

LEGRÖVIDEBB TÁVOLOK

A

KÖRKÚPON.

SZÉKFOGLALÓ ÉRTEKEZÉS

VÉSZ JÁNOS ÁRMIN,

R. TAGTÓL.

(Előadatott az 1868. October 12-ki ülésben.)

PEST,

EGGENBERGER FERDINÁND MAGYAR AKADEMIAI KÖNYVÁRUSNÁL

1869.

LEGRÖVIDEBB TÁVOLOK A KÖRKÚPON.

SZÉKFOGLALÓ ÉRTEKEZÉS

V É S Z J Á N O S Á R M I N

RENDES TAGTÓL.

(Előadatott az 1868. október 12-diki ülésben.)

A jelen értekezés tárgyát képezi azon görbe vonal meghatározása, a melyen haladnunk kell, ha a körkúp egy pontjából a másikra a legrövidebb úton kívánunk elérni.

A feladat maga a változtatási hánylat egyik alkalmazását képezi a mértanra, és azon feladattal, melynél a legkisebb távol a henger két adott pontja között kerestetik, némi hasonlatossággal bir ugyan, de úgy a nyert eredményekben, mint az azokhoz vezető utakban attól lényegesen különbözik.

Ezen említett hasonlatosság az országos építészeti hivatalnál alkalmazva volt néhány fiatal barátim között, az eredő görbére nézve, igen érdekes vitákra adván alkalmat, arra indított, hogy a feladattal magával tüzetesebben foglalkozzam, és a következőkben lesz szerencsém a talált érdekes eredményeket, úgy szinte azon különbzéki egyenletek oldását előadni, melyek ezen eredményekre vezettek.

1. §.

Legyen az 1. ábrában S egy körkúp csúcsa, melynél az alkotók a tengelylyel β szöget képeznek, A , és B a körkúpon fekvő két adott pont, melyek összerendezői

$$\begin{array}{lll} x_1 = m & \text{és} & x_2 = n \\ y_1 = ma & & y_2 = na \cos \varphi \\ z_1 = 0 & & z_2 = na \sin \varphi \end{array}$$

hol $a = tg\beta$, φ pedig azon síkok hajlási szögét jelenti, melyek a tengelyen és az adott pontokat tartalmazó alkotókon vezetettnek keresztül. Kerestetik a kúpon fekvő azon AB görbe vonal, mely az A és B pontok között a legrövidebb.

Nevezvén az AB görbe ívhosszát s -sel, leend

$$s = \int_m^n dx \sqrt{1 + y_1^2 + z_1^2}$$

hol rövidség okáért $y_1 = \frac{dy}{dx}$, és $z_1 = \frac{dz}{dx}$.

Az illető görbe vonal meghatározására nézve tehát ezen kifejezés változtatása egyenlővé teendő a semmivel, vagyis

$$\delta s = \delta \int_m^n dx \sqrt{1 + y_1^2 + z_1^2} = 0 \quad \dots \quad 1)$$

s minthogy a határok állandók, tehát $\delta dx = 0$

$$\begin{aligned} \delta s &= \int_m^n dx \delta \sqrt{1 + y_1^2 + z_1^2} = 0 \\ &= \int_m^n dx \left[\frac{y_1 \delta y_1}{V} + \frac{z_1 \delta z_1}{V} \right] = 0 \quad \dots \quad 2) \end{aligned}$$

hol rövidség okáért áll

$$V = \sqrt{1 + y_1^2 + z_1^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{De } \int \frac{y_1 \delta y_1}{V} &= \int \frac{y_1}{V} \cdot \frac{d}{dx} (\delta y) \cdot dx \\ &= \frac{y_1 \delta y}{V} - \int \delta y \frac{d}{dx} \left(\frac{y_1}{V} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{és } \int \frac{z_1 \delta z_1}{V} &= \int \frac{z_1}{V} \cdot \frac{d}{dx} (\delta z) \cdot dx \\ &= \frac{z_1 \delta z}{V} - \int \delta z \frac{d}{dx} \left(\frac{z_1}{V} \right) dx \end{aligned}$$

miért is ezen értékekkel lesz a 2) alatti egyenletből

$$\delta s = \left\{ \frac{y_1}{V} \delta y + \frac{z_1}{V} \delta z \right\}_m^n - \int_m^n dx \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{y_1}{V} \right) \delta y + \frac{d}{dx} \left(\frac{z_1}{V} \right) \delta z \right] = 0$$

mely egyenlet első tagja a határok állandósága miatt maga

egyenlő a semmivel, a görbe vonal meghatározását pedig a következő különbzéki egyenlet adja meg :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_1}{V} \right) \delta y + \frac{d}{dx} \left(\frac{z_1}{V} \right) \delta z = 0 \quad . . . \quad 3)$$

a melyhez még, miután a görbe vonal egészen a kúpon fekszik, ennek egyenlete pedig $z^2 + y^2 = a^2 x^2$, a következő egyenlet járul :

$$z \delta z + y \delta y = 0 \quad . . . \quad 4)$$

Helyettesítvén ezen utóbbi egyenletből δz értékét az előbbibe, lesz :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_1}{V} \right) - \frac{y}{z} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{z_1}{V} \right) = 0$$

$$\text{vagy } z \frac{d}{dx} \left(\frac{y_1}{V} \right) - y \frac{d}{dx} \left(\frac{z_1}{V} \right) = 0 \quad . . . \quad 5)$$

és a kijelentett műtételek végbevitel után

$$z \left(y_2 V - \frac{dV}{dx} y_1 \right) - y \left(z_2 V - \frac{dV}{dx} z_1 \right) = 0$$

mely még így is írható :

$$(zy_2 - yz_2) V - \frac{dV}{dx} (zy_1 - yz_1) = 0$$

innét pedig ered :

$$\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dx} = \frac{zy_2 - yz_2}{zy_1 - yz_1} \quad . . . \quad 6)$$

mely egyenletben, mind a két oldalon, a számláló a nevező különbzéke lévén, egyszerűsítés által ered :

$$lc + lV = l(zy_1 - yz_1)$$

vagy a mi mindegy :

$$zy_1 - yz_1 = cV \quad . . . \quad 7)$$

mely különbzéki egyenlethez járul még a kúp egyenletének különbzékelése által :

$$yy_1 + zz_1 = a^2 x \quad . . . \quad 8)$$

mely két egyenlet most már az y és a z -nek az x függvényében kifejezésére elegendők.

E célra emeljük a két egyenletet négyzetre és adjuk össze és tekintetbe véve, hogy $y^2 + z^2 = a^2 x^2$

$$\begin{aligned} \text{lesz} & y_1^2 a^2 x^2 + z_1^2 a^2 x^2 = a^4 x^2 + c^2 V^2 \\ \text{vagy} & a^2 x^2 (1 + y_1^2 + z_1^2) = a^2 x^2 (1 + a^2) + c^2 V^2 \\ \text{és miután} & V^2 = 1 + y_1^2 + z_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{lesz még} & V^2 = \frac{a^2 x^2 (1 + a^2)}{a^2 x^2 - c^2} \\ \text{vagy} & V = \frac{a x \sqrt{1 + a^2}}{\sqrt{a^2 x^2 - c^2}} \dots 9) \end{aligned}$$

ezen értékkel azután a görbe vonal meghatározására szolgáló két egyenlet lesz:

$$\begin{aligned} & yy_1 + zz_1 = a^2 x \\ \text{és} & \left. \begin{aligned} & yy_1 + zz_1 = a^2 x \\ & zy_1 - yz_1 = \frac{a c x \sqrt{1 + a^2}}{\sqrt{a^2 x^2 - c^2}} \end{aligned} \right\} \dots 10) \end{aligned}$$

2. §.

E két egyidei különböző egyenlet feloldása különböző módok szerint eszközölhető, nevezetesen először: A második egyenlet még így is írható

$$yz_1 - zy_1 = - \frac{a c x \sqrt{1 + a^2}}{\sqrt{a^2 x^2 - c^2}}$$

és a két oldalt a $z^2 + y^2 = a^2 x^2$ egyenlet által osztva

$$\frac{yz_1 - zy_1}{z^2 + y^2} = - \frac{c \sqrt{1 + a^2}}{a x \sqrt{a^2 x^2 - c^2}}$$

vagy

$$\frac{y dz - z dy}{z^2} = - \frac{c \sqrt{1 + a^2}}{a x \sqrt{a^2 x^2 - c^2}} \cdot dx$$

$$1 + \frac{y^2}{z^2}$$

és egészelés által

$$\begin{aligned} \text{arc tg } \frac{z}{y} &= k - \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} \int \frac{c dx}{x \sqrt{a^2 x^2 - c^2}} \\ &= k - \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} \text{arcsec } \frac{a x}{c} \end{aligned}$$

vagy a k állandó megváltoztatásával

$$\text{arc tang } \frac{z}{y} = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} \text{arc sin } \frac{c}{a x} - \lambda \dots 11)$$

hol λ az új állandót jelenti, mely k -val a következő egyenlet által van összefüggésben

$$k = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} \left(\frac{\pi}{2} - \lambda \right)$$

$$\begin{aligned} \text{miután pedig } \operatorname{arctang} \frac{z}{y} &= \operatorname{arccos} \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} = \operatorname{arccos} \frac{y}{ax} \\ &= \operatorname{arcsin} \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{z}{ax} \end{aligned}$$

s miután továbbá $a = \operatorname{tg} \beta$, tehát $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a} = \frac{1}{\sin \beta}$, mind ezen értékek helyettesítése által lesz a 11) alatti egyenletből a következő kettő:

$$y = x \operatorname{tg} \beta \cos \left\{ \frac{\operatorname{arc} \sin \frac{c_1}{x} - \lambda}{\sin \beta} \right\} \dots 12)$$

$$\text{és } z = x \operatorname{tg} \beta \sin \left\{ \frac{\operatorname{arc} \sin \frac{c_1}{x} - \lambda}{\sin \beta} \right\} \dots 13)$$

mely egyenletek már a keresett görbe vonal vetületeihez tartoznak az YX és ZX összrendezői síkokra, és hol rövidség okáért a $\frac{c}{a}$ állandó helyébe c_1 iratott.

Az egyenletekben előforduló c_1 és λ állandók azon feltételből lesznek meghatározandók, hogy a keresett görbének az adott A és B pontokon kell keresztül menni. Ha tehát ezen egyenletekben az x , y , és z összrendezők helyébe iratnak az A és B pont adott összrendezői, nyerjük az állandók meghatározására a következő egyenleteket

$$\lambda = \operatorname{arc} \sin \frac{c_1}{m}$$

$$\text{és } c_1 [\sqrt{m^2 - c_1^2} - \sqrt{n^2 - c_1^2}] = mn \sin(\varphi \sin \beta)$$

melyekből azok, miután m , n , φ , és β adott mennyiségek, legalább közelítőleg meghatározhatók. Különben a nyert egyenletek tárgyalásával, úgy szinte az állandók jelentőségével később fogunk foglalkozni.

3. §.

A 10) alatti különbözőki egyenletek oldása *másodszor* még a következőképen is eszközölhető. Kiszöböljük ki az említett két egyenletből egyszer y_1 -et, azután a z_1 -et, ered:

$$\text{és} \quad \left. \begin{aligned} z_1 - \frac{z}{x} + Qy &= 0 \\ y_1 - \frac{y}{x} - Qz &= 0 \end{aligned} \right\} \dots 14)$$

hol rövidség okáért tétetett $Q = \frac{c\sqrt{1+a^2}}{ax\sqrt{a^2x^2-c^2}}$

szorozzuk most a második egyenletet ψ -vel, és adjuk az elsőhöz, feltéve, hogy ψ az x -nek valami később meghatározandó függvénye; lesz

$$z_1 + \psi y_1 - \frac{z}{x} - \frac{\psi y}{x} + Qy - Q\psi z = 0$$

legyen már most $z = -\psi y \dots 15)$

$$\text{tehát } z_1 = -\psi y_1 - \psi_1 y$$

és ezen értékek helyettesítése által

$$-\psi_1 + Q(1 + \psi^2) = 0$$

$$\text{és innét} \quad \frac{\psi_1}{1 + \psi^2} = Q$$

vagy egészülés által:

$$\text{arctg } \psi = \int Q dx + k$$

és Q és ψ értékeit visszahelyezvén:

$$\text{arctg} \left(-\frac{z}{y} \right) = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} \int \frac{c dx}{x\sqrt{a^2x^2-c^2}} + k$$

$$\text{és innét } \text{arctg} \frac{z}{y} = k - \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} \text{arcsec} \frac{ax}{c}$$

és az állandó megváltoztatásával

$$\text{arctg} \frac{z}{y} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} \text{arc sin} \frac{c}{ax} - \lambda$$

ugyanazon egyenlet, melyre 11) alatt jutottunk.

4. §.

A 10) alatti egyenletek oldására végre *harmadszor* a következő utat is választhatjuk: különbözékeljük mind a két egyenletet x szerint, akkor tekintetbe véve, hogy a 9) szerint

$$V^2 = 1 + y_1^2 + z_1^2 = \frac{a^2 x^2 (1 + a^2)}{a^2 x^2 - c^2}$$

nyerünk rövid rendezés után két új egyenletet, ugyanis:

$$yy_2 + zz_2 = - \frac{(1 + a^2) c^2}{a^2 x^2 - c^2} \quad . . . \quad 16)$$

$$\text{és} \quad zy_2 - yz_2 = - \frac{a c^3 \sqrt{1 + a^2}}{\sqrt{(a^2 x^2 - c^2)^3}} \quad . . . \quad 17)$$

melyekben y_2 és z_2 a részletes második különbözéki hányadosokat

$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}; \frac{d^2 z}{dx^2}\right)$ jelenti.

Ezen négy egyenletből most már, ugyanis a két eredetiből, és a most nyert két egyenletből kiküszöbölhető z, z_1 , és z_2 , marad kellő rendezés után

$$a^2 x^2 (a^2 x^2 - c^2) y_2 + a^2 c^2 x y_1 + c^2 y = 0 \quad . . . \quad 18)$$

mely egyenlet ugyan y -ra nézve másodrendű, de melyben már többé z épen elő nem fordul. Ezen egyenletnek eleget tesz

$$y = x (A \cos kW + B \sin kW) \quad . . . \quad 19)$$

hol A, B, k állandókat, W pedig az x valamely még meghatározandó függvényét jelenti.

Ha pedig a fentebbi négy egyenletből kiküszöböljük az y, y_1 , és y_2 mennyiségeket, akkor egy az előbbivel azonos alkotású egyenletre jutunk, melynek tehát eleget fog tenni:

$$z = x (A_1 \cos kW + B_1 \sin kW) \quad . . . \quad 20)$$

de miután $z^2 + y^2 = a^2 x^2$, következik az állandókra e következő feltétel

$$a^2 = (A^2 + A_1^2) \cos^2 kW + 2 \sin kW \cos kW (AB + A_1 B_1) + (B^2 + B_1^2) \sin^2 kW$$

mely egyenletnek W függvény minden értékére nézve érvényesnek kell maradni, miért is ezen egyenlet a következő háromra oszlik:

$$\begin{aligned} A^2 + A_1^2 &= a^2 \\ B^2 + B_1^2 &= a^2 \\ \text{és } AB + A_1 B_1 &= 0 \end{aligned}$$

mely egyenleteknek eleget az által lehet tenni, ha

$$A = a, A_1 = 0, B = 0, \text{ és } B_1 = a$$

mi által azután a felvett 19) és 20) alatti egyenletek a következő egyszerűbbekbe mennek át :

$$\left. \begin{aligned} y &= ax \cos k W \\ \text{és } z &= ax \sin k W \end{aligned} \right\} \dots 21)$$

hogya pedig még a k és W mennyiségeket meghatározhassuk, helyettesítsük ezen egyenletek elsejét a 18) alatti egyenletünkbe, a melynek feltétel szerint eleget kell tenni, ered rövid rendezés után

$$\begin{aligned} & -k a^2 x^2 \sin k W \left\{ (2 a^2 x^2 - c^2) \frac{dW}{dx} + x(a^2 x^2 - c^2) \frac{d^2 W}{d x^2} \right\} \\ & + x \cos k W \left\{ (1 + a^2) c^2 - k^2 a^2 x^2 (a^2 x^2 - c^2) \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 \right\} = 0 \end{aligned}$$

határozzuk meg most már a W függvényt azon feltételből, hogy ezen egyenlet első tagja, a k állandót pedig, hogy a második tagja legyen egyenlő a semmivel, akkor a W és k meghatározására szolgálnak a következő egyenletek :

$$(2 a^2 x^2 - c^2) \frac{dW}{dx} + x(a^2 x^2 - c^2) \frac{d^2 W}{d x^2} = 0 \dots 22)$$

$$\text{és } (1 + a^2) c^2 - k^2 a^2 x^2 (a^2 x^2 - c^2) \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 = 0 \dots 23)$$

az előbbiből ered :

$$\frac{\frac{d^2 W}{d x^2}}{\frac{dW}{dx}} + \frac{2 a^2 x^2 - c^2}{x(a^2 x^2 - c^2)} = 0$$

és egészelés által

$$l \left(\frac{dW}{dx} \right) + l \sqrt{a^2 x^2 - c^2} + lx = lC$$

$$\text{innét pedig } \frac{dW}{dx} = \frac{C}{x \sqrt{a^2 x^2 - c^2}} \dots 24)$$

$$\text{és } W = C \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 x^2 - c^2}} \dots 25)$$

A 23) alatti feltételből pedig ered, ha abban a 24) alatt talált $\frac{dW}{dx}$ értékét helyettesítjük :

$$k = \pm \frac{c\sqrt{1+a^2}}{aC} \dots 26)$$

ugy hogy a keresett függvény leend :

$$y = ax \cos k W = ax \cos \left\{ \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} \int \frac{cdx}{x\sqrt{a^2x^2-c^2}} + C \right\}$$

és a kijelentett egészes végbevitele után :

$$y = ax \cos \left\{ \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} \operatorname{arcsec} \frac{ax}{c} + C \right\}$$

és végre a C állandó megváltoztatásával

$$y = ax \cos \left\{ \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} \operatorname{arcsin} \frac{c}{ax} - \lambda \right\}$$

és a 21) alatti második egyenletből

$$z = ax \sin \left\{ \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} \operatorname{arcsin} \frac{c}{ax} - \lambda \right\}$$

ugyanazon egyenletek, melyekre már az előbbi módokon juttunk.

5. §.

Miután a körkúp *kisikítható* felület, a feladat természeténél fogva a kúp két adott pontja közti legkisebb távol a kisikítésen egyenes vonalat fog képezni. Czélszerű lesz tehát még az elemző mértan elvei szerint is meghatározni azon kúpni görbének egyenleteit, mely a kisikítésen egyenest képez. Legyen e végre ismét az 1) ábrában S a körkúp csúcsa, A és B a kúpni két pont, melyek közül A az XY síkon fekszik. A 2) ábra a körkúp kisikítésének egy részét ábrázolja, a melyben tehát $SA = p = \frac{m}{\cos \beta}$, $SB = q = \frac{n}{\cos \beta}$, és a kisikített $BSA = \psi = \varphi \sin \beta$.

Legyen továbbá M a keresett vonalnak egy tetszőleges pontja, és annak távola a kezdőponttól $SM = \varrho$, azon szög pedig, mely alatt az MSX sík az XY síkhoz hajlik $= \delta$, az MSA szögnek kisikítása végre γ , hol tehát $\gamma = \delta \sin \beta$; akkor az M pont öszrendezőire nézve a következő egyenleteket nyerjük :

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \beta \\ y &= \rho \sin \beta \cos \delta \\ z &= \rho \sin \beta \sin \delta \end{aligned} \right\} \dots 27)$$

vagy ρ kiküszöbölése által

$$\left. \begin{aligned} y &= x \operatorname{tg} \beta \cos \delta \\ z &= x \operatorname{tg} \beta \sin \delta \end{aligned} \right\} \dots 28)$$

Hogy még a változó δ -t szintén x függvényében fejezhessük ki, a kifejtett MSA háromszögből következik

$$\rho = \frac{p \sin \lambda}{\sin(\lambda + \gamma)} = \frac{x}{\cos \beta}$$

hol λ azon szöget jelenti, mely alatt a kifejtett egyenes metszi az A ponton keresztül menő alkotót; ezen egyenletből következik:

$$\sin(\lambda + \gamma) = \frac{p \sin \lambda \cos \beta}{x} = \frac{m \sin \lambda}{x}$$

$$\text{tehát } \gamma = \arcsin \frac{m \sin \lambda}{x} - \lambda$$

de miután egyszersmind $\gamma = \delta \sin \beta$, lesz:

$$\delta = \frac{\arcsin \frac{m \sin \lambda}{x} - \lambda}{\sin \beta} \dots 29)$$

végre δ ezen talált értékét a 28) alatti egyenletekbe helyettesítve, megnyerjük a keresett vonal vetületeinek egyenleteit, melyek tehát:

$$y = x \operatorname{tg} \beta \cos \left\{ \frac{\arcsin \frac{m \sin \lambda}{x} - \lambda}{\sin \beta} \right\} \dots 30)$$

$$\text{és } z = x \operatorname{tg} \beta \sin \left\{ \frac{\arcsin \frac{m \sin \lambda}{x} - \lambda}{\sin \beta} \right\} \dots 31)$$

mely egyenletek tökéletesen azonosak a 2. §. 12) és 13) alatt talált egyenletekkel.

Az egyenletek ezen összhangzásából most már a különbözőki egyenletek oldásaiból nyert állandókra nézve igen egyszerű felvilágosítást nyerünk. Ugyanis az ott talált c , vagy $\frac{c}{a} = m \sin \lambda$; de $p \sin \lambda$ nem egyéb, mint a kup csúcsá-

nak távolsága a kisírtott egyenestől, ezt még szorozva $\cos\beta$ -val, lesz

$$p \sin \lambda \cdot \cos \beta = m \sin \lambda$$

ez nem egyéb, mint ezen távolnak vetülete a tengelyre. Ha tehát a görbe vonal kezdőpontjával vétetik annak legkisebb távolsága a csúcstól, akkor ez esetben $\lambda = \frac{1}{2}\pi$, és $m \sin \lambda = m$, miáltal a fentebbi egyenletek a következő egyszerűbb alakot veszik fel:

$$y = x \operatorname{tg} \beta \cos \left\{ \frac{1}{\sin \beta} \cdot \operatorname{arc} \cos \frac{m}{x} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad 32)$$

$$z = x \operatorname{tg} \beta \sin \left\{ \frac{1}{\sin \beta} \operatorname{arc} \cos \frac{m}{x} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad 33)$$

mely egyenletekben m a kezdőpont vetületét jelenti a tengelyre, β pedig a kúp alkotóinak hajlását a tengelyhez.

6. §.

A legrövidebb távolsági vonal talált egyenletei:

$$y = x \operatorname{tg} \beta \cos \left\{ \frac{\operatorname{arc} \sin \frac{m \sin \lambda}{x} - \lambda}{\sin \beta} \right\}$$

$$z = x \operatorname{tg} \beta \sin \left\{ \frac{\operatorname{arc} \sin \frac{m \sin \lambda}{x} - \lambda}{\sin \beta} \right\}$$

melyeknél feltételeztetett, hogy a kúp csúcsa az öszrendezőik kezdőpontjával egybeesik.

Vigyük már most ezen kezdőpontot az X tengelyen $\frac{r}{\operatorname{tg} \beta}$ mennyiséggel előbbre, úgy hogy tehát az YZ öszrendezői sík a kútból egy r sugarú kört messen le, akkor a fentebbi egyenletekben y és z értékei maradván, csak x helyébe lesz $x + \frac{r}{\operatorname{tg} \beta}$ vagy $\frac{r+x \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta}$ úgy szinte m helyébe $m + \frac{r}{\operatorname{tg} \beta}$ vagy $\frac{r+m \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta}$ teendő, mely értékekkel a fentebbi egyenletek a következőkbe mennek át:

$$y = (r + x \operatorname{tg} \beta) \cos \left\{ \frac{\operatorname{arc} \sin \frac{\sin \lambda (r + m \operatorname{tg} \beta)}{r + x \operatorname{tg} \beta} - \lambda}{\sin \beta} \right\}$$

$$z = (r + x \operatorname{tg} \beta) \sin \left\{ \frac{\operatorname{arc} \sin \frac{\sin \lambda (r + m \operatorname{tg} \beta)}{r + x \operatorname{tg} \beta} - \lambda}{\sin \beta} \right\}$$

Ha most meghagyván r értékét, a kúp nyílási β szögét addig kisebbítjük, míg az elenyészik, akkor a kúp egy r sugarú hengerré változik, és ezen egyenletek a hengereni legrövidebb távolhoz fognak tartozni. Azonban a \cos és \sin utáni zárjel ezen esetben következő alakot vesz fel:

$$\frac{\operatorname{arc} \sin (\sin \lambda) - \lambda}{0} = \frac{\lambda - \lambda}{0} = \frac{0}{0}$$

melynek meghatározására az említett tört számlálójának és nevezőjének β szerinti különböző hányadosait vévén, ered

$$\frac{\sin \lambda [m \sec^2 \beta (r + x \operatorname{tg} \beta) - x \sec^2 \beta (r + m \operatorname{tg} \beta)]}{\cos \beta (r + x \operatorname{tg} \beta) \sqrt{(r + x \operatorname{tg} \beta)^2 - \sin^2 \lambda (r + m \operatorname{tg} \beta)^2}}$$

mely kifejezésből lesz, ha benne $\beta = 0$

$$\frac{\sin \lambda (m - x)}{r \cos \lambda}$$

az illető egyenletekből tehát ered:

$$y = r \cos \frac{m - x}{r \operatorname{cotg} \lambda}$$

$$z = r \sin \frac{m - x}{r \operatorname{cotg} \lambda}$$

melyeket még így is lehet írni, x szerint feloldva:

$$m - x = r \cdot \operatorname{cotg} \lambda \cdot \operatorname{arc} \cos \frac{y}{r}$$

$$m - x = r \cdot \operatorname{cotg} \lambda \cdot \operatorname{arc} \sin \frac{z}{r}$$

a csavarvonal ismert egyenletei, melynél λ azon állandó szöget jelenti, mely alatt a csavarvonal a henger alkotóit metszi, m pedig az XY síkoni kezdőpontnak metszékét.

7. §.

A keresett görbének egyenletei ekkép tökéletesen meg lévén határozva, még annak alakjával és némi főbb tulajdo-

naival fogunk foglalkozni. Mindenekelőtt a görbe ívhosszát illetőleg, ez az

$$s = \int_m^n dx \sqrt{1+y_1'^2+z_1'^2}$$

egyenlet által van meghatározva, melyben csak a gyök 9) alatti értékét kell helyettesíteni, mi által lesz:

$$s = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} \int_m^n \frac{a^2 x dx}{\sqrt{a^2 x^2 - c^2}}$$

és az egészlet megoldása után

$$s = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} \left[\sqrt{a^2 n^2 - c^2} - \sqrt{a^2 m^2 - c^2} \right] \dots 34)$$

vagy miután $c = a c_1 = a m \sin \lambda$

$$s = \frac{1}{\cos \beta} \left[\sqrt{n^2 - m^2 \sin^2 \lambda} - m \cos \lambda \right] \\ = \sqrt{q^2 - p^2 \sin^2 \lambda} - p \cos \lambda \dots 35)$$

mely egyenletnek értelmezése a 2) ábrában kifejtésből magától érthető. Ha azon egyszerűbb esetet vesszük, melynél a görbe legrövidebb távola a csúcstól egyszersmind a görbe kezdőpontja, akkor mint láttuk $\lambda = \frac{1}{2}\pi$, tehát az ívhossz

$$s = \sqrt{q^2 - p^2}$$

mint valóban lennie kell, miután ez esetben az ívhossz nem egyéb, mint befogója azon derékszögű háromszögnek, melynél q az átló, p pedig a másik befogó.

8. §.

Czél szerű lesz továbbá megvizsgálni, vannak-e a kérdésben levő görbének *végérintői*, és ha igen, azok egyenleteit meghatározni.

A térbeni görbék érintőinek egyenletei:

$$y - y' = y_1' (x - x') \\ z - z' = z_1' (x - x')$$

hol x' , y' , z' az érintő pont összerendezői. Ha tehát mindjárt a 32) és 33) alatti egyszerűbb egyenleteket vesszük tekintetbe, akkor azokból

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= tg\beta \cos \delta' - \frac{m \sin \delta'}{\cos\beta \sqrt{x'^2 - m^2}} \\ z_1' &= tg\beta \sin \delta' + \frac{m \cos \delta'}{\cos\beta \sqrt{x'^2 - m^2}} \end{aligned} \right\} \dots 36)$$

hol rövidség okáért $\delta' = \frac{\arccos \frac{m}{x'}}{\sin\beta}$

mely értékekkel az érintő egyenletei lesznek:

$$\left. \begin{aligned} y &= x tg\beta \cos \delta' - \frac{m(x-x') \sin \delta'}{\cos\beta \sqrt{x'^2 - m^2}} \\ z &= x tg\beta \sin \delta' + \frac{m(x-x') \cos \delta'}{\cos\beta \sqrt{x'^2 - m^2}} \end{aligned} \right\} \dots 37)$$

melyekből már a végérintő egyenleteire egyszerűen azáltal térünk át, hogy az érintési pont x' metszékét végtelen nagygyá teszszük, a végérintő egyenletei tehát:

$$\left. \begin{aligned} y &= x tg\beta \cos \frac{\pi}{2\sin\beta} + \frac{m}{\cos\beta} \sin \frac{\pi}{2\sin\beta} \\ z &= x tg\beta \sin \frac{\pi}{2\sin\beta} - \frac{m}{\cos\beta} \cos \frac{\pi}{2\sin\beta} \end{aligned} \right\} \dots 38)$$

mely egyenletekből következik, hogy a kérdésben levő görbéknek, bármely alakkal birjanak azok különben, mindig van valós végérintőjük. És pedig nevezetesen azon esetben

ha $\operatorname{cosec}\beta$ egész páros szám, például $=2k$, akkor $\sin\beta = \frac{1}{2k}$, $\cos\beta = \frac{1}{2k} \sqrt{4k^2 - 1}$, és $tg\beta = \frac{1}{\sqrt{4k^2 - 1}}$ lesznek a végérintő egyenletei

$$y = \pm \frac{x}{\sqrt{4k^2 - 1}}; z = \mp \frac{2mk}{\sqrt{4k^2 - 1}}$$

hol a végérintők tehát az XY síkkal párhuzamosak; ha pedig

$\operatorname{cosec}\beta = 2k+1$ egy páratlan egész szám, akkor $\sin\beta = \frac{1}{2k+1}$,

$\cos\beta = \frac{2\sqrt{k^2+k}}{2k+1}$, és $tg\beta = \frac{1}{2\sqrt{k^2+k}}$, tehát a végérintők egyen-

letei:

$$y = \pm \frac{m(2k+1)}{2\sqrt{k^2+k}}; z = \pm \frac{x}{2\sqrt{k^2+k}}$$

a végérintők tehát ez esetben az XZ síkkal párhuzamosok.

9. §.

A mi végre a görbe vonal alakját illeti, czélszerű leend a β szögre nézve, vagyis azon szögre, mely alatt a kúp alkotói hajlanak annak tengelyéhez, külön eseteket tekintetbe venni.

Igy ha $\beta = 45^\circ$, tehát $\sin\beta = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor ez esetben a görbe vonal egyenletei a következők:

$$\left. \begin{aligned} y &= x \cos \left\{ \sqrt{2} \cdot \arccos \frac{m}{x} \right\} \\ z &= x \sin \left\{ \sqrt{2} \cdot \arccos \frac{m}{x} \right\} \end{aligned} \right\} \dots 39)$$

végérintőjének egyenletei pedig:

$$\left. \begin{aligned} y &= x \cos \left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{2} \right) + m \sqrt{2} \sin \left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{2} \right) \\ z &= x \sin \left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{2} \right) - m \sqrt{2} \cos \left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{2} \right) \end{aligned} \right\} \dots 40)$$

Meg lehet itt még jegyezni, a mi különben minden tet-szöleges nyílású kúpnál áll, hogy a végérintők *iránya* m -től független. Azonfelül a végérintők a kúptengelyt nem metszik ugyan, de az ahhoz hajlási szögük mindig egyenlő az alkotók β hajlási szögével. Ezen görbe vonal vetületei a 3) ábrában vannak előállítva; a, b az XY síkoni, b', a' az XZ síkoni vetület, a'', b'' pedig az YZ síkoni vetület fele. $EF, E'F'$, és $E''F''$ a végérintőnek illető vetületei. $S'a' = m$.

Minden ide tartozó görbe vonal között a legnevezetesebb az, melynél a β szög 30 foknyi, tehát $\sin\beta = \frac{1}{2}$;

$\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$; az illető egyenletek ez esetben

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{x}{\sqrt{3}} \cos \left(2 \arccos \frac{m}{x} \right) = \frac{2m^2 - x^2}{x\sqrt{3}} \\ z &= \frac{x}{\sqrt{3}} \sin \left(2 \arccos \frac{m}{x} \right) = \frac{2m\sqrt{x^2 - m^2}}{x\sqrt{3}} \end{aligned} \right\} \dots 41)$$

hol az egyenletek, mint látjuk, betűszám-tani alakot vesznek fel, a mi különben mind azon esetben elő fog állani, valahányszor *cossecβ egész szám*, csakhogy az egyenletek annál magasabb fokúak lesznek, mentől nagyobb ezen egész szám, tehát mentől kisebb a körkúp nyílása.

Igen nevezetes, hogy a jelen esetben az *XY* síkoni vetület *mentelékké* válik, ezen vetület egyenlete ugyanis:

$$x^2 + xy\sqrt{3} = 2m^2$$

és ha az *X* és *Y* tengelyeket 30 fokkal az eredeti állásokból elmozdítva képzeljük, akkor ezen egyenlet a következőbe megy át:

$$\frac{3x^2}{4m^2} - \frac{y^2}{4m^2} = 1$$

mely tehát egy oly mentelékhez tartozik, melynek valós tengelye az *X* irányában $= \frac{2m}{\sqrt{3}}$, képzetes tengelye pedig az *Y* irányában $= 2m$.

Az ide tartozó görbe vonal vetületei a 4-ik ábrában vannak előállítva, függ-, fek- és oldalvetületben. Az *acb* fekvővetület egy mentelék negyedét képezi, melynél a valós tengely *Sa*, a végérintő pedig *EF*. A végérintők egyenletei ez esetben

$$\left. \begin{aligned} y &= \pm \frac{x}{\sqrt{3}} \\ z &= \pm \frac{2m}{\sqrt{3}} \end{aligned} \right\} \dots 42)$$

és az *EF*, *E'F'*, *E''F''* által vannak képviselve.

Végre az 5) ábrában elő vannak állítva a kérdéses görbének vetületei, ha $\sin\beta = \frac{1}{4}$, $\cos\beta = \frac{1}{4}\sqrt{15}$ mely esetben a görbe vonal egyenletei:

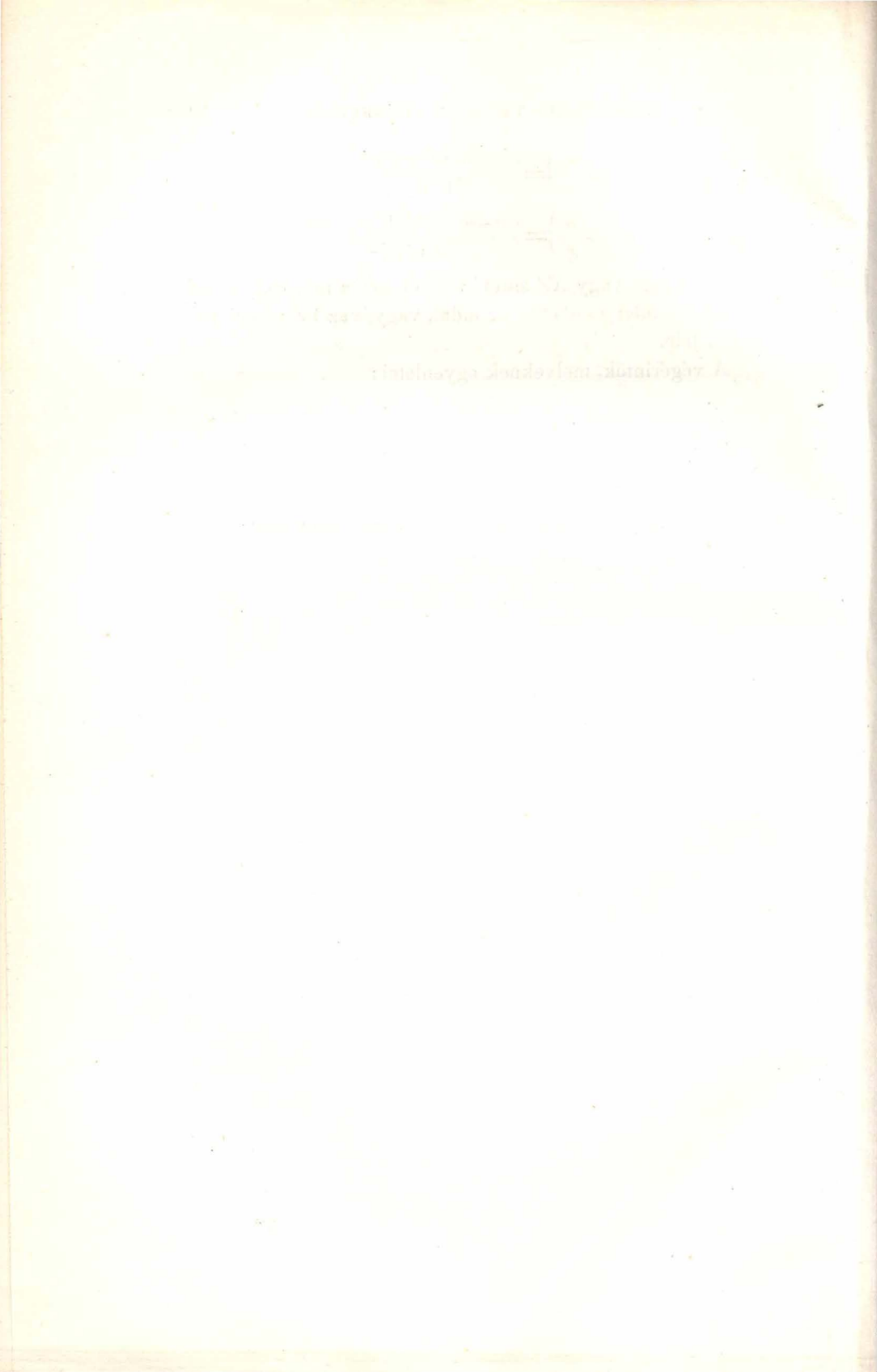
$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{x}{\sqrt{15}} \cos\left(4 \arccos \frac{m}{x}\right) = \frac{x^4 - 8m^2x^2 + 8m^4}{x^3\sqrt{15}} \\ z &= \frac{x}{\sqrt{15}} \sin\left(4 \arccos \frac{m}{x}\right) = \frac{4m(2m^2 - x^2)\sqrt{x^2 - m^2}}{x^3\sqrt{15}} \end{aligned} \right\} \dots 43)$$

$b'c'a'c'b'$ a függ- vagy XZ síkoni vetület, acb a fek, vagy is az XY síkoni vetület, és $a''c''b''$ az oldal, vagy is az YZ síkoni vetületnek fele.

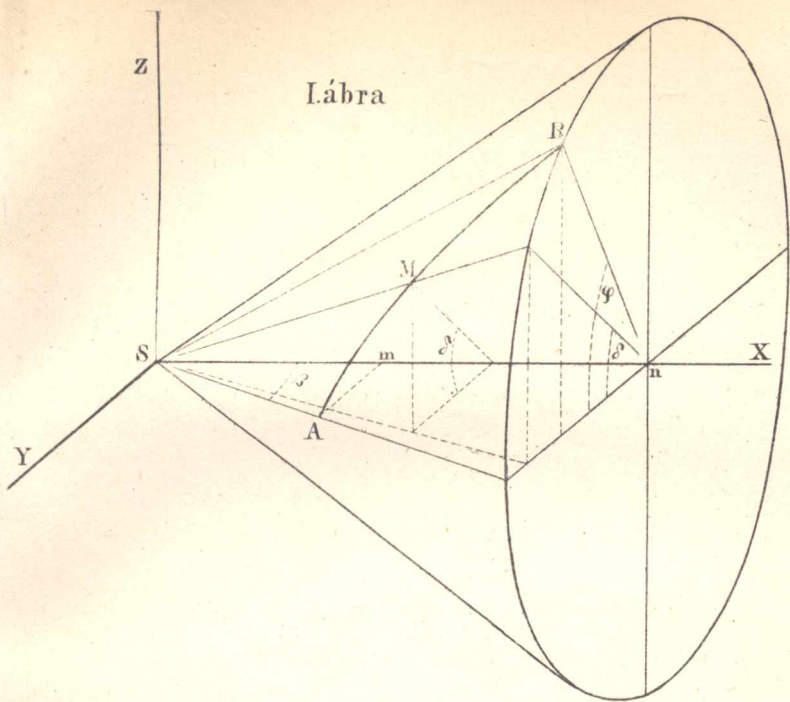
A végérintők, melyeknek egyenletei:

$$\left. \begin{aligned} y &= -\frac{x}{\sqrt{15}} \\ z &= \pm \frac{4m}{\sqrt{15}} \end{aligned} \right\} \dots 44)$$

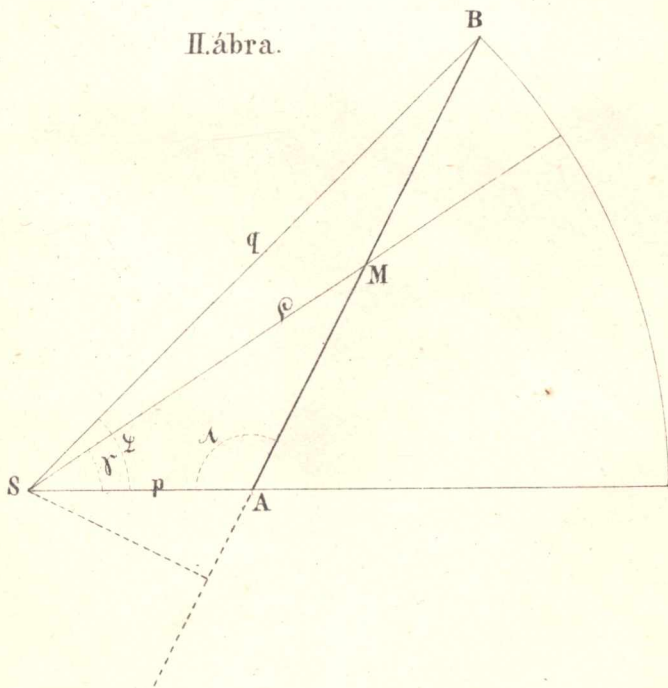
az EF , $E'F'$ és $E''F''$ egyenesek által vannak képviselve.



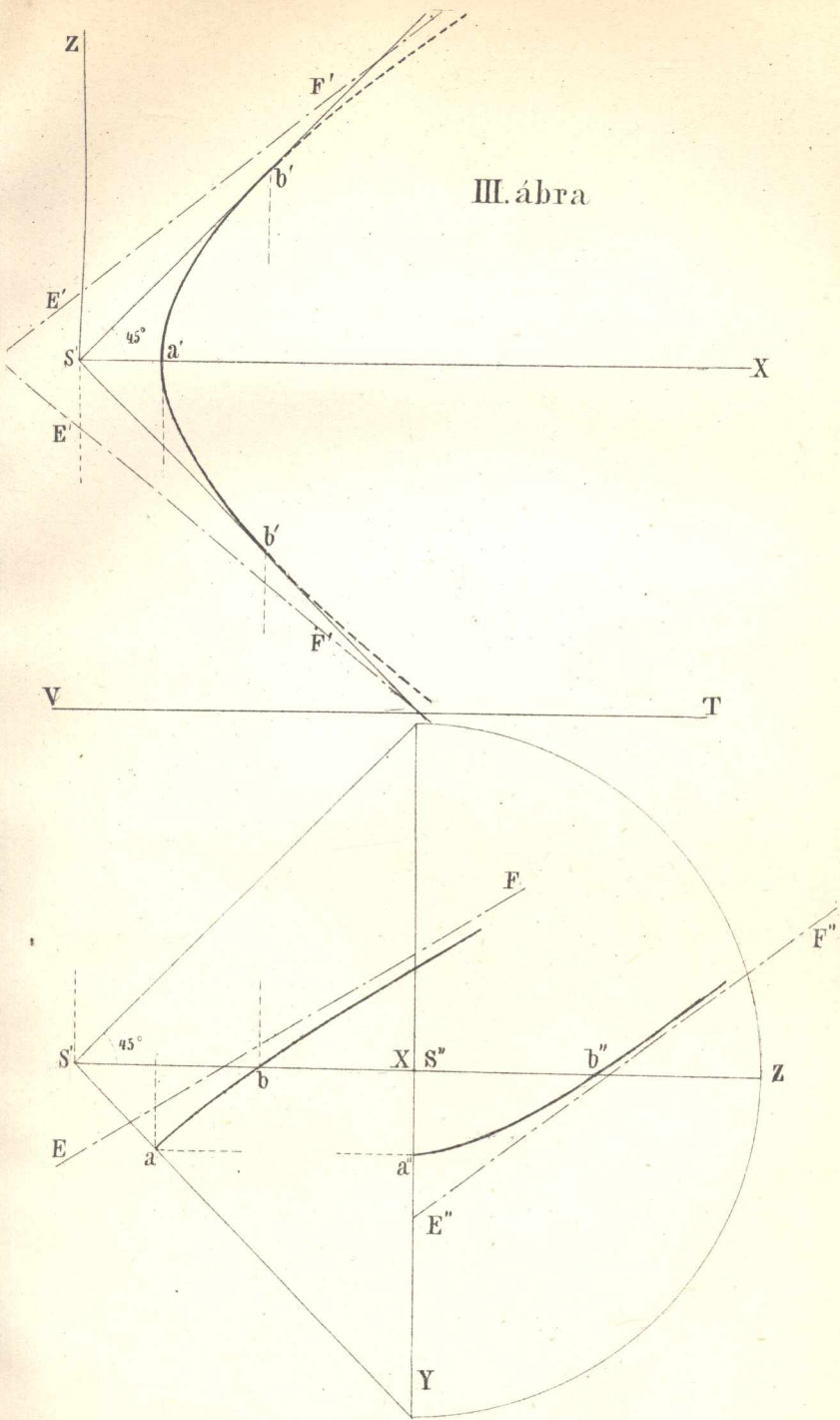
I. ábra

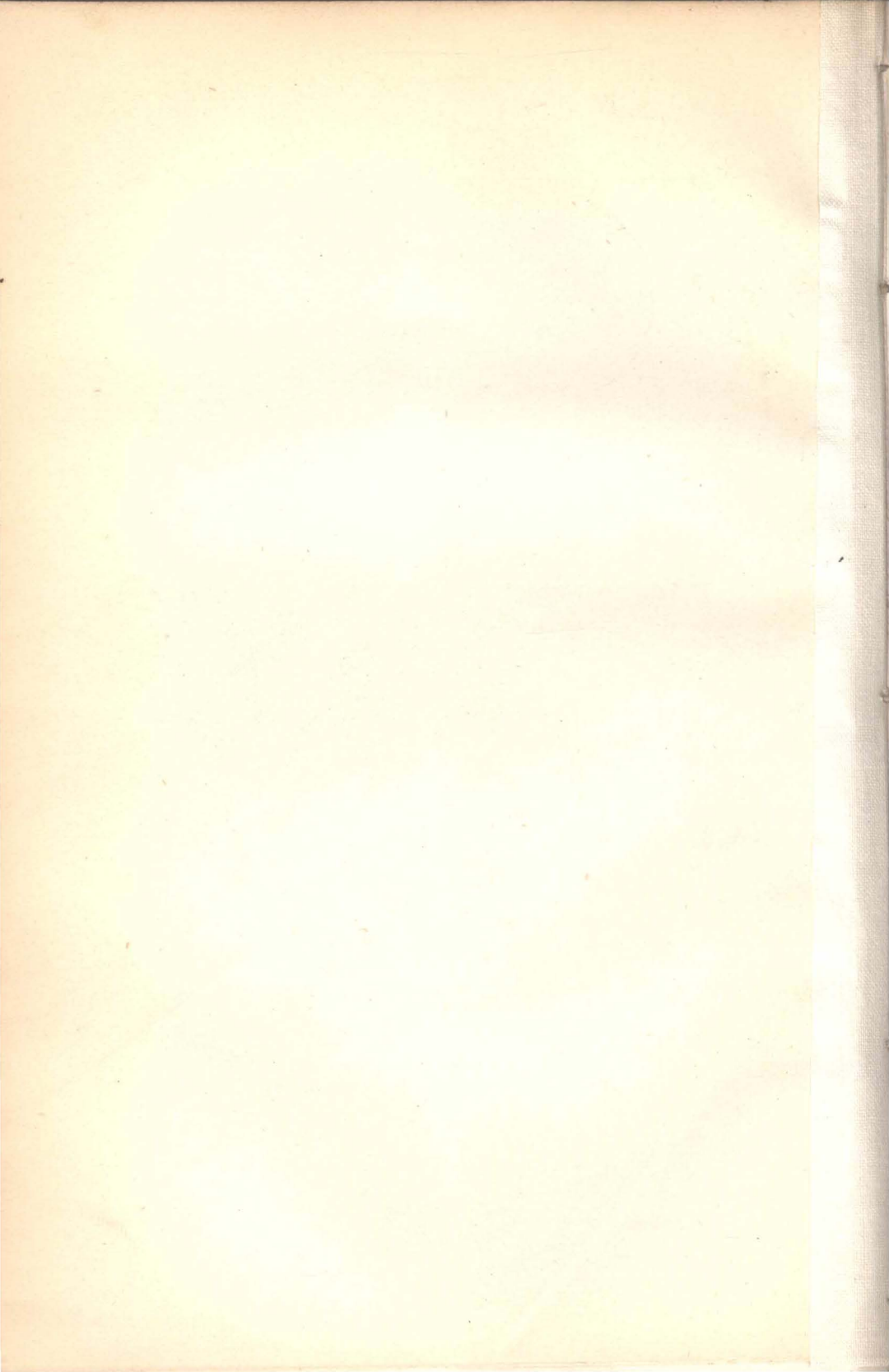


II. ábra.



III. ábra





IV. ábra.

