

VALÓS EGYÜTTHATÓS EGYENLETEK

VALÓS GYÖKEIRŐL

DOKTORI ÉRTEKEZÉS

IRTA

BÁLINT ELEMÉR

BUDAPEST

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA

1916



848682

Matk.
6.1765.

VALÓS EGYÜTTHATÓS EGYENLETEK VALÓS GYÖKEIRŐL

DOKTORI ÉRTEKEZÉS

IRTA

BÁLINT ELEMÉR

BUDAPEST

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA

1916

**MTA
KIK**



MAHYA SUTRA
KONYA TALA

1. §. Bevezetés.

Legyenek az

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$$

n -edfokú algebrai egyenlet együtthatói reális számok. A szerint, hogy két konzekutív, el nem tűnő együttható egyenlő vagy különböző előjelű, azt mondjuk, hogy az együtthatók sorozatában e két tag közt jelkövetkezés vagy jelváltás van. DESCARTES a következő összefüggést találta az egyenlet pozitív gyökeinek és a jelváltásoknak számossága közt:

1. *Descartes jelszabály.* Az $f(x) = 0$ egyenlet pozitív gyökeinek száma nem haladhatja meg a jelváltásoknak számát az egyenlet el nem tűnő együtthatóinak sorozatában és a különbség a két számosság közt mindig páros. A gyökök megszámlálásánál minden gyök annyiszor számítandó, a hányszoros gyöke az egyenletnek. Ha $f(0) = a_0 = 0$, akkor az $x = 0$ gyök nem számítandó a pozitív gyökök közé.

A DESCARTES jelszabály az első azon tételek sorozatában, a melyek felső határt adnak egy reális együtthatójú egyenlet reális gyökeinek számosságára egy megadott (a, b) intervallumban. (Az $x = a$ hely nem számítandó hozzá, az $x = b$ hely hozzászámítandó az intervallumhoz.) A DESCARTES jelszabályt számos más tétel követte, melyek azt egyrészt általánosították, másrészt a reális gyökök számosságának általa megadott felső határát pontosabban helyettesítették. Ezen tételek közül idézem azokat, a melyek a következő vizsgálatokkal szorosan összefüggnek.



II. *Budan—Fourier tétel.* Jelentse $v(x)$ a jelváltások számát az

$$f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

sorozatban, a melyben mindegyik tag az előtte állónak deriváltja.

Ha p jelenti az $f(x) = 0$ egyenlet azon reális gyökeinek számát, a melyek a -nál nagyobbak és b -nél nem nagyobbak, akkor

$$p = v(a) - v(b) - 2\nu,$$

a hol ν nem negatív egész számot jelent. A gyökök multiplicitásukkal számítandók.

A BUDAN—FOURIER tétel a DESCARTES jelszabályt magában foglalja, a mint az kiderül, ha a -nak zérust, b -nek egy elegendő nagy pozitív számot választunk.

A DESCARTES jelszabályt LAGUERRE transzcendens egyenletekre is kiterjesztette.

III. *Laguerre tétele.*¹ Ha az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor, a melynek együtthatói reálisok, az R sugarú körben konvergens, akkor az $f(x) = 0$ egyenlet pozitív, R -nél kisebb gyökeinek² száma nem haladja meg az együtthatók sorozatában föllépő jelváltások számát. Ha a jelváltások száma véges és $f(x)$ az $x = R$ helyen divergens, akkor a két számosság közti különbség páros. A gyökök multiplicitásukkal számítandók.

Mint az algebrai egyenleteknél, a transzcendenseknél sem adják meg az együtthatók sorozatában föllépő jelváltások a pozitív gyökök pontos számát, hanem annak csak egy felső határát. De már LAGUERRE kimutatta a következő tételt:

IV. *Laguerre tétele.*³ Legyen az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor

¹ LAGUERRE: Sur la théorie des équations numériques. Oeuvres. I. kötet 3—47. oldal.

² Az $f(x) = 0$ egyenlet gyökei a változó azon értékei, a melyek $f(x)$ hatványsorát konvergenssé és annak összegét 0-sá teszik.

³ LAGUERRE: Sur la théorie des équations numériques. Oeuvres. I. kötet. 3—47. oldal.

ugyanazon föltételeknek alávetve, mint a III. tételben és alkossuk meg az

$$(1-x)^{-k} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(k)} x^n \quad (k=1, 2, \dots) \quad (A)$$

hatványsorokat; jelentse $v(k)$ az együtthatók sorozatában fel-lépő jelváltások számát és legyen (A) konvergenciasugara r ; ¹ akkor

1. $v(k)$ csak fogyhat, ha k nő;
2. $v(k)$ nem lehet kisebb, mint az $f(x) = 0$ egyenlet pozitív (és természetesen r -nél kisebb) gyökeinek száma. A gyökök multiplicitásukkal számítandók. LAGUERRE fölvetette a kérdést, hogy k elég nagy értékei mellett $v(k)$ nem adja-e meg az egyenlet gyökeinek pontos számát. A feleletet a következő tétel adja meg:

17. *Fekete és Pólya tétele.*² Ha k -nak valamely k_0 értékénél az (A) hatványsor az r sugarú körben konvergens és az $x=r$ helyen szorosabb értelemben divergens, akkor $\lim_{k \rightarrow \infty} v(k)$ megegyezik az $f(x) = 0$ egyenlet r -nél kisebb pozitív gyökeinek számával (a gyököket multiplicitásukkal számítva). Ha $v_i^{(k)}$ jelenti az (A) hatványsor azon együtthatójának indexét, a mely után az i -edik jelváltás föllép, akkor a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{v_i^{(k)}}{k + v_i^{(k)}} = 3$$

határérték mindig létezik és ha kisebb r -nél, az $f(x) = 0$ egyenlet gyöke; ezen határértékek az egyenlet minden, a $(0, r)$ inter-

¹ $r=1$, ha $R \geq 1$ és $x=1$ az $f(x) = 0$ egyenletnek k -nál nem magasabbrendű gyöke; minden más esetben $r=R$.

² M. FEKETE und G. PÓLYA: Über ein Problem von LAGUERRE. Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo. XXXIV. kötet; és Matematikai és Természettud. Értesítő XXX. kötet.

³ $\frac{v_i^{(k)}}{k + v_i^{(k)}}$ nem más, mint az $(1-x)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{k,n} x^n$ hatványsor

$c_k, v_i^{(k)} - 1$ és $c_k, v_i^{(k)}$

együtthatóinak hányadosa.

vallamba eső gyökét rendre megadják, még pedig mindegyiket annyiszor, a hányszoros gyöke az egyenletnek.

Azt a szolgálatot, a melyet a $(0, 1)$ intervallumban az $(1-x)^{-k}$ hatványsora tesz meg, ugyanabban vagy más intervallumban más hatványsorok is megtehetik. Már LAGUERRE¹ megmutatta, algebrai egyenletek esetében, FEKETE² pedig transzcendensekre is, hogy e^{kx} hatványsora k elég nagy pozitív értékei mellett épúgy megadja az összes pozitív gyökök számát és helyét, mint $(1-x)^{-k}$ a $(0, 1)$ intervallumba esőkéét. Szerző³ pedig teljesen analóg tételt állított fel az $(1+x)^k$ polinómról, mely k elég nagy pozitív értékei mellett szintén alkalmas úgy algebrai, mint transzcendens egyenletek esetében az összes pozitív gyökök számának és helyének meghatározására.

Az $f(x) = 0$ egyenlet együtthatósorozatában föllépő jelváltások tehát csak felső határt adnak a pozitív gyökök számosságára, de találhatók oly $\varphi_k(x)$ függvények, hogy a $\varphi_k(x) \cdot f(x)$ hatványsorában föllépő jelváltások száma a k parameter alkalmas értékei mellett megadja az egyenlet egy pozitív $(0, R)$ intervallumba eső gyökeinek pontos számát és módot ad ezen gyökök meghatározására is. Ezen dolgozatban elegendő feltételeket állítok fel $\varphi_k(x)$ együtthatóira, a melyek mellett a

$$\varphi_k(x) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(k)} x^n$$

hatványsor együttható sorozatában föllépő jelváltások száma a k index elég nagy értékeinél megegyezik az $f(x) = 0$ egyenlet $(0, R)$ intervallumba eső gyökeinek pontos számával; és ha

$$A_\alpha^{(k)}, A_\mu^{(k)}, A_\gamma^{(k)}, \dots$$

¹ LAGUERRE: l. c.

² FEKETE: Rendiconti l. c.

³ BÁLINT: Vizsgálatok reális stb. Math. és Természettudományi Értesítő XXXI. kötet.

az együttható sorozat azon tagjai, a melyek után jelváltás lép föl, akkor a

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{k,n} x^n$$

együtthatóiból alkotott

$$\frac{c_{k,\alpha}}{c_{k,\alpha+1}}, \quad \frac{c_{k,\beta}}{c_{k,\beta+1}}, \quad \frac{c_{k,\gamma}}{c_{k,\gamma+1}}, \dots$$

hányadosok k növekedtével a $(0, R)$ intervallumba eső gyökökhöz konvergálnak. Rövidség kedvéért $\varphi_k(x)$ -et az

$$A_0^{(k)}, \quad A_1^{(k)}, \quad A_2^{(k)}, \dots$$

sorozat generatrix függvényének nevezem és a

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \varphi_3(x), \dots$$

sorozatot a probléma $(0, R)$ intervallumhoz tartozó generatrix-sorozatának.

2. §. Többszörösen pozitív sorokról.

Ha a $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ reális együtthatójú hatványsor együtthatóiból alkotott

$$\begin{vmatrix} c_{i_0} & c_{i_1} & \dots & c_{i_p} \\ c_{i_0-1} & c_{i_1-1} & \dots & c_{i_p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{i_0-p} & c_{i_1-p} & \dots & c_{i_p-p} \end{vmatrix} = [i_0, i_1, \dots, i_p]$$

($c_s = 0$, ha $s < 0$)

$p+1$ -edrendű determinánsok az indexek minden

$$0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_p \quad \text{és} \quad 0 \leq p \leq P$$

rendszerénél pozitívok, akkor a $\varphi(x)$ hatványsort FEKETE MIHÁLY jelölésével ¹ « P -szeresen pozitív»-nak mondom.

¹ FEKETE: Rendiconti I. c.

Zérusszorosan és a *fortiori* többszörösen pozitív hatványsor minden együtthatója zérustól különböző pozitív szám, tehát a hatványsor polinóm nem lehet. Czélszerűnek mutatkozik a

$$\varphi_N(x) = \sum_{n=0}^N c_n x^n$$

polinómot P -szeresen pozitívnak nevezni, ha az

$$[i_0, i_1, \dots, i_p] \quad (c_s = 0, \text{ ha } s < 0) \\ 0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_p, \quad 0 \leq p \leq P$$

determinánsok mind pozitívak, kivéve azokat, melyeknek kifejtésében minden tag külön zérus. P -szeresen pozitív hatványsor a $(0, 1)$ intervallumhoz tartozó $(1-x)^{-k}$ generatrixfüggvénynek MAC-LAURIN sora k -nak P -nél nagyobb értékei mellett és a $(0, \infty)$ intervallumhoz tartozó e^{kx} generatrix függvénynek MAC-LAURIN sora minden pozitív k mellett. A $(0, \infty)$ intervallumhoz tartozó $(1+x)^k$ generatrix függvény viszont k minden pozitív egész értékénél P -szeresen pozitív polinóm.

FEKETE MIHÁLY kimutatta,¹ hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ hatványsor $[n, n+1, \dots, n+p]$ determinánsainak minden $n \geq 0$, $p \leq P$ indexre fennálló pozitivitásából már következik, hogy a hatványsor P -szeresen pozitív. Minthogy polinómak is lehetnek generatrixsorozatok tagjai, szükségem lesz a következő lemmára: Ha a

$$\varphi_N(x) = \sum_{n=0}^N c_n x^n$$

N -edfokú polinóm $\overline{N+1}$ együtthatója zérustól különböző pozitív szám és

$$[n, n+1, \dots, n+p] > 0 \quad (c_s = 0, \text{ ha } s < 0 \text{ vagy } > N) \\ 0 \leq n \leq N, \quad p \leq P,$$

akkor a polinóm P -szeresen pozitív.

¹ FEKETE: Rendiconti I. c.

Nyilvánvaló, hogy $[n, n+1, \dots, n+p] = 0$, ha $n > N$, mert akkor a determináns kifejtésében minden tag zérus. Az

$$\begin{aligned} & [i_0, \dots, i_{v-1}, i_{v+1}, \dots, i_{p+1}] [i_1, \dots, i_p] = \\ & = [i_0, \dots, i_{v-1}, i_{v+1}, \dots, i_p] [i_1, \dots, i_{p+1}] + \\ & + [i_1, \dots, i_{v-1}, i_{v+1}, \dots, i_{p+1}] [i_0, \dots, i_p] \end{aligned}$$

determinánsreláció ismételt alkalmazásával pedig nyerjük, hogy

1. $[n-v, n+1, \dots, n+p] > 0$, ha $v \leq n \leq N$, $p \leq P$; míg $n > N$ maga után vonja a determináns eltűnését, mert akkor kifejtésének minden tagja zérus;

2. $[n-1, \dots, n-v-1, n-v+1, \dots, n+p] > 0$, ha $n \leq N$, $p \leq P$; ha pedig $n > N$, akkor a determináns kifejtésének minden tagja, tehát a determináns maga is zérus;

3. $[i_0, i_1, \dots, i_p] > 0$, ha $i_0 < i_1 < \dots < i_p \leq N+p$ és $p \leq P$; ha pedig $i_p > N+p$, akkor a determináns, kifejtésének minden tagjával együtt eltűnik, qu. e. d.

3. §. A generatrixsorozatok.

Jelentsen R egy pozitív, abszolút konstanst ($+\infty$ -t is megengedve) és

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x), \dots \quad (\varphi)$$

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{k,n} x^n$$

reális együtthatóju polinómoknak vagy hatványsoroknak egy sorozatát, a melyeknek együtthatói a következő 5 feltételnek tesznek eleget:

1. ha valamelyik hatványsor egyik együtthatója zérus, akkor minden következő együtthatója is zérus;

2. minden pozitív egész P -hez megadható K úgy, hogy minden $p \leq P$ indexre nézve

$$[n, n+1, \dots, n+p]_k > 0, \text{ ha } c_{k,n} \neq 0,$$

ha $k \geq K$; a determináns mellett alkalmazott k index azt je-

lenti, hogy a determináns elemei a $\varphi_k(x)$ együtthatóiból valók; ha $c_{k,n} = 0$, akkor az első feltételből következik már a determináns eltűnése, mert kifejtésének minden tagja zérus; az előbbi § alapján mondhatjuk tehát, hogy $\varphi_k(x)$, akár polinóm, akár hatványsor, minden $k \geq K$ indexre nézve P -szeresen pozitív;¹

3. a tetszőleges pozitív ε -hoz és R -nél kisebb pozitív G -hez megadható K úgy, hogy minden $k \geq K$ indexre nézve az $(a, a + \varepsilon)$ zárt intervallumhoz tartozik a

$$\frac{c_{k,0}}{c_{k,1}}, \frac{c_{k,1}}{c_{k,2}}, \frac{c_{k,2}}{c_{k,3}}, \dots \quad (c)$$

sorozatnak legalább egy tagja, ha $0 \leq a, a + \varepsilon \leq G$;

4. minden pozitív egész P -hez és R -nél kisebb pozitív G -hez megadható K úgy, hogy minden $\nu \leq n$ és $p \leq P$ indexre nézve

$$\frac{[n-\nu, n+1, \dots, n+p]_k}{[n, n+1, \dots, n+p]_k} \leq A \binom{p+\nu}{p} \frac{c_{k,n-\nu}}{c_{k,n}},$$

ha $k \geq K$, $c_{k,n} \neq 0$ és $\frac{c_{k,n-1}}{c_{k,n}} \leq G$; az A csak P -től és G -től függő pozitív számot jelent;

5. A tetszőleges pozitív ε -hoz, R -nél kisebb pozitív G -hez, pozitív egész P -hez és L -hez megadható K úgy, hogy minden $\nu \leq n \leq L$, $p \leq P$ indexre nézve

¹ Külön ki kell emelni ezen feltételek jelentését, ha $P = 0$ és $P = 1$; a zérusszoros pozitivitásból következik, hogy minden el nem tűnő együttható

$$c_{k,\nu} = [v]_k > 0;$$

az egyszeres pozitivitásból még ezenfelül

$$[v, v+1]_k = c_{k,v}^2 - c_{k,v-1}c_{k,v+1} > 0, \quad \text{ha } c_{k,v} \neq 0;$$

ha pedig $c_{k,v+1}$ sem zérus, akkor a pozitív $c_{k,v}c_{k,v+1}$ faktorialis osztható

$$\frac{c_{k,v}}{c_{k,v+1}} > \frac{c_{k,v-1}}{c_{k,v}};$$

vagyis a $\frac{c_{k,v-1}}{c_{k,v}}$ hányadosok monoton növekvő sorozatot alkotnak.

$$(1-\varepsilon) \binom{p+\nu}{p} \frac{c_{k, n-\nu}}{c_{k, n}} \leq \frac{[n-\nu, n+1, \dots, n+p]_k}{[n, n+1, \dots, n+p]_k} \leq \\ \leq (1+\varepsilon) \binom{p+\nu}{p} \frac{c_{k, n-\nu}}{c_{k, n}},$$

ha $k \geq K$, $c_{k, n} \neq 0$ és $\frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}} \leq G$.

A felsorolt feltételek közül a másodikból következett, hogy egy elég nagy indextől kezdve a $\varphi_k(x)$ együtthatóiból alkotott (c) sorozat monoton növekvő. Minthogy pedig

$$\frac{c_{k, n-\nu}}{c_{k, n}} = \frac{c_{k, n-\nu}}{c_{k, n-\nu+1}} \frac{c_{k, n-\nu+1}}{c_{k, n-\nu+2}} \dots \frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}},$$

fennállanak a következő egyenlőtlenségek:

$$0 < \left(\frac{c_{k, n-\nu}}{c_{k, n-\nu+1}} \right)^\nu < \frac{c_{k, n-\nu}}{c_{k, n}} < \left(\frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}} \right)^\nu,$$

tehát

$$0 < \left(\frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}} \right)^\nu - \frac{c_{k, n-\nu}}{c_{k, n}} < \left(\frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}} \right)^\nu.$$

A (c) sorozatról még többet is mondhatunk. A tetszőleges pozitív ε -hoz és R -nél kisebb pozitív G -hez meghatározható K úgy, hogy minden $k \geq K$ indexre nézve

$$\frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}} - \frac{c_{k, n-2}}{c_{k, n-1}} \leq \varepsilon, \quad \text{ha } c_{k, n} \neq 0 \quad \text{és} \quad \frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}} \leq G.$$

A 3. feltétel szerint ugyanis megválasztható K úgy, hogy minden $k \geq K$ indexre nézve a $\left(\frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}} - \varepsilon, \frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}} - \frac{\varepsilon}{2} \right)$ zárt intervallumba essék a (c) sorozatnak legalább egy tagja, ha $\frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}} \leq G$; ezen tagnak a monoton növekvő (c) sorozatban $\frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}}$ -et meg kell előznie, a miből a felírt egyenlőtlenség következik.

Ezen egyenlőtlenség mutatja, hogy a pozitív egész L -hez és R -nél kisebb pozitív τ -hoz megadható K úgy, hogy minden

$k \geq K$ indexre nézve $\frac{c_{k, L-1}}{c_{k, L}} \leq \tau$. Mert a 3. feltétel szerint egy elég nagy k indextől kezdve a

$$\left(0, \frac{\tau}{2L+1}\right), \left(\frac{2\tau}{2L+1}, \frac{3\tau}{2L+1}\right), \dots, \left(\frac{2L\tau}{2L+1}, \tau\right)$$

intervallumok mindegyikébe tartozik a (r) sorozatnak legalább egy tagja, tehát az L -edik tag még nem haladhatja meg τ -t.

Szükségem lesz végül még a következő megjegyzésre. A tetzőleges pozitív ε -hoz, R -nél kisebb pozitív G -hez és pozitív egész L -hez megadható K úgy, hogy

$$\frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}} - \frac{c_{k, n-L-1}}{c_{k, n-L}} \leq \varepsilon,$$

ha $k \geq K$, $c_{k, n} \neq 0$, $\frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}} \leq G$, $n \geq L$.

Ugyanis K megválasztható úgy, hogy $k \geq K$ -ra nézve egyrészt

$$\frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}} - \frac{c_{k, n-2}}{c_{k, n-1}} \leq \frac{\varepsilon}{A(L+1)}$$

legyen, másrészt a 4. feltétel szerint

$$\frac{[n-L, n]_k}{[n-1, n]_k} \leq A(L+1) \frac{c_{k, n-L}}{c_{k, n}}$$

egyenlőtlenség is teljesüljön. Részletesen kiírva

$$\frac{c_{k, n-L} c_{k, n-1} - c_{k, n-L-1} c_{k, n}}{c_{k, n-1}^2 - c_{k, n-2} c_{k, n}} \leq A(L+1) \frac{c_{k, n-L}}{c_{k, n}}$$

és a pozitív $\frac{c_{k, n-L}}{c_{k, n}}$ -nel osztva

$$\begin{aligned} \frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}} - \frac{c_{k, n-L-1}}{c_{k, n-L}} &\leq A(L+1) \left(\frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}} - \frac{c_{k, n-2}}{c_{k, n-1}} \right) \leq \\ &\leq A(L+1) \frac{\varepsilon}{A(L+1)} = \varepsilon, \end{aligned}$$

qu. e. d.

A levezetett egyenlőtlenségből következik, hogy ha k elég nagy és $\frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}} \leq G$, akkor

$$\frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}} - \frac{c_{k, n-v-1}}{c_{k, n-v}} \leq \varepsilon,$$

míg

$$v \leq L;$$

tehát

$$\begin{aligned} & \left(\frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}} \right)^v - \frac{c_{k, n-v}}{c_{k, n}} < \left(\frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}} \right)^v - \left(\frac{c_{k, n-v}}{c_{k, n-v+1}} \right)^v = \\ & = \left(\frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}} - \frac{c_{k, n-v}}{c_{k, n-v+1}} \right) \left[\left(\frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}} \right)^{v-1} + \left(\frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}} \right)^{v-2} \frac{c_{k, n-v}}{c_{k, n-v+1}} + \dots + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{c_{k, n-v}}{c_{k, n-v+1}} \right)^{v-1} \right] < \varepsilon v \left(\frac{c_{k, n-1}}{c_{k, n}} \right)^{v-1}. \end{aligned}$$

4. §. Reális együtthatójú egyenletek pozitív gyökeire vonatkozó tételek.

Ha a (φ) sorozat a fősorolt feltételeknek eleget tesz, akkor fennállanak a következő tételek:

I. Ha az

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

reális együtthatójú hatványsor konvergenciasugara R -nél nagyobb, $f(0) \neq 0$, $f(R) \neq 0$ és $v(k)$ jelenti az

$$f(x) \varphi_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{k, n} x^n$$

hatványsor együlthatósorozatában föllépő jelváltások számát, M pedig az $f(x) = 0$ egyenlet R -nél kisebb pozitív gyökeinek számát, akkor

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v(k) = M.$$

A gyökök multiplicitásukkal számítandók. Minthogy $v(k)$ csak nem negatív, egész számú értékeket vehet fel, a tétel úgy is fogalmazható, hogy K -t alkalmasan választva minden $k \geq K$ -ra nézve $v(k) = M$.

II. Legyenek $f(x) \varphi_k(x)$ hatványsorában $\alpha_k, \beta_k, \dots, \nu_k$ rendre

azon tagok kilevői, a melyek után jelváltás lép föl; az I. tétel szerint ezen kitevők száma $k \leq K$ -ra nézve M -mel egyenlő.

Λ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_k, \alpha_k}{c_k, \alpha_{k+1}}, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_k, \beta_k}{c_k, \beta_{k+1}}, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_k, \nu_k}{c_k, \nu_{k+1}}$$

határértékek léteznek és megadják az $f(x) = 0$ egyenlet R -nél kisebb pozitív gyökeit, mindegyiket annyszor, a hányszoros gyöke az egyenletnek.

A kimondott tételek feltevései közül az $f(0) = a_0 \neq 0$ nem megszorítás, az $f(R) \neq 0$ pedig az alkalmazhatóság szempontjából nem lényeges megszorítás. Ha ugyanis $f(x)$ első el nem tűnő együtthatója a_s , akkor $x^{-s}f(x)$ az $x = 0$ helyen már nem tűnik el, az $x^{-s}f(x) = 0$ egyenlet pozitív gyökei pedig az $f(x) = 0$ egyenlet pozitív gyökeivel megegyeznek. Ha pedig $x = R$ az $f(x) = 0$ egyenlet t -szeres gyöke, akkor $f(x)$ hatványsora helyett $(R-x)^{-t}f(x)$ hatványsorát vizsgálom; az új hatványsor együttható sorozata az eredetietől különbözik, de a hozzátartozó egyenlet R -nél kisebb pozitív gyökei az az eredetivel megegyeznek.¹ Az így preparált hatványsorra a kimondott tételek már alkalmazhatók és megadják az $f(x) = 0$ egyenlet R -nél kisebb pozitív gyökeit.

A kimondott tételek más feltételek közt is érvényben maradnak.

III. Ha $f(x)$ hatványsorának konvergenciasugara $r \leq R$, de még feltesszük, hogy $f(x)$ hatványsora az $x = r$ helyen divergens és együtthatósorozatában csak véges számú jelváltás lép föl, az $f(x) \varphi_t(x)$ hatványsorokban föllépő jelváltásokból az előbbi tételekben részletezett módon meghatározható az $f(x) = 0$ egyenlet r -nél kisebb pozitív gyökeinek pontos száma és helye.

¹ Az $(R-x)^{-t}f(x)$ helyett általában $g(x)f(x)$ szorzat is megfelel a célnak, ha $g(x) = 0$ -nak a $(0, R)$ intervallumban nincs gyöke, $g(x)$ -nek $x = R$ pontosan t -szeres pólusa, $g(x)f(x)$ hatványsorának együtthatói reálisok és konvergenciasugara R -nél nagyobb. A $g(x)$ faktor még szabadban is választható, ha tekintetbe vesszük a következő III. tételt.

Ha $f(x)$ a III. tétel feltevéseinek sem tesz eleget, de megadható oly $g(x)$ függvény, melynek pozitív zérushelye nincs és olyan, hogy a $g(x)f(x)$ hatványsora a III. tétel feltevéseit már kielégíti, akkor a tétel a $g(x)f(x) = 0$ egyenletre alkalmazva megadja az $f(x) = 0$ egyenlet r -nél kisebb pozitív gyökeinek számát és helyét.

5. §. Előkészítő formulák.

Hogy ne legyen kénytelen később a bizonyítás menetét megszakítani, előre bocsátok néhány megbecsülést. Vizsgálni akarom az

$$f(x) \varphi_k(x) = C_{k,0} + C_{k,1}x + \dots + C_{k,n}x^n + \dots$$

együttható sorozatában föllépő jelváltásokal.

$$C_{k,n} = c_{k,n} \left\{ a_0 + a_1 \frac{c_{k,n-1}}{c_{k,n}} + \dots + a_{n-1} \frac{c_{k,1}}{c_{k,n}} + a_n \frac{c_{k,0}}{c_{k,n}} \right\}.$$

Mint hogy nem maguk az együtthatók, csak azok jelváltásai érdekelnek, $C_{k,n}$ -et megfoszthatom a pozitív $c_{k,n}$ faktortól és az együtthatók helyett az

$$A_{k,n} = a_0 + a_1 \frac{c_{k,n-1}}{c_{k,n}} + \dots + a_{n-1} \frac{c_{k,1}}{c_{k,n}} + a_n \frac{c_{k,0}}{c_{k,n}}$$

számok sorozatát vizsgálom:

$$A_{k,0}, A_{k,1}, \dots, A_{k,n}, \dots \quad (A)$$

A kifejezés mód könnyítése végett az (A) sorozat $A_{k,n}$ tagját a $\frac{c_{k,n-1}}{c_{k,n}}$ helyhez vagy ponthoz tartozónak és az (A) sorozat olyan részsorozatát, a mely az (α, β) intervallum pontjaihoz tartozó tagokból áll, az (A) sorozat (α, β) intervallumhoz tartozó részsorozatának nevezem. Az írás könnyítése végett pedig ezentúl ott, a hol értelemzavartól nem kell tartani, úgy $A_{k,n}$ mint $c_{k,n}$ mellől az első indexet elhagyom: ha tehát egy ket-tős indexű együttható mellől az első index hiányzik, első indexül mindig k -t kell odagondolni.

Ezek után megbecsülöm a $\frac{c_{n-1}}{c_n}$ helyen vett függvényérték és a $\frac{c_{n-1}}{c_n}$ helyhez tartozó A_n különbségét:

$$f\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right) - A_n = \sum_{v=2}^n a_v \left\{ \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^v - \frac{c_{n-v}}{c_n} \right\} + \sum_{v=n+1}^{\infty} a_v \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^v.$$

Jelentsen G egy az $f(x)$ konvergenciasugaránál kisebb pozitív számot és τ egy G -nél kisebb pozitív számot; τ és G fölött később fogok pontosan diszponálni; legyen

$$\tau \leq \frac{c_{n-1}}{c_n} \leq G.$$

Mint hogy $f(x)$ és

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n$$

a $0 \leq x \leq G$ értékekre egyenletesen konvergensekre, meghatározható a pozitív ε -hoz L úgy, hogy

$$\left| \sum_{v=L+1}^{\infty} a_v \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^v \right| \leq \sum_{v=L+1}^{\infty} |a_v| \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^v \leq \varepsilon.$$

A (φ) sorozatra vonatkozó feltételekből következzék, hogy L fixirozása után meghatározható K úgy, hogy $k \geq K$ -ra nézve

$$\frac{c_{L-1}}{c_L} \leq \tau,$$

tehát $L \leq n$. E szerint

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right) - A_n \right| &\leq \sum_{v=2}^L |a_v| \left\{ \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^v - \frac{c_{n-v}}{c_n} \right\} + \\ &+ \sum_{v=L+1}^n |a_v| \left\{ \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^v - \frac{c_{n-v}}{c_n} \right\} + \sum_{v=n+1}^{\infty} |a_v| \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^v \leq \\ &\leq \sum_{v=2}^L |a_v| \left\{ \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^v - \frac{c_{n-v}}{c_n} \right\} + \sum_{v=L+1}^{\infty} |a_v| \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^v, \end{aligned}$$

mivel

$$0 < \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^v - \frac{c_{n-v}}{c_n} < \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^v.$$

De láttuk, hogy K -t alkalmasan választva

$$0 < \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^v - \frac{c_{n-v}}{c_n} < \varepsilon v \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^{v-1},$$

ha

$$k \geq K, \quad \frac{c_{n-1}}{c_n} \leq G$$

és

$$v \leq L,$$

tehát

$$\left| f\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right) - A_n \right| \leq \varepsilon \sum_{v=2}^L v |a_v| \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^{v-1} + \varepsilon < \varepsilon F'\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right) + \varepsilon, \quad (f_0)$$

a hol

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n |a_n| x^{n-1}.$$

Az $f'(x) = 0$ egyenlet többszörös gyökei szükségessé teszik $f(x)$ deriváltjainak bevonását a számításba.

Jelöljük:

$$\frac{1}{p!} f^{(p)}(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{v+p}{p} a_{v+p} x^v,$$

$$\frac{1}{p!} F^{(p)}(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{v+p}{p} |a_{v+p}| x^v.$$

Másrésről:

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_n &= \left(\frac{c_n}{c_{n+1}} - \frac{c_{n-1}}{c_n}\right) a_1 + \left(\frac{c_{n-1}}{c_{n+1}} - \frac{c_{n-2}}{c_n}\right) a_2 + \dots + \\ &+ \left(\frac{c_1}{c_{n+1}} - \frac{c_0}{c_n}\right) a_n + \frac{c_0}{c_{n+1}} a_{n+1}; \\ \frac{A_{n+1} - A_n}{[n, n+1]} &= a_1 + \frac{[n-1, n+1]}{[n, n+1]} a_2 + \dots + \\ &+ \frac{[1, n+1]}{[n, n+1]} a_n + \frac{[0, n+1]}{[n, n+1]} a_{n+1}. \end{aligned}$$

Jelöljük

$$\frac{A_{n+1} - A_n}{[n, n+1]} = A'_n.$$

¹ A determinánsok mellől is el van hagyva a k index.

Általában jelöljük

$$\begin{aligned} A_n^{(p)} &= a_p + \frac{[n-1, n+1, \dots, n+p]}{[n, n+1, \dots, n+p]} a_{p+1} + \\ &+ \dots + \frac{[n-\nu, n+1, \dots, n+p]}{[n, n+1, \dots, n+p]} a_{p+\nu} + \\ &+ \dots + \frac{[0, n+1, \dots, n+p]}{[n, n+1, \dots, n+p]} a_{p+n}^1 \end{aligned}$$

Akkor azt állítom, hogy

$$A_{n+1}^{(p)} - A_n^{(p)} = c A_n^{(p+1)},$$

a hol c egy pozitív faktort jelent, ha k már oly nagyra van választva, hogy φ_k hatványsora legalább $(p+1)$ -szeresen pozitív, a mi a (φ) sorozatra vonatkozó 2. feltétel szerint egy alkalmasan választott K indextől kezdve mindig teljesül. Ezen identitás egyszerű számítással igazolható. Ugyanis

$$\begin{aligned} &[n, n+1, \dots, n+p] [n+1, n+2, \dots, n+p+1] \{A_{n+1}^{(p)} - A_n^{(p)}\} = \\ &= \sum_{\nu=1}^{n+1} a_{p+\nu} \{[n-\nu+1, n+2, \dots, n+p+1] [n, n+1, \dots, n+p] - \\ &\quad - [n-\nu, n+1, \dots, n+p] [n+1, n+2, \dots, n+p+1]\}; \end{aligned}$$

ezen formula jobboldalán $a_{p+\nu}$ együtthatója =

$$= [n+1, n+2, \dots, n+p] [n-\nu+1, n+1, \dots, n+p+1],$$

a mint az kiderül, ha a

$$\begin{array}{l} p+1 \text{ sor} \\ \left\{ \begin{array}{ccccccccc} c_{n-r+1} & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{n+p+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{n-r} & c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+p} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{n-r+1-p} & c_{n+1-p} & c_{n+2-p} & \dots & c_{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{n-r-p} & c_{n-p} & c_{n+1-p} & \dots & c_n & c_{n+1-p} & c_{n+2-p} & \dots & c_n \\ c_{n-r} & c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+p} & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{n+p} \\ p+1 \text{ sor} \\ c_{n-r-1} & c_{n-1} & c_n & \dots & c_{n+p-1} & c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{n-r+1-p} & c_{n+1-p} & c_{n+2-p} & \dots & c_{n+1} & c_{n+2-p} & c_{n+3-p} & \dots & c_{n+1} \end{array} \right. \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{p+2 \text{ oszlop}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{p \text{ oszlop}} \end{array}$$

¹ A'_n, A''_n is $A'_{k,n}, A''_{k,n}$ helyett áll.

determinánst a LAPLACE-szabály szerint először az első $p+1$ sor, azután az utolsó p oszlop determinánsai szerint fejtsük ki. Tehát

$$\frac{[n, n+1, \dots, n+p] [n+1, n+2, \dots, n+p+1]}{[n+1, n+2, \dots, n+p] [n, n+1, \dots, n+p+1]} \{A_{n+1}^{(p)} - A_n^{(p)}\} = \\ = \sum_{r=1}^{n+1} a_{p+r} \frac{[n+1-r, n+1, \dots, n+p+1]}{[n, n+1, \dots, n+p+1]} = A_n^{(p+1)},$$

qu. e. d.

Ezek után megbecsülöm a különbséget $\frac{1}{p!} f^{(p)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)$ értéke közt a $\frac{c_{n-1}}{c_n}$ helyen és $A_n^{(p)}$ közt:

$$\frac{1}{p!} f^{(p)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right) - A_n^{(p)} = \sum_{r=1}^n a_{p+r} \left\{ \binom{p+\nu}{p} \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^r - \right. \\ \left. - \frac{[n-\nu, n+1, \dots, n+p]}{[n, n+1, \dots, n+p]} \right\} + \sum_{r=n+1}^{\infty} \binom{p+\nu}{p} a_{p+r} \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^r.$$

Legyen τ és G -nek ugyanaz a jelentése, mint előbb; és legyen $\tau \leq \frac{c_{n-1}}{c_n} \leq G$, akkor a pozitív ε -hoz megadható L úgy, hogy

$$\sum_{r=L+1}^{\infty} \binom{p+\nu}{p} |a_{p+r}| \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^r \leq \varepsilon.$$

L fixirozása után megadható K úgy, hogy $\frac{c_{L-1}}{c_L} \leq \tau$, tehát $L \leq n$, ha $k \geq K$. Akkor

$$\left| \frac{1}{p!} f^{(p)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right) - A_n^{(p)} \right| \leq \sum_{r=1}^L + \sum_{r=L+1}^n |a_{p+r}| \binom{p+\nu}{p} \left\{ \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^r - \frac{c_{n-r}}{c_n} \right\} + \\ + \sum_{r=1}^L + \sum_{r=L+1}^n |a_{p+r}| \left| \binom{p+\nu}{p} \frac{c_{n-r}}{c_n} - \frac{[n-\nu, n+1, \dots, n+p]}{[n, n+1, \dots, n+p]} \right| + \\ + \sum_{r=n+1}^{\infty} \binom{p+\nu}{p} |a_{p+r}| \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^r = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5.$$

Tegyen K még azon követeléseknek is elegend, hogy $k \geq K$ -ra nézve egyrészt

$$\frac{c_{n-1}}{c_n} - \frac{c_{n-v}}{c_{n-v+1}} \leq \varepsilon,$$

ha

$$v \leq L,$$

másképpen minden $v \leq n \leq L$ és $p \leq P$ indexre nézve

$$\begin{aligned} \left| \binom{p+v}{p} \frac{c_{n-v}}{c_n} - \frac{[n-v, n+1, \dots, n+p]}{[n, n+1, \dots, n+p]} \right| &\leq \\ &\leq \varepsilon \binom{p+v}{p} \frac{c_{n-v}}{c_n} < \varepsilon \binom{p+v}{p} \left(\frac{c_{n-1}}{c_n} \right)^v, \end{aligned}$$

ha $\frac{c_{n-1}}{c_n} \leq G$, a mi a (φ) sorozatra vonatkozó 5. feltétel szerint mindig lehetséges. Akkor, mint láttuk,

$$0 < \left(\frac{c_{n-1}}{c_n} \right)^v - \frac{c_{n-v}}{c_n} < \varepsilon v \left(\frac{c_{n-1}}{c_n} \right)^{v-1},$$

tehát

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\leq \varepsilon (p+1) \sum_{v=1}^L |a_{p+v}| \binom{p+v}{p+1} \left(\frac{c_{n-1}}{c_n} \right)^{v-1} < \\ &\leq \varepsilon (p+1) \frac{1}{(p+1)!} L^{(p+1)} \left(\frac{c_{n-1}}{c_n} \right). \\ \sigma_3 &\leq \varepsilon \sum_{v=1}^L |a_{p+v}| \binom{p+v}{p} \left(\frac{c_{n-1}}{c_n} \right)^v < \varepsilon \frac{1}{p!} L^{(p)} \left(\frac{c_{n-1}}{c_n} \right). \end{aligned}$$

Végül a (φ) sorozatra vonatkozó 4. feltétel szerint K -t alkalmasan megválasztva $k \geq K$ -ra nézve a

$$\begin{aligned} \left| \binom{p+v}{p} \frac{c_{n-v}}{c_n} - \frac{[n-v, n+1, \dots, n+p]}{[n, n+1, \dots, n+p]} \right| &\leq \\ &\leq (1+A) \binom{p+v}{p} \frac{c_{n-v}}{c_n} < (1+A) \binom{p+v}{p} \left(\frac{c_{n-1}}{c_n} \right)^v \end{aligned}$$

egyenlőtlenség is teljesül, tehát

$$\begin{aligned}
\sigma_4 &\leq (1+A) \sum_{v=L+1}^n |a_{p+v}| \left(\frac{p+v}{p}\right) \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^v \\
\sigma_2 + \sigma_4 + \sigma_6 &< (2+A) \sum_{v=L+1}^n |a_{p+v}| \left(\frac{p+v}{p}\right) \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^v + \\
&\quad + \sum_{v=n+1}^{\infty} |a_{p+v}| \left(\frac{p+v}{p}\right) \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^v < \\
&< (2+A) \sum_{v=L+1}^{\infty} |a_{p+v}| \left(\frac{p+v}{p}\right) \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^v \leq (2+A) \varepsilon;
\end{aligned}$$

e szerint

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{p!} f^{(p)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right) - A_n^{(p)} \right| < \\
&< \frac{\varepsilon}{p!} \left\{ f^{(p+1)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right) + f^{(p)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right) \right\} + (2+A) \varepsilon.
\end{aligned} \tag{f_p}$$

Ha tehát F_0 jelenti az $F(x)$ felső határát, $F^{(p)}$ pedig az $F^{(p)}(x)$ ét a $(0, G)$ intervallumban, akkor a levezetett (f_0) és (f_p) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$\left| f\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right) - A_n \right| < \varepsilon (F_1 + 1), \tag{f_0^*}$$

$$\left| \frac{1}{p!} f^{(p)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right) - A_n^{(p)} \right| < \frac{\varepsilon}{p!} (F_p + F_{p+1}) + (2+A) \varepsilon, \tag{f_p^*}$$

ha $\frac{c_{n-1}}{c_n}$ a (τ, G) intervallum pontja és $k \geq K$, a hol K a fenti kikötéseknek megfelel.

6. §. A kimondott tételek bizonyítása.

I. tétel. Feltétel szerint $f(x)$ konvergenciasugara nagyobb a (φ) sorozat tagjainak közös konvergenciasugaránál, R -nél. R tehát szükségképen véges szám és mivel $f(x)$ konvergenciasugaránál kisebb, az $f(x) = 0$ egyenletnek csak véges számú, R -nél kisebb pozitív gyöke lehet. Legyenek ezek nagyság sze-

rint rendezve $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ és multiplicitásuk legyen rendre $m_1, m_2, \dots, m_p$, a hol $m_1 + m_2 + \dots + m_p = M$ az egyenlet R -nél kisebb pozitív gyökeinek száma. A levezetett egyenlőtlenségek felhasználásával a kimondott tételt úgy bizonyítom be, hogy mindegyik gyököt egy 4δ szélességű környezettel véve körül kimutatom, hogy k -t elég nagyra választva az (A) sorozatnak valamelyik gyök környezetéhez tartozó részsorozata pontosan annyi jelváltást tartalmaz, mint a gyök multiplicitása, több jelváltás pedig a sorozatban nem lép föl. Ezen környezetek kijelölése előtt diszponálok τ és G fölött. Tegyen ϱ a következő egyenlőtlenségnek eleget:

$$\frac{|a_0|}{|a_1|\varrho + |a_2|\varrho^2 + \dots} \geq 1.$$

A változónak minden ϱ -nál kisebb pozitív értékére nézve

$$|f(x)| \geq |a_0| - \{|a_1|x + |a_2|x^2 + \dots\} > |a_0| - \{|a_1|\varrho + |a_2|\varrho^2 + \dots\} > 0,$$

tehát az $f(x) = 0$ egyenletnek nincs ϱ -nál kisebb pozitív gyöke. Legyen $\tau = \varrho$, ha ϱ kisebb $f(x) = 0$ legkisebb pozitív gyökénél ξ_1 -nél, és legyen $\tau < \varrho$, ha $\varrho = \xi_1$ volna. Legyen továbbá $i = R$.

Akkor δ -t úgy határozom meg, hogy

- a) $\delta < \tau < \xi_1 - \delta$;
- b) $\xi_i + 2\delta < \xi_{i+1} - 2\delta$, $i = 1, 2, \dots, p-1$;
- c) $\xi_p + 2\delta < R$.

Ezek után a $(0, R)$ intervallumot a következő, részint egymásba átnyúló részintervallumokra osztom fel:

$$(\langle 0, \tau \rangle, \langle \tau, \xi_1 - \delta \rangle, \langle \xi_1 - 2\delta, \xi_1 + 2\delta \rangle, \langle \xi_1 + \delta, \xi_2 - \delta \rangle, \dots, \langle \xi_i - 2\delta, \xi_i + 2\delta \rangle, \langle \xi_i + \delta, \xi_{i+1} - \delta \rangle, \dots, \langle \xi_p - 2\delta, \xi_p + 2\delta \rangle, \langle \xi_p + \delta, R \rangle).$$

A gyököket körülvevő intervallumokat elsőfajúknak, a többi másodfájúnak nevezem.

Jelentse f_0 az $|f(x)|$ alsó határát az összes másodfajú részintervallumban, f_i pedig az $\frac{1}{m_i!} |f^{(m_i)}(x)|$ alsó határát a $(\xi_i - 2\delta, \xi_i + 2\delta)$ intervallumban; legyen f a legkisebb az $f_0, f_1, \dots, f_p$

számok között. Legyen másrésről F a legnagyobb az $F_0, F_1, \dots, F_{M+1}$ számok közt, a hol F_i jelenti az $F^{(i)}(x)$ felső határát a $(0, G)$ intervallumban.

Válaszszuk K -t úgy, hogy $k \geq K$ -ra nézve

α) φ_k hatványsora legalább $(M+1)$ -szeresen pozitív legyen;
 β) a $(0, R)$ intervallum minden δ kiterjedésű részéhez az (A) sorozatnak legalább egy és minden 4δ kiterjedésű részéhez legalább $M+1$ tagja tartozzék;

γ) legyen a pozitív ε úgy választva, hogy $2\varepsilon(F+1) < f'$ legyen és teljesüljenek az így megválasztott ε -ra nézve az előbbi fejezetben levezetett (f_0^*) és (f_p^*) egyenlőtlenségek, ha $k \geq K, p \leq M$ és $\frac{c_{n-1}}{c_n}$ a (τ, R) intervallum pontja.

Ezek után a bizonyítás 3 lépésben történik; kimutatom, hogy ha k nem kisebb az így megválasztott K -nál, akkor

1. a másodfajú intervallumokhoz tartozó részsorozatok nem tartalmaznak jelváltozást;

2. egy elsőfajú részintervallumhoz tartozó részsorozat ugyan olyan előjelű taggal végződik, mint a minővel a következő másodfajú kezdődik, ez ismét olyan előjelű taggal végződik, a minővel a következő elsőfajú kezdődik és így tovább; az (A) sorozatban fellépő összes jelváltások tehát azok, a melyek az elsőfajú részintervallumokhoz tartozó részsorozatokban lépnek föl;

3. az (A) sorozat egy oly részsorozata, a mely egy elsőfajú részintervallumhoz tartozik, pontosan annyi jelváltást tartalmaz, mint az intervallumban lévő gyök multiplicitása, tehát

$$v(k) = m_1 + m_2 + \dots + m_p = M.$$

1. A másodfajú intervallumok közül a $(0, \tau)$ -hoz tartozó részsorozatban (a mely a K -ra vonatkozó β) feltétel szerint egyetlenül tartalmaz tagokat) nincs jelváltás; ha ugyanis $0 \leq \frac{c_{n-1}}{c_n} \leq \tau$, akkor

$$\begin{aligned}
 |a_0 - A_n| &= \left| \frac{c_{n-1}}{c_n} a_1 + \dots + \frac{c_0}{c_n} a_n \right| \leq \frac{c_{n-1}}{c_n} |a_1| + \dots + \frac{c_0}{c_n} |a_n| < \\
 &< |a_1| \frac{c_{n-1}}{c_n} + |a_2| \left(\frac{c_{n-1}}{c_n} \right)^2 + \dots + |a_n| \left(\frac{c_{n-1}}{c_n} \right)^n < \\
 &< |a_1| \tau + |a_2| \tau^2 + \dots + |a_n| \tau^n \leq |a_0|,
 \end{aligned}$$

tehát A_n előjele megegyezik $f(0) = a_0$ előjelével. Ha pedig A_n a többi másodfajú intervallum valamelyikéhez tartozik, akkor a γ -) feltétel szerint teljesülő (f_0^*) egyenlőtlenségből:

$$\left| f\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right) - A_n \right| < \varepsilon (F_1 + 1) < 2\varepsilon (F + 1) < f \leq f\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)$$

következik, hogy az (A) sorozatnak ezen másodfajú intervallumhoz tartozó tagjai előjelre megegyeznek $f(x)$ -nek ezen intervallumhoz tartozó értékeivel. Másodfajú intervallumhoz tartozó részsorozat tehát nem tartalmazhat jelváltást.

2. Bármelyik két szomszédos első- és másodfajú intervallumnak van egy δ szélességű közös része, a melyhez a β) feltétel szerint (A) -nak legalább egy tagja tartozik. A $(\tau, \xi_1 - \delta)$ -hoz tartozó részsorozat utolsó tagja tehát egyszersmind tagja a $(\xi_1 - 2\delta, \xi_1 + 2\delta)$ -hoz tartozó részsorozatnak is, ennek utolsó tagja már a $(\xi_1 + \delta, \xi_2 - \delta)$ -hoz is tartozik és így tovább; mivel tehát 2 szomszédos különfajta részsorozatnak mindig van legalább egy közös tagja, két ily részsorozat között jelváltás nem léphet föl.

3. Az eddigiek szerint az (A) sorozat két szomszédos tagja között csak akkor léphet föl jelváltás, ha azok ugyanazon elsőfajú részintervallumhoz tartoznak. Legyen a $(\xi_i - 2\delta, \xi_i + 2\delta)$ -hoz tartozó részsorozat:

$$A_n, \quad A_{n+1}, \dots, \quad A_{n+r}$$

és fordítsuk figyelmünket az

$$A'_n, \quad A'_{n+1}, \dots, \quad A'_{n+r-1};$$

$$A''_n, \quad A''_{n+1}, \dots, \quad A''_{n+r-2};$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$A^{(m_i)}_n, \quad A^{(m_i)}_{n+1}, \dots, \quad A^{(m_i)}_{n+r-m_i}$$

sorozatokra, a melyek közül az utolsó is okvetlenül tartalmaz tagokat, mert a β) feltétel szerint a 4δ kiterjedésű $(\xi_i - 2\delta, \xi_i + 2\delta)$ intervallumhoz az (A) sorozatból legalább $M + 1$ tag tartozik ($M \geq m_i$). A felírt sorozatok minden tagja a $(\xi_i - 2\delta, \xi_i + 2\delta)$ intervallum pontjaihoz tartozik és az utolsónak minden tagja egyenlő előjelű; ugyanis a γ) feltétel szerint teljessül az $(\frac{c_n}{p})$ egyenlőtlenség $p = m_i \leq M$ -re nézve:

$$\left| \frac{1}{m_i!} f^{(m_i)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right) - A_n^{(m_i)} \right| < \frac{\varepsilon}{m_i!} (F_{m_i} + F_{m_i+1}) + 2\varepsilon < \\ < 2\varepsilon (F+1) < f \leq f_i \leq \frac{1}{m_i!} f^{(m_i)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right),$$

tehát az utolsó sor tagjai előjelre nézve megegyeznek $f^{(m_i)}(x)$ előjelével a $(\xi_i - 2\delta, \xi_i + \delta)$ intervallumban, vagyis mind egyenlő előjelűek.

De akkor FEKETE egy lemmájából következik, hogy az $A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+r}$ sorozat legfeljebb m_i jelváltást tartalmazhat. Ugyanis a felírt sorozatok mindegyike az előbbiből úgy keletkezik, mint az $a_1 - a_0, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots$ sorozat az $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ sorozatból, ha bizonyos faktorokat, a melyek a) szerint pozitívak, elhanyagolunk (a mi a jelváltásokat nem befolyásolja). Fennáll pedig a következő lemma:¹

Ha az

$$a_1 - a_0, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots \quad (d)$$

reális számsorozatban a jelváltások száma w , akkor az

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \quad (a)$$

sorozatban nem lehet nagyobb, mint $w + 1$.

Ha ugyanis a (d) sorozatban nincs jelváltás, akkor az (a) sorozat monoton növekvő vagy monoton fogyó, tehát legfeljebb 1 jelváltást tartalmazhat. A lemma tehát helyes lévén $w = 0$ esetében, teljes indukciót alkalmazok. Ha a (d) sorozat $w + 1$

¹ FEKETE: Rendiconti I. c.

jelváltást tartalmaz és az első az $\alpha_m - \alpha_{m-1}$ tag után lép föl, akkor az

$$\alpha_{m+1} - \alpha_m, \quad \alpha_{m+2} - \alpha_{m+1}, \dots$$

sorozatban csak w jelváltás lévén, az

$$\alpha_m, \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots$$

sorozatban a jelváltások száma legfeljebb $w+1$, mert a lemmánál w jelváltás esztében helyesnek tételezem fel. Az

$$\alpha_1 - \alpha_0, \dots, \alpha_m - \alpha_{m-1}$$

sorozatban azonban nincs jelváltás, tehát az

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$$

sorozat legfeljebb 1 jelváltást mutat fel, és az (α) sorozat legfeljebb $(w+2)$ -t, qu. e, d.

Ezen lemmának ismételt alkalmazásával nyerjük, hogy a felfirt sorozatok közül az m_i -ediket megelőző sorozatban legfeljebb 1, az azt megelőzőben legfeljebb 2, és így tovább, végül az

$$A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+r}$$

sorozatban legfeljebb m_i jelváltás lehet.

LAGUERREnek a bevezetésben V. alatt idézett tétele azonban azt mondja, hogy az (A) sorozatban fellépő jelváltások száma nem lehet kisebb, mint az R -nél kisebb pozitív gyökök száma M . Az összes jelváltások pedig, a mint láttuk, az elsőfajú intervallumokhoz tartozó részsorozatokban lépnek föl; ha tehát az egyikben, pl. a $(\xi_i - 2\delta, \xi_i + 2\delta)$ -hoz tartozóban a jelváltások száma m_i -nél kevesebb volna, akkor egy másikban kellene meghaladnia a megfelelő részintervallumban lévő gyök multipllicitását, a mi lehetetlen. Tehát mindegyik elsőfajú intervallumhoz tartozó részsorozat pontosan annyi jelváltást tartalmaz, mint az illető intervallumban levő gyök multipllicitása.

II. tétel. Bebizonyítottam az eddigiekben, hogy ha az $f(x)$ reális együtthatójú hatványsor konvergenciasugara nagyobb

R -nél, $f(0) \neq 0$ és $f(R) \neq 0$, akkor megadható a K pozitív egész szám úgy, hogy $k \geq K$ -ra nézve a $\varphi_k(x)f(x)$ hatványsorában a jelváltások száma $\nu(k)$ az $f(x)=0$ egyenlet R -nél kisebb pozitív gyökeinek számával, M -mel egyenlő. A bizonyításból még több is kiderült. Ha ugyanis $\alpha_k, \beta_k, \dots, \nu_k$ jelentik rendre a $\varphi_k(x)f(x)$ hatványsorában azon tagok kitevőit, a melyek után jelváltás lép föl, akkor ezeknek száma $k \geq K$ -ra nézve M és a pozitív δ -t tetszőleges kicsinyre választva a

$$\frac{c_k, \alpha_{k-1}}{c_k, \alpha_k}, \frac{c_k, \beta_{k-1}}{c_k, \beta_k}, \dots, \frac{c_k, \nu_{k-1}}{c_k, \nu_k}$$

hányadosok közül az első m_1 a $(\xi_1 - 2\delta, \xi_1 + 2\delta)$, a következő m_2 a $(\xi_2 - 2\delta, \xi_2 + 2\delta)$, és így tovább, az utolsó m_p a $(\xi_p - 2\delta, \xi_p + 2\delta)$ intervallumba esik, ha $k \geq K(\delta) \geq K$. Nyilvánvaló, hogy $K(\delta)$ értéke a δ reciprok értékével együtt monoton nő. Válasszunk tehát egy $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ monoton 0-hoz konvergáló pozitív számsorozatot és határozzuk meg a hozzá tartozó $K(\delta_1), K(\delta_2), K(\delta_3), \dots$ monoton növekvő sorozatot. Ha $k \geq K(\delta_\omega)$, akkor a felírt hányadosok sorozatában az első m_1 a ξ_1 gyöktől, a következő m_2 a ξ_2 gyöktől és így tovább, az utolsó m_p a ξ_p gyöktől $2\delta_\omega$ -nál kevesebbel különbözik. Kimondhatjuk tehát hogy a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_k, \alpha_{k-1}}{c_k, \alpha_k}, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_k, \beta_{k-1}}{c_k, \beta_k}, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_k, \nu_{k-1}}{c_k, \nu_k}$$

határértékek léteznek és rendre megadják az $f(x)=0$ egyenlet 0 és R közé eső gyökeit, mindegyiket annyszor, a hányszoros gyöke az egyenletnek.

III. tétel. Föltevésszerint $f(x)$ hatványsorának konvergenciasugara $r \leq R$ (r véges vagy végtelen) és $f(x)$ az $x=r$ helyen divergens oly módon, hogy együtthatósorozatában csak véges számú jelváltás lép föl. Legyenek az együtthatók a_N -tól kezdve mind egyenlő előjelűek; feltehetem, hogy pozitívok, mert ellenkező esetben $f(x)=0$ helyett a $-f(x)=0$ egyenletet vizsgál-

nám, a mely két egyenlet gyökei megegyeznek. LAGUERREnek a bevezetésben V. alatt idézett tételéből következik, hogy akkor az $f(x) = 0$ egyenlet r -nél kisebb pozitív gyökeinek száma nem haladhatja meg N -et, tehát véges. Nem megszorítás, ha felteszem, hogy $f(0) = a_0 \neq 0$; hogy pedig $x = r$ nem gyöke az egyenletnek, az a feltevésekből következik. Legyenek ismét az egyenlet pozitív gyökei nagyság szerint rendezve $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ és multiplicitásuk legyen rendre $m_1, m_2, \dots, m_p$, a hol

$$m_1 + m_2 + \dots + m_p = M \leq N.$$

Másrészt az is következik a feltevésekből, hogy $f(x)$ és összes deriváltja minden pozitív határon túl nő, ha x az r -hez közeledik; ugyanis $f(x)$ egy $(N-1)$ -edfokú polinómnak és egy hatványsornak összege, a mely utóbbinak minden együttthatója pozitív és az $x = r$ helyen divergens. Meghatározható tehát $g < r$ úgy, hogy $f(x)$ és első N deriváltja egy közös pozitív P korlát fölött maradjanak, ha $x \geq g$, míg a következő deriváltak a változó minden pozitív értékénél pozitívak.

A bizonyításnál külön kell választani azt a két esetet, ha r véges és ha r végtelen. Legyen ρ és τ jelentése ugyanaz, mint az I. tétel bizonyításánál volt, G -t azonban a következő módon állapítom meg. Ha r véges szám, akkor legyen $G = \frac{g+r}{2}$; ha r végtelen nagy, akkor legyen $G > 1$ és legyen elegendő a következő egyenlőtlenségnek:

$$|a_0| + \dots + |a_{N-1}| < G \cdot a_N.$$

Legyen δ úgy meghatározva, hogy

- a) $\delta < \tau < \xi_1 - \delta$;
- b) $\xi_i + 2\delta < \xi_{i+1} - 2\delta$, $i = 1, 2, \dots, p-1$;
- c) $\xi_p + 2\delta < G$;
- d) $\delta < G - g = \frac{r-g}{2}$, ha r véges szám.

A $(0, r)$ intervallum felosztása ugyanaz, mint az I. tétel bizo-

nyitásánál a $(0, R)$ -é volt, csak az utolsó részintervallumot szakítom két részre:

$$(0, \tau), (\tau, \xi_1 - \delta), \dots, (\xi_p - 2\delta, \xi_p + 2\delta), (\xi_p + \delta, G), (G, r)$$

Jelentse megint f_0 az $|f(x)|$ alsó határát az összes másodfajú részintervallumban, f_i pedig az $\frac{1}{m_i!} |f^{(m_i)}(x)|$ alsó határát a $(\xi_i - 2\delta, \xi_i + 2\delta)$ intervallumban; legyen f a legkisebb az $f_0, f_1, \dots, f_p$ és $\frac{P}{N!}$ számok között.

Legyen másrésről F a legnagyobb az $F_0, F_1, \dots, F_{N+1}$ számok közt, a hol F_i jelenti az $F^{(i)}(x)$ felső határát a $(0, G)$ intervallumban.

Válasszuk K -t úgy, hogy $k \geq K$ -ra nézve

$\alpha)$ φ_k hatványsora legalább $(N+1)$ -szeresen pozitív legyen;

$\beta)$ a $(0, G)$ intervallum minden δ kiterjedésű részéhez legalább 1, minden 4δ kiterjedésű részéhez legalább $M+1$ tag tartozzék az (A) sorozatból;

$\gamma)$ legyen a pozitív ε úgy választva, hogy $2\varepsilon (F+1) < f$ legyen és teljesüljenek az így megválasztott ε -ra nézve az előbbi fejezetben levezetett (f_0^*) és (f_p^*) egyenlőtlenségek, ha

$k \geq K$, $p \leq N$ és $\frac{c_{n-1}}{c_n}$ a (τ, G) intervallum pontja.

Ezek után bebizonyítom, hogy a (G, r) intervallumhoz tartozó részsorozat nem tartalmaz jelváltást.

Legyen először r véges szám és a (G, r) intervallumhoz tartozó részsorozat legyen

$$A_{n+1}, A_{n+2}, \dots$$

Fordítsuk figyelmünket az

$$A'_{n+1}, A'_{n+2}, \dots$$

$$A''_{n+1}, A''_{n+2}, \dots$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$A_{n+1}^{(N)}, A_{n+2}^{(N)}, \dots$$

sorozatokra. Ha A_{n+1} az (A) sorozat első tagja, a mely már a

(G, r) intervallumhoz tartozik, akkor $\frac{c_n}{c_{n+1}} \geq G$ és a $\beta)$ feltétel szerint $g \leq \frac{c_{n-1}}{c_n} \leq G$, mivel $\delta < G - g$.

A felírt sorozatok első tagja elé képzeljük rendre az

$$A_n, A'_n, A''_n, \dots, A_n^{(N)}$$

számokat írva, a melyek mind pozitívok. Ugyanis a $\gamma)$ feltétel szerint teljesül

$$\left| \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right) - A_n^{(\nu)} \right| < 2\varepsilon (r+1) < f \leq \frac{F}{N!} \leq \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right),$$

ha $\nu \leq N$ és $g \leq \frac{c_{n-1}}{c_n} \leq G$; ezen egyenlőtlenségből pedig következik, hogy $A_n^{(\nu)}$ előjelre megegyezik $f^{(\nu)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)$ -nel, a mely pozitív, mivel $g \leq \frac{c_{n-1}}{c_n}$. A felírt sorozatok közül az utolsónak azonban minden tagja pozitív, mert ezek $f(x)$ hatványsorának csak a pozitív együtthatóiból és pozitív faktorokból összeadás és szorzás által keletkeznek. Minthogy továbbá φ_k hatványsora $a)$ szerint legalább $(N+1)$ -szeresen pozitív, az

$$A_{n+1}^{(r-1)} - A_n^{(r-1)} = c \cdot A_n^{(r)} \quad (r=1, 2, \dots, N)$$

identitásban a c faktor pozitív. Ezen formula alkalmazásával kiderül, hogy az utolsó sorozat valamennyi tagjának és az $A_n^{(N)}, A_n^{(N-1)}$ számoknak pozitivitásából következik az utolsó-előtti sorozat valamennyi tagjának pozitivitása; ebből és a $A_n^{(N-1)}, A_n^{(N-2)}$ pozitivitásából az azt megelőző sorozat valamennyi tagjának pozitivitása és így tovább, végül az

$$A_{n+1}, A_{n+2}, \dots$$

tagok pozitivitása, qu. e. d.

Ha r végtelen nagy, akkor a (G, r) intervallumhoz tartozó

$$A_{n+1}, A_{n+2}, \dots$$

tagok pozitivitása az

$$A_\nu = \frac{c_{\nu-N}}{c_\nu} \left\{ a_0 \frac{c_\nu}{c_{\nu-N}} + a_1 \frac{c_{\nu-1}}{c_{\nu-N}} + \dots + a_{N-1} \frac{c_{\nu-N+1}}{c_{\nu-N}} + a_N + \right. \\ \left. + a_{N+1} \frac{c_{\nu-N-1}}{c_{\nu-N}} + \dots + a_\nu \frac{c_0}{c_{\nu-N}} \right\}$$

formulából direkte következik. A kapcsos zárójelben az a_N -et követő összes tag ugyanis pozitív, míg

$$a_0 \frac{c_\nu}{c_{\nu-N}} + a_1 \frac{c_{\nu-1}}{c_{\nu-N}} + \dots + a_{N-1} \frac{c_{\nu-N+1}}{c_{\nu-N}} + a_N \geq a_N - \\ - \left\{ |a_0| \frac{c_\nu}{c_{\nu-N}} + \dots + |a_{N-1}| \frac{c_{\nu-N+1}}{c_{\nu-N}} \right\} > a_N - \\ - \frac{1}{G} \left\{ |a_0| + \dots + |a_{N-1}| \right\} > 0,$$

tehát $A_\nu > 0$, ha $\frac{c_{\nu-1}}{c_\nu} \geq G$, vagyis ha $\nu = n+1$, $n+2, \dots$

Ennek a pontnak elintézése után a III. tétel be is van bizonyítva. Tényleg nem kell egyebet tenni, mint szóról-szóra ismételni, a mit az I. és II. tétel bizonyításánál a $(0, G)$ intervallum másodfajú és elsőfajú részintervallumairól és azután az egyenlet gyökeinek megközelítéséről mondtam, minthogy eltérést a bizonyításban az (A) sorozatnak csak a (G, r) intervallumhoz tartozó részsorozata okoz.

7. §. Az ismeretes specziális esetek.

A kimutatott tételek specziális generatrixsorozatokra ismeretesek voltak. LAGUERRE és FEKETE mutatta ki őket, ha

$$\varphi_k(x) = e^{kx}, \quad R = +\infty;$$

FEKETE és PÓLYA, ha

$$\varphi_k(x) = (1-x)^{-k}, \quad R = 1;$$

szerző, ha

$$\varphi_k(x) = (1+x)^k, \quad R = +\infty.$$

Hogy ezen tételek a most bebizonyított tételek alá tartoznak, belátható abból, hogy a felírt függvények sorai a 3. §-ban

felállított 5 feltételt kielégítik. Erről egyszerű számítással meggyőződhetünk.

Először e^{kx} hatványsorát veszem:

$$e^{kx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Az első feltétel teljesül, mert minden együttható zérustól különböző, pozitív szám. A harmadik feltétel teljesülése is könnyen belátható. A

$$\frac{c_{n-1}}{c_n} = \frac{n}{k}$$

hányados az $(a, a+\varepsilon)$ intervallumba esik, ha

$$k \geq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{és} \quad n = [k(a+\varepsilon)],$$

a hol $[x]$ jelenti a legnagyobb egész számot, a mely x -nél nem nagyobb. A többi feltétel teljesüléséről meggyőződhetünk, ha kiszámítjuk a következő determinánst:

$$\begin{aligned} [n, n+1, \dots, n+p] &= \begin{vmatrix} \frac{k^n}{n!} & \frac{k^{n+1}}{n+1!} & \dots & \frac{k^{n+p}}{n+p!} \\ \frac{k^{n-1}}{n-1!} & \frac{k^n}{n!} & \dots & \frac{k^{n+p-1}}{n+p-1!} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{k^{n-p}}{n-p!} & \frac{k^{n+1-p}}{n+1-p!} & \dots & \frac{k^n}{n!} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{k^{n-p} k^{n+1-p} \dots k^n}{n! n+1! \dots n+p!} 1! 2! \dots p! k^{1+2+\dots+p} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{n}{1} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+p}{1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \binom{n}{p} & \binom{n+1}{p} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1! 2! \dots p! k^{n(p+1)}}{n! n+1! \dots n+p!}, \end{aligned}$$

tehát e^{kx} hatványsora végtelenszeresen pozitív (2. feltétel).

Továbbá

$$\begin{aligned}
 & \frac{[n-\nu, n+1, \dots, n+p]}{[n, n+1, \dots, n+p]} = \\
 & + \left| \begin{array}{ccc|ccc} \frac{k^{n-\nu}}{n-\nu!} & \frac{k^{n+1}}{n+1!} & \dots & \frac{k^{n+p}}{n+p!} & \cdot & \frac{k^n}{n!} \dots \frac{k^{n+p}}{n+p!} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{k^{n-\nu-p}}{n-\nu-p!} & \frac{k^{n+1-p}}{n+1-p!} & & \frac{k^n}{n!} & & \frac{k^{n-p}}{n-p!} \dots \frac{k^n}{n!} \end{array} \right| = \\
 & = \frac{n!}{n-\nu! k^\nu} \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \dots 1 \\ \binom{n-\nu}{1} & \binom{n+1}{1} \dots \binom{n+p}{1} & & \binom{n}{1} & \binom{n+1}{1} \dots \binom{n+p}{1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{n-\nu}{p} & \binom{n+1}{p} \dots \binom{n+p}{p} & & \binom{n}{p} & \binom{n+1}{p} \dots \binom{n+p}{p} \end{array} \right| = \\
 & = \frac{c_{n-\nu}}{c_n} \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \dots 1 \\ \binom{n-\nu}{1} & \binom{n+1}{1} \dots \binom{n+p}{1} & & \binom{n}{1} & \binom{n+1}{1} \dots \binom{n+p}{1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{n-\nu}{p} & \binom{n+1}{p} \dots \binom{n+p}{p} & & \binom{n}{p} & \binom{n+1}{p} \dots \binom{n+p}{p} \end{array} \right| = \frac{c_{n-\nu}}{c_n} D_{\nu, p}.
 \end{aligned}$$

De

$$D_{\nu, p} = \binom{p+\nu}{n}.$$

A felírt identitás nyilván helyes minden p -re, ha $\nu = 0$ és és minden ν -re, ha $p = 1$, a mi egyszerű számítással rögtön adódik; könnyű továbbá kimutatni a

$$D_{\nu, p+1} - D_{\nu-1, p+1} = D_{\nu, p}$$

formulát, a melynek ismételt alkalmazásával nyerjük a felírt identitást minden ν és p -re. Ebből a formulából kapjuk, hogy

$$\binom{p+\nu}{p} \frac{c_{n-\nu}}{c_n} - \frac{[n-\nu, n+1, \dots, n+p]}{[n, n+1, \dots, n+p]} \equiv 0,$$

tehát e^{kx} hatványsorára k minden értéke mellett a 4. és 5. feltevések is bőven teljesülnek.

Másodszor az $(1+x)^k$ polinómot veszem.

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Az első feltétel teljesül: az első $k+1$ együttható pozitív, a többi zérus. A

$$\frac{c_{n-1}}{c_n} = \frac{n}{k-n+1}$$

hányados az $(a, a+\varepsilon)$ intervallumba esik ($a \geq 0$, $a+\varepsilon \leq G$), ha

$$k+1 \geq \frac{1+G}{\varepsilon}, \quad n = \left[\frac{a}{1+a} (k+1) \right] + 1,$$

tehát a harmadik feltétel is teljesül. Továbbá

$$\begin{aligned} [n, n+1, \dots, n+p] &= \begin{vmatrix} \binom{k}{n} & \binom{k}{n+1} & \dots & \binom{k}{n+p} \\ \binom{k}{n-1} & \binom{k}{n} & \dots & \binom{k}{n+p-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \binom{k}{n-p} & \binom{k}{n+1-p} & \dots & \binom{k}{n} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{k!^{p+1}}{n! \, n+1! \dots n+p! \, k-n+p! \, k-n+p-1! \dots k-n!} \Delta, \end{aligned}$$

a hol

$$\Delta = \begin{vmatrix} (k-n+1)(k-n+2)\dots(k-n+p)\dots(k-n-p+1)\dots(k-n) \\ n(k-n+2)\dots(k-n+p) & \dots & (n+p)(k-n-p+2)\dots(k-n) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ n(n-1)\dots(n-p+1) & \dots & (n+p)(n+p-1)\dots(n+1) \end{vmatrix}$$

Δ első sorához hozzáadva a másodikat, ahhoz a harmadikat és így tovább, végül az utolsóelőttihez az utolsót, azután a sorokból a közös faktorokat kiemelve a determináns elemei fokozatosan megfoszthatók a k -t tartalmazó faktoroktól és nyerjük, hogy

$$[n, n+1, \dots, n+p] = \frac{k!^{p+1} (k+1)^p (k+2)^{p-1} \dots (k+p)}{n! n+1! \dots n+p! k-n+p! k-n+p-1! \dots k-n!} D,$$

a hol

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ n & \dots & n+p \\ n(n-1) & \dots & (n+p)(n+p-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n(n-1) \dots (n-p+1) & \dots & (n+p)(n+p-1) \dots (n+1) \end{vmatrix};$$

végül könnyű számítással kapjuk, hogy

$$D = p! p-1! \dots 2! 1!,$$

tehát $(1+x)^k$ a 2. feltételt k minden értékénél teljesíti.

Továbbá úgy a számlálóban, mint a nevezőben lépésről lépésre ugyanazon redukciókat végezve, mint az imént a nevező kiszámításánál, nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{[n-\nu, n+1, \dots, n+p]}{[n, n+1, \dots, n+p]} = \\ &= \frac{\binom{k}{n-\nu}}{\binom{k}{n}} \frac{(k-n+1)(k-n+2) \dots (k-n+p)}{(k-n+\nu+1)(k-n+\nu+2) \dots (k-n+\nu+p)} H_{\nu, p}, \end{aligned}$$

a hol

$$H_{\nu, p} = \frac{1}{p! p-1! \dots 2! 1!} \times \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ n-\nu & \dots & n+p \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-\nu) \dots (n-\nu-p+1) & \dots & (n+p) \dots (n+1) \end{vmatrix}.$$

Azt állítom, hogy $H_{\nu, p} = \binom{\nu+p}{\nu}$. Ezen formula megint rögtön igazolható minden p -re, ha $\nu=0$ és minden ν -re, ha $p=1$. Továbbá könnyű számítással meggyőződhetünk a

$$II_{\nu, p+1} - II_{\nu-1, p+1} = II_{\nu, p}$$

reláció helyességéről, a melynek ismételt alkalmazásával a felfírt identitás minden ν és minden p -re igazolást nyer. Akkor azonban:

$$\begin{aligned} & \frac{[n-\nu, n+1, \dots, n+p]}{[n, n+1, \dots, n+p]} = \\ &= \binom{p+\nu}{\nu} \frac{c_{n-\nu}}{c_n} \frac{k-n+1}{k-n+\nu+1} \dots \frac{k-n+p}{k-n+\nu+p}, \end{aligned}$$

a miből a 4. és 5. feltétel teljesülése leolvasható.

Végül $(1-x)^{-k}$ hatványsorára

$$(1-x)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k-1+n}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

az első feltétel teljesül, mert minden együtthatója zérustól különböző pozitív szám. A harmadik feltétel is teljesül, mert a

$$\frac{c_{n-1}}{c_n} = \frac{n}{k+n-1}$$

hányados az $(a, a+\varepsilon)$ intervallumba esik ($a \geq 0, a+\varepsilon \leq 1$), ha

$$k \geq 1 + \frac{1}{\varepsilon}$$

és

$$n = \left[\frac{a}{1-a} (k-1) \right] + 1.$$

Hasonló számítással, mint előbb, nyerjük továbbá, hogy

$$\begin{aligned} & [n, n+1, \dots, n+p] = \\ &= \frac{k+n-p!}{k!^{p+1}} \frac{k+n-p+1!}{n!} \frac{k+n!}{n+1!} \dots \frac{k+n!}{n+p!} k^p (k-1)^{p-1} \dots (k-p+1) D, \end{aligned}$$

a hol ismét

$$D = p! \, p-1! \dots 2! 1!$$

tehát a második feltétel biztosan teljesül, ha $k \geq p$. Végül

$$\frac{[n-\nu, n+1, \dots, n+p]}{[n, n+1, \dots, n+p]} = \\ = \binom{p+\nu}{p} \frac{c_{n-1}}{c_n} \frac{k+n}{k+n-\nu} \frac{k+n-1}{k+n-\nu-1} \dots \frac{k+n-p+1}{k+n-\nu-p+1};$$

ha

$$\frac{c_{n-1}}{c_n} = \frac{n}{k+n-1} \leq G < 1,$$

akkor

$$n \leq \frac{G}{1-G} (k-1)$$

és

$$\frac{pn}{k-p+1} \leq \frac{pG}{1-G} \frac{k-1}{k-p+1} \leq p^3 \frac{G}{1-G} \leq \frac{P^2 G}{1-G},$$

ha

$$k > P \geq p.$$

E szerint

$$\frac{k+n}{k+n-\nu} \dots \frac{k+n-p+1}{k+n-\nu-p+1} < e^{\frac{\nu p}{k+n-\nu-p+1}} \leq e^{\frac{np}{k-p+1}} \leq e^{\frac{P^2 G}{1-G}} = A, \\ \frac{[n-\nu, n+1, \dots, n+p]}{[n, n+1, \dots, n+p]} \leq A \binom{p+\nu}{p} \frac{c_{n-\nu}}{c_n},$$

ha

$$k > P,$$

tehát a 4. feltétel is teljesül. Ha pedig $n \leq L$, akkor megválasztható K úgy, hogy $k \geq K$ -ra nézve

$$1 \leq \frac{k+n}{k+n-\nu} \dots \frac{k+n-p+1}{k+n-\nu-p+1} \leq e^{\frac{np}{k-p+1}} \leq e^{\frac{LP}{k-P+1}} \leq 1+\varepsilon,$$

tehát az 5. feltétel is ki van elégítve.

8. §. A feltételek szükségességéről.

A III. §-ban a (φ) sorozatra kimondott feltételek elegendők a IV. §-ban kimondott tételek fennállásához. Hogy szükségesek-e, nem sikerült eldöntennem; erre vonatkozólag csak néhány megjegyzésre szorítkozhatom. Ha a (φ) sorozat a

problémának a $(0, l)$ intervallumhoz tartozó generatrixsorozata, akkor egy bizonyos k indextől kezdve $\varphi_k(x)$ minden együtt-hatója egyenlő előjelű. Legyen ugyanis $0 < a < l$ és alkalmaz-zuk az I. tételt az $a+x=0$ és $a-x=0$ egyenletekre. Akkor megadható K úgy, hogy minden $k \geq K$ indexre nézve az $(a+x) \varphi_k(x)$ hatványsorában egy jelváltás sincs, az $(a-x) \varphi_k(x)$ hatványsorában pedig pontosan egy jelváltás lép föl. Ezen so-rok együtt-hatói

$$ac_0, ac_1 + c_0, \dots, ac_{n-1} + c_{n-2}, ac_n + c_{n-1}, \dots$$

és

$$ac_0, ac_1 - c_0, \dots, ac_{n-1} - c_{n-2}, ac_n - c_{n-1}, \dots$$

Ha c_0 pl. pozitív, akkor az első sorozat tagjai mind nem negatívok, a második sorozat első n tagja nem negatív, az $(n+1)$ -edik negatív, a következők nem pozitívok; minthogy

$$nc_\nu - c_{\nu-1} \geq 0,$$

ha

$$\nu \leq n-1,$$

szükségképen

$$c_\nu \geq \frac{c_{\nu-1}}{a}:$$

$c_{\nu-1}$ pozitivitásából tehát következik c_ν pozitivitása, míg $\nu \leq n-1$; minthogy pedig $c_0 > 0$, kell, hogy $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ is zérustól különböző pozitív számok legyenek. Ugyanígy következik az

$$ac_\nu - c_{\nu-1} \leq 0,$$

ha

$$\nu \geq n$$

egyenlőtlenségből a

$$c_\nu \leq \frac{c_{\nu-1}}{a};$$

ha tehát $c_{\nu-1}$ negatív volna és $\nu \geq n$, akkor minden következő együtt-ható is csak negatív lehetne; de az

$$ac_\nu + c_{\nu-1} \geq 0$$

egyenlőtlenségnek minden ν indexre kell teljesülnie, tehát egyik együttható sem lehet negatív.

Ha tehát $c_{r-1} = 0$, akkor a

$$0 \leq c_r \leq \frac{c_{r-1}}{a}$$

egyenlőtlenségek maguk után vonják minden következő együttható eltűnését. Tehát a III. §. első feltétele és a 2. feltétel $P=0$ -ra nézve szükséges is.

Szükséges továbbá a 3. feltétel is. Tegyük fel ugyanis, hogy végtelen sok k indexre nézve a

$$\frac{c_{k,0}}{c_{k,1}}, \dots, \frac{c_{k,n-1}}{c_{k,n}}, \dots$$

sorozat egy tagja sem esnék az $\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ intervallumba $\left(a - \frac{\varepsilon}{2} \geq 0, a + \frac{\varepsilon}{2} \leq G < R\right)$; legyen a (φ) sorozatnak ezen indexhez tartozó részsorozata

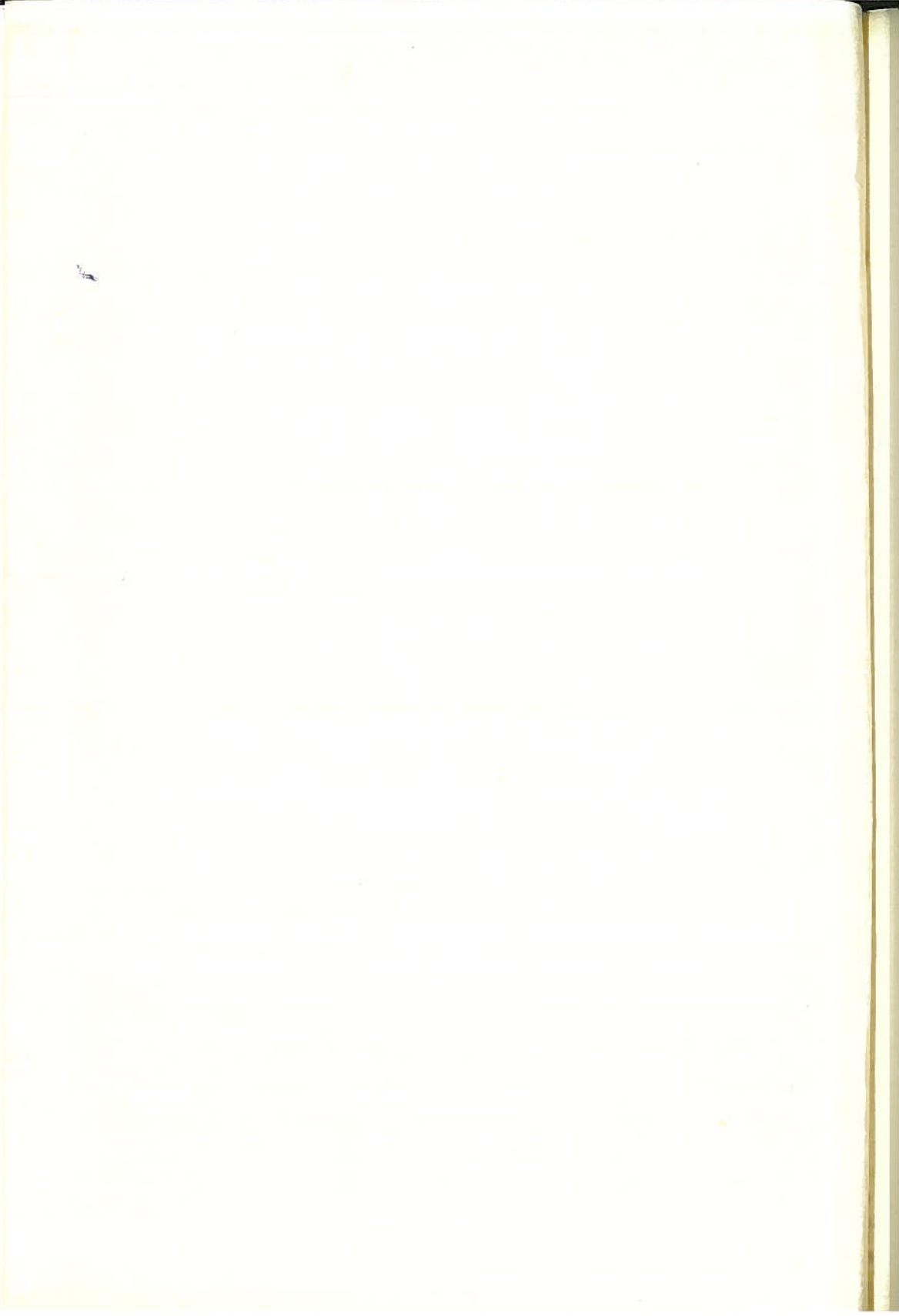
$$\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \dots, \varphi_\lambda, \dots,$$

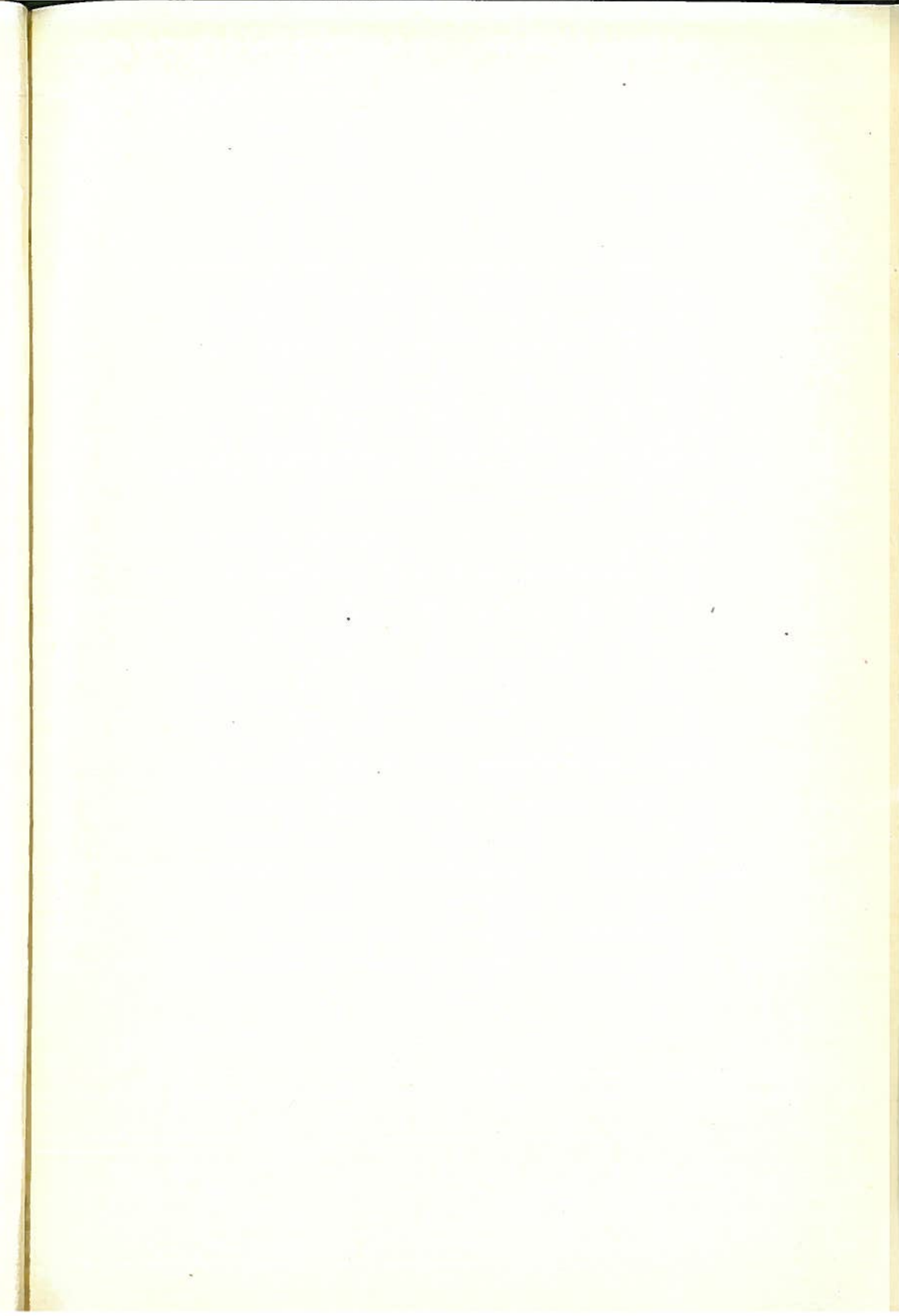
a mely tehát szintén a $(0, R)$ intervallumhoz tartozó genetrix-sorozat. Alkalmazzuk a II. tételt az $a - x = 0$ egyenletre. Jelentse n_λ az $(a - x)$ $\varphi_\lambda(x)$ együttható sorozatában azon tag indexét, a mely után az egyetlen jelváltás fellép; akkor a

$$\frac{c_{\lambda, n_\lambda}}{c_{\lambda, n_\lambda + 1}}$$

hányados limesének, ha λ a részsorozat indexein nő minden határon túl, meg kellene egyeznie a -val, a mi nem lehetséges, ha ez a hányados az $\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ intervallumba nem juthat bele. Tehát a (φ) sorozatra vonatkozó 3. feltétel is szükséges.







A szerző kiadása.