A

HÁROM MÉRETŰ HOMOGÉN TÉR

(U. N. NEM EUKLIDIKUS)

SIKTANI TRIGONOMETRIÁJA.

RÉTHY MÓR

KOLOZSVÁRI EGYETEMI NYILV. RK. TANÁRTÓL.

(Bemutattatott a III. osztály űlésén 1875. junius 14.)

BUDAPEST, 1876.

A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ HIVATALÁBAN.

Az Akadémia bérházában.

Budapest, 1876. Nyomatott az Athenaeum nyomdájában.

A három méretű homogén tér trigonometriája.

Bólyai János ide vágó munkáját tanulmányozva észrevettem, hogy nehány tétele teljesen független a párhuzamosak megelőző elméletétől. Ezen észrevétel által annak kutatására ösztönöztetve, vajon nem lehetne-e az összes u. n. nem euklidikus geometriát ép ezen vagy hozzájuk hasonló tételekre alapítani, egy elemi módszerre jöttem, a mely e czélhoz ép oly természetes, mint rövid úton vezet. A módszert az jellemzi, hogy a geom. idomokat mind véges térrészen teljesen belül szerkesztvén, bizonyításaiban mellőzi a párhuzamosságnak még csak fogalmát is. Ily módon kikerüli az ember azt, a mi az eddigi elementáris módszereket nehezitette, t. i. a szokott képzelettel ellenkező idomokkal bizonyítást; továbbá kellő előkészület után egy-két csapással eldönti, hogy nemcsak *önmagában kifogástalan*, a mi különben fődolog, hanem a gyakorlati legpontosabb mérésekkel is összhangzó geometriát állapithat-e meg a nélkül, hogy a *határtalan* tért *végetlen nagy*-nak tekintse,*) vagy ha ezt még teszi, teheti-e a nélkül, hogy Euklidesnek párhuzamosság postulatumát**) elfogadja.***)

---

*) *Riemann* »Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen« Abhandl. d. k. Ges. d. Wiss. Göttingen 1854. *Helmholtz* »Über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen« Nachrichten d. k. G. d. W. Göttingen 1868.

**) Értjük az u. n. XI-ik axiomát. L. *Brassai Sámuel* »*Euklides elemei.*«

***) *Gauss levelei Schuhmacherhez* (1831-től kezdve) II. és V. köt. *Bólyai János* »Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens etc.« Maros-Vásárhely 1832. Franczia forditásban »La science absolue de l'espace stb.« Páris, Gauthier-Villars. *Lobatschewsky* »Geom. Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien.« Berlin, 1840.

1. §.

1. Azon értelmezések, közeszmék és kivánatok, a melyekre az általánosabb geometria épül, hármat kivéve, azonosak azokkal, a melyek az u. n. euklidikusnak is alapját képezik. — Az értelmezések közül a párhuzamosságé, a kivánatok közül a XI. axioma nevezet alatt ismert mellőztetik, az egyenesről való postulatum pedig akként módosúl, hogy »*a határtalan térnek legyen* *l e g a l á b b* *akkora r é s z e,* hogy e résznek két-két pontján át csak *egy* egyenes lehetséges.«

2. A határtalan tér azon részét, a melyben a későbbi bizonylatoknál szemléletül szolgáló idomok szerkesztendők lesznek, úgy szabjuk meg, hogy akármelyik két pontján át *csak egy* egyenes legyen vonható. Még tovább megyünk terünk szükebbre szabásában : ne lehessen *mindenestül* benne olyan háromszög, a melynek *két* oldala függélyes a harmadikra.

Hogy ilyen térrésznek lenni kell, az az egyenesről való postulatumból, módositott alakjában is, következik. — Ugyanis ha föltenném, hogy nincsen oly kicsiny térrész, a melyben ilyen háromszög ne volna, akkor meg kellene azt is engednem, hogy akármilyen kicsiny térrész *kétszeresében* van két olyan pont, a melyen át két egyenes vonható ;*) a mi pd. az imént nevezett postulatummal merőben ellenkezik.

E szükebbre szabott térben annál kevesbbé lehet olyan háromszög, a melynek egyik szöge derék, másik tompa. — Mert ebből a háromszögből a tompa szög csúcsán át vont egyenessel, *két* derék szöggel biró, háromszögöt szelhetnénk el.

2. §.

Azon tételeket soroljuk itt el, a melyeknek közönséges bizonylatában is csak az 1. §-ban elfogadottak szerepelnek. Teszszük ezt, mert rájok alapszik a későbbi ; a bizonyitásokat mellőzzük.

I. Csúcsszögek egyenlők.

*) Lásd köz. bizonylatát annak, hogy két egyenes, mely egy harmadikra merőleges, egymást nem metszheti.

II. Egyenes vonalú egyenlő szárú háromszögben egyenlő oldalakkal egyenlő szögek vannak átellenben s fordítva.

III. Az ilyen háromszög u. n. alapjának középpontját a csúcscsal összekötő egyenes merőleges az alapra s fordítva.

IV. Két egyenes vonalú háromszög egymásra illő, ha stb.

V. Ha *egy* középponttal r és r' sugarakkal ugyanazon egy sikon köröket rajzolunk s az egyiknek $\widehat{AB}$ és $\widehat{CD}$ ívei ugyanazon középponti szöggel vannak szembe, mint a másiknak $\widehat{A'B'}$ és $\widehat{C'D'}$ ívei, akkor

$$\widehat{AB} : \widehat{CD} = \widehat{A'B'} : \widehat{C'D'}$$

VI. Ha három egyenes A, B és C egy ugyanazon D pontban metszi egymást és A merőleges B és C-re, akkor merőleges minden más egyenesre is, a mely a D ponton átmenve a B és C sikjában halad.

VII. Ha A és A' egy síkban vannak B egyenessel és merőlegesek reá, akkor, ha a B és A' egyenes az A körül mint szilárd tengely körül forog,

a) a B mértani olyan sík lesz, a mely az A-ra merőleges

b) e síkra az AA' síkja folyton merőleges lesz,

c) e síkra az A' egyenes is folyton merőleges lesz.

3. §.

Az egyenes vonalú háromszögök trigonometrikus alaptételeinek váza.

1. *Szerkesztés:* AOB$=\alpha$ szög egyik szárának A és A' pontjaiból állitsuk a szög másik szárára az A B és A' B' merőlegeseket; az idomot képzeljük az OB száron, mint szilárd tengelyen köröskörül forogva. Akkor az OA kúpfelületet, A és A' pedig olyan köröket írnak le, melyek középpontjai B és B', sugarai BA és B'A'.

Álland e (VIII) tétel :

$$\text{o}\overline{BA} : \text{o}\overline{OA} = \text{o}\overline{B'A'} : \text{o}\overline{OA'}$$

hol »or« jegygyel Bólyai szerint azon kör kerületének hoszszát jelöljük, a melynek sugara »r«.

Bizonyitás. Gondoljuk a kúpfelületet a rajta lévő körökkel együtt síkra legombolyítva. A nyert idomra alkalmazható lévén az V tétel, lészen :

$$o\overline{BA} : o\overline{B'A'} = o\overline{OA} : o\overline{OA'}$$

következőleg áll a tétel.

Következmény. E tétel arra jogosít fel, hogy a $o\overline{BA} : o\overline{OA}$ arányt az α szög függvényének tekintsük; e függőséget $f(\alpha)$-val jelölvén, e szerint állni fog bármely, legalább térrészünkön belül eső, derék szögű háromszögre, ha oldalait a, b, c, és szögeit sorban A^0, B^0, 90^0-kal jelöljük:

VIII. a) $oa : ob : oc = f(A) : f(B) : 1$

Továbbá világos, hogy $f(90^0) = 1$.

2. *Szerkesztés.**) Legyen BB′ B″ vonal úgy szerkesztve, hogy minden pontja az AA′ A″ egyenestől egy ugyanazon a távolságban van; legyen továbbá:

$$BA \perp AA'$$
$$B'A' \perp AA'$$
$$B''A'' \perp AA'$$

Attól egyelőre eltekintve, hogy a BB′B″ vonal egyenes-e vagy görbe (hisz hogy milyen, majd ki fog tünni), jelöljük a BB′ és B′B″ darabok hosszúságát $\widehat{BB'}$ és $\widehat{B'B''}$-vel.

Álland e (IX.) tétel:

$$\widehat{BB'} : \overline{AA'} = \widehat{BB''} : \overline{AA''}$$

E tétel helyességét közvetlenül belátjuk, ha $\overline{AA'}$ és $\overline{AA''}$ hoszszúságoknak van közös mértékük; mert ha

$$\overline{AA'} : \overline{AA''} = n' : n''$$

(hol n′ és n″ egész szám), akkor a mértékkel osztáskor található pontokban emelt merőlegesek segélyével közvetlenül foly, hogy

$$\widehat{BB'} : \widehat{BB''} = n' : n''$$

Ha pedig a tétel áll akkor, a midőn az arány szeres, akkor ismert módon kiterjeszthető arra az esetre is, ha az arány szertelen.

Következmény. Az imént bebizonyított tétel szerint $\widehat{BB'} : \overline{AA'}$ független lévén az $\overline{AA'}$ hoszszától, csak az $\overline{AB} = a$

*) Az e §-ban következők, az egyelőre ismeretlen φ függvény behozásának gondolatától eltekintve, a dolog lényegére Bólyai János absolut geometriájából vannak véve. »Appendix stb.« §. 27, 28.

távolságnak lehet még függvénye; e függőséget φ(a)-val jelölvén a IX. tételt így fejezhetjük ki:

$$\text{IX. a)} \quad \widehat{BB'} : AA' = \varphi\,(a).$$

3. *Szerkesztés.* A 2. alatti szerkesztéssel nyert idom BA A'B' darabját forgassuk a BA egyenesen, mint szilárd tengelyen köröskörül; az A'B' egyenes akkor hengerfelületet ír le, az A' pont kört, melynek középpontja, minthogy 2. szerkesztés szerint

$$A'A \perp BA,$$

nem más, mint A, — végre B' pont olyan kört ír le, melyről az eddigi szerkesztésből nem tudhatom, hogy középpontja azonos-e B ponttal vagy nem. Ez utóbbit ismét eldöntetlenül hagyva, jelölöm a B'-ből a szilárd tengelyre vont merőleges talppontját D-vel, lészen az A' körének sugara $\overline{A'A}$ s a B' köréé $\overline{B'D}$.

Alland e (X.) tétel :

$$o\overline{B'D} : o\overline{A'A} = \varphi\,(a)$$

Göngyölítsük le e tétel bebizonyításának céljából az A'B' egyenes leirta hengerfelületet valamely síkra, (a legöngyölités lehetősége a VI. tétel segélyével könnyen bebizonyítható). Az A' köre, mindenik eleme merőlegesen állván a hengerfelület alkotóira (VII_c szerint) *egyenesben* gombolyodik le, a B' köre pedig olyan vonalban, melyről bizonyos, hogy amaz egyenestől minden pontja A'B' állandó távolságban van. A legombolyítás által nyert idomra alkalmazható lévén, ennélfogva a IX_a tétel, tételünk áll.

4. *Szerkesztés.* A 3. alatti szerkesztést egészítsük ki az $\overline{AB'}$ diagonálissal. Nevezzük azután a B'AD szöget A_1-nek és az A'B'A szöget B'-nek.

Álland e (XI) tétel :

$$f\,(A_1) : f\,(B') = \varphi\,(a)$$

Mert az AB'D és AB'A' háromszögök D illetőleg A' csúcsokon derék-szögüek lévén, a $VIII_a$ tétel értelmében

$$o\overline{DB'} = o\overline{AB'}\, f\,(A_1)$$
$$oAA' = oAB'\, f\,(B')$$

tehát

$$oDB' : oAA' = f\,(A_1) : f\,(B')$$

mely eredmény a X tétellel egybevetve, tételünket adja.

Következmény. A XI tétel értelmében az AA'B' derék szögű háromszögben, oldalait és szögeit

$$A'B' = a \; ; \; AA' = b$$
$$B'AA'_1 = A^0 ; \; AB'A'_1 = B^0$$

tevén, lészen

$$XI_{a)} \quad f(90^0 - A^0) : f(B^0) = \varphi(a)$$
$$XI_{b)} \quad f(90^0 - B^0) : f(A^0) = \varphi(b)$$

4. §.

Az f (x) meghatározása.

XII. Tétel. Minden derék szögü háromszögnek t. b. (térrészünkön belől) nagyobb az átfogója, mint a béfogója.

Mert föltéve, hogy van t. b. olyan BCA derék szögű háromszög, a melynek BC béfogója nagyobb, mint BA átfogója, akkor kellene a BC béfogón B és C között olyan B' pontnak is lenni, hogy B'C = B'A, — azaz kellene t. b. B'CA *két* derékszöggel biró három szögnek lenni, a mi a térrészünkre nézve tett megállapodással nem fér meg.

1. *Következmény.* Minden háromszögben t. b. nagyobb szöggel nagyobb oldal van szemközt.

2. *Következmény.* Minden háromszögben t. b. nagyobb két oldal *összege*, mint a harmadik *egymaga.* Ennélfogva minden körnek t. b. nagyobb a kerülete, mint átmérőjének kettőzete; tehát

$$\lim \frac{or}{r} > 4$$

3. *Következmény.* A kör körül írt sokszög kerülete nagyobb mint a köré. In specie a k. k. írt négyzeté is, tehát tekintettel arra, hogy a négyzet egy-egy oldala 2r. felé konvergal, lészen

$$\lim \frac{or}{r}\Big]_{r=o} < 8$$

4. *Következmény.* A 2. és 3. következményt összevetve, lészen tehát

$$\lim \frac{or}{r}\Big]_{r=o} = a_1 \qquad \text{hol } 4 < a_1 < 8$$

XIII. Tétel. Ha valamely háromszög három csúcsa egymáshoz végtelenül közeledik, akkor a háromszög szögeinek összege 180⁰ felé konvergál.

A tétel áll, mert a háromszög szögei, ha a csúcsok közeledtével változnak, akkor *folytonosan* változnak s más részről elvégre, ha a csúcsok együvé jőnek, akkor a háromszög sz. ö. egyenes szöget teszen.

Szerkesztés. Az ACB derékszögű háromszög C csúcsából állítsuk az átellenes AB átfogóra a CD merőlegest. Álland a

XIV. tétel, mely szerint

$$\lim \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}.\,\overline{BD}}\Bigg]_{AB=o} = 1 \text{ s ép úgy } \lim \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}.\,\overline{AD}}\Bigg]_{AB=o} = 1$$

Mert a VIII_a tétel szerint

$$f(A^0) = \frac{oBC}{oAB} = \lim \frac{oBC}{oAB}\Bigg]_{AB=o}$$

Más részről a XII. tétel 4. következményéből folyólag.

$$\lim \frac{oBC}{oAB}\Bigg]_{AB=o} = \lim \frac{BC}{AB}$$

tehát

$$f(A^0) = \lim \frac{BC}{AB}\Bigg]_{AB=o} \ldots \text{XIV}_a$$

Ép így

$$f(\widehat{BCD}) = \lim \frac{BD}{BC}\Bigg]_{AB=o}$$

Mivel pedig a XIII tételből folyólag

$$\lim \widehat{BCD} = A$$

tehát tételünk áll.

1. *Következmény.* Összevéve a XIV. alatti két egyenletet, lészen

$$\lim \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}\Bigg]_{AB=o} = 1$$

vagy akár

$$\left(\lim \frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\lim \frac{AC}{AB}\right)^2 = 1$$

tekintve már most, hogy XIV_a szerint

$$f(A^0) = \lim \frac{BC}{AB}$$

$$f(B^0) = \lim \frac{AC}{AB}$$

s a XIII. tétel értelmében

$$B^0 = 90^0 - A^0$$

lészen

$$\left[f(A^0)\right]^2 + \left[f(90^0 - A^0)\right]^2 = 1 \qquad XIV_b$$

XV. Tétel. Ha x és y akkármekora hegyes szöget jelent, akkor

$$f(x^0 + y^0) = f(x^0)\, f(90^0 - y^0) + f(90^0 - x^0)\, f(y^0)$$

E tétel bizonyítása itt olyan viszonyban áll közönséges bizonylatához, mint az előbbié.

1. Megjegyzés. Könnyen megmutatható ily módon, hogy végtelen kicsiny idomokra *minden esetre* áll az euklidikus geometria minden tétele; hogy többek közt

$$\lim \frac{or}{r}\Big]_{r=o} = 2\pi$$

Következmény. A XV. tételből a XIV_b, egyenlettel egyetemben (p. sorba fejtés útján) az következik, hogy

$$f(x^0) = \sin(hx^0)$$

hol h állandó értéke az f (x^0) geom. jelentéséből könnyen meghatározható.

Ugyanis egy felől sin hx^0 sorba fejtéséből az foly, hogy

$$\lim \frac{f(x^0)}{x^0}\Big]_{x^0=o} = h$$

másfelől tekintve, hogy a körív aránya húrjához az ív fogytával az egység felé konvergál, a XIV_a segélyével könnyű megmutatni, hogy

$$\lim \frac{f(x^0)}{x^0}\Big]_{x^0=o} = \lim \frac{1}{360^0} \cdot \frac{or}{r}$$

következőleg az 1. megjegyzést is felhasználva még, lészen

$$h = \frac{1}{180^0} \pi$$

Igy tehát

$$f(x^0) = \sin\left(\frac{x^0}{180^0} \pi\right)$$

Állapodjunk meg abban, hogy ezentúl a szöget fokmérték helyett a szárai közé eső olyan körívvel mérjük, a melyhez tartozó teljes kör kerülete 2π. Akkor az x^0 szárai közé eső körív hossza

$$s = \frac{x^0}{180^0} \pi$$

E megállapodás mellett azután $f(x^0)$ talált értékét a $VIII_a$ XI_a XI_b egyenletekbe helyettezvén, a XIV_b fölhasználásával lészen

$$XV_{a)} \qquad oa : ob : oc = \sin A : \sin B : 1$$

$$XV_{b)} \qquad \cos A : \sin B = \varphi(a)$$

$$XV_{c)} \qquad \cos B : \sin A = \varphi(b)$$

5. §.

A φ (x) meghatározása.

XVI. Tétel. Térrészünkön belül eső minden körre, melynek sugara r

$$or = C\sqrt{1 - [\varphi(r)^2}$$

hol C állandót jelent.

Mert a $XV_{a)}$ ban használt jelöléssel

$$1) \qquad oa = oc \sin A$$

$$2) \qquad ob = oc \sin B$$

$$3) \qquad \varphi(a) = \cos A : \sin B;$$

a 2) és 3) szorzásával tehát

$$4) \qquad ob\, \varphi(a) = oc \cos A$$

Négyzetre emelvén már most és összegezvén az 1) és 4) egyenleteket, lészen

$$5) \qquad (oa)^2 + [ob\, \varphi(a)]^2 = (oc)^2;$$

Ép így

$$6) \qquad (ob)^2 + [oa\, \varphi(b)]^2 = (oc)^2;$$

az 5) és 6)-ból tehát

$$(oa)^2 \left[1 - [\varphi(b)]^2\right] = (ob)^2 \left[1 - [\varphi(a)^2\right]$$

s ebből végre

$$\frac{oa}{\sqrt{1 - [\varphi(a)]^2}} = \frac{ob}{\sqrt{1 - [\varphi(b)]^2}} = \text{const.}$$

q. e. d.

XVII. Tétel.

$$o(c_1 + c_2) = oc_1\, \varphi(c_2) + oc_2\, \varphi(c_1)$$

Bizonyitás. Szerkeszszünk egy egyenest, melynek hossza $c = c_1 + c_2$ és pedig

$$\overline{AB} = c$$
$$\overline{AD} = c_1$$
$$\overline{DB} = c_2\,;$$

állítsuk D-ben az AB-re a DC merőlegest; rajzoljuk a CB és CA egyeneseket s legyen

$$\left.\begin{aligned} \overline{CB} &= a \\ \overline{CA} &= b \\ \overline{DC} &= m \end{aligned}\right| \begin{aligned} BCD_\wedge &= C_1 \\ ACD_\wedge &= C_2 \end{aligned}$$

E jelölésekkel élve a $XV_{a)}$ egyenletekből következik:

1) $oc_1 \sin B = om \sin C_1$

2) $oc_2 \sin A = om \sin C_2$

3) $om = oa \sin B$

4) $om = ob \sin A$

Az 1) egyenletet $\cos C_2$, a 2) alattit $\cos C_1$ szorzókkal véve és összeadva lészen

5) $oc_1 \sin B \cos C_2 + oc_2 \sin A \cos C_1 = om \sin C.$

Más részről a 3) és 4)-ből leolvasható szabály segélyével a 3)-ból:

6) $om \sin C = oc \sin A \sin B\,;$

Igy tehát az 5) és 7)-ből

$$oc_1 \frac{\cos C_2}{\sin A} + oc_2 \frac{\cos C_1}{\sin B} = oc.$$

Hivatkozván végre a XV_b által kifejezett tételre, álland:

$$oc_1\, \varphi(c_2) + oc_2\, \varphi(c_1) = oc$$

q. e. d.

Következmény. A XVI. és XVII. tételeket egyesítvén, ha c_1 és c_2 helyibe x illetőleg y tétetik, a következő egyenlet ered:

$$\sqrt{1-[\varphi(x-y)]^2}=\varphi(x)\sqrt{1-[\varphi(y)]^2}+\varphi(y)\sqrt{1-[\varphi(x)]^2}$$

mely funktionális egyenletből az foly, hogy

$$\text{XVII}_{a)} \qquad \varphi(x) = \cos(kx)$$

hol k valós vagy tisztán képzetes, különben akármekkora, legalább egyelőre határozatlan állandót jelent. Vegyes képzetes ugyanis nem lehet, miután φ (x) eredeti jelentésénél fogva valós.

6. §.

A három méretű homogén tér siktani trigonometriájának alaptételei.

1. Bele tévén XV_a XV_b XV_c egyenletekbe or és φ (x)-nek az előző §-ban talált értékeit, a következő egyenletek erednek:

$$\text{XVIII}_{a)} \quad \sin ka : \sin kb : \sin kc = \sin A : \sin B : 1$$
$$\text{XVIII}_{b)} \quad \cos A : \sin B = \cos ka$$
$$\text{XVIII}_{c)} \quad \cos B : \sin A = \cos kb$$

mely egyenletek tehát olyan t. b. eső derékszögü háromszög darabjai közötti viszonyt fejezik ki, melynek oldalai a b c, s átellenes szögei A, B, $\frac{\pi}{2}$

Gondoljuk már most meg, hogy az euklidikus geometriában a derékszögű sphaerikus háromszög oldalai a′ b′ c′ és szögei A, B, $\frac{\pi}{2}$ között a következő egyenletek állanak:

1) $\sin a' : \sin b' : \sin c' = \sin A : \sin B : 1$

2) $\cos A : \sin B = \cos a'$

3) $\cos B : \sin A = \cos b'$

Emlékezzünk vissza, hogy ezen egyenletekből *tisztán csak algebrai reduktiók és goniometrikus tételek segélyével* levezethető a derékszögü és kettéosztás útján a ferdeszögü gömbi háromszögök oldalai és szögei között fennálló mindenik tétel; levezethető és kiterjeszthető olyan háromszögre is, a melynek *többje* van *egy* derék avagy tompa szögnél. — Végre vegyük tekintetbe, hogy az 1) 2) 3) egyenletek azonosakká válnak a XVIII a, b, c) alattiakkal, mihelyt bennök a' b' c' helyébe ka, kb, kc tétetik. — Akkor azt a következtetést vonhatjuk, hogy a nem euklidikus geometriában egyenesek által alkotott akármekkora szögü háromszögökre érvényesekké lesznek az euklidikus gömbháromszögtan egyenletei, mihelyt bennnök az oldalak helyébe ka, kb, kc tétetik.

Ha tehát a, b, c, A, B, C, egyenes vonalú háromszögnek jelentik oldalait s átellenes szögeit, akkor a közöttök fenálló alapegyenletek ezek lesznek:

$$\mathrm{XIX}_{a)}\begin{cases}\cos ka = \cos kb \cos kc + \sin kb \sin kc \cos A\\ \cos kb = \cos kc \cos ka + \sin kc \sin ka \cos B\\ \cos kc = \cos ka \cos kb + \sin ka \sin kb \cos C\end{cases}$$

$$\mathrm{XIX}_{b)} \qquad \frac{\sin ka}{\sin A} = \frac{\sin kb}{\sin B} = \frac{\sin kc}{\sin C}$$

$$\mathrm{XIX}_{c)}\begin{cases}\operatorname{cotg} ka \sin kb = \cos kb \cos C + \operatorname{cotg} A \sin C\\ \operatorname{cotg} kb \sin kc = \cos kc \cos A + \operatorname{cotg} B \sin A\\ \operatorname{cotg} kc \sin ka = \cos ka \cos B + \operatorname{cotg} C \sin B\\ \operatorname{cotg} ka \sin kc = \cos kc \cos B + \operatorname{cotg} A \sin B\\ \operatorname{cotg} kb \sin ka = \cos ka \cos C + \operatorname{cotg} B \sin C\\ \operatorname{cotg} kc \sin kb = \cos kb \cos A + \operatorname{cotg} C \sin A\end{cases}$$

$$\mathrm{XIX}_{d)}\begin{cases}\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos ka\\ \cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos kb\\ \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos kc\end{cases}$$

hol k valós vagy tiszta képzetes, de numerikus értékre *legalább* egyelőre ismeretlen, állandót jelent.

2. Azon speciális esetben, ha k akár valós, akár képzetes úton végtelen kicsiny felé konvergál, akkor a $\mathrm{XIX}_{a)}$ és $\mathrm{XIX}_{b)}$-ből lészen:

$$\mathrm{XIX}_{a')}\begin{cases}a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A\\ b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ca \cos B\\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C\end{cases}$$

$$\mathrm{XIX}_{b')} \qquad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Ezek pedig azonosak az ú. n. euklidikus trigonometria alaptételeivel. — Az e tételekre épült geometria a gyakorlati mérésektől az észlelési hibákon belül eső különbségekkel tér el; de mivel *mégis csak eltér*, tehát a gyakorlat *csak* azt bizonyitja, hogy k-nak *igen* kicsinynek kell lenni; hogy mekkora, azt a gyakorlat nem adja és nem is adhatja.

3. Hogy vizsgálatainkat később megszakitani kénytelenek ne legyünk, ide igtatjuk az egyenes vonalú derék szögü háromszögök megoldására szolgáló, a XIX-ből közvetlenül folyó egyenleteket:

$$\left.\begin{array}{ll}
1) & \cos kc = \cos ka \cos kb \\
2) & \cos kc = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \\
3) & \sin kb = \sin kc \sin B \\
4) & \sin kb = \operatorname{tg} ka \operatorname{cotg} A \\
5) & \sin ka = \sin kc \sin A \\
6) & \sin ka = \operatorname{tg} kb \operatorname{cotg} B \\
7) & \cos A = \sin B \cos ka \\
8) & \cos A = \operatorname{tg} kb \operatorname{cotg} kc \\
9) & \cos B = \sin A \cos kb \\
10) & \cos B = \operatorname{tg} ka \operatorname{cotg} kc
\end{array}\right\} XX_{a)}$$

a melyekbe arra az esetre, ha k képzetes, $k = k' \sqrt{-1}$ tétetvén, lészen:

$$\left.\begin{array}{lll}
1) & e^{k'c} + e^{-k'c} = {}^1\!/_2\, (e^{k'a} + e^{-k'a})(e^{k'b} - e^{-k'b}) & \\
2) & e^{k'c} + e^{-k'c} = 2 \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B & \\
3) & e^{k'b} - e^{-k'b} = (e^{k'c} - e^{-k'c}) \sin B & \\
4) & e^{k'b} - e^{-k'b} = 2\dfrac{e^{k'a} - e^{-k'a}}{e^{k'a} + e^{-k'a}} \operatorname{cotg} A & \\
5) & e^{k'a} - e^{-k'a} = (e^{k'c} - e^{-k'c}) \sin A & \\
6) & e^{k'a} - e^{-k'a} = 2\dfrac{e^{k'b} - e^{-k'b}}{e^{k'b} + e^{-k'b}} \operatorname{cotg} B & \\
7) & \cos A = {}^1\!/_2\, (e^{k'a} + e^{-k'a}) \sin B & \\
8) & \cos A = \dfrac{e^{k'b} - e^{-k'b}}{e^{k'b} + e^{-k'b}} \, \dfrac{e^{k'c} + e^{-k'c}}{e^{k'c} - e^{-k'c}} & \\
9) & \cos B = {}^1\!/_2\, (e^{k'b} + e^{-k'b}) \sin A & \\
10) & \cos B = \dfrac{e^{k'a} - e^{-k'a}}{e^{k'a} + e^{-k'a}} \, \dfrac{e^{k'c} + e^{-k'c}}{e^{k'c} - e^{-k'c}} &
\end{array}\right\} XX_b$$

4. Ugyanazon okból ide iktatjuk végre a kör kerületének kiszámítására szolgáló képlet levezetését is. A XVI tétel szerint lészen ugyanis a $XVII_{a)}$ tekintetbe vételével

$$or = C \sin kr$$

Ámde a XV. tétel alatti 1) megjegyzés szerint:

$$\lim \frac{or}{r}\Big]_{r=o} = 2\pi$$

miután tehát más részről :

$$\lim \frac{\sin kr}{r}\Big]_{r=o} = k$$

azért

$$2\pi = C \cdot k$$

Ennélfogva :

$$or = \frac{2\pi}{k} \sin kr \qquad XX_{c)}$$

Ha k képzetes, akkor $k = k' \sqrt{-1}$ téve, lészen

$$or = \frac{\pi}{k'}(e^{k'r} - e^{-k'r}) \qquad XX_{d)}$$

7. §.

Egybefoglalva az eddigieket, azt találtuk, hogy ha a tér természete az elfogadott értelmezések és közeszmék mellett megkivánja az 1. §-ban kimondott postulatumot, akkor az egyenes vonalak által alkotott három szögök oldalai és szögei hódolnak *mindenesetre* a XIX. alatti egyenleteknek. Ezen egyenletekben szerepel egy *k* állandó, a mely bizonyos, hogy *complex* nem lehet; hogy mi a *k* állandó közelebbi értéke, az a kérdés függőben maradt.

Első feladatunkúl tűzzük ki, megmutatni, hogy a *k* állandót addig közelebb meghatározni nem lehet, mig az 1. §-ban elfogadottakhoz új postulatumot hozzá nem veszünk.

Tekintsük e czélból a nyert eredményt a legáltalánosabb szempontból. A XIX. alatti egyenletekben előforduló a b c A B C menynyiségeket tisztán algebraice fogva fel, az egyenletek ezen alg. menynyiségek közül háromnak a többi által meghatározására szolgálnak, mihelyt k bármekkorának is adva van. Világos, hogy a nevezett egyenletek *egymással* összeütközésbe nem jöhetnek még ezen legáltalánosabb felfogás mellett se. Hiszen Lagrange szerint*) könnyü megmutatni, hogy az első csoportból (XIX. a) levezethető a többi tisztán algebrai operatiók segélyével; az első csoport pedig *A B C* mennyiségeknek *a b c*-ből meghatározására szolgál: ha tehát akárhány *a b c A B C* számcsoportból úgyszólva

*) J. de l'Ecole polys. Cah. 6 p. 280.

számidomot öszszeállitva ezt a XIX egyenletek alapján vizsgáljuk, akkor bizonyos, hogy az igy felépült theoriában ellenmondás nem lehet.

Csak az lehet tehát kétséges, hogy ha ezen $a\ b\ c\ A\ B\ C$ mennyiségeknek azt a geometriai jelentést akarjuk tulajdonitani, a melylyel az egyenletek levezetése szerint szerepelnek, nem fognak-e egyenleteink általános k mellett *a geometriai előzményekkel* ellenmondásba jöhetni: kérdés t. i., nem fognak-e a XIX. egyenletekből azon vonalak számára, a melyek a b c oldalú és A B C szögű ezen egyenleteknek hódóló háromszöget alkotnak, olyan tulajdonok folyni, a melyek az egyenesnek az 1. §-ban felállitott postulatumával *csak is* úgy nem ellenkeznek, ha k állandó *bizonyos speciális* értékkel bir.

E kérdés eldöntésére, S vonalaknak nevezvén az imént körülirt háromszöget képező vonalakat, a következő tételeket bizonyitjuk be:

XXI_a *Tétel. Ha k képzetes, akkor a határtalan tér bármelyik két pontja között csak egy S vonal húzható.*

$XXI_{b)}$ *Tétel. Ha k valós, akkor is csak egy S vonal húzható a határtalan tér akkora részének bármelyik két pontja között, a melyben a leghoszszabb S vonal is rövidebb mint* $\frac{\pi}{k}$.

Mert tegyük föl, hogy két pont A és B között két S vonal húzható. Válaszszuk azután A és B pontokat s a közöttük föltevés szerint lehetséges S vonalak egyikén fölvett C pontot háromszög csúcsainak. A háromszög oldalai $a\ b\ c$ és szögei $A\ B\ C$ között állanak a XIX alatti egyenletek, melyek közül ezeket választjuk ki:

$$1)\ \cos kc = \cos ka \cos kb + \sin ka \sin kb \cos C$$

$$2)\ \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos ka - \cos k(b - c)}{2 \sin kb \sin kc}$$

$$3)\ \sin^2 \frac{B}{2} = \frac{\cos kb - \cos k(c - a)}{2 \sin kc \sin ka}$$

Ámde föl kell tennünk hogy az S vonal, legfölebb egyes pontjait kivéve, folytonos [hiszen e nélkül az A, B, C szögeknek értelmük se volna.] A C pontot tehát választhattam úgy, hogy $C_A = \pi$; akkor pedig 1)-ből lészen

$$\cos kc = \cos k(a + b)$$

tehát $$kc = \pm k(a + b) + 2\lambda\pi$$

hol λ akármilyen positiv vagy negativ egész számot jelenthetne. De k vagy tisztán képzetes vagy valós. Első esetben $\lambda = o$ kell, hogy legyen s azután csak a $+$ jegynek van értelme. Második esetben ugyanaz áll abból az okból, mert föltétel szerint a leghoszszabb S vonal is rövidebb térrészünkön belől mint $\frac{\pi}{k}$, azaz

$$kc < \pi \quad \text{és} \quad k(a + b) < \pi$$

Tehát mindkét esetben

$$c = a + b$$

Ennek folytán a 2) és 3) egyenletekből lészen, minthogy a jobb oldal nevezője zéró az imént idézett föltétel szerint nem lehet :

$$4) \begin{cases} A = 2\lambda\pi \\ B = 2\lambda'\pi \end{cases}$$

hol λ és λ' egész számot jelentenek.

Ezek előrebocsátása után vegyünk föl az A és B között föltevés szerint lehetséges S vonalakon az A ponttól a' távolságban egy- egy pontot. Ha megmutatjuk, hogy e pontok egymástóli távolsága $x = o$, akkor tételünk be lesz bizonyítva. Ámde

$$\cos kx = \cos ka' \cos ka' + \sin ka' \sin ka' \cos A \quad \text{tehát}$$

4)-nél fogva

$$\cos kx = \cos^2 ka' + \sin^2 ka' = 1$$

következőleg, mivel k vagy képezetes vagy ha valós, akkor föltétel szerint $kx < \pi$, tehát

$$x = o^{*})$$

q. e. d.

Ez által be van bizonyítva, hogy az S vonalak, bármi legyen is k, birnak az egyenesnek azon fundamentális tulajdonával, hogy legalább bizonyos térrészen belől eső két pontjában megszilárditva, helyét meg nem változtathatja.

---

*) A XXI. tétel alapján könnyü a XIX_a egyenletekből levezetni, hogy az S vonal A és B között a XXI-ben kimondott föltétel alatt a legrövidebb.

Összefoglalva tehát az eddig nyert eredményeket, be van bizonyitva, hogy ha az elfogadott értelmezések és axiómák mellett az 1. §-ban felállitott postulatum áll, akkor az egyenes vonalú háromszögre állnak a XIX. alatti egyenletek, — és fordítva, ha az elfogadott értelmezések és axiómák mellett a XIX. alatti egyenletek állanak bizonyos egyelőre ismeretlen vonalak által alkotott háromszögre, akkor e vonalak, bármi legyen is a valós vagy képzetes *k* értéke, megfelelnek az 1. §-ban kimondott postulatumnak.

Ebből azután határozottan az következik, hogy mig csak az eddigiekhez valami új, velök összhangzó, postulatum föl nem vétetik a geometria épületébe, addig *k* értéke meg nem határozható. De következik másrészről az is, hogy az eddigiekre alapitott geometria önmagában kifogástalan theoriát képezend akármekkora valós vagy képzetes *k* mellett is: hogy a természettel milyen és mekkora *k* mellett egyez meg, az más kérdés.

A következőkben feladatul tüzzük ki vizsgálni, milyennek kellene a tér természetének lenni, ha *k* valós, milyennek ha képzetes.

8. §.

A tér természetének milyennek kellene lenni, ha *k* valós.

XXII. Tétel. *Ha k zerótól különböző valós értékkel birna, akkor a határtalan térnek nagyságra végesnek kellene lenni.*

E tétel be lesz bizonyítva, ha megmutatjuk, hogy a tér akármelyik A pontjából kiinduló valamenynyi sugárnak egyugyanazon B pontban kellene egyesülni, ha k zerótól különböző valós értékkel birna.

Tegyünk ennek megmutatására az A pontból szétágazó AB' és A B'' egyeneseken át sikot s irjunk ezen folytonosan nagyobbodó r sugárral és A ponttal mint középponttal köröket. Egy-egy kör kerülete a XX_c egyenlet szerint

$$= \frac{2\pi}{k} \sin kr$$

lévén, világos, hogy r növekedtével csak addig nő, mignem

$r = \frac{\pi}{2k}$; ezentúl folytonosan fogy és pedig teljesen zéróvá lesz, ha $r = \frac{\pi}{k}$. A kör kerülete tehát az A ponttól $\frac{\pi}{k}$ távolságban *egy pontrá* húzódik öszsze: azaz az A pontból kiinduló AB' és AB'' sugár ebben a távolságban lévő B pontban egyesül.

Megjegyzés. A számitás helyén van akkor is, ha k képzetes; de a következtetés akkor természetesen nem vonható. Ha k zéró, akkor a számítás nincs helyén; akkor ugyanis

$$\left.\frac{\sin kr}{k}\right]_{k=o} = r$$

1. Következmény. Ha k zérótól különböző valós értékkel birna, akkor az egyenesnek zárt vonalnak kellene lenni. Ugyanis az A pontból *ellenkező irányban* kiinduló egyenesek is a B pontban kellene, hogy egyesüljenek.

2. Következmény. Az *egyszer* zárt egyenes hoszsza $\frac{2\pi}{k}$ volna.

XXIII. Tétel. *Ha k zerótól különböző valós értékkel birna, akkor az egyenesnek tökéletesen azonosnak kellene lenni olyan körrel, a melynek sugara* $= \frac{\pi}{2k}$.

E tétel bebizonyítására emeljünk CA határtalan egyenes C pontjában merőlegest, rakjuk fel erre a $\frac{\pi}{2k}$ hosszuságot, úgy, hogy $CB = a = \frac{\pi}{2k}$; azt állitom, hogy a B pont $\frac{\pi}{2k}$ távolságban van a CA egyenes minden pontjától, úgy, hogy

$$BC = BA = \frac{\pi}{2k}.$$

A BCA háromszög ugyanis C-nél derékszögű lévén, lészen a XX_a tételek szerint

$$1)\ \mathrm{tg}\, kb = \sin ka\ \mathrm{tg}\, \overline{B}$$

$$2)\ \mathrm{tg}\, kc = \frac{\mathrm{tg} ka}{\cos \overline{B}}$$

$$3)\ \cos A = \cos ka \sin \overline{B}$$

következőleg

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{tg} kb = \operatorname{tg} B \\ \operatorname{tg} kc = \infty \\ \cos A = o \end{array}\right| \begin{array}{l} kb = B + \lambda\pi \\ kc = \frac{\pi}{2} + \lambda'\pi \\ A = \frac{\pi}{2} + \lambda''\pi \end{array}$$

Ámde ha b = o, akkor

$$B = o$$
$$A = \frac{\pi}{2}$$
$$c = a$$

miként a közvetlen szemlélet mutatja; következőleg $\lambda = \lambda' = \lambda'' = o$ és így b változtával csak B változik, míg $kc = \frac{\pi}{2} = A$ állandók maradnak; tehát

$$c = \frac{\pi}{2k} = a$$

q. e. d.

Következmény. Azon vonal tehát, a mely a *CA* egyenestől minden pontjában *a'* állandó távolságban van, olyan *kör* volna, a melynek középpontját a *B* pont képezi, s a melynek sugara $= \frac{\pi}{2k} - a'$.

Megjegyzés. A levezetésből egyuttal látható, hogy ha A pont a C egyenesen mozogván a *b* folytonosan nő zerótól $\frac{2\pi}{k}$-ig, akkor

$$B = kb$$

lévén, a B szög zérótól 2π-ig nő. Azaz ha k zérótól különböző valós érték, akkor az egyenes zárt vonal volna s egyszer vett hoszsza $\frac{2\pi}{k}$. (L. előbbi tétel következményeit.)

XXIV. Tétel. Ha k valós és nem zéró, akkor ugyanazon egy sikban lévö egyeneseknek kivétel nélkül metszeniök kellene egymást (tehát párhuzamosak nem léteznének).

XXV. Tétel. Ha k valós és nem zéró, akkor az egyenes vonalú háromszög szögeinek összege π-nél nagyobb volna.

E két tételnek különben is igen egyszerü bebizonyítását elhagyhatjuk annál is inkább, mert már XIX. tételekből magukban véve is világos, hogy ha k zérótól különböző valós értékkel birna, akkor az egyenes vonalú három szögökről azon tételeknek mindenesetre állani kellene, a melyek a közönséges geometriában $\frac{1}{k}$ sugárú gömbön fő köröktől határolt háromszögökről állanak*).

9. §.

A tér természetének milyennek kellene lenni, ha *k* képzetes.

XXVI. Tétel. Ha k képzetes értékkel bir, akkor a tér végtelen nagy.

Az *r* sugárral irt kör kerülete ugyan is a XX_d szerint

$$= \frac{\pi}{k'}(e^{k'r} - e^{-k'r})$$

Ennélfogva (minthogy k' valós) sugarával együtt végtelen nagygyá nő. A kör kézéppontjából kiinduló sugarak tehát soha nem egyesülnek többé, sőt mindinkább szétágaznak**)

XXVII. Tétel. Ha k képzetes s modulusa nem végtelen icsi y, akkor a háromszög szögöszszege kisebb π-nél; ha a háromszö ‹ valamelyik oldala végtelen kicsinynyé fogy, akkor a szögöszszeg π-hez vég nélkül közeledik.

E tétel bebizonyítására két ismert gömb- háromszögtani tételből indulunk ki, melyeket 6. §-ban bebizonyított elv segélyével átalakitván, lészen:

$$1)\ \cos^2\frac{A}{2} = \frac{\cos ka - \cos k\,(b + c)}{2\sin kb \sin kc}$$

$$2)\ \cos\frac{A + B + C}{2} = -\frac{\sin kb \sin kc \sin A}{4\cos\frac{ka}{2}\cos\frac{kb}{2}\cos\frac{kc}{2}}$$

Minthogy már mostan *k* képzetes, tehát a $XXI_{a)}$ értelmében a határtalan tér bármelyik két pontja között csak egy egyenes lévén huzható, a XII. tétel 2 következményében a térrészre szorítkozás elmaradhat; azaz

$$a < b + c$$

Ez egyenlőtlenségnél fogva az 1) egyenletből az foly,

---

*) Riemann. Über die. Hyp. etc. (L. fen.)

**) L. XXII. tétel.

hogy $\cos \frac{A}{2}$ nem lehet zeróvá olyan háromszögnél, melynek csúcsai nincsenek ugyanazon egy egyenesben; a miből az következik, hogy ha ilyen háromszögöket kizárunk, akkor $\cos \frac{A}{2}$ vagy *minden* háromszögben positiv vagy *minden* háromszögben negativ. Ez utóbbi absurdumra vezetne, miután akkor nem volna háromszög, a melynek egy-egy szöge kisebb π-nél; tehát az első eset áll, azaz minden háromszögben *kisebb* egyegy szög π-nél.

Ennek előrebocsájtása után alakítsuk át a 2) egyenletet a XX_b előtti képletek segélyével; lészen:

$$\cos \frac{A+B+C}{2} = \frac{(e^{k'b} - e^{-k'b})(e^{k'c} - e^{-k'c}) \sin A}{2\left(e^{\frac{k'a}{2}} + e^{\frac{-k'a}{2}}\right)\left(e^{\frac{k'b}{2}} + e^{\frac{-k'b}{2}}\right)\left(e^{\frac{k'c}{2}} + e^{\frac{-k'c}{2}}\right)}$$

Azaz $\cos {}^1/_2 (A + B + C)$ negativ egyátalában nem lehet s zeró is csak akkor, de akkor mindenesetre, ha az oldalak közül valamelyik zéróvá fogy.

q. e. d.

Következmény. Ha k képzetes, akkor nem lehetne egyenes az a vonal, melynek mindegyik pontja adott egyenestől egyenlő távol van. — Mert ha ezen vonal egyenes volna, akkor akármelyik két pontjából függélyeket vonva az adott egyenesre, olyan egyenes vonalú négyszög állana előttünk, melynek mindenik szöge derékszög; ilyen pedig az előző tétel értelmében képzetes k mellett nem létezhetik.

XXVIII. Tétel. Ha CA egyeneshez B pontból BC = a függélyt és azon kivül BA ferdét vonok, akkor csak addig metszi e ferde a CA egyenest, mig a függély és ferde által képzett hegyes szög:

$$B < \text{arc cotg} \frac{e^{k'a} - e^{-k'a}}{2}$$

A $C A$, BC és BA egyenesek ugyanis valósnak adott a és B mellett csak is úgy, de akkor mindenesetre képeznek háromszögöt, ha a XX_b egyenletek közül vett e három egyenlet

$$1) \quad \frac{e^{k'b} - e^{-k'b}}{e^{k'b} + e^{-k'b}} = \frac{e^{k'a} - e^{-k'a}}{2 \text{ cotg } B}$$

$$2) \quad \frac{e^{k'c} - e^{-k'c}}{e^{k'c} + e^{-k'c}} = \frac{e^{k'a} - e^{-k'a}}{e^{k'a} + e^{-k'a}} \cdot \frac{1}{\cos B}$$

$$3)\quad \cos A = \tfrac{1}{2}\,(e^{k'a} + e^{-k'a}) \sin B$$

b, c és A számára valós megoldást szolgáltat. Ámde a mint

$$\operatorname{cotg} B \gtrless \tfrac{1}{2}\,(e^{k'a} - e^{-k'a})$$

a szerint lészen

$$e^{k'b} - e^{-k'b} \lessgtr e^{k'b} + e^{-k'b}$$

mely egyenlőtlenségek közül az első valós értéket, a második ellenben képzetest engedvén meg b számára, tételünk be van bizonyítva. Mert a mint egy háromszögnek két oldala s az általuk bezárt szöge valós, azonnal valósak a háromszög egyéb darabjai is; mig forditva, ha valamelyik oldal képzetes stb.

Arra az esetre, ha

$$4) \ldots \quad \operatorname{cotg} B = \tfrac{1}{2}\,(e^{k'a} - e^{-k'a})$$

az 1) és 2) egyenletekből az következik, hogy

$$5) \qquad b = \infty \text{ és } c = \infty$$

a 3) egyenletből pedig

$$6) \qquad A = 0$$

Következmény. A CA egyeneshez akármelyik B ponton át huzott ferdék között van tehát a BC függély *egy-egy* oldalán egy, de csak is egy olyan, a mely az CA egyenest *metsző* és *nem metsző* ferdék határáúl szolgál. Ezen egyenespárat a CA-hoz a B ponton átvont párhuzamosaknak nevezvén, a 4) 5) és 6) egyenletekből róluk azt tudjuk, hogy a CA egyenessel zéró szöget alkotnak, hogy azt (ellenkező irányban) végtelen távol metszik, s hogy végre *a BC függélylyel a 4) egyenlet által meghatározott hegyes szöget zárják be. E szöget az a függélynek megfelelő párhuzamos szögének nevezvén*, a 4-ből világos, hogy a párhuzamos szöge $\frac{\pi}{2}$-től zéróig fogy, ha a zérótól végtelenig nő.

Kitüzött czélunkat ezennel elértük*). Megmutattuk,

*) Továbbiakra nézve l. a fentebb idézetteken kivül *Beltrami* »Theoria fondamentale degli spazii di curvatura constante« 1868. Annali di Matematica Serie II. Pom. II. Milano *Christoffel* »Über die Transformation ganzer homogener Differentialausdrüke« 1869. *E. Schering*

hogy a nélkül, hogy a határtalan tér végetlen nagyságának s a párhuzamosságnak csak fogalmát is használná, lefejtheti az ember a számoló geometria alaptételeit és pedig egyszerü szerkezetü idomokon végzett bizonylatokkal; azután, hogy a nyert eredmények, *k* értékét *elegendő* kicsinynek véve, teljes összhangzásba hozhatók a gyakorlati legpontosabb mérésekkel is; továbbá, hogy a *k*-ra vonatkozó minden megszorítás nélkül is önmagában teljesen kifogástalan geometriának szolgáltatják az alapját;**) végre hogy ezen elméleti tekintetben kifogástalan geometria nem követeli meg se azt, hogy a határtalan tér végetlen nagy legyen, se azt, hogy a tér abban az esetben, ha végetlen nagy, Euklides úgynevezett XI. axiomájának megfeleljen, — nem *követeli* meg, de meg engedi.

Hogy valós vagy képzetes-e a *k* értéke, azaz milyen a tér a valóságban, az geometria utján semmi esetre se s metaphysika utján még kevésbé lesz bebizonyitható; *ha valahogyan* és *valaha* úgy bizonyára a világ- egyetemnek és physikai törvényeinek kiterjedtebb és pontosabb ismerete után lesz csak a kérdés eldönthető.

Kolozsvártt, 1875. évi április havában.

»Die Schwerkraft im Gaussischen Raume« Gött. Nachrichten 1870. Nro. 15. 1873. Nro. 6; »Linien, Flächen und höhere Gebilde in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Räumen« Gött. Nachr. 1873. Nro. 2 Fressdorf.« Über die Geometrie u. Potential Funktion im Gaussischen und Riemannschen Räumen.« Göttingen, 1873. Inaugural Dissertation.

**) Ezen igazság igen érdekes és tanúságos bizonylatásait nyeri a következő értekezésekben: *Beltrami* »Saggio di interpretazione della geometria Non-Euclidea«. Napoli 1868. *Julius König.* »Über eine reale Abbildung der s. g. Nicht-Euklidischen Geometrie« Göttinger Nachrichten 1872. p. 157. *Felix Klein* »Über die s. g. Nicht-Euklidische Geometrie« Math. Annalen Bd. IV. p. 573, Bd. VI. p. 112.