BIZTOSÍTÁSI KÖLCSÖN.

(UJ ÉLETBIZTOSÍTÁSI NEM.)

VÉSZ JÁNOS ÁRMIN

LEVELEZŐ TAGTÓL.

Benyujtatott 1867. Augustus 14-én.

PEST,

EGGENBERGER FERDINÁND MAGY. AKAD. KÖNYVÁRUSNÁL.

1868.

PEST,
NYOMATOTT EMICH GUSZTÁV
MAGY. AKAD. KÖNYVNYOMDÁSZNÁL.
1868.

BIZTOSITÁSI KÖLCSÖN.

Vész János Ármintól.

A nemzetgazdaság egyik hatalmas előmozdítója az életbiztosítás, mint oly intézmény, mely leginkább hivatva van a takarékosságra, és rendre serkenteni. Az életbiztosítások üdvös volta naponként jobban elismertetvén, és az utolsó időkben már hazánkban is kedvező felvirágzásnak indulván, nem szándékom azon előnyöket elősorolni, melyeket az az egyes egyéneknek nyujt, és csak röviden kivánom megemlíteni, hogy az életbiztosítási intézetek támaszkodva egy felől a mennyiségtanra, más felől a statistikára, mint két főoszlopjokra, minden igyekezetöket arra fordították, hogy magukat a társadalom minden rétegének szükségleteihez alkalmazzák új, és czélszerű biztositási nemek behozatala által.

Egy ily új, és reméllem czélszerű biztositási nemnek előállítása, s ez által ugy az életbiztosítás eszméjének terjesztése, mint a biztositási elmélet további fejlesztése képezi ezen értekezés feladatát.

Az életbiztositási nemek általánosan két fő részre oszthatók, ugyanis oly biztosításokra, melyek a bekövetkező halálesetre; és oly biztosításokra, melyek egy bizonyos előre meghatározott számu évek elérésére köttetnek, — mindegyik esetben ismét vagy egy bizonyos tőke, vagy egy bizonyos évjáradék elnyerésére.

E két főnem azután, több vagy kevesebb czélszerűséggel különböző alakot ölt magára, az egyes egyének kivánalmainak megfelelőleg, de mindegyik módszernél általános alap, hogy a biztosított egyszerre, vagy évenként bizonyos összeget fizet a biztosítási banknak, melyért azután a bank a kikötött feltételek teljesülése esetében a biztosított tőkét, vagy életjáradékot fizeti.

Jelen értekezésben ezen általános alap némi változást szenvedett az által, hogy a felek ugyan szinte bizonyos összegeket fizetnek a bank pénztárába, mely összegek azonban a biztosító felek tulajdonai maradnak, s melyeket a bankok a feleknek a biztosított tőke kiadása alkalmával egyuttal visszafizetni tartoznak, ha a biztosítási feltételeknek elég tétetett.

E szerint tehát a felek az illető díjakat a bankoknak csak is kölcsönkép adják át, melyek használatáért biztosít részökre a bank bizonyos tőkét, vagy járadékot; miért is e biztosítási nemet „biztosítási kölcsönnek" nevezhetjük, és a következőkben igyekezni fogok annak mennyiségtani megállapításával foglalkozni, jelen alkalommal csupán az egy életre biztosított tőkéket vévén tekintetbe.

Elfogadva a leginkább használt megnevezéseket a következőkben:

l_x alatt érteni fogjuk az x korban élők számát, valamely alapul vett halandósági táblázat szerint:

p alatt a kamatlábat;

$\lambda_x = \frac{l_x}{p^x}$ alatt az x évre leszámitolt élők számát;

$t_x = l_x - l_{x+1}$ jelenteni fogja az egy év alatt elhaltak számát az x korévesek közül,

$\tau_x = \frac{t_x}{p^{x+1}}$ alatt a leszámitolt holtak számát;

$\Sigma\lambda_x = l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots\ldots$ folytatva a halandósági táblázat végéig jelenti a leszámitolt élők összegét;

$L_x = \Sigma\lambda_x + \Sigma\lambda_{x+1} + \Sigma\lambda_{x+2} + \ldots\ldots$ a leszámitolt élők összegének összegét,

$\Sigma\tau_x = \tau_x + \tau_{x+1} + \tau_{x+2} + \ldots\ldots$ a leszámitolt holtak összegét, és végre,

$T_x = \Sigma\tau_x + \Sigma\tau_{x+1} + \Sigma\tau_{x+2} + \ldots\ldots$ a leszámitolt holtak összegének összegét.

I.

Biztosítási kölcsön halálesétre egyszer mindenkorra befizetett kölcsön mellett.

Feltéve, hogy l_x, x korban levő egyén kivánja magát e mód szerint akkép biztositani, hogy az elhalás esetében a bank részökre 1 frt. tőkét fizessen, és egyszersmind a befizetett kölcsönt is visszafizesse, és nevezzük a fél által fizetendő kölcsönt H_x-nek, akkor ezen l_x egyén a bank pénztárába fizet $l_x . H_x$ forintot, melyért a bank az első év végén, az ezen év alatt elhalt t_x biztositott részére fizet t_x forint tőkét, és azonfelől a kölcsönből visszafizet $t_x . H_x$ forintot, mely összegeknek jelen értéke, azokat egy évre leszámítolván,*) lesz :

$$\frac{t_x(1+H_x)}{p}.$$

A második évben elhalt t_{x+1} biztositott részére fizet a bank t_{x+1} tőkét és leró $t_{x+1} . H_x$ kölcsönt, mely összegek jelen értéke :

$$\frac{t_{x+1}(1+H_x)}{p^2}$$

a bank harmadik évi kiadásainak jelen értéke épen így :

$$\frac{t_{x+2}(1+H_x)}{p^3}$$

s. i. t. ; a bank összes kötelezettsége tehát, mely a felek által befizetett összeggel tartozik egyenlőnek lenni, lesz :

$$l_x . H_x = \frac{t_x(1+H_x)}{p} + \frac{t_{x+1}(1+H_x)}{p^2} + \frac{t_{x+2}(1+H_x)}{p^2} + \ldots\ldots\ldots$$

*) Az évi halálozások nem esnek ugyan az év végére, sőt inkább azok az éven át közel egyenlően osztatnak szét, az efféle számításoknál mindazonáltal fel lehet venni, hogy azok az év végére szorítkoznak, minthogy a bankok ugy se fizetnek soha rögtön a halálozás után, hanem legszokottabban 3 hónap mulva. Szigorúbb számításnál a halálozás az év közepére volna teendő.

hol az összeg a halandósági táblázat végéig folytatandó leend. Ezen egyenletből beszorzás által ered :

$$l_x H_x = \frac{t_x}{p} + \frac{t_{x+2}}{p^2} + \frac{t_{x+2}}{p^3} + \ldots\ldots$$

$$+ H_x\left(\frac{t_x}{p} + \frac{t_{x+1}}{p^2} + \frac{t_{x+2}}{p^3} + \ldots\right)$$

vagy az egyenlet mindkét oldalát p^x hatványnyal elosztva, és a leszámítolt élők, és holtakra a fennebbi megnevezéseket használva :

$$\lambda_x H_x = \tau_x + \tau_{x+1} + \tau_{x+2} + \ldots\ldots$$

$$+ H_x(\tau_x + \tau_{x+1} + \tau_{x+2} + \ldots\ldots)$$

vagy még az összeg-jelek behozatalával :

$$\lambda_x H_x = \Sigma\tau_x + H_x \Sigma\tau_x \ldots\ldots\ 1)$$

és innét :

$$H_x = \frac{\Sigma\tau_x}{\lambda_x - \Sigma\tau_x} \ldots\ldots\ 2).$$

mely képlet segítségével már, adott halandósági táblázat és kamatláb mellett az illető kölcsön minden évkorra könnyen meghatározható.

1. Jegyzés. A talált 2) alatti képlet a kölcsönt azon esetre adja meg, ha a biztosított tőke 1 frt, ha tehát a biztosított tőke S forint, akkor a képlet szerinti díjak még S-el lesznek szorzandók.

2. Jegyzés. A számítás egyszerűsitése tekintetéből legczélszerűbb előbb kiszámitani minden egyes évkorra a leszámítolt élők és holtak számát, ugy szinte ezek összegét, és összegének összegét, mint az a következő táblázatban történt, hol alapul az „English life table N. 3“ — férfiak halandósági táblázata — vétetett, Farr William, Londonban 1864-ben megjelent táblázatai szerint ; ugyanezen munkából vétettek ezen táblázat többi adatai is. A kamatláb $=1{\cdot}04$.

Korév	Az x korban élők száma l_x	Elhaltak t_x	A leszámítolt élők száma λ_x	a leszámítolt élők összege $\Sigma\lambda_x$	a leszámítolt holtak száma τ_x	a leszámítolt holtak összege $\Sigma\tau_x$	A leszámítolt holtak összegének összege T_x
30	304534	3068	93894	1639237	909.54	30845.96	725802.09
31	301466	3100	89373	1545343	883.68	29936.42	694956.13
32	298366	3134	85052	1455970	859.01	29052.74	665019.71
33	295232	3171	80921	1370918	835.72	28193.73	635966.97
34	292061	3211	76973	1289997	813.72	27358.01	607773.24
35	288850	3254	73199	1213024	792.90	26544.29	580415.23
36	285596	3300	69591	1139825	773.18	25751.39	553870.94
37	282296	3352	66141	1070234	755.16	24978.21	528119.55
38	278944	3406	62842	1004093	737.81	24223.05	503141.34
39	275538	3465	59687	941251	721.72	23485.24	478918.29
40	272073	3529	56670	881564	706.78	22763.52	455433.05
41	268544	3596	53784	824894	692.50	22056.74	432669.53
42	264948	3668	51022	771110	679.20	21364.24	410612.79
43	261280	3746	48381	720088	666.96	20685.04	389248.55
44	257534	3826	45853	671707	655.01	20018.08	368563.51
45	253708	3912	43434	625854	643.97	19363.07	348545.43
46	249796	4001	41120	582420	633.29	18719.10	329182.36
47	245795	4095	38905	541300	623.24	18085.81	310463.26
48	241700	4192	36785	502395	613.46	17462.57	292377.45
49	237508	4292	34757	465610	603.94	16849.11	274914.88
50	233216	4395	32816	430853	594.65	16245.17	258065.77

Ezen segédtábla segítségével a fennebbi 2) alatti képlet szerint számíttattak az egyes koréveknek megfelelő kölcsönök; a számítás eredményét az itt következő *A* táblázat egyszeri díj rovatja mutatja.

A.

Korév	egyszeri elméleti díjak	évenkénti elméleti díjak	Korév	egyszeri elméleti díjak	évenkénti elméleti díjak
30	48.95	3.38	**40**	67.14	5.34
31	50.37	3.52	**41**	69.52	5.62
32	51.89	3.67	**42**	72.04	5.93
33	53.47	3.84	**43**	74.69	6.25
34	55.14	4.01	**44**	77.49	6.60
35	56.90	4.20	**45**	80.44	6.98
36	58.74	4.39	**46**	83.56	7.39
37	60.68	4.61	**47**	86.87	7.83
38	62.73	4.84	**48**	90.38	8.31
39	64.87	5.08	**49**	94.09	8.84
40	67.14	5.34	**50**	98.04	9.40

3. *Jegyzés.* A 2) alatti képlet szerint a jelen táblázatban előállított díjak, *elméleti díjaknak* neveztetnek, miután a felek által befektetett, és a bank által a feleknek visszafizetett összegek egyenlők. Azonban ezen díjakkal a bank meg nem elégedhetik, miután annak személyzetre, lakásra sat. kiadásaira még eddig tekintet nem vétetett, miért is az elméleti díjakhoz a költségek fedezésére még egy pótlék lesz adandó, a díjak százalékaiban.

E pótlék százalékokat azonban egyszerüen a díjakhoz csatolni nem volna helyes, minthogy ez által a feleknek nem csak a kölcsön, hanem a pótlék is visszafizettetnék; az ide tartozó képlet azonban az előbbi szerint egyszerüen következik. Tegyük fel ugyanis, hogy a keresett díj ez esetben H'_x, a felek által befizetett kölcsön λ_x H'_x, a bank kiadásai pedig $\Sigma\tau_x$ mint biztosított töke, de a visszafizetési összeg már nem $\Sigma\tau_x$ H'_x, hanem

$$\Sigma\tau_x H'_x\left(1+\frac{\pi}{100}\right)$$

ha a pótléki százalékot π-vel jelöljük, az 1) alatti egyenlet tehát ez esetben:

$$\lambda_x H'_x = \Sigma\tau_x + \Sigma\tau_x H'_x\left(1+\frac{\pi}{100}\right)$$

innét azután:

$$H'_x = \frac{\Sigma\tau_x}{\lambda_x - \left(1+\frac{\pi}{100}\right)\Sigma\tau_x} \quad \ldots\ldots 4)$$

az ezen képlet után talált H'_x tőkéhez pedig, mint elméleti díjhoz már egyszerűen hozzácsatolható a π százalék, mint pótlék, miután ezen pótlék visszafizetése már a képletben tekintetbe van véve.

II.

Bíztosítási kölcsön halálesetre, ha a kölcsönzött összegek évenként fizettetnek be.

Feltéve ismét, hogy l_x, x korban levő egyén kiván magának ezen biztosítási mód szerint halálesetre egy forint tőkét biztosítani, akkor a bank bevételeinek jelen idei értékét számítva a következő eredményre jutunk.

Nevezvén a biztosító által fizetendő kölcsönt h_x-nek, az első év elején az l_x biztosító által befizettetik $l_x . h_x$ forint, a második év elején az l_x biztosító közül még csak l_{x+1} egyén lévén életben, ezek $l_{x+1} . h_x$ forintot fognak befizetni; ez összegnek jelen értéke:

$$\frac{l_{x+1} . h_x}{p}$$

a harmadik év elején még csak l_{x+2} egyén él; a befizetett összeget azonban már két évre kell leszámítolnom, és e szerint annak jelen értéke:

$$\frac{l_{x+2} . h_x}{p^2}$$

és igy tovább. A folytonosan kevesbedő élők fizetni fogják a h_x díjat, de évenként annak jelen értéke egy évvel többre is leszámitolandó, így tehát a bank összes bevételének jelen értéke leend:

$$l_x h_x + \frac{l_{x+1}.h_x}{p} + \frac{l_{x+2}.h_x}{p^2} + \ldots\ldots$$

e sort folytatva a halandósági táblázat végéig. E sort még így is lehet írni :

$$h_x\left(l_x + \frac{l_{x+1}}{p} + \frac{l_{x+2}}{p^2} + \ldots\ldots\right)$$

vagy

$$h_x p^x\left(\frac{l_x}{p^x} + \frac{l_{x+1}}{p^{x+1}} + \frac{l_{x+2}}{p^{x+2}} + \ldots\right)$$

és az előre bocsátott megjelölések folytán :

$$h_x p^x(\lambda_x + \lambda_{x+1} + \lambda_{x+2} + \ldots)$$

vagy végre :

$$h_x.p^x.\Sigma\lambda_x.$$

A bank, kiadásainak jelen értékét illetőleg, az első év végén, az év alatt elhalt t_x biztosított részére fizetni tartozik t_x-szer egy forintot, és ugyanannyiszor a kölcsönkép kapott h_x díjat; az egész fizetés tehát $t_x(1+h_x)$ forint, és minthogy ezen fizetés csak egy év mulva történik, annak jelen értéke :

$$\frac{t_x(1+h_x)}{p};$$

a második év végén az ezen évben elhalt t_{x+1} egyén részére jutó összeg t_{x+1}-szer egy forint, és azonfelől ugyanazoknak a kölcsönkép kapott két évi díj, vagyis még $2t_{x+1}h_x$, a második év végéni összes kiadás tehát $t_{x+1}(1+2h_x)$, mely összeget két évre kell leszámítolni, hogy annak jelen értékét megnyerjük, mi által lesz :

$$\frac{t_{x+1}(1+2.h_x)}{p^2}$$

épen így a harmadik év végén fizetett összegek jelen értéke leend :

$$\frac{t_{x+2}(1+3.h_x)}{p^3}$$

és így tovább, ugy hogy a bank összes kiadásainak jelen értéke :

$$\frac{t_x(1+h_x)}{p} + \frac{t_{x+1}(1+2h_x)}{p^2} + \frac{t_{x+2}(1+3h_x)}{p^3} + \ldots$$

folytatva szintén a halandósági táblázat végéig. E sor még így is írható :

$$\frac{t_x}{p}+\frac{t_{x+1}}{p^2}+\frac{t_{x+2}}{p^3}+\ldots\ldots$$
$$+h_x\left(\frac{t^x}{p}+\frac{2t_{x+1}}{p^2}+\frac{3t_{x+2}}{p^3}+\ldots\right)$$

vagy:

$$p^x\left(\frac{t_x}{p^{x+1}}+\frac{t_{x+1}}{p^{x+2}}+\frac{t_{x+2}}{p^{x+3}}+\ldots\ldots\right)$$
$$+p^xh_x\left(\frac{t_x}{p^{x+1}}+\frac{2t_{x+1}}{p^{x+2}}+\frac{3t_{x+2}}{p^{x+3}}+\ldots\ldots\right)$$

és a fennebbi megnevezések folytán:

$$p^x(\tau_x+\tau_{x+1}+\tau_{x+2}+\ldots\ldots)$$
$$+p^xh_x(\tau_x+\tau_{x+1}+\tau_{x+2}+\ldots\ldots$$
$$+\tau_{x+1}+\tau_{x+2}+\ldots\ldots$$
$$+\tau_{x+2}+\ldots\ldots)$$

vagy még:

$$p^x\Sigma\tau_x+p^xh_x(\Sigma\tau_x+\Sigma\tau_{x+1}+\Sigma\tau_{x+2}+\ldots\ldots$$

és végre:

$$p^x[\Sigma\tau_x+h_xT_x],$$

ha tehát a bank bevételeit és kiadásait egyenlítjük, és az egyenlet mind a két oldalát egyuttal p^x tényezővel elosztjuk, lesz:

$$h_x\Sigma\lambda_x=\Sigma\tau_x+h_xT_x\ldots\ldots 5)$$

és innét igen egyszerűen az évenként befektetendő, keresett kölcsön:

$$h_x=\frac{\Sigma\tau_x}{\Sigma\lambda_x-T_x}\ldots\ldots 6)$$

1. Jegyzés. Ha a biztosított összeg nem 1, hanem S forint volna, akkor a talált díjak még szintén S-el lesznek szorzandók.

2. Jegyzés. A fennebbi segédtáblázat segítségével a 6) alatti képlet szerint az egyes koréveknek megfelelő díj könynyen feltalálható; példaként az *A* táblázat évenkénti dijak rovatában mellékelve vannak a 30—50 korévnek megfelelő azon összegek, melyek évenként kölcsönkép a bank pénztárába fektendők, ha a biztosított tőke 100 forint.

3. Jegyzés. Az így nyert díjak elméletiek, vagyis a befektetett tőkék épen fedezni fogják a szükségelt összegeket feltéve, hogy a valódi halálozás a felvettel tökéletesen egyez és hogy a pontosan befolyt összegek azonnal gyümölcsözőleg elhelyezhetők az alapul vett kamatláb szerint. Kezelési költségekre épen semmi sem jut.

Hogy tehát a bank a halandósági táblázattóli eltérés által zarvarba ne jőjjön, czélszerű a halálesetre kötött biztosításoknál oly halandósági táblázatot választani, mely az uralkodót valamivel túlhaladja. Nálunk tehát az angol halandósági táblázatokat használni nem czélszerű, miután nálunk a halandóság nagyobb, mint Angolhonban. A mi pedig a kezelési költségeket illeti, ezek az által nyeretnek meg, hogy az elméleti díjakhoz azok bizonyos százalékai hozzácsatoltatnak.

A jelen biztosítási nemnél azonban czélszerű leend e tárgyat szigorúbb vizsgálat alá venni, miután a befizetett összegek visszaadása alkalmával a hozzácsatolt százalékok is visszaadatnak, és így a rendes százalékok hozzáadása a szükségleteket ismét nem fedezhetné.

Miért is mindjárt az elméleti díjak számításánál felteszszük, hogy az egyes elhalásoknál nem az elméleti kölcsönt, hanem mindjárt a százalékokkal nagyított adjuk vissza, vagyis ha a kezelési költségek fedezésére π százalékra van szükségünk, akkor már az elméleti díjak számításában, a visszafizetésnél a h_x helyett $h_x\left(1+\frac{\pi}{100}\right)$ kölcsönt veszek számításba, mi által a fennebbi lehozatalnál a bank bevétele marad $h_x p^x \Sigma\lambda_x$; de a visszafizetésnél, a nyert kiadásoknál (5 alatti képlet) h_x helyébe $h_x\left(1+\frac{\pi}{100}\right)$ lesz teendő; az egyenlet tehát ez esetben, ha még megkülönböztetésül h helyébe h'-et irunk, álland:

$$h'_x\Sigma\lambda_x = \Sigma\tau_x + h'_x\left(1+\frac{\pi}{100}\right)T_x$$

és innét azután:

$$h'_x = \frac{\Sigma\tau_x}{\Sigma\lambda_x - \left(1+\frac{\pi}{100}\right)T_x}$$

III.

Biztosítási kölcsön életesetre, egyszer mindenkorra befizetett kölcsön mellett.

Ha l_x, x korban levő egyén mindegyike E_x forintot fektet valamely bank pénztárába oly kikötéssel, hogy a bank egy bizonyos előre meghatározott y számu évek mulva, neki az E_x tőkét visszafizesse, és az addigi használatért még azonfelől 1 forintot, holott ha a biztosított egyén a kitüzött y év lefolyta előtt halna meg, úgy a bank csak is a befektetett E_x tőkét legyen köteles visszafizetni; akkor a bank bevétele l_x E_x forint volna, kiadásai pedig a következők :

Az első évben az l_x biztosítottak közül elhalt t_x egyén, ezek mindegyikének fizet a bank E_x forintot, miért is az első évi kiadásainak jelen értéke, feltéve, hogy a fizetés az év végén történik :

$$\frac{t_x E_x}{p}$$

a második év végén a t_{x+1} elhaltak részére fizet $t_{x+1}E_x$ frtot, melynek jelen értéke :

$$\frac{t_{x+1}E_x}{p^2}$$

és így tovább az y-ik évben még elhal t_{x+y-1}, melyek részére eső fizetéseknek jelen értéke :

$$\frac{t_{x+y-1}.E_x}{p^y}$$

végre az y év eltelte után a még élő l_{x+y} biztosítottnak fizetni fog $l_{x+y}(1+E_x)$ forintot, ennek pedig jelen értéke :

$$\frac{l_{x+y}(1+E_x)}{p^y}$$

a bank összes kiadásainak jelen értékét tehát egyenlítvén a felek által befizetett összegekkel, leend :

$$l_x E_x = \frac{t_x.E_x}{p} + \frac{t_{x+1}.E_x}{p^2} + \ldots\ldots + \frac{t_{x+y-1}.E_x}{p^y} + \frac{l_{x+y}(1+E_x)}{p^y}$$

vagy az egyenlet mind két oldalát p^x-el elosztva, és a leszámított élők és holtak megjelölését használva

$$\lambda_x E_x = E_x(\tau_x + \tau_{x+1} + \ldots\ldots + \tau_{x+y-1} + \lambda_{x+y}) + \lambda_{x+y}$$
$$= E_x(\Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+y} + \lambda_{x+y}) + \lambda_{x+y} \ldots\ldots 8)$$

és innét :

$$E_x = \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x - \lambda_{x+y} - (\Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+y})} \ldots\ldots 9)$$

1. Jegyzés. Ha a biztosított összeg 1 helyett S forint volna, akkor az illető kölcsön E_x. S leend.

2. Jegyzés. Ha a talált 9) alatti képlet számlálóját és nevezöjét λ_x-el elosztjuk, leend :

$$E_x = \frac{\frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x}}{1 - \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} - \frac{\Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+y}}{\lambda_x}}$$

de $\frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x}$ nem egyéb, mint a közönséges biztosítási mód szerint az életesetre kötött biztosítás egyszeri díja. Ha ugyanis valaki a bank pénztárába $\frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x}$ forintot fizet, annak a bank fizetni fog 1 forintot, a biztosított az $(x+y)$-ik korévet elérvén. $\frac{\Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+y}}{\lambda_y}$ érték pedig a rövid biztosítás egyszeri díját fejezi ki, vagyis ha valaki ezen összeget fizeti a bank pénztárába, akkor annak a bank azon esetben fizet 1 forintot, ha a biztosított az y év lefolyta előtt hal meg ; végre

$$\frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} + \frac{\Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+y}}{\lambda_x}$$

mint a kettő összege a *vegyes* biztosítás egyszeri díját adja, vagyis a bank ezen összeg fizetése mellett biztosít az illető részére egy forintot, melyet y év mulva, vagy a biztosított előbb történő halálakor fizet.

Ezeket tekintetbe véve a fennebbi 9) alatti képlet ezen nevezetes kifejezésre vezet :

$$E_x = \frac{\text{élet}}{1 - \text{vegyes}}.$$

3. Jegyzés. A következö táblázatban ismét az „English life table Nr. 3“ adatai használtatván,

Korév	A leszámitolt élők száma λ_x	A leszámitolt élők összege $\Sigma\lambda_x$	A leszámitolt élők összegének összege L_x	A leszámitolt holtak száma τ_x	A leszámitolt holtak összege $\Sigma\tau_x$	A leszámitolt holtak összegének összege T_x
25	119828	2184173	33527328	1055.38	35821.45	894661.28
30	93894	1639237	23749337	909.54	30845.96	735802.09
35	73199	1213024	16447872	792.90	26544.29	580415.23
40	56670	881564	11079445	706.78	22763.52	455433.05
45	43434	625854	7210082	643.97	19363.07	348545.43
50	32816	430853	4492503	594.65	16245.17	258065.77
55	24234	284653	2648166	572.05	13286.14	182801.97
60	17334	177888	1452523	541.94	10492.46	122021.80
65	11779	102806	724591	519.96	7824.78	74936.94
70	7344.8	53209.3	318837.3	475.16	5298.27	40946.60
75	3999.8	23621.3	118881.6	379.79	3091.29	19049.12
80	1783.7	8503.8	35664.6	243.29	1456.69	7132.17

annak segitségével számittattak a következő *B* díjszabály-részlet egyszeri díjai, és pedig e 20, 25, és 30 éves biztositási tartamra.

B.

Korév	Ha a biztosítás tartama					
	20 év		25 év		30 év	
	egyszeri	évenk.	egyszeri	évenk.	egyszeri	évenk.
	elméleti dijak					
25	72.47	8.18	48.66	4.67	33.17	2.82
30	70.61	8.02	46.51	4.51	30.84	2.66
35	67.87	7.77	43.54	4.27	27.58	2.42
40	62.59	7.43	39.33	3.93	23.05	2.08
45	58.55	6.91	33.35	3.43	17.27	1.63
50	50.57	6.14	25.54	2.75	10.98	1.10

4. Jegyzés. Az így nyert *elméleti* díjak helyett, tekintetbe véve a biztosítási társulatok több rendbeli költségeit, az *alkalmazott* díjak lesznek használandók. Feltéve ismét, hogy a költségek fedezésére a befizetett díjak $\pi^0/_0$-ára van szükség, akkor a bank bevétele ugyanaz maradván, a 8) alatti egyenlet jobb oldalán, a visszafizetett E_x helyébe $E_x\left(1+\frac{\pi}{100}\right)$ lesz teendő; az illető képlet tehát ez esetben ha megkülönböztetésül E_x helyett E'_x-et irunk leend:

$$E'_x = \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x - \left(1+\frac{\pi}{100}\right)(\lambda_{x+y} + \Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+y})}$$

vagy a 2-ik jegyzés értelme szerint:

$$E'_x = \frac{\text{élet}}{1-\left(1+\frac{\pi}{100}\right)\text{vegyes}}$$

IV.

Biztosítási kölcsön életesetre, ha a kölcsönzött összegek évenként fizettetnek be.

Vegyünk ismét fel l_x x koru egyént, kik y éven át évenként e_x forintot kivánnak kölcsönözni valamely banknak oly feltétellel, hogy a bank az y év alatt elhalóknak egyszerűen fizesse vissza az általok már befizetett összegeket, a letelt y év után pedig a még akkor életben maradt biztosítottaknak visszafizesse az egész idő alatt befizetett összegeket, és azonfelül a használatért fizessen mindegyiknek 1 forintot.

Az évenként adandó e_x kölcsön meghatározására keresni fogjuk a bank összes bevételeinek jelen értékét, és azt egyenlíteni fogjuk a kiadások jelen értékével.

Az l_x biztosított az első év elején fizet a banknak $l_x.e_x$ forintot, a második év elején a még életben levő l_{x+1} biztosított fizet $l_{x+1}.e_x$ forintot, melynek jelen értéke:

$$\frac{l_{x+1}.e_x}{p}$$

a harmadik év elején a még élő l_{x+2} egyén által befizetett díjak jelen értéke:

$$\frac{l_{x+2}e_x}{p^2}$$

és így tovább az y-ik év elején még él l_{x+y-1} egyén, az ezek által befizetett összegek értéke tehát:

$$\frac{l_{x+y-1}.e_x}{p^{y-1}}$$

a bank összes bevétele ennélfogva:

$$e_x\left(l_x+\frac{l_{x+1}}{p}+\frac{l_{x+2}}{p^2}+\ldots\ldots+\frac{l_{x+y-1}}{p^{y-1}}\right)$$

vagy p^x-el szorozva és osztva, és a leszámított élők megjelölését használva:

$$e_x p^x(\lambda_x+\lambda_{x+1}+\lambda_{x+2}+\ldots\ldots+\lambda_{x+y-1})$$

vagy még rövidebben:

$$e_x p^x(\Sigma\lambda_x-\Sigma\lambda_{x+y}).$$

Ellenben a bank fizet az első év folytán elhalt t_x biztosított részére a kölcsönzött összegekből $t_x.e_x$ forintot, melynek jelen értéke, feltéve, hogy a fizetések az év végén történnek,

$$\frac{t_x\cdot e_x}{p};$$

a második év végén, az ezen év alatt elhalt t_{x+1} biztosítottaknak már két évi befizetést tartozván visszafizetni, ezen fizetések jelen értéke:

$$\frac{2.t_{x+1}.e_x}{p^2}$$

a harmadik év végéni fizetések jelen értéke:

$$\frac{3.t_{x+2}.e_x}{p^3}$$

és így tovább; az y-ik év végén, a még ezen évben elhaltak részére, — úgy az életben maradt l_{x+y} biztosítottaknak fizetendő egy forint, — és végre az ugyanazoknak visszaadandó y-szori befizetések jelen értéke:

$$\frac{yt_{x+y-1}.e_x+l_{x+y}+y.l_{x+y}e_x}{p^y}$$

A bank összes kiadásainak jelen értéke tehát:

$$e_x\left(\frac{t_x}{p}+\frac{2t_{x+1}}{p^2}+\frac{3t_{x+2}}{p^3}+\ldots\ldots+\frac{y.t_{x+y-1}}{p^y}+\frac{yl_{x+y}}{p^y}\right)+\frac{l_{x+y}}{p^y}$$

vagy szintén p^x-el szorozva és osztva:

$$e_x p^x(\tau_x+2\tau_{x+1}+3\tau_{x+2}+\ldots\ldots+y\tau_{x+y-1}+y\lambda_{x+y})+p^x\lambda_{x+y}$$

és a zárjel közti részt, annak utolsó tagján kivül, elölegesen $T^y{}_x$ kifejezéssel jelölve, lesz még:

$$e_x p^x(y\lambda_{x+y}+T^y{}_x)+p^x\lambda_{x+y}.$$

Ha tehát a bank bevételeit, és kiadásait egyenlítjük, ered — a közös p^x szorzót egyuttal mind a két oldalon elhagyván — a következő egyenlet:

$$e_x(\Sigma\lambda_x-\Sigma\lambda_{x+y})=e_x(y\lambda_{x+y}+T^y{}_x)+\lambda_{x+y}\;\ldots\;(10)$$

Innét azután a keresett évenkénti kölcsön

$$e_x=\frac{\lambda_{x+y}}{\Sigma\lambda_x-\Sigma\lambda_{x+y}-y\lambda_{x+y}-T^y{}_x}\;\ldots\ldots\;(11)$$

A mi most még a képletben előforduló $T^y{}_x$ kifejezést illeti, ennek meghatározására a felvétel szerint áll:

$$\begin{aligned}
T^y{}_x &= \tau_x+2\tau_{x+1}+3\tau_{x+2}+\;\ldots\;+y\tau_{x+y-1}\\
&= \tau_x+\tau_{x+1}+\tau_{x+2}+\;\ldots\;+\tau_{x+y-1}\\
&\qquad +\tau_{x+1}+\tau_{x+2}+\;\ldots\;+\tau_{x+y-1}\\
&\qquad\qquad +\tau_{x+2}+\;\ldots\;+\tau_{x+y-1}\\
&\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad\qquad +\tau_{x+y-1}\\
&= \Sigma\tau_x-\Sigma\tau_{x+y}\\
&\quad +\Sigma\tau_{x+1}-\Sigma\tau_{x+y}\\
&\quad +\Sigma\tau_{x+2}-\Sigma\tau_{x+y}\\
&\quad +\ldots\ldots\ldots\\
&\quad +\Sigma\tau_{x+y-1}-\Sigma\tau_{x+y}\\
&= T_x-T_{x+y}-y\Sigma\tau_{x+y}\;\ldots\ldots\;(12)
\end{aligned}$$

mely érték használatával tehát a 11) alatti képletből lesz:

$$e_x=\frac{\lambda_{x+y}}{(\Sigma\lambda_x-T_x)-(\Sigma\lambda_{x+y}-T_{x+y})-y(\lambda_{x+y}-\Sigma\tau_{x+y})}\quad 13)$$

mely képletben ugyan már minden tag ismeretes, illetőleg a mellékelt táblázatból egyszerüen kivehető, mindazonáltal ezen képlet még tetemesen egyszerüsíthető a következő megjegyzés folytán:

ugyanis a behozott megjelölések szerint,

$$\begin{aligned}
\Sigma\tau_x &= \frac{t_x}{p^{x+1}}+\frac{t_{x+2}}{p^{x+2}}+\frac{t_{x+2}}{p^{x+3}}+\ldots\ldots\\
&= \frac{l_x-l_{x+1}}{p^{x+1}}+\frac{l_{x+1}-l_{x+2}}{p^{x+2}}+\frac{l_{x+2}-l_{x+3}}{p^{x+3}}+\ldots\ldots\\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{l_x}{p_x}+\frac{l_{x+1}}{p^{x+1}}+\frac{l_{x+2}}{p^{x+2}}+\ldots\ldots\right)\\
&\quad -\left(\frac{l_{x+1}}{p_{x+1}}+\frac{l_{x+2}}{p^{x+2}}+\frac{l_{x+3}}{p^{x+3}}+\ldots\ldots\right)
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{p}\Sigma\lambda_x-\Sigma\lambda_x+\lambda_x$$

$$=\lambda_x-\frac{p-1}{p}\Sigma\lambda_x$$

ennél fogva álland szintén

$$\Sigma\tau_{x+y}=\lambda_{x+y}-\frac{p-1}{p}\Sigma\lambda_{x+y}$$

és innét

$$\lambda_{x+y}-\Sigma\tau_{x+y}=\frac{p-1}{p}\Sigma\lambda_{x+y}\;\ldots\ldots\;14)$$

Hasonlóan

$$T_x=\frac{l_x-l_{x+1}}{p^{x+1}}+2\frac{l_{x+1}-l_{x+2}}{p^{x+2}}+3\frac{l_{x+2}-l_{x+3}}{p^{x+3}}+\ldots$$

$$=\frac{1}{p}\left(\frac{l_x}{p^x}+2\frac{l_{x+1}}{p^{x+1}}+3\frac{l_{x+2}}{p^{x+2}}+\ldots\ldots\right)$$

$$-\left(\frac{l_{x+1}}{p^{x+1}}+2\frac{l_{x+2}}{p^{x+2}}+3\frac{l_{x+3}}{p^{x+3}}+\ldots\ldots\right)$$

$$=\frac{1}{p}L_x-L_x+\Sigma\lambda_x=\Sigma\lambda_x-\frac{p-1}{p}L_x$$

és innét

$$\Sigma\lambda_x-T_x=\frac{p-1}{p}L_x\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;15)$$

ebből pedig

$$\Sigma\lambda_{x+y}-T_{x+y}=\frac{p-1}{p}L_{x+y}\;\ldots\ldots\ldots\;16)$$

Helyettesítvén tehát a 14), 15) és 16) alatti értékeket a 13) alatti képlet nevezőjébe, ered :

$$e_x=\frac{\lambda_{x+y}}{\frac{p-1}{p}L_x-\frac{p-1}{p}L_{x+y}-y.\frac{p-1}{p}\cdot\Sigma\lambda_{x+y}}$$

vagy még

$$e_x=\frac{p}{p-1}\cdot\frac{\lambda_{x+y}}{L_x-L_{x+y}-y\Sigma\lambda_{x+y}}\;\ldots\ldots\;17)$$

mely képlet mostani alakjában már eléggé alkalmas a kiszámításra.

1. Jegyzés. Ha a biztosított összeg 1 helyett S forint volna, akkor az illető díjak még S-el lesznek szorzandók.

2. *Jegyzés.* A 17) alatti képlet segítségével s a fent mellékelt segédtáblázat adatait használva kiszámítattak a 25, 30,.. 50 koréveknek megfelelő díjak azon esetre, ha a biztosított öszszeg 100 forint, és a biztosítási tartam $y = 20$, 25, vagy 30 év. Az illető díjak a B. táblázat *évenkénti díjak* rovatában állíttattak egybe.

3. *Jegyzés.* A 17) alatti képlet szerint kiszámított díjak *elméletiek*, melyeknél tehát a bank egyéb kiadásaira még tekintet nem vétetett. Hogy az illető alkalmazott díjak kiszámítására szolgáló képletet megnyerjük, feltéve, hogy a banknak, egyéb kiadásai fedezésére még a bevett díjak π százalékára van szüksége, akkor a 8) alatti képletben, hol a bank bevétele a kiadásokkal van egyenlítve, a jobb oldaloni e_x visszafizetési kölcsön helyébe $\left(1+\frac{\pi}{100}\right)e_x$ lesz irandó, melynek folytán az illető egyenletből lesz, ha még megkülönböztetésül e helyébe e' iratik.

$$e'_x(\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}) = \left(1+\frac{\pi}{100}\right)e'_x(y\lambda_{x+y} + T^y_x) + \lambda_{x+y}$$

és innét

$$e'_x = \frac{\lambda_{x+y}}{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y} - \left(1+\frac{\pi}{100}\right)(y\lambda_{x+y} + T^y_x)} \quad \ldots\ldots 18)$$

vagy ha még T^y_x értékét a 12) alatti egyenletből helyettesítjük, ugy szintén, ha az előforduló leszámitolt holtak összegének összegeit a 14), 15) és 16) alatti képletek segitségével a leszámitolt élők összegének összegei által fejezzük ki, rövid összevonás után ered:

$$e'_x = \frac{\lambda_{x+y}}{\frac{p-1}{p}\left(1+\frac{\pi}{100}\right)(L_x - L_{x+y} - y\Sigma\lambda_{x+y}) - \frac{\pi}{100}(\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y})}$$