ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.
A III. OSZTALY RENDELETÉBŐL
SZERKESZTI
SZABÓ JÓZSEF
OSZTÁLYTITKÁR.
XV. KÖTET. 3. SZÁM.

AZ AMPÈRE-FÉLE ELEMI TÖRVÉNYEK AEQUIVALENSEINEK MEGHATÁROZÁSA.

FARKAS GYULÁTÓL.

(AZ OSZTÁLY ÜLÉSÉN 1892. NOVEMBER 14-ÉN BEMUTATTA RÉTHY M. L. T.)

Ára 45 kr.

BUDAPEST.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.
1893.

Eddig külön megjelent

ÉRTEKEZÉSEK

a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet. — Második kötet. — Harmadik kötet. — Negyedik kötet.

Ötödik kötet.

Hatodik kötet.

I. *Konkoly Miklós.* Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén I. rész. 1871—1873. Ára 20 kr. — II. *Konkoly Miklós.* Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára 20 kr. — III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámitása. Közlik *dr. Gruber Lajos* és *Kurländer Ignácz* kir. observatorok. 10 kr. — IV. *Schenzl Guido.* Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. 20 kr. — V. *Gruber Lajos.* A november-havi hullócsillagokról 20 kr. — VI. *Konkoly Miklós.* Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára 20 kr. — VII. *Konkoly Miklós.* A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára 20 kr. — VIII. *Konkoly Miklós.* Mercur átvonulás a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án 10 kr.

Hetedik kötet.

I. *Konkoly Miklós.* Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositió után. Egy táblával. 10 kr. — *Konkoly Miklós.* Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr. — III. *Konkoly Miklós.* Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban IV. rész. Ára 10 kr. — IV. *Konkoly Miklós.* A nap felületének megfigyelése 1878-ban ó-gyallai csillagdán. 10 kr. — VI. *Hunyady Jenő.* A Möbius-féle kritériumokról a kúpszeletek elméletében 10 kr. — VI. *Konkoly Miklós.* Spectroscopicus megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 10 kr. — VIII. *Dr. Weinek Lászlö.* Az instrumentális fényhajlás szerepe és Vénus-átvonulás photographiai felvételénél 20 kr. — IX. *Suppan Vilmos.* Kúp- és hengerfelületek önálló ferde vetitésben. (Két táblával.) 10 kr. — X. *Dr. Konek Sándor.* Emlékbeszéd Weninger Vincze l. t. fölött. 10 kr. — XI. *Konkoly Miklós.* Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1879-ben. 10 kr. — XII. *Konkoly Miklós.* Hullócsillagok radiatio pontjai, levezetve a magyar korona területén tett megfigyelésekből 1871—1878. végéig 20 kr. — XIII. *Konkoly Miklós.* Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagvizsgálón 1879-ben. (Egy tábla rajzzal.) 30 kr. — XIV. *Konkoly Miklós.* Adatok Jupiter és Mars physikájához, 1879. (Három tábla rajzzal.) 30 kr. — XV. *Réthy Mór.* A fény törése és visszaverése homogén isotrop átlátszó testek határán. Neumann módszerének általánositásával és bővitésével. (Székf. ért.) 10 kr. — XVI. *Réthy Mór.* A sarkitott fényrezgés elhajlitó rács által való forgatásának magyarázata, különös tekintettel Fröhlich észleleteire. 10 kr. — XVII. *Szily Kálmán.* A telitett gőz nyomásának törvényéről. 10 kr. — XVIII. *Hunyadi Jenő.* Másodfoku görbék és felületek meghatározásáról. 20 kr. — XIX. *Hunyady Jenő.* Tételek azon determinánsokról, melyek elemei adjungált rendszerek elemeiből vannak componálva. 20 kr. — XX. *Dr. Frölich Izor.* Az állandó elektromos áramlások elméletéhez. 20 kr. XXI. *Hunyady Jenő.* Tételek a componalt determinánsoknak egy különös neméről. 10 kr. — XXII. *König Gyula.* A raczionális függvények általános elméletéhez. 10 kr. — XXIII. *Silberstein Salamon.* Vonalgeometriai tanulmányok 20 kr. — XXIV. *Hunyady János.* A Steiner-féle kritériumról a kúp-

ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

KIADJA A MAGYAR TUD. AKADÉMIA.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL.

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF

OSZTÁLYTITKÁR.

AZ AMPÈRE-FÉLE ELEMI TÖRVÉNYEK AEQUIVALENSEINEK MEGHATÁROZÁSA.

FARKAS GYULÁ-tól.

(Az osztály ülésén 1892 november 14-én bemutatta Réthy M. l. t.)

Tudvalévőleg Ampère az elektrodynamikus hatásoknak kétféle elemi törvényét állította fel, a melyek æquivalensek egymással. Mindegyik egyenletes és állandó áramlásra vonatkozik és akár teljes zárt áramon, akár az ilyennek csak egy részén nyilvánuljon a ponderomótoros hatás, egyaránt érvényesek, mindegyik ugyanahhoz az integrális hatáshoz vezet. Ugyanis az egyik elemi erő componensei a másik elemi erő componenseitől függvény-elemekkel külömböznek, a melyeknek a ható áram vonalán képzett integrálisaik eltűnnek.*

---

* Az egyiket, a mely *Gaussnál* is előfordul, a legtöbben talán még ma is *Grassmannak* vagy éppen *Reynardnak* tulajdonítják, noha *Bertrand* rá mutatott már (Leçons sur la Théorie mathématique de l'Electricité, 1890. 161. old.), hogy *Ampère* ezt is felállította. Valóban, az ő híres munkájának (Théories des Phénomènes électro-dynamiques etc. 1826) a 137. oldalán előfordul. A másik törvényéből vezeti le, abból, a melyet közönségesen egyetlenül emlegetnek az ő neve alatt. Emez újabbnak tartott elemi törvényhez jut el, «mint *Grassmann*-féléhez» *Clausius* is a maga alap-hypothéziseiből. (Szinte azt hihetem, hogy mióta *Ampère* kisérletei és hozzájuk fűződő közetlen következtetései általánosan ismeretesekké lettek, azóta aligha olvasták folyamatosan *Ampère* munkáját.)

A két elemi erő bármelyikéből úgy származtatható egy velük æquivalens új elemi erő, hogy a componenseihez oly függvény-elemeket adunk, a melyeknek a ható áram vonalán képzett integrálisaik eltűnnek. E végből az a három függvény, a melyeknek az elemeit beiktatjuk, a ható áram vonalán folytonos és egyértékű tartozik lenni s elemeiket a ható áram vonalán való infinitesimális megváltozásaik szolgáltatják. Azonban arra, hogy az új elemi erő szintén valóságos elemi törvényt jelentsen, a három függvény más feltételeket is köteles kielégíteni, a mely feltételek abban a követelményben gyökeredznek, hogy az új elemi erő szintén — úgy nagyság, mint irány tekintetében — független legyen a coordináta-rendszer választásától és független azoknak az áramgörbéknek az alakjától, a melyekhez a ható és hatás-viselő áramelem tartozik.

Ebben az elvszerű értelemben meghatároztam az Ampère-félékkel æquivalens összes elemi törvényeket s jelen közleményem a használtam deductiónak meg az eredményeknek a bemutatásával foglalkozik.

1. §. A ható áramelem hosszúságát és irányát jelölje ds, a hatás-viselő áramelem hosszúságát és irányát jelölje ds'. Az egyik Ampère-féle elemi erő componensei egy derékszögű x, y, z coordináta-rendszerben legyenek

$$Xdsds', \quad Ydsds', \quad Zdsds'.$$

Minden más, ezzel æquivalens elemi erő componensei ily alakúak:

$$(1) \quad \begin{cases} \left(X + \dfrac{df}{ds}\right) dsds', \\[2ex] \left(Y + \dfrac{dg}{ds}\right) dsds', \\[2ex] \left(Z + \dfrac{dh}{ds}\right) dsds', \end{cases}$$

a hol f, g, h a ható áram vonalán egyértékű és folytonos függvényeket jelentenek és df, dg, dh ezeknek a függvényeknek a ds vonalelem mentén való megváltozásaik.

A ds és ds' vonalelem közti egyenes vonal irányát a ható ds elemtől a hatás-viselő ds' elem felé számítsuk s ennek az egyenesnek a hosszúságát és irányát is r jelölje. Még két derékszögű coordináta-rendszert fogok használni, a melyek azonban a ds és ds' vonalelemek irányához meg az r távolsági vonal irányához viszonyítvák. Mindkét coordináta-rendszer harmadik tengelyének az iránya az r távolsági vonal irányával egyezik; az egyiknek a második tengelye q az $|r, ds|$ síkban van s a ds iránynyal hegyes szöget alkot; a másiknak a második tengelye q' az $|r, ds'|$ síkban van s a ds' iránynyal hegyes szöget alkot; az első rendszer első tengelye p és a második rendszer első tengelye p' úgy választvák, hogy ez a két rendszer, p, q, r meg p', q', r az általános x, y, z rendszerrel congruens legyen, minélfogva mindhárom coordináta-rendszer congruens egymással. Az origók helyének a megválasztása a tárgyalás folyamára nézve teljesen közömbös, és csupán a képzelet rögzítésének kedveért, a p, q, r rendszer origóját a ds vonalelembe, a p', q', r rendszer origóját pedig a ds' vonalelembe teszem. A p, q, r illetőleg p', q', r irányoknak az x, y, z rendszerbe tartozó irány-cosinusait rendre

$$p_1, q_1, r_1; \quad p_2, q_2, r_2; \quad p_3, q_3, r_3;$$
$$p'_1, q'_1, r'_1; \quad p'_2, q'_2, r'_2; \quad p'_3, q'_3, r'_3;$$

jelöljék.

Az (1) alatti erő componensei a $dsds'$ szorzattal osztottan a p, q, r rendszerben ezek:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1\left(X+\frac{df}{ds}\right)+p_2\left(Y+\frac{dg}{ds}\right)+p_3\left(Z+\frac{dh}{ds}\right), \\ q_1\left(X+\frac{df}{ds}\right)+q_2\left(Y+\frac{dg}{ds}\right)+q_3\left(Z+\frac{dh}{ds}\right), \\ r_1\left(X+\frac{df}{ds}\right)+r_2\left(Y+\frac{dg}{ds}\right)+r_3\left(Z+\frac{dh}{ds}\right), \end{array} \right.$$

a p', q', r rendszerben pedig ezek:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} p'_1\left(X+\frac{df}{ds}\right)+p'_2\left(Y+\frac{dg}{ds}\right)+p'_3\left(Z+\frac{dh}{ds}\right), \\ q'_1\left(X+\frac{df}{ds}\right)+q'_2\left(Y+\frac{dg}{ds}\right)+q'_3\left(Z+\frac{dh}{ds}\right), \\ r'_1\left(X+\frac{df}{ds}\right)+r'_2\left(Y+\frac{dg}{ds}\right)+r'_3\left(Z+\frac{dh}{ds}\right). \end{array} \right.$$

Az (1) alatti erő nagysága és iránya az előzmények értelmében független tartozik lenni az x, y, z coordináta-rendszer választásától és a két áramgörbe alakjától. Közömbös paraméterektől eltekintve, a melyek t. i. az áramgörbéken nem változnak, csak a ds és ds' vonalelem kölcsönös helyzetétől függhet tehát az (1) alatti erő úgy nagyság, mint irány dolgában. Erre szükséges és elégséges, hogy az (1) alatti erőnek oly coordináta-rendszerben kifejezett componensei, a mely a ds és ds' vonalelemek kölcsönös helyzetére van alapítva, érdemlegesen csak a ds és ds' vonalelemek kölcsönös helyzetétől függjenek, vagyis az (r, ds), (r, ds'), (ds, ds') szögeken s az r távolságon kívül csupán oly mennyiségek függvényei legyenek, a melyek az áramvonalok mentén változatlanok. Hogyha tehát a (2) és a (3) alatti componensek érdemlegesen csak az (r, ds), (r, ds'), (ds, ds') szögek s az r távolság függvényeik, vagyis, ha az áramvonalok mentén csupán ezekkel a mennyiségekkel változnak, akkor és csak akkor teljesül az elemi törvénynek a coordináta-rendszer választásától és az áramgörbék alakjától való függetlenségének a követelménye. De az X, Y, Z Ampère-féle erőnek a nagysága és iránya független a coordináta-rendszer választásától és az áramgörbék alakjától; ennek az erőnek a p, q, r és p' q' r rendszerbéli componensei, vagyis

$$
\begin{gathered}
p_1X+p_2Y+p_3Z, \\
q_1X+q_2Y+q_3Z, \\
r_1X+r_2Y+r_3Z; \\
p_1'X+p_2'Y+p_3'Z, \\
q_1'X+q_2'Y+q_3'Z, \\
r_1'X+r_2'Y+r_3'Z;
\end{gathered}
$$

csak az emlegetett távolságtól és három szögtől függenek érdemlegesen. Kell tehát, hogy a (2) és (3) alatti componensekben ezekhez csatolt s integrális hatás nélkül szűkölködő járulékok

$$
(4)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
p_1\frac{df}{ds}+p_2\frac{dg}{ds}+p_3\frac{dh}{ds}&=P', \\
q_1\frac{df}{ds}+q_2\frac{dg}{ds}+q_3\frac{dh}{ds}&=Q', \\
r_1\frac{df}{ds}+r_2\frac{dg}{ds}+r_3\frac{dh}{ds}&=R';
\end{aligned}
\right.
$$

$$(5)\quad \begin{cases} p_1'\dfrac{df}{ds}+p_2'\dfrac{dg}{ds}+p_3'\dfrac{dh}{ds}=P, \\ q_1'\dfrac{df}{ds}+q_2'\dfrac{dg}{ds}+q_3'\dfrac{dh}{ds}=Q, \\ r_1'\dfrac{df}{ds}+r_2'\dfrac{dg}{ds}+r_3'\dfrac{dh}{ds}=R; \end{cases}$$

szintén csak az r távolságtól és az (r, ds), (r, ds'), (ds, ds') három szögtől függjenek érdemlegesen, s ha emellett az f, g, h függvények egyértékűek és folytonosak a ható áram vonalán, úgy minden követelmény teljesítve is van.

Itt érdemleges függés alatt mindig olyan függést értettem, a melynél fogva az illető függvények az áramvonalak mentén változnak, s a mint a priori is belátható, a kifejtendő calculusban csupán ez a függés fog számon járni; a következőkben ezt az érdemleges függést fogom egyszerűen függésnek mondogatni. Ehhez képest a tárgyalandó problémát így fogalmazhatom: mindazok az f, g, h functiók meghatározandók, a melyek egyértékűek és folytonosak a ható áram vonalán, s a melyek oly tulajdonságúak, hogy a (4) alatti P', Q', R' componensek, vagy a mi mindegy, az (5) alatti P, Q, R componensek csak az (r, ds), (r, ds'), (ds, ds') szögektől s az r távolságtól függenek.

2. §. Bármi irányt jelentsen valamely betű, annak az iránynak az x, y, z rendszerbéli iránycosinusait a betű lábához jegyzett 1, 2, 3 indexxel fogom jelölni, úgy, hogy v iránynak az x, y, z rendszerbéli iránycosinusai sor-rendjük szerint v_1, v_2, v_3. Azon kívül az írás rövidítésére a következő jelölésekkel fogok élni: bármi két irányt jelentsen két betű, ha v és w ezek a betűk,

$$\cos(v,w) = (vw),$$

$$\sin(v,w) = (vw)_0,$$

$$v_3w_2-v_2w_3=(vw)_1,\quad v_1w_3-v_3w_1=(vw)_2,\quad v_2w_1-v_1w_2=(vw)_3,$$

$$w_3v_2-w_2v_3=(wv)_1,\quad w_1v_3-w_3v_1=(wv)_2,\quad w_2v_1-w_1v_2=(wv)_3,$$

kifejezések baloldalai helyett állandóan fogom használni a jobb oldalokat. Ezeknek megfelelően nyilvánvaló, hogy

$$v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3=(vw),$$
$$(vw)^2+(vw)_0^2=1,$$
$$(vw)_1^2+(vw)_2^2+(vw)_3^2=(vw)_0^2,$$
$$(vw)_1+(wv)_1=0,\quad (vw)_2+(wv)_2=0,\quad (vw)_3+(wv)_3=0,$$
$$(vw)_1v_1+(vw)_2v_2+(vw)_3v_3=0,$$
$$(vw)_1w_1+(vw)_2w_2+(vw)_3w_3=0.$$

A kifejtendő analysis bizonyos algebrai relátiók ismeretét feltételezi, a mely relátiók a szereplő irányoknak x, y, z rendszerbéli iránycosinusai közt állanak fenn. Mindenek előtt ezeknek a relátióknak a gyűjteményét állítom össze.

1. Minthogy a ds irány a $|q, r|$ síkban van, a ds' irány meg a $|q', r|$ síkban van, ha nagyobb rövidség céljából a ds irányt s, a ds' irányt meg s' jelöli, úgy

$$(6)\qquad (q\,s)^2+(rs)^2=1,$$
$$(6)'\qquad (q's')^2+(rs')^2=1.$$

2. Nyilvánvaló, hogy

$$(sx)=(ps)(px)+(qs)(qx)+(rs)(rx),$$
$$(sy)=(ps)(py)+(qs)(qy)+(rs)(ry),$$
$$(sz)=(ps)(pz)+(qs)(qz)+(rs)(rz).$$

Minthogy azonban az s irány $|q, r|$ síkban vagyon, így $ps=0$. Továbbá $(px)=p_1$ stb. Következőleg

$$(7)\qquad \begin{cases} s_1=(qs)q_1+(rs)r_1, \\ s_2=(qs)q_2+(rs)r_2, \\ s_3=(qs)q_3+(rs)r_3. \end{cases}$$

Hasonlóképpen

$$(7)'\qquad \begin{cases} s_1'=(q's')q_1'+(rs')r_1', \\ s_2'=(q's')q_2'+(rs')r_2', \\ s_3'=(q's')q_3'+(rs')r_3'. \end{cases}$$

3. Minthogy az $x, y, z;\ p, q, r;\ p', q', r;$ rendszerek congruensek, ekként

$$p_1=(q\,r)_1,\quad p_2=(q\,r)_2,\quad p_3=(q\,r)_3,$$
$$p_1'=(q'r)_1,\quad p_2'=(q'r)_2,\quad p_3'=(q'r)_3.$$

Jegyezzük be itt a jobb-oldalok fentebbi definitióiba a q és q' irányok iránycosinusai helyett ezeknek a (7) illetőleg (7)' alatti kifejezésekből eredő értékeiket és találjuk

(8) $(qs)p_1=(rs)_1, \quad (qs)p_2=(rs)_2, \quad (qs)p_3=(rs)_3;$

(8)' $(q's')p'_1=(rs')_1, \quad (q's')p'_2=(rs')_2, \quad (q's')p'_3=(rs')_3.$

4. Identice áll, hogy

$$(rs)_3s_2-(rs)_2s_3=(r_1s_1+r_2s_2+r_3s_3)s_1-(s_1^2+s_2^2+s_3^2)r_1=(rs)s_1-r_1,$$
stb.

Egyszersmind a (8) alatti relátiók kapcsán

$$(rs)_3s_2-(rs)_2s_3=(qs)\,(p_3s_2-p_2s_3)=(qs)\,(ps)_1, \quad \text{stb.}$$

Következőleg

(9) $$\begin{cases}(rs)\,s_1-r_1=(qs)\,(ps)_1,\\(rs)\,s_2-r_2=(qs)\,(ps)_2,\\(rs)\,s_3-r_3=(qs)\,(ps)_3,\end{cases}$$

Hasonlóképen

(9)' $$\begin{cases}(rs')\,s'_1-r_1=(q's')\,(p's')_1,\\(rs')\,s'_2-r_2=(q's')\,(p's')_2,\\(rs')\,s'_3-r_3=(q's')\,(p's')_3.\end{cases}$$

5. Nyilvánvaló, hogy

$$(ss')=(ps)\,(ps')+(qs)\,(qs')+(rs)\,(rs'),$$
$$(ss')=(p's)\,(p's')+(q's)\,(q's')+(rs)\,(rs').$$

Mivel pedig $(ps)=0$, $(p's')=0$, ekként

(10) $$(ss')=(qs)\,(qs')+(rs)\,(rs'),$$

(10)' $$(ss')=(q's)\,(q's')+(rs)\,(rs').$$

6. Az itteni jobb-oldalok egyenlítéséből folyólag pedig

(11) $$(qs)\,(qs')=(q's)\,(q's').$$

7. Áll, hogy

$$(p's)^2+(q's)^2+(rs)^2=1,$$
$$(ps')^2+(qs')^2+(rs')^2=1,$$

tehát (6) és (6)′ szerint

$$(12)\qquad (p's)^2=(qs)^2-(q's)^2,$$

$$(12)'\qquad (ps')^2=(q's')^2-(qs')^2.$$

8. A most használt két azonosságból, az által, hogy $(q's)$ és (qs') helyett ezeknek a (10)′ és (10) szerinti értékeiket helyettesítjük, ez is következik, ha ugyan (6) és (6)′-ra megint figyelünk:

$$(13)\qquad (p's)^2\,(q's')^2=1-(rs)^2-(rs')^2-(ss')^2+2\,(rs)\,(rs')\,(ss'),$$

$$(13)'\qquad (ps')^2\,(qs)^2=1-(rs)^2-(rs')^2-(ss')^2+2\,(rs)\,(rs')\,(ss').$$

9. A (8)′ alatti relátiók értelmében

$$(rs')_1^2=(q's')^2\,p_1'^2=(q's')^2\,(1-q_1'^2-r_1^2),\ \text{stb.}$$

Irjuk be ide $(q's')^2 q_1'^2$ stb. helyett ennek a (7)′ szerinti kifejezését. Ez által

$$(rs')_1^2=(q's')^2\,(1-r_1^2)-[s_1'-(rs')\,r_1]^2,\ \text{stb.}$$

Innen a (6)′ alatti relátióra való tekintettel ezeket kapjuk:

$$(14)\qquad \begin{cases} (rs')_1^2=1-(rs')^2-r_1^2-s_1'^2+2\,(rs')\,r_1s_1', \\ (rs')_2^2=1-(rs')^2-r_2^2-s_2'^2+2\,(rs')\,r_2s_2', \\ (rs')_3^2=1-(rs')^2-r_3^2-s_3'^2+2\,(rs')\,r_3s_3'. \end{cases}$$

10. Ugyancsak a (8)′ alatti relátiók értelmében

$$(rs')_3\,(rs')_2=(q's')^2p_2'p_3'=-(q's')^2\,(q_2'q_3'+r_2r_3),\ \text{stb.}$$

A második jobb oldalokba itt is a (7)′ szerinti kifejezéseket téve a q' irány iránycosinusai helyett, ered

$$(rs')_3\,(rs')_2=-(q's')^2r_2r_3-[s_2'-(rs')\,r_2]\,[s_3'-(rs')\,r_3],\ \text{stb.}$$

Ebből pedig a (6)′ alatti relátió tekintetbe vételével ezek folynak:

$$(15)\qquad \begin{cases} (rs')_3\,(rs')_2=(rs')\,(r_2s_3'+r_3s_2')-r_2r_3-s_2's_3', \\ (rs')_1\,(rs')_3=(rs')\,(r_3s_1'+r_1s_3')-r_3r_1-s_3's_1', \\ (rs')_2\,(rs')_1=(rs')\,(r_1s_2'+r_2s_1')-r_1r_2-s_1's_2'.- \end{cases}$$

Az eddigieken kívül még három szabott irányt fogok használni, a melyeket t, u, u' betűkkel jelölők.

Az első, t irány merőleges az $|s, s'|$ síkra és az ő x, y, z rendszerbéli iránycosinusainak t_1, t_2, t_3-nek a meghatározására

(16) $$(ss')_0 t_1 = (ss')_1, \quad (ss')_0 t_2 = (ss')_2, \quad (ss')_0 t_3 = (ss')_3$$

kifejezések szolgálnak.

11. Nyilvánvaló, hogy

$$(ss')_1 r_1 + (ss')_2 r_2 + (ss')_3 r_3 \left\{ \begin{array}{l} = (rs)_1 s'_1 + (rs)_2 s'_2 + (rs)_3 s'_3, \\ = (s'r)_1 s_1 + (s'r)_2 s_2 + (s'r)_3 s_3, \end{array} \right.$$

azaz (16) szerint

$$(ss')_0 (rt) = (rs)_1 s'_1 + (rs)_2 s'_2 + (rs)_3 s'_3,$$
$$(ss')_0 (rt) = (s'r)_1 s_1 + (s'r)_2 s_2 + (s'r) s_3,$$

és végül (8) meg (8)' alapján

(17) $$(ss')_0 (rt) = (qs)\,(ps'),$$

(17)' $$(ss')_0 (rt) = -(q's')\,(p's).$$

12. Ezek jobb oldalainak az egyenlítése pedig

(18) $$(qs)\,(ps') + (q's')\,(p's) = 0$$

relátióhoz juttat.

13. A következő kifejezésekből indulva ki:

$$(ss')_3 s_2 - (ss')_2 s_3, \text{ stb.}$$

és ügyet vetve a (16) alatti definitiókra, éppen azon a módon, a melyen a (9) alatti formulákat származtatók, találhatjuk, hogy

(19) $$\left\{ \begin{array}{l} s'_1 - (ss')\, s_1 = (ss')_0 (ts)_1, \\ s'_2 - (ss')\, s_2 = (ss')_0 (ts)_2, \\ s'_3 - (ss')\, s_3 = (ss')_0 (ts)_3. \end{array} \right.$$—

A másik két irány, a melyeknek még hasznát fogom venni, u és u' merőlegesek, az előbbi a $|p, s|$ síkra, az utóbbi a $|p', s'|$ síkra. Iránycosinusaik az x, y, z rendszerben

$$u_1 = (sp)_1, \quad u_2 = (sp)_2, \quad u_3 = (sp)_3;$$
$$u'_1 = (s'p')_1, \quad u'_2 = (s'p')_2, \quad u'_3 = (s'p')_3;$$

minélfogva a p, s, u meg p', s', u' irányok két derékszögű coordináta-rendszert tesznek össze, a melyek a másik három coordináta-rendszerrel congruensek.

14. Áll, hogy

$$(rs) = (p'r)(p's) + (s'r)(s's) + (u'r)(u's),$$
$$(rs') = (pr)(ps') + (sr)(ss') + (ur)(us').$$

Ámde

$$(p'r) = 0, \quad (pr) = 0, \quad (u'r) = (q's'), \quad (ur) = (qs),$$

tehát

$$(rs) = (rs')(ss') + (q's')(su'), \tag{20}$$
$$(rs') = (rs)(ss') + (qs)(s'u). \tag{20$'$}$$

15. Továbbá szembeszökő azonossággal

$$[(rs)(q's') - (rs')(q's)](q's') = (rs)(q's')^2 - (rs')(q's)(q's').$$

Vezessük be ide a (6)′ illetőleg (10)′-ből $(q's')^2$ illetőleg $(q's)(q's')$ értékét és találjuk

$$[(rs)(q's') - (rs')(q's)](q's') = (rs) - (rs')(ss').$$

Következőleg (20) szerint

$$(rs)(q's') - (rs')(q's) = (su'). \tag{21}$$

3. §. Az 1. §. végén fogalmazott probléma tárgyalását előnyös az (5) alatti kifejezésekre alapítani. A következendők rendjén, ennek a problémának megfelelően, úgy fogom tehát meghatározni az f, g, h functiókat, hogy a P, Q, R mennyiségek csak az (rs), (rs'), (ss'), r változók függvényei legyenek. Hogy f, g, h folytonosak és egyértékűek legyenek a hatóáram vonalán, ez a követelmény a posteriori egyenesen számon tartható leszen.

Az x, y, z rendszerben a ds elem coordinátáit a, b, c, a ds' elem coordinátáit a', b', c' jelöljék. Továbbá a ds elemnek az x, y, z tengelyeken való merőleges vetületeit da, db, dc, a ds' elemnek az x, y, z tengelyeken való merőleges vetületeit da', db', dc' jelentik, úgy, hogy

$$da = s_1 ds, \quad db = s_2 ds, \quad dc = s_3 ds;$$
$$da' = s'_1 ds', \quad db' = s'_2 ds', \quad dc' = s'_3 ds'.$$

Az (5) alatti egyenletekben, vagyis a

$$(22)\quad \begin{cases} p'_1 \dfrac{df}{ds} + p'_2 \dfrac{dg}{ds} + p'_3 \dfrac{dh}{ds} = P, \\ q'_1 \dfrac{df}{ds} + q'_2 \dfrac{dg}{ds} + q'_3 \dfrac{dh}{ds} = Q, \\ r_1 \dfrac{df}{ds} + r_2 \dfrac{dg}{ds} + r_3 \dfrac{dh}{ds} = R \end{cases}$$

egyenletekben a P, Q, R mennyiségek a probléma értelmében az a, b, c coordinátáknak csak az első derivátumait

$$\frac{da}{ds} = s_1, \quad \frac{db}{ds} = s_2, \quad \frac{dc}{ds} = s_3$$

jogosítvák tartalmazni, a melyek t. i. az

$$(rs) = r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3,$$
$$(ss') = s_1 s'_1 + s_2 s'_2 + s_3 s'_3,$$

cosinusokban fordulnak elő. Ekként az f, g, h függvények a ds elemre való vonatkozásukban csak ennek a coordinátáitól a, b, c-től függhetnek és már az iránycosinusait nem tartalmazhatják. Tényleg, a (22)-ből

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{df}{ds} = p'_1 P + q'_1 Q + r_1 R, \\ \dfrac{dg}{ds} = p'_2 P + q'_2 Q + r_2 R, \\ \dfrac{dh}{ds} = p'_3 P + q'_3 Q + r_3 R, \end{cases}$$

tehát, ha az f, g, h functiók az a, b, c coordináták némely derivátumait is tartalmaznák, akkor a P, Q, R componensek az a, b, c coordinátáknak szükségképen az elsőnél magasabb derivátumait is tartalmaznák, ugyanis a kiirt p'_1, q'_1, r_1 stb. iránycosinusok a ds elemre való vonatkozásukban csak ennek a coordinátáitól függenek, és már az iránycosinusaitól is függetlenek, a mi nyilvánvaló. Minthogy a P, Q, R mennyiségek az a', b', c' coordinátáknak is csak az első derivátumait

$$\frac{da'}{ds'}=s_1', \quad \frac{db'}{ds'}=s_2', \quad \frac{dc'}{ds'}=s_3'$$

tartalmazhatják, így az f, g, h functiók csupán a következő mennyiségektől függhetnek:

$$a, b, c; \quad a', b', c'; \quad s_1', s_2', s_3'.$$

Ebből folyólag az f, g, h functiók s irányi derivátumai így vannak:

$$\frac{df}{ds}=\frac{df}{da}\frac{da}{ds}+\frac{df}{db}\frac{db}{ds}+\frac{df}{dc}\frac{dc}{ds}, \text{ stb.}$$

vagyis

$$\frac{df}{ds}=s_1\frac{df}{da}+s_2\frac{df}{db}+s_3\frac{df}{dc},$$

$$\frac{dg}{ds}=s_1\frac{dg}{da}+s_2\frac{dg}{db}+s_3\frac{dg}{dc},$$

$$\frac{dh}{ds}=s_1\frac{dh}{da}+s_2\frac{dh}{db}+s_3\frac{dh}{dc}.$$

Vezessük be (22)-be ezeket a kifejezéseket. Az eredmények alkalmas rendezése nyomán azt találjuk, hogy ha ezekkel a jelölésekkel élünk:

$$(24)_1 \quad \left\{ \begin{aligned} p_1'\frac{df}{da}+p_2'\frac{dg}{da}+p_3'\frac{dh}{da}&=P_a, \\ p_1'\frac{df}{db}+p_2'\frac{dg}{db}+p_3'\frac{dh}{db}&=P_b, \\ p_1'\frac{df}{dc}+p_2'\frac{dg}{dc}+p_3'\frac{dh}{dc}&=P_c; \end{aligned} \right.$$

$$(24)_2 \quad \left\{ \begin{aligned} q_1'\frac{df}{da}+q_2'\frac{dg}{da}+q_3'\frac{dh}{da}&=Q_a, \\ q_1'\frac{df}{db}+q_2'\frac{dg}{db}+q_3'\frac{dh}{db}&=Q_b, \\ q_1'\frac{df}{dc}+q_2'\frac{dg}{dc}+q_3'\frac{dh}{dc}&=Q_c; \end{aligned} \right.$$

$$(24)_3 \quad \begin{cases} r_1 \dfrac{df}{da} + r_2 \dfrac{dg}{da} + r_3 \dfrac{dh}{da} = R_a, \\ r_1 \dfrac{df}{db} + r_2 \dfrac{dg}{db} + r_3 \dfrac{dh}{db} = R_b, \\ r_1 \dfrac{df}{dc} + r_2 \dfrac{dg}{dc} + r_3 \dfrac{dh}{dc} = R_c; \end{cases}$$

akkor

$$(25) \quad \begin{cases} s_1 P_a + s_2 P_b + s_3 P_c = P, \\ s_1 Q_a + s_2 Q_b + s_3 Q_c = Q, \\ s_1 R_a + s_2 R_b + s_3 R_c = R. \end{cases}$$

Világos, hogy a (24) alatt definiált P_a, Q_a, R_a stb. functiók úgy mint az f, g, h functiók, csak az a, b, c; a', b', c'; s'_1, s'_2, s'_3 mennyiségektől függenek, mert a p'_1, q'_1, r_1 stb. iránycosinusok is csak ezeknek a mennyiségeknek a functióik. Igy (25) szerint P, Q, R vonalos függvényeik az s_1, s_2, s_3 iránycosinusoknak.

Első dolgom ez lesz: eliminálom infinitesimális úton a (25) alatti egyenletekből az s iránytól független P_a, Q_a, R_a stb. kilencz functiót, mi által a P, Q, R mennyiségek számára differentiális egyenleteket nyerek (4. és 5. §), azután megoldom ez egyenleteket (6. §). A második dolgom: úgy határozni meg közelebbről a P, Q, R számára talált kifejezéseket, hogy a (23) jobboldalai megfeleljenek a bal-oldalainak, azaz valóban három functiónak ott kijelentett differentiális hányadosaik legyenek (7—11. §.), végül meghatározni ezt a három f, g, h functiót (12. §.). Ezzel a kitűzött probléma meg lesz fejtve.

4. §. Az imént bejelentett eliminátiót egyszerűen deriválás útján lehetne eszközölni, de áttekinthetőbb formák közt jutunk hozzá, ha alkalmas módon definiált variálást használunk. A (25) alatti kifejezésekben tulajdonítsunk ez ügyből tetszőleges végtelen kis megváltozást az s iránynak. Ezzel az s_1, s_2, s_3 iránycosinusok megfelelő variátiói járnak, a melyeket δs_1, δs_2, δs_3 jelöljenek. A (25) alatti első egyenletből e variálás révén

$$P_a \delta s_1 + P_b \delta s_2 + P_c \delta s_3 =$$
$$= \left[\frac{\partial P}{\partial (rs)} r_1 + \frac{\partial P}{\partial (ss')} s'_1\right] \delta s_1 + \left[\frac{\partial P}{\partial (rs)} r_2 + \frac{\partial P}{\partial (ss')} s'_2\right] \delta s_2 +$$
$$+ \left[\frac{\partial P}{\partial (rs)} r_3 + \frac{\partial P}{\partial (ss')} s'_3\right] \delta s_3$$

egyenlet származik, mert

$$\delta(rs) = r_1\delta s_1 + r_2\delta s_2 + r_3\delta s_3,$$
$$\delta(ss') = s'_1\delta s_1 + s'_2\delta s_2 + s'_3\delta s_3.$$

Azonban a δs_1, δs_2, δs_3 variatiók közt egy vonatkozás létezik: minthogy

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1,$$

így

$$s_1\delta s_1 + s_2\delta s_2 + s_3\delta s_3 = 0.$$

Ennélfogva iménti variátiós egyenletünkből az következik, hogy

$$(26)\quad \begin{cases} P_a = r_1\dfrac{\partial P}{\partial(rs)} + s'_1\dfrac{\partial P}{\partial(ss')} + s_1\lambda, \\ P_b = r_2\dfrac{\partial P}{\partial(rs)} + s'_2\dfrac{\partial P}{\partial(ss')} + s_2\lambda, \\ P_c = r_3\dfrac{\partial P}{\partial(rs)} + s'_3\dfrac{\partial P}{\partial(ss')} + s_3\lambda, \end{cases}$$

a hol a λ Lagrange-féle multiplicátort jelent, a mely kiküszöbölendő.

Szorozzuk e végből az egyenleteink elsejét s_1-sel, a másodikat s_2-sel, a harmadikat s_3-sel és azután adjuk össze őket. Ezt kapjuk:

$$s_1P_a + s_2P_b + s_3P_c = (rs)\frac{\partial P}{\partial(rs)} + (ss')\frac{\partial P}{\partial(ss')} + \lambda,$$

a honnan a (25) alatti első egyenletre való tekintettel

$$\lambda = P - (rs)\frac{\partial P}{\partial(rs)} - (ss')\frac{\partial P}{\partial(ss')}.$$

Irjuk be ezt a (26) alatti első egyenletekbe s a következőkhöz jutunk:

$$(27)_1\quad \begin{cases} P_a = s_1P + [r_1 - (rs)s_1]\dfrac{\partial P}{\partial(rs)} + [s'_1 - (ss')s_1]\dfrac{\partial P}{\partial(ss')}, \\ P_b = s_2P + [r_2 - (rs)s_2]\dfrac{\partial P}{\partial(rs)} + [s'_2 - (ss')s_2]\dfrac{\partial P}{\partial(ss')}, \\ P_c = s_3P + [r_3 - (rs)s_3]\dfrac{\partial P}{\partial(rs)} + [s'_3 - (ss')s_3]\dfrac{\partial P}{\partial(ss')}. \end{cases}$$

Azonlagos módon található a (25) alatti másik két egyenletből

$$(27)_2 \begin{cases} Q_a = s_1 Q + [r_1 - (rs)\, s_1] \dfrac{\partial Q}{\partial (rs)} + [s'_1 - (ss')\, s_1] \dfrac{\partial Q}{\partial (ss')}, \\ Q_b = s_2 Q + [r_2 - (rs)\, s_2] \dfrac{\partial Q}{\partial (rs)} + [s'_2 - (ss')\, s_2] \dfrac{\partial Q}{\partial (ss')}, \\ Q_c = s_3 Q + [r_3 - (rs)\, s_3] \dfrac{\partial Q}{\partial (rs)} + [s'_3 - (ss')\, s_3] \dfrac{\partial Q}{\partial (ss')}; \end{cases}$$

$$(27)_3 \begin{cases} R_a = s_1 R + [r_1 - (rs)\, s_1] \dfrac{\partial R}{\partial (rs)} + [s'_1 - (ss')\, s_1] \dfrac{\partial R}{\partial (ss')}, \\ R_b = s_2 R + [r_2 - (rs)\, s_2] \dfrac{\partial R}{\partial (rs)} + [s'_2 - (ss')\, s_2] \dfrac{\partial R}{\partial (ss')}, \\ R_c = s_3 R + [r_3 - (rs)\, s_3] \dfrac{\partial R}{\partial (rs)} + [s'_3 - (ss')\, s_3] \dfrac{\partial R}{\partial (ss')}. \end{cases}$$

Ezeknek a (27) alatti egyenleteknek a bal-oldalaik nem függenek már az s iránytól, tehát a jobb-oldalaiknak δ variátióik eltünni kötelesek, minélfogva a δ variatió ujólagos alkalmazása nyomán a P_a, Q_a, R_a stb. functiók eliminálódnak.

5. §. Használjuk a következő rövidített jelzéseket:

$$(28) \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial (rs)} = \Phi^{\cdot}, \quad \dfrac{\partial \Phi}{\partial (ss')} = \Phi'. \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial (rs)^2} = \Phi^{\cdot\cdot}, \quad \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial (rs)\, \partial (ss')} = \Phi^{\cdot\prime}, \quad \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial (ss')^2} = \Phi''. \end{cases}$$

Egyébiránt a Φ alatt a P, Q, R mennyiségek bármelyikét értsük.

A μ_1, μ_2, μ_3 mennyiségek három Lagrange-féle multiplicátort jelentsenek, a melyek mindhárman más és más értéküek, a mint a Φ a P, Q, R componensek egyikét, vagy másikát jelenti. A fent említett δ variálás a (27) alatti kilencz egyenlet bármelyik hármas csoportjától a következő kilencz egyenlethez vezet:

$$
(29)_1 \quad \left\{
\begin{aligned}
\Phi - (rs)\,\Phi^{\cdot} - (ss')\,\Phi' &= (qs)\,(ps)_1\,(r_1\Phi^{\cdot\cdot} + s_1'\Phi^{\cdot\prime}) - (ss')_0\,(ts)_1\,(r_1\Phi^{\cdot\prime} + s_1'\Phi'') + s_1\,\mu_1,\\
0 &= (qs)\,(ps)_1\,(r_2\Phi^{\cdot\cdot} + s_2'\Phi^{\cdot\prime}) - (ss')_0\,(ts)_1\,(r_2\Phi^{\cdot\prime} + s_2'\Phi'') + s_2\,\mu_1,\\
0 &= (qs)\,(ps)_1\,(r_3\Phi^{\cdot\cdot} + s_3'\Phi^{\cdot\prime}) - (ss')_0\,(ts)_1\,(r_3\Phi^{\cdot\prime} + s_3'\Phi'') + s_3\,\mu_1;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(29)_2 \quad \left\{
\begin{aligned}
0 &= (qs)\,(ps)_2\,(r_1\Phi^{\cdot\cdot} + s_1'\Phi^{\cdot\prime}) - (ss')_0\,(ts)_2\,(r_1\Phi^{\cdot\prime} + s_1'\Phi'') + s_1\,\mu_2,\\
\Phi - (rs)\,\Phi^{\cdot} - (ss')\,\Phi' &= (qs)\,(ps)_2\,(r_2\Phi^{\cdot\cdot} + s_2'\Phi^{\cdot\prime}) - (ss')_0\,(ts)_2\,(r_2\Phi^{\cdot\prime} + s_2'\Phi'') + s_2\,\mu_2,\\
0 &= (qs)\,(ps)_2\,(r_3\Phi^{\cdot\cdot} + s_3'\Phi^{\cdot\prime}) - (ss')_0\,(ts)_2\,(r_3\Phi^{\cdot\prime} + s_3'\Phi'') + s_3\,\mu_2;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(29)_3 \quad \left\{
\begin{aligned}
0 &= (qs)\,(ps)_3\,(r_1\Phi^{\cdot\cdot} + s_1'\Phi^{\cdot\prime}) - (ss')_0\,(ts)_3\,(r_1\Phi^{\cdot\prime} + s_1'\Phi'') + s_1\,\mu_3,\\
0 &= (qs)\,(ps)_3\,(r_2\Phi^{\cdot\cdot} + s_2'\Phi^{\cdot\prime}) - (ss')_0\,(ts)_3\,(r_2\Phi^{\cdot\prime} + s_2'\Phi'') + s_2\,\mu_3,\\
\Phi - (rs)\,\Phi^{\cdot} - (ss')\,\Phi' &= (qs)\,(ps)_3\,(r_3\Phi^{\cdot\cdot} + s_3'\Phi^{\cdot\prime}) - (ss')_0\,(ts)_3\,(r_3\Phi^{\cdot\prime} + s_3'\Phi'') + s_3\,\mu_3;
\end{aligned}
\right.
$$

a melyeknek a leírásánál használva lőnek a (9) és (19) alatti formulák. Elimináljuk ezekből az egyenletekből algebrai úton a μ_1, μ_2, μ_3 multiplicátorokat, miáltal a Φ functióra szóló hat határozott egyenletünk fog lenni. Szorozzuk e végből a $(29)_1$ alatti első egyenletet p_1-vel, a másodikat p_2-vel, a harmadikat p_3-vel, azután adjuk össze őket. Szorozzuk ugyanez egyenleteket ugyancsak rendre t_1, t_2, t_3-vel, azután adjuk össze. Alkalmazzuk ezt a két eljárást a $(29)_2$ és a $(29)_3$ alatti egyenletekre is. Minthogy a p és t irány merőleges az s irányra, a három μ multiplicátortól mentes hat egyenlethez jutunk, és pedig

$$(30)_1 \quad \begin{cases} p_1[\Phi-(rs)\Phi^{\cdot}-(ss')\Phi']-(ps')(qs)(ps)_1\Phi^{\cdot\prime}+(ps')(ss')_0(ts)_1\Phi''=0, \\ p_2[\Phi-(rs)\Phi^{\cdot}-(ss')\Phi']-(ps')(qs)(ps)_2\Phi^{\cdot\prime}+(ps')(ss')_0(ts)_2\Phi''=0, \\ p_3[\Phi-(rs)\Phi^{\cdot}-(ss')\Phi']-(ps')(qs)(ps)_3\Phi^{\cdot\prime}+(ps')(ss')_0(ts)_3\Phi''=0. \end{cases}$$

$$(30)_2 \quad \begin{cases} t_1[\Phi-(rs)\Phi^{\cdot}-(ss')\Phi']-(rt)\;(qs)(ps)_1\Phi^{\cdot\cdot}+(rt)\;(ss')_0(ts)_1\Phi''=0, \\ t_2[\Phi-(rs)\Phi^{\cdot}-(ss')\Phi']-(rt)\;(qs)(ps)_2\Phi^{\cdot\cdot}+(rt)\;(ss')_0(ts)_2\Phi''=0, \\ t_3[\Phi-(rs)\Phi^{\cdot}-(ss')\Phi']-(rt)\;(qs)(ps)_3\Phi^{\cdot\cdot}+(rt)\;(ss')_0(ts)_3\Phi''=0, \end{cases}$$

E közt a hat egyenlet közt legfeljebb négy olyan van, melyek algebrailag függetlenek egymástól. Szorozzuk meg ugyanis mindkét csoport egyenleteit rendre s_1, s_2, s_3-sel, azután adjuk össze külön mindkét csoport egyenleteit. Az s irány merőleges a p és t irányra, de merőleges azokra irányokra is, a melyeknek az iránycosinusaik

$$(ps)_1,\quad (ps)_2,\quad (ps)_3;$$
$$(st)_1,\quad (st)_2,\quad (st)_3;$$

következőleg a kivánt algebrai operatiók rendjén származó két egyenlet algebrai azonossággal teljesül.

A hat egyenletből négy, velük æquivalens egyenletet dedukálunk az által, hogy a $(30)_1$ alatti egyenleteket egyszer a p, egyszer az r irány révén, a $(30)_2$ alattiakat pedig egyszer a t, egyszer az s' irány révén kapcsoljuk össze oly módon, mint az imént az s irány révén tevők, vagyis a $(30)_1$ alatti egyenleteket rendre p_1, p_2, p_3-vel szorzottan összeadjuk s í. t. E mellett legyünk figyelemmel a (9) és (19) számú relátiókra. Erednek

$$(31)_1 \qquad \Phi - (rs)\Phi^{\cdot} - (ss')\Phi' + (ps')^2\Phi'' = 0,$$

$$(31)_2 \qquad [(rs') - (rs)(ss')]\,\Phi'' + (qs)^2\Phi^{\cdot\prime} = 0,$$

$$(31)_3 \qquad \Phi - (rs)\Phi^{\cdot} - (ss')\Phi' + (rt)^2\Phi^{\cdot\cdot} = 0,$$

$$(31)_4 \qquad [(rs') - (rs)(ss')]\,\Phi^{\cdot\cdot} + (ss')_0^2\Phi^{\cdot\prime} = 0.$$

Ezeknek az egyenleteknek az a fő-előnyük van a (30) alatti egyenletek fölött, hogy a coefficienseik kizárólagosan a

$$\Phi(= P,\, Q,\, R)$$

functióban is tartalmazott változóktól, nevezetesen csak a három viszonyszerű cosinustól függenek.

6. §. Még e közt a négy egyenlet közt is van egy algebrai relátió. Jelöljük futólag ez egyenletek bal-oldalait rendre E_1, E_2, E_3, E_4 betűkkel. Az

$$(32) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(ss')_0^2[(rs') - (rs)(ss')]\,(E_3 - E_1) + \\ &\qquad + (ps')^2(ss')_0^2E_2 - (qs)^2(ps')^2E_4 = 0 \end{aligned} \right.$$

egyenlet algebrai azonossággal teljesül. A (17) alatti relátio kapcsán könnyű erről meggyőződést szerezni.

A (31) alatti egyenletek megoldása nem ütközik nehézségbe. A $(31)_2$ egyenlettel kezdem, a mely így is írható (6!):

$$[(rs') - (rs)(ss')]\,\Phi'' + [1 - (rs)^2]\,\Phi^{\cdot\prime} = 0.$$

Ebből mindenek előtt az következik, hogy a Φ' derivátum (28!) az (rs) és (ss') cosinustól az

$$\frac{(ss') - (rs)(rs')}{\sqrt{1 - (rs)^2}}$$

alakban, tehát (6 és 10!) a (qs') alakban függ. Igy, ha Φ_1 alatt az r, (rs'), (qs') mennyiségek functióját értjük, írható

$$\Phi' = \frac{\partial \Phi_1}{\partial\,(qs')},$$

a honnan aztán, ha a Φ_2 az r, (rs'), (rs) functiója,

$$(33) \qquad \Phi = (qs)\,\Phi_1 + \Phi_2.$$

Vezessük be ezt a kifejezést a $(31)_1$ és $(31)_4$ alatti egyenletekbe. Tekintettel lévén a (28) alatti definitiókra meg a Φ_1 és Φ_2 függési tartalmára, továbbá ügyet vetve a (6), (10) és (13)' alatti relátiókra is, egy kis fáradsággal a következő egyenletekhez jutunk:

$$(34)_1 \quad \Phi_1-(qs')\frac{\partial\Phi}{\partial(qs')}+(ps')^2\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial(qs')^2}+(qs)\left[\Phi_2-(rs)\frac{\partial\Phi_2}{\partial(rs)}\right]=0,$$

$$(34)_2 \quad \Phi_1-(qs')\frac{\partial\Phi_1}{\partial(qs')}+(ps')^2\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial(qs')^2}-(qs)^3\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial(rs)^2}=0.$$

Vonjuk ki a másodikat az elsőből, miáltal egy csupán Φ_2-re szóló egyenletünk leszen, és pedig (6!)

$$[1-(rs)^2]\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial(rs)^2}-\frac{\partial\Phi_2}{\partial(rs)}+\Phi_2=0.$$

Ebből

$$(35) \quad \Phi_2=(rs)M+(qs)N,$$

a hol M és N csak az r és (rs') függvényeik. A Φ_2-nek eme kifejezése által a $(34)_1$ alatti egyenlet ezzé leszen:

$$\Phi_1-(qs')\frac{\partial\Phi_1}{\partial(qs')}+(ps')^2\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial(qs')^2}+N=0.$$

Minthogy az N functio független az s iránytól és következőleg független a (qs') cosinustól, a Φ_1 functio derivátumai helyett Φ_1+N összeg derivátumai jegyezhetők. Ily módon egyenletünk ekként írható:

$$(\Phi_1+N)-(qs')\frac{\partial(\Phi_1+N)}{\partial(qs')}+(ps')^2\frac{\partial^2(\Phi_1+N)}{\partial(qs')^2}=0.$$

Ha megfontoljuk, hogy a (12)' szerint

$$(ps')^2=(q's')^2-(qs')^2,$$

úgy egyenletünk megoldásaként könnyű szerrel találjuk

$$(36) \quad \Phi_1=(ps')K+(qs')L-N,$$

a mely kifejezésben a K meg az L épen úgy, miként a (35)-ben jelentkezett M és N csak az r és (rs') mennyiségektől függenek.

Vigyük be már most a Φ-nek (33) alatti kifejezésébe a Φ_1 és Φ_2-nek (36) illetőleg (35) alatti kifejezését és találjuk

$$\Phi = (qs)(ps')K + (qs)(qs')L + (rs)M.$$

Ez pedig a (18) és (11) alatti relatióknál fogva így is írható:

$$\Phi = -(q's')(p's)K + (q's')(q's)L + (rs)M.$$

Minthogy $(q's')$ csak (rs') függvénye (6!)' és K, L, M csak r és (rs') függvényeik, ha

$$(37) \qquad \Phi = (p's)A + (q's)B + (rs)C$$

teszszük, az A, B, C csak r és (rs') függvénye.

A (37) alatti kifejezést a $(31)_2$, $(31)_1$, $(31)_4$ egyenletek megoldásaként nyerők. A (32) alatti azonosság okán a $(31)_3$ alatti egyenletet is kielégíti a (37).

Minthogy a Φ függvény a P, Q, R függvények bármelyikét jelentheti, ha P_1, Q_1, R_1 stb. alatt csupán az r távolságtól és az (rs') cosinustól függő mennyiségeket értünk, a 4. és 5. §. rendjén eszközölt eliminátió egyenleteinek a megoldásai

$$(38) \qquad \begin{cases} P = (p's)P_1 + (q's)P_2 + (rs)P_3, \\ Q = (p's)Q_1 + (q's)Q_2 + (rs)Q_3, \\ R = (p's)R_1 + (q's)R_2 + (rs)R_3. \end{cases}$$

7. §. Úgy határozandók meg közelebbről a P_1, Q_1, R_1 stb. mennyiségek az r és (rs') változók functiói gyanánt, hogy a (23) alatti egyenletek jobb-oldalai a (38) alatti kifejezések által valóban három függvénynek a (23)-beli bal-oldalakon feltüntetett differentiális hányadosai legyenek. Ámde a (24) alatti egyenletekből folyólag

$$(39)_1 \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a} = p_1'P_a + q_1'Q_a + r_1R_a, \\ \dfrac{\partial f}{\partial b} = p_1'P_b + q_1'Q_b + r_1R_b, \\ \dfrac{\partial f}{\partial c} = p_1'P_c + q_1'Q_c + r_1R_c; \end{cases}$$

$$(39)_2 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial a} = p'_2 P_a + q'_2 Q_a + r_2 R_a , \\ \dfrac{\partial g}{\partial b} = p'_2 P_b + q'_2 Q_b + r_2 R_b , \\ \dfrac{\partial g}{\partial c} = p'_2 P_c + q'_2 Q_c + r_2 R_c ; \end{cases}$$

$$(39)_3 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial a} = p'_3 P_a + q'_3 Q_a + r_3 R_a , \\ \dfrac{\partial h}{\partial b} = p'_3 P_b + q'_3 Q_b + r_3 R_b , \\ \dfrac{\partial h}{\partial c} = p'_3 P_c + q'_3 Q_c + r_3 R_c . \end{cases}$$

Minthogy pedig (3. §!)

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial a}\frac{da}{ds} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{db}{ds} + \frac{\partial f}{\partial c}\frac{dc}{ds}, \text{ stb.}$$

ekként követelményünk az által teljesül, ha úgy határozzuk meg közelebbről az r és (rs') függvényei gyanánt a P_1, Q_1, R_1 stb. mennyiségeket, hogy a (27) alatti kilencz kifejezés meg a (38) alatti három kifejezés nyomán a (39) alattiak jobb-oldalai valóban három függvénynek, f, g, h-nak a bal-oldalakon kijelentett partiális derivátumai legyenek.

Azon kezdem, hogy a (38) alatti kifejezéseket beiktatom a (27) alatti kilencz kifejezésbe. Számon tartva a (13), (10)' és (20) alatti relátiókat, meg azt is tudva, hogy P_1, P_2, P_3 az s iránytól, tehát az (rs) és (ss') cosinusoktól függetlenek, a $(27)_1$ alatti első kifejezésből a beiktatás következményeként ezt találom:

$$P_a = \frac{(q's')s_1 - (q's)s'_1 - (su')r_1}{(p's)(q's')} P_1 + \frac{s'_1 - (rs')r_1}{(q's')} P_2 + r_1 P_3 .$$

A jobb-oldali első tag számlálójába s_1 és s'_1 helyett jegyezzük be az evidens

$$s_1 = (p's)\, p'_1 + (q's)\, q'_1 + (rs)\, r_1 ,$$
$$s'_1 = (p's')\, p'_1 + (q's')\, q'_1 + (rs')\, r_1 ,$$

kifejezéseket. Tekintetbe véve, hogy $(p's') = 0$, és ügyet vetve a (21) számú relátióra, e helyettesítés után a P_1 factorának a számlálójaként $(q's')(p's)p'_1$-hez jutunk. A P_2-nek a factora pedig (7)′ szerint $= q'_1$. Igy hát

$$P_a = p'_1P_1 + q'_1P_2 + r_1P_3 .$$

Azonlagos módon azonlagos kifejezéseket találhatni a (27) számok alatt lévő többi mennyiségek, Q_a, R_a stb. számára:

$$(40)_1 \qquad \begin{cases} P_a = p'_1P_1 + q'_1P_2 + r_1P_3 , \\ P_b = p'_2P_1 + q'_2P_2 + r_2P_3 , \\ P_c = p'_3P_1 + q'_3P_2 + r_3P_3 ; \end{cases}$$

$$(40)_2 \qquad \begin{cases} Q_a = p'_1Q_1 + q'_1Q_2 + r_1Q_3 , \\ Q_b = p'_2Q_1 + q'_2Q_2 + r_2Q_3 , \\ Q_c = p'_3Q_1 + q'_3Q_2 + r_3Q_3 ; \end{cases}$$

$$(40)_3 \qquad \begin{cases} R_a = p'_1R_1 + q'_1R_2 + r_1R_3 , \\ R_b = p'_2R_1 + q'_2R_2 + r_2R_3 , \\ R_c = p'_3R_1 + q'_3R_2 + r_3R_3 . \end{cases}$$

Ugy határozandók meg tehát közelebbről a P_1, Q_1, R_1 stb. mennyiségek r és (rs') változók függvényeiként, hogy e (40) alatti kilencz kifejezés kapcsán a (39) alattiak jobb oldalai valóban három függvénynek ott kijelentett partiális derivátumaik legyenek.

8. §. A (39) és (40) számok alatt foglalt rendszerből egy másik, vele æquivalens rendszert származtatok, a mely jóval alkalmasabb a végrehajtandó számvetések formális eszközlésére.

Irjuk

$$(41)_1 \qquad \begin{cases} p'_1P_1 + q'_1Q_1 + r_1R_1 = A'_1 , \\ p'_1P_2 + q'_1Q_2 + r_1R_2 = B'_1 , \\ p'_1P_3 + q'_1Q_3 + r_1R_3 = C'_1 ; \end{cases}$$

$$(41)_2 \qquad \begin{cases} p'_2P_1 + q'_2Q_1 + r_2R_1 = A'_2 , \\ p'_2P_2 + q'_2Q_2 + r_2R_2 = B'_2 , \\ p'_2P_3 + q'_2Q_3 + r_2R_3 = C'_2 ; \end{cases}$$

$$(41)_3 \qquad \begin{cases} p'_3P_1 + q'_3Q_1 + r_3R_1 = A'_3 , \\ p'_3P_2 + q'_3Q_2 + r_3R_2 = B'_3 , \\ p'_3P_3 + q'_3Q_3 + r_3R_3 = C'_3 . \end{cases}$$

Hogyha a (40) számok alatt lévő kifejezéseket bejegyezve képzeljük a (39) számok alatt lévő egyenletekbe, könnyen észrevehetjük, hogy csak a jobb-oldalok kissé másként való rendezésén alapul, miként (41) értelmében.

$$(42)_1 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a} = p_1' A_1' + q_1' B_1' + r_1 C_1', \\ \dfrac{\partial f}{\partial b} = p_2' A_1' + q_2' B_1' + r_2 C_1', \\ \dfrac{\partial f}{\partial c} = p_3' A_1' + q_3' B_1' + r_3 C_1'; \end{cases}$$

$$(42)_2 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial a} = p_1' A_2' + q_1' B_2' + r_1 C_2', \\ \dfrac{\partial g}{\partial b} = p_2' A_2' + q_2' B_2' + r_2 C_2', \\ \dfrac{\partial g}{\partial c} = p_3' A_2' + q_3' B_2' + r_3 C_2', \end{cases}$$

$$(42)_3 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial a} = p_1' A_3' + q_1' B_3' + r_1 C_3', \\ \dfrac{\partial h}{\partial b} = p_2' A_3' + q_2' B_3' + r_2 C_3', \\ \dfrac{\partial h}{\partial c} = p_3' A_3' + q_3' B_3' + r_3 C_3'. \end{cases}$$

Ez a (41) és (42) számok alatt foglalt rendszer azonos a (40) és (39) számok alatt foglalt rendszerrel. Az új rendszernek a majd keresztül viendő calculus szempontjából az az előnye van az előbbi fölött, hogy nála az f, g, h functiók mindegyikének a három kifejezésében összesen csak három közvetítő functió-alak szerepel, és pedig a $(42)_1$-ben A_1', B_1', C_1', a $(42)_2$-ben A_2', B_2', C_2', a $(42)_3$-ban A_3', B_3', C_3', míg az előbbi rendszer az f, g, h functiók mindegyikének a kifejezésében (39!) mind a kilencz ott közvetítő functió-alakot P_a, Q_a, R_a stb. tartalmazza. Már most a P_1, Q_1, R_1 stb. mennyiségek úgy határozandók meg közelebbről az r és (rs') változók függvényei gyanánt, hogy a (41) számok alatti kifejezések rendjén a (42) számok alatti jobb-oldalok tényleg a bal-oldalakon feltüntetett partiális függvény-derivátumok legyenek.

Erre a czélra szolgáló egyenleteket kapunk, ha a (42) alatti egyenletekből az f, g, h functiókat a

$$\frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial f}{\partial b}-\frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial f}{\partial c}=0,\quad \frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial f}{\partial c}-\frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial f}{\partial a}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial f}{\partial a}-\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial f}{\partial b}=0,\ \text{stb.}$$

azonosságok révén elimináljuk. Azonban az (rs') és p_1', q_1' stb. cosinusoknak a, b, c szerinti derivátumaik, habár ők maguk nem is mondhatók complicáltaknak, mégis kényelmetlenül öszszetett kifejezésekhez vezetnek. Ennek az alkalmatlanságnak a kikerülése végett az A_1', B_1', C_1' stb., valamint a P_1, Q_1, R_1 stb. mennyiségeket másokkal helyettesítem, és pedig A_1', B_1', C_1' stb. helyébe A_1, B_1, C_1 stb., P_1, Q_1, R_1 stb. helyébe F_1, G_1, H_1 stb. mennyiségeket a következő czélirányos meghatározásokkal iktatok:

$$(43)\quad \begin{cases} A_1'=(q's')\,rA_1, & B_1'=(q's')\,B_1, & C_1'=(rs')\,B_1+rC_1;\\ A_2'=(q's')\,rA_2, & B_2'=(q's')\,B_2, & C_2'=(rs')\,B_2+rC_2;\\ A_3'=(q's')\,rA_3, & B_3'=(q's')\,B_3, & C_3'=(rs')\,B_3+rC_3. \end{cases}$$

$$(44)\quad \left|\begin{array}{l} P_1=(q's')^2r^2F_1,\quad Q_1=(q's')^2rG_1,\quad R_1=(q's')\,r\,[(rs')\,G_1+rH_1];\\ P_2=(q's')^2r\,F_2,\quad Q_2=(q's')^2\,G_2,\quad R_2=(q's')\,[(rs')\,G_2+rH_2];\\ \qquad P_3=(q's')\,r\,[(rs')\,F_2+rF_3],\\ \qquad Q_3=(q's')\,[(rs')\,G_2+rG_3],\\ \qquad R_3=(rs')\,[(rs')\,G_2+rH_2]+r\,[rs')\,G_3+rH_3]. \end{array}\right.$$

A (8)′ és (7)′ relatiók bevonásával, a (42) alattiak a (43) alattiak által ezekké válnak:

$$(45)_1\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a}=(rs')_1rA_1+s_1'B_1+r_1rC_1,\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial b}=(rs')_2rA_1+s_2'B_1+r_2rC_1,\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial c}=(rs')_3rA_1+s_3'B_1+r_3rC_1; \end{cases}$$

$$(45)_2 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial a} = (rs')_1 r A_2 + s'_1 B_2 + r_1 r C_2, \\ \dfrac{\partial g}{\partial b} = (rs')_2 r A_2 + s'_2 B_2 + r_2 r C_2, \\ \dfrac{\partial g}{\partial c} = (rs')_3 r A_2 + s'_3 B_2 + r_3 r C_2, \end{cases}$$

$$(45)_3 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial a} = (rs')_1 r A_3 + s'_1 B_3 + r_1 r C_3, \\ \dfrac{\partial h}{\partial b} = (rs')_2 r A_3 + s'_2 B_3 + r_2 r C_3, \\ \dfrac{\partial h}{\partial c} = (rs')_3 r A_3 + s'_3 B_3 + r_3 r C_3. \end{cases}$$

A (41) alattiakból pedig a (43) és (44) alattiak bevezetése után, mi mellett szintén tekintetbe veendők a (8)' és (7)' relátiók, ezek keríthetők elő:

$$(46)_1 \quad \begin{cases} A_1 = (rs')_1 r F_1 + s'_1 G_1 + r_1 r H_1, \\ B_1 = (rs')_1 r F_2 + s'_1 G_2 + r_1 r H_2, \\ C_1 = (rs')_1 r F_3 + s'_1 G_3 + r_1 r H_3; \end{cases}$$

$$(46)_2 \quad \begin{cases} A_2 = (rs')_2 r F_1 + s'_2 G_1 + r_2 r H_1, \\ B_2 = (rs')_2 r F_2 + s'_2 G_2 + r_2 r H_2, \\ C_2 = (rs')_2 r F_3 + s'_2 G_3 + r_2 r H_3; \end{cases}$$

$$(46)_3 \quad \begin{cases} A_3 = (rs')_3 r F_1 + s'_3 G_1 + r_3 r H_1, \\ B_3 = (rs')_3 r F_2 + s'_3 G_2 + r_3 r H_2, \\ C_3 = (rs')_3 r F_3 + s'_3 G_3 + r_3 r H_3. \end{cases}$$

A (44) alatti definitiókból közvetlenül kiviláglik, hogy az F_1, G_1, H_1 stb. függvények épen úgy, mint P_1, Q_1, R_1 stb. függvények csupán az r távolság és az (rs') cosinustól függenek; ugyanis a $(q's')$ cosinus az (rs') cosinus függvénye (6!)' már pedig ezen a $(q's')$ mennyiségen kívül még csak r és (rs') fordul elő az F_1, G_1, H_1 stb. meg a P_1, Q_1, R_1 stb. functiók társaságában a (44) alatti formulákban. Úgy határozandók meg tehát F_1, G_1, H_1 stb. mennyiségek az r és (rs') változók függvényeiként, hogy a (46) számok alatti kifejezések rendjén a (45) számok alatti jobb-oldalok tényleg három functiónak az ottani baloldalakon kijelentett partiális derivátumaik legyenek.

A ds elem helyének a coordinátáit a, b, c s a ds' elem helyének coordinátáit a', b', c' jelölik az x, y, z coordináta-rendszerben (3. §!). Igy

$$r_1 r = a' - a, \quad r_2 r = b' - b, \quad r_3 r = c' - c,$$

mert az r irány a ds elemtől a ds' elem felé nyúlik (1. §!), és r_1, r_2, r_3 ennek az iránynak az x, y, z coordináta-rendszerbe tartozó iránycosinusai. Egyszersmind tehát

$$(rs')_1 r = (r_3 s'_2 - r_2 s'_3)\, r = (c' - c)\, s'_2 - (b' - b)\, s'_3,$$

$$(rs')_2 r = (r_1 s'_3 - r_3 s'_1)\, r = (a' - a)\, s'_3 - (c' - c)\, s'_1,$$

$$(rs')_3 r = (r_2 s'_1 - r_1 s'_2)\, r = (b' - b)\, s'_1 - (a' - a)\, s'_2.$$

Használjuk az

$$(47) \qquad a' - a = e_1, \quad b' - b = e_2, \quad c' - c = e_3$$

rövidítéseket. Ezek értelmében

$$r_1 r = e_1, \quad r_2 r = e_2, \quad r_3 r = e_3;$$

$$(rs')_1 r = e_3 s'_2 - e_2 s'_3, \quad (rs')_2 r = e_1 s'_3 - e_3 s'_1, \quad (rs')_3 r = e_2 s'_1 - e_1 s'_2,$$

minélfogva a (45) és (46) számok alatti kifejezések így jegyezhetők:

$$(48)_1 \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a} = (e_3 s'_2 - e_2 s'_3)\, A_1 + s'_1 B_1 + e_1 C_1, \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial b} = (e_1 s'_3 - e_3 s'_1)\, A_1 + s'_2 B_1 + e_2 C_1, \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial c} = (e_2 s'_1 - e_1 s'_2)\, A_1 + s'_3 B_1 + e_3 C_1; \end{cases}$$

$$(48)_2 \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial a} = (e_3 s'_2 - e_2 s'_3)\, A_2 + s'_1 B_2 + e_1 C_2, \\[2mm] \dfrac{\partial g}{\partial b} = (e_1 s'_3 - e_3 s'_1)\, A_2 + s'_2 B_2 + e_2 C_2, \\[2mm] \dfrac{\partial g}{\partial c} = (e_2 s'_1 - e_1 s'_2)\, A_2 + s'_3 B_2 + e_3 C_2; \end{cases}$$

$$
(48)_3 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial a} = (e_3 s_2' - e_2 s_3')\, A_3 + s_1' B_3 + e_1 C_3\,, \\[2mm] \dfrac{\partial h}{\partial b} = (e_1 s_3' - e_3 s_1')\, A_3 + s_2' B_3 + e_2 C_3\,, \\[2mm] \dfrac{\partial h}{\partial c} = (e_2 s_1' - e_1 s_2')\, A_3 + s_3' B_3 + e_3 C_3\,. \end{cases}
$$

$$
(49)_1 \quad \begin{cases} A_1 = (e_3 s_2' - e_2 s_3')\, F_1 + s_1' G_1 + e_1 H_1\,, \\ B_1 = (e_3 s_2' - e_2 s_3')\, F_2 + s_1' G_2 + e_1 H_2\,, \\ C_1 = (e_3 s_2' - e_2 s_3')\, F_3 + s_1' G_3 + e_1 H_3\,; \end{cases}
$$

$$
(49)_2 \quad \begin{cases} A_2 = (e_1 e_3' - e_3 s_1')\, F_1 + s_2' G_1 + e_2 H_1\,, \\ B_2 = (e_1 e_3' - e_3 s_1')\, F_2 + s_2' G_2 + e_2 H_2\,, \\ C_2 = (e_1 s_3' - e_3 s_1')\, F_3 + s_2' G_3 + e_2 H_3\,; \end{cases}
$$

$$
(49)_3 \quad \begin{cases} A_3 = (e_2 s_1' - e_1 s_2')\, F_1 + s_3' G_1 + e_3 H_1\,, \\ B_3 = (e_2 s_1' - e_1 s_2')\, F_2 + s_3' G_2 + e_3 H_2\,, \\ C_3 = (e_2 s_1' - e_1 s_2')\, F_3 + s_3' G_3 + e_3 H_3\,. \end{cases}
$$

9. §. Úgy határozandók meg az r és (rs') változók függvényei gyanánt a (49)-ekben szereplő F_1, G_1, H_1 stb. functiók, hogy a (48) alatt lévő jobb-oldalakon teljesüljenek a

$$
\frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial f}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial f}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial f}{\partial c} - \frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial f}{\partial a} = 0,
$$
$$
\frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial f}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial f}{\partial b} = 0, \text{ stb.}
$$

módon szerkesztett egyenletek, vagy a mi mindegy (47 !), a

$$
(50) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial e_2}\dfrac{\partial f}{\partial c} - \dfrac{\partial}{\partial e_3}\dfrac{\partial f}{\partial b} = 0, \quad \dfrac{\partial}{\partial e_3}\dfrac{\partial f}{\partial a} - \dfrac{\partial}{\partial e_1}\dfrac{\partial f}{\partial c} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial e_1}\dfrac{\partial f}{\partial b} - \dfrac{\partial}{\partial e_2}\dfrac{\partial f}{\partial a} = 0, \text{ stb.} \end{cases}
$$

módon szerkesztett egyenletek. De előnyös lesz úgy fogni fel az F_1, G_1, H_1 stb. függvényeket, mint

$$
(51) \quad \begin{cases} (rs')\, r = e_1 s_1' + e_2 s_2' + e_3 s_3' = m, \\[2mm] \dfrac{1}{2}\, r^2 = \dfrac{1}{2}\,(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = n, \end{cases}
$$

kifejezések függvényeit, a mi nyilvánvalólag egyértelmű az előbbi felfogással, a mely szerint t. i. az r és (rs') változó függvényeinek tekintők azokat. Ehhez képest az a feladat vár reánk, hogy úgy határozzuk meg a (49)-ekben foglalt F_1, G_1, H_1 stb. functiókat az m és n mennyiségek functiói gyanánt, miszerint a (48)-ak jobb-oldalai eleget tegyenek az (50) által reájuk rótt egyenleteknek.

Ha most is, hogy az e_1, e_2, e_3 új mennyiségek nem iránycosinusok, hanem coordináta-különbségek, élünk az

$$e_3s_2' - e_2s_3' = (es')_1, \quad e_1s_3' - e_3s_1' = (es')_2, \quad e_2s_1' - e_1s_2' = (es')_3,$$

jelzésekkel, akkor a (48) alattiak jobb-oldalainak az (50) alattiakba való bevezetése nyomán eredő egyenleteket így jegyezhetjük:

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned}
&2s_1'A_1 + (es')_3\frac{\partial A_1}{\partial e_2} - (es')_2\frac{\partial A_1}{\partial e_3} + s_3'\frac{\partial B_1}{\partial e_2} - s_2'\frac{\partial B_1}{\partial e_3} + \\
&\qquad + e_3\frac{\partial C_1}{\partial e_2} - e_2\frac{\partial C_1}{\partial e_3} = 0,\\
&2s_2'A_1 + (es')_1\frac{\partial A_1}{\partial e_3} - (es')_3\frac{\partial A_1}{\partial e_1} + s_1'\frac{\partial B_1}{\partial e_3} - s_3'\frac{\partial B_1}{\partial e_1} + \\
&\qquad + e_1\frac{\partial C_1}{\partial e_3} - e_3\frac{\partial C_1}{\partial e_1} = 0,\\
&2s_3'A_1 + (es')_2\frac{\partial A_1}{\partial e_1} - (es')_1\frac{\partial A_1}{\partial e_2} + s_2'\frac{\partial B_1}{\partial e_1} - s_1'\frac{\partial B_1}{\partial e_2} + \\
&\qquad + e_2\frac{\partial C_1}{\partial e_1} - e_1\frac{\partial C_1}{\partial e_2} = 0;\\
&\qquad\qquad \text{stb.}
\end{aligned}\right.$$

Az itt kiírt három egyenlet alapján a ki nem írt hat egyenlet egyszerűen úgy képezhető, hogy A_1, B_1, C_1 helyébe egy ízben A_2, B_2, C_2, egy ízben A_3, B_3, C_3 teszszük. Hátra van az A_1, B_1, C_1 stb. mennyiségeknek az (52)-ben előforduló derivátumait a (49) alattiak rendjén az F_1, G_1, H_1 stb. functiók segélyével fejezni ki. Az (51) alatti definitiókra való tekintettel könnyű szerrel találjuk:

$$
(53)_1 \quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial A_1}{\partial e_1} &= s_1' \frac{\partial A_1}{\partial m} + e_1 \frac{\partial A_1}{\partial n} + H_1, \\
\frac{\partial A_1}{\partial e_2} &= s_2' \frac{\partial A_1}{\partial m} + e_2 \frac{\partial A_1}{\partial n} - s_3' F_1, \\
\frac{\partial A_1}{\partial e_3} &= s_3' \frac{\partial A_1}{\partial m} + e_3 \frac{\partial A_1}{\partial n} + s_2' F_1;
\end{aligned}\right. \qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial A_1}{\partial m} &= (es')_1 \frac{\partial F_1}{\partial m} + s_1' \frac{\partial G_1}{\partial m} + e_1 \frac{\partial H_1}{\partial m}, \\
\frac{\partial A_1}{\partial n} &= (es')_1 \frac{\partial F_1}{\partial n} + s_1' \frac{\partial G_1}{\partial n} + e_1 \frac{\partial H_1}{\partial n},
\end{aligned}
$$

$$
(53)_2 \quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial A_2}{\partial e_1} &= s_1' \frac{\partial A_2}{\partial m} + e_1 \frac{\partial A_2}{\partial n} + s_3' F_1, \\
\frac{\partial A_2}{\partial e_2} &= s_2' \frac{\partial A_2}{\partial m} + e_2 \frac{\partial A_2}{\partial n} + H_1, \\
\frac{\partial A_2}{\partial e_3} &= s_3' \frac{\partial A_2}{\partial m} + e_3 \frac{\partial A_2}{\partial n} - s_1' F_1;
\end{aligned}\right. \qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial A_2}{\partial m} &= (es')_2 \frac{\partial F_1}{\partial m} + s_2' \frac{\partial G_1}{\partial m} + e_2 \frac{\partial H_1}{\partial m}, \\
\frac{\partial A_2}{\partial n} &= (es')_2 \frac{\partial F_1}{\partial n} + s_2' \frac{\partial G_1}{\partial n} + e_2 \frac{\partial H_1}{\partial n};
\end{aligned}
$$

$$
(53)_3 \quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial A_3}{\partial e_1} &= s_1' \frac{\partial A_3}{\partial m} + e_1 \frac{\partial A_3}{\partial n} - s_2' F_1, \\
\frac{\partial A_3}{\partial e_2} &= s_2' \frac{\partial A_3}{\partial m} + e_2 \frac{\partial A_3}{\partial n} + s_1' F_1, \\
\frac{\partial A_3}{\partial e_3} &= s_3' \frac{\partial A_3}{\partial m} + e_3 \frac{\partial A_3}{\partial n} + H_1;
\end{aligned}\right. \qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial A_3}{\partial m} &= (es')_3 \frac{\partial F_1}{\partial m} + s_3' \frac{\partial G_1}{\partial m} + e_3 \frac{\partial H_1}{\partial m}, \\
\frac{\partial A_3}{\partial n} &= (es')_3 \frac{\partial F_1}{\partial n} + s_3' \frac{\partial G_1}{\partial n} + e_3 \frac{\partial H_1}{\partial n};
\end{aligned}
$$

stb.

a hol a jobbról álló kifejezések jobb-oldalai csak definitióik az ő bal-oldalaiknak, mint a balról álló kifejezésekben foglalt aféle rövidítő symbolumoknak.

Ebből az itt kiírt három csoportból úgy képezhető a ki nem írt hat csoport, hogy az A_1, A_2, A_3, F_1, G_1, H_1 helyébe egy ízben B_1, B_2, B_3, F_2, G_2, H_2, egy ízben C_1, C_2, C_3, F_3, G_3, H_3 rakjuk.

Ha az (53) alatti stb. kifejezéseket bevezetjük az (52) alatti stb. egyenletekbe, nehézkes bonyodalomba ütközünk. Ennek az elhárítására az (52) stb. egyenletekből más, velük æquivalens egyenleteket származtatok. Szorozzuk meg az (52) alatti egyenleteket rendre $(es')_1$, $(es')_2$, $(es')_3$-vel, azután adjuk össze őket és ezt az eljárásmódot alkalmazzuk az s'_1, s'_2, s'_3 meg az e_1, e_2, e_3-re nézve is, mint egyenlet-szorzókra nézve. Az ekként nyert három egyenletben tartsuk számon ez algebrai azonosságokat (51 !):

$$(es')_3 s'_2 - (es')_2 s'_3 = ms'_1 - e_1,$$
$$(es')_1 s'_3 - (es')_3 s'_1 = ms'_2 - e_2,$$
$$(es')_2 s'_1 - (es')_1 s'_2 = ms'_3 - e_3;$$

$$(es')_3 e_2 - (es')_2 e_3 = 2ns'_1 - me_1,$$
$$(es')_1 e_3 - (es')_3 e_1 = 2ns'_2 - me_2,$$
$$(es')_2 e_1 - (es')_1 e_2 = 2ns'_3 - me_3;$$

$$(es')_1 s'_1 + (es')_2 s'_2 + (es')_3 s'_3 = 0,$$
$$(es')_1 e_1 + (es')_2 e_2 + (es')_3 e_3 = 0;$$

és akkor a következő alakban jelenkeznek az (52)-vel æquivalens eredményes egyenletek:

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned}
&(ms'_1-e_1)\frac{\partial B_1}{\partial e_1}+(ms'_2-e_2)\frac{\partial B_1}{\partial e_2}+(ms'_3-e_3)\frac{\partial B_1}{\partial e_3}+\\
&+(2ns'_1-me_1)\frac{\partial C_1}{\partial e_1}+(2ns'_2-me_2)\frac{\partial C_1}{\partial e_2}+(2ns'_3-me_3)\frac{\partial C_1}{\partial e_3}=0,\\
&2A_1+(e_1-ms'_1)\frac{\partial A_1}{\partial e_1}+(e_2-ms'_2)\frac{\partial A_1}{\partial e_2}+(e_3-ms'_3)\frac{\partial A_1}{\partial e_3}+\\
&+(s'e)_1\frac{\partial C_1}{\partial e_1}+(s'e)_2\frac{\partial C_1}{\partial e_2}+(s'e)_3\frac{\partial C_1}{\partial e_3}=0,\\
&2mA_1+(me_1-2ns'_1)\frac{\partial A_1}{\partial e_1}+(me_2-2ns'_2)\frac{\partial A_1}{\partial e_2}+(me_3-2ns'_3)\frac{\partial A_1}{\partial e_3}+\\
&+(es')_1\frac{\partial B_1}{\partial e_1}+(es')_2\frac{\partial B_1}{\partial e_2}+(es')_3\frac{\partial B_1}{\partial e_3}=0;
\end{aligned}\right.$$

stb.

Az itt kiírt három egyenletből a ki nem írt hat egyenlet azáltal kerül elő, hogy az A_1, B_1, C_1 helyett egy ízben A_2, B_2, C_2, egy ízben A_3, B_3, C_3 jegyeztetik. Ezek az egyenletek æquivalensek az (52) alattiakkal, de alkalmasabban fogadják be az (53) alatti kifejezéseket mint amazok.

10. §. Iktassuk be már most az (54) alatt kiírt és ki nem írt, összesen kilencz egyenletbe az (53) alatt kiírt és ki nem írt, összesen huszonhét derivátumnak a balról álló kifejezéseit. E mellett felhasználván az (51) alatti jelzéseket és tekintettel lévén a következő algebrai azonosságokra:

$$\begin{aligned}
&(es')_1\, s'_1+(es')_2\, s'_2+(es')_3\, s'_3=0,\\
&(es')_1\, e_1+(es')_2\, e_2+(es')_3\, e_3=0,\\
&(es')_1^2+(es')_2^2+(es')_3^2=2n-m^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(es')_3\, s'_2-(es')_2\, s'_3=ms'_1-e_1,\\
&(es')_1\, s'_3-(es')_3\, s'_1=ms'_2-e_2,\\
&(es')_2\, s'_1-(es')_1\, s'_2=ms'_3-e_3,
\end{aligned}$$

ehhez a kilencz egyenlethez jutunk:

$$(55)_1 \quad \begin{cases} (2n-m^2)\left(\dfrac{\partial C_1}{\partial m}-\dfrac{\partial B_1}{\partial n}\right)+(ms_1'-e_1)\,H_2+(2ns_1'-me_1)\,H_3+(s'e)_1\,(F_2+mF_3)=0, \\ (2n-m^2)\left(\dfrac{\partial C_2}{\partial m}-\dfrac{\partial B_2}{\partial n}\right)+(ms_2'-e_2)\,H_2+(2ns_2'-me_2)\,H_3+(s'e)_2\,(F_2+mF_3)=0, \\ (2n-m^2)\left(\dfrac{\partial C_3}{\partial m}-\dfrac{\partial B_3}{\partial n}\right)+(ms_3'-e_3)\,H_2+(2ns_3'-me_3)\,H_3+(s'e)_3\,(F_2+mF_3)=0; \end{cases}$$

$$(55)_2 \quad \begin{cases} 2A_1+(2n-m^2)\dfrac{\partial A_1}{\partial n}+(e_1-ms_1')\,(F_3+H_1)+(es')_1\,(F_1-H_3)=0, \\ 2A_2+(2n-m^2)\dfrac{\partial A_2}{\partial n}+(e_2-ms_2')\,(F_3+H_1)+(es')_2\,(F_1-H_3)=0, \\ 2A_3+(2n-m^2)\dfrac{\partial A_3}{\partial n}+(e_3-ms_3')\,(F_3+H_1)+(es')_3\,(F_1-H_3)=0; \end{cases}$$

$$(55)_3 \quad \begin{cases} 2mA_1+(m^2-2n)\dfrac{\partial A_1}{\partial m}+(ms_1'-e_1)\,F_2+(me_1-2ns_1')\,H_1+(es')_1\,(mF_1+H_2)=0, \\ 2mA_2+(m^2-2n)\dfrac{\partial A_2}{\partial m}+(ms_2'-e_2)\,F_2+(me_2-2ns_2')\,H_1+(es')_2\,(mF_1+H_2)=0, \\ 2mA_3+(m^2-2n)\dfrac{\partial A_3}{\partial m}+(ms_3'-e_3)\,F_2+(me_3-2ns_3')\,H_1+(es')_3\,(mF_1+H_2)=0. \end{cases}$$

Ezekbe be kellene intézni az m és n szerinti derivátiós symbolumok helyett az (53) alatt jobbról álló kiírt, valamint ki nem írt kifejezéseket és nem különben A_1, A_2, A_3-nak a (49) alatti kifejezéseit.

De czélszerű, előbb csoportonkint ugyanazon a módon származtatni ebből az (55) alatti kilencz egyenletből másik kilencz egyenletet, a mely módon az (52) alatti egyenletből származtatók az (54) alatti egyenleteket. Ennek megfelelően a 30. oldalon jellemzett eljárást alkalmazva az (55) számú három csoport mindegyikére, s emellett az (51) alatti jelölésekre is ügyet vetve, az (55) alattiakkal æquivalens, következő egyenlet-csoportokhoz jutunk:

$$
(56)_1 \left\{
\begin{aligned}
&(es')_1\left(\frac{\partial B_1}{\partial n}-\frac{\partial C_1}{\partial m}\right)+(es')_2\left(\frac{\partial B_2}{\partial n}-\frac{\partial C_2}{\partial m}\right)+(es')_3\left(\frac{\partial B_3}{\partial n}-\frac{\partial C_3}{\partial m}\right)+F_2+mF_3=0,\\
&s'_1\left(\frac{\partial B_1}{\partial n}-\frac{\partial C_1}{\partial m}\right)+s'_2\left(\frac{\partial B_2}{\partial n}-\frac{\partial C_2}{\partial m}\right)+s'_3\left(\frac{\partial B_3}{\partial n}-\frac{\partial C_3}{\partial m}\right)-H_3=0,\\
&e_1\left(\frac{\partial B_1}{\partial n}-\frac{\partial C_1}{\partial m}\right)+e_2\left(\frac{\partial B_2}{\partial n}-\frac{\partial C_2}{\partial m}\right)+e_3\left(\frac{\partial B_3}{\partial n}-\frac{\partial C_3}{\partial m}\right)+H_2=0;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(56)_2 \left\{
\begin{aligned}
&2[(es')_1A_1+(es')_2A_2+(es')_3A_3]+(2n-m^2)\left[(es')_1\frac{\partial A_1}{\partial n}+(es')_2\frac{\partial A_2}{\partial n}+(es')_3\frac{\partial A_3}{\partial n}+F_1-H_3\right]=0,\\
&2[s'_1A_1+s'_2A_2+s'_3A_3]+(2n-m^2)\left[s'_1\frac{\partial A_1}{\partial n}+s'_2\frac{\partial A_2}{\partial n}+s'_3\frac{\partial A_3}{\partial n}\right]=0,\\
&2[e_1A_1+e_2A_2+e_3A_3]+(2n-m^2)\left[e_1\frac{\partial A_1}{\partial n}+e_2\frac{\partial A_2}{\partial n}+e_3\frac{\partial A_3}{\partial n}+F_3+H_1\right]=0;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(56)_3 \left\{
\begin{aligned}
&2m[(es')_1A_1+(es')_2A_2+(es')_3A_3]-(2n-m^2)\left[(es')_1\frac{\partial A_1}{\partial m}+(es')_2\frac{\partial A_2}{\partial m}+(es')_3\frac{\partial A_3}{\partial m}-mF_1-H_2\right]=0,\\
&2m[s'_1A_1+s'_2A_2+s'_3A_3]-(2n-m^2)\left[s'_1\frac{\partial A_1}{\partial m}+s'_2\frac{\partial A_2}{\partial m}+s'_3\frac{\partial A_3}{\partial m}+H_1\right]=0,\\
&2m[e_1A_1+e_2A_2+e_3A_3]-(2n-m^2)\left[e_1\frac{\partial A_1}{\partial m}+e_2\frac{\partial A_2}{\partial m}+e_3\frac{\partial A_3}{\partial m}+F_2\right]=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Vigyük be most ezekbe (53)-ból az ott jobb felől álló m és n szerinti derivátiós symbolumok alakjait, úgy a kiirtakat, mint a ki nem irtakat is, a mely utóbbiak képezési módjára nézve azonban ott van az utasítás. Továbbá vigyük be (49)-ből A_1, A_2, A_3 alakjait. Ismét tekintettel lévén az e §. elején jegyzett algebrai azonosságokra, valamint az (51) alatti jelölésekre, a következő végleges egyenleteket találjuk:

$$1 \quad (2n-m^2)\left(\frac{\partial F_2}{\partial n}-\frac{\partial F_3}{\partial m}\right)+F_2+mF_3=0,$$

$$2 \quad \frac{\partial G_3}{\partial m}-\frac{\partial G_2}{\partial n}+m\left(\frac{\partial H_3}{\partial m}-\frac{\partial H_2}{\partial n}\right)+H_3=0,$$

$$3 \quad m\left(\frac{\partial G_2}{\partial n}-\frac{\partial G_3}{\partial m}\right)+2n\left(\frac{\partial H_2}{\partial n}-\frac{\partial H_3}{\partial m}\right)+H_2=0;$$

$$4 \quad (2n-m^2)\frac{\partial F_1}{\partial n}+3F_1-H_3=0,$$

$$5 \quad (2n-m^2)\left(\frac{\partial G_1}{\partial n}+m\frac{\partial H_1}{\partial n}\right)+2(G_1+mH_1)=0,$$

$$6 \quad (2n-m^2)\left(m\frac{\partial G_1}{\partial n}+2n\frac{\partial H_1}{\partial n}+F_3+H_1\right)+ \\ +2(mG_1+2nH_1)=0;$$

$$7 \quad (2n-m^2)\frac{\partial F_1}{\partial m}-3mF_1-H_2=0,$$

$$8 \quad (2n-m^2)\left(\frac{\partial G_1}{\partial m}+m\frac{\partial H_1}{\partial m}+H_1\right)-2m(G_1+mH_1)=0,$$

$$9 \quad (2n-m^2)\left(m\frac{\partial G_1}{\partial m}+2n\frac{\partial G_1}{\partial m}+F_2\right)-2m(mG_1+2nH_1)=0.$$

Ezek az egyenletek a maguk származásának a módjánál fogva úgy határozzák meg az F_1, G_1, H_1 stb. functiókat, az m és n (51!) functiói gyanánt, hogy a (49) alatti kifejezések rendjén a (48) alatti egyenletek jobb-oldalai rá szolgálnak a baloldalokra, vagyis három functiónak a bal-oldalok követelte partiális derivátumait képezik.

11. §. Igen könnyen oldható meg az egyenlet-rendszerünk. Az **5** és **8** egyenletekkel kezdem. Ezek így is írhatók:

$$(2n-m^2)\frac{\partial}{\partial n}(G_1+mH_1)+2(G_1+mH_1)=0,$$

$$(2n-m^2)\frac{\partial}{\partial m}(G_1+mH_1)-2m(G_1+mH_1)=0.$$

Belőlük, megoldásukul

[1] $$G_1=\frac{a}{2n-m^2}-mH_1$$

következik, a melyben az a tetszőleges constans.

Vigyük be G_1-nek ezt a kifejezését a **6** és **9** egyenletbe s találjuk

[2] $$\begin{cases} F_3=-3H_1-(2n-m^2)\dfrac{\partial H_1}{\partial n}, \\ F_2=3mH_1-(2n-m^2)\dfrac{\partial H_1}{\partial m}. \end{cases}$$

A **4** és **7** alatti egyenletből egyszerűen algebrailag ered

[3] $$\begin{cases} H_3=3F_1+(2n-m^2)\dfrac{\partial F_1}{\partial n}, \\ H_2=-3mF_1+(2n-m^2)\dfrac{\partial F_1}{\partial m}. \end{cases}$$

Elimináljuk **2** és **3**-ból a

$$\frac{\partial G_3}{\partial m}-\frac{\partial G_2}{\partial n}$$

mennyiséget és találjuk

$$(2n-m^2)\left(\frac{\partial H_2}{\partial n}-\frac{\partial H_3}{\partial m}\right)+H_2+mH_3=0.$$

Ez az egyenlet, meg az **1** alatti hasonló egyenlet, már H_2 és H_3-nak illetőleg F_2 és F_3-nek [3] illetőleg [2] alatti alakjaival kielégítést nyer.

Végül iktassuk be H_2 és H_3-nak [3] alatti alakját a **2** és **3** egyenletbe. Mindkét egyenlet folyományaként

$$\frac{\partial G_2}{\partial n} - \frac{\partial G_3}{\partial m} = 3F_1 + m\frac{\partial F_1}{\partial m} + 2n\frac{\partial F_1}{\partial n}$$

kapjuk, a mi pedig így is írható:

$$[4] \quad \frac{\partial G_2}{\partial n} - \frac{\partial G_3}{\partial m} = F_1 + m\frac{\partial F_1}{\partial m} + 2\frac{\partial (nF_1)}{\partial n}.$$

Mindezek szerint az F_1, H_1 és vagy a G_2, vagy a G_3, tetszőleges függvényeik m és n-nek, míg a G_1, F_3, F_2, H_3, H_2 és megfelelőképpen a G_3 vagy a G_2 az [1], [2], [3], [4] számok alatt az előbbi függvényekkel és az a constanssal határozvák meg. Ezt a meghatározást előnyösen eszközölhetjük három, részben új functio F, G, H közvetítésével. Legyen

$$* \quad F_1 = \frac{\partial F}{\partial n}, \quad G_3 = \frac{\partial G}{\partial n}, \quad H_1 = H.$$

Az [1], [2], [3], [4]-ből folyólag, ha teljesség kedveért egyszersmind ugyancsak ezt a * három definitiót is befogjuk a sorozatba, van

$$(F) \quad \begin{cases} F_1 = \dfrac{\partial F}{\partial n}, \\ F_2 = \quad 3mH - (2n - m^2)\dfrac{\partial H}{\partial m}, \\ F_3 = - \quad 3H - (2n - m^2)\dfrac{\partial H}{\partial n}; \end{cases}$$

$$(G) \quad \begin{cases} G_1 = \dfrac{a}{2n - m^2} - mH, \\ G_2 = F + m\dfrac{\partial F}{\partial m} + 2n\dfrac{\partial F}{\partial n} + \dfrac{\partial G}{\partial m}, \\ G_3 = \dfrac{\partial G}{\partial n}; \end{cases}$$

$$(H) \quad \begin{cases} H_1 = H \\ H_2 = -3m\dfrac{\partial F}{\partial n} + (2n - m^2)\dfrac{\partial^2 F}{\partial m \partial n}, \\ H_3 = \quad 3\dfrac{\partial F}{\partial n} + (2n - m^2)\dfrac{\partial^2 F}{\partial n^2}. \end{cases}$$

De egy kis megjegyzést kell tennem. A (G) alatti egyenletek második a $[4]$ egyenletből az n változóra szóló partiális integrátióval eredt, minélfogva a G_2-nek a kifejezéséhez az m változónak egy tetszőleges functiója volna additive csatolható. Jelölje ezt a tetszőleges functiót $\frac{d\theta}{dm}$. Vele így volna a G_2 kifejezése:

$$G_2 = F + m\frac{\partial F}{\partial m} + 2n\frac{\partial F}{\partial n} + \frac{\partial(G+\theta)}{\partial m}.$$

Azonban a G functio még csak a G_3 kifejezésében fordul elő s ez a kifejezés, amiatt, hogy θ az n-től független lehet, így írható:

$$G_3 = \frac{\partial(G+\theta)}{\partial n}.$$

Mivel a G tetszőleges functiója az m és n változóknak, a θ functio fölösleges.

12. §. Az (F), (G), (H) kifejezések úgy határozzák meg az F_1, G_1, H_1 stb. függvényeket, és pedig egészen általánosan, hogy a (48) alatti jobb-oldalok a bal-oldaloknak a (49) alattiak által megfelelnek. Most már csak az van hátra, hogy az (F), (G), (H) kifejezéseket a (49) alattiakba, azután ezeket a (48) alattiakba bevigyük, azután pedig úgy rendezzük az eredményes jobb-oldalokat, hogy ezeknek a bal-oldalokon jelzett caractere kellőleg előtünjék. Ennek a rendezésnek a során tekintettel kell lennünk bizonyos algebrai relátiókra, a melyek a (14) és (15) alattiakból származtathatók és pedig az által, hogy ezeket r-nek a négyzetével szorozzuk. Az (51) alatti jelölések rendjén így vannak a számbaveendő relátiók:

$$(es')_1^2 = 2n - m^2 - e_1^2 - 2ns_1'^2 + 2me_1s_1',$$
$$(es')_2^2 = 2n - m^2 - e_2^2 - 2ns_2'^2 + 2me_2s_2',$$
$$(es')_3^2 = 2n - m^2 - e_3^2 - 2ns_3'^2 + 2me_3s_3';$$

$$(es')_3(es')_2 = m(e_2s_3' + e_3s_2') - e_2e_3 - 2ns_2's_3',$$
$$(es')_1(es')_3 = m(e_3s_1' + e_1s_3') - e_3e_1 - 2ns_3's_1',$$
$$(es')_2(es')_1 = m(e_1s_2' + e_2s_1') - e_1e_2 - 2ns_1's_2'.$$

Úgy történik a számba-vételük, hogy miután az (F), (G), (H) alattiakat (49)-be, a (49) alattiakat pedig (48)-ba bevezettük, az eredményekben előforduló $(es')_1$ $(es')_1$ stb., meg $(es')_3$ $(es')_2$ stb. szorzatok helyébe mindenütt az ő emitti kifejezéseiket iktatjuk. Igy válik lehetségessé az oly módon való rendezés, a mely a (48) jobb-oldalainak a bal-oldalain követelt természetét kidomborítja. Ha ezeket a rövidítéseket használjuk:

$$(2n-m^2)\frac{\partial F}{\partial n} = -U,$$

$$mF + G = -V,$$

$$(2n-m^2)H = W,$$

akkor az eredmények így formulázhatók:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \left\{ \begin{array}{l} -\; e_1 s_1' \dfrac{\partial U}{\partial m} - e_1 e_1 \dfrac{\partial U}{\partial n} - U \\ -\; s_1' s_1' \dfrac{\partial V}{\partial m} - s_1' e_1 \dfrac{\partial V}{\partial n} \\ -(es')_1 s_1' \dfrac{\partial W}{\partial m} - (es')_1 e_1 \dfrac{\partial W}{\partial n} \\ +\; a \dfrac{s_1'(es')_1}{2n-m^2}, \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \left\{ \begin{array}{l} -\; e_1 s_2' \dfrac{\partial U}{\partial m} - e_1 e_2 \dfrac{\partial U}{\partial n} \\ -\; s_1' s_2' \dfrac{\partial V}{\partial m} - s_1' e_2 \dfrac{\partial V}{\partial n} \\ -(es')_1 s_2' \dfrac{\partial W}{\partial m} - (es')_1 e_2 \dfrac{\partial W}{\partial n} + s_3' W \\ +\; a \dfrac{s_1'(es')_2}{2n-m^2}; \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \left\{ \begin{array}{l} -\; e_1 s_3' \dfrac{\partial U}{\partial m} - e_1 e_3 \dfrac{\partial U}{\partial n} \\ -\; s_1' s_3' \dfrac{\partial V}{\partial m} - s_1' e_3 \dfrac{\partial V}{\partial n} \\ -(es')_1 s_3' \dfrac{\partial W}{\partial m} - (es')_1 e_3 \dfrac{\partial W}{\partial n} - s_2' W \\ +\; a \dfrac{s_1'(es')_3}{2n-m^2}; \end{array} \right.$$

stb.

Ezekből már fáradság nélkül kiolvashatni, hogy (47 !)

$$
(f)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial a} &= -\frac{\partial}{\partial e_1}[e_1U+s'_1V+(es')_1W]+as'_1\frac{(es')_1}{2n-m^2},\\
\frac{\partial f}{\partial b} &= -\frac{\partial}{\partial e_2}[e_1U+s'_1V+(es')_1W]+as'_1\frac{(es')_2}{2n-m^2},\\
\frac{\partial f}{\partial c} &= -\frac{\partial}{\partial e_3}[e_1U+s'_1V+(es')_1W]+as'_1\frac{(es')_3}{2n-m^2};
\end{aligned}\right.
$$

$$
(g)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial a} &= -\frac{\partial}{\partial e_1}[e_2U+s'_2V+(es')_2W]+as'_2\frac{(es')_1}{2n-m^2};\\
\frac{\partial g}{\partial b} &= -\frac{\partial}{\partial e_2}[e_2U+s'_2V+(es')_2W]+as'_2\frac{(es')_2}{2n-m^2},\\
\frac{\partial g}{\partial c} &= -\frac{\partial}{\partial e_3}[e_2U+s'_2V+(es')_2W]+as'_2\frac{(es')_3}{2n-m^2},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(h)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial a} &= -\frac{\partial}{\partial e_1}[e_3U+s'_3V+(es')_3W]+as'_3\frac{(es')_1}{2n-m^2},\\
\frac{\partial h}{\partial b} &= -\frac{\partial}{\partial e_2}[e_3U+s'_3V+(es')_3W]+as'_3\frac{(es')_2}{2n-m^2},\\
\frac{\partial h}{\partial c} &= -\frac{\partial}{\partial e_3}[e_3U+s'_3V+(es')_3W]+as'_3\frac{(es')_3}{2n-m^2}.
\end{aligned}\right.
$$

Ha visszaemlékezünk az e_1, e_2, e_3 mennyiségek definitiójára (47 !), haladéktalanul feljegyezhetjük az f, g, h functiók kifejezéseit. Éljünk ezzel a jelöléssel:

$$
(A)\qquad a\int\frac{(es')_1\,de_1+(es')_2\,de_2+(es')_3\,de_3}{(es')_1^2+(es')_2^2+(es')_3^2}=\tilde{\omega}.
$$

Tudva, hogy az integrátió jele alatti nevező annyi, mint $2n-m^2$, nyomban beláthatjuk, miként

$$
(B)\quad \left\{\begin{aligned}
f &= e_1U+s'_1(V-\tilde{\omega})+(e_3s'_2-e_2s'_3)W,\\
g &= e_2U+s'_2(V-\tilde{\omega})+(e_1s'_3-e_3s'_1)W,\\
h &= e_3U+s'_3(V-\tilde{\omega})+(e_2s'_1-e_1s'_2)W,
\end{aligned}\right.
$$

a hol $(es')_1$ stb. helyett ezeknek a definitióik $(e_3s'_2-e_2s'_3)$ stb. jegyezvék. Az integrátiók határozatlanai, amiatt, hogy physikai jelentőséggel az f, g, h functiók csak az incrementumaik révén bírnak, figyelmen kívül hagyhatók. Az (A) alatti integrális elemei természetesen teljes differentiálisok. A kifejtése reális alakban arcus-tangens segítségével ejthető meg, de nem szükségszerű.

A végrehajtott analysis rendjén U, V, W tetszőleges functióik az

$$m = (rs'), \quad n = \frac{1}{2} r^2$$

változóknak, vagy, ami mindegy, az (rs') cosinus és r távolságnak továbbá az a tetszőleges constans. Azonban a kitűzött probléma szempontjából az f, g, h functiók egyértékűek és folytonosak tartoznak lenni a ható áram vonalán. Már a (B)-ből

$$(e_1 - ms_1')\,f + (e_2 - ms_2')\,g + (e_3 - ms_3')\,h = (2n - m^2)\,U,$$

$$(2ns_1' - me_1)\,f + (2ns_2' - me_2)\,g + (2ns_3' - me_3)\,h = (2n - m^2)\,(V - \bar{\omega}),$$

$$(e_3 s_2' - e_2 s_3')\,f + (e_1 s_3' - e_3 s_1')\,g + (e_2 s_1' - e_1 s_2')\,h = (2n - m^2)\,W.$$

Ekként

$$(C) \qquad (2n - m^2)\,U, \quad (2n - m^2)\,(V - \bar{\omega}), \quad (2n - m^2)\,W$$

egyértékűek és folytonosak tartoznak lenni a ható áram vonalán.

A (B) alakok az (A) definitióval, meg a (C) kifejezésekhez fűzött követelménynyel kapcsolatban szükségképpeni következményeik a kitűzött probléma analytikus fogalmazásának. De meg is oldják a problémát, mert leszármaztatásuk módjánál fogva olyanok, hogy a

$$\frac{df}{ds}, \quad \frac{dg}{ds}, \quad \frac{dh}{ds}$$

erő — úgy nagyság, mint irány dolgában — független a coordináta-rendszer választásától meg az áramgörbék alakjától, a mit a következő czikkben (13. §.) szemtől-szembe is látni fogunk. Ezek szerint a (B) alakok általános megoldásaik a kitűzött problémának: az integrális hatás nélkül való összes elektrodynamikus elemi erőket szolgáltatják, és az (1) alatti kifejezésekbe ültetve, az Ampère-félékkel æquivalens összes elemi erőket kiadják.

13. §. Térjünk vissza a független változók régi jelöléseihez. Ezek kapcsán a (B) alatti kifejezések így vannak:

$$
(\mathrm{I})_1 \quad \begin{cases} f = r_1 r U + s_1' (V - \tilde{\omega}) + (rs')_1 r W, \\ g = r_2 r U + s_2' (V - \tilde{\omega}) + (rs')_2 r W, \\ h = r_3 r U + s_3' (V - \tilde{\omega}) + (rs')_3 r W, \end{cases}
$$

a melyekben

$$
\tilde{\omega} = -a \int \frac{(rs')_1 da + (rs')_2 db + (rs')_3 dc}{[(rs')_1^2 + (rs')_2^2 + (rs')_3^2] r}
$$

Azonban (3. §!)

$$
da = s_1 ds, \quad db = s_2 ds, \quad dc = s_3 ds.
$$

Jegyezzük be ezeket az integrátió jele alá. Minthogy a (8)' számu relátiók szerint

$$
(rs')_1 s_1 + (rs')_2 s_2 + (rs')_3 s_3 = (q's')\,(p_1' s_1 + p_2' s_2 + p_3' s_3) = (q's')\,(p's),
$$

és másfelől (6 !)'

$$
(rs')_1^2 + (rs')_2^2 + (rs')_3^2 = 1 - (rs')^2 = (q's')^2,
$$

így $\tilde{\omega}$ kifejezése ekként írható:

$$
(\mathrm{I})_2 \qquad \tilde{\omega} = -a \int \frac{(p's)}{(q's)} \frac{ds}{r}.
$$

Ezek értelmében az integrális hatás nélkül való elemi erők componensei, a melyek mint pót-erők bármelyik Ampère-féle elemi erőt az általános elvszerű elemi erők összeségévé egészítik ki (1 !), a $dsds'$ factor elhagyásával ily alakúak:

$$
(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} \dfrac{df}{ds} = r_1 r \dfrac{dU}{ds} - s_1 U + s_1' \left(\dfrac{dV}{ds} + \dfrac{a}{r} \dfrac{(p's)}{(q's')} \right) + \\ \qquad + (rs')_1 r \dfrac{dW}{ds} - (ss')_1 W, \\ \dfrac{dg}{ds} = r_2 r \dfrac{dU}{ds} - s_2 U + s_2' \left(\dfrac{dV}{ds} + \dfrac{a}{r} \dfrac{(p's)}{(q's')} \right) + \\ \qquad + (rs')_2 r \dfrac{dW}{ds} - (ss')_2 W, \\ \dfrac{dh}{ds} = r_3 r \dfrac{dU}{ds} - s_3 U + s_3' \left(\dfrac{dV}{ds} + \dfrac{a}{r} \dfrac{(p's)}{(q's')} \right) + \\ \qquad + (rs')_3 r \dfrac{dW}{ds} - (ss')_3 W, \end{cases}
$$

a melyekben, ha U, V, W az r és $(rs')r=m$ változók functióiként fogatnak fel,

$$(\mathrm{II})' \quad \frac{dU}{ds}=\frac{\partial U}{\partial r}\frac{dr}{ds}+\frac{\partial U}{\partial m}\frac{dm}{ds}=-(rs)\frac{\partial U}{\partial r}-(ss')\frac{\partial U}{\partial m},$$

stb.

A (II) alatti erő öt olyan erő összetételének tekinthető, a melyek nagyságait

$$r\frac{dU}{ds},\quad U,\quad \frac{dV}{ds}+\frac{a}{r}\frac{(p's)}{(q's')},\quad (q's')r\frac{dW}{ds},\quad (ss')_0 W$$

mennyiségek értékei teszik, irányaik pedig rendre a következőleg vannak megszabva: az elsőnek az iránya az r távolsági vonalban van, a másodiké a ds elemben, a harmadiké a ds' elemben, a negyediké merőleges az $|r, ds'|$ síkra, az ötödiké merőleges a $|ds, ds'|$ síkra. Szembeszökő, hogy valamennyi erő érdemlegesen csak a ds és ds' elemek kölcsönös helyzetétől függ, vagyis ezen kívül még csak oly mennyiségektől függhet, a melyek változatlanok az áramgörbék mentén, minők pl. az áramintensitások.

Az egyik Ampère-féle elemi erő componensei a $dsds'$ szorzattal való osztás után

$$[3(rs)(rs')-2(ss')]\frac{k}{r^2}\begin{cases}\cdot r_1,\\ \cdot r_2,\\ \cdot r_3,\end{cases}$$

a hol a k az áramvonalakon változatlan mennyiséget jelent.

Additive hozzá csatoltatván sor-rendjük szerint a (II) alattiakhoz, az összes velük æquivalens erők componenseit szolgáltatják. A másik Ampère-féle (Gauss-, Grassmann-, Reynard-, Clausius-féle) erő azáltal fejlik ki ebből az általánosból, hogy

$$U=-(rs')\frac{k}{r^2},\quad V=0,\quad W=0,\quad a=0$$

teszszük. Ugyanis, tekintetbe véve, hogy az U-nak itteni speciális alakja így is írható:

$$U=-(rs')r\frac{k}{r^3}=-k\frac{m}{r^3},$$

a (II)′ mintára rögtön látjuk, hogy

$$\frac{dU}{ds} = -3(rs)(rs')\frac{k}{r^3} + (ss')\frac{k}{r^3}.$$

Betéve ezeket az $U, V, W, a, \frac{dU}{ds}$ értékeket (II)-be, ha már az előbbi Ampère-féle erőt is odacsatoltuk, a következő kifejezésekre akadunk:

$$k\frac{(rs')s_1-(ss')r_1}{r^2},\quad k\frac{(rs')s_2-(ss')r_2}{r^2},\quad k\frac{(rs')s_3-(ss')r_3}{r^2},$$

s ezek a másik Ampère-féle erő componensei; rendre p_1, p_2, p_3-vel szorzottan zérust adnak összegül, tehát az $|r, ds|$ síkban lévő irányt jelentenek, továbbá, rendre s'_1, s'_2, s'_3-sel szorzottan is zérust adnak összegül, tehát egyszersmind a ds' elemre merőleges irányt jelentenek stb.

14. §. Azok közől a vizsgálatok közől, a melyeket újszerű speciális elemi erők felkutatásában végeztem, ide jegyzem a következőt:

Vizsgáltam, hogy vannak-e olyan — az Ampère-félékkel æquivalens — elemi erők, a melyek az r távolsági vonalra merőlegesek? A vizsgálat eredménye igenlő; még pedig végtelen sok ilyen elemi erő vagyon és egyszerű analytikus formulázást engednek.

A kérdés analytikus fogalmazása nyilvánvalólag így van: melyek azok az U, V, W, a mennyiségek, a melyek rendjén (1!)

$$\left(X+\frac{df}{ds}\right)r_1+\left(Y+\frac{dg}{ds}\right)r_2+\left(Z+\frac{dh}{ds}\right)r_3=0\ ?$$

Irjuk be ide a (II) alatti kifejezéseket, és X, Y, Z gyanánt használjuk az első Ampère-féle erő componenseit (43. old.!) Emellett tekintetbe véve, hogy

$$(ss')_1r_1+(ss')_2r_2+(ss')r_3=-(rs')_1s_1-(rs')_2s_2-(rs')_3s_3,$$

tehát (8)′ szerint

$$(ss')_1r_1+(ss')_2r_2+(ss')r_3=-(q's')(p'_1s_1+p'_2s_2+p's_3)=-$$
$$-(q's')(p's);$$

némi rendezés után egyenletünk ezt az alakot ölti (II!)':

$$\left.\begin{array}{l}(rs)\left[U+r\dfrac{\partial U}{\partial r}+(rs')\dfrac{\partial V}{\partial r}-3k\dfrac{(rs')}{r^2}\right]+\\+\ (s's)\left[r\dfrac{\partial U}{\partial m}+(rs')\dfrac{\partial V}{\partial m}+2k\dfrac{1}{r^2}\right]+\\-\ (p's)\left[(q's')\,W+\dfrac{a}{r}\dfrac{(rs')}{(q's')}\right]=\end{array}\right\}=0.$$

A szögletes zárjelek foglalatjai függetlenek az s iránytól. Továbbá e foglalatok (rs) és $(s's)$ factorai függetlenek egymástól, míg a $(p's)$ factor ennek a kettőnek irrationális függvénye (13!). Kell tehát, hogy mindhárom szögletes zárjel foglalatja különkülön eltünjék, tehát, hogy

$$1 \qquad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial(rU)}{\partial r}=-\dfrac{m}{r}\dfrac{\partial V}{\partial r}+3k\dfrac{m}{r^3},\\ \dfrac{\partial(rU)}{\partial m}=-\dfrac{m}{r}\dfrac{\partial V}{\partial m}-2k\dfrac{1}{r^2},\end{array}\right.$$

$$2 \qquad W=-\frac{a}{r}\frac{(rs')}{(q's')^2},$$

legyen. A két első egyenletben a megoldás czéljából (rs') helyett a vele per definitionem azonos $m:r$ iratott.

A *2* egyenlet directe meghatározza a W függvényt, és pedig az a constans által, a mely utóbbinak a tetszőlegessége érintetlen. Az *1* alatti két egyenlet megoldásra vár.

Hogy ennek a két egyenletnek a jobb-oldala a bal-oldalához illő legyen, e végből a V functio egy feltételi egyenletnek köteles megfelelni, a melyet a

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial(rU)}{\partial m}-\frac{\partial}{\partial m}\frac{\partial(rU)}{\partial r}=0$$

követelmény diktál. Ez a feltételi egyenlet így van:

$$mr\frac{\partial V}{\partial m}+r^2\frac{\partial V}{\partial n}+k=0.$$

A megoldása pedig

$$V=\frac{k}{r}+\Psi\left(\frac{m}{r}\right),$$

a hol $\Psi\left(\frac{m}{r}\right)$ tetszőleges függvénye az $m/r = (rs')$ mennyiségnek. Ezt most be kellene vinni *1*-be s azután az rU-ra szóló integrálást végrehajtani. Hogy azonban e műtétet explicite csinálhassuk, a Ψ functió helyett egy ugyancsak m/r-től függő functiónak Ω a differentiális hányadosát kell alkalmaznunk. Irjuk tehát

$$V = \frac{k}{r} + \Omega'\left(\frac{m}{r}\right), \tag{3}$$

a hol már most $\Omega'\left(\frac{m}{r}\right)$ első derivátuma az m/r egy tetszőleges Ω functiójának. A V-nek a *3* alatti kifejezését téve be az *1* alatti egyenletekbe, ezekből könnyű szerrel

$$rU = -2k\frac{m}{r^2} + \Omega\left(\frac{m}{r}\right) - \frac{m}{r}\Omega'\left(\frac{m}{r}\right) \tag{4}$$

fejlik ki.

Állítsuk vissza m helyett az $(rs')\,r$-et: eredményeink szerint az Ampère-féle erőkkel (X, Y, Z) æquivalens összes erők között vannak olyanok, a melyek merőlegesek az r távolsági vonalra, és ezeket az erőket az

$$X + \frac{df}{ds}, \quad Y + \frac{dg}{ds}, \quad Z + \frac{dh}{ds} \tag{5}$$

componensek képében a (II) alatti kifejezések a következő relátiók rendjén szolgáltatják:

$$\left\{\begin{aligned} U &= -2k\frac{(rs')}{r^2} + \frac{1}{r}\Omega - \frac{(rs')}{r}\Omega', \\ V &= \frac{k}{r} + \Omega', \\ W &= -\frac{a}{r}\,\frac{(rs')}{(q's')^2}, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

a melyekben az Ω tetszőleges functiója az (rs') cosinusnak, és Ω' az Ω első derivátuma.

Azonban ezek közt a *6*-hoz tartozó *5* alatti erők közt csak egy olyan van, a mely, mint az Ampère-féle erők, a távolságtól a négyzet fordítottjával arányosan függ. Még pedig

$$\Omega = 0, \quad a = 0$$

juttat hozzá, midőn aztán

$$U = -2k\frac{(rs')}{r^2}, \quad V = \frac{k}{r}, \quad W = 0.$$

Ennek az erőnek a componensei gyanánt a (7) és (7)′ relátiók tekintetbe vételével ezt találom:

$$X + \frac{df}{ds} = 2k\frac{(rs')\,(qs)}{r^2}q_1 + k\frac{(rs)\,(q's')}{r^2}q_1',$$

$$Y + \frac{dg}{ds} = 2k\frac{(rs')\,(qs)}{r^2}q_2 + k\frac{(rs)\,(q's')}{r^2}q_2',$$

$$Z + \frac{dh}{ds} = 2k\frac{(rs')\,(qs)}{r^2}q_3 + k\frac{(rs)\,(q's')}{r^2}q_3'.$$

Tehát két egyszerű erő összetétele gyanánt fogható fel, a melyek mindegyike külön-külön merőleges az r távolsági vonalra, és az egyiknek az iránya az $|r, ds|$ síkban, a másiké az $|r, ds'|$ síkban vagyon. Nagyságaikat pedig sorrendjükben

$$2k\frac{(rs')\,(qs)}{r^2} \quad \text{illetőleg} \quad k\frac{(rs)\,(q's')}{r^2}$$

értéke teszi, vagyis

$$\frac{2k}{r^2}\cos(r, s')\sin(r, s),$$

illetőleg

$$\frac{k}{r^2}\cos(r, s)\sin(r, s')$$

értéke.

15. §. Hogy ha az állandó és egyenletes vonalos áram tömegmozgató hatása nem áramra, vagy áram-részre, hanem mágnespólusra vonatkozik, akkor tudvalévőleg a Biot-Savart-féle törvény jut érvényre s a megfelelő elemi erő componensei gyanánt

$$\varkappa\frac{(qs)}{r^2}p_1 ds, \quad \varkappa\frac{(qs)}{r^2}p_2 ds, \quad \varkappa\frac{(qs)}{r^2}p_3 ds$$

szerepelnek az elektromágnesség tanában, a hol a $\varkappa$ a mágnespólus intensitásával és az áram intensitásával arányos constans. Azonban épen úgy beválnak elemi erőkül a

$$\left(\varkappa\frac{(qs)}{r^2}p_1+\frac{df}{ds}\right)ds,$$

$$\left(\varkappa\frac{(qs)}{r^2}p_2+\frac{dg}{ds}\right)ds,$$

$$\left(\varkappa\frac{(qs)}{r^2}p_3+\frac{dh}{ds}\right)ds$$

componensű erők, hacsak az f, g, h functiók egyértéküek és folytonosak az áramlás vonalán.

De avégből, hogy ezek az erők is valóságos elemi törvényt határozzanak meg, alávetvék annak a követelménynek, hogy úgy nagyságra, mint irányra nézve függetlenek legyenek a coordináta-rendszer választásától és az áramgörbe alakjától. Mivel pedig a Biot-Savart-féle erő bír ezekkel a tulajdonságokkal, kell, hogy az integrális hatás nélkül való pót-erő, a melynek a componensei a ds elemmel való osztás után

$$\frac{df}{ds},\quad \frac{dg}{ds},\quad \frac{dh}{ds},$$

maga is bírjon ezekkel a tulajdonságokkal, minélfogva mind nagyság, mind irány dolgában csakis a pólus és az áram-elem kölcsönös helyzetétől függhet érdemlegesen; így a pót-erőnek a p, q, r rendszerbe tartozó componensei, vagyis

$$p_1\frac{df}{ds}+p_2\frac{dg}{ds}+p_3\frac{dh}{ds},$$

$$q_1\frac{df}{ds}+q_2\frac{dg}{ds}+q_3\frac{dh}{ds},$$

$$r_1\frac{df}{ds}+r_2\frac{dg}{ds}+r_3\frac{dh}{ds}$$

csak az r távolságnak és az

$$(rs) = r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3$$

cosinusnak a függvényeik lehetnek. Ez értelemben határozandók meg itt az f, g, h functiók.

Világos, hogy ez a probléma implicite bent foglaltatik az előző czikkek során letárgyalt problémában, és pedig az utóbbi azáltal képezi a mostaninak az általánosítottját, hogy benne az imént említett erő-componensek az r és (rs) mennyiségeken kívül még az (rs') és (ss') mennyiségeknek is érdemleges függvényeik, mint ezt már az 1. §. záradéka jelezte. Ebből az következik, hogy, ha a 13. §-ban lévő $(\mathrm{I})_1$ alatti kifejezésekből kitöröljük az s' iránytól való függést, akkor az f, g, h functiók számára azokat az alakokat kapjuk, a melyek vonalas áramnak egy mágnes-pólusra hatásának az összes elemi törvényeivé egészítik ki a Biot-Savart-féle törvényt. Még pedig, most U alatt érdemlegesen csupán az r távolságtól függő mennyiséget értve, ezek az alakok az $(\mathrm{I})_1$-ből könnyen kiláthatólag így vannak:

$$f = r_1 r U, \quad g = r_2 r U, \quad h = r_3 r U.$$

Ugyanis az $(\mathrm{I})_1$-ben előforduló többi tagoknak oly coefficienseik lévén, a melyek lényegesen függenek az s' iránytól, t. i.

$$s_1', \; s_2', \; s_3';$$

$$(rs')_1, \; (rs')_2, \; (rs')_3;$$

ezek a tagok most eltüntetendők, azaz most

$$V = 0, \quad W = 0, \quad a = 0$$

teendő. Az U-ból pedig, a mely $(\mathrm{I})_1$-ben, mint r és (rs') functiója szerepel, az (rs') cosinus, mint az s' iránytól lényegesen függő változó, most kitörlendő.

Ezeket az f, g, h kifejezéseket más helyen directe deducáltam a fent jellemzett speciálisan elektromágnesi probléma formulázásából. (Értesítő az Erdélyi Muzeum-egylet orv. termt. szakosztályából 1892, második termt. füzet: «Észrevételek az egyenletes és állandó elektromos áramlás elméletére» III. «Az elektromágnesi tömegmozgató hatás elemi törvényeiről»). Egyszersmind némely theoretikus megjegyzéseket is fűztem ott hozzájuk. Ugyanott már a fentebbiek során tárgyalt problémát is kitűztem, de akkor egyelőre csak bizonyos előzetes megszorítás keretében oldottam meg, későbbi alkalomra tartva fenn akkor az általános, most itt előadott tárgyalás közlését.

szeletek elméletében. 10 kr. — XXV. *Hunyady Jenő.* A pontokból vagy érintőkből és a conjugált háromszögből meghatározott kúpszelet nemének eldöntésére szolgáló kritériumok. 10 kr.

Nyolczadik kötet.

I. szám. Astrophysikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 1880-ban. *Konkoly Miklóstól.* Egy tábla rajzzal. — II. szám. Adatok Jupiter physikájához az 1880-ik évből. Egy függelékkel. *Konkoly Miklóstól.* — III. szám. A Bólyai-féle algorithmus. *Dr. Farkas Gyulától.* — IV. szám. Napfoltok megfigyelése 1880-ban, és 1382 napfolt micrometricus mérése. *Konkoly Miklóstól.* Két tábla rajzzal. — V. szám. Hullócsillagok megfigyelése 1880-ban a magyar korona területén. V-ik rész. *Konkoly Miklóstól.* — VI. szám. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. *Konkoly Miklóstól.* — VII. szám. 102 hullócsillag kisugárzási pont, levezetve 518 megfigyelésből, melyek a magyar korona területén 1879. és 1880-ban tétettek. *Konkoly Miklóstól.* — VIII. szám. Új villámzáró vagy nyitókészülék normálórán, és a Jürgenssen-féle óraszerkezet. *Konkoly Miklóstól.* Egy képtáblával. — IX. szám. Adatok Jupiter forgási elemeihez. *Dr. Kobold Ármintól.* — X. szám. A Hamilton-féle rendszerek és az elsőrendü partialis differentiálegyenletek általános elmélete. Székfoglaló értekezés. *König Gyulától.* — XI. szám. A hadtudomány viszonya a többi tudományokhoz. *Kápolnai Pauer Istvántól.* Székfoglaló értekezés. — XII. szám. Egy negyedrendü felületről. *Hunyady Jenőtől.*

Kilenczedik kötet.

I. szám. Astrophisikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. (Három táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — II. szám. Az ó-gyallai csillagvizsgáló földrajzi szélessége. *Dr. Lakits Ferencztől.* — III. szám. A herényi astrophysikai observatorium leirása, és az abban tett megfigyelések 1881-ben. (Egy táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IV. szám. Napfoltok és a nap felületének megfigyelése 1881-ben. *Konkoly Miklóstól.* — V. szám. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. *Konkoly Miklóstól.* — VI. szám. Hullócsillagok megfigyelése 1881-ben. *Konkoly Miklóstól.* — VII. szám. Adatok Jupiter és Mars physikájához, az 1881. évi megfigyelésekből. (III. rész. Három táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VIII. szám. Az üstökösök vegytani alkotása. *Konkoly Miklóstól.* — IX. szám. Az 1871—1880. években, Magyarországban megfigyelt hullócsillagok pályaelemei. *Kövesligethy Radótól.* — X. szám. Néhány determináns-egyenletről. *Hunyady Jenőtől.* — XI. Perspectiv helyzetű alakzatokról *Dr. Klug Lipóttól.* — XII. szám. Az elhajlott fény intenzitásának vizsgálata. (A math. és természettudományi állandó bizottság segélyezésével készült dolgozat. Tizenkét ábrával a szöveg között.) *Dr. Fröhlich Izortól.* — XIII. szám. Az algebrai egyenletek elméletéhez. *König Gyulától.*

Tizedik kötet.

I. A nap felületének megfigyelése 1882-ben. *Konkoly Miklóstól.* — II. Astrophysikai megfigyelések 1882-ben. *a)* A Wells-üstökös szinképe. *b)* A szeptemberi nagy üstökös szinképe. *c)* 9 Meteor szinképe. *d)* 115 állócsillag spectruma. *e)* Coloremetricus megfigyelések. *Konkoly Miklóstól.* — III. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén. 1882. *Konkoly Miklóstól.* — IV. Egy uj reversio-spectroscop s annak használata. (Egy táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — V. Az ó-gyallai csillagvizsgálón eszközölt csillagászati megfigyelések eredménye. 1882. *Konkoly Miklóstól.* — VI. Néhány szó az üstökösök vegytani alkotásáról, összehasonlitva a meteoritekkel. *Konkoly Miklóstól.* — VII. Egy uj szerkezetü spectroscop. (Egy táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VIII. Astrophysikai megfigyelések a herényi observatoriumon, 1882. (Egy táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IX. Adatok Jupiter és Mars bolygók physikájához. (Három táblával.) *Gothard Sándortól.* — X. Egy uj spectroscop. (Egy táblarajzzal.) *Gothard Jenőtől.* — XI. Astrophysikai megfigyelések 1883. (Egy táblával.) I. rész. *a)* γ Cassiopejae spectruma. *b)* α Ursae minoris spectruma. *c)* A Swift üstökös spectruma. *d)* A Brooks üstökös spectruma. *e)* Colorimetricus megfigyelése 65 állócsillagnak. *Konkoly Miklóstól.*

Tizenegyedik kötet.

I. Astrophysikai megfigyelések 1883-ban, az ó-gyallai csillagdán. (II-ik rész, 3 tábla.) *Konkoly Miklóstól.* — II. A nap felületének megfigyelése 1883-ban, az ó-gyallai csillagdán. *Konkoly Miklóstól.* — III. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1883-ban. *Konkoly Miklóstól.* — IV. 615 állócsillag spectruma. A déli öv átkutatásának I. része. *Konkoly Miklóstól.* — V. Megfigyelések a herényi astrophysikai observatoriumon 1883-ban. (Két táblával.) *Gothard Jenőtől.* — VI. A Pons-Brooks üstökös spectroscopicus megfigyelése a herényi astrophysikai observatoriumon. (Két táblával.) *Gothard Jenőtől.* — VII. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagdán 1883-ban *Konkoly Miklóstól.* — VIII. Előleges vizsgálatok néhány szénhydrogén-gáz spectrumán, spectroscoppal és spectralphotometerrel. (3 táblával s 2 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — IX. Adatok Bolyai Farkas életrajzához. *Szily Kálmántól.* — X. A herényi astrophysikai observatorium sarkmagasságának meghatározása. *Gothard Jenőtől.*

Tizenkettedik kötet.

I. A napfoltok és a nap felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagvizsgálón 1884-ben. (1 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — II. Astrophysikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 1884-ben. (4 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — III. Az 1884. évi megfigyelések a herényi astrophysikai observatoriumon. (2 ábra és 3 táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IV. Hulló-csillagok megfigyelése a m. korona területén 1884-ben. 26 radiatio ponttal. *Konkoly Miklóstól.* — V. 615 állócsillag spectruma. *Konkoly Miklóstól.* — VI. A napfoltok gyakoriassága 1872-től 1884 végéig. (2 kőnyomatu táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VII. Adatok Jupiter physikájához. (2 táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VIII. Tanulmányok az égitestek photographálása terén. (1 táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IX. A Haynald-observatoriumban 1880—1884-ben megfigyelt napfoltok. *Hüninger Adolftól.* — X. Az 1873. VII. sz. Coggia-Winnecke-féle üstökös pályaszámitása. *Schulhof Lipóttól.* — XI. A folytonos spectrumok elmélete. *Kövesligethi Radótól.*

Tizenharmadik kötet.

I. A földnehézség meghatározása Budapesten 1885-ben (4 táblával). *Gruber Lajostól.* — II. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1885-ben. *Konkoly Miklóstól.* — III. 855 állócsillag spectruma. *Konkoly Miklóstól.*

Tizennegyedik kötet.

I. A dinamika alapegyenleteinek jelentéséről. *Kőnig Gyulától.* — II. Az orthogonális substitutió együtthatóinak paraméteres értékei. *Hunyady Jenőtől.* — III. Az orthogonális substitutió együtthatóinak paraméteres értékei. (Folytatása az előbbinek.) *Hunyady Jenőtől.* — IV. A lánczhidak merevitő tartóinak grafikai elméletéről. *Kherndl Antaltól.* — V. Együttesen lengő elemi mágnesek kölcsönös vonzásai és taszitásai. *Fröhlich Izidortól.*

Tizenötödik kötet.

I. A vasutak jövedelmezőségéről, kapcsolatban a tarifák kérdésével. *Kisfaludi Lipthay Sándortól.*

FRANKLIN-TARSULAT NYOMDÁJA.