S. számitására hat helyzetszög kivántatik, melyeket legczélszerübben egyenlő időközökben választunk. Miután Dunér elemei egészben jobbnak látszanak, rajzoltam magamnak ismét egy görbe vonalat úgy, hogy az időhöz, mint metszéki szegvényhez, rendezéki szegvények gyanánt tekintettem a hatodik táblázat 3-dik rovatának számait. Igy 20 és 20 évre következő javitásokat olvastam le:

1780 . . .	$-\ 0^{0}40$
1800 . . .	$0\ {\cdot}00$
1820 . . .	$+\ 1\ {\cdot}07$
1840 . . .	$+\ 1\ {\cdot}97$
1860 . . .	$+\ 1\ {\cdot}36$
1880 . . .	$+\ 0\ {\cdot}30$

melyeknek segélyével a használandó helyzet-szögek lesznek:

$$\theta = 58^{0}\,90 = 58^{0}\,54'$$
$$\theta_1 = 69\,{\cdot}03 = 69\quad 2$$
$$\theta_2 = 80\,{\cdot}25 = 80\quad 15$$
$$\theta_3 = 94\,{\cdot}99 = 94\quad 59$$
$$\theta_4 = 117\,{\cdot}66 = 117\quad 40$$
$$\theta_5 = 156\,{\cdot}38 = 156\quad 23$$

s továbbá (7.) szerint az állandó mennyiségek:

$$P = 0{\cdot}4697$$
$$Q = 0{\cdot}2626$$
$$S. = 0{\cdot}1288$$

Ha most bizonyos elemekből:

T_0 (periastron ideje)

J_0 (körülforgási idő)

e_0 (központkivüliség) kiindulok, ezek alapján ugyancsak (7.) szerint számithatom a megfelelő P_0 Q_0 és S_0-t, melyek mind mások lesznek, a mint az elemeket csekély mennyiségekkel változtatom, *p. o.* $\varDelta T_0$, $\varDelta J_0$ és $\varDelta e_0$-vel. Négy féle $P\ Q\ S$-t kapok ily módon sor szerint — T_0, J_0, e_0-ból; — $T_0+\varDelta T_0$, J_0, e_0-ból; — T_0, $J_0+\varDelta J_0$, e_0-ból, és — T_0, J_0, $e_0+\varDelta e_0$-ból. A különböző P, Q, S. összehasonlitásából nem lesz nehéz, $\frac{dP}{dT}, \frac{dP}{dJ}, \frac{dP}{de}$, valamint $\frac{dQ}{dT}, \frac{dQ}{dJ}, \frac{dQ}{de}$ és $\frac{dS}{dT}, \frac{dS}{dJ}, \frac{dS}{de}$ értékeit találni. Ha ez meg van, $\varDelta T_0$, $\varDelta J_0$ és $\varDelta e_0$ azon értékei, melyek a (7.) alatti feltételeknek legjobban megfelelnek, a következő három egyenlet megoldása által nyeretnek:

$$\left.\begin{aligned} P_0 + \frac{dP}{dT}\cdot \varDelta T + \frac{dP}{dJ}\cdot \varDelta J + \frac{dP}{de}\cdot \varDelta e &= P \\ Q_0 + \frac{dQ}{dT}\cdot \varDelta T + \frac{dQ}{dJ}\cdot \varDelta J + \frac{dQ}{de}\cdot \varDelta e &= Q \\ S_0 + \frac{dS}{dT}\cdot \varDelta T + \frac{dS}{dJ}\cdot \varDelta J + \frac{dS}{de}\cdot \varDelta e &= S \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (8.)$$

Hogy Doberck elemeinek is némileg eleget tegyek, első megközelitésben felvettem:

$$T_0 = 1686{\cdot}8$$
$$S_0 = 222{\cdot}43$$
$$e_0 = 0{\cdot}58$$

Ezeknek megfelelőleg:

$$P_0 = +0{\cdot}4506\,; \quad Q_0 = +0{\cdot}2402\,; \quad S_0 = +0{\cdot}1129$$

és $P - P_0 = +0{\cdot}0191\,; Q - Q_0 = +0{\cdot}0224\,; S - S_0 = +0{\cdot}0159$

Az épen előadott módszer a javitásokat szolgáltatta:

$$T_0 + \varDelta T_0 = 1706{\cdot}7$$
$$S_0 + \varDelta S_0 = 195{\cdot}25$$
$$e_0 + \varDelta e_0 = 0{\cdot}625$$

miből még mindig marad:

$$P - P_0 = +0{\cdot}0059\,; \; Q - Q_0 = +0{\cdot}0036\,; \; S - S_0 = +0{\cdot}0008$$

Ily különbségek a helyzet-szögekben ugyan alig tesznek pár perczet, — mi az egész feladat bizonytalanságára mutat —, de következő elemekkel még csekélylyel kisebbithetők:

$$T = 1706{\cdot}72$$
$$J = 195{\cdot}235$$
$$e = 0{\cdot}6244$$

mely utóbbiakat tehát a javitott phoronomicus elemeknek tekintem.

A másik három elem, Ω (csomó), ω (Periastron hossza) és i (hajlásszög) javitására szolgálhat e három elem gömb három szögtani összefüggése. Könnyü átlátni, miszerint

$$\operatorname{tg}(v + \omega) = \sec i . \operatorname{tg}(\theta - \Omega)\,;$$

ha ezen egyenlet különzéki hányadosát veszszük egymás után θ és Ω ; θ és i; valamint θ és ω szerint a nevezett elemek javitásait θ eltéréseiből számithatjuk. Lesz ugyanis:

$$d\theta = d\Omega - di.\,\frac{\operatorname{tg} i_0}{2}\,\sin 2(\theta - \Omega_0) + d\omega . \cos i_0\,\frac{\cos^2(\theta - \Omega_0)}{\cos^2(v + \omega_0)}$$

hol $d\theta$ igy értendő: normal.-helyzetszög kevesebb T, J, e, Ω_0, i^0, és ω^0 szerint számitott helyzetszög, utóbbi három megközelitett értékek lévén. Czélszerűnek mutatkozik, rövid közelitő számítás után felvenni:

$$\Omega_0 = 31^\circ 45'$$
$$i_0 = 49^\circ 0'$$
$$w_0 = 231^\circ 0'$$

Ha a különzéki hányadosokat mind a hat normal-időszakra ezen elemekből számítjuk, következő egyenletekhez jutunk:

$$+0^\circ{\cdot}60 = d\Omega - 0{\cdot}460.di + 0{\cdot}830.d\omega$$
$$+0{\cdot}60 = d\Omega - 0{\cdot}561.di + 0{\cdot}915.d\omega$$
$$+0{\cdot}23 = d\Omega - 0{\cdot}571.di + 1{\cdot}140.d\omega$$
$$-0{\cdot}21 = d\Omega - 0{\cdot}460.di + 1{\cdot}351.d\omega$$
$$-0{\cdot}59 = d\Omega - 0{\cdot}070.di + 1{\cdot}518{\cdot}d\omega$$
$$-0{\cdot}90 = d\Omega + 0{\cdot}544.di + 1{\cdot}231.d\omega$$

a javitásokat nyerendjük:

$$d\Omega = +1^\circ 58 = +1^\circ 55'$$
$$di = -0^\circ 70 = -0^\circ 42'$$
$$d\omega = -1^\circ 55 = -1^\circ 33'$$

Igy végre elértük a legjobb elem-rendszert, mely az eddigi észleleteknek lehetőleg megfelel, s mely következőleg hangzik:

$$\left.\begin{aligned} T &= 1706{\cdot}72 \\ \omega &= 229^\circ 27' \\ \Omega &= 33^\circ 20' \\ i &= 48^\circ 18' \\ e &= 0{\cdot}6244 \\ \text{körülforgási idő} &= 195{\cdot}235\,\text{év} \end{aligned}\right\} \text{Aequinoctium } 1850{\cdot}0$$

A normal helyzet-szögekben fönmaradt hibák:

1780	. . .	$-0^\circ 02$
1800	. . .	$+0{\cdot}11$
1820	. . .	$0{\cdot}00$
1840	. . .	$-0{\cdot}05$
1860	. . .	$+0{\cdot}11$
1880	. . .	$-0{\cdot}19$

melyek már semmi törvényszerűséget sem mutatnak többé.

A jelen esetben követett javitási módot nem lesz tanácsos minden körülmény között követni, t. i. nincsen semmi figyelemmel a távolságmérésekre, s az eddig közlött 6 elemet függetlenül javitja a távolságmérésektől, ha nem úgy cselekszünk mint itt, hogy e méréseknek (4.a) egyenlet által közvetve engedünk befolyást a javitás alapjául szolgáló normal helyzetszögekre. Ha alapszámitásaink nem birnának ezen jelleggel, a különböző korszakok távolság mérései könnyen más meg más nagy tengelyt szolgáltathatnának. Én részemről, ha az alapszámitás nehézségeit elvállaljuk, czélszerünek tartom az előadott javitási módszert, a mennyiben a fő befolyást a pontosabban mért helyzetszögeknek engedi, a távolságméréseknek pedig csak annyit, a mennyi ezen bizonytalanabb elemet megilleti.

Az utolsó elem, a fél nagy tengely, hat különböző korszakból következőképen eredményez:

1820 . . .	$a =$	8″ 518
1830 . . .	$a =$	8 ·705
1840 . . .	$a =$	8 ·698
1850 . . .	$a =$	8 ·678
1860 . . .	$a =$	8 ·611
1870 . . .	$a =$	8 ·624
Közép értékben .	$a =$	8″ 639

A különbségek nem haladják meg a bevárható hibát.

A nyert elemek, tekintetbe véve a főcsillagnak Struve Otto által meghatározott évi látszögét ($= 0''.154$), a kettős csillagrendszer fél nagy tengelyét 56·10 nap távolságra engedik becsülni; épen úgy az (2.) egyenlet szerint a rendszer tömege 4·63-szorosa napunk tömegének. Mielőtt értekezésemet bevégezném, elemeim alapján közölni akarom a következő évekre érvényes helyzetszögeket és távolságokat.

Év	helyzetszög	távolság
1870	134°·25	6″ 11
75	144 ·64	5 ·68
80	156 ·57	5 ·28
85	170 ·05	4 ·98
90	186 ·22	4 ·55
95	205 ·70	3 ·91
1900	234 ·23	3 ·08