A HAMILTON-FÉLE ELV ÉS A MECHANIKAI HŐ-ELMÉLET MÁSODIK FŐTÉTELE.

SZILY KÁLMÁN,

L. TAGTÓL.

(Előadatott a M. T. Akadémia 1871. decz. 11-dikén tartott ülésén.)

PEST.
EGGENBERGER FERDINÁND M. AKAD. KÖNYVÁRUSNÁL.
(HOFFMANN ÉS MOLNÁR.)
1871.

Pest, 1871. Nyomatott az Athenaeum nyomdájában.

A HAMILTON-FÉLE ELV ÉS A MECHANIKAI HŐELMÉLET MÁSODIK FŐTÉTELE.

Szily Kálmán, l. tagtól.

(Előadatott a M. Tud. Akadémia 1871. decz. 11-kén tartott ülésén.)

A physikai tudomány ujabbkori fejlődésének története határozottan a mellett bizonyít, hogy csak oly elméletek képesek a tünemények megnyugtató magyarázatára vezetni, melyek mechanikai elvekre vannak alapítva.

A hőelmélet első főtétele is bizonyosan nem terjedt volna el oly rögtön, és nem hatolt volna, alig egy-két év alatt, az összes természettudomány minden ágába, ha a dynamikának analog tétele a munka és eleven-erő egyenértéküségéről amazt meg nem előzi. A tökéletes összhang, mely a hőelmélet első tétele és a mechanikának egyik alapelve között uralkodik, biztosította mindkettőjök rögtöni bejuthatását a természettan minden ágába, ámbár az egyenértékek még maiglan sem ismeretesek, sem a fény, sem a vegyrokonság, sem a villanyosság körében.

A hőelmélet második főtétele alig fiatalabb egy-két évvel az elsőnél, hordereje már most sem csekélyebb, sőt ha tekintetbe veszszük a természettan többbi ágainak előkészültségi hiányait, talán még nagyobb lesz mint az elsőé; s mindamellett, mig az első tétel mondhatni egy rohamra bevette az egész természettudományt, a második főtétel még maig sem igen tudott túlterjeszkedni a hőtan határain.

Miben rejlik e feltünő jelenség oka? Nézetem szerint alkalmasint abban is, hogy a második főtétel nem talált a mechanikában oly általánosan ismert rokonelvre, mint az első, melyet a munka és elevenerő egyenértéküségének elve, hogy úgy mondjam, már készen várt. Mert fejezzük ki a második főtételt akár szavakban, akár mathematikai jelvényeivel, nem igen emlékeztet az a mechanikának egyik principiumára sem.

Ámbár az analog tétel a mechanikában nem volt ismeretes, vagy legalább nem volt a hőtanival szembe állítva, mégis aligha kételkedett valaki, hogy ilyféle relationak a dynamikában is kell létezni. Mert ha a melegség csak egy különös neme a mozgásnak, úgy a legáltalánosabb mozgásra vonatkozó egyenletekben benne kell foglalva lenni a hőtan minden egyenletének is. A megoldandó kérdés csak az volt, melyik mozgási egyenlet vezet, bizonyos specialis esetben, a hőelmélet második főtételére, vagy viszont a második főtétel melyik dynamikai egyenletre vezethető vissza.

Az első, ki e kérdéssel foglalkozott, tudtommal Ludwig Boltzmann volt. Idevágó értekezését 1866. február 8-dikán nyújtotta be a bécsi Akademiánál, hol az a Sitzungsberichte 53-ik kötetében „Über die mechanische Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie“ czim alatt meg is jelent.

Boltzmanntól egészen függetlenül s ennek dolgozatáról nyilván mit sem tudva, Clausius a Niederrhein. Gesellschaft für Natur- et Heilkunde 1870. november 7-diki ülésén egy értekezést terjesztett elő „Über die Zurückführung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf allgemeine mechanische Principien“ czim alatt, mely a Poggendorff-féle Annalok ez idei 3-ik füzetében jelent meg.

Az eredmény mindkettőnél jóformán ugyanaz: „a mechanikai hőelmélet második főtételét az analytikai mechanika elveivel meg lehet magyarázni. E czélra azonban sajátságos és új fejtegetésekre van szükség, s az idevonatkozó számitások igen hasonlitanak azokhoz a számitásokhoz, melyek segélyével az úgynevezett legkisebb működés elvét szokás bebizonyítani.

Clausius megvizsgálja mindenekelőtt, minő összefüggés létezik egy anyagi pontnak zárt pályákban történő periodikus mozgásai között, conservativ erőket, vagyis oly erőket tételezvén föl, melyek erőfüggvénynyel birnak; azután megvitatja a pályaváltozás lehetséges okait és a különféle esetekben megmutatja a felállított egyenlet érvényét. Értekezése második részében áttér ezen egyszerü esetről bonyolultabbakra: fölteszi, hogy az egymásra ható anyagi pontoknak egész rendszere van zártpályákat követő periodikus mozgásban. Ezután általánosítja a felállított egyenletet oly stationär mozgásokra is, a melyek nem zárt pályákban mennek végbe. Clausius mechanikai egyenlete, melyet ez úton levezet, s melyhez azután a mechanikai hőelmélet második főtételét hasonlítja, a következő:

$$\delta L = \delta \overline{T} + 2\, \overline{T} \delta \log i$$

Hol δ L azon munkát jelenti, melyet a conservativ erőknek végre kellett hajtani, hogy a rendszer adott stationär mozgásából egy másik stationär mozgásba áttérjen;

$$\delta \overline{T} = \delta \frac{1}{i} \int_0^i \Sigma \frac{mv^2}{2} \cdot dt$$

jelenti a rendszer középeleven erejének ezalatt beállott változását, i pedig a mozgás időszakának tartamát.

Clausius értekezése által figyelmessé tétetve azon viszonyra, mely az ő egyenlete között és egyrészt a legkisebb működés elve között, más részt pedig a hőelmélet második főtétele között fennáll, nem tartottam érdektelennek a jelen dolgozatban megvizsgálni, minő összefüggés létezik a hőelmélet második főtétele és a Hamiltonféle dynamikai elv között, mely a változékony működésre vonatkozik, s a mely, mint ismeretes, a mathematikai physikának a fénytanban, a rugalmasság elméletében s több más téren már eddigelé is jelentékeny szolgálatot tett.

A Hamilton-féle dynamikai elv *) így fejezhető ki:

Ha az anyagi pontoknak valamely tetszőleges conservativ rendszere, tetszőleges kezdet- és végállás között, tetszőleges szabad mozgásban van, úgy ezen mozgásnak végtelen csekély megváltoztatására állani fog egész általánosan:

$$\delta A = \Sigma m v_1 \delta s_1 - \Sigma m v_0 \delta s_0 + i \delta E \ldots\ldots (1)$$

*) Hamilton: On a general method in Dynamics. (Philosoph. Transactions 1834. P. II.) és Second essay on a general method in Dynamics. (Ibid. 1835. P. I.) V. ö. Thomson and Tait: A Treatise on Natural philosophy. Vol. I. Pag. 235.

hol m a rendszer valamelyik pontjának a tömege; δs_1 illetőleg δs_0 ugyanezen pontnak elmozdulása a régi végállásból az új végállásba, illetőleg a régi kezdetállásból az új kezdetállásba; v_1 illetőleg v_0 ugyanezen pontnak sebessége a régi végállásban, mérve az elmozdulás iránya szerint, illetőleg a régi kezdetállásban, mérve az ottani elmozdulás iránya szerint; i azon időtartam, mely alatt a rendszer a régi kezdetállásból a régi végállásba jut; δA a működés különbsége, δE az összes erély különbsége, az új és a régi pálya között; működés alatt nem értvén egyebet, mint a rendszer kétszeres eleven erejének időintegrálját azon tartam alatti míg a rendszer a kezdetállásból a végállásba jut: összes erély alatt pedig az egyazon pillanathoz tartozó, összes mozgás, erély és helyzeti (potentialis) erély összegét. Mind A, mind E ugyanabban az egy pályában állandó, bárminő állásban legyen is a rendszer, de pályáról pályára általában változó.

Ha a rendszer összes elevenereje valamely pillanatban T, úgy:

$$A = \int_0^i 2\,T dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Ha továbbá U a rendszer helyzeti erélye ugyanazon pillanatban, midőn összes elevenereje T, úgy az összes erély

$$E = T + U.$$

Mind T-nek, mind U-nak a pálya különböző pontjain más meg más értéke van, de a kettőnek összege a pálya minden pontjában ugyanazon állandó. Lesz tehát:

$$iE = \int_0^i (T + U)\,dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

A (2.) és (3.)-mal jegyzett egyenletek tekintetbe vételével a Hamiltonféle elv (1.) alatti kifejezése a következő, ismeretesebb alakot ölti magára:

$$\delta \int_0^i (T - U)\,.\,dt = \Sigma m\,v_1\,\delta s_1 - \Sigma m\,v_0\,\delta s_0 - E\,\delta\,i.$$

Térjünk vissza megint az első alakhoz és vizsgáljuk meg, mikor lesz a működés variatiója független a kezdet és végállástól.

Ez akkor fog történni, ha

$$\Sigma m v_1 \,\delta s_1 = \Sigma m v_0 \,\delta s_0 \dots\dots\dots\dots (4)$$

vagyis ha a működés azon idő alatt, mig a rendszer a régi kezdetállásból az új kezdetállásba tér, épen akkora, mint a működés a rendszernek átmeneténél régi végállásából az új végállásba.

A (4.) alatti feltételnek elég van téve például akkor

ha a pályák mind közös kezdetállásból indulnak ki és közös végállásba térnek; mert ekkor $\delta s_1 = \delta s_0 = o$ a rendszer minden pontjára nézve;

vagy ha a pályák zártak, és a mozgások periodikusak, mert ekkor $\delta s_1 = \delta s_0$ és $v_1 = v_0$ a rendszer minden pontjára;

vagy akkor is, ha a pályák nem zártak, de minden pont elmozdulása a kezdet- és a végállásban a $v_1 \,\delta s_1 = v_0 \,\delta s_0$ egyenlet által van szabályozva.

Mindezek csak specialis esetek, a feltétel általános érvénye a (4.) alatti egyenlet által van meghatározva.

Azon esetben, midőn a rendszer mozgásának változása a (4.) alatti egyenletnek eleget tesz, a Hamilton-féle elv igen egyszerüen fejezhető ki:

$$\delta A = i \,\delta E \dots\dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

vagyis a működés variatiója egyik pályából a másikba, egyenlő a pályafutás tartamának és az összes erély variatiójának szorozmányával.

Legyen $\overline{T}$ az összes elevenerőnek középértéke az egész pályafutás tartama alatt, úgy

$$i . \overline{T} = \int_0^i T dt \quad \text{és}$$

$$A = 2 i \overline{T}, \text{ tehát}$$

$$i \,\delta E = \delta 2 i \overline{T}, \text{ miből következik}$$

$$\delta E = \overline{T} \,\delta \log (i \overline{T})^2,$$

vagy ha a variatio jelét a differentiatio jelével helyettesitjük és az elevenerő középértékét $\overline{T}$ helyett egyszerűen T-vel jelöljük, lesz még:

$$\frac{dE}{T} = d \log (i\ T)^2 \dots\dots\dots (6)$$

Gondoljuk ezen egyenletet egy körfolyamon át egészelve és vegyük figyelembe, hogy i T-nek a körfolyam végén ugyanazon értéke van, mint elején, ugy

$$\int \frac{dE}{T} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

És ez ugyanaz az egyenlet, melyet Clausius 1854-ben tett közzé, mint a hőelmélet második főtételének kifejezését, conservativ körfolyamokra alkalmazva.

Ha a rendszer nem conservativ, ha tehát az erőfüggvényes erőkön kivül még a szilárd testek surlódása, vagy a folyadékok nyúlóssága, vagy más efféle dissipativ erők is közre működnek, úgy a Hamilton-féle elvet kifejező (1.) egyenlet legutósó tagjában az összes erély változásához hozzátudandó még az ellenállások legyőzésében vesztett erély δR; minek következtében az (5.) egyenlet átmegy imez alakra:

$$\delta A = i(\delta E + \delta R) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8.)$$

Tekintetbe véve, hogy δR mindig vesztett erélyt jelent, vagyis ott, a hol ezen egyenletben áll, mindig positiv jegyü, a (7.) alatti egyenlet a következő egyenlőtlenséggé változik át:

$$\int \frac{dE}{T} < 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

És ez ugyanazon egyenlet, melyet Clausius a hőelméletben a dissipativ körfolyamokra állított fel.

Ezzel a mechanikai hőelmélet második főtétele vissza van vezetve a dynamikának egy általános principiumára. Az, a mit a thermodynamikában második főtételnek nevezünk, nem egyéb mint a dynamikában a Hamilton féle elv, ugyanaz az elv, mely a mathematikai physika több részében már is sokféle alkalmazásra talált.