Bevezetés az elméleti fizikába 1

Gombás Pál
Kisdi Dávid

AKADÉMIAI KIADÓ · BUDAPEST

Gombás Pál — Kisdi Dávid

BEVEZETÉS AZ ELMÉLETI FIZIKÁBA

Két kötetben

A könyv célkitűzése a modern elméleti fizika egész tárgykörének bemutatása. Az első kötet a klasszikus fizika fejezeteit, tehát a mechanikát, elektrodinamikát a hullámoptikával, a termodinamikát és a relativitáselméletet tartalmazza. E fejezetekben a könyv nagymértékben támaszkodik a magyar felsőoktatás kialakult módszertanára, és az egyetemeken tanított anyag mélyebb megértését és több oldalról való megvilágítását kívánja elérni.

A második kötet az anyag korpuszkuláris elméletével, a statisztikus mechanikával és a kvantumfizikával foglalkozik. E terület igen nagy kiterjedésű és állandóan újabb eredményekkel gazdagodik. A könyv anyaga úgy van kiválasztva, hogy a legfontosabb területek alapjait tárgyalja anélkül, hogy túlságosan a részletekbe hatolna.

A könyv szerzője, a kétszeres Kossuth-díjas Gombás Pál professzor, úttörő szerepet játszott a hazai elméleti fizikai kutatások megindításában. Munkássága az elméleti atomfizika, szilárdtestfizika és a magfizika területén nagy nemzetközi elismeréssel kísért eredményekkel gazdagította a tudományt. A könyv anyagának magvát a szerző egyetemi előadásai alkotják.

AKADÉMIAI KIADÓ
BUDAPEST

BEVEZETÉS AZ ELMÉLETI FIZIKÁBA

1

BEVEZETÉS AZ ELMÉLETI FIZIKÁBA

1. KÖTET

ÍRTA

DR. GOMBÁS PÁL
AKADÉMIKUS

DR. KISDI DÁVID
KANDIDÁTUS
KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1971

© *Akadémiai Kiadó, Budapest 1971*

AK k 7174

PRINTED IN HUNGARY

TARTALOMJEGYZÉK

I. kötet

Előszó 17
Bevezetés 19

ELSŐ RÉSZ: MECHANIKA

Bevezetés 23

Első Fejezet

Az anyagi pont mechanikája

1. §. A vektortan alapjai 26
2. §. A tömegpont kinematikája 36
3. §. A mechanika alaptörvényei. Newton axiómái 42
4. §. Mozgásegyenletek 45
5. §. Az erő idő és pálya szerinti integrálja. A munka 46
5. §. A potenciál és az energiatétel 49
7. §. Az erő momentuma és az impulzusmomentum közötti összefüggés 55
8. §. Rugalmas erők. Egyszerű harmonikus mozgás 56
9. §. A csillapított harmonikus mozgás 61
10. §. A centrális mozgás 65
11. §. A Kepler-probléma 67
12. §. A Newton-féle tömegvonzási törvény. Gravitációs erők 71
13. §. A mesterséges holdak mozgása. Első és második kozmikus sebesség 73
14. §. A bolygók mozgása 76
15. §. Rakétamozgás. A Ciolkovszkij-egyenlet 78
16. §. A kényszernek alávetett tömegpont mechanikája. Kényszererők 79
17. §. A lejtőn való mozgás 81
18. §. A matematikai síkinga 83
19. §. A mozgásegyenletek mozgó koordinátarendszerben 89

Második Fejezet

Pontrendszerek mechanikája

1. §. A tömegközéppont tétele 97
2. §. Folytonos eloszlású rendszerek tömegközéppontja 100
3. §. Az impulzusmomentum tétele 101
4. §. Pontrendszerek összenergiája 103
5. §. A mozgásegyenletek 10 integrálja 105

Harmadik Fejezet

A mechanika elvei

1. §. Az egyensúly és mozgás feltételei 106
2. §. Néhány egyszerű fogalom a variációszámítás köréből 113
3. §. A Virtuális munka elve, mint variációs elv 115
4. §. Az egyensúly stabilitásának feltétele 115
5. §. A Hamilton-féle elv 116
6. §. Általános koordináták 120
7. §. Holonom és nem holonom kényszerek 122
8. §. A Lagrange-féle másodfajú egyenletek 123
9. §. A Hamilton-féle kanonikus egyenletek 128
10. §. A legkisebb hatás elve 133
11. §. Kanonikus transzformáció 138
12. §. Ciklikus változók. A Hamilton—Jacobi féle differenciálegyenlet 142

Negyedik Fejezet

Merev test mechanikája

1. §. A merev test kinematikája 148
2. §. A merev test mozgásegyenletei 164
3. §. Merev test forgása egy rögzített tengely körül 164
4. §. Párhuzamos tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi momentumok közti összefüggés 168
5. §. Rögzített tengely körül forgó merev test kinetikus energiája 170
6. §. A tehetetlenségi momentum függése a forgástengely irányításától 172
7. §. A tehetetlenségi ellipszoid 173
8. §. Folytonos anyageloszlású testek tehetetlenségi és deviációs momentumai 175
9. §. Tetszőleges tengelyre vonatkozó tehetetlenségi momentumok meghatározása 176
10. §. A merev test egy rögzített pontja körüli mozgása. Az Euter-féle egyenletek 176
11. §. A merev test pontkörüli mozgásának tárgyalása az Euler-féle egyenletek alapján, ha a külső erők momentuma eltűnik 180
12. §. Az Euler-féle egyenletek integrálása, ha a külső erők momentuma eltűnik 183
13. §. Az Euler-féle szögeknek mint az idő függvényeinek meghatározása, ha a külső erők momentuma eltűnik 192
14. §. A merev test mozgása egy rögzített pontja körül, ha rá külső erő forgatómomentumot gyakorol 194
15. §. A merev test sztatikájának alapfogalmai 198

Ötödik Fejezet

Deformálható testek mechanikája

1. §. Bevezetés 203
2. §. Lineáris transzformációk 203
3. §. A deformálható testek kinematikája 221

4. §. A deformálható testek dinamikája 229
5. §. A rugalmas testek mechanikája 241
6. §. Síkhullámok izotróp rugalmas közegben 252
7. §. Cseppfolyós és légnemű testek 269
8. §. Cseppfolyós és légnemű testek egyensúlya 270
9. §. Cseppfolyós és légnemű testek mozgása 274
10. §. A Bernoulli-féle egyenlet 279
11. §. Örvénymentes áramlások 281
12. §. Stacionárius, örvénymentes síkáramlás 283

Hatodik Fejezet

Relativitáselmélet

1. §. A Galilei-féle relativitási elv 301
2. §. Az Einstein-féle relativitási elv 303
3. §. A Michelson—Morley kísérlet 306
4. §. A Lorentz-transzformáció 308
5. §. Relativisztikus kinematika 311
6. §. Relativisztikus dinamika 318
7. §. Relativisztikus mozgásegyenletek 320
8. §. Rakétamozgás 322
9. §. Erők transzformációja 324
10. §. A relativisztikus energia 325
11. §. Négyesvektorok 329
12. §. Az általános relativitás elmélet alapja 339

MÁSODIK RÉSZ: ELEKTRODINAMIKA

Bevezetés 343

Hetedik Fejezet

Vektoranalízis

1. §. Vektormezők, skaláris mezők 344
2. §. Gradiens, potenciál 345
3. §. Trajektóriák 346
4. §. Ekvipotenciális felületek 346
5. §. Vonalintegrál 347
6. §. Felületi integrál 349
7. §. Divergencia 350
8. §. Gauss tétele 352
9. §. Green tétele 352
10. §. Stokes tétele 354
11. §. A rotáció 357
12. §. Felületi divergencia és felületi rotáció 361

Nyolcadik Fejezet

Az elektrosztatikus tér

1. §. Az elektromos térerősség és elektromos töltés 364
2. §. Az elektromos töltés mint az erőfluxus forrása 365
3. §. Mértékrendszerek 368
4. §. Az elektrosztatikus terek jellemző tulajdonságai 368
5. §. Az elektromosság elhelyezkedése vezetőkön 370
6. §. Az elektrosztatika alapproblémája 371
7. §. A pontszerű töltés potenciálja 372
8. §. Különböző töltésrendszerek potenciálja 374
9. §. Vezetők a térben. Gömbkondenzátor 381
10. §. Az elektrosztatikus tér szigetelőkben. Dielektromos közegek 382
11. §. Dielektrikumok polarizációja 386
12. §. Az elektrosztatikus tér energiája 390
13. §. Anizotrop dielektrikumok 395

Kilencedik Fejezet

Stacionárius áramok

1. §. Definíciók 397
2. §. Ohm törvénye 397
3. §. Joule törvénye 402
4. §. Kirchhoff törvényei 403

Tizedik Fejezet

A magnetosztatikus tér

1. §. Mágneses alapjelenségek és a mágnesség alaptörvényei 406
2. §. Permanens mágnes mágneses tere 410
3. §. Elektromos áram mágneses tere 411
4. §. Zárt lineáris áram és a rajta átfektetett mágneses dipolréteg ekvivalenciája 415
5. §. Áramok mágneses terének meghatározása, ha a környező közegben $\mu \neq 1$ 420

Tizenegyedik Fejezet

Az időben lassan változó kvázistacionárius terek

1. §. Bevezetés 423
2. §. Az indukció törvénye. Az elektromágneses tér második alapegyenlete 423
3. § Kölcsönös indukció 425

4. §. Önindukció 426
5. §. Egymással össze nem függő *n* lineáris áramkör mágneses energiája 430
6. §. Váltóáramú körök 431

Tizenkettedik Fejezet

Gyorsan váltakozó elektromágneses terek 439

1. §. Az elektromágneses tér első alapegyenlete 441
2. §. Az elektromágneses tér alapegyenletei 443
3. §. A sugárvektor

Tizenharmadik Fejezet

Elektromágneses hullámok

1. §. Elektromágneses síkhullámok dielektrikumokban 445
2. §. Elliptikusan, cirkulárisan és lineárisan poláros hullámok 452
3. §. Síkhullámok vezető közegben 457
4. §. Síkhullámok visszaverődése és törése 459
5. §. A teljes visszaverődés 469
6. §. Síkhullámok összetétele. 472
7. §. Állóhullámok 474
8. §. A hullámcsoport. Csoportsebesség 475
9. §. Gömbhullámok 478
10. §. A Huyghens-féle elv. Kirchhoff formulája 493
11. §. Az elhajlásjelenségek felosztása 498
12. §. Egyszerű harmonikus rezgések összetétele a komplex számsíkon 502
13. §. Fraunhofer-féle elhajlásjelenségek egyszerű résen, vonalas, kereszt- és térbeli rácson 504

Tizennegyedik Fejezet

Az elektrodinamika alapegyenleteinek egységes levezetése és az ezekből levont általános következtetések

1. §. Maxwell-féle egyenletek és a határfeltételek egységes származtatása 517
2. §. Elektromágneses jelenségek osztályozása és egyes speciális terek alapegyenleteinek levezetése az általános alapegyenletekből 519
3. §. Elektromágneses potenciálok 521
4. §. Retardált potenciálok 525
5. §. A Maxwell-féle feszültségek 528
6. §. Elektromágneses impulzus 531
7. §. A sugárzás nyomása 532
8. §. A harmadik axióma az elektromágneses térben 534

Tizenötödik Fejezet

Relativisztikus elektrodinamika

1. §. Az elektrodinamika alapegyenleteinek Lorentz-invarianciája 535
2. §. Az elektromos töltés és az elektromágneses térerősségek transzformációs szabályai 539
3. §. Négyestenzorok 543
4. §. Doppler-effektus és aberráció 554

HARMADIK RÉSZ: TERMODINAMIKA

Bevezetés 559

Tizenhatodik Fejezet

A termodinamika főtételei

1. §. A hőmérséklet fogalma és a hőmérsékleti skála 591
2. §. Termodinamikai rendszerek. Állapotjelzők és állapotfüggvények 563
3. §. Az ideális gáz állapotegyenlete 567
4. §. A termodinamika első főtétele 569
5. §. Hőkapacitás 573
6. §. Adiabatikus folyamatok 576
7. §. A termodinamika második főtétele 577
8. §. A Carnot-féle körfolyamat 578
9. §. Az entrópia 587
10. §. A második főtétel matematikai megfogalmazása 590
11. §. A termodinamika harmadik főtétele 592

Tizenhetedik Fejezet

Az állapotegyenletek integrálhatósága

1. §. Az állapotegyenletek integrálhatóságának feltétele. Az entrópia meghatározása 594
2. §. Az ideális gáz entrópiája 596
3. §. A van der Waals-féle állapotegyenlet 599
4. §. Kondenzáció 602
5. §. Mágneses anyagok termikus viselkedése 605
6. §. A szupravezető átmenet termodinamikája 610

Tizennyolcadik Fejezet

Termodinamikai egyensúly

1. §. Az egyensúly feltételei 615
2. §. Homogén rendszerek 617
3. §. Az ideális gáz termodinamikája 624
4. §. Kémiai folyamatok és kémiai egyensúly 632
5. §. Heterogén rendszerek 636
6. §. A Clausius—Clapeyron egyenlet 640

II. kötet

NEGYEDIK RÉSZ: AZ ANYAG KORPUSZKULÁRIS ELMÉLETE STATISZTIKUS MECHANIKA

Előszó és bevezetés 11

Tizenkilencedik Fejezet

Az anyag korpuszkuláris elmélete

1. Bevezetés 13
2. §. A korpuszkulák létezésének kimutatása. Kémiai alaptörvények 14
3. §. Az elektrolízis Faraday-féle törvényei 16
4. §. A Brown-féle mozgás 16
5. §. Töltéssel bíró sugarak részeinek megszámlálása. Wilson kísérlete, szcintilláció, tűszámláló, héliumrészek megszámlálása 17
6. §. Szilárd testek korpuszkuláris szerkezete 19
7. §. A korpuszkulák elemi sajátságai 21
8. §. Az elemi töltés meghatározása Millikan szerint 21
9. §. A töltés és a tömeg viszonyának meghatározása korpuszkulák esetében 23
10. §. Elektron, proton 27
11. §. Az α-részek szóródása 28
12. §. Izotópia 33
13. §. A Franck—Hertz kísérlet. Gerjesztett atomok energianívói 36
14. §. Az atomok mágneses momentuma 39
15. §. Atomok és molekulák elektromos momentuma 44
16. §. A fotoelektromos effektus. A foton 44
17. §. A Compton-effektus 46
18. §. Anyaghullámok 48
19. §. Néhány megjegyzés az elemek periódusos rendszeréhez 49
20. §. Atommagok 50
21. §. A radioaktivitás 62
22. §. Magreakciók 70
23. §. A szilárd testek korpuszkuláris elméletének alapjai 73
24. §. A rácsenergia 76
25. §. Rácsrezgések 83
26. §. A rácsfrekvenciák meghatározása 89
27. §. A háromdimenziós rácsok rezgései 103
28. §. Longitudinális és tranzverzális rácsrezgések 110
29. §. Gázok diffúziója 119
30. §. Töltött részek áramlása külső erőtér hatására gázban 129

Huszadik Fejezet

Statisztikus mechanika

1. §. Bevezetés 132
2. §. A gázok korpuszkuláris szerkezete 132
3. §. Entrópia és valószínűség 133

4. §. Ideális gáz sűrűségeloszlásának meghatározása. A klasszikus vagy Boltzmann-féle statisztika 136
5. §. Liouville tétele. A fázistér 140
6. §. A Maxwell—Boltzmann-féle energiaeloszlás 141
7. §. Sebességeloszlás ideális gázban 144
8. §. Ideális gáz állapotegyenlete. A Boltzmann-állandó és gázállandó közti összefüggés 148
9. §. Az ekvipartició tétele és alkalmazása a fajhőre 149
10. §. A kvantumstatisztika alapjai 152
11. §. A Bose—Einstein statisztika 153
12. §. Az egyatomos Bose-gáz 157
13. §. Az ideális gáz elfajulása alacsony hőmérsékleten 162
14. §. A plazma 166
15. §. A hőmérsékleti sugárzás 170
16. §. Anyag és sugárzás hőmérsékleti egyensúlya 176
17. §. A Fermi—Dirac statisztika 178
18. §. Az elektrongáz 182
19. §. Az elektrongáz viselkedése extrém körülmények között 185
20. §. Az elektrongáz fajhője 193
21. §. A relativisztikusan elfajult elektrongáz 194
22. §. A szilárd testek fajhője 198

ÖTÖDIK RÉSZ: KVANTUMMECHANIKA

Huszonegyedik Fejezet

A Bohr-féle atomelmélet

1. §. A hidrogénatom Bohr-féle elmélete 205
2. §. A Moseley-törvény 211
3. §. Alkáli- és hasonló atomok spektrumai 212
4. §. A korrespondencia-elv 214
5. §. A Stark- és Zeeman-effektus 215
6. §. Spinkvantumszám, belső kvantumszám 216
7. §. A hiperfinom struktúra 217
8. §. A többelektronkonfigurációk energiatermjei és azok szimbólumai 218
9. §. Pauli elv. A periódusos rendszer felépítése a Pauli-elv alapján 219
10. §. Az elemek kémiai viselkedésének értelmezése az atomszerkezet alapján. Néhány megjegyzés a kémiai kötésre vonatkozóan 222
11. §. A sávos spektrumok elemeinek rövid összefoglalása 223

Huszonkettedik Fejezet

A hullámmechanika alapjai

1. §. Általános áttekintés 226
2. §. A Heisenberg-féle határozatlansági reláció 227
3. §. A kauzalitás elve a kvantummechanikában 231

4. §. Hullámok fázis- és csoportsebessége 232
5. §. Anyaghullámok 234
6. §. A Schrödinger-egyenlet 238
7. §. A Schrödinger-egyenlet származtatása a variációs elvből 242
8. §. Sajátfüggvények, sajátértékek 243
9. §. A klasszikus mechanika mennyiségeinek kvantummechanikai értelmezése. Operátorok 247
10. §. Az elektronspin kvantumelmélete 252
11. §. A korrespondencia elv. Átmeneti valószínűségek 258

Huszonharmadik Fejezet

Egyszerű példák a Schrödinger-egyenlet megoldására

1. §. Szabad tömegpont 263
2. §. A síkbeli rotátor 264
3. §. A harmonikus lineáris oszcillátor 266
4. §. A derékszögű potenciálvölgy 270
5. §. Részecskék áthaladása derékszögű potenciálvölgyön 273
6. §. Részecskék áthaladása a potenciálfalon. Alagúteffektus 276
7. §. Periodikus potenciál 278
8. §. Mozgás centrális erőtérben 282
9. §. Az impulzusmomentum 285
10. §. A mágneses momentum 291
11. §. A háromdimenziós potenciálvölgy 295
12. §. Merev falú gömbbe zárt részecske 296
13. §. A térbeli oszcillátor 297
14. §. A hidrogénatom 302
15. §. A Kratzer-féle potenciál 309
16. §. A térbeli rotátor 313
17. §. A kéttest-probléma 314

Huszonnegyedik Fejezet

A legegyszerűbb közelítő módszerek és alkalmazásaik

1. §. Perturbációszámítás 318
2. §. Az anharmonikus lineáris oszcillátor 322
3. §. Síkbeli rotátor elektromos erőtérben 323
4. §. A mag véges kiterjedésének hatása az atom energianívóira 324
4. §. A spin-pálya kölcsönhatás 326
6. §. A Zeeman-effektus kvantumelmélete 328
7. §. A hidrogénatom Stark-effektusa 332
8. §. A kételektron-probléma 333

9. §. Variációs módszer 340
10. §. A hélium-atom alapállapota 343
11. §. A H_2^+ molekula-ion 345

Huszonötödik Fejezet

Szórásszámítás

1. §. A szóródás elméletének alapjai. A hatáskeresztmetszet 350
2. §. A parciális hullámok módszere 352
3. §. Szóródás háromdimenziós potenciálvölgyön 356
4. §. A szórási és kötött állapotok egységes elmélete. Szórási rezonanciák 359
5. §. A radioaktív α-bomlás 367
6. §. Az integrálegyenlet-módszer 370
7. §. Szóródás merev falú gömbön 373
8. §. A Coulomb-szórás 375
9. §. Kis energiájú részecskék szóródása 380
10. §. Példák a zérus energiájú hullámfüggvény meghatározására 385
11. §. A Born-közelítés 390
12. §. Elektronok szóródása atomokon 395

Huszonhatodik Fejezet

Relativisztikus kvantummechanika

1. §. $\frac{1}{2}$-es spinű részecskék. A Dirac-egyenlet 398
2. §. A Dirac-egyenlet szimmetrikus alakja 402
3. §. Mozgás elektromágneses térben 405
4. §. A Dirac-egyenlet szimmetriatranszformációi 410
5. §. A szabad mozgás. Síkhullámok 419
6. §. A Dirac-egyenlet megoldása centrális erőtér esetén 423

Huszonhetedik Fejezet

Lineáris vektorterek a kvantumelméletben. Mátrixmechanika

1. §. Bevezetés 432
2. §. Az állapotvektorok és az operátorok matematikai tulajdonságai 433
3. §. A kvantummechanika törvényeinek általános megfogalmazása 444
4. §. A mátrixmechanika alapjai 459
5. §. A lineáris harmonikus oszcillátor 474
6. §. A hullámmechanika és a mátrixmechanika kapcsolata 474
7. §. A Dirac-féle bra és ket vektorok 484

Huszonnyolcadik Fejezet

Lippmann—Schwinger szóráselmélet

1. §. Bevezetés 490
2. §. Kölcsönhatási reprezentáció 490
3. §. Az S operátor 492
4. §. Az átmeneti valószínűség meghatározása 495
5. §. A Lippmann—Schwinger egyenlet 498
6. §. Potenciálszórás 499
7. §. Centrális erőtér 502
8. §. Centrális szórás koordinátareprezentációban 506

Huszonkilencedik Fejezet

A kvantummechanikai többtest probléma

1. §. A többtest probléma Schrödinger-egyenlete 508
2. §. Az impulzusmegmaradási törvény. A súlypont mozgása 510
3. §. Az impulzusmomentum megmaradási törvénye 515
4. §. Azonos részecskék. Pauli-elv 519
5. §. Spintől független kölcsönhatás 526
6. §. Betöltési szám-reprezentáció. Emissziós és abszorpciós operátorok 529
7. §. A kölcsönhatás figyelembevétele perturbációszámítással azonos Fermi-részecskék esetén 539
8. §. A Hartree—Fock-módszer 545
9. §. A Hartree—Fock-módszer alkalmazása kételektron-problémára 553
10. §. A Hartree—Fock-módszer alkalmazása nemesgáz konfigurációjú atomokra 560
11. §. Az atom statisztikus elmélete 568
12. §. A pszeudopotenciálok módszere 572

Harmincadik Fejezet

Térelméleti módszerek alkalmazása a kvantummechanikai többtest problémában

1. §. Bevezetés 576
2. §. A Green-függvényes eljárás 578
3. §. Gráftechnika 580
4. §. A széteső gráfok 587
5. §. Az alapállapot-gráfok és a linked-cluster formula 591
6. §. Az alapállapot energiája és sajátfüggvénye 592
7. §. Kvázirészecske gerjesztések 595
8. §. Diagonális gráfok és a független kvázirészecske közelítés 597

9. §. Perturbációszámítás 599
10. §. A Bethe—Goldstone-féle módszer 602
11. §. A Brueckner-módszer 606
12. §. Fermi-gázok és folyadékok 611
13. §. Fermi-folyadékok alapállapota 614
14. §. Kvázirészecske gerjesztés Fermi-folyadékban 617
15. §. Az egyes közelítő módszerek alkalmazási köre, kis és nagy sűrűségű határeset 621
Ajánlott irodalom 623
Név- és tárgymutató 625

ELŐSZÓ

A fizika rohamos fejlődése és mind nagyobb szerepe a rokon tudományokban szükségessé teszi, hogy diákjainkat, doktoranduszainkat, tehát fizikus utánpótlásunkat ellássuk olyan magyar nyelvű fizika könyvekkel, amelyek számukra segédeszközöket nyújtanak az őket érdeklő tudományterület könnyebb elsajátításához. Több kiváló szerzőtől kitűnő könyvek kerültek kiadásra, melyek a fizika egyes területeit ölelik fel. Hogy ennek ellenére elhatároztam, hogy ezt az egész elméleti fizikára kiterjedő „Bevezetés az elméleti fizikába" c. könyvet kiadjam, annak oka egyrészt az, hogy igen kívánatosnak látszik az egész tárgykörnek egy műben való tárgyalása, másrészt pedig úgy látom, hogy egy ilyen jellegű mű iránt elég nagy érdeklődés mutatkozik. Az a fentebb említett körülmény, hogy egyes tárgykörökből már léteznek kiváló magyar nyelvű tankönyvek, véleményem szerint nem akadálya e könyv megjelentetésének, mert különböző szerzők különböző tárgyalásmódban prezentálják az anyagot, ami különösen a fiatal fizikusok szempontjából igen lényeges, ugyanis egy tárgykör teljes elmélyült megértését csakis a tárgykörnek különböző oldalakról, különböző szempontok szerinti megvilágítása adja.

Egyes szerzők azon a véleményen vannak, hogy a könyvírás aránylag könnyű dolog: egyszerűen leírják mindazt, amit a feldolgozandó tárgykörről tudnak, függetlenül attól, hogy az olvasó azután ezt mennyire tudja követni. Nekünk Kisdi Dáviddal ezzel szemben az a véleményünk, hogy egy jól használható könyv megírásánál a szerzőknek elsősorban az a feladatuk, hogy beleéljék magukat az olvasó lelkivilágába és úgy prezentálják az anyagot, hogy az olvasó ezt a legkönnyebben megérthesse. Nagyon örülnénk, ha ezt a célkitűzést elértük volna.

Az egész mű két részre oszlik: a klasszikus fizikára és a kvantumfizikára. A klasszikus fizikába került a relativitáselmélet is, mert a relativisztikus mechanikát és a relativisztikus elektrodinamikát nehezen lehetne a mechanikától ill. elektrodinamikától elkülönítve, később esetleg a kvantumfizikában tárgyalni.

Az első rész tárgyalja a szokásos klasszikus fizikai fejezeteket, tehát a mechanikát, elektrodinamikát a hullámoptikával, a termodinamikát és mint már említettük, a relativisztikus mechanikát és elektrodinamikát. A klasszikus fizika sajnos ma, különösen a fiatal fizikusoknál, mindinkább háttérbe szorul, ami természetes, mert a sok modern probléma különösen az ifjúságot jobban vonzza, mint a régebbi klasszikus fizika. De ez az álláspont – ha érthető is – semmi esetre sem helyeselhető maradéktalanul. Véleményem szerint ugyanis a modern fizika csak a klasszikus fizika alapos ismerete révén érthető meg teljesen.

Az egész mű nagy terjedelménél fogva két kötetre oszlik. Az első kötet alcíme: Klaszikus fizika és relativitáselmélet, a második: Kvantumfizika és anyagszerkezet. Az első kötet magában foglalja az első három részt (az elsőtől a tizennyolcadik fejezetig) a második kötet, mely az elsőnek szerves folytatása, a negyedik és ötödik részt (a tizenkilencediktől a harmincadik fejezetig) öleli fel.

A második kötet az anyag korpuszkuláris szerkezetével és a kvantumfizikával foglalkozik. E terület igen nagy kiterjedésű és állandóan újabb eredményekkel gyarapszik, tehát itt az óriási anyagnak csak egy részére szorítkozhattunk. Az anyag kiválasztásánál főképpen az vezetett bennünket, hogy a legfontosabb területek alapjait tárgyaljuk anélkül, hogy túlságosan a részletekbe hatoltunk volna, amit már a könyv volumene sem tett lehetővé. Ennek következtében pl. egyes fontos területek, mint pl. a szilárd testek fizikája és az elemi részek fizikája, nem került tárgyalásra. De mindezt, ami e területek megértéséhez szükséges, azt véleményünk szerint a második kötet tartalmazza.

A könyv tartalmáról részletesebben a tartalomjegyzék ad bő felvilágosítást.

E helyen szeretnénk köszönetet mondani a könyv kéziratának sajtó alá rendezéséért Ozoróczy Zsuzsának, az ábrák megrajzolásáért Huszár Györgynének, a gépelésért Rajos Sándornénak és a nyomdai korrektúrák nehéz munkájának elvégzéséért Ozoróczy Zsuzsának, Mágori Editnek és Jeanplong Józsefnének, akik mindnyájan a Magyar Tudományos Akadémia Elméleti Fizikai Kutató Csoportjának tagjai.

Budapest, 1970. május

Gombás Pál

*

E könyv már nyomdai előállítás alatt állott, amikor szerzője, Gombás Pál kétszeres Kossuth díjas akadémikus, a Budapesti Műszaki Egyetem tanszékvezető egyetemi tanára, a Magyar Tudományos Akadémia Elméleti Fizikai Kutató Csoportjának igazgatója, Eötvös Loránd Fizikai Társulat Elnökségének tagja tragikus hirtelenséggel elhunyt.

Halálával nemcsak az elméleti fizika számos területének kimagasló kutatóját, az elméleti atomfizika, szilárdtestfizika és magfizika kiváló művelőjét vesztettük el, hanem személyében a tudományos utánpótlás fáradhatatlan nevelőjét, felsőoktatásunk nagytekintélyű profeszorát is elragadta tőlünk a halál.

E könyv tetemes része Gombás Pál professzor egyetemi előadásainak anyagán alapul. Hiszem, hogy megjelentetésével az Akadémiai Kiadó az elhunyt tudósnak a lehető legméltóbb emléket állítja.

Budapest, 1971 május

Kisdi Dávid

A fizikát kísérleti és elméleti fizikára szokás felosztani. Míg a kísérleti fizika a természeti jelenségek leírásával és a törvényszerűségek mérések útján való felismerésével foglalkozik, addig az elméleti fizika a jelenségek és törvények magyarázatával és egyes fizikai mennyiségek közti kapcsolatok levezetésével, újabb törvények dedukálásával foglalkozik; ezzel együttjár egyes törvényeknek lehetőleg egy alaptörvényre való visszavezetése is és olyan elméletek kiépítése, amelyek az észlelt jelenségekről és törvényszerűségekről számot tudnak adni. Míg a kísérleti fizika módszere a minél precízebb eszközökkel való pontos megfigyelés, egyes fizikai mennyiségek mérése és a mért adatok alapján törvényszerűségek feltárása, az elméleti fizika módszere a mért jelenségek, törvények magyarázata és elméletek kiépítése, ami matematikai módszerekkel történik. A módszerekben való igen nagy különbség okozza azt, hogy különösen kezdő fizikusok a kísérleti és elméleti fizikában két külön tudományágat tételeznek fel, melyeknek egymáshoz kevés vagy semmi közük sincs. Ez persze alapvető tévedés. A kísérleti és elméleti fizika a legszorosabban egymásra van utalva és együtt alkotják a fizikát. A kísérleti fizika elméleti fizika nélkül óriási adathalmaz volna egyes törvényszerűségekkel, anélkül, hogy az adatok összefüggését és a törvényszerűségek magyarázatát ismernők. Elméleti fizika kísérleti alapok nélkül el sem képzelhető. Az elméleti fizikának mindenütt a kísérleti tényekből kell kiindulnia és azok alapján kell az elméletet felépítenie. Ha az elméleti fizikus nem így járna el, hanem tisztán gondolkodás útján próbálna felépíteni elméleteket, akkor azoknak természettudományi értékük épp oly kevéssé volna, mint a régi görögök atomelméletének, amely tisztán spekulatív jellegű elmefuttatás volt. Gyakran találkozik az ember azzal a felfogással, hogy az elméleti fizikus bizonyos hipotézisekből építi fel tudományágát, melyeknek semmi közük a tapasztalathoz. Sajnos az elméleti fizika óriási irodalmában találni erre szórványosan példákat, de ezeket általában a szerzőjükön kívül senki sem veszi komolyan. A tisztán gondolkodás útján nyújtott lehetőségek, hipotézisek száma többszörösen végtelen sok és így praktice nulla annak a valószínűsége, hogy valaki tisztán gondolkodás útján, mindennemű empirikus adat nélkül, felfedezzen egy természeti törvényt.

Az elméletek megítélésénél gyakran hallani olyan kijelentéseket, hogy pl. a régi klasszikus *Newton*-féle mechanika elavult és ma már érdektelen. Ez is súlyos tévedés. NEWTON mechanikája a makrovilágra és a fénysebességhez képest kis sebességgel mozgó testekre vonatkozik és itt ma is éppen úgy alkalmazzuk, mint

az ő idejében. A *Newton*-féle axiómák, melyeken az ő mechanikája alapszik, alapvető törvényszerűségek és fogalmak felismerései. Úgy vélem, hogy ezekről minden kor fizikusai csak a legnagyobb elismeréssel nyilatkozhatnak. Hogy ez a mechanika a mikrovilágra és igen nagy (a fénysebesség közelébe eső) sebességekre nem érvényes, az ennek az elméletnek értékéből mit sem von le, hiszen NEWTON elméletét ezekre a határesetekre nem is akarta alkalmazni.

Egy elmélet mindig csak bizonyos határokon belül érvényes és akkor mondható jónak, ill. akkor válik be, ha ennek keretében fellépő jelenségeket értelmezni tudja; e tekintetben a klasszikus *Newton*-féle mechanika száz százalékig megállotta helyét.

Más a helyzet a *Bohr*-féle atomelmélettel, mely a maga idejében nagy horderejű volt és számot tudott adni sok jelenségről. Ez az elmélet azonban belső ellentmondásokat tartalmazott, melyek már előre jelezték, hogy helyét egy újabb elméletnek kell elfoglalnia, ami a kvantummechanika felfedezésével meg is történt. De annak ellenére, hogy a *Bohr*-elmélet, ellentétben a *Newton*-féle mechanikával, (már a saját keretein belül) ellentmondásokat tartalmazott és az új helyébe került elmélet ezektől mentes, mégis azt kell mondanunk, hogy a *Bohr*-féle elméletnek megvolt és megvan a maga nemcsak történelmi szerepe, mert megindítója lett az atomok és molekulák spektruma óriási elméletének. Nagyon gyakran beszélnek ma a naiv vagy *Bohr*-féle atomelméletről. Mai szemmel nézve lehet, hogy ebben az elméletben találunk bizonyos vonásokat, melyeket a mai kornak e tekintetben sokkal elmélyültebb ismereteiből és gazdagabb tapasztalataiból kiindulva, lehet naivnak nevezni. De ha gondolatban visszahelyezkedünk abba a korba, amelyben BOHR elméletét megalkotta, akkor azt hiszem elméletére a „naiv" jelzőt nem lehet és nem is illik alkalmazni.

Az elméleti fizika nem könnyű tudományág; minthogy módszere a matematika, az elméleti fizikusnak alapos matematikai ismeretekkel kell rendelkeznie, és ezeket jól kell tudnia alkalmazni. Egzisztenciabizonyításoktól általában eltekinthet, mert ezeket gyakran a probléma maga nyújtja. Hasonlóan a matematikushoz, az elméleti fizikus használja pl. a kis távolság (vagy mennyiség) fogalmát. De ez nem mindig infinitezimálisan kicsi, tehát nem térünk át mindig a $\Delta x \to 0$ határra. Gondoljunk pl. a körülöttünk levő anyagra, mely, mint tudjuk, atomokból vagy molekulákból épül fel és képezzük ennek a sűrűségét, vagyis a $\Delta m/\Delta V$ hányados határértékét. Ha itt fizikailag értelmes értékhez akarunk jutni, akkor a ΔV térfogat nem lehet tetszőlegesen kicsi, mert ha pl. csak egy atommag méretű, akkor a sűrűség értéke egy óriási érték és zérus között fog ingadozni aszerint, hogy a ΔV-ben van-e egy atommag vagy nincs. Egy fizikailag értelmes sűrűségértékhez úgy jutunk, ha ΔV még sok atommagot tartalmaz. Tehát az elméleti fizikában használt differenciálok kis mennyiségek, de – ellentétben a matematikával – nem *túl* kicsinyek, amelyen azt értjük, hogy az adott probléma által megszabott alsó határuk van.

Egy másik igen fontos probléma egy fizikai probléma matematikai megfogalmazása és a formulákban szereplő mennyiségek nagyságrendjének helyes felismerése, tehát annak megállapítása, hogy első közelítésben mi hanyagolható el,

vagyis hogy hogyan juthatunk el egy első, esetleg csak nagyon durva közelítéshez, melyből azután a magasabb, vagyis nagyobb pontosságú közelítések meghatározhatók. Egzakt megoldásokhoz a természet által nyújtott problémák bonyolultsága miatt általában csak ritkán jutunk, a legtöbb esetben közelítő eljárásokra vagyunk utalva. Ne becsüljük le ezeket az eljárásokat (azért mert *csak* közelítő eljárások). Ezek helyes felismerése és alkalmazása nemcsak alapos matematikai tudást, hanem általában intuíciót is feltételez és hogy egy komplikált fizikai probléma megoldásához szükséges közelítő eljárás kidolgozásában mennyi szellemi tőke és szépség fekszik, azt csak az tudja megítélni, aki ezt már önmaga átélte.

ELSŐ RÉSZ

MECHANIKA

BEVEZETÉS

A mechanika az elméleti fizika egyik legfontosabb ága. Mindaz, amivel ennek a fejezetnek keretében foglalkozni fogunk, nélkülözhetetlen alapját képezi a további elméleti fizikai tanulmányoknak.

Míg a kísérleti fizika feladata, hogy az egyes fizikai jelenségeket leírja, ill. reprodukálja, addig az elméleti fizika célja és feladata az, hogy az egyes fizikai jelenségeknek és törvényszerűségeknek magyarázatát adja. Segédeszköze ebben a matematika. A matematika az elméleti fizikában tehát nem öncél, hanem segédeszköz, vagyis gondolkodásunk kifejezője. Mindig szem előtt kell tartani az egyes matematikai műveletek fizikai jelentését, ugyanis különösen a kezdő nagyon hajlamos arra, hogy az egész elméleti fizikában csak matematikai formalizmust lásson és nem érti meg a fizikai lényeget.

A könyv keretein belül ezért mi nem is törekedhetünk arra, hogy matematikai tételeket bizonyítsunk. Ez a matematikus dolga, mi a tételeket és a matematikai segédeszközöket csak átvesszük a matematikustól. Az elmélet végső szálai természetesen a *tapasztalatban* gyökereznek. Egy elmélet, mely a tapasztalatot teljesen nélkülözi, a természettudomány szempontjából értéktelen. Ezért jórészt jelentéktelenek természettudományi szempontból az antik természettudósok, természetfilozófusok elméletei, melyek teljesen spekulatív jellegűek.

A mechanika a mozgás jelenségével foglalkozik. Két főrészre tagozódik: a kinematikára és a dinamikára. A kinematika feladata a mozgások leírása, míg a dinamikáé a mozgás feltételeinek megállapítása, továbbá a természetben valóban létrejövő mozgások tárgyalása. A dinamika egyik speciális fejezete a sztatika, mely az egyensúly feltételeit tárgyalja.

Tárgyalásainkban először oly testekkel foglalkozunk, melyek mérete a mozgás közben megtett távolságokhoz viszonyítva elhanyagolható. Az ilyen testet, mivel helyzetét egy pontja helyzetének megadásával jellemezhetjük, anyagi pontnak nevezzük.

Az anyagi pont mozgásának tanulmányozása után rátérünk a pontrendszerekre, majd az ún. merev test mozgására, melyen olyan testet értünk, melynek pontjai a mozgás folyamán kölcsönös távolságukat nem változtatják. Ideális merev test nincs, de nagyon sok esetben a mozgó test pontjainak kölcsönös elmozdulásai jelentéktelenek, úgyhogy a test közelítőleg merevnek tekinthető.

Végül pedig rá fogunk térni a deformálható testek tárgyalására, amidőn éppen a test részeinek kölcsönös elmozdulása érdekel majd bennünket. Ez két részre

oszlik: úgymint a rugalmas testek mechanikájára, midőn csak kis deformációkat veszünk figyelembe és a cseppfolyós testek mechanikájára, ahol a részek kölcsönös távolságának megváltozása nem kicsi.

A mechanika igen régi tudomány. Egyes alapfogalmait és törvényeit már a görögök is ismerték. Az újkorban a természettudományok nagy fellendülésének idején a mechanika is újabb lendületet nyert. Különösen KOPERNIKUS, KEPLER és GALILEI révén kapott nagy impulzust. Ezt követte csakhamar NEWTON hatalmas alkotása, aki híres axiómái által a mechanikát nagy rendszerbe foglalta és megdönthetetlennek látszó alapokra fektette. Az első egzakt megfogalmazott természeti törvény a *Newton*-féle tömegvonzási törvény volt, melyet minden erőtörvény prototípusának tekintettek. Úgy tűnt, hogy ezzel sikerült a természet végső alaptörvényeit megtalálni és a további feladat már csak a törvényekből vonható következtetéseket levonni. Ez a felfogás közel 200 évig tartotta magát, mely idő igen gazdagította eredményekben a természettudományokat. Újabb impulzust kapott az elmélet azáltal, hogy az elektromos és mágneses erők *Coulomb*-féle törvényei egészen hasonlóak a *Newton*-féle vonzási törvényekhez, a fény pedig a rugalmas közegek mechanikájával mutatott analógiát, továbbá, hogy a hő kis részecskék mozgásával volt értelmezhető. Mindez természetesen csak fokozta a *Newton*-féle alaptörvényekbe vetett bizalmat.

A XIX. század közepe táján azután nehézségek merültek fel, melyek rámutattak arra, hogy a *Newton*-féle mechanikának határai vannak. Az első nehézség az volt, hogy az elektromos és mágneses erőket, eltekintve a sztatikus esettől, már nem lehetett beleilleszteni a *Newton*-féle centrális erők sémájába. Ezeket az ún. *Maxwell*-féle differenciálegyenletek írják le, melyek önálló természeti törvények és nem vezethetők vissza a *Newton*-féle mechanikára. A *Newton*-féle mechanikát tehát ezekkel az ún. elektrodinamikai alaptörvényekkel ki kellett egészíteni.

A XIX. század végén azonban olyan jelenségeket fedeztek fel, melyek a *Newton*-féle alaptörvények módosítását tették szükségessé. Így pl. igen gyors részek úgy viselkedtek, mintha tömegük megnőtt volna, ellentétben a *Newton*-féle második axiómával. A fény-nyomás pedig a harmadik axióma módosítását tette szükségessé. A *Newton*-féle axiómákat tehát nem lehetett már szigorúan helyesnek tekinteni, de éppen ezeknek alapján lehetséges volt egy elméletet, az ún. relativisztikus mechanikát kiépíteni, mely a valóságot egy fokkal jobban közelíti meg, mint a *Newton*-féle, ún. klasszikus mechanika. A *Newton-féle* mechanika a relativisztikus mechanika határesete gyanánt adódik, ha a testek sebessége kicsi a fénysebességhez képest.

Röviddel ezután egy újabb és más természetű nehézség merült fel. A fekete test sugárzásának tanulmányozása oly elméletre vezetett, melynek feltevései ellenkeznek a klasszikus mechanika alapfeltevéseivel. Ez az új elmélet a kvantumelmélet, ill. a kvantummechanika, mely atomi méretű testekre érvényes. A klasszikus mechanika mint a kvantummechanika határesete fogható fel arra az esetre, midőn a testek nem túlságosan kicsinyek. Éppen ez mutatja a *Newton*-féle klasszikus mechanika nagy értékét.

Ebből a rövid történeti áttekintésből látható, hogy a klasszikus mechanika dogmatikus tanítása téves, ami azonban mit sem von le értékéből. Minden elmélet a megismerés egy fokozatát jelenti, tudásunk nemcsak a részletekben, hanem az alapelveket tekintve is hiányos. Egy elmélet jó, ha a jelenségek főbb vonásairól számot ad és új jelenségek beillesztése az alapelvek elvetése nélkül, mindössze azoknak kis változtatásával lehetséges. A klasszikus mechanika e tekintetben megállotta helyét.

Anyagunk beosztása a következő. Először a vektorok tanával és néhány matematikai tétellel foglalkozunk, melyekre a továbbiakban szükségünk lesz, majd rátérünk az anyagi pont mechanikájára. Az anyagi pont mechanikájában néhány kinematikai fogalom megtárgyalása után áttérünk a dinamikára és az egyes mozgásokkal részletesen ennek keretében ismerkedünk meg. Ezután foglalkozunk pontrendszerek mechanikájával, végül pedig rátérünk a mechanika elveire. A további fejezetekben a merev testek, a rugalmas testek és a cseppfolyós testek mechanikájával foglalkozunk, végül pedig a relativisztikus mechanika alapvető fogalmaival és törvényeivel ismerkedünk meg.

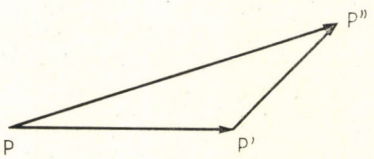
ELSŐ FEJEZET

AZ ANYAGI PONT MECHANIKÁJA

1. §. A vektortan alapjai

A vektor fogalma

A fizikában vannak mennyiségek, melyek egy számmal, a nagyságukkal jellemezhetők, pl. hőmérséklet, tömeg. Ezek a skaláris mennyiségek. Ezeken kívül vannak olyan mennyiségek is, melyeket nagyságuk egyedül nem jellemez, hanem ezenkívül a mennyiség *irányát* is ismernünk kell. Ha pl. egy golyót, melynek helyzete súlypontjának, P-nek helyzetével van megadva, el akarunk mozdítani 5 cm-rel, akkor tudnunk kell, hogy az *elmozdulásnak* milyen irányt adjunk, mert csak így egyértelmű a feladat. Az elmozdulás tehát egy irányított mennyiség. Ha egy pontot P-ből P'-be, majd onnan P''-be mozdítunk el, az teljesen egyenértékű azzal, hogy a pontot közvetlenül P-ből P''-be mozdítjuk el.



1. ábra. Elmozdulások összetétele

Ez az eljárás természetesen tetszőlegesen ismételhető. Ebből pedig látható hogy valamely PP' elmozdulás a következőképpen jellemezhető. Helyezzük P-be egy derékszögű koordinátarendszer kezdőpontját. Ekkor látható, hogy a PP' elmozdulás a következő 3 elmozdulásból tevődik össze: PP_x, P_xP_y, P_yP'. Látjuk tehát, hogy a PP' elmozdulás az a, b, c számok megadása által egyértelműen meg van határozva.

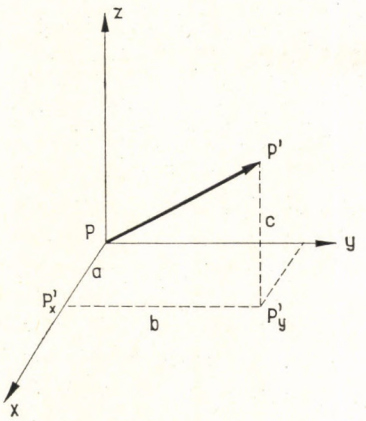
Sok fizikai mennyiség hasonlóképpen viselkedik, mint az elmozdulás, vagyis szintén 3 szám megadásával van meghatározva. Ezeket a mennyiségeket *vektoroknak* nevezzük. Rajzban nyíllal átrázolhatók, melynek hossza bizonyos egységben mérve a vektor nagysága, iránya pedig megegyezik a vektor irányával.

Két vektor tehát egyenlő egymással, ha a két vektor nagysága és iránya egymással megegyezik. Vagyis két vektor még akkor is egyenlő, ha egymással párhuzamosak, egyenlő irányúak és nagyságuk egyenlő, de kezdőpontjuk nem esik egybe.

Nem minden fizikai mennyiség vektor, mely egy irányított hosszal állítható elő. Csak azok vektorok, melyek az elmozdulások összetevésének szabályát követik.

A vektor tehát olyan mennyiség, melyet nagysága és iránya határoz meg. Pl. elmozdulás, sebesség. Jele: **a**, **b**, **c**, ... vagy **A**, **B**, **C**, ...

A vektor hossza az abszolút értéke. Jele $|\mathbf{a}| = a$. Irányát az irányszögekkel jellemezzük, melyek a vektor és a koordinátatengelyek hajlásszögei. Ezek közül – mint látni fogjuk – csak 2 független egymástól. Tehát az abszolút érték és az irányszögek 3 független adat.

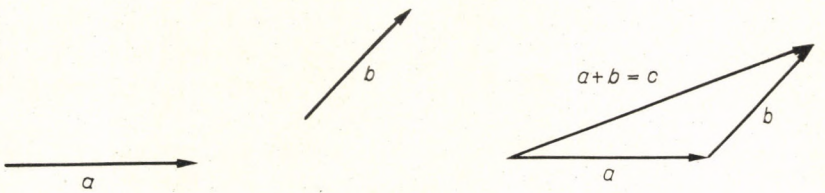


2. ábra. Vektor fölbontása komponensekre

Vektorok összege

Két vektor, **a** *és* **b** *összegét* megkapjuk, ha **a** végpontjában **b**-t felrajzoljuk és **a** kezdőpontját **b** végpontjával összekötjük (3.ábra). Az összeadás *kommutatív*

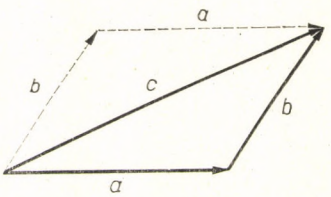
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \qquad (1.1.1.)$$



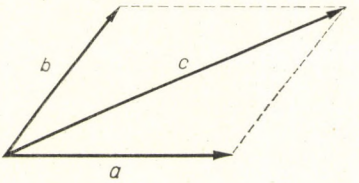
3. ábra. Vektorok összeadása

művelet, ahogy ez a 4. ábráról leolvasható (mert **a** és **b** önmagával párhuzamosan eltolható).

Ezen alapszik a *parallelogramma-szerkesztés.* A két vektort egy pontból kiindulva rajzoljuk fel, kiegészítjük parallelogrammává, melynek átlója adja az összeget (5. ábra).

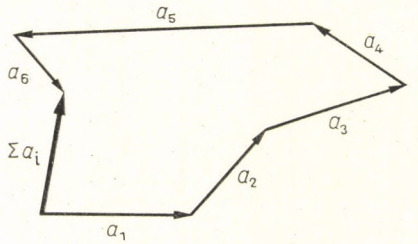


4. ábra. A vektorösszeadás kommutativitása



5. ábra. Vektorparallelogramma

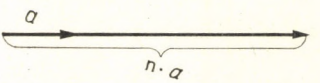
Több vektor összegét úgy kapjuk, hogy az összeadandó vektorok mindegyikét az előző végpontjába rakjuk fel és az első kezdőpontját az utolsó végpontjával kötjük össze (6. ábra).



6. ábra. Több vektor összege

A vektor többszöröse. Egy vektor szorzata egy skalárral.

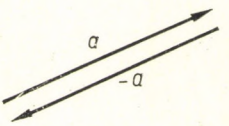
Az **a** vektor n-szerese egy oly vektor, melynek hossza **a** n-szerese, iránya pedig megegyezik **a** irányával.



7. ábra. Vektor többszöröse

A vektor negatívja

Egy **a** vektor negatívja, $-\mathbf{a}$ oly vektor, melyet **a**-hoz hozzáadva az eredő 0. Tehát ugyanolyan hosszú, mint **a**, de vele ellentétes irányú.

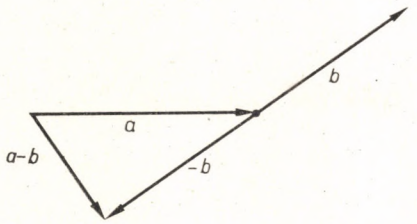


8. ábra. Vektor negatívja

Vektorok különbsége

a és **b** különbsége olyan vektor, melyet úgy kapunk, hogy **a**-hoz **b** negatívját hozzáadjuk

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}). \tag{1.1.2}$$



9. ábra. Vektorok különbsége

Egységvektorok, vektorkomponensek

Valamely **a** vektort a következőképpen állíthatunk elő. Legyen **e** egy az **a** vektor irányába mutató vektor, melynek abszolút értéke 1, vagyis egy ún. *egységvektor*. Ekkor fennáll, hogy

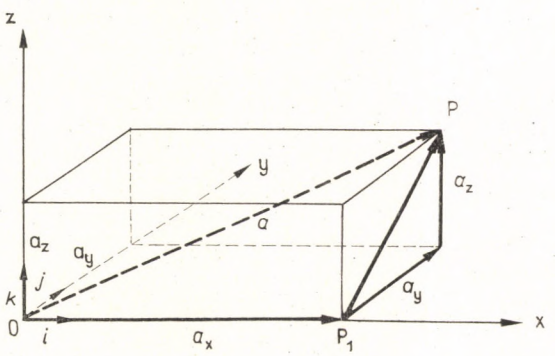
$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\,\mathbf{e} = a\,\mathbf{e}, \tag{1.1.3}$$

amint ez a vektornak egy skalárral való szorzatából azonnal látható.

Az **a** vektort 3 vektorból gondolhatjuk összetéve, melyek a derékszögű koordinátatengelyek irányába mutatnak: $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z$. Tehát

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z. \tag{1.1.4}$$

Egységvektorokat vezetve be, melyek a koordinátatengelyek irányába esnek és



10. ábra. A helyvektor felépítése egységvektorokból és komponensekből

melyeket **i**, **j**, **k**-val jelölünk, nyerjük

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}. \tag{1.1.5}$$

a_x, a_y, a_z-t és olykor $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z$-t is a vektor *komponenseinek* nevezzük.
A vektort komponenseivel így jelöljük:

$$\mathbf{a}(a_x,a_y,a_z) \quad \text{vagy} \quad \mathbf{a}(\mathbf{a}_x,\mathbf{a}_y,\mathbf{a}_z).$$

A vektor abszolút értékének és iránykoszinuszainak előállítása a komponensekkel

Mint a 10. ábrából közvetlenül látható,

$$|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}_x|^2 + |\mathbf{a}_y|^2 + |\mathbf{a}_z|^2,$$

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{1.1.6}$$

Az irányszögek legyenek α, β, γ, ekkor

$$\cos\alpha = \frac{|\mathbf{a}_x|}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{|\mathbf{a}_y|}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \tag{1.1.7}$$

$$\cos\gamma = \frac{|\mathbf{a}_z|}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Látható, hogy

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 1, \tag{1.1.8}$$

tehát a 3 irányszög közül csak 2 független egymástól. Az iránykoszinuszokra felírt egyenletekből következik, hogy

$$a_x = a\cos\alpha,$$

$$a_y = a\cos\beta, \tag{1.1.9}$$

$$a_z = a\cos\gamma.$$

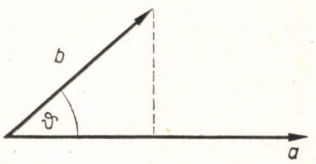
Az egységvektor komponensei maguk az iránykoszinuszok.

A skaláris szorzat

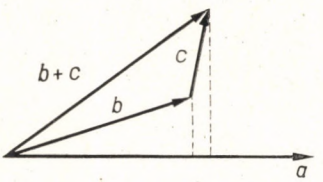
Két vektor skaláris szorzata egy *szám*, mely a két vektor abszolút értékének és közbezárt szögük koszinuszának szorzatával egyenlő. A skaláris szorzatot így jelöljük:

$$\mathbf{ab} = ab\cos\vartheta. \tag{1.1.10}$$

Amint látható, **ab** egyenlő az egyik vektor abszolút értéke szorozva a másiknak rá eső vetületével. Mint közvetlenül belátható, a skaláris szorzat *kommutatív* művelet.



11. ábra. Két vektor sklaláris szorzata



12. ábra. A skaláris szorzás disztributivitása

A skaláris szorzásra áll a *disztributivitás* törvénye is.

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}. \tag{1.1.11}$$

A 12. ábrából ugyanis látható, hogy **b** + **c**-nek **a**-ra való vetülete **b** és **c** vetületeinek összegével egyenlő.

Ebből egyúttal következik, hogy

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{ac} + \mathbf{bc} + \mathbf{ad} + \mathbf{bd},$$

ugyanis ha **c** + **d** helyébe egyelőre **f**-et írunk, nyerjük

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{f} = \mathbf{af} + \mathbf{bf}.$$

f helyébe **c** + **d**-t helyettesítve és alkalmazva a disztributivitás törvényét, adódik a fenti eredmény, mely szerint két vektorösszegnek egymással való skaláris szorzatát úgy képezzük, hogy az egyik vektorösszeg minden tagját skalárisan szorozzuk a másik vektorösszeg minden egyes tagjával.

Egy dologban azonban különbözik a skaláris szorzat a közönségestől, ugyanis a skaláris szorzat lehet 0, ha egyik tényezője sem 0. Csak az szükséges, hogy a két vektor egymásra merőleges legyen, mert $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Tehát ha $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, akkor $\mathbf{ab} = 0$. Továbbá azonnal belátható, hogy ha $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, akkor $\mathbf{ab} = ab$ és

$$\mathbf{aa} = |\,\mathbf{a}\,|^2 = a^2. \tag{1.1.12}$$

Ha a derékszögű koordinátatengelyek irányába eső egységvektorokat **i**, **j**, **k**-val jelöljük, akkor fennáll, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{ii} = \mathbf{jj} &= \mathbf{kk} = 1, \\ \mathbf{ij} = \mathbf{jk} &= \mathbf{ki} = 0. \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

Eddigi ismereteink alapján kiszámíthatjuk két vektor *skaláris szorzatát a két vektor komponenseivel.* Az **a** és **b** vektorok komponenseikkel a következőképpen állíthatók elő

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \qquad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}, \\ \mathbf{ab} &= (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \cdot (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) \\ &= a_xb_x\,\mathbf{ii} + a_xb_y\,\mathbf{ij} + \ldots + a_zb_z\,\mathbf{kk} \\ &= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

Két vektor hajlásszöge

$$\cos\vartheta = \frac{\mathbf{ab}}{ab}.$$

Komponensekkel

$$\cos\vartheta = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{1.1.15}$$

Ha **a** és **b** *egységvektorok*, akkor $a = 1$ és $b = 1$, továbbá a komponensek az egységvektor iránykoszinuszaival egyenlők. Ekkor tehát

$$\cos\vartheta = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2, \tag{1.1.16}$$

ahol α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2)$ már az iránykoszinuszokat jelentik. Ez az analízisből ismeretes tétel. Ha $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, akkor $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$.

A vektor vetülete egy irányra

Legyen adva egy **a** vektor és egy **n** egységvektor, melynek komponensei λ, μ, ν, ezek tehát az **n** irány iránykoszinuszai. Hogy $a_{\lambda\mu\nu}$-t, **a**-nak a λ, μ, ν irányra való vetületét, megkapjuk, képezzük **an**-et

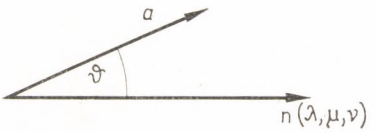
$$\mathbf{an} = a\,1\cos\vartheta = a_{\lambda\mu\nu},$$

másrészt

$$\mathbf{an} = a_x\lambda + a_y\mu + a_z\nu,$$

tehát

$$a_{\lambda\mu\nu} = a_x\lambda + a_y\mu + a_z\nu. \tag{1.1.17}$$



13. ábra. Vektor vetülete adott irányra

Vektoriális szorzat

Két vektor, **a** és **b** vektori szorzatán olyan **p** vektort értünk, melynek abszolút értéke $ab \sin \vartheta$, ahol ϑ a két vektor közti szög. Iránya az **a**, **b** síkra merőleges oly értelemben, hogy **p** irányába nézve az első tényezőnek, **a**-nak, a második tényezőnek, **b**-nek, irányába történő, az óramutató járásával egyértelmű forgatása a legrövidebb úton történjen. Kevésbé pontosan azt is mondhatjuk, hogy **p** iránya olyan, hogy az első tényező **a**, a második tényező **b** és a szorzat **p** úgy következzenek egymás után, mint egy jobbsodrású koordinátarendszer x-, y-, és z-tengelye. **p** iránya tehát függ a tényezők sorrendjétől. A vektoriális szorzat jele

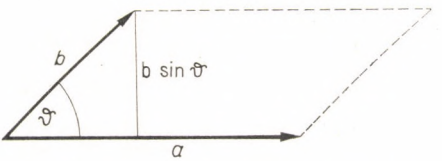
$$\mathbf{p} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]. \tag{1.1.18}$$

Az előbbiekből következik, hogy ha a tényezők sorrendjét felcseréljük, a szorzat, **p** előjelet vált, tehát

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}], \tag{1.1.19}$$

vagyis a vektoriális szorzat *nem kommutatív.*
Ha $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, akkor $\sin \vartheta = 0$, vagyis $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$.
Ha $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, akkor $\sin \vartheta = 1$, vagyis $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = ab$.
Ha **i**, **j**, **k** megint a szokásos egységvektorok, akkor fennáll

$$\begin{gathered}[\mathbf{i}, \mathbf{i}] = [\mathbf{j}, \mathbf{j}] = [\mathbf{k}, \mathbf{k}] = 0, \\ [\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \mathbf{k}, \quad [\mathbf{j}, \mathbf{k}] = \mathbf{i}, \quad [\mathbf{k}, \mathbf{i}] = \mathbf{j}.\end{gathered} \tag{1.1.20}$$



14. ábra. Vektorok vektoriális szorzata

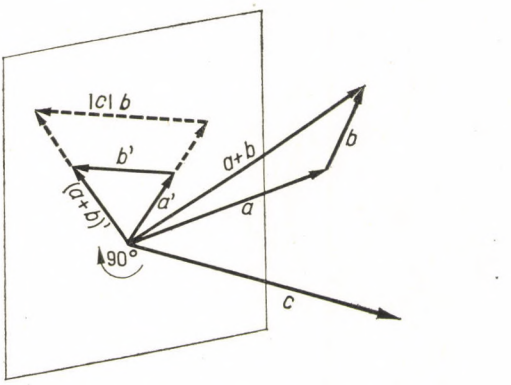
$|\mathbf{p}|$ a két vektor által meghatározott parallelogramma területével egyenlő. Ugyanis

$$|\mathbf{p}| = p = ab \sin \vartheta .$$

A vektoriális szorzatra fennáll a *disztributivitás törvénye*, vagyis

$$[(\mathbf{a} + \mathbf{b}), \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{c}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] . \tag{1.1.21}$$

Rajzoljuk meg a $\mathbf{c}$ vektorra merőleges síkot és vetítsük erre az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektorháromszöget. A vetület olyan háromszög, melyet az $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ és $(\mathbf{a} + \mathbf{b})'$ vektorok



15. ábra. A vektoriális szorzat disztributivitása

határoznak meg, ahol $\mathbf{a}'$ $\mathbf{a}$ vetületét jelenti és így tovább. Ha ennek a háromszögnek minden oldalát $1 : c$ arányban megnöveljük, ismét egy háromszöget kapunk, melyet a $c\mathbf{a}'$, $c\mathbf{b}'$ és $c(\mathbf{a} + \mathbf{b})'$ vektorok determinálnak, vagyis fennáll, hogy

$$c(\mathbf{a} + \mathbf{b})' = c\mathbf{a}' + c\mathbf{b}'.$$

Ha ezt a vektorháromszöget 90°-kal elforgatjuk, akkor az elforgatott $c\mathbf{a}'$ vektor $[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$-t adja és így tovább. Mivel ezekre fennáll az előbbi egyenlet, tételünket bebizonyítottuk.

$c\mathbf{a}'$-t 90°-kal elforgatva tényleg $[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$-t adja, ugyanis $c\mathbf{a}'$ abszolút értéke $ca' = ca \sin (\mathbf{a}, \mathbf{c})$, tehát azonos $[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$ abszolút értékével, iránya is megegyezik $[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$ irányával, mint az a rajzból látható. Ebből következik, hogy

$$[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} + \mathbf{d}] = [\mathbf{a}, \mathbf{c}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{a}, \mathbf{d}] + [\mathbf{b}, \mathbf{d}], \tag{1.1.22}$$

vagyis vektorösszeget vektorösszeggel úgy szorzunk vektorálisan, hogy az egyik vektorösszeg minden egyes tagjának a másik vektorösszeg minden egyes tagjával

való vektoriális szorzatát képezzük megfelelő sorrendben és ezeket a szorzatokat összeadjuk.

Ennek a tételnek és az előbbieknek segítségével előállíthatjuk [**a**, **b**]-t **a** és **b** komponenseivel

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k},\ b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}]\,.$$

(1.20) felhasználásával nyerjük, hogy

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (a_yb_z - a_zb_y)\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{k}. \tag{1.1.23}$$

Tehát [**a**, **b**] derékszögű komponensei

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_x &= a_yb_z - a_zb_y, \\ [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_y &= a_zb_x - a_xb_z, \\ [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_z &= a_xb_y - a_yb_x. \end{aligned} \tag{1.1.24}$$

Amint látjuk, ezek a következő mátrix másodrendű aldeterminánsai

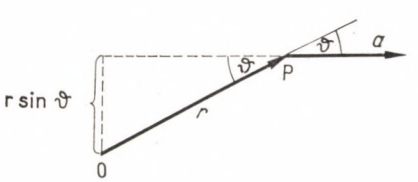
$$\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}.$$

Ha **a**-t és **b**-t egymással felcseréljük, a mátrix két sora felcserélődik, tehát az aldeterminánsok jelet váltanak, vagyis az [**a**, **b**] komponensei, azaz [**a**, **b**] is jelet vált.

Vektorok momentuma

A tér egy P pontjában adott **a** vektornak az O pontra vonatkoztatott momentuma, **m**, az $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$ vektornak és **a**-nak vektoriális szorzata

$$\mathbf{m} = [\mathbf{r}, \mathbf{a}]. \tag{1.1.25}$$



16. Vektor momentuma

Ha O koordinátái x_0, y_0, z_0 és P koordinátái x, y, z, akkor

$$\begin{aligned} m_x &= (y - y_0)a_z - (z - z_0)a_y, \\ m_y &= (z - z_0)a_x - (x - x_0)a_z, \\ m_z &= (x - x_0)a_y - (y - y_0)a_x. \end{aligned} \tag{1.1.26}$$

m abszolút értéke $m = ar \sin \vartheta$, ahol $r \sin \vartheta$ **r**-nek **a**-ra merőleges vetülete, vagyis O-ból **r** irányára bocsátott merőleges hossza. Ha **a** erő, akkor $r \sin \vartheta$ az erő karja. Tehát ebben az esetben a momentum abszolút értéke az erő és az erőkar szorzata. Ez az, amit az elemekben forgatómomentumnak neveztünk, a továbbiakban inkább az erő momentumának fogjuk nevezni.

2. §. A tömegpont kinematikája

A sebesség és gyorsulás fogalma

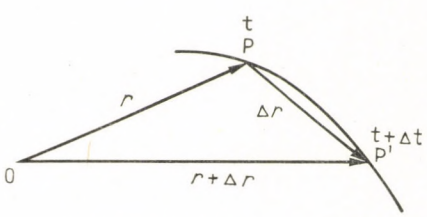
Ebben a fejezetben olyan testekkel foglalkozunk, melyek kiterjedését elhanyagolhatjuk, ezeket tehát bizonyos tömeggel rendelkező pontok gyanánt kezelhetjük. Az ilyen testeket tömegpontoknak nevezzük. Egy tömegpont helyzetét egy bizonyos O kezdőpontból a tömegponthoz húzott rádiuszvektorral, **r**-rel adhatjuk meg.

Egy t időpontban legyen a tömegpont egy P pontban, melyhez húzott rádiuszvektor **r**. A $t + \Delta t$ időpontban, vagyis Δt idő múlva a pont P'-be jut, melyhez húzott rádiuszvektor $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$. A $\Delta\mathbf{r}$ vektor P-ből P'-be mutat. A tömegpont sebességén a P pontban a $\dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ hányados limeszét értjük, ha $\Delta t \to 0$. Tehát a sebesség, v a következőképpen definiálható

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}. \tag{1.2.1}$$

Az idő szerinti deriválást ponttal jelöljük. A sebesség derékszögű komponenseit a következőképpen nyerjük:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$



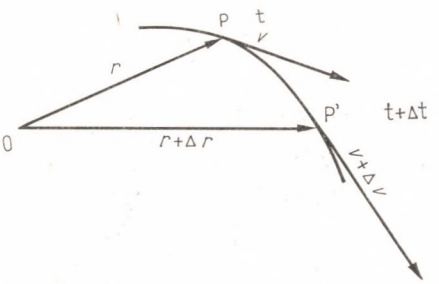
17. ábra. Az elmozdulásvektor

i, **j**, **k** az időtől független egységvektorok, melyek az x, y és z tengely irányába mutatnak. Tehát

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \tag{1.2.2}$$

vagyis

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x}, \\ v_y &= \dot{y}, \\ v_z &= \dot{z}. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$



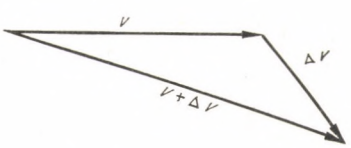
18. ábra. A sebességvektor változása a pálya mentén

v iránya a P-ben húzott érintő iránya, amit onnan lehet látni, hogy **v** iránya megegyezik $\lim_{\Delta t \to 0} (\Delta \mathbf{r}/\Delta t)$ irányával, $\Delta \mathbf{r}$ iránya pedig $\Delta t \to 0$ esetében a P-ben húzott érintő iránya. **v** csak akkor állandó a mozgás folyamán, ha *nagysága* és *iránya* állandó.

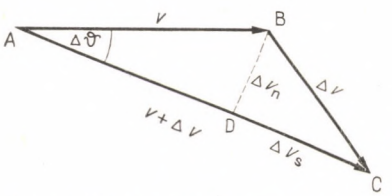
A gyorsuláson a **v** vektor időegységre vonatkoztatott változásának határértékét értjük, vagyis a gyorsulás, **a**, a következőképpen definiálható

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}. \tag{1.2.4}$$

A sebesség a P pontban t időben legyen v, egy P' pontban $t + \Delta t$ időpillanatban pedig $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$. A $\Delta \mathbf{v}$ vektort úgy kapjuk meg, ha **v**-t és $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$-t egy pontból kiindulva rajzoljuk fel.



19. ábra. A sebességvektor megváltozása a mozgás folyamán

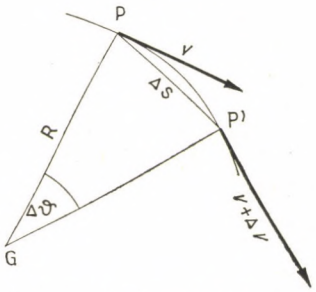


20. ábra. A sebességvektor megváltozásának felbontása normális és tangenciális komponensekre

a egy a sebesség, vagyis az érintő irányába eső és egy arra merőleges komponensre bontható fel. Evégből bontsuk fel $\Delta\mathbf{v}$-t egy $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$-re merőleges $\Delta\mathbf{v}_n$ és egy $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ irányba eső $\Delta\mathbf{v}_s$ komponensre. Meg kell jegyeznünk, hogy határesetben $\Delta\mathbf{v}_s$ $\mathbf{v}$ irányába, $\Delta\mathbf{v}_n$ pedig $\mathbf{v}$-re merőleges irányba mutat, ugyanis határesetben $\mathbf{v}$ és $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ összeesnek.

Foglalkozzunk először Δv_n-nel. $\Delta v_n = \overline{BD}$ határesetben egy $\overline{AB} = v$ sugarú körívnek is tekinthető. Tehát

$$\Delta v_n = v\Delta\vartheta .$$



21. ábra. A normális komponens meghatározása

$\Delta\vartheta$-t egyszerűen számíthatjuk ki. Rajzoljuk fel a pont pályáját, $\mathbf{v}$-t, $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$-t és végül a P és P' pontokban a pálya normálisait. A normálisok, mivel merőlegesek $\mathbf{v}$-re, ill. $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$-re, szintén $\Delta\vartheta$ szöget zárnak be egymással. Határesetben, ha $P'P$-hez közeledik, vagyis ha $\Delta t \to 0$, a G metszéspont egy határhelyzethez közeledik, mégpedig a görbületi kör középpontjához. Határesetben tehát $\overline{PG}$ a görbületi kör sugara, R. Ha $\overline{PP'}$-t, vagyis az elmozdulás abszolút értékét Δs-el jelöljük, akkor határesetben írhatjuk, hogy $\Delta s = R\,\Delta\vartheta$, vagyis $\Delta\vartheta = \dfrac{\Delta s}{R}$. Ezt beírva előbbi egyenletünkbe nyerjük

$$\Delta v_n = \frac{v}{R}\Delta s .$$

Innen kapjuk a gyorsulásnak a $\mathbf{v}$-re merőleges, úgynevezett normális komponensét, a_n-t

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{R}\frac{ds}{dt} .$$

Mivel pedig határesetben $\Delta s = |\,\Delta\mathbf{r}\,|$, ezért $\dfrac{ds}{dt} = v$, tehát

$$a_n = \frac{v^2}{R} . \qquad (1.2.5)$$

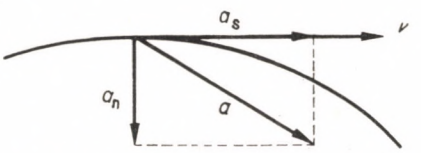
Ezek után térjünk rá $\Delta \mathbf{v}_s$-re. $|\Delta \mathbf{v}_s| = \Delta v_s$, mint a 20. ábrából látható, határesetben a $\mathbf{v}$ vektor hosszának megváltozásával, vagyis Δv-vel egyenlő, tehát

$$\Delta v_s = \Delta v.$$

Tehát a gyorsulásnak az érintő irányába mutató, úgynevezett tangenciális komponense, a_s, a következő

$$a_s = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}. \tag{1.2.6}$$

A felbontást a 22. ábra mutatja.



22. ábra. A gyorsulás felbontása normális és tangenciális komponensre

A gyorsulás abszolút értéke:

$$a = \sqrt{a_s^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{1}{R^2} v^4}. \tag{1.2.7}$$

Egyenesvonalú mozgásnál $R = \infty$, tehát $a_n = 0$ és így $\mathbf{a} = \mathbf{a}_s$. Egyenletes körmozgásnál R = konstans, tehát $a_s = \dfrac{dv}{dt} = 0$, tehát $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n$. Ebben az esetben v és R állandó lévén a is állandó és mindig merőleges a sebességre, vagyis a kör középpontja felé mutat. Tehát gyorsulás akkor is fellép, ha v = konstans és $\mathbf{v}$ csak az irányát változtatja.

A gyorsulás derékszögű komponenseit a következőképpen kapjuk:

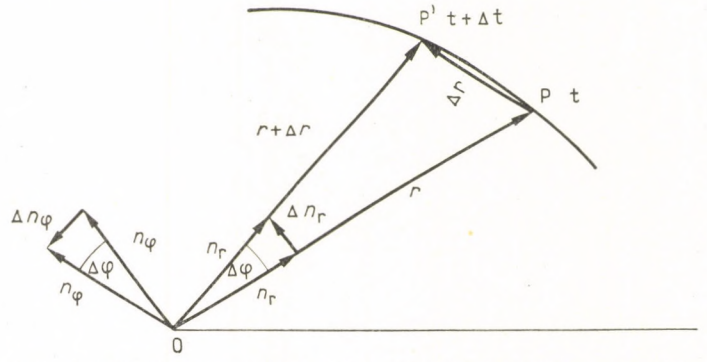
$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k},$$
$$\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k},$$

tehát $\mathbf{a}$ komponensei

$$a_x = \ddot{x},$$
$$a_y = \ddot{y}, \tag{1.2.8}$$
$$a_z = \ddot{z}.$$

A sebesség és a gyorsulás felbontása síkbeli polárkoordináták esetében

A síkbeli polárkoordináták r és ϕ, ahol r egy fix O ponttól való távolság és ϕ a kérdéses pont felé mutató rádiuszvektornak egy fix sugárral bezárt szöge. Válasszunk két egységvektort, melyek közül az egyik $\mathbf{n}_r$ növekvő r irányába, $\mathbf{n}_\phi$ pedig növekvő ϕ irányába mutat.



23. ábra. A sebesség és gyorsulás felbontása síkbeli polárkoordináták esetén

Legyen a pont t időben P-ben, $t + \Delta t$ időben P'-ben. A 23. ábrából látható, hogy

$$\Delta \mathbf{n}_r = \mathbf{n}_\phi \mid \Delta \mathbf{n}_r \mid = \mathbf{n}_\phi \Delta\phi,$$

és

$$\Delta \mathbf{n}_\phi = -\mathbf{n}_r \mid \Delta \mathbf{n}_\phi \mid = -\mathbf{n}_r \Delta\phi.$$

Ha Δt-vel osztunk és áttérünk a $\Delta t \to 0$ határra, nyerjük

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{n}}_r &= \mathbf{n}_\phi \dot{\phi}, \\ \dot{\mathbf{n}}_\phi &= -\mathbf{n}_r \dot{\phi}. \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

$\mathbf{n}_r$ és $\mathbf{n}_\phi$ nem ekvivalensek **i**, **j**, **k**-val. Az utóbbiak az időben állandóak, míg az előbbiek **r** irányba, ill. arra merőlegesen mutatnak, tehát a pont pillanatnyi helyzetétől, vagyis az időtől függenek.

A pont helyzetét **r**-rel jellemezhetjük, mely két adatot tartalmaz,

$$\mathbf{r} = r\mathbf{n}_r.$$

r megadja az O-tól való távolságot, $\mathbf{n}_r$ pedig az irányt. A sebesség

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = r\,\mathbf{n}_r + r\dot{\mathbf{n}}_r = \dot{r}\,\mathbf{n}_r + r\dot{\phi}\mathbf{n}_\phi.$$

Most tehát az előbbiek szerint $\mathbf{n}_r$-et (és $\mathbf{n}_\phi$-t is) differenciálni kell t szerint.

Egyenletünk szerint **v**-nek az **r** irányába ($\mathbf{n}_r$ irányba) eső komponense $\dot{r}$, az arra merőleges ($\mathbf{n}_\phi$ irányába eső) komponense $r\dot{\phi}$, tehát

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r}, \\ v_\phi &= r\dot{\phi}. \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

A gyorsulás

$$\mathbf{a} = \ddot{r}\mathbf{n}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{n}}_r + \dot{r}\dot{\phi}\mathbf{n}_\phi + r\ddot{\phi}\mathbf{n}_\phi + r\dot{\phi}\dot{\mathbf{n}}_\phi .$$

(2.9) behelyettesítésével kapjuk, hogy

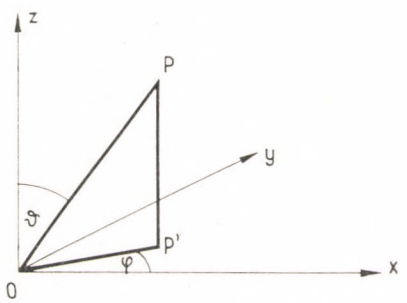
$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\mathbf{n}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\mathbf{n}_\phi .$$

Innen nyerjük, hogy **a**-nak **r** irányába eső és az arra merőleges komponense

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\phi}^2, \\ a_\phi &= r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}. \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

A sebesség felbontása térbeli polárkoordinátákban

A térbeli polárkoordináták a következők. Válasszunk egy derékszögű koordinátarendszert a 24. ábra szerint. Ebben egy P pont polárkoordinátái: a P-hez húzott rádiuszvektor hossza, r, továbbá a rádiuszvektor x, y-síkra való vetületének az x tengellyel való hajlásszöge, ϕ és végül a rádiuszvektornak a z tengellyel való hajlásszöge, ϑ.



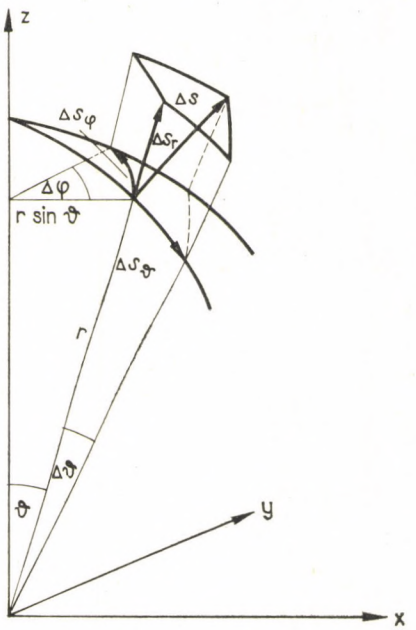
24. ábra Térbeli polárkoordináták

A sebesség három polárkomponensét v_r, v_ϕ, v_ϑ-t szemléletes úton fogjuk előállítani. Válasszunk egy $\Delta\mathbf{s}$ elmozdulást, melyet 3 egymásra merőleges komponensre bontunk fel: egy r irányába eső $\Delta\mathbf{s}_r$-re, egy ϕ irányába eső $\Delta\mathbf{s}_\phi$-re és egy olyanra, mely ϑ irányba mutat, $\Delta\mathbf{s}_\vartheta$-ra

$$\Delta\mathbf{s} = \Delta\mathbf{s}_r + \Delta\mathbf{s}_\phi + \Delta\mathbf{s}_\vartheta .$$

Az ábrából látható, hogy

$$|\Delta \mathbf{s}_r| = \Delta r,$$
$$|\Delta \mathbf{s}_\phi| = r \sin\vartheta \Delta\phi,$$
$$|\Delta \mathbf{s}_\vartheta| = r\Delta\vartheta.$$



25. ábra. A sebesség felbontása térbeli polárkoordináták esetén

Δt-vel osztva és áttérve a $\Delta t \to 0$ határra nyerjük:

$$v_r = \dot{r},$$
$$v_\phi = r\ (\sin\vartheta)\dot{\phi}, \qquad (1.2.12)$$
$$v_\vartheta = r\dot{\vartheta}.$$

Ez analitikailag is igazolható.

3. §. A mechanika alaptörvényei. Newton axiómái

Eddig néhány kinematikai alapfogalommal ismerkedtünk meg, melyekre a továbbiakban állandóan szükségünk lesz. Most áttérünk a mechanika alaptörvényeinek tárgyalására.

NEWTON *első axiómája* így hangzik: Minden magára hagyott test megmarad nyugalmi állapotában vagy egyenesvonalú egyenletes mozgásában.

Ennek a törvénynek csak akkor van értelme, ha megadjuk a koordinátarendszert, melyben igaz. Ha ugyanis a törvény pl. igaz a Földhöz rögzített rendszerben, nem lesz igaz a Naphoz rögzített rendszerben. Mai ismereteink szerint az állócsillagokhoz rögzített rendszer kielégítően megközelíti azt a koordinátarendszert, melyben az első axióma igaz. Az olyan koordinátarendszert, melyben az első axióma érvényes, *inerciarendszer*nek nevezzük.

A másik fogalom, mely magyarázatra szorul, a magára hagyott test fogalma. Egy test annál inkább megközelíti a magára hagyott test fogalmát, minél messzebb van minden más testtől. Láthatjuk tehát, hogy az első axióma egy extrapolációt tartalmaz, mégpedig egy rendkívül zseniális extrapolációt.

A második axióma azt mondja, hogy a mozgásmennyiségnek az időegységre eső változása egyenlő az erővel. A mozgásmennyiséget impulzusnak is szokás nevezni, jele rendszerint **p**. Tehát a második axióma szerint

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{K}, \tag{1.3.1}$$

ahol **K** az erő.

Az impulzus definícióját a harmadik axióma adja. Ha pedig **p** már definiálva van, akkor a második axióma adja az erő definícióját és ebben van fontossága. Lássuk tehát a harmadik axiómát.

A harmadik axióma szerint az akció egyenlő a reakcióval. Ennek az axiómának lényegét két tapasztalati tény alkotja, melyek két anyagi pont kölcsönhatására vonatkoznak. Az anyagi pontok égitestek is lehetnek, mert egymástól való nagy távolságuk miatt pontoknak tekinthetők. A tapasztalati eredmények éppen az égitesteken történt megfigyelésekből adódtak.

Első tapasztalat. Ha két tömegpont kölcsönhat egymással, akkor mindkét tömegpont gyorsulást kap és a két gyorsulás ellentétes irányú. Legyen $\mathbf{a}_{ik}$ az i-edik pont gyorsulása a k-adik hatása alatt.

Mivel $\mathbf{a}_{12}$ és $\mathbf{a}_{21}$ ellentétes irányú vektorok, mindig található két faktor, m_1 és m_2, úgy hogy fennálljon

$$m_1\mathbf{a}_{12} = -m_2\mathbf{a}_{21}. \tag{1.3.2}$$

Ha a gyorsulások nem volnának ellentétes irányúak, akkor ez nem volna lehetséges. Természetesen végtelen sok ilyen m faktor létezik. Az $\frac{m_1}{m_2}$ viszonyt $\mathbf{a}_{12}$ és $\mathbf{a}_{21}$ megmérésével meghatározhatjuk.

Hozzuk az (1) és (2) pontok mindegyikét egy (3) ponttal kölcsönhatásba. Ekkor fennállnak a következő egyenletek

$$\begin{aligned} m_1\mathbf{a}_{13} &= -m_3\mathbf{a}_{31}, \\ m_2\mathbf{a}_{23} &= -m_3\mathbf{a}_{32}. \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Innen $\frac{m_1}{m_3}$ és $\frac{m_2}{m_3}$ határozhatók meg. Továbbá innen $\frac{m_1}{m_2}$ is meghatározható, ugyanis $\frac{m_1}{m_3} : \frac{m_2}{m_3} = \frac{m_1}{m_2}$. Az így megállapított $\frac{m_1}{m_2}$ viszonyról semmilyen logikus alapunk sincs azt állítani, hogy ennek meg kell egyeznie az (1) és (2) pontok kölcsönhatásából meghatározott $\frac{m_1}{m_2}$ viszonnyal. A kísérletek viszont azt mutatják, hogy valóban egyenlők. Ez a második fontos tapasztalati tény. Ha tehát egyetlen egy anyagi pont m faktorának értékét önkényesen megválasztjuk, akkor bármely más anyagi pont faktora egyértelműen meg van határozva. Az m szám az anyagi pont jellemző állandója, melyet a pont *tömegé*nek nevezünk.

Miután definiáltuk a tömeget, definiálhatjuk az impulzust is. Az impulzus, $\mathbf{p}$ definíciója a következő

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \tag{1.3.4}$$

Visszatérve a második axiómára, nyerjük, hogy az erő

$$\mathbf{K} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}. \tag{1.3.5}$$

A *Newton*-féle mechanikában m-et állandónak tekintjük, tehát

$$\mathbf{K} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}. \tag{1.3.6}$$

Az erő tehát a tömeg és a gyorsulás szorzata. Másképp is definiálhattuk volna a tömeget, ami ezen az egyenleten alapszik. Ugyanis azt tapasztaljuk, hogy az erő mindig ugyanolyan irányú, mint a gyorsulás. De ugyanaz az erő különböző testeken különböző gyorsulásokat eredményez, tehát a gyorsulás csak akkor tehető egyenlővé az erővel, ha megszorozzuk egy a test természetétől függő faktorral, m-mel, melyet tömegnek nevezünk. Az így definiált tömeg a tehetetlen tömeg. Itt azonban egyszerre két fogalmat, $\mathbf{K}$-t és m-et, definiálunk egy egyenlettel. Az előbbi eljárás pontosabb. Az erő pontos definíciója $\mathbf{K} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$. Ennek alapján a harmadik axióma így fejezhető ki

$$\mathbf{K}_{12} = -\mathbf{K}_{21},$$

tehát két tömegpont egymásra gyakorolt erői egyenlő nagyok, de ellentétes irányúak.

A három *Newton*-féle axiómához még hozzávesszük *negyedik axiómá*nak, hogy az erőket mint vektorokat kell összetenni. Ez tapasztalati tétel, mely nem következik a *Newton*-féle axiómákból. Ugyanis abból, hogy $\mathbf{K} = m\mathbf{a}$ és $\mathbf{a}$ vektor, nem következik, hogy $\mathbf{K}$ is vektor, mert az az eset is fennállhatna, hogy m megváltozik, ha az anyagi pont már egy hatásnak alá van vetve.

4. §. Mozgásegyenletek

A *Newton*-féle második axióma szerint

$$m\mathbf{a} = \mathbf{K}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \tag{1.4.1}$$

Ez az egyenlet, mely 3 egyenletet tartalmaz, ad számot a mozgás lefolyásáról. Komponensekben kiírva nyerjük

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= K_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ m\ddot{y} &= K_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ m\ddot{z} &= K_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

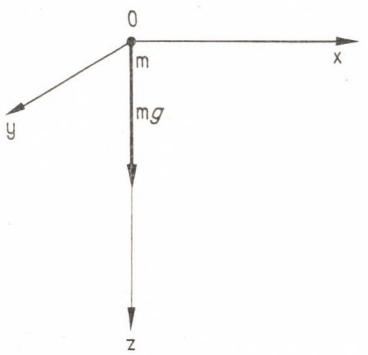
Mivel ezek az egyenletek adnak számot a mozgás lefolyásáról, ezeket az egyenleteket *mozgásegyenletek*nek nevezzük. Ezek másodrendű differenciálegyenletek, melyekből x, y, z meghatározható mint az idő függvénye. Mivel egy másodrendű differenciálegyenlet 2 integrációs állandót tartalmaz, a megoldásban összesen 6 állandó szerepel, melyek közül 3 a kezdeti koordinátákat, 3 pedig a kezdeti sebességkomponenseket jelenti. Tehát a mozgás egyértelműen akkor van meghatározva, ha a kezdeti hely és sebesség meg van adva.

Vegyünk egy egyszerű esetet. Vizsgáljuk egy m tömegű pont mozgását egy állandó erőtérben, pl. a Föld nehézségi terében, ha a kezdeti sebesség zérus. Válasszunk egy koordinátarendszert, melynek z tengelye függőlegesen lefelé irányul. Az origót helyezzük a tömegpontba, ha $t = 0$, vagyis $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, azonkívül $v_x(0) = v_y(0) = v_z(0) = 0$. Az erőkomponensek:

$$K_x = 0, \qquad K_y = 0, \qquad K_z = mg. \tag{1.4.3}$$

A mozgásegyenletek:

$$m\ddot{x} = 0, \qquad m\ddot{y} = 0, \qquad m\ddot{z} = mg. \tag{1.4.4}$$



26. ábra. A gravitációs erő

Osszunk m-mel és integráljunk az idő szerint

$$\dot{x} = v_x(0), \qquad \dot{y} = v_y(0), \qquad \dot{z} = gt + v_z(0). \tag{1.4.5}$$

Mégegyszer integrálva

$$\begin{aligned} x &= v_x(0)t + x(0), \\ y &= v_y(0)t + y(0), \\ z &= \frac{1}{2} gt^2 + v_z(0)t + z(0). \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

Behelyettesítve a kezdeti feltételeket, nyerjük

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{1}{2} gt^2. \tag{1.4.7}$$

Tehát x és y irányában nincs elmozdulás, z irányában pedig a megtett út az ismert törvényszerűséget adja.

A következőkben néhány fontos fogalommal és tétellel ismerkedünk meg.

5. §. Az erő idő és pálya szerinti integrálja. A munka

Egy anyagi pontra bizonyos ideig ható erő hatásáról számot ad az erő és az idő szorzata. Ha pedig az erő az idő folyamán változik, vagyis ha **K** függ t-től, akkor az erő hatásáról a következő integrál ad számot

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{K} dt = \int_{t_0}^{t} \frac{d\mathbf{p}}{dt} dt = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 . \tag{1.5.1}$$

Az erőnek idő szerinti integrálja tehát a mozgásmennyiség vagy impulzus teljes megváltozásával egyenlő. Ez az *impulzustétel*nek nevezett eredmény főképpen olyan erőknél jelentős, melyek igen nagyok, de csak rövid Δt ideig hatnak, úgyhogy $\mathbf{K}\Delta t$ véges marad. Ekkor az integrál helyébe $\mathbf{K}\Delta t$ írható, ahol **K** az erő átlaga. Tehát

$$\mathbf{K}\Delta t = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 . \tag{1.5.2}$$

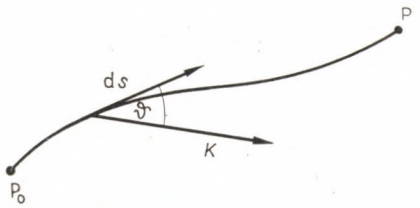
Ha tehát Δt-t megmérjük, akkor az impulzus változásából **K** meghatározható.

Az erő pálya szerinti integrálja. A munka

Az erő hatásáról nemcsak a fenti integrál ad számot, hanem az erőnek a pont által megtett út mentén vett integrálja is, ami elvezet a *munka* fogalmához.

A $d\mathbf{s}$ elemi elmozdulásnál végzett munkán értjük $\mathbf{K}d\mathbf{s}$-et, vagyis*

$$dA = (\mathbf{K}d\mathbf{s}) = Kds\cos\vartheta. \tag{1.5.3}$$



27. ábra. Az elemi munka definíciójához

Az így definiált munka tehát az erő elmozdulás irányába eső konponensének és az elmozdulásnak szorzata. Ez a munkának az elemekben szokásos definíciója.

Komponensekkel kifejezve

$$dA = K_x dx + K_y dy + K_z dz. \tag{1.5.4}$$

Egy véges P_0P úton végzett munkán értjük a következő integrált:

$$A = \int_{P_0}^{P} (\mathbf{K}d\mathbf{s}) = \int_{P_0}^{P} (K_x dx + K_y dy + K_z dz). \tag{1.5.5}$$

Az integrált úgy számíthatjuk ki, hogy az x, y, z koordinátákat mint egy paraméter, pl. u függvényét fogjuk fel, akkor

$$dx = \frac{dx}{du}du, \quad dy = \frac{dy}{du}du, \quad dz = \frac{dz}{du}du.$$

Beírva (5.3)-ba nyerjük

$$A = \int_{P_0}^{P} \left(K_x \frac{dx}{du} + K_y \frac{dy}{du} + K_z \frac{dz}{du}\right) du. \tag{1.5.6}$$

A munka akkor a legnagyobb, ha az elmozdulás az erő irányába mutat. A munka zérus, ha az elmozdulás az erőre merőleges.

* A $d\mathbf{s}$ elemi elmozdulás a pálya mentén az érintő irányába mutat; határesetben rajta van a görbén.

A munka és a kinetikus energia közti összefüggés

Ismeretes, hogy

$$K_x = m\ddot{x}, \qquad K_y = m\ddot{y}, \qquad K_z = m\ddot{z},$$

továbbá legyen $u = t$, ekkor

$$A = m \int_{t_0}^{t} (\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z})\, dt\,.$$

Mivel pedig

$$\ddot{x}\dot{x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2),$$

nyerjük, hogy

$$A = \frac{1}{2} m \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\, dt,$$

$$A = \frac{1}{2} m[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2]_{t_0}^{t} = \frac{1}{2} m[v^2]_{t_0}^{t}, \tag{1.5.7}$$

$$A = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2.$$

Tehát a P_0P út mentén megtett munka egyenlő $\frac{1}{2} mv^2$-nek a P és P_0 pontokban vett értékeinek különbségével.

Az $\frac{1}{2} mv^2$ mennyiséget a pont *kinetikus energiá*jának nevezzük és T-vel jelöljük

$$T = \frac{1}{2} mv^2. \tag{1.5.8}$$

$$A = T - T_0. \tag{1.5.9}$$

Vagyis a végzett munka egyenlő a kinetikus energia megváltozásával. (Ezt szokták az *eleven erő tételé*nek nevezni.)

6. §. A potenciál és az energiatétel

Erőfüggvény és potenciál

Sok esetben az erő komponensei előállíthatók mint egy $\psi(x, y, z)$ függvény x, y, ill. z szerinti parciális deriváltjai, vagyis

$$K_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad K_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad K_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Vektoralakban ezt így írjuk:

$$\mathbf{K} = \operatorname{grad} \psi,$$

vagyis grad ψ a következő vektor:

$$\operatorname{grad} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{1.6.1}$$

A ψ függvényt *erőfüggvény*nek, a ψ függvény negatívját, $-\psi$-t, *potenciál*nak nevezzük.

Ha V-vel jelöljük a potenciált, akkor

$$V(x, y, z) = -\psi(x, y, z)$$

és

$$K_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad K_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad K_z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \tag{1.6.2}$$

vagyis

$$\mathbf{K} = -\operatorname{grad} V. \tag{1.6.3}$$

Tehát a potenciál oly függvénye a koordinátáknak, melynek x, y és z szerint vett negatív parciális deriváltjai adják az erőkomponenseket. Potenciál és erőfüggvény nem mindig van.

A munka kifejezése a potenciállal

Ha van potenciál, akkor az elemi munka

$$dA = K_x dx + K_y dy + K_z dz$$

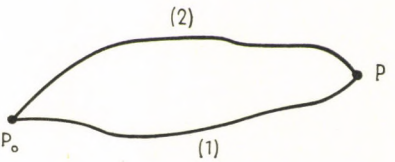
$$= -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right) = -dV. \tag{1.6.4}$$

Tehát ha van potenciál, akkor az elemi munka a potenciál teljes differenciálja negatív előjellel.

Áttérve a P_0P véges úton végzett munkára, nyerjük

$$A = \int_{P_0}^{P} (K_x dx + K_y dy + K_z dz) = -\int_{P_0}^{P} dV = -(V - V_0), \qquad (1.6.5.)$$

vagyis a P_0P úton végzett munka a P és P_0 pontokon felvett potenciálértékek negatív előjellel vett különbségével egyenlő.



28. ábra. Munkavégzés két különböző úton

Ha van potenciál és az a helynek egyértékű függvénye, akkor egy zárt pálya mentén végzett munka zérus. Ugyanis ha a pont egy zárt görbét fut be, vagyis ha a P végpont összeesik a P_0 kezdőponttal, akkor

$$A = V_{P_0} - V_{P_0} = 0,$$

mert ha V egyértékű függvénye a helynek, akkor P_0-ban ugyanaz lesz az értéke a mozgás kezdetén, mint a mozgás végén.

Ebből egyúttal az is következik, hogy ha van potenciál, a végzett munka az úttól független. Vegyünk fel P_0 és P között két utat, (1)-et és (2)-t. Az (1) és (2) utak együttvéve zárt görbét adnak, melyre fennáll, hogy

$$A_{P_0P}(1) + A_{PP_0}(2) = 0.$$

A (2) pályán végzett munka P-től P_0-ig ugyanaz, mint P_0-tól P-ig, ellentétes előjellel. Tehát

$$A_{PP_0}(2) = -A_{P_0P}(2).$$

Beírva ezt fenti egyenletünkbe, nyerjük, hogy

$$A_{P_0P}(1) - A_{P_0P}(2) = 0.$$

Tehát

$$A_{P_0P}(1) = A_{P_0P}(2), \qquad (1.6.6)$$

vagyis P_0-tól P-ig az (1) pályán végzett munka ugyanakkora, mint a (2) pályán végzett munka.

Az energia tétele

A P_0P úton végzett munkát kétféleképpen fejeztük ki, mégpedig az (5.9) formula szerint

$$A_{P_0P} = T - T_0$$

és (6.5) szerint

$$A_{P_0P} = V_0 - V.$$

Innen következik, hogy

$$T - T_0 = V_0 - V,$$

$$T + V = T_0 + V_0. \tag{1.6.7}$$

Tehát ha van potenciál, akkor a P pontban T és V összege ugyanaz, mint a P_0 pontban. Mivel ez minden P pontra igaz, ezért a $T + V$ összeg a mozgás folyamán állandó. A potenciált, V-t, a pont *potenciális energiájának* is szokás nevezni, a $T + V$ összeg a pont *összenergiája*, E. Tehát

$$E = T + V = \text{konstans}. \tag{1.6.8}$$

Ez az energia tétele, mely az energia megmaradását fejezi ki a mechanikában.

A potenciál létezésének feltétele. Rotáció

Ha van potenciál, akkor

$$K_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad K_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad K_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Innen következik, hogy

$$\frac{\partial K_z}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \quad \text{és} \quad \frac{\partial K_y}{\partial z} = -\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y}.$$

A jobb oldalon a másodrendű deriváltaknál csak az y és z szerinti deriválás sorrendje van felcserélve. Mivel az erők és deriváltjak folytonosak, a jobb oldalak egyenlők, vagyis ha van potenciál

$$\frac{\partial K_z}{\partial y} = \frac{\partial K_y}{\partial z},$$

hasonlóképpen

$$\frac{\partial K_x}{\partial z} = \frac{\partial K_z}{\partial x}, \tag{1.6.9}$$

$$\frac{\partial K_y}{\partial x} = \frac{\partial K_x}{\partial y}.$$

Ezek az egyenletek a potenciál létezésének szükséges és elegendő feltételei. Mi itt csak azt mutattuk ki, hogy ezek az egyenletek a potenciál létezésének szükséges feltételei, azt, hogy az egyenletek egyúttal a potenciál létezésének elegendő feltételei, bizonyítás nélkül közöljük.

Ezek az egyenletek még egyszerűbben is írhatók a rotáció fogalmának bevezetésével. Ha adva van egy **A** vektor, akkor ahhoz rendelhetünk egy **C** vektort, melynek a komponensei a következők:

$$C_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},$$

$$C_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \tag{1.6.10}$$

$$C_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Az így definiált **C** vektort nevezzük az **A** vektor *rotációjának* és rot **A**-val, a komponenseit pedig $\mathrm{rot}_x \mathbf{A}$, $\mathrm{rot}_y \mathbf{A}$ és $\mathrm{rot}_z \mathbf{A}$-val jelöljük. A rot **A** komponensei a következő mátrix másodrendű aldeterminánsai

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}.$$

Az első sort egy szimbolikus vektor komponenseinek kell tekinteni, $\frac{\partial}{\partial x} A_y$ pedig $\frac{\partial A_y}{\partial x}$-et jelenti. Tehát

$$\mathrm{rot}_x A = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},$$

$$\mathrm{rot}_y A = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \tag{1.6.11}$$

$$\mathrm{rot}_z A = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

A rotáció fogalmával a (6.9) egyenletek, melyek a potenciál létezésének feltételei így foglalhatók össze

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{K} = 0. \tag{1.6.12}$$

Ekvipotenciális felületek

Azok a pontok, melyeken a V potenciál egy c konstanssal egyenlő, a következő egyenlettel vannak meghatározva

$$V(x, y, z) = c.$$

Ez egy felület egyenlete. Tehát azok a pontok, amelyeken a potenciál állandó, egy felületen fekszenek. Ha c-nek minden lehetséges értéket adunk, egy felületsereget kapunk. Ezek az *ekvipotenciális felületek*.

Amint az analízisből ismeretes, egy

$$V(x, y, z) = c$$

felület normálisainak iránykoszinuszai

$$\lambda = \frac{\dfrac{\partial V}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\mu = \frac{\dfrac{\partial V}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)^2}}, \tag{1.6.13}$$

$$\nu = \frac{\dfrac{\partial V}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)^2}}.$$

A nevezőben levő gyök két értéket vehet fel a normális kétféle irányításának megfelelően. Tehát λ, μ, ν arányos $\dfrac{\partial V}{\partial x}, \dfrac{\partial V}{\partial y}, \dfrac{\partial V}{\partial z}$-vel, vagyis λ, μ, ν arányos az erőkomponensekkel. Tehát az erő az ekvipotenciális felület normálisának irányába mutat.

Hogy az erő az ekvipotenciális felületre merőleges, az a következőképpen is belátható. Az erőnek az ekvipotenciális felület érintője mentén vett komponense K_s, vagyis ha ds az érintő irányába eső elemi elmozdulás, akkor $K_s = -\dfrac{\partial V}{\partial s}$. De az ekvipotenciális felület mentén V = konstans, tehát $\dfrac{\partial V}{\partial s} = 0$, vagyis

$$K_s = 0.$$

Ha a tangenciális komponens zérus, **K** merőleges az ekvipotenciális felületre

Trajektóriák, erővonalak

Azokat a görbéket, melyeknek érintői irányába mutat az erő, nevezzük az erőtér *trajektóriá*inak. Az előbbiek szerint a trajektóriák merőlegesek az ekvipotenciális felületekre, tehát a trajektóriák az ekvipotenciális felületek ortogonális trajektóriái.

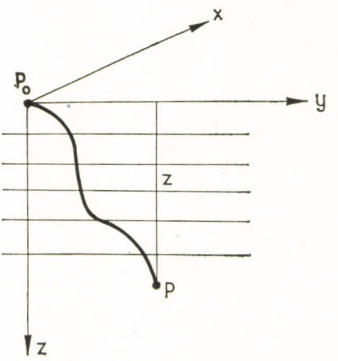
A trajektóriák száma a térben tetszőleges. Az erővonalak is trajektóriák, de számuk meg van határozva. Az erővonalakra merőleges felületegységen áthaladó erővonalak száma megegyezik a vektor abszolút értékével.

A nehézségi erő

Ha a z tengelyt függőlegesen lefelé irányítjuk, akkor a földi nehézségi erő komponensei

$$K_x = 0, \qquad K_y = 0, \qquad K_z = mg. \tag{1.6.14}$$

Ennek az erőnek rotációja, mint az azonnal belátható, zérus.



29. ábra. A gravitációs erőtér ekvipotenciális felületei

A V potenciál is egyszerűen meghatározható, mégpedig

$$V = -mgz,$$

ugyanis (1.6.15)

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad -\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{és} \quad -\frac{\partial V}{\partial z} = mg.$$

Az ekvipotenciális felületek a

$$-mgz = c$$

felületek, vagyis a $z =$ konstans síkok, melyek az x,y síkkal párhuzamosak. Az erő ezekre tényleg merőleges. A trajektóriák függőleges egyenesek, tehát szintén merőlegesek az ekvipotenciális felületekre.

A munka, melyet a nehézségi erő végez, ha egy m tömegpont a P_0 kezdőpontból P-be jut

$$A = \int_{P_0}^{P} (K_x dx + K_y dy + K_z dz) = mg \int_{z_0}^{z} dz = mg(z - z_0),$$

vagy

$$A = V_0 - V = -mg(z_0 - z) = mg(z - z_0). \tag{1.6.16}$$

Tehát A, mivel van potenciál, tényleg független az úttól, melyen a tömegpontot P_0-ból P-be visszük.

7. §. Az erő momentuma és az impulzusmomentum közötti összefüggés

Az erőnek egy O pontra vonatkoztatott momentuma

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{K}], \tag{1.7.1}$$

ahol $\mathbf{r}$ az O pontból az erő támadáspontjához húzott rádiuszvektor.
A momentum komponensei tehát

$$\begin{aligned} M_x &= yK_z - zK_y, \\ M_y &= zK_x - xK_z, \\ M_z &= xK_y - yK_x. \end{aligned} \tag{1.7.2}$$

Az *impulzusmomentum* egy O pontra vonatkozóan a következő

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}] = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}]. \tag{1.7.3}$$

A *Newton*-féle második axióma szerint $\mathbf{K} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$. Ebből következik, hogy

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{K}] = \left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right] = m\left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right] = m[\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}}].$$

Az $\mathbf{M}$ vektor komponensei pedig a következők lesznek

$$\begin{aligned} M_x &= m(y\ddot{z} - z\ddot{y}), \\ M_y &= m(z\ddot{x} - x\ddot{z}), \\ M_z &= m(x\ddot{y} - y\ddot{x}). \end{aligned}$$

Ezek a komponensek egyenlők az $\mathbf{N} = m[\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}]$ vektor t szerinti deriváltjának komponenseivel. Ugyanis

$$\begin{aligned} N_x &= m(y\dot{z} - z\dot{y}), \\ N_y &= m(z\dot{x} - x\dot{z}), \\ N_z &= m(x\dot{y} - y\dot{x}). \end{aligned}$$

Képezzük ezeknek a komponenseknek t szerinti deriváltjait

$$\frac{dN_x}{dt} = m(\dot{y}\dot{z} + y\ddot{z} - \dot{z}\dot{y} - z\ddot{y}) = m(y\ddot{z} - z\ddot{y}).$$

Hasonlóképpen

$$\frac{dN_y}{dt} = m(z\ddot{x} - x\ddot{z})$$

és

$$\frac{dN_z}{dt} = m(x\ddot{y} - y\ddot{x}).$$

Összehasonlítva ezeket **M** komponenseivel, látjuk, hogy azonosak. Tehát

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{N}}{dt}. \tag{1.7.4}$$

Tekintsük azt a fontos speciális esetet, midőn *centrális erő*ről van szó. Centrális erő egy olyan erő, mely állandóan egy *O* pont felé vagy attól elirányul. Az *O* pontot origónak választva **K** és **r** iránya megegyezik, tehát

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{K}] = 0,$$

vagyis

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = 0,$$

ahonnan

$$\mathbf{N} = \text{konst.}$$

következik.

8. §. Rugalmas erők. Egyszerű harmonikus mozgás

A rugalmas erők alakja a következő

$$\mathbf{K} = -k^2\mathbf{r}, \tag{1.8.1}$$

ahol **r** a nyugalmi helyzettől számított rádiuszvektor, k^2 pedig egy pozitív (azért négyzet) arányossági faktor. Az erő tehát a nyugalmi helyzet felé irányul és arányos a kitéréssel. Komponensekben

$$\begin{aligned} K_x &= -k^2x, \\ K_y &= -k^2y, \\ K_z &= -k^2z. \end{aligned} \tag{1.8.2}$$

Könnyen meggyőződhetünk, hogy az erő rotációja zérus, így tehát van potenciál és ez $V = \frac{1}{2}k^2r^2$.

Bennünket most az érdekel, hogy egy m tömegű anyagi pont milyen mozgást végez ilyen erők hatására. Tekintsük először az egydimenziós esetet, vagyis a pont mozogjon az x-tengely irányában a K_x erő hatása alatt. K_y és K_z egyelőre legyen 0, az y és z irányában tehát a pont nem mozdul el. A mozgásegyenlet a következő lesz

$$m\ddot{x} = -k^2 x,$$

vagy

$$\ddot{x} + \frac{k^2}{m} x = 0. \tag{1.8.3}$$

Ez az egyszerű harmonikus mozgás differenciálegyenlete egydimenzióban. Megmutathatjuk, hogy

$$x(t) = a \cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\, t + \alpha\right) \tag{1.8.4}$$

megoldása a differenciálegyenletnek. Ugyanis

$$\dot{x} = -a\sqrt{\frac{k^2}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\, t + \alpha\right),$$

$$\ddot{x} = -a\frac{k^2}{m} \cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\, t + \alpha\right),$$

amiből látható, hogy $\ddot{x}$ az x-nek $\left(-\frac{k^2}{m}\right)$-szerese, vagyis a fenti x tényleg megoldás. Itt a és α tetszőleges integrációs állandók.

a az *amplitúdó*, a cos alatti érték, vagyis az argumentum a *fázis*, α a *fázisállandó*. Az x kitérés az idő periodikus függvénye. *Periódusa* egy teljes rezgés ideje, vagyis az az idő, amely alatt az argumentum 2π-vel növekszik. Ez alatt az idő alatt a pont ismét ugyanazt az x értéket veszi fel. Ha tehát T a periódus, akkor fenn kell állni a következő összefüggésnek

$$\sqrt{\frac{k^2}{m}}\,(t+T) + \alpha = \sqrt{\frac{k^2}{m}}\, t + \alpha + 2\pi,$$

ahonnan

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k^2}} \tag{1.8.5}$$

adódik.

A rezgésidő vagy periódus segítségével a *frekvencia* vagy rezgésszám a következőképpen adódik

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k^2}{m}}\,. \tag{1.8.6}$$

ν adja az 1s-ra eső rezgések számát. Ennek segítségével nyerjük

$$x = a \cos (2\pi\nu t + \alpha). \tag{1.8.7}$$

$\frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$, vagyis a 2π s alatt végzett rezgések száma a *körfrekvencia.*

Két- és háromdimenziós harmonikus mozgás

Térjünk át a kétdimenziós esetre, vagyis a pont mozogjon az x, y síkban, tehát az erőnek legyen y komponense is. A mozgásegyenletek

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k^2 x, \\ m\ddot{y} &= -k^2 y. \end{aligned} \tag{1.8.8}$$

A megoldás

$$\begin{aligned} x &= a \cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\, t + \alpha\right), \\ y &= b \cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\, t + \beta\right). \end{aligned} \tag{1.8.9}$$

y-nál természetesen más állandók (b, β) szerepelnek, mint x-nél. A periódus mindkét koordinátánál azonos, $T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2}{m}}$.

Célunk a pálya meghatározása. Evégből t eliminálásával meg kell határozni az x és y közti kapcsolatot, mely a pálya egyenletét adja.

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\, t\right) \cos\alpha - \sin\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\, t\right) \sin\alpha, \\ \frac{y}{b} &= \cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\, t\right) \cos\beta - \sin\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\, t\right) \sin\beta. \end{aligned}$$

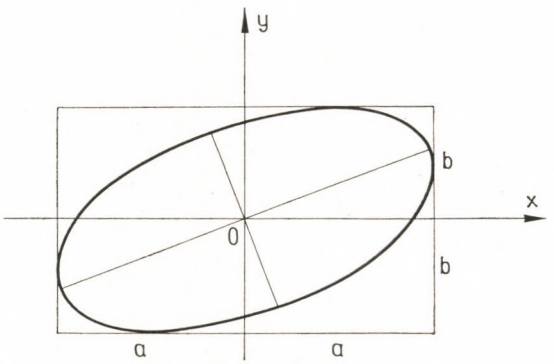
Ezt a lineáris egyenletrendszert $\cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\, t\right)$ és $\sin\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\, t\right)$-re megoldjuk. A megoldás

$$\begin{aligned} \cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\, t\right) &= \frac{\frac{y}{b}\sin\alpha - \frac{x}{a}\sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}, \\ \sin\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\, t\right) &= \frac{\frac{y}{b}\cos\alpha - \frac{x}{a}\cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)}. \end{aligned}$$

Ha az egyenletek négyzeteit összeadjuk, nyerjük

$$1 = \frac{\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha - \beta)}. \qquad (1.8.10)$$

Ez egy ellipszis egyenlete, melynek centruma az origóban van, de főtengelyei nem esnek egybe a koordinátatengelyekkel. A koordináták legnagyobb értéke a és b, tehát az ellipszis benne fekszik egy $2a$, $2b$ élhosszúságú téglalapban. Hogy az ellipszis centruma az origóban van, az onnan látható, hogy ha az (x, y) pont rajta van az ellipszisen, akkor a $(-x, -y)$ pont is rajta van.



30. ábra. A kétdimenziós harmonikus mozgás pályája általános esetben

Speciális esetek: 1. $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$, ekkor $\sin(\alpha - \beta) = 1$ és $\cos(\alpha - \beta) = 0$, tehát az ellipszis egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ez egy olyan ellipszis, melynek főtengelyei összeesnek az x és y tengelyekkel és fél nagy és kis tengelye a ill. b.

2. $\alpha - \beta = 0$, ekkor $\sin(\alpha - \beta) = 0$ és $\cos(\alpha - \beta) = 1$, tehát a (8.10) egyenletet a következő alakban írva

$$\sin^2(\alpha - \beta) = \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos(\alpha - \beta),$$

nyerjük

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} = 0,$$

vagyis

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0,$$

ahonnan

$$y = \frac{b}{a}x.$$

Ez olyan egyenes egyenlete, mely a kezdőponton halad át és iránytangense $\frac{b}{a}$.

A pont ezen az egyenesen két határpont között mozog, melyek koordinátái (a, b) és $(-a, -b)$.

Három dimenzió esetében, midőn tehát z irányában is lehet elmozdulás, a mozgásegyenletek a következők

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k^2x, \\ m\ddot{y} &= -k^2y, \\ m\ddot{z} &= -k^2z. \end{aligned} \tag{1.8.11}$$

A megoldások

$$\begin{aligned} x &= a\cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\,t + \alpha\right), \\ y &= b\cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\,t + \beta\right), \\ z &= c\cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\,t + \gamma\right). \end{aligned} \tag{1.8.12}$$

Ezekből nyerjük

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} - \cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\,t\right)\cos\alpha + \sin\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\,t\right)\sin\alpha = 0, \\ \frac{y}{b} - \cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\,t\right)\cos\beta + \sin\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\,t\right)\sin\beta = 0, \\ \frac{z}{c} - \cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\,t\right)\cos\gamma + \sin\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\,t\right)\sin\gamma = 0. \end{aligned}$$

Ez felfogható mint egy homogén lineáris egyenletrendszer a következő „ismeretlenekkel" 1, $-\cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\,t\right)$ és $\sin\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\,t\right)$. Megoldás csak akkor van, ha

a következő determináns zérus:

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a} & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \frac{y}{b} & \cos\beta & \sin\beta \\ \frac{z}{c} & \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix} = 0. \tag{1.8.13}$$

Ez az egyenlet x, y, z-ben lineáris. A mozgás ebben a síkban fog lefolyni. Tehát ha egy anyagi pontra a háromdimenziós térben egy rugalmas erő hat, a mozgás egy síkban folyik le, ahol ugyanolyan ellipszist kapunk, mint a kétdimenziós esetben.

9. §. A csillapított harmonikus mozgás

Hasson az m anyagi pontra a $-k^2\mathbf{r}$ rugalmas erőn kívül egy súrlódási erő is, vagyis azzal az esettel foglalkozunk, mely a valóságban tényleg jelen van. A súrlódási erőről feltételezzük, hogy arányos az anyagi pont sebességével. Ez mindig fennáll, ha a pont kis sebességgel mozog levegőben vagy folyadékban. A súrlódási erő mindig a sebességgel ellentétes irányú, tehát ilyen alakú

$$-\beta\mathbf{v} = -\beta\dot{\mathbf{r}}.$$

Az m pontra ható összes erő tehát a következő

$$\mathbf{K} = -k^2\mathbf{r} - \beta\dot{\mathbf{r}}. \tag{1.9.1}$$

Csak az egydimenziós esettel foglalkozunk és feltételezzük, hogy a pont csak az x irányban mozoghat. Ekkor a mozgásegyenlet a következő

$$m\ddot{x} = -k^2x - \beta\dot{x},$$

vagyis

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k^2}{m}x = 0. \tag{1.9.2}$$

A megoldást a következő alakban vesszük fel

$$x(t) = ae^{\lambda t}. \tag{1.9.3}$$

Innen

$$\dot{x} = a\lambda e^{\lambda t} \quad \text{és} \quad \ddot{x} = a\lambda^2 e^{\lambda t}.$$

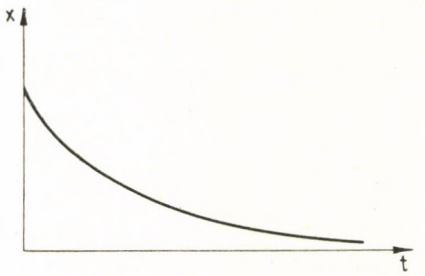
Behelyettesítve ezeket a mozgásegyenletbe és $ae^{\lambda t}$-vel rövidítve kapjuk, hogy

$$\lambda^2 + \frac{\beta}{m}\lambda + \frac{k^2}{m} = 0.$$

Ennek az egyenletnek két gyöke van, melyek a következők

$$\lambda_1 = -\frac{\beta}{2m} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k^2}{m}}, \qquad \lambda_2 = -\frac{\beta}{2m} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k^2}{m}}. \tag{1.9.4}$$

Tehát két megoldás van: $e^{\lambda_1 t}$ és $e^{\lambda_2 t}$. A fenti differenciálegyenlet homogén lineáris differenciálegyenlet. Az ilyen differenciálegyenletnél a megoldásnak egy



31. ábra. Csillapított oszcillátor aperiodikus mozgása

tetszőleges a állandóval való szorzata is megoldás és a megoldások összege is megoldás. Tehát megoldás a következő kifejezés is

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{1.9.5}$$

a_1 és a_2 két tetszés szerinti állandó, ez tehát a differenciálegyenlet általános megoldása.

Két fontos esetet különböztetünk meg:

1. A gyökök reálisak, vagyis $\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k^2}{m} > 0$, tehát $\beta^2 > 4k^2 m$.

Mivel β mindig pozitív, továbbá mivel ebben az esetben a gyök abszolút értéke kisebb, mint $\beta/2m$, látható, hogy λ_1 és λ_2 negatív. A megoldás alakjából tehát látjuk, hogy x az idővel csökken és 0 felé tart. A megoldás alakját a 31. ábra mutatja. Ez az ún. aperiodikus eset.

Ide tartozik az az eset is, midőn $\beta^2 = 4k^2 m$. Tekintettel arra, hogy ez az eset kevéssé fontos, és mivel a megoldás lényegében ugyanolyan alakú mint a fenti, külön nem tárgyaljuk, hanem áttérünk a második fontos esetre.

2. A gyökök komplexek, vagyis $\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k^2}{m} < 0$.

Ekkor a gyökök így írhatók

$$\lambda_1 = -\frac{\beta}{2m} + i\sqrt{\frac{k^2}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}, \qquad \lambda_2 = -\frac{\beta}{2m} - i\sqrt{\frac{k^2}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}. \tag{1.9.6}$$

A megoldás a következő alakú lesz

$$x = e^{-\frac{\beta}{2m}t}\left(a_1 e^{i\sqrt{\frac{k^2}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}\,t} + a_2 e^{-i\sqrt{\frac{k^2}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}\,t}\right).$$

A megoldás tehát komplex. Egy komplex x-nek fizikai értelme nincs, de mivel egy komplex kifejezés csak akkor lehet megoldása egy lineáris differenciálegyenletnek, ha a reális és az imaginárius része külön-külön megoldás, azért ennek tulajdoníthatunk értelmet, mégpedig ekkor mindig vagy a reális részt vagy pedig az imaginárius részt tekintjük fizikai szempontból fontos megoldásnak. Ez a továbbiakban többször előfordul.

Vezessük be a rövidség kedvéért a következő jelöléseket

$$\gamma = \frac{\beta}{2m} \quad \text{és} \quad \delta = \sqrt{\frac{k^2}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}. \tag{1.9.7}$$

Ekkor tehát

$$x = e^{-\gamma t}(a_1 e^{i\delta t} + a_2 e^{-i\delta t}).$$

Felhasználva EULER formuláját, nyerjük

$$x = e^{-\gamma t}[(a_1 + a_2)\cos \delta t + i(a_1 - a_2)\sin \delta t].$$

Egy faktortól eltekintve a reális rész $e^{-\gamma t}\cos\delta t$, az imaginárius rész pedig $e^{-\gamma t}\sin \delta t$; ezek mindegyike megoldás. Tehát az általános megoldás

$$x = e^{-\gamma t}(A \cos \delta t + B \sin \delta t), \tag{1.9.8}$$

ahol A és B tetszőleges állandók. A-ról és B-ről feltételezhetjük, hogy a következő alakúak

$$A = C\cos\phi \qquad \text{és} \qquad B = C\sin\phi.$$

C-re és ϕ-re a következő egyenleteket kapjuk

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \text{és} \qquad \operatorname{tg}\phi = \frac{B}{A}.$$

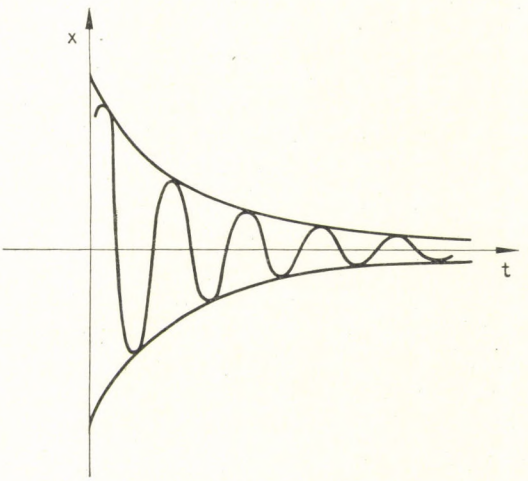
A és B kifejezéseit (9.8)-ba helyettesítve, nyerjük:

$$x = Ce^{-\gamma t}\cos(\delta t - \phi), \tag{1.9.9}$$

vagy beírva γ és δ értékeit, kapjuk:

$$x = Ce^{-\frac{\beta}{2m}t}\cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}\,t - \phi\right). \tag{1.9.10}$$

Tehát harmonikus mozgást kapunk, melynek amplitúdója azonban az időben exponenciálisan csökken. C és ϕ tetszőleges állandók, mert A és B, melyek ezeket meghatározzák, szintén tetszőleges állandók. A megoldás alakját a 32. ábra mutatja.



32. ábra. Csillapított rezgőmozgás

A rezgés frekvenciája a következő kifejezés lesz:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k^2}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}. \tag{1.9.11}$$

Meg kell azonban újra jegyeznünk, hogy az amplitúdó állandóan kisebbedik.

Az egymástól egy periódussal különböző kitérések viszonyát a következőképpen kapjuk meg

$$t = 0\text{-nál} \quad x = x_0 = C\cos\phi,$$

$$t = T\text{-nél} \quad x = x_T = Ce^{-\frac{\beta}{2m}T}\cos\phi,$$

ahol T a periódus.

$$\frac{x_0}{x_T} = e^{\frac{\beta}{2m}T}.$$

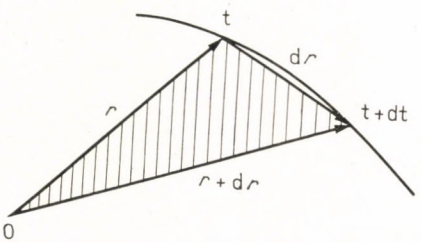
Ennek a viszonynak természetes alapú logaritmusát nevezik *logaritmikus dekrementum*nak. Ez a következő

$$D = \ln\left(\frac{x_0}{x_T}\right) = \frac{\beta}{2m} T. \tag{1.9.12}$$

10. §. A centrális mozgás

Mint már említettük, centrális erőnek olyan erőt nevezünk, mely állandóan egy fix pont felé vagy egy fix ponttól el irányul. Láttuk, hogy ilyen erők esetében

$$\mathbf{N} = \left[\mathbf{r}, m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right] = \text{konstans}, \tag{1.10.1}$$



33. ábra. A területi sebesség

ahol **r** a fix ponttól mért rádiuszvektor, amely pont felé vagy amely ponttól el mutat az erő. $2m$-mel osztva nyerjük, hogy

$$\frac{1}{2}\left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right] = \text{konstans}. \tag{1.10.2}$$

A baloldal abszolút értékét úgy is felfoghatjuk, hogy az $\frac{1}{2}|[\mathbf{r}, d\mathbf{r}]|$ és dt hányadosa. $\frac{1}{2}|[\mathbf{r}, d\mathbf{r}]|$ az **r** által dt idő alatt súrolt háromszög területe, amint ez a 33. ábrából látható. $\frac{1}{2}\frac{|[\mathbf{r}, d\mathbf{r}]|}{dt}$ tehát éppen az időegység alatt súrolt terület vagyis a területi sebesség. Fenti egyenletünk tehát azt mondja ki, hogy a centrális mozgásnál, mégpedig *minden centrális mozgásnál, a területi sebesség állandó és $N/2m$-mel egyezik meg*, ahol N az impulzusmomentum abszolút értéke. Ezt nevezzük a második *Kepler*-törvénynek, melyet KEPLER a bolygómozgás speciális esetére ismert fel.

Azonban a (10.2) egyenlet ennél többet mond, ugyanis mivel $\left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right] = \text{konst.}$, ez az egyenlet azt mondja, hogy az $\mathbf{r}$ és $d\mathbf{r}$ által meghatározott sík normálisa konstans, vagyis a pálya sík. (Ugyanis $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ iránya $d\mathbf{r}$ irányával megyezik.)

Ezek után térjünk rá a pálya alakjának meghatározására. Mivel a mozgás síkbeli, ezért csak síkbeli koordinátákat kell bevezetnünk. A legcélszerűbb választás olyan síkbeli polárkoordinátarendszer bevezetése, melynek origóját az erők centrumába helyezzük el.

A pálya alakjának meghatározását azzal kezdjük, hogy felírjuk a két legfontosabb mozgásállandónak, az energiának és az impulzusmomentumnak a kifejezését. Az energia a $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\phi^2)$ kinetikus energiából és a V potenciális energiából épül fel. Centrális erő esetében a potenciál csak a centrumtól való távolságtól függ, de nem függ attól, hogy ezt a távolságot milyen irányban mérjük fel, tehát $V = V(r)$. Az energia kifejezése a mondottak szerint

$$E = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\phi^2) + V(r).$$

A kinetikából tudjuk, hogy $v_r = \dot{r}$ és $v_\phi = r\dot{\phi}$ és így az energia végleges kifejezése:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r). \tag{1.10.3}$$

Síkbeli mozgás esetén az impulzusmomentum vektora merőleges a mozgás síkjára, az abszolút értéke pedig

$$N = mrv_\phi = mr^2\dot{\phi}. \tag{1.10.4}$$

Mint már mondottuk, az energia és az impulzusmomentum esetünkben mozgásállandók, a fenti egyenletek baloldalai tehát konstansok. Egyenleteinkből fejezzük ki r és ϕ idő szerinti deriváltját, azaz $\dot{r}$-t és $\dot{\phi}$-t:

$$\dot{\phi} = \frac{N}{mr^2},$$

$$\dot{r} = \frac{1}{m}\sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{N^2}{r^2}}.$$

Osszuk el ezt a két egyenletet egymással. A baloldalon $\frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} = \frac{d\phi}{dt}\Big/\frac{dr}{dt} = \frac{d\phi}{dr}$ fog állni:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{N}{r^2}\frac{1}{\sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{N^2}{r^2}}}. \tag{1.10.5}$$

Ez az egyenlet már nem tartalmazza az időt, hanem összefüggést ad az r rádiusz és a ϕ polárszög között. A *pálya egyenletét* r szerinti integrálással kapjuk meg:

$$\phi = N \int \frac{1}{\sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{N^2}{r^2}}} \frac{dr}{r^2}. \tag{1.10.6}$$

Ez az összefüggés ϕ és r között szolgáltatja a pálya alakját. Az itt szereplő integrált természetesen csak akkor lehet kiszámítani, ha tudjuk, hogy milyen centrális erő hat, azaz ismerjük $V(r)$ konkrét kifejezését.

11. §. A Kepler-probléma

Kepler-problémának azt a centrális mozgásproblémát nevezzük, amikor az erő fordítottan arányos a centrumtól mért távolság négyzetével

$$K = \frac{B}{r^2}. \tag{1.11.1}$$

Itt B egy állandó, melyet *erőállandónak* fogunk nevezni. Az erő iránya természetesen az erőcentrum felé, vagy attól el mutat. Ha koordinátarendszerünk kezdőpontját az erőcentrumba helyezzük, úgy az erő vektora

$$\mathbf{K} = \pm \frac{B}{r^3} \mathbf{r}. \tag{1.11.2}$$

A + előjel a centrumtól elmutató, tehát taszító erő esetén érvényes, a − előjel-pedig a centrum felé mutató, vonzó erőnek felel meg. A fenti erő potenciálját a következő képlet adja meg

$$V(r) = \pm \frac{B}{r}, \tag{1.11.3}$$

amint erről egyszerűen meggyőződhetünk.

A pálya egyenletét az előzőekben ismertetett módszerrel fogjuk meghatározni. Ehhez a (10.6) képletbe kell behelyettesítenünk a potenciál kifejezését. Tárgyaljuk először a vonzó erő esetét, amikor (11.3)-ban a negatív előjel van érvényben. Ekkor

$$\phi = N \int \frac{1}{\sqrt{2mE + \frac{2mB}{r} - \frac{N^2}{r^2}}} \frac{dr}{r^2}. \tag{1.11.4}$$

Ez az integrál az integrálszámításban szokásos módszerekkel kiszámítható. Ehhez vezessük be a következő rövidítő jelöléseket:

$$p = \frac{N^2}{mB}, \tag{1.11.5}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2EN^2}{mB^2} + 1}. \tag{1.11.6}$$

Mint látni fogjuk, a következőkben ezek a mennyiségek igen fontos szerepet játszanak a *Kepler*-mozgás leírásában. Most csak annyit jegyzünk meg, hogy a fenti definiáló egyenletek szerint p távolság dimenziójú mennyiség és ε dimenzió nélküli puszta szám.

Fejezzük ki az E és N mozgásállandóinkat az imént bevezetett p és ε konstansok segítségével

$$E = \frac{B}{2p}(\varepsilon^2 - 1), \tag{1.11.7}$$

$$N = \sqrt{mBp}. \tag{1.11.8}$$

Ha ezeket a formulákat beírjuk a (11.4) alatti pályaegyenletbe, akkor kapjuk, hogy

$$\phi = \frac{p}{\varepsilon} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\left(1 - \frac{p}{r}\right)^2}} \frac{dr}{r^2}.$$

Az integrál kiszámítása céljából végezzük el a következő helyettesítést:

$$u = \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{p}{r}\right), \qquad du = +\frac{p}{\varepsilon}\frac{dr}{r^2}.$$

Ezzel a

$$\phi = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = -\arccos u$$

kifejezést nyerjük. Vagy u helyett ismét az r változót vezetve be

$$\phi = -\arccos\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{p}{r}\right)\right].$$

Ez az összefüggés a ϕ polárszög és az r rádiusz között már tulajdonképpen a pálya egyenletének tekinthető. Áttekinthetőbb lesz azonban az eredmény, ha képletünkből r-et fejezzük ki, mint ϕ függvényét

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \phi}. \tag{1.11.9}$$

Ez a képlet, mint ismeretes, egy kúpszelet polárkoordinátákban felírt egyenlete, mégpedig amikor a kúpszelet egyik fókusza az origóban van. A kúpszelet ún. paramétere p-vel, numerikus excentricitása pedig ε-nal egyenlő.

Eredményünk, melyet KEPLER *első törvényeként szoktak említeni, azt mondja ki, hogy ha az erő a távolság négyzetével fordítva arányos, akkor a pálya olyan kúpszelet, melynek egyik fókusza az erőcentrumban van.*

Hogy a pálya ellipszis, parabola vagy hiperbola-e, az attól függ, hogy az excentricitás, ε kisebb, egyenlő vagy nagyobb-e 1-nél. Tehát:

$$\varepsilon < 1\text{: ellipszis,}$$

$$\varepsilon = 1\text{: parabola,}$$

$$\varepsilon > 1\text{: hiperbola.}$$

Ha most szemügyre vesszük az ε-t definiáló (11.6) képletet, láthatjuk, hogy a pálya alakja az E energia előjelétől függ. Pozitív E esetén ugyanis $\varepsilon > 1$, tehát hiperbolapályát kapunk, míg negatív E-re $\varepsilon < 1$, tehát a pálya ellipszis. Parabolapálya pedig $E = 0$ esetén lép fel.

Fenti eredményeink természetesen a vonzó erő esetére, tehát a $V(r) = -\dfrac{B}{r}$ esetre vonatkoznak. Ekkor a potenciális energia mindig negatív. Mivel a kinetikus energia természeténél fogva csak pozitív lehet, ezért az energia előjele attól függ, hogy a kinetikus energia vagy pedig a potenciális energia van-e túlsúlyban. Ha a potenciális energia van túlsúlyban, úgy az erőtér magához köti a testet, ekkor kötött mozgásról beszélünk. Kötött mozgás esetén az összenergia negatív, tehát a pálya ellipszis. Ha viszont a kinetikus energia van túlsúlyban, akkor a test el tud szabadulni az erőtér kötelékéből és el tud távozni a végtelenbe. Ez az eset a pozitív összenergiának, következésképpen a hiperbolapályának felel meg. Ha pedig a kétféle energia éppen egyensúlyban van, úgy az összenergia zérus és a pálya parabola.

Foglalkozzunk még egy kicsit részletesebben az ellipszispálya esetével. A geometriából ismeretes, hogy az ellipszis fél-nagytengelye, a, fél-kistengelye, b és lineáris excentricitása, c a paraméterrel, p-vel és a numerikus excentricitással, ε-nal a következő összefüggésben van:

$$a = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \qquad (1.11.10)$$

$$c = \frac{\varepsilon_p}{1-\varepsilon^2}.$$

A (11.7) energiaképlet ezek szerint a következőképpen is felírható:

$$E = -\frac{B}{2a} . \tag{1.11.11}$$

Láthatjuk, hogy az energia értéke csak az ellipszis nagytengelyétől függ, de nem függ az ellipszis lapultságát kifejező excentricitástól.

Számítsuk most ki, hogy mennyi idő alatt futja be a test a teljes ellipszispályát, vagyis mekkora a keringési idő. Ehhez felhasználjuk *a második Kepler-törvényt, mely szerint a területi sebesség állandó és* $\frac{N}{2m}$*-mel egyezik meg, ahol N az impulzusmomentum.* A T keringési időt a következőképpen fejezhetjük ki:

$$T = \frac{\text{az ellipszis teljes területe}}{\text{területi sebesség}} = \frac{ab\pi}{N/2m} .$$

Beírva ide az impulzusmomentum (11.8) képletét, valamint a $b = \sqrt{ap}$ összefüggést, kapjuk, hogy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{B}}\, a^{3/2} . \tag{1.11.12}$$

Vagyis

$$\frac{T^2}{(2a)^3} = \frac{\pi^2 m}{2B} . \tag{1.11.13}$$

Eszerint a keringési idő négyzetének és a pálya nagyátmérője köbének viszonya minden pályára ugyanaz az állandó. Ez a harmadik Kepler-törvény.

Befejezésül röviden tárgyaljuk a taszító erők esetét, amikor a potenciál pozitív előjelű

$$V(r) = +\frac{B}{r} . \tag{1.11.14}$$

A pálya egyenletét a vonzó erőknél alkalmazott módszer analógiájára határozhatjuk meg. A végeredmény csak egy előjelben különbözik (11.9)-től:

$$r = \frac{p}{\varepsilon \cos \phi - 1} . \tag{1.11.15}$$

A p és ε mennyiségeket ismét a (11.5) és (11.6) képletek adják meg. Mivel most a potenciál pozitív, ezért az összenergia is csak pozitív lehet. Ekkor $\varepsilon > 1$ és a (11.15) képlet egy hiperbola-ágat ír le. Taszító erő esetén tehát a *Kepler*-mozgás csak hiperbolapályán történhet.

A hiperbola aszimptotáinak irányát úgy kaphatjuk meg, ha megvizsgáljuk, hogy milyen ϕ polárszögeknél lesz az r rádiusz végtelen nagy. Végtelen nagy r-et akkor

kapunk, ha (11.15) jobboldalán a nevezőben zérus áll. Az aszimptoták irányát tehát a

$$\cos \phi_a = \frac{1}{\varepsilon}$$

egyenlet adja meg. Ennek az egyenletnek két megoldása van, mert ha ϕ_a megoldás, úgy $2\pi - \phi_a$ is az. Ez a két megoldás a két aszimptótának felel meg. A két aszimptota által bezárt szög pedig $\Theta = 2\phi_a$-val egyenlő, azaz

$$\Theta = 2\text{arc cos}\frac{1}{\varepsilon}\,.$$

Vagy más alakban

$$\Theta = 2\text{arc tg}\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\,.$$

Ha ide beírjuk az excentricitás (11.6) képletét, úgy az aszimptoták által bezárt szögre a következő kifejezést vezethetjük le:

$$\Theta = 2\text{arc tg}\sqrt{\frac{2EN^2}{mB^2}}\,. \qquad (1.11.16)$$

12. §. A Newton-féle tömegvonzási törvény. Gravitációs erők

Az általános tömegvonzási törvényt, mint ismeretes, először NEWTON fogalmazta meg. Ezt a törvényt a természettudományos kutatások egyik legnagyobb jelentőségű felismeréseként tartjuk számon.

Az *általános tömegvonzási törvény* kimondja, hogy a világmindenségben valamennyi tömeg vonzza egymást, éspedig olyan erővel, mely bármely két pontszerű testre nézve arányos a két test tömegével és fordítottan arányos a köztük levő távolság négyzetével. A vonzóerő tehát:

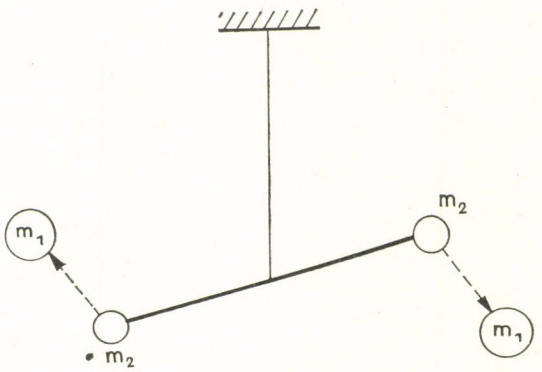
$$K = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\,. \qquad (1.12.1)$$

Itt γ egy univerzális állandó, az ún. *gravitációs állandó*. Számértéke:

$$\gamma = 6{,}670\cdot 10^{-8}\,\text{dyn cm}^2\text{g}^{-2}. \qquad (1.12.2)$$

Elsősorban arra szeretnénk felhívni a figyelmet, hogy ez a gravitációs erő a laboratóriumi gyakorlatban vagy a mindennapi életben előforduló tárgyak között igen gyenge. Ha pl. két olyan tárgyat veszünk, melyek mindegyike 1 kg tömegű és ezeket egymástól 1 m távolságra helyezzük el, akkor a fellépő gravitációs erő mindössze $K = 6{,}670\cdot 10^{-6}$ dyn. Ez a kicsiny erő az emberi kéz vagy egy durvább

műszer számára érzékelhetetlen. Ennek ellenére a gravitációs erő laboratóriumi körülmények között is kimutatható, ha igen érzékeny műszert használunk és a kísérletet különleges gonddal végezzük el. (Például a kísérleti berendezést vákuumban kell elhelyezni, biztosítani kell, hogy ne legyen elektromosan feltöltve és ne érje hőmérsékleti ingadozás stb.). Ezt a kísérletet először CAVENDISH végezte el a 34. ábrán vázolt módon.



34. ábra. A Cavendish-kísérlet vázlata

Érzékeny torziós szálon függő rúd két végén m_2 tömegű golyó van és a közelükben rögzítetten van elhelyezve két m_1 tömegű golyó. Megmérve a torziós szál elcsavarodását, meghatározható az m_1 és m_2 tömegek között fellépő gravitációs erő és kísérletileg igazolható a (12.1) törvény. Mivel a mérőberendezésben minden tömeg és távolság ismert, ezért a mérésből pontosan megállapítható a γ gravitációs állandó számértéke. A mérésekből a (12.2) alatti érték adódott.

A gravitációs erőknek legtöbbször tapasztalt formája az, ami mindennapi tárgyaink és Földünk között fellép. Egy m tömegű tárgyra NEWTON törvénye szerint a Föld a következő vonzóerővel hat:

$$K = \gamma \frac{mM_0}{R_0^2} .$$

Itt M_0 a Föld tömege és R_0 a Föld sugara. Ezt az erőt a következőképpen is felírhatjuk

$$K = mg , \tag{1.12.3}$$

ahol

$$g = \frac{\gamma M_0}{R_0^2} . \tag{1.12.4}$$

A (12.3) képlet szerint a földi gravitációs erő szigorúan arányos a testek tömegével, az arányossági tényező pedig egy olyan konstans, mely csak a Föld adataitól függ.

NEWTON második törvénye szerint az erő által okozott gyorsulás egyenlő az erő és a tömeg hányadosával. A (12.3) képlet mutatja, hogy a földi gravitációs erő által okozott gyorsulás $\frac{K}{m} = g$ Tehát a Föld felszínén minden tárgy, függetlenül tömegétől és anyagi minőségétől, ugyanazon gyorsulással esik lefelé a Föld középpontja felé. Ezt a tényt már GALILEI is megfigyelte. (A pontosabb megfigyelésekből kiderült, hogy g értéke mégsem pontosan állandó a Földön, ennek oka a Föld forgása miatt fellépő centrifugális erő, mely a g nehézségi gyorsulást az Egyenlítő mentén kissé csökkenti az Északi- és Déli-sarkon érvényes (12.4) értékhez képest.) A pontos mérések szerint a nehézségi gyorsulás értéke:

$$g = 980{,}7 \text{ cms}^{-2}. \tag{1.12.5}$$

Ezt az értéket felhasználva, a (12.4) összefüggésből kiszámíthatjuk a Föld tömegét. Ugyanis az $M_0 = gR_0^2/\gamma$ képlet jobboldalán csupa ismert mennyiség áll. A Föld sugarát geodéziai mérésekből határozzák meg, értéke $R_0 = 6371$ km. A számadatokat behelyettesítve kapjuk, hogy

$$M_0 = 5{,}98 \cdot 10^{27}\text{g}.$$

Megjegyezzük, hogy ez az egyetlen módszer, amivel a Föld tömege meghatározható. A Föld tömegének kiszámítását tulajdonképpen az tette lehetővé, hogy CAVENDISH lemérte a γ gravitációs állandót. CAVENDISH maga is tisztában volt azzal, hogy mérése erre lehetőséget ad és kísérletét a Föld „megmérésének" nevezte.

13. §. A mesterséges holdak mozgása. Első és második kozmikus sebesség

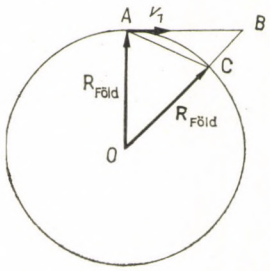
Hogy a Föld felszínének közelében a szabadon eső, vagy az elhajított tárgyak milyen mozgást végeznek, azt az előzőekben már megbeszéltük (l. 4. §-t). Most egy újabb példát tárgyalunk, nevezetesen azt fogjuk meghatározni, hogy milyen vízszintes kezdő sebességet kell egy tárgynak (pl. egy mesterséges holdnak) adni ahhoz, hogy ne essen vissza a Földre. Azt a legkisebb sebességet, melynél az elhajított test pályája már nem metszi a Föld felszínét, nevezzük az *első kozmikus sebesség*nek. A 35. ábrán O-val jelöltük a Föld középpontját. Az R_0 sugarú körpálya A pontjából indul a test vízszintes irányban, tehát érintőlegesen. A sebességet v_1-gyel jelöljük. Ha nem hatna a földi gravitációs tér, akkor a test egyenesvonalú pályán maradna és Δt idő alatt az $\overline{AB} = v_1 \Delta t$ távolságot futná be. A Föld vonzóereje miatt a test mozgás közben az O pont felé esik és B helyett a C pontba fog megérkezni. Az esés miatt megtett útszakasz a szabadesés törvénye szerint $\overline{BC} = \frac{1}{2} g(\Delta t)^2$. Ha megköveteljük, hogy a test nem eshet le a Földre, hanem körpályán kell keringenie, úgy a C pontnak éppen olyan messzire kell lennie az O

középponttól, mint amennyire a kiinduló A pont volt: $\overline{OC} = \overline{OA} = R_0$. Elemi mértani tétel szerint akkor az $\overline{AB}$ érintőszakasz egyenlő a $\overline{BC}$ távolság és a $\overline{BC} + 2R_0$ távolság mértani közepével. Tehát:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}(\overline{BC} + 2R_0)}.$$

Ha a Δt idő nagyon kicsi, úgy a $\overline{BC}$ esési távolság elhanyagolhatóan kicsiny a $2R_0$ földátmérőhöz képest,

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC} \cdot 2R_0}.$$



35. ábra. Az első kozmikus sebesség levezetéséhez

Beírva $\overline{AB}$ és $\overline{BC}$ fentiekben megadott formuláját, kapjuk, hogy

$$v_1 = \sqrt{gR_0}. \tag{1.13.1}$$

Ekkora sebességet kell tehát adni a testnek ahhoz, hogy a földfelszín közelében a Föld körül keringjen. Beírva a g gravitációs gyorsulás és a földsugár értékét, az első kozmikus sebességre a

$$v_1 = 7{,}90 \text{ kms}^{-1} \tag{1.13.2}$$

értéket kapjuk.

Megjegyezzük, hogy az első kozmikus sebesség kiszámítására felhasználhatjuk a *Kepler*-probléma képleteit is. A Föld a középpontjától r távolságban tartózkodó m tömegű testre a

$$K = \gamma \frac{mM_0}{r^2}$$

vonzó erővel hat, mely a Föld középpontja felé irányul. Vektori alakban tehát

$$\mathbf{K} = -\gamma \frac{mM_0}{r^3}\mathbf{r}. \tag{1.13.3}$$

Ez a formula pontosan megfelel a *Kepler*-probléma (11.2) erőkifejezésének; az erőállandó esetünkben

$$B = \gamma m M_0. \tag{1.13.4}$$

Az r sugarú körpályán v sebességgel mozgó test kinetikus energiája $\frac{1}{2}mv^2$, a potenciális energia (11.3) szerint $-\frac{B}{r} = -m\frac{\gamma M_0}{r}$ lesz. *Kepler*-mozgásnál az összenergia (11.11) szerint

$$E = -\frac{B}{2r} = -m\frac{\gamma M_0}{2r},$$

tehát írhatjuk, hogy

$$\frac{1}{2}mv^2 - m\frac{\gamma M_0}{r} = -m\frac{\gamma M_0}{2r}. \tag{1.13.5}$$

Ebből

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M_0}{r}}. \tag{1.13.6}$$

Az első kozmikus sebességnél a pályasugár a Föld sugarával egyezik meg: $r = R_0$. Felhasználva a (12.4) összefüggést, az első kozmikus sebességre visszakapjuk a (13.1) alatti $v_1 = \sqrt{gR_0}$ képletet.

Most számítsuk ki, hogy mennyi idő alatt kerüli meg a Földet az első kozmikus sebességgel haladó tárgy. A keringési idő a Föld kerületének és a sebességnek viszonya, azaz

$$T_1 = \frac{2\pi R_0}{v_1} = 5067\text{s}. \tag{1.13.7}$$

A keringési idő tehát kereken másfél óra. Természetesen pontosan ugyanerre az értékre jutunk akkor is, ha a keringési időt KEPLER harmadik törvényének levezetésénél kapott (11.12) formulából számítjuk, ha abban a B erőállandót (13.4)-gyel és az a féltengelyt az R_0 értékkel helyettesítjük.

Megjegyezzük, hogy a mesterséges bolygók és az űrhajók keringési ideje valamivel nagyobb, mint a (13.7) érték, hiszen ezek nem szorosan a Föld felszíne felett haladnak, hanem 300–400 km magasságban. Ha az űrhajó h magasságban van a földfelszín felett, úgy keringési ideje KEPLER harmadik törvénye szerint $\left(\frac{R_0 + h}{R_0}\right)^{3/2}$-szer nagyobb lesz, mint T_1:

$$T = T_1\left(\frac{R_0 + h}{R_0}\right)^{3/2}. \tag{1.13.8}$$

Ez a képlet nemcsak a mesterséges bolygókra és az űrhajókra alkamazható, hanem a természetes Holdunkra is. A Hold kereken $h = 378\,000$ km távolságban van a Föld felszínétől számítva, keringési idejére formulánkból 29 nap adódik. Ez, mint tudjuk, megfelel a megfigyelt keringési időnek.

Ez ideig csak a Föld körüli, kötött pályák esetével foglalkoztunk. Most határozzuk meg, hogy mekkora indító sebesség szükséges ahhoz, hogy egy tárgy örökre elhagyja a Föld térségét és végtelen messzire távozzon. Ehhez legalábbis parabolapályára kell juttatni a tárgyat. Az ehhez szükséges sebességet nevezzük *második kozmikus sebesség*nek.

Parabolapálya esetén, mint tudjuk, az összenergia éppen zérus. Induljunk ki ismét a (13.5) energiaösszefüggésből, de a jobboldalt most zérusnak vesszük:

$$\frac{1}{2} mv^2 - m\frac{\gamma M_0}{r} = 0. \tag{1.13.9}$$

Ebből a sebesség:

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma M_0}{r}}. \tag{1.13.10}$$

A második kozmikus sebességet ebből úgy kapjuk, ha a kiindulási pontot a Föld felszínén vesszük fel, azaz ha $r = R_0$. A második kozmikus sebesség tehát:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M_0}{R_0}} = \sqrt{2gR_0}. \tag{1.13.11}$$

Összevetve (13.1)-gyel, látjuk, hogy a második kozmikus sebesség $\sqrt{2}$-szerese az elsőnek

$$v_2 = \sqrt{2}\, v_1 = 11{,}2 \text{ kms}^{-1}. \tag{1.13.12}$$

14. §. A bolygók mozgása

Minthogy a Nap $M_\odot$ tömege sokszorosan nagyobb a bolygók tömegénél, ezért a bolygók mozgását elsősorban a Nap gravitációs tere határozza meg és a bolygómozgás tárgyalásánál a Napot nyugvónak tekinthetjük. Az általános tömegvonzási törvény szerint az M tömegű bolygóra a

$$K = \gamma \frac{M_\odot M}{r^2} \tag{1.14.1}$$

erő hat, mely a Nap felé irányul. Koordinátarendszerünk kezdőpontját természetesen a Napba helyezzük, ekkor az erő vektori alakja:

$$\mathbf{K} = -\gamma \frac{M_\odot M}{r^3} \mathbf{r}. \tag{1.14.2}$$

Ismét a *Kepler*-probléma erőkifejezésével van dolgunk, az erőállandó most

$$B = \gamma M_\odot M. \tag{1.14.3}$$

A bolygók és a Naprendszerhez tartozó többi égitest mozgását ezek szerint a *Kepler*-mozgás törvényszerűségeiből állapíthatjuk meg. KEPLER első törvénye szerint a pályák kúpszeletek, melyek fókuszában a Nap van. A pályák bolygók esetében ellipszisek, üstökösök esetében pedig hiperbolák. Az égitestek mozgása a pálya mentén olyan ütemben történik, hogy KEPLER második törvénye teljesüljön, azaz a területi sebesség állandó legyen.

KEPLER harmadik törvénye szerint a bolygók keringési idejének négyzete és az ellipszispálya nagytengelye köbének viszonya állandó. Ha a (11.13) formula jobboldalán m helyébe a M bolygótömeget és B helyébe a (14.3) erőállandót írjuk, úgy a harmadik *Kepler*-törvény a következőt mondja ki:

$$\frac{T^2}{(2a)^3} = \frac{\pi^2}{2\gamma M_\odot}. \tag{1.14.4}$$

Ezek szerint a $T^2/(2a)^3$ viszony független a bolygó tömegétől és minden bolygóra ugyanaz az érték. A Föld esetében $T = 1$ év $= 31{,}557 \cdot 10^6$ s, a pedig a Föld pályájának sugara, amit a geodéziában is szokásos trigonometriai módszerekkel lehet megállapítani. A mérések szerint $a_{\text{Föld}} = 149{,}5$ millió km $= 1{,}495 \cdot 10^{13}$ cm. Ezen adatok szerint

$$\frac{T^2}{(2a)^3} = 3{,}725 \cdot 10^{-26}\ \text{cm}^{-3}\ \text{s}^2. \tag{1.14.5}$$

A keringési időt és a pályasugarat természetesen a többi bolygóra is meg lehet mérni és valamennyire a (14.5) értéket kapjuk, amint azt a harmadik *Kepler*-törvény elő is írja. Ha a (14.5) számértéket behelyettesítjük a (14.4) képletbe, úgy abból – mivel γ-t a *Cavendish*-kísérletből már ismerjük – ki tudjuk számítani a Nap tömegét

$$M_\odot = 1{,}986 \cdot 10^{33}\text{g}. \tag{1.14.6}$$

CAVENDISH tehát érzékeny torziós ingájával, nemcsak a Föld, hanem a Nap tömegét is megmérte!

A *Kepler*-mozgás törvényeit felhasználhatjuk arra is, hogy meghatározzuk, mi a feltétele annak, hogy egy űrhajó elhagyhassa a Naprendszert.

Ahhoz, hogy egy test kiszökhessen a Naprendszerből, az szükséges, hogy pályája hiperbola, vagy legalábbis parabola legyen. Az ehhez szükséges indítási sebesség kiszámításához írjuk fel az energia kifejezését:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{m M_\odot}{r}.$$

Az első tag a kinetikus energiát adja, a második pedig az égitest potenciális energiájával egyenlő. Parabola pályán $E = 0$, úgyhogy

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma M_\odot}{r}}.$$

Ekkora minimális kezdősebességgel kell rendelkezni egy testnek ahhoz, hogy a Naptól r távolságban levő indítási pontról a Naprendszerből véglegesen eltávozzon. Az ún. *harmadik kozmikus sebesség*et akkor kapjuk, ha az indítási pont a Föld pályáján van, azaz $r = a_{\text{Föld}} = 1{,}495 \cdot 10^{13}$ cm.

$$v_3 = \sqrt{\frac{2\gamma M_\odot}{a_{\text{Föld}}}} = 42 \text{ km s}^{-1}. \tag{1.14.7}$$

A Naprendszerből kitörő és a szomszédos állócsillagokat felkereső űrhajóknak legalább ekkora indítási sebességük kell, hogy legyen.

15. §. Rakétamozgás. A Ciolkovszkij-egyenlet

A mozgásegyenleteket, mint az eddigiek folyamán láttuk, a *Newton*-féle második axióma szolgáltatja, melyet teljes általánosságában a (3.5) egyenlet fejez ki. Ennek egy speciális esete a (3.6) egyenlet, melynél feltételeztük, hogy a szóban forgó test tömege nem változik. Ebben az esetben a mozgásegyenletek leegyszerüsödnek, amennyiben úgy fejezhetők ki, hogy a tömeg és a gyorsulás szorzatát az erővel tesszük egyenlővé. Ez azonban csak akkor van megengedve, ha a tömeg a test mozgása folyamán nem változik. Ha egy változó tömegű test mozgását vizsgáljuk, akkor az általános (3.5) egyenletet kell alapul vennünk.

A változó tömegű testek közül a rakétáknak van a legnagyobb technikai jelentőségük. A rakéta működési elve, mint ismeretes, a következő: a rakéta tömegének (üzemanyagkészletének) egy részét hátrafelé kilövelli és a kilövelléskor fellépő visszalökő erő hajtja előre a rakétát.

Jelölje t időpontban a rakéta össztömegét $m(t)$, sebességét $v(t)$. A rakéta dt idő alatt $(-dm)$ tömeget lövell hátrafelé, mely a rakétához képest u sebességgel mozog, tehát u a rakétahajtómű által megszabott állandó kilövellési sebesség. A kilövellt $(-dm)$ tömeg a nyugvó inerciarendszerhez képest $u-v$ sebességgel mozog a rakétával ellentétes irányban, impulzusa tehát $(-dm)(u-v) = dm(v-u)$. A kilövellt anyag egységnyi idő alatt $\frac{dm}{dt}(v-u)$ impulzust kap a hajtóműtől, ekkora erő hat a kilövellt anyagra. *Newton* harmadik axiómája szerint ugyanekkora erő hat a rakétára is, de ellentétes irányban, azaz a rakéta haladási irányában. A (3.5) axióma a rakétamozgásra tehát a következő összefüggést adja:

$$\frac{dm}{dt}(v-u) = \frac{d(mv)}{dt}.$$

A jobboldalon a szorzat differenciálási szabályát alkalmazva és m-mel osztva kapjuk, hogy

$$-\frac{u}{m}\frac{dm}{dt} = \frac{dv}{dt}.$$

Integráljuk ezt az egyenletet az idő szerint a rakéta indításának t_0 időpillanatától a t időig:

$$-u \ln \left(\frac{m(t)}{m(t_0)} \right) = v(t) - v(t_0) . \tag{1.15.1}$$

A rakéta sebessége az indítás pillanatában legyen $v(t_0) = 0$. Minthogy $m(t_0)$ a rakéta induló tömegét jelenti, $m(t_0) = M$, ebben a teljes üzemanyagmennyiség is bennefoglaltatik. Legyen most t az az időpillanat, amikor a teljes üzemanyagkészlet elfogy, tehát a rakétahajtóművek leállnak. $v(t)$ ekkor a rakéta v végsebességével, $m(t)$ pedig a rakéta üzemanyag nélküli hasznos tömegével, m-mel lesz egyenlő.

(15.1) szerint

$$v = u \ln \frac{M}{m}$$

vagy

$$M = m e^{v/u} . \tag{1.15.2}$$

Ezt az egyenletet *Ciolkovszkij-egyenlet*nek nevezzük. Ebből látható, hogy a rakéta M indítási tömege arányos az m hasznos tömeggel és exponenciálisan függ a v/u viszonytól, azaz a végsebességnek és a hajtómű kilövellési sebességének hányadosától.

A ma szokásos kémiai hajtás esetében az u kilövellési sebesség az égéstérbeli hangsebesség nagyságrendjébe esik, néhány $\mathrm{km\,s^{-1}}$-nél nagyobb nemigen lehet. Pl. az $u = 3\ \mathrm{km\,s^{-1}}$ érték már kiválónak számít. Ha azt akarjuk, hogy a rakétánk végképp elhagyja a Földet, úgy sebességének el kell érnie a $v = 11{,}2\ \mathrm{kms^{-1}}$ második kozmikus sebességet. Ez esetben a sebességviszony $v/u = 3{,}73$ és a *Ciolkovszkij*-egyenlet szerint

$$M = m e^{3{,}73} = 41{,}68\, m.$$

A második kozmikus sebesség eléréséhez tehát minden tonna hasznos tömegre kereken negyvenkét tonna üzemanyag szükséges.

16. §. A kényszernek alávetett tömegpont mechanikája. Kényszererők

A tömegpont mozgása gyakran korlátozásoknak van alávetve, melyek geometriai jellegűek. Így pl. egy l hosszúságú fonálon függő tömegpont mozgása egy l sugarú gömb belsejére van korlátozva. A geometriai feltétel, korlátozás, tehát jelen esetben úgy szól, hogy a pont mozgása csak abban a térrészben történhet, melyre fennáll, hogy $|r| \leqq l$. A leggyakoribb kényszer az, hogy a tömegpont mozgása egy felülethez vagy egy görbéhez van kötve, mely mindig két felület metszésvonala által adható meg. Vagyis a kényszer egy felület esetében egy egyenlettel

(a felület egyenletével), egy görbe esetében pedig két egyenlettel (azoknak a felületeknek az egyenletével, melyek metszésvonala gyanánt a görbe felfogható) van megadva. Végeredményben ezeknek a kényszereknek realizálása mindig erők által történik, ezek pl. példánkban a fonal egyes kis részei között működő molekuláris erők. A továbbiakban azonban nem szükséges, hogy ezeket az erőket atomi szempontból magyarázzuk. Mi a következőkben a geometriai kényszert függetlenül minden atomi elképzeléstől egy erővel fogjuk helyettesíteni, melyet *kényszererő*nek nevezünk és ezáltal a kényszernek alávetett tömegpont mechanikáját visszavezetjük a kényszernek alá nem vetett (szabad) tömegpont mechanikájára.

A kényszererők lényeges tulajdonsága, hogy merőlegesek a kényszert jelentő felületre, röviden kényszerfelületre. Ha ugyanis ez nem állna fenn, akkor a kényszererők más erők nélkül mozgásba hozhatnák a kérdéses testet, tehát pl. egy vízszintes síkfelület puszta létezésével egy felületen nyugvó golyót mozgásba tudna hozni, ami a tapasztalatnak ellentmond.

Tangenciális erő felléphet, ha a felület érdes, amikor a tömegpont és a felület között súrlódási erő működik. Ez a súrlódási erő azonban természeténél fogva nem kényszererő.

A kényszererő tehát merőleges a felületre. Ha abszolút értékét K_1-gyel, a felület normálisát (kifelé mutató normálisát) pedig $\mathbf{n}$-nel jelöljük, akkor a kényszererő $K_1\mathbf{n}$. Tehát a mozgásegyenletek vektori alakban

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{K} + K_1\mathbf{n}\,. \tag{1.16.1}$$

Ha a kényszert jelentő felület az

$$F(x, y, z) = 0$$

egyenlettel van megadva, akkor grad F szintén $\mathbf{n}$ irányába mutat. Tehát a kényszererő grad F-fel arányos. Vagyis fennáll, hogy

$$K_1\mathbf{n} = \lambda \operatorname{grad} F,$$

ahol λ egy arányossági faktor. A mozgásegyenlet tehát a következő lesz

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{K} + \lambda \operatorname{grad} F. \tag{1.16.2}$$

Komponensekben

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= K_x + \lambda\frac{\partial F}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= K_y + \lambda\frac{\partial F}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= K_z + \lambda\frac{\partial F}{\partial z}. \end{aligned} \tag{1.16.3}$$

Új ismeretlen gyanánt λ lépett fel, de mivel az $F = 0$ egyenletnek a mozgás folyamán teljesülnie kell, annyi egyenletünk van, mint ahány ismeretlen. λ-t úgy határozzuk meg, hogy F-et az idő szerint kétszer deriváljuk, miáltal egy egyenletet kapunk, melyben $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ és $\ddot{z}$ szerepel. Ezeket a mozgásegyenletekből behelyettesítjük, így egy egyenletet kapunk λ számára, ahonnan λ meghatározható.

Ha a tömegpont olyan kényszernek van alávetve, melynek következtében görbén kényszerül mozogni, mely az $F_1 = 0$ és $F_2 = 0$ egyenletek által megadott felületek metszésvonala gyanánt állítható elő, akkor a mozgásegyenlet

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{K} + \lambda_1 \mathrm{grad} F_1 + \lambda_2 \mathrm{grad} F_2 . \tag{1.16.4}$$

λ_1 és λ_2 hasonlóképpen lesznek meghatározva mint előbb.

Az elmozdulás, mivel a pont mozgása a kényszert jelentő felülethez vagy felületekhez van kötve, merőleges a felület, ill. felületek normálisára, vagyis a kényszererőkre. Ennek következtében tehát, ha a kényszer az időtől nem függ, a kényszererők munkát nem igényelnek, tehát az energia tétele szokott formájában fennáll. Mégpedig

$$\frac{1}{2}mv^2 + V = \text{konst.},$$

ahol V a szabad erők potenciálja, feltéve, hogy van potenciál.

A következőkben két példán ismerkedünk meg kényszermozgásokkal.

17. §. A lejtőn való mozgás

Egy m tömegű pont mozogjon a nehézségi erő hatására az l lejtőn. A koordinátarendszer legyen a rajzon látható. Az l lejtősík egyenlete

$$z = x \operatorname{tg} \alpha .$$

Tehát

$$F(x,y,z) = z - x \operatorname{tg} \alpha = 0. \tag{1.17.1}$$

A szabad erő komponensei pedig

$$K_x = 0, \qquad K_y = 0, \qquad K_z = mg. \tag{1.17.2}$$

Tehát a mozgásegyenletek a következők lesznek:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = -\lambda \operatorname{tg} \alpha , \\ m\ddot{y} &= \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 0 , \\ m\ddot{z} &= mg + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} = mg + \lambda . \end{aligned} \tag{1.17.3}$$

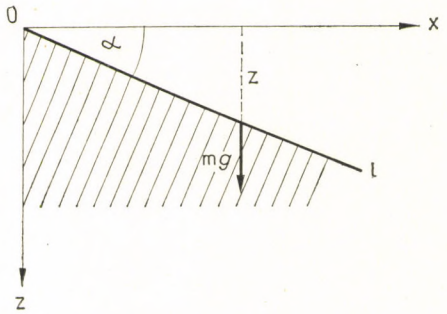
λ meghatározása az előbb említett módon történik

$$\ddot{F} = \ddot{z} - \ddot{x} \operatorname{tg} \alpha = 0. \tag{1.17.4}$$

m-mel szorozva és $m\ddot{z}$-t és $m\ddot{x}$-t a mozgásegyenletekből behelyettesítve, adódik

$$mg + \lambda + \lambda \operatorname{tg}^2 \alpha = 0,$$

$$mg + \lambda(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 0.$$



36. ábra. A lejtőmozgás

Mivel

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

$$mg + \lambda \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 0,$$

$$\lambda = - mg \cos^2 \alpha. \tag{1.17.5}$$

λ-át beírva a mozgásegyenletekbe nyerjük:

$$\ddot{x} = g \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha,$$

$$\ddot{y} = 0,$$

$$\ddot{z} = g(1 - \cos^2 \alpha).$$

Egyszerűsítve

$$\ddot{x} = g \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\ddot{y} = 0, \tag{1.17.6}$$

$$\ddot{z} = g \sin^2 \alpha.$$

$\ddot{y}$ nulla lévén, azt kapjuk, hogy az y irányban állandó sebességgel mozog a pont Ezt az állandó kezdősebességet 0-nak választhatjuk. A másik két egyenletünk azt

mondja, hogy a mozgás állandó gyorsulással történik. Ha a lejtő vízszintes ($\alpha = 0$), akkor $\ddot{x} = 0$ és $\ddot{z} = 0$, vagyis ekkor nincs gyorsulás, ha pedig a lejtő függőleges, vagyis $\alpha = \frac{\pi}{2}$, akkor $\ddot{x} = 0$, $\ddot{z} = g$, vagyis ekkor a pont úgy mozog mint a szabadesésnél.

Képezzük a gyorsulásnak a lejtő irányába eső komponensét, vagyis a lejtő irányára való vetületét. A lejtő iránykoszinuszai $\cos(l, x) = \cos\alpha$ és $\cos(l, z) = \sin\alpha$,

$$g_l = \ddot{x}\cos\alpha + \ddot{z}\sin\alpha = g\sin\alpha\cos^2\alpha + g\sin^3\alpha = g\sin\alpha. \qquad (1.17.7)$$

Ez az ismert formula. Ezt úgy is megkaphattuk volna, ha a szabad erőt, mg-t, egy a lejtő irányába eső és egy arra merőleges komponensre bontottuk volna fel, ezek $mg\sin\alpha$, ill. $mg\cos\alpha$. Az utóbbi ugyanakkora mint a kényszererő, de ellentétes irányú, tehát összegük 0. Így marad a lejtő menti komponens $mg\sin\alpha$, ahonnan nyerjük, hogy a lejtő menti gyorsulás $g\sin\alpha$.

18. §. A matematikai síkinga

Matematikai ingán egy m tömegű pontszerű testet értünk, mely súlytalan l hosszúságú fonálon függ. Ezáltal a pont egy gömbfelületen tartozik mozogni. Az ilyen ingát, mely a gömbfelületen minden irányban elmozdulhat, nevezzük *gömbi ingának*. Ennek a mozgása is tárgyalható, de ezzel mi itt nem foglalkozunk. Mi az ingának egy speciális mozgásával foglalkozunk, mégpedig azzal, melynél a mozgás a felfüggesztési ponton keresztülmenő vertikális síkban történik. Az ilyen ingát *síkingának* nevezzük. A síkingánál tehát a tömegpont egy gömbfelület és egy sík metszésvonalán, vagyis egy körön mozog. Ezt az esetet úgy realizálhatjuk, hogy az ingának adunk egy kitérést és onnan kezdősebesség nélkül elengedjük. Kezdősebességet is adhatunk neki, ha ez annak a körnek az érintője irányába esik, melyen az inga mozog, vagyis melyet a kezdőhelyzet és a nyugalmi helyzet által meghatározott sík a gömbfelületből kimetsz.

A matematikai síkingánál tehát az m tömegű pont függőleges síkban l sugarú körpályán mozog. A z tengelyt lefelé irányítjuk, ekkor a pontra ható mg erő potenciálja $V = -mgz$. A ponthoz húzott rádiuszvektor, melynek hossza állandóan l, a z tengellyel ϑ szöget alkot. Ez a szög a vertikális síkban teljesen meghatározza az inga helyzetét, tehát egy reláció a ϑ és az idő között teljesen elegendő a mozgás meghatározására, vagyis a mozgásegyenlet felállítására. A kényszerfeltétel, mely szerint a pont az említett körön mozog, a következő egyenlettel fejezhető ki

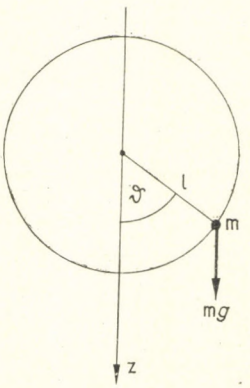
$$r = l. \qquad (1.18.1)$$

Ezt figyelembe véve, írjuk fel az energia tételét

$$E = T + V = C \text{ (konst.)},$$

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m(l\dot{\vartheta})^2,$$

$$V = -mgz = -mgl \cos \vartheta .$$



37. ábra. A síkinga

C helyébe írhatunk mh-t, ahol h egy állandó

$$E = T + V = \frac{1}{2} ml^2\dot{\vartheta}^2 - mgl \cos \vartheta = mh , \tag{1.18.2}$$

ahonnan nyerjük, hogy

$$(\dot{\vartheta})^2 = 2\left(\frac{g}{l} \cos \vartheta + \frac{h}{l^2}\right).$$

Ebből t szerinti deriválással adódik, hogy

$$2\dot{\vartheta}\ddot{\vartheta} = -2\frac{g}{l} \sin \vartheta \, (\dot{\vartheta}),$$

vagyis

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta . \tag{1.18.3}$$

Ez a síkinga mozgásegyenlete.

Ha *kis kilengésekre* szorítkozunk, akkor a jobboldalon $\sin\vartheta$ helyettesíthető ϑ-val és ekkor a következő egyenletet nyerjük

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l}\vartheta,$$

mely az egyszerű harmonikus mozgás differenciálegyenlete. Megoldása, mint ismeretes,

$$\vartheta = a\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \alpha\right). \tag{1.18.4}$$

A frekvencia, vagyis az 1s alatt végzett rezgések száma

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{1.18.5}$$

A periódus, vagyis egy teljes rezgés ideje

$$T = \frac{1}{\nu} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

ami már az elemekből ismeretes.

A továbbiakban *tetszőleges nagy kilengéseket* tárgyalunk és a következő egyenletből indulunk ki, mely a mozgásegyenlet integrálja

$$l^2\dot{\vartheta}^2 = 2(gl\cos\vartheta + h). \tag{1.18.6}$$

Először is eliminálják a h állandót egy más állandó bevezetésével. Ennek az egyenletnek ugyanis akkor is érvényben kell maradnia, ha ϑ helyébe egy meghatározott ϑ_0 szöget teszünk. Ekkor nyerjük

$$l^2\dot{\vartheta}_0^2 = 2(gl\cos\vartheta_0 + h). \tag{1.18.7}$$

Ezt az egyenletet levonva az előbbiből, h kiesik és adódik

$$l^2(\dot{\vartheta}^2 - \dot{\vartheta}_0^2) = 2gl(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0),$$

$$\dot{\vartheta}^2 = \dot{\vartheta}_0^2 + \frac{2g}{l}(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0).$$

A $\cos\vartheta = 1 - 2\sin^2\frac{\vartheta}{2}$ és $\cos\vartheta_0 = 1 - 2\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}$ helyettesítéssel nyerjük

$$\dot{\vartheta}^2 = \dot{\vartheta}_0^2 + \frac{4g}{l}\left(\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Innen

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\dot{\vartheta}_0^2 + \frac{4g}{l}\left(\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)}\,.$$

dt-vel szorozva az egyenletet és figyelembe véve, hogy $\frac{d\vartheta}{dt}\,dt = d\vartheta$, adódik

$$d\vartheta = \sqrt{\dot{\vartheta}_0^2 + \frac{4g}{l}\left(\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)}\,dt\,,$$

vagyis

$$dt = \frac{d\vartheta}{\sqrt{\dot{\vartheta}_0^2 + \frac{4g}{l}\left(\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)}}\,.$$

Integrálva

$$t - t_1 = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\dot{\vartheta}_0^2 + \frac{4g}{l}\left(\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)}}\,. \tag{1.18.8}$$

Ez az integrál adja azt az időközt, mely alatt a ϑ szög ϑ_1-től ϑ-ig változik. Az integrál nem fejezhető ki elemi függvényekkel. Az ilyen típusú integrált *elliptikus integrál*nak nevezzük.

Két fontos esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a mozgás folyamán van-e olyan időpont, hogy az inga sebessége 0-vá válik, vagy nincs.

Ha az inga *sebessége sohasem válik* 0-*vá*, akkor — mivel a sebesség folytonos függvénye az időnek — a sebesség sehol sem válhat ellenkező előjelűvé. Ez azt jelenti, hogy a pont nem fordul vissza, mindig egy irányban mozog, vagyis az inga *forgó mozgást* végez. Ezzel az esettel itt tovább nem foglalkozunk, jóllehet formulánk erre is érvényes.

Ha van olyan időpont, melynél az inga sebessége 0, akkor itt az inga ellenkező irányban kezd mozogni, vagyis az inga *lengő mozgást* végez. Ekkor tehát van egy bizonyos ϑ szög, melynél a szögsebesség $\dot{\vartheta} = 0$. Válasszuk ezen szög gyanánt a ϑ_0 szöget, mely a fenti kifejezéseinkben szerepel. Ekkor tehát $\dot{\vartheta}_0 = 0$ és nyerjük, hogy

$$t - t_1 = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}}}\,,$$

$$t - t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} \frac{d\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}}}\,. \tag{1.18.9}$$

Ez az integrál egyszerűbb alakra hozható a következőképpen. Vezessük be a következő jelölést

$$\sin \frac{\vartheta_0}{2} = k$$

és vezessük be ϑ helyett a ψ változót

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = k \sin \psi .$$

Innen

$$\cos \frac{\vartheta}{2} d\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = k \cos \psi \, d\psi ,$$

$$d\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{k \cos \psi}{\cos \frac{\vartheta}{2}} d\psi,$$

$$\cos \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} ,$$

tehát

$$d\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{k \cos \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} d\psi . \tag{1.18.10}$$

Az integrandus nevezője pedig a következő lesz

$$\sqrt{\sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} = \sqrt{k^2 - k^2 \sin^2 \psi} = k \cos \psi . \tag{1.18.11}$$

Tehát

$$\frac{d\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}} = \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} .$$

Ezzel az integrandus transzformációját elvégeztük. A határok ϑ_1 helyett ψ_1, ϑ helyett ψ. Tehát

$$t - t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\psi_1}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} . \tag{1.18.12}$$

Ezt az integrált a következőképpen bontjuk fel

$$\int_{\psi_1}^{\psi} = \int_{\psi_1}^{0} + \int_{0}^{\psi} = \int_{0}^{\psi} - \int_{0}^{\psi_1} ,$$

tehát

$$t - t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} - \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \right\}. \qquad (1.18.13)$$

Az itt előforduló integráltípust *elsőfajú elliptikus integrál*nak nevezzük és a következőképpen jelöljük

$$F(k, \psi) = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}. \qquad (1.18.14)$$

k az elliptikus integrál modulusa, ψ az amplitúdója. Ez a két jellemzője az integrálnak. Ezekre léteznek táblázatok, melyekben $F(k, \psi)$ megtalálható. Kiszámításuk hosszadalmas és úgy történik, hogy az integrandust sorba fejtjük és tagonként integrálunk (ezt nem minden integrálnál lehet). A számítást arra az esetre, midőn a felső határ $\pi/2$, el fogjuk végezni. $F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ az elsőfajú teljes elliptikus integrál.

Képletünk azt az időt szolgáltatja, mely eltelik, míg az inga a ϑ_1 helyzetből a ϑ helyzetbe jut. Számítsuk ki a teljes periódus negyed részét, vagyis azt az időt, mely alatt az inga a legmélyebb helyzetből ($\vartheta = 0$) a 0 sebességnek megfelelő szélső helyzetbe ($\vartheta = \vartheta_0$) jut. Vagyis legyen $\vartheta_1 = 0$ és $\vartheta = \vartheta_0$. ψ határai:

ha $\vartheta_1 = 0$, akkor a $k \sin \psi_1 = \sin \frac{\vartheta_1}{2}$ egyenletből $\psi_1 = 0$,

ha $\vartheta = \vartheta_0$, akkor a $k \sin \psi = \sin \frac{\vartheta_0}{2}$ egyenletből $\sin \psi = 1$, $\psi = \frac{\pi}{2}$.

Ezeket a (18.13) formulába beírva, mivel a második integrál eltűnik, nyerjük

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}. \qquad (1.18.15)$$

Ezt az integrált kiszámítjuk. $k^2 \sin^2 \psi = x$ jelöléssel:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x}} = (1 - x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x + \frac{1.3}{2.4} x^2 +$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6} x^3 + \ldots + \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots (2n)} x^n + \ldots . \qquad (1.18.16)$$

Behelyettesítve x-et, nyerjük

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \psi + \frac{1.3}{2.4} k^4 \sin^4 \psi + \ldots +$$

$$+ \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots (2n)} k^{2n} \sin^{2n} \psi + \ldots .$$

Itt most tagonként lehet integrálni. Az integráció elvégezhető. Hivatkozunk a következő eredményre

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\psi \, d\psi = \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots (2n)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Ezzel nyerjük

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \ldots + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots (2n)} \right)^2 k^{2n} + \ldots \right\},$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4 \frac{\vartheta_0}{2} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots (2n)} \right)^2 \sin^{2n} \frac{\vartheta_0}{2} + \ldots \right\}. \qquad (1.18.17)$$

A közelebbi vizsgálat azt mutatja, hogy ez a sor konvergens. Kis ϑ_0 értékre a tagok nagyon gyorsan csökkennek és ezért elegendő az első tagot megtartani, ekkor visszakapjuk az előbbi formulánkat, melyet kis kilengésekre vezettünk be. Nagyobb ϑ_0 értéknél is jó közelítést kapunk, ha még egy-két tagot megtartunk.

19. §. A mozgásegyenletek mozgó koordinátarendszerben

A mozgásegyenletek egy (x, y, z) koordinátarendszerben a következők:

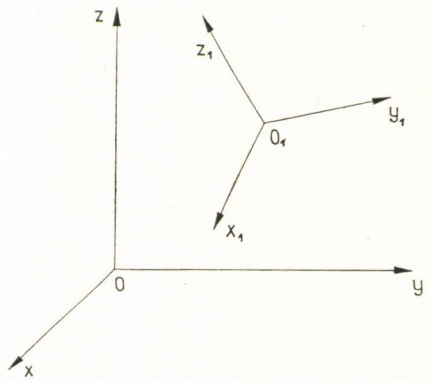
$$m\ddot{x} = K_x,$$
$$m\ddot{y} = K_y, \qquad (1.19.1)$$
$$m\ddot{z} = K_z.$$

Ezek az egyenletek az inerciarendszerre vonatkoznak. Kérdés, hogy milyen mozgásegyenletek érvényesek olyan koordinátarendszerben, mely az alapul felvett inerciarendszerhez képest valamilyen módon mozog. Ennek az új x_1, y_1, z_1 rendszernek a mozgását úgy írjuk le, hogy megadjuk a kezdőpontjának koordinátáit és a tengelyek iránykoszinuszait mint az idő függvényét.

$$0(a, b, c),$$
$$x_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1),$$
$$y_1(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2),$$
$$z_1(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3).$$

Ezt a kilenc mennyiséget adjuk meg mint az idő függvényét. Az (x,y,z) rendszer iránykoszinuszai természetesen a következők

$$x(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$
$$y(\beta_1, \beta_2, \beta_3),$$
$$z(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$



38. ábra. Egymáshoz képest mozgó koordinátarendszerek

Tehát egy pont (x, y, z) koordinátáit x_1, y_1, z_1-gyel a következőképpen fejezhetjük ki

$$\begin{aligned} x &= a + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3 z_1, \\ y &= b + \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_3 z_1, \\ z &= c + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 y_1 + \gamma_3 z_1. \end{aligned} \tag{1.19.2}$$

A sebesség és gyorsulás komponenseit az idő szerinti differenciálással kapjuk. Az együtthatókat is differenciálni kell, mert azok is függvényei az időnek.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{a} + \dot{\alpha}_1 x_1 + \dot{\alpha}_2 y_1 + \dot{\alpha}_3 z_1 + \alpha_1 \dot{x}_1 + \alpha_2 \dot{y}_1 + \alpha_3 \dot{z}_1, \\ \dot{y} &= \dot{b} + \dot{\beta}_1 x_1 + \dot{\beta}_2 y_1 + \dot{\beta}_3 z_1 + \beta_1 \dot{x}_1 + \beta_2 \dot{y}_1 + \beta_3 \dot{z}_1, \\ \dot{z} &= \dot{c} + \dot{\gamma}_1 x_1 + \dot{\gamma}_2 y_1 + \dot{\gamma}_3 z_1 + \gamma_1 \dot{x}_1 + \gamma_2 \dot{y}_1 + \gamma_3 \dot{z}_1. \end{aligned} \tag{1.19.3}$$

Ezek a sebességkomponensek közti összefüggések. A gyorsulás komponensei pedig:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{a} + \ddot{\alpha}_1 x_1 + \ddot{\alpha}_2 y_1 + \ddot{\alpha}_3 z_1 + 2(\dot{\alpha}_1 \dot{x}_1 + \dot{\alpha}_2 \dot{y}_1 + \dot{\alpha}_3 \dot{z}_1) + \alpha_1 \ddot{x}_1 + \alpha_2 \ddot{y}_1 + \alpha_3 \ddot{z}_1, \\ \ddot{y} &= \ddot{b} + \ddot{\beta}_1 x_1 + \ddot{\beta}_2 y_1 + \ddot{\beta}_3 z_1 + 2(\dot{\beta}_1 \dot{x}_1 + \dot{\beta}_2 \dot{y}_1 + \dot{\beta}_3 \dot{z}_1) + \beta_1 \ddot{x}_1 + \beta_2 \ddot{y}_1 + \beta_3 \ddot{z}_1, \\ \ddot{z} &= \ddot{c} + \ddot{\gamma}_1 x_1 + \ddot{\gamma}_2 y_1 + \ddot{\gamma}_3 z_1 + 2(\dot{\gamma}_1 \dot{x}_1 + \dot{\gamma}_2 \dot{y}_1 + \dot{\gamma}_3 \dot{z}_1) + \gamma_1 \ddot{x}_1 + \gamma_2 \ddot{y}_1 + \gamma_3 \ddot{z}_1. \end{aligned} \tag{1.19.4}$$

Nézzük, hogy egyes speciális esetekben mit jelentenek ezek az összefüggések. Ha pl. az x_1, y_1, z_1 rendszer az inerciarendszerhez képest nyugszik, akkor a, b, c és α, β, γ állandók, tehát deriváltjaik nullák. Ekkor ezek az egyenletek egyszerűen a sebesség és gyorsulás vetületeit szolgáltatják bizonyos más irányú tengelyekre.

Ha pl. az x_1, y_1, z_1 rendszer az inerciarendszerhez képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végez, vagyis ha a kezdőpontja az inerciarendszerben egyenesvonalú egyenletes mozgást végez, míg tengelyei az inerciarendszer tengelyeivel állandó szögeket zárnak be, akkor az α, β, γ állandó, míg a, b, c az idővel arányos, vagyis $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$ állandó. Tehát

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{a} + \alpha_1\dot{x}_1 + \alpha_2\dot{y}_1 + \alpha_3\dot{z}_1, \\ \dot{y} &= \dot{b} + \beta_1\dot{x}_1 + \beta_2\dot{y}_1 + \beta_3\dot{z}_1, \\ \dot{z} &= \dot{c} + \gamma_1\dot{x}_1 + \gamma_2\dot{y}_1 + \gamma_3\dot{z}_1. \end{aligned} \tag{1.19.5}$$

Vagyis egy pontnak az x_1, y_1, z_1 rendszerben való sebességéhez a kezdőpont sebességét hozzá kell adni, hogy az inerciarendszerben való sebességét megkapjuk. Ezt azonnal beláthatjuk, ha a két rendszer tengelyei párhuzamosak, vagyis ha

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1,\ \beta_3 = 0,\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = 1.$$

Ekkor ugyanis

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{a} + \dot{x}_1, \\ \dot{y} &= \dot{b} + \dot{y}_1, \\ \dot{z} &= \dot{c} + \dot{z}_1. \end{aligned} \tag{1.19.6}$$

A gyorsulás komponensei, mivel $\ddot{a}, \ddot{b}, \ddot{c}$ nulla, a következők:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \alpha_1\ddot{x}_1 + \alpha_2\ddot{y}_1 + \alpha_3\ddot{z}_1, \\ \ddot{y} &= \beta_1\ddot{x}_1 + \beta_2\ddot{y}_1 + \beta_3\ddot{z}_1, \\ \ddot{z} &= \gamma_1\ddot{x}_1 + \gamma_2\ddot{y}_1 + \gamma_3\ddot{z}_1. \end{aligned} \tag{1.19.7}$$

Ez azt jelenti, hogy a gyorsulás a két koordinátarendszerben ugyanaz, csak vetülete a különböző irányú tengelyekre más. Ha ugyanis a tengelyek párhuzamosak, vagyis ha $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1, \beta_3 = 0, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1$, akkor

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}_1, \\ \ddot{y} &= \ddot{y}_1, \\ \ddot{z} &= \ddot{z}_1, \end{aligned}$$

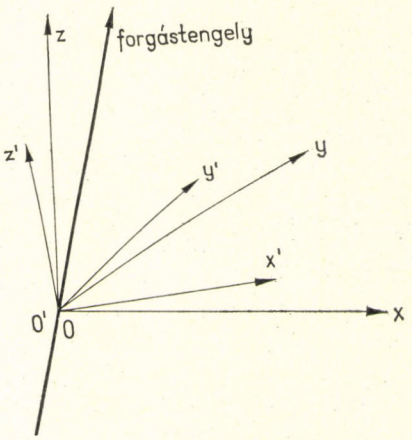
tehát a gyorsulás komponensei azonosak. Az (x, y, z) inerciarendszer mindig úgy választható meg, hogy tengelyei az egyenesvonalú egyenletes mozgást végző x_1, y_1, z_1 rendszer tengelyeivel párhuzamosak legyenek. Tehát fennáll, hogy

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1,$$

vagyis

$$\mathbf{K} = m\ddot{\mathbf{r}} = m\ddot{\mathbf{r}}_1.$$

Tehát egymáshoz képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végző koordinátarendszerekben a mozgásegyenletek ugyanazok. Ez a *Galilei*-féle relativitás elve.



39. ábra. Egymáshoz képest egyenletesen forgó koordinátarendszerek

Azokat a koordinátarendszereket, melyekben a *Newton*-féle mozgásegyenletek érvényesek, inerciarendszereknek neveztük. A most kapott eredmény szerint valamely inerciarendszerhez képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végző rendszerek mind inerciarendszerek.

Ezek után tárgyaljuk az egymáshoz képest egyenletes forgómozgást végző koordinátarendszereket. Legyen az x, y, z rendszer ismét az inerciarendszer és az x', y', z' rendszer pedig egy oly rendszer, mely az inerciarendszerhez képest egyenletes forgómozgást végez. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a két rendszer kezdőpontja egybeesik. Ha ugyanis ez nem így volna, az inerciarendszer mindig helyettesíthető egy másik inerciarendszerrel, mely ezt a feltételt kielégíti. A forgástengely menjen át a közös kezdőponton. A forgástengely körül történjen a forgás állandó ω szögsebességgel. Ezzel kapcsolatban definiáljuk a szögsebesség vektorát, $\boldsymbol{\omega}$-t. Ezen egy olyan vektort értünk, melynek abszolút értéke ω, iránya pedig a forgástengely oly értelemben, hogy $\boldsymbol{\omega}$ irányába nézve a forgás az óramutató járásával megegyezzen.

Az x, y, z rendszerben a megfelelő egységvektorok legyenek $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, a vesszős rendszerben pedig $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$. Az utóbbiak az időben változnak, tehát függnek az

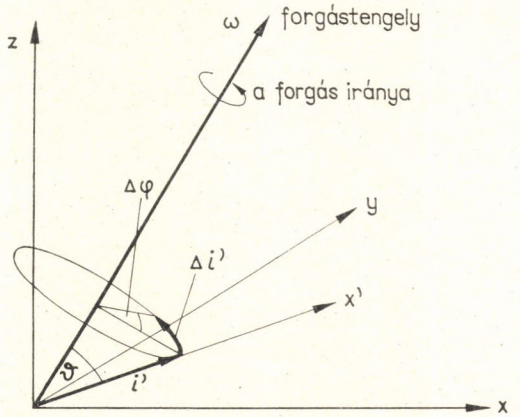
időtől. A rádiuszvektor, **r**, a következőképpen állítható elő

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'. \tag{1.19.8}$$

A sebesség a vesszős rendszerben a következő:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}'\mathbf{i}' + \dot{y}'\mathbf{j}' + \dot{z}'\mathbf{k}' + x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt}. \tag{1.19.9}$$

Az első három tag adja a vesszős rendszerben egy, a vesszős rendszerhez képest mozgó pont sebességét, vagyis a pont sebességét olyan észlelő számára, aki



40. ábra. A forgó koordinátarendszer egységvektorainak irányváltoztatása

a vesszős rendszerrel együtt mozog, a második három tag pedig a pontnak azt a sebességét, mely onnan származik, hogy a vesszős rendszer forog. Ha a pont a vesszős rendszerben nyugszik, akkor az első három tag 0, tehát a második három tag éppen egy a vesszős rendszerhez rögzített pont sebességét adja.

Határozzuk meg a vesszős egységvektorok differenciálhányadosait. Évégből induljunk ki a 40. ábrából, ahol csak **i**′-vel foglalkozunk. A forgás folyamán **i**′ hossza nem változik, de iránya változik, tehát maga **i**′ is változik. Legyen a változás Δt idő alatt $\Delta\mathbf{i}'$. A $|\Delta\mathbf{i}'|$ egy kör ívelemének tekinthető, melynek sugara $\rho = |\mathbf{i}'| \sin\vartheta = \sin\vartheta$. Az elemi elforgás szöge $\Delta\phi = \omega\Delta t$. Tehát

$$|\Delta\mathbf{i}'| = \omega\sin\vartheta \cdot \Delta t\,.$$

Δt-vel osztva és áttérve a $\Delta t \to 0$ határra, adódik

$$\left|\frac{d\mathbf{i}'}{dt}\right| = \omega\sin\vartheta\,.$$

$d\mathbf{i}'/dt$ iránya pedig, megegyezve $\Delta\mathbf{i}'$ irányával, határesetben $\boldsymbol{\omega}$ és **i** síkjára merőleges.

ω, $\mathbf{i}'$ és $\frac{d\mathbf{i}'}{dt}$ egy jobbsodrású koordinátarendszer x, y és z tengelyei sorrendjében következnek egymás után. Ugyanilyen sorrendben következnek egymásután az ω, $\mathbf{i}'$ és az $[\omega, \mathbf{i}']$ vektorok és mivel $|[\omega, \mathbf{i}']| = \omega \sin \vartheta$, írható, hogy

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = [\omega, \mathbf{i}'].$$

Teljesen hasonlóan nyerjük, hogy

$$\frac{d\mathbf{j}'}{dt} = [\omega, \mathbf{j}'], \tag{1.19.10}$$

$$\frac{d\mathbf{k}'}{dt} = [\omega, \mathbf{k}'].$$

Ezeket behelyettesítve (19.9) egyenletünkbe, az utolsó 3 tag a következő lesz

$$x'[\omega, \mathbf{i}'] + y'[\omega, \mathbf{j}'] + z'[\omega, \mathbf{k}'] = [\omega, (x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}')] = [\omega, \mathbf{r}]. \tag{1.19.11}$$

Jelöljük a vesszős rendszerre vonatkozó differenciálást $\frac{d'}{dt}$-vel, ezen azt értjük, hogy ennél a differenciálásnál csak a komponenseket tekintjük változóknak, $\mathbf{i}'$-, $\mathbf{j}'$-, $\mathbf{k}'$-t nem. Látjuk, hogy $\dot{\mathbf{r}}$ formulájában a jobboldal első három tagja $\frac{d'\mathbf{r}}{dt}$, tehát

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}}{dt} + [\omega, \mathbf{r}]. \tag{1.19.12}$$

Ez persze nemcsak az $\mathbf{r}$ vektorra áll fenn, hanem bármely vektorra, melyet szimbolikusan így jelölünk

$$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + [\omega, \ ],$$

vagyis a vektor helyét szabadon hagyjuk. Alkalmazzuk a fenti egyenletet $\mathbf{r}$ helyett $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$-re, ekkor nyerjük

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{d'}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) + \left[\omega, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right].$$

Beírva $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ (19.12) kifejezését

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d'}{dt}\left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]\right) + \left[\boldsymbol{\omega}, \left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]\right)\right],$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^{2\prime}\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{d'}{dt}[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}] + \left[\boldsymbol{\omega}, \frac{d'\mathbf{r}}{dt}\right] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]].$$

Mivel $\boldsymbol{\omega}$ konstans,

$$\frac{d'}{dt}[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}] = \left[\boldsymbol{\omega}, \frac{d'\mathbf{r}}{dt}\right].$$

Ezt könnyen beláthatjuk. Tekintsük pl. az x-komponenst

$$\frac{d'}{dt}[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]_x = \frac{d'}{dt}(\omega_y z - \omega_z y) = \omega_y \frac{d'z}{dt} - \omega_z \frac{d'y}{dt} = \left[\boldsymbol{\omega}, \frac{d'\mathbf{r}}{dt}\right]_x.$$

Mivel a másik két komponensre analóg összefüggések érvényesek, állításunk helyes és így nyerjük, hogy

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^{2\prime}\mathbf{r}}{dt^2} + 2\left[\boldsymbol{\omega}, \frac{d'\mathbf{r}}{dt}\right] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]]. \qquad (1.19.13)$$

A jobboldal első tagja adja egy, a vesszős rendszerben mozgó pont gyorsulását a vesszős rendszerben. A harmadik tag pedig egy a vesszős rendszerhez rögzített pont gyorsulása, amit onnan láthatunk, hogy a jobboldalon csak a 3-ik tag marad meg, ha $\mathbf{r}$ = konstans. Tehát a 3-ik tag adja a vesszős rendszer forgásából eredő gyorsulást. Ehhez a két taghoz járul még a második tag, mely csak akkor nem zérus, ha a pont a vesszős rendszerben mozog, vagyis ha $\frac{d'\mathbf{r}}{dt} \neq 0$.

A (19.13) egyenletet m-mel szorozva, nyerjük, hogy

$$\mathbf{K} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\frac{d^{2\prime}\mathbf{r}}{dt^2} + 2m\left[\boldsymbol{\omega}, \frac{d'\mathbf{r}}{dt}\right] + m[\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]].$$

A mozgásegyenletek a mozgó rendszerben tehát vektori alakban a következők

$$m\frac{d^{2\prime}\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{K} - 2m\left[\boldsymbol{\omega}, \frac{d'\mathbf{r}}{dt}\right] - m[\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]]. \qquad (1.19.14)$$

Tehát a mozgó rendszerben a nyugvó rendszerben is jelen levő erőhöz, $\mathbf{K}$-hoz, még két erő járul, mégpedig

$$\mathbf{K}_{Co} = -2m\left[\boldsymbol{\omega}, \frac{d'\mathbf{r}}{dt}\right] = 2m[\mathbf{v}', \boldsymbol{\omega}], \qquad (1.19.15)$$

ahol $\mathbf{v}'$ a pont sebessége a vesszős rendszerben és

$$\mathbf{K}_{Ce} = -m[\boldsymbol{\omega},[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]] = m[\boldsymbol{\omega},[\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}]]. \tag{1.19.16}$$

Az előbbi a *Coriolis*-erő, az utóbbi a centrifugális erő.

A mozgásegyenletek a forgó rendszerben tehát így írhatók

$$m\frac{d^{2\prime}\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{K} + \mathbf{K}_{Co} + \mathbf{K}_{Ce}. \tag{1.19.17}$$

Foglalkozzunk először a *Coriolis-erő*vel. Ez az erő csak akkor lép fel, ha $\mathbf{v}' \neq 0$, vagyis ha a pont a vesszős rendszerben mozog. Amint látható, $\mathbf{K}_{Co}$ akkor is 0, ha $\mathbf{v}'$ $\boldsymbol{\omega}$-val párhuzamos vagy vele ellentétes irányú, ha azonban ez nem áll fenn, 0-tól különböző. Tehát egy a Földön mozgó pontra, melynél $\mathbf{v}'$ nem párhuzamos vagy ellentétes irányú a forgástengellyel, szintén hat ez az erő. A *Coriolis*-erő más földi erőhatásokhoz viszonyítva igen kicsi, de kimutatható. Így pl. ismeretes, hogy egy síkinga lengési síkja az időben változtatja helyzetét (*Foucault*-inga). Hasonlóképpen a hajítások pontos tárgyalásánál, nagy távolságokra történő lövéseknél ezt az erőt mindig figyelembe kell venni. A szabadesésnél szintén figyelembe kell venni ezt az erőt, amely azt eredményezi, hogy a szabadon ejtett test pályája keleti irányban kissé eltér a függőleges egyenestől. Amint a rajzon látható, $[\mathbf{v}', \boldsymbol{\omega}]$ merőleges a rajz síkjára és felénk mutat, vagyis földi iránymeghatározást alkalmazva, keleti irányba mutat, tehát az eltérés is ilyen irányú lesz. Ezt a tapasztalat igazolja.

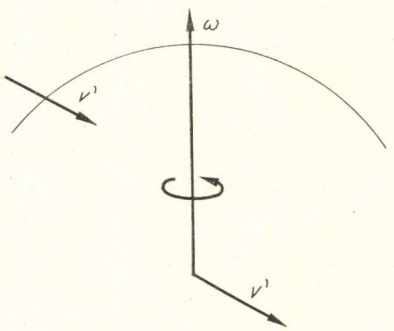
Ezek után térjünk rá a *centrifugális erő*re. A 42. ábrán felrajzoltuk $\boldsymbol{\omega}$-t és az $\mathbf{r}$ rádiuszvektort a P ponthoz, melyben az m tömegpont foglal helyet. $[\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}]$ a rajz síkjára merőleges és felénk mutat, $[\boldsymbol{\omega},[\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}]]$ tehát $\boldsymbol{\omega}$-ra merőleges és a jelzett irányba mutat, vagyis a *forgástengelytől el* irányul.

$$|\,[\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}]\,| = r\omega \sin\vartheta,$$

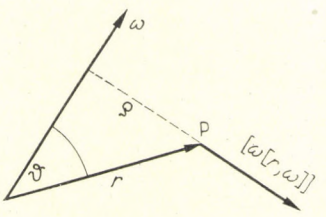
tehát

$$|\,m[\boldsymbol{\omega},[\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}]]\,| = m\omega^2 r \sin\vartheta = m\omega^2\rho\,,$$

ahol ρ a forgástengelytől való távolság. Tehát az elemekből ismert formulát kaptuk.



41. ábra. A *Coriolis*-erő irányának meghatározásához a Földön



42. ábra. A centrifugális erő

MÁSODIK FEJEZET

PONTRENDSZEREK MECHANIKÁJA

Egy fizikai rendszert gyakran lehet tömegpontok rendszerével sematizálni és ezekre alkalmazhatjuk az előzőekben levezetett összefüggéseket. Ezáltal fontos és általános érvényű tételekhez jutunk. A tételek érvényessége igen tág határok között áll fenn, mert végeredményben minden testet tekinthetünk nagyon sok tömegpontból álló rendszernek. Az egyes tömegpontokra ható erők kétféle eredetűek, vagy a rendszer többi pontjaiból indulnak ki, akkor belső erők, vagy pedig külső eredetűek, ekkor külső erők.

1. §. A tömegközéppont tétele

Egy n pontból álló pontrendszer mozgásegyenlete a következő:

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{K}_i(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t)\,. \qquad (2.1.1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Komponensekben

$$m_i\ddot{x}_i = K_{ix}(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_{,n} z_n;\ \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n; t)\,,$$

$$m_i\ddot{y}_i = K_{iy}(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n; t)\,,$$

$$m_i\ddot{z}_i = K_{iz}(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n;\ t)\,,$$

ahol K_{ix}, K_{iy} és K_{iz} az i-edik tömegpontra ható erő derékszögű komponensei.

Az i-edik pontra ható $\mathbf{K}_i$ erőt felbonthatjuk két részre, az i-edik pontra ható külső erőre, $\mathbf{K}_{i0}$-ra és a többi $n-1$ pontból az i-edikre ható erőre, $\sum_k \mathbf{K}_{ik}$-ra, ahol $\mathbf{K}_{ik}$ a k-adik pont által az i-edikre gyakorolt erő. $\mathbf{K}_{ii} = 0$. Tehát

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{K}_{i0} + \sum_k \mathbf{K}_{ik}\,. \qquad (2.1.2)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Összegezzük ezeket az egyenleteket, ekkor nyerjük

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_{i0} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{K}_{ik}\,. \qquad (2.1.3)$$

Az itt fellépő kettős összeg zérus, mert a 3-adik axióma szerint a k-adik pontból az i-re gyakorolt erő ugyanolyan nagy, de ellentétes irányú, mint az i-edik pontból a k-ikra gyakorolt erő és mindegyik előfordul az összegben

$$\mathbf{K}_{ik} = -\mathbf{K}_{ki}, \qquad \mathbf{K}_{ik} + \mathbf{K}_{ki} = 0,$$

tehát

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_{i0}.$$

Komponensekben kiírva

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{x}_i &= \sum_{i=1}^{n} (K_{i0})_x, \\ \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{y}_i &= \sum_{i=1}^{n} (K_{i0})_y, \\ \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{z}_i &= \sum_{i=1}^{n} (K_{i0})_z. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Ezeket az egyenleteket egyszerűen értelmezhetjük, ha a pontrendszerhez egy pontot rendelünk, melynek koordinátái a következőképpen vannak definiálva

$$x_0 = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}, \qquad y_0 = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}, \qquad z_0 = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}.$$

Vektoregyenletben

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}. \tag{2.1.5}$$

Ezt a pontot nevezzük a rendszer *tömegközéppont*jának. A nevezőben a rendszer tömege, M, áll. A tömegközéppont sebességének és gyorsulásának komponensei

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \frac{\sum_i m_i \dot{x}_i}{M}, & \ddot{x}_0 &= \frac{\sum_i m_i \ddot{x}_i}{M}, \\ \dot{y}_0 &= \frac{\sum_i m_i \dot{y}_i}{M}, & \ddot{y}_0 &= \frac{\sum_i m_i \ddot{y}_i}{M}, \\ \dot{z}_0 &= \frac{\sum_i m_i \dot{z}_i}{M}, & \ddot{z}_0 &= \frac{\sum_i m_i \ddot{z}_i}{M}. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

(1.4) segítségével fenti egyenleteink a következőképpen írhatók

$$M\ddot{x}_0 = \sum_{i=1}^{n} (K_{i0})_x ,$$

$$M\ddot{y}_0 = \sum_{i=1}^{n} (K_{i0})_y ,$$

$$M\ddot{z}_0 = \sum_{i=1}^{n} (K_{i0})_z .$$

Vektoregyenletben

$$M\ddot{\mathbf{r}}_0 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_{i0} . \tag{2.1.7}$$

A tömegközéppont tehát úgy mozog, mint egy anyagi pont, amelynek tömege a rendszer egész tömege és amelyre ható erő egyenlő a rendszer egyes pontjaira ható külső erők vektori összegével. Ha

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_{i0} = 0 ,$$

vagyis

$$\sum_{i=1}^{n} (K_{i0})_x = 0 , \qquad \sum_{i=1}^{n} (K_{i0})_y = 0 , \qquad \sum_{i=1}^{n} (K_{i0})_z = 0 ,$$

akkor egyenleteinket M-mel egyszerűsítve és integrálva

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_0 = 0, \quad \ddot{y}_0 = 0, \quad \ddot{z}_0 = 0, \\ &\dot{x}_0 = a_1, \qquad x_0 = a_1 t + b_1, \\ &\dot{y}_0 = a_2, \qquad y_0 = a_2 t + b_2, \\ &\dot{z}_0 = a_3, \qquad z_0 = a_3 t + b_3. \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Tehát, ha külső erők nem hatnak vagy ha a külső erők eredője zérus, akkor a tömegközéppont egyenletes egyenesvonalú mozgást végez. Ez a tétel a *tömegközéppont tétele.*

Pl. a Naprendszerre, ha a távoli állócsillagok hatásától eltekintünk, külső erő nem hat, tehát a Naprendszer tömegközéppontja egyenesvonalú egyenletes mozgással halad tova a térben, mozgását a rendszer tagjai közt működő erők nem befolyásolják.

Továbbá ennek a tételnek segítségével lehet megmagyarázni a következő és ehhez hasonló jelenségeket. Egy ágyú elsütésekor az ágyú visszafelé mozog. Ennek oka abban van, hogy az ágyúgolyóból és az ágyúból álló rendszer tömegközéppontja, melyre csak a Föld nehézségi ereje hat (súrlódási erőktől eltekintve),

a kezdeti állapotnak megfelelő függőleges egyenesen mozog, mert a nehézségi erő ilyen irányú. Ha tehát a golyó előre mozog, az ágyú hátra mozdul el.

A tömegközéppontot (mivel a leggyakoribb erő a nehézségi erő) *súlypont*nak is szokás nevezni.

2. §. Folytonos eloszlású rendszerek tömegközéppontja

Folytonos eloszlású rendszerek tömegközéppontjának meghatározásánál úgy járunk el, hogy a rendszert elemi kis tömegekre bontjuk fel, melyek pontoknak tekinthetők. Ezáltal a rendszert helyettesíthetjük egy pontrendszerrel. A helyettesítés annál pontosabb, minél sűrűbb a beosztás, tehát teljesen pontos akkor lesz, ha az elemi tömegek infinitezimálisan kicsinyek lesznek. Tehát ugyanazok a formulák lesznek érvényesek mint előbb, csak hogy az összeg helyett integrál áll

$$x_0 = \frac{\int x\,dm}{\int dm}, \qquad y_0 = \frac{\int y\,dm}{\int dm}, \qquad z_0 = \frac{\int z\,dm}{\int dm}, \tag{2.2.1}$$

ahol

$$\int dm = M.$$

Hogy ezeket a képleteket számolásra alkalmasabbá tegyük, vezessük be a sűrűséget. A ρ *sűrűség* alatt értjük egy térfogatban foglalt tömeg és a térfogat hányadosának határértékét, ha a térfogattal a 0 határra térünk át.

$$\rho = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta v} = \frac{dm}{dv}, \tag{2.2.2}$$

ahonnan

$$dm = \rho dv,$$

vagyis

$$x_0 = \frac{\int\limits_v x\rho\,dv}{\int\limits_v \rho dv}, \qquad y_0 = \frac{\int\limits_v y\rho\,dv}{\int\limits_v \rho dv}, \qquad z_0 = \frac{\int\limits_v z\rho\,dv}{\int\limits_v \rho dv}.$$

A nevezőben ismét a rendszer teljes tömege, M áll; v a rendszer térfogata. Ha ρ konstans, akkor kiemelhető az integrál elé és ρ-val rövidíteni lehet. Ekkor

$$x_0 = \frac{\int x\,dv}{v}, \qquad y_0 = \frac{\int y\,dv}{v}, \qquad z_0 = \frac{\int z\,dv}{v}. \tag{2.2.3}$$

Derékszögű koordináták esetében nyerjük

$$x_0 = \frac{\iiint x\,dxdydz}{v}, \qquad y_0 = \frac{\iiint y\,dxdydz}{v}, \qquad z_0 = \frac{\iiint z\,dxdydz}{v}. \tag{2.2.4}$$

Az integrációs határokat a testek mérete szabja meg.

3. §. Az impulzusmomentum tétele

A pontrendszer i-edik pontjának tömege legyen m_i, sebessége $\mathbf{v}_i$. A tér egy O pontjától az i-edik pont felé mutató rádiuszvektor legyen $\mathbf{r}_i$. Ekkor a pontrendszernek az O pontra vonatkoztatott impulzusmomentuma a következő

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}_i, m_i\mathbf{v}_i]. \tag{2.3.1}$$

A pontrendszer egyes pontjaira ható $\mathbf{K}_i$ erők momentumának összege ugyancsak az O pontra vonatkoztatva

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}_i, \mathbf{K}_i] = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}_i, m_i\mathbf{a}_i]. \tag{2.3.2}$$

Fennáll, hogy

$$[\mathbf{r}_i, m_i\mathbf{a}_i] = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_i, m_i\mathbf{v}_i],$$

tehát

$$\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}_i, m_i\mathbf{a}_i] = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}_i, m_i\mathbf{v}_i],$$

vagyis

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{N}}{dt}. \tag{2.3.3}$$

A $\mathbf{K}_i$ erőt ismét bontsuk fel $\mathbf{K}_{i0}$ külső erőre és a többi pont által az i-edik pontra gyakorolt erőre, $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{K}_{ik}$-ra ($\mathbf{K}_{ii} = 0$) és helyettesítsük be K_i következő kifejezését

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_{i0} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{K}_{ik}$$

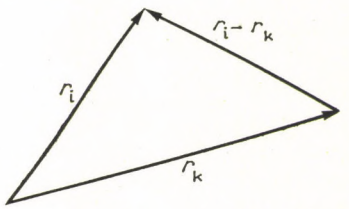
az $\mathbf{M}$ kifejezésébe. Mivel a vektori szorzatra érvényes a disztributivítás törvénye, nyerjük, hogy

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}_i, \mathbf{K}_{i0}] + \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{r}_i, \sum_{k=1}^{n} \mathbf{K}_{ik}\right]. \tag{2.3.4}$$

Az első tag a külső erők forgatómomentuma, a második a rendszer belső erőiből származó forgatómomentum. Általános tapasztalati tétel, hogy ez a tag 0. A rendszerek önmagukra nem gyakorolnak forgatómomentumot. Tehát

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{r}_i, \sum_{k=1}^{n} \mathbf{K}_{ik} \right] = 0 .$$

Ez külön tapasztalati tétel, mely nem vezethető le az axiómákból, csak akkor, ha még azt is feltesszük, hogy a tömegpontok közt ható erők mindig az összekötő egyenes irányában hatnak, vagyis ha ezek az erők centrális erők.



43. ábra. Az $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$ vektor iránya

Ugyanis az *ik* és a *ki* indexű tagok összege, tekintettel a harmadik axiómára, így írható

$$[\mathbf{r}_i, \mathbf{K}_{ik}] + [\mathbf{r}_k, \mathbf{K}_{ki}] = [\mathbf{r}_i, \mathbf{K}_{ik}] + [\mathbf{r}_k, -\mathbf{K}_{ik}] =$$
$$= [\mathbf{r}_i, \mathbf{K}_{ik}] + [-\mathbf{r}_k, \mathbf{K}_{ik}] = [\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k, \mathbf{K}_{ik}]. \qquad (2.3.6)$$

Ha az erők centrálisak, akkor, mint a 43. ábra mutatja, $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$ és $\mathbf{K}_{ik}$ párhuzamosak. Ekkor

$$[\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k, \mathbf{K}_{ik}] = 0 .$$

Mivel a $\sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{r}_i, \sum_{k=1}^{n} \mathbf{K}_{ik} \right]$ összeg csupa ilyen tagpárból áll, az összeg 0-val egyenlő.

Egy összeg azonban eltűnhet akkor is, ha tagjai nem páronként tűnnek el. Tehát az erők centrális volta csupán elégséges, de nem szükséges feltétele annak, hogy a fenti összeg eltűnjön. Ha nem tesszük fel, hogy az erők centrálisak, akkor tapasztalati tényként kell elfogadni, hogy pontrendszerek önmagukra forgatómomentumot nem gyakorolnak. Tehát

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}_i, \mathbf{K}_{i0}]. \qquad (2.3.7)$$

Ha $\mathbf{M} = 0$, akkor $d\mathbf{N}/dt = 0$, vagyis

$$\mathbf{N} = \text{konst.}$$

Tehát ha egy pontrendszerre ható külső erők forgatómomentuma zérus, akkor a rendszer impulzusmomentuma állandó. Ez az *impulzusmomentum* tétele. Komponensekben

$$N_x = \sum_i m_i(y_i\dot{z}_i - z_i\dot{y}_i) = c_1,$$

$$N_y = \sum_i m_i(z_i\dot{x}_i - x_i\dot{z}_i) = c_2,$$

$$N_z = \sum_i m_i(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i) = c_3. \tag{2.3.8}$$

Pl. a Naprendszerre, ha a távoli állócsillagok hatásától eltekintünk, külső erők nem hatnak és így $\mathbf{M} = 0$, tehát a Naprendszer impulzusmomentuma állandó. Erre az állandó impulzusmomentumra merőleges síkot nevezzük a bolygórendszer invariábilis síkjának, mely egy fontos jellemzője a rendszernek.

4. §. Pontrendszerek összenergiája

Szorozzuk meg az i-edik pont mozgásegyenletét $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$ -vel skalárisan és összegezzük az összes tömegpontra, ekkor nyerjük

$$\sum_i m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2}\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\right)^2 = \sum_i \mathbf{K}_{i0}\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} + \sum_i\sum_k \mathbf{K}_{ik}\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}.$$

Integráljunk t_0-tól t-ig

$$\frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\right)_t^2 - \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\right)_{t_0}^2 = \int_{\mathbf{r}_i(t_0)}^{\mathbf{r}_i(t)} \sum_i \mathbf{K}_{i0}\,d\mathbf{r}_i + \int_{\mathbf{r}_i(t_0)}^{\mathbf{r}_i(t)} \sum_i\sum_k \mathbf{K}_{ik}d\mathbf{r}_i. \tag{2.4.1.}$$

A baloldalon áll a kinetikus energia teljes megváltozása, a jobboldalon pedig a külső és belső erők munkája. A belső erők munkája általában nem zérus.

Tegyük fel, hogy a belső erőknek van potenciáljuk. Az i és k pontok között működő $\mathbf{K}_{ik}$ erő potenciálja az i és k közti távolság, r_{ik} függvénye, vagyis függvénye az i-edik és a k-adik pont koordinátáinak. Tehát

$$V_{ik} = V_{ik}(r_{ik}) = V_{ik}\left(\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}\right). \tag{2.4.2}$$

Az i pontra ható erőt úgy kapjuk, hogy a k pont koordinátáit fixnek tekintjük és az i pont koordinátái szerint differenciálunk. Ha tehát a k-adik pont által az i-edik pontra gyakorolt erőt $\mathbf{K}_{ik}$-val jelöljük, akkor

$$\mathbf{K}_{ik} = -\left(\frac{\partial V_{ik}}{\partial x_i}\mathbf{i} + \frac{\partial V_{ik}}{\partial y_i}\mathbf{j} + \frac{\partial V_{ik}}{\partial z_i}\mathbf{k}\right) = -\operatorname{grad}_i V_{ik}. \tag{2.4.3}$$

Hasonlóképpen

$$\mathbf{K}_{ki} = -\mathbf{K}_{ik} = -\left(\frac{\partial V_{ik}}{\partial x_k}\mathbf{i} + \frac{\partial V_{ik}}{\partial y_k}\mathbf{j} + \frac{\partial V_{ik}}{\partial z_k}\mathbf{k}\right) = -\operatorname{grad}_k V_{ik}. \tag{2.4.4}$$

Egy $d\mathbf{r}_i$, ill. $d\mathbf{r}_k$ elmozdulásnál végzett elemi munka tehát

$$\mathbf{K}_{ik}\,\mathrm{d}\mathbf{r}_i + \mathbf{K}_{ki}d\mathbf{r}_k = -\left(\frac{\partial V_{ik}}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial V_{ik}}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial V_{ik}}{\partial z_i}dz_i + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial V_{ik}}{\partial x_k}dx_k + \frac{\partial V_{ik}}{\partial y_k}dy_k + \frac{\partial V_{ik}}{\partial z_k}dz_k\right) = -dV_{ik}.$$

Mivel V_{ik} 6 változó függvénye, V_{ik} teljes megváltozása negatív előjellel adja a $\mathbf{K}_{ik}d\mathbf{r}_i$ és $\mathbf{K}_{ki}d\mathbf{r}_k$ elemi munkák összegét. Tehát

$$\sum_i \sum_k \mathbf{K}_{ik}d\mathbf{r}_i = -\frac{1}{2}\sum_i \sum_k dV_{ik}, \tag{2.4.5}$$

ahol

$$k \neq i\,.$$

Hogy itt a jobboldalon az $\frac{1}{2}$ faktor fellép, azt könnyen beláthatjuk. Ha ugyanis az összegezést pl. az 1-gyel jelzett ponttal kezdjük, vagyis ha $i = 1$, akkor k 2-től n-ig megy, de ha az $i = 2$ pontra térünk át, akkor k már csak 3-tól n-ig megy, az 1 értéket nem veheti fel, mert a V_{12} kölcsönhatást már figyelembe vettük, midőn $i = 1$ és $k = 2$ volt. Hasonlóképpen, ha $i = 3$, akkor $k = 4 \ldots n$ és így tovább. Ha tehát a jobboldalon i-re is és k-ra is összegezünk, még 2-vel osztani kell, nehogy kétszer akkora kölcsönhatási energiát kapjunk.

Ha feltesszük, hogy a külső erőknek is van potenciáljuk, vagyis ha

$$\mathbf{K}_{i0} = -\operatorname{grad} V_{i0},$$

akkor

$$\mathbf{K}_{i0}d\mathbf{r}_i = -dV_{i0}$$

és a (4.1) egyenlet így alakul

$$T - T_0 = -\left[\sum_i V_{i0}\right]_{\mathbf{r}_i(t_0)}^{\mathbf{r}_i(t)} - \frac{1}{2}\left[\sum_i \sum_k V_{ik}\right]_{\mathbf{r}_i(t_0)}^{\mathbf{r}_i(t)}, \tag{2.4.6}$$

ahol T jelenti a kinetikus energiát t időpillanatban, T_0 pedig t_0 időpillanatban. Rövidített jelöléssel nyerjük tehát, hogy

$$T + \sum_i V_{i0} + \frac{1}{2}\sum_i \sum_k V_{ik} = T_0 + \sum_i V_{i0}^{(0)} + \frac{1}{2}\sum_i \sum_k V_{ik}^{(0)} = E = \text{konst.} \tag{2.4.7}$$

Ez az energia tétele pontrendszerek esetében. Ha a külső és belső erőknek van potenciálja, akkor a kinetikus energia, továbbá a külső és belső potenciális energia összege állandó.

5. §. A mozgásegyenletek 10 integrálja

A tömegközéppont egyenletes egyenesvonalú mozgására, az impulzusmomentum állandóságára és az energia megmaradására vonatkozó tételekben 10 integrációs állandó szerepel, melyeket mi $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ és E-vel jelöltünk. Ezért nevezik ezeket a tételeket a mozgásegyenletek 10 integráljának. Tényleg 10 integráció szerepel a 10 állandónak megfelelően: a tömegközéppontra vonatkozó 3 mozgásegyenlet mindegyike kétszer lett integrálva, az impulzusmomentum- és az energiatételénél pedig összesen 4 egyenlet egyszer lett integrálva. A fent nevezett tételekben tehát már legfeljebb csak a koordináták idő szerinti első deriváltjai szerepelhetnek.

HARMADIK FEJEZET

A MECHANIKA ELVEI

1. §. Az egyensúly és mozgás feltételei

A szabad pont egyensúlya

Ha egy anyagi pont valamely inerciarendszerben egyensúlyban van, akkor a ráható erők eredője zérus, vagyis

$$\mathbf{K} = 0,$$

$$K_x = 0,\ K_y = 0,\ K_z = 0. \tag{3.1.1}$$

Tehát bármilyen kis δx, δy, δz elmozdulásnál végzett munka is zérus

$$K_x\delta x + K_y\delta y + K_z\delta z = 0. \tag{3.1.2}$$

Fordítva, ha a végzett munka bármely δx, δy, δz elmozdulásnál 0, akkor az erő komponensei mind zérussal egyenlők, vagyis $\mathbf{K} = 0$. Válasszunk ugyanis egy olyan elmozdulást, amelynél pl. $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z \neq 0$, ekkor

$$K_z\delta z = 0$$

és innen, mivel $\delta z \neq 0$, nyerjük, hogy $K_z = 0$. Hasonlóan lehet kimutatni azt, hogy a másik két erőkomponens is eltűnik.

Tehát az egyensúly így is kifejezhető: a pont egyensúlyban van, ha a nyugalmi helyzetéből történő *bármely* kis elmozdulásnál a végzett munka zérus.

Kényszernek alávetett pont egyensúlya

Az egyensúly fent talált feltételei kényszernek alávetett pontra is érvényesek, csakhogy a szabad erőkhöz hozzá kell adni a $\mathbf{K}_1$ kényszererő komponenseit. Tehát az egyensúly feltételei

$$K_x + K_{1x} = 0,\quad K_y + K_{1y} = 0,\quad K_z + K_{1z} = 0, \tag{3.1.3}$$

vagy

$$(K_x + K_{1x})\delta x + (K_y + K_{1y})\delta y + (K_z + K_{1z})\delta z = 0, \tag{3.1.4}$$

ahol δx, δy, δz ismét *bármely kis* elmozdulás komponensei.

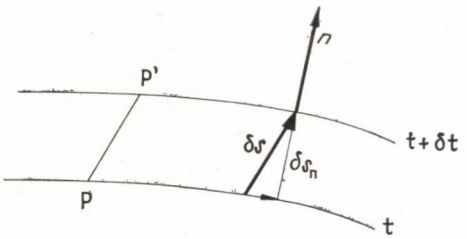
A kényszernek alávetett pont egyensúlyának feltételeit oly alakban is kifejezhetjük, amelyben a kényszererők már nem lépnek fel, de az elmozdulás csak a kényszernek megfelelően történhet.

Legyen a kényszerfeltétel az, hogy a pont a $\phi(x, y, z) = 0$ felületen mozog, vagyis a pont koordinátáinak ki kell elégítenie a

$$\phi(x, y, z) = 0$$

egyenletet. Legyenek δx, δy, δz a kényszerrel megegyezésben levő elmozdulás komponensei, vagyis az (x, y, z) pont és az $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ pont is rajta van a felületen, tehát kielégíti a $\phi = 0$ egyenletet. Ekkor

$$\phi(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = 0. \tag{3.1.5}$$



44. ábra. Mozgó kényszerfelület

Taylor-sorba fejtve

$$\phi(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = \phi(x, y, z) + \frac{\partial \phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\delta z + \ldots = 0.$$

Ha a magasabb rendű kicsi tagoktól eltekintünk, nyerjük

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\delta z = 0, \tag{3.1.6}$$

tehát δx, δy, δz nem függetlenek egymástól.

Az időtől független (és súrlódásmentes) kényszerek esetében a kényszererők nem végeznek munkát, mert merőlegesek a felületre, az elmozdulásoknak pedig nincsen a felület normálisa irányába eső komponensük. Ha azonban a kényszer időtől függő, vagyis a felület mozog, akkor az elmozdulásnak általában van komponense a felület normálisának irányában, vagyis a kényszererők munkát végeznek. Ez a munka annál kisebb, minél nagyobb sebességgel történik a δx, δy, δz elmozdulás, mert annál kisebb az elmozdulásnak a normális, vagyis a kényszererő irányába mutató komponense. Végtelen nagy sebesség határesetében (amidőn a felület állónak tekinthető) az elmozdulás normális komponense és ezzel együtt a kényszererők munkája is zérus. Ezentúl δx, δy, δz alatt ilyen *virtuális elmozdulást* értünk, tehát egy olyan elmozdulást, amely végtelen nagy sebességgel történik és a kényszerfeltételeket kielégíti.

Ilyen virtuális elmozdulásoknál a kényszererő munkája zérus, vagyis

$$K_{1x}\delta x + K_{1y}\delta y + K_{1z}\delta z = 0. \tag{3.1.7}$$

Ha az (1.4) egyenletbe egy virtuális elmozdulás komponenseit írjuk és belőle a fenti egyenletet levonjuk, akkor nyerjük:

$$K_x\delta x + K_y\delta y + K_z\delta z = 0. \tag{3.1.8}$$

Tehát (súrlódásmentes) kényszernek alávetett pont egyensúlyának feltétele az, hogy a szabaderők munkája bármely virtuális elmozdulásnál 0 legyen. Ez a *virtuális munka elve.*

A szabaderők munkájának eltűnéséből virtuális elmozdulás esetén nem következtethetünk a szabaderő eltűnésére, mert δx, δy és δz nem függetlenek egymástól. Pl. egy vízszintes lapra helyezett test nyugalomban van, jóllehet hat rá a nehézségi erő, vagyis egy szabad erő.

Adjuk hozzá (1.8)-hoz az (1.6) egyenlet λ-szorosát, ahol λ egyelőre határozatlan faktor, ekkor nyerjük, hogy

$$\left(K_x + \lambda\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\delta x + \left(K_y + \lambda\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\delta y + \left(K_z + \lambda\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\delta z = 0. \tag{3.1.9}$$

Az, hogy az elmozdulás komponensei nem függetlenek, azt jelenti, hogy az egyik, pl. δx a másik kettővel az (1.6) egyenlet alapján kifejezhető, vagyis csak két elmozduláskomponens, pl. δy, δz választható meg szabadon.

Válasszuk λ-t úgy, hogy a nem független elmozduláskomponens, δx együtthatója eltűnjön, tehát

$$K_x + \lambda\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0.$$

λ ezzel az egyenlettel van definiálva. Fenti egyenletünk ekkor a következő lesz:

$$\left(K_y + \lambda\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\delta y + \left(K_z + \lambda\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\delta z = 0.$$

Mivel δy és δz függetlenek, együtthatóik eltűnnek, vagyis

$$K_y + \lambda\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0,$$

$$K_z + \lambda\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0.$$

Tehát, ha a kényszerfeltétel $\phi = 0$, akkor az egyensúly feltételei

$$K_x + \lambda\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \qquad K_y + \lambda\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0, \qquad K_z + \lambda\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0. \tag{3.1.10}$$

E három egyenlet közül az elsőt λ megfelelő választásával nyertük, a másik kettő pedig abból következik, hogy (1.9)-ben δy és δz egymástól független elmozdulás-komponensek szerepelnek.

Ha két kényszerfeltétel van

$$\phi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0,$$

akkor teljesen hasonló módon nyerjük, hogy az egyensúly feltételei

$$\begin{aligned} K_x + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0, \\ K_y + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0, \\ K_z + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Ha ezeket az egyenleteket összehasonlítjuk (1.3)-mal, akkor látjuk, hogy a kényszererők komponensei

$$\begin{aligned} K_{1x} &= \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ K_{1y} &= \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ K_{1z} &= \lambda \frac{\partial \phi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{aligned}$$

amint ezt már a kényszererők tárgyalásánál láttuk.

A szabad pont mozgása

A mozgásegyenletek szerint

$$\mathbf{K} = m\ddot{\mathbf{r}},$$

$$K_x = m\ddot{x}, \quad K_y = m\ddot{y}, \quad K_z = m\ddot{z}.$$

Ezek az egyenletek így is írhatók

$$K_x - m\ddot{x} = 0, \quad K_y - m\ddot{y} = 0, \quad K_z - m\ddot{z} = 0. \tag{3.1.12}$$

Ezek az egyenletek azt fejezik ki, hogy a $\mathbf{K}$ szabad erő és a $-m\ddot{\mathbf{r}}$ erő egymással egyensúlyban van. A $-m\ddot{\mathbf{r}}$ erőt nevezzük *inerciaerő*nek. Összehasonlítva a mozgás feltételeit kifejező egyenleteket az egyensúly feltételeivel, azt látjuk, hogy az

előbbieket az utóbbiakból kapjuk, ha a szabad erőhöz hozzáadjuk az inerciaerőt. Ez a *d'Alembert-féle elv*, amely a mechanika független alaptörvényének is tekinthető, mert belőle a mozgásegyenletek egyértelműen leszármaztathatók.

Kényszernek alávetett pont mozgása

D'ALEMBERT elve szerint a kényszer esetére levezetett egyensúly feltétele $\mathbf{K} + \lambda \operatorname{grad} \phi = 0$ helyébe a $\mathbf{K} - m\ddot{\mathbf{r}} + \lambda \operatorname{grad} \phi = 0$ egyenlet lép, amely a mozgás feltételét adja. Komponensekben

$$m\ddot{x} = K_x + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

$$m\ddot{y} = K_y + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y}, \tag{3.1.13}$$

$$m\ddot{z} = K_z + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Pontrendszerek egyensúlya

Legyen adva egy n pontból álló rendszer. Az egyes pontok koordinátái legyenek $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$, az i-edik pontra ható erő legyen $\mathbf{K}_i$. Teljesen hasonló módon, mint egy pont esetében, kapjuk, hogy az egyensúly feltétele

$$\sum_{i=1}^{n} (K_{ix}\delta x_i + K_{iy}\delta y_i + K_{iz}\delta z_i) = 0, \tag{3.1.14}$$

ahol δx_i, δy_i, δz_i az i-edik pont 3 virtuális elmozduláskomponense.

Vagyis a rendszer bármely virtuális elmozdulásánál végzett munka zérus. Szabad pontrendszer esetében a virtuális elmozdulások tetszőlegesek, kényszer esetében pedig oly elmozdulások, amelyek a kényszer feltételeit kielégítik és végtelen nagy sebességgel történnek.

Szabad pontrendszer esetében innen következik, hogy

$$\mathbf{K}_i = 0,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

vagyis

$$K_{ix} = 0, \quad K_{iy} = 0, \quad K_{iz} = 0.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Ezek után térjünk rá arra az esetre, amikor kényszerfeltételek is vannak. Legyenek ezek a következők

$$\phi_j(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0. \tag{3.1.15}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k), \; k \leqq 3n.$$

Ez azt jelenti, hogy a $3n$ számú koordináta és az idő között k számú egyenlet áll fenn.

A virtuális elmozdulások komponensei közti összefüggéseket teljesen hasonlóan állapíthatjuk meg, mint egy pont esetében.

$$\phi_j(\ldots, x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i, \ldots) = \phi_j(\ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} \delta y_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_j}{\partial z_i} \delta z_i + \ldots = 0.$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k)$$

Magasabb rendű kicsi tagok elhanyagolásával nyerjük, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \phi_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0.$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k) \qquad (3.1.16)$$

Ez k számú egyenlet a $3n$ elmozduláskomponens között. A független elmozduláskomponensek száma tehát $3n - k$. Ezekkel a többi kifejezhető. Szorozzuk meg az (1.16) egyenleteket rendre $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$-val és adjuk hozzá az (1.4) egyenlethez. Ekkor nyerjük

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(K_{ix} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \right) \delta x_i + \left(K_{iy} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y_i} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial y_i} \right) \delta y_i + \right. \\ \left. + \left(K_{iz} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z_i} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial z_i} \right) \delta z_i \right\} = 0. \qquad (3.1.17)$$

Ennek az összegnek eltűnéséből még nem következik az elmozduláskomponensek együtthatóinak eltűnése, mert ezek a komponensek, mint láttuk, nem függetlenek egymástól, hanem közülük k számú a többi függvénye. A k számú λ_j faktort ellenben választhatjuk úgy, hogy a k nem független elmozduláskomponens együtthatója eltűnjön. Ezek az egyenletek egyúttal a k számú λ_j faktort is meghatározzák. A többi $3n - k$ elmozduláskomponens egymástól független lévén, a fenti összeg (melyben a nem független elmozduláskomponensek, mivel együtthatóik eltűnnek, már nem szerepelnek) csak úgy tűnhet el, ha az elmozduláskomponensek együtthatói eltűnnek. Tehát a kényszernek alávetett pontrendszer egyensúlyának feltételei:

$$K_{ix} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} = 0,$$

$$K_{iy} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y_i} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial y_i} = 0, \qquad (3.1.18)$$

$$K_{iz} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z_i} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial z_i} = 0.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Megjegyzzük, hogy ennek a $3n$ egyenletnek az eredete nem azonos, k számú a $\lambda_j (j = 1, 2, \ldots, k)$ faktorok megfelelő választásából, a többi pedig (1.17)-ből következik.

Pontrendszerek mozgása

D'ALEMBERT elve értelmében a mozgás feltételeit az egyensúly feltételeiből úgy kapjuk, hogy a szabad erőkhöz hozzáadjuk az inerciaerőket. Pontrendszerre tehát D'ALEMBERT elve a következő alakú

$$\sum_{i=1}^{n} \{(K_{ix} - m_i \ddot{x}_i)\, \delta x_i + (K_{iy} - m_i \ddot{y}_i)\, \delta y_i + (K_{iz} - m_i \ddot{z}_i)\, \delta z_i\} = 0 \qquad (3.1.19)$$

Ha nincsen kényszer, akkor az elmozduláskomponensek egymástól függetlenek, ezért

$$\mathbf{K}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i ,$$

vagyis

$$K_{ix} = m_i \ddot{x}_i ,$$

$$K_{iy} = m_i \ddot{y}_i ,$$

$$K_{iz} = m_i \ddot{z}_i .$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Ha ismét

$$\phi_j = 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k)$$

$$k \leqq 3n$$

kényszerek vannak jelen, akkor az elmozdulás komponenseire ismét k számú egyenletet nyerünk, mégpedig ugyanazokat, amelyeket az egyensúly tárgyalásánál felírtunk. Ezeket ismét rendre $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ faktorokkal szorozva hozzáadjuk (1.19)-hez, amely egyenletből azután teljesen hasonló gondolatmenet útján, mint előbb, nyerjük a következő egyenleteket

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= K_{ix} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} , \\ m_i \ddot{y}_i &= K_{iy} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y_i} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial y_i} , \\ m_i \ddot{z}_i &= K_{iz} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z_i} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial z_i} . \end{aligned} \qquad (3.1.20)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Ezek a pontrendszer mozgásegyenletei kényszer esetére. Ezeket nevezzük *elsőfajú Lagrange-féle egyenletek*nek. Ezekhez járul még k számú feltételi egyenlet

$$\phi_j = 0.$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k)$$

Ez összesen $3n + k$ egyenlet a $3n + k$ ismeretlen meghatározására, amelyek között $3n$ számú koordináta és k számú λ_j faktor szerepel.

2. §. Néhány egyszerű fogalom a variációszámítás köréből

A következőkben variációs elvekkel fogunk megismerkedni, ezért szükségünk van egyes fogalmakra a variációszámítás köréből. Egy mennyiséget variálni annyit tesz, mint azt a mennyiséget megváltoztatni. x-et variálni pl. annyit jelent, hogy x-et megváltoztatjuk, mondjuk δx-szel. Legyen adva egy f mennyiség mint x függvénye

$$f = f(x).$$

Gyakran érdekel bennünket f megváltozása, ha x megváltozik δx-szel. f megváltozását a következőképpen nyerjük

$$f(x + \delta x) - f(x) = f'(x)\delta x + \frac{1}{2} f''(x)\,(\delta x)^2 + \ldots \qquad (3.2.1)$$

Ha δx kicsi, akkor elegendő a jobboldalon az első tagot figyelembe venni és nyerjük

$$f(x + \delta x) - f(x) = f'(x)\delta x.$$

Ezt nevezzük f első variációjának vagy egyszerűen variációjának és a következőképpen jelöljük

$$f(x + \delta x) - f(x) = f'(x)\delta x = \delta f. \qquad (3.2.2)$$

Hogy az f függvénynek az x helyen szélső értéke legyen, ahhoz szükséges, hogy $f'(x) = 0$ legyen, vagyis hogy

$$\delta f = 0.$$

Tehát annak a szükséges feltétele, hogy $f(x)$-nek az x helyen szélső értéke legyen, úgy is kifejezhető, hogy $f(x)$-nek az x helyen az első variációja eltűnik.

A fenti *Taylor*-sor második tagját, az $\frac{1}{2} f''(x)(\delta x)^2$ tagot szokás második variációnak nevezni. Mivel $(\delta x)^2$ pozitív, ennek a tagnak, vagyis a második variációnak előjele $f''(x)$ előjelétől függ. Azt pedig tudjuk, hogy $f''(x)$ előjele határozza meg, hogy az x helyen maximum van-e vagy minimum. Ha $f''(x) > 0$, minimum van, ha pedig $f''(x) < 0$, maximum van az x helyen. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a második variáció előjele határozza meg azt, hogy (ha az első variáció az

x helyen eltűnik) maximum van-e vagy minimum. Azzal az esettel itt nem foglalkozunk midőn $f''(x) = 0$, vagyis midőn a második variáció eltűnik.

Mindez természetesen átvihető többváltozós függvényekre is. Legyen adva pl.

$$f = f(x, y, z),$$

ahol x, y, z független változók. Ekkor az első variáció

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z. \tag{3.2.3}$$

Ha $\delta f = 0$, az azt jelenti, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

mert

$$\delta x, \ \delta y, \ \delta z$$

tetszőleges lehet.

Gyakran fogunk találkozni integrálok variációjával. Legyen pl.

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Ha az integrandust megváltoztatjuk $\delta f(x)$-szel, akkor az integrál variációja

$$\delta I = \int_a^b (f + \delta f)dx - \int_a^b f dx = \int_a^b \delta f(x)dx. \tag{3.2.4}$$

Bonyolultabb az eset, ha az integrandus a variálandó $f(x)$ függvénynek valamilyen $L(f)$ kifejezése. Ekkor L első variációja az x helyen (2.2) analógiájára

$$\frac{dL}{df}\delta f(x)$$

lesz és az

$$I = \int_a^b L(f)dx$$

integrál variációja pedig

$$\delta I = \int_a^b \frac{dL}{df}\delta f\, dx. \tag{3.2.5}$$

3. §. A virtuális munka elve mint variációs elv

Szabad pontrendszer esetében az egyensúly feltétele az, hogy a virtuális munka 0, vagyis hogy

$$\sum_{i=1}^{n} (K_{ix}\delta x_i + K_{iy}\delta y_i + K_{iz}\delta z_i) = 0. \tag{3.3.1}$$

Ha az egyes pontokra ható $\mathbf{K}_i$ erőknek van potenciálja, és az V_i, akkor az összpotenciál

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i .$$

$$K_{ix} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad K_{iy} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad K_{iz} = -\frac{\partial V}{\partial z_i}, \tag{3.3.2}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

tehát

$$K_{ix}\delta x_i + K_{iy}\delta y_i + K_{iz}\delta z_i = -\delta V_i,$$

$$\delta V = \sum_{i=1}^{n} \delta V_i . \tag{3.3.3}$$

Tehát a (3.1) egyenlet, amely a virtuális munka eltűnését fejezi ki, így is írható

$$\delta V = 0,$$

vagyis az egyensúlyi helyzetben a szabad pontrendszer potenciális energiája szélső értéket vesz fel. Ez nemcsak szabad, hanem kényszernek alávetett pontrendszerre is érvényes, ha $\mathbf{K}_i$-nek ($i = 1, 2, \ldots, n$) van potenciálja és ha a variáció úgy történik, hogy a kényszerfeltételeket kielégíti és a δx, δy, δz elmozdulások végtelen nagy sebességgel történnek, vagyis virtuálisak.

4. §. Az egyensúly stabilitásának feltétele

Bármely rendszer stabilis egyensúlyi helyzetében a potenciális energia *minimum*. Ez az egyensúly stabilitásának *Dirichlet*-féle feltétele. Hogy egy egyensúly stabilis-e vagy labilis, azt a következőképpen jellemezhetjük. Ha a rendszer stabilis egyensúlyban van, akkor abból kissé kimozdítva annak környezetében marad és bizonyos idő elteltével oda visszajut. Pl. egy inga egyensúlyi helyzete az, midőn a tömegpont a fonálon lefelé lóg. A labilis egyensúlyi helyzet ezzel szemben egy oly helyzete a rendszernek, amelyben ugyan szintén nyugalomban lehet, de amelyből kimozdítva a rendszer nem marad az egyensúlyi helyzet környezetében, hanem attól eltávolodik. Ilyen labilis egyensúlyban van pl. egy merev fonálon, drótszálon felfüggesztett tömegpont, vagyis egy merev inga függőlegesen felfelé irá-

nyuló helyzetben. Labilis egyensúlyi helyzetben a potenciális energiának *maximuma* van.

A *Dirichlet*-féle feltétel helyességét könnyen beláthatjuk. Legyen ugyanis egy bizonyos egyensúlyi helyzetben a rendszer potenciális energiája minimum és jelöljük ezt V_0-lal. Adjunk a rendszernek egy kis kinetikus energiát, T_0-t, azáltal, hogy kimozdítjuk egyensúlyi helyzetéből, ekkor

$$T + V = T_0 + V_0, \tag{3.4.1}$$

ahol T és V a rendszer kinetikus és potenciális energiája a kimozdítás után. Ha V_0 minimum, akkor a kimozdítás után csak nőhet, de mivel $T + V = T_0 + V_0$ = konstans, T_0-nak, vagyis v-nek, a rendszer sebességének, csökkenni kell, így a rendszer az egyensúlyi hely környezetében marad, attól nem távolodik el nagyon, tehát az egyensúly stabilis.

Legyen egy másik egyensúlyi helyzetben V-nek maximuma, jelöljük azt V_1-gyel, adjunk a rendszernek egy kis kinetikus energiát, T_1-et, azáltal, hogy kitérítjük egyensúlyi helyzetéből. Ekkor ismét

$$T + V = T_1 + V_1,$$

ahol T és V jelentése ugyanaz, mint az előbb. Mivel V_1 maximum, V csak csökkenhet, tehát a kapott T kinetikus energia, vagyis a rendszer sebessége is növekszik, következésképpen a rendszer az egyensúlyi helytől távolodik és oda általában nem tér vissza. Ez az egyensúlyi helyzet tehát labilis.

5. §. A Hamilton-féle elv

Definiáljuk a következő függvényt

$$L = T - V, \tag{3.5.1}$$

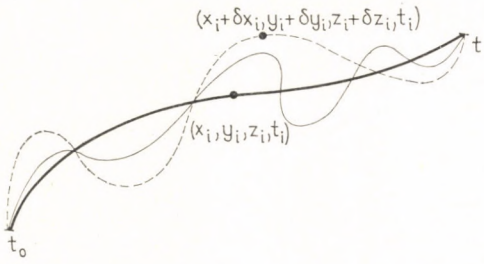
ahol T egy tömegpont kinetikus, V pedig a potenciális energiája. Képezzük a következő integrált

$$I = \int_{t_0}^{t} L dt, \tag{3.5.2}$$

45. ábra. Egy tömegpont pályája

t_0 és t a pálya két végpontjának megfelelő idő. Képezzük I-t az ún. valóságos pályára, vagyis állapítsuk meg a tényleges pályán való mozgás közben az egyes Δt időintervallumokban L értékét, képezzük az $L\Delta t$ szorzatokat, adjuk őket össze és térjünk át Δt-vel a nulla határra.

Ezután változtassuk meg a valóságos pályát úgy, hogy a pálya egyes koordinátáit a két határpont között variáljuk, de a határpontokat hagyjuk változatlanul. Az időt nem variáljuk, vagyis a meg nem változtatott és a megváltoztatott pontba



46. ábra. A pálya variációja, ha a kezdő- és végpontot nem variáljuk

a tömegpont ugyanazon időben jut. A megváltoztatott pályák bármelyikére szintén képezhetjük az I integrált. HAMILTON elve szerint, ha összehasonlítjuk a megváltoztatott pályákon számított I értékeket a valóságos pályán talált I-vel, azt találjuk, hogy I-nek a valóságos pályán felvett értéke szélső érték. Ezt kifejezhetjük úgy is, hogy

$$\delta \int_{t_0}^{t} L dt = 0, \tag{3.5.3}$$

vagyis I első variációja eltűnik, ha a variálás a fenti módon történik. Ekkor a végpontokon

$$\delta x = \delta y = \delta z = 0,$$

közben

$$\delta x,\ \delta y,\ \delta z$$

tetszőleges. Az időt sehol nem variáljuk, vagyis $\delta t = 0$, tehát a tömegpont az (x_i, y_i, z_i) pontba ugyanazon időpillanatban jut, mint a megváltoztatott és ennek megfelelő $(x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i)$ pontba.

A variációs elveknél mindig pontosan meg kell mondani, hogy a variáció hogyan történik, mert a különböző módon való variálással különböző variációs elvekhez jutunk.

Ezekután vezessük le a *Hamilton-elv*et. Állapítsuk meg először is a sebesség, ill. komponensei variációját, amelyekre a *Hamilton*-elv levezetésénél szükségünk

lesz egy pontrendszer i-edik tömegpontjára vonatkozóan

$$\delta\dot{x}_i = (\dot{x}_i)_{\text{megv.}} - (\dot{x}_i)_{\text{eredeti}},$$

$$(\dot{x}_i)_{\text{megv.}} = \frac{d(x_i + \delta x_i)}{dt} = \dot{x}_i + \frac{d\delta x_i}{dt},$$

$$(\dot{x}_i)_{\text{eredeti}} = \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i \ ,$$

$$\delta\dot{x}_i = \frac{d\delta x_i}{dt}.$$

$\delta\dot{x}_i$ helyébe írhatjuk $\delta\dfrac{dx_i}{dt}$ – t, tehát

$$\delta\frac{dx_i}{dt} = \frac{d\delta x_i}{dt}. \tag{3.5.4}$$

Tehát a sebesség variációja egyenlő a koordináta variációjának idő szerinti deriváltjával, vagyis a δ és $\dfrac{d}{dt}$ operáció felcserélhető, feltéve, hogy az időt nem variáljuk.

Ezek után rátérhetünk egy n tömegpontból álló pontrendszer esetében a *Hamilton*-elv levezetésére a *d'Alembert*-féle elvből, amely szerint

$$\sum_{i=1}^{n} \{(K_{ix} - m_i\ddot{x}_i)\,\delta x_i + (K_{iy} - m_i\ddot{y}_i)\,\delta y_i + (K_{iz} - m_i\ddot{z}_i)\,\delta z_i\} = 0\,,$$

vagy

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,(\ddot{x}_i\delta x_i + \ddot{y}_i\delta y_i + \ddot{z}_i\delta z_i) = \sum_{i=1}^{n} (K_{ix}\delta x_i + K_{iy}\delta y_i + K_{iz}\delta z_i)\,. \tag{3.5.5}$$

Továbbá fennáll

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}_i\delta x_i) = \ddot{x}_i\delta x_i + \dot{x}_i\frac{d\delta x_i}{dt},$$

$$\ddot{x}_i\delta x_i = \frac{d}{dt}(\dot{x}_i\delta x_i) - \dot{x}_i\frac{d\delta x_i}{dt}.$$

Az (5.4) reláció felhasználásával nyerjük

$$\ddot{x}_i\delta x_i = \frac{d}{dt}(\dot{x}_i\delta x_i) - \dot{x}_i\delta\dot{x}_i = \frac{d}{dt}(\dot{x}_i\delta x_i) - \delta\left(\frac{1}{2}\dot{x}_i^2\right).$$

Hasonlóképpen

$$\ddot{y}_i \delta y_i = \frac{d}{dt}(\dot{y}_i \delta y_i) - \delta\left(\frac{1}{2}\dot{y}_i^2\right),$$

$$\ddot{z}_i \delta z_i = \frac{d}{dt}(\dot{z}_i \delta z_i) - \delta\left(\frac{1}{2}\dot{z}_i^2\right).$$

Ezeket az (5.5) egyenlet baloldalába beírva

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt}(\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i) - \sum_{i=1}^{n} \delta \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (K_{ix} \delta x_i + K_{iy} \delta y_i + K_{iz} \delta z_i),$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt}(\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i) = \delta T + \delta A.$$

Ha van potenciál, akkor $\delta A = -\delta V$, tehát

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i) = \delta(T - V) = \delta L. \tag{3.5.6}$$

Szorozzunk dt-vel és integráljunk t_0-tól t-ig, ekkor nyerjük

$$\int_{t_0}^{t} \delta L dt = \left[\sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i) \right]_{t_0}^{t}.$$

Mivel a variálási feltétel szerint δx_i, δy_i, δz_i a határokon, t_0-nál és t-nél 0-val egyenlők,

$$\int_{t_0}^{t} \delta L dt = 0. \tag{3.5.7}$$

A *Hamilton*-elvben a δ jel az integrálra, itt pedig az integrandusra vonatkozik. Egy integrál az integrandustól és a határoktól függ. Tehát általában

$$\delta \int_{t_0}^{t} L dt = \int_{t_0 + \delta t_0}^{t + \delta t} (L + \delta L) dt - \int_{t_0}^{t} L dt.$$

Amint látható, ez általában nem egyenlő $\int_{t_0}^{t} \delta L dt$-vel, mert a határokat is variáltuk.

A *Hamilton*-elvnél azonban a variálás úgy történik, hogy δt mindenütt 0, tehát

a határok nem változnak, azaz

$$\delta \int_{t_0}^{t} L dt = \int_{t_0}^{t} (L + \delta L) dt - \int_{t_0}^{t} L dt = \int_{t_0}^{t} L dt + \int_{t_0}^{t} \delta L dt - \int_{t_0}^{t} L dt = \int_{t_0}^{t} \delta L dt .$$

Tehát (5.7) egyenletünk helyébe írhatjuk, hogy

$$\delta \int_{t_0}^{t} L dt = 0,$$

vagyis levezettük a *Hamilton*-elvet.

A *Hamilton*-elv a mechanika alaptörvényeinek új kifejezése, segítségével a mozgás éppen úgy meghatározható mint pl. a *Newton*-féle axiómákból vagy a *d'Alembert*-féle elvből.

A mozgás feltételeinek eddig megismert alakjai mind egy bizonyos koordinátarendszerre vonatkozóan mondották ki a mechanika alaptörvényeit. Ezzel szemben a *Hamilton*-elv nem vonatkozik egy speciális koordinátarendszerre és ezért különösen alkalmas a mozgásegyenletek felállítására tetszés szerinti, nemcsak derékszögű, hanem ferdeszögű vagy görbevonalú koordinátarendszerekben is. Ilyen tetszés szerinti koordinátarendszerekben érvényes mozgásegyenletekhez úgy juthatunk el, hogy kifejezzük ebben a rendszerben T-t és V-t, képezzük L-et, azután a *Hamilton*-elvből következtetünk arra, hogy milyen mozgásegyenletek érvényesek. Ezt a következtetést nem szükséges minden speciális esetben külön elvégezni, hanem a *Hamilton*-elvből teljes általánosságban következtethetünk a mozgásegyenletek alakjára minden olyan koordinátarendszerben, amelyben a pont vagy pontrendszer egyértelműen meg van határozva. Mielőtt erre rátérünk, még néhány fontos fogalommal kell megismerkednünk.

6. §. Általános koordináták

Valamely n pontból álló rendszer konfigurációjának meghatározására $3n$ számú adatra van szükségünk, ugyanis minden egyes pont 3 derékszögű koordinátával van meghatározva

$$x_1, y_1, z_1, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, x_n, y_n, z_n.$$

A derékszögű koordináták helyett választhatunk más $3n$ számú adatot, ha ezekből az előbbiek egyértelműen meghatározhatók. Tehát a fenti koordináták helyett bevezethetjük a következőket

$$q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{3n},$$

ha az x, y, z-k a q-knak egyértelmű függvényei, vagyis ha

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \ldots, q_{3n}), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \ldots, q_{3n}), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \ldots, q_{3n}). \\ (i &= 1, 2, \ldots, n) \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

Pl. Egy pont 3 derékszögű koordinátája, x, y, z helyett bevezethetünk polárkoordinátákat, r, ϑ, ϕ, amelyek szintén egyértelműen határozzák meg a pont helyzetét és amelyekkel a derékszögű koordináták a következőképpen fejezhetők ki

$$\begin{aligned} x &= x(r, \vartheta, \phi) = r \sin \vartheta \cos \phi, \\ y &= y(r, \vartheta, \phi) = r \sin \vartheta \sin \phi, \\ z &= z(r, \vartheta, \phi) = r \cos \vartheta. \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

Ha az n pontból álló rendszer pontjainak $3n$ számú koordinátája között k számú kényszerfeltétel áll fenn, amelyek a következő, egymástól független egyenletekkel vannak kifejezve

$$\begin{aligned} \phi_j(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) &= 0, \\ (j &= 1, 2, \ldots, k) \end{aligned}$$

akkor ezeknek az összefüggéseknek segítségével a $3n$ számú koordináta közül k számú a többivel kifejezhető, vagyis eliminálható, tehát a független koordináták száma $3n-k$. Ehelyett a $3n-k$ számú független derékszögű koordináta helyett más $3n-k$ számú adat, $q_1, q_2, \ldots, q_{3n-k}$ paraméter is választható, ha azok abban a tartományban, amelyben a mozgást vizsgáljuk, egyértelműen határozzák meg a derékszögű koordinátákat, vagyis ha

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \ldots, q_f), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \ldots, q_f), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \ldots, q_f), \\ (i &= 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

ahol

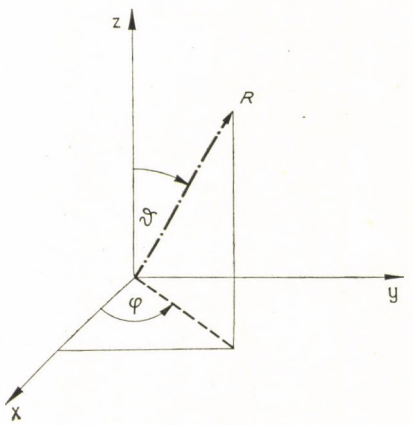
$$f = 3n - k.$$

Ezeket a q_i paramétereket nevezzük általános koordinátáknak vagy *Lagrange*-féle koordinátáknak. Ezek tehát egymástól független paraméterek, amelyek a rendszer

helyzetét egyértelműen meghatározzák. A k számú kényszerfeltételt azáltal, hogy az n pontból álló rendszer konfigurációját $f = 3n - k$ számú paraméterrel adtuk meg, már figyelembe vettük.

Pl. legyen adva egy pont, amely egy gömbfelületen mozoghat, vagyis derékszögű koordinátái között a következő összefüggés áll fenn

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$



47. ábra. Térbeli polárkoordináták

Ekkor a pont helyzetét már csak két független paraméter, ϑ és ϕ határozza meg. Tehát a 3 derékszögű koordinátát most mint két független paraméter, ϑ és ϕ függvénye gyanánt fejezhetjük ki. Mégpedig figyelembe véve, hogy

$$r = R,$$

$$x = R \sin \vartheta \cos \phi,$$

$$y = R \sin \vartheta \sin \phi,$$

$$z = \mathrm{R} \cos \vartheta,$$

ahol R már állandó.

7. §. Holonom és nem holonom kényszerek

Az eddig mondottak arra az esetre vonatkoznak, midőn a kényszert a következő egyenletek fejezik ki

$$\phi_j(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0. \qquad (3.7.1)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k)$$

Ha a kényszert a koordináták között fennálló ilyen véges egyenletek adják meg, akkor a kényszert *holonom*nak nevezzük.

A kényszer azonban más egyenletekkel is kifejezhető, mégpedig megadható a koordináták megváltozása közti összefüggésekkel, vagyis a következő alakú egyenletekkel

$$a_{1j}\delta x_1 + b_{1j}\delta y_1 + c_{1j}\delta z_1 + \ldots + a_{nj}\delta x_n + b_{nj}\,\delta y_n + c_{nj}\delta z_n = 0\,,$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k) \tag{3.7.2}$$

ahol az a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} együtthatók még a koordináták függvényei lehetnek. A baloldalt *Pfaff*-féle formulának szokás nevezni.

A (7.1) egyenleteket mindig elő lehet állítani ilyen alakban *Taylor*-sorba fejtéssel

$$\phi_j(\ldots, x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i, \ldots) = \phi_j(\ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i}\delta y_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_j}{\partial z_i}\delta z_i + \ldots = 0$$

(δx_i, δy_i, δz_i a kényszernek megfelelő elmozdulások). A magasabb rendű tagok elhagyásával nyerjük

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \phi_j}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0\,.$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k) \tag{3.7.3}$$

Ennek fordítottja nem mindig lehetséges, vagyis egy *Pfaff*-féle formula nem mindig állítható elő $\phi_j = 0$ alakban, mert nem mindig található olyan függvény, amelynek az a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} együtthatók a parciális deriváltjai x_i, y_i, z_i szerint, vagyis nem mindig található olyan függvény, melynek egy *Pfaff*-féle kifejezés a teljes megváltozása. Ha található ilyen függvény, akkor a *Pfaff*-féle kifejezést integrálhatónak nevezzük, ellenkező esetben nem integrálhatónak. Ha a kényszert ilyen nem integrálható *Pfaff*-féle kifejezés adja meg, akkor a kényszer nem holonom. Ilyen nem holonom kényszer már igen egyszerű esetekben is előfordul, pl. egy gömbnek csúszás nélkül való gördülése nem holonom kényszert jelent.

A következőkben csak holonom kényszerekkel foglalkozunk.

8. §. A Lagrange-féle másodfajú egyenletek

Feltesszük, hogy a rendszer koordinátái f számú független paraméter függvényei gyanánt állíthatók elő. Mint láttuk, ezek a paraméterek a rendszer általános koordinátái. Legyenek ezek

$$q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_f.$$

Ezeknek idő szerinti deriváltjai,

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_i, \ldots, \dot{q}_f,$$

az általános sebességek.

Írjuk fel ezekkel a koordinátákkal a mozgásegyenleteket, amelyeket *Lagrange*-féle másodfajú egyenleteknek nevezünk. Ezeket vagy úgy kaphatjuk meg, hogy a mozgásegyenletek eddig ismert alakját transzformáljuk, vagy pedig úgy, hogy a *Hamilton*-elvből indulunk ki és megvizsgáljuk, mi a feltétele annak, hogy az ott megadott integrál variációja eltűnjön. Kövessük az utóbbi utat.

Évégből első feladatunk, hogy V-t és T-t, mint a q_i-k ill. $\dot{q}_i$-ok függvényét fejezzük ki. Ha a derékszögű koordinátákat, mint a q_i-k függvényét kifejezzük és V-ben az x_i-ket a megfelelő kifejezésekkel, amelyekben már csak a q_i-k szerepelnek, helyettesítjük, akkor V-t mint a q_i-k függvényét kapjuk

$$V = V(q_1, q_2, \ldots, q_f).$$

A kinetikus energia, T szintén egyszerűen fejezhető ki a q_i-vel és a $\dot{q}_i$-vel

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2). \tag{3.8.1}$$

Számítsuk ki $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$-ot. Az x_i, y_i, z_i közül mindegyik a q_i-k függvénye. Pl.

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_f),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

a q_i-k pedig az idő függvényei, vagyis

$$q_k = q_k(t),$$
$$(k = 1, 2, \ldots, f)$$

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_f} \dot{q}_f = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k.$$

Hasonlóképpen fejezhető ki $\dot{y}_i$ és $\dot{z}_i$. Tehát a sebesség derékszögű komponensei az általános sebességek homogén lineáris kifejezései, az együtthatók, a $\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$-k pedig még az általános koordináták függvényei lehetnek. Ezeket a kifejezéseket (8.1)-be helyettesítve nyerjük

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left\{ \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_f} \dot{q}_f \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial y_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial q_f} \dot{q}_f \right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial z_i}{\partial q_f} \dot{q}_f \right)^2 \right\}.$$

Végezzük el a négyzetreemelést és rendezzünk a $\dot{q}_i$-ok szerint. Ha a megfelelő együtthatókat rövidítve jelöljük, nyerjük

$$T = A_{11}\dot{q}_1^2 + A_{22}\dot{q}_2^2 + \ldots + A_{ff}\dot{q}_f^2 + 2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \\ + 2A_{13}\dot{q}_1\dot{q}_3 + \ldots + 2A_{f-1}A\dot{q}_{f-1}\dot{q}_f,$$

tehát

$$T = \sum_{r=1}^{f}\sum_{s=1}^{f} A_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s, \tag{3.8.3}$$

ahol

$$A_{rs} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_r}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial y_i}{\partial q_r}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial z_i}{\partial q_r}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right).$$

$A_{,s}$ tehát még a q_i-k függvénye. Míg derékszögű koordinátákban a kinetikus energia a sebességkomponensek négyzetösszege volt állandó együtthatókkal, addig itt az általános sebességkomponensek kvadratikus alakja a q_i-któl függő együtthatókkal.

Ha az így kifejezett V-vel és T-vel képezzük L-et, azt a q_i-k és $\dot{q}_i$-ok függvénye gyanánt kapjuk, vagyis

$$L = L(q_i, \dot{q}_i) = L(q_1, q_2, \ldots, q_f; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_f).$$

Állapítsuk meg, hogy hogyan alakulnak a variálás feltételei az új koordinátákban. Láttuk, hogy a végpontokon

$$\delta x_i = 0, \qquad \delta y_i = 0, \qquad \delta z_i = 0,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

vagyis a végpontok változatlanok maradnak. De ha ez így van, akkor nyilván

$$\delta q_k = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, f)$$

ugyanis

$$\delta q_k = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_k}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial q_k}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial q_k}{\partial z_i}\delta z_i\right).$$

A közbülső helyeken δq_k tetszés szerint változhat. Az időt nem variáljuk, $\delta t = 0$.

Képezzük ezek figyelembevételével az $\int_{t_0}^{t} L dt$ variációját. Mivel az időt nem variáljuk, a határok nem változnak és csak az integrandusban kell a fenti feltételeknek megfelelően variálni. Tehát

$$\delta\int_{t_0}^{t} L dt = \int_{t_0}^{t} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta\dot{q}_i)\, dt - \int_{t_0}^{t} L(q_i, \dot{q}_i)\, dt. \tag{3.8.4}$$

A jobboldal első tagját, mint a $q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f$ $2f$ számú változó függvényét *Taylor*-sorba fejtjük és a magasabbrendű kicsi tagokat, minthogy első variációról van szó, elhagyjuk. Így nyerjük

$$\delta \int_{t_0}^{t} L dt = \int_{t_0}^{t} L(q_i, \dot{q}_i)\, dt + \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt - \int_{t_0}^{t} L(q_i, \dot{q}_i)\, dt$$

$$\delta \int_{t_0}^{t} L dt = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt .$$

A jobboldalon a második tagot átalakíthatjuk, ugyanis

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d \delta q_i}{dt} .$$

Most is fennáll, hogy

$$\frac{d \delta q_i}{dt} = \delta \frac{dq_i}{dt} = \delta \dot{q}_i ,$$

tehát

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i .$$

Ennek segítségével a fentiekből következik, hogy

$$\delta \int_{t_0}^{t} L dt = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right\} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \left[\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_0}^{t} .$$

A jobboldalon az utolsó tag 0, mert a határokon $\delta q_i = 0$. Tehát

$$\delta \int_{t_0}^{t} L dt = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0 . \qquad (3.8.5)$$

Ennek az integrálnak minden $t_0 \ldots t$ időközre el kell tűnnie, ami csak úgy lehetséges, hogy az integrandus eltűnik, vagyis

$$\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0 .$$

Mivel pedig a δq_i megváltozások tetszésszerintiek, ez csak úgy lehetséges, ha a zárójeles kifejezések külön-külön eltűnnek. Tehát nyerjük, (-1)-gyel szorozva, hogy

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 . \qquad (3.8.6)$$

$$(i = 1, 2, \ldots f)$$

Ezek az egyenletek adják a $\delta \int_{t_0}^{t} L dt$ eltűnésének feltételét. Ezek a *Lagrange*-féle másodfajú egyenletek. Ezekben $L = T - V$ az általános koordináták és az általános sebességkomponensek megadott függvénye. $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ -ban szerepelnek a $\dot{q}_i$-ok, tehát $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ -ban q_i-nek az idő szerinti második deriáltjai lépnek fel. Eszerint az általános koordináták, mint az idő függvényei számára f számú másodrendű differenciálegyenletet kaptunk, vagyis megkaptuk a mozgásegyenleteket általános koordinátákban.

Ha V csak az általános koordinátáktól függ, az általános sebességkomponensektől nem, akkor

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0 ,$$

tehát

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} ,$$

vagyis

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_i} = 0 ,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i} .$$

$$(i = 1, 2, \ldots, f)$$

A $- \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i$ mennyiséget általános erőkomponensnek nevezzük, ugyanis derékszögű koordináták esetén ezek tényleg az erő komponenseit adják. Általános esetben azonban Q_i dimenziója nem erő. Ha pl. q_i szög, akkor $- \frac{\partial V}{\partial q_i}$ dimenziója nem

lehet erő, mert hiszen az erő dimenziója potenciál osztva hosszal, ez pedig elemi potenciál osztva elemi szöggel és a szög dimenzió nélküli mennyiség. Az általános erőkomponens bevezetésével egyenleteink a következő alakúak lesznek

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i. \qquad (3.8.7)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, f)$$

Vizsgáljuk meg, hogyan alakulnak egyenleteink, ha az általános koordináták egy pont derékszögű koordinátái, vagyis

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z,$$

$$V = V(x, y, z), \quad T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = m\dot{z},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) = m\ddot{x}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) = m\ddot{y}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3}\right) = m\ddot{z},$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Ha van potenciál, akkor

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial q_1} = -\frac{\partial V}{\partial x} = K_x, \qquad Q_2 = K_y, \qquad Q_3 = K_z.$$

Tehát ebben a speciális esetben a *Lagrange*-féle másodfajú egyenletek a következők

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= K_x, \\ m\ddot{y} &= K_y, \\ m\ddot{z} &= K_z. \end{aligned} \qquad (3.8.8)$$

Ezek az ismert mozgásegyenletek.

9. §. A Hamilton-féle kanonikus egyenletek

Mielőtt ezeknek az egyenleteknek bevezetésére rátérünk, egy matematikai tételt és néhány definíciót bocsátunk előre.

Először is megismerkedünk a homogén függvényekre vonatkozó *Euler*-féle tétellel. Egy $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvényt homogén k-ad fokú függvénynek nevezünk, ha a változók helyébe azok t-szeresét írva, az eredeti függvény t^k-szorosát kapjuk,

vagyis ha

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{3.9 1}$$

Differenciáljuk ezt az egyenletet t szerint

$$\frac{\partial f}{\partial (tx_1)} x_1 + \frac{\partial f}{\partial (tx_2)} x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial (tx_n)} x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial (tx_i)} x_i = kt^{k-1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Ez t minden értéke mellett fennáll, tehát $t = 1$-re is. Ekkor nyerjük

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = kf. \tag{3.9.2}$$

Ez EULER tétele, mely tehát azt mondja ki, hogy ha egy homogén k-ad fokú függvénynek az egyes változók szerinti deriváltjait a megfelelő változókkal szorozva összeadjuk, akkor a függvény k-szorosát kapjuk.

Ezt a tételt alkalmazzuk a kinetikus energiára, T-re, mely, mint láttuk, az általános sebességkomponensek kvadratikus alakja, vagyis homogén másodfokú függvénye ($k = 2$). Tehát

$$\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T. \tag{3.9.3}$$

Derékszögű koordináták esetén az i-edik tömegpont impulzuskomponenseit a következőképpen definiáljuk

$$p_{x_i} = m_i \dot{x}_i, \quad p_{y_i} = m_i \dot{y}_i, \quad p_{z_i} = m_i \dot{z}_i$$

és

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2).$$

Amint látható, az impulzuskomponensek a következőképpen is kifejezhetők

$$p_{x_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}, \qquad p_{y_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}, \qquad p_{z_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i}.$$

Ennek analógiájára a $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ mennyiségeket általános impulzuskomponenseknek nevezzük és p_i-vel jelöljük. Tehát

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, f)$$

Minthogy a q_i koordináta nem vonatkozik egy kiválasztott pontra, hanem az egész rendszerre, a p_i-k sem vonatkoznak egy pontra, hanem az egész rendszerre. A p_i-k dimenziója általában nem egyezik az impulzus dimenziójával. Az előbbiek-

ből következik, hogy

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2 \sum_{k=1}^{f} A_{ik}\dot{q}_k = 2(A_{i1}\dot{q}_1 + A_{i2}\dot{q}_2 + \ldots + A_{if}\dot{q}_f). \qquad (3.9.4)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, f)$$

Tehát a p_i-k a $\dot{q}_i$-ok lineáris függvényei. Minthogy az egyenletrendszer determinánsa, mint a behatóbb vizsgálat mutatja, nem tűnik el, az egyenletrendszer megoldható, úgyhogy a $\dot{q}_i$-ok is lineáris függvényei a p_i általános impulzuskomponenseknek.

Mivel egy rendszer állapota egy bizonyos időpillanatban a q_i-k és $\dot{q}_i$-ok, vagyis a p_i-k megadásával egyértelműen meg van határozva, a p_i-ket gyakran impulzuskoordinátáknak is nevezzük.

Ha a mozgásegyenleteket a q_i és a $\dot{q}_i$-ok helyett a q_i-kel és p_i-kel fejezzük ki, akkor a mozgásegyenletek új alakját nyerjük. Ezeket nevezzük *Hamilton-féle kanonikus egyenletek*nek.

Vezessük be a következő függvényt

$$H = T + V. \qquad (3.9.5)$$

Ezt a függvényt nevezzük *Hamilton-féle függvény*nek, amely nem más, mint az összenergia.

A H-t a q_i-k és p_i-k függvényének tekintjük, amit az előbbiek alapján megtehetünk, tehát $H = H(q_i, p_i)$. Képezzük H teljes megváltozását

$$\delta H = \sum_i \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i \right\}. \qquad (3.9.6)$$

Másrészt (9.3) felhasználásával

$$H = T + V = 2T - (T - V) = \sum_i p_i\dot{q}_i - L,$$

vagyis

$$H = \sum_i p_i\dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i). \qquad (3.9.7)$$

Itt L-et q_i és $\dot{q}_i$ függvényének tekintjük. Képezzük H megváltozását ez utóbbi kifejezés alapján:

$$\delta H = \sum_i \left\{ p_i\delta\dot{q}_i + \dot{q}_i\delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i \right\}.$$

Mivel V a sebességtől általában nem függ, fennáll, hogy

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = p_i.$$

Ezt az utóbb nyert formulánkba helyettesítve kapjuk

$$\delta H = \sum_i \left\{ \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right\}.$$

A jobboldal második tagját fejezzük ki a *Lagrange*-féle másodfajú egyenletekből

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i .$$

Tehát

$$\delta H = \sum_i (\dot{q}_i \delta p_i - \dot{p}_i \delta q_i) . \tag{3.9.8}$$

A (9.6) és (9.8) egyenletek jobboldalai tehát egyenlők egymással, mert mindegyik δH-val egyenlő, ami csak úgy lehetséges δq_i és δp_i minden értéke mellett, ha δq_i és δp_i együtthatói a (9.6) és (9.8) kifejezésekben egyenlők egymással. Tehát nyerjük, hogy

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad -\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i},$$

vagy

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{3.9.9}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, f)$$

Ezek a *Hamilton*-féle kanonikus egyenletek, amelyek a mechanikában rendkívül fontos szerepet játszanak.

Ha a *Hamilton*-féle függvény, H, az időt explicite nem tartalmazza, hanem csak q_i-n és p_i-n keresztül függ az időtől, akkor

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right\}.$$

$\dot{q}_i$ és $\dot{p}_i$ kifejezéseit a kanonikus egyenletekből beírva nyerjük:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right\} = 0,$$

vagyis

$$H = \text{konst.}, \tag{3.9.10}$$

ami azt fejezi ki, hogy az összenergia az időben nem változik.

A *Hamilton*-egyenletek elsőrendű differenciálegyenletek, számuk $2f$. Megoldásuk, mivel minden elsőrendű differenciálegyenlet megoldásában egy állandó lép fel, $2f$ állandót tartalmaz. A *Lagrange*-féle másodfajú egyenletek másodrendű differenciálegyenletek, melyek száma f. Mivel minden másodrendű differenciálegyenlet megoldásában két állandó lép fel, a megoldásokban szereplő összes állandó száma itt is $2f$. Tehát a várakozásnak megfelelően a kezdeti állapot (hely és sebesség) meghatározására szolgáló állandók száma mindkét esetben ugyanaz.

A *Hamilton*-féle kanonikus egyenletek a mozgásegyenletek egy új alakját adják. Vizsgáljuk meg, hogy egy m tömegű anyagi pont esetében, derékszögű koordinátákban hogyan alakulnak ezek az egyenletek. Tegyük fel, hogy van potenciál

$$V = V(x, y, z),$$

amely csak a hely függvénye és

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Az általános impulzuskomponensek a következők

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \qquad p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

amelyek most természetesen megegyeznek a közönséges impulzuskomponensekkel. Célunk T-t, mint p_x, p_y és p_z függvényét kifejezni:

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \qquad \dot{y} = \frac{p_y}{m}, \qquad \dot{z} = \frac{p_z}{m},$$

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{p_x^2}{m^2} + \frac{p_y^2}{m^2} + \frac{p_z^2}{m^2} \right) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2),$$

$$H = T + V = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z),$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \qquad \text{vagyis} \qquad m\dot{x} = p_x$$

és még két hasonló egyenlet az y- és z-komponensre. Tehát a *Hamilton*-egyenleteknek ez a csoportja csupán az impulzus definícióját szolgáltatja. A másik csoport a következőt adja

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = K_x$$

és még két hasonló egyenlet $m\ddot{y}$-ra és $m\ddot{z}$-ra vonatkozóan. Ezek a pont közönséges mozgásegyenletei.

10. §. A legkisebb hatás elve

Ezek után ismét rátérünk egy variációs elv levezetésére és egyúttal látni fogjuk azt is, hogy mennyire függ az elv alakja a variálás módjától. Ez az elv általánosabb, mint a *Hamilton*-elv, és belőle specializálással a *Hamilton*-elvet nyerhetjük.

A variálás most a következőképpen történik:

A végpontokon $\delta x_i = 0$, $\delta y_i = 0$, $\delta z_i = 0$, $\delta t = 0$.

Közben δx_i, δy_i, δz_i, δt tetszés szerinti, tehát most az időt is variáljuk. Ez azt jelenti, hogy ha a meg nem változtatott pályán a rendszer i-edik pontja t időpillanatban az (x_i, y_i, z_i) pontba jut, akkor a megváltoztatott pályán a pont a $t + \delta t$ időpillanatban az $(x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i)$ pontba jut.

Most a $\delta \dot{x}_i = \dfrac{d\delta x_i}{dt}$ egyenlet nem érvényes, ugyanis most $\delta \dot{x}_i$ kiszámításánál azt is figyelembe kell venni, hogy t is megváltozik, tehát

$$\delta \dot{x}_i = \frac{d(x_i + \delta x_i)}{d(t + \delta t)} - \frac{dx_i}{dt} = \frac{d(x_i + \delta x_i)}{dt + d\delta t} - \frac{dx_i}{dt} = \frac{d(x_i + \delta x_i)}{dt\left(1 + \dfrac{d\delta t}{dt}\right)} - \frac{dx_i}{dt}. \tag{3.10.1}$$

Ha δt változása kicsi, vagyis ha $\dfrac{d\delta t}{dt} \ll 1$, akkor az első tagban a nevező sorba fejthető, vagyis a dt faktortól eltekintve

$$\frac{1}{1 + \dfrac{d\delta t}{dt}} = \left(1 + \frac{d\delta t}{dt}\right)^{-1} = 1 - \frac{d\delta t}{dt} + \ldots$$

Tehát

$$\frac{d(x_i + \delta x_i)}{dt\left(1 + \dfrac{d\delta t}{dt}\right)} = \frac{d(x_i + \delta x_i)}{dt} \frac{1}{1 + \dfrac{d\delta t}{dt}} = \frac{d(x_i + \delta x_i)}{dt}\left(1 - \frac{d\delta t}{dt}\right),$$

vagyis

$$\delta \dot{x}_i = \frac{d(x_i + \delta x_i)}{dt}\left(1 - \frac{d\delta t}{dt}\right) - \frac{dx_i}{dt} = \frac{dx_i}{dt} + \frac{d\delta x_i}{dt} -$$

$$- \frac{dx_i}{dt}\frac{d\delta t}{dt} - \frac{d\delta x_i}{dt}\frac{d\delta t}{dt} - \frac{dx_i}{dt}.$$

A $\dfrac{d\delta x_i}{dt} \cdot \dfrac{d\delta t}{dt}$ másodrendű kicsi tagot elhanyagolva, nyerjük

$$\delta \dot{x}_i = \frac{d\delta x_i}{dt} - \frac{dx_i}{dt}\frac{d\delta t}{dt}. \tag{3.10.2}$$

Ezek után rátérünk a legkisebb hatás elvének levezetésére. Ismét a *d'Alembert*-féle elvből indulunk ki

$$\sum_i \{(K_{ix} - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i + (K_{iy} - m_i\ddot{y}_i)\delta y_i + (K_{iz} - m_i\ddot{z}_i)\delta z_i\} = 0,$$

vagy

$$\sum_i m_i(\ddot{x}_i\delta x_i + \ddot{y}_i\delta y_i + \ddot{z}_i\delta z_i) = \sum_i (K_{ix}\delta x_i + K_{iy}\delta y_i + K_{iz}\delta z_i) = \delta A. \quad (3.10.3)$$

Fennáll, hogy

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}_i\delta x_i) = \ddot{x}_i\delta x_i + \dot{x}_i\frac{d\delta x_i}{dt}.$$

Ha (10.2)-ből $\frac{d\delta x_i}{dt}$-t behelyettesítjük, nyerjük

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}_i\delta x_i) = \ddot{x}_i\delta x_i + \dot{x}_i\left(\delta\dot{x}_i + \dot{x}_i\frac{d\delta t}{dt}\right),$$

vagyis

$$\ddot{x}_i\delta x_i = \frac{d}{dt}(\dot{x}_i\delta x_i) - \dot{x}_i\left(\delta\dot{x}_i + \dot{x}_i\frac{d\delta t}{dt}\right),$$

$$\ddot{x}_i\delta x_i = \frac{d}{dt}(\dot{x}_i\delta x_i) - \delta\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right) - \dot{x}_i^2\frac{d\delta t}{dt}.$$

Hasonlóan nyerjük, hogy

$$\ddot{y}_i\delta y_i = \frac{d}{dt}(\dot{y}_i\delta y_i) - \delta\left(\frac{1}{2}\dot{y}_i^2\right) - \dot{y}_i^2\frac{d\delta t}{dt},$$

$$\ddot{z}_i\delta z_i = \frac{d}{dt}(\dot{z}_i\delta z_i) - \delta\left(\frac{1}{2}\dot{z}_i^2\right) - \dot{z}_i^2\frac{d\delta t}{dt}.$$

Szorozzuk meg ezt a 3 egyenletet m_i-vel, adjuk őket össze és összegezzünk i-re. Amint látható, a baloldal a fenti egyenlet alapján δA-val egyenlő, tehát

$$\delta A = \frac{d}{dt}\sum_i m_i(\dot{x}_i\delta x_i + \dot{y}_i\delta y_i + \dot{z}_i\delta z_i) -$$

$$-\delta\left\{\frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)\right\} - \sum_i m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)\frac{d\delta t}{dt}.$$

Figyelembe véve T kifejezését, írhatjuk, hogy

$$\delta A = \frac{d}{dt}\sum_i m_i(\dot{x}_i\delta x_i + \dot{y}_i\delta y_i + \dot{z}_i\delta z_i) - \delta T - 2T\frac{d\delta t}{dt},$$

$$\delta A + \delta T + 2T\frac{d\delta t}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i(\dot{x}_i\delta x_i + \dot{y}_i\delta y_i + \dot{z}_i\delta z_i).$$

Szorozzunk dt-vel és integráljunk t_0-tól t-ig a végpontoknak megfelelő időkig, akkor nyerjük, hogy

$$\int_{t_0}^{t} \left(\delta T + \delta A + 2T \frac{d\delta t}{dt} \right) dt = \left[\sum_i m_i (\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i) \right]_{t_0}^{t} = 0 .$$

Ha van potenciál, akkor $\delta A = -\delta V$ és ekkor nyerjük, hogy

$$\int_{t_0}^{t} \left(\delta T - \delta V + 2T \frac{d\delta t}{dt} \right) dt = 0 .$$

Ha $\delta t = 0$, akkor a *Hamilton*-elvet kapjuk, mert ekkor a harmadik tag 0, δ pedig az integráljel elé vihető. Amint látjuk, a nyert elv általánosabb, mint a *Hamilton*-elv.

Ha úgy variálunk, hogy az összenergia ne változzék, akkor a fenti elv más alakra hozható. Legyen tehát

$$\delta(T + V) = 0,$$

vagyis

$$\delta T = -\delta V.$$

Ekkor tehát

$$\delta T - \delta V = 2\delta T.$$

Beírva ezt a fenti elvbe, nyerjük, hogy

$$2 \int_{t_0}^{t} (\delta T dt + T d\delta t) = 0. \tag{3.10.4}$$

Könnyen beláthatjuk, hogy az elemi idő megváltozása egyenlő az időmegváltozás elemével, tehát

$$\delta dt = d\delta t.$$

Tegyük fel ugyanis, hogy az eredeti pályán a t és t' időpillanatok közti idő dt, tehát $dt = t' - t$. A megváltoztatott pályán t-nek $t + \delta t$ és t'-nek $t' + \delta t'$ felel meg, tehát az új időelem

$$dt = t' + \delta t' - (t + \delta t),$$

$$dt = t' - t + \delta t' - \delta t.$$

Tehát az időelem megváltozása: új dt – régi dt, vagyis

$$\delta dt = \delta t' - \delta t = d\delta t .$$

Ezt beírva a (10.4) egyenletbe, nyerjük, hogy

$$2\int_{t_0}^{t}(\delta T dt + T\delta dt) = 2\int_{t_0}^{t}\delta(Tdt) = 0,$$

tehát

$$\int_{t_0}^{t}\delta(Tdt) = 0.$$

A végpontokon $\delta t = 0$, vagyis a variáció megint nem vonatkozik a végpontokra, így δ az integrál elé kiemelhető

$$\delta\int_{t_0}^{t} T dt = 0. \tag{3.10.5}$$

Ez a *legkisebb hatás elve*, ugyanis az $\int_{t_0}^{t} Tdt$-t szokás hatásnak (hatásfüggvénynek) nevezni. Ezt az elvet a legkisebb hatás elvének nevezzük, bár a fenti integrál eltűnéséből nem következik, hogy a hatás minimum, mert a variáció eltűnése a minimum létezésének csak szükséges, de nem elégséges feltétele.

A legkisebb hatás elvét oly alakban is kifejezhetjük, amely az időt nem tartalmazza, csak a koordinátákat.

$$T = \sum_{i,k} A_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k = \sum_{i,k} A_{ik}\frac{dq_i}{dt}\frac{dq_k}{dt},$$

$$T(dt)^2 = \sum_{i,k} A_{ik}\frac{dq_i}{dt}\,dt\,\frac{dq_k}{dt}\,dt = \sum_{i,k} A_{ik}dq_i dq_k,$$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{T}}\sqrt{\sum_{i,k} A_{ik}dq_i dq_k},$$

$$Tdt = \sqrt{T}\sqrt{\sum_{i,k} A_{ik}\,dq_i dq_k}. \tag{3.10.6}$$

T az általános sebességkomponensek függvénye, de kifejezhető, mint az általános koordináták függvénye, vagyis

$$T + V = E,$$

$$T = E - V,$$

$$Tdt = \sqrt{E-V}\sqrt{\sum_{i,k} A_{ik}dq_i dq_k}.$$

Írjuk ezt be a legkisebb hatás elvét kifejező (10.5) egyenletbe, ekkor nyerjük

$$\delta\int_{q_{i0}}^{q_i}\sqrt{E-V}\sqrt{\sum_{i,k} A_{ik}dq_i dq_k} = 0. \tag{3.10.7}$$

Ez a legkisebb hatás elvének *Jacobi*-féle alakja. q_{i0} és q_i az összes t_0, ill. t-nek megfelelő koordináta helyett áll az integrál határain.

Vezessük be az ívhosszat, s-et, mint paramétert. Ekkor írhatjuk

$$dq_i = \frac{dq_i}{ds}\,ds, \qquad dq_k = \frac{dq_k}{ds}\,ds,$$

$$\delta \int_{s_0}^{s} \sqrt{E-V}\,\sqrt{\sum_{i,k} A_{ik}\frac{dq_i}{ds}\,ds\cdot\frac{dq_k}{ds}\,ds} = 0.$$

Hogy ezt a formulát geometriailag értelmezhessük, vizsgáljuk meg egy magára hagyott tömegpont mozgását egy megadott felületen. A tömegpontra tehát nem hat erő, vagyis $V = \text{konst.} = 0$. A szemléletesség kedvéért vezessük le újra a fenti formulát erre a speciális esetre

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

$$T(dt)^2 = \frac{1}{2}m(ds)^2,$$

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2T}}\,ds,$$

$$Tdt = \sqrt{\frac{Tm}{2}}\,ds. \tag{3.10.8}$$

Mivel $V = 0$-nak vehető, az energia tétele a következő

$$T + V = T = \text{konst.}$$

Írjuk be a (10.8) kifejezést a legkisebb hatás elvébe és vegyük tekintetbe, hogy $T = \text{konst.}$ Ekkor nyerjük hogy

$$\delta \int_{t_0}^{t} Tdt = \sqrt{\frac{Tm}{2}}\,\delta \int_{s_0}^{s} ds = 0,$$

vagyis

$$\delta \int_{s_0}^{s} ds = 0. \tag{3.10.9}$$

A mozgás pályája tehát a felület olyan görbéje, amelyre nézve az ívhossz variációja eltűnik. Az ilyen felületi görbét geodetikus vonalnak nevezzük. Tehát egy magára hagyott, valamely felületen mozgó tömegpont pályája geodetikus vonal. A szabad térben vagy a síkon a geodetikus vonalak egyenesek, a gömbön főkörök.

Az ívhossz variációjának eltűnéséből nem következik, hogy a geodetikus vonal a két pontot összekötő legrövidebb ív. Pl. a gömbön két pont között a rajtuk átmenő főkörnek két íve fekszik, ezek közül a kisebbik tényleg a két pontot összekötő legrövidebb ív, a nagyobb azonban egyáltalán nem szélső érték. A pont azonban a hosszabb íven is mozoghat, ha sebessége arra irányul. A felület geodetikus vonalait és ezzel együtt a pont mozgását a felület geometriai tulajdonságai teljesen meghatározzák.

Ha a pontra erő hat, akkor T nem konstans, ekkor $\sqrt{\frac{Tm}{2}}$ -vel nem rövidíthetünk és így a legkisebb hatás elvéből nem következik az ívhossz variációjának eltűnése. Ebben az esetben tehát a felület geometriai sajátságai nem határozzák meg teljesen a mozgást, de meghatározhatunk egy másik felületet, melynek íveleme

$$ds' = \sqrt{E - V}\sqrt{\sum_{i,k} A_{ik} dq_i dq_k}$$

és ekkor a legkisebb hatás elvét így fejezhetjük ki

$$\delta \int_{s_0'}^{s'} ds' = 0 .$$

Tehát a pont mozgása olyan, mintha ezen a felületen erőhatás nélkül folyna le.

Pontrendszer esetén ds' fent megadott kifejezése az f-dimenziós tér egy felületének, egy ún. hiperfelületnek ívelemét definiálja. Az f-dimenziós térnek az a pontja, amely a pontrendszert ábrázolja, ennek a felületnek geodetikus vonalán mozog.

EINSTEIN az általános relativitás elméletében felteszi, hogy a tér nem *Euklides*i, hanem általános, ún. *Riemann*-tér. A pont mozgása szerinte ennek az általános térnek geodetikus vonalain történik. A tér geometriai szerkezetét a térben levő tömegek határozzák meg. Tehát egyúttal a geodetikus vonalakat és ezzel együtt a mozgást is a térben levő tömegek határozzák meg. Ha tömegek csak nagy távolban vannak, vagyis a pont magára hagyott, akkor a tér *Euklides*i térré lesz, amelyben a geodetikus vonalak egyenesek. Erő, pl. a gravitáció hatása abban nyilvánul meg, hogy a tömegek meghatározott törvény szerint módosítják a tér geometriai szerkezetét és a pont mozgása olyan, mintha a módosított tér geodetikus vonalán történne erőhatás nélkül.

11. §. Kanonikus transzformáció

A *Hamilton*-féle kanonikus egyenletek a következők

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

$$H = H(q_i, p_i).$$

Gyakran szükséges és célszerű a q_i, p_i változók helyett új Q_i, P_i változókat bevezetni. A transzformáció, amellyel általában új koordinátákat vezetünk be, lehet pl. a következő

$$Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_f).$$

$$(i = 1, 2, \ldots, f)$$

Vagyis az új koordinátákat, mint a régi koordináták függvényét adjuk meg. Az ilyen transzformációt *ponttranszformáció*nak nevezzük. Ugyanis a q_i koordináták f-dimenziós terének egy pontjához a Q_i koordináták f-dimenziós terének egy pontját rendeljük.

Gyakran ennél általánosabb transzformációra van szükség, mely a következő

$$Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_f; p_1, p_2, \ldots, p_f; t),$$

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_f; p_1, p_2, \ldots, p_f; t).$$

$$(i = 1, 2, \ldots, f)$$

Vagyis az új koordinátákat és impulzusokat a régi koordináták és impulzusok függvényében adjuk meg, azonkívül Q_i és P_i még t függvénye is lehet.

Ha ezekre az új Q_i-kre és P_i-kre érvényesek a *Hamilton*-féle kanonikus egyenletek, vagyis ha

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_i},$$

$$\bar{H} = \bar{H}(Q_i, P_i), \tag{3.11.1}$$

(ahol $\bar{H}$ az új H függvény, amelyet mint Q_i és P_i függvényét kell felfogni), akkor a transzformációt *kanonikus transzformáció*nak nevezzük. A következőkben azzal fogunk foglalkozni, hogy hogyan lehet ilyen kanonikus transzformációt végrehajtani.

A *Hamilton*-elvből indulunk ki

$$\delta \int_{t_0}^{t} L dt = 0,$$

$$L = T - V = 2T - H = \sum_i p_i \dot{q}_i - H,$$

$$\delta \int_{t_0}^{t} \{\sum_i p_i \dot{q}_i - H\} dt = 0.$$

Ha a q_i-ket és p_i-ket tekintjük független változóknak, akkor a *Hamilton*-elvnek ez az alakja éppen a *Hamilton*-féle kanonikus egyenleteket szolgáltatja. Ugyanis

ekkor

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\{\sum_i p_i\dot{q}_i - H\}}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\{\sum_i p_i\dot{q}_i - H\}}{\partial q_i} = 0\,,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\{\sum_i p_i\dot{q}_i - H\}}{\partial\dot{p}_i} - \frac{\partial\{\sum_i p_i\dot{q}_i - H\}}{\partial p_i} = 0\,.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, f)$$

Az első csoportban

$$\frac{\partial\sum_i p_i\dot{q}_i}{\partial\dot{q}_i} = p_i\,, \qquad \frac{\partial H}{\partial\dot{q}_i} = 0\,, \qquad \frac{\partial\sum_i p_i\dot{q}_i}{\partial q_i} = 0\,.$$

A második csoportban

$$\frac{\partial(\sum_i p_i\dot{q}_i - H)}{\partial\dot{p}_i} = 0\,, \qquad \frac{\partial\sum_i p_i\dot{q}_i}{\partial p_i} = \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}\,.$$

Tehát nyerjük

$$\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0\,,$$

$$\frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0\,. \tag{3.11.2}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, f)$$

Tehát látjuk, hogy a *Hamilton*-elvből következnek a kanonikus egyenletek. A Q_i és P_i változókra szintén kanonikus egyenletek érvényesek, ha a transzformáció folytán a

$$\delta\int_{t_0}^{t}(\sum_i p_i\dot{q}_i - H)dt = 0$$

variációs elvből a

$$\delta\int_{t_0}^{t}(\sum P_i\dot{Q}_i - \bar{H})dt = 0$$

elv következik. Ennek szükséges és elegendő feltétele, hogy a két integrandus egy W függvény t szerinti teljes differenciálhányadosával különbözzék egymástól. Vagyis szükséges és elegendő, hogy

$$(\sum_i p_i\dot{q}_i - H) - (\sum_i P_i\dot{Q}_i - \bar{H}) = \frac{dW}{dt}\,. \tag{3.11.3}$$

Ugyanis $\dfrac{dW}{dt}$ integráljának variációja zérus:

$$\delta \int_{t_0}^{t} \frac{dW}{dt}\, dt = [\delta W]_{t_0}^{t} = 0\,,$$

mert a *Hamilton*-elvnél a határokon nem variálunk, tehát δW a t_0 és t helyen 0. W-t többféleképpen választhatjuk meg:

$$W(q_i, Q_i, t),\ W(q_i, P_i, t),\ W(Q_i, p_i, t),\ W(p_i, P_i, t),$$

amelyeknek megfelelően több esetet különböztetünk meg. Mi csak az első két esettel foglalkozunk.

1. $$W = W(q_i, Q_i, t),$$

$$\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H\right) - \left(\sum_i P_i \dot{Q}_i - \bar{H}\right) = \frac{dW}{dt} = \sum_i \frac{\partial W}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial W}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial W}{\partial t}.$$

Átrendezve

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - \sum_i P_i \dot{Q}_i + \bar{H} = \sum_i \frac{\partial W}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial W}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + H + \frac{\partial W}{\partial t}.$$

A megfelelő együtthatók egyenlőségéből következik, hogy

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial W}{\partial Q_i},$$

$$(i = 1, 2, \ldots, f)$$

$$\bar{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t}.$$

Az első $2f$ egyenlet q_i, p_i és Q_i, P_i között jelent összefüggést, ezek a transzformáció egyenletei. Számuk $2f$, tehát velük lehetséges q_i, p_i-t kifejezni Q_i, P_i-vel és viszont, $\bar{H}$ pedig az új *Hamilton*-féle függvényt adja.

2. $$W = W(q_i, P_i, t).$$

Ekkor W helyett a következő függvényt vezetjük be

$$W' = W(q_i, P_i, t) - \sum_i P_i Q_i.$$

Ezt megtehetjük, mert a $\dfrac{dW'}{dt}$ integráljának variációja éppen úgy eltűnik, mint

$\frac{dW}{dt}$-é. Ekkor nyerjük, hogy

$$\left(\sum_i p_i\dot{q}_i - H\right) - \left(\sum_i P_i\dot{Q}_i - \bar{H}\right) = \sum \frac{\partial W}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial W}{\partial P_i}\dot{P}_i +$$

$$+ \frac{\partial W}{\partial t} - \sum_i (P_i\dot{Q}_i + Q_i\dot{P}_i).$$

Rendezve

$$\sum_i p_i\dot{q}_i + \sum_i Q_i\dot{P}_i + \bar{H} = \sum_i \frac{\partial W}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial W}{\partial P_i}\dot{P}_i + H + \frac{\partial W}{\partial t}.$$

A megfelelő együtthatók egyenlőségéből következik, hogy

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i}.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, f)$$

$$\bar{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t}. \tag{3.11.5}$$

Az első $2f$ egyenlet ismét a transzformáció egyenleteit szolgáltatja, az utolsó pedig az új H függvényt adja.

12. §. Ciklikus változók. A Hamilton–Jacobi-féle differenciálegyenlet

Ha a *Hamilton*-féle függvényben az egyik koordináta, pl. q_i nem fordul elő, akkor

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0,$$

$$p_i = \text{konst.}$$

Vagyis, ha a H függvényben valamely koordináta nem fordul elő, akkor a *Hamilton*-egyenletekben a megfelelő impulzuskoordináta konstans. Az olyan koordinátát, amelytől H nem függ, *ciklikus koordinátának* nevezzük. A *Hamilton*-egyenletekben egymásnak megfelelő q_i, p_i koordinátákat egymáshoz *kanonikusan konjugált*aknak nevezzük, tehát azt mondhatjuk, ha H-ban q_i nem fordul elő, akkor a hozzá kanonikusan konjugált p_i állandó.

Ha H csak a p_i-ktől függ, a q_i-ktől pedig nem, akkor az összes p_i állandó. Vagyis ha

$$H = H(p_1, p_2, \ldots, p_f),$$

akkor

$$p_i = \alpha_i = \text{konst.}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, f)$$

Mivel $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ szintén csak az impulzus koordináták függvénye, $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ is időtől független, tehát

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = v_i,$$

ahol v_i időtől független konstans. Integrálva az idő szerint

$$q_i = v_i t + \beta_i.$$

Tehát ha a *Hamilton*-féle függvény csak az impulzuskoordinátáktól függ, akkor a rendszer integrálható, az impulzusok állandók, a koordináták pedig az idő lineáris függvényei. Tehát a kanonikus egyenletek integrációja vagy a ciklikus koordináták bevezetése ugyanaz a feladat.

Speciális eset áll fenn, ha a *Hamilton*-féle függvény 0, ekkor

$$\dot{q}_i = 0, \quad \dot{p}_i = 0,$$

vagyis

$$q_i = \text{konst.}, \; p_i = \text{konst.}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, f)$$

Ciklikus koordináták bevezetése, ill. az említett speciális eset megvalósítása a kanonikus transzformáció segítségével lehetséges.

A kanonikus transzformációk 2. pontja alatt tárgyalt esetből indulunk ki. Feladatunk W számára egy olyan $S(q_i, P_i, t)$ függvényt találni, amelynél $\overline{H} = 0$. Az előbbi paragrafusban láttuk, hogy

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \tag{3.12.1}$$

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}, \tag{3.12.2}$$

$$\overline{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{3.12.3}$$

Ha el tudjuk érni azt, hogy $\overline{H} = 0$ legyen, akkor, mint láttuk, különösen egyszerű a probléma megoldása. A $\overline{H} = 0$ feltétel S választására jelent megszorítást. Ugyanis, ha

$$H(q_i, p_i) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

akkor (12.1)-ből p_i-t kiküszöbölve, S-re a következő parciális differenciálegyenletet kapjuk

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{3.12.4}$$

Ez az egyenlet a *Hamilton—Jacobi-féle parciális differenciálegyenlet*. Ezt tehát úgy kapjuk, hogy H-ban a p_i-k helyébe mindenhol $\frac{\partial S}{\partial q_i}$-t írunk, az így nyert kifejezéshez hozzáadjuk $\frac{\partial S}{\partial t}$-t és egyenlővé tesszük 0-val. Mivel H a p_i-k kvadratikus függvénye, a differenciálegyenlet elsőrendű, de másodfokú. Ha tehát azt akarjuk, hogy az új H-függvény 0 legyen, akkor az S függvényt, amely a transzformációra mérvadó, úgy kell megválasztani, hogy a *Hamilton—Jacobi*-féle parciális differenciálegyenletet kielégítse. Ezzel az S függvénnyel konstruálva meg a transzformációt, $\bar{H} = 0$, vagyis

$$Q_i = \beta_i, \quad P_i = \alpha_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, f) \tag{3.12.5}$$

ahol α_i és β_i állandók. Ha pedig a transzformáció egyenleteivel visszatérünk q_i-re és p_i-re, megkapjuk a probléma megoldását az eredeti koordinátákban.

A *Hamilton—Jacobi*-féle parciális differenciálegyenlet elsőrendű és f változós, megoldása f tetszőleges állandót tartalmaz, amelyeket a konstans $P_i = \alpha_i$ impulzuskoordinátákkal kell azonosítanunk, tehát

$$S = S(q_1, q_2, \ldots, q_f;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_f,\ t),$$

ugyanis S-et q_i és P_i függvényeként adtuk meg. (12.2)-ből következik, hogy

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i. \quad (i = 1, 2, \ldots, f) \tag{3.12.6}$$

Ezek az egyenletek, amelyek tartalmazzák az f számú általános koordinátát, adják a probléma megoldását, ugyanis ezek összefüggéseket adnak az f számú q_i koordináta és az idő között, amelyekből a mozgás lefolyása, ill. a pálya alakja megállapítható.

Tehát az eljárás a következő. Megoldjuk a *Hamilton—Jacobi*-féle parciális differenciálegyenletet. A megoldásban szerepel f számú α_i tetszőleges állandó. S-et differenciáljuk az α_i-k szerint és az így nyert kifejezéseket egyenlővé tesszük a tetszőleges β_i állandókkal. Ezek az egyenletek adják a megoldást.

Tegyük fel, hogy

$$H = T + V = E = \text{konst.},$$

vagyis, hogy az összenergia állandó, tehát a rendszer konzervatív. Ekkor S helyébe a következő függvényt helyettesítjük

$$S = -Et + S_0(q_1, q_2, \ldots, q_f;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_f), \tag{3.12.7}$$

ahol tehát S_0 már nem függ az időtől

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E, \qquad \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial S_0}{\partial q_i}. \tag{3.12.8}$$

Ezekkel a helyettesítésekkel nyerjük, hogy

$$H\left(q_i, \frac{\partial S_0}{\partial q_i}\right) - E = 0,$$

$$H\left(q_i, \frac{\partial S_0}{\partial q_i}\right) = E. \tag{3.12.9}$$

Ez a *rövidített Hamilton—Jacobi-féle egyenlet.*

Az E állandó lévén, azonosítható pl. α_1-gyel, tehát

$$S = -Et + S_0(q_1, q_2, \ldots, q_f; E, \alpha_2, \ldots, \alpha_f). \tag{3.12.10}$$

A (12.6) alatti egyenletek $\beta_1 = -t_0$ jelöléssel a következő alakot veszik fel

$$\frac{\partial S}{\partial E} = -t_0, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (i = 2, 3, \ldots, f)$$

figyelembe véve (12.10)-et, nyerjük

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = t - t_0, \qquad \frac{\partial S_0}{\partial \alpha_i} = \beta_i. \quad (i = 2, 3, \ldots, f)$$

Ezek közül az egyenletek közül az időt csak a $\frac{\partial S_0}{\partial E} = t - t_0$ egyenlet tartalmazza. Ez adja a mozgás időbeli lefolyását. A többi egyenlet az időt nem tartalmazza, ezek adják a pályát.

Még az S függvény jelentésével kell foglalkoznunk

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Legyen a rendszer konzervatív. Láttuk, hogy ebben az esetben

$$S = -Et + S_0.$$

Felhasználva (12.1)-et

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - E,$$

vagy

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 2T - (T + V) = T - V = L,$$

$$S = \int_{t_0}^{t} L dt.$$

NEGYEDIK FEJEZET

A MEREV TEST MECHANIKÁJA

*Merev test*nek nevezzük az olyan testet, melynél bármely két pontjának távolsága mozgás közben nem változik meg. Ilyen ideális értelemben vett merev test a valóságban nincs, de igen sok mozgásnál (különösen szilárd testek mozgásánál) a test pontjainak relatív elmozdulásától eltekinthetünk azon elmozdulások mellett, amelyeket az egész test mozgása közben a pontok végeznek. Ezekben az esetekben a merev test fogalma jó absztrakciót nyújt és a jelenségek nagy csoportját teszi áttekinthetővé. Technikai szempontból a merev testek mechanikájának nagy fontossága van, mert a gépek lényeges alkotórészei jó közelítéssel merev test gyanánt viselkedő szilárd testek.

Először a merev test kinematikáját tárgyaljuk, de csak egészen röviden, majd rátérünk a merev test dinamikájára, amellyel részletesebben foglalkozunk.

1. §. A merev test kinematikája

A merev test helyzetének meghatározása

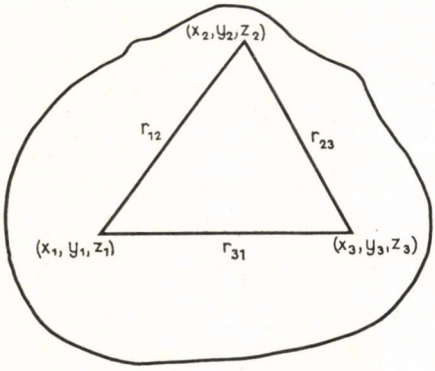
Ha a merev test egy pontját rögzítjük, akkor helyzete ezáltal még nincs meghatározva, mert e ponton átmenő bármely egyenes, mint tengely körül a test elforoghat. Ha még egy pontot rögzítünk, akkor a merev test helyzete még mindig határozatlan, mert a merev test a két ponton átmenő tengely körül foroghat. A merev test helyzete akkor van meghatározva, ha még egy harmadik pontot is megadunk, amely nem fekszik rajta az első két rögzített ponton átmenő egyenesen. Tehát a merev test helyzetét 3 nem egy egyenesen levő pont helyzete határozza meg.

Egy pont helyzetét 3 adat, a 3 koordináta adja meg. 3 pont helyzetét tehát 9 adat határoz meg, de ezek egymástól nem függetlenek, ugyanis a merev test mozgása közben pontjainak egymástól való távolsága állandó.

$$
\begin{aligned}
r_{12}^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \text{konst.}, \\
r_{23}^2 &= (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = \text{konst.}, \\
r_{31}^2 &= (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = \text{konst.}
\end{aligned}
\tag{4.1.1}
$$

Ez 3 egyenlet a 9 koordináta között, tehát a független adatok száma 6. A merev test helyzetét tehát 6 független adat határozza meg.

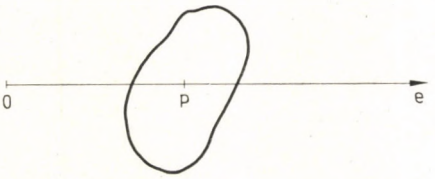
Tekintsünk néhány speciális esetet. Ha a merev test mozgása *egydimenziós*, vagyis ha minden pontja egy meghatározott iránnyal párhuzamosan tolódik el (transzláció), akkor elegendő egy pont helyzetét megadni. Egydimenziós esetben a pont helyzetét egy adattal határozhatjuk meg, mégpedig úgy, hogy azon az egye-



48. ábra. Egy merev test helyzetének megállapítása

nesen, amelyen a pont mozog, felveszünk egy kezdőpontot és megadjuk az illető pontnak a kezdőponttól való távolságát. $\overline{OP}$ meghatározza a test helyzetét.

Ha a merev test mozgása *két dimenzióban* történik, vagyis ha az egyenes pontjainak mozgása egymással párhuzamos síkokon megy végbe, akkor a merev test helyzetét két pontja határozza meg. Egy pontot két dimenzióban 2 adat, két pontot tehát 4 adat határoz meg. Ezek között azonban fennáll egy összefüggés,



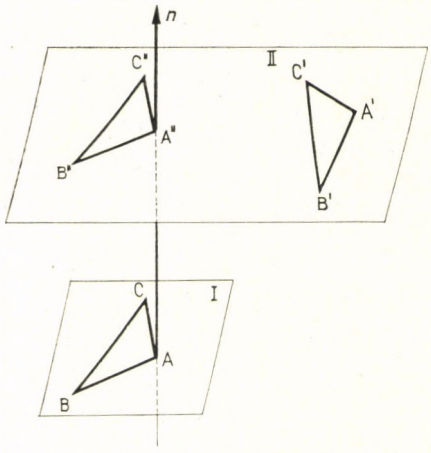
49. ábra. Merev test egydimenziós mozgása

amely szerint a két pont egymástól való távolsága állandó, tehát a független adatok száma 3. Ez a 3 adat lehet pl. az egyik pont két koordinátája és a másik pont felé mutató egyenesnek az x-tengellyel alkotott hajlásszöge.

Tehát egy dimenzióban 1 adat, két dimenzióban 3, három dimenzióban 6 adat határozza meg a merev test helyzetét.

Tehát két egybevágó gömbháromszögünk van, melyek egyik csúcspontja, D, közös. A $B''C''D$ gömbháromszög ezen közös D csúcspont körüli elforgatással átvihető a $B'C'D$ gömbháromszögbe, miáltal a megfelelő alkotórészeik, tehát $B''C''$ és $B'C'$ is egymással fedésbe kerülnek. Forgás közben D nem változtatja helyzetét; a gömb középpontja, A, sem, így mindazok a pontok, amelyek az AD egyenesen vannak, a helyükön maradnak, tehát AD a forgás tengelye.

Ezzel kimutattuk, hogy a merev test tetszés szerinti térbeli kezdő helyzetből tetszésszerinti végső helyzetbe egy transzlációval és egy tengely körüli forgással vihető át.



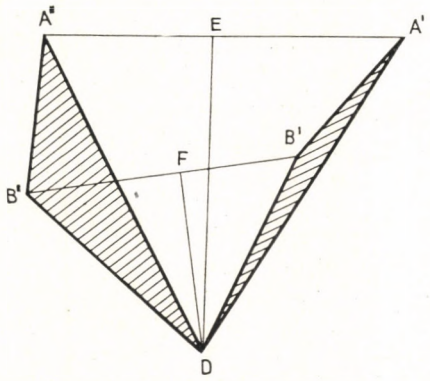
54. ábra. A merev test átvitele az ABC helyzetből az $A''B''C''$ helyzetbe

Ez a szerkesztés nem egyértelmű, ugyanis az a pont, amelyet a transzlációval a végső helyzetbe viszünk (az előbb A), a merev test tetszés szerinti pontja lehet. Ez egyszerűsítésre vezet, mert megadja annak a lehetőségét, hogy a transzlációt előnyösen válasszuk. Mégpedig lehet a transzlációt úgy választani, hogy iránya és a forgástengely iránya egybeessen. Ilyen mozgást végez a csavar csavarmenetbe való becsavarásnál, ezért ezt a mozgást csavarmozgásnak nevezzük. Csavarmozgásnál a csavar tengelye körül forog és ennek irányában halad előre. Be fogjuk bizonyítani, hogy a merev test bármilyen kezdőhelyzetből bármilyen véghelyzetbe csavarmozgással is átvihető.

A transzláció a merev test minden síkját egy az eredetivel párhuzamos síkba viszi át. Forgás közben pedig minden pont állandóan benne marad egy olyan síkban, amely merőleges a forgástengelyre. Eszerint a forgás és a transzláció együttes alkalmazása után a forgástengelyre merőleges síkok eredeti helyzetükkel párhuzamos síkokba mennek át. A merev test pontjai ezekben a síkokban elmozdultak, de a síkok helyzete nem változott meg. Válasszuk most a merev test helyzetét jellemző 3 pontot egy ilyen, a forgástengelyre merőleges síkban és végezzük a következő elmozdulásokat. Először ezt a síkot a normális mentén toljuk el önmagával

párhuzamosan mindaddig, míg egybe nem esik ezen sík végső helyzetével. A 3 pont ebben a síkban egy síkháromszöget alkot, mely egyszerűen vihető át a végső helyzetbe egy, a síkra merőleges tengelyű forgással. Evégből csak azt kell bebizonyítani, hogy pl. az $A''B''$ oldal a II. sík egy pontja körüli forgással, vagyis a II. síkra merőleges tengely körüli forgással átvihető $A'B'$-be. Kössük össze A''-t A'-vel és B''-t B'-vel. Felezzük meg az összekötő távolságokat és állítsunk rájuk merőlegeseket, amelyek egymást D-ben metszik.

$$A''D = A'D,$$



55. ábra. A merev test átvitele $A''B''C''$ helyzetből az $A'B'C'$ véghelyzetbe

mert az $A''EDA \cong A'EDA$, ugyanis $A''E = A'E$, mert feleztük az $A''A'$ távolságot, ED közös és az E-nél levő két szög derékszög. Hasonlóképpen mutatható ki a $B''FD$ és $B'FD$ háromszögek egybevágóságából, hogy

$$B''D = B'D.$$

Mivel továbbá a test merevsége folytán

$$A''B'' = A'B',$$

az $A''B''D$ háromszög egybevágó az $A'B'D$ háromszöggel, tehát a D pont körüli forgással $A''B''$ átvihető $A'B'$-be. Ez azt jelenti, hogy $A''B''$ a II. síkra merőleges és a D-n keresztülmenő tengely körüli forgással átvihető $A'B'$-be. A transzláció is a II. síkra merőleges irányban történt, tehát a merev test elmozdulása egy transzlációból és egy a transzláció irányába eső tengely körüli elforgatásból tehető össze. Ezzel kimutattuk, hogy a merev test legáltalánosabb elmozdulása csavarmozgással állítható elő.

A következőkben áttérünk az analitikai tárgyalásra. Az előbbiek alapján a merev test mozgásának tárgyalásánál elegendő a transzlációval és tengely körüli forgással foglalkozni.

ekkor v komponensei

$$v_x = qz - ry,$$

$$v_y = rx - pz,$$

$$v_z = py - qx.$$

Ha a forgás mellett a merev test még transzlációt is végez, akkor $[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$-hez még $\mathbf{v}_0$, a transzláció sebessége járul. Ekkor tehát

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]. \tag{4.1.8}$$

Komponensekben

$$v_x = v_{0x} + qz - ry,$$

$$v_y = v_{0y} + rx - pz,$$

$$v_z = v_{0z} + py - qx.$$

Ezek a formulák adják a transzlációt és forgást végző merev test valamely pontjának sebességét.

A merev test helyzetének és mozgásának analitikai meghatározása

A merev test helyzetének meghatározására 3 nem egy egyenesre eső pontja helyzetének megadására volt szükség, ami összesen 6 független adatot jelent. Ugyanerre az eredményre jutunk más úton is, ha a következőképpen járunk el.

A merev testhez egy koordinátarendszert rögzítünk és megadjuk ennek helyzetét egy másik, pl. a Földhöz vagy állócsillagokhoz rögzített koordinátarendszerben. Ha a merev testhez rögzített koordinátarendszer helyzete ismeretes, akkor ezzel a merev test helyzete is ismeretes.

Legyen a merev testhez rögzített rendszer kezdőpontja O, tengelyei pedig x, y, z, a térben rögzített rendszer kezdőpontja O_1, és tengelyei x_1, y_1, z_1. Az O, x, y, z rendszer helyzetét megadhatjuk úgy, hogy megadjuk a kezdőpontjának koordinátáit és tengelyeinek iránykoszinuszait az O_1, x_1, y_1, z_1 rendszerben

$$O(a, b, c),$$

$$x(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1),$$

$$y(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2),$$

$$z(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3).$$

Ekkor természetesen az O_1, x_1, y_1, z_1 rendszer tengelyeinek iránykoszinuszai a következők

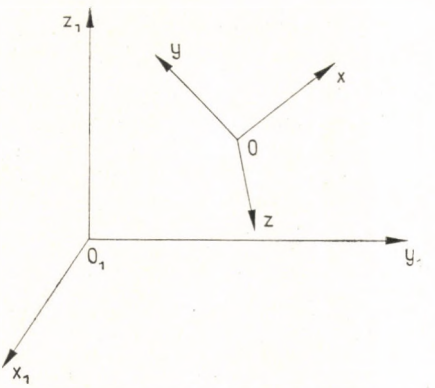
$$x_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

$$y_1(\beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

$$z_1(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

Az O, x, y, z rendszerben egy $P(x, y, z)$ pont koordinátáival a P pontnak az O_1, x_1, y_1, z_1 rendszerben levő koordinátáit a következőképpen lehet kifejezni

$$\begin{aligned} x_1 &= a + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ y_1 &= b + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ z_1 &= c + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z. \end{aligned} \tag{4.1.9}$$



57. ábra. A térben elhelyezett és a merev testhez rögzített koordinátarendszerek

Tehát a merev test bármely $P(x, y, z)$ pontjának koordinátái az inerciarendszerben meghatározhatók, vagyis az egész merev test helyzete a térben ismeretes, ha a testhez rögzített rendszer origójának koordinátái (a, b, c) és tengelyeinek 9 irány-koszinusza ismeretes. A 9 iránykoszinusz közül a 6 ortogonalitási reláció folytán csak 3 független, úgyhogy most is 6 adat szükséges a merev test helyzetének meghatározásához.

A merev test mozgása ismeretes, ha a, b, c és α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ mint az idő függvényei ismeretesek. Ezek ismeretével a merev test bármely $P(x, y, z)$ pontjának sebességét kiszámíthatjuk, ha P-nek a térben nyugvó x_1, y_1, z_1 rendszerre vonatkozó x_1, y_1, z_1 koordinátáit az idő szerint differenciáljuk. P a merev test pontja, tehát koordinátái a merev testhez rögzített rendszerben változatlanok, ezért a differenciálásnál a, b, c, α_i, β_i, γ_i változók, x, y, z pedig állandók. Tehát a sebesség komponensei:

$$\begin{aligned} v_{x_1} &= \dot{x}_1 = \dot{a} + \dot{\alpha}_1 x + \dot{\alpha}_2 y + \dot{\alpha}_3 z, \\ v_{y_1} &= \dot{y}_1 = \dot{b} + \dot{\beta}_1 x + \dot{\beta}_2 y + \dot{\beta}_3 z, \\ v_{z_1} &= \dot{z}_1 = \dot{c} + \dot{\gamma}_1 x + \dot{\gamma}_2 y + \dot{\gamma}_3 z. \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Ezek a pont sebességének komponensei az 1-es rendszerben. Az index nélküli rendszerben a sebesség zérus, mert a pont itt nyugszik. De nem zérus a pont se-

$$-\frac{zy}{\rho^2}+\frac{zy}{\rho^2}=0.$$

Tehát a sebesség merőleges az x-tengelyre bocsátott merőlegesre és arányos az x-tengelytől való távolsággal, azaz csakugyan olyan, mint amely az x-tengely körüli p szögsebességű forgásból származik.

Tehát p az instantán x-tengely körüli szögsebesség, és hasonlóan nyerjük, hogy q az y- és r a z-tengely körüli szögsebesség. Így analitikailag ugyanarra az eredményre jutottunk, mint a geometriai szemlélet útján. Egyúttal megkaptuk a szögsebesség komponenseit mint az iránykoszinuszok, ill. azok deriváltjainak függvényeit

$$\begin{aligned} p &= \dot{\alpha}_2\alpha_3 + \dot{\beta}_2\beta_3 + \dot{\gamma}_2\gamma_3, \\ q &= \dot{\alpha}_3\alpha_1 + \dot{\beta}_3\beta_1 + \dot{\gamma}_3\gamma_1, \\ r &= \dot{\alpha}_1\alpha_2 + \dot{\beta}_1\beta_2 + \dot{\gamma}_1\gamma_2. \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

E formulák előnye, hogy szimmetrikusak, de hátrányuk, hogy 9 iránykoszinuszt tartalmaznak, amelyek közül csak 3 független. Ezért célszerű az iránykoszinuszokat és p, q, r-et 3 független paraméterrel, szöggel kifejezni. Ez a 3 független szög a 3 *Euler*-féle szög, amelyek bevezetésével a szimmetria ugyan elvész, ezzel szemben viszont a 3 szög egymástól független.

Az Euler-féle szögek

Legyenek megint a merev testhez rögzített rendszer tengelyei x, y, z. A testhez rögzített origóban vonjunk az x, y, z alaprendszerrel párhuzamos tengelyeket, X, Y, Z. Feladatunk az x, y, z koordinátarendszer fekvését az X, Y, Z rendszerben lehetőleg egyszerűen megadni. Az X, Y, Z rendszert 3 forgással átvisszük az x, y, z rendszerbe. E három elforgás szögeit *Euler-féle szögek*nek nevezzük. Az xy és XY síkok metszésvonalát nevezzük csomóvonalnak és jelöljük OM-mel, ez átmegy az origón. A csomóvonal két iránya közül azt választjuk pozitívnak, amely körül 180°-nál nem nagyobb pozitív forgással Z-t átvihetjük z-be. Ezek után végezzük sorban a következő pozitív forgásokat.

1. A Z körül végezzünk olyan forgást, mely X-et a csomóvonalba viszi át. E forgás szögét, vagyis az X és OM által alkotott szöget nevezzük ψ-nek.

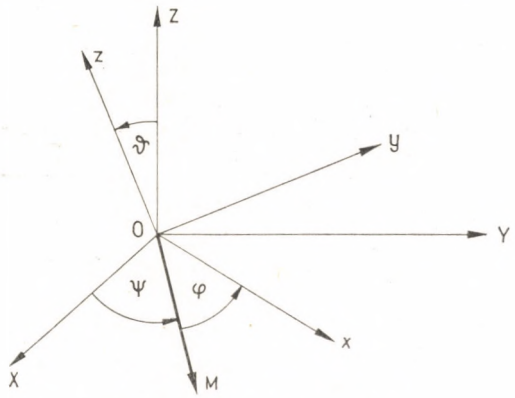
2. A csomóvonal (most már X) körül végezzünk olyan forgást, mely Z-t átviszi z-be. E forgás szögét, vagyis a Z és z tengelyek által alkotott szöget nevezzük ϑ-nak.

Most már a két z-tengely és a két xy-sík összeesik. Ha a két rendszer egyező orientációjú, mindkettő jobb- vagy mindkettő balsodrású, akkor a két rendszer teljes koincidenciája még egy forgatással érhető el, különben még egy tükrözésre is

szükség van. Feltéve, hogy a két rendszer orientációja ugyanaz, ez az utolsó forgatás a következő:

3. A most már összeeső Z, z tengelyek körül végezzünk olyan forgást, mely X-et (amely most összeesik a csomóvonallal) x-be viszi át. E forgás szögét, vagyis a csomóvonal és az x-tengely által alkotott szöget nevezzük ϕ-nek.

Az így definiált ψ, ϑ, ϕ szögek egyértelműen jellemzik a két koordinátarendszer egymáshoz viszonyított fekvését, vagyis ha az x, y, z koordinátarendszert a térben adottnak tekintjük, akkor ψ, ϑ, ϕ meghatározzák az x, y, z rendszer helyzetét, ha ismerjük a kezdőpontjának helyzetét. Feladatunk az iránykoszinuszokat ψ, ϑ, ϕ-



58. ábra. Az Euler-féle szögek

vel mint független paraméterekkel kifejezni. Azok a transzformációs formulák, melyek az X, Y, Z rendszert átviszik x, y, z-be, a következők

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ Y &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ Z &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

ahol X, Y, Z, ill. x, y, z egy pont koordinátáit jelentik az X, Y, Z, ill. az x, y, z rendszerben. a, b, c most zérus, mert a két rendszer kezdőpontja közös.

Ezt a transzformációt az előbbi 3 transzformációból tesszük össze, melyek mindegyike egy síkbeli forgatás ψ, ϑ, ill. ϕ szöggel.

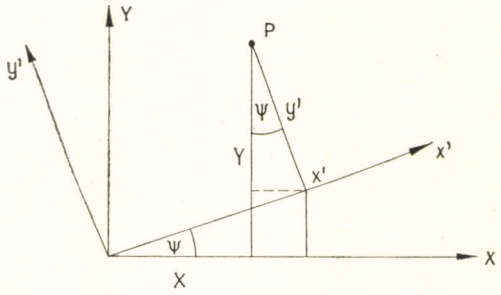
Az első transzformáció Z körüli forgás volt. Eközben a pontok z koordinátái nem változnak meg, csak az XY síkban történik egy ψ szögű elforgatás. Tehát

$$\begin{aligned} X &= x' \cos\psi - y' \sin\psi, \\ Y &= x' \sin\psi + y' \cos\psi, \\ Z &= z', \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

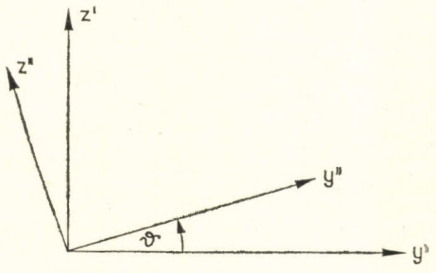
amint ez az 59. ábrából közvetlenül látható.

A másik transzformáció az $x = x'$ tengely körüli ϑ szögű forgás

$$x' = x'',$$
$$y' = y'' \cos\vartheta - z'' \sin\vartheta, \tag{4.1.17}$$
$$z' = y'' \sin\vartheta + z'' \cos\vartheta.$$



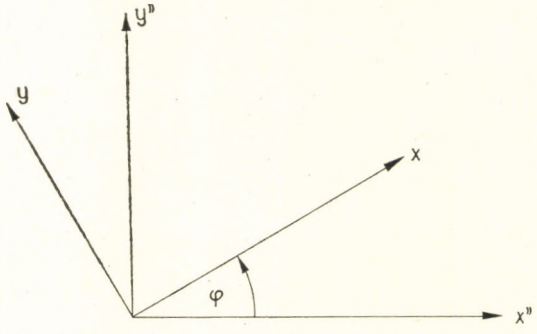
59. ábra. A Z-tengely körüli forgás



60. ábra. Az x'-tengely körüli forgás

A harmadik transzformáció a z''-tengely körüli ϕ forgással az x'', y'', z'' rendszert átviszi x, y, z-be

$$x'' = x\cos\phi - y\sin\phi,$$
$$y'' = x\sin\phi + y\cos\phi, \tag{4.1.18}$$
$$z'' = z.$$



61. ábra. A z''-tengely körüli forgás

x', y', z' és x'', y'', z'' (1.17) és (1.18) egyenletekkel adott kifejezéseit (1.16)-ba helyettesítve nyerjük:

$$X = (x\cos\phi - y\sin\phi)\cos\psi - [(x\sin\phi + y\cos\phi)\cos\vartheta - z\sin\vartheta]\sin\psi,$$
$$Y = (x\cos\phi - y\sin\phi)\sin\psi + [(x\sin\phi + y\cos\phi)\cos\phi - z\sin\vartheta]\cos\psi,$$
$$Z = (x\sin\phi + y\cos\phi)\sin\vartheta + z\cos\vartheta.$$

Rendezve x, y, z szerint

$$X = (\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi\cos\vartheta)x + (-\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\sin\psi\cos\vartheta)y + \\ + (\sin\psi\sin\vartheta)z,$$

$$Y = (\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\psi\cos\vartheta)x + (-\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\psi\cos\vartheta)y - \\ - (\cos\psi\sin\vartheta)z, \tag{4.1.19}$$

$$Z = (\sin\phi\sin\vartheta)x + (\cos\phi\sin\vartheta)y + (\cos\vartheta)z.$$

Összehasonlítva az (1.19) kifejezést az (1.15) stb. transzformációs formulákkal, a megfelelő együtthatók egyenlőségéből nyerjük, hogy

$$\alpha_1 = \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi\cos\vartheta, \qquad \beta_1 = \cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\psi\cos\vartheta,$$
$$\alpha_2 = -\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\sin\psi\cos\vartheta, \qquad \beta_2 = -\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\psi\cos\vartheta,$$
$$\alpha_3 = \sin\psi\sin\vartheta, \qquad \beta_3 = -\cos\psi\sin\vartheta,$$

$$\gamma_1 = \sin\phi\sin\vartheta,$$
$$\gamma_2 = \cos\phi\sin\vartheta, \tag{4.1.20}$$
$$\gamma_3 = \cos\vartheta.$$

Ezekután fejezzük ki p, q, r-et az *Euler*-féle szögekkel. Ha az (1.14) kifejezésben kijelölt műveleteket végrehajtjuk, akkor nyerjük

$$p = \dot\psi\sin\vartheta\sin\phi + \dot\vartheta\cos\phi,$$
$$q = \dot\psi\sin\vartheta\cos\phi - \dot\vartheta\sin\phi,$$
$$r = \dot\phi + \dot\psi\cos\vartheta.$$

Ezek az egyenletek szolgáltatják p, q, r-et mint az *Euler*-féle szögek, ill. azok deriváltjainak függvényeit. Ezekből az egyenletekből egyszerű számítással megállapíthatjuk ψ, $\dot\vartheta$, $\dot\phi$-ot mint p, q, r függvényét. Így kapjuk

$$\dot\vartheta = p\cos\phi - q\sin\phi,$$
$$\dot\psi = (p\sin\phi + q\cos\phi)\frac{1}{\sin\vartheta}, \tag{4.1.21}$$
$$\dot\phi = r - \operatorname{ctg}\vartheta\,(p\sin\phi + q\cos\phi).$$

Ha p, q, r ismeretesek, akkor ezekből a formulákból integrációval meghatározhatjuk ψ, ϑ, ϕ-t mint az idő függvényét, ami tulajdonképpen a végső célunk.

2. §. A merev test mozgásegyenletei

A merev test helyzetét 6 adat határozza meg, tehát mozgásának leírására 6 egyenlet szükséges. A tömegközéppont mozgására és a rendszer impulzusmomentumára 3–3, azaz összesen 6 egyenletet ismerünk, amelyek vektoralakban a következők

$$M\ddot{\mathbf{r}}_0 = \sum_i \mathbf{K}_i, \tag{4.2.1}$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{F}. \tag{4.2.2}$$

M a merev test tömege, $\mathbf{r}_0$ a tömegközépponthoz húzott rádiuszvektor, $\mathbf{K}_i$ a merev test egyes tömegpontjaira ható külső erő (a 0 indexet most elhagytuk), $\mathbf{N}$ az impulzusmomentum, $\mathbf{F}$ pedig a külső erők forgatómomentuma. Ezek az egyenletek nemcsak a merev pontrendszerre, ill. merev testre érvényesek, hanem bármilyen pontrendszerre fennállnak. A merev pontrendszer, ill. merev test mozgását azonban ezek az egyenletek már teljesen meghatározzák, ugyanis a fenti egyenletek száma 6, vagyis ugyanannyi, mint amennyi a merev test mozgásának leírásához szükséges. Ezek az egyenletek tehát a merev test mozgásegyenletei.

A következőkben a merev testnek egy rögzített tengely körüli és egy rögzített pont körüli mozgásával foglalkozunk. Ezeknél a mozgásoknál a merev test tömegközéppontjának mozgása ismertnek tekinthető, tehát csak a (2.2) egyenletekre lesz szükségünk a mozgás tárgyalásánál.

A rögzített tengely körüli forgásnál a merev test helyzetét egy adat már meghatározza, tehát a mozgás leírására egy egyenlet elegendő. Ha a térben vagy a testhez rögzített koordinátarendszert úgy választjuk meg, hogy x-tengelye összeessen a forgástengellyel, akkor, mivel $\mathbf{N}$ és $\mathbf{F}$ a forgástengely irányába esnek, a (2.2) egyenlet a következőre redukálódik $\frac{dN_x}{dt} = F_x$ és ez az egyenlet a mozgásegyenlet.

A pont körüli mozgásnál a merev test helyzetét 3 adat határozza meg, a mozgás meghatározására ekkor ismét a (2.2) egyenlet szolgál, mely ekkor 3 egyenletet reprezentál.

3. §. Merev test forgása rögzített tengely körül

Mozgásegyenlet

Rögzített tengely körül forgó merev test mozgásegyenlete, mint láttuk,

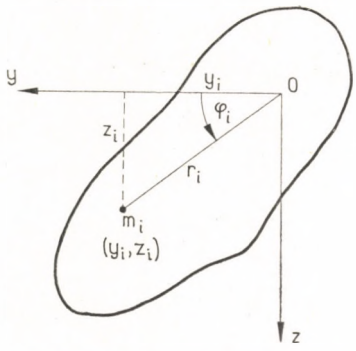
$$\frac{dN_x}{dt} = F_x.$$

Ezt felírhatjuk a *d'Alembert*-elv segítségével is. Válasszuk a forgástengelyt a koordinátarendszer x-tengelyének, vagyis a koordinátarendszer origója legyen rajta a forgástengelyen. A rajzon az x-tengely felénk mutat.

Legyen az i-edik pont tömege m_i, koordinátái y_i, z_i, távolsága a forgástengelytő r_i. A tegelytől az m_i ponthoz húzott iránynak az y-tengellyel való hajlásszöge legyen ϕ_i. Ekkor

$$y_i = r_i \cos\phi_i,$$

$$z_i = r_i \sin\phi_i.$$



62. ábra. **Merev test** forgása egy rögzített tengely körül

(Az ábrán az egyszerűség kedvéért az i-edik pontot az yz síkban vettük fel.) Ha a merev test az x-tengely körül végez forgást, akkor az i-edik pont csak olyan mozgást végezhet, amelynél távolsága az x-tengelytől állandó marad. Tehát a virtuális elmozdulás az r_i sugarú köríven történik. Jelöljük r_i elforgásának szögét $\delta\phi$-vel (az indexet elhagyhatjuk, mivel a merev test bármely pontjának a forgástengelytől való távolsága ugyanakkora szöggel fordul el). Képezzük a koordináták megváltozását, ha ϕ_i megváltozik

$$\delta y_i = -r_i \sin\phi_i \, \delta\phi = -z_i \delta\phi,$$

$$\delta z_i = r_i \cos\phi_i \, \delta\phi = y_i \delta\phi. \tag{4.3.1}$$

Továbbá, mivel x a forgástengely, $\delta x_i = 0$.

Mielőtt D'ALEMBERT elvét matematikai megfogalmazásban felírnánk, számítsuk ki a virtuális munkát egy δx_i, δy_i, δz_i virtuális elmozdulásnál

$$\delta A = \sum_i (K_{ix}\delta x_i + K_{iy}\delta y_i + K_{iz}\delta z_i) = \sum_i (y_i K_{iz} - z_i K_{iy})\delta\phi = F_x \delta\phi, \tag{4.3.2}$$

ahol F_x a forgatómomentum x komponense. Tehát a végzett munka a forgatómomentum forgástengely irányába eső komponensének és az elforgás szögének szorzata. Ez önmagában is fontos eredmény.

Ezek után alkalmazzuk D'ALEMBERT elvét, amely szerint

$$\sum \{(K_{ix} - m_i \ddot{x}_i)\delta x_i + (K_{iy} - m_i \ddot{y}_i)\delta y_i + (K_{iz} - m_i \ddot{z}_i)\delta z_i\} = 0.$$

Átalakítva nyerjük

$$\delta A - \sum_i m_i(\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i) = 0.$$

Felhasználva (3.1)-t és (3.2)-t. nyerjük

$$\{F_x - \sum_i m_i(y_i \ddot{z}_i - z_i \ddot{y}_i)\}\delta\phi = 0.$$

Mivel ez az egyenlet $\delta\phi$ minden értékénél fennáll, következik, hogy

$$F_x = \sum_i m_i(y_i \ddot{z}_i - z_i \ddot{y}_i) = \frac{d}{dt} \sum_i m_i(y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = \frac{dN_x}{dt}, \tag{4.3.3}$$

vagyis

$$F_x = \frac{dN_x}{dt}.$$

Ez az egyenlet, melyet a *d'Alembert*-elvből nyertünk, az impulzusmomentum és a forgatómomentum közti ismeretes összefüggést fejezi ki.

Fejezzük ki $\dot{y}_i$-ot és $\dot{z}_i$-ot

$$\dot{y}_i = (r_i \sin\phi_i)\dot{\phi} = -z_i\dot{\phi}, \qquad \dot{z}_i = (r_i \cos\phi_i)\dot{\phi} = y_i\dot{\phi},$$

ahol $\dot{\phi}_i$ helyett $\dot{\phi}$-ot írtunk, mert $\dot{\phi}_i$ az összes pontra ugyanaz, tehát az index elhagyható. $\dot{y}_i$ és $\dot{z}_i$ kifejezéseit a fenti egyenletbe helyettesítve nyerjük

$$F_x = \frac{d}{dt} \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2)\dot{\phi}, \tag{4.3.4}$$

$$y_i^2 + z_i^2 = r_i^2,$$

tehát $\sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) = \sum_i m_i r_i^2 = \Theta$. Θ-t nevezzük a test tehetetlenségi momentumának; ez az időtől független, tehát

$$F_x = \Theta \frac{d\dot{\phi}}{dt} = \Theta\ddot{\phi}. \tag{4.3.5}$$

Ez a tengely körül forgó merev test mozgásegyenlete, amely nagyon hasonlít a pont mozgásegyenleteire. Ez x-re vonatkozóan a következő alakú

$$m\ddot{x} = K_x.$$

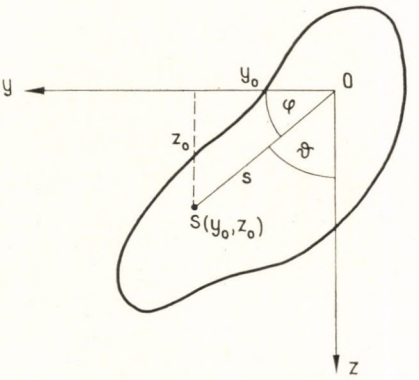
Tehát a tömeg helyébe a tehetetlenségi momentum, a gyorsulás helyébe a szöggyorsulás, az erő helyébe pedig a forgatómomentum lép.

A fizikai inga

Fizikai ingának olyan merev testet nevezünk, amely a nehézségi erő hatása alatt vízszintes tengely körül forog (leng). Alkalmazzuk egyenletünket arra az esetre, midőn a külső erő a nehézségi erő. A forgástengely, x, legyen vízszintes, a z-tengely pedig mutasson függőlegesen lefelé.

Ekkor $K_{ix} = 0$, $K_{iy} = 0$, $K_{iz} = m_i g$,

$$F_x = \sum_i m_i g y_i = g \sum_i m_i y_i.$$



63. ábra. A fizikai inga

A tömegközéppont y koordinátája

$$y_0 = \frac{\sum_i m_i y_i}{M}, \qquad M y_0 = \sum_i m_i y_i,$$

ahol M a merev test tömege. Ezt a fenti egyenletbe helyettesítve nyerjük

$$F_x = M g y_0.$$

Tehát a nehézségi erő forgatómomentuma akkora, mintha a tömegközéppontban elhelyezett M tömegű pontra hatna a nehézségi erő. Ha a tömegközéppontnak a forgástengelytől való távolsága s, a z tengellyel ϑ szöget alkot, akkor

$$y_0 = s \sin \vartheta$$

és

$$F_x = Mgs \sin \vartheta.$$

Még $\ddot{\phi}$-ot kell $\ddot{\vartheta}$-tal kifejezni. Fennáll, hogy

$$\vartheta + \phi = \frac{\pi}{2},$$

innen

$$\ddot{\phi} = -\ddot{\vartheta}.$$

Tehát a mozgásegyenlet

$$-\Theta\ddot{\vartheta} = Mgs\sin\vartheta,$$

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{Mgs}{\Theta}\sin\vartheta. \tag{4.3.6}$$

Ez az egyenlet határozza meg a nehézségi erő hatása alatt vízszintes tengely körül forgó (lengő) merev test, az ún. fizikai inga mozgását. Ha ϑ kicsi, akkor

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{Mgs}{\Theta}\vartheta,$$

$$\vartheta = a\cos\left(\sqrt{\frac{Mgs}{\Theta}}\,t + \alpha\right),$$

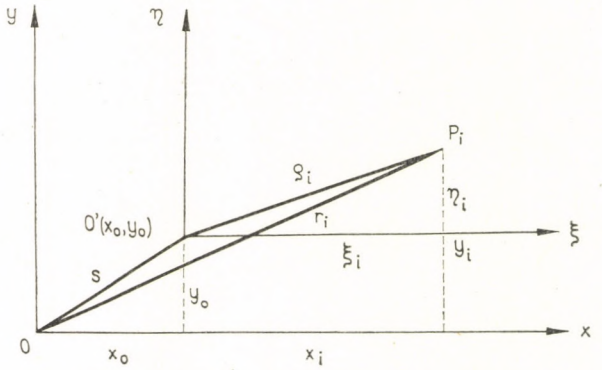
$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mgs}{\Theta}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{Mgs}}. \tag{4.3.7}$$

Tehát a mozgás periodikus és a periódusra az elemekből ismert formulát találtuk.

4. §. Párhuzamos tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi momentumok közti összefüggés

Először összefüggést állapítunk meg egy t-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi momentum és egy vele párhuzamos, a tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi momentum között. A t-tengely legyen a z-tengely, ekkor a t-re vonatkozó tehetetlenségi momentum

$$\Theta = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2).$$



64. ábra. A P_i pont koordinátái a párhuzamos tengelyű koordinátarendszerekben

Toljuk el a koordinátarendszer origóját a merev test tömegközéppontjába úgy, hogy a tengelyek párhuzamosak maradjanak és jelöljük az új koordinátákat ξ_i, η_i-vel. A tömegközéppont koordinátái az x, y rendszerben legyenek x_0, y_0. (Az ábrán az egyszerűség kedvéért az O, O' és P_i pontokat egy síkban vettük fel.) Mint az ábrából látható, a koordináták között a következő kapcsolat áll fenn

$$x_i = x_0 + \xi_i,$$

$$y_i = y_0 + \eta_i.$$

Tehát

$$\Theta = \sum_i m_i \{(x_0 + \xi_i)^2 + (y_0 + \eta_i)^2\} = \sum_i m_i (x_0^2 + y_0^2) +$$

$$+ \sum_i m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2) + 2\sum_i m_i x_0 \xi_i + 2\sum_i m_i y_0 \eta_i,$$

$$\Theta = (x_0^2 + y_0^2) \sum_i m_i + \sum_i m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2) + 2x_0 \sum_i m_i \xi_i + 2y_0 \sum_i m_i \eta_i. \qquad (4.4.1)$$

Vezessük be a következő jelöléseket

$$x_0^2 + y_0^2 = s^2, \quad \sum_i m_i = M, \quad \sum_i m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2) = \Theta_0,$$

ahol s a két tengely egymástól való távolsága, M a merev test tömege, Θ_0 a t-tengellyel párhuzamos és a tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi momentum.

Mivel a tömegközéppont a ξ, η rendszer origója, koordinátái (ξ_0, η_0) a ξ, η rendszerben zérussal egyenlőek, tehát

$$\sum_i m_i \xi_i = M\xi_0 = 0, \quad \sum_i m_i \eta_i = M\eta_0 = 0.$$

Mindezeket figyelembe véve, a (4.1) egyenlet a következőképpen alakul

$$\Theta = \Theta_0 + s^2 M. \qquad (4.4.2)$$

Tehát egy merev testnek bármely tengelyre vonatkozó tehetetlenségi momentuma és tömegközéppontján átmenő, az előbbivel párhuzamos tengelyre vonatkozó tehetetlenségi momentuma között összefüggés áll fenn. Ez az ún. *Steiner-féle tétel.*

Ha Θ_1 és Θ_2 két tetszőleges, de egymással párhuzamos tengelyre vonatkozó tehetetlenségi momentum, akkor

$$\Theta_1 = \Theta_0 + s_1^2 M,$$

$$\Theta_2 = \Theta_0 + s_2^2 M,$$

ahol s_1 és s_2 a tengelyeknek a velük párhuzamos és a tömegközépponton átmenő tengelytől való távolsága. Ebből a két egyenletből nyerjük, hogy

$$\Theta_1 - \Theta_2 = (s_1^2 - s_2^2)M,$$

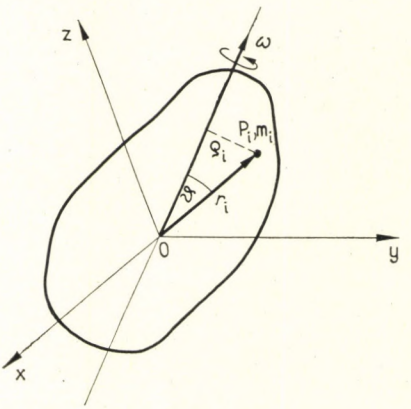
$$\Theta_1 = \Theta_2 + (s_1^2 - s_2^2)M. \qquad (4.4.3)$$

Ez az egyenlet adja meg az összefüggést két tetszés szerinti, egymással párhuzamos tengelyre vonatkozó tehetetlenségi momentum között.

A továbbiak folyamán rögzített tengely körül forgó merev test kinetikus energiájának kifejezését írjuk fel, amelynek kapcsán a tehetetlenségi momentumra vonatkozó fontos eredményekhez jutunk.

5. §. Rögzített tengely körül forgó merev test kinetikus energiája

Végezzen a merev test egy adott és a térben rögzített tengely körül ω szögsebességű forgást. Rögzítsünk a merev testhez egy x, y, z koordinátarendszert, amelynek origója, O, a forgástengelyen van.



65. ábra. Rögzített tengely körül forgó merev test

A merev test egyik P_i pontjának sebessége egy tetszőleges nyugvó rendszerben, amint a kinematikában láttuk,

$$\mathbf{v}_i = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i],$$

ahol $\mathbf{r}_i$ az O-ból P_i-hez húzott rádiuszvektor.

Tehát a merev test kinetikus energiája nyugvó rendszerben a következő

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i]^2. \tag{4.5.1}$$

T-t kétféle alakban állíthatjuk elő. Vegyük figyelembe, hogy

$$[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i]^2 = | [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i] |^2$$

és hogy

$$| [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i] | = \omega | \mathbf{r}_i | \sin \vartheta.$$

$|\mathbf{r}_i| \sin\vartheta$ nem más, mint P_i-nek a tengelytől való távolsága, ρ_i, tehát

$$[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i]^2 = \rho_i^2 \omega^2,$$

vagyis

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i \rho_i^2 = \frac{1}{2} \Theta_\omega \omega^2, \tag{4.5.2}$$

ahol

$$\Theta_\omega = \sum_i m_i \rho_i^2.$$

Θ_ω az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektorral egybeeső tengelyre vonatkozó tehetetlenségi momentum.

T másik alakját úgy nyerhetjük, ha (5.1)-et a következő módon fejtjük ki.

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \{(\omega_y z_i - \omega_z y_i)^2 + (\omega_z x_i - \omega_x z_i)^2 + (\omega_x y_i - \omega_y x_i)^2\}.$$

Ha a kijelölt műveleteket végrehajtjuk és az egyes pontoktól független szögsebességkomponenseket a szumma elé írjuk, nyerjük, hogy

$$2T = \omega_x^2 \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) + \omega_y^2 \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) + \omega_z^2 \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) -$$

$$- 2\omega_y \omega_z \sum_i m_i y_i z_i - 2\omega_z \omega_x \sum_i m_i z_i x_i - 2\omega_x \omega_y \sum_i m_i x_i y_i. \tag{4.5.3}$$

Tehát $2T$ a szögsebesség komponenseinek homogén másodfokú kifejezése, vagyis kvadratikus alakja a merev test mozgási állapotától független együtthatókkal. Vezessük be ezen együtthatók számára a következő jelöléseket

$$\begin{aligned} \Theta_{xx} &= \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), & \Theta_{xy} &= \Theta_{yx} = \sum_i m_i x_i y_i, \\ \Theta_{yy} &= \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2), & \Theta_{yz} &= \Theta_{zy} = \sum_i m_i y_i z_i, \\ \Theta_{zz} &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2), & \Theta_{zx} &= \Theta_{xz} = \sum_i m_i z_i x_i. \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

A Θ_{xx}, Θ_{yy}, Θ_{zz} mennyiségeket nevezzük rendre az x, y, z tengelyekre vonatkozó *tehetetlenségi momentum*oknak, a Θ_{xy}, Θ_{yz}, Θ_{zx} mennyiségeket pedig *deviációs momentum*oknak nevezzük. A tehetetlenségi momentumok pozitív mennyiségek, mint alakjukból látható, a deviációs momentum azonban lehet pozitív, negatív vagy zérus.

Ezekkel a jelölésekkel nyerjük, hogy

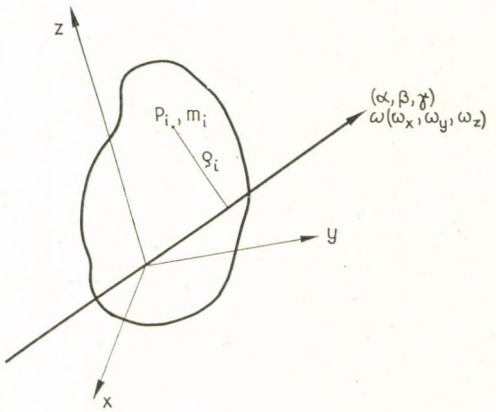
$$2T = \Theta_{xx}\omega_x^2 + \Theta_{yy}\omega_y^2 + \Theta_{zz}\omega_z^2 - 2\Theta_{yz}\omega_y\omega_z - 2\Theta_{zx}\omega_z\omega_x - 2\Theta_{xy}\omega_x\omega_y. \tag{4.5.5}$$

Ez, ill. az (5.3) kifejezés szolgáltatja T másik alakját, mely szerint fix tengely körül forgó merev test kinetikus energiájának kétszerese a szögsebesség komponenseinek kvadratikus alakja, melyben az együtthatók a tehetetlenségi, ill. deviációs momentumok.

6. §. A tehetetlenségi momentum függése a forgástengely irányításától

A tehetetlenségi momentumok és a deviációs momentumok nem függenek a merev test mozgási állapotától, hanem csak a tömegeloszlástól és a koordinátarendszer választásától, vagyis attól, hogy mely forgástengelyekre vonatkoztatjuk őket.

Egymással párhuzamos tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi momentumok közti összefüggéssel már foglalkoztunk és ezekre vonatkozóan egy fontos tételt állapítottunk meg. Ezekután állapítsuk meg, hogyan lehet meghatározni egy tetsző-



66. ábra. A tehetetlenségi momentum meghatározása

leges, de a testhez rögzített koordinátarendszer origóján átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi momentumot a Θ_{xx}, Θ_{yy}, Θ_{zz}, Θ_{xy}, Θ_{yz}, Θ_{zx} mennyiségekkel. Az összefüggés, melyet nyerni fogunk, egyúttal megadja a tehetetlenségi momentum függését a forgástengely irányításától. Rögzítsünk tehát a merev testhez egy (x, y, z) rendszert, a forgástengely pedig menjen át az (x, y, z) rendszer origóján.

Ha a merev test adott tengely körül ω szögsebességgel forog, akkor a kinetikus energiája (5.2) szerint

$$T = \frac{1}{2}\Theta_\omega \omega^2,$$

ahol Θ_ω a forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi momentum. Az ω szögsebességvektor iránya egyúttal a forgástengely iránya. Ha a forgástengely iránykoszinuszai α, β, γ, akkor tehát

$$\frac{\omega_x}{\omega} = \alpha, \qquad \frac{\omega_y}{\omega} = \beta, \qquad \frac{\omega_z}{\omega} = \gamma.$$

Az (5.2) egyenletből nyerjük, hogy $2T = \Theta_\omega \omega^2$. Az (5.5) egyenlet $2T$ számára egy kifejezést ad, amely szerint $2T$ a szögsebességkomponensek kvadratikus alakja. Tehát a két kifejezést egyenlővé téve nyerjük, hogy

$$\Theta_\omega \omega^2 = \Theta_{xx}\omega_x^2 + \Theta_{yy}\omega_y^2 + \Theta_{zz}\omega_z^2 - 2\Theta_{yz}\omega_y\omega_z - 2\Theta_{zx}\omega_z\omega_x - 2\Theta_{xy}\omega_x\omega_y.$$

ω^2-tel osztva adódik

$$\Theta_\omega = \Theta_{xx}\left(\frac{\omega_x}{\omega}\right)^2 + \Theta_{yy}\left(\frac{\omega_y}{\omega}\right)^2 + \Theta_{zz}\left(\frac{\omega_z}{\omega}\right)^2 - 2\Theta_{yz}\frac{\omega_y}{\omega}\frac{\omega_z}{\omega} -$$

$$- 2\Theta_{zx}\frac{\omega_z}{\omega}\frac{\omega_x}{\omega} - 2\Theta_{xy}\frac{\omega_x}{\omega}\frac{\omega_y}{\omega},$$

$$\Theta_{\alpha\beta\gamma} = \Theta_{xx}\alpha^2 + \Theta_{yy}\beta^2 + \Theta_{zz}\gamma^2 - 2\Theta_{yz}\beta\gamma - 2\Theta_{zx}\gamma\alpha - 2\Theta_{xy}\alpha\beta, \quad (4.6.1)$$

ahol Θ_ω helyett $\Theta_{\alpha\beta\gamma}$-t írtunk.

Ezzel a problémát megoldottuk. Valamely tengelyre vonatkozó tehetetlenségi momentum kifejezhető, mint a koordinátatengelyekre vonatkozó tehetetlenségi és deviációs momentumok lineáris függvénye, melyben az együtthatók a kérdéses tengely iránykoszinuszainak négyzetei és szorzatai. Ha tehát a 3 tehetetlenségi és 3 deviációs momentumot, azaz összesen 6 mennyiséget ismerünk, akkor bármely tengelyre vonatkozó tehetetlenségi momentumot kiszámíthatjuk.

Ha az α, β, γ tengely egybeesik valamelyik koordinátatengellyel, akkor kifejezésük az illető koordinátatengelyre vonatkozó tehetetlenségi momentumot szolgáltatja. Pl. ha α, β, γ rendre 1, 0, 0, akkor

$$\Theta_{\alpha\beta\gamma} = \Theta_{1,0,0} = \Theta_{xx}.$$

Az iránytól való függést tekintve a tehetetlenségi momentum az iránykoszinuszok homogén másodfokú függvénye (kvadratikus alakja), amelyben az együtthatók a tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi és deviációs momentumok.

Vessük össze eredményünket a vektorokra vonatkozó analóg kifejezéssel. Ha adva vannak valamely vektor derékszögű komponensei, vagyis a koordinátatengelyekre való vetületei, akkor a vektornak valamely α, β, γ irányra való vetületét, vagyis valamely α, β, γ irányú komponensét a következőképpen kapjuk meg

$$A_{\alpha\beta\gamma} = A_x\alpha + A_y\beta + A_z\gamma.$$

$A_{\alpha,\beta,\gamma}$ kiszámításához csak 3 adatra (A_x, A_y, A_z-re), $\Theta_{\alpha,\beta,\gamma}$ kiszámításához ellenben 6 adatra van szükség ($\Theta_{xx}, \Theta_{yy}, \Theta_{zz}, \Theta_{xy}, \Theta_{yz}, \Theta_{zx}$). $A_{\alpha,\beta,\gamma}$ az iránykoszinuszok lineáris függvénye, $\Theta_{\alpha,\beta,\gamma}$ pedig az iránykoszinuszok kvadratikus alakja.

7. §. A tehetetlenségi ellipszoid

Mérjük fel egy kezdőponttól minden α, β, γ irányban a

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\Theta_{\alpha\beta\gamma}}}$$

hosszúságot. Ezzel minden α, β, γ irányban egy ρ abszolút értékű vektort definiáltunk, amelynek komponensei, vagyis a felmért távolság végpontjának koordinátái

$$\xi = \alpha\rho = \frac{\alpha}{\sqrt{\Theta_{\alpha\beta\gamma}}},$$

$$\eta = \beta\rho = \frac{\beta}{\sqrt{\Theta_{\alpha\beta\gamma}}}, \tag{4.7.1}$$

$$\zeta = \gamma\rho = \frac{\gamma}{\sqrt{\Theta_{\alpha\beta\gamma}}}.$$

Osszuk a (6.1) egyenletet $\Theta_{\alpha\beta\gamma}$-val, ekkor nyerjük

$$1 = \Theta_{xx}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\Theta_{\alpha\beta\gamma}}}\right)^2 + \Theta_{yy}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\Theta_{\alpha\beta\gamma}}}\right)^2 + \Theta_{zz}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\Theta_{\alpha\beta\gamma}}}\right)^2 - 2\Theta_{xy}\frac{\alpha}{\sqrt{\Theta_{\alpha\beta\gamma}}}\frac{\beta}{\sqrt{\Theta_{\alpha\beta\gamma}}} -$$

$$- 2\Theta_{yz}\frac{\beta}{\sqrt{\Theta_{\alpha\beta\gamma}}}\frac{\gamma}{\sqrt{\Theta_{\alpha\beta\gamma}}} - 2\Theta_{zx}\frac{\gamma}{\sqrt{\Theta_{\alpha\beta\gamma}}}\frac{\alpha}{\sqrt{\Theta_{\alpha\beta\gamma}}},$$

$$1 = \Theta_{xx}\xi^2 + \Theta_{yy}\eta^2 + \Theta_{zz}\zeta^2 - 2\Theta_{xy}\xi\eta - 2\Theta_{yz}\eta\zeta - 2\Theta_{zx}\zeta\xi. \tag{4.7.2}$$

Ez egy másodrendű felület egyenlete. Tehát ha minden irányban felmérjük az illető irányú tengelyre vonatkozó tehetetlenségi momentum négyzetgyökének reciprokát, akkor a nyert vektorok végpontjainak koordinátái kielégítik egy másodrendű felület egyenletét, azaz a végpontok rajta vannak a felületen.

Ennek a másodrendű felületnek centruma az origóban van, mert ha a (ξ, η, ζ) pont a felület pontja, akkor a $(-\xi, -\eta, -\zeta)$ pont is az, mert az egyenletben mindenütt a koordináták négyzete vagy kétszeres szorzata szerepel.

Típusára nézve a felület csak ellipszoid lehet, mert $\rho = 1/\sqrt{\Theta}$, vagyis az origóból a felület bármely pontjához vont rádiuszvektor mindig véges, ugyanis Θ bármely tengelyre vonatkozóan O-tól különböző. Tehát a felületnek végtelen távoli pontja nincs, vagyis a felület ellipszoid. Az ellipszoid főtengelyei azonban általában nem fekszenek a koordinátatengelyek irányában, ugyanis a felület egyenletében általában a koordináták kettős szorzatai is szerepelnek.

Tehát arra az érdekes eredményre jutottunk, hogy elő lehet állítani egy olyan ellipszoidot, amelynek centruma az origó, de főtengelyei általában nem a koordinátatengelyek és amelynek az a tulajdonsága, hogy a kezdőponttól a felületig vont rádiuszvektor abszolút értéke a rádiuszvektor irányára mint tengelyre vonatkozó tehetetlenségi momentum négyzetgyökének reciproka. Tehát a legnagyobb főtengely irányához tartozik a legkisebb, a legkisebb főtengely irányához pedig a legnagyobb tehetetlenségi momentum. Ha az ellipszoid gömbbé fajul, akkor minden irányhoz ugyanakkora tehetetlenségi momentum tartozik.

Ezt az ellipszoidot POINSOT nyomán *tehetetlenségi ellipszoid*nak nevezzük. Ha ez az ellipszoid ismeretes, akkor bármely irányú tengelyre vonatkozó tehetet-

lenségi momentumot megállapíthatjuk. Az ellipszoid ismeretéhez az egyenletében szereplő 6 együttható: Q_{xx}, Q_{yy}, Q_{zz}, Q_{xy}, Q_{yz}, Q_{zx} ismeretére van szükségünk.

Az ellipszoidot transzformálhatjuk főtengelyeire, ami alatt azt értjük, hogy egy olyan koordinátarendszerben adjuk meg az egyenletét, melynek tengelyei az ellipszoid főtengelyének irányába esnek. Ez a feladat tisztán matematikai természetű és elvégezhető. Az eredmény, vagyis az ellipszoid egyenletének főtengelyekre transzformált alakja a következő

$$1 = Ax^2 + By^2 + Cz^2,$$

ahol x, y, z az új koordináták, A, B, C pedig az új koordinátatengelyekre, vagyis az ellipszoid főtengelyeire vonatkozó tehetetlenségi momentumok. Ebben az új koordinátarendszerben tehát csak a tehetetlenségi momentumok maradnak meg, a deviációs momentumok eltünnek. Az új koordinátarendszer tengelyére vonatkozó A, B, C tehetetlenségi momentumokat *főtehetetlenségi momentumok*nak, a tengelyeket pedig főtehetetlenségi tengelyeknek nevezzük. Ebben a koordinátarendszerben, mivel a deviációs momentumok eltünnek és a $2T$-re kapott kifejezés a következő alakú

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2. \tag{4.7.3}$$

p, q, r ekkor a szögsebesség komponensei a pillanatnyi főtengelyekre vonatkozóan.

$\Theta_{\alpha\beta\gamma}$ kifejezése pedig

$$\Theta_{\alpha\beta\gamma} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2.$$

Itt most $\Theta_{\alpha\beta\gamma}$ kifejezésében csak 3 adat, A, B, C, szerepel az előbbi 6 adattal szemben, de ez nem ellentmondás, mert ha a főtehetetlenségi momentumokat behozzuk, akkor egy egészen meghatározott irányítású koordinátarendszert kell bevezetni, melyet 3 adat jellemez (a 9 iránykoszinusz közül 3 független). Tehát most is 6 adat határozza meg $\Theta_{\alpha\beta\gamma}$-t.

8. §. Folytonos anyageloszlású testek tehetetlenségi és deviációs momentumai

Egy folytonos tömegeloszlású testet alkalmas módon (pl. síkok seregével) elemi dm tömegű részekre bonthatunk fel, miáltal helyettesíthetjük egy pontrendszerrel. A helyettesítés annál pontosabb, minél finomabb a beosztás, tehát teljesen pontos akkor lesz, ha dm-mel a 0 határra térünk át. Tehát az előbbi formulák érvényben maradnak, csak m_i helyett dm-et, a szumma helyett pedig integrált kell írnunk. Ha figyelembe vesszük, hogy

$$dm = \rho\, dv = \rho\, dxdydz,$$

ahol ρ a sűrűség, amely még lehet a helynek, vagyis x, y, z-nek függvénye, akkor a

következő formulákat kapjuk

$$\begin{aligned}
\Theta_{xx} &= \int (y^2 + z^2)\rho dv = \int\int\int (y^2 + z^2)\,\rho\, dxdydz,\\
\Theta_{yy} &= \int (z^2 + x^2)\rho dv = \int\int\int (z^2 + x^2)\,\rho\, dxdydz,\\
\Theta_{zz} &= \int (x^2 + y^2)\rho dv = \int\int\int (x^2 + y^2)\rho\, dxdydz,\\
\Theta_{yz} &= \int yz\rho\, dv = \int\int\int yz\rho\, dxdydz,\\
\Theta_{zx} &= \int zx\rho\, dv = \int\int\int zx\rho\, dxdydz,\\
\Theta_{xy} &= \int xy\rho\, dv = \int\int\int xy\rho\, dxdydz.
\end{aligned} \tag{4.8.1}$$

Az integrációs határokat a test méretei szabják meg.

Derékszögű koordinátarendszer helyett sokszor célszerű más koordinátarendszert bevezetni. A legegyszerűbben úgy térhetünk át más koordinátákra, hogy az integrandust kifejezzük az új koordinátákban, *dv*-t pedig, mely derékszögű koordináták esetében *dxdydz*-vel egyenlő, természetesen szintén kifejezzük az új koordinátákkal, vagyis megállapítjuk az új koordinátarendszerben a térfogatelemet

9. §. Tetszőleges tengelyre vonatkozó tehetetlenségi momentumok meghatározása

Ha ismerjük a merev test tömegközéppontjára mint centrumra vonatkozó tehetetlenségi ellipszoidot (melyet 6 adat határoz meg), akkor bármilyen, vagyis általában a tömegközépponton nem átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi momentumot egyszerűen határozhatjuk meg a következő módon. Az adott t tengellyel a tömegközépponton át egy t-vel párhuzamos t'-tengelyt húzunk. A t'-re vonatkozó tehetetlenségi momentumot a tehetetlenségi ellipszoidból akár analitikai, akár geometriai úton egyszerűen határozhatjuk meg. Ugyanis, mint láttuk, ez a t'-tengelynek a tömegközéppont és a tehetetlenségi ellipszoid felülete közti darabjából úgy adódik, hogy ennek a távolságnak reciprokát négyzetre emeljük. A t-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi momentumot ezek után már egyszerűen nyerjük STEINER tételéből, mert hiszen t és t' párhuzamosak.

10. §. A merev test egy rögzített pontja körüli mozgása. Az Euler-féle egyenletek

Ha a merev test egy pontja rögzítve van és így a tömegközéppont mozgása ismeretes, akkor a merev test mozgását az impulzusmomentumra vonatkozó tétel,

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{F} \tag{4.10.1}$$

határozza meg. Ez a tétel szolgáltatja ebben a speciális esetben a merev test 3 mozgásegyenletét valamely inerciarendszerre vonatkoztatva.

Célszerű az impulzusmomentum változását nem az inerciarendszerben, hanem a testhez rögzített koordinátarendszerben vizsgálni. Ha a testtel együtt mozgó rendszerben állapítjuk meg az impulzusmomentum változását, akkor a (10.1) egyenlet alapján új összefüggésekhez jutunk, amelyeket *Euler*-féle egyenleteknek nevezünk.

Első feladatunk megállapítani a $d\mathbf{N}/dt$ differenciálhányados értékét a mozgó rendszerre vonatkoztatva. A Coriolis- és centrifugális erők tárgyalásánál a következő összefüggést vezettük le

$$\frac{d'}{dt} = \frac{d}{dt} + [\ , \omega],$$

ahol $\frac{d'}{dt}$ a t szerinti differenciálást jelenti az ω szögsebességgel forgó rendszerben, $\frac{d}{dt}$ pedig t szerinti differenciálást az inerciarendszerben. $\mathbf{N}$-re alkalmazva nyerjük

$$\frac{d'\mathbf{N}}{dt} = \frac{d\mathbf{N}}{dt} + [\mathbf{N}, \omega]. \tag{4.10.2}$$

Ez az egyenlet azt mondja, hogy az $\mathbf{N}$ vektor végpontjának sebességét a testtel együtt ω szögsebességgel forgó rendszerben megkapjuk, ha az $\mathbf{N}$ vektor végpontjának inerciarendszerbeli sebességéhez hozzáadjuk $\mathbf{N}$ és ω vektori szorzatát.

Ezt az egyenletet, tekintettel fontosságára, még más úton is levezetjük. Ha a merev test egy pillanatban a fix ponton átmenő valamely tengely körül az inerciarendszerben ω szögsebességgel forog, akkor a merev test a hozzá rögzített rendszerben nyugszik és a merev testhez rögzített rendszerben az inerciarendszer látszik $-\omega$ szögsebességgel forogni. Pl. a Föld $\frac{2\pi}{1 \text{ nap}}$ abszolút értékű szögsebességgel forog nyugatról keletre, ez számunkra, a Földhöz rögzített lényekre nézve úgy tűnik, hogy a csillagos ég forog ugyanekkora abszolút értékű szögsebességgel keletről nyugatra.

Tehát egy az inerciarendszerben nyugvó $P(\mathbf{r})$ pont sebessége a testhez rögzített rendszerben

$$[-\omega, \mathbf{r}] = [\mathbf{r}, \omega].$$

Ha $P(\mathbf{r})$ az inerciarendszerben már $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ sebességgel mozog, akkor sebessége a testtel együtt mozgó rendszerben

$$\frac{d'\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + [\mathbf{r}, \omega].$$

Ezt az egyenletet az $\mathbf{N}$ vektorra alkalmazva nyerjük a (10.2) egyenletet. Az

inerciarendszerben érvényes (10.1) egyenlet felhasználásából következik, hogy

$$\frac{d'\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{F} + [\mathbf{N}, \boldsymbol{\omega}].$$

A következőkben állandóan a testhez rögzített rendszerben számolunk és így a $\frac{d'\mathbf{N}}{dt}$ mellől a vesszőt elhagyjuk, ekkor egyenletünk így alakul

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = [\mathbf{N}, \boldsymbol{\omega}] + \mathbf{F}. \tag{4.10.3}$$

Ezek az ún. *Euler-féle egyenletek*, amelyek kifejezik az impulzusmomentum változását a merev testtel együtt mozgó koordinátarendszerben.

Irjuk fel az ezzel a vektoregyenlettel ekvivalens 3 skaláris egyenletet. Évégből először is **N** komponenseit határozzuk meg.

$$\mathbf{N} = \sum_i [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{v}_i].$$

Ha $\mathbf{r}_i$ kezdőpontja a koordinátarendszer origója, akkor $\mathbf{r}_i$ komponensei x_i, y_i, z_i, tehát

$$N_x = \sum_i m_i(y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i),$$

$$N_y = \sum_i m_i(z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i),$$

$$N_z = \sum_i m_i(x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i).$$

Ezek után fejezzük ki a sebesség

$$\mathbf{v}_i = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i]$$

komponenseit a szögsebesség komponenseivel

$$\dot{x}_i = \omega_y z_i - \omega_z y_i,$$

$$\dot{y}_i = \omega_z x_i - \omega_x z_i,$$

$$\dot{z}_i = \omega_x y_i - \omega_y x_i.$$

Behelyettesítve ezeket **N** komponenseibe, pl. N_x-be, nyerjük

$$N_x = \sum_i m_i\{y_i(\omega_x y_i - \omega_y x_i) - z_i(\omega_z x_i - \omega_x z_i)\} =$$

$$= \omega_x \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i,$$

$$N_x = \Theta_{xx}\omega_x - \Theta_{xy}\omega_y - \Theta_{xz}\omega_z.$$

Figyelembe véve a kinetikus energia (5.5) kifejezését, látható, hogy

$$N_x = \frac{\partial T}{\partial \omega_x}.$$

Hasonlóan lehet kimutatni, hogy

$$\begin{aligned} N_y &= -\Theta_{yx}\omega_x + \Theta_{yy}\omega_y - \Theta_{yz}\omega_z = \frac{\partial T}{\partial \omega_y}, \\ N_z &= -\Theta_{zx}\omega_x - \Theta_{zy}\omega_y + \Theta_{zz}\omega_z = \frac{\partial T}{\partial \omega_z}. \end{aligned} \tag{4.10.4}$$

Tehát az impulzusmomentum komponensei a szögsebesség komponenseinek lineáris kifejezései. Az együtthatók a tehetetlenségi momentumok, ill. a deviációs momentumok, mégpedig a Θ első indexe megegyezik az N-komponens indexével, a Θ második indexe pedig a szorzó ω komponens indexével, amely rendre x, y, z. Ahol a Θ két indexe megegyezik, az előjel pozitív, ahol különbözik, az előjel negatív.

A közönséges impulzus komponensei a kinetikus energiának a megfelelő sebességkomponensek szerinti deriváltjaival egyenlők, az előbbiek szerint pedig az impulzusmomentum komponensei a kinetikus energiának a megfelelő szögsebességkomponensek szerinti deriváltjai. Ez megfelel az általános impulzuskomponensek definíciójának, ha általános sebesség gyanánt a szögsebességet tekintjük.

Az *Euler*-féle egyenletek komponensekben való előállításához szükséges volna még az $[\mathbf{N}, \boldsymbol{\omega}]$ vektori szorzat komponenseit meghatározni. Az egész eljárás azonban hosszadalmas volna, ugyanis a következő meggondolások útján sokkal gyorsabban jutunk célhoz. Minthogy az a koordinátarendszer, amelyben az egyenleteket le akarjuk vezetni, a merev testhez van rögzítve, választhatjuk úgy, hogy a koordinátatengelyeket a főtehetetlenségi tengelyek irányába fektetjük. Ebben az esetben a kinetikus energiát a (7.3) egyenlet ad'a meg, ahol A, B, C a főtehetetlenségi momentumok, p, q, r pedig a szögsebesség komponensei az instantán főtehetetlenségi tengelyekre vonatkozóan. Ekkor

$$N_x = \frac{\partial T}{\partial p} = Ap, \qquad N_y = \frac{\partial T}{\partial q} = Bq, \qquad N_z = \frac{\partial T}{\partial r} = Cr. \tag{4.10.5}$$

Továbbá nyerjük

$$\begin{aligned} [\mathbf{N}, \boldsymbol{\omega}]_x &= N_y\omega_z - N_z\omega_y = (B - C)qr, \\ [\mathbf{N}, \boldsymbol{\omega}]_y &= N_z\omega_x - N_x\omega_z = (C - A)rp, \\ [\mathbf{N}, \boldsymbol{\omega}]_z &= N_x\omega_y - N_y\omega_x = (A - B)pq. \end{aligned} \tag{4.10.6}$$

Ha a koordinátatengelyeket a főtehetetlenségi tengelyek irányába helyezzük, akkor az *Euler*-féle vektoregyenlet komponensekben a következőképpen fejezhető ki

(10.5) és (10.6) segítségével

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)qr + F_x,$$

$$B\frac{dq}{dt} = (C - A)rp + F_y, \tag{4.10.7}$$

$$C\frac{dr}{dt} = (A - B)pq + F_z.$$

Ez közönséges, elsőrendű, de nem lineáris differenciálegyenletrendszer a p, q, r számára, ugyanis a jobboldalon szerepelnek a qr, rp, pq kettős szorzatok és az F_x, F_y, F_z is függvénye a p, q, r-nek. Ezekből az egyenletekből kell p, q, r-et mint t függvényét meghatározni. A, B, C állandók, amelyeket a test konfigurációja határoz meg. F_x, F_y, F_z a külső erő forgatómomentumának komponensei pedig a külső erő megadásával ismeretesek, általában az idő, a hely és a szögsebesség függvényei.

Ha p, q, r-et már meghatároztuk, a mozgás még nem ismeretes, ugyanis ezek csak a szögsebesség komponensei. Hogy a mozgást ismerjük, még a ψ, ϑ, ϕ *Euler*-féle szögeket kell meghatározni. Erre az (1.21) formulákat használjuk.

Ha az *Euler*-féle egyenletek megoldásával p, q, r-et meghatároztuk, ezeket behelyettesítjük az (1.21) egyenletekbe, amelyek differenciálegyenletrendszert szolgáltatnak ψ, ϑ, ϕ számára. Ennek megoldásával meghatározzuk a ψ, ϑ, ϕ-t mint az idő függvényét, vagyis a merev test pontkörüli mozgását. A merev test pontkörüli mozgásának meghatározása tehát két lépésben történik. Először meghatározzuk az *Euler*-féle egyenletekből p, q, r-et mint az idő függvényét, azután pedig ezek felhasználásával ψ, ϑ, ϕ-t mint az idő függvényét.

11. §. A merev test pontkörüli mozgásának tárgyalása az Euler-féle egyenletek alapján, ha a külső erők momentuma eltűnik

Az *Euler*-féle egyenletek, ha a külső erők momentuma eltűnik, a következők

$$A\dot{p} = (B - C)qr,$$

$$B\dot{q} = (C - A)rp, \tag{4.11.1}$$

$$C\dot{r} = (A - B)pq.$$

Először is ezeknek az egyenleteknek alapján *kimutatjuk a kinetikus energiának és az impulzusmomentum abszolút értékének állandóságát*. Ez természetesen nem jelenti az energiatétel (ugyanis $V = \text{konst.} = 0$, tehát $T = \text{konst.}$) új bizonyítását, hiszen az *Euler*-egyenleteket a mechanika alapelveiből vezettük le, tehát az *Euler*-egyenleteknek az energia tételét tartalmazniok kell és éppen ezt akarjuk kimutatni.

Szorozzuk meg az *Euler*-egyenleteket rendre p, q, r-rel és az így nyert egyenleteket adjuk össze, ekkor nyerjük

$$Ap\dot{p} + Bq\dot{q} + Cr\dot{r} = pqr(B - C + C - A + A - B) = 0,$$

tehát

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(2T) = 0,$$

vagyis

$$T = \text{konst.} \tag{4.11.2}$$

Ezzel kimutattuk, – az egyenletekből következik – hogy T állandó.

Szorozzuk most az *Euler*-egyenleteket rendre Ap, Bq, Cr-el és az így nyert egyenleteket ismét adjuk össze. Ekkor nyerjük

$$A^2p\dot{p} + B^2q\dot{q} + C^2r\dot{r} = pqr(AB - AC + BC - BA + CA - CB) = 0,$$

vagyis

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{N}|^2 = 0,$$

tehát

$$|\mathbf{N}| = \text{konst.} \tag{4.11.3}$$

Ezáltal kimutattuk, – az *Euler*-egyenletekből következik – hogy $|\mathbf{N}|$ állandó. $\mathbf{N} \neq$ konst, mert az *Euler*-egyenletek a testhez rögzített rendszerre vonatkoznak, amelyben $\mathbf{N}$ általában nem konstans.

Ezek után a merev testnek a főtehetetlenségi tengelyek körüli forgásával fogunk foglalkozni. Azokat a tengelyeket, amelyek körül a merev test állandó szögsebességgel foroghat, a merev test *szabad tengelyeinek* nevezzük. Először is állapítsuk meg azt, hogy az egyenletek alapján lehetséges-e a főtehetetlenségi tengelyek körül állandó szögsebességű forgás, vagyis hogy a főtehetetlenségi tengelyek lehetnek-e a merev test szabad tengelyei.

Ha az első (p) főtengely körül történik állandó szögsebességű forgás, akkor p = konst., $q = 0$, $r = 0$. Amint közvetlenül látható, ez az értékrendszer megoldása az *Euler*-egyenleteknek, tehát az első (p) tengely körül lehet állandó szögsebességű forgás, vagyis ez a tengely lehet szabad tengely. Mint közvetlenül látható, a $p = 0$, $q =$ konst., $r = 0$ és a $p = 0$, $q = 0$, $r =$ konst. értékrendszerek is megoldások, tehát a második (q) és a harmadik (r) tengely is lehet szabad tengely. Azt is azonnal láthatjuk, hogy *csak* ezek lehetnek szabad tengelyek, mert ha p, q, r közül bármelyik kettő vagy mind a három konstans, akkor nem kapunk megoldást, tehát ha a forgástengely nem esik össze valamelyik főtengellyel, akkor e körül a tengely körül nem lehetséges állandó szögsebességű forgás.

Természetesen csak azok a főtengelyek lehetnek valóban szabad tengelyek, melyek átmennek a test tömegközéppontján. Ugyanis, ha külső erők nem hatnak,

amit feltételezünk, akkor a merev test tömegközéppontja nyugalomban van, vagy egyenesvonalú egyenletes mozgást végez. Tekintettel arra, hogy a merev testnek egy pontja fix, a tömegközéppontnak nyugalomban kell lennie, ami csak úgy lehetséges, hogy a tömegközéppont rajta van a forgástengelyen.

Vizsgáljuk meg ezek után *a mozgás stabilitását* az *Euler*-egyenletek alapján. Legyen a főtehetetlenségi momentum nagyságviszonya a következő

$$A < B < C,$$

tehát az A (ill. p) tengely a tehetetlenségi ellipszoid kistengelye, a B (ill. q) tengely a középső, a C (ill. r) tengely pedig a nagytengelye. A, B, C természetüknél fogva pozitív számok.

A kistengely (vagyis a p tengely) körüli forgásnál

$$p \neq 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0.$$

A továbbiak szempontjából fontos, hogy megállapodjunk p előjelében. Legyen pl.

$$p > 0.$$

Változtassuk meg a mozgást úgy, hogy a forgástengely ne essen össze pontosan az első (p) főtengellyel, hanem legyen q-nak is egy kis pozitív értéke

$$q = \delta > 0.$$

Ekkor a harmadik *Euler*-egyenletben a jobboldal pozitív, mert p, q és A, B pozitívok, tehát

$$C\dot{r} = (A - B)pq > 0.$$

Innen következik, hogy a baloldal is pozitív és mivel $C > 0$, $\dot{r}$ is pozitív, tehát

$$\frac{dr}{dt} > 0.$$

Ez azt jelenti, hogy r az idővel növekszik. Eredetileg $r = 0$ volt, egy kis idő múlva

$$r = \varepsilon > 0.$$

Ezzel az *Euler*-féle második egyenletből a következő eredményre jutunk

$$B\dot{q} = (C - A)rp < 0,$$

ugyanis $r > 0$, $p > 0$ és $C - A < 0$. Mivel a baloldalon $B > 0$, következik, hogy

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} < 0,$$

tehát q csökken. Ha tehát az első (p) főtengely körüli forgásnál a második (q) főtengely körüli forgás szögsebességkomponensének kis pozitív értéket adunk, akkor ez az idővel csökken. Ha q-nak negatív értéket adtunk volna, akkor azt kapnánk, hogy $\frac{dq}{dt} > 0$, azaz q növekszik. De mivel q negatív, ez azt jelenti, hogy az abszolút értéke csökken. Tehát q nem ér el jelentékeny értéket, vagyis a kistengely (p tengely) körüli forgás stabilis.

Ugyanilyen gondolatmenettel lehet kimutatni azt, hogy a harmadik (r) főtengely, vagyis a nagytengely körüli forgás is stabilis.

Más a helyzet azonban, ha a középső (q) tengely körüli forgást tanulmányozzuk. Ekkor

$$p = 0, \qquad q \neq 0, \qquad r = 0.$$

Legyen pl.

$$q > 0.$$

Változtassuk meg pl. p-t egy kis pozitív δ értékkel, ekkor a harmadik *Euler*-egyenletből a fentiekhez teljesen hasonló módon következik, hogy

$$\frac{dr}{dt} > 0,$$

vagyis r, amely kezdetben 0 volt, idővel egy kis pozitív értéket vesz fel. Ekkor az első egyenletből nyerjük, hogy

$$A\dot{p} = (B - C)qr > 0,$$

tehát

$$\frac{dp}{dt} > 0.$$

Tehát a kezdetben kis pozitív p az idővel növekszik, a mozgás tehát nem stabilis, hanem labilis.

Az *Euler*-féle egyenletekből igen egyszerűen megállapítottuk az egyes szabad tengelyek körüli forgás jellegét. Arra az eredményre jutottunk, hogy a 3 főtengely körül a merev test állandó szögsebességgel foroghat, vagyis mind a 3 tengely szabad tengely, a kis és nagy tengely körüli forgás stabilis, a középső tengely körüli forgás pedig labilis.

12. §. Az Euler-féle egyenletek integrálása, ha a külső erők momentuma eltűnik

Ha a külső erők momentuma zérus, akkor az *Euler*-féle egyenleteket (11.1) szolgáltatja. Foglalkozzunk ezeknek az egyenleteknek integrálásával, 1. ha a tehetetlenségi ellipszoid gömb, 2. ha a tehetetlenségi ellipszoid szimmetrikus, 3. ha a tehetetlenségi ellipszoid háromtengelyű.

1. A tehetetlenségi ellipszoid gömb

Ha a tehetetlenségi ellipszoid gömbbé egyszerűsödik, amilyen pl. egy homogén gömb vagy homogén kocka tehetetlenségi ellipszoidja, akkor

$$A = B = C,$$

tehát az *Euler*-féle egyenletekből következik, hogy

$$\begin{aligned} \dot{p} &= 0, \quad & p &= \text{konst.}, \\ \dot{q} &= 0, \quad & q &= \text{konst.}, \\ \dot{r} &= 0, \quad & r &= \text{konst.} \end{aligned} \tag{4.12.1}$$

A szögsebesség komponensei állandók, vagyis maga a szögsebesség is állandó. Vagyis bármely tengely körül, mely átmegy a főtehetetlenségi tengelyek által meghatározott koordinátarendszer kezdőpontján, állandó szögsebességű forgás lehetséges. Ez pl. egy homogén kockára nézve (amelynek tehetetlenségi ellipszoidja a centrumára vonatkoztatva gömb) annyit jelent, hogy bármely, a centrumán átmenő tengely körüli állandó szögsebességű forgás lehetséges.

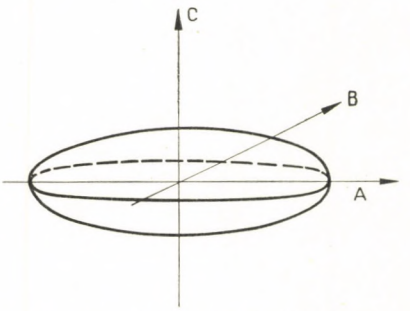
2. A tehetetlenségi ellipszoid szimmetrikus

Ha a tehetetlenségi ellipszoid szimmetrikus, akkor az ellipszoid két tengelye egyenlő. Legyen pl. C a szimmetriatengely és A, valamint B az egyenlő tengelyek. Tehát

$$A = B \neq C$$

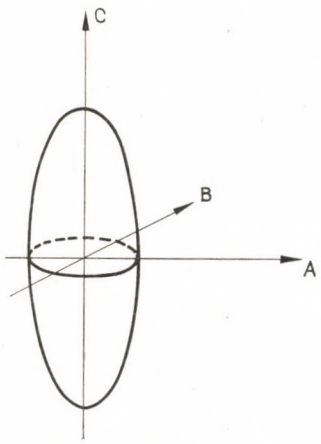
és így a következőkben B helyébe mindenhol A-t írunk.

Ha $A < C$, akkor a két megegyező főtehetetlenségi momentum kisebb a harmadiknál, tehát a tehetetlenségi ellipszoid két megegyező főtengelye nagyobb, mint a harmadik tengely (a szimmetriatengely). A tehetetlenségi ellipszoid ekkor tehát lapult forgási ellipszoid.



67. ábra. A tehetetlenségi ellipszoid $A < C$ esetben

Ha $A > C$, akkor a két megegyező főtehetetlenségi momentum nagyobb, vagyis az ellipszoid két megegyező főtengelye kisebb, mint a harmadik tengely, a szimmetriatengely. Az ellipszoid nyúlt forgási ellipszoid.



68. ábra. A tehetetlenségi ellipszoid $A > C$ esetben

Az *Euler*-féle egyenletek szimmetrikus tehetetlenségi ellipszoid esetén a következőképpen alakulnak

$$A\dot{p} = (A - C)qr,$$

$$A\dot{q} = (C - A)rp,$$

$$C\dot{r} = 0.$$

Mivel $C \neq 0$, a harmadik egyenletből azonnal nyerjük

$$\dot{r} = 0, \qquad r = \text{konst.}$$

Tehát a szögsebességnek a szimmetriatengely irányába eső komponense állandó.

A másik két szögsebességkomponensre szintén egyszerű összefüggést kapunk; ha az első egyenlet p-szeresét és a második egyenlet q-szorosát összeadjuk, akkor

$$A(p\dot{p} + q\dot{q}) = pqr(A - C + C - A) = 0.$$

Mivel

$$A \neq 0,$$

$$p\dot{p} + q\dot{q} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(p^2 + q^2) = 0,$$

vagyis

$$p^2 + q^2 = \text{konst.}$$

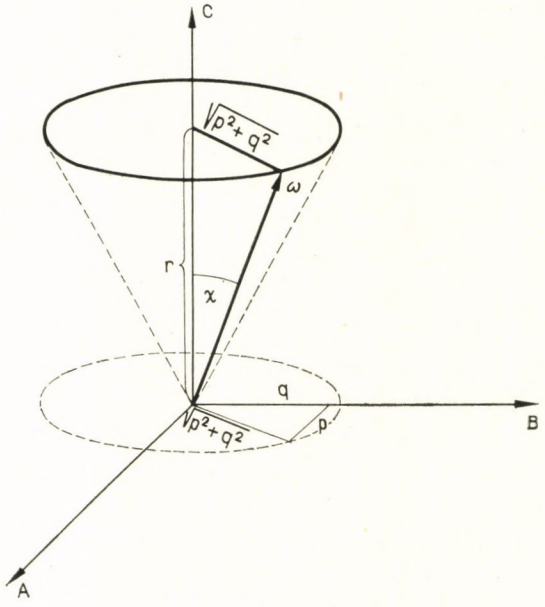
Az előbbi eredményt, amely szerint $r = \text{konst.}$, hozzávéve nyerjük, hogy a szögsebesség négyzete is állandó, vagyis

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = \text{konst.} \tag{4.12.2}$$

Mivel r és $\sqrt{p^2 + q^2}$, vagyis az $\boldsymbol{\omega}$ vektornak a C irányba és az AB síkba eső vetülete külön-külön is állandó, az $\boldsymbol{\omega}$ vektor a C szimmetriatengellyel állandó szöget zár be, amelynek tangense

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{r}.$$

Az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor tehát a C-tengely körül körkúpot ír le. Ezt a kúpot *polhodiának* szokás nevezni.



69. ábra. A polhodia kúp

Az impulzusmomentum abszolút értékének négyzete is állandó

$$|\mathbf{N}|^2 = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2 = \text{konst.} \tag{4.12.3}$$

N_x, N_y, N_z az impulzusmomentum komponensei,

$$N_x = Ap, \qquad N_y = Aq, \qquad N_z = Cr.$$

A fentiek szerint

$$N_x^2 + N_y^2 = A^2(p^2 + q^2) = \text{konst.}$$

és

$$Cr = \text{konst.}$$

Tehát az impulzusmomentum abszolút értéke állandó, továbbá a C-tengely irányába és az AB síkra eső vetülete is állandó, tehát az **N** vektor is körkúpot ír le a C szimmetriatengely körül. Az **N** vektornak a C-tengellyel való hajlásszöge

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\sqrt{N_x^2 + N_y^2}}{N_z} = \frac{A}{C}\frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r} = \frac{A}{C}\operatorname{tg}\chi,$$

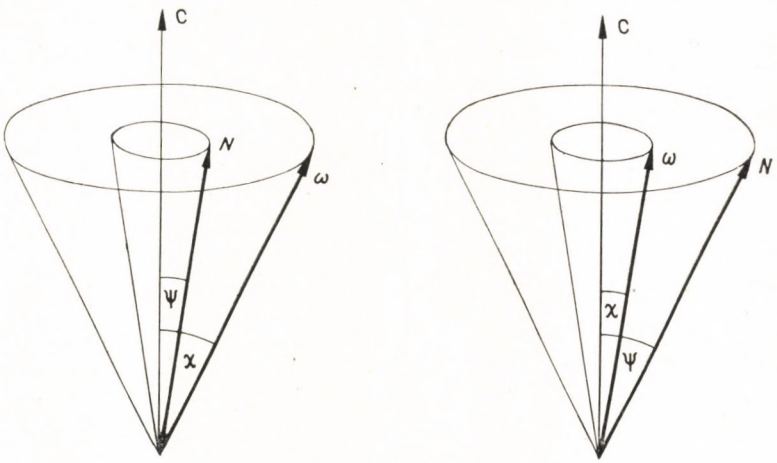
$$\operatorname{tg}\psi = \frac{A}{C}\operatorname{tg}\chi. \qquad (4.12.4)$$

A ψ és χ szögek nagysági viszonya tehát a következő:

Ha $A < C$, akkor $\operatorname{tg}\psi < \operatorname{tg}\chi$, tehát $\psi < \chi$,

ha $A > C$, akkor $\operatorname{tg}\psi > \operatorname{tg}\chi$, tehát $\psi > \chi$.

70. *a* és *b* ábrák a merev test főtengelyeihez rögzített koordinátarendszerre vonatkoznak, ebben a rendszerben **N** változik, a merev test pedig nyugszik. p, q, r

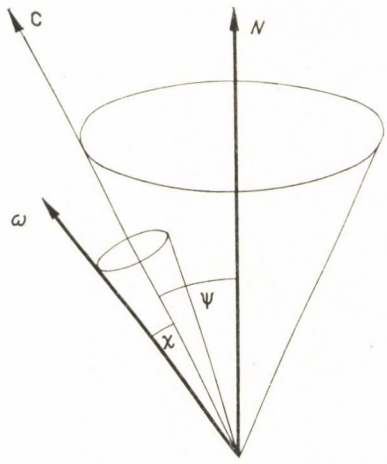


70. ábra. **N** és ω mozggása a főtengelyekhez rögzített koordinátarendszerben

ebben a rendszerben zérustól különböző, mert p, q, r a szögsebességnek a főtengelyek momentán állásaira vonatkozó komponensei.

Ha a merev test mozgását egy inerciarendszerben vizsgáljuk, akkor az impulzusmomentum állandó és akkor nem **N** ír le egy körkúpot a C-tengely körül, hanem a C-tengely ír le egy körkúpot az **N** impulzusmomentum körül. C-nek **N**-nel való hajlásszöge ψ. Az **ω** szögsebességvektor most is a C-tengely körül ír le körkúpot és ω-nak a C-tengellyel való hajlásszöge χ.

Állapítsuk meg azt, hogy az **ω** vektor hogyan futja be a C-tengelyű kúpot. Az r komponens (a C-tengelyre való vetület) állandó, tehát még p-t és q-t kell meg-



71. ábra. ω és a C-tengely mozgása az inerciarendszerben

határozni mint az idő függvényét, ami az első és második *Euler*-féle egyenletekből történik, amelyek szerint

$$A\dot{p} = (A - C)qr,$$
$$A\dot{q} = (C - A)pr.$$

Adjuk hozzá a második egyenlet $\sqrt{-1} = i$-szeresét az elsőhöz, akkor nyerjük

$$A\frac{d(p+iq)}{dt} = (C-A)\,r(-q+ip) = (C-A)\,ri(p+iq),$$

$$\frac{d(p+iq)}{dt} = i\frac{C-A}{A}r(p+iq).$$

Vezessük be a következő jelöléseket: $p + iq = z$, $\frac{C-A}{A}r = \alpha$, ekkor nyerjük

$$\frac{dz}{dt} = i\alpha z.$$

Könnyen meggyőződhetünk, hogy ennek az egyszerű differenciálegyenletnek a megoldása

$$z = \rho e^{i\alpha t}.$$

Ugyanis

$$\frac{dz}{dt} = i\alpha\rho e^{i\alpha t} = i\alpha z.$$

Felhasználva az *Euler*-féle összefüggést, nyerjük

$$p + iq = \rho(\cos \alpha t + i \sin \alpha t),$$

innen

$$p = \rho \cos \alpha t, \qquad q = \rho \sin \alpha t. \tag{4.12.5}$$

Mint a kinematikában láttuk, ezek az egyenletes körmozgás egyenletei. Tehát a szögsebesség vetülete az AB síkon egyenletes körmozgást végez, vagyis az ω vektor a C-tengely körül egyenletes sebességgel írja le az említett kúpot.

A mozgás periódusa

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{r} \frac{A}{C - A}.$$

A főtehetetlenségi momentumokból, A-ból, C-ből és a szimmetriatengely (C-tengely) körüli szögsebesség (r) ismeretéből tehát T kiszámítható. Ezzel a periódussal írja le a szögsebesség vektora, vagyis a forgástengely a szimmetriatengely körüli kúpot. Ki lehet mutatni, hogy ugyanezzel a periódussal írja le a szimmetriatengely az impulzusmomentum körüli kúpot. Ugyanis, mint látható, $N_x + iN_y$ számára ugyanolyan differenciálegyenlet érvényes, mint $p + iq$ számára, tehát N_x-re és N_y-ra ugyanolyan formulákat nyerünk, mint p-re és q-ra.

Számítsuk ki a T periódust a Földre vonatkozóan. A tapasztalat szerint a Földre vonatkozóan nagy közelítéssel teljesül, hogy $A = B$ és a Hold mozgásának bizonyos zavaraiból következik, hogy

$$\frac{A}{C - A} \cong 300.$$

(A Föld alakjából ugyanis a tehetetlenségi momentumokat nem tudjuk kiszámítani, mert a Föld belsejében a tömegeloszlás nem ismeretes.)

Ha időegységül a csillagnapot választjuk, akkor a Föld szögsebessége a szimmetriatengely körül

$$r = \frac{2\pi}{1 \text{ csill.nap}}, \quad \text{tehát} \quad \frac{2\pi}{r} = 1 \text{ csillagnap}.$$

Vagyis

$$T = \frac{2\pi}{r} \frac{A}{C - A} \cong 300 \text{ csillagnap}.$$

Tehát a Föld szögsebességének vektora, vagyis a Föld forgástengelye a Föld szimmetriatengelye körül 300 nap alatt egy kis nyílású kúpot ír le. A tapasztalat szerint a Föld tengelyének csakugyan van ilyen mozgása, a sarkok kb. 18 m sugarú kört írnak le a Föld felszínén. Ez az ún. *Chandler-féle nutáció*. Az észlelt periódus azonban nem egyezik a számítottal, hanem a 400 napot is felülmúlja. Ebből az következik, hogy azok a feltevések, amelyek mellett a 300 napos periódust levezettük, a Föld esetében nem felelnek meg a valóságnak. A Földet merev testnek

tekintettük, de mint néhány más jelenségből is következik, ez a feltevés nem egészen helyes. Ha a Föld rugalmas alakváltozásait is figyelembe vesszük, akkor jobb közelítést nyerünk.

A tengelyeknek ez a mozgása nem tévesztendő össze az ún. precesszióval, amelylyel később fogunk foglalkozni. Az itt tárgyalt mozgás akkor is fennáll, ha a külső erők momentuma eltűnik, a precesszió pedig éppen onnan származik, hogy a Földre külső forgatómomentum hat.

3. A tehetetlenségi ellipszoid háromtengelyű

Azt az esetet is lehet szigorúan tárgyalni, midőn mind a 3 főtehetetlenségi momentum különbözik egymástól, tehát ha a tehetetlenségi ellipszoid háromtengelyű abban az esetben, ha a külső erők momentuma zérus. Ekkor az *Euler*-féle egyenletek

$$A\dot{p} = (B - C)qr,$$

$$B\dot{q} = (C - A)rp,$$

$$C\dot{r} = (A - B)pq,$$

ahol $A \neq B \neq C$. Szorozzuk az egyenleteket rendre $\frac{p}{A}, \frac{q}{B}, \frac{r}{C}$ -vel és az így nyert egyenleteket adjuk össze. Ekkor nyerjük

$$p\dot{p} + q\dot{q} + r\dot{r} = \left(\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C}\right)pqr\,,$$

$$p\dot{p} + q\dot{q} + r\dot{r} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(p^2 + q^2 + r^2) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\omega^2),$$

tehát

$$\frac{1}{2}\frac{d(\omega^2)}{dt} = \left(\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C}\right)pqr = fpqr, \qquad (4.12.6)$$

ahol

$$f = \frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C}.$$

Mint látható, f csak A, B, C-től függ.

Fennállnak a következő egyenletek

$$p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2,$$

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T,$$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \mathbf{N}^2.$$

Ez p^2, q^2, r^2-re, a szögsebesség komponenseinek négyzetére 3 egyenletből álló lineáris egyenletrendszer, amelynek determinánsa az ún. *Vandermonde*-féle

determináns

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A & B & C \\ A^2 & B^2 & C^2 \end{vmatrix} = (A - B)(B - C)(C - A).$$

p^2, q^2, r^2-et egyszerűen határozhatjuk meg, így pl.

$$p^2 = \frac{\begin{vmatrix} \omega^2 & 1 & 1 \\ 2T & B & C \\ N^2 & B^2 & C^2 \end{vmatrix}}{(A - B)(B - C)(C - A)} = \frac{\omega^2 BC(C - B) + \ldots}{(A - B)(B - C)(C - A)}.$$

A számlálóban még két tag áll, melyeket nem írtunk ki és melyek ω-tól függetlenek. Ezt a két tagot összevonhatjuk $-BC(C - B)\omega_1^2$ alakba, ahol ω_1^2 egy megfelelően választott állandó. Ezt beírva nyerjük

$$p^2 = \frac{\omega^2 BC(C - B) - \omega_1^2 BC(C - B)}{(A - B)(B - C)(C - A)} = \frac{BC(\omega^2 - \omega_1^2)}{(A - B)(A - C)} = g_1(\omega^2 - \omega_1^2).$$

Az eredményben látszólag elő nem forduló T-t és N-et ω_1 tartalmazza.

q^2-re és r^2-re egészen hasonló módon találjuk, hogy

$$q^2 = \frac{CA(\omega^2 - \omega_2^2)}{(B - C)(B - A)} = g_2(\omega^2 - \omega_2^2),$$

$$r^2 = \frac{AB(\omega^2 - \omega_3^2)}{(C - A)(C - B)} = g_3(\omega^2 - \omega_3^2), \qquad (4.12.7)$$

ahol g_1, g_2, g_3 csak A, B, C-től függenek. Jelentésük nyilvánvaló.

Tehát

$$p^2 q^2 r^2 = g_1 g_2 g_3 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_3^2),$$

$$pqr = \sqrt{g_1 \cdot g_2 \cdot g_3}\sqrt{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_3^2)}.$$

Írjuk ezt be a (12.6) egyenletbe, akkor nyerjük:

$$\frac{1}{2}\frac{d(\omega^2)}{dt} = f\sqrt{g_1 \cdot g_2 \cdot g_3}\sqrt{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_3^2)}.$$

Szorozzunk 2-vel és térjünk át a reciprokra, akkor

$$\frac{dt}{d(\omega^2)} = k\frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_3^2)}},$$

$$k = \frac{1}{2f\sqrt{g_1 \cdot g_2 \cdot g_3}}.$$

k állandó, amely csak A, B, C-től függ. ω^2 szerint integrálva nyerjük azt az időt, amely alatt ω egy bizonyos ω_0 kezdeti értéktől ω-ig változik

$$t = k \int_{\omega_0^2}^{\omega^2} \frac{d(\omega^2)}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_3^2)}}. \tag{4.12.8}$$

Az integrandus nevezőjében a négyzetgyök alatt ω^2-nek, az integrációs változónak harmadfokú kifejezése áll. Tehát az időt, mint ω függvényét, egy elliptikus integrál szolgáltatja. Az elliptikus integrál inverz függvényét *elliptikus függvény*nek nevezzük, tehát ω az időnek elliptikus függvénye. Ennek a függvénynek megállapításával mi már nem foglalkozunk, ez már tisztán matematikai feladat. Ha a problémát elliptikus integrál kiszámítására vezettük vissza, akkor a problémát a fizikus szempontjából megoldottnak tekinthetjük, éppen úgy, mint amikor egy problémát trigonometrikus vagy más elemi függvények kiszámítására vezetünk vissza.

13. §. Az Euler-féle szögeknek mint az idő függvényeinek meghatározása, ha a külső erők momentuma eltűnik

Az *Euler*-féle egyenletek megoldása p, q, r-et szolgáltatja mint az idő függvényétt Ha ezek megvannak, a további feladat abban áll, hogy az *Euler*-féle szögekemint az idő függvényeit határozzuk meg, mert csak ezáltal lesz a merev test pont. körüli mozgása teljesen ismeretes.

Az (1.21) kifejezés elsőrendű differenciálegyenletrendszer ϑ, ψ, ϕ meghatározására. A koordinátarendszer alkalmas megválasztásával ezeket nagy mértékben egyszerűsíthetjük.

Ha a külső erők momentuma eltűnik, akkor **N** az inerciarendszerben állandó. Válasszuk az inerciarendszerhez rögzített koordinátarendszert úgy, hogy a Z-tengely az állandó impulzusmomentum irányába mutasson. A testhez rögzített rendszerben **N** komponensei Ap, Bq, Cr, tehát **N**-nek, vagyis a Z-tengelynek iránykoszinuszai

$$\frac{Ap}{|\mathbf{N}|}, \quad \frac{Bq}{|\mathbf{N}|}, \quad \frac{Cr}{|\mathbf{N}|}.$$

Az előzőekben láttuk, hogy a Z-tengely iránykoszinuszai γ_1, γ_2, γ_3 rendre $\sin\phi \sin\vartheta$, $\cos\phi \sin\vartheta$ és $\cos\vartheta$-val egyenlők, tehát

$$\frac{Ap}{|\mathbf{N}|} = \sin\phi \sin\vartheta, \tag{4.13.1}$$

$$\frac{Bq}{|\mathbf{N}|} = \cos\phi \sin\vartheta, \tag{4.13.2}$$

$$\frac{Cr}{|\mathbf{N}|} = \cos\vartheta. \tag{4.13.3}$$

Induljunk ki a $\dot{\psi}$-ot szolgáltató (1.21) egyenletből. Szorozzuk meg és osszuk el a jobboldalt $\sin\vartheta$-val

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\sin^2\vartheta}(p\sin\phi\sin\vartheta + q\cos\phi\sin\vartheta),$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{1-\cos^2\vartheta}\frac{Ap^2+Bq^2}{N}, \qquad N = |\mathbf{N}|,$$

$$\cos\vartheta = \frac{Cr}{N},$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{1-\dfrac{C^2r^2}{N^2}}\frac{Ap^2+Bq^2}{N} = \frac{N^2}{N^2-C^2r^2}\frac{Ap^2+Bq^2}{N},$$

$$N^2 - C^2r^2 = A^2p^2 + B^2q^2,$$

$$\dot{\psi} = N\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}. \tag{4.13.4}$$

Ez az egyenlet szolgál ψ meghatározására.

Az (1.21) és a (13.3) egyenletből nyerjük

$$\dot{\phi} = r - \operatorname{ctg}\vartheta(p\sin\phi + q\cos\phi) = r - (\cos\vartheta)\,\dot{\psi},$$

$$\dot{\phi} = r - \frac{Cr}{N}\dot{\psi}.$$

ψ előbb nyert kifejezését beírva

$$\dot{\phi} = r - \frac{Cr}{N}N\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2} = r\left(1 - C\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}\right). \tag{4.13.5}$$

Ez az egyenlet szolgál ϕ meghatározására.

Szorozzuk és osszuk ezek után az (1.21) első egyenletének jobboldalát $\sin\vartheta$-val, ekkor nyerjük (13.1) és (13.2) segítségével

$$\dot{\vartheta} = \frac{1}{\sin\vartheta}(p\cos\phi\sin\vartheta - q\sin\phi\sin\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{C^2r^2}{N^2}}}\frac{Bpq-Aqp}{N},$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{(B-A)pq}{\sqrt{N^2-C^2r^2}} = \frac{(B-A)pq}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2}},$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{(B-A)pq}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2}}. \tag{4.13.6}$$

Ez az egyenlet szolgál ϑ meghatározására.

Ezáltal a ψ, ϕ és ϑ meghatározására szolgáló differenciálegyenletrendszer helyett 3 olyan differenciálegyenletet nyertünk, amelyek mindegyike csak az egyik *Euler*-féle szögre vonatkozik.

A jobboldalon csak adott állandók és ismert p, q, r függvények állnak, tehát a jobboldalak az időnek ismert függvényei, így ψ, ϕ és ϑ-t egyszerű integrálással határozhatjuk meg, mégpedig

$$\psi = N \int \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B_2q^2}\, dt + \psi_0\,,$$

$$\phi = \int r \left(1 - C \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2}\right) dt + \phi_0\,, \tag{4.13.7}$$

$$\vartheta = (B - A) \int \frac{pq}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2}}\, dt + \vartheta_0\,.$$

Határozzuk meg ψ, ϕ, ϑ-t abban az esetben, ha a tehetetlenségi ellipszoid szimmetrikus, vagyis ha

$$A = B.$$

Ekkor a fenti képletek így alakulnak

$$\psi = N \int \frac{A(p^2 + q^2)}{A^2(p^2 + q^2)}\, dt + \psi_0 = \frac{N}{A} \int dt + \psi_0 = \frac{N}{A}\, t + \psi_0\,,$$

$$\phi = \int r \left(1 - \frac{C}{A} \frac{p^2 + q^2}{p^2 + q^2}\right) dt + \phi_0 = r \left(1 - \frac{C}{A}\right) \int dt + \phi_0 = r \left(1 - \frac{C}{A}\right) t + \phi_0\,,$$

$$\vartheta = \vartheta_0 = \text{konst.} \tag{4.13.8}$$

Szimmetrikus tehetetlenségi ellipszoid esetén r állandó, ezért ϕ képletében ki lehetett emelni az integrál jele elé. ψ és ϕ, mint látható, az idővel arányosan változik, ϑ pedig, (a két Z-tengely, vagyis az **N**- és C-tengely által alkotott szög) állandó, megfelelően annak, hogy C az **N** vektor körül körkúpot ír le.

Ezzel a merev test pontkörüli mozgásának problémáját abban az esetben, midőn a külső erők momentuma eltűnik, teljesen megoldottuk. Előállítottuk a szögsebesség komponenseit és az *Euler*-féle szögeket mint az idő függvényeit.

14. §. A merev test mozgása egy rögzített pontja körül, ha rá külső erő forgatómomentumot gyakorol

Ha azt akarjuk megvizsgálni, hogyan mozog a merev test egy rögzített pontja körül, ha rá valamely külső erő forgatómomentumot gyakorol, akkor szintén az *Euler*-féle egyenletek alapján tárgyalhatjuk a mozgást. Mi azonban a következőkben inkább csak kvalitatív eredményeket akarunk levezetni és ekkor célszerűbb,

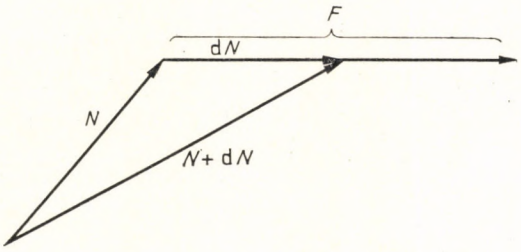
ha az inerciarendszerre vonatkozó

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{F}$$

egyenletből indulunk ki, amelyből

$$d\mathbf{N} = \mathbf{F}dt$$

adódik. Tehát az impulzusmomentum változása, $d\mathbf{N}$, elemi idő alatt egyenlő $\mathbf{F}dt$-vel. Tehát a $d\mathbf{N}$ vektor iránya megegyezik $\mathbf{F}$-fel, abszolút értéke pedig arányos $|\mathbf{F}|$-fel. $\mathbf{F} = [\mathbf{r}, \mathbf{K}]$, ha az $\mathbf{r}$ rádiuszvektort a merev testnek attól a pontjától számítjuk,



72. ábra. Az impulzusmomentum változása

mely a mozgás folyamán fix, akkor láthatjuk, hogy $\mathbf{F}$ merőleges a fix ponton és $\mathbf{K}$-n átfektetett síkra, mégpedig olyan értelemben, ahogy azt az $[\mathbf{r}, \mathbf{K}]$ vektori szorzat mutatja. Ugyanez lesz tehát $d\mathbf{N}$ iránya is, vagyis $\mathbf{N}$ ebben az irányban térül el.

Eszerint, ha valamely külső erő a merev testre forgatómomentumot gyakorol, akkor az impulzusmomentum-vektor a merev test fix pontja és az erőn átfektetett síkra (tehát magára az erőre is) merőlegesen eltérül. Ha az erő nem csak egy dt időelemben hat, hanem továbbra is megmarad, akkor az $\mathbf{N}$ mozgást végez és általában kúpfelületet ír le.

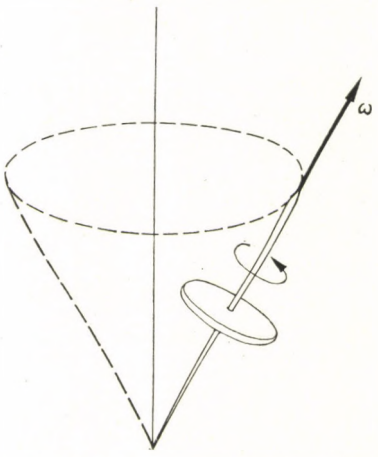
Ha a merev test valamelyik főtengelyéhez közel eső tengely körül nagy szögsebességgel forog oly módon, hogy a szögsebességnek ezen főtengely irányába eső komponenséhez képest a másik két komponens elhanyagolható kicsi, akkor nagy közelítéssel a szögsebesség vektorának iránya megegyezik az impulzusmomentum irányával. Ugyanis $\mathbf{N}$ komponensei

$$N_x = Ap, \qquad N_y = Bq, \qquad N_z = Cr.$$

Legyen pl. $r \gg p$ és $r \gg q$, akkor közelítően $N_x = 0$, $N_y = 0$, $N_z = Cr \neq 0$, azaz $\mathbf{N}$-nek is csak a z komponense véges és ez arányos $\boldsymbol{\omega}$ megfelelő komponensével, vagyis mindkét vektor ugyanabba az irányba mutat. Tehát mindaz, ami $\mathbf{N}$-re fennáll, érvényes $\boldsymbol{\omega}$-ra, így a forgástengelyre is. Külső erő hatására a me-

rev test forgástengelye az erő irányára merőlegesen kitérül és általában kúpfelületet ír le.

Alkalmazzuk ezt arra az esetre, midőn egy gyorsan forgó szimmetrikus pörgettyűre a nehézségi erő hat. A fizikai inga tárgyalásánál láttuk, hogy a nehézségi erő forgatómomentumát úgy számíthatjuk, mintha a merev test tömegközéppontjában hatna a $g\sum_i m_i = gM$ nagyságú erő. Hogy ennek az erőnek momentuma



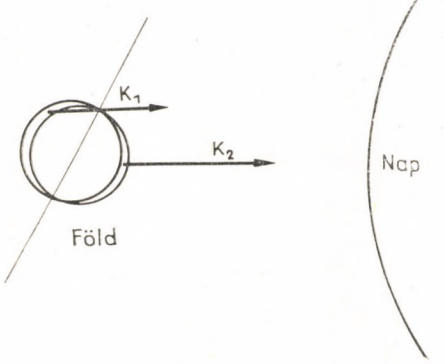
73. ábra. A merev test forgása nehézségi erőtérben

ne legyen zérus, ahhoz szükséges, hogy a tömegközéppont ne essen össze a merev test fix pontjával, továbbá hogy ne essen bele abba a függőlegesbe, amely átmegy a merev test fix pontján. Ha a merev test nem forog, akkor ilyen helyzetben nem maradhat meg, mert a nehézségi erő eldönti.

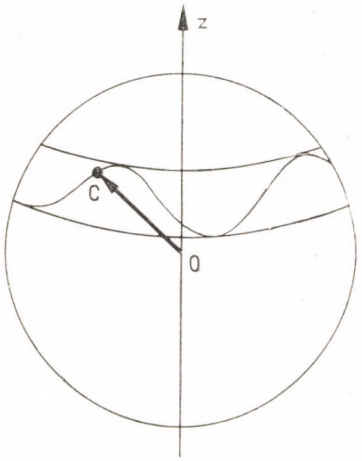
Vizsgáljuk meg, hogy mi történik akkor, ha a test forog. Egyszerűség kedvéért foglalkozzunk azzal az esettel, midőn a forgástengely átmegy a tömegközépponton. Ekkor a tömegközéppont rádiuszvektorának (melyet a fix ponttól számítunk) iránya megegyezik a szögsebesség irányával. A tömegközéppontra ható erő állandóan függőlegesen lefelé irányul, momentuma tehát erre az irányra merőleges, vagyis vízszintes irányú. Továbbá, mivel $\mathbf{N} = [\mathbf{r}, \mathbf{K}]$ és mivel úgy tekinthetjük a dolgot, hogy $\mathbf{K}$ a tömegközéppontban hat, $\mathbf{r}$ pedig ebben az esetben a tömegközépponthoz húzott rádiuszvektor, $\mathbf{N}$ merőleges $\mathbf{r}$-re, vagyis a vele egyirányú $\boldsymbol{\omega}$-ra, tehát a forgástengelyre is. Tehát a fentebbi eredményeket figyelembe véve a forgástengely állandóan vízszintes irányban és önmagára merőlegesen tér ki. Ezáltal a vízszintes síkhoz való hajlásszöge nem változik, vagyis függőleges tengelyű körkúpot ír le, ún. precessziót végez. Ez a magyarázata annak, hogy a pörgettyű nem dől el a nehézségi erő hatására. Ilyen mozgást végez a Föld tengelye is mintegy 26 000 éves periódussal. Ez a földtengely precessziója.

A Föld precessziójának magyarázata a következő. A Föld tengelye nem áll merőlegesen az ekliptika síkjára, hanem az ekliptika normálisával 23°30′-es

szöget zár be. Továbbá a Föld nem pontosan gömb alakú, hanem belapult ellipszoid. A belőle kihasított gömböt a Nap úgy vonzza, mintha pont volna és erre a gömbre a Nap nem gyakorol forgatómomentumot. Azonban a Földből kihasított gömbön kívül fekvő tömegek egy része a Naphoz közelebb, más része a Naptól távolabb van. A Naphoz közelebb eső részre a Nap nagyobb erőt gyakorol, mint a távolabb esőre, úgyhogy a közelebb eső részre gyakorolt erő marad túlsúlyban. Ez azt eredményezi, hogy a Nap a Föld tengelyét az ekliptikára merőlegesen



74. ábra. A Földre a Nap által gyakorolt forgatómomentum keletkezése



75. ábra. A szimmetrikus pörgettyű szimmetriatengelyének mozgása a nehézségi erőtérben

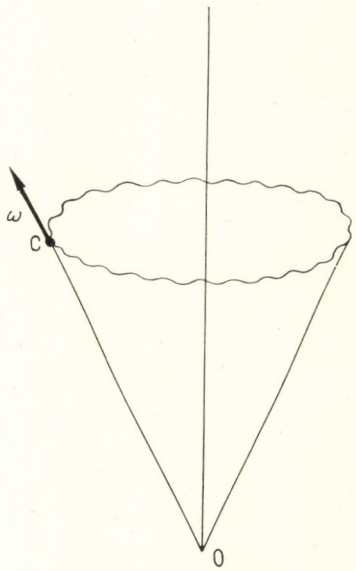
76. ábra. A szimmetrikus pörgettyű szimmetriatengelye mozgásának különböző változatai

igyekszik állítani, tehát forgatómomentumot gyakorol a Földre, amely a felrajzolt esetben a rajz síkjára merőleges irányú. Ebbe az irányba tér ki az impulzusmomentum vektora és a vele közel megegyező irányú forgástengely. A Föld tengelyének ferdesége és a Föld alakjának gömbtől való eltérése azt eredményezi tehát, hogy a forgástengely egy kúpot ír le, melynek tengelye merőleges az ekliptika síkjára.

A $d\mathbf{N} = \mathbf{F}dt$ egyenlet a forgó testeknél felmerülő és paradoxnak látszó igen sok jelenségről ad egyszerűen számot. Így pl. megmagyarázza azt a tapasztalatot, hogy ha egy forgó testre erőt gyakorolunk, akkor a forgástengely nem az erő irányában, hanem arra merőlegesen, a forgatómomentum irányában tér ki. Ezen a hatáson alapszik a forgó szerkezetek többféle alkalmazása, így pl. a pörgettyűs stabilizálás.

A szimmetrikus pörgettyű mozgása a Föld nehézségi erejének hatása alatt olyan rögzített O pontja körül, mely körül szimmetrikus tehetetlenségi ellipszoidja

van, analitikailag is egyszerűen tárgyalható az *Euler*-egyenletek alapján, a *Lagrange*-féle másodfajú egyenletek segítségével vagy a *Hamilton—Jacobi*-féle módszerrel. A számítással itt nem foglalkozunk, csak az eredményt adjuk meg. Eszerint a szimmetrikus pörgettyű szimmetriatengelye, ha a tengely nem áll függőlegesen, vagyis ha a Föld nehézségi ereje rá forgatómomentumot gyakorol, nem ír le pontosan körkúpot, hanem a C szimmetriatengely végpontja egy gömbfelület két parallel köre között végez mozgást. Közelebbi vizsgálat mutatja, hogy ez a mozgás a 76. ábrán feltüntetett típusok egyike lehet.



77. ábra. A nehéz pörgettyű szimmetriatengelyének mozgása

Ha a két parallel kör igen közel van egymáshoz, akkor a szimmetriatengely, vagyis a forgástengely a két parallel kör között csak kis ingadozásokat végez. Ez az eset áll fenn a nehéz pörgettyűnél. A pörgettyű tengelye nem ír le szabályos körkúpot, hanem még kicsi kilengéseket, ill. ingadozásokat végez, amit *mutáció*nak nevezünk.

15. §. A merev test sztatikájának alapfogalmai

Ezek után röviden rátérünk a merev test sztatikájának tárgyalására. Egy merev test akkor van egyensúlyban, ha a ráható erők vektori összege és a külső erők forgatómomentumainak vektori összege eltűnik. Tehát, ha

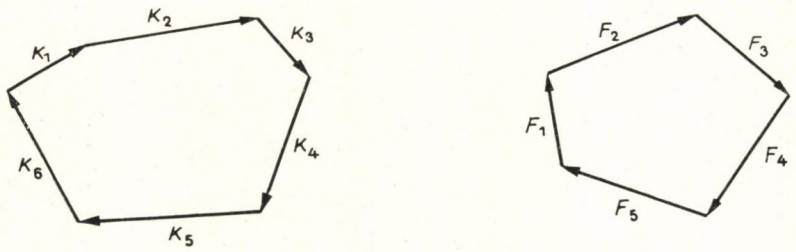
$$\sum_i \mathbf{K}_i = 0$$

és

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy ha az erőket, ill. az erők momentumait irány és nagyság szerint felrajzoljuk, zárt poligont kapunk. Ezt a két tételt mint axiómát lehet a merev test sztatikája tárgyalásának alapjává tenni.

Ha adva van az erők, ill. az erők momentumainak egy rendszere, amelyek eredője nem tűnik el, akkor ezek ekvivalensek eredőjükkel, tehát egy oly vektorral, amelyet az elsőnek kezdőpontjából az utolsó végpontjához húzunk. Ha ezekkel velük egyenlő nagyságú, de ellentett irányú erő-, ill. momentumvektort adunk, vagyis a rendszerre egy ennek megfelelő erőt, ill. forgatómomentumot gyakorolunk, akkor a rendszer egyensúlyban van.



78. ábra. Az erők és a forgatómomentumok poligonjai egyensúly esetén

Az erőt mindig egy pontra vonatkoztatjuk, amelyet az erő támadáspontjának nevezünk. A forgatómomentumot szintén egy pontra vonatkoztatjuk, ahonnan a rádiuszvektort számítjuk. Ha az erők támadáspontját az erők irányában eltoljuk, akkor sem új erők, sem új momentumok nem lépnek fel. Ugyanis az erők eredője, mint a szemlélet mutatja, nem változik meg. Hogy az erőnek bármely pontra vonatkoztatott forgatómomentuma sem változik meg, azt a következőképpen láthatjuk be. Toljuk el a $\mathbf{K}$ erő támadáspontját az erő irányában $\mathbf{r}'$-vel és vizsgáljuk meg, mekkora lesz az új momentum. Ha az erő támadáspontja A, akkor a momentum

$$\mathbf{F}_A = [\mathbf{r}_1, \mathbf{K}].$$

Ha a támadáspont B, akkor a momentum

$$\mathbf{F}_B = [\mathbf{r}_2, \mathbf{K}],$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}'.$$

Tehát

$$\mathbf{F}_B = [\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}', \mathbf{K}] = [\mathbf{r}_1, \mathbf{K}] + [\mathbf{r}', \mathbf{K}] = \mathbf{F}_A + [\mathbf{r}', \mathbf{K}]. \qquad (4.15.1)$$

De az erő támadáspontját saját irányában toltuk el, ezért

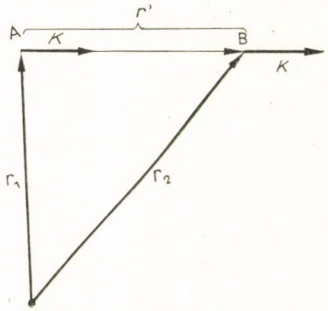
$$\mathbf{r}' \parallel \mathbf{K}, \text{ tehát } [\mathbf{r}', \mathbf{K}] = 0.$$

Vagyis

$$\mathbf{F}_B = \mathbf{F}_A .$$

Ha az erő támadáspontját olyan **s** vektorral toljuk el, mely nem esik az erő irányába, akkor az erő momentuma a következő vektorral változik meg

$$\Delta\mathbf{F} = [\mathbf{s}, \mathbf{K}].$$

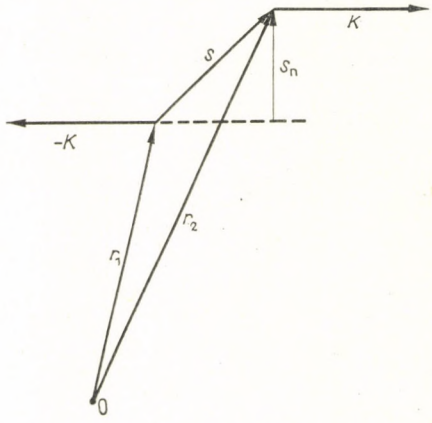


79. ábra. Az erő támadópontjának eltolása

Ezek után bevezetjük az *erőpár* fogalmát. Ez alatt két egyenlő nagy, de ellentett irányú erő rendszerét értjük. Az erőpár erőinek vektori összege tehát zérus, így az erők vektori összegéhez nem járul hozzá. Számítsuk ki az erőpárnak adott O pontra vonatkoztatott momentumát

$$\mathbf{F} = [\mathbf{r}_2, \mathbf{K}] - [\mathbf{r}_1, \mathbf{K}] = [\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{K}] = [\mathbf{s}, \mathbf{K}] = [\mathbf{s}_n, \mathbf{K}]. \qquad (4.15.2)$$

F-ből a végeredményben az O kezdőponttól függő $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$ kiesett és csak a két erő közötti merőleges s_n távolság maradt meg (— **K**)-tól **K** felé mutató irányban. **F**



80. ábra. Az erőpár momentuma

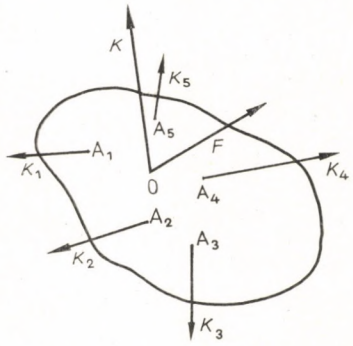
abszolút értéke tehát

$$F = s_n K,$$

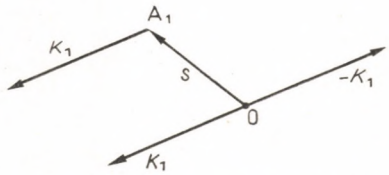
iránya pedig az $\mathbf{s}_n$ és $\mathbf{K}$ síkjára, vagyis a két erő által meghatározott síkra merőleges úgy, hogy $\mathbf{s}_n$, $\mathbf{K}$ és $\mathbf{F}$ egy jobbsodrású koordinátarendszer tengelyeinek irányába esnek.

Tehát az erőpár momentuma független attól, hogy milyen O pontra vonatkoztatjuk. Továbbá az is világos, hogy az erőpár momentuma változatlan marad, ha saját síkjában elforgatjuk. Tehát az erőpár az erőpár momentumának nagyságával és irányával meg van határozva, fekvése azonban tetszés szerinti.

Ezek után kimutatjuk, hogy egy merev testre ható erők rendszere redukálható egy meghatározott pontban megadott erőre és egy erőpárra.



81. ábra. Merev testre ható erők rendszere



82. ábra. Az erőrendszer helyettesítése egy erővel és egy erőpárral

Hogy ezt belássuk, induljunk ki a $\mathbf{K}_1$ erőből, amelynek támadáspontja A_1. Adott O pontban vegyünk egy $\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_1 = 0$ erőt. A $-\mathbf{K}_1$ erő az eredeti $\mathbf{K}_1$-gyel erőpárt alkot, melynek momentuma

$$\mathbf{F}_1 = [\mathbf{s}, \mathbf{K}_1].$$

$\mathbf{F}_1$ éppen a $\mathbf{K}_1$ erőnek O-ra vonatkozó momentuma. Tehát a $\mathbf{K}_1$ erő az O-ra vonatkozó momentumával együtt helyettesíthető egy az O pontban ható $\mathbf{K}_1$ erővel és egy $\mathbf{F}_1$ momentumú erőpárral. A többi erőkkel is hasonlóan járhatunk el és így végül adódik

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 + \ldots,$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots.$$

Tehát végeredményben adódik egy $\mathbf{K}$ erő, amely az O pontban hat és egy erőpár, amelynek momentuma éppen az erők momentumainak eredője.

Ha az O pontot máshol választjuk, akkor az O-ra vonatkozó $\mathbf{F}$ momentum megváltozik, de az eredő $\mathbf{K}$ erő változatlan marad. Ha $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{s}$, akkor az új

momentum

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} + [\mathbf{s}, \mathbf{K}]. \tag{4.15.3}$$

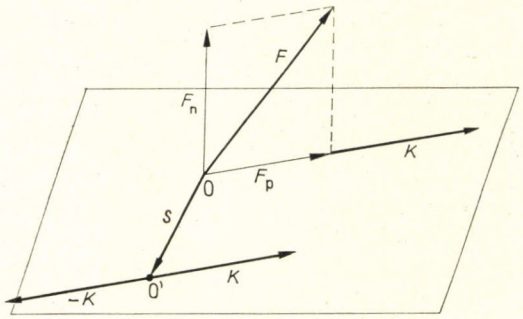
Az eredő momentum függése attól a ponttól, melyre vonatkoztatjuk, lehetővé teszi, hogy O-t úgy válasszuk, hogy az eredő momentum és az eredő erő iránya megegyezzen. Az ilyen rendszert *erőcsavar*nak nevezzük. Tehát egy merev testre ható erők rendszere egy erőcsavarral helyettesíthető.

Hogy ezt beláthassuk, bontsuk fel az O pontban kapott $\mathbf{F}$ momentumot két komponensre, amelyek közül az egyik párhuzamos $\mathbf{K}$-val, a másik merőleges $\mathbf{K}$-ra

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_n.$$

$\mathbf{F}_p$ $\mathbf{F}$ vetülete $\mathbf{K}$-ra. Válasszunk egy síkot, melyben $\mathbf{K}$ benne fekszik és amely merőleges $\mathbf{F}_n$-re. Ebben a síkban válasszunk egy O' pontot úgy, hogy

$$[\mathbf{s}, \mathbf{K}] = -\mathbf{F}_n$$



83. ábra. Az erőrendszer helyettesítése egy erőcsavarral

legyen. Ha O'-ben felvesszük a $\mathbf{K} - \mathbf{K}$ erőt, akkor O'-ben eredő gyanánt egy $\mathbf{K}$ erőt és egy újabb erőpárt kapunk, amelynek momentuma $-\mathbf{F}_n$. Ha a momentumot O'-re vonatkoztatjuk, akkor ez a $-\mathbf{F}_n$ momentum még hozzájárul $\mathbf{F}$-hez, tehát az O'-re vonatkoztatott momentum, $\mathbf{F}'$ a következő

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} - \mathbf{F}_n = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_n - \mathbf{F}_n = \mathbf{F}_p.$$

Tehát O'-ben az eredő erő $\mathbf{K}$, az eredő momentum $\mathbf{F}_p$ pedig vele megegyező irányú.

ÖTÖDIK FEJEZET

A DEFORMÁLHATÓ TESTEK MECHANIKÁJA

1. §. Bevezetés

Az eddigi tárgyalás folyamán a test fogalmát nagymértékben leegyszerűsíthettük. Először az anyagi pont mechanikájával foglalkoztunk, amidőn a test mozgását egy pont mozgásával helyettesíthettük. Ez mindig megengedhető közelítés, ha az elmozdulások a test méreteihez képest nagyok. Egy másik ilyen leegyszerűsített, ill. idealizált fogalom volt a merev test fogalma. Merev test alatt olyan testet értettünk, amelyben a pontok kölcsönös távolsága mozgás közben nem változik meg. Ez használható közelítés, ha a test pontjainak mozgásához képest az egyes pontok kölcsönös távolságának változása igen kicsi. Pl. a harang lengőmozgását mint merev fizikai inga mozgását tárgyalhatjuk. Ha ellenben a harang hangját vizsgáljuk, akkor a harang elasztikus rezgései, vagyis pontjainak kölcsönös elmozdulásai iránt érdeklődünk. Ennél és még rendkívül sok más jelenségnél a testeket már nem tekinthetjük mereveknek, hanem tekintetbe kell vennünk a testek alakváltozásait, deformációit is. Sőt a jelenségek nagy körénél (pl. vasrudak, tartó rudak rugalmas alakváltozása, húrok, membránok rezgése, rugók rezgése esetén) éppen ezek a deformációk érdekelnek bennünket. A következőkben a deformálható testek mechanikájával fogunk foglalkozni.

A deformálható testek mechanikájának tárgyalásánál szükségünk lesz a mátrixok és a tenzorok elméletének elemeire. Hogy a fizikai fejtegetéseinket ne kelljen állandóan matematikai tételek levezetésével megszakítani, ezeket előrebocsátjuk.

2. §. Lineáris transzformációk

Mátrixok

Lineárisnak nevezzük azt a transzformációt, amelynél az új változók a régi változók homogén lineáris függvényei. Elegendő 3 változóra szorítkozni, midőn a lineáris transzformáció általános alakja a következő

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Egy ilyen transzformáció jellemzője együtthatóinak rendszere,

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \tag{5.2.2}$$

amelyet *mátrixnak* nevezünk. Egy mátrix tehát bizonyos számok rendszere, amelyben a számok sorok és oszlopok szerint vannak rendezve. A mátrix, szemben a determinánssal, amely egy szám, számoknak bizonyos szkémája, melyben minden egyes számnak megvan a maga helye.

Egy mátrixot röviden úgy lehet jelölni, hogy az általános elemet zárójelbe tesszük. Így pl. az előbbi mátrix rövid jele (a_{ik}). Használatos a következő egyszerű jelölés is: a.

Ha az új változók rendre megegyeznek a régiekkel

$$\begin{aligned} x' &= 1x + 0y + 0z, \\ y' &= 0x + 1y + 0z, \\ z' &= 0x + 0y + 1z, \end{aligned}$$

akkor a transzformációt *identikus transzformáció*nak nevezzük. Ennek mátrixa

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{5.2.3}$$

Ezt gyakran (δ_{ik})-val jelöljük és egységmátrixnak nevezzük. $\delta_{ik} = 0$ ha $i \neq k$, $\delta_{ik} = 1$, ha $i = k$. Az egységmátrix diagonálisában szereplő elemek 1-gyel egyenlők, a többi elem 0. Szokásos az egységmátrixot 1-gyel is jelölni.

Állapítsuk meg annak a lineáris transzformációnak a mátrixát, amelyet akkor kapunk, ha két lineáris transzformációt egymásután hajtunk végre. Térjünk át az (a_{ik}) mátrixnak megfelelő transzformációval az x, y, z változókról az x', y', z' változókra

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned} \qquad (a_{ik}) = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

A vesszős változókról pedig térjünk át bizonyos kétvesszős változókra a következő (b_{ik}) mátrixnak megfelelő transzformációval

$$\begin{aligned} x'' &= b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}z', \\ y'' &= b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}z', \\ z'' &= b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}z', \end{aligned} \qquad (b_{ik}) = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix}.$$

Ha a vesszős változókat, amelyek az első egyenletcsoporttal vannak kifejezve, behelyettesítjük a másodikba, akkor x'', y'', z''-t, mint x, y, z homogén kifejezését

kapjuk

$$\begin{aligned} x'' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z, \\ y'' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z, \\ z'' &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z, \end{aligned} \qquad (c_{ik}) = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Vmatrix}. \qquad (5.2.4)$$

Az x, y, z változókról az x'', y'', z'' változókra tehát a (c_{ik}) mátrixnak megfelelő lineáris transzformációval lehet áttérni. A c_{ik} együtthatók meghatározására hajtsuk végre az említett behelyettesítést, ekkor nyerjük

$$\begin{aligned} x'' = {} & b_{11}(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + b_{12}(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) + \\ & + b_{13}(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z). \end{aligned}$$

y''-re és z''-re hasonló kifejezéseket kapunk. Rendezve ezeket x, y, z szerint

$$\begin{aligned} x'' = {} & (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31})x + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32})y + \\ & + (b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + b_{13}a_{33})z, \\ y'' = {} & (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31})x + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32})y + \\ & + (b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + b_{23}a_{33})z, \\ z'' = {} & (b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + b_{33}a_{31})x + (b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} + b_{33}a_{32})y + \\ & + (b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33})z. \end{aligned}$$

Az itt fellépő együtthatók a c_{ik} együtthatók. Látjuk, hogy ezek az együtthatók úgy adódnak, hogy a (b_{ik}) mátrix sorait rendre komponáljuk az (a_{ik}) mátrix oszlopaival. Mégpedig a c_{ik} elem a (b_{ik}) mátrix i-ik sorának és az (a_{ik}) mátrix k-adik oszlopának kompozíciója.

Ez a képzési szabály szerepel a determinánsok szorzási tételénél is, de ott lehet oszlopot sorral, oszlopot oszloppal, sort sorral és sort oszloppal komponálni. Itt a mátrixoknál azonban határozottan az első mátrix sorainak és a második mátrix oszlopainak kompozíciójáról van szó. A determinánsok szorzásának analógiájára a (b_{ik}) és (a_{ik}) mátrixokból ezzel a speciális kompozícióval képzett mátrixot a (b_{ik}) és (a_{ik}) mátrixok szorzatának nevezzük és a következőképpen jelöljük

$$\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

A jobboldalon (a_{ik}) jobbról számítva az első, (b_{ik}) pedig a második mátrix. Tehát a (c_{ik}) mátrixot úgy kapjuk, hogy az (a_{ik}) mátrixot balról szorozzuk (b_{ik})-val.

Tehát két lineáris transzformációnak egymás utáni alkalmazása olyan lineáris transzformációhoz vezet, amelynek mátrixa az első és második transzformáció mátrixainak a fenti sorrendben való szorzata.

Eredményünk nemcsak harmadrendű, hanem magasabb, általában n-ed rendű mátrixokra is érvényes és általánosságban így fejezhető ki

$$c_{rs} = (ba)_{rs} = \sum_{l=1}^{n} b_{rl} a_{ls} . \tag{5.2.5}$$

Ugyanis ha l változik 1-től n-ig, akkor b_{rl} végigmegy az r-edik soron, a_{ls} pedig az s-edik oszlopon.

A mátrixszorzás nem kommutatív művelet, mert a ba szorzat ik indexű eleme b i-edik sorának és a k-adik oszlopának kompozíciója, ami általában különbözik ab ik indexű elemétől, mely a i-edik sorának b k-adik oszlopával való kompozíciója, minthogy ebben más elemek fordulnak elő, mint az előbbiben. Tehát általában

$$ab \neq ba .$$

Speciális mátrixoknál előfordulhat, hogy a szorzat a tényezők sorrendjétől független. Ilyenkor a két mátrixot egymással felcserélhetőnek nevezzük.

Szorozzuk az $a = (a_{ik})$ mátrixot az $1 = (\delta_{ik})$ mátrixszal. A szorzatmátrix rs indexű eleme

$$(1 \cdot a)_{rs} = \sum_{l=1}^{n} \delta_{rl} a_{ls} = \delta_{rr} a_{rs} = a_{rs} . \tag{5.2.6}$$

Tehát a szorzat rs indexű eleme megegyezik az eredeti mátrix rs indexű elemével. Ez minden rs-re fennáll, vagyis a szorzat minden eleme megegyezik az eredeti mátrix megfelelő elemével, azaz a szorzatmátrix megegyezik az eredeti mátrixszal. Ugyanez áll az $a1$ szorzatra is. Tehát

$$1a = a1 = a,$$

vagyis bármely mátrix az egységmátrixszal akár jobbról, akár balról szorozva változatlan marad.

Egy mátrix szimmetrikus, ha $a_{ik} = a_{ki}$, antiszimmetrikus, ha $a_{ik} = -a_{ki}$ és, amint innen következik, $a_{ii} = 0$. Tehát a szimmetrikus mátrixnak 6, az antiszimmetrikusnak pedig 3 független eleme van, ha a mátrix 3 sorból és 3 oszlopból áll.

Infinitezimális lineáris transzformációk

Az olyan transzformációkat, amelyek csak kevéssé különböznek az identikus transzformációtól, vagyis amelyek mátrixa kevéssé különbözik az egységmátrixtól, *infinitezimális transzformációk*nak nevezzük. Jellemző tulajdonságuk, hogy mátrixukban a diagonális elemek közel az egységgel egyenlők, a többi pedig közel 0.

Legyenek (a_{ik}) és (b_{ik}) két infinitézimális transzformáció mátrixai. Képezzük ennek a két transzformációnak az összetételét, vagyis a megfelelő mátrixok szorzatát.

Először is számítsuk ki a (c_{ik}) szorzatmátrix egy diagonális elemét, pl. c_{11}-et

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31} .$$

Az utolsó két tag, minthogy elsőrendű kicsi tagok szorzatai, másodrendű kicsinyek és az első tag mellett elhagyhatók. Tehát

$$c_{11} = a_{11}b_{11}.$$

Ez még átalakítható. Ugyanis a_{11} és b_{11} diagonális elemek lévén, 1-től csak kevéssé különböznek, tehát $a_{11} - 1$ és $b_{11} - 1$ elsőrendű kicsinyek. Ezt figyelembe véve, írjuk $a_{11}b_{11}$-et a következő alakban

$$c_{11} = a_{11}b_{11} = ((a_{11} - 1) + 1)((b_{11} - 1) + 1)$$
$$= (a_{11} - 1)(b_{11} - 1) + a_{11} - 1 + b_{11} - 1 + 1 = (a_{11} - 1)(b_{11} - 1) +$$
$$+ a_{11} + b_{11} - 1.$$

Az $(a_{11} - 1)(b_{11} - 1)$ tagot, mivel másodrendű kicsi, elhagyhatjuk és nyerjük, hogy

$$c_{11} = a_{11} + b_{11} - 1.$$

Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy

$$c_{22} = a_{22} + b_{22} - 1 \qquad \text{és} \qquad c_{33} = a_{33} + b_{33} - 1. \tag{5.2.7}$$

Tehát az eredő transzformációban a diagonális elemeket megkapjuk, ha az összeteendő infinitezimális transzformációk megfelelő diagonális elemeinek összegéből 1-et levonunk.

Ezek után számítsuk ki a szorzatmátrixnak egy nemdiagonális elemét

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}.$$

Az utolsó tagot, mivel másodrendű kicsi, elhagyhatjuk, az első két tagot pedig a fentiek alapján a következőképpen alakíthatjuk át

$$c_{12} = ((a_{11} - 1) + 1)b_{12} + a_{12}((b_{22} - 1) + 1) = b_{12} + a_{12} + (a_{11} - 1)b_{12} +$$
$$+ a_{12}(b_{22} - 1).$$

A másodrendű kicsi tagok elhanyagolásával nyerjük

$$c_{12} = b_{12} + a_{12}. \tag{5.2.8}$$

Tehát a szorzatmátrix nemdiagonális elemei az összeteendő (összeszorzandó) mátrixok megfelelő nemdiagonális elemeinek összege.

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix} =$$

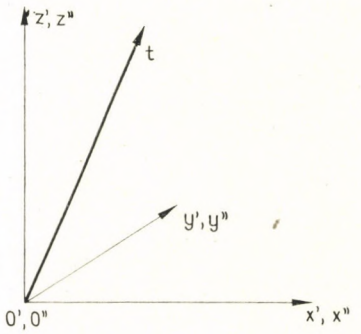
$$= \begin{Vmatrix} a_{11} + b_{11} - 1 & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} - 1 & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} - 1 \end{Vmatrix}.$$

Tehát két infinitezimális mátrix összetételének vagy összeszorzásának megfelelő mátrix elemeit megkapjuk, ha a mátrixok megfelelő elemeit összeadjuk, a diagonálisban álló elemeknél pedig 1-et levonunk. Ugyanis az eredő transzformációnak is infinitezimálisnak kell lennie, tehát a diagonálisban álló elemek 1-től különböznek kevéssé, $a_{11} + b_{11}$ pedig 2-től különbözik kevéssé, tehát ebből még 1-et le kell vonni.

Speciális lineáris transzformációk

A forgás

Legyen adva két derékszögű koordinátarendszer Σ' és Σ'', melyek kezdőpontja O' és O'', és tengelyeik összeesnek: $\Sigma'(x', y', z')$, $\Sigma''(x'', y'', z'')$.



84. ábra. A Σ' és a Σ'' koordinátarendszerek

Forgassuk el a Σ'' rendszert a térben rögzített Σ' rendszerhez képest egy az O', O'' ponton átmenő t-tengely körül $(-\phi)$-vel. Ekkor a Σ'' rendszer átmegy a $\Sigma(x, y, z)$ rendszerbe. A Σ rendszerből megítélve úgy fogható fel ez a forgás, mintha a t tengely körül a Σ'' rendszer tere $(+\phi)$ szöggel forgott volna el, a Σ pedig változatlan maradt.

Tehát a térnek (pl. anyaggal megtöltött térnek) a *t-tengely körüli elforgatása* mint transzformáció azonos a közös kezdőpontú és egymáshoz képest elforgatott koordinátarendszerek közti transzformációval.

Feladatunk megállapítani a forgási transzformáció formuláit. Legyen adva Σ, egy vele összeeső Σ'' koordinátarendszer és egy P pont. Képzeljük a Σ rendszert rögzítve és forgassuk el a Σ'' rendszer terét a P ponttal együtt a t tengely körül $(+\phi)$-vel. Ekkor a Σ'' rendszer átmegy egy Σ' rendszerbe, a P pont pedig egy P' pontba. Jelöljük P' koordinátáit Σ-ra vonatkozóan x', y', z'-vel, Σ'-re vonatkozóan pedig x, y, z-vel. (x, y, z azonosak P-nek Σ-ra vonatkozó koordinátáival.)

Feladatunk megállapítani, hogy x', y', z' és x, y, z között milyen összefüggés áll fenn, tehát feladatunk egy egyszerű forgástranszformáció formuláit megadni, amellyel már korábban foglalkoztunk és amely a következő transzformációhoz

vezetett

$$x' = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z,$$
$$y' = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z,$$
$$z' = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z,$$

ahol $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ az x'-, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ az y'- és $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ a z'-tengelyek iránykoszinuszai a Σ rendszerben. A transzformáció mátrixa a következő

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{Vmatrix}.$$

A mátrix elemei között a következő ortogonalitási relációk állnak fenn

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1, & \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 &= 0, \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1, & \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 &= 0, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1, & \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 &= 0. \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Ha a transzformáció infinitezimális, vagyis ha a forgás elemi forgás, akkor mivel α_2 és α_3 α_1-hez képest elsőrendű kicsi, α_2^2 és α_3^2 α_1^2-hez képest másodrendű kicsi, a baloldali első egyenletből nyerjük, hogy

$$\alpha_1 = 1.$$

Ugyanígy következik a második és harmadik egyenletből, hogy

$$\beta_2 = 1,$$

ill.

$$\gamma_3 = 1.$$

Ezeket beírva az ortogonalitási relációk második csoportjába és a másodrendű kicsi szorzatokat elhagyva, kapjuk rendre, hogy

$$\beta_1 + \alpha_2 = 0,$$
$$\gamma_2 + \beta_3 = 0,$$
$$\gamma_1 + \alpha_3 = 0.$$

Vezessük be a következő jelöléseket

$$\gamma_2 = -\beta_3 = p',$$
$$\alpha_3 = -\gamma_1 = q',$$
$$\beta_1 = -\alpha_2 = r'.$$

Tehát az elemi forgás mátrixa a következő

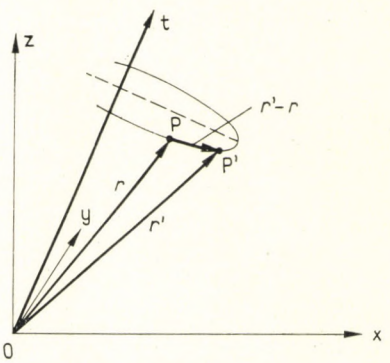
$$\begin{Vmatrix} 1 & -r' & q' \\ r' & 1 & -p' \\ -q' & p' & 1 \end{Vmatrix}.$$

Ez egy speciális antiszimmetrikus mátrix, mert a diagonálisban álló elemek nem 0-val, hanem 1-gyel egyenlők.

A transzformáció elemi forgás esetén

$$\begin{aligned} x' &= x + q'z - r'y, \\ y' &= y + r'x - p'z, \\ z' &= z + p'y - q'x. \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Az elemi forgástranszformáció formuláit sokkal szemléletesebben is levezethetjük. Induljunk ki az x, y, z koordinátarendszerből. Végezzünk a t-tengely



85. ábra. Az elemi forgás

körül egy elemi $\delta\varphi$ forgást, miközben az x, y, z-rendszer változatlan marad. A forgás következtében a P pont átmegy P'-be. Egy pont helyzetét a ponthoz húzott rádiuszvektorral adhatjuk meg. A P-hez húzott rádiuszvektor, $\mathbf{r}$ a forgás következtében átmegy $\mathbf{r}'$-be. $\mathbf{r}$ megváltozása tehát $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ és ez egyúttal P elmozdulása a forgás következtében. Erre a merev test kinematikájának tárgyalásánál azt találtuk, hogy ez $[\delta\varphi, \mathbf{r}]$. Tehát

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r} = [\delta\varphi, \mathbf{r}],$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + [\delta\varphi, \mathbf{r}].$$

Ha $\delta\varphi$ komponenseit p', q', r'-vel jelöljük, akkor ez az egyenlet komponensekben kiírva azonos a fenti transzformációs formulákkal. Innen azt is láthatjuk, hogy p', q', r' a koordinátatengelyek körüli forgások.

A nyúlás

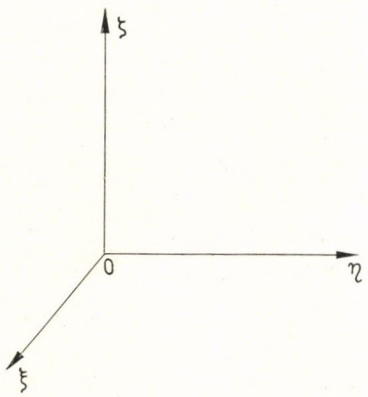
Azt a transzformációt, melynél 3 egymásra merőleges irányban, pl. a ξ, η, ζ-tengelyek irányában a pontok kölcsönös távolsága az eredeti értékkel arányosan változik meg, nyúlásnak nevezzük.

Ha az új, vagyis a megnyúlás utáni koordináták ξ', η', ζ', akkor

$$\xi' = \lambda\xi, \qquad \eta' = \mu\eta, \qquad \zeta' = \nu\zeta.$$

λ, μ, ν arányossági tényezők.

A nyúlás transzformációjával tehát általában adott ξ, η, ζ komponensű vektor új, ξ', η', ζ' komponensű vektorba megy át, mely többnyire abszolútértékben és irányban is különbözik az eredetitől.



86. ábra. A ξ, η, ζ koordinátarendszer

A nyúlást infinitezimálisnak nevezzük, ha λ, μ, ν az egységtől igen kevéssé különbözik, azaz $\lambda - 1$, $\mu - 1$, $\nu - 1$ elsőrendű kicsiny.

A fenti egyenletek a nyúlást abban a koordinátarendszerben fejezik ki, amelynek tengelyei irányában a pontok kölcsönös távolsága az eredeti értékkel arányosan változik meg. Fejezzük ki a nyúlást tetszőleges más koordinátarendszerben. Az általánosság megszorítása nélkül elegendő olyan x, y, z-rendszerre áttérni, amelynek origója összeesik a ξ, η, ζ-rendszer origójával, ugyanis a ξ, η, ζ-rendszert, mint a nyúlás definíciójából következik, önmagával párhuzamosan el lehet tolni. Tehát a ξ, η, ζ-rendszerről az x, y, z-rendszerre való áttérés egy egyszerű forgás. Ha a ξ, η, ζ-rendszerben az x-tengely iránykoszinuszai a_1, a_2, a_3, az y-tengelyé b_1, b_2, b_3 és a z-tengelyé c_1, c_2, c_3, akkor a transzformációformulák a következők

$$x = a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta,$$

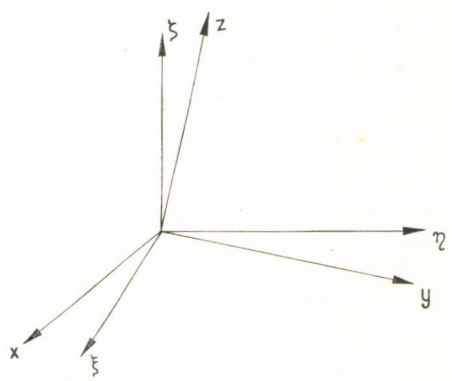
$$y = b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta,$$

$$z = c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta.$$

Megoldva ξ, η, ζ-ra, vagyis az egyenleteket rendre komponálva (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) és (a_3, b_3, c_3)-mal és figyelembe véve az ortogonalitási relációkat, nyerjük

$$\xi = a_1x + b_1y + c_1z,$$
$$\eta = a_2x + b_2y + c_2z,$$
$$\zeta = a_3x + b_3y + c_3z.$$

A deformáció előtt tehát a ξ, η, ζ- és x, y, z-koordináták között ezek az összefüggések állnak fenn. A nyúlás a ξ, η, ζ-tengelyek irányát nem változtatja meg, tehát a



87. ábra. Az x, y, z és a ξ, η, ζ koordinátarendszerek

deformáció utáni koordinátákra ugyanezek az összefüggések állnak fenn, vagyis

$$\begin{aligned} x' &= a_1\xi' + a_2\eta' + a_3\zeta', \\ y' &= b_1\xi' + b_2\eta' + b_3\zeta', \\ z' &= c_1\xi' + c_2\eta' + c_3\zeta', \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

ahol x', y', z' a pont koordinátái az x, y, z rendszerben a megnyúlás után.

Fejezzük ki itt ξ', η', ζ'-t ξ, η, ζ-val

$$x' = a_1\lambda\xi + a_2\mu\eta + a_3\nu\zeta,$$
$$y' = b_1\lambda\xi + b_2\mu\eta + b_3\nu\zeta,$$
$$z' = c_1\lambda\xi + c_2\mu\eta + c_3\nu\zeta.$$

Ha itt ξ, η, ζ-t kifejezzük x, y, z-vel, akkor megkapjuk a nyúlás utáni x', y', z' koordináták összefüggését a nyúlás előtti x, y, z koordinátákkal, vagyis a nyúlás

transzformációjának egyenleteit az x, y, z-rendszerben

$$x' = (a_1^2\lambda + a_2^2\mu + a_3^2\nu)x + (a_1b_1\lambda + a_2b_2\mu + a_3b_3\nu)y +$$
$$+ (a_1c_1\lambda + a_2c_2\mu + a_3c_3\nu)z,$$
$$y' = (b_1a_1\lambda + b_2a_2\mu + b_3a_3\nu)x + (b_1^2\lambda + b_2^2\mu + b_3^2\nu)y +$$
$$+ (b_1c_1\lambda + b_2c_2\mu + b_3c_3\nu)z,$$
$$z' = (c_1a_1\lambda + c_2a_2\mu + c_3a_3\nu)x + (c_1b_1\lambda + c_2b_2\mu + c_3b_3\nu)y +$$
$$+ (c_1^2\lambda + c_2^2\lambda + c_3^2\lambda)z.$$

Ha az együtthatók számára egyszerű jelöléseket vezetünk be, akkor ezeket a formulákat következőképpen írhatjuk

$$x' = \alpha x + \gamma' y + \beta' z,$$
$$y' = \gamma' x + \beta y + \alpha' z,$$
$$z' = \beta' x + \alpha' y + \gamma z.$$

Tehát a nyúlás mátrixa

$$\begin{Vmatrix} \alpha & \gamma' & \beta' \\ \gamma' & \beta & \alpha' \\ \beta' & \alpha' & \gamma \end{Vmatrix}. \tag{5.2.12}$$

A mátrix mindegyik eleme tartalmazza a nyúlás jellemzőit, λ, μ, ν-t és még annak a 3 iránynak, (ξ, η, ζ)-nak az iránykoszinuszait, amely irányokban a pontok kölcsönös távolsága az eredeti értékkel arányosan változik meg. A diagonálistól szimmetrikusan fekvő elemek egyenlők, vagyis a mátrix szimmetrikus. Tehát tetszőleges koordinátarendszerben a nyúlást olyan lineáris transzformáció fejezi ki, amelynek mátrixa szimmetrikus.

A ξ, η, ζ-rendszerben a nyúlásnak megfelelő lineáris transzformáció mátrixa, mint a fentiekből látható

$$\begin{Vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{Vmatrix}.$$

Ebben a speciális koordinátarendszerben tehát a transzformáció, ill. az azt reprezentáló mátrix nagyon egyszerű.

Infinitezimális lineáris transzformáció felbontása infinitezimális forgásra és nyúlásra

A következőkben kimutatjuk, hogy a koordinátáknak tetszőleges lineáris infinitezimális transzformációja mindig összetehető egy forgásból és három egymásra merőleges tengely irányában történő nyúlásból. A forgás és a nyúlás transz-

formációjának együtthatóit a tetszőleges infinitezimális transzformáció együtthatóiból egyszerűen lehet meghatározni.

Legyen adva a következő tetszőleges lineáris infinitezimális transzformáció

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned} \qquad a = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix},$$

ahol a diagonálisban álló együtthatók az egységtől, a többi együttható pedig 0-tól csak elsőrendű kicsi mennyiségekkel különbözik.

Ezt össze akarjuk tenni egy infinitezimális forgásból és nyúlásból, vagyis egy antiszimmetrikus és egy szimmetrikus mátrixú infinitezimális transzformációból. Legyenek a megfelelő mátrixok a következők

$$r = \begin{Vmatrix} 1 & -r' & q' \\ r' & 1 & -p' \\ -q' & p' & 1 \end{Vmatrix}, \qquad d = \begin{Vmatrix} \alpha & \gamma' & \beta' \\ \gamma' & \beta & \alpha' \\ \beta' & \alpha' & \gamma \end{Vmatrix}.$$

Mint láttuk, lineáris infinitezimális transzformációk mátrixára vonatkozó összetevési szabály a következő: az eredő transzformáció mátrixának elemeit úgy kapjuk, hogy az összeteendő transzformációk mátrixainak megfelelő elemeit összeadjuk, a diagonálisban álló elemeknél pedig az összegből még 1-et levonunk. Ha tehát azt akarjuk, hogy az eredő transzformáció mátrixa a legyen, akkor a következő összefüggéseknek kell fennállni

$$\begin{aligned} 1 + \alpha - 1 &= a_{11}, \\ 1 + \beta - 1 &= a_{22}, \\ 1 + \gamma - 1 &= a_{33}, \\ \gamma' - r' = a_{12}, \quad \beta' - q' &= a_{31}, \quad \alpha' - p' = a_{23}, \\ \gamma' + r' = a_{21}, \quad \beta' + q' &= a_{13}, \quad \alpha' + p' = a_{32}. \end{aligned}$$

Ezekből az egyenletekből kell az r és d mátrix ismeretlen elemeit, p', q', r'-t és α, β, γ, α', β', γ'-t meghatározni. Az ismeretlenek száma 9, melyek meghatározására éppen 9 egyenletünk van. Az első 3 egyenlet szolgáltatja α, β, γ-t, a többiekből pedig páronkénti összeadással, ill. kivonással nyerjük α', β', γ'-t, ill. p', q', r'-t. Az eredmény a következő

$$\begin{aligned} \alpha &= a_{11}, & \alpha' &= \frac{a_{23} + a_{32}}{2}, & p' &= \frac{a_{32} - a_{23}}{2}, \\ \beta &= a_{22}, & \beta' &= \frac{a_{13} + a_{31}}{2}, & q' &= \frac{a_{13} - a_{31}}{2}, \\ \gamma &= a_{33}, & \gamma' &= \frac{a_{12} + a_{21}}{2}, & r' &= \frac{a_{21} - a_{12}}{2}. \end{aligned} \qquad (5.2.13)$$

Ezek az egyenletek fejezik ki a nyúlásra jellemző 6 és a forgásra jellemző 3 együtthatót annak a transzformációnak együtthatóival, melyet a forgásból és nyúlásból össze akarunk tenni. Tehát az eredő transzformáció mátrixának 9 eleme meghatározza a forgás 3 és a nyúlás 6 együtthatóját.

Mindez infinitezimális transzformációkra vonatkozik.

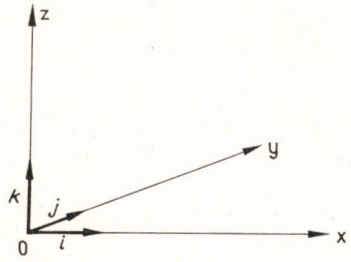
Tenzorok

Legyenek adva a **w** vektor komponensei, w_x, w_y, w_z mint valamely **v** vektor komponenseinek, v_x, v_y, v_z-nek lineáris kifejezései. Vagyis álljon fenn a komponensek között a következő összefüggés

$$\begin{aligned} w_x &= a_{11}v_x + a_{12}v_y + a_{13}v_z, \\ w_y &= a_{21}v_x + a_{22}v_y + a_{23}v_z, \\ w_z &= a_{31}v_x + a_{32}v_y + a_{33}v_z. \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

A komponensek közti fenti összefüggés a **v** vektorhoz egyértelműen hozzárendeli a **w** vektort.

Az a_{ik} koefficiensek rendszerének akkor lehet önálló jelentést tulajdonítani, ha függetlenül a koordinátarendszertől, melyben **v**-t és **w**-t komponenseire bont-



88. ábra. A koordinátarendszer egységvektorai

juk, az a_{ik} koefficiensekkel megadott transzformációval a **v** vektorból a **w**-t nyerjük. Ebben az esetben a fenti transzformáció mátrixát,

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right\| \text{-}t,$$

*tenzor*nak vagy *affinor*nak, az a_{ik} koefficienseket pedig tenzorkomponenseknek nevezzük. A tenzor tehát egy speciális mátrix.

A következőkben egyik fontos feladatunk lesz megállapítani azt, hogy a tenzorkomponensek hogyan változnak meg új koordinátarendszer bevezetésével, vagyis hogy a tenzorkomponensek hogyan transzformálódnak. Évégből először vektorkomponensek transzformációjával kell foglalkoznunk.

Mint ismeretes, a **v** vektor komponenseinek értéke függ attól, hogy milyen koordinátarendszerben bontottuk fel **v**-t komponenseire. Legyen adva egy koordinátarendszer, melynek tengelyei irányába mutató egységvektorok **i**, **j**, **k**. Ha ebben a koordinátarendszerben **v** komponensei v_x, v_y, v_z, akkor fennáll, hogy

$$v_x = \mathbf{vi}, \quad v_y = \mathbf{vj}, \quad v_z = \mathbf{vk}.$$

Legyen adva továbbá egy másik koordinátarendszer, melynek origója az előbbivel közös és melynek tengelyei irányába mutató egységvektorok **i'**, **j'**, **k'**. Legyenek továbbá **i'**, **j'**, **k'**, ill. az ezeknek megfelelő tengelyek iránykoszinuszai az **i**, **j**, **k**-nak megfelelő rendszerben

$$(\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}), \quad (\beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{23}), \quad (\beta_{31}, \beta_{32}, \beta_{33}).$$

Ekkor nyerjük:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= \beta_{11}\mathbf{i} + \beta_{12}\mathbf{j} + \beta_{13}\mathbf{k}, \\ \mathbf{j}' &= \beta_{21}\mathbf{i} + \beta_{22}\mathbf{j} + \beta_{23}\mathbf{k}, \\ \mathbf{k}' &= \beta_{31}\mathbf{i} + \beta_{32}\mathbf{j} + \beta_{33}\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

Az egységvektorok egymásra merőlegesek, tehát közöttük a következő összefüggések állnak fenn

$$\mathbf{ii} = 1, \quad \mathbf{ij} = 0, \ldots, \quad \mathbf{i'i'} = 1, \quad \mathbf{i'j'} = 0, \ldots.$$

Az iránykoszinuszokra pedig érvényesek az ortogonalitási relációk

$$\begin{aligned} \beta_{11}^2 + \beta_{12}^2 + \beta_{13}^2 &= 1, & \beta_{11}\beta_{21} + \beta_{12}\beta_{22} + \beta_{13}\beta_{23} &= 0, \\ \beta_{21}^2 + \beta_{22}^2 + \beta_{23}^2 &= 1, & \beta_{21}\beta_{31} + \beta_{22}\beta_{32} + \beta_{23}\beta_{33} &= 0, \\ \beta_{31}^2 + \beta_{32}^2 + \beta_{33}^2 &= 1, & \beta_{31}\beta_{11} + \beta_{32}\beta_{12} + \beta_{33}\beta_{13} &= 0. \end{aligned}$$

Mivel **i**, **j**, **k** iránykoszinuszai az **i'**, **j'**, **k'** rendszerben

$$(\beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{31}), \quad (\beta_{12}, \beta_{22}, \beta_{32}), \quad (\beta_{13}, \beta_{23}, \beta_{33}),$$

a fentiekkel teljesen analóg ortogonalitási relációkat nyerünk, melyek az előbbiektől csak abban különböznek, hogy az indexek mindenhol meg vannak cserélve, vagyis nyerjük

$$\begin{aligned} \beta_{11}^2 + \beta_{21}^2 + \beta_{31}^2 &= 1, & \beta_{11}\beta_{12} + \beta_{21}\beta_{22} + \beta_{31}\beta_{32} &= 0, \\ \beta_{12}^2 + \beta_{22}^2 + \beta_{32}^2 &= 1, & \beta_{12}\beta_{13} + \beta_{22}\beta_{23} + \beta_{32}\beta_{33} &= 0, \\ \beta_{13}^2 + \beta_{23}^2 + \beta_{33}^2 &= 1, & \beta_{13}\beta_{11} + \beta_{23}\beta_{21} + \beta_{33}\beta_{31} &= 0. \end{aligned}$$

Ezek figyelembe vételével az (1.15) egyenletekből, ha azokat rendre $(\beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{31})$-gyel, $(\beta_{12}, \beta_{22}, \beta_{32})$-vel és $(\beta_{13}, \beta_{23}, \beta_{33})$-mal szorozzuk és összeadjuk, következik

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \beta_{11}\mathbf{i}' + \beta_{21}\mathbf{j}' + \beta_{31}\mathbf{k}', \\ \mathbf{j} &= \beta_{12}\mathbf{i}' + \beta_{22}\mathbf{j}' + \beta_{32}\mathbf{k}', \\ \mathbf{k} &= \beta_{13}\mathbf{i}' + \beta_{23}\mathbf{j}' + \beta_{33}\mathbf{k}'. \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

Az $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ rendszerben $\mathbf{v}$ komponenseit megkapjuk, ha a (2.15) egyenleteket rendre skalárisan szorozzuk $\mathbf{v}$-vel. Ekkor nyerjük

$$\begin{aligned} v_x' &= \mathbf{v}\mathbf{i}' = \beta_{11}\mathbf{v}\mathbf{i} + \beta_{12}\mathbf{v}\mathbf{j} + \beta_{13}\mathbf{v}\mathbf{k} = \beta_{11}v_x + \beta_{12}v_y + \beta_{13}v_z, \\ v_y' &= \mathbf{v}\mathbf{j}' = \beta_{21}\mathbf{v}\mathbf{i} + \beta_{22}\mathbf{v}\mathbf{j} + \beta_{23}\mathbf{v}\mathbf{k} = \beta_{21}v_x + \beta_{22}v_y + \beta_{23}v_z, \\ v_z' &= \mathbf{v}\mathbf{k}' = \beta_{31}\mathbf{v}\mathbf{i} + \beta_{32}\mathbf{v}\mathbf{j} + \beta_{33}\mathbf{v}\mathbf{k} = \beta_{31}v_x + \beta_{32}v_y + \beta_{33}v_z. \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

A (2.16) egyenletekből pedig teljesen hasonlóan nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} v_x &= \beta_{11}v_x' + \beta_{21}v_y' + \beta_{31}v_z', \\ v_y &= \beta_{12}v_x' + \beta_{22}v_y' + \beta_{32}v_z', \\ v_z &= \beta_{13}v_x' + \beta_{23}v_y' + \beta_{33}v_z'. \end{aligned} \tag{5.2.18}$$

A (2.17) és (2.18) formulákból láthatjuk, hogy a vektorkomponensek úgy transzformálódnak, mint a koordinátatengelyek, ill. mint a koordináták. Ez természetes, mert a vektor komponensei a koordinátatengelyek irányába eső hosszak, tehát koordináta jellegű mennyiségek.

Ezek után rátérünk annak meghatározására, hogy hogyan kell az a_{ik} tenzorkomponenseknek transzformálódniuk, hogy a koordinátarendszer megváltozásával a $\mathbf{w}$ vektornak $\mathbf{v}$-hez való hozzárendelése ne változzék meg. Tehát álljanak fenn az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$-rendszerben a következő egyenletek

$$\begin{aligned} w_x &= a_{11}v_x + a_{12}v_y + a_{13}v_z, \\ w_y &= a_{21}v_x + a_{22}v_y + a_{23}v_z, \\ w_z &= a_{31}v_x + a_{32}v_y + a_{33}v_z, \end{aligned} \tag{5.2.19}$$

az $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$-rendszerben pedig a következők

$$\begin{aligned} w_x' &= a_{11}'v_x' + a_{12}'v_y' + a_{13}'v_z', \\ w_y' &= a_{21}'v_x' + a_{22}'v_y' + a_{23}'v_z', \\ w_z' &= a_{31}'v_x' + a_{32}'v_y' + a_{33}'v_z', \end{aligned} \tag{5.2.20}$$

ahol (w_x, w_y, w_z) és (w_x', w_y', w_z') ugyanannak a vektornak komponensei a két rendszerben, vagyis (w_x, w_y, w_z) és (w_x', w_y', w_z') ugyanazt a vektort határozzák meg. Ugyanaz áll fenn (v_x, v_y, v_z) és (v_x', v_y', v_z')-re is, tehát (v_x, v_y, v_z) és (v_x', v_y', v_z') szintén ugyanannak a vektornak a komponensei.

Szorozzuk meg a (2.19) egyenleteket rendre $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}$-mal és adjuk őket össze, ekkor a baloldalon nyerjük $\beta_{11}w_x + \beta_{12}w_y + \beta_{13}w_z$, ami (2.17) szerint w'_x, tehát ha e kifejezést rögtön rendezzük v_x, v_y, v_z szerint, következik

$$w'_x = (\beta_{11}a_{11} + \beta_{12}a_{21} + \beta_{13}a_{31})v_x + (\beta_{11}a_{12} + \beta_{12}a_{22} + \beta_{13}a_{32})v_y + \\ + (\beta_{11}a_{13} + \beta_{12}a_{23} + \beta_{13}a_{33})v_z.$$

Ha itt v_x, v_y, v_z-t a (2.18) egyenletekből v'_x, v'_y, v'_z-vel kifejezzük, akkor w'_x-et, mint v'_x, v'_y, v'_z lineáris kifejezését kapjuk. Mégpedig azt nyerjük, hogy

$$w'_x = (\beta_{11}^2 a_{11} + \beta_{11}\beta_{12}a_{12} + \beta_{11}\beta_{13}a_{13} + \beta_{12}\beta_{11}a_{21} + \beta_{12}^2 a_{22} + \\ + \beta_{12}\beta_{13}a_{23} + \beta_{13}\beta_{11}a_{31} + \beta_{13}\beta_{12}a_{32} + \beta_{13}^2 a_{33})v'_x + \\ + (\beta_{11}\beta_{21}a_{11} + \beta_{11}\beta_{22}a_{12} + \beta_{11}\beta_{23}a_{13} + \beta_{12}\beta_{21}a_{21} + \beta_{12}\beta_{22}a_{22} + \\ + \beta_{12}\beta_{23}a_{23} + \beta_{13}\beta_{21}a_{31} + \beta_{13}\beta_{22}a_{32} + \beta_{13}\beta_{23}a_{33})v'_y + \\ + (\beta_{11}\beta_{31}a_{11} + \beta_{11}\beta_{32}a_{12} + \beta_{11}\beta_{33}a_{13} + \beta_{12}\beta_{31}a_{21} + \beta_{12}\beta_{32}a_{22} + \\ + \beta_{12}\beta_{33}a_{23} + \beta_{13}\beta_{31}a_{31} + \beta_{13}\beta_{32}a_{32} + \beta_{13}\beta_{33}a_{33})v'_z.$$

Összehasonlítva ezt az egyenletet (2.20) első egyenletével, következik, hogy

$$a'_{11} = \beta_{11}^2 a_{11} + \beta_{11}\beta_{12}a_{12} + \beta_{11}\beta_{13}a_{13} + \beta_{12}\beta_{11}a_{21} + \beta_{12}^2 a_{22} + \\ + \beta_{12}\beta_{13}a_{23} + \beta_{13}\beta_{11}a_{31} + \beta_{13}\beta_{12}a_{32} + \beta_{13}^2 a_{33}.$$

Az a'_{12} és a'_{13} komponenst a fenti egyenlet másik két koefficiense adja. A többi tenzorkomponenst a vesszős rendszerben teljesen hasonlóan kapjuk, ha a (2.19) egyenleteknek $(\beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{23})$-mal, ill. $(\beta_{31}, \beta_{32}, \beta_{33})$-mal való kompozícióit képezzük és a nyert egyenletekből v_x, v_y, v_z-t v'_x, v'_y, v'_z-vel fejezzük ki.

Amint az a'_{11} kifejezéséből látjuk, a tenzorkomponensek a koordinátarendszer forgatásával úgy transzformálódnak, hogy az új komponensek az összes régi lineáris kifejezései, a koefficiensek pedig a β_{ik}-k négyzetei és szorzatai. Mi itt csak az a'_{11}-t adtuk meg. Ha a számításokat elvégezzük, egyszerűen nyerjük a többi új tenzorkomponenst is. Mi itt a formális képzési szabályt adjuk meg, melynek segítségével bármelyik új tenzorkomponenst egyszerűen nyerjük. Írjunk a (2.17) egyenletekben az x, y, z indexek helyébe rendre 1, 2, 3-t. Az a'_{ik} komponenst úgy kapjuk, ha képezzük a v'_i, v'_k szorzatot, mely számára v_x, v_y, v_z-ben másodfokú kifejezés adódik. Nagyon lényeges, hogy a v_x, v_y, v_z tényezők sorrendjét ne cseréljük fel a szorzatokban. Ha ebben a kifejezésben $v'_i v'_k$ helyébe a'_{ik}-t, $v_i v_k$ helyébe pedig a_{ik}-t írunk, nyerjük a'_{ik}-t. Így pl.

$$v'_1 v'_2 = (\beta_{11}v_1 + \beta_{12}v_2 + \beta_{13}v_3)\,(\beta_{21}v_1 + \beta_{22}v_2 + \beta_{23}v_3) = \\ = \beta_{11}\beta_{21}v_1^2 + \beta_{12}\beta_{21}v_2v_1 + \beta_{13}\beta_{21}v_3v_1 + \\ + \beta_{11}\beta_{22}v_1v_2 + \beta_{12}\beta_{22}v_2^2 + \beta_{13}\beta_{22}v_3v_2 + \\ + \beta_{11}\beta_{23}v_1v_3 + \beta_{12}\beta_{23}v_2v_3 + \beta_{13}\beta_{23}v_3^2.$$

Tehát

$$a'_{12} = \beta_{11}\beta_{21}a_{11} + \beta_{12}\beta_{21}a_{21} + \beta_{13}\beta_{21}a_{31} + \beta_{11}\beta_{22}a_{12} + \beta_{12}\beta_{22}a_{22} +$$
$$+ \beta_{13}\beta_{22}a_{32} + \beta_{11}\beta_{23}a_{13} + \beta_{12}\beta_{23}a_{23} + \beta_{13}\beta_{23}a_{33}.$$

Egy tenzort szimmetrikusnak nevezünk, ha komponenseire fennáll, hogy

$$a_{ik} = a_{ki},$$

vagyis ha a diagonálistól szimmetrikusan fekvő elemek egyenlők.

Egy tenzor antiszimmetrikus, ha

$$a_{ik} = -a_{ki},$$
$$a_{ii} = 0,$$

vagyis ha a diagonálisban álló elemek zérussal egyenlőek és a diagonálistól szimmetrikusan fekvő elemek abszolút értékre egyenlők, de előjelre különbözők.

A szimmetrikus tenzor független komponenseinek száma tehát 6, az antiszimmetrikus tenzor független komponenseinek száma pedig 3.

Fizikai szempontból különösen fontosak a szimmetrikus tenzorok, a továbbiakban ezekkel foglalkozunk. Tegyük fel tehát, hogy a fenti tenzor szimmetrikus, vagyis hogy

$$a_{ik} = a_{ki}$$

és képezzük a (2.19) egyenletek alapján a **vw** skaláris szorzatot, melyet röviden p-vel jelölünk

$$p = \mathbf{vw} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = a_{11}v_x^2 + a_{22}v_y^2 + a_{33}v_z^2 +$$
$$+ 2a_{12}v_x v_y + 2a_{23}v_y v_z + 2a_{31}v_z v_x. \qquad (5.2.21)$$

p konstans lévén, a v_x, v_y, v_z komponenseket koordinátáknak gyanánt értelmezve, látjuk, hogy ez egy másodrendű felület egyenlete, vagyis **v** végpontja másodrendű felületen fekszik. Tehát egy szimmetrikus tenzor másodrendű felülettel szemléltethető.

A fenti összefüggésből látható, hogy

$$w_x = a_{11}v_x + a_{12}v_y + a_{13}v_z = \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial v_x}.$$

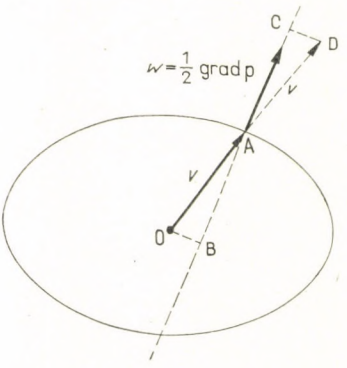
A többi komponenst hasonlóan nyerjük, vagyis fennáll, hogy

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\operatorname{grad}_v p. \qquad (5.2.22)$$

A $p = 1$-nek megfelelő másodrendű felületet tenzorellipszoidnak nevezzük, tekintet nélkül arra, hogy a fenti egyenlet egy tetszőleges másodrendű felületnek

és nem éppen ellipszoidnak egyenletét adja. (Egy szimmetrikus tenzor azért szemléltethető másodrendű felülettel, mert mindkettő független koefficienseinek száma 6). A tenzorellipszoidot a 89. ábra mutatja. A $p = 1$-nek megfelelő ellipszoid egyenletét úgy kapjuk, hogy a (2.21) egyenletet osztjuk p-vel, vagyis új koordináták gyanánt $\frac{v_x}{\sqrt{p}} = v'_x$, $\frac{v_y}{\sqrt{p}} = v'_y$, $\frac{v_z}{\sqrt{p}} = v'_z$-t vezetjük be, így a tenzorellipszoid a $\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{p}}$ vektorok végpontjainak geometriai helye. $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ csak abszolút értékben, mégpedig ugyanazon $\sqrt{p}$ faktorral különböznek $\mathbf{v}'$-től, ill. $\mathbf{w}'$-től, ami lényegtelen.

A (2.22) egyenlet segítségével bármely $\mathbf{v}$ vektorhoz azonnal megszerkeszthetjük a megfelelő $\mathbf{w}$-t, mely ugyanolyan irányú, mint $\mathrm{grad}_v p$, vagyis $\mathbf{v}'$ végpontjában



89. ábra. A tenzorellipszoid

a tenzorellipszoidra merőleges. $\mathbf{w}'$ abszolút értékét is szemléltethetjük, ugyanis a tenzorellipszoid definíciójából következik, hogy

$$\mathbf{vw} = CA \mid \mathbf{w}' \mid = 1,$$

tehát

$$CA = \frac{1}{\mid \mathbf{w}' \mid}.$$

A szerkesztésből látható, hogy $AB = CA$, tehát

$$AB = \frac{1}{\mid \mathbf{w}' \mid} = \frac{1}{w'}.$$

Tehát $\mid \mathbf{w}' \mid$ reciproka egyenlő $\mathbf{v}'$ vetületével a tenzorellipszoid azon normálisának irányára, melyet végpontjában emeltünk.

Mint láttuk, egy szimmetrikus tenzor másodrendű felülettel szemléltethető. Minden másodrendű felülethez tartozik egy kitüntetett koordinátarendszer,

melynek tengelyei a felület főtengelyeivel esnek össze. Ebben a koordinátarendszerben a másodrendű felület egyenlete a következő

$$p = a_{\mathrm{I}} v_x^{*2} + a_{\mathrm{II}} v_y^{*2} + a_{\mathrm{III}} v_z^{*2} .$$

A tenzornak tehát csak a diagonális elemei különböznek zérustól.

$$\begin{Vmatrix} a_{\mathrm{I}} & 0 & 0 \\ 0 & a_{\mathrm{II}} & 0 \\ 0 & 0 & a_{\mathrm{III}} \end{Vmatrix} .$$

Ebben a koordinátarendszerben **w** komponensei arányosak egymással

$$w_x^* = a_{\mathrm{I}} v_x^*, \quad w_y^* = a_{\mathrm{II}} v_y^*, \quad w_z^* = a_{\mathrm{III}} v_z^* .$$

3. §. A deformálható testek kinematikája

Folytonos anyageloszlású test folytonos és kis deformációi

Tárgyalásainkban a testeket folytonosnak tekintjük, vagyis el fogunk tekinteni finomabb struktúrájuktól. A valóságban a testek atomi, ill. molekuláris szerkezetűek, de ettől eltekinthetünk, ha a testeknek akkora részét tesszük vizsgálatunk tárgyává, mely már igen sok atomot, ill. molekulát tartalmaz. Az atomok, ill. molekulák átmérője nagyon kicsi, 10^{-8} cm nagyságrendű, úgyhogy egy olyan kis kockában, melynek éle a látható fény hullámhossza (vagyis 10^{-5} cm nagyságrendű), 10^9 vagyis egy milliárd atom, ill. molekula van. Tehát még ilyen kis testet is folytonos anyageloszlásúnak tekinthetünk.

Természetesen vannak olyan esetek, melyeknél éppen az atomi. ill. molekuláris szerkezet mérvadó. Pl. a rugalmas állandók visszavezetése az atomok, ill. molekulák bizonyos sajátságaira. Ezek az esetek, ill. problémák az atomelmélet, ill. kvantummechanika körébe tartoznak, így ezekkel itt nem foglalkozunk.

Mi tehát a következőkben a testeket folytonos anyageloszlásúnak tekintjük. A deformációkra azt a megszorítást tesszük, hogy folytonosak legyenek, vagyis hogy a deformáció előtt szomszédos pontok a deformáció után is szomszédosak maradnak. Így a test szakadását, ill. törését tárgyalásainkból kizárjuk. Tehát feltesszük, hogy a pontoknak a deformáció következtében szenvedett elmozdulásai a helynek folytonos függvényei. Ezt a deformációt folytonos deformációnak nevezzük.

A következőkben még azt is kikötjük a deformációkra, hogy a pontoknak a deformáció következtében való elmozdulása kicsi legyen (kis deformáció).

Első feladatunk a folytonos anyageloszlású test folytonos és kis deformációját egy tetszőleges P pontjának környezetében alkalmas segédfogalmakkal jellemezni.

A deformációk analitikai jellemzése

A deformálható test $P(x, y, z)$ pontjából egy szomszédos $Q(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)$ pontjához húzott vektor komponensei legyenek ξ, η, ζ. Kérdés, hogy hogyan változnak meg a komponensek, ha a test folytonos és kis deformációt szenved. A P pont elmozdulásának komponensei legyenek u, v, w, a Q ponté u', v', w'. Az elmozdulást, ill. komponenseit mint a hely függvényét ismertnek tekintjük, tehát

$$u = u(x, y, z), \qquad u' = u(x + \xi, y + \eta, z + \zeta),$$

$$v = v(x, y, z), \qquad v' = v(x + \xi, y + \eta, z + \zeta),$$

$$w = w(x, y, z), \qquad w' = w(x + \xi, y + \eta, z + \zeta).$$

Fejtsük sorba u', v', w'-t a $P(x, y, z)$ pont környezetében

$$u' = u(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) = v(x, y, z) + \left(\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x}\right)_P \xi +$$

$$+ \left(\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y}\right)_P \eta + \left(\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z}\right)_P \zeta + \ldots$$

A jobboldalon álló deriváltaknak a P helyen vett értékei szerepelnek, a továbbiakban ezt külön nem fogjuk feltüntetni.

A deformációt a P pont környezetében akarjuk jellemezni. Tehát csak olyan pontokra kell szorítkoznunk, melyek távolsága P-től nagyon kicsi, úgyhogy a távolságok magasabb hatványait az elsők mellett elhagyhatjuk. Feltesszük, hogy a Q pont is P környezetébe esik, vagyis hogy a ξ, η, ζ vektor elemi vektor. Ekkor a fenti sorfejtésben a ξ, η, ζ-ban magasabb rendű tagokat elhagyhatjuk és nyerjük

$$u' = u + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta .$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$v' = v + \frac{\partial v}{\partial x}\xi + \frac{\partial v}{\partial y}\eta + \frac{\partial v}{\partial z}\xi , \tag{5.3.1}$$

$$w' = w + \frac{\partial w}{\partial x}\xi + \frac{\partial w}{\partial y}\eta + \frac{\partial w}{\partial z}\xi .$$

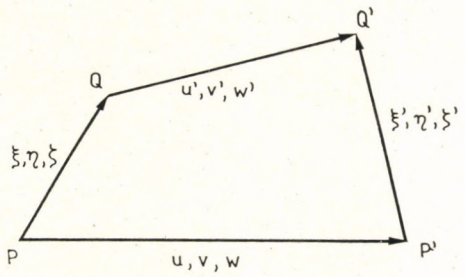
Feltesszük, hogy a deformáció pontról pontra csak nagyon kis mértékben változik, tehát a $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y \ldots$ differenciálhányadosok kicsinyek.

Állapítsuk meg, hogy a $\overrightarrow{PQ}(\xi, \eta, \zeta)$ vektor a deformáció után milyen $\overline{P'Q'}(\xi', \eta', \zeta')$ vektorba megy át. Ebből a célból állapítsuk meg a P' és Q' pontok koordinátáit. P' x-koordinátája $x + u$, Q' x-koordinátája:

$$x + \xi + u' = x + \xi + u + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta .$$

A $\overline{P'Q'}$ vektor x komponensét megkapjuk, ha a Q' x-koordinátájából levonjuk P' x-koordinátáját, tehát

$$\xi' = \xi + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta .$$



90. ábra. Az elemi deformáció

Vagyis

$$\xi' = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta .$$

Teljesen hasonlóan nyerjük, hogy

$$\eta' = \frac{\partial v}{\partial x}\xi + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\eta + \frac{\partial v}{\partial z}\zeta , \qquad (5.3.2)$$

$$\zeta' = \frac{\partial w}{\partial x}\xi + \frac{\partial w}{\partial y}\eta + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\zeta .$$

Tehát a $\overrightarrow{PQ}$ vektor komponensei a deformáció után homogén lineáris függvényei $\overrightarrow{PQ}$ deformáció előtti komponenseinek. Vagyis két pont egymástól való távolságának tengelyvetületei a deformáció után homogén lineáris kifejezései a deformáció előtti tengelyvetületeknek.

ξ', η', ζ'-t ξ, η, ζ-ból lineáris transzformációval nyerjük, mert a jobboldalon álló nem diagonális tagok együtthatói feltevésünk értelmében 1-hez képest kicsinyek, a diagonális tagok együtthatói pedig közel 1-gyel egyenlők.

A fenti transzformáció a lehető legáltalánosabb lineáris infinitezimális transzformáció, mely ξ, η, ζ-t átviszi ξ', η', ζ'-be. Mint láttuk, minden lineáris infinitezimális transzformáció összetehető infinitezimális nyúlásból és forgásból. Tehát a P pont környezetének egy általános lineáris infinitezimális transzformációja két részre bontható fel, egy elemi forgásra, melynél a P pont környezetét, *mint merev egészet*, egy meghatározott tengely körül elforgatjuk és egy elemi nyúlásra. A deformálható testek mechanikájában bennünket a test pontjai egymástól való távolságának megváltozása folytán fellépő rugalmas erők érdekelnek. A P pont környezetének, vagyis egy térfogatelemnek, mint merev egésznek elcsavarásával azonban a P pont környezete, ill. a térfogatelem pontjainak egymástól való tá-

volsága nem változik meg. Ha tehát a fellépő rugalmas erőket keressük, akkor a fenti általános lineáris infinitezimális transzformációból az elemi forgást ki kell rekeszteni, vagyis csak az elemi nyúlást szabad figyelembe venni.

Láttuk, hogy egy általános lineáris infinitezimális transzformációnak megfelelő (a_{ik}) mátrix a következőképpen bontható fel az elemi forgás és nyúlás mátrixaira

$$\begin{Vmatrix} 1 & -r' & q' \\ r & 1 & -p' \\ -q' & p' & 1 \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} \alpha & \gamma' & \beta' \\ \gamma' & \beta & \alpha' \\ \beta' & \alpha' & \gamma \end{Vmatrix},$$

$$p' = \frac{a_{32} - a_{23}}{2}, \qquad \alpha = a_{11}, \qquad \alpha' = \frac{a_{23} + a_{32}}{2},$$

$$q' = \frac{a_{13} - a_{31}}{2}, \qquad \beta = a_{22}, \qquad \beta' = \frac{a_{13} + a_{31}}{2},$$

$$r' = \frac{a_{21} - a_{12}}{2}, \qquad \gamma = a_{33}, \qquad \gamma' = \frac{a_{12} + a_{21}}{2}.$$

Alkalmazva ezeket a formulákat a fenti általános lineáris infinitezimális transzformációra, nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} p' &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), & \alpha &= 1 + \frac{\partial u}{\partial x}, & \alpha' &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ q' &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), & \beta &= 1 + \frac{\partial v}{\partial y}, & \beta' &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \\ r' &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right), & \gamma &= 1 + \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma' &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

p', q', r'-ről röviden csak annyit említünk meg, hogy ezek, mint láttuk, egy meghatározott tengely körüli $\delta\varphi$ elforgás komponensei és mint látható, egyenlők $\frac{1}{2}$ rot **s** vektor komponenseivel, ahol $\mathbf{s}(u, v, w)$ jelenti az elmozdulásvektort vagyis

$$\delta\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{s}.$$

Tehát valamely folytonos anyageloszlású test megadott (x, y, z) pontjában az elmozdulásvektor rotációjának fele az illető pont környezetében a deformáció következtében előálló elforgásvektort adja. (Tehát a rot **s** elforgást jelent és ez indokolja a rotáció elnevezést.)

Mivel bennünket a P pont környezetében a pontok egymástól való távolságának megváltozása következtében fellépő rugalmas erők érdekelnek, a fenti általános transzformációnak csak az a része érdekel bennünket, mely tényleg meg-

változtatja a pontoknak egymástól való távolságát, ez pedig a nyúlás. A valóságos deformáció tehát a nyúlás, a térfogatelemnek mint merev egésznek elforgatását az előbb említett okok miatt nem tekinthetjük ennek. A következőkben deformáció alatt mindig valóságos deformációt értünk.

Alkalmazzunk már most a P pont környezetére egy ilyen valóságos deformációt, vagyis nyúlást. Ez azt jelenti, hogy ekkor a (ξ, η, ζ) vektor átmegy a (ξ'', η'', ζ'') vektorba, ahol

$$\xi'' = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\eta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\zeta,$$

$$\eta'' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\xi + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\eta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\zeta,$$

$$\zeta'' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\eta + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\zeta.$$

A (ξ, η, ζ) vektorról a (ξ'', η'', ζ'') vektorra való áttérés a koordinátarendszertől független. Tehát a jobboldalon álló együtthatók mátrixa szimmetrikus tenzor, így egy ellipszoiddal szemléltethető, amelynek egyenlete

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\xi^2 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\eta^2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\zeta^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\xi\eta + \\ + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\eta\zeta + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\xi\zeta = p. \qquad (5.3.4)$$

Ezt az ellipszoidot nevezzük $p = 1$ esetben *dilatációs ellipszoid*nak. Főtengelyeit fődilatációs tengelyeknek nevezzük. Jelöljük a rövidség kedvéért a (ξ, η, ζ) vektort **p**-vel, a (ξ'', η'', ζ'') vektort pedig **p**″-vel. **p**″ iránya, mint láttuk, megegyezik **p** végpontjában a dilatációs ellipszoidra emelt normális irányával. A három főtengely irányában **p** és a normális iránya összeesnek. Tehát **p** és **p**″ iránya csak akkor egyezik meg, ha **p** a főtengelyek egyikének irányába mutat, vagyis csak valamelyik főtengely irányába eső hossz tartja meg eredeti irányát anélkül, hogy elforgást szenvedne. A fődilatációs tengelyek megegyeznek a nyúlásnál definiált, 3 egymásra merőleges tengellyel, melyek irányában a pontoknak egymástól való távolsága az eredeti értékkel arányosan változik meg.

A fenti transzformáció együtthatóinak egyszerű jelentésük van, melyet a következőképpen állapíthatunk meg.

Az x, ill. ξ koordinátatengely irányába mutató **i** egységvektornak, mivel csak x komponense van és az 1-gyel egyenlő, a fenti transzformációs egyenletek alapján olyan vektor felel meg a nyúlás után, melynek komponensei rendre

$$1 + \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Tehát **i** a nyúlás, vagyis a deformáció következtében a következő vektorba megy át

$$\mathbf{r}_i'' = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathbf{k}.$$

Hasonlóképpen nyerjük, hogy a **j** egységvektornak a deformáció után a következő vektor felel meg

$$\mathbf{r}_j'' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

A magasabb rendű kicsi tagok elhanyagolásával tehát nyerjük

$$\frac{|\mathbf{r}_i''| - |\mathbf{i}|}{|\mathbf{i}|} = \frac{\sqrt{r_i''^2} - 1}{1} = \frac{1 + \frac{\partial u}{\partial x} - 1}{1} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{|\mathbf{r}_j''| - |\mathbf{j}|}{|\mathbf{j}|} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{és hasonlóan} \quad \frac{|\mathbf{r}_k''| - |\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|} = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Tehát $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial y$, $\partial w/\partial z$ adják rendre az x, y, z (ill. ξ, η, ζ) tengelyek irányába eső hosszúságok relatív megváltozását, vagyis a hosszegységre eső változást.

A deformáció előtt **i** és **j** egymásra merőlegesek, a deformáció után $\frac{\pi}{2}$-től csak kevéssé különböző szöget zárnak be egymással (ugyanis a deformáció kicsi), melyet $\left(\frac{\pi}{2} - \delta_{ij}\right)$ -vel jelölünk. A vektorszámítás elemi szabályaiból következik, hogy

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_{ij}\right) = \sin \delta_{ij} = \frac{\mathbf{r}_i''\mathbf{r}_j''}{|\mathbf{r}_i''| \cdot |\mathbf{r}_j''|}.$$

$\mathbf{r}_i''$ és $\mathbf{r}_j''$ fenti alakjából a másodrendű kicsi tagok elhanyagolásával nyerjük

$$\sin \delta_{ij} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}}.$$

Az $\dfrac{1}{1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}}$ tényezőt sorba fejtve

$$\sin \delta_{ij} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \frac{1}{1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \ldots\right).$$

A magasabb rendű tagokat ismét elhagyva kapjuk, hogy

$$\sin \delta_{ij} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Mivel δ_{ij} igen kis szög, $\sin \delta_{ij} \sim \delta_{ij}$, tehát

$$\delta_{ij} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5.3.5}$$

A nemdiagonális $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$ elem kétszerese tehát az x- és y-tengelyek irányába eső hosszak által alkotott szögnek a deformáció következtében való megváltozását jelenti. Hasonló jelentésük van a többi nemdiagonális elemeknek is. Ha az x, y, z-tengelyek összeesnek a dilatációs ellipszoid főtengelyeivel, akkor a tenzorban a nemdiagonális elemek hiányoznak. Ez azt jelenti, hogy a dilatációs ellipszoid tengelyeinek irányítását a deformáció nem változtatja meg, vagyis a tengelyek a deformáció után is egymásra merőlegesek és ugyanolyan irányúak, mint a deformáció előtt voltak. Ez különben már az előbbiekből is következik, mert láttuk, hogy a fődilatációs tengelyek irányába eső hosszak csak nyúlást (pozitív vagy negatív értelemben) szenvednek, de irányuk változatlan marad.

Állapítsuk meg a relatív térfogatváltozást, vagyis a térfogategységnek a deformáció következtében való megváltozását. Evégből csak az **i**, **j**, **k**-egységvektorok által alkotott parallelepipedon térfogatának megváltozását kell meghatároznunk. A deformáció előtt ennek térfogata $V = 1$. A deformáció után a térfogat

$$V'' = r_i''[r_j'', r_k''] = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}. \tag{5.3.6}$$

Ha a magasabb rendű tagoktól eltekintünk

$$V'' = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Tehát a relatív térfogatváltozás

$$\frac{V'' - V}{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{s}. \tag{5.3.7}$$

Egy vektor x, y, z komponenseinek rendre x, y, z szerinti parciális deriváltjainak összegét a vektor *divergenciá*jának nevezzük és a fenti módon jelöljük.

A továbbiak szempontjából magát a torzulást, vagyis a $\mathbf{p}'' - \mathbf{p}$ vektort célszerű tekintetbe venni. Ennek a vektornak komponenseit azonnal megadhatjuk a $\mathbf{p}''$ komponenseire levezetett egyenletekből. Ha a következő jelöléseket vezetjük be

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad e_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = e_{21},$$

$$e_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad e_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = e_{32},$$

$$e_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad e_{31} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = e_{13},$$

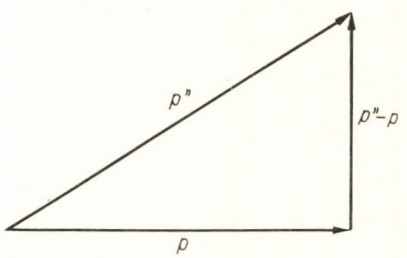
írhatjuk, hogy

$$\xi'' - \xi = e_{11}\xi + \frac{1}{2}e_{12}\eta + \frac{1}{2}e_{13}\zeta,$$

$$\eta'' - \eta = \frac{1}{2}e_{21}\xi + e_{22}\eta + \frac{1}{2}e_{23}\zeta,$$

$$\zeta'' - \zeta = \frac{1}{2}e_{31}\xi + \frac{1}{2}e_{32}\eta + e_{33}\zeta.$$

A jobboldalon álló együtthatók rendszere szintén tenzort alkot, ugyanis a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{p}'' - \mathbf{p}$ torzulás közti összefüggésnek olyannak kell lennie, hogy függetlenül attól, hogy $\mathbf{p}$-t, ill. $(\mathbf{p}'' - \mathbf{p})$-t milyen koordinátarendszer szerint bontjuk komponenseire, ugyanabból a $\mathbf{p}$ vektorból kiindulva mindig ugyanahhoz a $\mathbf{p}'' - \mathbf{p}$ torzulásvektorhoz kell eljutnunk. A fenti együtthatók rendszere által definiált tenzort nevezzük a torzulás tenzorának. Mivel ez is szimmetrikus, ellipszoiddal szemléltethető. Analitikailag ki lehet mutatni, hogy az ehhez a tenzorhoz tartozó ellipszoid főtengelyeinek iránya megegyezik a dilatációs ellipszoid főtengelyeinek irányával. De ezt számítás nélkül is könnyen beláthatjuk. A dilatációs ellipszoid főtengelyeinek irányában $\mathbf{p}$ és $\mathbf{p}''$ egyirányúak. A torzulás tenzorának megfelelő ellipszoid főtengelyeinek irányában pedig $\mathbf{p}'' - \mathbf{p}$ és $\mathbf{p}$ egyirányúak. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha $\mathbf{p}''$ és $\mathbf{p}$ egyirányúak. Innen pedig következik, hogy a torzulási tenzornak megfelelő ellipszoid főtengelyeinek iránya megegyezik a dilatációs ellipszoid főtengelyeinek irányával.



91. ábra. A $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}''$ és $\mathbf{p}'' - \mathbf{p}$ vektorok

Ha koordinátarendszer gyanánt a torzulási tenzornak megfelelő ellipszoid, ill. a dilatációs ellipszoid főtengelyei által meghatározott rendszert választjuk, akkor ebben a rendszerben eltűnnek a torzulási tenzor nem diagonális elemei és csak a diagonális elemek maradnak meg, melyeket e_{I}, e_{II} és e_{III}-mal jelölünk. Ha a főtengelyek rendszerére vonatkozó koordinátákat x', y', z'-vel jelöljük és ha u', v', w' jelentik u, v, w-t, vagyis az elmozduláskomponenseket x', y', z'-vel kifejezve, akkor

$$e_{\mathrm{I}} = \frac{\partial u'}{\partial x'}, \qquad e_{\mathrm{II}} = \frac{\partial v'}{\partial y'}, \qquad e_{\mathrm{III}} = \frac{\partial w'}{\partial z'}.$$

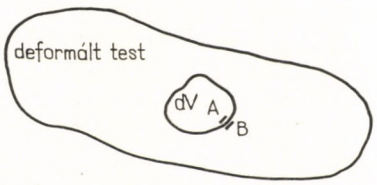
e_{I}, e_{II}, e_{III}-t nevezzük *fődilatációk*nak.

4. §. A deformálható testek dinamikája

Ebben a fejezetben először a deformálható testek egyensúlyának feltételeit fogjuk megállapítani, majd ezekből a *d'Alembert*-elv segítségével meghatározzuk a mozgás feltételeit. Így áttérhetünk a mozgás feltételeire, ha az erőkhöz hozzáadjuk az inerciaerőket. Legelső feladatunk az, hogy megállapítsuk, hogy a deformálható testben milyen erők működnek.

Tömegerők és feszültségek

Hajtsunk végre valamely testen deformációt és ragadjuk ki ennek egy dm tömegű kis részét, melynek térfogata legyen dV. Vizsgáljuk meg, hogy erre milyen erők hatnak.



92. ábra. A deformált test egy elemi térfogata

Hatnak rá olyan erők, melyek a részecske térfogatával arányosak. Ilyen pl. a nehézségi erő, ill. a gravitációs erő, mely dm-mel, ill. dV-vel arányos. Ilyenek pl. az elektromos erők is, melyek elektromos térben akkor hatnak a részre, ha annak elektromos töltése (mégpedig térfogati töltése) van, ugyanis az elektromos erők a töltéssel és így végeredményben dV-vel arányosak. Ilyenek pl. a mágneses erők is, ha a résznek elektromos töltése van és mágneses térben mozog. Mindezeket a térfogattal arányos erőket térfogati erőknek, vagy mivel a térfogat (szingularitásokat kizárva) arányos a tömeggel, tömegerőknek nevezzük. **K**-val jelöljük a térfogategységre ható erőt, a dV térfogatelemre ható erő tehát $\mathbf{K}dV$.

Ezeken az erőkön kívül más erők is hatnak. Ugyanis az elemi térfogat egy felületi részére, pl. (A)-ra a rész környezetének a felületi résszel szomszédos része

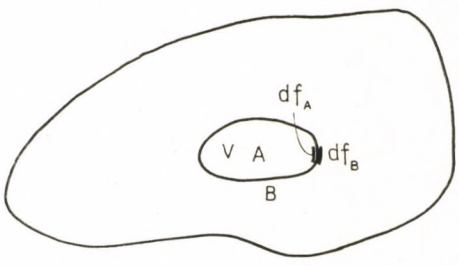
(B) erőt gyakorol. Ezek az erők csak a közvetlen szomszédos részek között működnek, melyek a határfelület két oldalán fekszenek. Ezek az erők tehát nem a részecske térfogatával, hanem felületével arányosak. Ide tartoznak pl. a folyadékok belsejében működő nyomóerők, amelyek mindig merőlegesek a felületre. A deformálható testek elméletében általában a felülettel arányos erők nem merőlegesek a felületre és függenek a felület irányításától. Jelöljük az **n** normálisú *felületegységre* ható erőt $\mathbf{P}_n$-nel. Az n index tehát most nem n-irányú komponenst jelent, hanem a felület normálisát. $\mathbf{P}_n$-et nevezzük az **n** normálisú felületre ható feszültségnek. Derékszögű komponenseit a következőképpen jelöljük: P_{n1}, P_{n2}, P_{n3}, ahol az x,y,z indexek helyett 1, 2, 3-t írtunk. Az **n** normálisú df felületelemre ható erő tehát: $\mathbf{P}_n df$.

A feszültség függése a felület irányításától

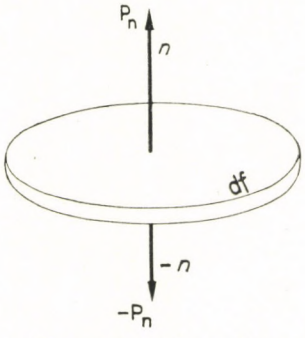
Először azt a fontos tételt mutatjuk ki, hogy

$$\mathbf{P}_{-n} = -\mathbf{P}_n .$$

Ez a következőt jelenti. Ragadjunk ki a deformálható test belsejében egy V térfogatú részt, melyet jelöljünk A-val, a test megmaradó részét pedig B-vel. Legyen az A-t határoló felület df_A elemeinek normálisa **n** és legyen df_A helyén a B által az A felületegységére ható erő, vagyis a feszültség $\mathbf{P}_n$.



93. ábra. Felületelem egy deformált testben



94. ábra. Henger alakú tartomány a deformált testben

A B-hez tartozó határfelületnek df_A-val szomszédos részét jelöljük df_B-vel (ez tehát ráesik df_A-ra), normálisa $-\mathbf{n}$. Az A által df_B helyén a B felületegységre gyakorolt erő tehát $\mathbf{P}_{-n}$.

Tételünk szerint

$$\mathbf{P}_{-n} = \mathbf{P}_n .$$

Tehát a test ugyanazon helyén az **n** és $-\mathbf{n}$ normálisú felületegységekre ható erő, vagyis az **n** és $-\mathbf{n}$ normálisú felületekre ható feszültségek abszolút értékre egyenlők, de irányuk ellentétes.

A tétel helyességét könnyen beláthatjuk. Válasszunk a testben egy henger alakú részt, amelynek magassága elhanyagolható többi méreteihez képest, vagyis feltesszük, hogy az alsó és felső fedőlapok végtelen közel vannak egymáshoz. A fedőlapok legyenek sík elemek. Vizsgáljuk meg, hogy ez a henger alakú rész mikor van egyensúlyban. Állapítsuk meg tehát, hogy milyen erők hatnak rá. Hatnak rá a térfogattal arányos tömegerők, továbbá a fedőlapokra és a palástra ható felületi erők, melyek a felülettel arányosak. Ha elemi hengerre szorítkozunk, akkor a térfogattal arányos tömegerők a felületi erők mellett elhanyagolhatók, mert a térfogat a henger méreteinek köbével, a felület pedig a henger méreteinek négyzetével arányos, tehát a tömegerők a felületi erőkhöz képest magasabbrendű kicsinyek. A palástra ható felületi erőket el lehet hanyagolni a fedőlapokra ható felületi erők mellett, mert a hengert úgy választottuk, hogy a palástja a fedőlapokhoz képest magasabb rendű kicsi legyen. Tehát csakis a fedőlapokra ható felületi erőket kell figyelembe venni. Legyen a felső, ill. alsó fedőlap területe df, akkor egyensúly esetén, mivel az erők összege zérus, fennáll, hogy

$$\mathbf{P}_n df + \mathbf{P}'_{-n} df = 0,$$

ahol $\mathbf{P}_n$ a felső, $\mathbf{P}'_{-n}$ az alsó fedőlapra ható feszültség. A $\mathbf{P}'_{-n}$-nél a vesszővel azt akartuk kifejezni, hogy $\mathbf{P}_n$ és $\mathbf{P}'_{-n}$ a testnek nem ugyanazon pontjára, vagyis nem ugyanazon helyre vonatkoznak. Ha azonban a henger magassága 0 lesz, akkor a két fedőlap összeesik és ekkor $\mathbf{P}'_{-n}$-t ugyanazon a helyen kell venni, mint $\mathbf{P}_n$-et, ekkor tehát a vessző elmarad és nyerjük, hogy

$$\mathbf{P}_n df + \mathbf{P}_{-n} df = 0$$

és df-fel osztva, hogy

$$\mathbf{P}_{-n} = -\mathbf{P}_n. \tag{5.4.1}$$

Komponensekben ez az egyenlet a következő

$$P_{-n1} = -P_{n1}, \quad P_{-n2} = -P_{n2}, \quad P_{-n3} = -P_{n3}.$$

A fenti egyenlet különben az akció és reakció axiómájából azonnal következik.

Ezek után vizsgáljuk meg, hogy általánosságban hogyan függ a feszültség a felület normálisának irányától. Válasszunk a test belsejében egy n normálisú síkot és helyezzünk el ugyancsak a test belsejében egy x, y, z koordinátarendszert a következőképpen. A sík és a koordinátasíkok tetraédert határoznak meg. Vizsgáljuk ennek egyensúlyát. Jelöljük a síknak a koordinátasíkok által kimetszett részét df-fel, ennek, mint tetraéderoldallapnak normálisa n, a többi oldallapok normálisa $-x$, $-y$, $-z$. A többi oldallap területe df-nek a koordinátasíkokra való vetületeivel egyenlő, melyek, mint ismeretes, a következők

$$df_x = df \cos(n, x),$$

$$df_y = df \cos(n, y),$$

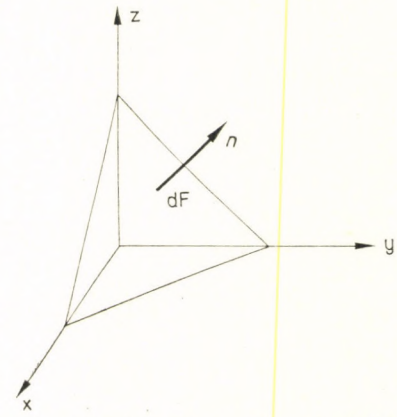
$$df_z = df \cos(n, z),$$

ahol pl. df_x az x normálisú yz koordinátasíkra való vetület. Jelöljük az x, y, z normálisú felületekre ható feszültségeket rendre P_1, P_2, P_3-mal. Így tehát pl. az x normálisú felületre ható feszültség z komponense P_{13}. Írjuk fel a tetraéder egyensúlyát kifejező egyenletet az erők x komponensére. Ez a következő

$$K_x dV + P_{n1} df + P_{-11} df_x + P_{-21} df_y + P_{-31} df_z = 0,$$

$$K_x dV + [P_{n1} + P_{-11} \cos(n, x) + P_{-21} \cos(n, y) + P_{-31} \cos(n, z)] df = 0.$$

Ha az n normálisú síkot a normálisa mentén, vagyis önmagával párhuzamosan az origó felé közelítjük, akkor a dV-vel arányos tömegerők a többi erőhöz képest,



95. ábra. Az **n** normálisú sík az x, y, z koordinátarendszerben

melyek df-fel arányosak, magasabb rendű kicsinyek lesznek, tehát elhanyagolhatók. Ha tehát $K_x dV$-t elhagyjuk és df-fel osztunk, nyerjük, hogy

$$P_{n1} + P_{-11} \cos(n, x) + P_{-21} \cos(n, y) + P_{-31} \cos(n, z) = 0.$$

Figyelembe véve, hogy előbbi tételünk alapján

$$P_{-11} = -P_{11}, \quad P_{-21} = -P_{21}, \quad P_{-31} = -P_{31},$$

következik, hogy

$$P_{n1} = P_{11} \cos(n, x) + P_{21} \cos(n, y) + P_{31} \cos(n, z).$$

Hasonlóan

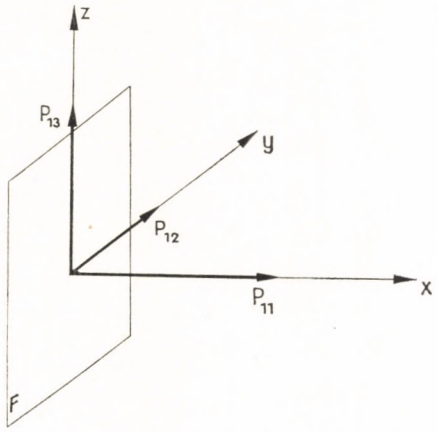
$$P_{n2} = P_{12} \cos(n, x) + P_{22} \cos(n, y) + P_{32} \cos(n, z), \qquad (5.4.2)$$

$$P_{n3} = P_{13} \cos(n, x) + P_{23} \cos(n, y) + P_{33} \cos(n, z).$$

Ezeknek az egyenleteknek a segítségével bármely n normálisú felületre ható feszültség komponenseit kiszámíthatjuk, ha ismerjük a $P_{11}, P_{12}, \ldots$ együtthatókat. Ezek az együtthatók ismét tenzort alkotnak, mert a fenti összefüggésnek természetszerűen olyannak kell lennie, hogy függetlenül attól, hogy milyen koordináta-

rendszerben bontjuk komponensekre a feszültségeket, egy megadott **n** vektortól, ill. iránytól mindig ugyanahhoz a $\mathbf{P}_n$ feszültséghez kell elvezetnie. Ezt a tenzort feszültségtenzornak szokás nevezni, és amint a továbbiak folyamán látni fogjuk, ez szimmetrikus.

A fenti P_{ik} együtthatók jelentése a következő. P_{11} jelenti pl. az x normálisú felületegységre ható erő x komponensét, tehát P_{11} az x normálisú felületegységre merőleges erő, a felületre merőleges *húzófeszültség*. Általában az egyenlő indexű együtthatók mind ilyen, a felületre merőleges húzófeszültségek, P_{12}, ill. P_{13} pedig jelentik ugyancsak az x normálisú felületegységre ható erő y, ill. z komponenseit,



96. ábra. A feszültségi tenzor elemei

vagyis az y, ill. z irányba ható *nyírófeszültség*eket. Általában a vegyes indexű együtthatók nyírófeszültségeket jelentenek.

Hogy a tenzorkomponensek közötti fontos szimmetriarelációkat és az egyensúly egyenleteit levezethessük, szükségünk van GAUSS tételére, amelyet előrebocsátunk.

A Gauss-tétel

GAUSS tétele egy függvénynek (mely bizonyos folytonossági követelményeknek eleget tesz) adott térfogatra vonatkozó térfogati integrálja és a függvénynek a térfogatot határoló felületre kiterjesztett felületi integrálja között ad összefüggést.

Legyen $U = U(x, y, z)$ egy olyan függvény, melynek mindenütt léteznek az első deriváltjai, melyekről feltesszük, hogy folytonosak. Képezzük valamely V térfogatra a következő integrált

$$I = \int_V \frac{\partial U}{\partial x}\, dV = \iiint \frac{\partial U}{\partial x}\, dxdydz\,.$$

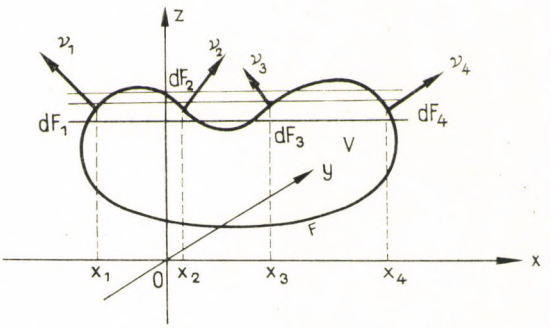
Integráljunk először x szerint, vagyis összegezzünk egy az x tengellyel párhuzamos $dydz$ keresztmetszetű hasáb térfogatelemeire. Ez a hasáb 2, 4 vagy általában $2m$, vagyis párosszámú helyen metszi a V térfogatot határoló felületet, mely zárt. Legyenek a metszési helyek x koordinátái $x_1, x_2, \ldots, x_{2m}$, ekkor

$$I = \iint \left\{ \int \frac{\partial U}{\partial x}\, dx \right\} dydz = \iint \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial U}{\partial x}\, dx + \int_{x_3}^{x_4} \frac{\partial U}{\partial x}\, dx + \ldots + \int_{x_{2m-1}}^{x_{2m}} \frac{\partial U}{\partial x}\, dx \right\} dydz ,$$

$$\int_{x_{2i-1}}^{x_{2i}} \frac{\partial U}{\partial x}\, dx = [U]_{x_{2i-1}}^{x_{2i}} = U_{2i} - U_{2i-1} ,$$

$$I = \int\int \{U_2 - U_1 + U_4 - U_3 + \ldots + U_{2m} - U_{2m-1}\} dydz,$$

$$I = \int\int \{U_2 dydz - U_1 dydz + U_4 dydz - U_3 dydz + \ldots\} .$$



97. ábra. A Gauss-tétel levezetésének szemléltetése

Fejezzük ki $dydz$-t azokkal a felületdarabokkal, melyeket a hasáb a felületből kimetsz. Feltesszük, hogy a felület különösebb szingularitásokat nem mutat, úgyhogy a kimetszett felületelemek síkelemeknek tekinthetők. Legyenek ezek $df_1, df_2, \ldots, df_{2m}$, kifelé mutató normálisaik pedig legyenek $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{2m}$. A hasáb keresztmetszete, $dydz$, nem más, mint az egyes kimetszett df felületelemek vetülete az x normálisú yz síkra

$$dydz = \pm df \cos(\nu, x) .$$

A jobboldalon előjel gyanánt $(\pm)$-t írunk a következő okból. Ha (ν, x) hegyes szög, akkor $\cos(\nu, x)$ pozitív, de ha (ν, x) tompa szög, akkor $\cos(\nu, x)$ negatív. Mivel $dydz$ pozitív előjelű mennyiség, $+df \cos(\nu, x)$-et kell írnunk, ha (ν, x) hegyes szög és $-df \cos(\nu, x)$-et, ha (ν, x) tompa szög.

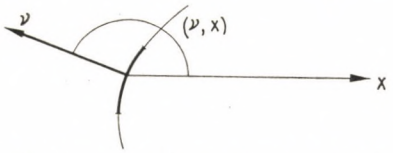
A páratlan indexszel jelölt belépések helyein x a felület belseje felé mutat, mivel pedig ν kifelé mutat, láthatjuk, hogy (ν, x) 90° és 270° közé esik, tehát $\cos(\nu, x)$

negatív, így itt a negatív előjelet kell venni

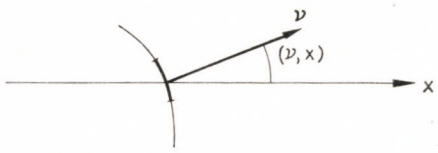
$$dydz = -df_{2i-1} \cos(\nu_{2i-1}, x).$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

A kilépések helyén x és ν is a felületből kifelé mutat, tehát (ν, x) hegyes szög. Ekkor tehát a pozitív előjelet kell venni.

$$dydz = df_{2i} \cos(\nu_{2i}, x).$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$



98. ábra. A ν és x irányok helyzete egymáshoz képest a belépések helyén



99. ábra. A ν és x irányok helyzete egymáshoz képest a kilépések helyén

Írjuk be ezeket a kifejezéseket a fenti I integrál kifejezésébe. Mivel a negatív kifejezések éppen oda kerülnek, ahol az I kifejezésében negatív előjelek szerepelnek, az összes tag előjele pozitív lesz. Tehát

$$I = \iiint \frac{\partial U}{\partial x}\, dxdydz =$$

$$= \int_V \frac{\partial U}{\partial x}\, dV = \iint \{U_1 \cos(\nu_1, x)\, df_1 + U_2 \cos(\nu_2, x)\, df_2 + \ldots + U_{2m} \cos(\nu_{2m}, x) df_{2m}\}.$$

A további integrálás elvégzése azt jelenti, hogy az összes ilyen x-tengellyel párhuzamos hasáb mentén képezzük az $U\cos(\nu, x)df$ szorzatok összegét. De az összes ilyen hasábnak a felülettel való df metszetei együttvéve a felület összes df felületelemét szolgáltatják. Az $U\cos(\nu, x)df$ szorzatoknak a felület összes elemére kiterjesztett összege pedig nem más mint az $\int_f U\cos(\nu, x)df$ felületi integrál, ahol f a V térfogatot határoló felület.

Tehát

$$\int_V \frac{\partial U}{\partial x}\, dV = \int_f U \cos(\nu, x)\, df.$$

Ehhez hasonlóan nyerjük, hogy

$$\int_V \frac{\partial V}{\partial y}\, dV = \int_f V \cos(\nu, y)\, df,$$

$$\int_V \frac{\partial W}{\partial z}\, dV = \int_f W \cos(\nu, z)\, df.$$

Adjuk ezeket össze, akkor nyerjük, hogy

$$\int_V \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dV = \int_f \{U \cos(v, x) + V \cos(v, y) + W \cos(v, z)\} df. \tag{5.4.3}$$

Ez a formula, ill. a fenti egyenletek fejezik ki GAUSS tételét, mely a V térfogatra vonatkozó térfogati integrált a határoló f felületre vonatkozó felületi integrállá alakítja át.

Ha U, V és W pl. egy **A** vektor 3 komponensével, A_x, A_y, A_z-vel egyenlő, akkor nyerjük, hogy

$$\int_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV = \int_f \{A_x \cos(v, x) + A_y \cos(v, y) + A_z \cos(v, z)\} df.$$

A baloldalon az integrál alatt az **A** vektor divergenciájának nevezett mennyiség, a jobboldalon pedig az **A** vektornak a felület normálisának irányába eső komponense, A_v áll. Ezzel a fenti egyenlet a következőképpen írható

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A}\, dV = \int_f A_v df. \tag{5.4.4}$$

Tehát egy vektor divergenciájának térfogati integrálja egyenlő a vektor normális komponensének a térfogatot határoló felületre kiterjesztett felületi integráljával. A divergenciával részletesen a vektoranalízis keretében a 7. fejezet 7.§-ában foglalkozunk.

A divergencia értelmezése és a relatív térfogatváltozás meghatározása Gauss tétele alapján

A divergencia egy P pontban GAUSS tételével a következőképpen értelmezhető. Vegyük körül a P pontot zárt felülettel, mely ΔV térfogatot zár körül és alkalmazzuk erre GAUSS tételét. Azután húzzuk össze az f felületet a P pontban. Mivel feltesszük, hogy div **A** a helynek folytonos függvénye, kis ΔV térfogat esetén fennáll, hogy

$$\int_f A_n df = \int_{\Delta V} \operatorname{div} \mathbf{A}\, dV \sim \operatorname{div} \mathbf{A} \int_{\Delta V} dV = \operatorname{div} \mathbf{A}\, \Delta V,$$

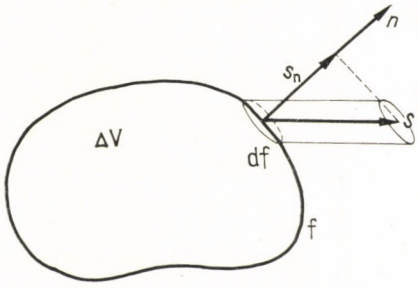
$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_f A_n df}{\Delta V}. \tag{5.4.5}$$

Tehát a vektor divergenciája a vektor felületi integráljának és a körülzárt térfogat hányadosának határértéke.

Legyen **A** az elmozdulásvektor, vagyis **s**, ekkor nyerjük, hogy

$$\operatorname{div} \mathbf{s} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_f s_n df}{dV}.$$

$s_n df$ jelenti az **s**-tengelyű, df alapú ferde henger térfogatát. Mivel **s** az elmozdulásvektor, $s_n df$ a df felületelemen a deformáció folytán áthaladó anyag térfogata,



100. ábra. A divergencia fogalmának szemléltetése

$\int_f s_n df$ pedig a deformáció következtében előálló térfogatváltozás. Ezt osztva ΔV-vel, a relatív térfogatváltozást kapjuk. Ezzel más úton is kimutattuk, hogy $\operatorname{div} \mathbf{s}$ a relatív térfogatváltozást jelenti.

Az egyensúly feltételei és a feszültség komponensei közti szimmetriarelációk tárgyalása

Ragadjuk ki a deformálható testnek egy véges térfogatú részét és állapítsuk meg, hogy ez mikor van egyensúlyban. Az egyensúly feltétele, hogy a részre ható összes erő eredője és az összes erő forgatómomentuma eltűnjék, vagyis hogy

$$\int_V \mathbf{K} dV + \oint_f \mathbf{P}_n df = 0,$$

$$\int_V [\mathbf{r}, \mathbf{K}] dV + \oint_f [\mathbf{r}, \mathbf{P}_n] df = 0 \qquad (5.4.6)$$

legyen. Az n index jelenti a df elem normálisát, mely elemre $\mathbf{P}_n$ hat, de $\mathbf{P}_n$ nem a normális komponens. A felületi integrált csak a kiragadott résznek a külső felületére kell kiterjeszteni, ugyanis az integrálásnál, vagyis az összegezésnél a résznek a belső, vagyis az egyes dV-k egymással érintkező határfelületeire ható feszültségek kiesnek, mert minden belső felületelemre mint két szomszédos dV térfogatelem válaszfelületére, ill. válaszfelületének elemére két egymással ellenkező irányban ható feszültség hat, melyek egymást lerontják.

Foglalkozzunk először az első egyenlettel és írjuk fel az egyenletet az x komponensre

$$\int_V K_x dV + \int_f P_{n1} df = 0.$$

Alakítsuk át a második tagot GAUSS tételével, de ügyeljünk arra, hogy P_{n1} nem normális irányú komponens. Tudjuk, hogy

$$P_{n1} = P_{11} \cos(n, x) + P_{21} \cos(n, y) + P_{31} \cos(n, z).$$

Ha GAUSS tételében a következő helyettesítést végezzük

$$U = P_{11}, \quad V = P_{21}, \quad W = P_{31},$$

akkor

$$\int_f P_{n1} df = \int_V \left(\frac{\partial P_{11}}{\partial x} + \frac{\partial P_{21}}{\partial y} + \frac{\partial P_{31}}{\partial z} \right) dV.$$

Ha ezt a fenti egyenletünkbe beírjuk, nyerjük, hogy

$$\int_V \left(K_x + \frac{\partial P_{11}}{\partial x} + \frac{\partial P_{21}}{\partial y} + \frac{\partial P_{31}}{\partial z} \right) dV = 0.$$

Ennek minden V térfogatra fenn kell állni, ami csak úgy lehetséges, hogy az integrandus 0. Tehát nyerjük, hogy

$$K_x + \frac{\partial P_{11}}{\partial x} + \frac{\partial P_{21}}{\partial y} + \frac{\partial P_{31}}{\partial z} = 0.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$K_y + \frac{\partial P_{12}}{\partial x} + \frac{\partial P_{22}}{\partial y} + \frac{\partial P_{32}}{\partial z} = 0, \tag{5.4.7}$$

$$K_z + \frac{\partial P_{13}}{\partial x} + \frac{\partial P_{23}}{\partial y} + \frac{\partial P_{33}}{\partial z} = 0.$$

Ezek az egyenletek adják az egyensúly feltételeinek első csoportját.

Foglalkozzunk most az egyensúly feltételének azzal az egyenletével, mely az összes erő forgatómomentumainak eltűnését fejezi ki. Az x komponensre vonatkozó egyenlet

$$\int_V (yK_z - zK_y) dV + \int_f (yP_{n3} - zP_{n2}) df = 0. \tag{5.4.8}$$

Foglalkozzunk először csak a második taggal, vagyis a felületi erők forgatómomentumának x komponensével, melyet a rövidség kedvéért F_x-szel jelölünk. Írjuk

be P_{n3} és P_{n2} kifejezéseit

$$F_x = \int_f (yP_{n3} - zP_{n2})df = \int_f \{y[P_{13}\cos(n, x) + P_{23}\cos(n, y) +$$

$$+ P_{33}\cos(n, z)] - z[P_{12}\cos(n, x) + P_{22}\cos(n, y) + P_{32}\cos(n, z)]\}df.$$

Rendezzük az integrandust és alkalmazzuk GAUSS tételét

$$F_x = \int_f \{(yP_{13} - zP_{12})\cos(n, x) + (yP_{23} - zP_{22})\cos(n, y) + (yP_{33} - zP_{32})\cos(n, z)\}\, df =$$

$$= \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(yP_{13} - zP_{12}) + \frac{\partial}{\partial y}(yP_{23} - zP_{22}) + \frac{\partial}{\partial z}(yP_{33} - zP_{32}) \right\} dV.$$

Tehát

$$F_x = \int_V \left\{ \left[\frac{\partial(yP_{13})}{\partial x} + \frac{\partial(yP_{23})}{\partial y} + \frac{\partial(yP_{33})}{\partial z} \right] - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\partial(zP_{12})}{\partial x} + \frac{\partial(zP_{22})}{\partial y} + \frac{\partial(zP_{32})}{\partial z} \right] \right\} dV.$$

Figyelembe véve, hogy

$$\frac{\partial(yP_{23})}{\partial y} = y\frac{\partial P_{23}}{\partial y} + P_{23}$$

és

$$\frac{\partial(zP_{32})}{\partial z} = z\frac{\partial P_{32}}{\partial z} + P_{32},$$

nyerjük, hogy

$$F_x = \int_V \left\{ y\left(\frac{\partial P_{13}}{\partial x} + \frac{\partial P_{23}}{\partial y} + \frac{\partial P_{33}}{\partial z} \right) - z\left(\frac{\partial P_{12}}{\partial x} + \frac{\partial P_{22}}{\partial y} + \frac{\partial P_{32}}{\partial z} \right) + P_{23} - P_{32} \right\} dV.$$

A ( ) zárójelekben álló tagok a (4.7) egyenletek szerint $(-K_z)$-vel, ill. $(-K_y)$-nal egyenlők. Tehát

$$F_x = -\int_V (yK_z - zK_y)dV + \int_V (P_{23} - P_{32})dV.$$

Ha F_x-et, vagyis a felületre ható erők forgatómomentumának x-komponensét beírjuk (4.8)-ba, nyerjük, hogy

$$\int_V (P_{23} - P_{32})dV = 0.$$

Ez pedig bármilyen V térfogatra csak akkor állhat fenn, ha az integrandus eltűnik, vagyis ha

$$P_{23} = P_{32}.$$

Teljesen hasonlóan

$$P_{31} = P_{13}, \qquad (5.4.9)$$

$$P_{12} = P_{21}.$$

Tehát az összes erő forgatómomentumának eltűnéséből a $P_{ik} = P_{ki}$ szimmetriarelációk következnek.

Ezekhez az egyensúlyi feltételekhez, melyeket ebben a fejezetben tárgyaltunk, járulnak még kiegészítés gyanánt a következő természetszerű feltételi egyenletek. Ha $\mathbf{P}_n^a$ jelenti a V térfogatú rész n normálisú felületelemére ható feszültséget, melyet a részre ható külső erők idéznek elő, akkor egyensúly esetén fenn kell állniuk a következő egyenleteknek

$$P_{n1}^a = P_{11}\cos(n, x) + P_{21}\cos(n, y) + P_{31}\cos(n, z),$$

$$P_{n2}^a = P_{12}\cos(n, x) + P_{22}\cos(n, y) + P_{32}\cos(n, z),$$

$$P_{n3}^a = P_{13}\cos(n, x) + P_{23}\cos(n, y) + P_{33}\cos(n, z),$$

ahol a P_{ik} együtthatók a fellépő belső feszültségek komponensei. Ezek az egyenletek azt mondják, hogy a V térfogatú rész $\mathbf{n}$ normálisú felületi elemére ható külső feszültség irányra nézve ellentétes az $\mathbf{n}$ normálisú felületelem másik oldalára, a $-\mathbf{n}$ normálisú, ugyanazon felületelemre ható belső feszültséggel, vagyis hogy $\mathbf{P}_n^a = -\mathbf{P}_{-n} = \mathbf{P}_n$, ahol $\mathbf{P}_{-n}$, ill. $\mathbf{P}_n$ a belső feszültséget jelentik.

Feszültségtenzor. Főfeszültségek

A $P_{ik} = P_{ki}$ szimmetriarelációkból következik, hogy a feszültségtenzor szimmetrikus. Tehát a feszültségtenzor is szemléltethető ellipszoiddal, melyet feszültségellipszoidnak nevezünk. Ha a koordinátarendszer tengelyeit ezen ellipszoid főtengelyei irányába fektetjük, akkor a nem diagonális tenzorkomponensek eltűnnek és csak a diagonális komponensek maradnak meg, melyeket P_{I}, P_{II}, P_{III}-mal jelöljük. Ezeket a mennyiségeket nevezzük *főfeszültségek*nek. Ebben a kitüntetett koordinátarendszerben a feszültségkomponenseknek az illető felületelem irányításától való függése nagyon egyszerű lesz. Mivel a nem diagonális komponensek eltűnnek, nyerjük, hogy

$$P'_{n1} = P_{\mathrm{I}}\cos(n, x'),$$

$$P'_{n2} = P_{\mathrm{II}}\cos(n, y'),$$

$$P'_{n3} = P_{\mathrm{III}}\cos(n, z'),$$

ahol a vesszővel azt jelezzük, hogy a feszültségkomponensek a főtengelyek rendszerére, vagyis x', y', z'-re vonatkoznak.

Az egyensúly és a mozgás feltételei

Mint láttuk, az egyensúly feltételeit a (4.7) egyenletek fejezik ki. Ezekből az egyenletekből D'ALEMBERT elve alapján a mozgás-egyenleteket úgy kapjuk, hogy az erőkhöz hozzáadjuk az inerciaerő, $-\rho\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2}$ (mégpedig a térfogategységben levő tömegre vonatkozó inerciaerő) komponenseit, ahol ρ az anyag sűrűsége. Ugyanis az inerciaerőt **K**-hoz analóg és a térfogattal arányos tömegerőnek lehet tekinteni és mivel **K**-t a térfogategységre vonatkoztattuk, az inerciaerőt is a térfogategységre kell vonatkoztatni. Tehát a mozgás feltételei, ill. a mozgásegyenletek a következők

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = K_x + \frac{\partial P_{11}}{\partial x} + \frac{\partial P_{21}}{\partial y} + \frac{\partial P_{31}}{\partial z}, \quad \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = K_y + \frac{\partial P_{12}}{\partial x} + \frac{\partial P_{22}}{\partial y} + \frac{\partial P_{32}}{\partial z},$$

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = K_z + \frac{\partial P_{13}}{\partial x} + \frac{\partial P_{23}}{\partial x} + \frac{\partial P_{33}}{\partial z}. \tag{5.4.10}$$

5. §. A rugalmas testek mechanikája

A következőkben csak rugalmas deformációkkal foglalkozunk, melyek a deformáló hatás elmúltával megszűnnek. Eddigi általános tárgyalásaink nemcsak rugalmas, hanem maradandó alakváltozásokra is vonatkoznak, a továbbiakból azonban a maradandó alakváltozásokat kizárjuk. A rugalmas deformációk maguk is nagyon sok jelenséget foglalnak magukba, a további tárgyalásainknak is megvan tehát a maguk általánossága.

A torzulástenzor és a feszültségtenzor közötti összefüggés

Először az egyensúly kérdéseivel foglalkozunk. Az előbbiekben az egyensúly feltételeire levezetett egyenletek még nem adnak választ arra a nagyon fontos kérdésre, hogy megadott külső erők hatására egyensúlyi állapotban milyen lesz a deformáció. Hogy ezt megadhassuk, szükségünk van a feszültségek és a deformációt jellemző mennyiségek közti összefüggésre. A feszültségi komponensek, a P_{ik} együtthatók száma, csak a független mennyiségeket véve figyelembe, 6. Ugyancsak 6 a független e_{ik} komponensek száma, melyek a torzulástenzort határozzák meg. A legáltalánosabb esetben tehát fel kell tennünk, hogy ezeknek a mennyiségeknek mindegyike az összes többinek függvénye, mely lineáris összefüggés esetén is 36 együtthatóhoz vezet. Az illető rugalmas test szimmetria-tulajdonságainak megfelelően azonban ezek száma igen nagy mértékben redukálódik. Így izotrop testek, vagyis olyan testek esetében, melyekben nincsenek kitüntetett irányok, melyek viselkedése tehát minden irányban azonos, a független együtt-

hatók száma 2. A számítások teljes általánosságukban elvégezhetők és a redukciók keresztülvihetők. Tekintettel arra, hogy mi itt csak izotrop testekkel foglalkozunk, nem fogjuk ezt az utat követni, hanem rögtön az izotrop testekből indulunk ki, melyek a testeknek igen nagy csoportját foglalják magukba.

Izotrop testeknél a feszültségi tenzornak megfelelő ellipszoid és a torzulási tenzornak megfelelő ellipszoid főtengelyei összeesnek. Ezt könnyen belátható juk. A feszültségi ellipszoid főtengelyei azáltal jellemezhetők, hogy a főtengelyek irányában a feszültség az ellipszoid felületi normálisának irányába mutat. Azok a feszültségek, melyek a felület normálisainak irányába mutatnak, tisztán húzó feszültségek. Tehát azokra a felületekre, melyek normálisa a főtengelyek egyikének irányába esik, csak húzó feszültségek hatnak. Izotrop testeknél tehát ezekben az irányokban (mivel a test az összes irányban ugyanúgy viselkedik) csak meghosszabbodások, ill. rövidülések léphetnek fel. Ez azonban éppen a dilatációs ellipszoid, ill. a vele közös főtengelyű torzulási ellipszoid főtengelyei irányának jellemzője. Izotrop testeknél tehát a feszültségi és a torzulási ellipszoid főtengelyei összeesnek. A következőkben izotrop testek esetére a feszültségek és a deformációt jellemző e_{ik} mennyiségek között fennálló fontos összefüggést először a főtengelyek rendszerében adjuk meg.

Az elasztomechanikának alapja, mely ezt az összefüggést megadja, a *Hooke-féle* tapasztalati *törvény*: a felület normálisának irányába mutató feszültség arányos a relatív megnyúlással. Így pl. ha egy hosszú vékony rúdra egy, a keresztmetszetre merőleges erő hat, akkor a relatív megnyúlás, vagyis a hosszegységre vonatkoztatott megnyúlás arányos az egységnyi keresztmetszetre ható (és annak normálisának irányába mutató) erővel, vagyis a normális irányába mutató feszültséggel. Ez a törvény természetesen csak kis deformációkra vonatkozik, nagyobb deformációk esetén a *Hooke*-féle törvény elveszti érvényességét. Ha a főtengelyek rendszerében a tengelyeket rendre I, II, III-mal jelöljük, akkor az előbbiek szerint az I-tengelyre vonatkozóan HOOKE törvénye azt jelenti, hogy

$$P_{\mathrm{I}} = Ee_{\mathrm{I}},$$

ahol E az anyag lineáris rugalmassági modulusa.

Amint a tapasztalat mutatja, egy test megnyújtásakor a nyújtás irányára merőleges keresztmetszet méretei megrövidülnek. A nyúlás irányára merőleges relatív megváltozás (megrövidülés) viszonya a nyúlás irányába eső hossz relatív megnyúlásához, mint a tapasztalat mutatja, a *Hooke*-féle törvény érvényességi határain belül állandó. Ezt a viszonyt μ-vel szokás jelölni, neve *Poisson-féle rugalmassági állandó.*

Ha tehát feltesszük, hogy a P_{I} főfeszültségen kívül még a P_{II} és P_{III} főfeszültségek is hatnak, akkor az I tengely irányába történő teljes relatív megnyúlást úgy kapjuk, ha a P_{I} főfeszültség által előidézett $e_{\mathrm{I}} = P_{\mathrm{I}}/E$ relatív megnyúlásból még levonjuk az erre az irányra merőleges és a P_{II} és P_{III} főfeszültségek következtében fellépő relatív megnyúlások által az I irányban előidézett megrövidüléseket. Vizsgáljuk meg először azt, hogy mekkora relatív megrövidülést idéz elő a P_{II}

feszültség az I irányban. A II irányban a P_{II} által előidézett relatív megnyúlás

$$e_{II} = \frac{P_{II}}{E}.$$

Jelöljük az I irányban fellépő relatív megrövidülést e_I'-vel, ekkor a fentebbi törvény értelmében

$$\frac{e_I'}{e_{II}} = \mu,$$

vagyis

$$e_I' = \mu e_{II} = \mu \frac{P_{II}}{E}.$$

Hasonlóan nyerjük, hogy P_{III} által az I irányban előidézett relatív megrövidülés $\mu \frac{P_{III}}{E}$. Tehát az eredő relatív megnyúlás az I irányban

$$e_I = \frac{1}{E}\{P_I - \mu(P_{II} + P_{III})\}. \tag{5.5.1}$$

Ez az összefüggés, mint közvetlenül meggyőződhetünk, még a következőképpen is írható

$$e_I = \frac{1+\mu}{E}\left\{P_I - \frac{\mu}{1+\mu}(P_I + P_{II} + P_{III})\right\}.$$

Hasonlóan nyerjük, hogy

$$e_{II} = \frac{1+\mu}{E}\left\{P_{II} - \frac{\mu}{1+\mu}(P_I + P_{II} + P_{III})\right\}, \tag{5.5.2}$$

$$e_{III} = \frac{1+\mu}{E}\left\{P_{III} - \frac{\mu}{1+\mu}(P_I + P_{II} + P_{III})\right\}.$$

Ezeket a fontos összefüggéseket, melyek megadják a feszültségek és a deformációt jellemző mennyiségek közti kapcsolatot és melyeket mi itt a torzulási, ill. a feszültségi ellipszoid közös főtengelyeinek rendszerében vezettünk le, tetszőleges koordinátarendszerre kell transzformálnunk. A főtengelyek rendszere ugyanis a továbbiak leírására nem alkalmas, mert a deformált testben a főtengelyek iránya helyről helyre változik. Vezessünk be tehát egy, a térben fix és tetszőleges x, y, z-rendszert és jelöljük pl. az x-tengelynek az I tengellyel való hajlásszögét (I, x)-el, a többi szögeket pedig analóg módon. Továbbá legyenek az I, II és III tengelyek irányába mutató egységvektorok rendre $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ és az x, y, z-tengelyek irányába mutató egységvektorok **i**, **j**, **k**. Ekkor fennállnak a következő transzformációs

formulák

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_1 \cos(\mathrm{I}, x) + \mathbf{e}_2 \cos(\mathrm{II}, x) + \mathbf{e}_3 \cos(\mathrm{III}, x),$$
$$\mathbf{j} = \mathbf{e}_1 \cos(\mathrm{I}, y) + \mathbf{e}_2 \cos(\mathrm{II}, y) + \mathbf{e}_3 \cos(\mathrm{III}, y), \tag{5.5.3}$$
$$\mathbf{k} = \mathbf{e}_1 \cos(\mathrm{I}, z) + \mathbf{e}_2 \cos(\mathrm{II}, z) + \mathbf{e}_3 \cos(\mathrm{III}, z).$$

Az e_{ii} és $\frac{1}{2} e_{ik} (i \neq k)$ új tenzorkomponenseket a tenzorok tárgyalásánál levezetett transzformációs formulákból nyerjük, ha β_{11}, β_{12}, β_{13} helyébe rendre cos (I, x), cos (II, x), cos (III, x)-et, β_{21}, β_{22}, β_{23} helyébe rendre cos (I, y), cos (II, y), cos (III, y)-t és így tovább helyettesítünk, továbbá ha a_{11}, a_{22}, a_{33} helyébe rendre e_{I}, e_{II}, e_{III}-at, a_{ik} $(i \neq k)$ helyébe 0-t, a'_{11}, a'_{22}, a'_{33} helyébe e_{11}, e_{22}, e_{33}-at, a'_{ik} $(i \neq k)$ helyébe pedig $\frac{1}{2} e_{ik}$-t $(i \neq k)$ írunk (ugyanis a torzulási tenzor nem diagonális elemeit $\frac{1}{2} e_{ik}$-val jelelöltük, ezért lép fel az $\frac{1}{2}$-es faktor). Ezek figyelembevételével kapjuk, hogy

$$e_{11} = e_{\mathrm{I}} \cos^2(\mathrm{I}, x) + e_{\mathrm{II}} \cos^2(\mathrm{II}, x) + e_{\mathrm{III}} \cos^2(\mathrm{III}, x),$$
$$e_{22} = e_{\mathrm{I}} \cos^2(\mathrm{I}, y) + e_{\mathrm{II}} \cos^2(\mathrm{II}, y) + e_{\mathrm{III}} \cos^2(\mathrm{III}, y), \tag{5.5.4}$$
$$e_{33} = e_{\mathrm{I}} \cos^2(\mathrm{I}, z) + e_{\mathrm{II}} \cos^2(\mathrm{II}, z) + e_{\mathrm{III}} \cos^2(\mathrm{III}, z).$$

Továbbá

$$\frac{1}{2} e_{12} = \frac{1}{2} e_{21} = e_{\mathrm{I}} \cos(\mathrm{I}, x)\cos(\mathrm{I}, y) + e_{\mathrm{II}} \cos(\mathrm{II}, x)\cos(\mathrm{II}, y) + e_{\mathrm{III}} \cos(\mathrm{III}, x)\cos(\mathrm{III}, y),$$
$$\frac{1}{2} e_{23} = \frac{1}{2} e_{32} = e_{\mathrm{I}} \cos(\mathrm{I}, y)\cos(\mathrm{I}, z) + e_{\mathrm{II}} \cos(\mathrm{II}, y)\cos(\mathrm{II}, z) + e_{\mathrm{III}} \cos(\mathrm{III}, y)\cos(\mathrm{III}, z),$$
$$\frac{1}{2} e_{31} = \frac{1}{2} e_{13} = e_{\mathrm{I}} \cos(\mathrm{I}, z)\cos(\mathrm{I}, x) + e_{\mathrm{II}} \cos(\mathrm{II}, z)\cos(\mathrm{II}, x) + e_{\mathrm{III}} \cos(\mathrm{III}, z)\cos(\mathrm{III}, x). \tag{5.5.5}$$

Az (5.4) formulákból látható, hogy

$$e_{11} + e_{22} + e_{33} = e_{\mathrm{I}} + e_{\mathrm{II}} + e_{\mathrm{III}}, \tag{5.5.6}$$

tehát a torzulási tenzor diagonális elemeinek összege, vagyis div **s** a koordinátarendszertől független állandó. Az ilyen kifejezést a tenzor invariánsának nevezzük. Egy másik invariáns a következő

$$e_{11}e_{22} + e_{22}e_{33} + e_{33}e_{11} - \frac{1}{4}(e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2).$$

A fenti transzformációs formulák alapján ugyanis könnyen kimutathatjuk, hogy

$$e_{11}e_{22} + e_{22}e_{33} + e_{33}e_{11} - \frac{1}{4}(e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2) = e_{\mathrm{I}}e_{\mathrm{II}} + e_{\mathrm{II}}e_{\mathrm{III}} + e_{\mathrm{III}}e_{\mathrm{I}}, \tag{5.5.7}$$

ami azt jelenti, hogy a baloldali kifejezés bármely koordinátarendszerben ugyanazzal a jobboldalon álló állandóval egyenlő. A számításokat, mellyel a legutóbbi egyenletet igazolni lehet, itt, mivel kissé hosszadalmasak, nem végezzük el. A másik invariánsra az elasztikus potenciál tárgyalásánál lesz szükségünk.

Az (5.4) és (5.5) transzformációs formulák a P_{ik} feszültségkomponensekre is fennállnak, csak e helyébe mindenhol P-t kell írni, de a P_{ik} $(i \neq k)$ komponenseknél az $\frac{1}{2}$ faktor elmarad, mert a feszültségtenzor nem diagonális komponensei P_{ik} és nem $\frac{1}{2}P_{ik}$. Így tehát

$$\begin{aligned} P_{11} &= P_{\mathrm{I}} \cos^2(\mathrm{I}, x) + P_{\mathrm{II}} \cos^2(\mathrm{II}, x) + P_{\mathrm{III}} \cos^2(\mathrm{III}, x), \\ P_{22} &= P_{\mathrm{I}} \cos^2(\mathrm{I}, y) + P_{\mathrm{II}} \cos^2(\mathrm{II}, y) + P_{\mathrm{III}} \cos^2(\mathrm{III}, y), \\ P_{33} &= P_{\mathrm{I}} \cos^2(\mathrm{I}, z) + P_{\mathrm{II}} \cos^2(\mathrm{II}, z) + P_{\mathrm{III}} \cos^2(\mathrm{III}, z) \end{aligned} \tag{5.5.8}$$

és

$$\begin{aligned} P_{12} = P_{21} &= P_{\mathrm{I}} \cos(\mathrm{I}, x) \cos(\mathrm{I}, y) + P_{\mathrm{II}} \cos(\mathrm{II}, x) \cos(\mathrm{II}, y) + \\ &+ P_{\mathrm{III}} \cos(\mathrm{III}, x) \cos(\mathrm{III}, y), \\ P_{23} = P_{32} &= P_{\mathrm{I}} \cos(\mathrm{I}, y) \cos(\mathrm{I}, z) + P_{\mathrm{II}} \cos(\mathrm{II}, y) \cos(\mathrm{II}, z) + \\ &+ P_{\mathrm{III}} \cos(\mathrm{III}, y) \cos(\mathrm{III}, z), \\ P_{31} = P_{13} &= P_{\mathrm{I}} \cos(\mathrm{I}, z) \cos(\mathrm{I}, x) + P_{\mathrm{II}} \cos(\mathrm{II}, z) \cos(\mathrm{II}, x) + \\ &+ P_{\mathrm{III}} \cos(\mathrm{III}, z) \cos(\mathrm{III}, x). \end{aligned} \tag{5.5.9}$$

Hasonlóképpen fennállnak az (5.6) és (5.7) alatti egyenletek is. Ezek közül különösen az (5.6) érdekel bennünket, mely szerint

$$P_{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{II}} + P_{\mathrm{III}} = P_{11} + P_{22} + P_{33}. \tag{5.5.10}$$

Ezeken kívül fennállnak természetesen a következő ortogonalitási relációk

$$\begin{aligned} \cos^2(\mathrm{I}, x) + \cos^2(\mathrm{II}, x) + \cos^2(\mathrm{III}, x) &= 1, \\ \cos^2(\mathrm{I}, y) + \cos^2(\mathrm{II}, y) + \cos^2(\mathrm{III}, y) &= 1, \\ \cos^2(\mathrm{I}, z) + \cos^2(\mathrm{II}, z) + \cos^2(\mathrm{III}, z) &= 1, \end{aligned} \tag{5.5.11}$$

$$\begin{aligned} \cos(\mathrm{I}, x) \cos(\mathrm{I}, y) + \cos(\mathrm{II}, x) \cos(\mathrm{II}, y) + \cos(\mathrm{III}, x) \cos(\mathrm{III}, y) &= 0, \\ \cos(\mathrm{I}, y) \cos(\mathrm{I}, z) + \cos(\mathrm{II}, y) \cos(\mathrm{II}, z) + \cos(\mathrm{III}, y) \cos(\mathrm{III}, z) &= 0, \\ \cos(\mathrm{I}, z) \cos(\mathrm{I}, x) + \cos(\mathrm{II}, z) \cos(\mathrm{II}, x) + \cos(\mathrm{III}, z) \cos(\mathrm{III}, x) &= 0. \end{aligned} \tag{5.5.12}$$

Helyettesítsük be ezek figyelembevételével az (5.2) alatti formulákból e_{I}, e_{II}, e_{III}-t

az (5.4) formulákba, pl. az elsőbe, ekkor nyerjük

$$e_{11} = \frac{1+\mu}{E}\{P_{\mathrm{I}}\cos^2(\mathrm{I}, x) + P_{\mathrm{II}}\cos^2(\mathrm{II}, x) + P_{\mathrm{III}}\cos^2(\mathrm{III}, x) -$$

$$- \frac{\mu}{1+\mu}(P_{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{II}} + P_{\mathrm{III}})\left(\cos^2(\mathrm{I}, x) + \cos^2(\mathrm{II}, x) + \cos^2(\mathrm{III}, x)\right)\Big\}.$$

Figyelembe véve az (5.8), (5.10) és (5.11) formulákat

$$e_{11} = \frac{1+\mu}{E}\left\{P_{11} - \frac{\mu}{1+\mu}(P_{11} + P_{22} + P_{33})\right\}.$$

Teljesen hasonlóan adódik

$$e_{22} = \frac{1+\mu}{E}\left\{P_{22} - \frac{\mu}{1+\mu}(P_{11} + P_{22} + P_{33})\right\}, \qquad (5.5.13)$$

$$e_{33} = \frac{1+\mu}{E}\left\{P_{33} - \frac{\mu}{1+\mu}(P_{11} + P_{22} + P_{33})\right\}.$$

Tehát tetszőleges koordinátarendszerben a torzulási tenzor diagonális elemei teljesen hasonló összefüggésben vannak a feszültségi tenzor diagonális elemeivel, mint a főtengelyek rendszerében.

Mivel az x, y, z-rendszer nem esik össze a főtengelyek rendszerével, ebben a rendszerben a torzulási és a feszültségi tenzornak nem diagonális elemei 0-tól különböznek, tehát még meg kell adnunk, hogy e_{12}, e_{23}, e_{31} és a feszültségek között milyen összefüggés áll fenn. Évégből induljunk ki az (5.5) egyenletekből és helyettesítsük be ezekbe e_{I}, e_{II}, e_{III}-at (5.2)-ből. Ekkor nyerjük

$$e_{12} = \frac{2(1+\mu)}{E}\{P_{\mathrm{I}}\cos(\mathrm{I}, x)\cos(\mathrm{I}, y) + P_{\mathrm{II}}\cos(\mathrm{II}, x)\cos(\mathrm{II}, y) +$$

$$+ P_{\mathrm{III}}\cos(\mathrm{III}, x)\cos(\mathrm{III}, y) - \frac{\mu}{1+\mu}(P_{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{II}} + P_{\mathrm{III}})\big(\cos(\mathrm{I}, x)\cos(\mathrm{I}, y) +$$

$$+ \cos(\mathrm{II}, x)\cos(\mathrm{II}, y) + \cos(\mathrm{III}, x)\cos(\mathrm{III}, y)\big)\}.$$

Figyelembe véve (5.9)-et és (5.12)-t, következik, hogy

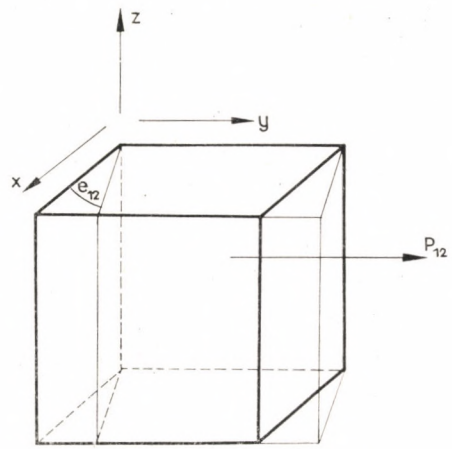
$$e_{12} = \frac{2(1+\mu)}{E}P_{12}.$$

Hasonlóan nyerjük, hogy

$$e_{23} = \frac{2(1+\mu)}{E}P_{23}, \qquad (5.5.14)$$

$$e_{31} = \frac{2(1+\mu)}{E}P_{31}.$$

Az (5.13) és (5.14) egyenletek adják meg a feszültségek és a deformációt jellemző mennyiségek közti összefüggéseket tetszőleges koordinátarendszerben. Az (5.13) egyenletek jelentésével az egyenleteknek a főtengelyek rendszerében való tárgyalásánál már foglalkoztunk. Az (5.14) egyenletekkel, melyek a főtengelyek rendszerében hiányoznak, részletesebben kell foglalkoznunk. Ragadjunk ki az anyagból egy egységnyi élhosszúságú kockát, melynek lapjai a koordinátasíkokkal párhuzamosak. $\mathbf{P}_1$ az a feszültség, mely a kocka x normálisú lapjára hat, P_{12} pedig ennek a feszültségnek y komponense, tehát ez a $\mathbf{P}_1$ feszültség y irányú tangenciális komponense. A kocka másik lapját, mely szintén párhuza-



101. ábra. A koordinátasíkokkal párhuzamos lapú egységkockában fellépő feszültségek

mos az yz síkkal és melynek normálisa $-x$, gondoljuk rögzítve, ekkor az x és y tengelyek közti szög a P_{12} erő hatására megváltozik. Ezt a szögváltozást e_{12} adja. Az (5.14) első egyenlete szerint a szögváltozás arányos $\mathbf{P}_1$ megfelelő tangenciális komponensével. Az $\dfrac{E}{2(1+\mu)}$ arányossági faktort nevezzük *eltolási* vagy *nyírási modulus*nak. (Az elcsavarásnál, a torziónál, a test, pl. egy pálca egymásután következő keresztmetszetei egymáshoz képest elcsavarodnak, vagyis egymáson elcsusznak és így a torzió szoros kapcsolatban van a fentebb tárgyalt deformációval. A nyírási, ill. eltolási modulus azonos az elemekből ismert torziós modulussal.) Az

$$S = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

eltolási, ill. nyírási modulus nem új anyagi állandó, hanem mint látható E és μ-vel már meg van határozva.

Foglalkozzunk még röviden a következő deformációval. Hasson a testre mindenütt egyenlő és a felület kifelé mutató normálisával ellentétes irányú erő Legyen a felületegységre ható nyomóerő, vagyis a nyomás P. Ekkor tehát

$$P = P_{-11} = -P_{11}, \text{ vagyis } P_{11} = -P$$

és hasonlóan

$$P_{22} = -P, \; P_{33} = -P. \tag{5.5.15}$$

Ezt tudjuk megvalósítani, ha pl. a testet folyadékba helyezzük és a folyadékra nyomást gyakorolunk. Akkor a test felületére mindenütt merőleges nyomás fog hatni. A relatív térfogatváltozás, mint láttuk, a következő

$$\frac{V - V_0}{V_0} = e_{11} + e_{22} + e_{33}.$$

Az (5.13) egyenletekből (5.15) figyelembevételével nyerjük, hogy

$$e_{11} = -\frac{1+\mu}{E}\left\{P - \frac{3\mu}{1+\mu}P\right\} = -\frac{1-2\mu}{E}P$$

és hasonlóan, hogy $e_{22} = -\frac{1-2\mu}{E}P$, $e_{33} = -\frac{1-2\mu}{E}P$. Behelyettesítve ezeket a relatív térfogatváltozás kifejezésébe, következik, hogy

$$-\frac{V - V_0}{V_0} = \frac{3(1-2\mu)}{E}P. \tag{5.5.16}$$

A baloldalon álló mennyiség pozitív, ugyanis térfogatcsökkenésről van szó, tehát $V < V_0$. A jobboldalon álló arányossági faktort, vagyis a $P = 1$-nek megfelelő térfogatcsökkenést nevezzük *kompresszibilitás*nak és jelöljük κ-val. Tehát

$$\kappa = \frac{3(1-2\mu)}{E}.$$

Mivel az (5.16) egyenlet baloldala nem lehet negatív, a jobboldal sem lehet az, tehát μ maximális értéke $\frac{1}{2}$. Ha $\mu = \frac{1}{2}$, akkor $\kappa = 0$, vagyis az anyag inkompresszibilis.

Ezek után levezetjük az izotrop test deformációjára vonatkozó általános egyenletet. Evégből oldjuk meg az (5.13) és (5.14) egyenletrendszereket a feszültségekre. Az (5.13) egyenleteket összeadva nyerjük

$$e_{11} + e_{22} + e_{33} = \frac{1+\mu}{E}\left\{\frac{1-2\mu}{1+\mu}(P_{11} + P_{22} + P_{33})\right\} = \frac{1-2\mu}{E}(P_{11} + P_{22} + P_{33}),$$

$$P_{11} + P_{22} + P_{33} = \frac{E}{1-2\mu}(e_{11} + e_{22} + e_{33}).$$

A $P_{11} + P_{22} + P_{33}$ kifejezést az (5.13) egyenletek mindegyikébe behelyettesítve P_{11}, P_{22} és P_{33} nagyon egyszerűen kiszámítható, az (5.14) egyenletekből pedig a feszültségek azonnal megadhatók. Így kapjuk, hogy

$$P_{11} = \frac{E}{1+\mu}\left\{e_{11} + \frac{\mu}{1-2\mu}(e_{11}+e_{22}+e_{33})\right\}, \quad P_{12} = \frac{E}{2(1+\mu)}e_{12},$$

$$P_{22} = \frac{E}{1+\mu}\left\{e_{22} + \frac{\mu}{1-2\mu}(e_{11}+e_{22}+e_{33})\right\}, \quad P_{23} = \frac{E}{2(1+\mu)}e_{23}, \qquad (5.5.17)$$

$$P_{33} = \frac{E}{1+\mu}\left\{e_{33} + \frac{\mu}{1-2\mu}(e_{11}+e_{22}+e_{33})\right\}, \quad P_{31} = \frac{E}{2(1+\mu)}e_{31}.$$

Helyettesítsük be ezeket a kifejezéseket az egyensúly (4.7) egyenleteibe, ekkor következik, hogy

$$K_x + \frac{E}{2(1+\mu)}\left\{2\frac{\partial e_{11}}{\partial x} + \frac{2\mu}{1-2\mu}\frac{\partial}{\partial x}(e_{11}+e_{22}+e_{33})\right\} +$$

$$+ \frac{E}{2(1+\mu)}\frac{\partial e_{21}}{\partial y} + \frac{E}{2(1+\mu)}\frac{\partial e_{31}}{\partial x} = 0.$$

Ha itt az e_{ik} mennyiségeket a definiáló egyenletekből kifejezzük u, v, w x, y, z szerinti deriváltjaival, kapjuk, hogy

$$K_x + \frac{E}{2(1+\mu)}\left\{2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\mu}{1-2\mu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z}\right\} = 0,$$

$$K_x + \frac{E}{2(1+\mu)}\left\{\Delta u + \frac{2\mu}{1-2\mu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right\} = 0,$$

$$K_x + \frac{E}{2(1+\mu)}\left\{\Delta u + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\} = 0,$$

ahol Δ az ún. *Laplace*-operátor, Δu jelenti u x, y, z szerinti másodrendű deriváltjainak összegét. Hasonlóan nyerjük, hogy

$$K_y + \frac{E}{2(1+\mu)}\left\{\Delta v + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\} = 0,$$

$$K_z + \frac{E}{2(1+\mu)}\left\{\Delta w + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\} = 0.$$

Ezt a három egyenletet össze lehet foglalni a következő vektoregyenletbe

$$\mathbf{K} + \frac{E}{2(1+\mu)} \left\{ \Delta \mathbf{s} + \frac{1}{1-2\mu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{s} \right\} = 0 . \tag{5.5.18}$$

Ez adja az egyensúly feltételét izotrop testek esetében, vagyis azt, hogy megadott erők hatására milyen deformációk, milyen elmozdulások lépnek fel az egyensúlyi állapotban. Ezekhez járulnak még a felületi feltételek, melyek megadják az elmozdulásokat a felületen, vagy pedig a feszültségeknek a felületen való eloszlását.

A mozgásegyenletek izotrop rugalmas testek esetében a következő egyenletbe foglalhatók össze

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = \mathbf{K} + \frac{E}{2(1+\mu)} \left\{ \Delta \mathbf{s} + \frac{1}{1-2\mu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{s} \right\}, \tag{5.5.19}$$

ahol ρ a sűrűség.

Deformált elasztikus testek energiája. Elasztikus potenciál

Egy rugó megnyújtása vagy egy pálca meghajlítása, vagy általában egy elasztikus test deformálása munkát igényel, melynek megfelelő energia a deformált testben mint potenciális energia van jelen. Ezt az energiát oly módon számítjuk ki, hogy először meghatározzuk a test egy ΔV térfogatelemének deformálásához szükséges munkát, mely a ΔV-ben felhalmozott rugalmas potenciális energiát fogja adni. Az egész test energiáját pedig nyilván úgy kapjuk meg, hogy összegezzük az egyes térfogatelemekben felhalmozott energiát, azaz a test rugalmas energiája

$$\lim_{\Delta V \to 0} \sum U \Delta V = \int U dV$$

lesz, ahol U az egységnyi térfogatelemre jutó rugalmas energia, melyet *elasztikus potenciál*nak nevezünk.

Az elasztikus potenciál meghatározása céljából ragadjunk ki a testből egy ΔV térfogatelemet, melyet az egyszerűség kedvéért olyan derékszögű hasábnak választunk, melynek élei a koordinátatengelyekkel párhuzamosak. Ha a hasáb éleit rendre Δx, Δy, Δz-vel jelöljük, akkor nyilván $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.

Vegyük szemügyre elemi hasábunknak azt az O csúcsát, mely a $-x$, $-y$, $-z$ külső normálisú lapok találkozásánál van. E pontnak a deformáció következtében való elmozdulását jelölje u, v, w. Ha a test dt idő alatt egy további infinitezimális deformációt szenved, úgy az O pont elmozdulása u, v, w-ről $u + du$, $v + dv$, $w + dw$-re változik. A $-x$ külső normálisú felületen ezen dt idő alatt végzett munka nyilván

$$-(P_{11} du + P_{12} dv + P_{13} dw) \Delta y \Delta z \tag{5.5.20}$$

lesz. Hasonló kifejezés fogja megadni a $+x$ normálisú felületen végzett munkát is, csakhogy az pozitív előjellel és az $x + \Delta x$ helyen veendő. Δx-ben magasabb rendű

tagokat elhagyva kapjuk:

$$+ (P_{11}du + P_{12}dv + P_{13}dw)\Delta y\Delta z +$$

$$+ \left[P_{11}d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + P_{12}d\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + P_{13}d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]\Delta x\Delta y\Delta z. \qquad (5.5.21)$$

(5.20) és (5.21) eredője

$$\left[P_{11}d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + P_{12}d\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + P_{13}d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]\Delta V.$$

Ha ehhez hozzáadjuk a $\pm y$ és a $\pm z$ külső normálisú felületeken végzett munkákat, úgy megkapjuk a ΔV térfogatelemen a dt idő alatt végzett teljes munkát:

$$dA = \left[P_{11}d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + P_{12}d\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + P_{13}d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]dV +$$

$$+ \left[P_{21}d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + P_{22}d\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + P_{23}d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]dV +$$

$$+ \left[P_{31}d\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + P_{32}d\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + P_{33}d\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]dV.$$

Használjuk fel, hogy a feszültségi tenzor szimmetrikus, vagyis $P_{ik}=P_{ki}$, és vezessük be a *dilatációs tenzor*, e_{ik} komponenseit. Ekkor a dA munka kifejezése a következőképpen alakul:

$$dA = [P_{11}de_{11} + P_{22}de_{22} + P_{33}de_{33} + 2(P_{12}de_{12} + P_{23}de_{23} + P_{31}de_{31})]\Delta V.$$

A ΔV előtt álló szögletes zárójeles kifejezés az egységnyi térfogatelemen végzett munkát jelenti, ami a fentebbiek szerint az elasztikus potenciál dt idő alatti dU megváltozásával lesz egyenlő

$$dU = P_{11}de_{11} + P_{22}de_{22} + P_{33}de_{33} + 2(P_{12}de_{12} + P_{23}de_{23} + P_{31}de_{31}),$$

vagy

$$dU = \sum_{i,k} P_{ik}\, de_{ik}. \qquad (5.5.22)$$

Az U elasztikus potenciált természetesen a test deformációja, azaz az e_{ik} dilatációs tenzor egyértelműen meghatározza: $U = U(e_{ik})$. (5.22)-ből következik, hogy U-nak a dilatációs tenzorkomponensek szerinti parciális differenciálhányadosai a feszültségkomponensekkel egyenlők:

$$\frac{\partial U}{\partial e_{ik}} = P_{ik}. \qquad (5.5.23)$$

Ha ismerjük a P_{ik} feszültségeket, mint az e_{ik} dilatációk függvényeit, úgy (5.23) integrálásával megkapjuk az U elasztikus potenciált. Az előző fejezetben megadtuk

a homogén és izotrop testekre a $P_{ik} = P_{ik}(e_{ik})$ összefüggéseket (l. 5.5.17). Differenciálással könnyen meggyőződhetünk arról, hogy (5.23)-at kielégíti U következő kifejezése:

$$U = \frac{E}{2(1+\mu)} \left\{ e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2 + 2e_{12}^2 + 2e_{23}^2 + 2e_{31}^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} (e_{11} + e_{22} + e_{33})^2 \right\}. \tag{5.5.24}$$

Zérus deformáció, $e_{ik} = 0$ esetén természetesen $U = 0$. Mivel ez az állapot egy stabilis egyensúlyi állapot, ezért $e_{ik} = 0$ esetén az U potenciálnak minimumnak kell lennie, vagy más szóval, deformált állapotban U értéke mindig pozitív. Belátható, hogy (5.24) ennek a feltételnek $\mu < \frac{1}{2}$ esetén tesz eleget.

6. §. Síkhullámok izotrop rugalmas közegben

Ezek után rátérünk a rugalmas testek dinamikájának egy fontos esetére, a síkhullámok tárgyalására izotrop rugalmas közegben. Dinamikai problémáról lévén szó, az (5.19) mozgásegyenletből indulunk ki. Képezzük az egyenletek x, y, z szerinti deriváltjainak összegét. A differenciálhányadosok képzésénél vegyük figyelembe, hogy ezek a deriválás sorrendjétől függetlenek (a mi esetünkben ugyanis **s**-ről és deriváltjairól feltehetjük, hogy a szükséges folytonossági követelményeknek eleget tesznek). Tegyük fel továbbá, hogy ρ térben és időben nem változik, ami szilárd testeknél teljesül. E és μ is legyenek az egész közegben állandók. Ekkor nyerjük, hogy

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \mathbf{s} = \operatorname{div} \mathbf{K} + \frac{E}{2(1+\mu)} \left\{ \Delta \operatorname{div} \mathbf{s} + \frac{1}{1-2\mu} \Delta \operatorname{div} \mathbf{s} \right\},$$

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \mathbf{s} = \operatorname{div} \mathbf{K} + \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{2-2\mu}{1-2\mu} \Delta \operatorname{div} \mathbf{s} =$$

$$= \operatorname{div} \mathbf{K} + \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \Delta \operatorname{div} \mathbf{s},$$

$$\frac{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \mathbf{s} = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} \operatorname{div} \mathbf{K} + \Delta \operatorname{div} \mathbf{s}. \tag{5.6.1}$$

Ezek után differenciáljuk (5.19) harmadik egyenletét y szerint és vonjuk ki ebből a második egyenlet z szerinti deriváltját. Így új egyenlethez jutunk és **s** komponenseivel és a koordináták ciklikus permutációjával még két hasonló egyen-

letet kapunk. Ezek a következők

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial K_z}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial z} + \frac{E}{2(1+\mu)} \Delta\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial K_x}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial x} + \frac{E}{2(1+\mu)} \Delta\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y} + \frac{E}{2(1+\mu)} \Delta\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Ezeket a következő vektoregyenletbe lehet összefoglalni

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{rot} \mathbf{s} = \operatorname{rot} \mathbf{K} + \frac{E}{2(1+\mu)} \Delta \operatorname{rot} \mathbf{s},$$

$$\frac{2\rho(1+\mu)}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{rot} \mathbf{s} = \frac{2(1+\mu)}{E} \operatorname{rot} \mathbf{K} + \Delta \operatorname{rot} \mathbf{s}. \tag{5.6.2}$$

Ez teljesen hasonló szerkezetű egyenlet, mint az, amelyet div **s**-re nyertünk. A két egyenlet a következő közös alakban írható

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} F(\mathbf{K}) = 0, \tag{5.6.3}$$

ahol,

$$\text{ha } \phi = \operatorname{div} \mathbf{s}, \quad \text{akkor} \quad c^2 = \frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)} \quad \text{és} \quad F(\mathbf{K}) = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{K},$$

$$\text{ha } \phi = \operatorname{rot} \mathbf{s}, \quad \text{akkor} \quad c^2 = \frac{E}{2\rho(1+\mu)} \quad \text{és} \quad F(\mathbf{K}) = \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} \mathbf{K}.$$

Ha külső erők, vagyis tömegerők nem hatnak, akkor **K** és, mint $F(\mathbf{K})$ alakjából látható, $F(\mathbf{K})$ is eltűnik és akkor a következő egyszerűbb egyenletet nyerjük

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0,$$

amely azonban csak a már megindult mozgásról ad felvilágosítást. Ezt az egyenletet nevezzük *hullámegyenlet*nek, amely ϕ-nek, mint a koordináták és az idő függvényének meghatározására szolgál.

Azt állítjuk, hogy a hullámegyenlet megoldása a

$$t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c}$$

argumentum tetszőleges függvénye, ahol az α, β, γ állandók egy meghatározott irány iránykoszinuszai, vagyis fennáll, hogy $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. A megoldások

tehát a következők

$$\phi = f\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c}\right), \tag{5.6.4}$$

ahol f tetszőleges függvényt jelent. Könnyen meggyőződhetünk, hogy ϕ-nek ez az alakja tényleg megoldás. Jelöljük vesszővel az argumentum szerinti deriváltakat, akkor

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = f'\left(-\frac{\alpha}{c}\right), \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = f''\left(-\frac{\alpha}{c}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{c^2} f''.$$

Hasonlóan nyerjük, hogy

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\beta^2}{c^2} f'', \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\gamma^2}{c^2} f'',$$

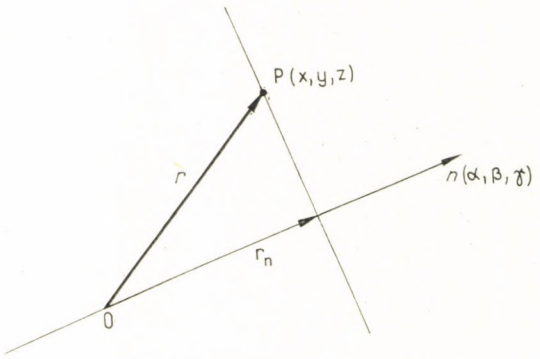
továbbá, hogy

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = f''.$$

Ezeket behelyettesítve a hullámegyenletbe, következik, hogy

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) f'' - \frac{1}{c^2} f'' = 0.$$

Tehát a fenti kifejezés tényleg megoldás, de nem az egyetlen. Mi azonban a továbbiakban csak ezzel akarunk foglalkozni.



102. ábra. A síkhullám hullámfelülete

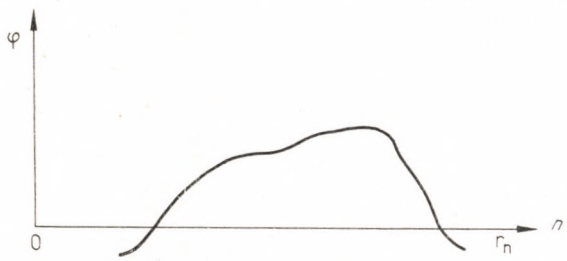
Vizsgáljuk meg ennek a megoldásnak sajátságait. Az argumentumban álló $\alpha x + \beta y + \gamma z = r_n$ kifejezés nem más, mint a zérus kezdőpontból egy $P(x, y, z)$ pont felé mutató **r** rádiuszvektornak a O ponton átmenő **n**(α, β, γ) irányra való vetülete. Ez a vetület ugyanakkora mindazokra a pontokra vonatkozóan, melyek ugyanabban, az **n** irányra merőleges síkban vannak. Tehát meghatározott $t = t_1$

időpillanatban f argumentuma, és így maga az f függvény is, az **n** irányra merőleges síkokon állandó. f ezeknek a síkoknak normálisa mentén változik valamilyen, az f alakja által meghatározott módon.

Bevezetve az r_n jelölést, nyerjük, hogy

$$\phi = f\left(t - \frac{r_n}{c}\right).$$

Egy meghatározott t_1 időpillanatban ϕ az r_n-nek egyváltozós függvénye. Ezt szemlélteti a 103. ábra az r_n, ϕ koordinátarendszerben. A görbe adja ϕ változását egy



103. ábra. A síkhullám hullámgörbéje

megadott t_1 időpillanatban. Az **n** irány mentén ϕ-nek adott t_1 időpillanatban adott r_{n1} értéknél (vagyis a kezdőponttól az **n** irány mentén r_{n1} távolságban) meghatározott értéke van: $\phi\left(t_1 - \frac{r_{n1}}{c}\right)$. A t_2 időpillanatban r_{n2} értéknél ϕ értéke: $\phi\left(t_2 - \frac{r_{n2}}{c}\right)$. Ez a két érték akkor egyenlő egymással, ha az argumentumok egyenlők, vagyis ha

$$t_1 - \frac{r_{n1}}{c} = t_2 - \frac{r_{n2}}{c},$$

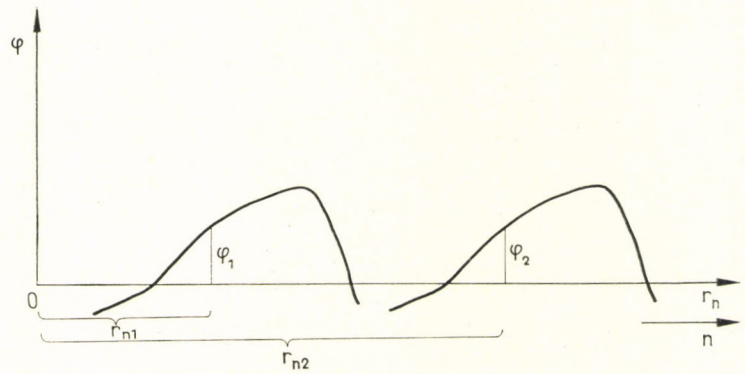
$$\frac{r_{n2} - r_{n1}}{c} = t_2 - t_1,$$

$$r_{n2} - r_{n1} = c(t_2 - t_1).$$

Az útkülönbség tehát **n** mentén az idővel arányos, vagyis az ugyanakkora ϕ értékeket szolgáltató helyek mindegyike az idővel arányosan tolódik el **n** mentén. A görbe, mely ϕ-t meghatározott időpillanatban ábrázolta, minden későbbi időpillanatban ugyanolyan alakú, de az eltelt idővel arányos távolsággal el van tolva **n** mentén. A $\phi = f\left(t - \frac{r_n}{c}\right)$ megoldás tehát azzal a fontos tulajdonsággal rendelkezik, hogy az **n** irányra merőleges síkokon állandó és ez az állapot változatlanul és egyenletes sebességgel terjed tovább az **n** irány mentén. Az ilyen megoldásokat *síkhullámok*nak nevezzük. A síkokat, amelyeken ϕ állandó, *hullámsíkok*nak nevezzük. c a hullámok terjedési sebessége.

Ha az f függvény argumentuma $t + \frac{r_n}{c}$, akkor is kapunk megoldást (mert mint előbb láttuk, a $t - \frac{r_n}{c}$ argumentum esetén a negatív előjel a második derivált képzésénél a $\left(-\frac{\alpha}{c}\right)^2$ stb. kifejezésekben úgyis kiesett). A

$$\phi = f\left(t + \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c}\right)$$



104. ábra. A hullámgörbe haladása

megoldás szintén síkhullámot képvisel, mely azonban az ellenkező irányban, tehát $-\mathbf{n}$ irányban terjed.

A mi esetünkben ϕ az elmozdulásvektor divergenciája, ill. az elmozdulásvektor rotációja. A hullám terjedési sebessége e két esetben különböző, mégpedig

$$\text{ha} \quad \phi = \operatorname{div} \mathbf{s}, \quad \text{akkor} \quad c = c_d = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}},$$

$$\text{ha} \quad \phi = \operatorname{rot} \mathbf{s}, \quad \text{akkor} \quad c = c_r = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\mu)}}.$$

Rugalmas közegben tehát kétféle hullám lehetséges, melyek általában különböző sebességgel terjednek tovább. Tehát

$$\operatorname{div} \mathbf{s} = f\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c_d}\right),$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{s} = \mathbf{g}\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c_r}\right).$$

A div $\mathbf{s}$ skaláris mennyiség, rot $\mathbf{s}$ azonban vektor, tehát ott f helyébe vektorfüggvényt kell írnunk, mely általános esetben három különböző g_x, g_y, g_z függvényt reprezentál.

Helyezzük a koordinátarendszer x-tengelyét az **n** irányba, ekkor $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, tehát ekkor az argumentum $t - \frac{x}{c_d}$, ill. $t - \frac{x}{c_r}$, ami azt jelenti, hogy az f és **g** függvények nem függenek y-tól és z-től, hanem csak x-től. Tehát nyerjük, hogy

$$\operatorname{div} \mathbf{s} = \frac{du}{dx} = f\left(t - \frac{x}{c_\alpha}\right), \qquad \begin{aligned} \operatorname{rot}_x \mathbf{s} &= 0 = g_x\left(t - \frac{x}{c_r}\right), \\ \operatorname{rot}_y \mathbf{s} &= -\frac{dw}{dx} = g_y\left(t - \frac{x}{c_r}\right), \\ \operatorname{rot}_z \mathbf{s} &= \frac{dv}{dx} = g_z\left(t - \frac{x}{c_r}\right). \end{aligned} \tag{5.6.5}$$

Ezekből az egyenletekből u, v, w, vagyis **s** komponensei meghatározhatók, mint az idő és x függvényei.

Különös fontossággal bír az az eset, mikor az f és a **g** függvény sin- vagy cos-függvény, vagyis mikor div **s** és rot **s** harmonikus rezgést végeznek.

Ebben az esetben legutóbbi egyenleteink így alakulnak

$$\frac{dv}{dx} = B \cos 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{c_r}\right),$$

$$\frac{du}{dx} = A \cos 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{c_d}\right),$$

$$\frac{dw}{dx} = C \cos 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{c_r}\right).$$

Innen egyszerű integrációval nyerjük, hogy

$$v = -\frac{c_r}{2\pi\nu} B \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{c_r}\right),$$

$$u = -\frac{c_\alpha}{2\pi\nu} A \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{c_d}\right), \tag{5.6.6}$$

$$w = -\frac{c_t}{2\pi\nu} C \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{c_r}\right).$$

Tehát azt az eredményt kaptuk, hogy a div **s** hullámainál az elmozdulásvektor x-komponense, u, harmonikus rezgést végez. A másik két komponens, v és w pedig vagy konstans, vagy zérus. Az x-tengely a hullám terjedési iránya, tehát a div **s** hullámai *longitudinális* hullámok.

A rot **s** hullámaiból pedig azt az eredményt nyertük, hogy **s**-nek csak az x-tengelyre, vagyis a továbbterjedés irányára merőleges két komponense, v és w végez harmonikus rezgést, **s** x-komponense, u, pedig vagy konstans vagy zérus. A rot **s** hullámai, amelyek a rot **s**-nek a fentebb megadott periodikus változása folytán keletkeznek, *tranzverzális* hullámok.

Mivel div **s** adja a deformáció következtében fellépő relatív térfogatváltozást, a div **s** hullámai, vagyis a longitudinális hullámok váltakozó tágulással és összenyomással járnak. Ezért ezeket *kompressziós hullámok*nak is nevezzük. Ezzel szemben a rot **s** hullámai nem járnak váltakozó tágulással és összenyomással. Ezeket a hullámokat szokás kompressziónélküli nyíróhullámoknak is nevezni.

Cseppfolyós testekben és gázokban (ha a belső súrlódástól eltekinthetünk) csak a térfogatváltozással kapcsolatban lépnek fel erők, tehát ezekben a közegekben csak longitudinális, vagyis kompressziós hullámok lehetségesek. Ha ugyanis a részeket egymáshoz képest eltoljuk, nem lépnek fel erők (ha a súrlódástól eltekinthetünk), tehát rotációs vagyis tranzverzális hullám ezekben nem lehetséges. Ennek az eredménynek látszólag ellentmond a tenger, általában folyadékfelületek hullámzása, mely tranzverzális hullámzás. Ez azonban nem tartozik az itt tárgyalt jelenségek körébe. Az az erő, mely a folyadékfelületek hullámzását lehetővé teszi, a nehézségi erő, ezért ezeket a hullámokat *nehézségi hullámok*nak nevezzük. Ha a földi nehézségi erőtől eltekintünk, akkor folyadékokban vagy légnemű testekben csak longitudinális hullámok lépnek fel.

Viszont olyan közegekben, amelyekben div **s** állandóan 0, longitudinális hullámok nem lehetségesek. Mint láttuk, a relatív térfogatváltozás, vagyis div **s** egyenesen arányos (konstans P esetén) κ-val. Ha tehát div **s**$=0$, ez azt jelenti, hogy κ is 0, vagyis $\mu = \frac{1}{2}$, tehát az anyag inkompresszibilis. $\mu = \frac{1}{2}$ esetében $c_d = \infty$, ami szintén azt mutatja, hogy inkompresszibilis közegekben longitudinális hullámok nem lehetségesek. (Régebben, a rugalmas fényelmélet idejében, midőn a fényt az éter rugalmas rezgéseivel magyarázták, az étert inkompresszibilisnek kellett feltételezni, mert a fényhullámok tranzverzális hullámok.)

Ha a közeg nem inkompresszibilis szilárd test, akkor általában mindkét rugalmas hullám felléphet (pl. földrengéseknél). A két hullám sebességének viszonya

$$\frac{c_d}{c_r} = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}}.$$

Ha tehát a c_d/c_r viszonyt mérésekből meg tudjuk határozni, akkor μ kiszámítható.

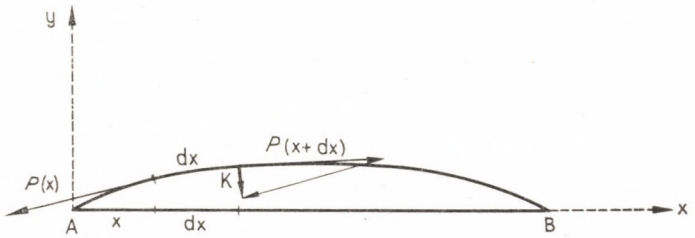
A rugalmas rezgések, hullámok tárgyalásánál feltételeztük, hogy a közeg, melyben terjednek, végtelen kiterjedésű. Ez annyit jelent, hogy az itt kifejtett elmélet a közeg olyan tartományára vonatkozik, mely a határfelületektől igen messze van. Tehát elméletünk nem vonatkozik pl. rugalmas pálcában kelthető hullámokra.

Kifeszített húrok tranzverzális rezgései

Bizonyos esetekben, mint jelen esetben is, célszerű nem az általános egyenletekből kiindulni, hanem a tárgyalandó probléma alapegyenletét a rugalmasságtan alapelveiből levezetni és a levezetésnél rögtön figyelembe venni a keresztülvihető egyszerűsítéseket. Ily módon fogjuk tárgyalni a következőkben a húr tranzverzális

rezgéseit, amelyek nemcsak az akusztikában bírnak fontossággal, hanem olyan matematikai kérdésekhez vezetnek, melyek fontossága fizikai szempontból igen nagy, mert ezek a kérdések a fizika más területein is, így pl. az atomfizikában is felmerülnek.

A *húr* egy olyan elasztikus test, melynek keresztméretei elhanyagolhatók a hosszához képest, úgyhogy hajlítással szemben csak elhanyagolható kis ellenállást fejt ki. Itt azonnal felmerül a kérdés, hogy a húr annak ellenére, hogy a hajlítással szemben nem lépnek fel számottevő feszültségek, mégis tranzverzális rezgésekre képes. A kérdésre megtaláljuk a választ, ha figyelembe vesszük, hogy a mi esetünk-



105. ábra. A kifeszített húr

ben kifeszített húrról van szó, minek következtében a viszonyok lényegesen megváltoznak. Nyugalmi helyzetben a húr mindenütt állandó keresztmetszetére, q-ra, merőlegesen hat a **P** feszültség. **P** iránya tehát a húrhoz húzott érintő, vagyis nyugalmi helyzetben maga a húr iránya. Eltolási feszültségek nem lépnek fel, mert a húr hajlítással szemben csak elhanyagolható kis ellenállást fejt ki.

Gondoljuk tehát a húrt kifeszítve két rögzített A és B végpontja között. Ha a húrt nyugalmi helyzetéből kimozdítjuk, akkor megnyúlása feszültségnövekedést idéz elő. De a tranzverzális rezgéseknek nem ez a feszültségnövekedés az oka, hanem a következő. A húr egy dx elemének végpontjában működő feszültségek az érintő mentén hatnak, és mint az ábrából látható, nem esnek egy egyenesbe, hanem a nyugalmi helyzet felé irányuló **K** eredőt adnak, mely kis kitérés esetén a nyugalmi helyzetre merőlegesnek tekinthető. Ez az erő idézi elő a húr tranzverzális rezgéseit. Foglalkozzunk a húr tranzverzális sík-rezgéseivel, a rezgési sík legyen az xy-sík. A húr nyugalmi helyzetben essen egybe az x-tengellyel. Ekkor az elmozdulásvektor z-komponense, $w \equiv 0$, az y komponense, v, pedig egyenlő y-nal. A húr nyugalmi helyzetében $y=0$. A kimozdított húr dx elemeinek baloldalára ható erő $-qP\mathbf{f}(x)$, a jobboldalára ható erő pedig $qP\mathbf{f}(x+dx)$, ha **f**-fel jelöljük az érintő irányába mutató egységvektort és P-vel **P** abszolút értékét. Továbbá feltételezzük, hogy kimozdított állapotban a húr keresztmetszetére ugyanakkora feszültség hat, mint nyugalmi állapotban, vagyis eltekinthetünk attól, hogy a megnyúlás következtében a feszültség nő.

Számítsuk ki ezek után a **K** erő komponenseit. Ha $\mathbf{f}(x)$-nek az x-tengellyel való hajlásszögét α-val, $\mathbf{f}(x+dx)$-nek az x-tengellyel való hajlásszögét $(\alpha + d\alpha)$-val

jelöljük és figyelembe vesszük, hogy **f** egy egységvektor, akkor nyerjük, hogy

$$K_x = qP\cos(\alpha + d\alpha) - qP\cos\alpha,$$

$$K_y = qP\sin(\alpha + d\alpha) - qP\sin\alpha. \tag{5.6.7}$$

Csak kis kitérésekkel foglalkozunk, vagyis α és $\alpha + d\alpha$ kicsinyek, tehát írható, hogy

$$\cos(\alpha + d\alpha) = 1 - \frac{(\alpha + d\alpha)^2}{2}, \qquad \cos\alpha = -\frac{\alpha^2}{2},$$

$$\sin(\alpha + d\alpha) = \alpha + d\alpha, \qquad \sin\alpha = \alpha.$$

α nagyon kicsi, tehát $\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$. Ha továbbá figyelembe vesszük, hogy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$, nyerjük, hogy

$$\alpha = \frac{dy}{dx}.$$

Innen pedig adódik, hogy

$$d\alpha = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)dx = \frac{d^2y}{dx^2}\,dx.$$

Ha $\cos(\alpha + d\alpha)$ és $\cos\alpha$ kifejezéseit behelyettesítjük, látjuk, hogy **K**-nak a húr hosszirányába ható komponense, K_x csak másodrendű kicsi mennyiségeket (α^2, $\alpha d\alpha$, $(d\alpha)^2$) tartalmaz. Ezért a hosszirányú rezgések vizsgálatánál még figyelembe kell vennünk a húr megnyúlása folytán keletkező feszültségnövekedést, ill. az ebből származó erőt. Mi a továbbiakban ezekkel a kérdésekkel nem foglalkozunk, mert csak a tranzverzális rezgéseket tárgyaljuk, melyekre **K**-nak a húrra merőleges komponense, vagyis K_y mérvadó. Mivel pedig, mint az előbbiekből látható, K_y elsőrendű kicsi mennyiség, a húr megnyúlása folytán fellépő feszültségnövekedésből keletkező erő y komponense, mely magasabb rendű kicsi, elhanyagolható. A tranzverzális rezgésekre tehát K_y mérvadó. Ha figyelembe vesszük, hogy a dx elem tömege $\rho q dx$, a mozgásegyenlet a következő

$$\rho q\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,dx = qP\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx,$$

ahol a jobboldalon álló K_y erőkomponensben a $\frac{d^2y}{dx^2}$ teljes differenciálhányados helyébe a megfelelő parciális differenciálhányadost írtuk annak megfelelően, hogy y x-nek és t-nek függvénye. Mivel a fenti egyenletnek minden dx elemre fenn kell állnia, a baloldalon és a jobboldalon álló kifejezésekben dx együtthatóinak egyenlőknek kell lenni, következik, hogy

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

vagyis hogy

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{P}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} . \tag{5.6.8}$$

Ezt az egyenletet, mely a fentivel ekvivalens, szokás a húr tranzverzális rezgéseire vonatkozó mozgásegyenletnek nevezni. Mint látjuk, az egyenletben a húr rugalmassági állandói nem is szerepelnek. (6.8) nem más, mint az egydimenziós hullámegyenlet. A megoldást általános fejtegetéseink segítségével azonnal megadhatnánk, de mi itt más utat követünk.

(6.8) lineáris homogén másodrendű parciális differenciálegyenlet. A pontmozgás mechanikájában a mozgásegyenlet egy koordináta esetében a következő

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = K_x(x, \dot{x}, t) ,$$

ahol $K_x(x, \dot{x}, t)$ az argumentumok megadott függvénye, $x = x(t)$ pedig az ismeretlen függvény, mely csak t-től függ. Ez közönséges differenciálegyenlet, mely x-nek második és magasabb rendű deriváltjait határozza meg, ellenben x és $\dot{x}$ értékét adott $t = t_0$ kezdeti időpillanatban tetszés szerint választhatjuk. Sőt az $x = x(t)$ függvény, vagyis a mozgás csak akkor meghatározott, ha a $t = t_0$ kezdeti időpillanatban ismeretes x és $\dot{x}$, vagyis ha ismeretes a kezdőhelyzet és kezdősebesség.

A (6.8) parciális differenciálegyenlet csak az idő szerinti második deriváltat határozza meg, az első derivált és maga a függvény egy bizonyos $t = t_0$ időpillanatban tetszés szerint adható meg mint x-nek tetszés szerinti függvénye.

Legyen tehát a $t = t_0$ időpillanatban $y = f(x)$ és $\frac{\partial y}{\partial t} = F(x)$. Ezek az úgynevezett *kezdeti feltételek*. Az első a húr kezdeti alakját, a másik a sebesség kezdeti eloszlását határozza meg.

Az y függvényre még egy megszorítást tehetünk. Annak megfelelően, hogy a húr két vége rögzítve van, kikötjük, hogy a húr kitérése, y, a húr két végén zérus legyen. Tehát ha $x = 0$ vagy $x = l$, akkor $y = 0$, ahol l a húr hossza. Ezeket a feltételeket a probléma *határfeltétel*einek nevezzük.

Feladatunk tehát olyan y megoldást keresni, mely a $t = t_0$ időpi'lanatban hozzásimul egy megadott $f(x)$ görbéhez és egy megadott $\frac{\partial y}{\partial t} = F(x)$ sebességeloszláshoz és amely a határpontokon megadott értékekbe, jelenleg zérusba, megy át.

A húr kezdeti alakját jellemző $f(x)$ függvény csakis folytonos lehet, mert a húrnak összefüggőnek kell maradnia. Csúcspontja ellenben lehet $f(x)$-nek, tehát $\frac{df(x)}{dx}$-nek lehet ugrása. Ilyen kezdeti alak ugyanis előfordul, lásd a 106. ábrát.

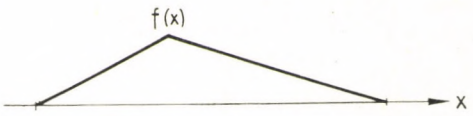
Ezek után térjünk rá a húr mozgásegyenletének megoldására. Evégből írjuk a (6.8) egyenletet a következő alakban

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} ,$$

ahol

$$a^2 = \frac{P}{\rho}.$$

A megoldásnál a változók szétválasztásának módszerét alkalmazzuk, vagyis y-t egyenlővé tesszük két függvény szorzatával, melyek közül az egyik csak x-nek, a



106. ábra. A kifeszített húr egy lehetséges kezdeti alakja

másik csak t-nek függvénye. Legyen tehát

$$y(x, t) = U(x)V(t).$$

Ezt behelyettesítve a mozgásegyenletbe, nyerjük, hogy

$$U(x)\frac{d^2V(t)}{dt^2} = a^2V(t)\frac{d^2U(x)}{dx^2}.$$

UV-vel osztva adódik

$$\frac{1}{V}\cdot\frac{d^2V}{dt^2} = a^2\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dx^2}.$$

V és $\frac{d^2V}{dt^2}$ csak t-nek, U és $\frac{d^2U}{dx^2}$ pedig csak x-nek függvénye, tehát az egyenlet baloldala csak t-nek, a jobboldala pedig csak x-nek függvénye. Az egyenletnek x és t minden értéke mellett fenn kell állnia. Két különböző változó függvénye mindkét változó *minden* értéke mellett csak úgy lehet egyenlő, ha mindkettő ugyanazzal az állandóval egyenlő. Jelöljük ezt a közös állandót $(-m^2)$-tel. Ha a jobb-és baloldalt ezzel az állandóval külön-külön egyenlővé tesszük, két egyenletet nyerünk, melyek közül az egyik csak U-ra, a másik csak V-re vonatkozik:

$$\frac{1}{V}\frac{d^2V}{dt^2} = -m^2, \qquad a^2\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dx^2} = -m^2,$$

vagyis (5.6.9)

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -m^2V, \qquad \frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{m^2}{a^2}U.$$

Ezek közönséges differenciálegyenletek, mégpedig a harmonikus mozgás diffe-

renciálegyenletei. Megoldásuk, mint ismeretes, a következő

$$V = \cos mt,\ \sin mt, \text{ vagy ezek lineáris kifejezése,}$$

$$U = \cos \frac{m}{a} x,\ \sin \frac{m}{a} x, \text{ vagy ezek lineáris kifejezése.}$$

Ezeknek ki kell elégíteniük a határfeltételeket. Az első határfeltétel szerint, ha $x = 0$, akkor $y = 0$. Mivel

$$\cos \frac{m}{a} 0 = 1 \neq 0,$$

a $\cos \frac{m}{a} x$ megoldás nem jöhet számításba. A másik határfeltétel szerint, ha $x = l$, akkor $y = 0$. Innen a megmaradó $\sin \frac{m}{a} x$ megoldásra következik, hogy

$$\sin \frac{m}{a} l = 0,$$

vagyis

$$\frac{m}{a} l = n\pi,$$

$$m = \frac{n\pi a}{l},$$

ahol n egész szám.

Tehát az egyik határfeltétel miatt bizonyos megoldásokat ki kellett rekeszteni, a másik határfeltételből pedig m számára kaptunk feltételt, mégpedig azt, hogy m $\frac{\pi a}{l}$-nek egészszámú többszöröse.

Mivel, mint említettük, a megoldások lineáris kifejezése is megoldás, nyerjük, hogy

$$V = A_n \cos mt + B_n \sin mt = A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t,$$

$$U = \sin \frac{m}{a} x = \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

$$y_n = \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x. \tag{5.6.10}$$

n akármilyen egész szám lehet. Tehát y_n végtelen sok megoldást reprezentál. Mivel egyenletünk homogén differenciálegyenlet, a különböző megoldások összege szintén megoldás. Ha tehát az y_n kifejezéseit $n = 0$-tól $n = \infty$-ig összeadjuk,

ismét megoldást kapunk, vagyis nyerjük, hogy

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x .$$

Ebben a megoldásban végtelen sok A_n és B_n tetszőleges állandó van, melyek lehetővé teszik, hogy a kezdeti feltételeket ezzel a megoldással kielégítsük.

Mielőtt erre rátérünk, foglalkozzunk a megoldással és állapítsuk meg, hogy mely x helyeken lesz a húr y kitérése állandóan 0, vagyis hogy melyek a húr y_n megoldásához tartozó csomópontok. Ezek a helyek nyilván azok, melyeknél

$$\sin \frac{n\pi}{l} x = 0 ,$$

vagyis ahol

$$x = 0 , \ \frac{l}{n} , \ 2\frac{l}{n} , \ \ldots , k\frac{l}{n} , \ \ldots , (n-1)\frac{l}{n} , l .$$

Ugyanis ezen helyek mindegyikén fennáll, hogy

$$\sin \frac{n\pi}{l} x = \sin \frac{n\pi}{l} k \frac{l}{n} = \sin k\pi = 0 .$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n)$$

Tehát y_n zérus lesz a határpontokon és minden olyan pontban, melynek abszcisszája a húr n-ed részének egészszámú sokszorosa. Az y_n megoldás tehát olyan rezgést képvisel, melynél az említett pontok állandóan nyugalomban vannak. Ha $n = 0, 1, 2, 3, 4$, akkor sorban a 107. ábrán látható rezgési alakokat kapjuk.

Ha $n = 0$, a triviális megoldást, $y_0 \equiv 0$-t nyerjük, melynek nincsen jelentősége. Ekkor minden pont csomópont, mert ekkor a sinus argumentuma, $\frac{n\pi}{l} x$, minden x-re 0. Ha $n = 1$, akkor csak a két határpont csomópont, ekkor azt mondjuk, hogy a húr az alaprezgést végzi, melynek megfelelő hang a húr alaphangja, y_1 az alaprezgésnek megfelelő megoldás. Ha $n = 2, 3, 4, \ldots$, akkor nyerjük a felrezgéseket, melyeknek megfelelő hangok a felhangok, $y_2, y_3, y_4, \ldots$, tehát a felrezgéseknek megfelelő megoldások.

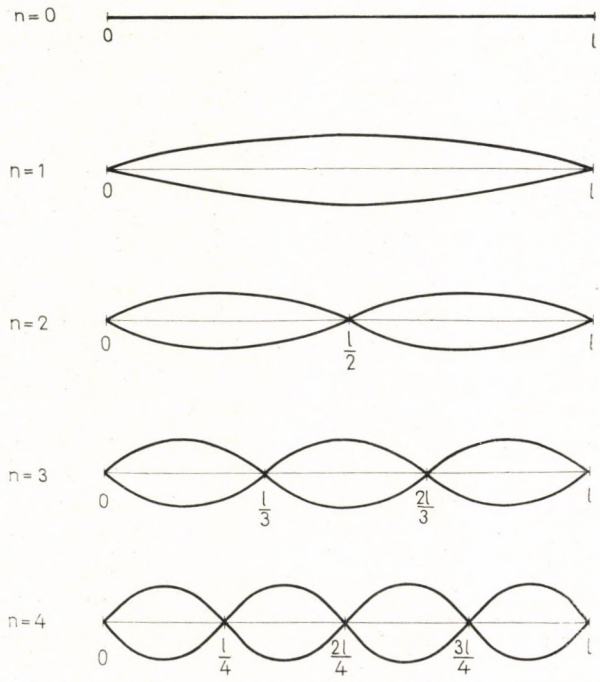
Az y_n megoldásnak megfelelő rezgésnél a húr alakja olyan szinuszgörbe, melynek amplitúdója $\sin \frac{n\pi}{l} x$ együtthatója:

$$A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t .$$

Ez az amplitúdó az időtől függ és periodikusan változik egy minimum és egy maximum között, közben pedig van egy olyan időpillanat, mikor a húr alakja a nyugalmi helyzetnek megfelelő egyenes.

Állapítsuk meg az időtől függő amplitúdó periódusát. A cos- és sin-függvények periódusa az az idő, mely alatt az argumentum 2π-vel változik. Jelöljük az y_n rezgésnek megfelelő periódust T_n-nel, akkor tehát fenn kell állnia a következő összefüggésnek

$$\frac{n\pi a}{l}(t + T_n) = \frac{n\pi a}{l} t + 2\pi ,$$



107. ábra. Az $n = 0, 1, 2, 3, 4$-nek megfelelő

ahonnan a periódus, vagyis az y_n-rezgés rezgésideje

$$T_n = \frac{2l}{na} = \frac{2l}{n}\sqrt{\frac{\rho}{P}} .$$

Az y_n-rezgésnek megfelelő frekvencia pedig

$$\nu_n = \frac{1}{T_n} = \frac{na}{2l} = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{P}{\rho}} .$$

Az alaphang rezgésideje a legnagyobb, rezgésszáma pedig ennek megfelelően a legkisebb, mégpedig

$$T_1 = \frac{2l}{a}, \qquad \nu = \frac{a}{2l} .$$

Ezeket a formulákat összehasonlítva a fentiekkel, látjuk, hogy

$$T_n = \frac{T_1}{n} \quad \text{és} \quad \nu_n = n\nu_1.$$

Tehát a felhangok rezgésideje az alaphang rezgésidejének n-ed része, a felhangok frekvenciája pedig az alaphang frekvenciájának egészszámú sokszorosa.

Ha az argumentumba bevezetjük a frekvenciát, nyerjük

$$\frac{n\pi a}{l} t = 2\pi\nu_n t,$$

$$y_n = (A_n \cos 2\pi\nu_n t + B_n \sin 2\pi\nu_n t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos 2\pi\nu_n t + B_n \sin 2\pi\nu_n t) \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{5.6.11}$$

Tehát az általános megoldás tartalmazza az alaprezgést és az összes felrezgéseket. Egy rezgő húr hangjának magasságát az alaphang, vagyis az alaprezgésnek megfelelő frekvencia adja, a hang színezetét pedig a felhangok, illetőleg a felrezgések amplitúdói határozzák meg, melyek, mint a fenti formulából látható, általában különbözők. A következőkben kimutatjuk, hogy a hangszínezetet, vagyis az amplitúdókat a kezdeti feltételek határozzák meg. Az amplitúdókat, mint a fenti formulából látható, az A_n és B_n állandók határozzák meg. A következőkben kimutatjuk, hogy az A_n, B_n állandók a kezdeti feltételek által meg vannak határozva.

A kezdeti feltételek úgy szóltak, hogy $t = 0$ időben $y = f(x)$ és $\frac{\partial y}{\partial t} = F(x)$.

A fenti megoldással ezekből a formulákból nyerjük, hogy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi\nu_n B_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Az A_n és B_n együtthatók meghatározása éppen olyan módon történik, mint a *Fourier*-sor együtthatóié. Határozzuk meg pl. A_k-t. Évégből szorozzuk meg $f(x)$-et $\sin \frac{k\pi}{l} x$-szel és integráljunk $\frac{k\pi}{l} x$ szerint 0-tól $k\pi$-ig. Ha $\frac{k\pi}{l} x$ helyett α_k-t írunk, nyerjük

$$\int_0^{k\pi} f(x) \sin \alpha_k \, d\alpha_k = \int_0^{k\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \alpha_n \right) \sin \alpha_k \, d\alpha_k .$$

A jobboldalon tagonként integrálva a következő integrálokra jutunk

$$\int_0^{k\pi} A_k \sin^2 \alpha_k d\alpha_k, \qquad \int_0^{k\pi} A_n \sin \alpha_n \sin \alpha_k d\alpha_k, \qquad (n \neq k).$$

Az első integrált a következőképpen számíthatjuk ki. Fennáll, hogy

$$\int_0^{k\pi} (\sin^2 \alpha_k + \cos^2 \alpha_k)\, d\alpha_k = \int_0^{k\pi} d\alpha_k = k\pi .$$

Továbbá $\sin^2\alpha_k$ és $\cos^2\alpha_k$ menetéből következik, hogy

$$\int_0^{k\pi} \sin^2 \alpha_k \, d\alpha_k = \int_0^{k\pi} \cos^2 \alpha_k \, d\alpha_k ,$$

vagyis az utóbbi integrálok mindegyike $k\frac{\pi}{2}$-vel egyenlő. Tehát

$$\int_0^{k\pi} A_k \sin^2 \alpha_k \, d\alpha_k = A_k \frac{\pi}{2} k .$$

Ezek után foglalkozzunk a második integráltípussal. Figyelembe véve a következő trigonometriai formulát,

$$\sin \varepsilon \sin \delta = \frac{1}{2} [\cos (\varepsilon - \delta) - \cos (\varepsilon + \delta)],$$

nyerjük, hogy

$$\int_0^{k\pi} A_n \sin \alpha_n \sin \alpha_k \, d\alpha_k = \frac{1}{2} A_n \left\{ \int_0^{k\pi} \cos (\alpha_n - \alpha_k) d\alpha_k - \int_0^{k\pi} \cos(\alpha_n + \alpha_k) d\alpha_k \right\},$$

$$\alpha_n \mp \alpha_k = \frac{n\pi}{l} x \mp \frac{k\pi}{l} x = \left(\frac{n \mp k}{k} \right) \frac{k\pi}{l} x = \frac{n \mp k}{k} \alpha_k .$$

$$\int_0^{k\pi} \cos(\alpha_n \mp \alpha_k) \, d\alpha_k = \int_0^{k\pi} \cos \left(\frac{n \mp k}{k} \alpha_k \right) d\alpha_k = \frac{k}{n \mp k} \left[\sin \left(\frac{n \mp k}{k} \alpha_k \right) \right]_0^{k\pi} = 0.$$

$$(n \neq k)$$

Ezek az integrálok $n \neq k$-ra mind zérussal egyenlők. Tehát

$$\int_0^{k\pi} f(x) \left(\sin \frac{k\pi}{l} x \right) d \left(\frac{k\pi}{l} x \right) = A_k \frac{k\pi}{2} .$$

Továbbá

$$d\left(\frac{k\pi}{l}x\right)=\frac{k\pi}{l}dx\,.$$

Ha $\frac{k\pi}{l}x=0$, akkor $x=0$,

ha $\frac{k\pi}{l}x=k\pi$, akkor $x=l$.

Mindezeket figyelembe véve nyerjük, hogy

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\left(\sin\frac{k\pi}{2}x\right)dx\,. \tag{5.6.12}$$

Teljesen hasonló módon

$$B_k=\frac{1}{\pi v_k l}\int_0^l F(x)\left(\sin\frac{k\pi x}{l}\right)dx\,. \tag{5.6.13}$$

Az együtthatóknak ezeket a kifejezéseit beírva (6.11)-be, a nyert megoldás kielégíti a határfeltételeket és a kezdeti feltételeket.

Válasszunk példa gyanánt egy húrt, melyet a közepén a szélességű kalapáccsal megütünk, vagyis a húr közepén egy a hosszúságú darabnak pl. v_0 sebességet adunk (Zongora). A kezdeti feltételek tehát legyenek $f(x)=0$ (vagyis a húr legyen $t=0$ időben nyugalmi állapotban) és $F(x)=v_0$, ha x $\frac{l-a}{2}$ és $\frac{l+a}{2}$ közé esik, különben legyen $F(x)=0$. Ekkor

$$A_k=0$$

és

$$B_k=\frac{1}{\pi v_k l}\int_{\frac{l-a}{2}}^{\frac{l+a}{2}} v_0\left(\sin\frac{k\pi}{l}x\right)dx=\frac{v_0}{k\pi^2 v_k}\left\{\cos\frac{k\pi}{l}\left(\frac{l-a}{2}\right)-\cos\frac{k\pi}{l}\left(\frac{l+a}{2}\right)\right\}.$$

Innen is látható, a (6.12) és (6.13) egyenletekből pedig általánosságban következik, hogy a felrezgések amplitúdóit, vagyis a hangszínezetet a kezdeti feltételek határozzák meg. A (6.12) és (6.13) egyenletek adják annak a tapasztalati ténynek matematikai kifejezését, hogy a húr által adott ugyanazon hang színezete függ attól, hogy milyen módon hoztuk rezgésbe, pl. ugyanaz a hang zongorán vagy hegedűn egymástól jól megkülönböztethető.

Az itt kifejtett módszerrel kapcsolatban megemlítjük még a következőket. A (6.9) alatti $\frac{d^2U}{dx^2}+\left(\frac{m}{a}\right)^2U=0$ egyenletnek csak meghatározott $(m/a)^2$, ill. m

értékek mellett vannak a határfeltételekkel összeegyeztethető megoldásai. Ezeket az $\left(\frac{m}{a}\right)^2$ értékeket (vagyis az egyenlet fenti alakjában U együtthatóinak ezen meghatározott értékeit) nevezzük az egyenlet *sajátérték*einek. Az ezekhez a sajátértékekhez, ill. m-ekhez tartozó megoldások közül azokat, melyek kielégítik a határfeltételeket, nevezzük *sajátfüggvény*eknek. Mivel a határfeltételekből, mint láttuk, következik, hogy $\frac{m}{a} l = n\pi$ (ahol n egész szám), a mi esetünkben a sajátérték $\left(n\frac{\pi}{l}\right)^2$, a sajátfüggvény pedig $U_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x$. Általánosságban is ki lehet mutatni, hogy a fenti határfeltételek mellett a különböző sajátértékekhez, vagyis különböző n-ekhez tartozó sajátfüggvények ortogonálisak egymásra, tehát ezekre fennáll, hogy

$$\int_0^l U_n(x)\, U_k(x)\, dx = 0 .$$

Hasonló matematikai problémákkal a kvantummechanika körében részletesebben fogunk foglalkozni.

7. §. Cseppfolyós és légnemű testek

Az ideális cseppfolyós és különösen az ideális légnemű állapot elsősorban azáltal jellemezhető, hogy olyan alakváltozással szemben, mely nem idéz elő térfogatváltozást, nem fejtenek ki ellenállást. A folyadékok kompresszibilitása igen kicsi, tehát térfogatváltozással szemben nagy erők lépnek fel, azonban a gázok kompresszibilitása igen nagy. Ezenkívül gázokban expanziós nyomás uralkodik, melynek hatására a rendelkezésükre álló térfogatot mindig teljesen betöltik.

Az a tapasztalati tény, hogy gázok és ideális folyadékok (vagyis olyan folyadékok, melyekben nincsen belső súrlódás) alakváltozással szemben, míg a térfogatot nem kisebbítjük, nem fejtenek ki erőt, az elméletben azáltal jut kifejezésre, hogy a tangenciális feszültségek, P_{12}, P_{23}, P_{31} eltűnnek. A valódi folyadékokra ez nem áll fenn. Ha ugyanis a folyadéknak két egymással szomszédos rétege különböző sebességgel mozog, vagyis ha a két réteg egymáson lecsuszamlik, akkor egymásra tangenciális erőket gyakorolnak, melyek arányosak a rétegek relatív sebességével. A valódi gázoknál is van belső súrlódás, de ez nagyon kicsi, úgyhogy itt nem teszünk különbséget a valódi és ideális gáz között. A folyadékok egyensúlyának tárgyalásánál, vagyis a hidrosztatikában, nem áll fenn különbség a valódi, vagyis belső súrlódással bíró és ideális folyadékok között, mert egyensúly esetében a szomszédos folyadékrészek relatív sebessége zérus, aminek következtében az ezzel arányos tangenciális erők eltűnnek. Mi a következőkben csak gázokkal és ideális folyadékokkal foglalkozunk, tehát a tangenciális feszültségeket 0-nak vesszük. Mivel ez minden koordinátarendszerre érvényes, az összes koordinátarendszer főtengelyrendszer, vagyis tengelyeik összeesnek a feszültségi ellip-

szoid főtengelyeivel. Ez csak úgy lehetséges, ha a feszültségi ellipszoid gömb, vagyis az összes normálfeszültség, P_{11}, P_{22}, P_{33} egyenlő egymással. Mégpedig legyen

$$P_{11} = P_{22} = P_{33} = -p.$$

Ekkor p jelenti a normális nyomást (vagyis a felület normálisával ellenkező irányú és a felületegységre ható erőt). Ennek az egyenletnek a jobboldalán mínusz előjel áll, melyre a következő okok miatt van szükség. A rugalmasságtanban a normálfeszültségeket pozitív előjellel vettük számításba, ha egy zárt felület kifelé mutató normálisának irányába estek. Mivel pedig a nyomás mindig egy zárt felület kifelé mutató normálisával ellentétes irányú, a fenti egyenlet jobboldalára mínusz előjelet kell írni.

A fentiekből csakugyan következik az a fontos tapasztalati tétel, hogy bármilyen normálisú felületre ható nyomás értéke ugyanakkora. Ugyanis

$$P_{n1} = P_{11}\cos(n, x) + P_{21}\cos(n, y) + P_{31}\cos(n, z) = -p\cos(n, x),$$

$$P_{n2} = P_{12}\cos(n, x) + P_{22}\cos(n, y) + P_{32}\cos(n, z) = -p\cos(n, y),$$

$$P_{n3} = P_{13}\cos(n, x) + P_{23}\cos(n, y) + P_{33}\cos(n, z) = -p\cos(n, z).$$

Tehát az n-normálisú felület felületegységére ható erő, $\mathbf{P}_n$, abszolút értéke független n-től és egyenlő p-vel, és mint látható, n-nel ellentétes irányú, mert a jobboldalon álló kifejezések negatív előjelűek. Tehát a cseppfolyós vagy légnemű testek egy pontjában elhelyezett felületelemre a felületelem normálisától független nyomás hat.

8. §. Cseppfolyós és légnemű testek egyensúlya

A fentiek figyelembevételével a deformálható testek általános elméletében az egyensúlyra levezetett egyenletek a következő egyenletbe foglalhatók össze

$$\mathbf{K} - \operatorname{grad} p = 0.$$

$\mathbf{K}$ a térfogategységre ható tömegerő. Ehelyett a hidro- és aeromechanikában inkább a tömegegységre ható erőt szokás használni. Ha $\mathbf{G}$ a tömegegységre ható erő és ρ a sűrűség, akkor $\mathbf{K} = \rho\mathbf{G}$, tehát az egyensúly feltételei a következő egyenletben foglalhatók össze

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p, \tag{5.8.1}$$

ami a komponensekre vonatkozóan a következő 3 egyenletet jelenti

$$G_x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad G_y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad G_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{5.8.2}$$

Hasonlóan, mint a rugalmasságtanban, az egyenleteknek határozott értelmet csak akkor tulajdoníthatunk, ha megadjuk a feszültségi tenzor és a torzulási

tenzor komponensei közti összefüggést. Ezeknek az egyenleteknek is csak akkor tulajdoníthatunk értelmet, ha ρ és p között egy összefüggést adunk meg. Ez az összefüggés *légnemű testekre* lehet a *Boyle–Mariotte*-törvény, mely szerint konstans hőmérsékleten, ha p, ρ, ill. p_0, ρ_0 összetartozó értékek,

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0},$$

innen

$$p = \frac{p_0}{\rho_0}\rho. \tag{5.8.3}$$

Vagyis állandó hőmérsékletnél a nyomás arányos a sűrűséggel.

Adiabatikus változásoknál a

$$p = a\rho^{\kappa}$$

összefüggést kell alkalmazni, ahol a és κ állandók.

Cseppfolyós testeknél ρ igen kevéssé függ p-től, úgyhogy, ha az inkompresszibilis folyadékok határesetére szorítkozunk, ρ-t p-től teljesen függetlennek tekinthetjük.

A továbbiakban alkalmazzuk egyenleteinket néhány fontos esetre. Itt nem hanyagolhatjuk el a tömegerőket, mint azt a rugalmasságtanban tettük, mert itt éppen ezek figyelembevételével kapunk fontos eredményeket.

1. A hidrosztatika és aerosztatika számos problémája közül elsőnek levezetjük a *barometrikus magassági formulát*, mely megadja a nyomást mint a magasság függvényét. A Föld felületét egy kis darabon síknak tekinthetjük, a koordinátarendszer x, y-tengelyeit ebbe a síkba helyezzük, a z-tengelyt pedig merőlegesen felfelé irányítjuk. E feltevések mellett p és ρ függetlenek x-től és y-tól, továbbá G_x és G_y eltűnnek. Ha g-vel jelöljük a nehézségi gyorsulást, akkor jelen esetben a tömegegységre ható erő z komponense $G_z = -g$ (ugyanis a z-tengely felfelé irányul). Tehát egyenleteink a következő egyenletre redukálódnak

$$-\rho g = \frac{dp}{dz}.$$

Felhasználva a *Boyle–Mariotte*-törvényt, mely szerint $\rho = \frac{\rho_0}{p_0}p$, nyerjük

$$-\frac{\rho_0}{p_0}pg = \frac{dp}{dz}.$$

Innen pedig a változók szétválasztásával következik, hogy

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0}g dz. \tag{5.8.4}$$

Integráljuk ezt az egyenletet a $z = 0$ és $z = z$ határok, vagyis a földfelszín és z magasság között. Legyenek továbbá p_0 és ρ_0 a $z = 0$-nak megfelelő értékek, ekkor

nyerjük, hogy

$$\ln p - \ln p_0 = -\frac{\rho_0}{p_0} gz,$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} gz,$$

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} gz}. \tag{5.8.5}$$

Tehát a nyomás z-vel exponenciálisan csökken. Meg kell azonban említeni, hogy a barometrikus magassági formulát azzal a feltevéssel vezettük le, hogy az atmoszféra egész magasságában a hőmérséklet konstans, ugyanis felhasználtuk BOYLE–MARIOTTE törvényét, mely csak konstans hőmérsékletre áll fenn.

2. A következőkben alkalmazzuk az egyensúlyra levezetett egyenleteinket folyadékokra, mégpedig állapítsuk meg a folyadékfelszín alakját az egyensúlyi állapotban. Évégből szorozzuk a (8.2) egyenleteket rendre ρdx, ρdy és ρdz-vel és az így nyert egyenleteket adjuk össze. Ekkor kapjuk, hogy

$$\rho(G_x dx + G_y dy + G_z dz) = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp.$$

Tegyük fel, hogy a tömegerőknek van potenciálja, vagyis hogy

$$G_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad G_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad G_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Ha ezeket a kifejezéseket a fenti egyenletben G_x, G_y, G_z helyébe írjuk, akkor következik, hogy

$$-\rho dU = dp.$$

Inkompresszibilis folyadékok esetében, ρ konstans lévén, integráció útján nyerjük, hogy

$$p = -\rho U + c, \tag{5.8.6}$$

ahol c integrációs állandó.

Ennek az egyenletnek a segítségével sok esetben megállapíthatjuk a folyadékfelszín alakját. Ugyanis a fenti egyenlet szerint az egyenlő nyomás felületei a jelenlevő tömegerők ekvipotenciális felületei. A folyadékok felszíne egyenlő nyomású felület, tehát a felszín ekvipotenciális felület. Lássunk néhány példát.

Egy edénybe helyezett nyugvó folyadékra hat a nehézségi erő. Ha a koordinátarendszer x- és y-tengelyeit a felszín által meghatározott síkba helyezzük, a z-tengelyt pedig a felszínre merőlegesen felfelé irányítjuk, akkor

$$G_x = 0, \quad G_y = 0, \quad G_z = -g,$$

$$U = gz.$$

Tehát

$$p = -\rho g z + c.$$

Eszerint a nyomás ugyanabban a magassági szintben (z = konstans) ugyanakkora, vagyis az egyenlő nyomású felületek vízszintes síkok. Tehát a folyadékfelszín is vízszintes sík.

3. Ezután határozzuk meg egy körhengerben levő folyadék felszínét, mely henger a függőleges tengelye körül forog ω szögsebességgel. Helyezzük a koordinátarendszer z-tengelyét a henger tengelyébe, az x- és y-tengelyek tehát a vízszintes síkba esnek. Ha a hengert függőleges tengelye körül forgásba hozzuk, akkor egy bizonyos kezdeti állapot után egyensúly áll be, amidőn a folyadék a hengerrel együtt forog. A továbbiak erre az egyensúlyi állapotra vonatkoznak, mégpedig tárgyalásainkat a hengerrel együtt forgó koordinátarendszerre vonatkoztatjuk. Olyan észlelő számára, aki ebben nyugszik, vagyis együttforog a hengerrel, a folyadék nem forog, hanem egyensúlyi állapotban van. Tehát ily módon ez a probléma a hidrosztatika körébe sorolható. A folyadékra kétféle erő hat, a nehézségi erő és a centrifugális erő. A nehézségi erő komponensei $G_{x_1} = 0$, $G_{y_1} = 0$, $G_{z_1} = -g$, potenciálja

$$U_1 = gz.$$

A centrifugális erő komponensei

$$G_{x_2} = \omega^2 x, \quad G_{y_2} = \omega^2 y, \quad G_{z_2} = 0,$$

potenciálja

$$U_2 = -\frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2).$$

Tehát a folyadékra ható erők összes potenciálja

$$U = U_1 + U_2 = gz - \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2).$$

Vagyis

$$p = -\rho\left[gz - \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2)\right] + c.$$

ahol c egy állandó. Tehát az egyenlő nyomású felületek egyenlete

$$gz - \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2) = \text{konst.},$$

$$z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + \text{konst.} \qquad (5.8.7)$$

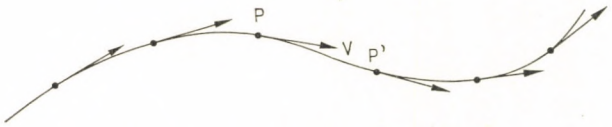
Ezek forgási paraboloidok, melyek tengelye z és melyek felülről nézve homorúak. Tehát a folyadékfelszín is ilyen forgási paraboloid.

9. §. Cseppfolyós és légnemű testek mozgása

Ha a folyadék vagy légnemű test nincs egyensúlyban, vagyis ha a részek véges sebességgel mozognak a térben, akkor a folyadék áramlásáról beszélünk. Az áramlás csak akkor ismeretes teljesen, ha minden pillanatban, minden helyen ismerjük az áramlási sebességet. A praxisban csaknem kizárólag olyan áramlásokról van szó, melyek stacionáriusak, melyeknél tehát az áramlási sebesség vektora az egyes pontokban az időben nem változik. Ha pl. egy állandó sebességgel tovahaladó repülőgépre ható felhajtóerőt keressük, akkor ez a probléma nem tartozik a stacionárius áramlás problémái közé, mert hiszen a repülőgépnek a térben való tovahaladása következtében a levegőrészek áramlásának vektora nem konstans a tér adott pontjában. De ahelyett, hogy az állandó sebességgel tovahaladó repülőgépre ható felhajtóerőt keressük, a repülőgépet nyugvónak tekinthetjük és a levegőt áramoltathatjuk egyenletes sebességgel a végtelenből (vagyis úgy, hogy a levegőrészek sebessége egymással párhuzamos legyen) a gép tovahaladásával ellentétes irányban. A modellkísérleteknél tényleg így járnak el. Ekkor pedig az áramlás már stacionárius, mert adott pontban az áramlás sebességének vektora állandó. Tehát láthatjuk, hogy ez a nem stacionárius áramlások körébe tartozó probléma is visszavezethető stacionárius esetre.

Az általánosság kedvéért foglalkozzunk nem stacionárius áramlási problémákkal is. A nem stacionárius áramlásnál kétféle görbecsoportot kell megkülönböztetni. A görbék egyik csoportja a részecskék pályagörbéi, vagyis azok a pályák, melyeken a részecskék mozognak. A görbék másik csoportja az áramvonalak, melyek a következőképpen jönnek létre. Gondoljuk valamely megadott időpillanatban minden pontban felrajzolva az áramlás sebességének vektorát. Ha ezeket elég sűrűn rajzoljuk fel, akkor láthatjuk, hogy ezek görbéket határoznak meg, melyeknek érintői az egyes pontokban az áramlás sebességének vektoraival esnek össze. Az áramvonalak tehát a sebesség trajektóriái.

A nemstacionárius áramlásnál az áramlási görbék, vagyis az áramvonalak pillanatról pillanatra változnak. Tehát ha egy folyadékrész P-ből dt idő alatt P'-be



108. ábra. Az áramvonalak a sebesség trajektóriái

jut, akkor ennek P'-ben más lesz a sebessége, mint amely a dt-vel korábbi időnek megfelelő áramvonalképből, vagyis abból az áramvonalképből következne, mely annak az időpillanatnak felel meg, midőn a rész P-ben volt. Innen látható, hogy a pályagörbék és áramvonalak csak stacionárius áramlásnál esnek össze.

Hasonlóképpen, mint a rugalmasságtanban, az egyensúly feltételeiből a mozgás feltételeit, vagyis a mozgásegyenleteket d'ALEMBERT elve segítségével állapíthatjuk

meg. Ily módon a mozgásegyenletek számára nyerjük

$$-\rho \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \rho\mathbf{G} = \operatorname{grad} p,$$

vagyis

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{G} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p.$$

Bontsuk fel az utolsó egyenlet baloldalán álló vektort, a $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ vektort, vagyis a sebességnek az időegységre eső változását két részre, egy tisztán térbeli és egy időbeli változásra. A tisztán térbeli változás onnan származik, hogy a részecske dt idő alatt a P pontból, melyhez (tetszőleges kezdőpontból) húzott rádiuszvektor $\mathbf{r}$ és melyben a sebesség $\mathbf{v}$, eljut a P' pontba, melyhez húzott rádiuszvektor $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ és melyben a sebesség $\mathbf{v} + d_0\mathbf{v}$. Tehát $d_0\mathbf{v}$ az a sebességváltozás, mely a $d\mathbf{r}$ elmozdulás következtében lép fel és amely a dt idő alatt bekövetkezett változást nem foglalja magában. $d_0\mathbf{v}$ volna tehát a stacionárius áramlásnál fellépő teljes sebességváltozás. Ez a sebességváltozás az időegységre vonatkoztatva $d_0\mathbf{v}/dt$-vel egyenlő. Ennek a vektornak x komponense a következő

$$\frac{d_0 v_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z.$$

Hasonlóképpen nyerjük, hogy

$$\frac{d_0 v_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z,$$

$$\frac{d_0 v_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z.$$

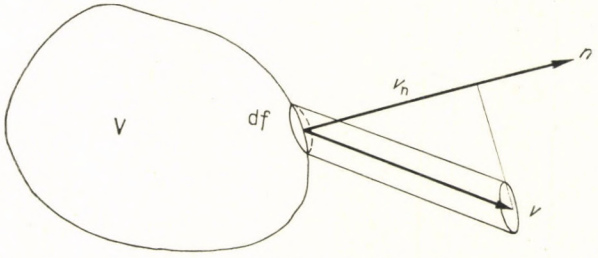
Másrészt azonban az áramlási kép, vagyis az áramvonalak megváltoznak dt idő alatt, vagyis azalatt, míg a rész P-ből P'-be jut. Magasabb rendű kicsi tagok elhanyagolásával ez a sebességváltozás egyenlőnek vehető az $\mathbf{r}$ helyen, vagyis a P pontban a dt idő alatt fellépő sebességváltozással, mely $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt$, ahol $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ az $\mathbf{r}$ helyre vonatkozik. Az időegységre vonatkoztatva ez a sebességváltozás tehát $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$. Ezzel a $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ tagot a $\frac{\partial_0 \mathbf{v}}{\partial t}$ és a $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ tagok összegére bontottuk fel, vagyis nyerjük, hogy a mozgásegyenletek vektori alakja a következő

$$\frac{\partial_0 \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{G} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \tag{5.9.1}$$

Vagyis a komponensekre vonatkozóan nyerjük, hogy

$$
\begin{aligned}
v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_x}{\partial t}&=G_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_y}{\partial t}&=G_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial t}&=G_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}
\tag{5.9.2}
$$

Ezek a *hidro- és aerodinamika alapegyenletei.*



109. ábra. A V térfogatból kiáramló folyadék meghatározása

Ezekhez még egy egyenlet járul, melyet kontinuitási egyenletnek neveznek. Ehhez az egyenlethez a következőképpen juthatunk el. Egy zárt felülettel körülvett térfogatrészből az időegységben kiáramló folyadék tömege

$$\oint_f \rho v_n df.$$

Ugyanis a df felületelemen az időegység alatt annyi folyadék áramlik át, amennyi a df alapú és $\mathbf{v}$ tengelyű hengerben jelen van. Ennek a hengernek a térfogata $v_n df$, tömege pedig $\rho v_n df$. Tehát az egész zárt felületen, vagyis a V térfogatból az időegységben $\oint_f \rho v_n df$ tömegű folyadék áramlik ki. Ez tehát, feltéve hogy V-ben nincsenek pozitív vagy negatív források, egyenlő a V-ben levő folyadékmennyiségnek az időegységre eső fogyásával, vagyis

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV\text{-vel},$$

ahol dV a térfogatelem. Tehát

$$\oint_f \rho v_n df = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV.$$

A felületi integrálra alkalmazhatjuk GAUSS tételét, mely szerint

$$\oint_f \rho v_n df = \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})\, dV\,,$$

tehát

$$\int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})\, dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV\,.$$

Mivel ennek az egyenletnek minden V térfogatra fenn kell állni, következik, hogy

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}\,. \tag{5.9.3}$$

Inkompresszibilis folyadékok esetében, melyeknél ρ a helytől és időtől független, innen következik, hogy

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{5.9.4}$$

Az általános esetre azonban (9.3) érvényes, mely részletesen kiírva a következő

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}\,. \tag{5.9.5}$$

(9.2) és (9.5) alkotják tehát a hidro- és aerodinamika alapegyenleteit. Láthatjuk a speciális nehézségeket, melyek itt felmerülnek. A (9.2) egyenletek ugyanis nem lineárisak, és ellentétben a fizika más területein fellépő fontos egyenletekkel, a megoldások összege, vagyis szuperpozíciója nem megoldás. Tehát itt nem érvényes a szuperpozíció elve, mely sok esetben, így pl. a húr esetében is nagyon jó szolgálatokat tesz.

Stacionárius esetben az idő szerinti deriváltak eltűnnek és ekkor a (9.2) és (9.5) egyenletek a következőképpen módosulnak

$$\begin{aligned}
v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= G_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\,,\\
v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= G_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\,,\\
v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= G_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\,,\\
\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} &= 0\,.
\end{aligned} \tag{5.9.6}$$

Ezek a stacionárius áramlás alapegyenletei. Az első 3 egyenlet baloldalát át lehet

alakítani. Évégből számítsuk ki $[\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{v}]_x$-et

$$[\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{v}]_x = v_y \operatorname{rot}_z \mathbf{v} - v_z \operatorname{rot}_y \mathbf{v} = v_y \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right).$$

Ha a jobboldalon elvégezzük a szorzásokat és hozzáadjuk a következő tagokat: $+ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$-t, akkor nyerjük, hogy

$$[\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{v}]_x = v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} - \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right),$$

$$[\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{v}]_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} - \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right),$$

$$[\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{v}]_x = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right).$$

Tehát

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{v}^2) - [\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{v}]_x.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{v}^2) - [\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{v}]_y,$$

$$v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{v}^2) - [\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{v}]_z.$$

Ha ezeket a kifejezéseket (9.6) első 3 egyenletébe beírjuk, látjuk, hogy akkor a 3 egyenlet a következőben foglalható össze

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad}(\mathbf{v}^2) - [\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{v}] = \mathbf{G} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \tag{5.9.7}$$

Ez a fontos egyenlet, mely csak stacionárius áramlásokra áll fenn, módot ad arra, hogy ezeket osztályozzuk. Mégpedig a stacionárius áramlásokat felosztjuk örvénymentes áramlásokra, vagyis olyanokra, melyeknél $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ mindenhol eltűnik és örvényes áramlásokra, melyeknél $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ nem tűnik el.

A következőkben meg kell még állapítanunk a folyadékok vagy légnemű anyagok áramlásánál fellépő határfeltételeket. A folyadékok, ill. a légnemű anyagok általában nem töltik be az egész teret, hanem bizonyos határaik vannak (pl. az edény falai). Ha a határoló felület szilárd, akkor ez a folyadék mozgására bizonyos korlátozó feltételt jelent, ugyanis a folyadék vagy légnemű test nem mozog-

hat a felületen át. Ezt fejezi ki a következő határfeltétel, mely szerint a folyadék vagy légnemű test sebességének normális menti komponense egyenlő a határoló felület normális sebességével, vagyis

$$v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y) + v_z \cos(n, z) = w_n, \tag{5.9.8}$$

ahol n a határfelületnek a folyadékkal vagy légnemű testtel betöltött térből kifelé mutató normálisa, w_n pedig a határfelület normális menti sebessége.

Ha a határoló felület nyugszik, akkor

$$v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y) + v_z \cos(n, z) = 0. \tag{5.9.9}$$

Mozgó határfelületről van szó, ha pl. egy szilárd test mozog folyadékban vagy légnemű testben. A folyadékot tartó edény falai általában nyugvó felületek.

Belső súrlódás nélküli folyadékok, vagy légnemű testek esetében (melyekkel mi itt foglalkozunk) a sebesség tangenciális komponensére nincs korlátozás, vagyis ezeknél a folyadékoknál vagy légnemű testeknél a határfelülettel szomszédos réteg ennek mentén súrlódás nélkül továbbcsuszamlik. Ez nagyfokú idealizálás, ugyanis a valóságos folyadékoknál és légnemű testeknél a belső súrlódás nem hanyagolható el. A modern hidrodinamikában a való viszonyoknak megfelelően a határfeltételt úgy módosítják, hogy feltételezik, hogy a folyadéknak vagy légnemű testnek a határfelülettel szomszédos igen vékony rétege a határfelülethez tapad. Így a határfelülethez közel levő rétegekben nagy a sebességváltozás, minek következtében ott a belső súrlódást figyelembe kell venni, ugyanis a nagy sebességesés következtében az említett folyadékrétegek nagy relatív sebességgel csuszamlanak el egymáson. Mi azonban a továbbiakban a belső súrlódást nem vesszük figyelembe, vagyis csak ideális folyadékokkal és légnemű testekkel foglalkozunk.

10. §. A Bernoulli-féle egyenlet

Ha feltételezzük, hogy a tömegerőknek van potenciáljuk, ami szinte mindig fennáll, vagyis ha

$$\mathbf{G} = -\operatorname{grad} U,$$

akkor a (9.7) egyenlet a következőképpen alakul

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad}(\mathbf{v}^2) - [\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{v}] = -\operatorname{grad} U - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \tag{5.10.1}$$

Integráljuk ezt az egyenletet egy áramvonal mentén P_0-tól P-ig. Ha tehát $d\mathbf{s}$ jelenti az áramvonal elemét, melynek iránya megegyezik az áramvonal érintőjének, vagyis $\mathbf{v}$-nek irányával, akkor nyerjük, hogy

$$\int_{P_0}^{P} \frac{1}{2} \operatorname{grad}(\mathbf{v}^2)\, d\mathbf{s} - \int_{P_0}^{P} [\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{v}]\, d\mathbf{s} = -\int_{P_0}^{P} \operatorname{grad} U\, d\mathbf{s} - \int_{P_0}^{P} \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p\, d\mathbf{s}.$$

Fennáll, hogy

$$\int_{P_0}^{P} [\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{v}] d\mathbf{s} = 0, \tag{5.10.2}$$

mert $d\mathbf{s}$ iránya megegyezik $\mathbf{v}$ irányával. Tehát, ha feltételezzük, hogy a folyadék inkompresszibilis, vagyis ρ = konstans, kapjuk, hogy

$$\int_{P_0}^{P} \operatorname{grad} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} \right) d\mathbf{s} = 0. \tag{5.10.3}$$

Vezessük be a rövidség kedvéért a következő jelölést

$$\frac{\mathbf{v}^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} = f,$$

ekkor (10.3) a következőképpen alakul

$$\int_{P_0}^{P} \operatorname{grad} f \, ds = \int_{P_0}^{P} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) = \int_{P_0}^{P} df = f(P) - f(P_0) = 0.$$

Tehát

$$f(P) = f(P_0).$$

Vagyis

$$\frac{\mathbf{v}^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} = \frac{\mathbf{v}_0^2}{2} + U_0 + \frac{p_0}{\rho}, \tag{5.10.4}$$

ha a baloldali kifejezés a P pontra, a jobboldali pedig P_0-ra vonatkozik. (10.4) azt mondja, hogy stacionárius áramlásoknál inkompresszibilis folyadékok esetén egy áramvonal mentén

$$\frac{\mathbf{v}^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} = \text{konst}.$$

A konstans értéke különböző áramvonalakra különböző.

Ha az áramlás örvénymentes stacionárius áramlás, vagyis ha rot $\mathbf{v}$ mindenütt 0, akkor a (10.1) egyenlet a következőképpen módosul

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad} \mathbf{v}^2 = - \operatorname{grad} U - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p,$$

vagyis inkompresszibilis folyadékok esetében

$$\operatorname{grad} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} \right) = 0.$$

Ha ezt egy *tetszőleges görbére* (tehát a görbének nem kell áramvonalnak lenni) integráljuk P_0-tól P-ig, akkor teljesen hasonlóan, mint előbb, nyerjük, hogy

$$\frac{\mathbf{v}^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} = \frac{\mathbf{v}_0^2}{2} + U_0 + \frac{p_0}{\rho} = \text{konst.}, \tag{5.10.5}$$

ahol azonban most a konstans értéke az egész áramlási térben ugyanakkora, vagyis az összes áramvonalra azonos.

Ebből fordítva arra következtethetünk, hogy ha az áramlás egy örvénymentes térrészből indul ki, ahol $\frac{\mathbf{v}_0^2}{2} + U_0 + \frac{p_0}{\rho}$ az összes áramvonalra ugyanakkora, akkor az áramlás az egész térben örvénymentes marad. Így pl. egy edényből kiáramló folyadék áramlása örvénymentes áramlás, mert az edénybe zárt folyadék felszínén $\frac{\mathbf{v}_0^2}{2} + U_0 + \frac{p_0}{\rho}$ mindenhol ugyanakkora, mert $\mathbf{v}_0$, U és p_0 egyenként állandók a felszínen.

A (10.4), ill. (10.5) alatti egyenlet az ún. *Bernoulli*-féle egyenlet. Örvénymentes mozgásoknál, ahol $\frac{\mathbf{v}^2}{2} + U + \frac{p}{\rho}$ az egész térben konstans, a *Bernoulli*-egyenletből azt a fontos következtetést vonhatjuk le, hogy azokon a helyeken, ahol U = konstans, nagy áramlási sebességű pontokban kisebb a nyomás, mint kis áramlási sebességű pontokban. Örvényes áramlásoknál ez csak egy örvényfonálra vonatkozóan áll fenn.

11. §. Örvénymentes áramlások

Örvénymentes áramlásoknál rot $\mathbf{v}$ mindenütt eltűnik, ilyen áramlásoknál tehát $\mathbf{v}$ előállítható mint valamely ϕ függvény gradiense

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \phi. \tag{5.11.1}$$

ϕ-t *sebességi potenciál*nak nevezzük. Ha a sebességnek van potenciálja, a probléma megoldása nagyon egyszerűsödik, mert ekkor az áramlás ismeretéhez nem szükséges 3 függvényt (a 3 sebességi komponenst mint a hely függvényét) megadnunk, hanem elegendő egy függvényt, a ϕ-t ismernünk.

A *Bernoulli*-egyenlet szerint örvénymentes áramlásoknak a természetben gyakran elő kell fordulniuk. Így pl. a repülőgépmodell-kísérleteknél, midőn egy vastag csövön keresztül áramoltatunk levegőt a repülőgéppel szemben, a levegőnek a csőbe való belépésénél mindenütt ugyanaz a sebessége, közel ugyanaz a nyomása és a cső egész keresztmetszetén ugyanakkorának tekinthető a nehézségi erő potenciálja, mely különben itt teljesen elhanyagolható. Tehát a *Bernoulli*-egyenletből, mint láttuk, következik, hogy ekkor az áramlásnak végig örvénymentesnek kell maradnia, tehát a repülőgép szárnyai körül olyan áramlásnak kell kialakulnia, mely örvénymentes. Ez a tisztán örvénymentes áramlás azonban para-

dox eredményekhez vezet. Így pl. azt a tapasztalattal ellentmondó eredményt kapjuk, hogy egy ilyen áramba helyezett végtelen hosszú hengerre, melynek tengelye merőleges az áramlás sebességére, az áramló folyadék nem gyakorol erőt. Ez a tapasztalattal ellentmondó eredmény annak a következménye, hogy elhanyagoltuk a folyadék belső súrlódását, mely a felület mentén lényeges szerepet játszik. Ugyanis, mint már említettük, a folyadéknak a felülettel szomszédos rétege a felülethez tapad és így a következő rétegekben nagy sebességesés keletkezik, mely rétegekben a belső súrlódást nem lehet elhanyagolni. Ez azt is eredményezheti, hogy az áramlás már nem örvénymentes. A továbbiakban mi ennek ellenére tisztán örvénymentes áramlásokkal fogunk foglalkozni és látni fogjuk, hogy ezek keretében, ha el is tekintünk a belső súrlódástól, kis módosításokkal sikerül használható és a tapasztalattal megegyező eredményeket levezetni.

Ezek után térjünk rá belső súrlódás nélküli, inkompresszibilis folyadékok vagy légnemű testek örvénymentes, stacionárius áramlásának általános tárgyalására. Örvénymentes áramlásokra fennáll (11.1), vagyis

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \qquad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \qquad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \tag{5.11.2}$$

Inkompresszibilis folyadékokra a kontinuitási egyenlet szerint pedig fennáll, hogy

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \tag{5.11.3}$$

ahonnan (11.2)-t figyelembe véve, nyerjük, hogy

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \tag{5.11.4}$$

Bevezetve a *Laplace*-operátort

$$\Delta \phi = 0. \tag{5.11.5}$$

Jelen esetben tehát ez a kontinuitási egyenlet.

Az áramlás első 3 alapegyenlete a következőbe vonható össze

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad} \mathbf{v}^2 = \mathbf{G} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p,$$

amelyből a fentiek figyelembevételével nyerjük, hogy

$$\operatorname{grad} p = G\rho - \frac{1}{2} \rho \operatorname{grad} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\}. \tag{5.11.6}$$

Ezekből az egyenletekből pedig, ha $\mathbf{G} = -\operatorname{grad} U$, következik BERNOULLI egyenlete, mely szerint

$$p = -U\rho - \frac{1}{2} \rho \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + \text{konst}. \tag{5.11.7}$$

Minden olyan ϕ függvény tehát, mely (11.5)-nek megoldása, egy örvénymentes áramlás sebességi potenciáljának tekinthető. A feladat tehát (11.5)-nek olyan megoldását találni, mely a probléma összes feltételeit, elsősorban a határfeltételeket (melyekre azonnal rátérünk) kielégíti. Ha ezt a megoldást megtaláltuk, akkor a többi alapegyenlet, (11.6), ill. az abból következő *Bernoulli*-egyenlet, (11.7), már csak a nyomás eloszlásának meghatározására szolgál.

Az előzőkben levezettük a sebességre vonatkozó határfeltételt, melyet itt, mivel feltesszük, hogy van sebességi potenciál, átalakíthatunk. Ebből a célból ki kell fejezni $\mathbf{v}$ normális komponensét, v_n-et ϕ-vel. Láttuk, hogy

$$v_n = v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y) + v_z \cos(n, z).$$

$\cos(x, n)$, $\cos(y, n)$, $\cos(z, n)$ a normális iránykoszinuszai. Ha a normális menti növekmény abszolút értéke dn és ennek vetületei az egyes tengelyekre dx, dy, dz, akkor

$$\cos(n, x) = \frac{dx}{dn}, \qquad \cos(n, y) = \frac{dy}{dn}, \qquad \cos(n, z) = \frac{dz}{dn}.$$

Ezeket beírva v_n képletébe, nyerjük

$$v_n = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{dz}{dn} = \frac{\partial \phi}{\partial n}.$$

Ha tehát ismét w_n-nel jelöljük a határoló felület normális menti sebességét, akkor a határfeltétel a következőképpen alakul

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = w_n.$$

Ha pedig a határoló felület nyugszik, akkor a határfeltétel a következő

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0,$$

ahol n a határoló felület normálisa, mely mutasson pl. a folyadékkal megtöltött térből kifelé. Ezt a határfeltételt kell tehát az egész határfelületen a (11.5) egyenlet megoldásának kielégíteni.

12. §. Stacionárius, örvénymentes síkáramlás

A következőkben olyan stacionárius örvénymentes áramlással foglalkozunk, mely csak két koordinátától, x-től és y-tól függ. Ezt úgy értelmezhetjük, hogy az egész folyadék végtelen vékony rétegben foglal helyet és áramlik, vagy reálisabban úgy értelmezhetjük, hogy a folyadék mindegyik xy-síkkal párhuzamos szintben ugyanolyan módon mozog és az elmozdulásnak nincs az xy-síkra merőleges

komponense. Az ilyen áramlást *síkáramlás*nak nevezzük. Ennek az áramlásnak egyenletei a következők

$$\Delta\phi \equiv \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0,$$

$$p = -\rho U - \frac{1}{2}\rho\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right\} + C. \tag{5.12.1}$$

A határon

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0.$$

Az első egyenlet az ún. *Laplace*-féle egyenlet két változóra. A függvénytanból ismeretes, hogy ezt a $z = x + iy$ komplex változó bármely analitikai függvényének mind a valós, mind a képzetes része kielégíti.

Ha tehát a $z = x + iy$ változónak valamely

$$w = w(z)$$

függvényét képezzük és ebben a valós és a képzetes részeket szétválasztjuk:

$$w = \phi(x, y) + i\psi(x, y), \tag{5.12.2}$$

akkor ϕ és ψ, melyek x és y valós függvényei, a síkbeli *Laplace*-egyenletnek egy-egy megoldását adják.

Ez a tétel a komplex változók analitikai függvényeinek azon a tulajdonságán alapszik, hogy ezeknél a deriválás az iránytól független, tehát pl. az x-irányban képzett derivált megegyezik az y-irányban képzett deriválttal, vagyis

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial(iy)},$$

ahol

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial w}{\partial(iy)} = \frac{1}{i}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - i\frac{\partial\phi}{\partial y}.$$

Két komplex mennyiség akkor egyenlő egymással, ha valós és képzetes részeik külön-külön egyenlők egymással, vagyis nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{\partial\psi}{\partial x}. \end{aligned} \tag{5.12.3}$$

Ezek a *Cauchy*-féle egyenletek. Ha a kijelölt deriválásokat elvégezzük és az így nyert egyenleteket összegezzük, következik, hogy

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{és} \quad \Delta\psi = 0.$$

Tehát ϕ és ψ csakugyan kielégítik a *Laplace*-egyenletet, vagyis akár ϕ, akár ψ választható sebességi potenciálnak.

Azokat a görbéket, melyek mentén a potenciál állandó, ekvipotenciális görbéknek nevezzük. Az áramvonalak, vagyis azok a görbék, melyek érintője mentén $\mathbf{v}$ mutat, merőlegesek az ekvipotenciális görbékre. Az áramvonalakat mindenütt olyan sűrűn szokás húzni, hogy sűrűségük, vagyis az áramvonalak irányára merőleges hosszegységen keresztülmenő erővonalak száma, minden pontban a sebesség abszolút értékét adja.

Mivel az ekvipotenciális görbék mentén a potenciál nem változik, a potenciál gradiensének, $\mathbf{v}$-nek nincsen komponense a görbék érintőinek irányában, tehát $\mathbf{v}$ merőleges az ekvipotenciális görbékre, vagyis azoknak az érintőire. Ezt még más úton is beláthatjuk. A ϕ = konstans ekvipotenciális görbesereg normálisának iránykoszinuszai $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$ -szel, ill. $\dfrac{\partial\phi}{\partial y}$ -nal arányosak (amint ez az analízisből ismeretes), $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$ és $\dfrac{\partial\phi}{\partial y}$ pedig éppen a sebesség komponenseit adják, amiből következik, hogy $\mathbf{v}$ az ekvipotenciális görbék normálisainak irányába esik.

Vizsgáljuk meg, hogy a ϕ = konstans és ψ = konstans görbék hogyan helyezkednek el egymáshoz képest. Jelöljük a $\phi = c_1$ és a $\psi = c_2$ (c_1 és c_2 megadott állandók) meghatározott görbék normálisait ugyanabban a pontban n_1, ill. n_2-vel. Az analízis eredményei szerint n_1 iránykoszinuszai, $\cos(n_1, x)$ és $\cos(n_1, y)$, arányosak $\partial\phi/\partial x$, ill. $\partial\phi/\partial y$-nal, n_2 iránykoszinuszai, $\cos(n_2, x)$ és $\cos(n_2, y)$ pedig arányosak $\partial\psi/\partial x$, ill. $\partial\psi/\partial y$-nal. Tehát a két görbének a P pontban emelt normálisai által alkotott szög koszinusza

$$\cos(n_1, n_2) \sim \frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

A *Cauchy*-egyenletek szerint azonban

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

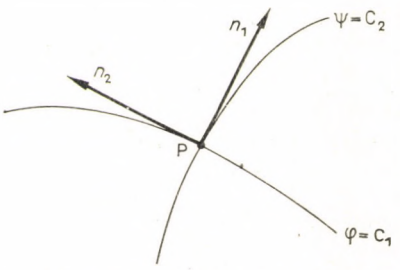
Ezek figyelembevételével nyerjük, hogy

$$\cos(n_1, n_2) \sim \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0,$$

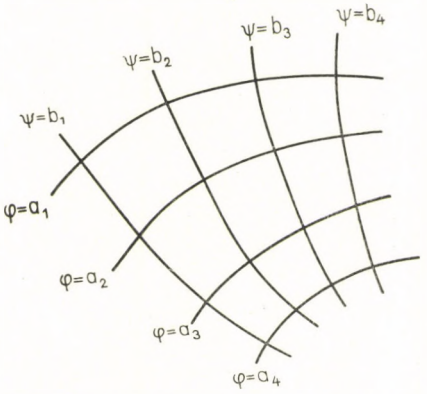
tehát

$$(n_1, n_2) = \frac{\pi}{2}. \tag{5.12.4}$$

Tehát a két görbe normálisai ugyanabban a P pontban merőlegesek egymásra, ami azt jelenti hogy a két görbe is merőleges egymásra. Eszerint tehát a ϕ = konstans és a ψ = konstans görbeseregek egymás ortogonális trajektóriái. Tehát bármelyik görbesereg tagjai lehetnek ekvipotenciális görbék vagy áramvonalak. Ha



110. ábra. A ϕ = konstans és a ψ = konstans görbék merőlegesek egymásra



111. ábra. A ϕ = konstans és a ψ = konstans görbeseregek

ϕ-t választjuk potenciálnak, akkor a

ϕ = konstans görbék ekvipotenciális görbék
és a ψ = konstans görbék áramvonalak.

Ha pedig ψ-t választjuk potenciálnak, akkor a

ψ = konstans görbék ekvipotenciális görbék
és a ϕ = konstans görbék áramvonalak.

A feladat tehát abban áll, hogy megtaláljuk azt a w függvényt, mely olyan áramvonalakhoz, ill. olyan ϕ = konstans és ψ = konstans görbékhez vezet, melyek a problémának megfelelnek, vagyis a kívánt áramlást szolgáltatják a megadott határfeltételekkel. A következőkben néhány példát tárgyalunk. Azonban nem előre megadott problémát fogunk megoldani, hanem w-t különbözőképpen fogjuk választani és meg fogjuk állapítani, hogy a különböző függvényeknek milyen áramlások felelnek meg.

Példák a stacionárius, örvénymentes sík-áramlásra

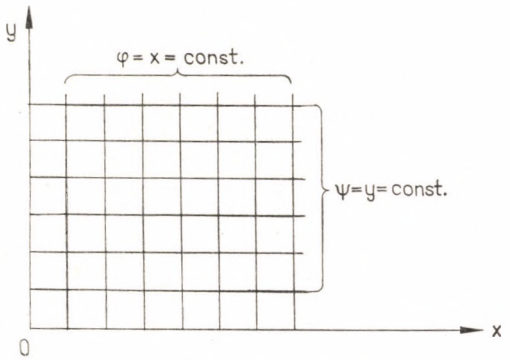
1. $$w = z,$$

$$\phi + i\psi = x + iy.$$

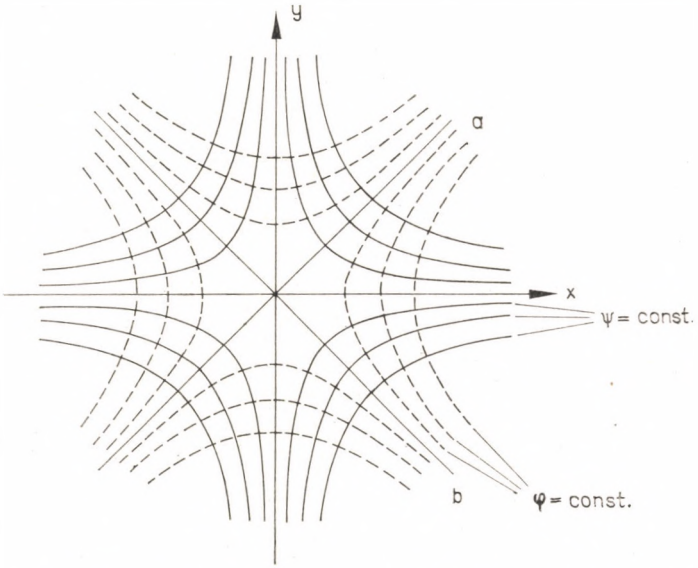
$$\phi = x = \text{konst.}$$

$$\psi = y = \text{konst.}$$

Az áramvonalak és az ekvipotenciális görbék a tengelyekkel párhuzamos egyenesek. Tehát a fenti függvény az egyenletes áramlás megoldását szolgáltatja. Mégpedig, ha ϕ-t választjuk potenciálnak, akkor az áramvonalak az x-tengellyel párhuzamosak, ha pedig ψ-t választjuk potenciálnak, akkor az áramvonalak az y-



112. ábra. Az egyenletes áramlás áramvonalai és ekvipotenciális görbéi



113. ábra. A ϕ = konstans és a ψ = konstans görbeseregek

tengellyel párhuzamosak.

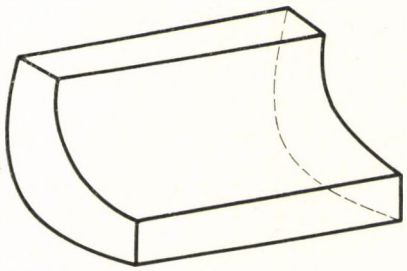
2. $$w = z^2,$$

$$\phi + i\psi = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy,$$

$$\phi = x^2 - y^2 = \text{konstans},$$

$$\psi = 2xy = \text{konstans, vagyis } \psi = xy = \text{konstans.}$$

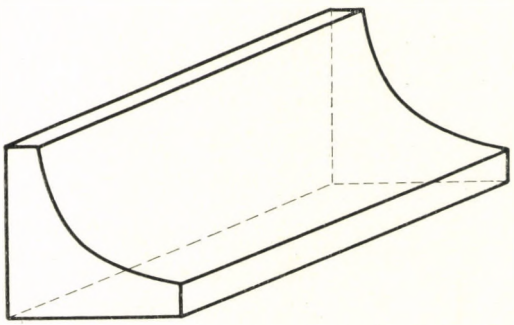
Az $x^2 - y^2 = c_1$ görbe olyan egyenlőoldalú hiperbola, melynek aszimptotái az x-tengellyel $\pm 45°$-os szöget zárnak be. Az $xy = c_2$ görbe szintén egyenlőoldalú hiperbola, melynek aszimptotái a koordinátatengelyek. Tehát az áramvonalak és az ekvipotenciális görbék egymást ortogonálisan metsző, egyenlőoldalú hiperbolák seregei.



114. ábra. Két hiperbola keresztmetszetű fallal határolt vályú

Minden áramlási görbe, vagyis mindegyik hiperbola lehet edényfal. Tehát a fenti függvények megoldják a két hiperbola keresztmetszetű fallal határolt vályúban végbemenő stacionárius és örvénymentes síkáramlás problémáját.

A ψ görbék közé tartozik maga az x- és y-tengely is. Tehát függvényeink megoldják oly edényben történő stacionárius örvénymentes síkáramlás problémáját



115. ábra. Egy hiperbolafallal és a koordinátasíkokkal határolt vályú

is, mely edény keresztmetszete az x- és y-tengelyekkel alkotott szögszárak és egy egyenlő oldalú hiperbola, mely a ψ = konst. görbesereg tagja. Természetesen hasonló keresztmetszetet lehet konstruálni az a és b aszimptotákkal és egy egyenlőoldalú hiperbolával, mely a ϕ = konstans görbesereg tagja.

3. $w = k \ln z$, (k állandó)

$$\phi + i\psi = k \ln z,$$

$$z = e^{\frac{\phi + i\psi}{k}} = e^{\frac{\phi}{k}} e^{i\frac{\psi}{k}} = e^{\frac{\phi}{k}} \left(\cos \frac{\psi}{k} + i \sin \frac{\psi}{k} \right),$$

$$x + iy = e^{\frac{\phi}{k}} \left(\cos \frac{\psi}{k} + i \sin \frac{\psi}{k} \right),$$

$$x = e^{\frac{\phi}{k}} \cos \frac{\psi}{k},$$

$$y = e^{\frac{\phi}{k}} \sin \frac{\psi}{k}.$$

Innen

$$x^2 + y^2 = e^{2\frac{\phi}{\kappa}}.$$

Mivel pedig

$$x^2 + y^2 = r^2, \text{ (ahol } r \text{ a sugár)}$$

nyerjük, hogy

$$e^{\frac{\phi}{k}} = r,$$

vagyis

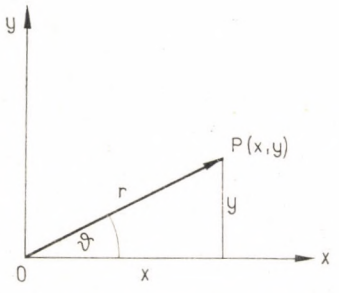
$$\phi = k \ln r.$$

y egyenletét elosztva x kifejezésével, következik, hogy

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{\psi}{k},$$

vagyis

$$\psi = k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

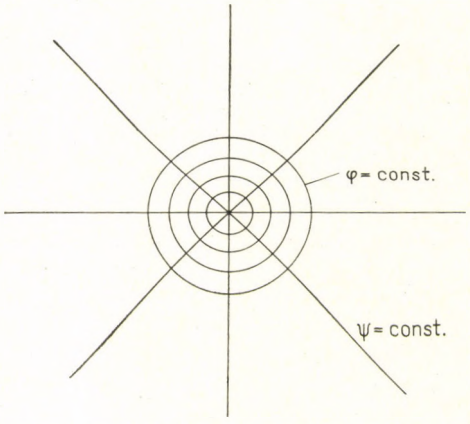


116.ábra. Összefüggés az x, y és az r, ϑ mennyiségek között

Ha pedig a $P(x, y)$ ponthoz húzott $\overrightarrow{OP}$ rádiuszvektornak az x-tengellyel való hajlásszögét ϑ-val jelöljük, akkor, mivel $\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \vartheta$, nyerjük, hogy

$$\psi = k\vartheta.$$

Tehát a ϕ = konstans görbék, melyekből r = konstans következik, koncentrikus körök az O kezdőponttal mint centrummal; a ψ = konstans görbék pedig, melyekből ϑ = konstans következik, az O kezdőponton átmenő egyenesek.



117. ábra. Pontszerű forrásból történő kiáramlás vagy a köráramlás áramvonalai és ekvipotenciális görbéi

Ha a ϕ = konstans görbéket választjuk ekvipotenciális görbéknek, akkor az áramvonalak az O ponton átmenő egyenesek. Ez az áramlás tehát egy pontszerű forrásból, O-ból történő kiáramlásnak felel meg két dimenzióban.

Ha a ψ = konstans görbéket választjuk ekvipotenciális görbéknek, akkor az áramvonalak koncentrikus körök, melyek közös centruma O. Ez az áramlás tehát a köráramlásnak vagy cirkulációs áramlásnak felel meg. Mégpedig ez a cirkuláció egy speciális faja, amennyiben az O pont kivételével mindenütt örvénymentes, vagyis rot $\mathbf{v}$ az O pontot kivéve mindenütt eltűnik. Ha tehát az O pontot egy O centrumú körrel az áramlási mezőből kizárjuk, a megmaradó térrészben az áramlás örvénymentes cirkulációnak felel meg. Az O pontot azáltal zárhatjuk ki az áramlási mezőből, hogy az áramlási mezőbe egy körhengert helyezünk el oly módon, hogy a hengernek az áramlási síkkal való keresztmetszete egy a ϕ = konstans körseregbe eső kör legyen. A henger az áramlásban akadályt jelent, amelyet a folyadék vagy légnemű test körüláramlik. Számítsuk ki az örvénymentes cirkulációnál a sebesség abszolút értékét. Evégből a $\psi = k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ függvényből indu-

lunk ki

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial x} = k \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -k \frac{y}{x^2 + y^2} = -k \frac{y}{r^2},$$

$$v_y = \frac{\partial \psi}{\partial y} = k \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{1}{x} = k \frac{x}{x^2 + y^2} = k \frac{x}{r^2},$$

$$|\mathbf{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{k}{r^2} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{k}{r}.$$

Tehát a sebesség abszolút értéke a sugárral fordítva arányos.

Még röviden megemlítjük, hogy az itt tárgyalt cirkulációnál a potenciál, mint a $\psi = k\vartheta$ formulából látható, a helynek nem egyértékű függvénye, ugyanis ϑ minden körülfutásnál 2π-vel változik meg. Tehát egy teljes körülfutás után ugyanannál a ϑ-nál ψ a következő értékű

$$\psi = k\vartheta + 2k\pi.$$

A potenciál többértékűsége azzal függ össze, hogy az O pontban a sebesség rotációja nem tűnik el. A sebességre a $2k\pi$ konstans nem bír jelentőséggel, mert a differenciálásnál kiesik.

4. $$w = Az + \frac{B}{z}, \qquad (A \text{ és } B \text{ állandók})$$

$$\phi + i\psi = A(x + iy) + \frac{B}{x + iy} = A(x + iy) + \frac{B(x - iy)}{x^2 + y^2} = Ax + B \frac{x}{x^2 + y^2} +$$

$$+ i \left(Ay - B \frac{y}{x^2 + y^2}\right),$$

$$\phi = Ax + B \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad \psi = Ay - B \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Válasszuk ϕ-t potenciálnak, ekkor a sebesség komponensei a következők

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = A + B \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = A + B \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -2B \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

az áramvonalak pedig a ψ = konstans görbék.

Az origótól végtelen távolságban a sebesség komponensei tehát a következők

$$v_{x\infty} = A, \quad v_{y\infty} = 0.$$

Tehát a végtelenben az áramlás az x-tengely irányában A sebességgel történik. Az áramgörbék a végtelenben tehát az

$$y = \text{konst.}$$

görbék. Ezt onnan is láthatjuk, hogy a ψ = konstans görbék a végtelenben az y = konstans görbékbe mennek át. Tehát a végtelenben az áramlás az x-tengellyel párhuzamos egyenletes áramlás.

Ezek után állapítsuk meg, hogy milyen lesz az áramlás a végesben. Evégből határozzuk meg, hogy milyen görbéket szolgáltatnak a ψ = konstans áramvonalak a végesben. A konstanst, tetszőleges lévén, választhatjuk zérusnak és ekkor a következő áramvonalakat nyerjük

$$\psi = y\left(A - B\frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 0\,,$$

mely a következő két görbére esik szét

$$y = 0 \quad \text{és} \quad x^2 + y^2 = \frac{B}{A}\,.$$

118. ábra. A ψ = 0-nak megfelelő áramvonal

Az első az x-tengely, a második egy O centrumú és $R = \sqrt{\frac{B}{A}}$ sugarú kör, melyet, ha a síkbeli áramlást a térben interpretáljuk, lehet egy körhenger keresztmetszetének tekinteni. E két áramvonal kombinációja is lehet áramvonal. Mint a továbbiakból következik, az x-tengely azon része, mely a kör kerületén belül esik, mint áramvonal nem bír fizikai realitással, úgyhogy a tényleges áramvonal a fentiek kombinációja.

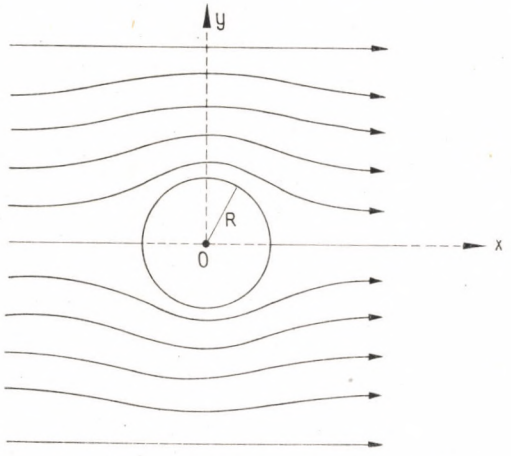
Ha a ψ = konstans görbeseregben a konstansnak zérustól különböző értékeket adunk, akkor, mint arról könnyen meggyőződhetünk, a 119. ábrán látható görbéket kapjuk. Nagy távolságban O-tól mind laposabb lesz a görbék domborulata, végül pedig párhuzamosakká válnak. Az R sugarú körrel körülzárt területen egy görbe sem halad át.

Ez az eset tehát egy R sugarú henger körül folyó párhuzamos áramlásnak felel meg. A valóságban ilyen áramlás csak igen kis sebesség esetén jön létre. Nagyobb sebesség esetén a súrlódás nagymértékben befolyásolja a jelenséget, úgyhogy azon az oldalon, melyen a folyadék vagy légnemű test eláramlik a hengertől, az áramgörbék nem simulnak a hengerhez, hanem bizonyos határnál elszakadnak tőle és egy úgynevezett holt víz, holt tér keletkezik, melyben áramlás nincs.

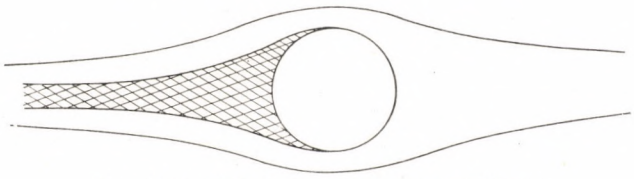
Állapítsuk meg a mi esetünkben a hengerre ható nyomást. Ha a tömegerőktől eltekintünk, vagyis ha $U = 0$, akkor a *Bernoulli*-egyenlet szerint

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho v^2 = p_0 - \frac{1}{2}\rho\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right\},$$

ahol az egyenlet jobboldalán szereplő konstanst p_0-lal jelöltük. Behelyettesítve



119. ábra. A ψ = konstans görbesereg



120. ábra. Holttér a súrlódásos áramlásnál

$\frac{\partial\phi}{\partial x}$ és $\frac{\partial\phi}{\partial y}$ értékeit, nyerjük

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho\left\{A^2 + B^2\frac{y^4 + x^4 - 2xy}{(x^2+y^2)^4} + 2AB\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} + 4B^2\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}\right\}.$$

Ha $x^2 + y^2$ helyébe r^2-et írunk és összevonunk, kapjuk, hogy

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho\left\{A^2 + B^2\frac{1}{r^4} + 2AB\frac{y^2 - x^2}{r^4}\right\}.$$

Végezzük itt a következő transzformációt

$$x = r\cos\vartheta,\ y = r\sin\vartheta \quad (\vartheta \text{ az } r \text{ és } x\text{-tengely közti szög}),$$

vagyis vezessünk be polárkoordinátákat. Ekkor

$$y^2 - x^2 = r^2(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta).$$

Ezt p formulájába beírva, következik, hogy

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho\left\{A^2 + B^2\frac{1}{r^4} + 2AB\frac{1}{r^2}(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta)\right\}.$$

A p_0 állandót úgy határozzuk meg, hogy a nyomás a végtelenben eltűnjön

$$0 = p_\infty = p_0 - \frac{1}{2}\rho A^2,$$

$$p_0 = \frac{1}{2}\rho A^2.$$

Ezt beírva p formulájába, nyerjük, hogy

$$p = -\frac{1}{2}\rho\left\{B^2\frac{1}{r^4} + 2AB\frac{1}{r^2}(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta)\right\}.$$

A nyomást a kör kerületének, ill. a henger palástjának egyes pontjaiban úgy kapjuk, hogy r helyébe R-et írunk. Tehát a nyomás a kör kerületének, ill. a henger palástjának pontjaiban a következő

$$p = -\frac{1}{2}\rho\left\{B^2\frac{1}{R^4} + 2AB\frac{1}{R^2}(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta)\right\}.$$

Láttuk, hogy $R = \sqrt{\frac{B}{A}}$, tehát $R^2 = \frac{B}{A}$, ahonnan következik, hogy

$$\frac{B^2}{R^4} = A^2 \quad \text{és} \quad \frac{AB}{R^2} = A^2.$$

Ezek felhasználásával nyerjük, hogy a kör kerületén, ill. a henger palástján

$$p = -\frac{1}{2}\rho A^2\{1 + 2(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta)\},$$

$$\cos^2\vartheta = 1 - \sin^2\vartheta,$$

$$p = -\frac{1}{2}\rho A^2\{1 + 2(2\sin^2\vartheta - 1)\} = \frac{1}{2}\rho A^2(1 - 4\sin^2\vartheta).$$

Amint ebből a formulából látható, a nyomás a kör kerületén, ill. a henger palástján azokban a pontokban maximális, ahol $\vartheta = 0, \pi$, vagyis azokban a pontokban, melyekben az áramlás merőlegesen éri, ill. hagyja el a hengert. Minimális a nyomás azokban a pontokban, ahol $\vartheta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, vagyis ott, ahol az áramlás tangenciálisan halad el mellette.

Számítsuk ki az összes nyomóerőt a henger egységnyi magasságára, vagyis a kör kerületére. Jelöljük az összes nyomóerő komponenseit K_x-szel ill. K_y-nal

$$K_x = \int p_x ds, \qquad K_y = \int p_y ds,$$

ahol az integrációt a kör, vagyis a henger keresztmetszetének teljes kerületére kell kiterjeszteni.

$$p_x = p\cos\vartheta, \quad p_y = p\sin\vartheta, \quad ds = Rd\vartheta,$$

$$K_x = \frac{1}{2}\rho A^2 \int_0^{2\pi} R(1 - 4\sin^2\vartheta)\cos\vartheta\, d\vartheta = 0,$$

$$K_y = \frac{1}{2}\rho A^2 \int_0^{2\pi} R(1 - 4\sin^2\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = 0.$$

Mindkét integrál eltűnik, ugyanis, amint az integrandusok alakjából azonnal látható, a területek összege 0-tól 2π-ig mindegyik integrálban zérus.

Tehát súrlódás nélküli folyadékban vagy légnemű testben egyenletes áramlás esetén egy körhengerre gyakorolt összes nyomóerő zérus. Ez persze ellentmondásban van a tapasztalattal. Az ellentmondás onnan származik, hogy a súrlódást elhanyagoltuk.

5. A következőkben azzal az áramlással foglalkozunk, melyet a henger körüli cirkuláció és a henger körüli egyenletes áramlás kombinációja szolgáltat. Jelöljük a cirkulációra vonatkozó mennyiségeket 1-es, a henger körüli egyenletes áramlásra vonatkozó mennyiségeket 2-es indexszel. Az előbbiekben azt találtuk, hogy

$$\psi_1 = k\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x} = k\vartheta, \qquad v_{x_1} = -k\frac{y}{r^2}, \qquad v_{y_1} = k\frac{x}{r^2},$$

$$\phi_2 = Ax + B\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad v_{x_2} = A + B\frac{y^2-x^2}{r^4}, \qquad v_{y_2} = -2B\frac{xy}{r^4}.$$

Mivel a $\Delta\phi = 0$ egyenlet lineáris, két megoldás összege is megoldás, tehát megoldás a következő függvény is

$$\phi = \psi_1 + \phi_2.$$

Ha ezt a ϕ-t választjuk sebességi potenciálnak, akkor a nyert áramlás sebességkomponensei a következők

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\phi_2}{\partial x} = v_{x1} + v_{x2},$$

$$v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi_1}{\partial y} + \frac{\partial\phi_2}{\partial y} = v_{y1} + v_{y2}.$$

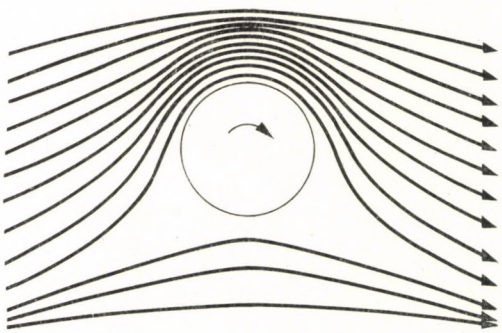
Tehát a henger körüli cirkuláció és a henger körüli egyenletes áramlás sebességkomponensei összeadódnak. A henger körüli egyenletes áramlásnál a hengernek alsó és felső oldalán az áramlás sebessége megegyező irányú, a henger körüli cirkulációnál ellenben a sebesség a henger alsó és felső oldalán ellentétes irányú.

121. ábra. A henger körüli egyenletes áramlás és a henger körüli cirkuláció

Ennek következtében a két áramlás kombinációjával létrejövő áramlásnál a henger egyik oldalán, jelen esetben a felső oldalon, az áramlási sebességek abszolút értékei összeadódnak, a másik oldalán, jelenleg az alsó oldalon, az áramlás sebességek abszolút értékei kivonódnak. Tehát az eredő áramlási sebesség a henger egyik oldalán nagyobb, a másikon kisebb lesz. Ezt az áramvonalakkal is szemléltethetjük azáltal, hogy fenn sűrítjük, lenn pedig ritkítjuk őket. Ha a tömegerőktől ismét eltekintünk, akkor a nyomásra a következő formulát nyerjük

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho v^2,$$

ahol p_0 állandó. Ennek az egyenletnek alapján látható, hogy ott, ahol a sebesség nagyobb, vagyis a henger azon oldalán, amelyen a henger körüli egyenletes áramlás és a cirkulációs áramlás sebességei egyirányúak, a nyomás kisebb, mint a hengernek azon az oldalán, amelyen az említett két áramlás sebességei ellentétes



122. ábra. Az egyenletes áramlás és a cirkuláció eredője

irányúak. Tehát a hengerre nyomóerő hat arról az oldalról, melyen a sebesség kisebb afelé az oldal felé, amelyen a sebesség nagyobb, jelen esetben tehát alulról felfelé.

Ezt a nyomóerőt részletesebb számítással meg is tudjuk határozni.

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)^2,$$

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho\{(v_{x1} + v_{x2})^2 + (v_{y1} + v_{y2})^2\},$$

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho\{(v_{x1}^2 + v_{y1}^2) + (v_{x2}^2 + v_{y2}^2) + 2(v_{x1}v_{x2} + v_{y1}v_{y2})\},$$

$$v_{x1}^2 + v_{y1}^2 = v_1^2, \quad v_{x2}^2 + v_{y2}^2 = v_2^2,$$

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho(v_1^2 + v_2^2) - \rho(v_{x1}v_{x2} + v_{y1}v_{y2}),$$

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho(v_1^2 + v_2^2) - \rho\left\{-kA\frac{y}{r^2} - kB\frac{(y^2 - x^2)y}{r^6} - 2kB\frac{x^2 y}{r^6}\right\},$$

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho(v_1^2 + v_2^2) + \rho kA\frac{y}{r^2}\left\{1 + \frac{\frac{B}{A}(y^2 - x^2) + 2\frac{B}{A}x^2}{r^4}\right\},$$

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho(v_1^2 + v_2^2) + \rho kA\frac{y}{r^2}\left\{1 + \frac{B}{A}\frac{1}{r^2}\right\}.$$

Nekünk a következőkben a henger palástjára ható nyomásra lesz szükségünk, amelyet ebből a formulából úgy kapunk, ha r helyébe R-et írunk. Ha ezenkívül még figyelembe vesszük, hogy $\frac{B}{A} = R^2$, akkor nyerjük, hogy a nyomás a henger palástján a következő

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho(v_1^2 + v_2^2) + \rho kA\frac{y}{R^2}\{1 + 1\},$$

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho(v_1^2 + v_2^2) + 2\rho kA\frac{y}{R^2} = p_0 - \frac{1}{2}\rho(v_1^2 + v_2^2) + 2\rho kA\frac{\sin\vartheta}{R},$$

ahol v_1 és v_2-ben is az r helyébe mindenütt R-et kell helyettesíteni. A kör kerületére, vagyis a henger palástjának egységnyi magasságára ható összes nyomóerő komponenseit úgy kapjuk, hogy p_x-et, ill. p_y-t a henger keresztmetszetének teljes kerületére, vagyis a körkerületre integráljuk. Tehát a következő integrálokat kell kiszámítanunk

$$K_x = \int_0^{2\pi} p_x R d\vartheta = R\int_0^{2\pi} p\cos\vartheta d\vartheta, \quad K_y = \int_0^{2\pi} p_y R d\vartheta = R\int_0^{2\pi} p\sin\vartheta d\vartheta.$$

$p = p_0$ állandó, tehát a kör kerületére képzett integrálja zérus, v_1^2 pedig, mint az előbbiekből következik, a henger palástján k^2/R^2-tel egyenlő, tehát a palláston állandó, így a kör kerületére képzett integrálja zérus. v_2^2-nek a kör kerületére képzett integrálja szintén zérus, amint az a 4. példában végzett számításokból következik. Tehát

$$K_x = 2\rho k A \int_0^{2\pi} \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta = 2\rho k A \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\vartheta}{2} \, d\vartheta = 0,$$

$$K_y = 2\rho k A \int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta d\vartheta = 2\pi\rho k A .$$

Tehát az a meglepő eredmény adódik, hogy a nyomóerő merőleges a henger körüli egyenletes áramlás irányára. Ennek az erőnek fellépését nevezik *Kutta-Zsukovszkij* effektusnak. A K_y-ra nyert kifejezést még kissé átalakíthatjuk, ugyanis láttuk, hogy

$$v_{x2\infty} = A \quad \text{és} \quad v_{y2\infty} = 0,$$

tehát

$$A = v_{x2\infty} = v_2(\infty).$$

Az előbbiek szerint $v_1 = \frac{k}{r}$. Mivel pedig $v_1 = r\omega$, nyerjük, hogy

$$\omega = \frac{k}{r^2}.$$

Tehát a henger palástja mentén

$$\omega(R) = \frac{k}{R^2} \quad \text{és innen} \quad k = \omega(R)R^2,$$

ahol $\omega(R)$ a henger palástja menti cirkuláció szögsebességének abszolút értéke. Ezeket K_y formulájába behelyettesítve nyerjük, hogy

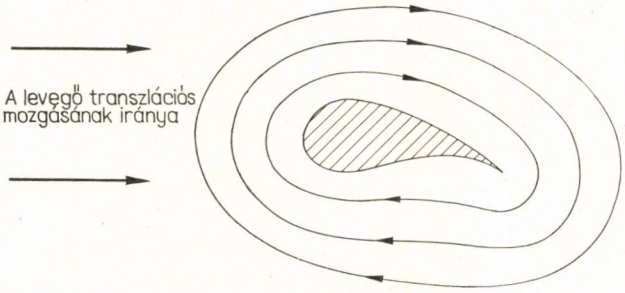
$$K_y = 2\pi\rho R^2 \omega(R) v_2(\infty).$$

Tehát a nyomóerő arányos az áramló anyag sűrűségével, a hengerkeresztmetszet sugarának négyzetével, a henger palástja menti cirkuláció szögsebességével és a henger körüli egyenletes áramlás sebességével a hengertől végtelen távolságban.

Ezen a jelenségen alapszik a repülőgép felhajtó ereje, a repülőgép csavarjának, ill. a hajócsavarnak működése, a *Flettner*-féle rotor működése és a vitorla alkalmazása.

A repülőgép felhajtó ereje. A repülőgépnek, mint a következőkben látni fogjuk, a légcsavar transzlációs sebességet ad. Ha a repülőgépet állónak tekintjük, akkor ez egyértelmű egy ellenkező irányú légáramlással. A szárny alakja és a súrlódás

folytán a szárny körül cirkuláció jön létre oly értelemben, mint azt a 123. ábrán a nyilak mutatják. A szárny felett a cirkulációs áramlás iránya megegyezik a levegőnek a repülőgéphez képest történő transzlációs áramlásának irányával, ennek következtében az előbbiek szerint egy errefelé irányuló nyomóerő, vagyis felhajtóerő lép fel.

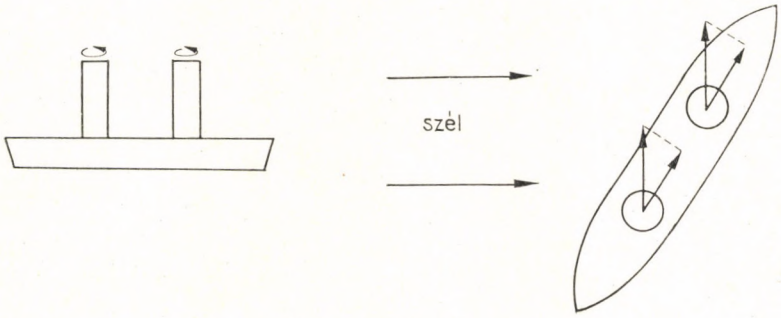


123. ábra. Cirkuláció a repülőgép szárnya körül

Itt figyelembe kell venni még azt, hogy az előbbi számításaink egy körhenger körüli egyenletes áramlásra és cirkulációra vonatkoztak, a repülőgépszárny keresztmetszete azonban nem kör. Eredményeink azonban kvalitatíve alkalmazhatók a repülőgépszárnyra is. Alkalmas függvények bevezetésével a repülőgépek felhajtóerejét kvantitatíve is lehet tárgyalni. Figyelembe kell azonban venni, hogy ez a kétdimenziós számítás eléggé durva, ugyanis ezek végtelen hosszú szárnyra vonatkoznak. A repülőgépre ható felhajtóerőt először ZSUKOVSZKIJ és KUTTA vezette le.

Légcsavar, hajócsavar. A légcsavar vagy hajócsavar éppen úgy működik, mint egy forgó szárny. A csavarszárny körül megint az alak és a súrlódás folytán cirkuláció jön létre és ez kombinálódik a csavarszárny mozgásával, mely kis darabon át transzlációs mozgásnak tekinthető. A fellépő erő merőleges erre, tehát a csavar tengelyének irányába mutat.

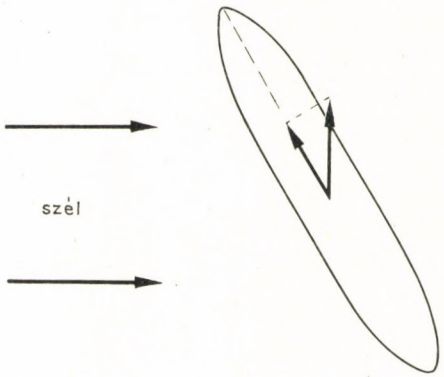
A Flettner-féle rotor. A *Flettner*-féle rotorhajó elve a következő. A hajóra szerelt egy vagy két függőleges tengely körül forgó henger a súrlódás folytán cirku-



124. ábra. A *Flettner*-féle rotorhajó

lációt létesít, az egyenletes áramlást a szél szolgáltatja. A fellépő erő merőleges lesz az áramlás irányára, vagyis a szél irányára. Ha ennek az erőnek van a hajó hosszirányában komponense, akkor a hajó hosszirányában mozgásba jön.

A vitorla. A vitorla hatása hasonló. A vitorla körül is cirkuláció jön létre, amely kombinálva a szél hatásával, ismét a szél irányára merőleges erőt létesít.



125. ábra. A vitorláshajó elve

Mint a 125. ábrából látható, ez a magyarázata annak, hogy lehet a szél ellen haladni vitorlával (persze csak zegzugos vonalban, vagyis többszöri irányváltozással). Teljesen hasonlóan lehet megmagyarázni azt, hogy a rotorhajóval is lehet széllel ellentétes irányban haladni.

HATODIK FEJEZET

RELATIVITÁSELMÉLET

A következőkben rövid áttekintést adunk a relativitáselmélet alapfogalmairól. Nem kívánunk részletes levezetésekkel foglalkozni, csak az alapfogalmakat és a legfontosabb eredményeket ismertetjük.

1. §. A Galilei-féle relativitási elv

NEWTON első axiómája szerint minden magára hagyott test megmarad nyugalmi állapotában vagy egyenesvonalú egyenletes mozgásában. E törvény ismertetésekor már felhívtuk a figyelmet arra, (l. Első fejezet 3. §) hogy mozgásról önmagában nem beszélhetünk, hanem csak egy meghatározott koordinátarendszerhez viszonyított mozgást tudunk leírni. Ezzel NEWTON maga is tisztában volt és bevezette az *abszolút nyugalomban levő teret* és ezt tekintette azon vonatkoztatási rendszernek, melyben a mechanika törvényei érvényesek. Az állócsillagokhoz rögzített koordinátarendszer jó közelítéssel abszolút nyugalomban levőnek tekinthető, mert benne a mechanika alaptörvényei valóban igazak.

Nyilvánvaló azonban, hogy a *Newton*-féle első axióma igaz mindazon koordinátarendszerekben, melyek az abszolút nyugvóhoz képest egyenesvonalú, egyenletes mozgást végeznek. A *Newton*-féle első axióma tehát nem tünteti ki az abszolút nyugvó rendszert. Mindazon rendszereket, ahol a *Newton*-féle első axióma igaz, *inerciarendszerek*nek fogjuk nevezni. Ezek számossága végtelen és bármely kettő egymáshoz képest egyenesvonalú, egyenletes mozgást végez. Az egyik ilyen inerciarendszer természetesen maga az abszolút nyugvó rendszer.

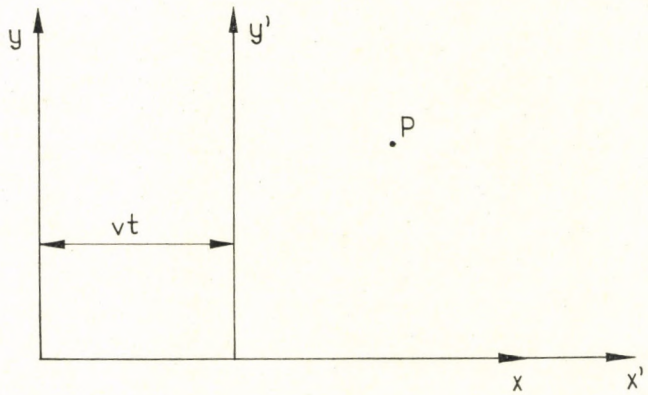
A *Newton*-féle első axióma szempontjából valamennyi inerciarendszer ekvivalens egymással. A *relativitás elve* azt mondja ki, hogy az inerciarendszerek nemcsak az első axióma, hanem a mechanika összes törvénye szempontjából ekvivalensek egymással, azaz a mechanika *Newton*-féle alaptörvényei minden inerciarendszerben érvényesek.

Jelöljük K-val az abszolút nyugvó rendszert és K'-vel azt a rendszert, mely ehhez képest állandó $\mathbf{v}$ sebességgel mozog. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy K' mozgása az x-tengely irányában történik, és hogy $t = 0$ időpillanatban a két koordinátarendszer origója egybeesik.

Történjék egy pillanatnyi rövid esemény a P pontban. Az esemény helyének koordinátái a nyugvó rendszerben x, y, z, az esemény időpontja legyen t. Ezt így

jelöljük: $P(x, y, z, t)$. A mozgó K' koordinátarendszerben levő megfigyelő az eseményt a $P(x', y', z', t')$ adatokkal fogja jellemezni. A kétféle koordináták közötti kapcsolatot a 126. ábráról könnyen leolvashatjuk. t idő alatt a K' rendszer vt távolságra mozdul el, ezért

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t \end{aligned} \tag{6.1.1}$$



126. ábra. Az abszolút nyugvó és a v sebességgel mozgó koordinátarendszer

Az időre vonatkozó $t' = t$ összefüggés a *Newton*-féle mechanikának azt az alapfeltevését fejezi ki, hogy az idő „abszolút", tehát az idő múlása minden koordinátarendszerben egyformán történik. Az (1.1) koordinátatranszformációt *Galilei-transzformáció*nak nevezzük.

Vizsgáljuk most egy m tömegű pont mozgását, melyre a **K** erő hat. Az abszolút nyugalomban levő K rendszerben érvényes az (1.3.6) mozgásegyenlet, mely szerint

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= K_x, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= K_y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= K_z. \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

Hajtsuk végre ezeken az egyenleteken a *Galilei*-transzformációt. (1.1)-ből azonnal következik, hogy

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Ha hozzátesszük, hogy mind a tömeg, mind pedig az erő NEWTON felfogása szerint független a megfigyelő mozgásától, tehát $m' = m$ és $\mathbf{K}' = \mathbf{K}$, akkor írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x'}{dt'^2} &= K'_x, \\ m\frac{d^2y'}{dt'^2} &= K'_y, \\ m\frac{d^2z'}{dt'^2} &= K'_z. \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

Ezek az egyenletek alakilag ugyanolyanok, mint a nyugvó rendszerben érvényes (1.2) egyenletek. A *Newton*-féle mozgásegyenletek a mozgó K' koordinátarendszerben ugyanolyanok, mint a nyugvó rendszerben, vagy pontosabban, a mozgásegyenletek alakját a *Galilei*-transzformáció nem változtatja meg. Ezt nevezzük *Galilei-féle relativitási elv*nek. Eszerint a mechanikai jelenségek minden inerciarendszerben egyforma mozgástörvényeknek tesznek eleget, következésképpen egyformán is zajlanak le. Ebből következik, hogy semmiféle mechanikai kísérlet révén nem lehet meghatározni, hogy egy adott inerciarendszer mozog-e vagy sem.

2. §. Az Einstein-féle relativitási elv

EINSTEIN, az általa kidolgozott relativitáselméletben azt a zseniális gondolatot vetette fel, hogy a relativitás elve érvényes a természet összes törvényére. Az *Einstein*-féle relativitási elv szerint *a mechanika, az elektrodinamika, az optika, a termodinamika, a kémia, a biológia, stb. összes törvénye valamennyi inerciarendszerben egyformán érvényes, következésképpen a természeti jelenségek minden inerciarendszerben egyformán zajlanak le.*

Az *Einstein*-féle relativitási elvnek egyik legérdekesebb következménye, hogy a *Newton*-féle abszolút nyugalom értelmét veszti. Az *Einstein*-féle relativitási elv szerint ugyanis lehetetlen kísérletileg megállapítani, hogy egy adott inerciarendszer mozog-e az abszolút nyugvó térhez képest, vagy sem. Ezért bármely inerciarendszerben levő megfigyelő joggal „nyugvó" rendszernek tekinthetné a magáét, hiszen semmilyen jelenség nem utal arra, hogy koordinátarendszere mozgásban van. Az *Einstein*-féle relativitási elv szerint az egyes inerciarendszereknek csak egymáshoz viszonyított, relatív sebességéről beszélhetünk.

Természetesen jogunkban állana az egyik (pl. az állócsillagokhoz rögzített) inerciarendszerről kijelenteni, hogy az van nyugalomban (sebessége $v = 0$) és az összes többi mozog. Egy ilyen kijelentésnek fizikai alapja nem volna, csak egy olyanféle megállapítást jelentene, mint pl. az, hogy a Greenwichen átmenő délkör földrajzi hosszúságát 0-nak tekintjük. De megjegyezzük, hogy egy ilyen nyugvó inerciarendszer választása igen célszerűtlen dolog. Földünk, amelyen a természeti jelenségeket megfigyeljük, évi keringése közben különböző irányokban mozog. (A sebességváltozásból adódó gyorsulás oly kicsi, hogy attól most eltekintünk.) Nagyon célszerűtlen és komplikált lenne, ha a földi laboratóriumokban végzett megfigyeléseket állandóan át kellene számítani az állócsillagokhoz rögzített inerciarendszerbe. A relativitás elve ezt az átszámítást feleslegessé teszi, hiszen az inerciarendszer, melyhez képest a Föld mozdulatlan a kísérlet idején, ekvivalens bármely inerciarendszerrel. Ez a természeti jelenségek leírását rendkívül megkönnyíti.

Nem szabad azt gondolnunk, hogy az *Einstein*-féle relativitási elv egy magától értetődő és nyilvánvaló elv. Van ugyanis egy olyan mozgásfajta, mely első pillanatra ellentmond a relativitás elvének. Ez a fény terjedése.

Ismeretes, hogy a fény vákuumbeli terjedése minden irányban, ugyanazzal a $c = 3 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cms}^{-1}$ sebességgel történik. A megfigyelés azt is igazolja, hogy a fény terjedése független a fényt kibocsátó test mozgásától. Ez a tény egy nagyon érdekes problémát vet fel.

Legyen K és K' két inerciarendszer, mely egymáshoz képest állandó v sebességgel mozog. A koordinátatengelyeket a 127. ábrának megfelelően helyezzük el. A $t = 0$ időpillanatban, tehát amikor a koordinátarendszerek origói egybeesnek, villanjon fel egy lámpa az $O = O'$ pontban. Kérdés, hogy mikor érkezik meg a fényjel az x-tengelyen fekvő P pontba. A K vonatkoztatási rendszerben levő megfigyelő a fényjel megérkezését a következőképpen határozhatja meg. Megméri az $\overline{OP} = x$ távolságot, és ismerve a fény c terjedési sebességét, az $x = ct$ összefüggésből a

$$t = \frac{x}{c} \tag{6.2.1}$$

eredményt kapja. A K'-ben levő megfigyelő észlelési eredményét úgy kapjuk meg, hogy (2.1)-re alkalmazzuk a *Galilei*-transzformációt:

$$t' = \frac{x' + vt}{c},$$

azaz

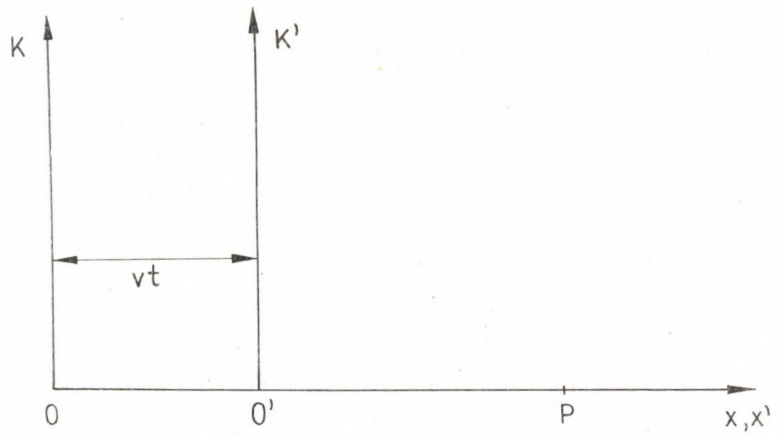
$$t' = \frac{x'}{c - v}. \tag{6.2.2}$$

Ezek szerint a K-beli megfigyelő a fény terjedési sebességét a következőnek találja

$$\frac{x'}{t'} = c - v. \tag{6.2.3}$$

A mozgó K' rendszerben tehát a fény terjedési sebességére más eredmény adódik, mint a K rendszerben. A fény terjedési sebességét mérve a K' rendszer v haladási sebességét meg lehetne határozni.

Az elmondottak világosan mutatják, hogy a fény terjedése ellentmond a relativitás elvének, ha a különböző inerciarendszerek közötti kapcsolatot a *Galilei*-transzformációval írjuk le. Ha elfogadjuk az igen szemléletes *Galilei*-transzformációt, akkor bele kell nyugodnunk, hogy csak egyetlen olyan inerciarendszer van, melyben a fény minden irányban c sebességgel terjed, ezt a kitüntetett inercia-



127. ábra. A K és a K' koordinátarendszerek

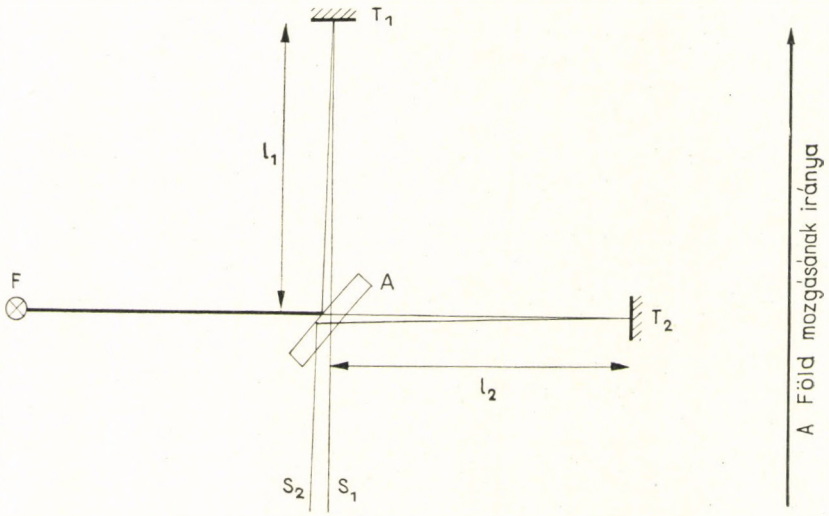
rendszert abszolút nyugalomban levőnek tekinthetnénk. Minden más inerciarendszerben a fény terjedési sebessége függ a vonatkoztatási rendszer sebességétől. Ha pedig az *Einstein*-féle relativitási elvet fogadjuk el, akkor a fény terjedése minden inerciarendszerben egyforma sebességgel kell, hogy történjen és következésképpen a *Galilei*-transzformációt el kell vetni. Ehhez azonban a térről és az időről alkotott eddigi felfogásunkat kell módosítani.

Az *Einstein*-féle relativitási elv és a *Galilei*-transzformáció tehát egymásnak ellentmondanak. A kettő között csak a tapasztalat dönthet. Egy egész sor olyan kísérletet végeztek, mely egy mozgó rendszer sebességét kívánta megállapítani a fény terjedési sebsségének mérése útján. Ezek a kísérletek egytől egyig negatív eredménnyel zárultak, az egyenletesen mozgó rendszerekben a fény terjedése teljesen azonos módon történik. Ez fényesen igazolja az *Einstein*-féle relativitási elvet és a *Galilei*-transzformáció revízióját teszi szükségessé.

A mozgó vonatkoztatási rendszerekben való fénysebességmérések közül az alábbiakban csak egyet, a legpontosabbat fogjuk ismertetni. Ez a MICHELSON és MORLEY által 1887-ben végzett kísérlet.

3. §. A Michelson—Morley-kísérlet

MICHELSON és MORLEY célja a Föld mozgássebességének optikai úton való meghatározása volt. Amikor a Földön a fény terjedését tanulmányozzuk, akkor tulajdonképpen egy olyan mozgó vonatkoztatási rendszerben tesszük azt, melynek sebessége a Föld pályamenti sebessége. Ez igen tekintélyes érték: 30 kms^{-1}. (A Föld tengely körüli forgását, amelynek sebessége az egyenlítőn 0,5 kms^{-1} figyelmen kívül lehet hagyni.)



128. ábra. A Michelson—Morley kísérlet

MICHELSON és MORLEY mérőeszközét a 128. ábra szemlélteti. Az F fényforrásból jövő fénysugár az A félig ezüstözött üveglemezen két részre oszlik; az egyik sugár visszaverődés után a T_1 tükörig halad, ott visszaverődik és az A lemezen áthaladva az S_1 fénysugarat képezi. A másik pedig a fényforrásból jövet áthalad A-n, eljut a T_2 tükörig és visszaverődve visszajut A-hoz. Ott reflektálódik és az S_2 sugarat hozza létre. A berendezés úgy van elhelyezve, hogy az AT_1 egyenes a Föld pályamenti mozgásának irányába mutasson.

A berendezés működését a klasszikus newtoni mechanika elképzelése szerint írjuk le. Ha a Föld sebessége v, akkor a fény az $l_1 = AT_1$ utat $c - v$ sebességgel teszi meg a (2.3) formulánk szerint. Visszaverődés után a fény a Föld mozgásával szemben halad, sebessége ekkor $c + v$. Az l_1 kar oda-vissza való befutásához szükséges idő

$$t_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2l_1c}{c^2-v^2} = \frac{2l_1/c}{1-v^2/c^2} \,. \qquad (6.3.1)$$

Az AT_2 út befutásánál tekintetbe kell vennünk, hogy ez az l_2 kar önmagával párhuzamosan mozog, a 128. ábra szerinti elrendezésnél függőlegesen felfelé.

A fény útja A-tól T_2-ig tehát átfogója lesz egy olyan derékszögű háromszögnek, melynek egyik befogója l_2, a másik pedig vt. A fény útja A-tól T_2-ig tehát

$$ct = \sqrt{l_2^2 + (vt)^2}$$

lesz, amiből a futási idő

$$t = \frac{l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Az l_2 kar oda-vissza való befutásához szükséges idő ennek kétszerese, azaz

$$t_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l_2/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{6.3.2}$$

Hasonlítsuk össze a két fénysugár útjának megtételéhez szükséges időt. Az időkülönbség

$$\tau = t_1 - t_2 = \frac{2l_1/c}{1 - v^2/c^2} - \frac{2l_2/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Ez az időkülönbség azt eredményezi, hogy az S_1 és S_2 fénysugarak nem lesznek teljesen fázisban, hanem interferencia lép fel.

Ha most a berendezést elforgatjuk 90°-kal úgy, hogy az l_2 kar mutasson a Föld haladásának irányába, akkor az időkülönbség

$$\tau' = t_1' - t_2' = \frac{2l_1/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{2l_2/c}{1 - v^2/c^2}.$$

Mivel τ és τ' különböznek egymástól, ezért az interferenciakép a 90°-os forgatás után meg kell, hogy változzék és az interferenciacsíkok eltolódásából a Föld sebessége meghatározható.

Noha MICHELSON és MORLEY berendezése igen érzékeny volt, semmiféle interferenciaeltolódást nem lehetett észlelni. (Az interferometer a várható eltolódás századrészét is kimutatta volna!)

A MICHELSON–MORLEY kísérlet eredményének elméleti hordereje igen nagy. Ez egyértelműen bizonyítja, hogy a Föld mozgása a fény terjedésére semmilyen hatással sincs, a fény terjedése is eleget tesz az *Einstein*-féle relativitási elvnek. A fenti levezetés, melyből az interferenciacsíkok eltolódására következtettünk, a *Galilei*-transzformáción alapult. A kísérleti tények hatása alatt el kell tehát vetnünk a *Galilei*-transzformációt és meg kell találnunk az inerciarendszereket összekapcsoló azon koordinátatranszformációt, mely összhangban van az *Einstein*-féle relativitási elvvel.

4. §. A Lorentz-transzformáció

Tekintsük ismét az egymáshoz képest állandó v sebességgel mozgó K és K' inerciarendszereket (127. ábra) és villantsunk fel egy lámpát a $t = 0$ időpillanatban a K rendszer origójában. t idő alatt a fény ct távolságot fut be, tehát a fény egy ct sugarú gömb felületéig jut el, melynek egyenlete:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0. \tag{6.4.1}$$

Amint láttuk, a fény terjedése a két inerciarendszerben azonos módon történik. Ezért a K' rendszerben a fényjel terjedését a (4.1)-gyel azonos alakú

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \tag{6.4.2}$$

egyenlet kell, hogy leírja. A két inerciarendszert összekapcsoló koordinátatranszformációnak pedig olyannak kell lennie, hogy (4.1) transzformáltja (4.2) legyen.

Mi most eltekintünk a legáltalánosabb ilyen transzformáció felkutatásától és csak a 127. ábrán látható elrendezést vizsgáljuk. Ekkor nyilvánvaló módon $y' = y$ és $z' = z$, tehát a transzformációnál csak az x koordináta és a t idő viselkedését kell vizsgálnunk. Keressük a K és K' rendszereket összekapcsoló transzformációt a következő alakban:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta t, \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma x + \delta t. \end{aligned} \tag{6.4.3}$$

Itt α, β, γ és δ egyelőre ismeretlen állandók. Célunk éppen ezek meghatározása. E célból írjuk fel a fényjel terjedésére vonatkozó relativitási elvet kifejező

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 \tag{6.4.4}$$

egyenletet és a jobboldalon alkalmazzuk a (4.3) transzformációt. Kapjuk, hogy

$$x^2 - c^2t^2 = (\alpha^2 - c^2\gamma^2)x^2 + 2(\alpha\beta - c^2\gamma\delta)xt + (\beta^2 - c^2\delta^2)t^2. \tag{6.4.5}$$

Ez az összefüggés csak úgy állhat fenn x és t *minden* értékére, ha x^2, xt és t^2 együtthatói a jobb- és a baloldalon rendre megegyeznek:

$$\alpha^2 - c^2\gamma^2 = 1, \quad 2(\alpha\beta - c^2\gamma\delta) = 0, \quad \beta^2 - c^2\delta^2 = -c^2. \tag{6.4.6}$$

Ez három összefüggés a négy ismeretlen állandó között. A hiányzó negyedik egyenletet pedig abból a követelményből kapjuk meg, hogy a K és K' rendszerek relatív sebességének az adott v értékkel kell megegyeznie. A K' rendszer ori-

góját az $x' = 0$ adat jellemzi; (4.3) első egyenletéből K' origójára az

$$\alpha x + \beta t = 0,$$

$$x = -\frac{\beta}{\alpha} t$$

mozgástörvény adódik, ami valóban egyenletes mozgást ír le. Ennek sebessége

$$v = -\frac{\beta}{\alpha}. \tag{6.4.7}$$

A (4.6) és (4.7) összefüggésekből a transzformáció konstansaira a következő eredményt kapjuk

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \beta = \frac{-v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \gamma = \frac{-v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \delta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Tehát a K és K' rendszereket összekapcsoló transzformáció:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{6.4.8}$$

Ezeket az egyenleteket nevezzük *Lorentz-transzformáció*nak. Természetesen a *Lorentz*-transzformációt csak arra az egyszerű esetre kaptuk meg, amikor a két inerciarendszer a közös x-tengely irányában mozog. Általában persze akármilyen mozgásirány lehetséges, de az általános iránynak megfelelő *Lorentz*-transzformáció meglehetősen bonyolult egyenletrendszer, melyre nem is lesz szükségünk. A fenti egyszerű alak a relativitási elv minden lényeges vonását tartalmazza és a további tárgyalást erre alapozzuk.

A *Lorentz*-transzformáció jelenti azt a kapcsolatot, mely két inerciarendszer koordinátái között fennáll. Az *Einstein*-féle relativitási elv pedig, mely az inerciarendszerek egyenértékűségét fejezi ki, megköveteli, hogy *a természet törvényei csakis olyan matematikai egyenletek lehetnek, melyek a Lorentz-transzformációval szemben invariánsak*. Ez a tétel, mely POINCARÉtól és EINSTEINtől származik, századunk egyik legjelentősebb tudományos felismerése.

A *Lorentz*-transzformáció fizikai következményeit az ezt követő §-ban fogjuk részletesen megbeszélni. Itt csak három megjegyzést szeretnénk hozzáfűzni. Először is képezzük a (4.8) egyenletek inverzét, azaz fejezzük ki belőlük x, y, z, t-t

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{6.4.9}$$

Ezek a képletek írják le, hogy milyen a K vonatkoztatási rendszer K'-ből nézve. Azonnal felismerjük, hogy ismét *Lorentz*-transzformációt kaptunk, mely csak abban különbözik (4.8)-tól, hogy a v sebesség helyébe $-v$ került. Ez az eredmény egészen természetes. Az *Einstein*-féle relativitási elv szerint abszolút mozgás nincs. Ha a K' rendszer K-hoz képest v sebességgel mozog, akkor ez fizikailag ekvivalens azzal, hogy K mozog K'-höz képest $-v$ sebességgel.

Másodszor, vizsgáljuk meg a *Lorentz*-transzformációt abban a határesetben, amikor a koordinátarendszerek relatív sebessége sokkal kisebb a fénysebességnél. $v \ll c$ esetében a (4.8) formulák a következőképpen alakulnak:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t. \end{aligned}$$

Ez pedig éppen a *Galilei*-transzformáció. A fénysebességhez képest igen kis sebességek esetén a *Lorentz*-transzformáció átmegy a *Galilei*-transzformációba.

Végül megjegyezzük, hogy a *Lorentz*-transzformációnak csak addig van értelme, ameddig $v < c$, mert, ha $v > c$, a $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ nevező imaginárius válik. Ez azt elenti, hogy két inerciarendszer legfeljebb fénysebességgel mozoghat egymáshoz képest. A fénysebesség tehát a relativitáselméletben a határsebesség szerepét játssza, melynél nagyobb sebességű mozgás nem fordulhat elő. Majd látni fogjuk, hogy a mozgásegyenletek sem vezethetnek soha c-nél nagyobb sebességű mozgásra. A tapasztalat teljes mértékben megerősíti ezt a megállapítást. Sem a legnagyobb gyorsítókban, sem a leghevesebb magreakciókban, sem pedig a kozmikus sugárzásban nem figyeltek meg olyan részecskét, mely a fénysebességnél nagyobb sebességgel mozgott volna.

5. §. Relativisztikus kinematika

Az alábbiakban a *Lorentz*-transzformációnak néhány fontosabb kinematikai tulajdonságát beszéljük meg. Ezzel szeretnénk rávilágítani, mit jelent az, hogy a koordináták és az idő közti *Galilei*-transzformációt (mely magától értetődőnek tűnt) az első pillanatra furcsának tetsző *Lorentz*-transzformációval helyettesítjük.

Idődilatáció

Történjék a K' vonatkoztatási rendszerben két pillanatnyi esemény ugyanazon a helyen. A két esemény között eltelt időtartam $T' = t'_2 - t'_1$ és, mivel az események helye azonos, ezért $x'_2 = x'_1$. Számítsuk ki, hogy a K-rendszerbeli megfigyelő milyen hosszúnak fogja találni az események közötti időt. (4.9)-ből a $T = t_2 - t_1$ időtartamra a

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{6.5.1}$$

érték adódik. Más szóval, ha egy kívülálló megfigyeli a hozzá képest mozgó rendszerben lezajló eseményeket, úgy azok idejét mindig hosszabbnak találja, mint a mozgó rendszerben elhelyezkedő megfigyelő. Amíg pl. a mozgó megfigyelő óráján $T' = 1$ másodperc telik el, addig a külső megfigyelő szerint $T = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > 1$ másodperc idő telik el.

A mozgó óráknak ez a látszólagos lelassulása egyike a *Lorentz*-transzformáció legérdekesebb következményeinek. Jegyezzük jól meg, hogy a mozgó órák lelassulása alatt mindig azt kell érteni, *hogy a hozzánk képest mozgó* órák (vagy bármilyen más folyamatok) járását észleljük lassúbbnak. Így pl. a K'-beli megfigyelő a K vonatkoztatási rendszer óráit fogja lassúbbnak találni, mint a magáét. (4.8)-ban az $x_1 = x_2$ és $T = t_2 - t_1$ helyettesítéseket elvégezve valóban azt kapjuk, hogy

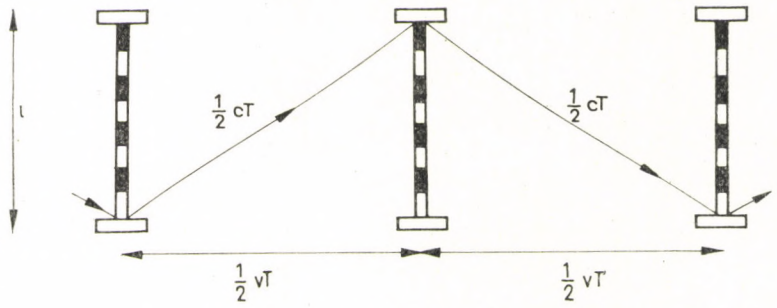
$$T' = t'_2 - t'_1 = \frac{T}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{6.5.2}$$

Az eredmény magától értetődő kell, hogy legyen, hiszen a relativitás elve megköveteli, hogy a K rendszerben lezajló esemény K'-ből nézve szintén hosszabbnak tűnjék. Más szóval, az órák járásának viszonya nem függhet attól, hogy melyik rendszerben nyugszik az óra és melyikből figyeljük a járását. K és K' szerepe teljesen szimmetrikus.

Hogy a mozgó órák látszólagos lelassulása egyenes következménye a relativitás elvének, azt az alábbi — FEYNMANtól származó — példával világíthatjuk meg. Tekintsünk egy igen egyszerű szerkezetű „fényórát", mely egy méterrúdból áll, melynek két végén egy-egy tükör van felerősítve. Ha egy fényjelet indítunk el a

tükrök között, akkor ez ide-oda fog mozogni a párhuzamos tükrök között. l hosszúságú rúd esetén egy ide-oda futás ideje $T = 2l/c$, az óra tehát ilyen időközönként „kettyen" egyet. Készítsünk most két teljesen azonos méretű fényórát és az egyiket helyezzük el a K vonatkoztatási rendszerben, a másikat a K-hoz képest mozgó K' rendszerben. Az órák rúdja merőleges legyen a mozgásirányra, tehát pl. a 127. ábra szerinti elrendezésnél az órák az y tengely mentén fekszenek. Így a hosszuk $y' = y$ miatt ugyanaz marad.

A K' rendszerben elhelyezkedő megfigyelő természetesen úgy találja, hogy órája $T' = 2l/c$ időnként kettyen egyet. Figyeljük most meg a K vonatkoztatási rendszerből, hogy mi történik a mozgó fényórával. Azt találjuk, hogy benne a fényjel



129. ábra. A Feynman-féle fényóra

egy zegzúgos úton halad, a 129. ábrán látható módon. Amíg a fényjel az egyik tükörtől a másikig eljut, addig egy derékszögű háromszög átfogóját kell befutnia, melynek egyik befogója l, a másik $\frac{1}{2}vT$. Tehát:

$$\left(\frac{1}{2}cT\right)^2 = l^2 + \left(\frac{1}{2}vT\right)^2.$$

Ebből

$$T = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{T'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

ami pontosan megfelel a *Lorentz*-transzformációból levezetett (5.1) formulának. A fényórák „járásán" tehát igen szemléletesen el lehet igazodni. A 129. ábráról pl. azonnal nyilvánvaló, hogy a fényórák látszólagos lelassulása annál nagyobb, minél nagyobb a v haladási sebesség.

Tekintsünk azonban most két másik órát, melyek rugóval, fogaskerékkel vagy akármilyen más technikai alapelven működnek. Kérdés, hogy ha ezek közül az egyik v sebességgel mozog a másikhoz képest, akkor is fellép-e az (5.1) lelassulás? A relativitás elve alapján ez nyilvánvaló. A K rendszerben helyezzünk egymás mellé

egy fényórát és egy rugós órát. Ezek – miután pontosan össze vannak igazítva – állandóan szinkronban járnak, ugyanazt az időt mutatják. A K' rendszerbe is helyezzünk egy fényórát és egy rugós órát. A K'-beli fényóra ketyegése – K-ból figyelve – amint láttuk, lelassul. Ha a rugós órával ez nem következne be, akkor K'-ben a két óra nem mutatná ugyanazt az időt, járásuk eltérne egymástól. De ez azonnal felhívná a K'-ben elhelyezkedő megfigyelő figyelmét és a két óra járásának különbségéből rendszerének v sebességére következtethetne, ami pedig a relativitás elve szerint lehetetlen.

Szükségtelen tehát bármit is tudnunk az órák belső mechanizmusáról, mégis kijelenthetjük, hogy a v sebességgel mozgó óra járása az (5.1) formula által előírt arányban le fog lassulni. Ha viszont minden óra lelassul ebben az arányban, akkor joggal azt is mondhatjuk, hogy magának az időnek múlása lassult le, hiszen minden jelenség folyamata lelassult. Ez természetesen nem csak a fizikai, hanem bármilyen más természeti jelenségre is igaz. Így pl. a mozgó K' rendszerben elhelyezkedő megfigyelő öregedését a K-beli megfigyelő lassúbbnak fogja találni, mint a saját magáét.

A mozgással lassuló időnek igen szép példáját figyelhetjük meg a μ-mezonok esetében. Ezek a részecskék instabilak, átlagos élettartamuk mindössze $\tau = 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s. Ha élettartamuk független lenne mozgási sebességüktől, úgy még fénysebességgel való mozgás esetén is csak $c\tau = 660$ m utat futhatnának be életük folyamán. Ennek ellenére azt tapasztaljuk, hogy a kozmikus sugárzás hatására a felső légkörben keletkezett μ-mezonok lejutnak a Föld felszínére, tehát áthaladnak a néhányszor 10 km vastag légkörön. A jelenség oka nyilvánvaló. A v-sebességgel mozgó μ-mezon élettartama (5.1) szerint

$$\frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

esz, és ez alatt az idő alatt

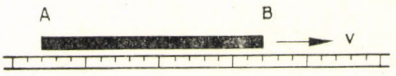
$$s = \frac{v\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

utat futhat be. Ha pl. a v sebesség egy tizezredrésznyire megközelíti a fénysebességet, tehát ha $\frac{v}{c} = 0{,}9999 = 1 - 10^{-4}$, akkor $\sqrt{1 - v^2/c^2} = \sqrt{2} \cdot 10^{-2} = 0{,}014$ lesz és a μ-mezon által befutott út $s = 50$ km.

A fentiekben, a *Feynman*-féle fényórák segítségével, részletes fizikai magyarázatát adtuk az idő lelassulásának. Hasonló analízis a *Lorentz*-transzformáció minden következményénél lehetséges, hiszen a *Lorentz*-transzformáció minden tulajdonsága az *Einstein*-féle relativitási elvvel van kapcsolatban. A továbbiakban ezeket az analíziseket nem fogjuk elvégezni, hanem csak röviden felsoroljuk a *Lorentz*-transzformáció legfontosabb következményeit.

Hosszkontrakció

A K' vonatkoztatási rendszerben fektessünk le egy rudat az x'-tengely mentén. A rúd A és B végpontjai közötti távolságot a K'-beli megfigyelő igen egyszerűen meghatározhatja: egy mérőlécet illeszt $\overline{AB}$-hez és leolvassa a rúd hosszát. Legyen ez l'. Kérdés, hogy mennyinek méri a K-ban elhelyezkedő megfigyelő az $\overline{AB}$ rúd hosszát? A K rendszerbeli megfigyelő is lefektet egy mérőlécet az x-tengely mentén és megfigyeli, hogy az A és a B pontok egy adott t_0 időpillanatban a mérőléc mely osztópontjainál vannak. Ezen osztópontok l távolsága lesz az $\overline{AB}$ rúd hossza a K vonatkoztatási rendszerben. A mozgó rúd hosszát a (4.8) *Lorentz*-transzformá-



130. ábra. Mozgó rúd hosszának megállapítása

cióból most már egyszerűen kiszámíthatjuk. A fentiek szerint a következő behelyettesítéseket kell elvégezni:

$$x'_B - x'_A = l',$$

$$x_B - x_A = l,$$

$$t_B - t_A = t_0 - t_0 = 0.$$

(4.8) első egyenlete ekkor az $l' = \dfrac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ eredményt adja, amiből:

$$l = l'\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{6.5.3}$$

A mozgó rúd l hossza tehát kisebb, mint az l' nyugalmi hossz. Ezt a jelenséget nevezzük *Lorentz*-kontrakciónak.

Megjegyezzük, hogy a *Lorentz*-kontrakció segítségével azonnal magyarázatát tudjuk adni a *Michelson–Morley*-kísérlet negatív eredményének. A (3.1) egyenletben, amikor az AT_1 kar mutatott a Föld mozgásának irányába, nem l_1, hanem a megrövidült $l_1\sqrt{1 - v^2/c^2}$ hosszúság írandó. Hasonlóképpen, az elforgatás után a Föld mozgásirányába mutató kar hossza $l_2\sqrt{1 - v^2/c^2}$ lesz. Ha ezt megtesszük, akkor a τ és τ' idő különbségekre a

$$\tau = \frac{2l_1/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{2l_2/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{6.5.4}$$

$$\tau' = \frac{2l_1/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{2l_2/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{6.5.5}$$

kifejezések adódnak, amelyek egymással pontosan megegyeznek: $\tau' = \tau$. Az elforgatás tehát nem változtatja meg az interferenciaképet.

Érdemes rávilágítani az időtágulás és a hosszkontrakció szoros kapcsolatára. Az előzőekben már említettük, hogy egy μ-mezon élettartama $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s. Azt a tényt pedig, hogy ezek a mezonok a felső légkörből le tudnak hatolni a Föld felszínéig, az időtágulás jelenségével tudtuk megmagyarázni. Képzeljük azonban el, hogy mi együtt mozgunk a μ-mezonnal. Ekkor a μ-mezon bomlásán semmi időtágulást nem fogunk észlelni, élettartama a fenti $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s lesz. De nagysebességű mozgásunk miatt a légkör vastagságán fogunk *Lorentz*-kontrakciót észlelni. Az (5.3) formulába a $\sqrt{1 - v^2/c^2} = 0{,}014$ értéket téve, a légkör 50 km vastagsága 660 m-re fog zsugorodni és csak egy ilyen vastag légkörön kell átszaladnia a μ-mezonnak. Ehhez viszont a μ-mezon élettartama elégséges.

Időpontok összehasonlítása

Játszódjék le a K' rendszer két különböző helyén, de egyazon időpontjában egy-egy pillanatnyi esemény. Az események helye legyen x'_1 ill. x'_2, az időpontjuk a mondottak szerint közös: $t'_1 = t'_2$. A (4.9) *Lorentz*-transzformáció utolsó egyenletéből most az következik, hogy

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2} \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{6.5.6}$$

A K vonatkoztatási rendszerben levő megfigyelő tehát nem fogja az eseményeket egyidejűnek találni! A különböző helyeken lejátszódó események egyidejűsége tehát relatív fogalom, egyidejűségről csak egy meghatározott vonatkoztatási rendszeren belül van értelme beszélni.

Vizsgáljuk most meg, hogy az *események sorrendje* függ-e a vonatkoztatási rendszertől. K-ban játszódjék le egy pillanatnyi esemény az x_1 helyen és a t_1 időben, majd később egy másik esemény az x_2 helyen és t_2 időben. Mivel a második esemény történt később, ezért

$$t_2 > t_1. \tag{6.5.7}$$

(4.8) szerint a K' rendszerbeli megfigyelő az események időpontját a következőknek fogja találni:

$$t'_1 = \frac{t_1 - vx_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$t'_2 = \frac{t_2 - vx_2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Vajon lehetséges-e, hogy a K-beli megfigyelő az 1. eseményt találja későbbinek, azaz, hogy

$$t'_1 > t'_2 \tag{6.5.8}$$

legyen? Ennek feltétele a fenti formulák szerint

$$\frac{t_1 - vx_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > \frac{t_2 - vx_2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

amiből:

$$x_2 - x_1 > \frac{c^2}{v}(t_2 - t_1). \tag{6.5.9}$$

Az események sorrendje tehát csak akkor fordul meg a K'-beli megfigyelő számára, ha az események távolsága a fenti egyenlőtlenségnek eleget tesz.

Lehetséges, hogy a K rendszer x_1 pontjából valamilyen hatás indul ki, amely u sebességgel terjed és az x_2 helyen valamilyen eseményt vált ki, mely ok és okozati viszonyban van a kiváltó hatással. (5.9) szerint a K'-beli megfigyelő csak akkor észleli előbb az okozatot és csak később az okot, ha

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} > \frac{c^2}{v} > c, \tag{6.5.10}$$

azaz ha a hatás a fény sebességénél gyorsabban terjed. Mivel a tapasztalat szerint ilyen hatás nincs, ezért az ok és okozati viszony időbeli sorrendje nem fordulhat meg, tehát minden vonatkoztatási rendszerben egyforma.

Sebességösszetevés

Mozogjon egy anyagi pont a K' rendszerben u' sebességgel, melynek derékszögű komponensei

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \qquad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \qquad u'_z = \frac{dz'}{dt'}. \tag{6.5.11}$$

Határozzuk meg, hogy mekkorának fogja észlelni a pont sebességét a K vonatkoztatási rendszer megfigyelője. A klasszikus, *Newton*-féle mechanikában a válasz egyszerű: (1.19.6) szerint a pont sebességéhez hozzá kell adni a K' rendszer sebességét, tehát

$$u_x = u'_x + v, \quad u_y = u'_y, \quad u_z = u'_z.$$

A relativisztikus mechanika ettől eltérő eredményre vezet. (4.9)-et t' szerint differenciálva

$$\frac{dx}{dt'} = \frac{\dfrac{dx'}{dt'} + v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{6.5.12}$$

$$\frac{dy}{dt'} = \frac{dy'}{dt'}, \tag{6.5.13}$$

$$\frac{dz}{dt'} = \frac{dz'}{dt'}, \tag{6.5.14}$$

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1 + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{dx'}{dt'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{6.5.15}$$

Ha az utolsó egyenlettel elosztjuk az első hármat, akkor a baloldalakon az

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \qquad u_y = \frac{dy}{dt}, \qquad u_z = \frac{dz}{dt}$$

sebességkomponensek fognak fellépni. A jobboldalakon pedig az (5.11) sebességkomponenseket vezetve be, kapjuk, hogy

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}, \tag{6.5.16}$$

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}, \tag{6.5.17}$$

$$u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}. \tag{6.5.18}$$

Az u sebesség tehát *nem* egyszerű algebrai összege u'-nek és a K vonatkoztatási rendszer sebességének.

Nézzünk egy számpéldát. Mozogjon a tömegpont a K' rendszer x'-tengelye mentén a fénysebesség felével és mozogjon maga a K' rendszer is $\frac{1}{2}c$ sebességgel. Tehát $u'_x = v = \frac{1}{2}c$. A sebességek algebrai összege ez esetben $u'_x + v = c$ lenne, ez felel meg a *Galilei*-transzformációnak. A *Lorentz*-transzformációból származó értéket (5.16) adja meg:

$$u_x = \frac{\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}c.$$

Az eredő sebesség tehát nem éri el a fénysebességet, hanem annak csak 4/5 = = 80%-át.

Érdekes eredményt kapunk, ha az anyagi pont u'_x sebessége a megengedett legnagyobb sebességgel, a c fénysebességgel, egyenlő. Ekkor (5.16) szerint

$$u_x = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = c. \tag{6.5.19}$$

Ha tehát egy test egy vonatkoztatási rendszerben c fénysebességgel mozog, akkor az összes többi inerciarendszerből nézve is c lesz a sebessége. A fénysebes-

ség tehát semmiféle sebességösszetevéssel meg nem változtatható, éppen ez fejezi ki azt a tényt, amit a relativitás elvével kapcsolatban kiemeltünk, hogy ti. a fény terjedése minden inerciarendszerben egyformán történik.

6. §. Relativisztikus dinamika

A relativisztikus dinamika feladata a mozgástörvények olyan megfogalmazása, mely összhangban áll az *Einstein*-féle relativitási elvvel. A dinamika *Newton*-féle axiómáit az 1. fejezetben már megismertük. Az első axióma természetesen a relativitás elmélet szerint is igaz természettörvény, mely minden inerciarendszerben érvényes, hiszen éppen az első axióma segítségével definiáltuk az inerciarendszereket.

A második axióma a következőt mondja ki

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{K}. \tag{6.6.1}$$

Ezt a mozgástörvényt a relativitáselméletben is elfogadjuk és minden inerciarendszerben érvényesnek tekintjük. Ugyanez áll a harmadik axiómára, az akció-reakció elvére is.

A leglényegesebb különbség a newtoni dinamika és a relativisztikus dinamika között az impulzus és a sebesség közti összefüggésben van. A newtoni mechanikában az impulzus $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, ahol m konstans, melyet a test tömegének neveztünk. A relativisztikus dinamikában is feltételezzük, hogy az impulzus vektora a sebességvektor irányába mutat, de — mint az alábbiakban majd részletesen megbeszéljük — a test tömegét nem tekinthetjük állandónak, hanem az a sebesség valamilyen függvénye kell hogy legyen. Ez tehát azt jelenti, hogy az impulzusvektor a sebességvektornak és egy v-től függő együtthatónak szorzata lesz:

$$\mathbf{p} = m(v)\mathbf{v}. \tag{6.6.2}$$

Az $m(v)$ együtthatót a ($\mathbf{v}$ sebességgel mozgó) test tömegének nevezzük.

A $\mathbf{v}$ sebességgel mozgó test tömegét elvileg ugyanúgy állapítjuk meg, mint ahogy az 1. fejezet 3. §-ban a tömeg definícióját leírtuk. Kiinduló pontunk most is a harmadik axióma. Tekintsünk egy K inerciarendszert, melynek tengelye mentén két egyenlő tömegű golyó mozog egymással szemben $\mathbf{v}$ ill. $-\mathbf{v}$ sebességgel. Impulzusaik tehát:

$$\mathbf{p}_1 = m(v)\mathbf{v} \quad \text{és} \quad \mathbf{p}_2 = -m(v)\mathbf{v}. \tag{6.6.3}$$

Összes impulzusuk zérus. Az összeütközés első aktusa abból áll, hogy a két test sebessége zérussá válik. Rugalmatlan ütközés esetén a közös zérus sebesség meg is marad, rugalmas ütközésnél az ütközési folyamat második felében sebességet cserél. Összes impulzusuk mindvégig zérus marad, ez egyenes következménye a harmadik axiómának, mert amennyi impulzust átad a 2. golyó az 1. golyónak, ugyanannyi, de ellenkező előjelű impulzust ad át az 1. golyó a 2.-nak.

Írjuk most le az ütközést egy olyan K' rendszerből, mely az x irányban v sebességgel mozog K-hoz képest. Ebben a K' rendszerben az 1. golyó sebessége zérus az ütközés előtt, hiszen a K' rendszer együtt mozog az 1. golyóval. A 2. golyó ütközés előtti sebességét ezen K' rendszerben jelöljük $\mathbf{u}$-val. Az impulzusok tehát

$$\mathbf{p}'_1 = m(0)\mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{és} \quad \mathbf{p}'_2 = m(u)\mathbf{u}. \tag{6.6.4}$$

Az ütközés első aktusa után a golyók megállnak a K-rendszerben. A K' rendszerből nézve ez azt jelenti, hogy közös sebességük $-v$ lesz, hiszen a K rendszer $-v$ sebességgel mozog K'-höz képest. Így az ütközés első aktusa után a K' rendszerből nézve egy $m(0) + m(u)$ össztömegű testet látunk, mely $-v$ sebességgel mozog. Az impulzusa tehát:

$$p' = -[m(0) + m(u)]v. \tag{6.6.5}$$

Mivel a harmadik axióma a K' inerciarendszerben is igaz kell hogy legyen, ezért itt is érvényben marad az impulzusmegmaradási törvény. E szerint $p'_1 + p'_2 = p'$, azaz

$$m(u)u = -[m(0) + m(u)]v.$$

Ebből az egyenletből $m(u)$-ra kapjuk, hogy

$$m(u) = -m(0)\frac{v}{u+v}. \tag{6.6.6}$$

A tárgyalásunk utolsó lépéseként meg kell állapítani az u és v sebességek közötti összefüggést. Ezt az (5.16) sebességösszetevési formulából olvashatjuk ki. A 2. golyó sebessége az ütközés előtt K'-ben u, K-ban pedig $-v$. (5.16) alapján tehát

$$-v = \frac{u+v}{1+\dfrac{uv}{c^2}}.$$

Ebből pedig

$$v = \frac{c^2}{u}\left[\sqrt{1-u^2/c^2}-1\right]. \tag{6.6.7}$$

Végül v-nek ezt a képletét beírjuk (6.6)-ba és kapjuk

$$m(u) = \frac{m(0)}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{6.6.8}$$

Ez a formula adja meg, hogy hogyan függ a tömeg az u sebességtől. A zérus sebességhez tartozó $m(0)$ tömeget szokás szerint m_0-al jelöljük és a test *nyugalmi* tömegének nevezzük. Ezzel:

$$m(u) = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{6.6.9}$$

Ezt a formulát hívjuk a relativisztikus tömegnövekedési formulának. A tömeg fokozódó sebességgel egyre nő. Fénysebességgel való mozgás esetén, azaz ha $u = c$, a tömeg végtelenné válik. Ez a dinamikai magyarázata annak, hogy miért nem gyorsulhat fel egyetlen anyagi test sem a fénysebességet meghaladó sebességre. Nagyenergiájú gyorsítókban, radioaktív β-sugarakban és a kozmikus sugárzásban gyakran találunk olyan elemi részecskéket, melyek sebessége megközelíti a fénysebességet. Ekkor mozgási tömegük sokszorosan felülmúlja nyugalmi tömegüket. Viszont a technikai berendezésekben előforduló sebességek igen kicsinyek a fénysebességhez képest. Még ha egy mesterséges holdat tekintünk, mely az $u = 8\ \mathrm{kms}^{-1}$ első kozmikus sebességgel kering a Föld körül, a v/c hányados értéke csak $2{,}7 \cdot 10^{-5}$ lesz és ekkor a (6.9) formulából következő tömegkorrekció mindössze 10^{-9} nagyságrendű, ami észlelhetetlenül kicsiny.

7. §. Relativisztikus mozgásegyenletek

A tömeg sebességfüggésének megbeszélése után már könnyen felírhatjuk a relativisztikus dinamika mozgásegyenletét. **u** sebesség esetén az impulzus $\mathbf{p} = m(u)\mathbf{u}$ és a (6.1) *Newton*-törvény a következőképpen írható:

$$\frac{d[m(u)\mathbf{u}]}{dt} = \mathbf{K}. \tag{6.7.1}$$

Ez az egyenlet alakilag teljesen megegyezik a *Newton*-féle (1.3.5) mozgástörvénnyel, amelyet az 1. fejezet 15. §-ban a változó tömegű testek mozgására is érvényesnek tekintettünk. A lényeges eltérés azonban most az, hogy a tömeg változását nem valamilyen mechanizmus hozza létre, hanem a test belső szerkezetétől függetlenül a relativisztikus tömegnövekedési formula írja elő, mely a relativitás elvének közvetlen folyománya. A relativisztikus tömegnövekedési formula felhasználása után a mozgásegyenlet

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \mathbf{K}. \tag{6.7.2}$$

Az alábbiakban két példát tárgyalunk a relativisztikus mozgásra. Első példánk legyen az állandó erő hatására bekövetkező mozgás. Az erő mutasson pl. a z-tengely irányába, nagyságát jelöljük $K = m_0 g$-vel, ahol g egy konstans. Az erőkomponensek tehát:

$$K_x = 0, \quad K_y = 0, \quad K_z = m_0 g. \tag{6.7.3}$$

Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a tömegpont kezdeti sebessége zérus, tehát $u(0) = 0$. Ekkor a mozgás a z-tengely mentén fog történni, úgyhogy elég a sebességnek csak ezt a komponensét vizsgálni.

A (17.3) erő esetét a *Newton*-féle dinamika alapján az 1. fejezet 4. §-ban megtárgyaltuk. Akkor azt kaptuk, hogy a sebesség

$$u(t) = gt \tag{6.7.4}$$

lesz, azaz a sebesség arányos a mozgás t idejével. Elegendően nagy t időkre a sebesség is tetszőlegesen nagy lehet, a newtoni dinamikában a sebességnek nincs semmilyen felső korlátja.

Egészen más a helyzet a relativisztikus dinamikában. A (7.3) erőt a (7.2) mozgásegyenletbe helyettesítve a z-irányú komponensre kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0 u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = m_0 g .$$

m_0-lal egyszerűsítve és integrálva $t = 0$-tól a t időig, az eredmény

$$\frac{u(t)}{\sqrt{1-u^2(t)/c^2}} = gt .$$

Ebből a sebesség

$$u(t) = \frac{gt}{\sqrt{1+g^2t^2/c^2}} . \tag{6.7.5}$$

Az u sebesség igen kis időkre még követi a (7.4) lineáris formulát, de amint gt/c már nem elhanyagolható az 1-hez képest, a sebesség időfüggése lelassul. $t \to \infty$ esetén a sebesség a c fénysebességhez közeledik, de azt sohasem lépi túl.

Második példaként tárgyaljuk azt a mozgást, amikor az erő arányos az $m(u)$ tömeggel. A newtoni dinamikában természetesen a tömeg állandó, és így ez a mozgás is a fenti állandó erőnek felelne meg és az $u(t) = gt$ eredményre jutnánk. A relativisztikus mechanikában a két erőtípus határozottan különbözik egymástól, hiszen az m tömeg a tömegnövekedési formula szerint függ u-tól. Az erőkomponensek esetünkben a következők lesznek:

$$K_x = 0, \quad K_y = 0, \quad K_z = \frac{m_0 g}{\sqrt{1-u^2/c^2}} . \tag{6.7.6}$$

A mozgásegyenletnek ismét csak a z-irányú komponensét kell tárgyalnunk és (7.2) szerint

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0 u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{m_0 g}{\sqrt{1-u^2/c^2}} .$$

Egyszerűsítsünk m_0-lal és a baloldalon végezzük el az idő szerinti differenciálást

$$\frac{1}{\sqrt{(1-u^2/c^2)^3}}\frac{du}{dt} = \frac{g}{\sqrt{1-u^2/c^2}} .$$

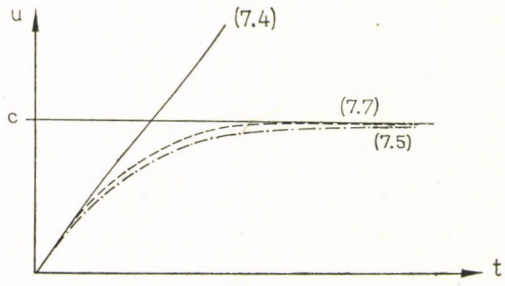
Ebből:

$$\frac{du}{dt} = g\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) .$$

Ez elsőrendű differenciálegyenlet az u sebességre, melyet az $u(0) = 0$ kezdeti feltétellel kell megoldanunk. Az egyenlet a változók szétválasztásával könnyen megoldható, az eredmény

$$u(t) = c\,\frac{e^{2gt/c} - 1}{e^{2gt/c} + 1} = c\,\mathrm{th}\left(\frac{gt}{c}\right). \tag{6.7.7}$$

Ez a formula igen kis időkre ismét az $u = gt$ törvényt adja vissza, majd növekvő idővel eltér ettől és $t \to \infty$ esetén ismét csak a fénysebességet közelíti meg. A klaszszikus (7.4), valamint a relativisztikus (7.5) és (7.7) sebességeket a 131. ábrán mutatjuk be. Szembeötlő, hogy (7.7) mindig nagyobb sebességet ad, mint (7.5). A tö-



131. ábra. A sebesség időfüggése klasszikus és relativisztikus mozgások esetén

meggel arányos erő, éppen a tömegnövekedés miatt, állandóan nő a mozgás folyamán és ezért jobban felgyorsítja a testet, mint az állandó erő. De a tömeggel együtt növekedő erő sem képes a fénysebességnél nagyobb végsebességet eredményezni.

8. §. Rakétamozgás

Az 1. fejezet 15. §-ban részletesen megbeszéltük a rakéta mozgásegyenleteit a *Newton*-féle dinamika alapján. Ha a rakéta sebessége megközelíti a c fénysebességet, akkor a newtoni dinamika természetesen nem alkalmazható, hanem a relativitáselmélet képleteivel kell számolni.

Legyen a (nyugalomban levőnek tekintett) Földhöz kapcsolt inerciarendszer K. Ebben a rakéta sebessége t időben $v(t)$. A rakéta összes nyugalmi tömege $m_0(t)$, a rakétahajtómű által megszabott állandó kilövellési sebesség $-u$. (A negatív előjel azt jelenti, hogy a kilövellés a rakéta mozgásával ellentétes irányú.) A kilövellt anyag sebességét a Föld K koordinátarendszeréből nézve az (5.16) sebességösszetevési formula adja meg

$$w = \frac{v - u}{1 - \dfrac{uv}{c^2}}. \tag{6.8.1}$$

Ennek figyelembevételével az (1.15.1) mozgásegyenlet relativisztikus megfelelője a következő lesz:

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{dm_0'}{dt}\frac{w}{\sqrt{1-w^2/c^2}}. \tag{6.8.2}$$

Itt dm_0' a dt idő alatt kidobott tömeget jelöli, mely a nyugalmi tömeg változásával a tömegnövekedési formula szerinti összefüggésben van

$$dm_0 = \frac{dm_0'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{6.8.3}$$

A (8.1), (8.2) és (8.3) egyenletekből kiindulva a *Ciolkovszkij*-egyenlet helyett a következő végeredményt kapjuk:

$$M_0 = m_0\left(\frac{1+v/c}{1-v/c}\right)^{\frac{c}{2u}}, \tag{6.8.4}$$

ahol M_0 a rakéta nyugalmi tömege az indításkor, m_0 pedig a hasznos teher nyugalmi tömege.

Fenti eredményünk a $v/c \ll 1$ és $u/c \ll 1$ nemrelativisztikus határesetben átmegy az (1.15.3) *Ciolkovszkij*-egyenletbe. Ugyanakkor az is látható, hogy véges m_0 tömegnek a $v = c$ fénysebességre való felgyorsítása csak $M_0 = \infty$ indítási tömeggel volna lehetséges.

Érdekes eredményre vezet (8.4) képletünk az $u = c$ esetben, tehát ha a hajtómű fénysebességgel lövelli ki az üzemanyagot. Ez csak úgy képzelhető el, ha az anyagkidobást egyirányú fénykisugárzással valósítjuk meg. Az ilyen elven működő rakétát *fotonrakétának* nevezzük. A fotonrakéta v sebességre való felgyorsításához szükséges indító tömeg

$$M_0 = m_0\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}. \tag{6.8.5}$$

Ez jelenti az ideális, leggazdaságosabb üzemanyagfelhasználást. Ha pl. csak a $v = 11{,}2\ \mathrm{kms}^{-1}$ második kozmikus sebesség elérésére törekednénk, akkor $v/c \approx$ $\approx 4 \cdot 10^{-5}$ és $M_0 \approx m_0(1 + 4 \cdot 10^{-5}) = 1{,}00004\, m_0$, tehát az indítási tömegnek csak négy százezredrésszel kell nagyobbnak lennie, mint a hasznos tömeg. Fotonrakétával a fénysebesség megközelítése is könnyen elképzelhető. Pl. $v = \frac{9}{11}c =$ $= 0{,}82\, c$ eléréséhez $M_0 = \sqrt{10}\, m_0 = 3{,}16\, m_0$ szükséges, tehát ha egy fotonrakéta tömegének kétharmadát fény formájában reflektorszerűen kisugározza, úgy sebessége a fénysebesség 82%-át érné el. Ezzel a legközelebbi állócsillagokra való oda-vissza utazás egy évtizeden belül megvalósítható lenne. Sokan úgy vélik, hogy a csillagok közti utazás feltétele a fotonrakéta megvalósítása.

9. §. Erők transzformációja

Egy m_0 tömegpont mozgásegyenletét valamely K inerciarendszerben (7.2) alatt írtuk fel. Most kiírjuk komponensenként részletezve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} &= K_x, \\ \frac{d}{dt}\frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}} &= K_y, \\ \frac{d}{dt}\frac{m_0 u_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}} &= K_z, \end{aligned} \tag{6.9.1}$$

ahol

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2.$$

Ezeket a mozgásegyenleteket minden inerciarendszerben érvényesnek tekintjük az *Einstein*-féle relativitási elv értelmében. Egy K' inerciarendszerben tehát ugyanezen m_0 tömegpont mozgását a következő egyenletek írják le:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'}\frac{m_0 u'_x}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} &= K'_x, \\ \frac{d}{dt'}\frac{m_0 u'_y}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} &= K'_y, \\ \frac{d}{dt'}\frac{m_0 u'_z}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} &= K'_z \end{aligned} \tag{6.9.2}$$

és

$$u'^2 = u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z.$$

A K és K' rendszereket a (4.9) *Lorentz*-transzformáció kapcsolja össze, valamint az ebből levezetett (5.16)–(5.18) sebességtranszformációs képletek. Ezen transzformációs képleteket felhasználva a (9.1) egyenletek baloldalait ki tudjuk fejezni a vesszős mennyiségekkel, tehát dt', u'_x, u'_y és u'_z-vel. Az így kapott egyenleteket hasonlítsuk össze a (9.2) mozgásegyenletekkel. Az összehasonlítás eredményeként azt kapjuk, hogy (9.2) jobboldalán szereplő K'_x, K'_y és K'_z erőkomponensek milyen összefüggésben kell, hogy legyenek a K_x, K_y, K_z erőkomponensekkel. A részletes számításokat nem végezzük el, csak a végeredményt közöljük:

$$K_x = K'_x + \frac{\frac{v}{c^2}(K'_y u'_y + K'_z u'_z)}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}, \tag{6.9.3}$$

$$K_y = \frac{K'_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}, \tag{6.9.4}$$

$$K_z = \frac{K'_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}. \tag{6.9.5}$$

Ezek az összefüggések adják meg, hogy hogyan kell az egyik inerciarendszerből a másikba transzformálni. Megjegyezzük, hogy $v/c \ll 1$ esetben a fenti képletekből

$$K_x = K'_x, \quad K_y = K'_y, \quad K_z = K'_z$$

következik, ami megfelel annak, hogy a *Newton*-féle dinamika az erőt nem transzformálja.

Végül feljegyezzük az erő transzformációs képletét arra az esetre, amikor a tömegpont a K' rendszerben nyugalomban van: $u'_x = u'_y = u'_z = 0$. Ekkor

$$K_x = K'_x, \quad K_y = K'_y\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad K_z = K'_z\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{6.9.6}$$

10. §. A relativisztikus energia

Valamely **K** erő által végzett munkát az (1.5.3) képlettel definiáltuk. Ezt a definíciót a relativitáselméletben is érvényesnek tekintjük

$$A = \int_{P_0}^{P} Kds = \int_{P_0}^{P} (K_x dx + K_y dy + K_z dz).$$

Vezessük be független változónak a t időt és a $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ differenciálhányadosok helyett írjunk rendre u_x, u_y, u_z-t, azaz írjuk a sebességkomponenseket

$$A = \int_{t_0}^{t} (K_x u_x + K_y u_y + K_z u_z)dt. \tag{6.10.1}$$

Hogy a munka és a kinetikus energia közötti összefüggést megkaphassuk, a K_x, K_y, K_z erőkomponenseket (9.1)-ből helyettesítsük be a fenti integrálba

$$A = m_0\int_{t_0}^{t}\left[u_x\left(\frac{d}{dt}\frac{u_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right) + u_y\left(\frac{d}{dt}\frac{u_y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right) + u_z\left(\frac{d}{dt}\frac{u_z}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right)\right]dt.$$

Az integrandus azonos átalakítása után ez a következőképpen is felírható

$$A = m_0c^2\int_{t_0}^{t}\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right)dt = \left[\frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right]_{t_0}^{t}. \tag{6.10.2}$$

Ez a newtoni dinamika (1.5.5) formulájának analogonja. Az A munka tehát most is a T kinetikus energia megváltozásával egyenlő, csak a kinetikus energia képletét kell (10.2) szerint módosítanunk. Legyen pl. a sebesség a mozgás kezdetén zérus: $u(t_0) = 0$; ekkor a kezdeti kinetikus energia is zérus, a t időben pedig a T kinetikus energia az erők A munkájával fog megegyezni. (10.2) szerint tehát

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_0 c^2 = [m(u) - m_0]c^2. \tag{6.10.3}$$

A kinetikus energiának ez a kifejezése a régi formula relativisztikus általánosításának felel meg. Kis sebességekre $u/c \ll 1$ és $\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}$. Ekkor

$$T = m_0 c^2 \left[1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}\right] - m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 u^2,$$

teljes megegyezésben a newtoni dinamika formulájával.

A kinetikus energia (10.3) képletében fellép egy u-tól független

$$E_0 = m_0 c^2 \tag{6.10.4}$$

konstans tag. Ezt mint az m_0 tömegű test latens vagy nyugalmi energiáját foghatjuk fel. A mozgó test összenergiája pedig

$$E = T + E_0 = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{6.10.5}$$

Ezek szerint azt mondhatjuk, hogy a (10.2) munka a test E energiájának növelésére fordítódott, hiszen (10.2) szerint $A = E - E_0$.

Az m_0 nyugalmi tömeg és az E_0 latens energia közti (10.4) kapcsolatot első ízben EINSTEIN ismerte fel. Ennek a felismerésnek hordereje rendkívül nagy, hiszen ez a tehetetlen tömeg és az energia szoros kapcsolatát fejezi ki. Eszerint minden tömeg energiát képvisel, mégpedig g-onként kereken $9 \cdot 10^{12}$ mkp-nyi energiát. Ekkora energiát 2500 tonna szén elégetésével lehetne csak nyerni! Az *Einstein*-relációt természetesen visszafelé is alkalmazhatjuk és kijelenthetjük, hogy minden energiának

$$m_0 = E_0/c^2 \tag{6.10.6}$$

tehetetlen tömege van. A leghelyesebb felfogás, ha a tömeget és az energiát nem tekintjük külön fizikai mennyiségnek, hanem a tömeget mint az energia tehetetlenségének mérőszámát fogjuk fel. 1 g tömeg tehát $9 \cdot 10^{20}$ erg sűrített energia mérőszáma.

E felfogás értelmében a klasszikus fizika tömegmegmaradási és energiamegmaradási törvénye egyetlen törvénybe olvad össze, és ugyanazt a tényt fejezi ki. Az, hogy a klasszikus fizika külön tömegmegmaradási és külön energiamegmaradási

tételt állított fel, annak a következménye volt, hogy csak olyan fizikai és kémiai folyamatokat tanulmányoztak, melyeknél az energiaváltozások észrevehetetlenül kicsinyek voltak az $E_0 = m_0c^2$ nyugalmi energiához képest. Például, ha a szenet elégetjük, azaz ha egy C szénatomból és egy O_2 oxigénmolekulából egy CO_2 széndioxidmolekulát építünk fel, akkor energia szabadul fel és hő keletkezik. A felszabaduló energia (10.6) szerint tömeget visz magával és ezért a CO_2 molekula tömege egy kicsit kisebb, mint az alkotórészek össztömege. A probléma csak az, hogy a CO_2 molekula „tömeghiánya" oly csekély, hogy kísérleti kimutatása szinte lehetetlen. Ezért a klasszikus fizikában a CO_2 tömegét egy C atom és egy O_2 molekula tömegeinek összegével azonosították és tömegmegmaradásról beszéltek.

Egészen más nagyságrendi viszonyokkal találkozunk a magfizikában. Itt ugyanis olyan energiájú folyamatokkal találkozunk, melyeknek megfelelő tehetetlen tömeg az atommagot alkotó protonok és neutronok tömegének néhány %-át is kiteszi, úgyhogy megfigyelésük könnyen lehetséges. Nézzünk egy számpéldát. A tapasztalat szerint, ha Li^7 magokat protonokkal, tehát hidrogénmagokkal bombázunk, akkor energiafelszabadulás mellett He^4 magok, azaz α-részecskék keletkeznek. A magreakció egyenlete

$$H^1 + Li^7 = He^4 + He^4.$$

Írjuk fel ennek a reakciónak az energiamérlegét. Elsősorban a résztvevő magok tömegét jegyezzük fel, méghozzá a szokásos atomi tömegegységekben. 1 atomi tömegegység $= \frac{1}{N}$ kg, ahol N az Avogadro szám: $N = 6{,}0249 \cdot 10^{26}$/kmól. Ilyen egységekben

$$\begin{aligned} m_0(H^1) &= 1{,}00815 \\ m_0(Li^7) &= 7{,}01823 \\ \hline m_0(H^1) + m_0(Li^7) &= 8{,}02638. \end{aligned}$$

A reakcióban résztvevő H^1 és Li^7 magok össztömegéhez még hozzá kell számítani a bombázó proton T_p kinetikus energiájának megfelelő T_p/c^2 tömeget is. A magreakcióban szereplő összes tömeg tehát

$$M = m_0(H^1) + m_0(Li^7) + \frac{T_p}{c^2} = 8{,}02638 + 0{,}001074\, T_p, \qquad (6.10.7)$$

ha a kinetikus energiát a magfizika szokásos energiaegységében, MeV-ban mérjük (MeV $= 1{,}602 \cdot 10^{-6}$ erg).

Az energia- és tömegmegmaradási törvény értelmében a reakció végén is ugyanennyi össztömegnek kell szerepelnie. Mivel a reakcióban két He^4 mag keletkezik, mindegyikre a (10.7) tömeg fele jut:

$$m(He^4) = 4{,}01319 + 0{,}00537\, T_p. \qquad (6.10.8)$$

A tapasztalat szerint a He^4 mag nyugalmi tömege:

$$m_0(He^4) = 4{,}00387, \tag{6.10.9}$$

amely szemlátomást kisebb, mint a (10.8) érték. Ez természetes is, mert a magreakcióban nem nyugvó He^4 magok keletkeznek, hanem a keletkező He^4 magok tekintélyes sebességgel repülnek szét. (10.8) a He^4 magok mozgási tömegét adja meg, mely a tömegnövekedési formula szerint mindig nagyobb, mint a nyugalmi tömeg. Egy-egy He^4 mag kinetikus energiája a (10.3) szabály szerint

$$T_\alpha = [m(He^4) - m_0(He^4)]c^2 = \left[8{,}675 + \frac{1}{2}T_p\right] \text{MeV}. \tag{6.10.10}$$

Még ha a proton bombázó energiája elhanyagolhatóan kicsiny ($T_p \approx 0$), akkor is a He^4 magok 8,675 MeV kinetikus energiával fognak rendelkezni. Az összes felszabaduló energia $2 \times 8{,}675 = 17{,}35$ MeV. A kísérletek ezt az értéket teljes mértékben igazolják.

Analóg módon lehet kiszámítani, hogy mennyi energia keletkezik az uránium hasadásakor az atomreaktorokban és az atombombákban. Hasadáskor az uránium M_0 nyugalmi tömege két, kb. egyenlő részre szakad. Ha a hasadási termékek sebességét u-val jelöljük, akkor a tömegmegmaradási törvény szerint

$$M_0 = 2m(u).$$

A hasadási termékek összes kinetikus energiája (10.3) szerint

$$T = 2[m(u) - m_0]c^2 = [M_0 - 2m_0]c^2. \tag{6.10.11}$$

Az uránatom M_0 és a hasadási termékek m_0 nyugalmi tömegének ismeretében a felszabaduló T energia tehát könnyen kiszámítható.

Amint már fentebb említettük, a magreakciókban felszabaduló energiák a latens nyugalmi energiáknak néhány %-át teszik ki. Megjegyezzük, hogy az elemi részecskék fizikájában olyan folyamatokkal is találkozunk, ahol a latens energia 100%-ig felszabadul. Ez az eset akkor áll elő, ha egy részecske az ún. antirészecskéjével lép reakcióba. Ilyen részecske – antirészecske pár pl. az elektron és a pozitron. Találkozásukkor mindketten megsemmisülnek és együttes tömegüknek megfelelő energiájú γ-sugárzás keletkezik. A fordított folyamat, a párképződés is ismeretes. Egy γ-kvantumból, vagyis tiszta sugárzó energiából egy elektron-pozitron pár keletkezik. Egy ilyen folyamat feltétele természetesen az, hogy a γ-kvantum energiája nagyobb, vagy legalábbis akkora legyen mint az elektron és pozitron együttes nyugalmi energiája.

Végül néhány fontos összefüggést írunk fel az energia és az impulzus között. A (7.1) mozgástörvénnyel kapcsolatban már megbeszéltük, hogy egy $\mathbf{u}$ sebességű tömegpont impulzusa

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} = \frac{m_0\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{6.10.12}$$

Energiája pedig (10.5) szerint

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{6.10.13}$$

Ezekből az egyenletekből u könnyen kiküszöbölhető és az E energiára a következő kifejezést kapjuk

$$E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (c\mathbf{p})^2}. \tag{6.10.14}$$

Ez az igen fontos képlet adja meg egy **p** impulzusú részecske energiáját. Ha $m_0 c^2 \gg cp$, akkor sorbafejtéssel

$$E = m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0} + \ldots \tag{6.10.15}$$

A nemrelativisztikus határesetben tehát E az $m_0 c^2$ nyugalmi energiából és a $p^2/2m_0$ kinetikus energiából áll, a . . .-al jelzett rész pedig a magasabbrendű korrekciókat tartalmazza.

Az ellenkező véglet az, ha a tömegpontnak nincs nyugalmi tömege: $m_0 = 0$, vagy pedig olyan nagy az impulzusa, hogy $m_0 c^2 \ll cp$. Ekkor

$$E = cp. \tag{6.10.16}$$

Ezt az energia-impulzus összefüggést extrém relativisztikus határesetnek nevezzük. Megfelelője a newtoni dinamikában nincs.

A (10.12), (10.13) és (10.14) összefüggések megfelelő kombinálásával újabb egyenleteket lehet nyerni. Ezek közül feljegyzünk három olyat, mely a gyakorlati számítások során igen sokszor szokott szerepelni:

$$E^2 - c^2 p^2 = (m_0 c^2)^2, \tag{6.10.17}$$

$$cp = E\frac{u}{c}, \tag{6.10.18}$$

$$\frac{dE}{dp} = u. \tag{6.10.19}$$

11. §. Négyesvektorok

Az előzőekben megismerkedtünk a relativitáselmélet alapvető fogalmaival és legfontosabb eredményeivel. Az elmélet két alappillére: az inerciarendszerek egyenértékűségét kimondó *Einstein*-féle relativitási elv és a különböző inerciarendszereket összekapcsoló *Lorentz*-transzformáció. E kettőből az elmélet minden állítása levezethető.

Az alábbiakban egy olyan matematikai módszert fogunk megbeszélni, mely a relativitáselmélet levezetéseit és eredményeit rendkívül világos és áttekinthető formába tudja önteni.

Vizsgálatainkat kezdjük a *Lorentz*-transzformációval. Vezessük be a következő jelöléseket

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict, \tag{6.11.1}$$

ahol i az imaginárius egység. Ezekkel a jelölésekkel a (4.1) fénygömb egyenlete:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0. \tag{6.11.2}$$

A baloldalon álló kifejezés úgy fest, mint a négydimenziós világban az (x_1, x_2, x_3, x_4) pontnak az origótól való távolsága. A 4.§-ban megbeszéltek szerint a *Lorentz*-transzformáció a fénygömb egyenletét nem változtathatja meg. Másrészt tudjuk, hogy a legáltalánosabb olyan koordinátatranszformáció, mely az

$$s^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

kifejezést nem változtatja meg, a koordinátarendszer elforgatása. (A távolság a koordinátarendszer elforgatásakor változatlan marad.) Következésképpen a legáltalánosabb *Lorentz*-transzformáció nem lehet más, mint a (11.1)-gyel értelmezett négydimenziós koordinátarendszer egy tetszőleges elforgatása.

Ezek után vizsgáljuk meg részletesen a (4.8) *Lorentz*-transzformációt. A (11.1) jelölések bevezetésével ez így írható

$$x_1' = \frac{x_1 + i\frac{v}{c}x_4}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$x_2' = x_2,$$

$$x_3' = x_3,$$

$$x_4' = \frac{x_4 - i\frac{v}{c}x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

A két középső egyenlet, a koordinátatengelyek alkalmas választása miatt nem tartalmaz semmi érdekeset. Az első és az utolsó pedig a következő alakban is felírható

$$x_1' = x_1 \cos\phi + x_4 \sin\phi,$$

$$x_4' = -x_1 \sin\phi + x_4 \cos\phi, \tag{6.11.3}$$

ahol $\operatorname{tg}\phi = i\frac{v}{c}$. Ezek az egyenletek pontosan ugyanolyan alakúak, mint egy síkbeli (x_1, x_4) koordinátarendszer ϕ szöggel való elforgatásának formulái.* Látjuk tehát, hogy a *Lorentz*-transzformációnak a (11.1) koordinátákkal kifejezett alakja valóban egy forgatásnak felel meg.

* Kiemeljük, hogy esetünkben a ϕ szög imaginárius.

Mindezek alapján most már indokoltnak érezhetjük a vektor fogalmának kiterjesztését. Eddig csak háromkomponensű vektorokkal foglalkoztunk, a három komponens a három térbeli iránynak felelt meg. A négyesvektoroknak négy komponensük van, ebből három olyan, mint az eddig ismert közönséges vektorok komponensei, de ezekhez társul most egy negyedik, mely az időnek felel meg. Ilyen négyesvektor komponenseit írtuk fel (11.1) alatt. E vektor tehát nem egy térbeli pontot jelent, hanem a háromdimenziós tér egy (x_1, x_2, x_3) pontjában az x_4 időpillanatban lejátszódó eseményt. Az (x_1, x_2, x_3, x_4) négyesvektor tehát mindig egy pillanatnyi eseményt jelöl.

Az 1. fejezet 1. §-ban részletesen megbeszéltük, hogy mennyire hasznos fogalom a vektor, vagyis az irányított egyenes szakasz. Egy **a** vektort az a_x, a_y, a_z derékszögű komponenseivel adhatunk meg. Ezek a komponensek különböző, egymáshoz képest elforgatott koordinátarendszerekben természetesen mások és mások. Valahogyan „maga" a vektor sokkal valóságosabb, mint bármely komponense és éppen ezt juttatjuk kifejezésre azzal, hogy a vektor egy irányított egyenes szakasz. Teljesen hasonló a helyzet a négyesvektorokkal is. Az (a_1, a_2, a_3, a_4) négyesvektor nemcsak egyszerűen egy számnégyest jelent, hanem határozott szabályt is, hogy **a** komponenseit az egyik inerciarendszerből hogyan kell átszámítani egy másik inerciarendszerre. A négyesvektor legáltalánosabb definíciója: négy komponens által adott mennyiség; a komponenseket egyik inerciarendszerből úgy kell transzformálni egy másikba, mint az (x_1, x_2, x_3, x_4) koordinátákat. Tehát pl. a 126. ábrán levő K és K' inerciarendszerek esetén a transzformációs szabály (11.3)-nak megfelelő lesz:

$$\begin{aligned} a'_1 &= a_1 \cos\phi + a_4 \sin\phi, \\ a'_2 &= a_2, \\ a'_3 &= a_3, \\ a'_4 &= -a_1 \sin\phi + a_4 \cos\phi, \end{aligned} \tag{6.11.4}$$

ahol ismét

$$\operatorname{tg}\phi = i\frac{v}{c}.$$

A négyesvektorok bevezetésének nyilvánvalóan ugyanaz a haszna, mint a közönséges hármasvektoroknak volt a newtoni dinamikában.

Vegyük szemügyre ismét a 3. ábrát. Ezen a

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

vektoregyenlőséget látjuk ábrázolva. Az a tény, hogy az **a** és **b** vektorok összege **c**-vel egyenlő, természetesen abszolút független attól, hogy az ábra síkjában hogyan vesszük fel a koordinátarendszerünket. Hasonló a helyzet a négyesvektorokkal is. Ha egy természettörvényt négyesvektorokkal fejezünk ki, vagyis olyan alakra hozzuk, hogy a jobb- és baloldalán egy-egy négyesvektor áll, akkor biztosak lehetünk abban, hogy az egyenletünk két oldala a *Lorentz*-transzformációnál azonos módon transzformálódik, tehát az egyenletünk szerkezete minden inerciarendszer-

ben azonos lesz. *A négyesvektorokkal kifejezett fizikai törvények függetlenek a vonatkoztatási rendszer megválasztásától, minden inerciarendszerben egyaránt érvényesek. Következésképpen a négyesvektorokkal kifejezett egyenletek automatikusan eleget tesznek az Einstein-féle relativitási elvnek.*

A dinamikában megismerkedtünk két igen fontos fogalommal, a p impulzussal és az E energiával. Most be fogjuk bizonyítani, hogy ezekből egy négyesvektor képezhető az alábbi módon

$$p_1 = p_x, \quad p_2 = p_y, \quad p_3 = p_z, \quad p_4 = \frac{i}{c} E. \tag{6.11.5}$$

Hogy ez a négy mennyiség valóban négyesvektort alkot, ahhoz meg kell vizsgálnunk transzformációs tulajdonságaikat. Ehhez elsősorban fejezzük ki őket a sebesség segítségével: (10.12) és (10.13) szerint

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ p_2 &= \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ p_3 &= \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ p_4 &= \frac{i m_0 c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{6.11.6}$$

Most pedig térjünk át a K vonatkoztatási rendszerről a K' rendszerre. A sebességek transzformációs szabályát (5.16)–(5.18) alatt már felírtuk. Ezek felhasználásával kapjuk, hogy

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = \frac{u'^2 + 2u'_x v + v^2 - \frac{v^2}{c^2}(u'^2_y + u'^2_z)}{1 + 2\frac{u'_x v}{c^2}}$$

és

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{1 + \frac{2u'_x v}{c^2} + \frac{u'^2_x v^2}{c^4} - \frac{u'^2}{c^2} - \frac{2u'_x v}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} + \frac{(u'^2_y + u'^2_z) v^2}{c^4}}{1 + \frac{2u'_x v}{c^2} + \frac{u'^2_x v^2}{c^4}} =$$

$$= \frac{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{u'^2}{c^2} + \frac{u'^2 v^2}{c^4}}{1 + \frac{2u'_x v}{c^2} + \frac{u'^2_x v^2}{c^4}} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^2}.$$

Ennélfogva a nevezőkben szereplő négyzetgyökös kifejezés transzformáltja:

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{1+\frac{u'_x v}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-u'^2/c^2}}. \tag{6.11.7}$$

Most már könnyen felírhatjuk a (11.6) impulzusokat a vesszős sebességekkel

$$p_1 = m_0 \frac{u'_x + v}{1+\frac{u'_x v}{c^2}} \cdot \frac{1+\frac{u'_x v}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{m_0(u'_x+v)}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-u'^2/c^2}},$$

$$p_2 = m_0 \frac{u'_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+\frac{u'_x v}{c^2}} \cdot \frac{1+\frac{u'_x v}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-u'^2/c^2}} = \frac{m_0 u'_y}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}, \tag{6.11.8}$$

$$p_3 = m_0 \frac{u'_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+\frac{u'_x v}{c^2}} \cdot \frac{1+\frac{u'_x v}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-u'^2/c^2}} = \frac{m_0 u'_z}{\sqrt{1-u'^2/c^2}},$$

$$p_4 = 2m_0 c \frac{1+\frac{u'_x v}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-u'^2/c^2}}.$$

Természetesen a vesszős rendszerben a négyesimpulzusok kifejezéseit (11.6) mintájára kell megalkotnunk. Tehát

$$p'_1 = \frac{m_0 u'_x}{\sqrt{1-u'^2/c^2}},$$

$$p'_2 = \frac{m_0 u'_y}{\sqrt{1-u'^2/c^2}},$$

$$p'_3 = \frac{m_0 u'_z}{\sqrt{1-u'^2/c^2}},$$

$$p'_4 = \frac{im_0 c}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}.$$

Ha ezeket bevezetjük a (11.8) képletekbe, úgy megkapjuk a négyesimpulzus transzformálásának szabályát:

$$p_1 = \frac{p_1' - i\frac{v}{c}p_4'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$p_2 = p_2',$$

$$p_3 = p_3',$$

$$p_4 = \frac{i\frac{v}{c}p_1' + p_4'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Ha ide még bevezetjük az előzőekben is használt $\operatorname{tg}\phi = i\frac{v}{c}$ jelölést, úgy

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1' \cos\phi - p_4' \sin\phi, \\ p_2 &= p_2', \\ p_3 &= p_3', \\ p_4 &= p_1' \sin\phi + p_4' \cos\phi. \end{aligned} \tag{6.11.9}$$

Ezek az összefüggések teljesen megfelelnek az általános (11.4) transzformációs formulának. Ha ugyanis az egyenleteket megfordítjuk, azaz a vesszős impulzusokra megoldjuk őket, akkor a következőt kapjuk

$$\begin{aligned} p_1' &= p_1 \cos\phi + p_4 \sin\phi, \\ p_2' &= p_2, \\ p_3' &= p_3, \\ p_4' &= -p_1 \sin\phi + p_4 \cos\phi. \end{aligned} \tag{6.11.10}$$

Ez a transzformációs szabály azonos (11.4)-gyel és ezzel bebizonyítottuk, hogy a négyesimpulzus valóban négyesvektort alkot.

Érdemes összehasonlítani egymással a (11.9) és (11.10) egyenleteket. Látjuk, hogy a vesszős impulzusokat kifejezve a vesszőtlenekkel, a képletek csak abban térnek el az inverz relációktól, hogy a ϕ szög ellenkező előjellel szerepel. A K inerciarendszerből K'-be való transzformálás és fordítottja, a K'-ből K-ba való transzformálás csak ϕ előjelében különbözik. Ez természetes is, hiszen a $\operatorname{tg}\phi = i\frac{v}{c}$ összefüggés szerint ez pontosan annyit jelent, hogy ha a K' rendszer v sebességgel mozog K-hoz képest, akkor K rendszer $-v$ sebességgel mozog K'-höz képest.

A fentiekben beláttuk, hogy a (11.5) impulzuskomponensek négyesvektort alkotnak. Képezzük ezen négyesvektor négydimenziós „hosszát":

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2.$$

Mivel a legáltalánosabb *Lorentz*-transzformáció a négydimenziós koordinátarendszer egy elforgatásának felel meg, ezért azt várjuk, hogy a forgatáskor változatlanul maradó p^2 értéke minden inerciarendszerben ugyanaz. Valóban, a (11.6) képletek négyzeteit összeadva azt kapjuk, hogy

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = -m_0^2 c^2, \tag{6.11.11}$$

ami tényleg egy konstans számérték.

Az impulzust és energiát összefoglaló négyesimpulzus megbeszélése után foglalkozzunk a dinamika másik fontos mennyiségével, az erővel. A K_x, K_y, K_z erőkomponensek transzformációs szabályát a 9. §-ban már megismertük. Most a feladatunk az, hogy az erőből egy négyesvektort képezzünk. Nem nehéz belátni, hogy az alábbi négy komponens valóban négyesvektort alkot:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{K_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ F_2 &= \frac{K_y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ F_3 &= \frac{K_z}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ F_4 &= \frac{i}{c} \frac{K_x u_x + K_y u_y + K_z u_z}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{6.11.12}$$

Az (F_1, F_2, F_3, F_4) négyes-erőt *Minkowski*-erőnek nevezzük.

Hogy ez valóban négyesvektor, azt ugyanolyan gondolatmenettel igazolhatjuk, mint ahogy a négyesimpulzus esetében eljártunk. Először is feljegyezzük a *Minkowski*-erőt a K' vonatkoztatási rendszerben. Ez természetesen (11.12) pontos mása lesz:

$$\begin{aligned} F_1' &= \frac{K_x'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}, \\ F_2' &= \frac{K_y'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}, \\ F_3' &= \frac{K_z'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}, \\ F_4' &= \frac{i}{c} \frac{K_x' u_x' + K_y' u_y' + K_z' u_z'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{6.11.13}$$

Most pedig azt kell igazolnunk, hogy a vesszőtlen és a vesszős F komponensek közötti összefüggések a (11.4) transzformációs szabállyal azonosak. E célból (11.2)-ben használjuk fel egyrészt a (9.3)–(9.5) erőtranszformálási szabályokat, másrészt az (5.16)–(5.18) sebességösszetevési formulákat, és az ezekből levezetett (11.7) összefüggést. Ekkor kapjuk, hogy

$$F_1 = \frac{K'_x + \frac{v}{c}(K'_x u'_x + K'_y u'_y + K'_z u'_z)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}\sqrt{1 - u'^2/c^2}},$$

$$F_2 = \frac{K'_y}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}},$$

$$F_3 = \frac{K'_z}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}},$$

$$F_4 = \frac{i}{c}\frac{vK'_x + (K'_x u'_x + K'_y u'_y + K'_z u'_z)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}\sqrt{1 - u'^2/c^2}}.$$

Ha ide bevezetjük a (11.13) alatti vesszős *Minkowski*-erő komponenseit, továbbá az eddigiekben is használt $\operatorname{tg}\phi = i\frac{v}{c}$ jelölést, úgy:

$$F_1 = F'_1 \cos\phi - F'_4 \sin\phi,$$

$$F_2 = F'_2,$$

$$F_3 = F'_3,$$

$$F_4 = F'_1 \sin\phi + F'_4 \cos\phi.$$

Végül ezeket az egyenleteket meg kell oldani az F'_1, F'_2, F'_3 és F'_4 komponensekre nézve. De amint már megbeszéltük, ez igen egyszerű feladat. A vesszős és vesszőtlen komponensek megcserélése ugyanaz, mintha a szög helyébe a negatívját tesszük. Tehát:

$$\begin{aligned} F'_1 &= F_1 \cos\phi + F_4 \sin\phi, \\ F'_2 &= F_2, \\ F'_3 &= F_3, \\ F'_4 &= -F_1 \sin\phi + F_4 \cos\phi. \end{aligned} \qquad (6.11.14)$$

Ezek a formulák világosan bizonyítják, hogy a *Minkowski*-erő valóban négyesvektor.

Természetesen nem szabad szem elől tévesztenünk, hogy a valódi, ténylegesen ható erőket K_x, K_y, K_z adja meg, a dinamometerek ezeket a komponenseket mé-

rik. A *Minkowski*-erőnek közvetlen fizikai jelentése nincs, szerepe az, hogy segítségével a mozgásegyenletek olyan alakra hozhatók, hogy szembeötlően megmutatkozik a relativisztikusan invariáns formájuk.

Tekintsük ugyanis a relativisztikus dinamika (9.1) mozgásegyenleteit. Ha ezeket rendre végigosztjuk $\sqrt{1 - u^2/c^2}$-tel, akkor a jobboldalakon a *Minkowski*-erő első három komponense fog fellépni. A baloldalakon a (11.6) impulzuskomponenseket vezetve be, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \frac{dp_1}{dt} &= F_1, \\ \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \frac{dp_2}{dt} &= F_2, \\ \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \frac{dp_3}{dt} &= F_3 . \end{aligned} \tag{6.11.15}$$

Külön kell foglalkoznunk az itt fellépő $d\tau = \sqrt{1 - u^2/c^2}$ mennyiséggel. dt természetesen a tömegpont egy elemi elmozdulásának időtartamát jelenti, az alapul választott K vonatkoztatási rendszerben. A tömegponttal együtt mozgó óra viszont az elmozdulás időtartamát (5.1) szerint

$$d\tau = \sqrt{1 - u^2/c^2}\, dt \tag{6.11.16}$$

nagyságúnak fogja mérni. A $d\tau$ időtartamot a pontmozgás *sajátidő tartamának* fogjuk nevezni. Ez a mennyiség nyilvánvaló módon éppúgy független a vonatkoztatási rendszer választásától, mint pl. egy test m_0 nyugalmi tömege.

A mozgásegyenletek a sajátidővel kifejezve a következők lesznek:

$$\frac{dp_1}{d\tau} = F_1 , \qquad \frac{dp_2}{d\tau} = F_2 , \qquad \frac{dp_3}{d\tau} = F_3 . \tag{6.11.17}$$

Mivel $d\tau$ független a vonatkoztatási rendszertől, ezért a baloldalon álló differenciálhányadosok éppúgy viselkednek a *Lorentz*-transzformációnál, mint a négyesimpulzus első három komponense. A jobboldalakon is egy négyesvektor első három komponense áll. A relativitás elve, amely szerint a mozgásegyenletek minden inerciarendszerben azonosak, most megköveteli, hogy a (11.17) egyenlet a negyedik komponensre is igaz legyen, mert csak ez esetben lesz a mozgásegyenlet szabályos négyesvektor-egyenlet. Tehát a relativisztikus dinamika mozgásegyenletei

$$\frac{dp_k}{d\tau} = F_k. \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{6.11.18}$$

Az előzőekben kifejtettek szerint ez a négyesvektor-egyenlet minden inerciarendszerben automatikusan kielégül, hiszen a jobboldalon is és a baloldalon is

egy-egy négyesvektor áll. Az első három komponens fizikai jelentése nyilvánvaló: ezek ekvivalensek a (7.1) mozgástörvénnyel. Érdekes megvizsgálni a negyedik komponens fizikai jelentését. Ha a $dp_4/d\tau = F_4$ egyenletbe beírjuk p_4-nek (11.5) és F_4-nek (11.12) kifejezését, úgy a

$$\frac{dE}{d\tau} = \frac{K_x u_x + K_y u_y + K_z u_z}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

összefüggést kapjuk. Megszorozva mindkét oldalt $d\tau = \sqrt{1 - u^2/c^2}\, dt$-vel

$$dE = (K_x u_x + K_y u_y + K_z u_z) dt.$$

Természetesen az u_x, u_y, u_z sebességkomponensek nem mások, mint az x, y, z koordináták idő szerinti deriváltjai:

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}. \tag{6.11.19}$$

Tehát

$$dE = K_x dx + K_y dy + K_z dz. \tag{6.11.20}$$

A jobboldali kifejezés a **K** erőnek az elemi elmozdulás alatt végzett munkája. A baloldalon az energia növekménye áll. (11.20) tehát az energiatételt fejezi ki. Összefoglalva mondhatjuk, hogy a (11.18) négyes mozgásegyenlet a közönséges mozgásegyenleteket és az energia megmaradásának törvényét foglalja össze.

Nézzük meg, hogy mit tudunk még kiolvasni a (11.18) négyes mozgásegyenletből. Az egyenlet mindkét oldalát p_i-vel szorozva és összegezve $i = 1$-től $i = 4$-ig, kapjuk:

$$p_1 \frac{dp_1}{d\tau} + p_2 \frac{dp_2}{d\tau} + p_3 \frac{dp_3}{d\tau} + p_4 \frac{dp_4}{d\tau} = F_1 p_1 + F_2 p_2 + F_3 p_3 + F_4 p_4.$$

A baloldalon azonos átalakítást hajtunk végre

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2) = F_1 p_1 + F_2 p_2 + F_3 p_3 + F_4 p_4.$$

A (11.11) összefüggésünk mutatja, hogy a baloldal gömbölyű zárójelében szereplő összeg a $-m_0^2 c^2$ konstanssal egyenlő. A τ sajátidő szerinti differenciálhányadosa tehát zérus. Következésképpen

$$F_1 p_1 + F_2 p_2 + F_3 p_3 + F_4 p_4 = 0. \tag{6.11.21}$$

A *Minkowski*-erő és a négyesimpulzus a négydimenziós térben egymásra merőleges vektorok.

A (11.18) egyenlet integrálás után megadja, hogy a négyesimpulzus hogyan függ a τ sajátidőtől, azaz a

$$p_i = p_i(\tau) \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{6.11.22}$$

függvények kiszámíthatók. Minket végső soron az érdekel, hogy az x, y, z koordináták hogyan függnek a t időtől, mert ez jelenti a mozgás leírását a K vonatkoztatási rendszerben. Hogy ezt megkaphassuk, még fel kell írnunk a koordináták és az impulzusok kapcsolatát. Ehhez a (11.19) egyenleteket szorozzuk meg $m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$-tel. Ekkor a baloldalon a (11.6) impulzusok fognak szerepelni, a jobboldalon pedig fellép a (11.16) sajátidőtartam. Kapjuk tehát

$$m_0 \frac{dx}{d\tau} = p_1(\tau), \qquad m_0 \frac{dy}{d\tau} = p_2(\tau), \qquad m_0 \frac{dz}{d\tau} = p_3(\tau). \tag{6.11.23}$$

Itt a jobboldalakon már a τ sajátidő (11.22) szerint ismert kifejezései állanak, úgyhogy (11.23) integrálása már a koordinátákat mint τ függvényeit fogja megadni:

$$x = x(\tau), \qquad y = y(\tau), \qquad z = z(\tau). \tag{6.11.24}$$

A probléma végleges lezárásához még a τ sajátidő és a t rendszeridő kapcsolatát kell meghatározni (11.16) szerint

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{p_4(\tau)}{im_0c}. \tag{6.11.25}$$

Ennek integrálása megadja a kívánt $t = t(\tau)$ összefüggést.

Kiemeljük, hogy a (11.23) és (11.25) összefüggések szintén négyesvektor egyenletet képeznek. A (11.1) definíció miatt ugyanis ezek az összefüggések így írhatók:

$$m_0 \frac{dx_k}{d\tau} = p_k(\tau). \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{6.11.26}$$

Itt a bal- és a jobboldalon egyaránt négyesvektor áll. Végül, ha (11.26)-ot (11.18)-ba helyettesítjük, úgy a relativisztikus dinamika mozgásegyenletei a következő négyesvektor egyenlet alakját öltik:

$$m_0 \frac{d^2x_k}{d\tau^2} = F_k. \tag{6.11.27}$$

Ez jelenti a newtoni (1.4.2) egyenletek relativisztikus általánosítását.

12. §. Az általános relativitáselmélet alapjai

A speciális relativitás elmélete, mint láttuk, olyan események leírásával foglalkozik, melyek egymáshoz képest egyenesvonalú, egyenletes mozgásban levő koordinátarendszerekhez rögzíthetők. Az általános relativitáselmélet ezzel szemben egymáshoz képest gyorsuló mozgást végző koordinátarendszerekben lezajló eseményeket tárgyalja. A tárgyalást megkönnyíti a MINKOWSKI által bevezetett négydimenziós tér–idő kontinuum (x, y, z és ict koordinátákkal kifeszített tér) geometriája, mely euklidesi síkgeometriai tárgyalás esetén a speciális relativitás-

elmélet tételeit szolgáltatja, görbült, *Rieman*-geometria használata esetén pedig az általános relativitáselmélet tételeit.

EINSTEIN az általános relativitáselmélet kidolgozásakor az *ekvivalencia elvének* alaphipotéziséből indult ki, ami szerint a gravitációs tér helyettesíthető egy megfelelően gyorsuló rendszerrel – a fent jelzett geometria nyelvén megfogalmazva – egy görbült *Rieman*-térrel. Ez a hipotézis GALILEInek azon felismerésén alapul, hogy „minden test egyformán esik", azaz, hogy a tehetetlen és gravitációs tömeg azonos. Ezt a tényt igen nagy (10^{-8}) pontossággal igazolta EÖTVÖS LORÁND híres torziós ingájával. A tehetetlen és gravitációs tömeg azonossága azonban csak szükséges feltétele az általános relativitáselmélet helyességének, de nem döntő bizonyíték az elmélet mellett.

Az általános relativitáselmélet helyességét eldöntő kísérletekként a következő három kísérletet szokás felsorolni:

1. A bolygók perihélium mozgása. A bolygók pályája nem zárt ellipszis, hanem kismértékben precessziós mozgást végez. A jelenség a Merkur mozgásánál a legnagyobb, de ennél is csak 43 ívmásodperc egy évszázad alatt.
2. A Nap közelében elhaladó fény nem egyenes vonalban terjed, hanem a Nap erős gravitációs terében elgörbül. Ez az effektus a Nap felületét súroló fénysugárra 1,75 ívmásodperces elhajlást jelent.
3. Gravitációs térben levő atom által kisugárzott spektrum a térmenteshez képest vörös-eltolódást szenved (a kisugárzott hullámhossz megnő). A Nap felületén levő atom esetében ez a vörös-eltolódás

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = 2{,}1 \cdot 10^{-6},$$

ennek kb. 30-szorosát észlelték a Szíriusz Fehér Törpéjénél.

Ezek a csillagászati megfigyelések valóban támogatni látszanak az általános relativitáselmélet helyességét, de egyrészt – miután rendkívül kicsi effektusokról van szó – a mérések pontossága meglehetősen durva, másrészt még amennyiben nagyobb pontossággal sikerülne is meghatározni őket, nem adnak egyértelmű logikai bizonyítékot arra vonatkozóan, hogy a gravitációs tér teljes mértékben helyettesíthető egy gyorsuló koordinátarendszerrel.

Az utóbbi években a *Mössbauer*-effektuson alapuló vizsgálatok lehetővé tették, hogy a vörös eltolódást Földünkön végzett fizikai kísérlettel is meghatározhassák. Az ekvivalencia elve, mint láttuk, azt mondja ki, hogy, ha két azonos atomórát térmentes, ill. g intenzitású gravitációs térbe helyezünk, akkor a két atomóra által kisugárzott frekvencia között akkora eltérés lesz, mintha a második atomóra g gyorsulással távolodna az elsőtől. Az első atomóra legyen egy *Mössbauer* γ-sugárzó atommag h magasságban, a második egy az első mag γ-sugárzását abszorbeáló mag, a Föld felszínén.

Ha az utóbbi magot ugyanolyan potenciálú helyen levő, de az elsőhöz képest g-vel gyorsulónak tekintjük, akkor ezen mag sebessége azalatt a $t = h/c$ idő alatt, még a γ-sugár megteszi a h utat, $v = gt = gh/c$-vel megváltozik. A fellépő Doppler-

effektus révén az abszerbáló mag rezonancia-frekvenciája a következő érték lesz:

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \nu_0\left(1 - \frac{gh}{c^2}\right).$$

A relatív frekvenciaváltozás pedig

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{gh}{c^2}. \tag{6.12.1}$$

A $\Delta\nu$ frekvencia-különbséget akkor lehet észlelni, ha elég nagy a γ-vonal természetes szélességéhez, Γ-hoz képest. Pl. a Fe^{57}-mag 14,4 keV-os γ-ja esetén $\nu_0 = 3{,}48 \cdot 10^{18}\ s^{-1}$ és $\Gamma = 1{,}11 \cdot 10^{6}\ s^{-1}$. $h = 20$ m magasságkülönbség esetén (12.1)-ből a $\Delta\nu = 0{,}76 \cdot 10^{4}\ s^{-1}$ értéket kapjuk, ami Γ-nak kb. 1%-a és az okozott frekvencia-változás már jól észlelhető. Ezzel a módszerrel kb. 5% pontossággal mérték a vörös eltolódást.

MÁSODIK RÉSZ

ELEKTRODINAMIKA

Bevezetés

Az elektrodinamika elektromos és mágneses jelenségekkel foglalkozik. Tárgyköre igen nagy, ide tartoznak az elektromos vonzás és taszítás jelenségei, a mágnesek kölcsönhatása, az elektromos áramok, indukció és a váltakozó áramoknál fellépő jelenségek, továbbá ide tartoznak az elektromágneses hullámok, beleértve a fényhullámokat és a röntgensugarakat is.

Mint ismeretes, a mechanika a fizikának az az ága, melyben először alakultak ki alkalmas fogalmak és melyben először sikerült egzakt természeti törvényeket felismerni. Ez természetesen magával hozta azt, hogy más fizikai jelenségeket is a mechanika alapján igyekeztek magyarázni. Ez látszott akkor az egyedül lehetséges útnak, mely csakhamar eredményekre vezetett, melyek azonban nem voltak kielégítőek. Az elektromos és mágneses jelenségekre sokféle, egymástól független törvényt sikerült csak megállapítani. A tudomány azonban mindig az egységet keresi és a mechanika analógiájára itt is keresték azt az általános összefüggést, mely ezeket a speciális törvényeket magában foglalja és melyből ezek levezethetők. Többféle ilyen törvényt állítottak fel, de ezek nem voltak kielégítőek.

A baj ott volt, hogy túl szoros volt az analógia a klasszikus mechanikával, melytől meg kellett szabadulni. Egy új és lényegesen megfelelőbb felfogás kialakításában FARADAY volt az úttörő, aki többek között rámutatott az elektromos töltések közti teret betöltő közeg fontosságára. FARADAY gondolatainak MAXWELL adott matematikai alakot. Híres egyenleteivel a *Maxwell*-féle egyenletekkel megvetette az elektrodinamika alapját, és ezen alapokból hatalmas elméletet épített fel.

FARADAYt és MAXWELLt elméletük kialakításában a rugalmas testek analógiája, vagyis mechanikai analógia vezette. A MAXWELL-féle egyenletek mechanikai értelmezése azonban nem sikerült kielégítően. Sokáig az egész teret betöltő éterrel, melyet nagyon mesterkélt tulajdonságokkal ruháztak fel, próbálták a *Maxwell*-egyenleteket levezetni. Mivel azonban a feltevések nagyon valószínűtlenek voltak, lassanként felhagytak ezzel, s ma a *Maxwell*-egyenletek már mindennemű éterelképzeléstől mentesen alkotják az elektrodinamika alapját.

Mielőtt a rendszeres elektrodinamikai tárgyalásba belefognánk, hogy az elektromágneses térre vonatkozó törvényeket könnyebben kifejezhessük, *vektoranalízissel* foglalkozunk. Néhány, a következőkben nagyon fontos tételt vezetünk le és megismerkedünk több fontos *potenciálelméleti fogalommal* és tétellel. Ezután rátérünk az *elektrosztatikus* és a *stacionárius* terekre, majd a *magnetosztatikus* terekkel, *kvázistacionárius* terekkel és *elektromos hullámokkal* foglalkozunk.

HETEDIK FEJEZET

VEKTORANALÍZIS

1. §. Vektormezők, skaláris mezők

Olyan teret vagy térrészt, melynek minden pontjához tartozik egy vektor, *vektortérnek*, vagy *vektormezőnek* nevezzük. Pl. az áramló folyadék minden pontjában a folyadék sebessége a folyadék sebességének vektorterét adja. Ilyen a földi nehézségi erő vektortere, vagy ilyen egy töltött elektromos test elektromos erőtere is.

Ezzel szemben a *skalártér* vagy *skalármező* olyan tér, melynek minden pontjához tartozik egy skaláris mennyiség, vagyis egy szám. Ilyen pl. egy test hőmérséklete vagy sűrűsége.

Egy vektormezőt azáltal *jellemezhetünk*, ill. adhatunk meg, hogy megadjuk az illető vektor komponenseit, mint a hely függvényeit. Pl. egy $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$ vektormezőt a következőképpen adhatunk meg

$$\begin{aligned} v_x &= v_x(x, y, z), \\ v_y &= v_y(x, y, z), \\ v_z &= v_z(x, y, z). \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

A skaláris mező meghatározása ezzel szemben egyetlen függvénnyel történik

A vektormezőkre példa a gravitációs tér egy tömegpont környezetében. Legyen O-ban m tömegű anyagi pont, P-ben pedig egységnyi tömegű pont. Ekkor az erő

$$|\mathbf{K}| = f\frac{m}{r^2}.$$

Az iránykoszinuszok $-\frac{x}{r}$, $-\frac{y}{r}$, $-\frac{z}{r}$, tehát

$$K_x = -f\frac{mx}{r^3},$$

$$K_y = -f\frac{my}{r^3},$$

$$K_z = -f\frac{mz}{r^3}.$$

2. §. Gradiens, potenciál

Ha adva van egy u skalár mint a hely függvénye, akkor ennek csak elsőrendű kicsi tagokat tartalmazó teljes megváltozása, mint ismeretes,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \tag{7.2.1}$$

ahol x, y, z derékszögű koordináták. Ez a megváltozás felfogható, mint a $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ vektor és a (dx, dy, dz) vektor skaláris szorzata. Az előbbit u gradiensének nevezzük és grad u-val jelöljük. Az utóbbi nem más, mint az ívelem, $d\mathbf{s}$. Természetesen du függ $d\mathbf{s}$ nagyságától és irányától.

Tehát definiálhatunk egy **A** vektort a következőképpen

$$\mathbf{A} = \text{grad } u. \tag{7.2.2}$$

Ez vektoregyenlet lévén a következő 3 egyenletet jelenti

$$A_x = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$A_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{7.2.3}$$

$$A_z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Azt a ϕ függvényt, melyre fennáll, hogy

$$\mathbf{A} = -\text{ grad } \phi, \tag{7.2.4}$$

az **A** vektormező potenciáljának nevezzük.

Előző példánknál

$$u = fm\frac{1}{r}$$

és

$$\phi = -fm\frac{1}{r},$$

mert

$$K_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = fm\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = fm\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{x}{r} = -fm\frac{x}{r^3},$$

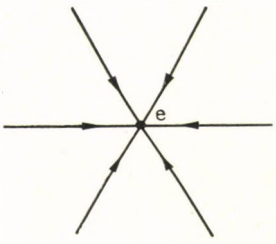
$$K_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = fm\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = fm\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{y}{r} = -fm\frac{y}{r^3},$$

$$K_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = fm\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = fm\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{z}{r} = -fm\frac{z}{r^3}.$$

Ha adva van a helynek egy u függvénye, mely differenciálható, akkor mindig megadható a gradiensének mezeje. De *nem minden vektormezőnek van gradiense*, ill. potenciálja. Pl. nincs potenciálja annak a vektortérnek, melyet egy tengely körül forgó merev test egyes pontjainak sebessége ad meg.

3. §. Trajektóriák

Egy vektorteret úgy ábrázolhatunk, hogy felrajzoljuk azokat a görbéket, melyek érintői irányába mutat a vektor, ezek a *trajektóriák*. A trajektóriák csak a vektor irányát adják meg. Nagyságát a trajektóriák sűrűségével szokás meg-



132. ábra. Egy tömegpont gravitációs erőterének erővonalai

adni, mégpedig úgy, hogy a trajektóriákra merőleges felületegységen áthaladó trajektóriák száma egyenlő legyen a vektor abszolút értékével. Az ilyen trajektóriákat *erővonalak*nak nevezzük, mert először erőterek ábrázolásánál vált használatossá. Előbbi példánkban a trajektóriák a 132. ábrán vannak ábrázolva. Az erővonalak egymással egyenlő szögeket zárnak be példánkban. A centrumtól távolodva ugyanannyi erővonal nagyobb gömbfelületen halad át. A gömbök felülete úgy aránylik egymáshoz mint sugaraik négyzete, a felületegységen áthaladó erővonalak száma tehát r^2-el fordítva arányos, ami megfelel annak, hogy $|\mathbf{K}|$ is fordítva arányos r^2-el. Hogy hány erővonalat húzunk a felületegységen át, azt m szabja meg.

4. §. Ekvipotenciális felületek

Legyen adva egy $\mathbf{A}$ vektormező, melynek van potenciálja, vagyis legyen

$$\mathbf{A} = -\operatorname{grad}\phi.$$

A $\phi(x, y, z) = c = \text{konst.}$ felületeket, melyeken tehát a potenciál konstans, ekvipotenciális felületeknek nevezzük. Mivel van potenciál, a vektor komponensei, vagyis a trajektóriák iránykoszinuszai arányosak $\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}$-vel. Ugyanezekkel a mennyiségekkel arányosak azonban, mint az analízisből isme-

retes, a $\phi = c$ felület normálisának iránykoszinuszai. *A vektortér trajektóriái tehát merőlegesek az ekvipotenciális felületekre*, vagyis e felületek ortogonális trajektóriái.

Előbbi példánk esetében a

$$\phi = -f\frac{m}{r} = c$$

egyenletből következik, hogy $r = c$, vagyis az ekvipotenciális felületek koncentrikus gömbök. A trajektóriák, mint láttuk, sugarak, melyekről tudjuk, hogy a felületekre merőlegesek.

5. §. Vonalintegrál

Kössük össze az **A** vektormező két pontját, P-t és P'-t egy folytonos-görbével, melynek minden pontjában van érintője és állapítsuk meg a pozitív haladás irányát. Ekkor a görbe minden $d\mathbf{s}$ íveleme egy vektor, melynek abszolút értékét ds-sel jelöljük, komponensei pedig dx, dy, dz. A görbe minden pontjában képezhetjük az **A** vektornak és a $d\mathbf{s}$ vektornak skaláris szorzatát, mely a következő

$$\mathbf{A}d\mathbf{s} = A_s ds = A_x dx + A_y dy + A_z dz.$$

Ezeknek a skaláris szorzatoknak összegét a görbe mentén P-től P'-ig nevezzük az **A** vektor vonalmenti integráljának, mely tehát a következő

$$\int_P^{P'} \mathbf{A}d\mathbf{s} = \int_P^{P'} (A_x dx + A_y dy + A_z dz). \tag{7.5.1}$$

Egy zárt görbe menti vonalintegrált a következőképpen jelölünk

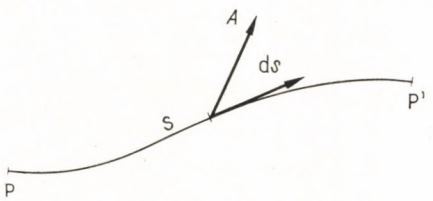
$$\oint \mathbf{A}d\mathbf{s} = \oint A_s ds.$$

Vannak olyan vektormezők, amelyekre fennáll, hogy

$$\oint A_s ds = 0 \tag{7.5.2}$$

minden zárt görbére. Ezek a vektormezők a következőkben fontos szerepet játszanak és így ezekkel kissé részletesebben foglalkozunk.

Az ilyen vektormezőkre először is fennáll, hogy a vonalintegrál értéke *a görbe alakjától független* és csak a végpontoktól függ. A 133. ábrán feltüntetett zárt



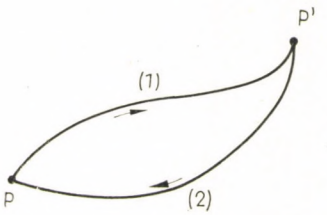
133. ábra. Egy vektor vonalmenti integráljának meghatározása

görbére fennáll, hogy

$$\oint A_s ds = \int_P^{P'} (1) + \int_{P'}^{P} (2) = 0 .$$

Ismeretes, hogy

$$\int_{P'}^{P} (2) = - \int_{P}^{P'} (2) ,$$



134. ábra. Ha az integrál független az út alakjától, akkor a zárt görbére vett integrál zérus

tehát

$$\int_P^{P'} (1) - \int_P^{P'} (2) = 0 ,$$

vagyis

$$\int_P^{P'} (1) = \int_P^{P'} (2).$$

Minthogy az (1) és (2) görbe bármilyen lehet, ezzel igazoltuk tételünket.

Ha a kezdőpont, P, állandó, akkor a vonalintegrál csak a végponttól függ

$$\psi(x, y, z) = \int_{P_0}^{P(x,y,z)} A_s ds .$$

Az **A** *vektormező ennek a függvénynek a gradiense.* Ugyanis

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \int_{P_0}^{P} A_s ds = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\int_{P_0}^{P'} A_s ds - \int_{P_0}^{P} A_s ds}{\Delta s}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{A_s \Delta s}{\Delta s} = A_s .$$

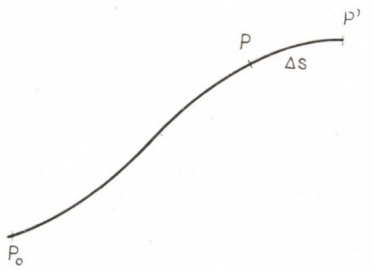
Ezzel állításunkat igazoltuk, mert ha az s irány rendre x, y, z, akkor

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = A_x , \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = A_y , \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = A_z .$$

A *potenciál* a $-\psi = \phi$ függvény, tehát a potenciál

$$\phi = -\int_{P_0}^{P} A_s ds. \tag{7.5.3}$$

Ha tehát egy vektormezőben a vonalintegrál minden zárt görbére eltűnik, akkor létezik egy egyértékű potenciál, mely egyenlő a vonalintegrállal negatív előjellel.



135. ábra. Vektormezők gradiensének meghatározása

Azonnal belátható, hogy *ha potenciál létezik, mely a helynek egyértékű függvénye, akkor a vonalintegrál minden zárt pályára eltűnik*. Ugyanis ha van potenciál, akkor

$$\int_{P_0}^{P} A_s ds = \int_{P_0}^{P} (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = \int_{P_0}^{P} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} dx - \frac{\partial \phi}{\partial y} dy - \frac{\partial \phi}{\partial z} dz\right) =$$

$$= -\int_{P_0}^{P} d\phi = -(\phi_P - \phi_{P_0}).$$

Ha tehát a görbe zárt, vagyis ha P összeesik P_0-lal, akkor

$$\oint A_s \, ds = -(\phi_P - \phi_{P_0}) = 0. \tag{7.5.4}$$

Mégegyszer kiemeljük, hogy *nem minden vektormezőnek van potenciálja* és ha van is potenciál, az nem mindig egyértékű függvénye a helynek.

6. §. Felületi integrál

Valamely **A** *vektor normális komponensének felületi integrálja* alatt a következőt értjük. Legyen adva egy F felület, ezt bontsuk dF felületelemekre, melyek mindegyikén állapítsuk meg A_n-et, az **A** normális komponensét. Ezután képezzük az $A_n dF$ szorzatokat és összegezzük őket. Vagyis a felületi integrál a következő lesz

$$\int_F A_n dF. \tag{7.6.1}$$

Ha $\mathbf{A} = \mathbf{v}$ egy a teret betöltő folyadék sebessége, akkor ez az integrál az időegységben az F zárt felületből kiáramló folyadék térfogata.

7. §. Divergencia

A vektormező egy P pontjában a divergenciát a következőképpen definiáljuk. Vegyük körül a P pontot egy zárt F felülettel, melynek térfogata V. Képezzük a következő integrált: $\int_F A_n dF$ és osszuk ezt a V térfogattal. E hányados határértéke, ha a felület minden határon túl kisebbedik a P pont körül, a divergencia a P pontban. Vagyis

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \lim_{V \to 0} \frac{\int_F A_n dF}{V}. \tag{7.7.1}$$

Ha $\mathbf{A}$ egy inkompresszibilis folyadék sebessége, akkor div$\mathbf{A}$ a térfogategységből időegység alatt kilépő folyadék térfogatát jelenti. Tehát div$\mathbf{A}$ a forráserősséget adja, mert ha F belsejében nincs forrás, div$\mathbf{A} = 0$. Ha div$\mathbf{A}$ mindenütt zérus, a tér forrásmentes.

Állapítsuk meg div $\mathbf{A}$ alakját derékszögű koordinátákban. Jelöljük $\mathbf{A}$ komponenseit A_x, A_y, A_z-vel. Helyezzük a koordinátarendszer origóját a P pontba, az F felületet pedig válasszuk egy parallelepipedonnak, amelynek élhosszai $2a$, $2b$, $2c$. Legyenek ezek kis távolságok. Ekkor A_x, A_y és A_z a felületen a következő sorokkal állítható elő:

$$A_x = A_{x0} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)_0 z + \ldots,$$

$$A_y = A_{y0} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)_0 z + \ldots,$$

$$A_z = A_{z0} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)_0 z + \ldots,$$

ahol a 0 index a kezdőpontra vonatkozik és az elsőnél magasabb rendű kicsi tagokat elhagytuk. Ezek után képezzük az (A_x, A_y, A_z) vektor normális komponensének felületi integrálját.

A felület normálisa mindenütt kifelé mutat. Tehát pl. a $(+a)$-lapon $A_n = A_x$, a $(-a)$-lapon $A_n = -A_x$. A $(+a)$-lapra kiterjesztett integrál

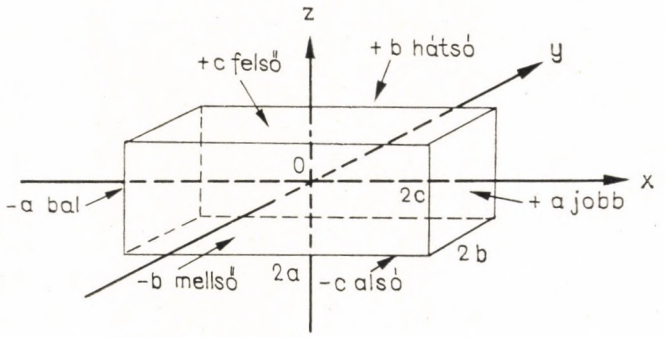
$$F_{+a} = \int_{-b}^{+b}\int_{-c}^{+c} A_x dy dz = \int_{-b}^{+b}\int_{-c}^{+c} \left(A_{x0} + \frac{\partial A_x}{\partial x} a + \frac{\partial A_x}{\partial y} y + \frac{\partial A_x}{\partial z} z\right) dy dz,$$

ahol a deriváltak mellől mindenütt elhagytuk a 0 indexet. A zárójel első két tagja

konstans, tehát

$$F_{+a}=\left(A_{x0}+\frac{\partial A_x}{\partial x}a\right)\int_{-b}^{+b}\int_{-c}^{+c}dydz+\frac{\partial A_x}{\partial y}\int_{-b}^{+b}\int_{-c}^{+c}ydydz+\frac{\partial A_x}{\partial z}\int_{-b}^{+b}\int_{-c}^{+c}zdydz=$$

$$=A_{x0}\,4bc+\frac{\partial A_x}{\partial x}4abc\,.$$



136. ábra. A divergencia kifejezésének levezetése derékszögű koordinátákban

A $(-a)$-lapra kiterjesztett integrál pedig

$$F_{(-a)}=\int_{-b}^{+b}\int_{-c}^{+c}(-A_x)dydz=-\int_{-b}^{+b}\int_{-c}^{+c}\left(A_{x0}-\frac{\partial A_x}{\partial x}a+\frac{\partial A_x}{\partial y}y+\frac{\partial A_x}{\partial z}z\right)dydz=$$

$$=-A_{x0}\,4bc+\frac{\partial A_x}{\partial x}4abc\,,$$

amint ez az előbbiek alapján közvetlenül belátható. Tehát

$$F_{+a}+F_{-a}=\frac{\partial A_x}{\partial x}8abc\,.$$

Hasonlóképpen

$$F_{+b}+F_{-b}=\frac{\partial A_y}{\partial y}8abc\,.$$

$$F_{+c}+F_{-c}=\frac{\partial A_z}{\partial z}8abc\,.$$

Tehát a parallelepipedon egész felületére vonatkozó felületi integrál

$$\int_F A_n df = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) 8abc,$$

vagyis

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{V \to 0} \frac{\int A_n df}{V} = \frac{\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) 8abc}{8abc},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Határátmenetre nem is volt szükség, mert A_x, A_y, A_z sorfejtésénél az elsőnél magasabb rendű tagokat elhagytuk. Ha ezeket megtartottuk volna, akkor azok a limes képzésénél most elestek volna, tehát a nyert kifejezés egzakt. Mint látható, $\operatorname{div} \mathbf{A}$ a *hely függvénye.*

8. §. Gauss tétele

Ez egyike a legfontosabb vektortani tételeknek, melyre minduntalan szükség lesz. GAUSS tétele szerint $\operatorname{div}\mathbf{A}$-nak adott V térfogatra kiterjesztett térfogati integrálja a vektor normális komponensének ugyanezen térfogatot körülvevő felületre kiterjesztett felületi integráljával egyenlő. Érvényes, ha V-ben $\mathbf{A}$ deriváltjai léteznek és folytonosak

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{A}\, dV = \int_F A_n\, dF. \tag{7.8.1}$$

A tétel bizonyítását az ötödik fejezet 4. §-ban már elvégeztük.

9. §. Green tétele

Induljunk ki GAUSS tételéből

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{A}\, dV = \int_F A_n\, dF.$$

Legyen

$$\mathbf{A} = u \operatorname{grad} v. \tag{7.9.1}$$

Helyettesítsük ezt be GAUSS tételébe. Evégből először határozzuk meg div**A**-t

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$A_x = u\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad A_y = u\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad A_z = u\frac{\partial v}{\partial z}.$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} + u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} + u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right). \quad (7.9.2)$$

A zárójelben levő kifejezést *Laplace*-féle kifejezésnek nevezzük és Δv-vel jelöljük, vagyis

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (7.9.3)$$

Eszerint tehát

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v + u\Delta v. \quad (7.9.4)$$

Ezt kell behelyettesíteni a *Gauss*-egyenlet baloldalába. Határozzuk meg A_n-t

$$A_n = u \operatorname{grad}_n v,$$

ahol az n index az n irányába vett komponenst jelenti.

Közvetlenül a definícióból belátható, hogy $\operatorname{grad}_n v = \frac{\partial v}{\partial n}$, de ez számítással is igazolható. Ugyanis grad v komponensei $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}$; a normális iránykoszinuszai, ha a normálist **n**-nel jelöljük, $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$, $\cos(n, z)$. $\operatorname{grad}_n v$-t megkapjuk, ha grad v-nek **n**-re való vetületét képezzük, amely

$$\operatorname{grad}_n v = \operatorname{grad} v\mathbf{n} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial v}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial v}{\partial z}\cos(n, z).$$

A normális iránykoszinuszai, ha a normális menti növekményt dn-nel és ennek a koordinátatengelyekre való vetületeit dx, dy, dz-vel jelöljük, így is írhatók:

$$\cos(n, x) = \frac{dx}{dn}, \qquad \cos(n, y) = \frac{dy}{dn}, \qquad \cos(n, z) = \frac{dz}{dn},$$

$$dn = |\, d\mathbf{n} \,|.$$

Ezeket behelyettesítve nyerjük

$$\operatorname{grad}_n v = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dn} = \frac{\partial v}{\partial n}.$$

Ezt és a div**A**-ra nyert kifejezést beírva GAUSS egyenletébe, nyerjük

$$\int_V (\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v + u\Delta v)dV = \int_F u\frac{\partial v}{\partial n}\,dF. \tag{7.9.5}$$

Ez GREEN tétele. Ez a tétel szintén térfogati integrált fejez ki felületi integrállal. Csak akkor érvényes, ha V-ben u első és v második deriváltjai léteznek és folytonosak.

Ha u-nak is léteznek a második deriváltjai és folytonosak is, akkor u és v felcserélhető, ugyanis úgy is okoskodhatunk, hogy A helyébe $v \operatorname{grad} u$-t teszünk, ekkor nyerjük

$$\int_V (\operatorname{grad} v \operatorname{grad} u + v\Delta u)dV = \int_F v\frac{\partial u}{\partial n}\,dF.$$

Ha az előbbi egyenletből az utóbbit kivonjuk, akkor

$$\int_V (u\Delta V - v\Delta u)dV = \int_F \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dF. \tag{7.9.6}$$

Ez a *Green*-tétel szimmetrikus alakja. Érvényességi feltétele, hogy u és v első és második deriváltjai létezzenek és folytonosak legyenek.

10. §. Stokes tétele

STOKES tétele bizonyos felületi integrálnak egy a felületet határoló görbére kiterjesztett vonalintegrállá való átalakítását mondja ki.

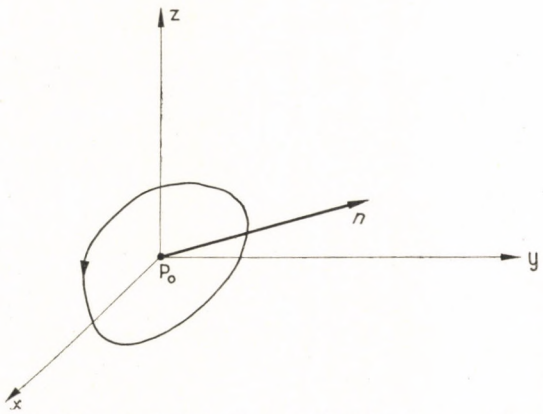
Legyen u az első deriváltjaival folytonos függvény. Fejtsük *Taylor*-sorba P_0 környezetében. P_0 legyen az origó.

$$u = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 z + \ldots$$

Ha P_0 kis környezetére szorítkozunk, elég az elsőrendű kicsi tagokat megtartani.

Képezzük az $\oint udx$ integrált egy a P_0 pont környezetében haladó síkgörbének tekinthető zárt görbére. A görbén a pozitív haladás irányát úgy állapítjuk meg, hogy az megegyezzék az óramutató járásával, ha a görbe síkjának normálisa irányába nézünk. A görbe által körülzárt felület legyen dF.

$$\oint udx = u_0 \oint dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \oint xdx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \oint ydx + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 \oint zdx + \ldots$$

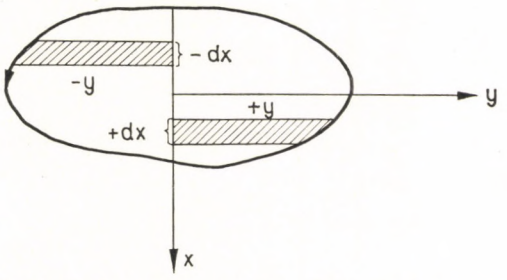


137. ábra. A P_0 körüli zárt síkgörbe és normálisa

Az integrált teljes körülfutásra kell képezni, vagyis egy $x = x_1$ értéktől ugyanazon x_1 értékig. Ekkor

$$\oint dx = \int_{x_1}^{x_1} dx = [x]_{x_1}^{x_1} = 0\,, \qquad \oint xdx = \int_{x_1}^{x_1} xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_1} = 0\,.$$

Marad tehát a 3-ik és 4-ik integrál, melyekkel részletesebben kell foglalkoznunk. $\oint ydx$ a görbe xy síkra való vetületének területe negatív előjellel. Ugyanis, ha a gör-



138. ábra. Az xy síkon vett integrál meghatározása

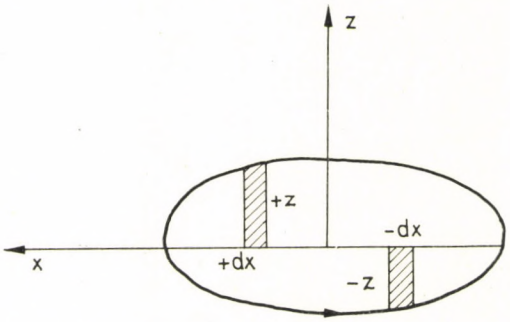
bén a kijelölt irányban haladunk, akkor a $(+\ y)$-ok mindig $(-\ dx)$-ekkel, a $(-\ y)$-ok pedig $(+\ dx)$-ekkel vannak szorozva, vagyis a terület negatív. A vetület területének abszolút értéke $dF\cos(n, z)$, tehát

$$\oint y dx = -\ dF\cos(n, z).$$

Egészen hasonlóan nyerjük, hogy

$$\oint z dx = +\ dF\cos(n, y),$$

itt ugyanis a $(+\ z)$-k $(+\ dx)$-ekkel és a $(-\ z)$-k $(-\ dx)$-ekkel vannak szorozva.



139. ábra. Az xz síkon vett integrál meghatározása

Tehát integrálunk így alakul

$$\oint u dx = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos(n, y) - \frac{\partial u}{\partial y}\cos(n, z)\right) dF.$$

A deriváltak mellől a 0 indexet elhagytuk, de emlékezetben tartjuk, hogy a deriváltakat a 0 pontban kell venni.

Teljesen hasonlóan nyerjük

$$\oint v dy = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos(n, z) - \frac{\partial v}{\partial z}\cos(n, x)\right) dF,$$

$$\oint w dz = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\cos(n, x) - \frac{\partial w}{\partial x}\cos(n, y)\right) dF.$$

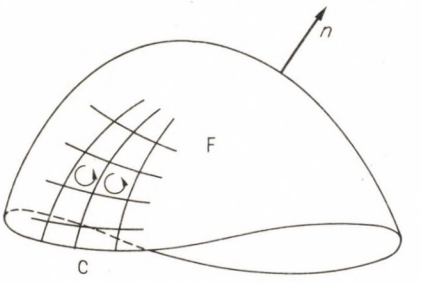
Az utóbbi 3 egyenlet összeadásából nyerjük

$$\oint (u dx + v dy + w dz) = \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(n, x) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(n, y) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n, z)\right\} dF. \qquad (7.10.1)$$

Ez STOKES tétele infinitezimális dF felületdarabra és az ezt határoló görbére vonatkozóan.

Véges felületre a következőképpen vezethetjük le STOKES tételét. Legyen adva egy véges F felület, melyet egy c görbe határol. Bontsuk fel a felületet két görbesereggel infinitezimális felületekre. Írjuk fel az elemi felületekre és az őket határoló görbékre STOKES tételét és adjuk össze az így nyert egyenleteket. A baloldalon a felületelemek kerületére vonatkozó vonalintegrálok összege a c görbére vonatkozó vonalintegrált adja, mert a belső határvonalak mindegyikén kétszer integrálunk egymással ellenkező irányban, így tehát a belső határvonalakra



140. ábra. Egy véges felület felbontása infinitezimális elemekre

kiterjesztett integrálok összege zérus. A jobboldalon pedig a { }-kifejezés felületi integrálja adódik F-re. Tehát

$$\oint_c (udx + vdy + wdz) = \int_F \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right\} dF. \qquad (7.10.2)$$

Ez *Stokes* tétele véges felületre.

Ha u, v, w egy $\mathbf{A}$ vektor komponensei, akkor nyerjük, hogy

$$\oint_c \mathbf{A} d\mathbf{s} = \oint_c A_s ds = \int_F \left\{ \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right\} dF. \qquad (7.10.3)$$

11. §. A rotáció

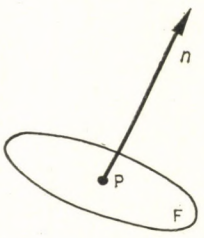
A rotáció fogalma

Az $\mathbf{A}$ vektormező minden pontjához hozzárendelhetünk egy vektort, melyet az $\mathbf{A}$ vektor rotációjának nevezünk. Egy P pontban a rotációnak bizonyos $\mathbf{n}$ irányba eső komponensét úgy definiáljuk, hogy a P ponton át $\mathbf{n}$-re merőleges síkot fekte-

tünk, melyben a P pontot körülvesszük egy zárt görbével. Erre a görbére képezzük az $\mathbf{A}$ vektor vonalintegrálját és elosztjuk a görbe által körülzárt területtel, F-fel. Ennek a hányadosnak a határértéke, ha a görbét a P pont körül minden határon túl összehúzzuk, a P pontban az $\mathbf{A}$ vektor rotációjának n irányban vett komponense. Tehát

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{A} = \lim_{F \to 0} \frac{\oint A_s ds}{F}. \tag{7.11.1}$$

$\mathbf{A}$ rotációjának jele rot $\mathbf{A}$. Az egyes irányokban vett komponenseket a rot szó mellé írt indexekkel jelöljük. Használatos még a curl szó is. A rotáció a vektor-



141. ábra. A rotáció n-irányú komponensének meghatározása

mező örvényeit adja. Beszélünk pl. örvénymentes terekről, ha rot $\mathbf{A} = 0$ a tér minden pontjában.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ komponensei A_x, A_y, A_z, és deriváltjaik folytonosak. STOKES tétele szerint

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{A} =$$

$$= \lim_{F \to 0} \frac{\int \left\{ \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right\} dF}{F}.$$

Feltevésünk szerint a $\{\ \}$ -ben levő kifejezés folytonos, tehát kis F felület esetén állandónak vehető és az integrál elé kiemelhető. Mivel $\int dF = F$, nyerjük

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos(n, y) +$$

$$+ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos(n, z). \tag{7.11.2}$$

Tehát STOKES tétele így is írható

$$\oint A_s ds = \int_F \operatorname{rot}_n \mathbf{A}\, dF \tag{7.11.3}$$

Ha az **n** iránya rendre x, y, z-vel azonos, akkor cos (n, x), cos (n, y) és cos (n, z) helyébe rendre (1, 0, 0), (0, 1, 0) és (0, 0, 1) írandó és ekkor

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}_x \mathbf{A} &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\ \mathrm{rot}_y \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ \mathrm{rot}_z \mathbf{A} &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{aligned} \tag{7.11.4}$$

Az előbbiekből látható, hogy a rotáció **n** irányú komponense éppen úgy adódik az x, y és z komponensekből, mint egy vektor **n** irányú komponense az x, y és z komponensekből. Mivel pedig a vektor transzformálása, egy bizonyos irányban vett komponens képzésének szabályán alapszik, kimondhatjuk, hogy a rotáció éppen úgy transzformálódik, mint egy vektor, tehát a rotáció vektor jellegű mennyiség.

A rot **A** x, y és z komponensei a következő mátrix másodrendű aldeterminánsai:

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{Vmatrix}. \tag{7.11.5}$$

Az első sorban álló kifejezések (operátorok) mint egy szimbolikus vektor komponensei foghatók fel.

A rotáció néhány tulajdonsága

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}(A_x, A_y, A_z)$ vektormezőnek van potenciálja, ekkor

$$A_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \qquad A_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \qquad A_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Differenciálással azonnal következik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_z}{\partial y} &= \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} &= \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} &= \frac{\partial A_x}{\partial y}, \end{aligned}$$

ez pedig azt jelenti, hogy a rotáció komponensei, vagyis maga a rotáció is eltűnik.

Tehát ha

$$\mathbf{A} = -\operatorname{grad} \phi,$$

akkor

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0.$$

Vagyis

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = 0. \tag{7.11.6}$$

Tehát ha egy vektormező egy skalármező gradiensével egyenlő, akkor rotációmentes.

Egyszerűen igazolható, hogy

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0, \tag{7.11.7}$$

ugyanis

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = 0,$$

amint a műveletek elvégzése után azonnal látható.

GAUSS tétele szerint

$$\int \operatorname{rot}_n \mathbf{A} dF = \int \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} dV = 0,$$

tehát

$$\int \operatorname{rot}_n \mathbf{A} dF = 0 \tag{7.11.8}$$

bármely zárt felületre.

Néhány komplikáltabb kifejezés kiszámítása az eddig megismert fogalmak segítségével

Egyszerűen kimutatható, hogy

$$\operatorname{grad} uv = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u, \tag{7.11.9}$$

$$\operatorname{div} u\mathbf{A} = \mathbf{A} \operatorname{grad} u + u \operatorname{div} \mathbf{A}, \tag{7.11.10}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u, \tag{7.11.11}$$

$$\operatorname{div} [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B}, \tag{7.11.12}$$

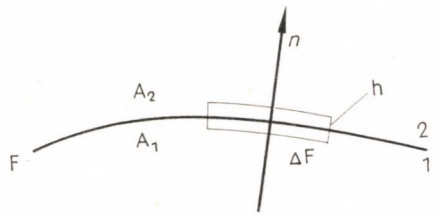
$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}, \tag{7.11.13}$$

$$\operatorname{rot} (u\mathbf{A}) = [\operatorname{grad} u, \mathbf{A}] + u \operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{7.11.14}$$

Mindezek a tételek egyszerűen bizonyíthatók, a bizonyítást az olvasóra bízzuk.

12. §. Felületi divergencia és felületi rotáció

Eddig feltételeztük, hogy a vektor a helynek folytonos függvénye. Előfordul azonban az az eset, hogy a vektor egy F felületen ugrást szenved, vagyis e felület két oldalán különböző értékeket vesz fel. Ebben az esetben a divergencia és rotáció definiáló egyenletei végtelent szolgáltatnak. Tekintsük a következő esetet, melynek kapcsán a *felületi divergenciát* definiáljuk. Az F felület 1. oldalán legyen az $\mathbf{A}$ vektor értéke $\mathbf{A}_1$, a 2. oldalán $\mathbf{A}_2$. Válasszunk egy ΔV térfogatelemet, mely az F felületet magában foglalja, alapja legyen ΔF, magassága h, tehát $\Delta V = \Delta F h$. Mivel elemi térfogatról van szó, a térfogatelem hengernek tekinthető. Képezzük A_n felületi



142. ábra. A felületi divergencia meghatározása

integrálját. Ha h-t magasabb rendű kicsinek választjuk, akkor a palástra vonatkozó rész elhagyható és marad

$$\int A_n \, dF = (A_n)_2 \Delta F - (A_n)_1 \Delta F .$$

$(A_n)_1$ előjele negatív, mert a felületi integrál képzésénél a normális komponens a felületből kifelé mutat, jelen esetben tehát $\mathbf{n}$-nel ellentétes irányú.

A divergencia definiáló egyenlete

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V = 0} \frac{\int A_n dF}{\Delta V} .$$

Behelyettesítve a fenti eredményt, adódik

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V = 0} \frac{(A_n)_2 - (A_n)_1}{h} = \infty .$$

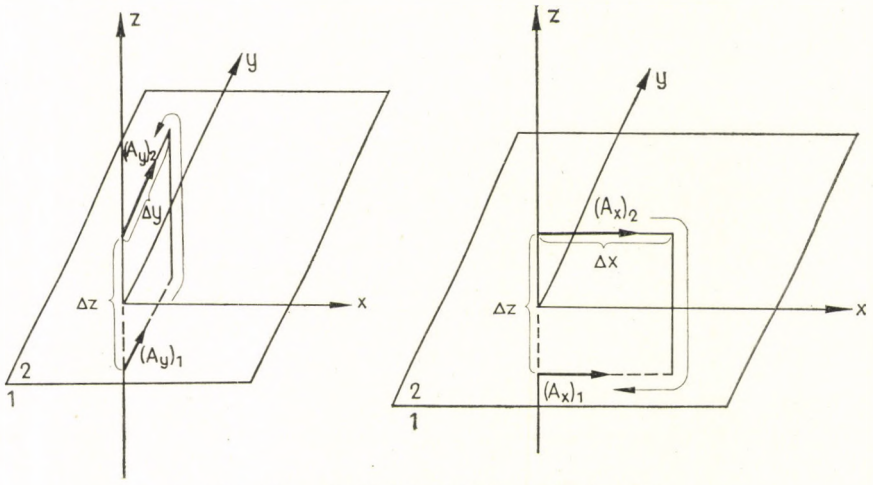
Véges eredményt kapunk, ha a következő határértéket képezzük

$$\lim_{\Delta F = 0} \frac{(A_n)_2 \Delta F - (A_n)_1 \Delta F}{\Delta F} = (A_n)_2 - (A_n)_1 .$$

Ezt a limest nevezzük $\mathbf{A}$ felületi divergenciájának és Div $\mathbf{A}$-val jelöljük, tehát

$$\operatorname{Div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta F = 0} \frac{(A_n)_2 \Delta F - (A_n)_1 \Delta F}{\Delta F} = (A_n)_2 - (A_n)_1 . \qquad (7.12.1)$$

A felületi rotációt hasonló megfontolásokkal definiálhatjuk. Tegyük fel, hogy az **A** vektor tangenciális komponense egy F felületen ugrást szenved, vagyis a felület két oldalán különböző értékeket vesz fel. A felület normálisát válasszuk z-tengelynek, az x, y-tengelyeket pedig helyezzük el a felület tangenciális síkjában. A vektor tangenciális komponense x és y komponensekből tevődik össze, ezeknek



143. ábra. A felületi rotáció meghatározása

van a felületen ugrásuk. Legyen

$$(A_x)_1 - (A_x)_2 = t_x\,,$$

$$(A_y)_1 - (A_y)_2 = t_y\,.$$

A rotáció x és y komponenseit a definíció szerint úgy kapjuk meg, hogy képezzük a vektor vonalintegrálját az ábrán látható $\Delta y \Delta z$ és $\Delta x \Delta z$ területű parallelogrammákra, az integrált osztjuk ezekkel a területekkel és áttérünk a határértékre. A megfelelő vonalintegrálok a következők:

$$\Delta y \Delta z\text{-re} \quad \oint A_s ds = -A_z \Delta z + (A_y)_1 \Delta y + A_z \Delta z - (A_y)_2 \Delta y = t_y \Delta y,$$

$$\Delta x \Delta z\text{-re} \quad \oint A_s ds = A_z \Delta z + (A_x)_2 \Delta x - A_z \Delta z - (A_x)_1 \Delta x = -t_x \Delta x.$$

Ha ezeket a vonalintegrálokat elosztjuk a parallelogrammák területével és a zérus határra térünk át, ∞-t kapunk, ugyanis pl.

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{A} = \lim_{\substack{\Delta y = 0 \\ \Delta z = 0}} \frac{t_y \Delta y}{\Delta y \Delta z} = \lim_{\Delta z = 0} \frac{t_y}{\Delta z} = \infty\,.$$

Véges eredményt kapunk, ha a vonalintegrál és a megfelelő hossz hányadosának limesét képezzük. Az így definiált vektort, **g**-t felületi rotációnak nevezzük. Kompo-

nensei a következők

$$g_x = \lim_{\Delta y=0} \frac{t_y \Delta y}{\Delta y} = t_y ,$$

$$g_y = \lim_{\Delta x=0} \frac{-t_x \Delta x}{\Delta x} = -t_x , \tag{7.12.2}$$

$$g_z = 0 .$$

g_z azért 0, mert a koordinátarendszert úgy választottuk meg, hogy az x, y sík legyen a diszkontinuitási sík érintősíkja abban a pontban, ahol a felületi rotációt meg akarjuk határozni, tehát $t_z = 0$, amiből következik, hogy g_z is 0.

Amint látható, **g** komponensei a következő mátrix másodrendű aldeterminánsai

$$\begin{Vmatrix} t_x & t_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} . \tag{7.12.3}$$

Tehát **g** nem egyéb, mint a $(t_x, t_y, 0)$ és a (0, 0, 1) vektorok vektori szorzata. A

$$t_x = (A_x)_1 - (A_x)_2, \quad t_y = (A_y)_1 - (A_y)_2, \quad t_z = 0$$

vektor az **A** vektor ugrása, **t**, a (0, 0, 1) vektor pedig a diszkontinuitási felület normálisa irányába, mégpedig az (1, 2) irányba mutató egységvektor, **n**. Tehát írhatjuk

$$\mathbf{g} = [\mathbf{t}, \mathbf{n}].$$

t, **n** és **g** merőlegesek egymásra és úgy következnek egymás után, mint a jobbkéz hüvelyk, mutató és középujja.

NYOLCADIK FEJEZET

AZ ELEKTROSZTATIKUS TÉR

1. §. Az elektromos térerősség és elektromos töltés

Hogy eljussunk az elektromos térerősség és elektromos töltés fogalmához, tekintsük a következő berendezést, melynek tulajdonképpeni célját csak később fogjuk megérteni. Helyezzünk el párhuzamosan, egymástól néhány cm távolságra két fémlemezt, melyeket pl. borostyánkő ékekkel tartunk megfelelő távolságban egymástól. A két fémlemez között porlasztóval finom ködöt létesítünk, mely nagyon kicsi olajcseppekből áll. Ezeket mikroszkóppal figyeljük. Azt fogjuk tapasztalni, hogy ezek a cseppek a nehézségi erő és a súrlódás együttes hatása folytán egyenletes sebességgel esnek lefelé. Érintsük meg a felső lapot egy selyemmel megdörzsölt üvegrúddal, az alsót pedig kössük össze fémes vezeték segítségével a Földdel. Ekkor azt tapasztaljuk, hogy a cseppek mozgása megváltozott, mégpedig lesznek olyan cseppek, melyek függőlegesen felfelé, lesznek olyanok, melyek függőlegesen lefelé mozognak, néhány pedig lebeg. Ha egy és ugyanazt a cseppet vizsgáljuk hosszabb ideig, akkor, ha a közelben rádiumot helyezünk el, azt tapasztaljuk, hogy sebessége olykor megváltozik, de a mozgás iránya mindig a függőleges mentén le vagy fel irányul. Ezeket a jelenségeket a következőképpen magyarázzuk. Feltesszük, hogy a két fémlap közti térben új erő lépett fel, melynek eredetét abban látjuk, hogy az egyik fémlapot megérintettük a selyemmel dörzsölt üvegrúddal. Ez az erő szuperponálódik a már jelen volt nehézségi erőre. A cseppek mozgásából azt is látjuk, hogy az erő nyilván függ az egyes cseppek állapotától, mert hiszen nem mindegyik csepp viselkedik azonos módon. Tehát a cseppekre ható erőt a következő szorzat alakjában vesszük fel

$$\mathbf{K} = e\mathfrak{E},$$

ahol $\mathfrak{E}$ a csepp állapotától független vektor, e egy szám, mely a csepp állapotától függ és melyet a csepp elektromos töltésének nevezünk. $\mathfrak{E}$-t elektromos térerősségnek nevezzük és, amint $\mathbf{K}$ definíciójából látjuk, ez egyenlő a pozitív egységnyi töltésre ható elektromos erővel. Elektromos töltését a részecske már a porlasztásnál kapja és a rádium sugárzásának hatására változtatja. A töltés előjelét úgy állapították meg, hogy pozitív töltése annak a résznek van, mely a felső laptól eltávolodik az elektromos tér hatására, negatív töltése pedig a lap felé mozgó résznek van.

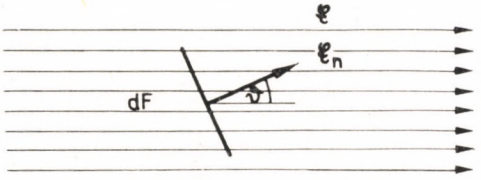
2. §. Az elektromos töltés mint az erőfluxus forrása

Az elektromos töltés és az erőfluxus közti összefüggés

Egy felületdarabon áthaladó erővonalak összességét *erőfluxus*nak nevezzük és Φ-vel jelöljük. A dF felületelemen áthaladó erővonalakat, vagyis erőfluxust a következőképpen kapjuk. Ha dF elegendő kicsi, az erővonalak egyenesnek és egymással párhuzamosaknak tekinthetők. Az elemi erőfluxus, mint látható, a következő lesz

$$d\Phi = \mathfrak{E}_n dF = \mathfrak{E} \cos \vartheta dF. \tag{8.2.1}$$

Ugyanis az erőfluxusra csakis $\mathfrak{E}$-nek dF-re merőleges komponense, $\mathfrak{E}_n$, mérvadó.



144. ábra. Az elemi erőfluxus

Tetszőleges F felületen áthaladó erőfluxus

$$\Phi = \int_F \mathfrak{E}_n \, dF.$$

Ha az integrált zárt felületre képezzük, akkor ez, mivel **n** a kifelé mutató normális irányát adja, egyenlő az F felülettel körülzárt térrészből kilépő erővonalak számának és a térrészbe belépő erővonalak számának különbségével.

Ha az F felületet úgy fektetjük, hogy az az előbbi kísérleti berendezésnél ne messe a lemezeket és vagy mindkét lemezt zárja körül vagy egyiket se, akkor, feltéve, hogy a környező térben és a lemezek között nincsenek töltött olajcseppek, Φ a zárt F felületre mindig zérus. Tehát a két lemez közti térben az erővonalaknak nincsenek forrásai. Φ azonban nem 0, ha F pl. a felső lemezt magában foglalja, de az alsót nem. Ekkor Φ számára 0-tól különböző értéket kapunk, amit azzal hozunk összefüggésbe, hogy a felső lemezt megérintettük az üvegrúddal. Ebből azt a következtetést vonjuk le, hogy ezáltal a lemeznek elektromos töltést adtunk. Hogy ez tényleg úgy van, arról meggyőződhetnénk, ha ezt a lemezt egy megfelelő nagyobb dimenziójú berendezésbe helyezhetnénk, mint előbb az olajcseppeket. Azt tapasztalnánk, hogy a lemezre erő hat. A fenti integrált tehát az F felületbe zárt töltés mértékének tekintjük, vagyis az integrált a töltéssel arányosnak vesszük fel

$$\Phi = \oint_F \mathfrak{E}_n \, dF = \gamma e. \tag{8.2.2}$$

γ arányossági faktor, melyre később még visszatérünk.

Az elektromos töltés tehát kettős szerepet játszik. Egyrészt aktív, teret létesítő hatása van, másrészt pedig passzív, mint az elektromos tér, vagyis erő támadáspontja.

Az elektromos töltés sűrűsége

Az elektromos töltés sűrűségén egy P pontban a P pontot körülvevő térfogatrészben levő Δe töltés és a ΔV térfogatrész hányadosának határértékét értjük, ha a térfogatot a P pontra összehúzzuk

$$\rho = \lim_{\Delta V = 0} \frac{\Delta e}{\Delta V}. \tag{8.2.3}$$

Az előbbiek szerint

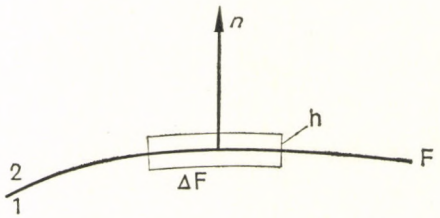
$$\oint_F \mathfrak{E}_n \, dF = \gamma \Delta e,$$

ahol F a ΔV térfogatot határoló felület. Osztva ΔV-vel és áttérve a zérus határra nyerjük

$$\lim_{\Delta V = 0} \frac{\int \mathfrak{E}_n \, dF}{dV} = \lim_{\Delta V = 0} \gamma \frac{\Delta e}{\Delta V},$$

vagyis

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \gamma \rho. \tag{8.2.4}$$



145. ábra. A felületi töltéssűrűség

$\Delta e / \Delta V$ határértéke nem mindig véges. A természetben felületeken elosztva is találunk elektromos töltést. Vegyük körül az F felület egy részét egy ΔF alapú és h magasságú hengerrel. Legyen a benne levő töltés, mely a felületen helyezkedik el, Δe. h-t magasabb rendű kicsinek választhatjuk, anélkül hogy Δe megváltozna. Ebben az esetben definiálunk egy ω felületi sűrűséget a következőképpen

$$\omega = \lim_{\Delta F = 0} \frac{\Delta e}{\Delta F}.$$

$\oint \mathfrak{E}_n dF$-et képezve a zárt hengerre nyerjük, mivel a palást elhanyagolható,

$$\oint \mathfrak{E}_n \, dF = [(\mathfrak{E}_n)_2 - (\mathfrak{E}_n)_1] \, dF.$$

$(\mathfrak{E}_n)_1$ mínusz előjellel szerepel, mert a felületi integrált képezve, $\mathfrak{E}_n$ a térfogatelemből kifelé mutat, tehát **n**-nel ellentétes irányú. A fenti egyenletet osztva ΔF-fel és áttérve a zérus határra, nyerjük

$$\lim_{\Delta F \to 0} \frac{\oint \mathfrak{E}_n dF}{\Delta F} = \operatorname{Div} \mathfrak{E} = (\mathfrak{E}_n)_2 - (\mathfrak{E}_n)_1 .$$

Mivel

$$\oint \mathfrak{E}_n dF = \gamma \Delta e,$$

következik, hogy

$$\operatorname{Div} \mathfrak{E} = \gamma \omega. \tag{8.2.6}$$

Pontszerű töltés elektromos tere

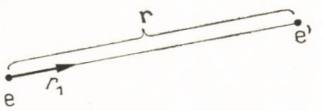
Egy e pontszerű töltés tere gömbi szimmetriát mutat, az erővonalak minden irányban egyenlő sűrűn haladnak. Gömbfelületeken, melyeknek középpontja e-ben van, $|\mathfrak{E}|$ ugyanakkora. Ilyen r sugarú gömbfelületre az erőfluxus a következő

$$\Phi = \oint \mathfrak{E}_n dF = \oint \mathfrak{E} dF,$$

mert **n** összeesik **r** irányával és $\mathfrak{E}$ is ebbe az irányba mutat

$$\Phi = 4\pi r^2 \mathfrak{E} = \gamma e,$$

$$|\mathfrak{E}| = \mathfrak{E} = \frac{\gamma e}{4\pi r^2}, \qquad \mathfrak{E} = \frac{\gamma e}{4\pi r^2} \mathbf{r}_1,$$



146. ábra. Két pontszerű elektromos töltés

ahol $\mathbf{r}_1$ az **r** irányába mutató egységvektor. Tehát egy e' töltésre az e töltés által gyakorolt erő abszolút értéke

$$|\mathbf{K}| = \frac{\gamma e e'}{4\pi r^2},$$

$$\mathbf{K} = \frac{\gamma}{4\pi} \frac{ee'}{r^2} \mathbf{r}_1 . \tag{8.2.7}$$

Ez a *Coulomb*-törvény.

3. §. Mértékrendszerek

Ha a | **K** |-ra levezetett egyenletünkben γ-t 4π-nek választjuk, akkor e-t elektrosztatikai egységekben kapjuk. Ebben a mértékrendszerben adjuk meg az elektromos mennyiségeket, mint pl. elektromos töltés, térerősség. Ha $\gamma = 1$, kapjuk a *Heaviside*-mértékrendszert, melyben az elektromos mennyiségek dimenziója ugyanaz, mint az elektrosztatikus rendszerben, de a mennyiségek számértéke más. Ha $\gamma = 4\pi c^2$ (c a fénysebesség), nyerjük az elektromágneses mértékrendszert.

Az elektroszatikus mértékrendszerben egyenleteink a következők

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\rho,$$

$$\operatorname{Div} \mathfrak{E} = 4\pi\omega,$$

$$\oint \mathfrak{E}_n dF = 4\pi e.$$

A *Heaviside*-rendszerben

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \rho,$$

$$\operatorname{Div} \mathfrak{E} = \omega,$$

$$\oint \mathfrak{E}_n dF = e.$$

Mi többnyire az elektrosztatikus rendszert fogjuk használni.

4. §. Az elektrosztatikus terek jellemző tulajdonságai

Az olyan elektromos tereket, amelyek az időben nem változnak és fenntartásukhoz a környező testekben sem kell változásoknak végbemenni, elektrosztatikus tereknek nevezzük. Ilyen a töltött test tere vagy pl. egy nyitott galvánelem sarkai között levő tér. Zárt galvánelem sarkait összekötő vezetőben is van elektromos tér, mely szintén állandó, ha az áramintenzitás nem változik. Ennek fenntartásához azonban más változásoknak kell végbemenni; az elemben kémiai változások, átalakulások történnek, melyek hőfejlődéssel és elektromos töltés állandó mozgásával járnak. Az ilyen tereket stacionárius tereknek nevezzük. Most csak a sztatikus terekkel foglalkozunk.

A következőkben az elektrosztatikus tér néhány fontos tulajdonságával ismerkedünk meg. Az elemi munka, melyet egy $\mathfrak{E}$ térerősségű térben az e töltésnek $d\mathbf{s}$-sel való elmozdulásakor a tér végez

$$dA = \mathbf{K}\, d\mathbf{s} = e\mathfrak{E}\, d\mathbf{s}.$$

Egy véges P_0P_1 úton való elmozduláskor végzett munka pedig

$$A = e \int_{P_0}^{P_1} \mathfrak{E} d\mathbf{s}.$$

A tapasztalat szerint ez a munka független az úttól, melyen e-t elmozdítjuk és csak a végpontoktól függ. Ebből következik, hogy ha e egy zárt görbén mozdul el és eredeti helyére ér vissza, $A = 0$. Tehát e-vel rövidítve

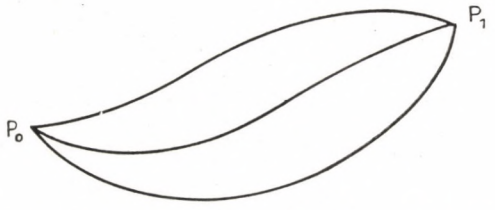
$$\oint \mathfrak{E} d\mathbf{s} = 0.$$

Ebből és a $\mathrm{rot}_n \mathfrak{E}$-t definiáló egyenletből,

$$\mathrm{rot}_n \mathfrak{E} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\oint \mathfrak{E}\, d\mathbf{s}}{\Delta F}$$

következik, hogy $\mathrm{rot}_n \mathfrak{E} = 0$. De $\mathbf{n}$ bármilyen irányítású lehet. Ha egy vektornak bármilyen irányba eső komponense zérus, akkor a vektor is zérus. Tehát

$$\mathrm{rot}\, \mathfrak{E} = 0. \tag{8.4.1}$$



147. ábra. A P_0 és P_1 pontok között bármelyik úton végzett munka ugyanakkora

Mivel a vonalintegrál minden zárt görbére eltűnik, van potenciál és ez, mint a vektortani fejezetben láttuk,

$$U_P = U_0 - \int_{P_0}^{P} \mathfrak{E} d\mathbf{s}, \tag{8.4.2}$$

ahol U_0 tetszőleges állandó. Innen látható, hogy

$$e(U_P - U_0) = -e \int_{P_0}^{P} \mathfrak{E} d\mathbf{s} = -eA_{P_0P}.$$

$e(U_P - U_0)$ adja azt a munkát, melyet a tér ellen végzünk, ha az e töltést P_0-ból P-be visszük. U-t nevezzük elektrosztatikus potenciálnak. Megállapodás szerint a ∞-ben $U = 0$, tehát U_P az a munka, melyet a pozitív egységnyi töltésen végzünk, ha a ∞-ből P-be hozzuk. Az előbbiek szerint tehát

$$\mathfrak{E} = -\,\mathrm{grad}\, U.$$

A

$$\mathrm{div}\, \mathfrak{E} = 4\pi\rho$$

egyenletből nyerjük, hogy

$$-\operatorname{div}\operatorname{grad} U = 4\pi\rho,$$

vagyis

$$\Delta U = -4\pi\rho. \tag{8.4.3}$$

Ez a potenciál differenciálegyenlete. Részletesen kiírva derékszögű koordinátákba

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi\rho\,.$$

Ha ρ mint a hely függvénye ismeretes, akkor ebből $U = U(x, y, z)$ meg van határozva. Ez az ún. *Poisson*-féle egyenlet.

Ha ρ a térben mindenhol 0, akkor

$$\Delta U = 0,$$

ez a *Laplace*-egyenlet.

5. §. Az elektromosság elhelyezkedése vezetőkön

Vannak testek, melyek töltött testtel érintkezve csak az érintkezés helyén vesznek fel töltést, viszont más testeknél a töltés az egész testben elterjed, vagyis bennük a töltés szabadon mozog. Az előbbiek a szigetelők, az utóbbiak pedig a vezetők. Vezetők elsősorban a fémek, azután a sók és lúgok vizes oldatai. Mi egyelőre csak fémekkel foglalkozunk.

Valamely vezetőben a térerősség mindenütt zérus, tehát

$$\mathfrak{E} = 0, \tag{8.5.1}$$

mert ha nem úgy volna, akkor a vezetőben levő töltésekre erő hatna és így nem lehetne egyensúly. Az $\mathfrak{E} = 0$ egyenlet csak homogén vezetőkre érvényes. Ha a vezetőben az anyagi minőség vagy a fizikai állapot (hőmérséklet) változik, akkor a töltésekre egy az inhomogenitástól függő $\mathfrak{E}^e$ erő is hat. Ebben az esetben az egyensúly feltétele az, hogy $\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e = 0$, ahol $\mathfrak{E}^e$ az *elektromotoros erő*. Ebből következik, hogy a vezetőben $U =$ konstans. Továbbá a

$$\rho = \operatorname{div}\mathfrak{E}$$

egyenletből $\mathfrak{E} = 0$-val következik, hogy a vezető belsejében

$$\rho = 0,$$

vagyis a vezető belsejében töltések nincsenek. Tehát ha a vezetőnek töltése van, az csak a felületen helyezkedhet el. A felületen elhelyezkedő töltés felületi sűrűségét a

$$4\pi\omega = \operatorname{Div}\mathfrak{E} = (\mathfrak{E}_n)_2 - (\mathfrak{E}_n)_1$$

egyenlet adja. Mivel $(\mathfrak{E}_n)_1$, a vezető belsejébe mutató térerősség 0, az indexet elhagyva nyerjük

$$4\pi\omega = \mathfrak{E}_n, \tag{8.5.2}$$

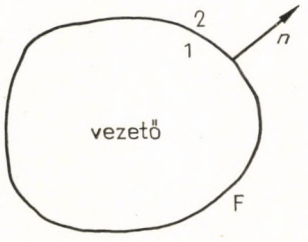
ahol **n** a kifelé mutató normálist jelenti.

A potenciál definíciójából következik, hogy

$$\mathfrak{E}_n = -\frac{\partial U}{\partial n},$$

tehát

$$4\pi\omega = -\frac{\partial U}{\partial n}.$$



148. ábra. A vezető és felületének külső normálisa

A vezetőn levő össztöltés a következőképpen adódik

$$e = \int_F \omega dF = -\frac{1}{4\pi}\int_F \frac{\partial U}{\partial n} dF.$$

Azt is könnyen beláthatjuk, hogy a vezető felületén a térintenzitás a vezető felületére merőleges, ugyanis ha nem volna merőleges a felületre, akkor volna tangenciális komponense, vagyis nem lehetne egyensúly. Tehát az erővonalak a vezető felületére merőlegesek, a vezető belsejében pedig nincsenek erővonalak.

6. §. Az elektrosztatika alapproblémája

Az elektrosztatikus tér számítás útján való meghatározása az U potenciálnak mint a hely függvényének meghatározását jelenti. Ugyanis ha U ismeretes, akkor az $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} U$ egyenletből $\mathfrak{E}$ meghatározható. Tehát a potenciál differenciálegyenletét kell megoldani a probléma által megszabott speciális határfeltételekkel. Ez a feladat minden különösebb nehézség nélkül megoldható, ha ρ mint a hely függvénye ismeretes az egész térben.

Általában azonban nem ez a helyzet, hanem a feladat a következő. Adva vannak $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vezetők, melyeknek rendre $e_1, e_2, \ldots, e_n$ töltést adtunk, meghatározandó $\mathfrak{E}$ a következő feltételek mellett.

1. A vezetők közötti térben, ahol nincs töltés, U-nak eleget kell tennie a $\Delta U = 0$ egyenletnek.

2. Az egyes vezetőkön U-nak konstansnak kell lennie, tehát

$$U_i = c_i ,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

vagyis az egyes vezetők felületei ekvipotenciális felületek.

3. Fenn kell állnia a következő összefüggésnek

$$-\int_{Fi} \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_i dF = 4\pi e_i .$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Tehát általában nem ismerjük az elektromos sűrűséget az egyes vezetőfelületeken, hanem ezt utólag határozzuk meg U-val.

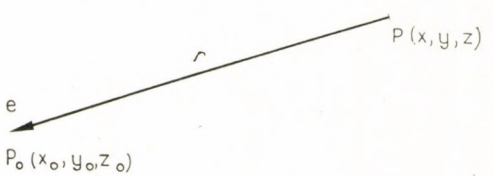
Azt az U-t meghatározni, mely az 1., 2. és 3. feltételnek eleget tesz, nem könnyű probléma és nem vihető mindig keresztül. Ki lehet mutatni, hogy az 1., 2. és 3. feltétel egyértelműen határozza meg a probléma megoldását. Ha tehát valamely megoldásról sikerül kimutatni, hogy teljesíti az 1., 2. és 3. feltételt, akkor az a problémánk egyetlen megoldását szolgáltatja. Ennek bizonyítását a *Thomson*-féle tétel adja meg, melyre itt nem térhetünk ki.

Ezek után áttérünk néhány egyszerűbb eset tárgyalására.

7. §. A pontszerű töltés potenciálja

Legyen adva a P_0 pontban egy e pontszerű töltés, a tér többi része legyen üres. Láttuk, hogy egy ilyen pontszerű töltés által keltett elektromos tér erősségének abszolút értéke elektrosztatikai egységekben az r távolságban levő P pontban

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{r^2} . \tag{8.7.1}$$



149. ábra. A P (x, y, z) pont az e pontszerű töltés potenciálterében

Legyen e pozitív töltés, ekkor $\mathfrak{E}$ P_0-tól P felé mutat, tehát a komponensek

$$\mathfrak{E}_x = \frac{e}{r^2}\frac{x-x_0}{r} = e\frac{x-x_0}{r^3},$$

$$\mathfrak{E}_y = \frac{e}{r^2}\frac{y-y_0}{r} = e\frac{y-y_0}{r^3},$$

$$\mathfrak{E}_z = \frac{e}{r^2}\frac{z-z_0}{r} = e\frac{z-z_0}{r^3},$$

ugyanis $\frac{x-x_0}{r}$, $\frac{y-y_0}{r}$, $\frac{z-z_0}{r}$ az iránykoszinuszok. Ha e negatív, $\mathfrak{E}$ iránya ellentétes.

A potenciált egyszerűen adhatjuk meg

$$U = \frac{e}{r},$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}. \tag{8.7.2}$$

Hogy U tényleg a potenciál, arról könnyen meggyőződhetünk, ugyanis

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{e}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x},$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-x_0}{r},$$

tehát

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = e\frac{x-x_0}{r^3},$$

ez valóban $\mathfrak{E}_x$-szel egyenlő. Hasonlóképpen igazolhatjuk, hogy $-\frac{\partial U}{\partial y}$, ill. $-\frac{\partial U}{\partial z}$ $\mathfrak{E}_y$-nal ill. $\mathfrak{E}_z$-vel egyenlők.

A P_0 ponton kívül töltések nincsenek, tehát ott fennáll a

$$\Delta U = 0$$

egyenlet. Könnyű kimutatni, hogy U kielégíti a P_0 ponton kívül ezt az egyenletet. Ugyanis

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -e\frac{x-x_0}{r^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -e\frac{y-y_0}{r^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -e\frac{z-z_0}{r^3}.$$

Innen

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -e\left\{\frac{1}{r^3} - 3\frac{(x-x_0)^2}{r^5}\right\},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -e\left\{\frac{1}{r^3} - 3\frac{(y-y_0)^2}{r^5}\right\},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -e\left\{\frac{1}{r^3} - 3\frac{(z-z_0)^2}{r^5}\right\}.$$

Összeadva nyerjük, hogy

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U = 0\,.$$

Ezzel kimutattuk, hogy a fenti U csakugyan a keresett potenciál. A potenciálhoz még hozzáadtunk egy U_0 tetszőleges állandót. Ezt mi 0-nak választjuk abból a következtetésből kiindulva, hogy U a ∞-ben tűnjön el. Mégpedig, mint látjuk, úgy tűnik el mint $\frac{1}{r}$. Hogy a potenciál a ∞-ben legalábbis mint $\frac{1}{r}$ tűnjön el, azt minden rendszer potenciáljától megköveteljük, mert a ∞-ből nézve minden rendszer pontszerű. Ebből a követelésből az additív konstans mindig meghatározható.

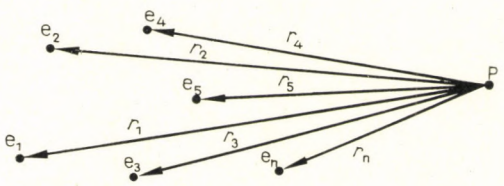
8. §. Különböző töltésrendszerek potenciálja

Több töltött pontból álló rendszer potenciálja

Több pontszerű elektromos töltés tere egyszerűen szuperponálódik, a potenciálok egyszerűen összeadódnak. Tehát a potenciál a P pontban

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{r_i}\,. \tag{8.8.1}$$

Amint könnyen beláthatjuk, ez kielégíti a töltött pontokon kívül levő térrészben a *Laplace*-egyenletet, mert ez homogén lineáris differenciálegyenlet.



150. ábra. Több pontszerű töltésből álló rendszer potenciáljának meghatározása

A térben folytonosan elosztott elektromos töltés potenciálja

Jellemezzük egy adott térrész töltését a ρ töltéssűrűséggel, mely a hely függvénye. Ekkor a dV térfogatelemben levő töltés

$$de = \rho dV.$$

Ennek potenciálja a P_0 pontban, mely dV-től r távolságra van:

$$\frac{de}{r} = \frac{\rho dV}{r}.$$

Az egész töltés potenciálja tehát

$$U = \int \frac{\rho dV}{r}. \tag{8.8.2}$$

Legyenek itt a P_0 pont koordinátái x, y, z, a dV térfogatelem koordinátái ξ, η, ζ, ρ tehát ξ, η, ζ függvénye. Ekkor részletesen kiírva nyerjük

$$U(x, y, z) = \iiint \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}. \tag{8.8.3}$$

Tekintettel eredményünk fontosságára, (8.3)-at még más úton is levezetjük, amivel rögtön igazoljuk, hogy U kielégíti a *Poisson*-egyenletet. Sőt feladatunk most éppen a *Poisson*-egyenlet,

$$\Delta U = -4\pi\rho$$

megoldása. Feltesszük, hogy ρ mint a hely függvénye adott. Továbbá feltesszük, hogy töltések csak a végesben vannak és hogy U első és második deriváltja létezik és folytonos.

Alkalmazzuk GREEN tételének szimmetrikus alakját

$$\int_V (u\Delta w - w\Delta u)\, dV = \int_F \left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n}\right) dF.$$

Legyen

$$u = U \quad \text{és} \quad w = \frac{1}{r},$$

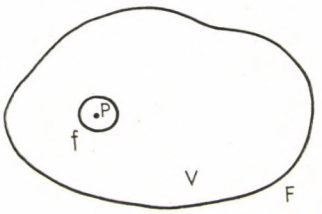
ahol U a potenciál, r a dV térfogatelem távolsága egy P ponttól, melyben U-t keressük. Az F felület zárja körül a töltéseket, V pedig legyen az így definiált térfogat. Tehát nyerjük

$$\int_V \left(U\Delta\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\Delta U\right) dV = \int_F \left(U\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right) dF.$$

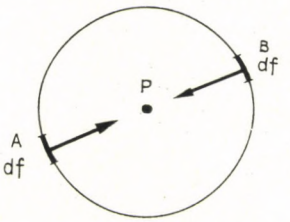
Mivel $\frac{1}{r}$ a P pontban végtelenné válik, P-t egy kis f felületű gömbbel ki kell reszteni a térből és GREEN tételét csak a megmaradó térrészre alkalmazhatjuk. Mivel $\Delta\frac{1}{r}=0$, a fentiek alapján nyerjük

$$-\int_V \frac{1}{r}\Delta U dV = \int_V \frac{4\pi\rho}{r} dV = \int_F \left(U\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right) dF +$$

$$+\int_f \left(U\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right) df.$$



151. ábra. A V térfogatot határoló F és f felületek



152. ábra. A f felület külső normálisai

Vigyük az F felületet a végtelenbe. Ezt megtehetjük, mert F-től csak azt követeltük, hogy a töltéseket mind körülvegye. Mivel U-ról feltesszük, hogy úgy tűnik el, mint $\frac{1}{r}$, tehát $\frac{\partial U}{\partial n}$ úgy tűnik el, mint $\frac{1}{r^2}$, $U\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}$ és $\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}$ mint $\frac{1}{r^3}$. A dF felület r^2-tel növekszik, tehát a jobboldali első integrandus a ∞-ben mint $\frac{1}{r}$ tűnik el, így a felületi integrál F-re zérus.

Áttérünk az f-re vonatkozó felületi integrálra. Húzzuk össze az f gömböt a P pontra és tartsuk szem előtt, hogy a *Green*-tételnél **n** iránya a felületből kifelé, vagyis P felé mutat.

Mivel a gömb átmérőinek végpontjában a normálisok ellentétes irányúak, a $\frac{\partial U}{\partial n}$ deriváltak e pontokban ellenkező előjelűek. Abszolút értékük azonban megegyezik, mert feltevésünk szerint folytonosak, tehát ilyen kis környezetben egyenlőknek tekinthetők. Eszerint az $\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}df$ tag az A-nál levő df-en abszolút értékben egyenlő a B-nél levő df felületelemen vett értékkel, de előjelben különböznek.

A diametrálisan szemben levő tagok lerontják egymást, tehát

$$\lim_{r=0} \int \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} df = 0 .$$

Mivel **n** iránya a gömb belsejébe mutat,

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} = \frac{1}{r^2} ,$$

következik, hogy

$$\lim_{r=0} \int U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} df = \lim_{r=0} U_P \int \frac{1}{r^2} r^2 d\Omega = U_P 4\pi .$$

Tehát

$$U_P = \int \frac{\rho dV}{r} .$$

A térfogati integrált nem szükséges az egész ∞ térre kiterjeszteni, hanem csak azokra a részekre, ahol $\rho \neq 0$, ugyanis azok a részek, ahol $\rho = 0$, úgysem szolgáltatnak értéket az integrálhoz. Tehát

$$U_P = \int_V \frac{\rho dV}{r} ,$$

vagyis ugyanazt az eredményt kaptuk, mint (8.2) alatt.

Felületen folytonosan elosztott töltés potenciálja

Legyen a felületi töltés sűrűsége ω, akkor egy dF felületelemen levő töltésmennyiség $de = \omega dF$. Ennek potenciálja a tőle r távolságban levő pontban

$$\frac{de}{r} = \frac{\omega dF}{r} .$$

P pontban egy véges F felület potenciálja tehát, melyen ω sűrűségű elektromos töltés helyezkedik el

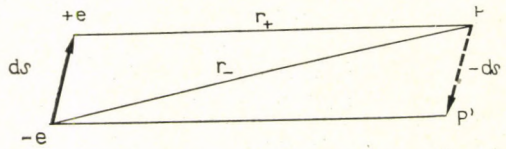
$$U_P = \int_F \frac{\omega dF}{r} . \qquad (8.8.4)$$

Ezt is le lehet vezetni GREEN tételének segítségével, ha feltesszük, hogy egy felületen $\mathfrak{E}_n$, vagyis $- \frac{\partial U}{\partial n}$ ugrást szenved és az ugrás nagysága ω, vagyis $\mathrm{Div}\, \mathfrak{E} = \omega$, tehát a felületen elektromos töltés helyezkedik el ω sűrűséggel.

A dipólus potenciálja

Dipólus alatt olyan rendszert értünk, mely két egyenlő abszolút értékű, de ellentétes előjelű töltésből áll, melyek egymástól való távolsága kicsi. Legyen az egyik töltés $-e$, a másik $+e$. A $-e$-től a $+e$ felé mutató elmozdulásvektor legyen $d\mathbf{s}$. Az $ed\mathbf{s}$ szorzatot nevezzük a dipólus momentumának, jele: $\mathbf{m}$. Az $ed\mathbf{s}$ szorzat legyen véges, vagyis $|d\mathbf{s}|$ kisebbítésével e úgy növekedjen, hogy $ed\mathbf{s}$ véges maradjon. Keressük ennek a rendszernek a potenciálját. Legyen egy P pont $-e$-től r_- távolságra, $+e$-től r_+ távolságra. Ekkor tehát a potenciál, U, a következő lesz

$$U = e\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right). \tag{8.8.5}$$



153. ábra. A dipólus potenciáljának meghatározása

Ismeretes, hogy egy u függvény változását, ha $d\mathbf{s}$-sel elmozdulunk, a következőképpen kapjuk

$$du = \operatorname{grad} u \, d\mathbf{s}.$$

Tehát ha pl. $\frac{1}{r_-}$ megváltozását keressük a P' pontban, kapjuk

$$d\left(\frac{1}{r_-}\right) = \operatorname{grad} \frac{1}{r}(-d\mathbf{s}).$$

Amint a 153. ábrából látható

$$\frac{1}{r_+} = \frac{1}{r_-} - d\mathbf{s} \operatorname{grad} \frac{1}{r},$$

ahol r_- mellől a mínusz jelet elhagytuk. Tehát

$$U = -ed\mathbf{s} \operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\mathbf{m} \operatorname{grad} \frac{1}{r}.$$

$\mathbf{r}$ a töltésektől el mutató vektor, így

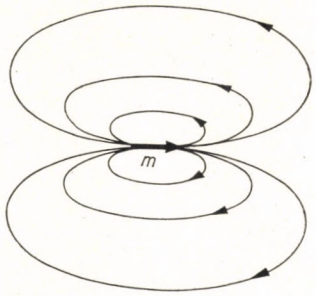
$$\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Tehát

$$U = \frac{\mathbf{mr}}{r^3} = \frac{m\cos(\mathbf{m}, \mathbf{r})}{r^2}. \tag{8.8.6}$$

A dipólus potenciálja $\frac{1}{r^2}$-tel csökken és függ az **m**, és **r** közti szögtől. Tehát tere már csak tengelyszimmetrikus.

A dipólus elektromos terét a potenciál segítségével könnyen előállíthatjuk és, amint könnyen meggyőződhetünk, az erővonalak a 154. ábrán feltüntetett görbeseregnek felelnek meg. Az erővonalrendszer **m**, mint tengely körül szimmetrikus.



154. ábra. A dipólus erővonalrendszere

Dipólréteg potenciálja

Dipólréteg alatt olyan felületet értünk, mely dipólusokkal van borítva, melyek momentuma a felület normálisának irányába esik. Legyen a felületegységre eső dipólmomentum **m**; akkor egy dF felületelem potenciálja a tőle r távolságban levő P pontban, mivel az elemi momentum abszolút értéke mdF,

$$dU = \frac{m\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})}{r^2}\, dF,$$

ahol **r** a dF-től P-hez vont rádiuszvektor, melynek iránya P felé mutat. Egy véges F dipólréteg potenciálja tehát

$$U = \int_F \frac{m\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})}{r^2}\, dF\,. \tag{8.8.7}$$

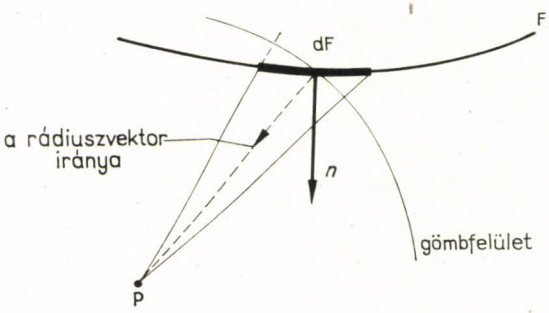
Ha m konstans, a réteg homogén és a potenciál

$$U = m\int_F \frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})}{r^2}\, dF. \tag{8.8.8}$$

Foglalkozzunk az integrandussal részletesebben. $dF\cos(\mathbf{n},\mathbf{r})$ nem más, mint dF-nek a dF-hez vont r sugarú gömbfelületre való vetülete. Ez a vetület $r^2 d\Omega$, ha $d\Omega$ az a térszög, mely alatt dF P-ből látszik. Tehát

$$U = m\int d\Omega = m\Omega,$$

ahol Ω az a térszög, mely alatt az F felület P-ből látszik. Az Ω-nak, ill. $d\Omega$-nak előjelet is kell tulajdonítani, ugyanis (8.8)-ban szerepelt $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})$, mely lehet pozitív és negatív. Ez $d\Omega$-ban és Ω-ban is érvényre jut. Mindazok a $d\Omega$-k pozitív előjellel veendők, melyeknél az $(\mathbf{n}, \mathbf{r})$ szög $+90°$ és $-90°$ között van, és negatív előjellel, ha $(\mathbf{n}, \mathbf{r})$ $+90°$ és $+180°$ ill. $-90°$ és $-180°$ között van. U tehát akkor pozitív, ha a P pont a felület azon oldalán van, amely felé a felület normálisa mutat.



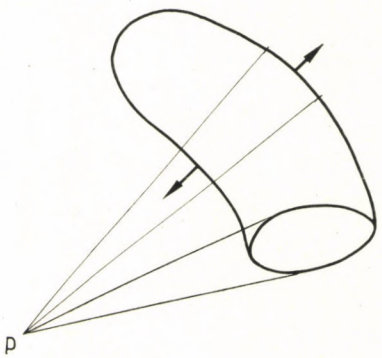
155. ábra. Az F felületen elhelyezkedő dipólréteg

Ha valamely térszögkúp a felületet kétszer metszi, mint pl. a 156. ábrán látható, akkor a két metszőhelynél levő $d\Omega$-k összege 0, mert $d\Omega$ mindkét felületelemnél ugyanakkora, de ellentétes előjelű. Eszerint egy homogén dipólréteg potenciálja a a felület alakjától független és csak a felület szélétől függ. Innen rögtön következik, hogy zárt dipólréteg potenciálja egy külső pontban zérus. Egy belső pontban azonban, mivel mindegyik térszögkúp csak egyszer metszi a felületet, továbbá mivel $\mathbf{n}$ és $\mathbf{r}$ ellentétes irányúak, $\Omega = -4\pi$, így

$$U = -4\pi m. \tag{8.8.9}$$

Tehát ha U_k egy külső pontban a potenciál, U_b pedig egy belsőben, akkor

$$U_k - U_b = 4\pi m. \tag{8.8.10}$$

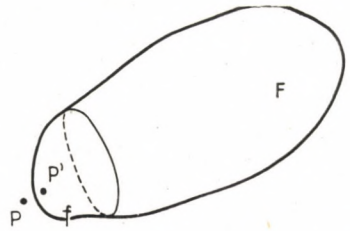


156. ábra. A felületet kétszer metsző térszögkúp

Ugyanekkora ugrást szenved U, ha nem zárt dipólrétegen haladunk át, ugyanis minden F felületet kiegészítve képzelhetünk zárt felületté. Minthogy P egy külső és P' egy belső pont,

$$U_P - U_{P'} = 4\pi m .$$

P-ben és P'-ben a potenciál két részből tevődik össze, az F-től és f-től származó részből. Az f-től származó rész, ha P és P' szomszédosak, azonos P és P'-ben, tehát a különbségnél kiesik, így tételünk igazolva van.



157. ábra. Dipólréteg kiegészítése zárt felületté

9. §. Vezetők a térben. Gömbkondenzátor

Legyen adva egy rendszer, mely jóvezető a sugarú gömbből és az ezt körülvevő b sugarú jóvezető gömbfelületből áll, mely utóbbi egy végtelen vezető üregének belső felülete. Legyen a belső gömb töltése $+e$. A külső gömbfelületet állandó potenciálon tartjuk. Ismét gömbszimmetrikus problémáról van szó. A két felület közti térben fenn kell állnia a *Laplace*-egyenletnek, $\Delta U = 0$, melynek megoldása

$$U = \frac{A}{r} + B . \tag{8.9.1}$$

A-t onnan határozzuk meg, hogy a belső gömböt körülvevő felületre, vagyis a belső gömbfelületre kiterjesztett következő felületi integrál egyenlő $4\pi e$-vel,

$$\int \mathfrak{E}_n dF = -\int \frac{\partial V}{\partial r} dF = 4\pi e .$$

Mivel

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{A}{r^2} ,$$

nyerjük, hogy

$$\int \mathfrak{E}_n dF = A \int \frac{1}{a^2} a^2 d\Omega = 4\pi A = 4\pi e ,$$

vagyis

$$A = e. \tag{8.9.2}$$

B-t úgy határozzuk meg, hogy

$$r = b$$

esetében

$$U = U_b$$

legyen. Innen

$$U_b = \frac{e}{b} + B, \qquad B = U_b - \frac{e}{b}.$$

Tehát

$$U = \frac{e}{r} - \frac{e}{b} + U_b. \tag{8.9.3}$$

A potenciál az a sugarú gömbön

$$U_a = U_b + e\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right). \tag{8.9.4}$$

A b sugarú gömbfelület töltését az $\int \mathfrak{E}_n dF$ szolgáltatja. **n** itt is a kifelé mutató normális, mely itt $-r$, így az integrál $-e$-t szolgáltat, megegyezésben a tapasztalattal.

Megoldásunk tehát kielégíti az összes feltételt: 1. A vezetők közti térben U megoldása a $\Delta U = 0$ egyenletnek. 2. Az egyes vezetőkön U konstans. 3. $-\int_{f_i} \frac{\partial U}{\partial n} dF = e_i$, ahol e_i az egyes vezetők töltése. Tehát a fenti U szolgáltatja problémánk megoldását.

Egy rendszer kapacitásán értjük a töltés és a potenciálkülönbség hányadosát. A gömbkondenzátor esetében tehát

$$C = \frac{e}{U_a - U_b} = \frac{ab}{b - a}. \tag{8.9,5}$$

Ha $b \to \infty$, akkor $C = a$, (8.9.6)

vagyis egy gömb kapacitása, mely minden más vezetőtől igen távol van, egyenlő a sugárral. U ebben az esetben ($U_b = 0$ helyettesítéssel) átmegy egy ϵ töltésű gömb potenciáljába.

A problémát itt kissé idealizáltuk, a valóságban ugyanis a külső gömbfelület véges vastagságú réteg, mely földelve van. Számításunk erre is érvényes.

10. §. Az elektrosztatikus tér szigetelőkben. Dielektromos közegek

Eddigi tárgyalásainkban feltettük, hogy a vezetők közti tér vákuum. A következőkben célunk, hogy számításba vegyük, hogyan befolyásolja az elektromos teret a töltések között elhelyezkedő szigetelő közeg. Legyen adva egy e_1 és egy e_2 pontszerű elektromos töltés. Üres térben a két pontszerű töltés közti erő ab-

szolút értéke

$$K = \frac{e_1 e_2}{r^2}, \tag{8.10.1}$$

mely *Coulomb*-mérleggel megmérhető. r a két pont közti távolság.

Ugyancsak megmérhetjük a két pont között működő erőt, ha a két pont közti teret folyékony szigetelő, pl. petróleum tölti ki. Azt tapasztaljuk, hogy az erő megváltozik a dielektrikum anyagi minőségétől függően és a következő formulával adható meg

$$K_d = \frac{e_1 e_2}{\varepsilon r^2}, \tag{8.10.2}$$

ahol $\varepsilon > 1$. Üres térben $\varepsilon = 1$, tehát az erőhatás a vákuumban a legnagyobb. ε a *dielektromos állandó*, a következőképpen definiálható

$$\varepsilon = \frac{K}{K_d}. \tag{8.10.3}$$

Az olyan közeget, melynek ε-ja nagyobb, mint 1, *dielektrikum*nak nevezzük. Egy ε dielektromos együtthatójú közegben tehát az elektromos erőhatás ε-szor kisebb, mint üres térben.

Egy e töltésű pontszerű test elektromos tere, vagyis a térintenzitás a következő formulával adható meg egy ε dielektromos állandójú közegben ($e_1 = e$, $e_2 = 1$)

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \qquad \mathfrak{E} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e}{r^2}.$$

A tapasztalat azt mutatja, hogy dielektromos közegben is fennáll, hogy

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0, \tag{8.10.4}$$

tehát

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} U. \tag{8.10.5}$$

U egy pontszerű e töltés esetében

$$U = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e}{r},$$

pe nem áll fenn, hogy a térintenzitás normális komponensének felületi integrálja a töltés 4π-szeresével egyenlő. Ugyanis pl. pontszerű töltés esetében egy r_0 sugarú gömbfelületre integrálva

$$\int \mathfrak{E}_n dF = \int \mathfrak{E} dF = \int \left(-\frac{\partial U}{\partial r} \right) dF = \frac{e}{\varepsilon} \int \frac{1}{r_0^2} r_0^2 d\Omega = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi e.$$

Tehát dielektrikumban

$$\int \mathfrak{E}_n dF = 4\pi \frac{e}{\varepsilon}$$

és innen következik, hogy

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{8.10.6}$$

és

$$\operatorname{Div} \mathfrak{E} = (\mathfrak{E}_n)_2 - (\mathfrak{E}_n)_1 = 4\pi \frac{\omega}{\varepsilon}. \tag{8.10.7}$$

Vezessük be a következő vektort

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}, \tag{8.10.8}$$

melyet a dielektromos indukció vektorának nevezünk. Erre, mint a definíció mutatja, fennáll

$$\int \mathfrak{D} dF = 4\pi e, \tag{8.10.9}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi\rho, \tag{8.10.10}$$

$$\operatorname{Div} \mathfrak{D} = (\mathfrak{D}_n)_2 - (\mathfrak{D}_n)_1 = 4\pi\omega. \tag{8.10.11}$$

Az e-t, a ρ-t és az ω-t *valódi* töltésnek, ill. valódi térbeli, ill. felületi sűrűségnek nevezzük. De az erőhatásra nem a $\mathfrak{D}$ vektor, továbbá e, ρ és ω mérvadó, hanem $\mathfrak{E}$, $\frac{e}{\varepsilon} = e'$, $\frac{\rho}{\varepsilon} = \rho'$ és $\frac{\omega}{\varepsilon} = \omega'$. Az e', ρ' és ω'-t *szabad* töltésnek, szabad térbeli és felületi sűrűségnek nevezzük.

Ha oly gömbkondenzátorra végezzük el a fentebb vázolt számítást, melynek fegyverzetei közötti teret ε dielektromos állandójú dielektrikum tölti ki, akkor, mint könnyen meggyőződhetünk, az A faktorra nem $A = e$-t, hanem az $A = \frac{e}{\varepsilon}$-t kapunk, vagyis

$$U_a - U_b = \frac{e}{\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

adódik.

Tehát

$$C_d = \frac{e}{U_a - U_b} = \varepsilon \frac{ab}{b-a} = \varepsilon C. \tag{8.10.12}$$

Ha tehát a fegyverzetek között ε dielektromos állandójú dielektrikum van, akkor a kapacitás ε-szor nagyobb, mint akkor, mikor a fegyverzetek között légüres tér van. A fenti egyenletből nyerjük

$$\varepsilon = \frac{C_d}{C}. \tag{8.10.13}$$

Ez az egyenlet szolgál a dielektromos együttható kísérleti meghatározására. Ugyanis egyrészt C pontosabban mérhető, mint K, másrészt K csak folyadékokban mérhető, míg a fenti módon szilárd dielektrikumok dielektromos együtthatója is meghatározható.

Az itt adott meggondolások csak izotrop közegekre vonatkoznak, ugyanis az $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{D}$ közti összefüggés csak izotrop közegekben ilyen egyszerű.

Dielektrikumok határfelületén fellépő jelenségek

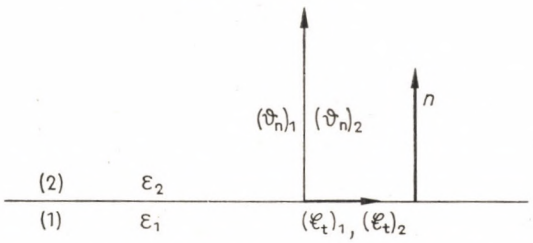
Legyen több dielektromos közeg a térben és vizsgáljuk meg $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{D}$ viselkedését a közegek határfelületén.

Ha az (1) és (2) dielektrikum határfelületén valódi töltés nincs, akkor

$$\operatorname{Div} \mathfrak{D} = (\mathfrak{D}_n)_2 - (\mathfrak{D}_n)_1 = 0,$$

vagyis

$$(\mathfrak{D}_n)_1 = (\mathfrak{D}_n)_2.$$



158. ábra. Két dielektrikumot elválasztó határfelület

Tehát a $\mathfrak{D}$ vektor normális komponense a két dielektrikum határfelületén folytonosan halad át, ha a határfelületen nincs valódi töltés. A határfelületen lehet valódi töltés, ha pl. az egyiket töltéssel látjuk el és azután a másikat hozzáillesztjük. Ebben az esetben $\mathfrak{D}_n$ nem megy át folytonosan a határfelületen.

Az $\mathfrak{E}$ vektorra fennáll, hogy rotációmentes. Ha tehát bármilyen zárt görbére képezzük az $\oint \mathfrak{E}_s ds$-et, akkor 0-t kapunk. Ha hasonlóan, mint a felületi rotáció levezetésénél oly görbére integrálunk, mely szorosan hozzáilleszkedik mindkét oldalon a határfelülethez, akkor az integrál eltűnéséből az adódik, hogy

$$(\mathfrak{E}_t)_1 = (\mathfrak{E}_t)_2, \tag{8.10.14}$$

amit így is írhatunk, hogy

$$\operatorname{Rot} \mathfrak{E} = 0.$$

Tehát $\mathfrak{E}$ tangenciális komponense a határfelületen mindig folytonosan halad át.

$\mathfrak{D}_n$-re vonatkozó egyenletünket így is írhatjuk:

$$\varepsilon_1 (\mathfrak{E}_n)_1 = \varepsilon_2 (\mathfrak{E}_n)_2,$$

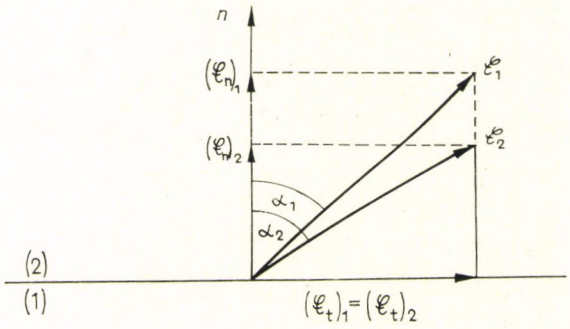
ahonnan következik, hogy

$$(\mathfrak{E}_n)_2 : (\mathfrak{E}_n)_1 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2 .$$

Jelöljük $\mathfrak{E}$-nek a normálissal alkotott szögét az (1) közegben α_1-gyel, a (2) közegben α_2-vel. Fennáll, hogy

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{(\mathfrak{E}_t)_1}{(\mathfrak{E}_n)_1},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{(\mathfrak{E}_t)_2}{(\mathfrak{E}_n)_2}.$$



159. ábra. A térerősség irányváltozása dielektrikumok határfelületén

Figyelembe véve, hogy $\mathfrak{E}_t$ a felületen nem szenved ugrást, nyerjük, hogy

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{(\mathfrak{E}_n)_2}{(\mathfrak{E}_n)_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Tehát

$$\operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2. \qquad (8.10.15)$$

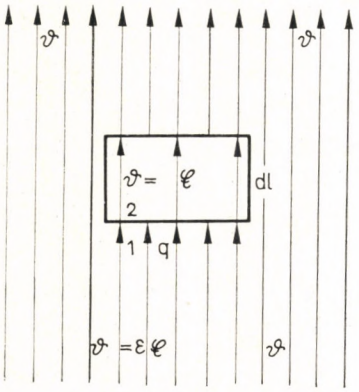
Vagyis az elektromos térintenzitás két különböző dielektrikum határfelületén irányváltozást szenved, és $\mathfrak{E}$-nek a normálissal bezárt szögei tangensének hányadosa megegyezik a dielektromos együtthatók hányadosával. Ugyanez vonatkozik $\mathfrak{D}$-re is, mert $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{D}$ ugyanabban a közegben egyirányúak.

Ábránkban a határfelületet síknak vettük, ami azonban nem jelent megkötést, mert ha a felület nem rendelkezik bizonyos szingularitásokkal, elegendő kis darabja mindig síknak tekinthető.

11. §. Dielektrikumok polarizációja

Homogén dielektrikumból (ε = konstans) indulunk ki, melyben $\mathfrak{E}$ erősségű homogén elektromos tér van jelen. A $\mathfrak{D}$ vektor erővonalainak sűrűsége ε-szor akkora, mint az $\mathfrak{E}$ vektor erővonalainak sűrűsége. Távolítsuk el egy elemi henger-

ből a dielektrikumot, mely henger palástjának vezérsugarai $\mathfrak{E}$-vel párhuzamosak és helyezzünk el a hengerüregben töltéseket úgy, hogy a környező dielektrikumban és a hengerüregben a tér változatlan maradjon, vagyis az elektromos tér erővonalainak száma ne változzon meg. A hengerüregben, mely légüres tér, $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$, míg a dielektrikumban továbbra is $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$. A kísérlet tehát csak gondolati kísérlet, mert ha a valóságban keresztülvinnénk, a hengerüregben a térerősség $\varepsilon\mathfrak{E}$ lenne a dielektrikum eltávolítása után. Mi tehát éppen azt kötjük ki, hogy $\mathfrak{E}$ ne változzon. A kis henger felső fedőlapjából, mint látható, több indukcióvonal indul ki, mint amennyi beletorkollik, míg az alsó lapon kevesebb indul ki, mint amennyi rajta



160. ábra. Dielektrikumok polarizációja

végződik. Tehát mindkét lapon a $\mathfrak{D}$ vektor normális komponensének ugrása van, ami azt jelenti, hogy ha feltételezzük, hogy a dielektrikumban a térerősség nem változik, akkor a hengerüreg alsó és felső fedőlapján valódi töltések lépnek fel, melyek felületi sűrűsége a következő: a felső határlapon

$$\omega_+ = \frac{1}{4\pi}\left[(\mathfrak{D}_n)_2 - (\mathfrak{D}_n)_1\right] = \frac{1}{4\pi}(\varepsilon\mathfrak{E} - \mathfrak{E}) = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathfrak{E},$$

az alsó határlapon

$$\omega_- = \frac{1}{4\pi}\left[(\mathfrak{D}_n)_2 - (\mathfrak{D}_n)_1\right] = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{E} - \varepsilon\mathfrak{E}) = -\frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathfrak{E},$$

ahol a + ill. − index azt jelenti, hogy a sűrűség pozitív, ill. negatív, amint ez az $\varepsilon > 1$-ből következik.

Ez tehát azt jelenti, hogy a hengerüregben változás nem történik, vagyis a hengerüregben az elektromos tér éppen olyan, mint mikor az elemi hengert az illető dielektrikum tölti be, ha a hengerüreg alsó és felső falára valódi elektromos töltéseket hozunk. Ez azt jelenti, hogy az $\mathfrak{E}$ térerősségű elektromos térbe hozott dielektrikumnak egy ilyen hengereleme (most már nem hengerüregről, hanem di-

elektrikummal betöltött hengerről van szó) úgy viselkedik, mintha az alsó és felső fedőlapján a fenti sűrűségű elektromos töltés helyezkedne el. Mivel a fedőlapokon levő töltések egyenlő nagyok, de ellentett előjelűek, azt is mondhatjuk, hogy mindegyik hengerelem úgy viselkedik, mint egy dipólus, melynek momentuma

$$d\mathfrak{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathfrak{E}qdl = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathfrak{E}dV,$$

ahol

$$dV = qdl,$$

ugyanis dl iránya a $(-)$-tól $(+)$ felé mutat, tehát egyezik $\mathfrak{E}$ irányával. A dielektrikum mindegyik dV térfogateleme $\frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathfrak{E}dV$ nagyságú dipólmomentummal ekvivalens. A térfogategységre vonatkozó dipólmomentumot nevezzük *polarizáció*nak, jele $\mathfrak{P}$

$$\mathfrak{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathfrak{E} = \kappa\mathfrak{E}. \tag{8.11.1}$$

A $\mathfrak{P}$ vektor tehát ugyanolyan irányú, mint $\mathfrak{E}$.

Tehát nyerjük

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E} = (1 + 4\pi\kappa)\mathfrak{E} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}.$$

κ egy új anyagi állandó, melynek neve *elektromos szuszceptibilitás*. Ily módon tehát az elektromos térbe helyezett dielektrikum minden egyes dV térfogateleme egy $\kappa\mathfrak{E}dV$ dipólmomentummal ekvivalens.

Ha a valódi töltések eloszlásán kívül még a polarizáció is, mint a hely függvénye adott, akkor a teljes elektrosztatikus potenciál a következőképpen adható meg. Mivel egy $\mathfrak{P}dV$ nagyságú dipólmomentum potenciálja

$$dU_P = \frac{\mathfrak{P}dV\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mathfrak{P}\mathbf{r}dV}{r^3}, \tag{8.11.2}$$

nyerjük, hogy az összpotenciál

$$U = \int\frac{\rho dV}{r} + \int_F\frac{\omega dF}{r} + \int_V\frac{\mathfrak{P}\mathbf{r}dV}{r^3}.$$

Az utolsó tag átalakítható, ha a dielektrikum homogén, vagyis ε = konstans és nincsenek benne tértöltések. Ebben az esetben

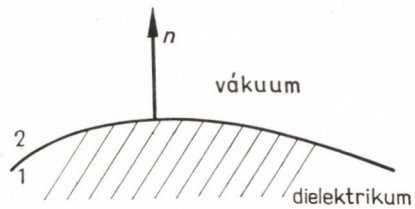
$$\operatorname{div}\mathfrak{P} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(\varepsilon\mathfrak{E}) - \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}\operatorname{grad}\varepsilon + \frac{1}{4\pi}\varepsilon\operatorname{div}\mathfrak{E} - \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\mathfrak{E}.$$

Ha töltések nincsenek, $\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0$ és ha ε = konstans, $\operatorname{grad}\varepsilon = 0$, tehát ekkor $\operatorname{div}\mathfrak{P} = 0$.

Továbbá fennáll a következő összefüggés GAUSS tétele alapján

$$\int_F \frac{\mathfrak{P}_n dF}{r} = \int_V \operatorname{div}\left(\frac{1}{r}\mathfrak{P}\right) dV = \int_V \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathfrak{P} dV + \int_V \left(\mathfrak{P} \operatorname{grad}_V \frac{1}{r}\right) dV,$$

ahol grad_V azt jelenti, hogy a gradienst a dV térfogatelem koordinátái szerint kell képezni. Ez azonnal látható onnan, hogy az $\int_V \operatorname{div}\left(\frac{1}{r}\mathfrak{P}\right) dV$-nél az egyes térfogatelemekre kell összegezni és a divergencia is azokra vonatkozik, tehát a differenciálásnál a térfogatelem koordinátái szerepelnek. Így tehát a gradiensnél, mely ebből a differenciálásból adódik, szintén a térfogatelem és nem a P_0 pont (melyben a potenciált keressük) koordinátái szerint kell differenciálni. Figye-



161. ábra. A dielektrikum határfelülete és felületi normálisa

lembe véve a fenti egyenletet, nyerjük

$$\oint_F \frac{\mathfrak{P}_n dF}{r} = \int_V \left(\mathfrak{P} \operatorname{grad}_V \frac{1}{r}\right) dV = \int_V \frac{\mathfrak{P}\mathbf{r}}{r^3} dV.$$

Tehát

$$U_P = \int_V \frac{\mathfrak{P}\mathbf{r}}{r^3} dV = \oint_F \frac{\mathfrak{P}_n dF}{r}, \tag{8.11.3}$$

vagyis a dielektrikumra kiterjesztett térfogati integrál egy a dielektrikum felületére kiterjesztett felületi integrállal egyenlő.

Ha a dielektrikum vakuummal határos, akkor, mivel a vákuumban $\mathfrak{P} = 0$,

$$\operatorname{Div} \mathfrak{P} = -(\mathfrak{P}_n)_1 = -\mathfrak{P}_n,$$

ugyanis

$$(\mathfrak{P}_n)_2 = 0.$$

Továbbá

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}, \qquad \mathfrak{P} = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{D} - \mathfrak{E}),$$

$$\operatorname{Div} \mathfrak{P} = \frac{1}{4\pi}(\operatorname{Div} \mathfrak{D} - \operatorname{Div} \mathfrak{E}).$$

Mivel a határfelületen valódi töltések nincsenek, $\mathrm{Div}\,\mathfrak{D} = 0$, tehát

$$\mathfrak{P}_n = \frac{\mathrm{Div}\,\mathfrak{E}}{4\pi} = \omega',$$

vagyis

$$U_P = \oint_F \frac{\omega' dF}{r}. \tag{8.11.4}$$

Tehát a dielektrikum felületén a polarizáció következtében szabad töltések lépnek fel. A polarizáció terét, melynek potenciálja U_P, úgy foghatjuk fel, mintha ezektől a szabad töltésektől származna.

12. §. Az elektrosztatikus tér energiája

Az előző paragrafusokkal ellentétben most az $\mathfrak{E}$ térerősségű teret adottnak tekintjük és ebbe kis töltéseket hozunk, melyek az $\mathfrak{E}$ teret létesítő töltések eloszlását nem befolyásolják.

Pontszerű e töltés potenciális energiája egy helyen, ahol a potenciál U, a következő

$$W = eU. \tag{8.12.1}$$

Dipólus potenciális energiáját, ha a potenciált a $-e$ töltés helyén U-val jelöljük, a következő kifejezés adja

$$W = -eU + e(U + d\mathbf{s}\,\mathrm{grad}\,U) = e\,d\mathbf{s}\,\mathrm{grad}\,U = -\mathbf{m}\mathfrak{E}. \tag{8.12.2}$$

Tehát homogén elektromos térben a dipólus potenciális energiája csak úgy változhat meg, ha az $\mathbf{m}$ és $\mathfrak{E}$ közti szög megváltozik, egyszerű transzlációnál az energia változatlan marad. Tehát egy önmagával párhuzamos eltolásnál a homogén tér nem végez munkát. Mivel az elemi munka az elemi elmozdulás és az erő skaláris szorzata, homogén elektromos térben olyan erő, amely a dipólus transzlációját idézné elő, nem hat.

A dipólus elforgatásánál azonban végzünk munkát. Ismeretes, hogy az elemi $d\vartheta$ szöggel történő elforgatásnál végzett munka $Md\vartheta$, ahol M a forgatómomentum. Tehát

$$dA = Md\vartheta = -dW,$$

$$W = -m\mathfrak{E}\cos\vartheta,$$

$$dW = m\mathfrak{E}\sin\vartheta d\vartheta.$$

Ebből

$$Md\vartheta = -m\mathfrak{E}\sin\vartheta\,d\vartheta,$$

vagyis

$$M = -m\mathfrak{E}\sin\vartheta. \tag{8.12.3}$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy az $\mathbf{M}$ forgatómomentum az $\mathbf{m}$ és $\mathfrak{E}$ közti szöget kisebbíteni akarja.

Eddig a dipólmomentumot fixnek tekintettük, éppen olyan fontos azonban az az eset, midőn $\mathbf{m}$ arányos $\mathfrak{E}$-vel, pl.

$$\mathbf{m} = \alpha\mathfrak{E}.$$

α az egységnyi térerősséggel indukált dipólmomentum, a *polarizálhatóság*. Tekintsük a dipólus negatív töltését fixnek, akkor a pozitív töltésre az $e\mathfrak{E}$ erő hat, amely a negatív töltéstől távolítani akarja. Egyensúly esetén éppen olyan nagy, de vele ellentétes irányú belső erő hat, mely az $e\mathfrak{E}$-t kompenzálja. Egyensúly esetén ez a belső erő (a töltések közt működő erő) $-e\mathfrak{E}$. Ha a tér $d\mathfrak{E}$-vel növekszik, akkor az energia megváltozása egyenlő a dipólenergia megváltozása és a töltés elmozdításakor a belső erő, $-e\mathfrak{E}$, ellen végzett munka különbségével. Tehát

$$dW = -(\mathbf{m} + d\mathbf{m})(\mathfrak{E} + d\mathfrak{E}) + \mathbf{m}\mathfrak{E} - (-e\mathfrak{E}d\mathbf{r}),$$

ahol $d\mathbf{r}$ a töltés elmozdulása, tehát $ed\mathbf{r} = d\mathbf{m}$. A magasabb rendű kicsi tagok elhanyagolásával nyerjük

$$dW = -\mathbf{m}\,d\mathfrak{E} - \mathfrak{E}d\mathbf{m} + \mathfrak{E}d\mathbf{m} = -\mathbf{m}d\mathfrak{E}.$$

$$dW = -\alpha\mathfrak{E}d\mathfrak{E}.$$

A térben keletkezett dipól energiáját 0-tól $\mathfrak{E}$-ig való integrálással nyerjük

$$W = -\alpha\int_0^{\mathfrak{E}} \mathfrak{E}d\mathfrak{E} = -\frac{1}{2}\alpha\mathfrak{E}^2 = -\frac{1}{2}\mathbf{m}\mathfrak{E}. \qquad (8.12.4)$$

A fentiekre példa a semleges atom, amely csak elektromos térben válik dipólussá.

Az elektrosztatikus tér összenergiája

Az elektrosztatikában két felfogás uralkodik, melyek egymással ekvivalensek. A régebbi, az ún. távolhatás elmélete csak a töltéseket és a köztük működő erőket veszi figyelembe és ennek alapján adja meg az energiát. A másik, modernebb felfogás az energiát a töltések közti térben elosztva képzeli, tehát eszerint mindenütt, ahol elektromos térerősség van, elektromos energia is van jelen. Ennek a felfogásnak nagyon termékeny volta főképpen a gyorsan váltakozó tereknél tűnik ki, ahol az elektromágneses hullámok felismeréséhez vezet.

Először a távolbahatás elmélete alapján számítjuk az energiát, ha a töltések között vákuum van. Legyen adva egy e_1 és e_2 töltésű pontokból álló rendszer. A köztük levő távolság legyen r_{12}. A köztük működő erő abszolút értéke

$$|\mathbf{K}| = \frac{e_1 e_2}{r_{12}^2}.$$

A potenciális energia pedig, mint azonnal láthatjuk,

$$W = \frac{e_1 e_2}{r_{12}}. \tag{8.12.5}$$

Ekkora munkát kell végeznünk, ha az e_2 töltést az e_1 töltéshez a végtelenből r_{12} távolságra hozzuk. W a rendszer elektrosztatikus energiája.

Ha több töltött pontból áll a rendszer, akkor az összenergiát úgy számíthatjuk ki, hogy az e_1 töltésből indulunk ki és ehhez a ∞-ből r_{12} távolságra hozzuk az e_2-t, azután az e_3 töltést ehhez a két töltéshez r_{13} ill. r_{23} távolságokra hozzuk a ∞-ből és így tovább. Az összes munka, melyet végzünk a következő

$$\begin{aligned} W = &\frac{e_1 e_2}{r_{12}} + \frac{e_1 e_3}{r_{13}} + \frac{e_1 e_4}{r_{14}} + \dots \\ &+ \frac{e_2 e_3}{r_{23}} + \frac{e_2 e_4}{r_{24}} + \dots \\ &+ \frac{e_3 e_4}{r_{34}} + \dots, \end{aligned} \tag{8.12.6}$$

vagyis

$$W = \frac{1}{2} \sum_i{}' \sum_k{}' \frac{e_i e_k}{r_{ik}}. \tag{8.12.7}$$

A Σ-jelekkel való írásmódnál az $\frac{1}{2}$ faktorral kell szorozni, mert a $\sum_i \sum_k$-nál minden i, k kombináció kétszer fordul elő, míg az összegben csak egyszer szerepelhet. A Σ-jel melletti vessző azt jelenti, hogy az $i = k$ kombináció nem fordulhat elő.

A $\sum_i{}' \frac{e_i}{r_{ik}}$ összeg a k-adik töltés helyén az összes többi töltés által előidézett potenciált jelenti, ezt U_k-val jelöljük. Tehát írhatjuk

$$W = \frac{1}{2} \sum_k U_k e_k. \tag{8.12.8}$$

Ezt átvihetjük folytonos eloszlásra is. Térbeli eloszlásnál $de = \rho dV$. Felületi eloszlásnál pedig $de = \omega dF$. Tehát az energia

$$W = \frac{1}{2} \int_V U \rho dV + \frac{1}{2} \int_F U \omega dF. \tag{8.12.9}$$

Ezek után számítsuk ki az energiát az újabb felfogásnak megfelelően, midőn minden dV térfogatelemnek, melyben $\mathfrak{E}$ nem zérus, tulajdonítunk energiát. Evégből alkalmazzuk a *Gauss*-tételt az $U\mathfrak{E}$ szorzatra

$$\int_F U \mathfrak{E}_n dF = \int_V \mathfrak{E} \operatorname{grad} U dV + \int_V U \operatorname{div} \mathfrak{E} dV.$$

Az F felületet terjesszük ki a ∞-be, V ennek megfelelően az egész tér. Mivel U a ∞-ben mint $\frac{1}{r}$, $\mathfrak{E}$ mint $\frac{1}{r^2}$ tűnik el, dF pedig csak mint r^2 növekszik, a baloldal eltűnik. Tehát

$$\int U \operatorname{div} \mathfrak{E}\, dV = -\int \mathfrak{E} \operatorname{grad} U dV.$$

Felhasználva, hogy $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\rho$ és $-\operatorname{grad} U = \mathfrak{E}$, kapjuk

$$\int_V 4\pi U\rho dV = \int_V \mathfrak{E}^2 dV. \tag{8.12.10}$$

Mivel

$$W = \frac{1}{2} \int_V U\rho dV,$$

nyerjük, hogy

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathfrak{E}^2 dV. \tag{8.12.11}$$

Az energiasűrűség, vagyis a térfogategységben levő energia

$$w = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}^2. \tag{8.12.12}$$

Ha a térben szinguláris felületek vannak, melyeken $\mathfrak{E}_n$ ugrást szenved, akkor a *Gauss*-féle tétel alkalmazásánál (12.10) baloldalán még a következő tag lépett volna fel: $4\pi \int U\omega dF$. Vagyis teljes megegyezésre jutunk a távolbahatás elmélete alapján számított energiával.

Ezek után térjünk rá arra az esetre, midőn dielektrikumok vannak jelen és számítsuk ki az összenergiát a távolbahatás elmélete szerint. Mint ismeretes, egy ε dielektromos állandójú közegben az elektromos térintenzitás, tehát az elektromos erőhatások az ε-ad részre csökkennek a vákuumban levő térintenzitáshoz, ill. erőhatásokhoz képest. Ennek megfelelően a potenciál és így a potenciális energia a vákuumhoz viszonyítva is az ε-ad részére csökken. Tehát az összenergia

$$W = \frac{1}{2} \sum_i{}' \sum_k{}' \frac{e_i e_k}{\varepsilon r_{ik}}. \tag{8.12.13}$$

A $\sum_i{}' \frac{e_i}{\varepsilon r_{ik}}$ összeg a k-adik töltés helyén az összes többi töltéstől származó potenciál, tehát

$$W = \frac{1}{2} \sum_k U_k e_k. \tag{8.12.14}$$

Folytonos eloszlás esetén

$$W = \frac{1}{2} \int_V U\rho dV + \frac{1}{2} \int_F U\omega dF. \tag{8.12.15}$$

Ezt az integrált mindazon térrészekre, ill. felületekre ki kell terjeszteni, ahol ρ és ω nem zérus. Tehát formailag ugyanazt a kifejezést kapjuk, mint üres térre, de most a potenciál nevezőjében szerepel az ε.

Az újabb felfogás szerint a következőképpen számíthatjuk ki W-t. A (12.15) formulában

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{D}$$

helyettesítéssel, ha felületi töltések nincsenek, nyerjük

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V U \operatorname{div} \mathfrak{D} \, dV .$$

Ezt az integrált kiterjeszthetjük az egész térre, mert ahol $\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0$, az a térrész nem járul hozzá az integrálhoz.

Ismeretes, hogy

$$\operatorname{div} (U\mathfrak{D}) = U \operatorname{div} \mathfrak{D} + \mathfrak{D} \operatorname{grad} U .$$

Innen $(U \operatorname{div} \mathfrak{D})$-t kifejezve nyerjük

$$8\pi W = \int_V \operatorname{div} (U\mathfrak{D}) dV - \int_V \mathfrak{D} \operatorname{grad} U dV .$$

A jobboldali első integrálra GAUSS tételét alkalmazva és a másodikban $-\operatorname{grad} U$ helyébe $\mathfrak{E}$-t írva nyerjük

$$8\pi W = \int_F U \mathfrak{D}_n dF + \int_V \mathfrak{E}\mathfrak{D} dV .$$

Ha a felületi integrált a végtelen távoli felületre, a térfogatot pedig ennek megfelelően az egész térre terjesztjük ki, akkor a felületi integrál eltűnik ugyanolyan okoknál fogva, mint a vákuumnak megfelelő esetben és nyerjük

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{E}\mathfrak{D} \, dV , \tag{8.12.16}$$

vagy a

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$$

helyettesítéssel

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V \varepsilon \mathfrak{E}^2 \, dV . \tag{8.12.17}$$

A (8.12)-es formulából az energiasűrűségre a következő kifejezés adódik

$$W = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}\mathfrak{D} .$$

13. §. Anizotrop dielektrikumok

A $\mathfrak{D}$ vektor definíciója, mely szerint $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$, csak izotrop közegekre áll fenn. Anizotrop közegekben $\mathfrak{D}$ komponensei $\mathfrak{E}$ komponenseinek homogén lineáris függvényei. Pl.

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_x &= \varepsilon_{11}\mathfrak{E}_x + \varepsilon_{12}\mathfrak{E}_y + \varepsilon_{13}\mathfrak{E}_z, \\ \mathfrak{D}_y &= \varepsilon_{21}\mathfrak{E}_x + \varepsilon_{22}\mathfrak{E}_y + \varepsilon_{23}\mathfrak{E}_z, \\ \mathfrak{D}_z &= \varepsilon_{31}\mathfrak{E}_x + \varepsilon_{32}\mathfrak{E}_y + \varepsilon_{33}\mathfrak{E}_z, \\ \varepsilon_{ik} &= \varepsilon_{ki}. \end{aligned} \tag{8.13.1}$$

Tehát míg az izotrop közeg dielektromos viselkedésére egy adat jellemző, addig anizotrop esetben hat adat szükséges. Az ε-okból alkotott mátrix egy másodrendű szimmetrikus tenzor.

Általában másodrendű tenzornak nevezzük a következő

$$T = \begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{Vmatrix} \tag{8.13.2}$$

mátrixba foglalt értékrendszert, ha e mátrix sorainak egy **A** vektor komponenseivel való kompozíciója rendre egy **B** vektor komponenseit szolgáltatja. Vagyis ha

$$\begin{aligned} B_x &= T_{11}A_x + T_{12}A_y + T_{13}A_z, \\ B_y &= T_{21}A_x + T_{22}A_y + T_{23}A_z, \\ B_z &= T_{31}A_x + T_{32}A_y + T_{33}A_z, \end{aligned} \tag{8.13.3}$$

ahol B_x, B_y, B_z a **B** vektor komponensei. Szimmetrikus a tenzor, ha

$$T_{ik} = T_{ki},$$

ekkor a független komponensek száma hat. Antiszimmetrikus, ha

$$T_{ik} = -T_{ki},$$

ezeknél $T_{ii} = 0$, így a független komponensek száma három.

Anizotrop dielektromos közeg esetén tehát az ε-ok rendszere szimmetrikus tenzort ad. Koordinátatranszformációval mindig elérhető, hogy a nemdiagonális elemek eltűnjenek, tehát

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_x &= \varepsilon_1\mathfrak{E}_x, \\ \mathfrak{D}_y &= \varepsilon_2\mathfrak{E}_y, \\ \mathfrak{D}_z &= \varepsilon_3\mathfrak{E}_z. \end{aligned} \tag{8.13.4}$$

Ahol ε_1, ε_2, $\varepsilon_3 > 1$; ezek az ε-ok az ún. fődielektromos állandók. Anizotrop közegekben is fennáll, hogy

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathfrak{GD}\, dV. \tag{8.13.5}$$

$\mathfrak{GD}$ az $\mathfrak{G}$ vektor komponenseinek kvadratikus alakja.

KILENCEDIK FEJEZET

STACIONÁRIUS ÁRAMOK

1. §. Definíciók

Mint láttuk, vezetőkben nem lehet elektrosztatikus teret fenntartani. De időben állandó teret lehet létesíteni, ha állandóan energiát viszünk a vezetőbe. Ezáltal azonban a környezetben változások mennek végbe, vagyis a tér már nem statikus. Ezek a *stacionáris terek* továbbá abban különböznek a statikus terektől, hogy állandó hőfejlődéssel vannak egybekötve, továbbá, hogy elektromos töltések mozgásával kapcsolatosak. Az elektromos töltések mozgását *elektromos áram*nak nevezzük. Az elektromos áram mágneses teret létesít, mellyel később fogunk foglalkozni.

Az *áramerősség* alatt, a vezető keresztmetszetén az időegység alatt átáramló elektromos mennyiséget értjük. Ha tehát *dt* idő alatt *de* elektromos töltés halad át, akkor az áramerősség vagy intenzitás:

$$I = \frac{de}{dt}, \tag{9.1.1}$$

Az *áramsűrűségen*, **i**-n, olyan vektort értünk, melynek iránya az elektromosság áramlásának iránya, nagysága pedig az **i**-re merőleges felületegységen időegység alatt áthaladó elektromos mennyiség.

Tehát tetszőleges F felületen áthaladó áram intenzitása

$$I = \int_F i_n dF = \int_F |\mathbf{i}| \cos(\mathbf{i}, \mathbf{n})\, dF, \tag{9.1.2}$$

ahol **n** a dF felületelem normálisa.

2. §. Ohm törvénye

A tapasztalat szerint fémekben és elektrolitekben az áramerősség arányos az áramot létesítő feszültségkülönbséggel. Az arányossági faktort $\frac{1}{R}$ alakban írjuk. Tehát

$$I = \frac{U}{R}. \tag{9.2.1}$$

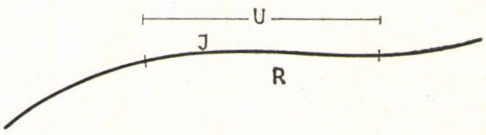
R az ellenállás, mely többek között függ a hőmérséklettől. A fenti egyenlet fejezi ki OHM törvényét, melynél tehát fel kell tételeznünk, hogy a hőmérséklet a hőfej-

lődés ellenére állandó marad, amit külön berendezésekkel érhetünk el. Sok esetben a következőképpen írjuk az OHM törvényét kifejező egyenletet

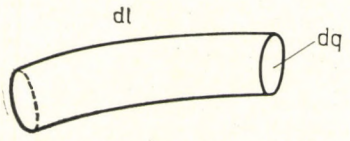
$$U = IR, \tag{9.2.2}$$

mely azt mondja, hogy ha egy vezetőben I erősségű áram folyik, akkor két pontja között, melyek között az ellenállás R, a potenciálkülönbség $U = IR$.

Az *Ohm*-törvény fenti fogalmazásával nem elégedhetünk meg, szükségünk van egy olyan megfogalmazásra, mely bizonyos elektromos mennyiségeknek lokális értékeit hozza egymással kapcsolatba.



162. ábra. OHM törvénye lineáris vezetőben



163. ábra. Vékony vezető egy elemi darabja

Tekintsünk egy hengerszerű vezetőt, melynek hossza dl, keresztmetszete dF. A tapasztalat szerint az ellenállás arányos a henger hosszával és fordítva arányos a keresztmetszetével, tehát

$$R = \rho \frac{dl}{dF}, \tag{9.2.3}$$

ahol a ρ arányossági faktor egy olyan kocka ellenállása, melynek élhossza 1 cm ($l = 1$, $F = 1$). ρ a fajlagos ellenállás, $\frac{1}{\rho} = \sigma$ a fajlagos vezetőképesség. ρ és σ a vezető anyagi minőségétől függ. Ha a henger két végén fennálló potenciálkülönbséget $d\mathbf{U}$-val jelöljük, akkor OHM törvénye a hengerre így szól

$$I = \frac{|\mathbf{U}|}{R} = \sigma dF \left| \frac{d\mathbf{U}}{dl} \right|.$$

(Pozitív áram esetén I mindig pozitív, tehát $\mathbf{U}$ abszolút értéke szerepel.)

Ha továbbá feltesszük, hogy dF a hengervezetőre merőleges keresztmetszet, vagyis $\mathbf{i}dF$-re merőleges, akkor

$$I = |\mathbf{i}|\, dF.$$

Tehát

$$|\mathbf{i}|\, dF = \sigma dF \left| \frac{d\mathbf{U}}{dl} \right|,$$

$$|\mathbf{i}| = \sigma \left| \frac{d\mathbf{U}}{dl} \right|,$$

$$\left| \frac{d\mathbf{U}}{dl} \right| = |\mathfrak{E}_l|,$$

$$|\mathbf{i}| = \sigma |\mathfrak{E}_l|.$$

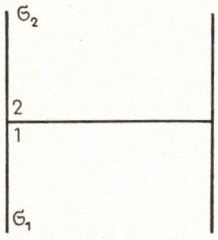
Mivel pedig egy homogén izotrop testben, melyre itt szorítkozunk, $\mathfrak{E}$ és $\mathbf{i}$ egyirányú, vagyis az áram a térerősség irányában folyik, írhatjuk, hogy

$$\mathbf{i} = \sigma \mathfrak{E}. \tag{9.2.4}$$

Ez OHM törvényének differenciális alakja.

Ezek után rátérünk *két egymással érintkező vezető felületén fellépő jelenségekre.* A tapasztalat szerint áramot vivő vezetőben a tér rotációmentes, sőt két vezető határfelületén a felületi rotáció is eltűnik, vagyis

$$\operatorname{Rot} \mathfrak{E} = 0, \tag{9.2.5}$$



164. ábra. Két vezetőt elválasztó határfelület

amit úgy írhatunk, hogy $(\mathfrak{E}_t)_1 = (\mathfrak{E}_t)_2$, vagyis a tangenciális komponensben nincs ugrás.

A normális komponensben ellenben van ugrás. Ugyanis $\mathbf{i}$ felületi divergenciájának el kell tünni, mert az áramnak a felületen nem lehet forrása, amennyi elektromosság az egyik oldalon odafolyik, annyi távozik a másikon. Tehát

$$\operatorname{Div} \mathbf{i} = (i_n)_2 - (i_n)_1 = 0,$$

vagyis

$$(i_n)_1 = (i_n)_2,$$

tehát

$$\sigma (\mathfrak{E}_n)_1 = \sigma (\mathfrak{E}_n)_2. \tag{9.2.6}$$

A fenti egyenletet pedig így lehet írni

$$\frac{(i_t)_1}{\sigma_1} = \frac{(i_t)_2}{\sigma_2}.$$

A 165. ábrából látható, hogy

$$\frac{(i_t)_1}{(i_n)_1} = \operatorname{tg} \alpha_1, \qquad \frac{(i_t)_2}{(i_n)_2} = \operatorname{tg} \alpha_2,$$

$$\frac{(i_t)_1}{(i_t)_2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2}.$$

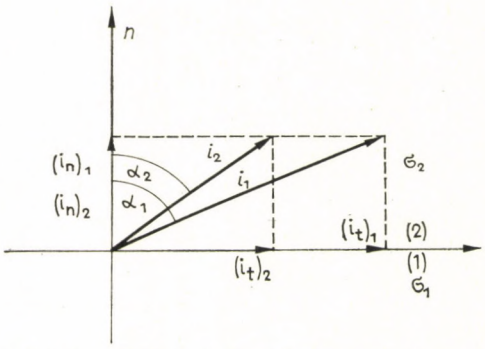
A fentiek szerint pedig

$$\frac{(i_t)_1}{(i_t)_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2},$$

tehát

$$\operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2 = \sigma_1 : \sigma_2 . \tag{9.2.7}$$

Ez az áramvonalak törési törvénye a határfelületen. Ez adja egyúttal $\mathfrak{E}$ törési törvényét is. Vezető és szigetelő határán, mint a tapasztalat mutatja, szintén



165. ábra. Az áramsűrűség irányváltozása vezetők határfelületén

fennáll, hogy

$$(\mathfrak{E}_t)_1 = (\mathfrak{E}_t)_2.$$

Mivel pedig a vezetőből a szigetelőbe áram nem halad

$$i_n = 0,$$

vagyis $\mathfrak{E}_n = 0$.

A vezető belsejében nem keletkezhetnek áramvonalak, tehát

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = 0 ,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = \operatorname{div} (\sigma \mathfrak{E}) = - \operatorname{div} (\sigma \operatorname{grad} U) = 0. \tag{9.2.8}$$

Ha σ állandó, vagyis a vezető homogén, akkor

$$\sigma \operatorname{divgrad} U = 0,$$

$$\text{tehát } \Delta U = 0.$$

Ha a *vezető nem homogén*, akkor a töltések eloszlásából származó $\mathfrak{E}$ térintenzitáshoz még egy az inhomogenitásból eredő $\mathfrak{E}^e$ erő járul, amelyet *elektromotoros erőnek* nevezünk. (A vezető állhat olyan vezetőkből, melyek anyagi minősége különbözik egymástól, pl. galvánelem, vagy lehetnek hőmérsékleti különbségek ugyanazon vezető különböző pontjai között.) Ebben az esetben OHM törvényénél

$\mathfrak{E}^e$-t $\mathfrak{E}$-hez hozzá kell venni, vagyis OHM törvénye ilyen alakban érvényes

$$\mathbf{i} = \sigma\,(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e)$$

és ekkor

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = \operatorname{div}\{\sigma\,(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e)\} = 0,$$

tehát

$$\operatorname{div}\{\sigma\,(\mathfrak{E}^e - \operatorname{grad} U)\} = 0,$$

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} U) = \operatorname{div}(\sigma\mathfrak{E}^e). \tag{9.2.9}$$

Ez az egyenlet szolgál U meghatározására a vezetőn belül. A vezetőn kívül most is, mint az elektrosztatikában, $\Delta U = 0$.

Mint a tapasztalat mutatja, *inhomogén vezetők érintkezési felületén* az előbbi két határfeltételhez hasonló két határfeltétel most is fennáll, mégpedig

$$(\mathfrak{E}_t)_1 + (\mathfrak{E}^e_t)_1 = (\mathfrak{E}_t)_2 + (\mathfrak{E}^e_t)_2,$$

$$(i_n)_1 = (i_n)_2.$$

Tehát az áramvonalak törési törvénye változatlan marad.

A vezető és szigetelő határán most is fennáll, hogy

$$(\mathfrak{E}_t)_1 = (\mathfrak{E}_t)_2,$$

ugyanis a tér rotációmentes most is.

Hasonlóan fennáll, hogy

$$i_n = 0,$$

ahonnan

$$\mathfrak{E}_n + \mathfrak{E}^e_n = 0$$

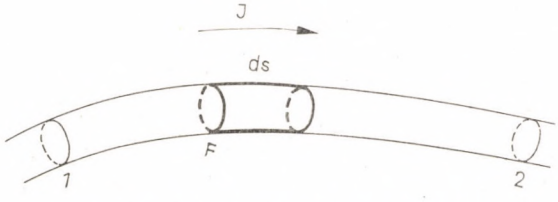
következik.

OHM törvényét *inhomogén vezető véges darabjára* is könnyen levezethetjük. OHM törvényének differenciális alakjából indulunk ki, mely a következő

$$\mathbf{i} = \sigma\,(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e),$$

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} U,$$

$$\mathfrak{E}_s = -\frac{\partial U}{\partial s}.$$



166. ábra. Inhomogén vezető felbontása elemi hosszúságú darabokra

∂s a hengervezető alkotójának irányába eső ívelem, melyről feltesszük, hogy az áramvonalak irányába esik. Ha F a vezetőre merőleges keresztmetszet, akkor

$$i_n = \frac{I}{F} = \sigma\left(-\frac{\partial U}{\partial s} + \mathfrak{E}_s^e\right),$$

$$I\frac{1}{\sigma}\frac{1}{F} = -\frac{\partial U}{\partial s} + \mathfrak{E}_s^e.$$

Integrálva a vezető mentén

$$I\int_1^2 \frac{1}{\sigma}\frac{ds}{F} = U_1 - U_2 + \int_1^2 \mathfrak{E}_s^e ds,$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sigma}\frac{ds}{F} = R_{12}, \qquad \int_1^2 \mathfrak{E}_s^e ds = \mathfrak{E}_{12}^e.$$

Ha $U_1 - U_2$-t U-val jelöljük és az indexeket elhagyjuk, akkor

$$U = RI - \mathfrak{E}^e. \tag{9.2.10}$$

Zárt vezetőre alkalmazva

$$U = U_1 - U_2 = 0,$$

tehát

$$RI = \mathfrak{E}^e. \tag{9.2.11}$$

$\mathfrak{E}^e$-t nevezzük *elektromotoros integrálerő*nek.

Ki lehet mutatni, hogy ahhoz, hogy stacionárius áramlás létrejöhessen, szükséges, hogy rot $\mathfrak{E}^e$ ne legyen mindenhol zérus.

3. §. Joule törvénye

Ha egy e elektromos töltés egy U_1 potenciálú helyről egy U_2 potenciálú helyre mozdul el, akkor a végzett munka

$$A = e\,(U_1 - U_2). \tag{9.3.1}$$

Ez a munka, vagyis energia, az energia tétele értelmében nem veszhet el és stacionárius térben mint hő, úgynevezett *Joule*-féle hő jelentkezik.

Egy vezetőben, melyben I intenzitású áram folyik, két ekvipotenciális felülettel, U_1 és U_2 potenciálú felületekkel, határolt darabon az időegységben

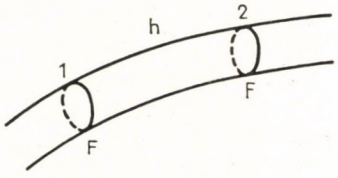
$$Q = I\,(U_1 - U_2) \tag{9.3.2}$$

hő keletkezik, mivel I az időegységben a vezető keresztmetszetén áthaladó elektromos mennyiség.

Ezt a törvényt is differenciális alakban kell megfogalmaznunk. Szorítkozzunk egyelőre homogén vezetőkre. Válasszunk ismét egy kis elemi hengert. Palástjának alkotói áramvonalak, alsó és felső fedőlapjai ekvipotenciális felületek U_1 és U_2 potenciállal. Legyen a magassága h, az áramvonalakra merőleges keresztmetszete F. Ekkor

$$U_1 - U_2 = h \mid \mathrm{grad} U \mid = h\mathfrak{E},$$

feltéve, hogy $U_1 > U_2$.



167. ábra. A vezető h hosszúságú darabja

Ha az áramerősség I, vagyis ha

$$I = iF,$$

akkor az elemi hengerben az időegységben keletkezett hő

$$dQ = iFh\mathfrak{E} = i\mathfrak{E}dV.$$

A térfogategységben időegység alatt keletkezett hő, q tehát

$$q = \frac{dQ}{dV} = i\mathfrak{E},$$

vagy mivel $\mathbf{i}$ és $\mathfrak{E}$ egyirányú

$$q = \mathbf{i}\mathfrak{E}. \tag{9.3.3}$$

Ohm törvényének figyelembevételével $q = \sigma\mathfrak{E}^2 = \sigma\mathfrak{E}^2$,

$$q = \frac{\mathbf{i}^2}{\sigma}. \tag{9.3.4}$$

Ez Joule törvényének differenciális alakja homogén vezetőben. Inhomogén vezetőben

$$q = \mathbf{i}(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e) = \sigma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e)^2.$$

4. §. Kirchhoff törvényei

Kirchhoff törvényei lineáris vezetőkre vonatkoznak. Ezek olyan vezetők, melyeknek egyik mérete a másikhoz képest igen kicsi, ilyen pl. egy hosszú vékony drót. A legtöbb technikai berendezésnél ilyen vezetőkön vezetik az elektromossá-

got. Legyen adva egy lineáris vezetőkből álló hálózat, amelyben bizonyos elektromotoros erők hatnak.

Az árameloszlás meghatározásának feladata itt abban áll, hogy ismerve az egyes vezetődarabok R_k ellenállását és az egyes darabokban működő $\mathfrak{E}_k^e$ elektromotoros erőket, meghatározandó az egyes vezetődarabokban az áramintenzitás, I_k. Ezt a feladatot a *Kirchhoff*-féle tételekkel oldhatjuk meg.

Az *első Kirchhoff-féle törvény*hez a következőképpen juthatunk el. (2.8) szerint

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = 0.$$

Egy elágazási pontot körülvevő felületre tehát fennáll, hogy

$$\oint i_n \, dF = 0.$$

Tehát

$$\oint i_n \, dF = I_1 + I_2 + \ldots + I_n = \sum_k I_k = 0, \tag{9.4.1}$$

vagyis valamely pontból kiinduló vezetők áramerősségének összege zérus.

A *második Kirchhoff-féle törvény*t a következőképpen vezethetjük le. Képezzük a vezetőhálózat egy zárt körére az $\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e$ vektor vonalintegrálját és fejezzük ezt ki, mint a zárt kört alkotó vezetődarabokra vonatkozó vonalintegrálok összegét.

$$\oint (\mathfrak{E}_s + \mathfrak{E}_s^e) \, ds = \sum_k \int_k (\mathfrak{E}_s + \mathfrak{E}_s^e) \, ds = \sum_k \int_k \frac{i}{\sigma} \, ds,$$

ugyanis $\mathfrak{E}_s + \mathfrak{E}_s^e$ iránya egy egyenesnek tekinthető elemi vezető darabban megegyezik az elemi vezető darab irányával és $\mathbf{i}$ irányával. Az indexeket a fenti írásmódnál elhagytuk. Ha F a k-adik vezető keresztmetszete, akkor

$$\int_k \frac{iF}{\sigma F} \, ds = I_k \int_k \frac{ds}{\sigma F} = I_k R_k,$$

tehát

$$\oint (\mathfrak{E}_s + \mathfrak{E}_s^e) \, ds = \sum_k I_k R_k.$$

$\mathfrak{E}$ vonalintegrálja bármely zárt görbén eltűnik, tehát

$$\oint \mathfrak{E}_s ds = 0.$$

$\mathfrak{E}^e$ vonalintegrálját szintén az egyes vezetődarabokra vett vonalintegrálok összegére bontjuk fel. Legyen $\mathfrak{E}^e$-nek a k-adik vezetődarabon vett vonalintegrálja egyenlő $\mathfrak{E}_k^e$-vel, ekkor

$$\oint \mathfrak{E}_s^e ds = \sum_k \int_k \mathfrak{E}_s^e ds = \sum_k \mathfrak{E}_k^e,$$

tehát

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k \mathfrak{E}_k^e. \tag{9.4.2}$$

Ez KIRCHHOFF második törvénye.

KIRCHHOFF első és második törvényének segítségével lehet meghatározni az egyes vezetődarabokban az áramintenzitást, ha az egyes darabok ellenállása és az egyes darabokban levő elektromotoros erők ismeretesek. Megjegyzendő, hogy az első törvényben az összegezés egy pontból kiinduló vezetőkre, a másodikban pedig zárt kört alkotó vezetődarabokra történik.

TIZEDIK FEJEZET

A MAGNETOSZTATIKUS TÉR

1. §. Mágneses alapjelenségek és a mágnesség alaptörvényei

Egyes testek, pl. mágnesvaskő darabok vagy ilyenekkel érintkezésbe hozott vas- és acéldarabok egymásra vonzó és taszító hatásokat gyakorolnak, amelyek lényegesen különböznek az analóg elektromos hatásoktól. Ezeket a hatásokat mágneses hatásoknak, az egymásra ilyen módon ható testeket mágneses testeknek, a teret pedig, melyben ilyen mágneses hatások vannak jelen, mágneses térnek nevezzük. Az olyan mágneses tereket, melyek állandók és melyek fennállása nem fogyaszt energiát, *magnetosztatikus tereknek* nevezzük. Ilyen pl. egy permanens mágnes pólusai közt levő tér és ide tartoznak a stacionárius elektromos áramok mágneses terei. Itt ugyan energia használódik el, de ez az energia a vezető véges ellenállása következtében használódik és semmi köze a mágneses térhez, mely, mint látni fogjuk, pusztán az áramerősségtől függ.

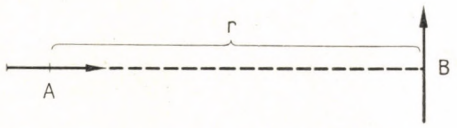
A mágneses jelenségek tárgyalásánál nem annyira a mágneses testekkel, hanem inkább a körülöttük levő mágneses térrel fogunk foglalkozni, mely fontos összefüggésben van az elektromos árammal. A mágneses testek, röviden mágnesek tulajdonságait arra fogjuk felhasználni, hogy velük a mágneses tér sajátságait határozzuk meg.

Az elektromos töltésnek a mágneses jelenségek körében nincsen analogonja, ezért a mágneses térerősség definíciója sem történhet olyan egyszerűen, mint az elektromos térerősségé. Két elektromos test közül az egyik a másik minden részét vagy vonzza vagy taszítja. Ezzel szemben két mágneses test, A és B kölcsönhatása mindig olyan, hogy az A test A_1 része a B test B_1 részét vonzza, az ezzel szemben lévő B_2-t pedig taszítja. Az A-nak A_1-gyel szemben lévő A_2 része viszont B_1-et taszítja és B_2-t vonzza. Minden mágnes két ilyen különböző viselkedésű részből áll, melyeket nem lehet egymástól különválasztani. Hosszú rúd esetében vagy tű alakú mágneseknél szokás ugyan mágneses pólusokról, azoknak a mágneses erőkre vonatkozó COULOMB törvényéről beszélni és ennek alapján a mágnességet az elektromosság analógiájára tárgyalni, de ez az eljárás nem simul a közvetlen tapasztalathoz és így mi ezt nem követjük.

Helyezzünk mágneses térbe egy kis méretű mágnest, mely mágnességét megtartja (permanens mágnes). Ha ez elegendő kicsi, akkor a tapasztalat szerint nem tolódik el, hanem elfordul, vagyis a mágneses térben forgatómomentum hat rá. Rögzítsük mágnesünket egy pontjában úgy, hogy e pont körül szabadon forogjon és a mágneses hatáson kívül más hatást ne szenvedjen. A nehézségi erő forgatómomentumát úgy küszöböljük ki, hogy a súlypontjában függesztjük fel a

testet, a szabad mozgást pedig a *Cardano*-féle felfüggesztéssel érhetjük el. Az így elhelyezett mágnes elforog és olyan helyzetbe áll be, melyben a forgatómomentum zérus. A tapasztalat szerint a mágnesnek végtelen sok nyugalmi, egyensúlyi helyzete van, melyek mindegyikében a mágnesnek egy egyenese ugyanazt a helyzetet mutatja. Ha a mágnest e körül az egyenes körül forgatjuk, a nyert helyzetek mindegyike egyensúlyi helyzet. Ezt az egyenest, mely tehát a mágnesnek a mágneses tér valamely pontjában elfoglalt minden egyensúlyi helyzetében közös, mágneses tengelynek nevezzük. Pozitív irányának azt az irányt nevezzük, mely a Föld mágneses terében észak felé mutat.

A tapasztalat azt mutatja, hogy a mágneses tér valamely pontjába helyezett különböző mágnesek tengelyei mind ugyanabba az irányba mutatnak. Ez az irány tehát a mágneses térre jellemző. Ezt az irányt, vagyis a mágneses tengely pozitív irányát nevezzük az illető pontban a mágneses tér irányának. Vizsgáljuk két mágnes kölcsönhatását oly távolságban, mely nagy a mágnesek méreteihez képest.



168. ábra. Az *A* és *B* mágnesek elrendezése

Az egyik mágnest helyezzük *A*-ba, a másikat *B*-be. Az *A* mágnes tengelye mutasson *B* felé, *B* tengelye pedig legyen merőleges *A* tengelyére. A két tengely közös síkja legyen vízszintes. Az *A* mágnes forogjon egy a tömegközéppontján átmenő függőleges fonál körül, *B* legyen rögzítve. A *B* mágnes hatására *A* kitérül. A felfüggesztő fonál elcsavarásával vigyük vissza az *A* mágnest eredeti helyzetébe. A *B* mágnes *A*-ra gyakorolt forgatómomentumának abszolút értéke, *M* egyenlő a fonál elcsavarásából származó forgatómomentum abszolút értékével. Rugalmas torzió esetén ennek abszolút értéke arányos az elcsavarás szögével, tehát könnyen lemérhető, vagyis a vele egyenlő *M* könnyen meghatározható kísérleti úton. Ezek a mérések azt mutatták, hogy

$$M = h\frac{m_A m_B}{r^3}\,, \tag{10.1.1}$$

ahol m_A és m_B az *A*-ban és *B*-ben levő mágnesekre jellemző faktorok, melyeket a mágnesek mágneses momentumai abszolút értékeinek nevezünk. A mágneses momentum vektor, melynek iránya a mágneses tengely iránya. h arányossági faktor.

A mágneses momentum abszolút értékét könnyen meghatározhatjuk. Legyen adva 3 mágnes, melyeket jelöljünk 1, 2, 3-mal, momentumaik abszolút értéke legyen m_1, m_2, m_3. Hozzuk az 1 és 2 mágneseket ugyanolyan helyzetbe, mint az *A* és *B* mágneseket és mérjük meg 2-nek 1-re gyakorolt forgatómomentumának abszolút értékét. Ezáltal nyerünk egy, a fentihez hasonló egyenletet, *A* és *B* helyett 1- és 2-vel. Hasonlóképpen járjunk el a 2 és 3, valamint a 3 és 1 mágnesekkel. Ekkor 3 egyen-

letet kapunk a 3 ismeretlen, m_1, m_2, m_3 számára, melyekből ezek kiszámíthatók. Az m-ek közül bármelyik kifejezhető a forgatómomentumok abszolút értékével, továbbá r-rel, mely szintén ismeretes és h-val. h egyelőre határozatlan arányossági faktor, melynek különböző választása által különböző magnesztotatikai egységekhez jutunk. Ha

$$h = 1, \tag{10.1.2}$$

nyerjük a közönséges magnetosztatikai mértékrendszert, ha pedig

$$h = \frac{1}{4\pi},$$

nyerjük a *Heaviside*-féle magnetosztatikai mértékrendszert. Mi az előbbit fogjuk általában használni.

Mindezek előrebocsátásával a mágneses teret minden pontjában meghatározott irányú és abszolút értékű vektorral jellemezhetjük, azaz a mágneses teret, mint vektorteret foghatjuk fel. A máneses teret egy P pontjában az a $\mathfrak{H}$ vektor jellemzi, melynek iránya a P pontba helyezett és az említett módon felfüggesztett kis mágnes tengelyének iránya. Abszolút értéke annak a forgatómomentumnak abszolút értéke, amely a mágneses tér most definiált irányára merőleges tengelyű, egységnyi momentumú mágnesre hat. Az így meghatározott $\mathfrak{H}$ vektort mágneses térerősségnek nevezzük.

Eddigi megállapításaink üres térre vonatkoznak. Ha a mágnesek kölcsönhatását nem üres térben vizsgáljuk, akkor a forgatómomentum a teret betöltő közegtől is függ. Ha az A és B mágneseket ismét az előbbi helyzetbe hozzuk, akkor

$$M = \frac{1}{\mu} \frac{m_A m_B}{r^3}. \tag{10.1.3}$$

μ a mágneses permeabilitás, a közegre jellemző állandó. Ez megfelel a dielektromos állandónak, csakhogy míg ε mindig nagyobb, mint 1, addig

$$\mu \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 1.$$

éspedig ha

$\mu < 1$, a közeg diamágneses,

$\mu = 1$, a közeg nem mágneses, pl. üres tér,

$\mu > 1$, a közeg paramágneses.

Itt is, hasonlóan az elektrosztatikához, bevezetjük a

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} \tag{10.1.4}$$

vektort, melyet a mágneses indukció vektorának nevezünk. $\mathfrak{B}$ definíciója a fenti alakban csak izotrop közegekre vonatkozik. Anizotrop közegek esetén μ nem egy

szám, hanem tenzor, amidőn $\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{H}$ komponensei között hasonló összefüggés áll fenn, mint $\mathfrak{D}$ és $\mathfrak{E}$ komponensei között. További tárgyalásaink izotrop közegekre vonatkoznak.

$\mathfrak{H}$ és $\mathfrak{B}$ teljesen hasonló szerepet játszik, mint $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{D}$, div $\mathfrak{B}$ adja tehát a valódi mágneses töltés térbeli sűrűségét. A tapasztalat szerint

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0,$$

vagyis valódi mágneses töltések nincsenek. Ezért nem indulhatunk ki a mágneses pólus fogalmából. Bármilyen kis mágnest tekintsünk is, az mindig mágneses dipólus.

Ugyanolyan okoknál fogva

$$\operatorname{Div} \mathfrak{B} = 0, \tag{10.1.5}$$

$$(\mathfrak{B}_n)_2 - (\mathfrak{B}_n)_1 = 0, \tag{10.1.6}$$

$$\mu_2 (\mathfrak{H}_n)_2 - \mu_1 (\mathfrak{H}_n)_1 = 0. \tag{10.1.7}$$

div $\mathfrak{H}$ adja a szabad mágneses töltések térbeli sűrűségét. Az (1.5) egyenletből nyerjük

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = \operatorname{div} (\mu \mathfrak{H}) = \mu \operatorname{div} \mathfrak{H} + \mathfrak{H} \operatorname{grad} \mu = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = -\frac{1}{\mu} (\mathfrak{H} \operatorname{grad} \mu).$$

Ha a közeg homogén, akkor μ = konstans, vagyis grad $\mu = 0$, tehát

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0.$$

Ha ellenben a közeg inhomogén, vagyis μ a hellyel változik, akkor div $\mathfrak{H} \neq 0$. Általában tehát

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 4\pi \rho'_m, \tag{10.1.8}$$

ahol ρ'_m jelenti a szabad mágneses töltések térbeli sűrűségét. Továbbá

$$\operatorname{Div} \mathfrak{H} = 4\pi \omega'_m = (\mathfrak{H}_n)_2 - (\mathfrak{H}_n)_1 = \frac{(\mathfrak{B}_n)_2}{\mu_2} - \frac{(\mathfrak{B}_n)_1}{\mu_1}, \tag{10.1.9}$$

ahol ω'_m jelenti a szabad mágneses töltések felületi sűrűségét, mely két különböző permeabilitású közeg határfelületén nullától különböző.

A tapasztalat azt mutatja, hogy két közeg határfelületén, feltéve, hogy a felületen nem folyik ún. felületi áram,

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0, \tag{10.1.10}$$

vagyis

$$(\mathfrak{H}_t)_2 - (\mathfrak{H}_t)_1 = 0. \tag{10.1.11}$$

Tehát a $\mathfrak{B}$ vektor normális és a $\mathfrak{H}$ tangenciális komponense folytonosan halad át a határfelületen, ami teljes analógiában van az elektrosztatikában a $\mathfrak{D}$ és $\mathfrak{E}$

vektorok viselkedésével. Teljesen hasonlóan, mint az elektrosztatikában, következik, hogy a $\mathfrak{H}$ vektor törési törvénye

$$\operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2 = \mu_1 : \mu_2, \tag{10.1.12}$$

ahol α_1 és α_2 a $\mathfrak{H}$ vektornak a felület normálisával alkotott szögei az 1, ill. 2 közegben.

Az elektromos polarizációnak, $\mathfrak{P}$-nek az $\mathfrak{M}$ vektor, a mágnesezés vektora felel meg

$$\mathfrak{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \mathfrak{H}, \tag{10.1.13}$$

vagyis $\mathfrak{M}$ a térfogategység mágneses momentuma.

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} = (1 + 4\pi\kappa) \mathfrak{H}. \tag{10.1.14}$$

κ a mágneses szuszceptibilitás

$$\kappa = \frac{\mu - 1}{4\pi}. \tag{10.1.15}$$

Tehát *nem mágneses anyagoknál* $\kappa = 0$. *Diamágneses anyagoknál* $\mu < 1$, $\kappa < 0$, ezeknél tehát $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{H}$ ellentétes irányúak. Ennek az esetnek az elektrosztatikában nincsen analogonja, ott $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{P}$ mindig egyirányú. *Paramágneses anyagoknál* $\mu > 1$, $\kappa > 0$, ezeknél $\mathfrak{H}$ és $\mathfrak{M}$ egyirányú.

Az elektromos szuszceptibilitás folyékony és szilárd testeknél 0,1 és 10 közötti értékeket vesz fel. *A mágneses szuszceptibilitás* abszolút értékben 10^{-4} vagy annál kisebb nagyságrendü, tehát lényegesen kisebb, mint az elektromos. Vannak azonban anyagok, melyeknek mágneses szuszceptibilitása ennél lényegesen nagyobb, néhány ezer. Ezek az anyagok *a ferromágneses anyagok*, jellemzőjük még, hogy κ függ a térerősségtől.

A mágneses tér energiája egészen hasonlóan adódik, mint az elektromos téré. A térfogategység mágneses energiája

$$W = \frac{\mu}{8\pi} \mathfrak{H}^2 = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}\mathfrak{H}. \tag{10.1.16}$$

2. §. Permanens mágnes mágneses tere

A tapasztalat szerint valamely permanens mágnes tere a mágnestől oly távolságban, mely nagy a mágnes lineáris méreteihez képest, olyan, mintha egy dipólustól származna, mely dipólus momentumának iránya a mágnes tengelyének irányával, momentumának nagysága pedig a mágnes momentumával egyenlő. Egy ilyen **m** momentumú dipólus terének potenciálja, mint láttuk,

$$U = \frac{\mathbf{mr}}{r^3}. \tag{10.2.1}$$

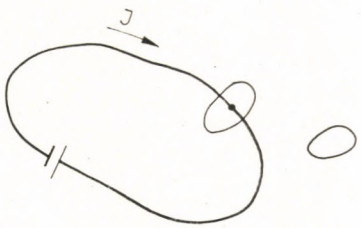
A mágneses tér a mágneses dipólus esetén teljesen hasonlóan adódik, mint az elektromos tér az elektromos dipólus esetében, vagyis

$$\mathfrak{H} = -\operatorname{grad} U.$$

Az erővonalak is természetesen azonosak az elektromos dipólus terének erővonalaival. (154. ábra)

3. §. Elektromos áram mágneses tere

Legyen adva egy vezető, melyben áram folyik, vagyis kössük össze egy elem két pólusát vezetővel. Azt fogjuk tapasztalni, hogy a vezető körül mágneses tér keletkezik, melyet az említett módon kimérhetünk, vagyis meghatározhatjuk a tér



169. ábra. A vezetőt körülölelő és a vezetőn kívül fekvő zárt görbék

minden pontjában a $\mathfrak{H}$ vektort. Ha képezzük az $\oint \mathfrak{H}_s ds$-et egy a vezetőt körülzáró görbére, mindig ugyanezt az értéket kapjuk, bármilyen legyen is a görbe. Mégpedig azt találjuk, hogy az integrál értéke az áramerősséggel arányos, vagyis

$$\oint \mathfrak{H}_s ds = \beta I, \tag{10.3.1}$$

egy a vezetőt körülzáró görbére integrálva. Olyan görbére pedig, mely a vezetőt nem veszi körül, az integrál zérus. I az áramerősség, β egy arányossági faktor. Ha I-t abszolút elektrosztatikus egységekben mérjük, akkor azt találjuk, hogy

$$\beta = \frac{4\pi}{c}, \tag{10.3.2}$$

ahol c a fénysebesség.

Ha β-t önkényesen 4π-nek választjuk, akkor I-re más számértéket kapunk, ami azt jelenti, hogy I-t más mértékrendszerben mérjük; ezt a mértékrendszert nevezzük elektromágneses mértékrendszernek. Ha *Heaviside*-egységeket használunk, akkor $\beta = \frac{1}{c}$. Mi a továbbiakban β-t $\frac{4\pi}{c}$-nek választjuk, vagyis az elektromos mennyiségeket az elektrosztatikai rendszerben adjuk meg.

Fenti egyenletünket át fogjuk alakítani. Tegyük fel, hogy a vezető keresztmetszete, mellyel foglalkozunk, véges kiterjedésű. Válasszunk a vezető belsejében egy síkgörbét, g-t, mely egy dF felületet zár körül. A síkgörbe felületének irányítása

tetszőleges lehet. A dF felületelemen áthaladó áram

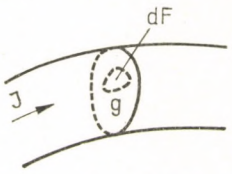
$$I_g = i_n \, dF,$$

ha i_n az áramsűrűségnek a dF felület normálisa irányába eső komponense.

Továbbá a rotáció definíciója értelmében fennáll, hogy

$$\oint_g \mathfrak{H}_s ds = \mathrm{rot}_n \mathfrak{H} dF,$$

ahol az n irány ismét a dF felületelem normálisának iránya.



170. ábra. A vezető keresztmetszetének elemi darabja

A fenti törvényszerűség értelmében

$$\oint_g \mathfrak{H}_s ds = \frac{4\pi}{c} I_g,$$

tehát dF-fel rövidítve $\mathrm{rot}_n \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} i_n$.

Ennek az egyenletnek bármilyen irányítású felületelemre fenn kell állnia. Ha azonban két vektornak bármely irányba eső komponensei egyenlők egymással, akkor a két vektor egyenlő egymással, tehát fennáll, hogy

$$\mathrm{rot} \, \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}. \tag{10.3.3}$$

Ez az egyenlet azt mondja, hogy a rot $\mathfrak{H}$ vektor iránya megegyezik az áramvonalak irányával, abszolút értékben pedig a $\mathfrak{H}$ rotációja egyenlő $|\mathbf{i}|$-nek $\frac{4\pi}{c}$-szeresével. Mivel div rot $\mathfrak{H} = 0$, következik, hogy div $\mathbf{i} = 0$, vagyis az áramvonalak sehol sem kezdődhetnek, vagy végződhetnek, hanem csak vagy a végesben, vagy pedig a végtelenen keresztül zárt görbék lehetnek.

Az elektrosztatikában adva voltak a töltések, ill. adva volt a töltések eloszlása és a feladat az volt, hogy a töltések, vagyis a források eloszlásából rotációmentes, vagyis örvénymentes vektormezőt határozzunk meg. A feladatot ott megoldottuk és a tér potenciálját előállítottuk. Jelen esetben a feladat az, hogy az áramok, vagyis örvények eloszlásából forrásmentes vektormezőt határozzunk meg. Amint az előbbi esetben egyszerűsítettük a problémát a skaláris potenciál bevezetésével, éppen úgy itt is egyszerűsödik a probléma, ha egy segédmennyiséget, mégpedig egy vektort vezetünk be, melyet *vektorpotenciál*nak nevezünk. Ezt az $\mathfrak{A}$ vektort

a következőképpen definiáljuk

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}. \tag{10.3.4}$$

Ha $\mathfrak{H}$-t mint egy $\mathfrak{A}$ vektor rotációját állítjuk elő, akkor máris elértük azt, hogy divergenciamentes, mert

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = 0.$$

$\mathfrak{H}$-tól pedig megköveteljük, hogy divergenciamentes legyen, mert feltesszük, hogy a vezetőt környező tér üres, vagyis $\mu = 1$.

A (3.4) egyenletből $\mathfrak{H}$-t (3.3)-ba helyettesítve nyerjük, hogy

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{A} - \Delta \mathfrak{A} = \frac{4\pi \mathfrak{i}}{c}.$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0. \tag{10.3.5}$$

Ha ugyanis $\operatorname{div} \mathfrak{A} \neq 0$, akkor $\mathfrak{A}$-hoz hozzáadhatunk egy olyan rotációmentes vektort, pl. $\mathfrak{A}'$-t, melynek ugyanazok a forrásai, de ellentett előjellel véve, mint $\mathfrak{A}$-nak. Az $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}'$ vektor ekkor már divergenciamentes és rotációja ugyanaz, mint $\mathfrak{A}$ rotációja, mert hiszen $\mathfrak{A}'$-ről feltettük, hogy rotációmentes. Ilyen $\mathfrak{A}'$ vektor mindig található, ugyanis ennek meghatározása egy rotációmentes vektormező meghatározását jelenti. Tehát $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ nullának vehető, vagyis $\mathfrak{A}$-ra a következő egyenletet kapjuk

$$\Delta \mathfrak{A} = -\frac{4\pi \mathfrak{i}}{c}. \tag{10.3.6}$$

Komponensekben

$$\begin{aligned} \Delta \mathfrak{A}_x &= -\frac{4\pi i_x}{c}, \\ \Delta \mathfrak{A}_y &= -\frac{4\pi i_y}{c}, \\ \Delta \mathfrak{A}_z &= -\frac{4\pi i_z}{c}. \end{aligned} \tag{10.3.7}$$

Ezeknek az egyenleteknek megoldása azonban ismeretes az elektrosztatikából. Mégpedig, ha csak térbeli áramok szerepelnek, vagyis felületi áramokat kizárunk, akkor a megoldások

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_x &= \int \frac{i_x dV}{cr}, \\ \mathfrak{A}_y &= \int \frac{i_y dV}{cr}, \\ \mathfrak{A}_z &= \int \frac{i_z dV}{cr}. \end{aligned} \tag{10.3.8}$$

Ezeket az egyenleteket egyetlen vektoregyenletbe foglalhatjuk össze, mely a következő

$$\mathfrak{A}_{(x,y,z)} = \int \frac{\mathbf{i}dV}{cr} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{i}(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}. \qquad (10.3.9)$$

(x, y, z) az a P pont, melyben a potenciált keressük, ξ, η, ζ a vezető egyes pontjainak koordinátái. Ennek az eredménynek segítségével azonnal kiszámíthatjuk egy lineáris vezető mágneses terét és levezethetjük a *Biot—Savart*-törvényt.

Legyen a vezető keresztmetszete F, akkor lineáris vezető esetében

$$i = \frac{I}{F}.$$

A $d\mathbf{s}$ ívelemeket a vezető tengelyének irányába helyezzük, mely egyúttal $\mathbf{i}$ iránya is. Tehát

$$\mathbf{i}dV = \frac{I}{F} F d\mathbf{s},$$

$$\mathfrak{A}_{(x,y,z)} = \frac{I}{c}\int \frac{d\mathbf{s}}{r} = \frac{I}{c}\int \frac{d\mathbf{s}}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}. \qquad (10.3.10)$$

Az integrált a vezető összes $d\mathbf{s}$ ívelemére kell képezni, melynek komponensei $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$.

$$\mathfrak{H} = \frac{I}{c} \operatorname{rot} \int \frac{d\mathbf{s}}{r} = \int \frac{I}{c} \operatorname{rot} \frac{d\mathbf{s}}{r}, \qquad (10.3.11)$$

ugyanis $\frac{I}{c}$ konstans, tehát beírható az integráljel alá. Továbbá a rotáció operátora is beírható, mert a rotáció arra a pontra vonatkozik, melyben $\mathfrak{H}$-t keressük, az integráció pedig a vezető ívelemeire terjesztendő ki.

Könnyen kimutatható, hogy

$$\operatorname{rot} u\mathbf{v} = [\operatorname{grad} u, \mathbf{v}] + u \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

Innen következik, hogy

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{r} d\mathbf{s}\right) = \left[\operatorname{grad}_P \frac{1}{r}, d\mathbf{s}\right] + \frac{1}{r} \operatorname{rot} d\mathbf{s}.$$

Mivel pedig

$$\operatorname{rot} d\mathbf{s} = 0,$$

mert $d\mathbf{s}$ komponensei, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ nem függenek a P pont koordinátáitól,

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{r}d\mathbf{s}\right) = \left[\mathrm{grad}_P \frac{1}{r}, d\mathbf{s}\right],$$

$$\mathrm{grad}_P \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mathbf{r}_0}{r^2}.$$

$\mathbf{r}$ a vezetőelemtől a P pont felé mutató rádiuszvektor, $\mathbf{r}_0$ az ugyanezen irányba mutató egységvektor. Tehát

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{r}d\mathbf{s}\right) = -\frac{[\mathbf{r}_0, d\mathbf{s}]}{r^2} = \frac{[d\mathbf{s}, \mathbf{r}_0]}{r^2}.$$

Ezt behelyettesítve $\mathfrak{H}$ formulájába, nyerjük

$$\mathfrak{H} = \int \frac{I}{c}\frac{[d\mathbf{s}, \mathbf{r}_0]}{r^2}. \tag{10.3.12}$$

Ezt az egyenletet úgy értelmezhetjük, hogy minden vezetőelem $\mathfrak{H}$-hoz

$$\frac{I}{c}\frac{[d\mathbf{s}, \mathbf{r}_0]}{r^2}$$

elemmel járul hozzá. Ez a *Biot–Savart*-féle törvény, mely szerint egy $Id\mathbf{s}$ áramelem által előidézett mágneses tér egy P pontban a vektori szorzat által megadott irányban merőleges az áramelemre és az áramelemtől P-hez húzott rádiuszvektorra, abszolút értéke pedig

$$\frac{I}{c}\frac{r_0 ds \sin\vartheta}{r^2}, \tag{10.3.13}$$

ahol ϑ az $\mathbf{r}_0$ és $d\mathbf{s}$ közti szög.

4. §. Zárt lineáris áram és a rajta átfektetett mágneses dipolréteg ekvivalenciája

A következőkben kimutatjuk, hogy egy lineáris zárt vezetőben folyó áram mágneses tere megegyezik egy oly mágneses felület terével, melynek szélét a zárt vezető adja, de különben tetszőleges alakú. A felület mágneses dipólusokkal van borítva oly módon, hogy a dipólusok normálisai a felület normálisának irányába mutatnak és a felületegység mágneses momentumának nagysága I/c. Ezt az ekvivalenciát nagyon könnyen kimutathatjuk analitikailag, csak arra kell ügyelni, hogy a differenciálásnál a $P(x, y, z)$ pont koordinátái szerint vagy a térfogatelem, ill. felületelem ξ, η, ζ koordinátái szerint kell-e differenciálni, amely térfogat- ill.

felületelemtől az r-et számítjuk. Ugyanis, mivel

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

fennáll, hogy

$$\operatorname{grad}_P f(r) = -\operatorname{grad}_T f(r),$$

ahol a P és T indexek a P pont, ill. a térfogat, vagy felületelem koordinátái szerinti differenciálást jelentik.

A *Stokes*-tételből indulunk ki, mely a következő

$$\oint_C (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \int_F \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(n,x) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(n,y) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n,z)\right\} dF,$$

ahol C az F felületet határoló görbe. Legyen $u = v = w$, továbbá vegyük figyelembe, hogy $\cos(n,x)$, $\cos(n,y)$ és $\cos(n,z)$ az $\mathbf{n}$ egységvektor n_x, n_y, n_z komponensei. Ekkor a jobboldalt átrendezve nyerjük

$$\oint u d\mathbf{s} = \int \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial z} n_y - \frac{\partial u}{\partial y} n_z\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_z - \frac{\partial u}{\partial z} n_x\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} n_x - \frac{\partial u}{\partial x} n_y\right)\right\} dF.$$

A jobboldalon a kapcsos zárójelben szereplő három gömbölyű zárójeles mennyiség $[\mathbf{n}, \operatorname{grad} u]$ komponensei. Tehát

$$\oint u d\mathbf{s} = \int [\mathbf{n}, \operatorname{grad} u]\, dF.$$

Alkalmazzuk ezt a formulát az $\mathfrak{A}$ vektorpotenciálra zárt áram esetén

$$\mathfrak{A} = \frac{I}{c}\oint \frac{d\mathbf{s}}{r} = \frac{I}{c}\int \left[\mathbf{n}, \operatorname{grad}_T \frac{1}{r}\right] dF. \tag{10.4.1}$$

Mivel a P pont fix, az összes differenciálást a felületelem koordinátái szerint kell képezni. Tehát a jobboldalon grad_T szerepel. Az integrációt a baloldalon a zárt görbére, a jobboldalon a zárt görbén átfektetett tetszőleges felületre kell kiterjeszteni.

$$\mathfrak{H} = \frac{I}{c}\operatorname{rot}_P \int \left[\mathbf{n}, \operatorname{grad}_T \frac{1}{r}\right] dF = \frac{I}{c}\int \operatorname{rot}_P \left[\mathbf{n}, \operatorname{grad}_T \frac{1}{r}\right] dF, \tag{10.4.2}$$

mivel a rot_P operációt bevihetjük az integrál jel alá, vagyis a rot_P operáció az integrációval felcserélhető művelet. Ekkor ugyanis a P pont koordinátái szerint differenciálunk, tehát a felületelem koordinátáira, mely utóbbiak szerint integrálunk, ez az operáció nem hat.

Figyelembe véve, hogy $\mathrm{grad}_T \frac{1}{r} = -\mathrm{grad}_P \frac{1}{r}$, nyerjük

$$\mathfrak{H} = -\frac{I}{c} \int \mathrm{rot}_P \left[\mathbf{n}, \mathrm{grad}_P \frac{1}{r}\right] dF. \tag{10.4.3}$$

Számítsuk ki $\left[\mathbf{n}, \mathrm{grad}_P \frac{1}{r}\right]$ komponenseit:

$$\begin{Vmatrix} n_x & n_y & n_z \\ \partial \frac{1}{r} & \partial \frac{1}{r} & \partial \frac{1}{r} \\ \partial x & \partial y & \partial z \end{Vmatrix},$$

$$\left[\mathbf{n}, \mathrm{grad}_P \frac{1}{r}\right]_x = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} n_y - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} n_z,$$

$$\left[\mathbf{n}, \mathrm{grad}_P \frac{1}{r}\right]_y = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} n_z - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} n_x,$$

$$\left[\mathbf{n}, \mathrm{grad}_P \frac{1}{r}\right]_z = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} n_x - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} n_y.$$

Ezek után képezzük a (4.3) integrandusában szereplő rotáció x komponensét és vegyük figyelembe, hogy itt a rotációnál a differenciálás a P pont koordinátái szerint történik, tehát $\mathbf{n}$ konstansnak tekinthető

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \partial \frac{1}{r} & \partial \frac{1}{r} & \partial \frac{1}{r} \\ \frac{\partial z}{\partial z} n_y - \frac{\partial y}{\partial y} n_z & \frac{\partial x}{\partial x} n_z - \frac{\partial z}{\partial z} n_x & \frac{\partial y}{\partial y} n_x - \frac{\partial x}{\partial x} n_y \end{Vmatrix},$$

$$\mathrm{rot}_{Px}\left[\mathbf{n}, \mathrm{grad}_P \frac{1}{r}\right] = n_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - n_y \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} - n_z \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} + n_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}.$$

Adjuk hozzá a jobboldalhoz $n_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} - n_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}$-t, vagyis 0-t. Ekkor nyerjük

$$\mathrm{rot}_{Px}\left[\mathbf{n}, \mathrm{grad}_P \frac{1}{r}\right] = n_x \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left(n_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + n_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + n_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) = n_x \Delta \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{n}, \mathrm{grad}_P \frac{1}{r} \right).$$

Hasonlóképpen kapjuk a másik két rotációkomponensre

$$\mathrm{rot}_{Py}\left[\mathbf{n}, \mathrm{grad}_P \frac{1}{r}\right] = n_y \Delta \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbf{n}, \mathrm{grad}_P \frac{1}{r} \right),$$

$$\mathrm{rot}_{Pz}\left[\mathbf{n}, \mathrm{grad}_P \frac{1}{r}\right] = n_z \Delta \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathbf{n}, \mathrm{grad}_P \frac{1}{r} \right).$$

Összefoglalva vektoralakban

$$\mathrm{rot}_P\left[\mathbf{n}, \mathrm{grad}_P \frac{1}{r}\right] = \mathbf{n} \Delta \frac{1}{r} - \mathrm{grad}_P \left(\mathbf{n}, \mathrm{grad}_P \frac{1}{r} \right).$$

Mivel

$$\Delta \frac{1}{r} = 0,$$

$$\mathrm{rot}_P\left[\mathbf{n}, \mathrm{grad}_P \frac{1}{r}\right] = - \mathrm{grad}_P \left(\mathbf{n}, \mathrm{grad}_P \frac{1}{r} \right).$$

Tehát

$$\mathfrak{H} = \frac{I}{c} \int \mathrm{grad}_P \left(\mathbf{n}, \mathrm{grad}_P \frac{1}{r} \right) dF,$$

$$\mathrm{grad}_P \frac{1}{r} = - \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

$$\mathfrak{H} = - \frac{I}{c} \int \mathrm{grad}_P \left(\frac{\mathbf{nr}}{r^3} \right) dF. \tag{10.4.4}$$

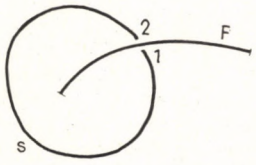
Mivel a grad_P-nél a differenciálás a P pont koordinátái szerint történik, a grad_P kivihető az integráljel elé

$$\mathfrak{H} = - \mathrm{grad}_P \frac{I}{c} \int \frac{\mathbf{nr}}{r^3} dF. \tag{10.4.5}$$

$\mathfrak{H}$ tehát a következő skaláris potenciál negatív gradiense

$$U = \frac{I}{c} \int \frac{\mathbf{nr}}{r^3} dF = \frac{I}{c} \int \frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})\, dF}{r^2}. \tag{10.4.6}$$

Az **r** iránya ismét a felületelemtől a P pont felé mutat. Látható, hogy U nem más, mint egy olyan dipólréteg potenciálja, melynél a felületegységre eső dipólmomentum abszolút értéke $\frac{I}{c}$, a dipólmomentumok iránya pedig **n** iránya. Ez alatt azt értjük, hogy **n** irányába nézve a zárt vezető körülfutási iránya, vagyis az áram iránya az óramutató járásával megegyezik. Ez onnan következik, hogy STOKES tételénél, melyen levezetésünk alapszik, így definiáltuk **n** irányát.



171. ábra. A vezető és az F felület keresztmetszete

A potenciál a dipólfelület két oldalán különböző értékű, mégpedig, ha a felület két oldalán való értékeit U_1-, ill. U_2-vel jelöljük, akkor

$$U_1 - U_2 = 4\pi \,|\, \mathbf{m} \,| = 4\pi \frac{I}{c}.$$

Ezt könnyen beláthatjuk más úton is. Rajzoljuk fel a felület keresztmetszetét és az s-görbét

$$U_2 = U_1 - \int_1^2 \mathfrak{H}\, ds.$$

Ha 1 és 2 a felület két oldalán szomszédos pontok, akkor az s-görbe zártnak tekinthető és

$$\int_1^2 \mathfrak{H}_s ds = 4\pi \frac{I}{c},$$

ugyanis az 1 és 2 pontokat F-en át összekötő görbe elemen vett integrál eltűnik, ha 1 és 2 szomszédosak, tehát

$$U_1 - U_2 = 4\pi \frac{I}{c}.$$

Vagyis egy lineáris zárt áram mágneses tere olyan mágneses kettős réteg mágneses terével ekvivalens, melyet a lineáris vezető határol és melynél a felületegységre

eső mágneses dipólmomentum abszolút értéke $\frac{I}{c}$, a dipólmomentumok iránya pedig **n** iránya. A felületen való áthaladáskor, mint ez a dipólréteg elméletéből ismeretes, U $4\pi \mid \mathbf{m} \mid$-mel ugrik.

5. §. Áramok mágneses terének meghatározása, ha a környező közegben $\mu \neq 1$

Ha egy vezető környezetét, mégpedig a vezetőn kívül levő teret tetszőlegesen olyan anyagokkal töltjük meg, melyek permeabilitása nem 1, akkor a tapasztalat szerint az $\oint \mathfrak{H}_s \, ds$ értéke egy a vezetőt körülzáró görbére továbbra is $\frac{4\pi I}{c}$-vel egyenlő. Tehát a

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi \mathbf{i}}{c} \tag{10.5.1}$$

egyenlet független a környező anyag permeabilitásától. Ebből az is következik, hogy ellentétben az elektrosztatika jelenségeivel, áramok mágneses tere változatlan marad, ha a vezetőt környező egész teret μ = konstans permeabilitású anyaggal töltjük meg. Ha azonban nem az egész teret töltjük meg μ = konstans permeabilitású anyaggal, akkor (5.1) ugyan továbbra is változatlanul fennáll, de $\mathfrak{H}$ megváltozik.

Ha tehát az elektrosztatikát formálisan átvisszük a mágneses jelenségekre, mint azt tettük, akkor, mivel $\mathfrak{H}$ egy μ permeabilitású közegben a μ-ed részére csökken, köráram esetében fel kell tételeznünk, hogy a vele ekvivalens dipólréteg egységnyi felületi momentumának abszolút értéke $\frac{\mu I}{c}$. Csak így lehetséges ugyanis, hogy $\mathfrak{H}$ a μ permeabilitású közegben köráram esetében ugyanazt az értéket vegye fel, mint vákuumban. Mindez arra az esetre vonatkozik, ha az egész teret töltjük be μ permeabilitású közeggel.

Ha ellenben csak a tér egyes részeit töltjük be $\mu \neq 1$ permeabilitású anyagokkal, akkor $\mathfrak{H}$ megváltozik. $\mathfrak{H}$ megváltozása ferromágneses anyagoknál, melyeknél μ nagy, jelentős lehet. Legyen a mágneses tér vákuumban $\mathfrak{H}_0$, és miután a tér egyes részeit megtöltöttük ferromágneses anyagokkal, $\mathfrak{H}$. Mivel az (5.1) egyenlet független a környező anyagoktól, $\mathfrak{H}$ és $\mathfrak{H}_0$ örvényei, örvényfonalai ugyanazok. Vagyis a ferromágneses anyagok térbe való behozatala következtében előálló térváltozás, $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0$ örvénymentes, tehát levezethető egy skaláris potenciálból. Ki fogjuk mutatni, hogy ez a potenciál éppen a mágnesekké vált ferromágneses anyagok dipólusainak potenciálja.

Tegyük fel, hogy az egyes ferromágneses anyagok homogének, vagyis az egyes anyagokban μ = konstans. Ekkor

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \tag{10.5.2}$$

A határfelületeken azonban Div $\mathfrak{H} \neq 0$, vagyis a mágnességnek vannak szabad felületi töltései. Mégpedig, ha feltesszük, hogy ennek felületi sűrűsége ω'_m, akkor

$$\text{Div}\, \mathfrak{H} = 4\pi\omega'_m. \tag{10.5.3}$$

Mivel $\mathfrak{H}_0$-nak egyáltalán nincsenek forrásai, fennáll, hogy

$$\text{Div}\,(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0) = 4\pi\omega'_m. \tag{10.5.4}$$

A div $\mathfrak{H}_0 = 0$, div $\mathfrak{H} = 0$ és a rot $(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0) = 0$ egyenletekből következik, hogy

$$\text{div}\,(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0) = 0,$$

$$\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0 = -\,\text{grad}\, U,$$

vagyis

$$\text{div grad}\, U = \Delta U = 0.$$

Ennek a problémának a megoldása az elektrosztatikából ismeretes, mégpedig a következő

$$U = \sum_i \int_{F_i} \frac{\omega'_m dF}{r}. \tag{10.5.5}$$

Az integrál az egyes F_i határfelületekre terjesztendő ki, melyekre összegezni kell.

Fennáll, hogy

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{B} - \mathfrak{H}),$$

továbbá mindig fennáll, hogy

$$\text{Div}\, \mathfrak{B} = 0.$$

Tehát

$$\text{Div}\, \mathfrak{M} = -\frac{1}{4\pi}\,\text{Div}\, \mathfrak{H} = -\,\omega'_m,$$

vagyis

$$U = -\sum_i \int_{F_i} \frac{\text{Div}\, \mathfrak{M}}{r}\, dF. \tag{10.5.6}$$

Legyen a vezetőt környező tér vákuum, melybe $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i, \ldots \mu_n$ permeabilitású ferromágneses anyagokat hozunk. A $\mu_i \neq 1$ permeabilitású anyag határfelületén fennáll, hogy (l. a 172. ábrát)

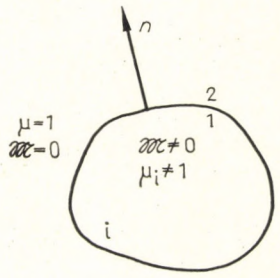
$$\text{Div}\, \mathfrak{M} = (\mathfrak{M}_n)_2 - (\mathfrak{M}_n)_1 = -\,(\mathfrak{M}_n)_1.$$

Az 1 indexet elhagyva nyerjük

$$U = \sum_i \oint_{F_i} \frac{\mathfrak{M}_n dF}{r} . \tag{10.5.7}$$

Alkalmazva GAUSS tételét, teljesen hasonlóan, mint az analóg elektrosztatikus esetben, nyerjük:

$$\oint_{F_i} \frac{\mathfrak{M}_n dF}{r} = \int_{V_i} \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathfrak{M} dV + \int_{V_i} \left(\mathfrak{M} \operatorname{grad}_r \frac{1}{r} \right) dV .$$



172. ábra. Az *i*-edik ferromágneses anyag a vákuumban

Az r index a gradiensnél azt jelenti, hogy a differenciálás a dV térfogatelem koordinátái szerint történik. V_i az i-edik ferromagnetikum által betöltött térfogat.

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

ahol x, y, z a P pont koordinátái, melyben U-t keressük. ξ, η, ζ a dV térfogatelem koordinátái, $\mathbf{r}$ pedig dV-től P felé mutat.

$$\operatorname{grad}_r \frac{1}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

tehát

$$U = \sum_i \int_{V_i} \frac{\mathfrak{M}\mathbf{r}}{r^3} dV . \tag{10.5.8}$$

Vagyis a potenciál a P pontban az egyes ferromágneses anyagok dipólusaitól származó potenciálok összege.

Minthogy a tér, melyet $\mathfrak{M}$ idéz elő, maga is függ a ferromágneses anyagoktól, a térerősség meghatározása eléggé bonyolult feladat. Szigorú megoldása a problémának csak abban az esetben van, ha a ferromágneses testek geometriája egyszerű.

TIZENEGYEDIK FEJEZET

AZ IDŐBEN LASSAN VÁLTOZÓ, KVÁZISTACIONÁRIUS TEREK

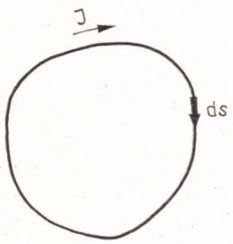
1. §. Bevezetés

Eddig olyan elektromos és mágneses terekkel foglalkoztunk, melyek az időtől függetlenek. A továbbiakban időben változó terekkel foglalkozunk. Ezeket két főcsoportra osztjuk: 1. az időben lassan változó terekre, 2. olyan terekre, melyeknek változása tetszőlegesen gyors.

Először is az időben lassan változó, ún. kvázistacionárius terekkel ismerkedünk meg. Amint később látni fogjuk, az elektromos és mágneses terek fénysebességgel terjednek tovább a térben. Ha tehát egyrészt nem túlságosan gyorsan változó tereket, másrészt nem túl nagy dimenziójú rendszereket veszünk tekintetbe, akkor feltehetjük, hogy az egész rendszer minden pontjában a tér ugyanúgy változik, vagyis egy bizonyos időpillanatban a rendszer minden pontjában ugyanaz az állapot, ugyanaz a tér uralkodik. Vagyis ebben a fejezetben úgy tekinthetjük az elektromágneses jelenségeket, hogy a térben végtelen nagy sebességgel terjednek. Ebbe a fejezetbe a jelenségeknek igen nagy csoportja tartozik. Ide tartozik a technikában használatos, váltóáramokkal kapcsolatos összes jelenség, melyek másodpercenkénti váltakozása, vagyis periódusa 10–1000.

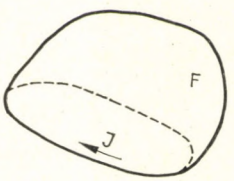
2. §. Az indukció törvénye
Az elektromágneses tér második alapegyenlete

Legyen adva egy lineáris zárt vezető egy μ permeabilitású közegben, melyben $\mathfrak{H}$ erősségű mágneses tér van jelen. Ha a mágneses térerősség változik, akkor a zárt vezetőben áram indukálódik, vagyis a zárt vezetőben indukciós áram jön létre, mint ez az elemekből ismeretes. Tehát a vezetőben elektromos tér van jelen, melynek térerőssége legyen $\mathfrak{E}$. Mivel a vezető lineáris, $\mathfrak{E}$ és $d\mathbf{s}$ irányítása



173. ábra. Egy zárt lineáris vezető és elemi ívdarabja

egyenlőnek tehető fel. Ha tehát az $\oint \mathfrak{E}_s\, ds$-et képezzük, akkor ez nem tűnhet el, mivel csupa egyenlő előjelű integrálelemből áll. Itt tehát először ismerkedünk meg egy olyan elektromos térrel, mely nem rotációmentes. Az $\mathfrak{E}_i = \oint \mathfrak{E}\, d\mathbf{s} = \oint \mathfrak{E}_s\, ds$ integrált nevezzük *indukált elektromos feszültségnek*, vagy *indukált elekromotoros erőnek*. $\mathfrak{E}_i$ azzal az elektromotoros erővel egyenlő, melyet a zárt vezetőbe kapcsolva, ugyanolyan erősségű áramot kapunk, mint az indukált áram. Ezt könnyen beláthatjuk. Legyen a lineáris vezető specifikus vezetőképessége σ, keresztmetszete állandó és egyenlő F-fel, hossza l. $\mathbf{i}$, $\mathfrak{E}$ és $d\mathbf{s}$ iránya ugyanaz, az indukált áram erőssége legyen $iF = I$.



174. ábra. A zárt vezetőn átfektetett F felület

Alkalmazzuk egy áramelemre OHM törvényét

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{\sigma}\mathbf{i},$$

$$\mathfrak{E}d\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{s}}{\sigma F}\mathbf{i}F,$$

$$\mathfrak{E}_s ds = \frac{ds}{\sigma F} I,$$

$$\oint \mathfrak{E}_s ds = I \oint \frac{ds}{\sigma F} = I \frac{1}{\sigma F} \oint ds = I \frac{l}{\sigma F} = IR. \qquad (11.2.1)$$

I az áram intenzitása, R a zárt vezető ellenállása. Tehát, ha az indukált áram erőssége I, akkor az az elektromotoros erő, mely ezt az áramerősséget létrehozza, $\oint \mathfrak{E}_s\, ds$.

Az indukció törvénye azt mondja, hogy az indukált feszültség egyenlő a vezetőn átfektetett és a vezető által határolt felületen áthaladó mágneses indukció-fluxus időegységre eső fogyásának $\frac{1}{c}$-szeresével, vagyis

$$\oint \mathfrak{E}d\mathbf{s} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_F \mathfrak{B}_n dF. \qquad (11.2.2)$$

A baloldal átalakítható STOKES tételével, mégpedig

$$\int_F \mathrm{rot}_n \mathfrak{E} dF = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_F \mathfrak{B}_n dF.$$

Ha a vezető nem mozog és alakját nem változtatja, vagyis ha az indukció a környező mágneses tér változtatásával jön létre, akkor a jobboldalon az idő szerinti differenciálást bevihetjük az integráljel alá. Tehát

$$\int_F \mathrm{rot}_n \mathfrak{E} dF = -\frac{1}{c}\int_F \frac{\partial \mathfrak{B}_n}{\partial t} dF.$$

Mivel ennek az egyenletnek minden F felületre fenn kell állnia, következik, hogy

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}. \tag{11.2.3}$$

Mivel F tetszőleges, nemcsak ennek az egyenletnek bal- és jobboldalán álló vektorok normális komponensei egyenlők egymással, hanem maguk a vektorok is. A (2.3) egyenlet az egész elektrodinamikában rendkívül fontos szerepet játszik és mint az elektromágneses tér második alapegyenlete, vagy mint a második *Maxwell*-féle egyenlet ismeretes. A *Maxwell*-féle elmélet feltételezi azt, hogy $\mathfrak{E}$-nek nemcsak a vezetőben, hanem a térben mindenütt van értelme és mindenütt van véges értéke ott, ahol $\mathfrak{B}$ változik. Tehát a (2.3) egyenlet a vezetőtől független és a vezető $\mathfrak{E}$ jelenlétét csak észrevehetővé teszi. Hogy ez a feltevés igaz, azt igazolja az, hogy a (2.3) egyenlet ezen feltevés alapján a tapasztalattal megegyezésben levő következményekre vezet, mint ezt a továbbiakban látni fogjuk.

Ha μ az időben konstans, akkor a (2.3) egyenlet a következőképpen alakul

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}. \tag{11.2.4}$$

Az indukált elektromotoros erő az indukáló hatást mindig csökkenteni igyekszik. Ez LENC törvénye, amely a fenti egyenletekben a jobboldalon álló kifejezések negatív előjelében jut kifejezésre.

3. §. Kölcsönös indukció

Legyen adva két lineáris áramkör, 1 és 2. Ha az 1 áramkörben áram folyik, akkor az egy $\mathfrak{H}_1$ erősségű teret létesít, melynek erővonalai áthaladnak a 2 áramkörön. Ha az 1 áramkörben folyó I_1 intenzitású áram intenzitása változik, akkor 2-ben

feszültség indukálódik, mely a következő:

$$U_2 = \oint \mathfrak{E}_{2s} ds_2 = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{F_2} \mathfrak{H}_{1n} dF_2 , \tag{11.3.1}$$

ha feltételezzük, hogy μ az időben állandó.

Tegyük fel azt is, hogy μ a térben is állandó, akkor

$$\mathfrak{H}_1 = \operatorname{rot} \mathfrak{A}_1 , \qquad \mathfrak{A}_1 = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{i}_1 dV}{r_{12}} = \frac{I_1}{c} \oint_1 \frac{d\mathbf{s}_1}{r_{12}} . \tag{11.3.2}$$

Ez adja meg $\mathfrak{A}_1$ értékét valamely pontban, amely a $d\mathbf{s}_1$ elemektől r_{12} távolságra van. Felhasználva STOKES tételét, írhatjuk tehát

$$\int_{F_2} \mathfrak{H}_{1n} dF_2 = \int_{F_2} \operatorname{rot}_n \mathfrak{A}_1 dF_2 = \int_2 \mathfrak{A}_1 d\mathbf{s}_2 = \frac{I_1}{c} \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{s}_1 d\mathbf{s}_2}{r_{12}} , \tag{11.3.3}$$

ahol r_{12} $d\mathbf{s}_1$ és $d\mathbf{s}_2$ egymástól való távolsága (ugyanis az $\oint \mathfrak{A}_1 d\mathbf{s}_2$-ben $\mathfrak{A}_1$-nek a $d\mathbf{s}_2$ helyén vett értéke szerepel). Tehát a 2 körben indukált feszültség

$$U_2 = \oint_2 \mathfrak{E}_{2s} ds_2 = -\frac{\mu}{c^2} \frac{\partial I_1}{\partial t} \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{s}_1 d\mathbf{s}_2}{r_{12}} . \tag{11.3.4}$$

A következő mennyiséget

$$L_{12} = \frac{\mu}{c^2} \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{s}_1 d\mathbf{s}_2}{r_{12}} , \tag{11.3.5}$$

mely csak a két vezető geometriai alakjától, egymáshoz való helyzetétől és μ-től függ, kölcsönös indukciókoefficiensnek nevezzük. Tehát

$$U_2 = -L_{12} \frac{\partial I_1}{\partial t} . \tag{11.3.6}$$

Mivel L_{12}-ben a két áramkör, ill. ívelemeik és azok koordinátái (r_{12}-ben) teljesen szimmetrikusan szerepelnek, ugyanazt az indukciókoefficienst kapjuk az I_2 változása következtében az 1 áramkörben indukált feszültség kifejezésében, vagyis

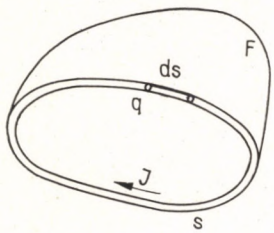
$$L_{21} = L_{12} . \tag{11.3.7}$$

4. §. Önindukció

Mint ismeretes, az áramerősség változása magában a vezetőben is indukál feszültséget. Ezt a jelenséget önindukciónak nevezzük. Így az előzőhöz hasonlóan definiálhatunk egy együtthatót, az önindukció-együtthatót

$$U = -L_{11} \frac{\partial I}{\partial t} . \tag{11.4.1}$$

Az L indexeit el is lehet hagyni, ha csak egy vezető van jelen. Az indexek csak több vezető esetén játszanak szerepet. Itt is negatív előjel szerepel, mert az I növekedésével indukált tér az I intenzitású áramot fenntartó térrel ellentétes irányú. Ha az önindukciókoefficienst a fenti módon határozzuk meg, vagyis ha egy $d\mathbf{s}$ ívelem helyén meghatározzuk azt a teret, melyet a többi áramelem a $d\mathbf{s}$ helyén létesít, majd integrációval kifejezzük az egész vezetőben indukált feszültséget, akkor az így nyert formulák csak közelítő jellegűek. Ugyanis a kölcsönös indukciókoefficiens meghatározásánál a vezetőket lineárisaknak tételeztük fel, mert egymástól való távolságuk nagy a keresztmetszetükhöz képest, minthogy az ívelemek mindig két különböző vezetőhöz tartoztak. Most azonban ez nem áll



175. ábra. Az indukciófluxus meghatározása

fenn, hiszen ugyanazon vezető ívelemei szerepelnek a formulában. Tehát az önindukció számításánál a vezetőt már nem tekinthetjük lineárisnak, hanem az áramot áramfonalakra, vékony áramcsövekre bontjuk fel és ily módon számítjuk az önindukciót.

Legyen tehát adva egy zárt vezető. Első feladatunk kiszámítani az indukciófluxust. Az indukciófluxust a következőképpen jelöljük

$$\Phi = \int_F \mathfrak{B}_n dF = \mu \int_F \mathfrak{H}_n dF, \qquad \mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A},$$

$$\Phi = \mu \int_F \operatorname{rot}_n \mathfrak{A} dF = \mu \oint_s \mathfrak{A}_s ds = \mu \oint_s \mathfrak{A} d\mathbf{s}, \tag{11.4.2}$$

ahol $\mathfrak{A}$-nak a $d\mathbf{s}$ elem helyén vett értéke szerepel. A továbbiakban a vezető már nem tekinthető lineárisnak és ezért a következőképpen járunk el. A $|\, d\mathbf{s}\,|$ hosszúságú áramcsövet, melynek keresztmetszete F, felbontjuk $|\, d\mathbf{s}\,|$ hosszúságú és dF keresztmetszetű elemi áramcsövekre, áramfonalelemekre, mely elemi hengerek vezérsugarait áramvonalak alkotják. $\mathfrak{A}$-nak a $d\mathbf{s}$ elem helyén vett értéke helyébe $\mathfrak{A}$-nak az F keresztmetszetre vonatkozó középértékét helyettesítjük, mely a következő

$$\overline{\mathfrak{A}} = \frac{1}{F} \int_F \mathfrak{A} dF. \tag{11.4.3}$$

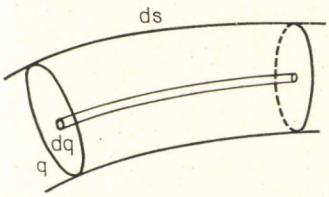
Ezzel nyerjük, hogy

$$\Phi = \mu \int_s \left(\frac{1}{F} \int_F \mathfrak{A} dF \right) d\mathbf{s}, \tag{11.4.4}$$

ahol F a vezető keresztmetszete a $d\mathbf{s}$ ívelem helyén. (10.3.8) szerint

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{i} dV'}{r},$$

ahol r a dV' térfogatelemeknek attól a ponttól (jelenleg dF-től) való távolsága,



176. ábra. Vezető felbontása áramcsövekre

ahol $\mathfrak{A}$-t keressük

$$dV' = dF' ds'.$$

A vessző megkülönböztetésül szerepel, mert a mi esetünkben $d\mathbf{s}$ és dF ki vannak tüntetve azáltal, hogy azon a helyen keressük $\mathfrak{A}$-t. Mivel $\mathbf{i}$ és $d\mathbf{s}'$ egyirányú, fennáll hogy

$$\mathbf{i} dV' = |\mathbf{i}| dF' d\mathbf{s}',$$

tehát

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c} \int_{F'} \int_s \frac{|\mathbf{i}| dF' d\mathbf{s}'}{r}, \tag{11.4.5}$$

ahol r $d\mathbf{s}$ és $d\mathbf{s}'$ egymástól való távolsága

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

x, y, z a $d\mathbf{s}$, x', y', z' a $d\mathbf{s}'$ koordinátái.

Ha az áram egyenletesen tölti be az F' keresztmetszetet (a vezető $d\mathbf{s}'$ helyén vett keresztmetszetét), akkor $|\mathbf{i}|$ a dF' szerint való integrál elé írható, vagyis

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c} \int_s |\mathbf{i}| \int_{F'} \frac{dF'}{r} d\mathbf{s}'.$$

$I = iF'$ miatt

$$\mathfrak{A} = \frac{I}{c} \int_s \frac{1}{F'} \int_{F'} \frac{dF'}{r} d\mathbf{s}'.$$

Ezt beírva Φ-be, nyerjük

$$\Phi = \frac{I\mu}{c} \int_s \left(\frac{1}{F} \iint_{F\,s} \frac{1}{F'} \int_{F'} \frac{dF'}{r} ds' dF \right) ds . \tag{11.4.6}$$

Az integrálok sorrendjének megengedett felcserélésével pedig

$$\Phi = \frac{I\mu}{c} \iint_{s\,s} \frac{1}{F} \frac{1}{F'} \iint_{F\,F'} \frac{dF dF'}{r} ds ds' .$$

Az indukció törvényéből következik, hogy a vezetőben Φ változása révén létrejövő feszültség

$$U = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} .$$

Ha a vezető az időben nem változtatja alakját, akkor

$$U = -\frac{\partial I}{\partial t} \frac{\mu}{c^2} \iint_{s\,s} \frac{1}{F} \frac{1}{F'} \iint_{F\,F'} \frac{dF dF'}{r} ds ds' . \tag{11.4.7}$$

Tehát

$$L = \frac{\mu}{c^2} \iint_{s\,s} \frac{1}{F} \frac{1}{F'} \iint_{F\,F'} \frac{dF dF'}{r} ds ds' . \tag{11.4.8}$$

Ha a vezető keresztmetszete állandó, akkor

$$L = \frac{\mu}{c^2} \frac{1}{F^2} \iint_{s\,s} \iint_{F\,F'} \frac{dF dF'}{r} ds ds' . \tag{11.4.9}$$

Itt tehát r a dF és dF' szerinti integrálásnál nem tekinthető állandónak. Ha állandónak tekintjük, akkor

$$L = \frac{\mu}{c^2} \frac{1}{F^2} \iint_{s\,s} \frac{ds ds'}{r} \iint_{F\,F'} dF dF' = \frac{\mu}{c^2} \frac{1}{F^2} F^2 \iint_{s\,s} \frac{ds ds'}{r} = \frac{\mu}{c^2} \iint_{s\,s'} \frac{ds ds'}{r} .$$

Ez a formula a kölcsönös indukciókoefficiensre nyert formula analogonja, mely itt csak közelítő érvényű. Részletesen kiírva adódik

$$L = \frac{\mu}{c^2} \iint_{s\,s} \frac{dx dx' + dy dy' + dz dz'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} , \tag{11.4.10}$$

tehát L három kétszeres integrál összegére bomlik fel. Az integrációs határokat a vezető alakja szabja meg.

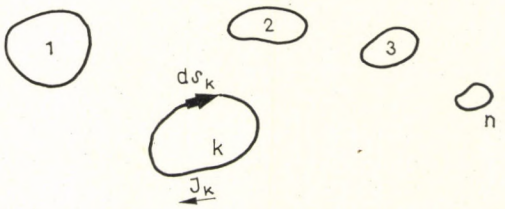
5. §. Egymással össze nem függő n lineáris áramkör mágneses energiája

Legyen adva n lineáris áramkör, melyek nem függenek össze egymással. Áramkörök terének energiája lényegében az áramkörök mágneses terének energiájával egyenlő. Az elektromos energia a kis térerősségek miatt elhanyagolható. Az áramkörök mágneses terének energiája (10.1.16) szerint

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mu \mathfrak{H}^2 dV . \tag{11.5.1}$$

Tegyük fel, hogy a tér homogén, μ permeabilitású közeggel van megtöltve. Ekkor $\mathfrak{H}$ forrásmentes, tehát

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A} .$$



177. ábra. Több áramkörből álló rendszer

Fennáll, hogy

$$\operatorname{div} [\mathfrak{A}, \mathfrak{H}] = \mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \operatorname{rot} \mathfrak{H} ,$$

$$\mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \operatorname{rot} \mathfrak{H} + \operatorname{div} [\mathfrak{A}, \mathfrak{H}] ,$$

$$W = \frac{\mu}{8\pi} \int \mathfrak{H}^2 dV = \frac{\mu}{8\pi} \int \mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathfrak{A} dV = \frac{\mu}{8\pi} \int \mathfrak{A} \operatorname{rot} \mathfrak{H} dV + \frac{\mu}{8\pi} \int \operatorname{div} [\mathfrak{A}, \mathfrak{H}] \, dV ,$$

$$\int \operatorname{div} [\mathfrak{A}, \mathfrak{H}] dV = \int [\mathfrak{A}, \mathfrak{H}]_n \, dF .$$

A jobboldali integrál a végtelen távoli felületre terjeszthető ki. Mivel $\mathfrak{A}$ mint $\frac{1}{r}$, $\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$ mint $\frac{1}{r^2}$ csökken, dF pedig mint r^2 növekszik, az integrál eltünik, tehát

$$W = \frac{\mu}{8\pi} \int \mathfrak{A} \operatorname{rot} \mathfrak{H} dV = \frac{\mu}{8\pi} \int \mathfrak{A} \frac{4\pi \mathbf{i}}{c} dV ,$$

$$W = \frac{\mu}{2c} \int \mathfrak{A} \mathbf{i} dV . \tag{11.5.2}$$

Ha a vezetők lineárisak, (melyeknek zártaknak kell lenniök, ha bennük áram folyik) akkor W tovább alakítható, ugyanis

$$W = \frac{\mu}{2c} \sum_k \oint \mathfrak{A} \mathbf{i}_k dV_k ,$$

$$\mathbf{i}_k \, dV_k = |\mathbf{i}_k| \, F_k \, d\mathbf{s}_k = I_k \, d\mathbf{s}_k ,$$

ahol I_k a k-adik vezetőben folyó áram intenzitása. Ennek felhasználásával következik

$$W = \frac{\mu}{2c} \sum_k I_k \oint_k \mathfrak{A} d\mathbf{s}_k . \tag{11.5.3}$$

Az $\mathfrak{A}$ vektorpotenciál az egyes vezetőktől származó vektorpotenciálokból tevődik össze, vagyis

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_k + \ldots + \mathfrak{A}_n . \tag{11.5.4}$$

Ezt behelyettesítve a felső egyenletbe, a következő integrálokhoz jutunk

$$\oint_k \mathfrak{A}_i d\mathbf{s}_k \qquad (i \neq k) \qquad \text{és} \qquad \oint \mathfrak{A}_k d\mathbf{s}_k . \tag{11.5.5}$$

A kölcsönös és az önindukciókoefficiensek levezetéséből, továbbá a kölcsönös és az önindukció tárgyalásánál felhasznált formulákból következik, hogy

$$\oint_k \mathfrak{A}_i d\mathbf{s}_k = \frac{c}{\mu} L_{ik} I_i , \qquad \oint \mathfrak{A}_k d\mathbf{s}_k = \frac{c}{\mu} L_{kk} I_k , \tag{11.5.6}$$

ahol L_{kk} a k-adik vezetőkör önindukciókoefficiense. Ezeket a formulákat figyelembe véve, nyerjük

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{2} (& L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \ldots + L_{1n} I_1 I_n + \\ & + L_{21} I_2 I_1 + L_{22} I_2^2 + \ldots + L_{2n} I_2 I_n + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + L_{n1} I_n I_1 + L_{n2} I_n I_2 + \ldots + L_{nn} I_n^2 , \end{aligned} \tag{11.5.7}$$

$$L_{ik} = L_{ki} .$$

6. §. Váltóáramú körök

A következőkben olyan problémákkal és jelenségekkel foglalkozunk, melyek váltóáramú körökben lépnek fel. Az áramkörök legyenek lineárisak és legyen μ = konstans.

1. Az áramkör ohmikus ellenállása R, önindukciós együtthatója L, az elektromotoros integrálerő E. Idézzük a (2.4) formulát:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}.$$

Integrálva

$$\int_F \operatorname{rot}_n \mathfrak{E} dF = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_F \mathfrak{H}_n dF,$$

ahol F egy a vezetőn átfektetett felület, melynek széle a vezető. STOKES tételével a baloldal átalakítható és nyerjük

$$\oint_s \mathfrak{E}_s ds = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_F \mathfrak{H}_n dF = -L\dot{I}.$$

Adjuk hozzá mindkét oldalhoz a következő integrált, $\oint_s \mathfrak{E}_s^e ds$-t, vagyis az $\mathfrak{E}^e$ elektromotoros erőnek vonalmenti integrálját az egész zárt görbére. Ekkor nyerjük

$$\oint_s (\mathfrak{E}_s + \mathfrak{E}_s^e) ds = \oint_s \mathfrak{E}_s^e ds - L\dot{I}.$$

OHM törvénye szerint:

$$i_s = \sigma(\mathfrak{E}_s + \mathfrak{E}_s^e),$$

ebből

$$\mathfrak{E}_s + \mathfrak{E}_s^e = \frac{i_s}{\sigma} = \frac{i_s F}{\sigma F} = \frac{I}{\sigma F},$$

az elektromotoros integrálerő definíciója pedig

$$\oint_s \mathfrak{E}_s^e ds = E.$$

Mindezek felhasználásával

$$I\oint \frac{ds}{\sigma F} = E - L\dot{I}.$$

Mivel

$$\oint \frac{ds}{\sigma F} = R,$$

következik, hogy

$$IR = E - L\dot{I}. \tag{11.6.1}$$

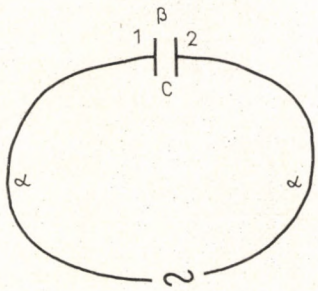
Ha $L = 0$, OHM törvényét kapjuk zárt vezetőre. E jelen esetben, váltóáramokról lévén szó, az áramkörbe kapcsolt váltóáramú elektromotoros integrálerő, vagyis pl. egy váltakozóáramot szolgáltató gép feszültsége.

A (6.1) alapvető egyenletet közvetlenül is levezethettük volna. Induljunk ki a következőkből. Ha egy áramkörbe E elektromotoros integrálerő van kapcsolva, az azt jelenti, hogy az áramkörben E feszültség működik. Az önindukció következtében fellépő feszültség $-L\dot{I}$, tehát az összfeszültség $E - L\dot{I}$. Ennek OHM törvénye szerint egyenlőnek kell lennie RI-vel

$$E - L\dot{I} = IR\,.$$

2. Az áramkör ohmikus ellenállása R, önindukciós együtthatója L, az elektromotoros integrálerő E, kapacitása C. A számítást teljesen hasonlóan végezhetjük el, mint az előbb tárgyalt esetben, vagyis most is fennáll, hogy

$$\oint_{\text{zárt kör}} \mathfrak{E}_s ds = -L\dot{I}\,. \tag{11.6.2}$$



178. ábra. Áramkör ohmikus ellenállással és kapacitással

A teljes zárt körre (a kondenzátor lapjai közti teret is beleértve) kiterjesztett integrál két részre bontható, az α-ra és β-ra kiterjesztett integrálokra, tehát

$$\int_\alpha \mathfrak{E}_s ds + \int_\beta \mathfrak{E}_s ds = -L\dot{I}\,.$$

Adjuk hozzá mindkét oldalhoz $\int_\alpha \mathfrak{E}_s^e ds$-et, mely E-vel egyenlő, mert $\mathfrak{E}^e$ a β körben 0.

Tehát

$$\int_\alpha (\mathfrak{E}_s + \mathfrak{E}_s^e)\, ds + \int_\beta \mathfrak{E}_s ds = E - L\dot{I}\,.$$

Mivel

$$\mathfrak{E}_s = -\frac{\partial U}{\partial s}\,,$$

következik, hogy

$$\int_\beta \mathfrak{E}_s ds = -\int_\beta \frac{\partial U}{\partial s} ds = -\int_1^2 \frac{\partial U}{\partial s} ds = U_1 - U_2 = U_K\,.$$

U_K a kondenzátor lapjai közti feszültségkülönbség. Mivel $\int_\alpha (\mathfrak{E}_s + \mathfrak{E}_s^e)ds = IR$, ahol most R az α darab ellenállása, nyerjük

$$IR + U_K = E - L\dot{I}. \tag{11.6.3}$$

Ha C a kondenzátor kapacitása, akkor töltése

$$e = CU_K = \int_0^t Idt, \tag{11.6.4}$$

ugyanis I a vezető keresztmetszetén az időegységben áthaladó töltés. Tehát ha az időt annak az állapotnak megfelelő időpillanattól számítjuk, midőn a kondenzátoron nem volt töltés, nyerjük, hogy t időpillanatban a kondenzátor töltése

$$\int_0^t Idt. \quad t \text{ szerint differenciálva } I = C\dot{U}_K \tag{11.6.5}$$

(ugyanis C állandó).

Rendezzük az előbb nyert (6.3) alapegyenletet és differenciáljuk t szerint. Ekkor

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \dot{U}_K = \dot{E}.$$

$\dot{U}_K$-ot a (6.5) egyenletből behelyettesítve és C-vel szorozva, nyerjük

$$LC\ddot{I} + RC\dot{I} + I = C\dot{E}. \tag{11.6.6}$$

Ez a lineáris másodrendű differenciálegyenlet határozza meg az áramintenzitást.

Foglalkozzunk most néhány fontos speciális esettel.

1. Az áramkör ohmikus ellenállása legyen R, önindukciós együtthatója L, az elektromotoros integrálerő E. Legyen E_0 = konstans.

I meghatározására ekkor a következő egyenlet szolgál

$$L\dot{I} + RI = E_0.$$

E_0 legyen pl. egy galvánelem elektromotoros ereje, tehát a körben nem váltó-, hanem egyenáram kering. Stacionárius áramokra az *Ohm*-törvény érvényes. Ezzel már foglalkoztunk, ezért most az áram bekapcsolásakor fellépő jelenséget tárgyaljuk. Az áram, mint ismeretes, a bekapcsolás pillanatában nem éri el azonnal az $I_0 = E_0/R$ értéket, hanem csak bizonyos idő után, ugyanis a fellépő önindukció késlelteti az áramerősség növekedését. Ohm törvénye a stacionárius esetre vonatkozik, mely csak bizonyos idő múlva áll be.

Egyenletünk inhomogén lineáris differenciálegyenlet, melynek megoldása, mint könnyen meggyőződhetünk

$$I = \frac{E_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}. \tag{11.6.7}$$

A tetszőleges állandó. Hogy ez a kifejezés csakugyan megoldás, azt behelyettesítéssel a következőképpen láthatjuk be

$$L\dot{I} = -LA\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t} = -ARe^{-\frac{R}{L}t},$$

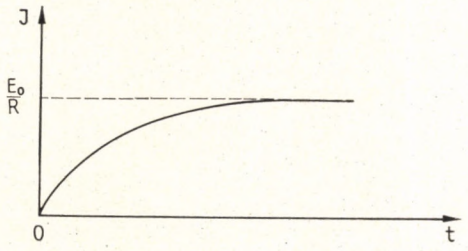
$$RI = E_0 + RAe^{-\frac{R}{L}t}.$$

Tehát valóban

$$L\dot{I} + RI = E_0.$$

A-t a kezdeti feltételből, az

$$I_{t=0} = 0$$



179. ábra. Az áramerősség növekedése az áramforrás bekapcsolása után

feltételből határozzuk meg, melyből nyerjük, hogy

$$\frac{E_0}{R} + A = 0, \quad A = -\frac{E_0}{R}.$$

Tehát

$$I = \frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \tag{11.6.8}$$

I csak $t = \infty$ esetében egyenlő $\frac{E_0}{R}$-rel. Az áramerősség tehát a stacionárius esetnek megfelelő E_0/R értéket, mely OHM törvényéből adódik, csak végtelen idő múlva éri el, gyakorlatilag azonban már igen hamar eléri, ha $\frac{R}{L}$ nagy, vagyis ha R nagy L-hez képest. Ugyanis ekkor $e^{-\frac{R}{L}t}$ igen rövid idő múlva zérus. Az áramerősség a bekapcsolás után tehát a 179. ábrának megfelelően emelkedik.

2. Az áramkör ohmikus ellenállása legyen R, önindukciós együtthatója L, az elektromotoros integrálerő, E legyen az idő periodikus függvénye, vagyis $E = E_0 \cos \omega t$. Tehát a körben periodikus feszültség működik (pl. váltóáramú áramfejlesztő hatására). E_0 az elektromotoros erő amplitúdója, vagyis maximális értéke, ω a rezgések száma 2π idő alatt, $\omega = 2\pi\nu$, ahol ν az egységnyi idő alatt végzett rezgések száma.

(6.1) egyenletünk ekkor a következő

$$L\dot{I} + RI = E_0 \cos \omega t.$$

Egyenletünket a következő kifejezéssel próbáljuk megoldani

$$I = b \cos (\omega t + \beta).$$

Tehát I frekvenciájáról feltesszük, hogy azonos E frekvenciájával, de I E-hez képest β fáziskülönbséget mutat.

$$I = b \cos (\omega t + \beta) = b \cos \omega t \cos \beta - b \sin \omega t \sin \beta,$$

$$\dot{I} = -\omega b \sin (\omega t + \beta) = -\omega b \sin \omega t \cos \beta - \omega b \cos \omega t \sin \beta.$$

Ezeket behelyettesítve egyenletünkbe nyerjük

$$-\omega bL \sin \omega t \cos \beta - \omega bL \cos \omega t \sin \beta + bR \cos \omega t \cos \beta -$$
$$- bR \sin \omega t \sin \beta = E_0 \cos \omega t.$$

Rendezve és nullára redukálva:

$$(-\omega bL \sin \beta + Rb \cos \beta - E_0) \cos \omega t + (-\omega bL \cos \beta - bR \sin \beta) \sin \omega t = 0.$$

Ennek az egyenletnek t minden értéke mellett fenn kell állnia, ami csak úgy lehetséges, ha $\cos \omega t$ és $\sin \omega t$ együtthatói külön-külön eltűnnek. Vagyis

$$-\omega bL \sin \beta + Rb \cos \beta = E_0,$$
$$-\omega bL \cos \beta - Rb \sin \beta = 0.$$

Innen

$$b^2 (L^2\omega^2 + R^2) = E_0^2,$$

tehát

$$b = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

és

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{\omega L}{R}, \quad \beta = -\operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L}{R}.$$

Igy az áram intenzitása

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos \left(\omega t - \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L}{R} \right). \tag{11.6.9}$$

Ha $\omega L \ll R$, akkor a nevezőben a négyzetgyökben $L^2\omega^2$ az R^2 mellett és az argumentumban $\operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L}{R}$ az ωt mellett elhanyagolható. Tehát ebben a speciális esetben

$$I = \frac{1}{R} E_0 \cos \omega t = \frac{E}{R},$$

vagyis a váltóáram intenzitása és a feszültség között minden pillanatban (ugyanis I és E változnak az időben) fennáll OHM törvénye. Ha azonban ωL nem nagyon kicsi R-hez képest, ez nem áll fenn. Ekkor I és E maximumai között áll fenn hasonló összefüggés, ugyanis

$$I_{\max} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{E_{\max}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{E_{\max}}{R'},$$

de itt az R ohmikus ellenállás helyett

$$R' = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \tag{11.6.10}$$

szerepel. Ezt a látszólagos ellenállást nevezik *impedanciának*. Az impedancia az ohmikus ellenállásból és $L\omega$-ból, az ún. *induktanciából* tevődik össze, de nem additív módon.

Általában I és E nem ugyanabban az időpillanatban érik el maximumaikat, hanem I maximuma az E maximumához képest β fáziskülönbséggel elmarad. Ha $\omega L \ll R$, akkor $\beta = 0$, ha pedig $\omega L \gg R$, vagyis $\frac{\omega L}{R} \to \infty$, akkor $\beta = \frac{\pi}{2}$, vagyis az áramintenzitás maximuma E maximumához képest $\frac{\pi}{2}$-vel késik, tehát akkor éri el maximumát, midőn $E = 0$ és viszont.

3. Az áramkör önindukciós együtthatója L, a körbe kapcsolt kondenzátor kapacitása C, az ohmikus ellenállás legyen elhanyagolható, E legyen zérus. Az ilyen kört rezgőkörnek nevezzük, mégpedig a körben csillapodás nélküli rezgések kelthetők, mert ohmikus ellenállása feltevésünk szerint 0-nak tekinthető. Áramot egy ilyen körben pl. indukció útján létesíthetünk.

I-t a (6.6) differenciálegyenletből határozhatjuk meg, melyben most R és E zérus, tehát $\dot{E}$ is zérus. Egyenletünk tehát

$$CL\ddot{I} + I = 0, \tag{11.6.11}$$

$$\ddot{I} = -\frac{1}{CL} I.$$

Ebből

$$I = I_0 \cos(\omega_0 t - \phi), \tag{11.6.12}$$

tehát I amplitúdója az idővel nem csökken, vagyis a rezgés csillapodás nélküli. I_0 és ϕ állandók és

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

A frekvencia

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

a rezgésidő ennek reciproka:

$$\tau_0 = \frac{1}{\nu_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{11.6.13}$$

Az utóbbi formula a híres *Thomson*-féle formula.

4. Az áramkör önindukciós együtthatója L, a körbe kapcsolt kondenzátor kapacitása C, az ohmikus ellenállás R, E legyen zérus. Az előbbi esettel szemben az a különbség, hogy R nem hanyagolható el. Ilyen rezgőkörben csillapított rezgések kelthetők. A körben áramot szintén pl. indukcióval létesíthetünk. Az I meghatározására szolgáló (6.6) differenciálegyenlet a következő lesz:

$$CL\ddot{I} + RC\dot{I} + I = 0,$$

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0.$$

Az előbbi egyenlettel szemben az a különbség, hogy szerepel az $R\dot{I}$ tag. Ez a csillapított harmonikus mozgás differenciálegyenlete. Ennek a differenciálegyenletnek megoldása, mint a mechanikából ismeretes, ha

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}, \qquad I = Ae^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\omega_0' t - \phi), \tag{11.6.14}$$

A és ϕ integrációs állandók és

$$\omega_0' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} < \omega_0. \tag{11.6.15}$$

Mivel I amplitúdója $e^{-\frac{R}{2L}t}$-vel csökken, a rezgés csillapított. Mint ω'_0 formulájából látható, a csillapított rezgés frekvenciája mindig kisebb, mint a csillapítatlané.

Az egyenlet megoldása, ha $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$,

$$I = Ae^{\left(-\frac{R}{2L}+\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}\right)t} + Be^{\left(-\frac{R}{2L}-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}\right)t}. \tag{11.6.16}$$

A és B integrációs állandók. Ekkor tehát I periodikus faktort nem tartalmaz, I exponenciálisan csökken. A kört ekkor aperiodikusnak nevezzük. Ide tartozik az az eset is, midőn $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$. A megoldás ekkor szintén aperiodikus, de kissé különbözik a (6.16) aperiodikus megoldástól.

TIZENKETTEDIK FEJEZET

GYORSAN VÁLTAKOZÓ ELEKTROMÁGNESES TEREK

1. §. Az elektromágneses tér első alapegyenlete

Láttuk, hogy a stacionárius elektromos áram és az általa létesített mágneses tér között a (10.3.3) fontos összefüggés áll fenn, mely szerint

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi \mathbf{i}}{c},$$

ahol $\mathfrak{H}$ a mágneses térerősség, $\mathbf{i}$ az áramsűrűség.

Ez az egyenlet kiegészítésre szorul, mégpedig a következőképpen. Ha a $\mathfrak{D}$ vektor az időben változik, akkor ez a változás a mágneses tér rotációjához egy $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ taggal járul hozzá, vagyis a következő egyenletet nyerjük

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi \mathbf{i}}{c} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}. \tag{12.1.1}$$

Mivel az eddigiek szerint rot $\mathfrak{H}$ mindig áramlással kapcsolatos, egyenletünk alapján azt mondhatjuk, hogy $\mathfrak{D}$ változása áramlással kapcsolatos, melynek áramsűrűsége $\mathbf{i} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$. Ezt az áramlást nevezzük *indukciós* vagy *eltolási áramlásnak* (nem tévesztendő össze a mágneses indukció folytán létrejövő indukált áramokkal.)

Az indukciós áramlás egyszerű kísérleti kimutatására nincs módszerünk, mert nem lehet elkülöníteni más áramoktól. Ezért ennek kimutatása indirekt úton történik. Ugyanis a fenti egyenletből üres tér esetére, tehát a

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \tag{12.1.2}$$

egyenletből, mely az elektrodinamika fundamentális, más természeti törvényre vissza nem vezethető törvényeinek egyike, következtetéseket vonunk le kísérletekkel ellenőrizhető jelenségekre. Ezeknek a következtetéseknek megegyezése a tapasztalattal egyenletünk érvényességét igazolja. Azok a jelenségek, melyek ebből az egyenletből következnek, mégpedig teljes összhangban a tapasztalattal, rendkívül számosak. Így a fenti egyenletből következik pl. az elektromos hullámok összes fajtája és az elektromágneses fényelmélet, melyekkel részletesen fogunk foglalkozni.

Az (1.1) egyenletben az $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ tagot MAXWELL vezette be az éterre vonatkozó bizonyos elgondolásai alapján, melyet ma már nem fogadhatunk el. Az említett tag bevezetése azonban helyesnek bizonyult, sőt alapvető jelentőségű, de ma az $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ tag bevezetését csak a belőle vont következtetések helyességével tudjuk indokolni, melyek, mint említettük, a tapasztalattal teljes összhangban vannak.

Az (1.1) egyenlet az elektromágneses tér első alapegyenlete. Olykor még kissé más alakban is szokás írni. $\mathbf{i}$ jelenti az áramsűrűséget, mint ezt a 10. fejezetben láttuk. Eltekintve a fentebb említett indukciós áramtól, melyet kísérletileg közvetlenül kimutatni nem tudunk, az áramnak két fő típusát különböztetjük meg, a kondukciós és a konvekciós áramokat. A *kondukciós* vagy *vezetési áram* a vezetőkben végbemenő áramlás. Akkor jön létre, ha két különböző potenciálú vezetőt (pl. egy töltött kondenzátor két lapját) vezetővel kötünk össze. A *konvekciós áram* anyaghoz kötött töltések mozgása. Ilyen áram jön létre pl. elektrolitekben, ha bennük fémelektródok között feszültségkülönbséget létesítünk. Az elektrolitekben az áramot ionok, vagyis töltött atomok vándorlása idézi elő.

Valójában a vezetési és konvekciós áramlás között nincsen éles különbség, ugyanis a vezetési áramlás is elektronok áramlása. Mivel pedig az elektronoknak tömegük van, tehát itt is tömeghez kötött elektromos töltések mozognak, tehát ez is tekinthető konvekciós áramlásnak. Mégis gyakran célszerű a két áramlást elkülönítve tárgyalni, ekkor tehát az (1.1) egyenletben szereplő $\mathbf{i}$ két részből tevődik össze

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_v + \mathbf{i}_{\text{konv}}.$$

Ha a mozgó elektromos töltések térbeli sűrűsége ρ, áramlási sebességük pedig $\mathbf{v}$, akkor, mint könnyen belátható

$$\mathbf{i}_{\text{konv}} = \rho \mathbf{v}.$$

Ekkor tehát az (1.1) egyenlet így alakul

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi \mathbf{i}_v}{c} + \frac{4\pi\rho\mathbf{v}}{c} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}. \tag{12.1.3}$$

Ebben az egyenletben a vezetési és konvekciós áramsűrűség egymástól elkülönítve szerepel.

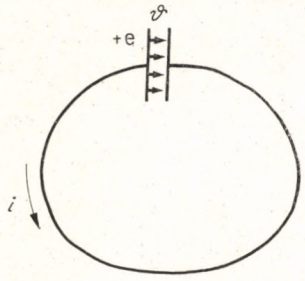
Az egyenletben szereplő $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ indukciós áramsűrűségről kissé szemléletesebb képet kaphatunk a következő egyszerű kísérlet alapján. Legyen adva egy e töltésű síkkondenzátor, mely ε dielektromos együtthatójú közegben van elhelyezve. Ha a kondenzátor lapjait összekötjük egy vezetővel, akkor abban vezetési áramlás jön létre, melynek időtartama a kisülés időtartama. Ez a vezetési áram nem alkot zárt kört, de beláthatjuk, hogy a kondenzátor lapjai között $\mathfrak{D}$ változása folytán fellépő indukciós áram azt zárt körré egészíti ki. A töltés legnagyobb része a

kondenzátor lapjain foglal helyet. Tegyük fel, hogy sűrűsége ω. Tehát ha F egy lap felülete,

$$e = \omega F = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{D}_n F = \frac{1}{4\pi} |\mathfrak{D}| F .$$

Az áram erőssége a töltés időegység alatti változása:

$$I = \frac{de}{dt} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial |\mathfrak{D}|}{\partial t} F,$$



180. ábra. Az indukciós áramsűrűség

az áramsűrűség pedig

$$\mathbf{i} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} .$$

$\mathbf{i}$ iránya $\mathfrak{D}$ irányával ellentétes. A lapokon levő töltés csökkenése következtében $\mathfrak{D}$ abszolút értéke csökken, tehát $\partial\mathfrak{D}$ iránya $\mathfrak{D}$-vel ellentétes és $\mathbf{i}$-vel egyirányú. Tehát azt kapjuk, hogy a vezetési áram sűrűsége $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$. Ugyanakkora azonban, mint az előbbiekből következik, az indukciós áram sűrűsége a kondenzátor lapjai között, mely tehát a vezetési áramot zárt körré egészíti ki. Minthogy azonban a töltések kiegyenlítődése folytán a $\mathfrak{D}$ vektor állandóan csökken és idővel zérussá lesz, az áramlás csak bizonyos ideig tartható fenn és intenzitása állandóan csökken.

2. §. Az elektromágneses tér alapegyenletei

Foglaljuk össze a következőkben az elektromágneses tér alapegyenleteit. A tapasztalatból kiindulva és a tapasztalatokat megfelelően általánosítva eljutottunk a következő alapvető egyenletekhez

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \frac{4\pi \mathbf{i}_v}{c} + \frac{4\pi\rho \mathbf{v}}{c}, \tag{12.2.1}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} . \tag{12.2.2}$$

Ezek az elektrodinamika alapegyenletei, melyeket MAXWELL állított fel először és éppen ezért *Maxwell*-féle egyenleteknek nevezzük őket. Ezek az elektromos és mágneses jelenségeknek épp oly alapvető és másra vissza nem vezethető alaptörvényei, mint pl. a tömegvonzás *Newton*-féle törvénye.

Ezekhez az egyenletekhez még a következők járulnak

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi\rho, \tag{12.2.3}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0. \tag{12.2.4}$$

A (2.3) egyenlet nem törvény, hanem ρ definícióját adja, a (2.4) egyenlet azonban törvény, mert azt mondja ki, hogy $\mathfrak{B}$ divergenciája mindig zérus.

Fennállnak még a következő egyenletek

$$\mathbf{i}_v = \sigma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e), \tag{12.2.5}$$

$$q = \sigma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e)^2, \tag{12.2.6}$$

ahol $\mathfrak{E}$ jelenti a térerősséget a vezetőben, $\mathfrak{E}^e$ pedig az elektromotoros erőt. A (2.5) és (2.6) egyenlet OHM és JOULE törvénye differenciális alakban.

Ezekhez járul még mint 7-ik egyenlet a *Lorentz*-féle erőtörvény, mely tapasztalati törvény és azt adja meg, hogy egy e elektromos töltésre mekkora erő hat egy elektromágneses térben. Eszerint ez az erő

$$\mathbf{K} = e\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathfrak{H}]\right), \tag{12.2.7}$$

$\mathbf{v}$ az e töltés sebessége. Amint látható, a mágneses tér csak akkor gyakorol erőt az elektromos töltésre, ha az mozog és ez az erő mindig merőleges $\mathbf{v}$-re és $\mathfrak{H}$-ra.

A (2.1) és (2.2) egyenlet kiegészítve a (2.3) – (2.7) egyenletekkel az egész elektrodinamika alapját képezi, beleértve az elektrosztatikát és magnetosztatikát is. Ezekben az egyenletekben az összes eddig megismert törvényszerűségek bent foglaltatnak és belőlük az elektrosztatika, magnetosztatika, a stacionárius, kvázistacionárius áramok elmélete teljes egészében levezethető. Magukban foglalják ezek az egyenletek a gyorsan váltakozó elektromágneses terek elméletét is, mellyel a következőkben fogunk foglalkozni.

A gyorsan váltakozó tereknél a (2.1) egyenlet jobboldalán éppen az $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ tag a lényeges, melyet a kvázistacionárius tereknél $4\pi\mathbf{i}/c$ mellett elhagyhattunk. A kvázistacionárius terek ugyanis lassan váltakozó terek, ezek definíciója tehát magában foglalja azt, hogy $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ $\frac{4\pi\mathbf{i}}{c}$-hez képest elhanyagolható kicsi legyen. A gyorsan váltakozó tereknél az $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ tag, mely $\mathfrak{D}$ változásával arányos, $4\pi\mathbf{i}/c$ mellett nem hagyható el.

Egy későbbi fejezetben a *Maxwell*-egyenleteket egységesebb módon fogjuk származtatni és meg fogjuk mutatni, hogy ezekből az egyenletekből, kiegészítve őket a (2.3)–(2.7)-egyenletekkel, az elektrosztatikus, magnetosztatikus, stacionárius, kvázistacionárius és gyorsan váltakozó terek elmélete levezethető.

3. §. A sugárvektor

Tárgyalásainkat egy fontos fogalom, a sugárvektor definíciójával kezdjük, mely a következő

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]. \tag{12.3.1}$$

S-et a *Poynting*-féle vektornak vagy az energiaáramlás vektorának is szokás nevezni. Amint a következőkben látni fogjuk, valóban szoros kapcsolatban van az energiaáramlással.

Ennek kimutatása céljából induljunk ki a *Maxwell*-egyenletekből és tegyük fel, hogy abban a térrészben, mellyel foglalkozunk, vezetők és töltések nincsenek jelen, tehát $\mathbf{i} = 0$ és $\rho = 0$. Ekkor a *Maxwell*-egyenletek a következők

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \tag{12.3.2}$$

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}. \tag{12.3.3}$$

Szorozzuk meg az első egyenletet $\mathfrak{E}$-vel, a másodikat $\mathfrak{H}$-val skalárisan és vonjuk le a másodikból az elsőt. Ekkor nyerjük

$$c(\mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathfrak{E} - \mathfrak{E} \operatorname{rot} \mathfrak{H}) = -\varepsilon \left(\mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\right) - \mu \left(\mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right).$$

A baloldal, mint a vektoranalízisben láttuk, átalakítható, mégpedig

$$\mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathfrak{E} - \mathfrak{E} \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \operatorname{div} [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}].$$

Tehát a baloldalon $\operatorname{div} c[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]$, vagyis $\operatorname{div} 4\pi \mathbf{S}$ áll.

A jobboldal is átalakítható, ugyanis

$$\varepsilon \left(\mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\right) + \mu \left(\mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \mathfrak{E}^2 + \mu \mathfrak{H}^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B}).$$

Amint az elektrosztatikában és magnetosztatikában láttuk, $\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}\mathfrak{D})$ és $\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{H}\mathfrak{B})$ a térfogategységben levő elektromos, ill. mágneses energia, tehát

$$w = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B}) \tag{12.3.4}$$

a térfogategységben levő elektromágneses energia, vagyis az elektromágneses tér energiasűrűsége.

Figyelembe véve ezeket az összefüggéseket, nyerjük

$$\operatorname{div} 4\pi \mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} 4\pi w.$$

4π-vel osztva

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = -\frac{\partial w}{\partial t}. \tag{12.3.5}$$

Integráljuk ezt a fontos egyenletet arra a térrészre, mellyel foglalkozunk

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{S} dV = -\frac{\partial \int_V w dV}{\partial t}. \tag{12.3.6}$$

$W = \int_V w dV$ a V térfogatban levő összes elektromágneses energia. A baloldal pedig GAUSS tételével a következőképpen alakítható át

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{S} dV = \int_F S_n dF,$$

ahol F a V térfogatot körülvevő felület. Tehát egyenletünk a következő lesz

$$\int_F S_n dF = -\frac{\partial W}{\partial t}. \tag{12.3.7}$$

Eszerint a V térfogat elektromágneses energiájának fogyása az időegység alatt egyenlő $\mathbf{S}$-nek az F felületen való átáramlásával.

Egy V térfogatban levő ρ sűrűségű inkompresszibilis folyadékmennyiség fogyása az időegység alatt egyenlő a V-t határoló F felületen időegység alatt átáramló folyadék mennyiségével. A V térfogatú, ρ sűrűségű folyadék tömege $\int_V \rho dV$, az F felületen időegység alatt kilépő folyadék tömege pedig $\int_F \rho v_n dF$, tehát

$$\int_F \rho v_n dF = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV.$$

Ennek az egyenletnek (3.7)-tel való hasonlósága vezetett arra, hogy $\mathbf{S}$-et az energiaáramlás vektorának nevezzük.

TIZENHARMADIK FEJEZET

ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK

1. §. Elektromágneses síkhullámok dielektrikumokban

A *Maxwell*-féle egyenletekben most már ne hanyagoljuk el az idő szerinti deriváltakat, azaz tanulmányozzuk az egyenleteket tetszés szerinti nagyfrekvencia esetén. Először dielektrikumokra szorítkozunk, melyek vezetőképessége zérus, vagyis $\sigma = 0$. Továbbá zárjuk ki valódi töltések és áramok jelenlétét, vagyis $\rho = 0$, $\omega = 0$ és $\mathbf{i} = 0$. Feltételezzük, hogy közegünk izotrop, és hogy ε és μ az egész térben és az időben állandó. Ekkor az alapegyenletek

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \tag{13.1.1}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \tag{13.1.2}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0, \tag{13.1.3}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \tag{13.1.4}$$

Az (1.1) és (1.2) egyenletekből le lehet vezetni két másik vektoregyenletet, melyek egyike csak $\mathfrak{E}$-t, másika csak $\mathfrak{H}$-t tartalmazza. Képezzük az (1.1) egyenlet rotációját és vegyük tekintetbe a rotáció rotációjának a vektoranalízisben levezetett alakját, ekkor

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{H} - \Delta \mathfrak{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathfrak{E}.$$

(1.4) szerint $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$, továbbá (1.2) szerint $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$. Ezeket figyelembe véve nyerjük

$$\Delta \mathfrak{H} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2}. \tag{13.1.5}$$

Teljesen hasonlóan nyerjük (1.2) rotációjának képzésével, hogy

$$\Delta \mathfrak{E} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2}. \tag{13.1.6}$$

Ezeket az egyenleteket hullámegyenleteknek nevezzük, ugyanis, mint látni fogjuk, megoldásaik elektromágneses hullámokat szolgáltatnak. Részletesen kiírva nyer-

jük

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_y}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_y}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial t^2}.$$

Ennek a két egyenletrendszernek megoldásai között fenn kell állniuk az (1.1) és (1.2) egyenletek által előírt relációknak, ami korlátozást jelent a megoldásokra nézve. Az egyik egyenletrendszer $\mathfrak{H}$ megoldásaihoz nem rendelhetjük hozzá a másik egyenletrendszer tetszőleges $\mathfrak{E}$ megoldásait.

A hullámegyenleteknek van olyan partikuláris megoldása, melyben $\mathfrak{H}$ és $\mathfrak{E}$ komponensei a

$$t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v} \tag{13.1.8}$$

függvényei, ahol α, β, γ iránykoszinuszok, t az idő, x, y, z egy pont koordinátái, v egy állandó. A megoldások

$$\mathfrak{H}_x = g_1\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}\right), \qquad \mathfrak{E}_x = f_1\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}\right),$$

$$\mathfrak{H}_y = g_2\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}\right), \qquad \mathfrak{E}_y = f_2\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}\right), \tag{13.1.9}$$

$$\mathfrak{H}_z = g_3\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}\right), \qquad \mathfrak{E}_z = f_3\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}\right),$$

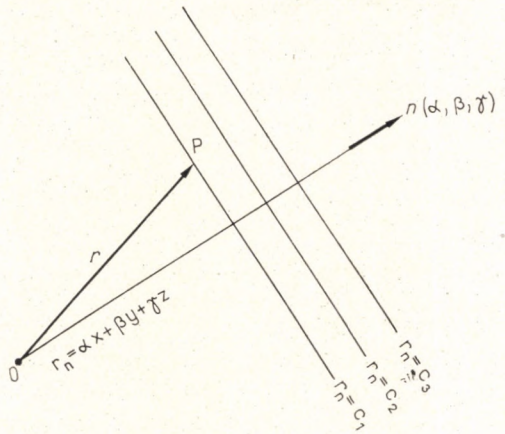
ahol g_i és f_i $(i = 1, 2, 3)$ tetszőleges függvények.

Először e függvények sajátságait vizsgáljuk meg és csak azután térünk rá annak kimutatására, hogy ezek tényleg megoldások.

Mivel α, β, γ iránykoszinuszok, fennáll, hogy

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \tag{13.1.10}$$

$\alpha x + \beta y + \gamma z$ nem más, mint egy ponthoz húzott **r** rádiuszvektornak az **n**(α, β, γ) irányra való vetülete. Ez a vetület, r_n állandó egy olyan sík minden (x, y, z) pontjára nézve, mely merőleges **n**-re. A vetület a síknak az origótól való távolságával egyenlő. Az argumentum tehát egy $t = t_1$ időpillanatban minden ilyen síkon állandó, így függvényei és az ezekkel előállított vektorok is állandók ezeken a síkokon az egyes időpillanatokban. Tehát megoldásaink azt jelentik, hogy $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$, vagyis az elektromágneses tér komponensei, $t = t_1$ időpillanatban az **n** irányra



181. ábra. Síkhullámok

merőleges síkokon állandók és csak e síkok közös normálisa mentén változnak valamilyen, az f_i, ill. g_i függvények által megszabott módon.

Az argumentum a $t = t_1$ időpillanatban az origótól r_{n1} távolságra levő, **n** normálisú sík összes pontjában a

$$t_1 - \frac{r_{n1}}{v}$$

értéket veszi fel. Ezzel egyezik egy $t = t_2$ időpillanatban az origótól r_{n2} távolságra levő, az előbbivel párhuzamos síkon felvett érték

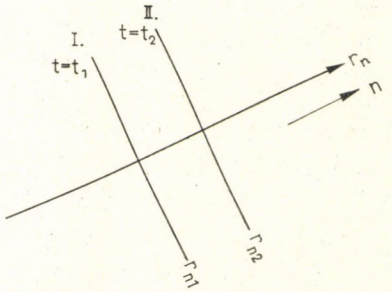
$$t_1 - \frac{r_{n1}}{v} = t_2 - \frac{r_{n2}}{v},$$

azaz

$$r_{n2} - r_{n1} = v(t_2 - t_1). \qquad (13.1.11)$$

Tehát a II. sík, melyen az argumentum és így annak függvényei, $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ ugyanazt az értéket veszik fel, mint az I. síkon, olyan $r_{n2} - r_{n1}$ távolságra van eltolva az **n** mentén, mely eltolódás nagysága az idővel arányos és sebessége v.

Látható tehát, hogy $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ az f_i és g_i függvények által megszabott módon oszlik el az **n**-re merőleges síkokban, és ez az eloszlás **n** mentén konstans v sebességgel tolódik el.



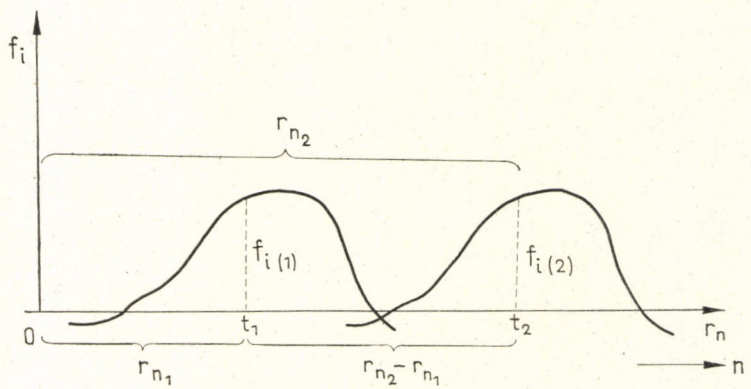
182. ábra. A síkhullám terjedési sebességének meghatározása

$f_i\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}\right)$ eloszlásának eltolódását a 183. ábra mutatja. Az ábrán az egyik f függvény van ábrázolva az r_n, f_i koordinátarendszerben egy meghatározott t_1 és t_2 időpillanatban. Az ábrán $f_i(1)$ és $f_i(2)$ egyenlő függvényértékek, vagyis

$$f_i(1) = f_i(2),$$

ahol

$$f_i(1) = f_i\left(t_1 - \frac{r_{n1}}{v}\right)$$



183. ábra. A hullám haladása

és

$$f_i(2) = f_i\left(t_2 - \frac{r_{n2}}{v}\right).$$

Az ilyen típusú megoldásokat *síkhullámok*nak, az **n** normálisú síkokat *hullámsíkok*nak nevezzük. v a hullámok terjedési sebessége, **n** a tovaterjedés iránya.

A következőkben vizsgáljuk meg, hogy függvényeink tényleg megoldások-e és hogy milyen feltételek mellett megoldások. Helyettesítsük be e célból pl. f_1-et a hullámegyenletbe. Képezzük tehát a koordináták és az idő szerinti másodrendű deriváltakat. Az argumentum szerinti deriválást jelöljük vesszővel

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} = -f_1' \frac{\alpha}{v}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} = -f_1' \frac{\beta}{v}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} = -f_1' \frac{\gamma}{v}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} = f_1',$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial x^2} = f_1'' \frac{\alpha^2}{v^2}, \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial y^2} = f_1'' \frac{\beta^2}{v^2}, \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial z^2} = f_1'' \frac{\gamma^2}{v^2}, \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} = f_1''.$$

Ezeket behelyettesítve a hullámegyenletbe, nyerjük

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{v^2} f_1'' = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} f_1'',$$

tehát

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}.$$

Vagyis f_1 megoldás, ha

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{13.1.12}$$

Tehát a hullámok terjedési sebességét, v-t a közeg dielektromos együtthatója és mágneses permeabilitása határozza meg. Üres térben, ahol $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$,

$$v = c = 3 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cms}^{-1}. \tag{13.1.13}$$

Tehát c az elektromágneses hullámok terjedési sebessége vákuumban.

Állapítsuk meg, hogyan fekszenek $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ a hullámsíkhoz, ill. a terjedés irányához képest. Helyettesítsük be e célból megoldásainkat (1.3)-ba és (1.4)-be. Ekkor nyerjük

$$-v \operatorname{div} \mathfrak{E} = \alpha f_1' + \beta f_2' + \gamma f_3' = 0, \tag{13.1.14}$$

$$-v \operatorname{div} \mathfrak{H} = \alpha g_1' + \beta g_2' + \gamma g_3' = 0, \tag{13.1.15}$$

ahol a vessző az argumentum szerinti differenciálást jelenti. Az argumentum szerint integrálva

$$\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = \text{állandó},$$

$$\alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma g_3 = \text{állandó}.$$

Az f-ek és g-k helyébe beírva $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ komponenseit, nyerjük

$$\alpha\mathfrak{E}_x + \beta\mathfrak{E}_y + \gamma\mathfrak{E}_z = \text{állandó}, \tag{13.1.16}$$

$$\alpha\mathfrak{H}_x + \beta\mathfrak{H}_y + \gamma\mathfrak{H}_z = \text{állandó}. \tag{13.1.17}$$

Ez a két egyenlet azt fejezi ki, hogy $\mathfrak{E}$-nek és $\mathfrak{H}$-nak az α, β, γ irányú komponense állandó. Ha ezt az állandó teret levonjuk, a hátramaradó térnek nincs α, β, γ irányú komponense, tehát $\mathfrak{E}$ is, $\mathfrak{H}$ is merőleges az α, β, γ, ill. a továbbterjedés irányára, vagyis $\mathfrak{E}$ is, $\mathfrak{H}$ is a hullámsíkban fekszik. Tehát a fenti elektromágneses hullámok *transzverzális* hullámok. A fentebbi állandó elektromágneses tértől eltekinthetünk, mert bennünket itt az elektromágneses térnek csak az időben változó része érdekel. De azt is mondhatjuk, hogy a fenti egyenletek jobboldalán szereplő állandó, integrációs állandó lévén, tetszőleges, tehát 0-nak választható.

Egy a terjedés irányába eső állandó elektromos és mágneses mező akkor lép fel, midőn pl. az elektromágneses hullám olyan térben terjed **n** irányban, melyben már jelen van egy ugyanilyen irányú elektrosztatikus és magnetosztatikus tér. Ezek a sztatikus terek szuperponálódnak a hullámok terére anélkül, hogy az utóbbit zavarnák, tehát a hullámok tanulmányozásánál jelentőségtelenek.

Állapítsuk meg ezekután azt, hogy hogyan fekszik $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ egymáshoz képest. Az (1.1) és (1.2) egyenletek x-komponense szerint

$$\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial t}, \qquad \frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial z} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial t}.$$

Hasonlóképpen alakulnak az y és z komponensek is. Beírva a megoldásokat és a kijelölt differenciálásokat elvégezve, nyerjük

$$-\frac{1}{v}(\beta g_3' - \gamma g_2') = \frac{\varepsilon}{c} f_1', \qquad -\frac{1}{v}(\beta f_3' - \gamma f_2') = -\frac{\mu}{c} g_1',$$

$$-\frac{1}{v}(\gamma g_1' - \alpha g_3') = \frac{\varepsilon}{c} f_2', \qquad -\frac{1}{v}(\gamma f_1' - \alpha f_3') = -\frac{\mu}{c} g_2',$$

$$-\frac{1}{v}(\alpha g_2' - \beta g_1') = \frac{\varepsilon}{c} f_3', \qquad -\frac{1}{v}(\alpha f_2' - \beta f_1') = -\frac{\mu}{c} g_3',$$

ahol a vesszők ismét az argumentum szerinti differenciálást jelentik. Szorozzunk $\frac{c}{\varepsilon}$-nal, ill. $\left(-\frac{c}{\mu}\right)$-vel, vegyük figyelembe a $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ összefüggést és integráljunk

az argumentum szerint, akkor következik, hogy

$$f_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(g_2\gamma - g_3\beta) + e_1\,, \qquad g_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(f_3\beta - f_2\gamma) + h_1\,,$$

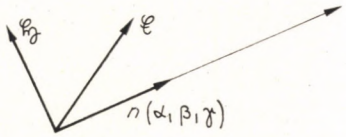
$$f_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(g_3\alpha - g_1\gamma) + e_2\,, \qquad g_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(f_1\gamma - f_3\alpha) + h_2\,, \qquad (13.1.18)$$

$$f_3 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(g_1\beta - g_2\alpha) + e_3\,, \qquad g_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(f_2\alpha - f_1\beta) + h_3.$$

e_1, e_2, e_3 és h_1, h_2, h_3 integrációs állandók.

Ha az α, β, γ irányba mutató egységvektort $\mathbf{n}$-nel jelöljük, akkor ezek az egyenletek így is írhatók

$$\mathfrak{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,[\mathfrak{H}, \mathbf{n}] + \text{konst.}, \qquad \mathfrak{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,[\mathbf{n}, \mathfrak{E}] + \text{konst.} \qquad (13.1.19)$$



184. ábra. Az $\mathbf{n}$, $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ vektorok a síkhullámban

Ezek az egyenletek pedig, ha a konstans mezőtől ismét eltekintünk, azt mondják ki, hogy $\mathbf{n}$, $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ merőlegesek egymásra, és úgy következnek egymásután, mint egy jobbsodrású koordinátarendszer x-, y- és z-tengelye. Mivel az $\mathbf{n}$ és $\mathfrak{H}$ közti, továbbá az $\mathbf{n}$ és $\mathfrak{E}$ közti szögek derékszögek,

$$|\,[\mathfrak{H}, \mathbf{n}]\,| = |\,\mathfrak{H}\,|, \text{ és } |\,[\mathbf{n}, \mathfrak{E}]\,| = |\,\mathfrak{E}\,|.$$

Tehát a fenti egyenletekből következik, hogy

$$\sqrt{\varepsilon}\,|\,\mathfrak{E}\,| = \sqrt{\mu}\,|\,\mathfrak{H}\,|,$$

vagyis

$$\varepsilon\mathfrak{E}^2 = \mu\mathfrak{H}^2. \qquad (13.1.20)$$

Tehát síkhullámok esetében a tér minden pontjában és bármely időpillanatban $|\,\mathfrak{E}\,|$ és $|\,\mathfrak{H}\,|$ ugyanazon arányossági faktor szerint arányosak egymással.

Az elektromágneses energia sűrűsége síkhullámok esetében tehát

$$w = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon\mathfrak{E}^2 + \varepsilon\mathfrak{H}^2) = \frac{1}{4\pi}\varepsilon\mathfrak{E}^2 = \frac{1}{4\pi}\mu\mathfrak{H}^2\,. \qquad (13.1.21)$$

A sugárvektor

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] = \frac{c}{4\pi} |\mathfrak{E}| \cdot |\mathfrak{H}| \mathbf{n}, \tag{13.1.22}$$

$$|\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi} |\mathfrak{E}| \cdot |\mathfrak{H}| = \frac{c}{4\pi} |\mathfrak{E}| \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\mathfrak{E}| = \frac{1}{4\pi} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \varepsilon |\mathfrak{E}|^2 = vw,$$

tehát

$$\mathbf{S} = wv\mathbf{n}.$$

vw jelenti az energia mennyiségét egy v térfogatú, vagyis egységnyi alapfelületű és v magasságú hasábban. Tehát síkhullámok esetében $\mathbf{S}$ a síkhullám haladási irányába mutató vektor, melynek abszolút értéke a haladás irányára merőleges felületegységen időegység alatt átáramló energia.

2. §. Elliptikusan, cirkulárisan és lineárisan poláros hullámok

Minthogy a hullámegyenleteknek az előbbi fejezetben tárgyalt megoldásaiban az f_i és g_i függvények tetszőlegesek lehetnek, a megoldások általában a térben nem periodikusak. A természetben azonban gyakran előfordulnak olyan hullámok, melyek a térben is periodikusak. Ilyenek tanulmányozására foglalkozzunk a

$$t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}$$

argumentumnak egyszerű periodikus, pl. sin- vagy cos-függvényeivel. Vagyis a következő megoldásokkal foglalkozunk

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_x &= A \cos\left\{\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}\right) + \varepsilon_x\right\}, \\
\mathfrak{E}_y &= B \cos\left\{\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}\right) + \varepsilon_y\right\}, \\
\mathfrak{E}_z &= C \cos\left\{\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}\right) + \varepsilon_z\right\}, \\
\mathfrak{H}_x &= F \cos\left\{\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}\right) + \delta_x\right\}, \\
\mathfrak{H}_y &= G \cos\left\{\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}\right) + \delta_y\right\}, \\
\mathfrak{H}_z &= H \cos\left\{\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}\right) + \delta_z\right\}.
\end{aligned} \tag{13.2.1}$$

Ezekkel a megoldásokkal előállított hullámokat *szinuszhullámok*nak nevezzük. Az A, B, C, F, G, H állandók a hullám *amplitúdói*, ω a hullám *körfrekvenciája*, ε_x, ε_y, ε_z, δ_x, δ_y, δ_z a hullám *fázisállandói*.

Mint a megoldásokból látható, a hullám időbeli periódusa

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{13.2.2}$$

Ha az $\alpha x + \beta y + \gamma z$ számára ismét az r_n jelölést vezetjük be, ami nem más, mint a hullámsíkok normálisa mentén mért továbbterjedési távolság, melyet a hullám t idő alatt tesz meg, akkor az argumentum első része így is írható

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_n}{vT}\right).$$

Innen látható, hogy függvényeink r_n szerinti, azaz térbeli periódusa

$$\lambda = vT. \tag{13.2.3}$$

λ-t nevezzük *hullámszám*nak, ez az a távolság, melyre a hullámzás egy rezgésidő alatt eljut. λ bevezetésével az argumentum

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_n}{\lambda}\right).$$

Gyakran bevezetik a $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ mennyiséget, amely a 2π cm-re eső hullámok számát adja. k-t *hullámhossz*nak nevezzük. Ezzel az argumentum így is írható

$$\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}r_n = \omega t - kr_n, \tag{13.2.4}$$

ahol tehát ω a 2π secundum alatti rezgések száma, k pedig a 2π cm-re eső hullámok száma.

Ezek után vizsgáljuk meg $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ változását valamelyik hullámsíkban. Az általánosság megszorítása nélkül a koordinátarendszer z-tengelyét a hullámsík normálisának irányába, vagyis az α, β, γ irányba helyezhetjük. Ekkor $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ és a hullámok tranzverzalitása folytán $\mathfrak{E}_z = 0$, $\mathfrak{H}_z = 0$ és így

$$\mathfrak{E}_x = A\cos(\omega t - kz + \varepsilon_x), \quad \mathfrak{H}_x = F\cos(\omega t - kz + \delta_x),$$

$$\mathfrak{E}_y = B\cos(\omega t - kz + \varepsilon_y), \quad \mathfrak{H}_y = G\cos(\omega t - kz + \delta_y). \tag{13.2.5}$$

Elegendő $\mathfrak{E}$-vel foglalkozni, $\mathfrak{H}$-ra a tárgyalás teljesen hasonlóan végezhető el. Mivel ugyanabban a hullámsíkban maradunk, $-kz$ állandó. Vonjuk össze ezt az állandót az ε_x, ε_y állandókkal és jelöljük a, b-vel, ekkor

$$\mathfrak{E}_x = A\cos(\omega t + a) = A\cos\omega t\cos a - A\sin\omega t\sin a,$$

$$\mathfrak{E}_y = B\cos(\omega t + b) = B\cos\omega t\cos b - B\sin\omega t\sin b.$$

Ez $\cos\omega t$-re és $\sin\omega t$-re egy lineáris egyenletrendszer, melynek megoldása

$$\cos\omega t = \frac{-\frac{\mathfrak{E}_x}{A}\sin b + \frac{\mathfrak{E}_y}{B}\sin a}{\sin(a-b)}, \qquad \sin\omega t = \frac{-\frac{\mathfrak{E}_x}{A}\cos b + \frac{\mathfrak{E}_y}{B}\cos a}{\sin(a-b)}.$$

Négyzetre emelve és szorozva $\sin^2(a-b)$-vel, nyerjük

$$\frac{\mathfrak{E}_x^2}{A^2} + \frac{\mathfrak{E}_y^2}{B^2} - \frac{2\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y}{AB}\cos(a-b) = \sin^2(a-b). \tag{13.2.6}$$

$\mathfrak{H}_x$-re és $\mathfrak{H}_y$-ra teljesen hasonló összefüggés adódik. Ezek az összefüggések azt jelentik, hogy $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ végpontjai a hullámsíkban harmonikus mozgást végeznek és mint a fenti egyenletből látható, általában ellipszist írnak le. Az ellipszis fekvése a hullámsíkban $(a-b)$-től függ. Mivel

$$a - b = (-kz + \varepsilon_x) - (-kz + \varepsilon_y) = \varepsilon_x - \varepsilon_y \tag{13.2.7}$$

nem függ z-től, $\mathfrak{E}$ végpontja minden hullámsíkban ugyanolyan fekvésű ellipszist ír le. Ugyanez az eredmény adódik a $\mathfrak{H}$ vektorra is, vagyis $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ végpontjai minden hullámsíkban ugyanolyan, de mint látni fogjuk, egymástól különböző fekvésű ellipszist írnak le. Az ilyen hullámot *elliptikusan poláros hullám*nak nevezzük. Az $\mathfrak{E}$-re és $\mathfrak{H}$-ra vonatkozó ellipszisek nagytengelyei (és kistengelyei) merőlegesek egymásra, ugyanis fennáll a $\sqrt{\varepsilon}\,|\,\mathfrak{E}\,| = \sqrt{\mu}\,|\,\mathfrak{H}\,|$ összefüggés, mely szerint $|\,\mathfrak{E}\,|$ és $|\,\mathfrak{H}\,|$ minden időpillanatban ugyanazon faktor szerint arányos egymással.

Ha $a - b = \pi/2$, akkor egyenletünk

$$\frac{\mathfrak{E}_x^2}{A^2} + \frac{\mathfrak{E}_y^2}{B^2} = 1. \tag{13.2.8}$$

Ez olyan ellipszis egyenlete, melynek főtengelyei a koordinátatengelyek irányába mutatnak. Ha ebben az esetben $A = B$, akkor egyenletünk egy A sugarú kör egyenlete, tehát $\mathfrak{E}$ végpontja ezen a körön mozog. Ha $\mathfrak{H}$-nál hasonló viszonyok állnak fenn, akkor a hullámot *cirkulárisan poláros*nak nevezzük.

Ha $a = b$, akkor a (2.6) egyenletünk

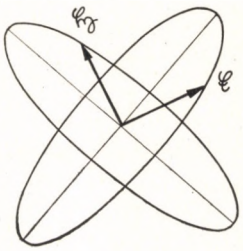
$$\left(\frac{\mathfrak{E}_x}{A} - \frac{\mathfrak{E}_y}{B}\right)^2 = 0,$$

$$\mathfrak{E}_y = \frac{B}{A}\mathfrak{E}_x. \tag{13.2.9}$$

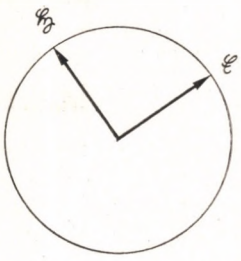
Ebben az esetben tehát $\mathfrak{E}$ végpontja egy egyenest ír le, melynek fekvése mindegyik hullámsíkon ugyanolyan. $\mathfrak{E}$ tehát állandóan ugyanabban a síkban mozog, mely sík a hullám terjedési irányán van átfektetve. Ugyanez áll $\mathfrak{H}$-ra is, ami az $\mathfrak{E}$ rezgési síkjára merőleges síkban rezeg, mely szintén átmegy a hullám terjedési irányán. Az ilyen hullámot *lineárisan poláros* hullámnak nevezzük. A $\mathfrak{H}$ vektor rezgési síkja a polarizáció síkja.

Az elliptikusan, cirkulárisan és lineárisan poláros hullámoknál fennálló viszonyokat vákuumban, vagyis midőn $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $|\mathfrak{E}| = |\mathfrak{H}|$, a 185.–187. ábrák szemléltetik.

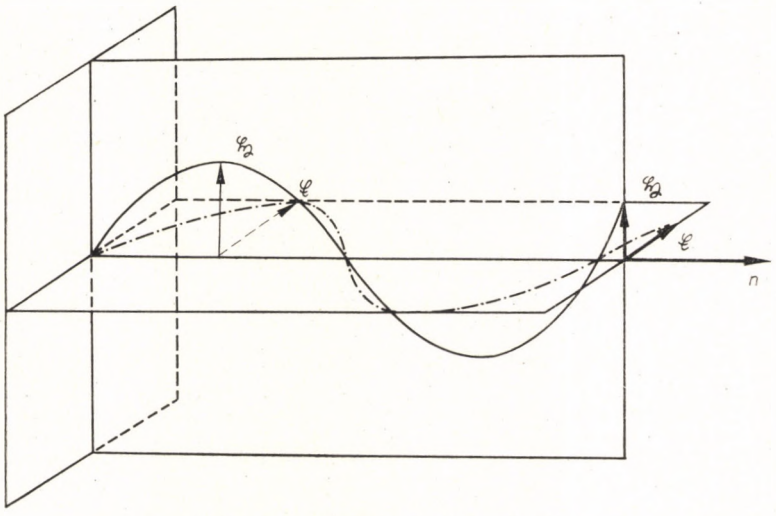
A szinuszhullámok bevezetésének jogosultsága és nagy jelentősége abban áll, hogy bármilyen $f(u)$ függvény (mely csak egészen kevés megszorításnak tesz ele-



185. ábra. Elliptikusan poláris hullám



186. ábra. Cirkulárisan poláros hullám



187. ábra. Lineárisan poláros hullám

get) *Fourier*-féle sor vagy *Fourier*-féle integrál segítségével sin- és cos-függvényekkel állítható elő. A *Fourier*-sorokról itt nem beszélünk, azokat ismertnek tételezzük fel és csak a *Fourier*-integrállal való előállítást említjük meg röviden, mely szerint

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega (u - \tau) d\tau \,.$$

Ha u helyébe a $t - \dfrac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}$ argumentumot tesszük, akkor nyerjük

$$f\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v} - \tau\right) d\tau. \tag{13.2.10}$$

Ennek a formulának segítségével lehet előállítani bármilyen f függvényt (mely csak minimális megszorításnak tesz eleget) ω frekvenciájú és $\omega\tau$ fázisállandójú szinuszhullámokkal. Megjegyezzük, hogy a fenti formulában szereplő végtelen sok szinuszhullám frekvenciái és fázisállandói is különböznek egymástól, mert ω-ra és τ-ra integrálni kell $(-\infty)$-től $(+\infty)$-ig. Az egyes hullámok amplitúdói, mivel $f(\tau)$ tetszőleges lehet, általában szintén különböznek egymástól. A fenti formula jobboldalát mint végtelen sok különböző amplitúdójú, különböző frekvenciájú és különböző fázisállandójú szinuszhullám szuperpozícióját lehet felfogni.

A szinuszhullám komponenseit gyakran komplex alakban írják a következőképpen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_x &= Ae^{i\left[\omega\left(t - \frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{v}\right) + \varepsilon_x\right]}, & \mathfrak{H}_x &= Fe^{i\left[\omega\left(t - \frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{v}\right) + \delta_x\right]}, \\
\mathfrak{E}_y &= Be^{i\left[\omega\left(t - \frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{v}\right) + \varepsilon_y\right]}, & \mathfrak{H}_y &= Ge^{i\left[\omega\left(t - \frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{v}\right) + \delta_y\right]}, \\
\mathfrak{E}_z &= Ce^{i\left[\omega\left(t - \frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{v}\right) + \varepsilon_z\right]}, & \mathfrak{H}_z &= He^{i\left[\omega\left(t - \frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{v}\right) + \delta_z\right]}.
\end{aligned} \tag{13.2.11}$$

Látható, hogy a fentebb cos-függvényekkel megadott megoldások ezeknek a függvényeknek valós részével egyenlők. Az exponenciális függvénnyel való írásmód sok szempontból célszerűbb, így pl. egyszerűbben lehet képezni a deriváltjait, mint a cos-függvényét.

Ebben az esetben a fenti *Fourier*-integrálok a következő alakúak lesznek

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{i\omega(u-\tau)} d\tau,$$

$$f\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{i\omega\left(t - \frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{v} - \tau\right)} d\tau. \tag{13.2.12}$$

3. §. Síkhullámok vezető közegben

Ha térbeli elektromos töltések és elektromotoros erők nincsenek jelen, akkor (12.2.5) szerint

$$\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}. \tag{13.3.1}$$

Tehát a hullámegyenletek homogén izotrop vezetőközegekben, ha elektromos töltések és elektromotoros erők nincsenek jelen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E}, \tag{13.3.2}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \tag{13.3.3}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0, \tag{13.3.4}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \tag{13.3.5}$$

Ha ismét képezzük az első egyenlet rotációját és rot $\mathfrak{E}$-t a másodikból behelyettesítjük, nyerjük

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{H} - \Delta \mathfrak{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{4\pi\sigma}{c} \operatorname{rot} \mathfrak{E},$$

$$-\Delta \mathfrak{H} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}.$$

Tehát

$$\Delta \mathfrak{H} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \tag{13.3.6}$$

és hasonlóan

$$\Delta \mathfrak{E} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}. \tag{13.3.7}$$

Ezek a hullámegyenletek vezető közegekben. Itt a σ-val arányos tagban $\mathfrak{H}$-nak, ill. $\mathfrak{E}$-nek az idő szerinti első deriváltja is szerepel. Ha $\sigma = 0$, akkor ez a tag zérus és megkapjuk a hullámegyenleteket dielektrikumok esetére.

Ezeknek az egyenleteknek is vannak síkhullám-megoldásaik. Kimutatjuk, hogy megoldások a következő periodikus függvények, melyeket komplex alakban írunk:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{H}_x &= Fe^{i[\omega t - k(\alpha x + \beta y + \gamma z)]}, & \mathfrak{E}_x &= Ae^{i[\omega t - k(\alpha x + \beta y + \gamma z)]}, \\
\mathfrak{H}_y &= Ge^{i[\omega t - k(\alpha x + \beta y + \gamma z)]}, & \mathfrak{E}_y &= Be^{i[\omega t - k(\alpha x + \beta y + \gamma z)]}, \\
\mathfrak{H}_z &= He^{i[\omega t - k(\alpha x + \beta y + \gamma z)]}, & \mathfrak{E}_z &= Ce^{i[\omega t - k(\alpha x + \beta y + \gamma z)]}.
\end{aligned} \tag{13.3.8}$$

Behelyettesítve a hullámegyenletekbe, nyerjük

$$k^2 = \frac{1}{c^2}(\varepsilon\mu\omega^2 - 4\pi i\sigma\mu\omega). \tag{13.3.9}$$

Ezt a következő alakra hozzuk

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon\mu - i\frac{4\pi\sigma\mu}{\omega}\right) = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'.$$

Innen

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'}, \qquad \varepsilon' = \varepsilon\mu - i\frac{4\pi\sigma\mu}{\omega}. \tag{13.3.10}$$

Ha $\mu = 1$, ami a gyakorlatban igen gyakran előfordul, mert átlátszó közegek mágneses permeabilitása alig különbözik 1-től, akkor

$$\varepsilon' = \varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}. \tag{13.3.11}$$

Ebben az esetben ε'-t komplex dielektromos állandónak nevezzük, ez azonban nemcsak a közeg jellemzője, hanem ε-on és σ-án kívül a hullám körfrekvenciájától, ω-tól is függ.

A továbbiak miatt célszerű ε'-t a következő alakban írni

$$\varepsilon' = n^2(1 - i\kappa)^2 = n^2(1 - \kappa^2) - 2in^2\kappa,$$

$$\varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega} = n^2(1 - \kappa^2) - i2n^2\kappa.$$

Két komplex szám egyenlőségéből következik, hogy a valós és képzetes részeik külön-külön egyenlők egymással. Tehát

$$\varepsilon = n^2(1 - \kappa^2), \tag{13.3.12}$$

$$\sigma = \frac{1}{2\pi}\omega n^2\kappa. \tag{13.3.13}$$

Ezáltal tehát ε és σ helyett n-et és κ-t vezettük be, melyekkel

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'} = \frac{\omega}{c}n(1 - i\kappa) = \frac{\omega n}{c} - i\frac{\omega n\kappa}{c}. \tag{13.3.14}$$

Tehát a megoldások exponenciális része a következőképpen alakul

$$e^{i\left[\omega t - \frac{\omega n}{c}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\right]}\, e^{-\frac{\omega n\kappa}{c}(\alpha x + \beta y + \gamma z)}.$$

Ha bevezetjük az $r_n = \alpha x + \beta y + \gamma z$ jelölést és áttérünk a valós részre, akkor a

megoldások exponenciális része

$$e^{-\frac{\omega n\kappa}{c} r_n} \cos\left(\omega t - \frac{\omega n}{c} r_n\right). \tag{13.3.15}$$

Ennek a kifejezésnek F, G, H, ill. A, B, C-vel való szorzatai adják a megoldásokat. Az F, G, H, A, B, C az $e^{-\frac{\omega n\kappa}{c} r_n}$ faktorral együtt adja a megoldások amplitúdóit. A megoldások tehát olyan szinuszhullámok, melyek amplitúdói az α, β, γ irány mentén tovább haladva exponenciálisan csökkennek. Az amplitúdók csökkenése az ω körfrekvenciától, továbbá az n és κ állandók révén ε-tól és σ-tól függ.

Tehát vezető közegekben az elektromos hullámok abszorbeálódnak. A κ állandót az *abszorpció indexé*nek nevezzük. Ha $\sigma = 0$, akkor $\kappa = 0$ és az amplitúdók nem változnak, vagyis a hullámok nem abszorbeálódnak. Ez az átlátszó közegek már előbb tárgyalt esete. κ annál nagyobb, minél nagyobb σ, vagyis minél nagyobb a specifikus vezetőképesség.

Ha a megoldásban szereplő $\omega t - \frac{\omega n}{c} r_n$ argumentumot

$$\omega\left(t - \frac{r_n}{\frac{c}{n}}\right)$$

alakban írjuk és ha az $\omega\left(t - \frac{r_n}{v}\right)$ alakkal összehasonlítjuk, akkor látjuk, hogy a hullámok terjedési sebessége

$$v = \frac{c}{n}. \tag{13.3.16}$$

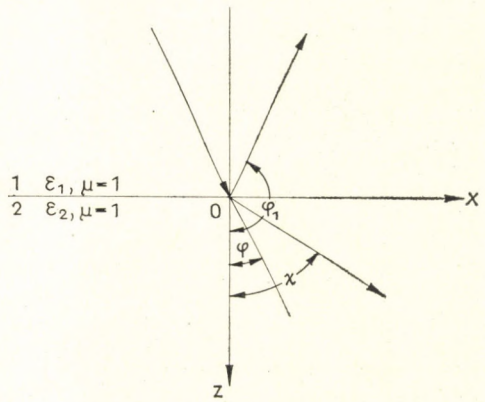
Mivel a (3.12) és (3.13) definíciók miatt n függ ω-tól, ezért vezetőközegekben az elektromágneses hullámok terjedési sebessége függ a frekvenciától. Ezt nevezzük *diszperzió*nak. Tehát vezetőközegekben diszperzió lép fel. Azonban a diszperzió számára innen nyert formulák rövid, pl. az optikában szereplő hullámok esetében nincsenek jó megegyezésben a tapasztalattal. A tapasztalattal egyező eredményre csak az elektronelmélet és a kvantumelmélet vezetett.

4. §. Síkhullámok visszaverődése és törése

Tegyük fel, hogy a teret két különböző, ε_1 és ε_2 dielektromos állandójú közeg tölti be, melyek mágneses permeabilitása $\mu = 1$. A két közeg érintkezzen egymással egy sík határfelület mentén. A két közegben külön-külön fennállnak a hullámegyenletek és a határfelületen ki kell elégíteni a következő határfeltételeket

$$\begin{aligned} (\mathfrak{E}_t)_1 &= (\mathfrak{E}_t)_2, \quad (\mathfrak{H}_t)_1 = (\mathfrak{H}_t)_2, \\ \varepsilon_1(\mathfrak{E}_n)_1 &= \varepsilon_2(\mathfrak{E}_n)_2, \quad (\mathfrak{H}_n)_1 = (\mathfrak{H}_n)_2, \\ &\text{(ugyanis } \mu = 1\text{)}. \end{aligned} \tag{13.4.1}$$

Síkhullámok ebben az esetben is lehetségesek mindkét közegben. De ha az egyik, pl. az 1 közegben haladó síkhullám a határfelület valamely O pontjához érkezik, akkor a határfeltételek csak úgy elégíthetők ki, ha az 1 közegben és a 2 közegben is egy az O pontból kiinduló síkhullámot veszünk fel. A határfelülethez érkező hullám a beeső hullám, az 1 közegben felvett másik hullám a visszavert hullám, a 2 közegben felvett hullám pedig a megtört hullám. A határfelület O pontjában emelt és az 1 közegből 2 felé mutató merőleges a *beesési merőleges*. A beesési merőlegesnek a beeső hullám haladási irányával bezárt szöge



188. ábra. Síkhullámok visszaverődése és törése két közeg határán

a *beesési szög*, ϕ, a visszavert hullám haladási irányával bezárt szöge a *visszaverődési szög*, ϕ_1, a megtört hullám haladási irányával bezárt szöge a *törési szög* χ. Az alapegyenletekkel nincs ellentmondásban, ha a tapasztalattal megegyezésben feltesszük, hogy a beeső, visszavert és megtört hullám haladási iránya egy síkban fekszik, melyet a beeső hullám és a beesési merőleges határoznak meg. Ezt a síkot *beesési síknak* nevezzük.

Válasszuk 0-t a koordinátarendszer kezdőpontjának, a beesési merőlegest z-tengelynek, a beesési sík és a határfelület metszésvonalát x-tengelynek. Tehát az xy-sík a határfelület síkja, a zx-sík pedig a beesési sík. Jelöljük a beeső hullám haladási irányát b-vel, ekkor

$$\alpha = \cos(x, b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin\phi\,,$$

$$\beta = \cos(y, b) = \cos\frac{\pi}{2} = 0\,,$$

$$\gamma = \cos(z, b) = \cos\phi\,.$$

Ha ϕ helyébe ϕ_1-et, ill. χ-t teszünk, akkor a visszavert, ill. a megtört hullám haladási irányának iránykoszinuszait kapjuk. Ezek tehát rendre a következők

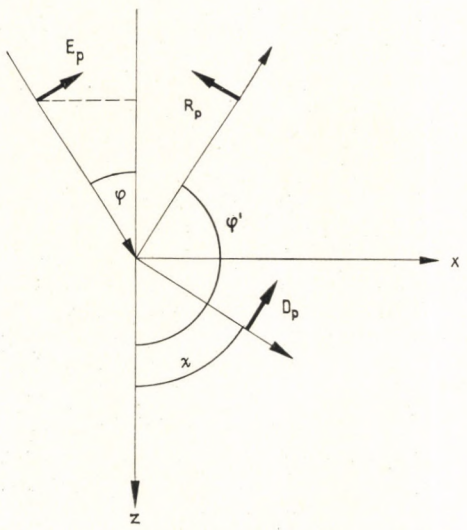
	α	β	γ
beeső	$\sin\phi$	0	$\cos\phi$
visszavert	$\sin\phi_1$	0	$\cos\phi_1$
megtört	$\sin\chi$	0	$\cos\chi$

Feltesszük, hogy a hullámok egyszerű síkhullámok, vagyis $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ komponensei a $t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}$ argumentumnak pl. cos-függvényei.

Az elektromos térerősség amplitúdóját, mely a hullámsíkban fekszik, tehát a terjedés irányára merőleges, bontsuk két komponensre. Az egyik legyen a beesés síkjában, tehát a zx-síkban, ezt jelöljük p indexszel, a másik legyen erre merőleges, tehát mutasson az y irányába, ezt jelöljük s indexszel. $\mathfrak{E}$ amplitúdójának komponensei legyenek

a beeső hullámban	E_p, E_s,
a visszavert hullámban	R_p, R_s,
a megtört hullámban	D_p, D_s.

A koordinátatengelyek szerinti komponensek ezekből a következőképpen adódnak. Az y komponens az s indexű komponenssel egyenlő, az x és z komponenst pedig a p indexű komponensből kapjuk, ha azt rendre szorozzuk $\cos\phi$-vel, $(-\sin\phi)$-vel, $\cos\phi'$-vel, $(-\sin\phi')$-vel, ill. $\cos\chi$-vel, $(-\sin\chi)$-vel, amint azt a 189. ábrából közvetlenül láthatjuk. A sinus előjele negatív, mert ha E_p úgy fekszik, mint az ábrán látható, akkor a z-tengelyre való vetület $-z$ irányába mutat, tehát $(-\sin\phi)$-vel kell szorozni. Ha E_p ellentétes irányú, mint az ábrán látható, akkor



189. ábra. Az elektromos térerősségek a beeső, a megtört és a visszavert hullámban

is $(-\sin\phi)$-vel kell szorozni, hogy a z-tengelyre való vetületet megkapjuk, mert ebben az esetben a vetület $+z$ irányába mutat.

Legyen a beeső hullám lineárisan poláros, azaz komponensei között ne legyen fáziskülönbség. Ugyanis, mivel bármilyen síkhullám ilyen lineárisan poláros hullámokból tevődik össze, elegendő lineárisan poláros hullámokkal foglalkoznunk. $\mathfrak{E}$ komponensei a beeső hullámban

$$\mathfrak{E}_{xb} = E_p \cos\phi \cos\omega\left(t - \frac{x\sin\phi + z\cos\phi}{v_1}\right),$$

$$\mathfrak{E}_{yb} = E_s \cos\omega\left(t - \frac{x\sin\phi + z\cos\phi}{v_1}\right), \tag{13.4.2}$$

$$\mathfrak{E}_{zb} = -E_p \sin\phi \cos\omega\left(t - \frac{x\sin\phi + z\cos\phi}{v_1}\right);$$

a visszavert hullámban

$$\mathfrak{E}_{xr} = R_p \cos\phi' \cos\omega\left(t - \frac{x\sin\phi' + z\cos\phi'}{v_1}\right),$$

$$\mathfrak{E}_{yr} = R_s \cos\omega\left(t - \frac{x\sin\phi' + z\cos\phi'}{v_1}\right), \tag{13.4.3}$$

$$\mathfrak{E}_{zr} = -R_p \sin\phi' \cos\omega\left(t - \frac{x\sin\phi' + z\cos\phi'}{v_1}\right);$$

a megtört hullámban

$$\mathfrak{E}_{xd} = D_p \cos\chi \cos\omega\left(t - \frac{x\sin\chi + z\cos\chi}{v_2}\right),$$

$$\mathfrak{E}_{yd} = D_s \cos\omega\left(t - \frac{x\sin\chi + z\cos\chi}{v_2}\right), \tag{13.4.4}$$

$$\mathfrak{E}_{zd} = -D_p \sin\chi \cos\omega\left(t - \frac{x\sin\chi + z\cos\chi}{v_2}\right).$$

A mágneses térerősség (1.19)-nek megfelelően

$$\mathfrak{H} = \sqrt{\varepsilon}[\mathbf{n}, \mathfrak{E}], \tag{13.4.5}$$

ahol $\mathbf{n}$ a hullám haladási irányába mutató egységvektor, melynek komponensei, pl. a beeső hullám esetében: $\sin\phi$, 0, $\cos\phi$. Ha a $\mathfrak{H}$ térerősségnél teljesen hasonló jelöléseket használunk, mint $\mathfrak{E}$-nél, akkor pl. $\mathfrak{H}_b$ komponensei a következő mátrix másodrendű aldeterminánsainak $\sqrt{\varepsilon_1}$-gyel való szorzatai

$$\begin{Vmatrix} \sin\phi & 0 & \cos\phi \\ \mathfrak{E}_{xb} & \mathfrak{E}_{yb} & \mathfrak{E}_{zb} \end{Vmatrix}.$$

Hasonlóképpen adódnak $\mathfrak{H}_r$ és $\mathfrak{H}_d$ komponensei.

Tehát a mágneses térintenzitás komponensei a beeső hullámban

$$\mathfrak{H}_{xb} = -\sqrt{\varepsilon_1} E_s \cos\phi \cos\omega\left(t - \frac{x\sin\phi + z\cos\phi}{v_1}\right),$$

$$\mathfrak{H}_{yb} = \sqrt{\varepsilon_1} E_p \cos\omega\left(t - \frac{x\sin\phi + z\cos\phi}{v_1}\right), \tag{13.4.6}$$

$$\mathfrak{H}_{zb} = \sqrt{\varepsilon_1} E_s \sin\phi \cos\omega\left(t - \frac{x\sin\phi + z\cos\phi}{v_1}\right);$$

a visszavert hullámban

$$\mathfrak{H}_{xr} = -\sqrt{\varepsilon_1} R_s \cos\phi' \cos\omega\left(t - \frac{x\sin\phi' + z\cos\phi'}{v_1}\right),$$

$$\mathfrak{H}_{yr} = \sqrt{\varepsilon_1} R_p \cos\omega\left(t - \frac{x\sin\phi' + z\cos\phi'}{v_1}\right), \tag{13.4.7}$$

$$\mathfrak{H}_{zr} = \sqrt{\varepsilon_1} R_s \sin\phi' \cos\omega\left(t - \frac{x\sin\phi' + z\cos\phi'}{v_1}\right);$$

a megtört hullámban

$$\mathfrak{H}_{xd} = -\sqrt{\varepsilon_2} D_s \cos\chi \cos\omega\left(t - \frac{x\sin\chi + z\cos\chi}{v_2}\right),$$

$$\mathfrak{H}_{yd} = \sqrt{\varepsilon_2} D_p \cos\omega\left(t - \frac{x\sin\chi + z\cos\chi}{v_2}\right), \tag{13.4.8}$$

$$\mathfrak{H}_{zd} = \sqrt{\varepsilon_2} D_s \sin\chi \cos\omega\left(t - \frac{x\sin\chi + z\cos\chi}{v_2}\right).$$

Feladatunk az, hogy a beeső hullám amplitúdójának komponenseiből, E_p, E_s-ből és a beesés szögéből meghatározzuk a visszavert és megtört hullámok amplitúdóinak komponenseit, R_p, R_s, D_p, D_s-et, továbbá a visszaverődés és törés szögeit, úgyhogy a határfelületen, a $z = 0$ síkon, az említett határfeltételek ki legyenek elégítve.

Ezek a határfeltételek csak akkor elégíthetők ki minden időben és a határfelület minden helyén, ha az $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ komponenseiben szereplő argumentumok a $z = 0$ síkon minden t és x értéknél egyenlők egymással, vagyis

$$t - \frac{x\sin\phi}{v_1} = t - \frac{x\sin\phi'}{v_1} = t - \frac{x\sin\chi}{v_2},$$

ahonnan következik, hogy

$$\frac{\sin\phi}{v_1} = \frac{\sin\phi'}{v_1} \qquad \text{és} \qquad \frac{\sin\phi}{v_1} = \frac{\sin\chi}{v_2}.$$

Ez a két egyenlet tartalmazza a visszaverődés és törés törvényeit. Ugyanis az első egyenletből következik, hogy

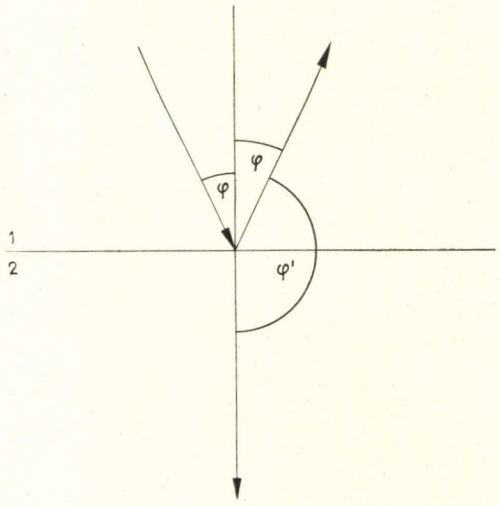
$$\sin \phi' = \sin \phi. \tag{13.4.9}$$

Mivel

$$\phi' \neq \phi,$$

adódik, hogy

$$\phi' = \pi - \phi. \tag{13.4.10}$$



190. ábra. A visszaverődés törvénye

Ez a visszaverődés törvénye, mely szerint a visszavert hullám haladási iránya az 1-ből a 2 közegbe mutató beesési merőlegessel $\pi - \phi$, vagyis a 2 közegből az 1 közegbe mutató beesési merőlegessel ϕ' szöget zár be, tehát ugyanakkorát, mint a beeső hullám.

A második egyenletből nyerjük

$$\frac{\sin \phi}{\sin \chi} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} = n_{21}. \tag{13.4.11}$$

Ez a törés törvénye, mely szerint a beesési és a törési szög szinuszainak hányadosa független ezektől a szögektől és csak a közegektől függ. Az n_{21} hányados a két közeg jellemző állandója, melyet a 2 közegnek az 1 közegre vonatkozó törésmutatójának nevezünk és az említett módon jelölünk.

A visszaverődés és a törés törvényén kívül a határfeltételekből még kifejezhetjük R_p, R_s, D_p, D_s-et E_p, E_s-sel, továbbá ϕ-vel és az ismertnek feltételezhető χ-vel,

$\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ tangenciális komponensei a határfelületen folytonosan mennek át, tehát

$$\mathfrak{E}_{xb} + \mathfrak{E}_{xr} = \mathfrak{E}_{xa} \quad \text{és} \quad \mathfrak{E}_{yb} + \mathfrak{E}_{yr} = \mathfrak{E}_{yd}, \tag{13.4.12}$$

$$\mathfrak{H}_{xb} + \mathfrak{H}_{xr} = \mathfrak{H}_{xd} \quad \text{és} \quad \mathfrak{H}_{yb} + \mathfrak{H}_{yr} = \mathfrak{H}_{yd}. \tag{13.4.13}$$

Helyettesítsük be ide a komponensek kifejezéseit, tekintetbe véve, hogy (mivel az argumentumok egyenlők) a $\cos\left(t - \dfrac{x\sin\phi + z\cos\phi}{v_1}\right)$ tényező mindenütt közös és hogy

$$\sin\phi' = \sin\phi, \quad \cos\phi' = \cos(\pi - \phi) = -\cos\phi.$$

Ekkor nyerjük

$$(E_p - R_p)\cos\phi = D_p\cos\chi, \tag{13.4.14}$$

$$E_s + R_s = D_s, \tag{13.4.15}$$

$$\sqrt{\varepsilon_1}(E_s - R_s)\cos\phi = D_s\sqrt{\varepsilon_2}\cos\chi, \tag{13.4.16}$$

$$(E_p + R_p)\sqrt{\varepsilon_1} = D_p\sqrt{\varepsilon_2}. \tag{13.4.17}$$

Osszuk el a (4.16) egyenletet $\sqrt{\varepsilon_2}\cos\chi$-vel és vonjuk ki belőle a (4.15) egyenletet, ekkor nyerjük

$$(E_s - R_s)\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\phi}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\chi} - (E_s + R_s) = 0.$$

Rendezve

$$E_s\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\phi}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\chi} - 1\right) = R_s\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\phi}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\chi} + 1\right). \tag{13.4.18}$$

Ezután osszuk a (4.16) egyenletet $\sqrt{\varepsilon_1}\cos\phi$-vel és adjuk hozzá a (4.15) egyenlethez, ekkor a következő egyenletet kapjuk

$$2E_s = D_s\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\chi}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\phi} + 1\right). \tag{13.4.19}$$

Osszuk el továbbá a (4.14) egyenletet $\cos\chi$-vel, a (4.17)-et $\sqrt{\varepsilon_2}$-vel és az így nyert első egyenletből vonjuk ki a másodikat. Így nyerjük

$$(E_p - R_p)\frac{\cos\phi}{\cos\chi} - (E_p + R_p)\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} = 0.$$

Rendezve

$$E_p\left(\frac{\cos\phi}{\cos\chi} - \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right) = R_p\left(\frac{\cos\phi}{\cos\chi} + \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right). \tag{13.4.20}$$

Végül osszuk (4.14)-et $\cos\phi$-vel, (4.17)-et $\sqrt{\varepsilon_1}$-gyel és a nyert egyenleteket adjuk össze. Ekkor nyerjük

$$2E_P = D_P\left(\frac{\cos\chi}{\cos\phi} + \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right). \tag{13.4.21}$$

Ha figyelembe vesszük a törési törvényt, mely szerint

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{\sin\phi}{\sin\chi} = n_{21} = n,$$

akkor (4.18) így alakul

$$E_s\frac{\sin\chi\cos\phi - \sin\phi\cos\chi}{\sin\phi\cos\chi} = R_s\frac{\sin\chi\cos\phi + \sin\phi\cos\chi}{\sin\phi\cos\chi},$$

$$R_s = -E_s\frac{\sin(\phi-\chi)}{\sin(\phi+\chi)}. \tag{13.4.22}$$

(4.20) pedig a következőképpen alakul

$$E_p\frac{\cos\phi\sin\phi - \cos\chi\sin\chi}{\cos\chi\sin\phi} = R_p\frac{\cos\phi\sin\phi + \cos\chi\sin\chi}{\cos\chi\sin\phi}.$$

Fennáll, hogy

$$\cos\phi\ \sin\phi - \cos\chi\ \sin\chi = \cos(\phi+\chi)\sin(\phi-\chi),$$
$$\cos\phi\ \sin\phi + \cos\chi\ \sin\chi = \cos(\phi-\chi)\sin(\phi+\chi),$$

tehát

$$R_p = E_p\frac{\operatorname{tg}(\phi-\chi)}{\operatorname{tg}(\phi+\chi)}. \tag{13.4.23}$$

(4.19) a következőképpen alakul

$$2E_s = D_s\frac{\sin\phi\cos\chi + \sin\chi\cos\phi}{\sin\chi\cos\phi},$$

$$D_s = E_s\frac{2\sin\chi\cos\phi}{\sin(\phi+\chi)}. \tag{13.4.24}$$

(4.21) pedig a következő lesz

$$2E_p = D_p\frac{\cos\chi\sin\chi + \cos\phi\sin\phi}{\cos\phi\sin\chi},$$

$$D_p = E_p\frac{2\cos\phi\sin\chi}{\cos(\phi-\chi)\sin(\phi+\chi)}. \tag{13.4.25}$$

A (4.18)–(4.21), ill. kifejtett alakban a (4.22)–(4.25) formulák a *Fresnel*-féle formulák. Ezeknek segítségével a visszavert és megtört hullám amplitúdóinak komponenseit, vagyis amplitúdóit a beeső hullám amplitúdóinak komponenseiből, vagyis amplitúdóiból és a beesés és törés szögéből meghatározhatjuk. A χ törési szöget ismertnek tételezhetjük fel, mert χ ϕ-vel és n-nel a törés törvényéből meghatározható.

Merőleges beesés esetére a (4.22)–(4.25) *Fresnel*-féle formulák nem érvényesek. A merőleges beesés esetére érvényes *Fresnel*-féle formulák kifejtett alakját azoknak nem kifejtett alakjából, vagyis a (4.18)–(4.21) egyenletekből vezethetjük le. Ha ezekbe $\phi = 0$, $\chi = 0$-t írunk és $\sqrt{\varepsilon_2}\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} = n$-t helyettesítünk, nyerjük

$$R_s = -E_s \frac{n-1}{n+1}, \qquad D_s = E_s \frac{2}{n+1},$$

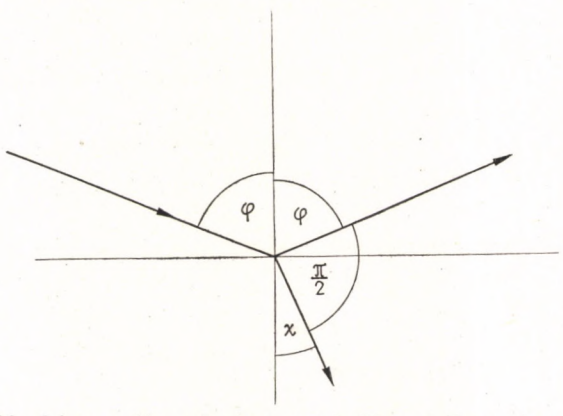
$$R_p = E_p \frac{n-1}{n+1}, \qquad D_p = E_p \frac{2}{n+1}. \tag{13.4.26}$$

Foglalkozzunk a visszavert hullám amplitúdójával abban az esetben, ha $n \neq 1$ és $\phi \neq 0$, vagyis ha a beesés nem merőleges. Ekkor $\sin(\phi + \chi) = 0$ és ha a törésmutató 1-től különbözik, akkor $\phi - \chi$ sem zérus és $\sin(\phi - \chi) \neq 0$. Ha tehát E_s sem zérus, akkor R_s (4.22) szerint szintén nem zérus.

Ugyanezen feltételek mellett $\operatorname{tg}(\phi - \chi)$ sem lehet zérus, de $\operatorname{tg}(\phi + \chi)$ lehet végtelen, ebben az esetben pedig (4.23) szerint $R_p = 0$. Tehát

$$R_p = 0, \quad \text{ha} \quad \phi + \chi = \pi/2. \tag{13.4.27}$$

A 191. ábrából látható, hogy ekkor a visszavert hullám merőleges a megtört hullámra. Ebben az esetben tehát bármekkora is E_p és E_s, a visszavert hullám lineárisan polározott, ugyanis $R_s \neq 0$, $R_p = 0$. A *polározási sík* az a sík, amelyre



191. ábra. Lineárisan polározott visszavert hullám esetén a visszavert hullám merőleges a megtört hullámra

az elektromos vektor merőleges, a mágneses vektor pedig benne fekszik, ez a mi esetünkben a beesési sík.

A fenti törvényt, mely szerint a reflektált sugár lineárisan poláros, ha

$$\phi + \chi = \frac{\pi}{2},$$

Brewster-féle törvénynek nevezzük. Ezt más alakban is kifejezhetjük. Ugyanis, ha $\phi + \chi = \pi/2$, akkor

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \phi,$$

tehát

$$\sin \chi = \cos \phi,$$

amivel a törési törvényből következik, hogy

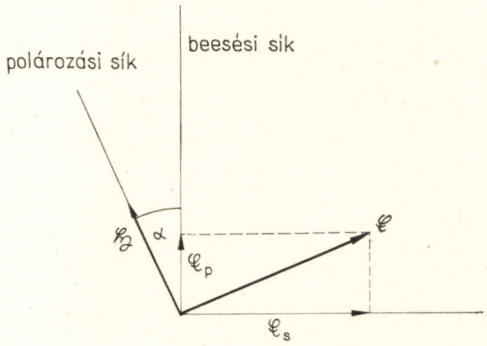
$$\frac{\sin \phi}{\sin \chi} = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \operatorname{tg} \phi = n. \tag{13.4.28}$$

Annak a beesési szögnek a tangense tehát, melynél a visszavert hullám lineárisan poláros, egyenlő a törésmutatóval. BREWSTER törvényét ebben az alakban szokás megadni. Azt a szöget, melyre ez fennáll, nevezzük a *polározás szögének*.

A visszaverődés jelensége segítségével lehet tehát lineárisan poláros hullámot előállítani. Így pl. elő lehet állítani ilyen poláros hullámokat, mint ismeretes, *Nicol*-féle prizmával.

Minthogy elő tudunk állítani lineárisan poláros hullámokat, vizsgálhatjuk ezek reflexióját. A beeső lineárisan poláros hullám polározási síkjának hajlását a beesési síkhoz a beeső hullám azimutjának nevezzük. Ha ez α, akkor, mint a 192. ábrából látható,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_p}{E_s}. \tag{13.4.29}$$



192. ábra. Lineárisan poláros hullám reflexiója

A visszavert hullám azimutjára teljesen hasonlóan kapjuk

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{R_p}{R_s}. \tag{13.4.30}$$

A (4.22) és (4.23) alatti *Fresnel*-formulák szerint

$$\frac{R_p}{R_s} = -\frac{E_p}{E_s} \frac{\operatorname{tg}(\phi - \chi)}{\operatorname{tg}(\phi + \chi)} \frac{\sin(\phi + \chi)}{\sin(\phi - \chi)} = -\frac{E_p}{E_s} \frac{\cos(\phi + \chi)}{\cos(\phi - \chi)},$$

vagyis

$$\operatorname{tg} \psi = -\operatorname{tg} \alpha \frac{\cos(\phi + \chi)}{\cos(\phi - \chi)}. \tag{13.4.31}$$

Az azimutokat pl. *Nicol*-prizmával meghatározhatjuk és ennek a formulának segítségével igazolhatjuk a *Fresnel*-féle formulákat.

5. §. A teljes visszaverődés

Ha a 2 közeg törésmutatója kisebb az 1 közeg törésmutatójánál, akkor vannak olyan beesési szögek, amelyekhez nem tartozik valós törési szög. Ekkor ugyanis $n < 1$ és így a törési törvényből, melyet a következő alakban írunk

$$\sin \chi = \frac{\sin \phi}{n}, \tag{13.5.1}$$

következik, hogy mindazokra a ϕ beesési szögekre, melyekre fennáll, hogy

$$\sin \phi > n.$$

De ekkor

$$\sin \chi > 1,$$

vagyis χ nem valós, amiből már az elemekben arra következtettünk, hogy megtört hullám nincs. A *Fresnel*-féle formulák ekkor is érvényesek, csak $\sin \chi$ helyett mindenhol $\dfrac{\sin \phi}{n}$ írandó.

$$\sin \chi = \frac{\sin \phi}{n}. \tag{13.5.2}$$

$$\cos \chi = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \phi}{n^2}} = i \sqrt{\frac{\sin^2 \phi}{n^2} - 1} = \frac{i}{n} \sqrt{\sin^2 \phi - n^2}. \tag{13.5.3}$$

Ha ezeket beírjuk a *Fresnel*-féle formulákba, akkor a visszavert hullám számára komplex amplitúdókat nyerünk. Vizsgáljuk meg, hogy milyen fizikai jelentőséget tulajdoníthatunk a komplex amplitúdóknak. Ha u az amplitúdó, akkor a hullá-

mot az

$$ue^{i\omega\left(t-\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{v}\right)}$$

komplex periodikus függvény valós része állítja elő. Ha az u amplitúdó komplex szám,

$$u = |\mathbf{u}| e^{i\varepsilon},$$

akkor

$$ue^{i\omega\left(t-\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{v}\right)} = |\mathbf{u}| e^{i\left[\omega\left(t-\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{v}\right)+\varepsilon\right]}.$$

A komplex amplitúdó tehát a fázis megváltozását eredményezi. A komplex amplitúdó abszolút értéke lesz a hullám amplitúdója, a komplex amplitúdó irányszöge, ε pedig a fázis megváltozása.

Induljunk ki a (4.19) *Fresnel*-féle formulából, mely szerint

$$E_p\left(\frac{\cos\phi}{\cos\chi}-\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right) = R_p\left(\frac{\cos\phi}{\cos\chi}+\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right),$$

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{\sin\phi}{\sin\chi},$$

$$E_p\,\frac{\sin\phi\cos\phi-\sin\chi\cos\chi}{\sin\phi\cos\chi} = R_p\,\frac{\sin\phi\cos\phi+\sin\chi\cos\chi}{\sin\phi\cos\chi},$$

$$R_p = E_p\,\frac{\sin\phi\cos\phi-\sin\chi\cos\chi}{\sin\phi\cos\phi+\sin\chi\cos\chi}.$$

(5.2) és (5.3)-ból $\sin\chi$ és $\cos\chi$ kifejezéseit behelyettesítve nyerjük

$$R_p = E_p\,\frac{\sin\phi\cos\phi-\sin\phi\,\frac{i}{n^2}\sqrt{\sin^2\phi-n^2}}{\sin\phi\cos\phi+\sin\phi\,\frac{i}{n^2}\sqrt{\sin^2\phi-n^2}} = E_p\,\frac{n^2\cos\phi-i\sqrt{\sin^2\phi-n^2}}{n^2\cos\phi+i\sqrt{\sin^2\phi-n^2}}. \tag{13.5.4}$$

A jobboldalon E_p szorzója a következő alakú komplex kifejezés

$$\frac{\rho e^{-i\delta_p}}{\rho e^{+i\delta_p}} = e^{-2i\delta_p}, \tag{13.5.5}$$

ahol ρ a számláló, ill. nevező abszolút értéke, $\rho=\sqrt{n^4\cos^2\phi+\sin^2\phi-n^2}$, $-\delta_p$, ill. $+\delta_p$ pedig a komplex számláló, ill. nevező irányszöge, melynek tangense, mint ismeretes, a komplex szám imaginárius és valós részének hányadosa, tehát

$$\operatorname{tg}\delta_p = \frac{\sqrt{\sin^2\phi-n^2}}{n^2\cos\phi}.$$

Vagyis

$$R_p = E_p e^{-2i\delta_p}. \tag{13.5.6}$$

A (4.21) *Fresnel*-féle formulából pedig nyerjük

$$R_s = -E_s \frac{\sin(\phi - \chi)}{\sin(\phi + \chi)} = E_s \frac{\sin\chi\cos\phi - \cos\chi\sin\phi}{\sin\chi\cos\phi + \cos\chi\sin\phi}.$$

$\sin\chi$ és $\cos\phi$ kifejezéseit (5.2) és (5.3)-ból behelyettesítve következik, hogy

$$R_s = E_s \frac{\frac{1}{n}\sin\phi\cos\phi - \frac{i}{n}\sin\phi\sqrt{\sin^2\phi - n^2}}{\frac{1}{n}\sin\phi\cos\phi + \frac{i}{n}\sin\phi\sqrt{\sin^2\phi - n^2}} = E_s \frac{\cos\phi - i\sqrt{\sin^2\phi - n^2}}{\cos\phi + i\sqrt{\sin^2\phi - n^2}}.$$

Teljesen hasonlóan, mint R_p-re, azt kapjuk, hogy

$$R_s = E_s e^{-2i\delta_s}, \tag{13.5.7}$$

ahol

$$\operatorname{tg}\delta_s = \frac{\sqrt{\sin^2\phi - n^2}}{\cos\phi}.$$

(5.6)-ból és (5.7)-ből először is az következik, hogy

$$|R_p| = E_p \quad \text{és} \quad |R_s| = E_s. \tag{13.5.8}$$

Tehát a visszavert hullám amplitúdóinak komponensei, $|R_p|$ és $|R_s|$ megegyeznek E_p, ill. E_s-el, vagyis a visszavert hullám amplitúdója megegyezik a beeső hulláméval, tehát megtört hullám nincs.

Ha tehát $n < 1$ és a beesési szögre, ϕ-re fennáll, hogy $\sin\phi > n$, akkor a beeső hullám nem törik meg, hanem változatlan amplitúdóval visszaverődik. Ezt teljes visszaverődésnek nevezzük, a

$$\phi = \arcsin n \tag{13.5.9}$$

szöget pedig a *visszaverődés határszögé*nek hívjuk; ennél nagyobb szögekre teljes visszaverődés következik be.

Ezek után foglalkozzunk a visszavert hullám amplitúdókomponenseinek fázismegváltozásával, $2\delta_p$-, ill. $2\delta_s$-sel, melyek, mint a $\operatorname{tg}\delta_p$ és $\operatorname{tg}\delta_s$-re levezetett formulákból látható, nem egyenlők egymással. Tehát a visszavert hullám két komponense egymáshoz képest fázisban eltolódik. Ez viszont azt jelenti, hogy ha a beeső hullám lineárisan poláros, vagyis ha a beeső hullámban a hullámnormálisra merőleges síkban $\mathfrak{E}$ végpontja egy egyenesen mozog, a visszavert hullám általában elliptikusan poláros, vagyis $\mathfrak{E}$ végpontja a hullámnormálisra merőleges síkban, általában egy ellipszisen mozog.

A két komponens fáziskülönbsége a következő

$$\delta = 2(\delta_p - \delta_s). \tag{13.5.10}$$

δ-t a következő összefüggés alapján határozhatjuk meg

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}=\operatorname{tg}(\delta_p-\delta_s)=\frac{\operatorname{tg}\delta_p-\operatorname{tg}\delta_s}{1+\operatorname{tg}\delta_p\operatorname{tg}\delta_s}=\frac{\dfrac{\sqrt{\sin^2\phi-n^2}}{n^2\cos\phi}-\dfrac{\sqrt{\sin^2\phi-n^2}}{\cos\phi}}{1+\dfrac{\sin^2\phi-n^2}{n^2\cos^2\phi}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}=\frac{\sqrt{\sin^2\phi-n^2}\left(\dfrac{1}{n^2}-1\right)}{\cos\phi\left\{1+\dfrac{\sin^2\phi-n^2}{n^2\cos^2\phi}\right\}}.$$

$n^2\cos^2\phi$-vel számlálóban és nevezőben szorozva, adódik

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}=\frac{(1-n^2)\cos\phi\sqrt{\sin^2\phi-n^2}}{n^2\cos^2\phi+\sin^2\phi-n^2}.$$

A nevező átalakítható

$$n^2\cos^2\phi+\sin^2\phi-n^2=n^2(1-\sin^2\phi)+\sin^2\phi-n^2=$$
$$=-n^2\sin^2\phi+\sin^2\phi=(1-n^2)\sin^2\phi.$$

Tehát

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}=\frac{\cos\phi\sqrt{\sin^2-n^2}}{\sin^2\phi}. \qquad (13.5.11)$$

$\delta=0$, vagyis a két komponens közti fáziskülönbség eltűnik, ha $\phi=\pi/2$, ekkor a beesés tangenciális, továbbá δ akkor is zérus, ha a beesés a teljes visszaverődés határszögénél történik, mert ekkor $\sin\phi=n$.

6. §. Síkhullámok összetétele

Ha két síkhullámot teszünk össze, amelyek terjedési iránya és frekvenciája megegyezik, de az elektromos vektor a két hullámban egymásra merőleges, akkor az eredő hullámban – mint tudjuk – az elektromos vektor végpontja az egyes hullámsíkokon általában ellipszist ír le.

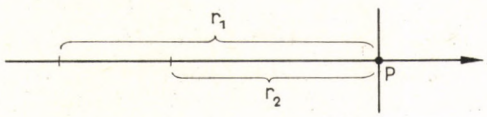
Foglalkozzunk két oly hullám összetételével, melyek terjedési iránya és frekvenciája egyenlő és melyekben az elektromos vektor rezgése is ugyanabban az egyenesben történik. Az eredő hullám ugyanolyan frekvenciájú, mint az alkotó hullámok. Amplitúdója az alkotó hullámok amplitúdójától és fáziskülönbségétől függ. Az előálló jelenségek interferenciajelenségek, melyek karakterisztikusak a hullámzásra. Az interferenciajelenségekből következtethetünk a hullámzás jelenlétére és e jelenségekből a hullámhosszúságot is meghatározhatjuk.

Találkozzék a két hullám r_1, ill. r_2 út befutása után valamely P pontban. Az $\mathfrak{E}$ vagy a $\mathfrak{H}$ vektor komponenseit a két hullámban a P ponton átmenő hullámsíkban

a következő függvények állítják elő

$$s_1 = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) = A_1 \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \delta_1 \right), \tag{13.6.1}$$

$$s_2 = A_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right) = A_2 \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \delta_2 \right). \tag{13.6.2}$$



193. ábra. Két hullám interferenciája a P pontban

A két hullám között $2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda}$ fáziskülönbség van. A két hullám összetétele a következő s eredőt szolgáltatja

$$s = s_1 + s_2 = A_1 \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \delta_1 \right) + A_2 \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \delta_2 \right) =$$

$$= A_1 \sin \frac{2\pi t}{T} \cos \delta_1 - A_1 \cos \frac{2\pi t}{T} \sin \delta_1 + A_2 \sin \frac{2\pi t}{T} \cos \delta_2 - A_2 \cos \frac{2\pi t}{T} \sin \delta_2 =$$

$$= \sin \frac{2\pi}{T} t (A_1 \cos \delta_1 + A_2 \cos \delta_2) - \cos \frac{2\pi}{T} t (A_1 \sin \delta_1 + A_2 \sin \delta_2).$$

Vezessük be a következő jelöléseket

$$A_1 \cos \delta_1 + A_2 \cos \delta_2 = A \cos \delta, \tag{13.6.3}$$

$$A_1 \sin \delta_1 + A_2 \sin \delta_2 = A \sin \delta. \tag{13.6.4}$$

Ezekkel a jelölésekkel nyerjük, hogy

$$s = A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \delta \right). \tag{13.6.5}$$

Az eredő hullám tehát ismét egyszerű szinuszhullám A amplitúdóval és δ fázisállandóval.

Az amplitúdó négyzetét a hullám intenzitásának nevezzük. Az alkotó hullámok intenzitása tehát

$$I_1 = A_1^2, \quad I_2 = A_2^2.$$

Az eredő hullám intenzitását a (6.3) és (6.4) egyenletekből négyzetreemeléssel nyerjük

$$I = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos (\delta_1 - \delta_2).$$

Innen látható, hogy az eredő hullám intenzitása nem egyenlő az alkotó hullámok intenzitásainak összegével, hanem ezek összegéhez még egy tag járul, mely a fáziskülönbségtől függ és amely pozitív és negatív egyaránt lehet.

Ha az alkotó hullámok intenzitása egyenlő egymással, vagyis ha $A_1^2 = A_2^2$, akkor

$$A^2 = 2A_1^2[1 + \cos(\delta_1 - \delta_2)].$$

Ha

$$\delta_1 - \delta_2 = 2n\pi,$$

ahol n egész szám, akkor

$$\cos(\delta_1 - \delta_2) = 1,$$

tehát

$$A^2 = 4A_1^2.$$

Ha pedig

$$\delta_1 - \delta_2 = (2n + 1)\pi,$$

akkor

$$\cos(\delta_1 - \delta_2) = -1,$$

tehát

$$A^2 = 0.$$

Ha tehát a két hullám intenzitása megegyezik és fáziskülönbségük 0, 2π, 4π, ..., akkor az eredő hullám intenzitása maximális, éspedig a két alkotó hullám intenzitása összegének kétszeresével egyenlő, ha pedig a fáziskülönbség π, 3π, 5π, ..., akkor az eredő hullám intenzitása zérus.

Ha a két hullám fáziskülönbsége csupán az útkülönbségből ered, akkor az előbbi feltételek így is kifejezhetők

$$\delta_1 - \delta_2 = 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} = 2n\pi,$$

$$\delta_1 - \delta_2 = 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} = (2n + 1)\pi.$$

Tehát az intenzitás maximális, ha $r_1 - r_2 = n\lambda = 2n\frac{\lambda}{2}$; az intenzitás minimális, ha $r_1 - r_2 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$. Vagyis az intenzitás maximális, ha az útkülönbség $\lambda/2$ páros számú sokszorosa és minimális, ha páratlan számú sokszorosa.

7. §. Állóhullámok

Foglalkozzunk még két ellentétes irányban haladó egyenlő amplitúdójú és frekvenciájú hullám összetételével. Ha a két hullám a találkozásig egyenlő r utat tett meg, akkor

$$s_1 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right),$$

$$s_2 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{r}{\lambda} \right),$$

$$s = s_1 + s_2 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) + A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{r}{\lambda} \right) =$$

$$= 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} r \sin \frac{2\pi}{T} t. \qquad (13.7.1)$$

s tehát olyan hullám, melynek amplitúdója $2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} r$. Az amplitúdó tehát a hely periodikus függvénye, az eredő pedig állóhullám. Az amplitúdó ott zérus, ahol

$$\frac{2\pi}{\lambda} r = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \qquad (n \text{ egész szám})$$

tehát a következő síkok

$$r = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}.$$

Ezeket a síkokat csomósíkoknak nevezzük. A síkok a következők:

$$r = \frac{\lambda}{4}, \quad \frac{3\lambda}{4}, \quad \frac{5\lambda}{4}, \ldots,$$

egymástól való távolságuk tehát $\frac{\lambda}{2}$. Az állóhullámok csomósikjainak segítségével mutatta ki H. HERTZ először az elektromágneses tér hullámtermészetét.

8. §. A hullámcsoport. Csoportsebesség

Egyszerű periodikus hullámban $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ komponenseit a következő komplex alakban fejezhetjük ki, ha a koordinátarendszer x-tengelyét a hullámnormális irányába helyezzük

$$h = Ae^{i(\omega t - kx)}, \qquad (13.8.1)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \qquad (13.8.2)$$

A hullám sebessége, v, az

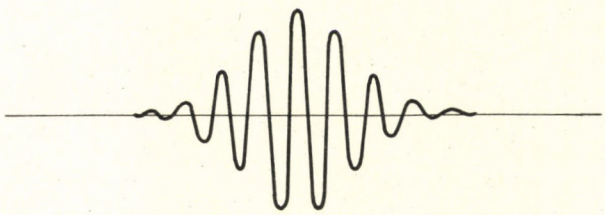
$$\omega t - kx = \text{konst.}$$

egyenletből t szerinti differenciálással a következőképpen adódik

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}. \tag{13.8.3}$$

Az eképpen előállított egyszerű periodikus hullám (szinuszhullám) mindig végtelen, ami azt jelenti, hogy az x-tengely mentén minden időben mindenütt van elektromágneses tér (a pillanatnyi zérus helyektől eltekintve).

Ha olyan hullámot akarunk előállítani, melynek amplitúdója csak egy véges darabon különbözik zérustól, akkor különböző ω-jú és k-jú hullámokat kell szuperponálni. Ezek interferencia útján egyes helyeken erősítik egymást, ezeken a helyeken mérhető amplitúdót kapunk, más helyeken pedig gyengítik egymást, itt nem kapunk mérhető amplitúdót. Minél rövidebb hullámot akarunk nyerni, ω és k annál nagyobb intervallumához tartozó hullámokat kell szuperponálni.



194. ábra. Hullámcsoport sematikus képe

A szuperpozíció eredményeképpen előálló ún. hullámcsoport kifejezése a következő

$$H = \int_{k_0-\varepsilon}^{k_0+\varepsilon} A(k) e^{i[\omega(k)t - kx]}\, dk. \tag{13.8.4}$$

Ha a $(k_0 - \varepsilon, k_0 + \varepsilon)$ intervallum elég kicsi, akkor az eredmény felfogható, mint egy az eredetitől kissé különböző hullám, melynek amplitúdója változik.

A kitevő, a szögletes zárójelben álló kifejezés, a következő alakban írható

$$\omega t - kx = \omega_0 t - k_0 x + (\omega - \omega_0)t - (k - k_0)x.$$

Ezt beírva a hullámcsoport kifejezésébe, nyerjük

$$H = Ce^{i(\omega_0 t - k_0 x)}. \tag{13.8.5}$$

ahol

$$C = \int_{k_0-\varepsilon}^{k_0+\varepsilon} A(k)\, e^{i[(\omega-\omega_0)t - (k-k_0)x]}\, dk. \tag{13.8.6}$$

A hullámcsoport sebességét megadja annak a helynek (az x-tengely azon pontjának) sebessége, amelyben C konstans. C ott konstans, ahol

$$(\omega - \omega_0)t - (k - k_0)x = \text{konst.}$$

Innen a hullámcsoport sebessége, vagyis a *csoportsebesség*

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega - \omega_0}{k - k_0} = \frac{d\omega}{dk}, \tag{13.8.7}$$

feltéve, hogy $\omega - \omega_0$ és $k - k_0$ elegendően kicsi. A differenciálhányados a $k = k_0$ értékre vonatkozik.

Előbb azt találtuk, hogy

$$v = \frac{\omega}{k},$$

ahonnan

$$k = \frac{\omega}{v}.$$

Ezzel nyerjük, hogy

$$\frac{1}{u} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{v}\right). \tag{13.8.8}$$

Ez a csoportsebesség kifejezésének egyik alakja.

A csoportsebesség még más alakban is előállítható. A $v = \omega/k$ egyenletből nyerjük, hogy

$$\omega = vk.$$

Ennek felhasználásával pedig

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = v + k\frac{dv}{dk},$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{2\pi}{k^2} = -\frac{1}{2\pi}\lambda^2,$$

$$\frac{dv}{dk} = \frac{dv}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk} = -\frac{1}{2\pi}\lambda^2\frac{dv}{d\lambda}.$$

Tehát

$$u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}.$$

Ez az egyenlet adja meg az összefüggést a v fázissebesség és az u csoportsebesség között. u nagyobb és kisebb is lehet, mint v, aszerint hogy $\frac{dv}{d\lambda} < 0$, vagy $\frac{dv}{d\lambda} > 0$. A csoportsebesség nagyon fontos fogalom és a hullámcsoport terjedési sebességét jelenti, míg a fázissebesség a csoportot alkotó egyszerű szinuszhullámok sebessége.

9. §. Gömbhullámok

Eddig síkhullámokkal foglalkoztunk, anélkül, hogy rátértünk volna arra, hogy ezek a hullámok honnan származnak, honnan indulnak ki. A valóságban a hullámok relatíve kicsi rendszerekből indulnak, így pl. egy rádióállomás adóantennáiból, melyek a hullámok terjedési távolságához képest kicsinek tekinthetők, vagy pedig egy gázszerű fényforrás atomjaiból vagy molekuláiból. Tehát csak a hullámok keletkezési helyétől nagy távolságban lehet síkhullámokról beszélni. H. HERTZ a tér egyenleteinek olyan megoldását adta meg, mely helyesen írja le a hullámokat kiindulási helyük közelében, vagyis a hullámforrás környezetében és attól nagy távolságban is. Ezeket a hullámokat, melyekkel itt részletesen fogunk foglalkozni, nevezzük *gömbhullámok*nak.

Az elektrodinamikának az üres térben érvényes alapegyenleteiből indulunk ki, melyek a következők

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \tag{13.9.1}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \tag{13.9.2}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0, \tag{13.9.3}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \tag{13.9.4}$$

A (9.2) és (9.4) egyenleteket kielégítik $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ következő kifejezései

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2}, \\ \mathfrak{H} &= \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{13.9.5}$$

ahol $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(x, y, z, t)$ egy tetszőleges vektor.

Rögtön láthatjuk, hogy (9.5) a (9.4) egyenletet kielégíti, mert minden vektor rotációjának divergenciája zérus, tehát

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \operatorname{div} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = 0.$$

A (9.2) egyenlet szintén érvényes, mert ha figyelembe vesszük, hogy minden függvény gradiensének rotációja zérus, nyerjük

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{Z} - \frac{1}{c^2} \operatorname{rot} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}.$$

Tehát, tekintettel a deriválások sorrendjének felcserélhetőségére, (9.2) is ki van elégítve.

Ezek után helyettesítsük $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ (9.5) kifejezéseit a (9.1) egyenletbe. Ekkor nyerjük

$$\frac{1}{c}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2}\right),$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{Z} - \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{Z} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2}\right) = 0\,,$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{Z} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{Z} - \Delta\mathfrak{Z}\,,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\Delta\mathfrak{Z} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2}\right) = 0\,.$$

Ez az egyenlet teljesül, ha a zárójelben levő kifejezés konstans. Ha ezt 0-nak választjuk, nyerjük

$$\Delta\mathfrak{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} = 0\,. \tag{13.9.6}$$

Tehát $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ kielégíti a (9.1) egyenletet, ha $\mathfrak{Z}$ kielégíti a hullámegyenletet. Ebben az esetben $\mathfrak{E}$-nek (9.5) kifejezése egyszerűsödik, ugyanis felhasználva a $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{Z} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{Z} - \Delta\mathfrak{Z}$ egyenletet, kapjuk

$$\mathfrak{E} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{Z} + \Delta\mathfrak{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{Z}\,. \tag{13.9.7}$$

Ekkor egyúttal érvényes a (9.3) egyenlet is. Ugyanis

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{E} = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{Z} = 0.$$

Tehát ha $\mathfrak{Z}$ kielégíti a hullámegyenletet, akkor $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ (9.5) kifejezései mind a négy alapegyenletet kielégítik. $\mathfrak{Z}$-t *Hertz-féle vektor*nak, a (9.5) megoldást pedig *Hertz*-féle megoldásnak nevezzük.

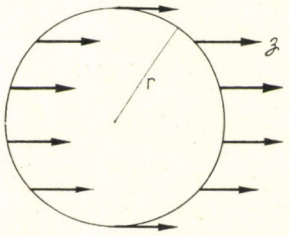
A következő feladat $\mathfrak{Z}$ meghatározása a hullámegyenletből. Most ennek nem egy síkhullámot előállító megoldását keressük, ugyanis ilyenkor a hullámok kiindulási pontja nem lenne kitüntetve, most egy gömbhullám-megoldást keresünk, melynél az egyenlő fázisú felületek gömbfelületek. Válasszuk $\mathfrak{Z}$-t a következő alakúnak

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathbf{p}\left(t - \dfrac{r}{c}\right)}{r}\,, \tag{13.9.8}$$

ahol $\mathbf{p}$ egyelőre tetszőleges függvénye a $t - \dfrac{r}{c}$ argumentumnak. r jelenti a $P(x, y, z)$ pontnak egy fix ponttól való távolságát, melyet a koordinátarendszer kezdőpontjául választunk, tehát

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$\mathfrak{Z}$ tehát mindenütt véges (ha $\mathbf{p}$ véges, amit feltételezünk), kivéve az $r = 0$ kezdőpontot, ahol ez a megoldás nem alkalmazható. Bizonyos megadott t időpillanatban $\mathfrak{Z}$ csak r-től függ, tehát a kezdőpont körül írt gömbön állandó nagyságú és irányú. $\mathbf{p}$ egyenlő értékei az időben c sebességgel haladnak kifelé a rádiusz mentén, ami onnan következik, hogy $\mathbf{p}$ a $t - \frac{r}{c}$ argumentum függvénye, $\mathfrak{Z}$ pedig r-rel fordítva arányos.



195. ábra. *Hertz*-féle $\mathfrak{Z}$ vektor gömbhullámok esetén

Ezen az alapon azt mondhatjuk, hogy ez a megoldás egy pontból a rádiusz mentén terjedő gömbhullámot állít elő. Azt a pontot, melyből a hullám kiindul, *hullámforrás*nak nevezzük.

Ezek után kimutatjuk, hogy a (9.8) vektor kielégíti a hullámegyenletet. Ha az argumentum szerinti deriválást vesszővel jelöljük, nyerjük

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathbf{p}}{r}\right) = \mathbf{p}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - \frac{x}{cr^2}\mathbf{p}',$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\mathbf{p}}{r}\right) = \mathbf{p}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2} + \mathbf{p}'\left(\frac{x^2}{cr^4} - \frac{1}{cr^2} + \frac{2x^2}{cr^4}\right) + \frac{x^2}{c^2r^3}\mathbf{p}''.$$

Összevonás után kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\mathbf{p}}{r}\right) = \mathbf{p}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2} + \mathbf{p}'\frac{3x^2 - r^2}{cr^4} + \mathbf{p}''\frac{x^2}{c^2r^3}.$$

Hasonlóan

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\mathbf{p}}{r}\right) = \mathbf{p}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2} + \mathbf{p}'\frac{3y^2 - r^2}{cr^4} + \mathbf{p}''\frac{y^2}{c^2r^3},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\mathbf{p}}{r}\right) = \mathbf{p}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2} + \mathbf{p}'\frac{3z^2 - r^2}{cr^4} + \mathbf{p}''\frac{z^2}{c^2r^3}.$$

Ezeket az egyenleteket összeadva nyerjük

$$\Delta\left(\frac{\mathbf{p}}{r}\right) = \mathbf{p}\Delta\frac{1}{r} + \mathbf{p}'\frac{3r^2 - 3r^2}{cr^4} + \frac{r^2}{c^2r^3}\mathbf{p}''$$

$$\Delta\left(\frac{\mathbf{p}}{r}\right) = \frac{1}{c^2r}\mathbf{p}''.$$

Mivel pedig

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathbf{p}}{r}\right) = \frac{1}{r}\mathbf{p}'',$$

fennáll, hogy

$$\Delta\left(\frac{\mathbf{p}}{r}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathbf{p}}{r}\right).$$

Vagyis a $\mathfrak{Z}$ vektor kielégíti a hullámegyenletet.

Fejezzük most ki az elektromos és a mágneses térintenzitást a (9.5) formulák alapján

$$\mathfrak{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{\mathbf{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\mathbf{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}, \tag{13.9.9}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\mathbf{p}'\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \tag{13.9.10}$$

Foglalkozzunk először $\mathfrak{H}$-val. Itt szükségünk van az $\frac{1}{r}$ skalárral szorzott $\mathbf{p}'$ vektor rotációjára.

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{r}\mathbf{p}'\right) = \frac{1}{r}\operatorname{rot}\mathbf{p}' + \left[\operatorname{grad}\frac{1}{r}, \mathbf{p}'\right]. \tag{13.9.11}$$

Ennek az egyenletnek helyességéről közvetlenül, nagyon egyszerűen lehet meggyőződni. Ugyanis pl. az x komponensre nyerjük

$$\operatorname{rot}_x\left(\frac{1}{r}\mathbf{p}'\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}p_z'\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}p_y'\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial p_z'}{\partial y} - \frac{\partial p_y'}{\partial z}\right) + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}p_z' - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}p_y' = \frac{1}{r}\operatorname{rot}_x\mathbf{p}' + \left[\operatorname{grad}\frac{1}{r}, \mathbf{p}'\right]_x.$$

Az (x, y, z) vektort $\mathbf{r}$-rel jelölve, kapjuk

$$\operatorname{grad}\frac{1}{r} = \left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}, \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}, \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) = \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Tehát

$$\left[\operatorname{grad}\frac{1}{r}, \mathbf{p}'\right] = \frac{1}{r^3}[\mathbf{p}', \mathbf{r}].$$

A (9.11) kifejezés első tagja, rot $\mathbf{p}'$, pedig a következőképpen alakítható át

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{p}' = \frac{\partial p_z'}{\partial y} - \frac{\partial p_y'}{\partial z} = -\frac{y}{rc} p_z'' + \frac{z}{rc} p_y'' = \frac{1}{rc}(p_y'' z - p_z'' y),$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{p}' = \frac{1}{rc}[\mathbf{p}'', \mathbf{r}].$$

Mindezek figyelembevételével az elektromos és mágneses térintenzitást a következő formulák adják meg

$$\mathfrak{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{\mathbf{p}}{r} - \frac{1}{c^2}\frac{\mathbf{p}''}{r}, \tag{13.9.12}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{r^3 c}[\mathbf{p}', \mathbf{r}] + \frac{1}{r^2 c^2}[\mathbf{p}'', \mathbf{r}], \tag{13.9.13}$$

ahol $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$ és $\mathbf{p}''$ $t - \frac{r}{c}$ függvénye.

A továbbiakban arra az esetre szorítkozunk, midőn $\mathbf{p}$ a $t - \frac{r}{c}$ argumentum egyszerű periodikus függvénye.

$$p_x = A\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \alpha\right],$$

$$p_y = B\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \beta\right], \tag{13.9.14}$$

$$p_z = C\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \gamma\right],$$

ahol T egy teljes rezgés ideje, A, B, C az amplitúdók, α, β, γ a fázisállandók. Vektori alakban

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \mathbf{a}\right],$$

$$\mathbf{p}_0 = (A, B, C), \quad \mathbf{a} = (\alpha, \beta, \gamma).$$

Innen differenciálással

$$\mathbf{p}' = -\frac{2\pi}{T}\mathbf{p}_0 \sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \mathbf{a}\right],$$

$$\mathbf{p}'' = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathbf{p}.$$

Állapítsuk meg $\mathfrak{H}$ (9.13) kifejezésében a jobboldalon szereplő két tag nagyságrendjét. Jelöljük az első tag nagyságrendjét I-gyel, a másodikét II-vel és vegyük figyelembe, hogy a sinus- és cosinusfüggvények nagyságrendje 1. Ekkor nyerjük

$$(\mathrm{I}) = \frac{1}{r^3 c} \frac{2\pi}{T} p_0 r = \frac{2\pi p_0}{\lambda r^2}, \qquad \text{ahol } \lambda = cT,$$

$$(\mathrm{II}) = \frac{1}{r^2 c^2} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 p_0 r = \frac{4\pi^2 p_0}{\lambda^2 r}.$$

Tehát

$$(\mathrm{I}) : (\mathrm{II}) = \lambda : 2\pi r.$$

Innen láthatjuk, hogy $\mathfrak{H}$ kifejezésében, ha $r \ll \lambda$, akkor csak az első tag, ha $r \gg \lambda$, akkor pedig csak a második tag jön számba.

Tehát ha $r \ll \lambda$, akkor

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{r^3 c} \left[\mathbf{p}'\left(t - \frac{r}{c}\right), \mathbf{r}\right] \tag{13.9.15}$$

és ha $r \gg \lambda$, akkor

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{r^2 c^2} \left[\mathbf{p}''\left(t - \frac{r}{c}\right), \mathbf{r}\right]. \tag{13.9.16}$$

Ezek után állapítsuk meg, hogy $\mathfrak{E}$ milyen formulákkal adható meg a fenti két esetben. (9.12) szerint:

$$\mathfrak{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \frac{\mathbf{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} - \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{p}''\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}.$$

Számítsuk ki az első tagot, ill. annak x komponensét részletesen

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p_x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p_z}{r}\right) = -\frac{1}{r^3}(x p_x + y p_y + z p_z) -$$

$$- \frac{1}{cr^2}(x p_x' + y p_y' + z p_z'),$$

$$\operatorname{grad}_x \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{p}}{r}\right) = \frac{3x}{r^5}(x p_x + y p_y + z p_z) - \frac{p_x}{r^3} + \frac{x}{r^4 c}(x p_x' + y p_y' + z p_z') +$$

$$+ \frac{2x}{cr^4}(x p_x' + y p_y' + z p_z') - \frac{p_x'}{cr^3} + \frac{x}{r^3 c^2}(x p_x'' + y p_y'' + z p_z''). \tag{13.9.17}$$

Az így nyert hat tag nagyságrendjét rendre $(a) - (f)$-el jelölve nyerjük

$$(a) = \frac{3A}{r^3}, \qquad (d) = 2\,\frac{1}{r^2 c}\,\frac{2\pi}{T}\,A = \frac{4\pi A}{r^2\lambda},$$

$$(b) = \frac{A}{r^3}, \qquad (e) = \frac{1}{r^2 c}\,\frac{2\pi}{T}\,A = \frac{2\pi A}{r^2\lambda},$$

$$(c) = \frac{1}{r^2 c}\,\frac{2\pi}{T}\,A = \frac{2\pi A}{r^2\lambda}, \qquad (f) = \frac{1}{rc^2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A = \frac{4\pi^2 A}{r\lambda^2}.$$

$\mathfrak{E}$ (9.12) kifejezésében a második tag nagyságrendje

$$(g) = \frac{1}{c^2}\,\frac{1}{r}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A = \frac{4\pi^2 A}{r\lambda^2}.$$

Innen látható, hogy ha $r \ll \lambda$, akkor az (a) és (b) tag lesz számottevő, a többi, különösen a második tag, (9.12)-ből elhagyható. Az (a) és (b) tag a (9.12) kifejezés első tagjából származik, tehát, ha $r \ll \lambda$, elegendő az első tagot megtartani, vagyis ekkor

$$\mathfrak{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{\mathbf{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \tag{13.9.18}$$

Ha pedig $r \gg \lambda$, akkor $\mathfrak{E}$ kifejezésében az (f) és (g) tag számottevő, a többi ezek mellett elhanyagolható, vagyis ekkor, mint (9.12)-ből és (9.17)-ből látható

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{r^3 c^2}\,\mathbf{r}\left(\mathbf{r}\,\mathbf{p}''\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) - \frac{1}{rc^2}\,\mathbf{p}''\left(t - \frac{r}{c}\right). \tag{13.9.19}$$

A következőkben a fenti két esettel, $r \ll \lambda$ és $r \gg \lambda$, részletesen foglalkozunk:

1. $r \ll \lambda$.

Ha a távolság kicsi a hullámhosszhoz képest, vagyis ha a hullámforrás közelében vagyunk, akkor, mint láttuk, $\mathfrak{H}$-t (9.15) adja meg. Ha az $\mathbf{r}$ irányába mutató egységvektort $\mathbf{r}_0$-lal jelöljük, vagyis ha

$$\mathbf{r} = r\mathbf{r}_0,$$

akkor

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{r^2 c}\left[\mathbf{p}'\left(t - \frac{r}{c}\right), \mathbf{r}_0\right]. \tag{13.9.20}$$

Ez a kifejezés nagyon hasonlít az $Id\mathbf{s}$ áramelem mágneses térintenzitásának kifejezéséhez, melyet a *Biot–Savart*-féle törvény ad meg

$$\mathfrak{H} = \frac{I}{r^2 c}\,[d\mathbf{s}, \mathbf{r}_0] = \frac{1}{r^2 c}\,[Id\mathbf{s}, \mathbf{r}_0]. \tag{13.9.21}$$

Összehasonlítva ezt a (9.20) kifejezéssel, látjuk, hogy ez egy olyan áramelem mágneses tere, melynél

$$\mathbf{p}'\left(t-\frac{r}{c}\right)=I d\mathbf{s}=I\left(t-\frac{r}{c}\right)d\mathbf{s}\,. \tag{13.9.22}$$

Ugyanis, mint látjuk, I arányos p'-vel, tehát $I\ t-\frac{r}{c}$ függvénye.

Tehát a mágneses tér a hullámforrás közelében megegyezik egy áramelemnek a *Biot–Savart*-törvény által adott mágneses terével, de t időben a hullámforrástól r távolságban nem az egyidejű, hanem az $\frac{r}{c}$ idővel korábbi áramintenzitás, $I\left(t-\frac{r}{c}\right)$ mérvadó $\mathfrak{H}$-ra. $\frac{r}{c}$ éppen az az idő, mely alatt a c sebességgel terjedő hullám az áramforrástól (hullámforrástól) r távolságra jut. Az ilyen teret *retardált tér*nek nevezzük. Hogy a hullámforrástól r távolságban $\mathfrak{H}$-ra az $\frac{r}{c}$-vel korábbi p', ill. I mérvadó, annak az a magyarázata, hogy a hullámnak, mely c sebességgel terjed, $\frac{r}{c}$ időre van szüksége, míg a hullámforrástól r-ig jut. Ha a hullámforrás közelében vagyunk, r kicsi, tehát $\frac{r}{c}$ nagyon kis idő, így t mellett elhagyható. A hullámforrás környezetében tehát írható, hogy

$$\mathfrak{H}=\frac{1}{cr^2}\left[\mathbf{p}'(t),\mathbf{r}_0\right]. \tag{13.9.23}$$

Ezek után $\mathfrak{E}$-re is egy egyszerű és szemléletes kifejezést vezetünk le. Láttuk, hogy ha $r \ll \lambda$, akkor $\mathfrak{E}$-t (9.18) írja le. Ezt a következőképpen is felírhatjuk

$$\mathfrak{E}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}=-\operatorname{grad}\phi.$$

Tehát ebben az esetben $\mathfrak{E}$-nek van skaláris potenciálja, éspedig

$$\phi=-\operatorname{div}\frac{\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}, \tag{13.9.24}$$

ami a fentebb végzett számítás alapján így is írható

$$\phi=\frac{\mathbf{pr}}{r^3}+\frac{\mathbf{p}'\mathbf{r}}{cr^2}.$$

Ha a hullámforrás közelében vagyunk, akkor r kicsi, vagyis csak $\frac{1}{r}$ legmagasabb

hatványa jön számításba, ezért a fenti második tag elhagyható. A hullámforrás közelében tehát

$$\phi = \frac{\mathbf{pr}}{r^3} = \frac{\mathbf{pr}_0}{r^2}, \tag{13.9.25}$$

ahol $\mathbf{p}$ mindenütt $t - \frac{r}{c}$ függvénye. Tehát az elektromos tér olyan, mint egy $\mathbf{p}$ momentumú dipólus tere. A dipólust a kezdőpontban elhelyezett, egymástól $|d\mathbf{s}|$ távolságnyira levő $+e$ és $-e$ töltések rendszerének tekintjük, tehát momentuma

$$\mathbf{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) = e d\mathbf{s}.$$

Továbbá

$$\mathbf{p}'\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{de}{dt} d\mathbf{s} = I d\mathbf{s},$$

megegyezésben előbbi formulánkkal.

A dipólus tere szintén retardált, tehát az elektromos térnél is figyelembe kell venni, hogy a hullámok terjedési sebessége véges. Vagyis r távolságban és t időben $\mathfrak{E}$-re az $\frac{r}{c}$ idővel korábbi dipólmomentum mérvadó. Ha r igen kicsi, akkor $\frac{r}{c}$ itt is elhagyható és ekkor $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$.

Megoldásaink tehát egy fix tengelyű elektromos dipólus elektromos és mágneses terét adják meg, melynek momentuma periodikusan változik. Ilyen dipólust *elektromos oszcillátor*nak nevezünk. Ez egy rövid lineáris antenna segítségével valósítható meg, melyben egy rezgőkörrel való induktív kapcsolás által nagyfrekvenciájú váltóáram halad váltakozó irányban. A stacionárius áramok tanában láttuk, hogy az áramelemre vonatkozó *Biot–Savart*-törvényt közvetlenül igazolni nem tudjuk, mert áramelemet stacionárius áramokkal előállítani lehetetlen. Itt most látjuk, hogy elektromos rezgések körében az áramelemek realizálhatók. Ezek mágneses tere azonban csak az áramelem (antenna) közvetlen közelében egyezik meg egy áramelemnek a *Biot–Savart*-törvény által adott terével és itt is csak akkor, ha a váltakozó áramú áramelem mágneses terének első közelítésére szorítkozunk.

A távolbahatás elmélete a *Biot–Savart*-törvényt tetszőleges távolságokig érvényesnek venné és teljesen téves eredményekre vezetne, mert a hullámforrástól nagy távolságban, mint látni fogjuk, egészen más törvényszerűséget kapunk.

Az itt nyert eredmények tehát csak olyan távolságokra vonatkoznak, melyeknél $r \ll \lambda$. Lassú rezgéseknél, ahol λ igen nagy, r szintén nagy lehet, azonban igen gyors rezgéseknél, midőn λ igen kicsi, r még a hullámforrás közelében sem kicsi λ-hoz képest és ekkor eredményeink nem adnak jó közelítést.

2. $r \gg \lambda$.

Ha r nagy a hullámhosszhoz képest, akkor azt mondjuk, hogy a gömbhullám hullámzónájában vagyunk. A hullámzónában a gömbhullámok úgy viselkednek, mint nagy távolságból jövő elektromágneses hullámok, pl. fényhullámok.

Ebben az esetben a térerősségeket (9.16) és (9.19) írják le. Most $\frac{r}{c}$ t mellett, minthogy r nagy, már nem hagyható el.

$\mathfrak{E}$ kifejezését kissé átalakítjuk

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{c^2 r^3} \{\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{p}'') - r^2 \mathbf{p}''\}.$$

Az

$$r^2 = |\mathbf{r}|^2 = \mathbf{r}\mathbf{r}$$

összefüggés alapján $\mathfrak{E}$ így is írható

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{c^2 r^3} \{\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{p}'') - (\mathbf{r}\mathbf{r})\mathbf{p}''\}.$$

Mint ismeretes, fennáll a következő egyszerű vektortani tétel

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{c}) - (\mathbf{b}\mathbf{a})\mathbf{c},$$

melyet a legegyszerűbben úgy igazolhatunk, hogy az egyes komponensekre igazoljuk.

Ennek segítségével nyerjük, ha $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{r}$ és $\mathbf{c} = \mathbf{p}''$

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{c^2 r^3} [\mathbf{r}, [\mathbf{r}, \mathbf{p}'']].$$

Ha bevezetjük ismét az $\mathbf{r}_0$ egységvektort és a tényezőket felcseréljük, következik, hogy

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{c^2 r^2} [[\mathbf{p}'', \mathbf{r}], \mathbf{r}_0]. \tag{13.9.26}$$

Továbbá (9.16) szerint

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{c^2 r^2} [\mathbf{p}'', \mathbf{r}].$$

Mivel pedig

$$\mathbf{p}'' = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathbf{p},$$

nyerjük, ha cT helyébe mindenütt λ-t írunk,

$$\mathfrak{E} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \frac{1}{r^2} [[\mathbf{r}, \mathbf{p}], \mathbf{r}_0], \tag{13.9.27}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \frac{1}{r^2} [\mathbf{r}, \mathbf{p}]. \tag{13.9.28}$$

Ez a két formula szolgáltatja az elektromos és mágneses térintenzitásokat a hullámzónában.

Látjuk, hogy

$$\mathfrak{E} = [\mathfrak{H}, \mathbf{r}_0]. \tag{13.9.29}$$

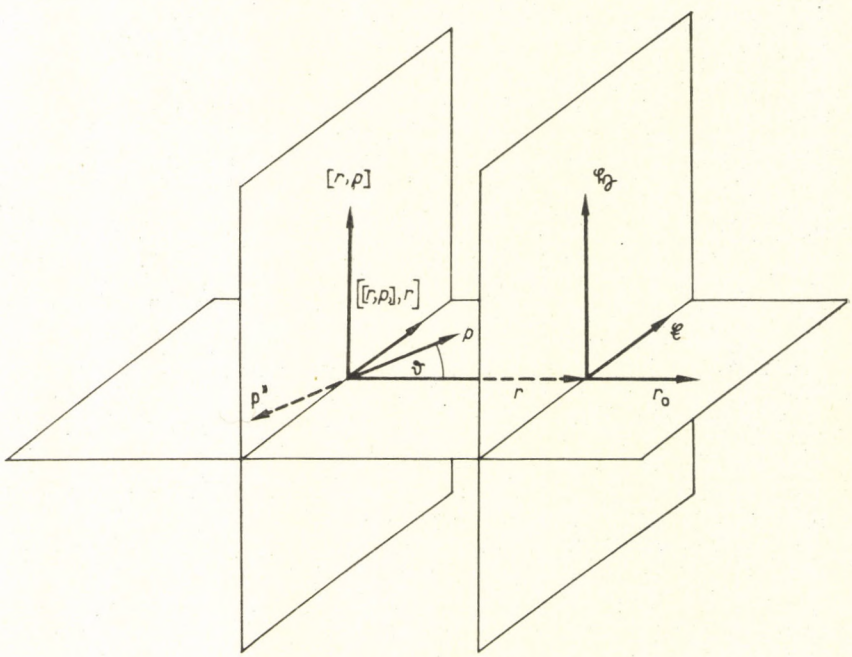
Továbbá, ha az $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ szöget ϑ-val jelöljük, kapjuk, hogy

$$|\mathfrak{E}| = |\mathfrak{H}| = \frac{1}{c^2 \mathbf{r}} |\mathbf{p}''| \sin\vartheta, \tag{13.9.30}$$

$$|\mathfrak{E}| = |\mathfrak{H}| = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \frac{1}{r} |\mathbf{p}| \sin\vartheta. \tag{13.9.31}$$

Az utolsó öt formulából a következőket olvashatjuk ki. A hullámzónában $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ abszolút értéke egyenlő, továbbá $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ egymásra és a sugárra merőlegesek, a hullámok tehát tranzverzálisak. $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathbf{r}_0$ úgy következnek egymásra, mint egy jobbsodrású koordinátarendszer x-, y-, z-tengelyei, vagy mint a jobb kéz hüvelyk-, mutató- és középujja. $\mathfrak{H}$ merőleges $\mathbf{p}$-re, $\mathfrak{E}$ pedig az $\mathbf{r}$ és $\mathbf{p}$ által meghatározott síkban fekszik és $\mathbf{p}$-nek az $\mathbf{r}$-re bocsátott merőleges vetületével egyirányú. A viszonyokat a 196. ábrán szemléltetjük.

A $\mathbf{p}$ vektornak, vagyis az origóban levő dipólmomentumnak a végpontja általában ellipszist ír le, de ha a komponensei közt nincs fáziskülönbség, egyenesben végez rezgéseket és akkor $\sin\vartheta$ az időben állandó.



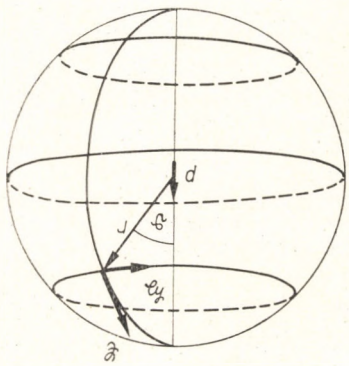
196. ábra. Elektromos és mágneses térerősség a hullámzónában

Szorítkozzunk arra az esetre, midőn **p** egy egyenesben rezeg és ábrázoljuk az $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ vektorokat egy r sugarú gömbfelületen. A gömb tengelye gyanánt válasszuk azt az átmérőt, mely összeesik a **p** vektor rezgési egyenesével. A tengelynek a gömbbel való metszéspontjain, a pólusokon át fektessünk fel meridián köröket, ezekre merőlegesen pedig vonjunk paralel köröket. A fentiek szerint $|\mathfrak{E}|$ és $|\mathfrak{H}|$ csak $\sin\vartheta$-tól függ, továbbá $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathbf{r}_0$ egymásra merőlegesek. Mindebből következik, hogy

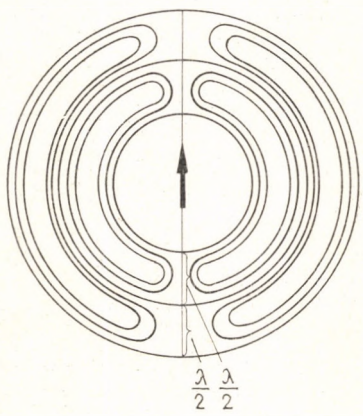
1. $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ tangenciálisak.
2. $|\mathfrak{E}|$ és $|\mathfrak{H}|$ egy-egy paralel kör mentén állandóak, az egyenlítőn a legnagyobbak, a pólusokon pedig eltűnnek.

Mivel pedig $\mathfrak{H}$ merőleges **p**-re és $\mathfrak{E}$ a **p**, **r** síkban fekszik, következik, hogy

3. $\mathfrak{H}$ a paralel körök érintője irányába mutat.
4. $\mathfrak{E}$ a meridiánkörök érintője irányába mutat.
5. ha r egy hullámhosszal (λ-val) változik, $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ abszolút értéke megváltozik ugyan, irányuk azonban ugyanaz marad. Ha pedig r egy félhullámhosszal változik, $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ ellenkező irányúvá lesz.



197. ábra. Az elektromos térerősség érintője a meridián körök, a mágneses térerősség érintője pedig a paralel körök érintője irányába mutat



198. ábra. Az elektromos térerősség erővonalai

A 197. és 198. ábrák szemléltetik az előbb elmondottakat. A 198. ábrán $\mathfrak{E}$ erővonalai vannak feltüntetve. Az ábrát különböző sugarú koncentrikus gömbök keresztmetszete gyanánt kell felfogni, melyek felülete egymástól $\frac{\lambda}{2}$ távolságra van. A gömbfelületek között $\mathfrak{E}$ erővonalai vannak feltüntetve, melyek a pólusoktól és környezetüktől eltekintve meridián körök. A pólusokon, mint láttuk, formulánk $|\mathfrak{E}|=0$-t ad. Tehát az erővonalakat (a meridián köröket) nem szabad a pólusokig húzni. Mivel $\mathfrak{E}$-nek a hullámzónára levezetett formulája a póluso-

kon $\mathfrak{E} = 0$-t ad, a pólusok környezetében pedig $\mathfrak{E}$-re nagyon kis értékeket szolgáltat, ebben a tartományban nem lehet elhanyagolni azokat a tagokat, melyeket mint magasabbrendű kicsi tagokat a hullámzónában elhanyagoltunk. Mint részletesebb számítások mutatják, ez arra vezet, hogy a pólusok közelében az erővonalak legörbülnek. Az itt feltüntetett görbék, melyek az erővonalak egy momentán állapotát adják, HERTZtől származnak.

$\mathfrak{H}$ erővonalai paralel körök. Ezeket sem szabad a pólusokig megvonni, mert ott $\mathfrak{H} = 0$, tehát egy dipólus a tengelye irányában (vagyis momentuma irányában és azzal ellentétes irányban) nem sugároz.

Végül még foglalkozzunk az energiaáramlással. Evégből határozzuk meg a (12.3.1) sugárvektort

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]. \tag{13.9.32}$$

Tehát $\mathbf{S}$ iránya $\mathbf{r}_0$, vagyis $\mathbf{r}$ iránya.

$$|\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi}|[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]| = \frac{c}{4\pi}|\mathfrak{E}| \cdot |\mathfrak{H}| = \frac{c}{4\pi}|\mathfrak{E}|^2 = \frac{c}{4\pi}|\mathfrak{H}|^2.$$

A (9.30) formulákból nyerjük

$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{c^3 r^2}|\mathbf{p}''|^2 \sin^2\vartheta,$$

$$\mathbf{p}'' = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathbf{p}$$

és ha eltekintünk a fázisállandótól

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Ezeket az egyenleteket felhasználva kapjuk, hogy

$$|\mathbf{S}| = \frac{|\mathbf{p}_0|^2}{4\pi c^3 r^2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 \cos^2\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{c}\right)\sin^2\vartheta,$$

$$|\mathbf{S}| = \frac{4\pi^3 p_0^2}{c^3 r^2 T^4}\cos^2\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{c}\right)\sin^2\vartheta. \tag{13.9.33}$$

Képezzük $|\mathbf{S}|$ időbeli középértékét, $|\overline{\mathbf{S}}|$-t. Mivel $\cos^2\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{c}\right)$-nek egy periódusra vonatkozó időbeli középértéke $\frac{1}{2}$, nyerjük, hogy

$$|\overline{\mathbf{S}}| = \frac{2\pi^3 p_0^2}{c^3 r^2 T^4}\sin^2\vartheta. \tag{13.9.34}$$

Ez az egyenlet ad felvilágosítást arról, hogy különböző irányokban mekkora energiát sugároz ki az oszcillátor. Mint látható, ez az energia csak ϑ-tól függ és $\vartheta = 0$, valamint $\vartheta = \pi$ esetében $|\mathbf{S}| = 0$. Innen következik, hogy a dipólus tengelyének irányában nem sugároz.

Az egész r sugarú gömbön az időegységben átáramló energiát megkapjuk, ha $|\mathbf{S}|$-et a gömb felületére integráljuk, ugyanis S_n egyenlő $|\mathbf{S}|$-el.

A gömb felületeleme $r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\phi$.

$$S = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} |\mathbf{S}| r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\phi = 2\pi \int_0^{\pi} |\mathbf{S}| r^2 \sin\vartheta d\vartheta ,$$

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{4\pi}\frac{1}{c^3 r^2} |\mathbf{p}''|^2 \sin^2\vartheta\, r^2 \sin\vartheta d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2c^3} |\mathbf{p}''|^2 \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta d\vartheta = \frac{4}{6c^3} |\mathbf{p}''|^2 ,$$

vagy

$$S = \frac{4}{6c^3}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 |\mathbf{p}|^2 . \tag{13.9.35}$$

Számítsuk ki ennek időbeli középértékét

$$\bar{S} = \frac{4}{6c^3}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 |\bar{\mathbf{p}}|^2 .$$

Ha a fázisállandótól ismét eltekintünk, akkor

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

$$|\bar{\mathbf{p}}^2| = |\mathbf{p}_0|^2 \overline{\cos^2\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{c}\right)} = \frac{1}{2} p_0^2 .$$

Tehát

$$\bar{S} = \frac{4}{6c^3}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 \frac{1}{2} p_0^2 = \frac{16\pi^4 p_0^2}{3c^3 T^4} ,$$

$$\bar{S} = \frac{16\pi^4 c}{3\lambda^4} p_0^2 . \tag{13.9.36}$$

Az időegységben ezzel az energiával csökken a sugárzás forrásának energiája (átlagban), más szóval $\bar{S}$ az energiaáramlás középértéke.

Ez a formula még átalakítható, ugyanis azt találtuk, hogy

$$\mathbf{p}' = Id\mathbf{s},$$

$$|\mathbf{p}'| = Ids,$$

$$|\mathbf{p}'| = p_0 \frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Tehát

$$Ids = p_0 \frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

$$I = \frac{p_0 2\pi}{Tds} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{c}\right) = I_0 \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

$$I_0 = \frac{p_0 2\pi}{Tds}.$$

ds helyébe az l antennahosszat írva:

$$p_0 = \frac{l\lambda}{2\pi c} I_0.$$

Ezt behelyettesítve $\bar{S}$ végső formulájába, nyerjük

$$\bar{S} = \frac{4\pi^2}{3c}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_0^2. \tag{13.9.37}$$

Tehát az időegységre vonatkozó energiaveszteség arányos I_0^2-tel, hasonlóan mint a *Joule*-féle hő. R ohmikus ellenállásnál ugyanazon váltóáramnál a *Joule*-féle hőfejlődés következtében az időegységre eső energiaveszteség középértékben

$$\overline{W} = \frac{RI_0^2}{2}. \tag{13.9.38}$$

Ennek analógiájára azt az ohmikus ellenállást, mely ugyanakkora energiaveszteséget idéz elő, mint a kisugárzás, a rendszer sugárzási ellenállásának nevezzük és R_s-sel jelöljük. A fentiek szerint

$$R_s = \frac{8\pi^2}{3c}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \tag{13.9.39}$$

elektrosztatikus cgs egységekben. Innen nyerjük, hogy pl. $l = \frac{1}{10}\lambda$ esetében, vagyis egy olyan antennahossz esetében, mely λ-nak tizede, R_s 10 ohm nagyságrendű, tehát R_s az ohmikus ellenálláshoz viszonyítva nagy.

Az itt tárgyalt gömbhullámok a gömbhullámoknak egy speciális esetét képviselik. $\mathfrak{Z}$-et másképpen választva, más típusú gömbhullámokat kaptunk volna. Az itt tárgyalt típust az jellemzi, hogy a tér egy dipólus rezgésével, oszcillációjával

értelmezhető. Részletesen azt az esetet vizsgáltuk, midőn a dipólus lineáris harmonikus rezgést végez (lineáris oszcillátor), ekkor a hullámzás minden irányban lineárisan polározott.

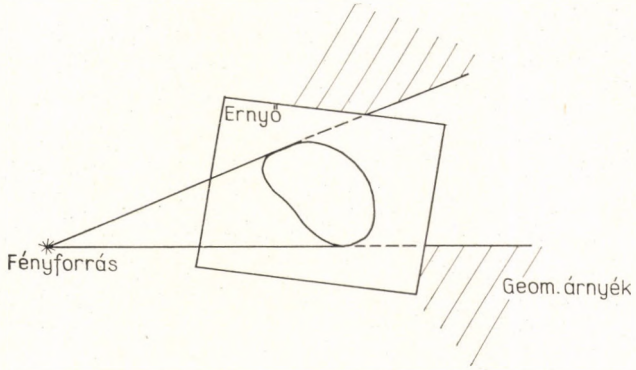
Ha a dipólus nem lineáris, hanem elliptikus rezgéseket végez, vagyis **p** végpontja ellipszisen mozog, akkor minden irányban elliptikusan polározott a hullám, kivéve a **p** által leírt ellipszis síkjában, amelyben a hullámzás lineárisan polározott. Ha a dipólmomentum komponenseinek amplitúdói egyenlők, akkor **p** végpontja kört ír le. Ekkor a kör síkjában lineárisan poláros hullámot kapunk, a kör síkjára merőleges irányban a hullám cirkulárisan poláros, közben pedig elliptikusan poláros.

Ezeken kívül előállíthatunk másféle gömbhullámokat is, melyek nem dipólusok, hanem magasabb rendű pólusok rezgéseinek felelnek meg. Ezekhez $\mathfrak{Z}$ x, y, z szerinti magasabb deriváltjai segítségével juthatunk. Általában ilyen gömbhullámok sorával előállíthatunk olyan gömbhullámot, melynél a sugárvektort a gömb felületén tetszőlegesen írjuk elő.

Rádióadók antennái is első közelítésben általában dipólusoknak tekinthetők, tehát a rádióhullámok az itt tárgyalt módon írhatók le. A hullámok terjedésénél azonban figyelembe kell venni, hogy ezek nem szabad, üres térben, hanem két vezető réteg között, a Föld és a *Heaviside*-réteg között terjednek.

10. §. A Huyghens-féle elv. Kirchhoff formulája

Az előző fejezetekben azzal az esettel foglalkoztunk, midőn a hullámok terjedését nem akadályozza semmi. A következőkben azt tárgyaljuk, hogy egyes akadályok hogyan befolyásolják a hullámok terjedését. Vagyis, míg előbb nem határolt, most az egyes akadályokkal körülhatárolt hullámok terjedésével fogunk foglalkozni. Hogy a körülhatárolt hullámok terjedése nem teljesen ugyanolyan, mint a nem határolt hullámoké, azt egyszerű kísérletek mutatják. Ha ugyanis a körülhatárolt hullám ugyanúgy terjedne, mint a nem határolt, akkor pl. a geometriai



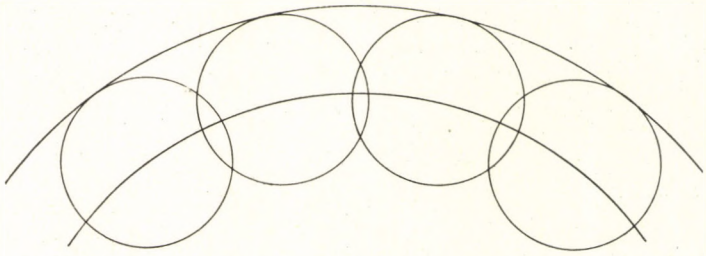
199. ábra. A geometriai árnyék

árnyék helyére nem szabadna fénynek jutnia, már pedig a tapasztalat azt mutatja, hogy a geometriai árnyék helyére is jut fény. Ezt a jelenséget nevezzük *elhajlás*nak.

Matematikailag egy hullám akadályon történő elhajlását a következőképpen lehet megfogalmazni. $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ számára a hullámegyenletnek olyan megoldását kell meghatározni, mely mindkét térrészben, az akadály által kitöltött térrészben és a többi megmaradó térben, vagyis a szabad térrészben is kielégíti a hullámegyenletet. $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ tangenciális komponensei a határfelületeken folytonosan mennek át. Itt figyelembe kell venni, hogy a két térrész állandói, ε, μ, σ különbözők. Ha sikerülne egy ilyen megoldást találni, akkor ez minden fontos kérdésre (mint pl. intenzitás, polarizáció) az akadály mögötti térrészben felelet adna. Ilyen megoldások meghatározásának matematikai nehézségei azonban oly nagyok, hogy eddig csak a legegyszerűbb esetekben sikerült eredményre jutni.

A többi nagyszámú és fontos elhajlásjelenség tárgyalása és a felmerülő problémák megoldása egy közelítő eljárás segítségével történik, mely eljárás HUYGHENS elvén alapszik. Mint ismeretes, HUYGHENS azt az igen termékenynek bizonyult elvet vezette be a hullámok terjedésére vonatkozóan, hogy a hullámfelület minden pontja egy új hullám kiindulási pontjának tekinthető és ezeknek az elemi hullámoknak a burkoló felülete adja az új hullám felületét. Ennek az elvnek a segítségével az elemekből ismert módon értelmezhetjük a visszaverődést és a törést.

Mint a szerkesztésből látjuk, a *Huyghens*-elv eredeti megfogalmazása szerint egy visszafelé terjedő hullámnak is kellene keletkezni, ami a tapasztalatnak ellentmond. Hogy ez a hullám nem lép fel, arról a *Huyghens*-elv – eredeti megfogalmazásában – nem tud számot adni.



200. ábra. A *Huyghens*-féle elv

Az eredeti *Huyghens*-elv szerint egy bizonyos időben előálló hullámfelület mint elemi hullámok burkolója adódik. FRESNEL ezt tökéletesítette azáltal, hogy egy P pontban előálló fénygerjesztés (fényvektor) meghatározására az adott pillanatban odaérkező szekunder hullámokat a fáziskülönbségük figyelembevételével szuperponálta. A visszafelé terjedő hullám elmaradását azonban FRESNEL sem tudta megmagyarázni.

Végre KIRCHHOFFnak sikerült az elvet matematikailag kielégítően megfogalmazni. Elgondolása lényegében FRESNEL gondolatán alapszik, de azon túlmegy, mert a visszafelé terjedő hullám elmaradását is értelmezni tudta. KIRCHHOFF

megfogalmazásában az elv lényeges tartalma az, hogy ha adva van a fénygerjesztés, vagyis a fényvektor egy P pontot körülvevő felületen, akkor a fénygerjesztés (fényvektor) és ebből a fényintenzitás a P pontban meghatározható.

Azt találtuk, hogy egy dipólusforrás esetén

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} .$$

Ez kielégíti a

$$\Delta\mathfrak{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} = 0$$

hullámegyenletet, mely c sebességgel terjedő gömbhullámhoz vezet. Azt is láttuk, hogy ez esetben

$$|\mathfrak{E}| = |\mathfrak{H}| = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\frac{|\mathfrak{p}|}{r}\sin\vartheta ,$$

ahol $\sin\vartheta$ már csak pozitív értékeket vehet fel.

Egy valóságos fényforrás, még ha pontszerű is, igen sok rezgő dipólus halmaza. Tehát egy dipólussal oly módon írhatjuk le a fényforrást, hogy a dipólusról feltételezzük, hogy irányítását folyton változtatja. Így az átlagban az irányítástól, ϑ-tól való függés elesik. Tehát $|\mathfrak{E}|$ és $|\mathfrak{H}|$, valamint ezek komponensei is ugyanolyan alakúak, mint $|\mathfrak{Z}|$. Következő tárgyalásaink voltaképpen $|\mathfrak{Z}|$-re vonatkoznak, de az előbbiek szerint $|\mathfrak{E}|$-re, $|\mathfrak{H}|$-ra, vagy $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ komponenseire is. Ha tehát a fénygerjesztést egy U skalárissal jelöljük és ez alatt $\mathfrak{E}$-nek a hullámnormálisra merőleges komponensei egyikét értjük, akkor erre is ugyanaz az egyenlet áll fenn, mint $|\mathfrak{Z}|$-re, vagyis

$$\Delta U - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 .$$

Tegyük fel, hogy a hullám olyan közegben terjed, melynek dielektromos állandója ε és mágneses permeabilitása $\mu = 1$, akkor a terjedési sebessége

$$w = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{n} .$$

Ekkor a fenti egyenletben c helyébe $\frac{c}{n}$ jön és nyerjük

$$\Delta U - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 . \qquad (13.10.1)$$

Ezt az egyenletet tesszük tárgyalásaink alapjává. U-ról feltesszük, hogy az időtől való függése a következő

$$U = u(x, y, z)e^{i\omega t} , \qquad (13.10.2)$$

vagyis feltesszük, hogy a hullám monokromatikus. U-nak ezt a kifejezését a fenti differenciálegyenletbe helyettesítve, u-ra a következő differenciálegyenletet kapjuk

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{13.10.3}$$

ahol

$$k = \frac{n\omega}{c}.$$

Tegyük fel, hogy az u, v függvények kielégítik a (10.3) hullámegyenletet. Alkalmazzuk u-ra és v-re a *Green*-féle tételt, mely a következő

$$\int_F \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dF = \int_V (u\Delta v - v\Delta u) dV = \int_V k^2 (uv - vu) dV = 0 .$$

A térfogati integrál tetszőleges térfogatra vonatkozik, melyben az integrandus folytonos, a felületi integrál pedig ezt a térfogatot körülzáró zárt felületre értendő.

v gyanánt válasszunk egy P pontból kiinduló gömbhullámot, mely P pont legyen az integrációs tartomány pontja, vagyis legyen az F felülettel körülzárt térrészben. Mivel v a (10.3) egyenlet megoldása, v a P-ből kiinduló gömbhullám időtől független része, vagyis

$$v = \frac{e^{-ikr}}{r}.$$

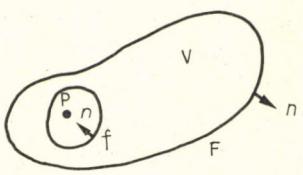
Ez a függvény azonban a P pontban végtelenné válik. Ha tehát a *Green*-tételből nyert összefüggést, mely szerint

$$\int_F \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dF = 0 .$$

alkalmazni akarjuk, a P pontot egy kis f felületű gömbbel ki kell rekeszteni a V integrációs tartományból és e gömb felületét hozzá kell venni F-hez. Tehát

$$\int_F \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dF + \int_f \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) df = 0 .$$

A normális az integrációs tartományból kifelé mutat, tehát a kis gömbnél **nr**-rel ellentétes irányú, vagyis a gömb középpontja felé mutat. Az f-re vonatkozó integ-



201. ábra. A V integrációs tartományt határoló felületek

rált könnyen kiszámíthatjuk, minthogy a második tagja

$$-\int_f v\frac{\partial u}{\partial n}\,df=\int_f \frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\,r^2 d\omega = r\left[e^{-ikr}\frac{\partial u}{\partial r}\right]_P\int d\omega\,.$$

Ugyanis, ha a gömb nagyon kicsi, akkor e^{-ikr} és $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ a gömb felületén helyettesíthető a gömb középpontjában, vagyis P-ben felvett értékkel, mely véges. Ha tehát a gömböt P-re összehúzzuk, akkor az integrál, mivel r-rel arányos, zérus lesz.

Az f-re vonatkozó integrál másik tagja a következő:

$$\int_f u\frac{\partial v}{\partial n}\,df=-\int_f u\frac{\partial v}{\partial r}\,df=-\int_f u\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)df.$$

Mivel

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)=-\left(\frac{1}{r^2}+\frac{ik}{r}\right)e^{-ikr},$$

írhatjuk

$$\int_f u\frac{\partial v}{\partial n}\,df=\int u\left(\frac{1}{r^2}+\frac{ik}{r}\right)e^{-ikr}r^2 d\omega=\int ue^{-ikr}d\omega+\int ikure^{-ikr}d\omega\,.$$

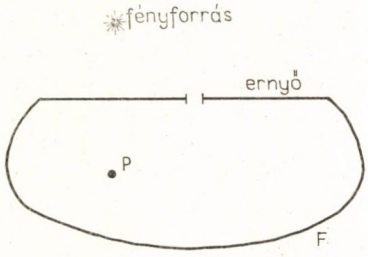
A jobboldalon a második integrál – hasonló okoknál fogva, mint a fenti – eltűnik, ha $r\to 0$, az első pedig hasonló okoskodással, mint fent, a következő eredményt adja

$$\int ue^{-ikr}d\omega=[ue^{-ikr}]_P\int d\omega=u_P 4\pi\,.$$

Tehát a kis gömbre kiterjesztett integrál $4\pi u_P$, vagyis

$$u_P=\frac{1}{4\pi}\int_f\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\right)df.$$

Ez a nevezetes *Kirchhoff*-féle formula, mely a fénygerjesztést, vagyis a fényvektort (pontosabban a fényvektor komponenseinek időtől független részét) a fényger-



202. ábra. A kis nyílással bíró ernyő kiegészítése határfelületté

jesztésnek, ill. fényvektornak, egy a P pontot körülvevő felületre kiterjesztett integrálja gyanánt állítja elő. Ha pl. egy ernyőn levő kis nyíláson történő elhajlásjelenséget akarjuk tárgyalni, akkor a határfelületet úgy fogjuk választani, hogy annak a nyílással bíró ernyő része legyen és az így nyert felületet tekintjük majd ernyőnek. Ahhoz, hogy a *Kirchhoff*-féle formulát alkalmazhassuk, az elhajlás problémáját előbb meg kell oldanunk, mert a formulát csak akkor alkalmazhatjuk, ha a fénygerjesztést a nyílásban és az ernyőn már ismerjük. Éppen ez az a pont, ahol KIRCHHOFF közelítő eljárást alkalmaz, mely abban áll, hogy a szabad nyílásban azt a gerjesztést írta a formulájába, mely akkor volna jelen, ha az ernyő ott sem volna és u-t, továbbá $\partial u/\partial n$-et az ernyőn 0-nak vette. KIRCHHOFFnak ez a közelítő gondolata jól bevált és ha nem szorítkozunk a nyílás közvetlen szélére, akkor a tapasztalattal nagyon jól egyező eredményekhez vezet.

11. §. Az elhajlásjelenségek felosztása

A *Kirchhoff*-féle formulát arra a speciális esetre alkalmazzuk, midőn a primér fénygerjesztés egy pontszerű Q fényforrásból származik, tehát

$$u = \frac{e^{-ikr_q}}{r_q}, \tag{13.11.1}$$

ahol $r_q = |\mathbf{r}_q|$ és $\mathbf{r}_q$ a Q pontból a nyíláshoz húzott rádiuszvektor. Ezzel szemben $r = |\mathbf{r}|$, ahol $\mathbf{r}$ a P megfigyelési pontból húzott rádiuszvektor. Az $\mathbf{n}$ normális a felület kifelé mutató normálisa. Számítsuk ki a *Kirchhoff*-féle formulában fellépő $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r_q}\right)$ és $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)$ kifejezéseket

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr_q}}{r_q}\right) = \frac{\partial}{\partial r_q}\left(\frac{e^{-ikr_q}}{r_q}\right)\frac{\partial r_q}{\partial n} = -\left(\frac{1}{r_q^2} + \frac{ik}{r_q}\right)e^{-ikr_q}\frac{\partial r_q}{\partial n},$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial n} = -\left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r}\right)e^{-ikr}\frac{\partial r}{\partial n},$$

$$\frac{\partial r_q}{\partial n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_q), \qquad \frac{\partial r}{\partial n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}).$$

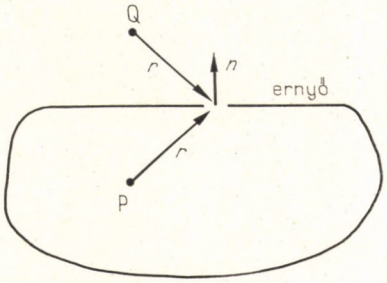
Mindezeket beírva KIRCHHOFF formulájába, nyerjük

$$u_P = \frac{1}{4\pi}\int_{\text{Nyílás}} \frac{e^{-ik(r+r_q)}}{r \cdot r_q}\left\{\left(\frac{1}{r} + ik\right)\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \left(\frac{1}{r_q} + ik\right)\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_q)\right\} dF. \tag{13.11.2}$$

A továbbiakban feltesszük, hogy a fényforrás és a megfigyelési pont távolsága a nyílástól nagy a hullámhosszhoz képest. Ekkor $\frac{1}{r}$, ill. $\frac{1}{r_q}$ a $k = 2\pi/\lambda$-hoz képest

kicsi és k mellett elhagyható. Ez az összes gyakorlati esetben teljesül. Így kapjuk, hogy

$$u_p = \frac{ik}{4\pi} \int \frac{e^{-ik(r+r_q)}}{r \cdot r_q} \left(\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_q)\right) dF. \tag{13.11.3}$$



203. ábra. Elhajlás kis nyílással bíró ernyőn

Tegyük még fel azt is, hogy $|\mathbf{r}|$ és $|\mathbf{r}_q|$ nagyok a nyílás dimenzióihoz képest. Ekkor az integrandus nevezőjében $r \cdot r_q$-t, továbbá a $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})$ és $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_q)$ kifejezéseket állandónak tekinthetjük és az integrál jele elé írhatjuk. Az exponenciális tényezőt azonban nem tekinthetjük állandónak, mert a kitevő szorozva van $k = 2\pi/\lambda$-val, mely nagy szám. Így tehát a következő kifejezéshez jutunk

$$u_p = \frac{ik[\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_q)]}{4\pi r \cdot r_q} \int e^{-ik(r+r_q)}\, dF. \tag{13.11.4}$$

A *Kirchhoff*-féle formulának ez az alakja a gyakorlatban előforduló legtöbb esetben igen jó eredményhez vezet. A benne fellépő i faktor így is írható: $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, ami mutatja, hogy $\frac{\pi}{2}$ fáziseltolás lép fel. Ez a P pontban a fényvektor fázisának meghatározásánál fontos.

A *Kirchhoff*-féle formula alapján látható, hogy a visszafelé terjedő hullám elmarad. Ha P-t az ábrán feltüntetett zárt felülettel vesszük körül, akkor ez azt jelenti, hogy M-ből halad P felé hullám, de M'-ből nem. Az M pontra vonatkozóan ugyanis

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_q) = -\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}),$$

tehát

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_q) = 2\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}). \tag{13.11.5}$$

Az M' pontra vonatkozóan pedig

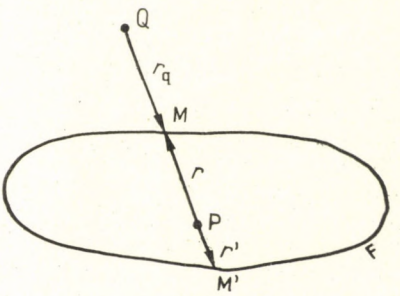
$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_q) = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}'),$$

tehát

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_q) = 0. \tag{13.11.6}$$

Vagyis az M'-ből visszafelé terjedő hullám elmarad, mert az M' pontban az integrál előtt álló faktor zérus.

Ezek után ismét visszatérünk a (11.4) *Kirchhoff*-féle formulához. A továbbiakban feltesszük, hogy az ernyő sík és ennek megfelelően a nyílás széle síkgörbe. Az ernyő síkjában egy x, y koordinátarendszert helyezünk el, melynek origója a nyílásba esik. A síkra merőlegesen a megfigyelési pont felé húzzuk a z tengelyt. Ebben a rendszerben Q koordinátái legyenek x_q, y_q, z_q, P koordinátái pedig x, y, z.



204. ábra. P-be csak M-ből halad hullám, M'-ből nem

A nyílás egyes pontjainak koordinátáit jelöljük ξ, η, ζ-val.

A fentiek szerint

$$r_q = \sqrt{(x_q - \xi)^2 + (y_q - \eta)^2 + z_q^2},$$

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}.$$

Q-nak és P-nek az origótól való távolsága legyen R_q ill. R,

$$R_q = \sqrt{x_q^2 + y_q^2 + z_q^2},$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Fejtsük ki r^2-et

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2(x\xi + y\eta) + \xi^2 + \eta^2,$$

$$r^2 = R^2 \left(1 - 2\,\frac{x\xi - y\eta}{R^2} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{R^2}\right).$$

Ha az 1 után következő tagokat h-val jelöljük, akkor ez a kifejezés ilyen alakú

$$r^2 = R^2(1 + h).$$

Négyzetgyököt vonva írhatjuk, hogy

$$r = R(1 + h)^{\frac{1}{2}} = R\left(1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \ldots\right).$$

Ha h-nak, vagyis ξ és η-nak 2-nél magasabb hatványait elhanyagoljuk, nyerjük

$$r = R\left(1 - \frac{x\xi + y\eta}{R^2} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R^2} - \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2R^4}\right).$$

Innen

$$r = R - \frac{x\xi + y\eta}{R} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R} - \frac{1}{2R}\left(\frac{x\xi + y\eta}{R}\right)^2. \qquad (13.11.7)$$

Éppen így nyerjük, hogy

$$r_q = R_q - \frac{x_q\xi + y_q\eta}{R_q} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R_q} - \frac{1}{2R_q}\left(\frac{x_q\xi + y_q\eta}{R_q}\right)^2. \qquad (13.11.8)$$

Az $\overrightarrow{OQ}$ vektor iránykoszinuszai $\frac{x_q}{R_q}, \frac{y_q}{R_q}, \frac{z_q}{R_q}$. Ha tehát a $\overrightarrow{QO}$ vektor irány-koszinuszait α_0, β_0, γ_0-lal jelöljük, nyerjük

$$\alpha_0 = -\frac{x_q}{R_q}, \qquad \beta_0 = -\frac{y_q}{R_q}, \qquad \gamma_0 = -\frac{z_q}{R_q}.$$

Jelöljük az $\overrightarrow{OP}$ vektor iránykoszinuszait α, β, γ-val,

$$\alpha = \frac{x}{R}, \qquad \beta = \frac{y}{R}, \qquad \gamma = \frac{z}{R}.$$

$(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ tehát $\mathbf{r}_q$, (α, β, γ) pedig $-\mathbf{r}$ iránykoszinuszai. Ezekkel

$$r + r_q = R + R_q - (\alpha - \alpha_0)\xi - (\beta - \beta_0)\eta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_q}\right)(\xi^2 + \eta^2) -$$
$$- \frac{1}{2}\frac{(\alpha\xi + \beta\eta)^2}{R} - \frac{1}{2}\frac{(\alpha_0\xi + \beta_0\eta)^2}{R_q},$$
$$r + r_q = R + R_q + f(\xi, \eta),$$

ahol $f(\xi, \eta)$-val jelöltük az $r + r_q$ kifejezésében az $R + R_q$ után levő tagokból álló kifejezést. $r + r_q$ kifejezését beírva u_p-be, nyerjük

$$u_p = \frac{ik[\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_q)]}{4\pi R R_q} e^{-ik(R+R_q)} \int_{\text{Nyílás}} e^{-ikf(\xi, \eta)} dF, \qquad (13.11.9)$$

ahol az integrál előtt a nevezőben $r \cdot r_q$ helyett $R \cdot R_q$-t írtunk, amit fentebbi feltevésünk alapján tehetünk.

A hullámegyenlet megoldása, U, úgy adódik, hogy u-t $e^{i\omega t}$-vel megszorozzuk. Figyelembe véve még, hogy $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, nyerjük

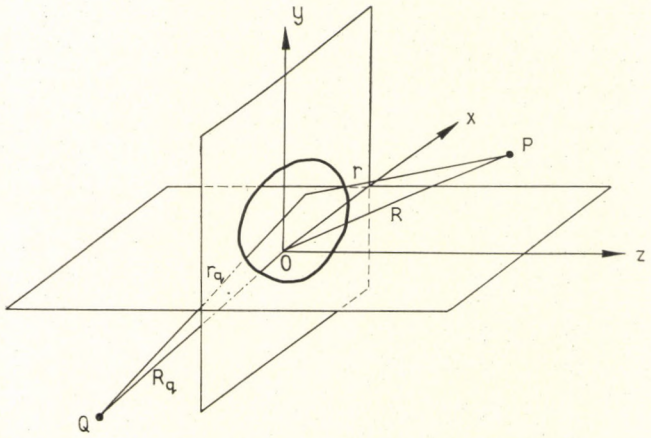
$$U_p = \frac{k}{4\pi R R_q}[\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_q)] \int e^{-ikf(\xi, \eta)} dF \cdot e^{i\left[\omega t - k(R + R_q) + \frac{\pi}{2}\right]}. \qquad (13.11.10)$$

Ez olyan hullám, melynek amplitúdója

$$A_p = \frac{'k}{4\pi R R_q}[\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_q)]\int e^{-ikf(\xi,\eta)}dF. \qquad (13.11.11)$$

A_p (vagy U_p) abszolút értékének négyzete adja az intenzitást a P pontban.

$r + r_q$ fenti sorfejtése módot ad az elhajlásjelenségek felosztására. Ha Q és P az ernyőtől olyan messze vannak, hogy f-ben a négyzetes tagokat elhagyhatjuk a lineárisak mellett, akkor a *Fraunhofer*-féle elhajlásjelenségekhez jutunk. Ha ez a



205. ábra. Elhajlás sík görbével határolt nyíláson

feltevés nem teljesül, vagyis ha f-ben a négyzetes tagokat is meg kell tartanunk, akkor a *Fresnel*-féle elhajlásjelenségeket kapjuk.

A következőkben a fenti formulát alkalmazni fogjuk résen történő elhajlásnál fellépő jelenségekre és a rácsokra, de mielőtt erre rátérnénk, egy rövid fejezetben még foglalkoznunk kell azzal, hogyan lehet egyszerű harmonikus rezgéseket összetenni a komplex számsíkon.

12. §. Egyszerű harmonikus rezgések összetétele a komplex számsíkon

Mint már említettük, egy egyszerű

$$U_1 = A_1 \cos(\omega t + \delta_1) \qquad (13.12.1)$$

harmonikus rezgést komplex alakban a következőképpen adhatunk meg

$$U_1 = A_1 e^{i(\omega t + \delta_1)}, \qquad (13.12.2)$$

ahol az előbbi kifejezés ennek reális része.

Két ilyen rezgést, melyek frekvenciája egyenlő, de amplitúdójuk és fázisuk különböző,

$$U_1 = A_1 \cos(\omega t + \delta_1), \quad U_2 = A_2 \cos(\omega t + \delta_2),$$

akarunk először is összetenni a komplex számsíkon. Teljesen hasonlóan, mint az interferencia tárgyalásánál, kapjuk, hogy

$$U_1 + U_2 = A_1(\cos\omega t\cos\delta_1 - \sin\omega t\sin\delta_1) + A_2(\cos\omega t\cos\delta_2 - \sin\omega t\sin\delta_2) =$$

$$= (A_1\cos\delta_1 + A_2\cos\delta_2)\cos\omega t - (A_1\sin\delta_1 + A_2\sin\delta_2)\sin\omega t. \qquad (13.12.3)$$

Vezessük be A-t és ϕ-t a következő módon

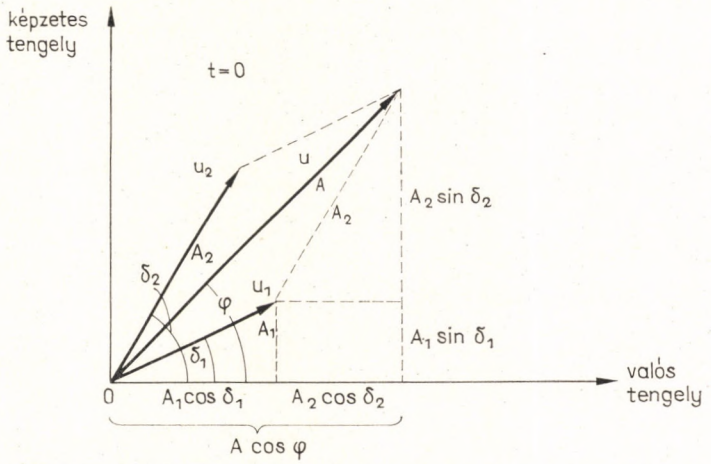
$$\begin{aligned} A_1\cos\delta_1 + A_2\cos\delta_2 &= A\cos\phi, \\ A_1\sin\delta_1 + A_2\sin\delta_2 &= A\sin\phi, \end{aligned} \qquad (13.12.4)$$

ahonnan nyerjük, hogy

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\delta_2 - \delta_1). \qquad (13.12.5)$$

Ennek segítségével a (12.4) egyenletek bármelyikéből ϕ meghatározható. Ha $A\cos\phi$ és $A\sin\phi$ kifejezéseit beírjuk $U_1 + U_2$ kifejezésébe, nyerjük, hogy

$$U = U_1 + U_2 = A\cos(\omega t + \phi). \qquad (13.12.6)$$



206. ábra. Harmonikus rezgések összetétele a komplex számsíkon

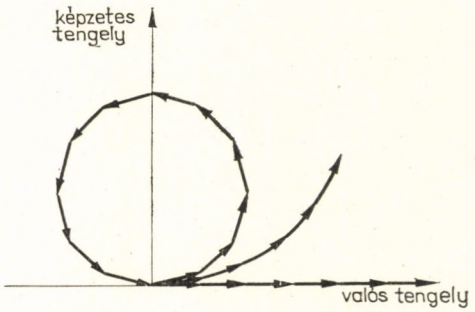
Ábrázoljuk a $t = 0$ időpillanatban U_1-et, U_2-t és U-t a komplex számsíkon, vagyis ábrázoljuk az U_1, U_2 és U-nak megfelelő komplex számokat a $t = 0$ időben. U_1, U_2 és U hossza és egymáshoz való helyzete az időben nem változik, vagyis az U_1, U_2 és U által meghatározott idom az idő változásával mint merev egész elforog, tehát A és ϕ meghatározásánál t nullának vehető. Azt is mondhatnánk, hogy az $e^{i\omega t}$ egységfaktortól a szerkesztésnél U_1, U_2 és U-nál eltekinthetünk.

Ebből a szerkesztésből látható, hogy két egyenlő frekvenciájú, különböző fázisú és amplitúdójú rezgés összetételét úgy foghatjuk fel, mint a nekik megfelelő komplex számok összeadását. A komplex összeg abszolút értéke adja az eredő rezgés

amplitúdóját, iránya pedig meghatározza az eredő rezgés fázisát. Tehát a rezgések összetétele formailag egyezik a vektorok összeadásával, ezért szokás az itt használt ábrázolást vektordiagramnak nevezni De ki kell emelni, hogy itt nincs szó vektorokról, hanem csak komplex számokról.

Ha nemcsak két rezgésről, hanem több rezgés összetevéséről van szó, akkor az eredő mozgást úgy kapjuk meg, hogy az egyes rezgéseknek megfelelő komplex számokat a vektorösszeadás szabályai szerint összeadjuk, vagyis mindegyik komplex számnak megfelelő vektort az előző végpontjából kiindulva irány és nagyság szerint felrajzoljuk. Az eredő rezgésnek megfelelő komplex számot úgy kapjuk, hogy az első kezdőpontját az utolsó végpontjával összekötjük.

Gyakorlati szempontból fontos eset, midőn sok egyenlő amplitúdójú rezgést kell összetenni, melyek között a fázisdifferencia azonos. Ezek összetevéséből többszörösen megtört vonalhoz jutunk, mely csökkenő amplitúdóval egy körívhez közeledik. Legyen N számú elemi rezgésünk, melyek amplitúdója a és a köztük



207. ábra. Igen sok, egyenlő amplitúdójú rezgés összetétele

levő állandó fáziskülönbség $\Delta\phi$. Az első és utolsó rezgés közti fáziskülönbség $(N-1)\Delta\phi$, ami egyenlő $N\Delta\phi$-vel, ha N nagy, amit felteszünk. A 207. ábrából látható, hogy ha $\Delta\phi = 0$ (vagy $\Delta\phi = 2k\pi$, ahol k egész szám), akkor az eredő rezgés amplitúdója maximális és egyenlő Na-val és ha az első fázisállandója zérus, akkor a rezgések a valós tengelyre esnek. Ha pedig $N\Delta\phi = 2\pi$, vagyis $\Delta\phi = 2\pi/N$, akkor az eredő rezgés zérus. Hasonlóképpen zérus az eredő rezgés, ha $N\Delta\phi = n2\pi$, vagyis $\Delta\phi = n\dfrac{2\pi}{N}$, ahol n egy N-nél kisebb egész szám. (Ha ugyanis n egyenlő N-nel vagy N egészszámú sokszorosával, akkor az amplitúdó maximális.)

13. §. Fraunhofer féle elhajlásjelenségek egyszerű résen, vonalas, kereszt- és térbeli rácson

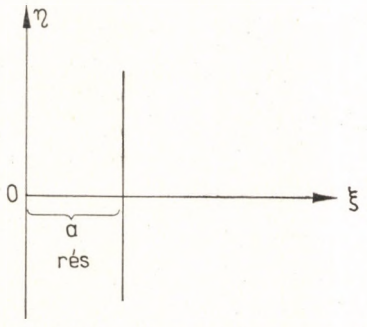
A *Fraunhofer*-féle elhajlásjelenségek definíciójának megfelelően a következőkben feltételezzük, hogy a fényforrás helye és a megfigyelési pont az elhajlást létrehozó nyílástól vagy nyílásoktól nagyon messze van. Ezenkívül feltételezzük, hogy

a nyíláson át párhuzamos sugarak haladnak, amit úgy valósíthatunk meg, hogy a fényforrást egy lencse gyújtópontjába helyezzük és az elhajlási képet ismét egy lencse gyújtósíkjában tanulmányozzuk.

Elhajlásjelenségek egyszerű résen

Ugyanazt a koordinátarendszert vesszük alapul, amelyet a *Kirchhoff*-féle formula levezetésénél használtunk. A rés, mellyel foglalkozunk, legyen az y (ill. η) irányban végtelen kiterjedésű, szélessége legyen a. Ebben az esetben problémánk az y (ill. η) koordinátától független. A fényvektornak időtől független része a P pontban a következő alakú lesz

$$u_P = C \int_0^a e^{-ik(\alpha_0 - \alpha)\xi} \, d\xi \,. \tag{13.13.1}$$



208. ábra. Elhajlásjelenség számítása egyszerű résen

A koordinátarendszer kezdőpontját a nyílás egyik szélére helyeztük. Továbbá feltevésünk értelmében az integrál előtti kifejezés állandónak tekinthető, mely állandót C-vel jelöltük. $f(\xi, \eta)$ pedig, mivel a probléma η-tól független és a magasabb rendű tagok elhagyhatók, $(\alpha_0 - \alpha)\xi$-re redukálódik.

A fenti integrál kiszámítását legcélszerűbb grafikus úton a komplex számsíkon végezni, ugyanis ily módon nagyon szemléletes eredményekhez jutunk. A rést $d\xi$ szélességű elemekre bontjuk és az egyes elemek járulékait összegezzük. ξ tehát 0-tól a-ig növekszik $d\xi$ nagyságú lépésekben, a fáziskülönbség pedig ennek megfelelően $k(\alpha_0 - \alpha)d\xi$ nagyságú lépésekben növekszik. Tehát két egymásután következő elemnek megfelelő komplex számot ábrázoló „vektor" egymással $k(\alpha_0 - \alpha)d\xi$ nagyságú szöget zár be. A rést egyenlő széles elemekre bontjuk, tehát az egyes elemeknek megfelelő komplex számok („vektorok") abszolút értéke egyenlő egymással. Az egyes elemeknek megfelelő komplex vektorok összetevéséből tehát egy sokszorosan megtört vonalat kapunk, melynek elemei egyenlő nagyok. Végtelen kicsi $d\xi$-k esetében a megtört vonal körívvé lesz. Amint láttuk, a megtört vonal, ill. körív akkor záródik először, ha az első és utolsó elemi komplex „vektor" közti fáziskülönbség, $k(\alpha_0 - \alpha)a$ egyenlő 2π-vel. Ekkor az eredő

integrál zérus. Általában az eredő integrál zérus, ha

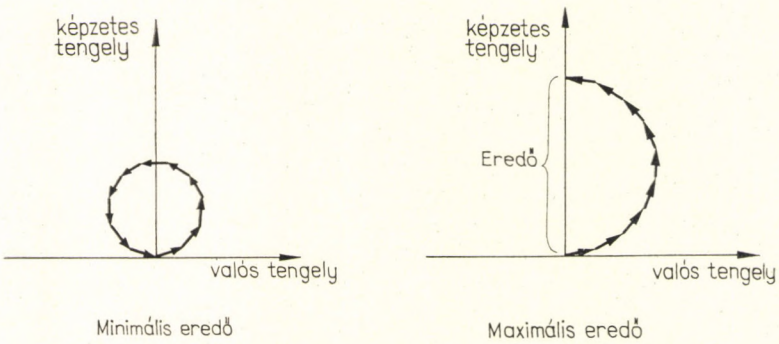
$$k(\alpha_0 - \alpha)a = n2\pi.$$

$$(n = 1, 2, \ldots) \qquad (13.13.2)$$

Ha $k = 2\pi/\lambda$-t beírjuk, nyerjük

$$(\alpha_0 - \alpha)a = n\lambda = 2n\frac{\lambda}{2}. \qquad (13.13.3)$$

Ezzel az egyenlettel meghatározott α irányokban minimális a fényintenzitás.

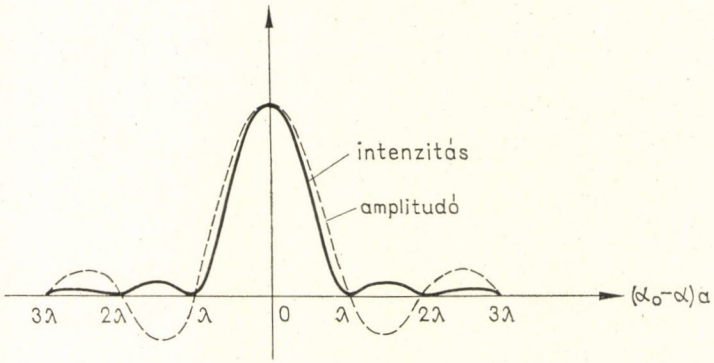


209. ábra. A minimális és a maximális fényintenzitás kialakulása

Ezen minimumok között relatív maximumok vannak, melyek akkor lépnek fel, midőn az elemi komplex vektorok eredője éppen egy körátmérő. Ehhez az szükséges, hogy az első és utolsó elemi komplex „vektor" közti fáziskülönbség π páratlan számú sokszorosa legyen, tehát

$$k(\alpha_0 - \alpha)a = (2n + 1)\pi$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (13.13.4)$$



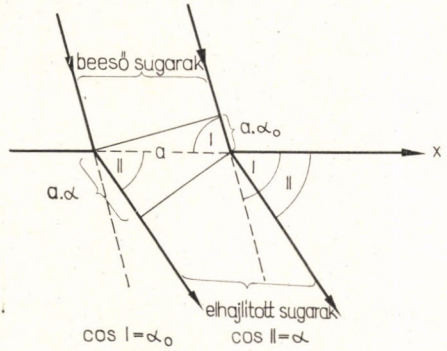
210. ábra. A fényintenzitás eloszlása ernyőn

legyen. Vagyis

$$(\alpha_0 - \alpha)a = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}. \qquad (13.13.5)$$

Ha a beeső fény iránya, α_0, adott, pl. a beesés iránya az x-(ill. ξ) tengelyre merőleges, akkor a fényvektor amplitúdóját könnyen meghatározhatjuk a komplex diagramból mint $(\alpha_0 - \alpha)a$ függvényét. Az amplitúdó négyzete adja az intenzitást. Az eredmény a 212. ábrának megfelelően ábrázolható.

Megemlítjük még, hogy $(\alpha_0 - \alpha)a$ a rés két szélén áthaladó sugarak közti útkülönbséget jelenti. Ez a 211. ábrából közvetlenül látható.



211. ábra. A rés két szélén áthaladó sugarak közti útkülönbség

Elhajlásjelenségek vonalas rácson

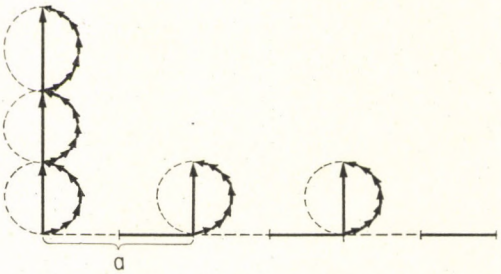
Ha a rés felét elfödjük, akkor, ha n páratlan, azokban az irányokban, ahol az egyszerű résnél minimum volt, maximum lesz, mert a záródó köröknek csak egyik fele van megvalósítva, a másik fele elesik. Ez azonban ebben a speciális esetben csak akkor áll fenn, ha n páratlan, mert csak ekkor kapunk az $\frac{a}{2}$ szélességű résnél bizonyos számú teljes kört és egy félkört, ami a maximális intenzitás feltétele. Ha sok ilyen rést (melynek felét elfödtük) egymás mellé illesztünk, kapjuk a vonalas rácsot. Az összhatást az egyes résektől származó fényvektoreredők összeadásával kapjuk. Mégpedig, mint ebben a speciális esetben a 212. ábrából láthatjuk, az összhatás azokban az irányokban lesz maximális, melyekre fennáll, hogy $(\alpha_0 - \alpha)a$ λ páratlan számú sokszorosa. Ugyanis ebben az esetben az egyes résektől származó eredő fényvektorok fázisa ugyanaz, tehát ezek eredője, vagyis az összhatás maximális lesz.

Általános esetben azonban a rács fényáteresztő és át nem eresztő rései nem egyenlő szélesek, hanem tetszőlegesek. Legyen pl. az áteresztő rács szélessége a_1, az át nem eresztőé a_2. Két szomszédos áteresztő rés megfelelő pontjainak egymástól való távolsága legyen a, vagyis legyen $a_1 + a_2 = a$. Ebben az általános esetben az egyes áteresztő résektől származó eredők mindannyiszor egyenlő irányúak,

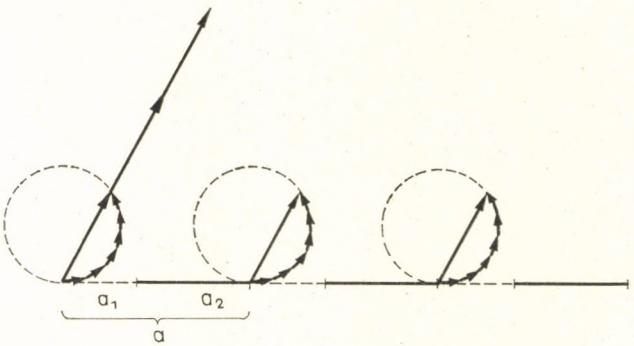
vagyis erősítik egymást, ha

$$(\alpha_0 - \alpha)a = h\lambda, \text{ ahol } h \text{ egész szám.} \qquad (13.13.6)$$

Ha a_1 és a racionális viszonyban vannak egymással, akkor egyes h-kra még most is lehet 0 az intenzitás, de ennek nincs jelentősége. Ha a_1 és a irracionális viszonyban vannak, akkor semmilyen egész h-ra nem lehet 0 az intenzitás.



212. ábra. A vonalas rácson áthaladó fény fényvektorainak eredője abban az esetben, ha a rács fényáteresztő és át nem eresztő részei egyforma szélesek



213. ábra. A fényvektorok eredője általános rács esetében

Minthogy a maximális intenzitások elhajlási szöge λ-tól függ, egy ilyen rács nagyon alkalmas a fény spektrális felbontására. h-t nevezik a *spektrum rendszámának*, ugyanis minden egyes h-hoz egy spektrum tartozik.

A következő feladatunk az, hogy meghatározzuk, milyen irányokban fekszenek a maximumokkal szomszédos minimális intenzitású helyek, vagyis a sötét helyek. A komplex vektordiagramból azonnal látható, hogy az amplitúdó, vagyis az intenzitás először akkor lesz 0, amidőn az egyes áteresztő résektől származó eredők egy zárt poligont alkotnak. Ez akkor következik be először, midőn az első és utolsó áteresztő résnek megfelelő eredők közti fáziskülönbség 2π. Ha tehát a rések száma N, akkor két szomszédos résnek megfelelő fáziskülönbség a h-ad rendű

maximummal szomszédos minimum esetében

$$k(\alpha_0 - \alpha)a = h2\pi + \frac{2\pi}{N}.$$

Tehát minimális az intenzitás, ha

$$(\alpha_0 - \alpha)a = h\lambda + \frac{\lambda}{N}. \tag{13.13.7}$$

Ennek és az előbbi formulának a segítségével kiszámíthatjuk egy *rács feloldóképességét*, ami alatt a legkisebb, még észlelhető relatív hullámhosszkülönbséget, ill. annak reciprokját értjük. Tapasztalati tény, hogy két hullámhosszt még éppen külön tudunk észlelni, ha az egyikre nézve maximális intenzitású irányok (ill. helyek) összeesnek a másikra nézve minimális intenzitású irányokkal (ill. helyekkel). Tegyük fel, hogy a $\lambda + d\lambda$ hullámhossznak az α irányban maximuma van, vagyis

$$(\alpha_0 - \alpha)a = h(\lambda + d\lambda).$$

Továbbá tegyük fel, hogy a λ hullámhossz minimumai ugyanezekbe az irányokba esnek, vagyis

$$(\alpha_0 - \alpha)a = h\lambda + \frac{\lambda}{N}.$$

Innen nyerjük, hogy

$$hd\lambda = \frac{\lambda}{N},$$

vagyis

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{hN}. \tag{13.13.8}$$

A feloldóképességet, A-t ennek reciprokával, vagyis $\frac{\lambda}{d\lambda}$-val szokás definiálni. Tehát nyerjük, hogy

$$A = \frac{\lambda}{d\lambda} = hN. \tag{13.13.9}$$

Megemlítjük még, hogy nemcsak olyan rácsok léteznek, melyek fényátreresztő és át nem eresztő vonalakból állnak, hanem az áteresztő rácselemeket helyettesíthetik olyan elemek is, melyek reflektálják vagy szórják a fényt.

Elhajlásjelenségek keresztrácson, vagyis kétdimenziós rácson

Keresztrács alatt olyan berendezést értünk, melynél a nyílások a ξ irányban pl. a, az η irányban pedig b távolságban helyezkednek el egymás után. Az egydimenziós rácsok analógiájára nyerjük, hogy maximális intenzitást olyan α, β irányok-

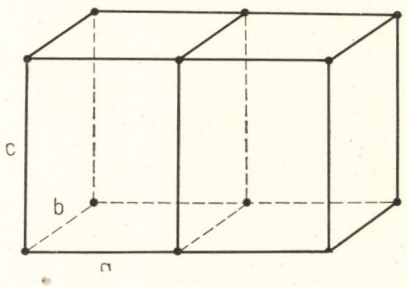
ban kapunk, melyekre fennáll, hogy

$$(\alpha_0 - \alpha)a = h_1\lambda,$$
$$(\beta_0 - \beta)b = h_2\lambda. \qquad (13.13.10)$$

Az α, β irány ezzel a két feltétellel egyértelműen meg van határozva.

Elhajlásjelenségek térbeli (háromdimenziós) rácson

Míg a kétdimenziós rácsoknak nincs gyakorlati jelentőségük, addig a térbeli, vagyis háromdimenziós rácsoknak rendkívül nagy jelentőségük van. Ugyanis nagyon rövid hullámhosszúságú fénynek, röntgensugaraknak mesterségesen előállított vonalas rácsokon történő elhajlásakor fellépő elhajlási szögek (hacsak bizonyos fogásokat nem használunk) elenyészően kicsinyek, úgyhogy ezekkel igen rövid hullámhosszúságú sugarakat spektrálisan felbontani nem lehet. Ilyen igen rövid hullámhosszúságú sugarak felbontásához alkalmasak azok a térbeli rácsok, melyeket a természet a kristályokban nyújt számunkra. A rácselemeket itt az atomok szolgáltatják, melyek a kristályokban szabályos módon vannak elrendezve. Röntgensugaraknak kristályokon történő elhajlását M. v. LAUE mutatta ki 1912-ben, amivel egyszerre bizonyította be a röntgensugarak hullámtermészetét és a kristályok rácsszerkezetét. Mi egyszerű rácsokra szorítkozunk, melyeknél 3 egymásra merőleges irányban a, b és c távolságban következnek egymásután az atomok. Speciális eset gyanánt adódnak ebből azok a rácstípusok, melyeknél a, b, c



214. ábra. Egyszerű rács sematikus képe

közül kettő, vagy mind a három egyenlő. Az a, b, c élhosszúságú hasábot elemi hasábnak fogjuk nevezni. Az atomok egymáshoz való távolságaikhoz viszonyítva a valóságban sokkal nagyobbak, mint ahogy az az ábrán látható. Az atomok a beeső hullám hatására szekunder hullámok kiindulási pontjává válnak, tehát a szekunder hullámforrások jelen esetben nemcsak egy matematikai formula interpretációjául szolgálnak, mint azt az üres térben a *Huyghens*-elvnél, ill. annak matematikai alakjánál, a *Kirchhoff*-féle formulánál láttuk, hanem a hullámforrások itt fizikai realitások. Minthogy a szekunder hullámokat a beeső hullám gerjeszti, a szekunder hullámok fázisban vannak, a köztük levő fázis-

különbség tisztán az útkülönbségtől származik, hasonlóan mint eddigi tárgyalásainkban a fiktív szekunder hullámok esetében. Tehát az itt fennálló esetet ugyanúgy lehet tárgyalni, mint az előbbieket. Így maximális intenzitást kapunk azokban az α, β, γ irányokban, melyekre fennáll, hogy

$$\begin{aligned}
(\alpha_0 - \alpha)a &= h_1\lambda, & \alpha_0 - \alpha &= \frac{h_1\lambda}{a}, & \alpha &= \alpha_0 - \frac{h_1\lambda}{a}, \\
(\beta_0 - \beta)b &= h_2\lambda, & \beta_0 - \beta &= \frac{h_2\lambda}{b}, & \beta &= \beta_0 - \frac{h_2\lambda}{b}, \\
(\gamma_0 - \gamma)c &= h_3\lambda, & \gamma_0 - \gamma &= \frac{h_3\lambda}{c}, & \gamma &= \gamma_0 - \frac{h_3\lambda}{c},
\end{aligned} \tag{13.13.11}$$

ahol h_1, h_2, h_3 egész számok, α_0, β_0, γ_0 a beesés irányának iránykoszinuszai. Mivel α, β, γ-nak ki kell elégítenie az

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

egyenletet, problémánknak nem minden λ-ra van megoldása, hanem csak azokra, melyekre fennáll, hogy

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 - 2\left(\frac{h_1}{a}\alpha_0 + \frac{h_2}{b}\beta_0 + \frac{h_3}{c}\gamma_0\right)\lambda + \frac{h_1^2\lambda^2}{a^2} + \frac{h_2^2\lambda^2}{b^2} + \frac{h_3^2\lambda^2}{c^2} = 1,$$

vagyis

$$\lambda = 2\,\frac{\dfrac{h_1}{a}\alpha_0 + \dfrac{h_2}{b}\beta_0 + \dfrac{h_3}{c}\gamma_0}{\dfrac{h_1^2}{a^2} + \dfrac{h_2^2}{b^2} + \dfrac{h_3^2}{c^2}}. \tag{13.13.12}$$

Szemléletesen értelmezhetjük az elhajlásjelenséget kristályokon, ha a (13.11) második oszlopában lévő formulákat négyzetre emeljük és összeadjuk, amidőn nyerjük

$$\begin{aligned}
\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 - 2(\alpha_0\alpha + \beta_0\beta + \gamma_0\gamma) + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \\
= \lambda^2\left(\frac{h_1^2}{a^2} + \frac{h_2^2}{b^2} + \frac{h_3^2}{c^2}\right).
\end{aligned} \tag{13.13.13}$$

Ha a beeső és az elhajlított sugarak iránya közti szöget ϑ-val jelöljük, akkor

$$\cos\vartheta = \alpha_0\alpha + \beta_0\beta + \gamma_0\gamma.$$

Behelyettesítve ezt a (13.13) formulánkba, nyerjük

$$2(1 - \cos\vartheta) = \lambda^2\left(\frac{h_1^2}{a^2} + \frac{h_2^2}{b^2} + \frac{h_3^2}{c^2}\right),$$

$$2\sin\frac{\vartheta}{2} = \lambda\sqrt{\frac{h_1^2}{a^2} + \frac{h_2^2}{b_2} + \frac{h_3^2}{c^2}}. \tag{13.13.14}$$

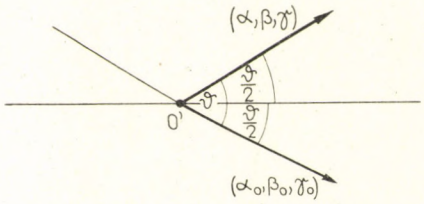
Ha h_1, h_2, h_3-nak van közös m egész számú faktora, akkor a formula így is írható

$$2 \sin \frac{\vartheta}{2} = \lambda m \sqrt{\frac{h_1^{*2}}{a^2} + \frac{h_2^{*2}}{b^2} + \frac{h_3^{*2}}{c^2}}, \tag{13.13.15}$$

ahol

$$h_1^* = \frac{h_1}{m}, \qquad h_2^* = \frac{h_2}{m}, \qquad h_3^* = \frac{h_3}{m} \tag{13.13.16}$$

és h_1^*, h_2^*, h_3^* relatív prímszámok.



215. ábra. A rács tükröző síkja

Ennek a formulának a következő szemléletes jelentést tulajdoníthatjuk. Az elhajlás egy O' rácsponton úgy fogható fel, mintha a beeső sugár a beeső és elhajlított sugár síkjára merőleges síkon tükröződne, mely sík a beeső és elhajlított sugár közti ϑ szöget felezi és átmegy az O' rácsponton. A tükröző sík egyenletét olyan x', y', z' koordinátarendszerben, melynek origója az O' rácspont és melynek tengelyei összeesnek annak az elemi hasábnak (cellának) éleivel, melynek csúcspontja O', a következőképpen kapjuk. O'-ből a beeső és az elhajlított sugarak irányában egységvektorokat mérünk fel. A sík pontjai azáltal vannak jellemezve, hogy a két egységvektor végpontjaitól egyenlő távolságra vannak, tehát

$$(x' - \alpha_0)^2 + (y' - \beta_0)^2 + (z' - \gamma_0)^2 = (x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 + (z' - \gamma)^2,$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$2(\alpha_0 x' + \beta_0 y' + \gamma_0 z') = 2(\alpha x + \beta y + \gamma z),$$

vagyis a sík egyenlete

$$(\alpha_0 - \alpha)x' + (\beta_0 - \beta)y' + (\gamma_0 - \gamma)z' = 0.$$

Behelyettesítve a maximális intenzitásra vonatkozó feltételeket, nyerjük

$$\frac{h_1 x'}{a} + \frac{h_2 y'}{b} + \frac{h_3 z'}{c} = 0.$$

m-mel rövidítve

$$\frac{h_1^* x'}{a} + \frac{h_2^* y'}{b} + \frac{h_3^* z'}{c} = 0. \tag{13.13.17}$$

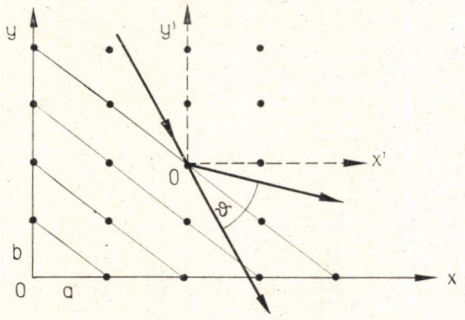
Ez egy olyan sík egyenlete ugyanis, melyen végtelen sok rácspont van (végtelen kristály esetében), az egyenletet kielégíti a következő értékrendszer

$$x' = th_3^* a, \quad y' = th_3^* b, \quad z' = -t(h_1^* + h_2^*)c, \tag{13.13.18}$$

ahol t tetszőleges egész szám. Behelyettesítve (13.17)-be

$$th_1^* h_3^* + th_2^* h_3^* - th_3^* h_1^* - th_3^* h_2^* = 0$$

tetszőleges egész szám lévén, állításunk igazolva van.



216. ábra. A tükröző sík egyenletének meghatározása

Vezessünk be az x', y', z' koordinátarendszer helyett egy x, y, z rendszert, melynek tengelyei x', y', z'-vel párhuzamosak és melynek origója O, egy másik rácspont. A 216. ábrán az egyszerűség kedvéért keresztmetszetben (vagyis két dimenzióban) tüntettük fel a viszonyokat. Legyenek az O' rácspont koordinátái az x, y, z rendszerben

$$u_1 a, \quad u_2 b, \quad u_3 c,$$

ahol u_1, u_2, u_3 egész számok.

A transzformáció formulái tehát a következők

$$x' = x - u_1 a,$$

$$y' = y - u_2 b,$$

$$z' = z - u_3 c.$$

Beírva ezeket a tükröző sík fentebb nyert egyenletébe, az x, y, z rendszerben a sík egyenletére kapjuk

$$\frac{h_1^*}{a} x + \frac{h_2^*}{b} y + \frac{h_3^*}{c} z = h_1^* u_1 + h_2^* u_2 + h_3^* u_3 = s, \tag{13.13.19}$$

ahol s-sel jelöltük a $h_1^* u_1 + h_2^* u_2 + h_3^* u_3$ egész számot. Ez tehát egy olyan sík egyenlete, ill. mivel s tetszőleges, oly egymással párhuzamos síkok seregének egyenlete, melyek mindegyikén végtelen kiterjedésű kristály esetében végtelen sok rácspont

van, véges kristály esetében pedig azt tudjuk a sereg mindegyik síkjáról, hogy rácspontokkal van borítva. Az ilyen síkot hálózati síknak nevezzük. Egy hálózati síksereget indexekkel szokás jellemezni. Ezek az indexek azok a legkisebb és egymáshoz képest relatív prímszámok, melyek úgy aránylanak egymáshoz, mint egy síknak a 3 tengelyből lemetszett és a rácsponttávolságokban (vagyis a, b, c-ben) mért darabjainak reciprokai. Így pl. a (0,1,0) indexekkel jellemzett síksereg síkjai az x- és z-tengelyből végtelen nagy darabokat metszenek le, vagyis az xz síkkal párhuzamosak, az y-tengelyből pedig rendre b, $2b$, $3b$, . . . darabokat metszenek le. Írjuk a fenti hálózati sík egyenletét a következő alakban

$$\frac{h_1^*}{as}x+\frac{h_2^*}{bs}y+\frac{h_3^*}{cs}z=1. \tag{13.13.20}$$

Ez olyan sík egyenlete, mely a tengelyekből $\frac{as}{h_1^*}$, $\frac{bs}{h_2^*}$, $\frac{cs}{h_3^*}$ darabokat metsz le. Ezek a, b, c-ben mért reciprokai, mivel s közös faktor, éppen úgy aránylanak, mint h_1^*, h_2^*, h_3^*. Ezek tehát annak a hálózati síkseregnek indexei, melynek a tükröző sík tagja. Legyen a síksereg s paraméterhez tartozó tagjának az O origótól való távolsága d_s; d_s-nek az x, y, z-tengelyekkel alkotott hajlásszögei pedig legyenek rendre ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3. Ekkor fennáll, hogy

$$\frac{ds}{\frac{as}{h_1^*}}=\frac{h_1^*d_s}{as}=\cos\phi_1\,,\quad \frac{h_2^*d_s}{bs}=\cos\phi_2\,,\quad \frac{h_3^*d_s}{cs}=\cos\phi_3\,. \tag{13.13.21}$$

Ezt a 3 egyenletet négyzetre emelve és összeadva nyerjük

$$\frac{d_s^2}{s^2}\left(\frac{h_1^{*2}}{a^2}+\frac{h_2^{*2}}{b^2}+\frac{h_3^{*2}}{c^2}\right)=1\,,$$

$$d_s=\frac{s}{\sqrt{\frac{h_1^{*2}}{a^2}+\frac{h_2^{*2}}{b^2}+\frac{h_3^{*2}}{c^2}}}\,. \tag{13.13.22}$$

Ez a formula szolgáltatja az s paraméterhez tartozó sík távolságát O-tól. Amint a formulából látható, két szomszédos (két egymásután következő paraméterértékhez tartozó) síknak egymástól való távolsága

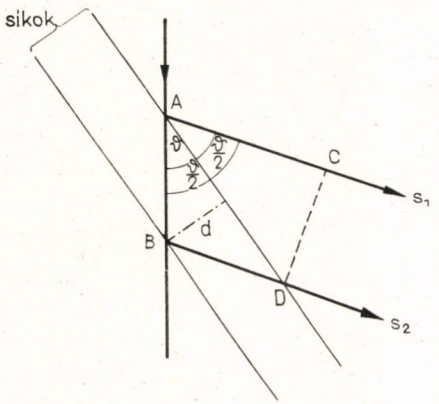
$$d=\frac{1}{\sqrt{\frac{h_1^{*2}}{a^2}+\frac{h_2^{*2}}{b^2}+\frac{h_3^{*2}}{c^2}}}\,. \tag{13.13.23}$$

Ugyanekkora a távolsága a kezdőponthoz legközelebb eső, de azon át nem menő síknak a kezdőponttól; h_1^*, h_2^*, h_3^* tehát éppen ennek a síknak a három tengelyből lemetszett és a rácsponttávolságokban mért darabjainak reciprokaival egyenlő.

Ha tehát a (13.15) formulában h_1^*, h_2^*, h_3^*-ot, mint hálózati síkok indexeit értelmezzük és a gyököt a (13.23) formulából d-vel fejezzük ki, nyerjük az un. *Bragg*-féle formulát

$$2d \sin \frac{\vartheta}{2} = m\lambda. \qquad (13.13.24)$$

Térbeli rácsok esetén tehát a maximális intenzitás irányainak ezt a feltételt kell kielégíteni, mely az eredeti feltételeknek egy (összevont) más alakja.



217. ábra. A maximális intenzitás irányainak meghatározása

A (13.24) egyenletnek igen szemléletes jelentése van. Ugyanis, mint a 217. ábra mutatja, az elhajlásjelenséget formálisan mint egymással párhuzamos hálózati síkokon történő reflexiót lehet felfogni, ha a két reflektált sugár útkülönbsége a hullámhossz egész számú sokszorosa. Az s_1 és s_2 sugarak közti útkülönbség

$$AB + BD - AC = \frac{2d}{\sin \frac{\vartheta}{2}} - 2d \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} = 2d \left(\frac{1 - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \right) =$$

$$= 2d \frac{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}} = 2d \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

Ezzel állításunkat igazoltuk. Még egyszer kiemeljük, hogy itt a valóságban nem történik reflexió, a reflexió csak az elhajlásjelenség egyszerű értelmezésére szolgál. Éppen ez az egyszerű értelmezési mód mutatja, hogy teljes spektrumot ϑ változtatásával nyerhetünk, amit azáltal érhetünk el, hogy a kristályt forgatjuk a beeső és a reflektált sugár síkjára merőleges tengely körül.

Ha röntgensugarat kristályporra bocsátunk, érdekes elhajlási képet kapunk. A kristályporban minden lehetséges irányban fekszenek hálózati síkok, tehát minden hálózati síkhoz tartozó lehetséges eltérés elő fog fordulni. Mivel a kristályporban a kis kristályok minden lehetséges orientációban előfordulnak, a nyert elhajlási kép a beeső sugár körül szimmetrikus lesz, vagyis az eltérített sugarak kúpfelületeken fekszenek, melyeket egy hengerszerűen meghajlított filmen szokás észlelni. Ez a módszer DEBYE-től és SCHERRER-től származik.

Az itt tárgyalt elhajlásjelenség nagyon fontos szerepet játszik. Ugyanis, ha a röntgensugár hullámhossza, λ ismeretes, akkor az elhajlási képből meghatározható a kristályszerkezet. Ha pedig a kristályszerkezet ismeretes, akkor az elhajlási képből a röntgensugár hullámhossza határozható meg.

Ezzel az elhajlásjelenségek tárgyalását befejeztük, a *Fresnel*-féle elhajlásjelenségekkel nem foglalkozunk.

TIZENNEGYEDIK FEJEZET

AZ ELEKTRODINAMIKA ALAPEGYENLETEINEK EGYSÉGES LEVEZETÉSE ÉS AZ EZEKBŐL LEVONT ÁLTALÁNOS KÖVETKEZTETÉSEK

Eddigi tárgyalásainkban tapasztalati tényekből kiindulva építettük fel az elektrodinamikát. Célunk az volt, hogy induktív úton eljussunk az általános törvényekhez, melyekből azután dedukció útján újabb ismeretekre tettünk szert. Most, miután az elektrodinamika egyes fejezetein végigmentünk, célszerű az alapegyenleteket más úton, egységesen is származtatni és az egyenletekből kiindulva a már tárgyalt anyagot osztályozni. Azonkívül szükséges, hogy eddigi ismereteinket még néhány általános jellegű fogalommal és tétellel egészítsük ki.

1. §. A Maxwell-féle egyenletek és a határfeltételek egységes származtatása

A *Maxwell*-féle egyenletek az elektrodinamika összes kísérleti tényeit magukban foglalják. Segítségükkel elvben bármilyen gyakorlati feladat megoldható. Ebben a fejezetben a *Maxwell*-féle egyenleteket és a hozzájuk tartozó határfeltételeket néhány egyszerű alapfeltevésből fogjuk leszármaztatni. Ezek az alapfeltevések a téregyenletek linearitása mellett az elektromágneses tér energiaviszonyait posztulálják. Ezeket az energiakifejezéseket az előző fejezetekben már megismertük, most pedig azt fogjuk bemutatni, hogy belőlük az elektrodinamika alapegyenletei egységes módon levezethetők. Alapfeltevéseink a következők lesznek:

1. Az elektromos energia sűrűsége

$$w_e = \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathfrak{E}^2 . \tag{14.1.1}$$

2. A mágneses energia sűrűsége

$$w_m = \frac{\mu}{8\pi} \mathfrak{H}^2 . \tag{14.1.2}$$

3. Az energiának az időegységben adott felületen való átáramlását a következő vektor felületi integrálja adja

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] . \tag{14.1.3}$$

4. A térfogategységben az időegység alatt *Joule*-féle hővé átalakuló elektromos energia

$$\frac{dw_e}{dt} = \sigma \mathfrak{E}^2 . \tag{14.1.4}$$

5. Tapasztalati tény, hogy az elektromágneses terek lineárisan (vagyis egyszerűen) szuperponálódnak. Ez megköveteli, hogy a téregyenletek $\mathfrak{E}$-ben és $\mathfrak{H}$-ban lineárisak és homogének legyenek. (A ferromágneses testek esetétől, ahol μ-nek $\mathfrak{H}$-tól való függése miatt az egyenletek nem lineárisak, eltekintünk.)

Ezekből a feltételekből azonnal következnek a téregyenletek homogén közegre. Ugyanis adott V térfogatban levő elektromágneses energia időegységre eső fogyása egyenlő az időegységben hővé alakult energia és a térfogatot határoló F felületen át az időegység alatt kiáramló energia összegével. Tehát

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2 + \frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^2\right) dV = \int_V \sigma \mathfrak{E}^2 dV + \oint_F \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]_n dF .$$

Vagyis

$$\int_V \left(-\frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} - \frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right) dV = \int_V \sigma \mathfrak{E}^2 dV + \int_F \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]_n dF .$$

Alkalmazzuk a jobboldal második tagjára GAUSS tételét és vegyük figyelembe, hogy

$$\operatorname{div}[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] = \mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathfrak{E} - \mathfrak{E} \operatorname{rot} \mathfrak{H},$$

akkor nyerjük, hogy

$$\int_V \left(-\frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} - \frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right) dV = \int_V \sigma \mathfrak{E}^2 dV + \int_V \frac{c}{4\pi}(\mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathfrak{E} - \mathfrak{E} \operatorname{rot} \mathfrak{H})\, dV .$$

Rendezve

$$\int_V \left\{\left(\varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi\sigma\mathfrak{E} - c \operatorname{rot} \mathfrak{H}\right)\mathfrak{E} + \left(\mu \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathfrak{E}\right)\mathfrak{H}\right\} dV = 0 .$$

Mivel ennek az integrálnak minden V térfogatra el kell tűnnie, az integrandusnak is el kell tűnnie. Ez akkor következik be, ha $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ együtthatói eltűnnek, miáltal egyúttal az 5. feltétel is teljesítve van. Tehát

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\sigma\mathfrak{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{i}, \tag{14.1.5}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \tag{14.1.6}$$

vagyis megkaptuk a két *Maxwell*-egyenletet.

Éppen így nyerjük a határfeltételeket abból a természetes követelményből, hogy a határfelületen az az energia, amely az egyik közegből odaáramlik az időegység alatt, a másik közegben az időegység alatt eláramoljon, mivel a felületen nem veszhet el és nem halmozódhat fel energia. Válasszuk a felület normálisát z-tengely gyanánt, akkor ez azt jelenti, hogy $\mathbf{S}_z$ komponensei a két közegben egyenlők, vagyis hogy

$$S_z^{(1)} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}^{(1)}, \mathfrak{H}^{(1)}]_z = S_z^{(2)} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}^{(2)}, \mathfrak{H}^{(2)}]_z ,$$

tehát

$$\mathfrak{E}_x^{(1)}\mathfrak{H}_y^{(1)} - \mathfrak{H}_x^{(1)}\mathfrak{E}_y^{(1)} = \mathfrak{E}_x^{(2)}\mathfrak{H}_y^{(2)} - \mathfrak{H}_x^{(2)}\mathfrak{E}_y^{(2)} .$$

Minthogy az energiaáram folytonossági feltételének bármilyen elektromágneses térre érvényesnek kell lennie, következik, hogy

$$\mathfrak{E}_x^{(1)} = \mathfrak{E}_x^{(2)}, \qquad \mathfrak{H}_x^{(1)} = \mathfrak{H}_x^{(2)},$$
$$\mathfrak{E}_y^{(1)} = \mathfrak{E}_y^{(2)}, \qquad \mathfrak{H}_y^{(1)} = \mathfrak{H}_y^{(2)},$$

amiből pedig következik a két ismert határfeltétel

$$\mathfrak{E}_t^{(1)} = \mathfrak{E}_t^{(2)}, \qquad \mathfrak{H}_t^{(1)} = \mathfrak{H}_t^{(2)}, \tag{14.1.7}$$

ahol a t index a tangenciális komponenst jelenti.

Az itt nyert eredmény által, mely szerint $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ tangenciális komponense két közeg határfelületén folytonosan megy át, a normális komponensek viselkedése a határfelületen már meg van határozva, mert $\mathfrak{E}$-nek és $\mathfrak{H}$-nak mindegyik közegben ki kell elégítenie a *Maxwell*-egyenleteket. Ennek alapján ki lehet mutatni, hogy $\mathfrak{D}$ és $\mathfrak{B}$ normális komponensei általában ($\mathfrak{D}_n$, ha a felületen nincs elektromos felületi töltés, $\mathfrak{B}_n$ pedig mindig) folytonosan mennek át a felületen, ami azt jelenti, hogy $\mathfrak{E}_n$ és $\mathfrak{H}_n$ ugrást szenved. Ennek kimutatásával itt nem foglalkozunk.

2. §. Az elektromágneses jelenségek osztályozása és egyes speciális terek alapegyenleteinek levezetése az általános alapegyenletekből

Az általános elektromágneses tér alapegyenletei a következők

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{i}_V + \frac{4\pi\rho\mathbf{v}}{c}, \tag{14.2.1}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \tag{14.2.2}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi\rho, \tag{14.2.3}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \tag{14.2.4}$$

$$\mathbf{i}_V = \sigma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e), \tag{14.2.5}$$

$$q = \sigma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e)^2, \tag{14.2.6}$$

$$\mathbf{K} = e\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathfrak{H}]\right). \tag{14.2.7}$$

Elektro- és magnetosztatikus terek

Jellemzőjük, hogy az időben állandóak és környezetükben sem lép fel olyan változás, mely fenntartásukhoz szükséges volna. Tehát

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0, \quad q = 0, \quad \mathbf{i}_V = 0, \quad \mathbf{v} = 0.$$

Vagyis az alapegyenletek

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi\rho.$$

Ezek az elektro- és magnetosztatika ismert alapegyenletei.

Stacionárius terek

Jellemzőjük, hogy az időben változatlanok, de hőfejlődéssel kapcsolatosak, tehát $\partial\mathfrak{D}/\partial t = 0$, $\partial\mathfrak{B}/\partial t = 0$. Az alapegyenletek tehát, ha csak vezetési áramra szorítkozunk

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{i}_V, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi\rho,$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0, \qquad \mathbf{i}_V = \sigma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e),$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \qquad q = \sigma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e)^2.$$

Ezek a stacionárius terek már ismert alapegyenletei.

Kvázistacionárius (időben lassan változó) terek

Jellemzőjük, hogy a változások az időben lassan történnek, vagyis hogy

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \ll \mathbf{i}_V.$$

Tehát az alapegyenletek, melyekkel már megismerkedtünk, a következők

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}_V, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \qquad \mathbf{i}_V = \sigma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e),$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi\rho, \qquad q = \sigma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e)^2.$$

Tetszőlegesen gyors váltakozású terek

Ezek esetében a legáltalánosabb egyenletekből kell kiindulni, melyek üres tér esetében a következőkre redukálódnak

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \qquad \mathbf{i}_V = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0, \qquad q = 0.$$

Az itt tárgyalt esetek mindegyikéhez még hozzájárul a (2.7) egyenlet. Statikus esetben $\mathbf{v} = 0$, tehát ott $\mathbf{K} = e\mathfrak{E}$. A többi esetben, ha a térbeli töltések mozognak, $\mathbf{K}$-ban a második tag is fellép.

3. §. Elektromágneses potenciálok

Legyen adva egy tér, melyben $\mathbf{v}$ sebességgel mozgó ρ térbeli sűrűségű elektromos töltések vannak jelen. Ilyen teret is üres térnek szokás nevezni, és benne a következő alapegyenletek állnak fenn

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi\rho\mathbf{v}, \tag{14.3.1}$$

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \tag{14.3.2}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\rho, \tag{14.3.3}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0, \tag{14.3.4}$$

és kiegészítésül

$$\mathbf{f} = \rho\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathfrak{H}]\right), \tag{14.3.5}$$

ahol $\mathbf{f}$ a térfogategységben levő töltésre ható erő.

A tér meghatározását itt is potenciálok bevezetésével egyszerűsíthetjük, melyekkel $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ egyszerűen fejezhetők ki.

A (3.4) egyenlet teljesül, ha $\mathfrak{H}$ az $\mathfrak{A}$ vektorpotenciál rotációja, vagyis ha

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}. \tag{14.3.6}$$

Beírva (3.2)-be nyerjük, hogy

$$\operatorname{rot}\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Ez az egyenlet pedig akkor elégíthető ki, ha $\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$ egy Φ skaláris potenciál (negatív) gradiense, vagyis ha

$$\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \Phi.$$

Tehát

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}. \tag{14.3.7}$$

Ezzel $\mathfrak{E}$-t és $\mathfrak{H}$-t előállítottuk Φ-vel és $\mathfrak{A}$-val. Φ és $\mathfrak{A}$ az ún. elektromágneses potenciálok, az első a skaláris, a második a vektorpotenciál. Statikus esetben ezek megegyeznek a közönséges elektrosztatikus potenciállal, U-val, ill. a stacionárius és kvázistacionárius terek tárgyalásánál bevezetett vektorpotenciállal, ha $\rho\mathbf{v}$ helyett $\mathbf{i}$ áll.

(3.6) és (3.7) kielégítik a (3.2) és (3.4) egyenleteket. Vizsgáljuk meg, hogy Φ és $\mathfrak{A}$ milyen választása mellett elégíti ki (3.6) és (3.7) a (3.1) és (3.3) egyenleteket is. Helyettesítsük (3.6)-ot és (3.7)-et (3.1)-be, ekkor nyerjük

$$c \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} + \operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = 4\pi\rho\mathbf{v}.$$

rot rot $\mathfrak{A}$ ismert átalakításával

$$c(\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{A} - \Delta\mathfrak{A}) + \operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = 4\pi\rho\mathbf{v},$$

$$-\Delta\mathfrak{A} + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{A}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v}.$$

A vektorpotenciálhoz hozzáadhatunk akármilyen gradiensfüggvényt, $\mathfrak{A}$ rotációja akkor is $\mathfrak{H}$-val egyenlő, mert a gradiens rotációja eltűnik. Tehát a skaláris potenciálhoz konstanst adhatunk hozzá anélkül, hogy a tér megváltozna, a vektorpotenciálhoz pedig gradiensfüggvényt adhatunk hozzá a tér megváltoztatása nélkül. Ez a határozatlanság lehetővé teszi, hogy a vektorpotenciálra még egy feltételt kössünk ki, mégpedig, hogy

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{A} = 0 \tag{14.3.8}$$

legyen. Hogy ez a feltétel nem jelent Φ-re és $\mathfrak{A}$-ra lényeges megszorítást, azt még külön kimutatjuk tárgyalásunk végén. Egyelőre tegyük fel, hogy (3.8) teljesül, ekkor a fenti egyenlet a következő alakú lesz

$$\Delta\mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v}. \tag{14.3.9}$$

Ezek után helyettesítsük be (3.7)-et (3.3)-ba és állapítsuk meg, hogy (3.7) milyen feltétel mellett elégíti ki (3.3)-at. A behelyettesítésből adódik

$$-\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathfrak{A} = 4\pi\rho\,.$$

(3.8)-ból differenciálással következik, hogy

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathfrak{A} = -\frac{1}{c}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\,.$$

Ezt felhasználva és figyelembe véve, hogy

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = \Delta\Phi,$$

nyerjük, hogy

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho\,. \tag{14.3.10}$$

Ezek szerint (3.6) és (3.7) kielégítik a négy alapegyenletet, ha az elektromágneses potenciálok eleget tesznek a (3.9) és (3.10) inhomogén hullámegyenleteknek. Ez összesen 4 egyenlet, mert az első vektoregyenlet, melynek három komponense van. Stacionárius, ill. statikus esetben ezek átmennek a *Poisson*-egyenletbe.

Még kimutatjuk, hogy az $\mathfrak{A}$-ra és Φ-re kirótt (3.8) feltétel lényeges megszorítást nem tartalmaz. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A}_0$ és Φ_0 kielégítik a

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A},$$

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}$$

egyenleteket, valamint $\mathfrak{A}_0$ és Φ_0 nem tesz eleget a (3.8) feltételnek.

Könnyen belátható, hogy

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 - \operatorname{grad}\chi,$$

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}$$

szintén kielégítik a (3.6) és (3.7) egyenleteket, ugyanis

$$\operatorname{rot}\mathfrak{A} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}_0 - \operatorname{rot}\operatorname{grad}\chi = \operatorname{rot}\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{H}$$

és

$$-\operatorname{grad}\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}=-\operatorname{grad}\Phi_0-\frac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial\chi}{\partial t}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}_0}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\chi=$$

$$=-\operatorname{grad}\Phi_0-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}_0}{\partial t}=\mathfrak{E}.$$

Továbbá $\mathfrak{A}$ és Φ kielégítik a (3.8) feltételt is, ha χ-t alkalmasan választjuk. Ugyanis $\mathfrak{A}$-t és Φ-t (3.8)-ba helyettesítve nyerjük

$$\operatorname{div}\mathfrak{A}_0-\operatorname{div}\operatorname{grad}\chi+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=0,$$

$$\Delta\chi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=\operatorname{div}\mathfrak{A}_0+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}. \tag{14.3.11}$$

Ha tehát χ ezt az egyenletet kielégíti, akkor $\mathfrak{A}$ és Φ kielégíti (3.8)-at. χ-nek ilyen választásával tehát mindig elérhető, hogy $\mathfrak{A}$ és Φ eleget tegyen (3.8)-nak.

Elektromágneses potenciálok tárgyalásainkban már előfordultak. A gömbhullámok esetében a $\mathfrak{H}$ és $\mathfrak{E}$ vektorok a következő kifejezésekkel voltak egyenlők

$$\mathfrak{H}=\frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t},$$

$$\mathfrak{E}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{Z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}.$$

Összehasonlítva (3.6) és (3.7) formulákkal, látjuk, hogy

$$\mathfrak{A}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t},$$

$$\Phi=-\operatorname{div}\mathfrak{Z}.$$

A (3.8) feltétel teljesül, ugyanis

$$\operatorname{div}\mathfrak{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\frac{1}{c}\operatorname{div}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-\operatorname{div}\mathfrak{Z})=0.$$

Az $\mathfrak{A}$-t és Φ-t meghatározó egyenletek pedig a következő alakúak

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\Delta\mathfrak{Z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}\right\}=-\frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v},$$

$$-\operatorname{div}\left\{\Delta\mathfrak{Z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}\right\}=-4\pi\rho.$$

Ezek az egyenletek teljesülnek, ha a térben nincsenek töltések, vagyis, ha $\rho=0$, $\rho\frac{\mathbf{v}}{c}=0$ és $\mathfrak{Z}$ eleget tesz a hullámegyenletnek.

4. §. Retardált potenciálok

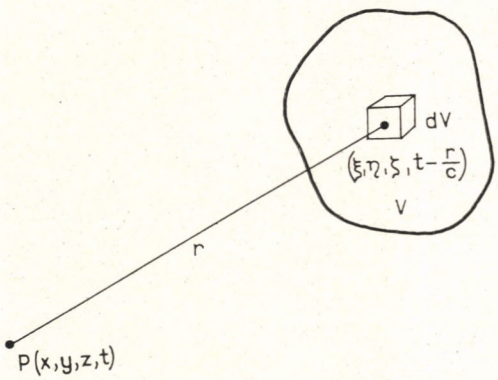
A Φ-t és $\mathfrak{A}$-t meghatározó (3.10) és (3.9) differenciálegyenletek megoldása

$$\Phi(x, y, z, t) = \int_V \frac{\rho\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}\right)}{r} dV, \tag{14.4.1}$$

$$\mathfrak{A}(x, y, z, t) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\rho\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}\right) \mathbf{v}\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}\right)}{r} dV, \tag{14.4.2}$$

ahol x, y, z a P pont koordinátái, amelyben a potenciálokat a t időben meg akarjuk határozni; ξ, η, ζ a $dV = d\xi d\eta d\zeta$ térfogatelem koordinátái és

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}.$$



218. ábra. A retardált potenciál számítása

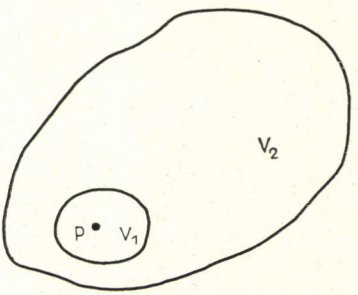
Az integrációt ki kell terjeszteni a töltések által betöltött V tartományra, de szemben az eddig tárgyalt potenciálokkal, ρ-t és $\rho\mathbf{v}$-t nem a t, hanem az $\frac{r}{c}$-vel korábbi $t - \frac{r}{c}$ időben kell tekintetbe venni. Tehát mindegyik térfogatelemet annyival korábbi időben kell tekintetbe venni, amennyi időre szükség van, hogy az elektromágneses tér dV-től P-ig, vagyis r távolságnyira terjedjen. Ezért ezeket a potenciálokat *retardált* (késleltetett) *potenciálok*nak nevezzük.

Ezek után kimutatjuk, hogy a retardált potenciálok kielégítik az elektromágneses potenciálok differenciálegyenleteit. Elég kimutatni, hogy Φ kielégíti a (3.10) alatti

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

differenciálegyenletet.

Évégből bontsuk fel az integráció tartományát, V-t két részre, V_1-re és V_2-re, melyek közül V_1 legyen a P pont közvetlen környezetét képező igen kis tartomány, V_2 pedig a V-ből V_1 kihasítása után fennmaradó térrész. Ha P a töltések tartományának külső pontja, akkor erre a felbontásra nincs szükség, akkor az egész V V_2 szerepét játssza.



219. ábra. A V integrációs tartomány felosztása

Általában tehát Φ két tagból fog állni

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \int\limits_{V_1} \frac{\rho dV}{r} + \int\limits_{V_2} \frac{\rho dV}{r}. \tag{14.4.3}$$

Φ_1-ben, vagyis a V_1-re kiterjesztett integrálban a retardálás nem játszik szerepet, tehát ott

$$\rho\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}\right) \sim \rho(\xi, \eta, \zeta, t).$$

Tehát Φ_1 nem más, mint a közönséges elektrosztatikus potenciál, melyről tudjuk, hogy a P pontban kielégíti a *Poisson*-egyenletet, így

$$\Delta \Phi_1 = -4\pi\rho.$$

$\Delta \Phi_2$-t Φ_2 differenciálásával képezzük. Az integrandus a V_2 tartományban mindenütt véges és az x, y, z paraméterek szerint differenciálható, tehát

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = \int\limits_{V_2} \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \rho + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\} dV.$$

Ha a $t - \frac{r}{c}$ szerinti differenciálást vesszővel jelöljük, nyerjük

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho' \frac{\partial \left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \rho' \left(-\frac{1}{c}\right) \frac{x}{r} = -\frac{x\rho'}{rc}.$$

Tehát

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = \int_{V_2} \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \rho - \frac{x}{cr^2} \rho' \right\} dV,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} = \int_{V_2} \left\{ \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} \rho - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{x}{cr} \rho' - \frac{1}{cr^2} \rho' + \frac{2x^2}{cr^4} \rho' + \frac{x^2}{c^2 r^3} \rho'' \right\} dV,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \int_{V_2} \left\{ \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} \rho + \frac{3x^2 - r^2}{cr^4} \rho' + \frac{x^2}{c^2 r^3} \rho'' \right\} dV.$$

Φ_2-nek y és z szerinti második deriváltjait hasonlóan képezhetjük. Ha mindhármat összeadjuk, nyerjük

$$\Delta \Phi_2 = \int_{V_2} \left\{ \rho \Delta \frac{1}{r} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2) - 3r^2}{cr^4} \rho' + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2 r^3} \rho'' \right\} dV.$$

Mivel

$$\Delta \frac{1}{r} = 0, \text{ ha } r \neq 0 \text{ és } 3(x^2 + y^2 + z^2) - 3r^2 = 0,$$

következik, hogy

$$\Delta \Phi_2 = \frac{1}{c^2} \int_{V_2} \frac{\rho''}{r} dV = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_{V_2} \frac{\rho dV}{r} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},$$

ugyanis Φ_1 független t-től.

Tehát nyerjük, hogy

$$\Delta \Phi = \Delta \Phi_1 + \Delta \Phi_2 = -4\pi\rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},$$

vagyis

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho.$$

Tehát Φ tényleg kielégíti a potenciál differenciálegyenletét. Hasonlóan lehet kimutatni, hogy $\mathfrak{A}$ is kielégíti a megfelelő egyenletet.

A retardált potenciálok képzésénél mindegyik térfogatelemet $t - \frac{1}{r}$ időben vesszük figyelembe. Ehhez a következő szemléletes képet fűzhetjük. Egy a P pont mint középpont körül vont gömbfelület c sebességgel összehúzódik P-re és az egyes térfogatelemeken való áthaladáskor mintegy összeszedi a potenciálnak az illető térfogatelemtől származó részét. Tehát minden egyes térfogatelemtől származó potenciált abban az időben kell számításba venni, amikor a gömbfelület éri.

5. §. A Maxwell-féle feszültségek

Legyen adva egy tér, melyben ρ térbeli sűrűségű elektromos töltések mozognak $\mathbf{v}$ sebességgel. A töltések között legyen vákuum. Az alapegyenletek a következők

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}, \tag{14.5.1}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \tag{14.5.2}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\rho, \tag{14.5.3}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0, \tag{14.5.4}$$

$$\mathbf{f} = \rho \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathfrak{H}] \right). \tag{14.5.5}$$

$\mathbf{f}$ a térfogategységben levő töltésre ható erő. Helyettesítsük be (5.5)-be ρ-t (5.3)-ból és $\frac{\rho \mathbf{v}}{c}$ -t (5.1)-ből, ekkor nyerjük

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E} + \left[\operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \mathfrak{H} \right] \right\}.$$

Adjuk hozzá ehhez az egyenlethez a következőt, melynek tagjai egyenként zérussal egyenlők

$$0 = \frac{1}{4\pi} \left\{ \mathfrak{H} \operatorname{div} \mathfrak{H} + \left[\operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \mathfrak{E} \right] \right\}.$$

Az összeg a következő lesz

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E} + \mathfrak{H} \operatorname{div} \mathfrak{H} - [\mathfrak{E}, \operatorname{rot} \mathfrak{E}] - [\mathfrak{H}, \operatorname{rot} \mathfrak{H}] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{c} \left(\left[\mathfrak{E}, \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \mathfrak{H} \right] \right) \right\}.$$

Mivel

$$\frac{1}{c} \left(\left[\mathfrak{E}, \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \mathfrak{H} \right] \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t},$$

következik, hogy

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi} \{ \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E} + \mathfrak{H} \operatorname{div} \mathfrak{H} - [\mathfrak{E}, \operatorname{rot} \mathfrak{E}] - [\mathfrak{H}, \operatorname{rot} \mathfrak{H}] \} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t},$$

ahol S az (1.3) sugárvektor.

Végezzük az x-komponensre vonatkozóan a következő átalakítást

$$\mathfrak{E}_x \operatorname{div} \mathfrak{E} - [\mathfrak{E}, \operatorname{rot} \mathfrak{E}]_x = \mathfrak{E}_x \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} \right) - \mathfrak{E}_y \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} \right) +$$

$$+ \mathfrak{E}_z \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_z) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathfrak{E}_x^2 - \frac{1}{2} \mathfrak{E}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_z) .$$

Teljesen hasonlóan nyerjük, hogy

$$\mathfrak{H}_x \operatorname{div} \mathfrak{H} - [\mathfrak{H}, \operatorname{rot} \mathfrak{H}]_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathfrak{H}_x^2 - \frac{1}{2} \mathfrak{H}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_z) .$$

Tehát

$$\frac{1}{4\pi} \{ \mathfrak{E}_x \operatorname{div} \mathfrak{E} - [\mathfrak{E}, \operatorname{rot} \mathfrak{E}]_x + \mathfrak{H}_x \operatorname{div} \mathfrak{H} - [\mathfrak{H}, \operatorname{rot} \mathfrak{H}]_x \} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{H}_x^2) - w \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y + \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y) \right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y + \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y) \right\},$$

ahol w az energia sűrűsége: $w = \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)$.

Teljesen hasonló átalakítást végezhetünk az y- és z-komponensekre is. Vezessük be a következő kifejezéseket, melyeket *Maxwell*-féle feszültségeknek nevezünk

$$X_x = \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{H}_x^2) - w ,$$

$$Y_y = \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{H}_y^2) - w , \tag{14.5.6}$$

$$Z_z = \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{E}_z^2 + \mathfrak{H}_z^2) - w$$

és

$$X_y = Y_x = \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y + \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y),$$

$$Y_z = Z_y = \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_z + \mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_z), \tag{14.5.7}$$

$$Z_x = X_z = \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{E}_z \mathfrak{E}_x + \mathfrak{H}_z \mathfrak{H}_x).$$

Ezek segítségével az erő komponensei a következőképpen fejezhetők ki

$$f_x = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial S_x}{\partial t},$$

$$f_y = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial S_y}{\partial t}, \tag{14.5.8}$$

$$f_z = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial S_z}{\partial t}.$$

Ha az utolsó tagtól eltekintünk, akkor a térfogategységben levő töltésre ható elektromos és mágneses erő éppen úgy fejezhető ki a *Maxwell*-féle feszültségekkel, mint a rugalmas erő a rugalmas feszültségekkel. Ha tehát az utolsó tagtól eltekintünk, akkor az elektromágneses térben működő erőket a rugalmas erők analógiájára értelmezhetjük.

Ha elektromos töltések nincsenek jelen, vagyis ha $\rho = 0$, akkor $\mathbf{f} = 0$. Ebből következik, hogy a feszültségektől származó erő egyensúlyba kerül a sugárvektor változásától származó erővel.

Határozzuk meg egy véges V térfogatban levő töltésre ható $\mathbf{K}$ erőt

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{f} dV. \tag{14.5.9}$$

Az x komponensre a fentiek alapján GAUSS tételének segítségével nyerjük

$$K_x = \int_V f_x dV = \int_V \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) dV - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_V S_x dV =$$

$$= \int_F \left(X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z)\right) dF - \frac{d}{dt}\int_V \frac{S_x}{c^2} dV, \tag{14.5.10}$$

ahol F a V térfogatot körülzáró felület, $\mathbf{n}$ pedig ennek a felületnek a normálisa. Az utolsó tagban t szerinti totális deriváltat írtunk, mert ez a tag a koordinátáktól (minthogy térfogati integrál) független.

Vezessük be a következő jelöléseket

$$T_{nx} = X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z),$$

$$T_{ny} = Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z), \tag{14.5.11}$$

$$T_{nz} = Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z),$$

$$\frac{\mathbf{S}}{c^2} = \mathbf{g} \tag{14.5.12}$$

és

$$\int_V \frac{\mathbf{S}}{c^2} dV = \int_V \mathbf{g} dV = \mathbf{G}. \tag{14.5.13}$$

Ezekkel a jelölésekkel nyerjük

$$K_x = \int_F T_{nx}\, dF - \frac{dG_x}{dt},$$

$$K_y = \int_F T_{ny}\, dF - \frac{dG_y}{dt},$$

$$K_z = \int_F T_{nz}\, dF - \frac{dG_z}{dt}.$$

Vektoregyenletbe összefoglalva

$$\mathbf{K} = \int_F \mathbf{T}_n\, dF - \frac{d\mathbf{G}}{dt}. \tag{14.5.14}$$

Tehát egy véges térfogatban levő elektromos töltésre ható elektromos és mágneses erő két tag különbségéből tevődik össze Az első $\mathbf{T}_n$ felületi integráljával, a másik pedig $\mathbf{G}$ (mely egy térfogati integrál) idő szerinti deriváltjával egyenlő.

6. §. Az elektromágneses impulzus

Az impulzus, az energia és az impulzusmomentum tételeinek általánosított alakja

Amint láttuk

$$\mathbf{K} = \int_F \mathbf{T}_n\, dF - \frac{d\mathbf{G}}{dt}.$$

Vigyük az F felületet olyan távolságba, melyre véges időben nem terjed az elektromágneses tér, akkor a felületi integrál zérus. Tehát

$$\mathbf{K} = -\frac{d\mathbf{G}}{dt}. \tag{14.6.1}$$

Másrészt azonban az elektromos töltések tömegekhez vannak kötve, melyek egy mechanikai impulzussal rendelkeznek, ezt $\mathbf{G}_m$-mel jelöljük. NEWTON második törvénye szerint

$$\mathbf{K} = \frac{d\mathbf{G}_m}{dt}. \tag{14.6.2}$$

Tehát

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{G} + \mathbf{G}_m) = 0,$$

vagyis

$$\mathbf{G} + \mathbf{G}_m = \text{konst}. \tag{14.6.3}$$

Ez a tétel a mechanikából ismert impulzustétel általánosítása, mely szerint külső erők hatása alatt nem álló rendszer impulzusa állandó. Amint látjuk, elektromágnes térben $\mathbf{G}_m$ nem állandó, hanem $\mathbf{G}_m$-hez még hozzá kell adni $\mathbf{G}$-t, hogy állandót kapjunk. Ezért nevezzük $\mathbf{G}$-t az elektromágneses tér impulzusának

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{g} dV = \int_V \frac{\mathbf{S}}{c^2} dV, \tag{14.6.4}$$

$\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2$ pedig az elektromágneses impulzus sűrűsége, vagyis a térfogategység elektromágneses impulzusa.

Fenti eredményünk tehát a következő tételbe foglalható össze. Elszigetelt (teljes) rendszer mechanikai és elektromágneses impulzusának összege állandó.

A teljesség kedvéért itt megemlítjük, hogy az energia tétele is módosul, ha elektromágneses tér van jelen. Mégpedig az energia tételének természetszerű kiegészítése gyanánt adódik

$$W_m + W_e = \text{konst.},$$

ahol W_m a mechanikai, W_e pedig az elektromágneses energia. Vagyis az energia tételében az elektromágneses energiát is figyelembe kell venni a mechanikai energia mellett.

Módosul az impulzusmomentum tétele is, ha elektromágneses tér van jelen. Az elektromágneses tér impulzusmomentumát a következőképpen definiáljuk

$$\mathbf{N}_e = [\mathbf{r}, \mathbf{G}] = \int_V [\mathbf{r}, \mathbf{g}] dV. \tag{14.6.5}$$

Ha $\mathbf{N}_m$-mel jelöljük az ugyanarra a pontra vonatkoztatott mechanikai impulzusmomentumot, akkor az impulzusmomentum tételének általánosított alakja a következő

$$\mathbf{N}_m + \mathbf{N}_e = \text{konst}. \tag{14.6.6}$$

Tehát a mechanikai és elektromágneses impulzusmomentumok összege állandó.

7. §. A sugárzás nyomása

Az elektromágneses impulzus fogalmával könnyen levezethetjük a sugárzás nyomását egy abszolút fekete vagy egy teljesen visszaverő felületre. E célból az impulzusnak az időegységben való megváltozását kell meghatározni, ez adja a sugárzás által a felületre gyakorolt erőt.

Ha vákuumban haladó és a felületre merőlegesen beeső síkhullám teljesen abszorbeálódik, akkor az időegységben annyi impulzus tűnik el, mint amennyi egy c magasságú hengerben van, melynek a felület az alapja. Az eltűnő impulzus

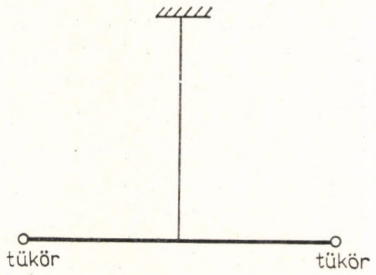
mennyiségét tehát megkapjuk, ha a henger térfogatát megszorozzuk $|\mathbf{g}|$-vel. A sugárzásnak a felületegységre gyakorolt nyomóereje, vagyis a sugárzás nyomása tehát a következő

$$P = c\,|\mathbf{g}| = c\,\frac{|\mathbf{S}|}{c^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{c^2}{4\pi}\,|\,[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]\,| = \frac{\mathfrak{E}^2}{4\pi} = w. \qquad (14.7.1)$$

(Ugyanis síkhullám esetében $w = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) = \frac{1}{4\pi}\,\mathfrak{E}^2 = \frac{1}{4\pi}\,\mathfrak{H}^2$). Tehát a sugárzás nyomása egyenlő az energiasűrűséggel.

Teljes reflexiónál a sugárzás nyomása ennek kétszerese, mert ekkor az impulzus nem tűnik el, hanem ellenkező irányúvá válik.

A sugárzás nyomása kísérletileg is kimutatható, LEBEDEV, NICHOLS és HULL mutatták ki először. Egy torziós mérleg tömegeit tükrökkel helyettesítették és ezeket váltakozva megvilágították olyan periódusban, mely a torziós inga periódusával megegyezik. Az egyes apró hatások rezonancia folytán mérhetővé növekedtek fel, úgyhogy a kvantitatív igazolás is sikerült.



220. ábra. A sugárnyomás mérésére szolgáló torziós inga

A sugárzás nyomása bizonyos körülmények között rendkívül hatásos alakban jelentkezik. Ha az állócsillagok tömegét képező anyag egyensúlyát vizsgáljuk, a következő eredményre jutunk. Az égitest a gravitáció hatása alatt összehúzódni, igen magas hőmérséklete következtében pedig kiterjedni igyekszik. A kiterjedni igyekvő gáz nyomása az abszolút hőmérséklettel arányos. Ezzel azonban még nem értelmezhetők az égitestek sűrűségi viszonyai, hanem emellett még egy tényezőt kell tekintetbe venni és ez éppen a sugárzás nyomása. Az égitest belsejében a sugárzás nagy közelítésben megfelel a fekete test sugárzásának, melynél a *Stefan–Boltzmann*-féle törvény szerint a kisugárzott energia sűrűsége és így a sugárzás nyomása is az abszolút hőmérséklet 4-ik hatványával arányos. Tehát

$$P_{\text{gáz}} = \frac{1}{V}\,RT\,, \qquad P_{\text{sug.}} = \sigma T^4\,.$$

Ezért a csillagok belsejében uralkodó több millió C° hőmérsékleten a sugárzás

nyomása óriási, több millió atmoszféra és különösen igen nagy tömegű csillagokban túlnyomó a gáznyomással szemben. A sugárnyomásnak továbbá fontos szerepe van az üstökösök csóvájának kialakításában.

8. §. A harmadik axióma az elektromágneses térben

A harmadik axióma, vagyis az akció és reakció axiómája bizonyos jelenségek esetében, ha csupán a jelenlevő mechanikai rendszereket vesszük számításba, nem érvényes. Ha ugyanis egy fényforrásból fénysugár indul ki, akkor a fény nyomást gyakorol a fényforrásra. Ha a fény az üres térbe távozik, akkor ezzel a hatással szemben semmilyen más erőhatás nem lép fel. Ha pedig pl. valamely távoli testre esik a fénysugár, akkor ott gyakorol ugyan az előbbivel egyező nagyságú és ellenkező irányú hatást, de nem egyidejűen az első hatással. Az első esetben az akció és reakció egyenlősége egyáltalán nem áll fenn, a második esetben pedig fennáll ugyan, de az akció és reakció nem egyidejűek.

E nehézség csak akkor áll fenn, ha csak a mechanikai impulzus változását vesszük figyelembe. Fenti tételünk alapján azonban azt kell mondanunk, hogy ha a mechanikai impulzushoz hozzászámítjuk még az elektromágneses tér impulzusát, vagyis magának a sugárnak az impulzusát, akkor az akció és reakció egyenlősége minden pillanatban fennáll.

TIZENÖTÖDIK FEJEZET

RELATIVISZTIKUS ELEKTRODINAMIKA

1. §. Az elektrodinamika alapegyenleteinek Lorentz-invarianciája

Az *Einstein*-féle relativitási elv szerint az elektrodinamika alapegyenleteinek minden inerciarendszerben érvényeseknek kell lenniük. Az alábbiakban azt fogjuk igazolni, hogy az elektrodinamika alapegyenletei valóban eleget tesznek ennek a követelménynek, továbbá meg fogjuk állapítani, hogy az elektrodinamika legfontosabb mennyiségeit hogyan kell áttranszformálni az egyik inerciarendszerből a másikba.

Kiindulásul írjuk fel a potenciálokra vonatkozó (14.3.8), (14.3.9) és (14.3.10) egyenleteket komponensekben részletezve. Ha a töltések sűrűségét ρ-val, mozgási sebességüket pedig **u**-val jelöljük, akkor az alapegyenletek

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \tag{15.1.1}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c}\rho u_x, \\
\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_y}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c}\rho u_y, \\
\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_z}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c}\rho u_z,
\end{aligned}\right\} \tag{15.1.2}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \tag{15.1.3}$$

Ezek az egyenletek a K inerciarendszerre vonatkoznak, melynek koordinátái x, y, z és t. Térjünk most át egy K' inerciarendszerre, melyet K-val a (6.4.9) *Lorentz*-transzformáció köt össze. Egyenleteink átírásához a közvetett differenciálás szabályát kell csak alkalmaznunk. Nézzük először az (1.1) egyenletet; ennél

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left[\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t'}\right],$$

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y'},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z'},$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial t}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left[-\frac{v}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial x'} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t'}\right].$$

Adjuk össze ezeket az egyenleteket. A baloldalon (1.1) szerint zérust kapunk, tehát

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\mathfrak{A}_x - \frac{v}{c}\Phi}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y'} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z'} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{-\frac{v}{c}\mathfrak{A}_x + \Phi}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = 0. \tag{15.1.4}$$

Írjuk most fel az (1.1) egyenletet a K' inerciarendszerben. Ez természetesen ugyanolyan alakú, mint (1.1), csak minden mennyiség vesszővel van megjelölve

$$\frac{\partial \mathfrak{A}'_x}{\partial x'} + \frac{\partial \mathfrak{A}'_y}{\partial y'} + \frac{\partial \mathfrak{A}'_z}{\partial z'} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi'}{\partial t'} = 0. \tag{15.1.5}$$

Az (1.4) és (1.5) egyenletek összehasonlításából azonnal le tudjuk olvasni a potenciálok transzformációs szabályát

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}'_x &= \frac{\mathfrak{A}_x - \frac{v}{c}\Phi}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\
\mathfrak{A}'_y &= \mathfrak{A}_y, \\
\mathfrak{A}'_z &= \mathfrak{A}_z, \\
\Phi' &= \frac{-\frac{v}{c}\mathfrak{A}_x + \Phi}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.
\end{aligned} \tag{15.1.6}$$

E transzformációs szabályok birtokában könnyen átírhatjuk az (1.2) és (1.3) alapegyenleteket is egyik inerciarendszerből a másikba. Nézzük először az (1.3) egyenletet. Első lépésként a koordinátákon hajtjuk végre a (6.4.9) *Lorentz*-transzformációt. Ekkor a következő eredményeket kapjuk:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t'}\right].$$

Újból differenciálva

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} - \frac{2v}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x' \partial t'} + \frac{v^2}{c^4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} \right].$$

Hasonlóképpen

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \left[v^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} \right].$$

(1.3) baloldala ezek szerint a következőképpen alakul:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2}. \quad (15.1.7)$$

Ezt az eredményt tömörebben is kifejezhetjük. Vezessük be az alábbi differenciáloperátort:

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (15.1.8)$$

(1.7) eredményünk azt mutatja, hogy a vesszős és a vesszőtlen koordinátáknak megfelelő négyszög-operátorok egymással egyenlőek: $\Box' = \Box$. Az (1.8) differenciáloperátor a *Lorentz*-transzformációval szemben invariáns, ezért invariáns differenciáloperátornak is szokták nevezni.

Vizsgáljuk tovább az (1.2) és (1.3) egyenletek *Lorentz*-transzformálását. A fentiek alapján egyenleteinket tömören így írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \Box \mathfrak{A}_x &= -\frac{4\pi}{c} \rho u_x, \\ \Box \mathfrak{A}_y &= -\frac{4\pi}{c} \rho u_y, \\ \Box \mathfrak{A}_z &= -\frac{4\pi}{c} \rho u_z, \\ \Box \Phi &= -4\pi\rho. \end{aligned} \quad (15.1.9)$$

Most alkalmazzuk a $\square' = \square$ operátort az (1.6) *Lorentz*-transzformáció mindkét oldalára. Az (1.9) alapegyenletek figyelembevételével kapjuk

$$\begin{aligned}
\square' \mathfrak{A}'_x &= \square \left(\frac{\mathfrak{A}_x - \frac{v}{c} \Phi}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = - \frac{4\pi}{c} \rho \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\
\square' \mathfrak{A}'_y &= \square \mathfrak{A}_y = - \frac{4\pi}{c} \rho u_y, \\
\square' \mathfrak{A}'_z &= \square \mathfrak{A}_z = - \frac{4\pi}{c} \rho u_z, \\
\square' \Phi' &= \square \left(\frac{- \frac{v}{c} \mathfrak{A}_x + \Phi}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = - 4\pi\rho \frac{1 - \frac{v}{c^2} u_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.
\end{aligned} \tag{15.1.10}$$

Az inerciarendszerek egyenértékűsége megköveteli, hogy az (1.9) alapegyenletek a K' koordinátarendszerben is érvényesek legyenek:

$$\begin{aligned}
\square' \mathfrak{A}'_x &= - \frac{4\pi}{c} \rho' u'_x, \\
\square' \mathfrak{A}'_y &= - \frac{4\pi}{c} \rho' u'_y, \\
\square' \mathfrak{A}'_z &= - \frac{4\pi}{c} \rho' u'_z, \\
\square' \Phi' &= -4\pi\rho'.
\end{aligned} \tag{15.1.11}$$

Összehasonlítva az (1.10) és az (1.11) egyenletrendszereket, a jobboldalon álló kifejezések transzformációs szabályát kapjuk meg

$$\begin{aligned}
\rho' u'_x &= \rho \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\
\rho' u'_y &= \rho u_y, \\
\rho' u'_z &= \rho u_z, \\
\rho' &= \rho \frac{1 - \frac{v}{c^2} u_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.
\end{aligned} \tag{15.1.12}$$

A negyedik egyenlet a ρ töltéssűrűség transzformációs szabályát adja kezünkbe, az első három egyenletet pedig rendre elosztva a negyedikkel, az u'_x, u'_y és az u'_z

bességkomponenseket kapjuk meg

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x},$$

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \tag{15.1.13}$$

$$u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}.$$

Természetesen egy pillanatra sem feledkezhetünk meg arról, hogy a sebesség transzformációs szabályát a kinematika törvényei megszabják. Az elektrodinamika (1.1)–(1.4) alapegyenletei csak akkor lesznek minden inerciarendszerben érvényesek, ha az (1.13) összefüggések a relativisztikus kinematika (6.5.16–18) sebességtranszformációs szabályával összhangban vannak. Azt pedig igen könnyen beláthatjuk, hogy tényleg ez a helyzet, hiszen (6.5.16–18) inverzét képezve, azaz a vesszős és vesszőtlen mennyiségeket egymással felcserélve és ugyanakkor v helyébe $-v$-t helyettesítve, éppen a fenti (1.13) összefüggéseket kapjuk.

Összefoglalva a fentieket megállapíthatjuk, hogy a fénysebesség állandóságának elvéből levezetett *Lorentz*-transzformáció nem változtatja meg az elektrodinamika (1.1)–(1.4) alapegyenleteinek szerkezetét, az alapegyenletek minden inerciarendszerben egyaránt fennállnak. Levezettük továbbá a potenciálok és az elektromos töltéssűrűség transzformációs szabályait.

2. §. Az elektromos töltés és az elektromágneses térerősségek transzformációs szabályai

Előző eredményeink arra képesítenek, hogy meghatározzuk az elektromos töltés és az elektromágneses térerősségek transzformációs szabályait. Foglalkozzunk először az elektromos töltés nyugalmi és mozgási mérőszáma közötti kapcsolattal. Mozogjon e töltés a K inerciarendszerben v sebességgel az x-tengely mentén: $u_x = v$, $u_y = u_z = 0$. Egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy töltésünk egy l_x, l_y, l_z élhosszúságú hasábot tölt ki egyenletes sűrűséggel. A töltéssűrűség tehát

$$\rho = \frac{e}{V} = \frac{e}{l_x l_y l_z}. \tag{15.2.1}$$

Töltésünk a K' koordinátarendszerben nyugszik, a töltéssűrűség nyugalmi mérő-

számát (1.12) utolsó egyenletéből olvashatjuk le:

$$\rho' = \rho \frac{1 - v^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \rho \sqrt{1 - v^2/c^2} \,. \tag{15.2.2}$$

Az elektromos töltés nyugalmi mérőszáma pedig

$$e' = \rho' V'$$

lesz, ahol $V' = l'_x l'_y l'_z$ a térfogat nyugalmi mérőszáma. A (6.5.3) hosszkontrakciós képlet szerint $l_x = l'_x \sqrt{1-v^2/c^2}$, a mozgásra merőleges élhosszak pedig változatlanok maradnak: $l_y = l'_y$ és $l_z = l'_z$. A térfogatkontrakciós szabály tehát

$$V = V' \sqrt{1-v^2/c^2}. \tag{15.2.3}$$

Ennek felhasználásával kapjuk, hogy

$$e' = \rho' V' = \rho \sqrt{1-v^2/c^2} V' = \rho V = e, \tag{15.2.4}$$

azaz az elektromos töltés mozgási és nyugalmi mérőszáma azonos. Az elektromos töltés értéke minden inerciarendszerből nézve ugyanannyi lesz.

Most pedig térjünk át az elektromágneses térerősségek transzformációs szabályainak meghatározására. Elsősorban jegyezzük fel a térerősségeknek a potenciálokkal kifejezett alakját, azaz a (14.3.6–7) relációkat, a K' koordinátarendszerben. Komponensenként részletezve:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}'_x &= -\frac{\partial \Phi'}{\partial x'} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}'_x}{\partial t'}, \\
\mathfrak{E}'_y &= -\frac{\partial \Phi'}{\partial y'} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}'_y}{\partial t'}, \\
\mathfrak{E}'_z &= -\frac{\partial \Phi'}{\partial z'} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}'_z}{\partial t'}, \\
\mathfrak{H}'_x &= \frac{\partial \mathfrak{A}'_z}{\partial y'} - \frac{\partial \mathfrak{A}'_y}{\partial z'}, \\
\mathfrak{H}'_y &= \frac{\partial \mathfrak{A}'_x}{\partial z'} - \frac{\partial \mathfrak{A}'_z}{\partial x'}, \\
\mathfrak{H}'_z &= \frac{\partial \mathfrak{A}'_y}{\partial x'} - \frac{\partial \mathfrak{A}'_x}{\partial y'}.
\end{aligned} \tag{15.2.5}$$

Egyenleteink jobb oldalán térjünk át a vesszőtlen mennyiségekre. Ez két lépésben történhet. Először (1.6) segítségével $\mathfrak{A}'$ és Φ' helyébe az $\mathfrak{A}$ és Φ potenciálokat vezetjük be, másodszor az x', y', z' és t' koordináták helyett az x, y, z és t változókat vezetjük be a (6.4.8) *Lorentz*-transzformáció segítségével. A számítások

végeredménye:

$$\mathfrak{E}'_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t},$$

$$\mathfrak{E}'_y = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left[-\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{v}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} - \frac{v}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial t}\right],$$

$$\mathfrak{E}'_z = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left[-\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{v}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{v}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial t}\right],$$

$$\mathfrak{H}'_x = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z},$$

$$\mathfrak{H}'_y = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left[\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{v}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial t}\right],$$

$$\mathfrak{H}'_z = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left[\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial t} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} + \frac{v}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right].$$

Végül pedig a jobboldalakon használjuk fel a vesszőtlen koordinátarendszerre vonatkozó (14.3.6–7) relációkat. Ekkor a vesszős és a vesszőtlen koordinátarendszerekbeli térerősségek kapcsolatához jutunk.

$$\mathfrak{E}'_x = \mathfrak{E}_x,$$

$$\mathfrak{E}'_y = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left[\mathfrak{E}_y - \frac{v}{c}\mathfrak{H}_z\right],$$

$$\mathfrak{E}'_z = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left[\mathfrak{E}_z + \frac{v}{c}\mathfrak{H}_y\right],$$

$$\mathfrak{H}'_x = \mathfrak{H}_x, \qquad (15.2.6)$$

$$\mathfrak{H}'_y = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left[\mathfrak{H}_y + \frac{v}{c}\mathfrak{E}_z\right],$$

$$\mathfrak{H}'_z = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left[\mathfrak{H}_z - \frac{v}{c}\mathfrak{H}_y\right].$$

Ezek az összefüggések lehetővé teszik, hogy a térerősségeket kiszámíthassuk egy tetszőleges inerciarendszerben, ha egy másikban már ismerjük azokat. Elemi, de igen fontos alkalmazásként határozzuk meg egy egyenletes sebességgel mozgó ponttöltés elektromágneses terét. A pont töltése legyen e és mozogjon a K inerciarendszer x-tengelye mentén állandó v sebességgel. A K' rendszer a töltéssel együtt mozgó koordinátarendszer lesz, ebben tehát a ponttöltés mozdulatlan. Erőtere

tehát, a *Coulomb*-törvény szerint, a következő

$$\mathfrak{E}'_x = \frac{ex'}{r'^3}, \quad \mathfrak{E}'_y = \frac{ey'}{r'^3}, \quad \mathfrak{E}'_z = \frac{ez'}{r'^3}, \quad \mathfrak{H}'_x = \mathfrak{H}'_y = \mathfrak{H}'_z = 0. \quad (15.2.7)$$

Itt $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ a ponttöltéstől mért távolság.

A K-ban észlelt elektromágneses teret a (2.6) képletek segítségével kapjuk. Elsősorban a vesszőtlen térerősségeket kell kifejeznünk a vesszősökkel, azaz (2.6) inverzét kell előállítanunk. Tudjuk, hogy ez igen egyszerűen úgy oldható meg, ha v helyébe $-v$-t teszünk:

$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}'_x, \quad \mathfrak{E}_y = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left[\mathfrak{E}'_y + \frac{v}{c}\mathfrak{H}'_z\right], \quad \mathfrak{E}_z = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left[\mathfrak{E}'_z - \frac{v}{c}\mathfrak{H}'_y\right],$$

$$\mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}'_x, \quad \mathfrak{H}_y = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left[\mathfrak{H}'_y - \frac{v}{c}\mathfrak{E}'_z\right], \quad \mathfrak{H}_z = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left[\mathfrak{H}'_z + \frac{v}{c}\mathfrak{E}'_y\right]. \quad (15.2.8)$$

A (2.7) térerősségek behelyettesítésével kapjuk, hogy

$$\mathfrak{E}_x = \frac{ex'}{r'^3}, \qquad \mathfrak{H}_x = 0,$$

$$\mathfrak{E}_y = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{ey'}{r'^3}, \qquad \mathfrak{H}_y = -\frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{ez'}{r'^3},$$

$$\mathfrak{E}_z = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{ez'}{r'^3}, \qquad \mathfrak{H}_z = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{ey'}{r'^3}.$$

A transzformálás csak akkor lesz teljes, ha a K-beli térerősségeket a K-beli koordinátákkal fejezzük ki. A (6.4.8) *Lorentz*-transzformációt alkalmazva és bevezetve a $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ rövidítő jelölést, kapjuk

$$\mathfrak{E}_x = \frac{e\gamma(x - vt)}{\sqrt{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^3}}, \qquad \mathfrak{H}_x = 0,$$

$$\mathfrak{E}_y = \frac{e\gamma y}{\sqrt{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^3}}, \qquad \mathfrak{H}_y = -\frac{v}{c}\frac{e\gamma z}{\sqrt{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^3}},$$

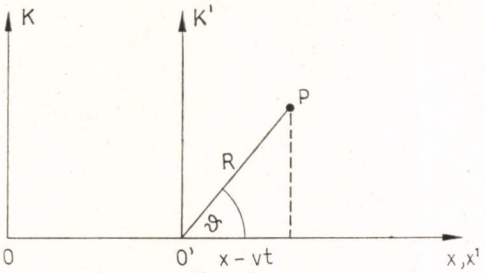
$$\mathfrak{E}_z = \frac{e\gamma z}{\sqrt{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^3}}, \qquad \mathfrak{H}_z = \frac{v}{c}\frac{e\gamma z}{\sqrt{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^3}}. \quad (15.2.9)$$

Eredményünk világosan mutatja, hogy az elektromágneses tér felhasítása elektromos és mágneses részterekre csak relatív, azaz koordinátarendszerhez kötött jelentőségű. Míg a ponttöltéshez kötött K' rendszerben semmiféle mágneses tér nincsen, addig a K rendszerben a (2.9)-nek megfelelő mágneses tér lesz észlelhető.

A (2.9) képletek azt is mutatják, hogy a mozgó ponttöltés tere már nem gömbszimmetrikus.

A tér szerkezetének részletes megvizsgálására vezessünk be polárkoordinátákat a 221. ábrának megfelelő módon. A P potenciálpontnak az O' ponttöltéstől való távolsága R, az $\overrightarrow{O'P}$ szakasznak az x-tengellyel bezárt szöge ϑ. Tehát

$$x - vt = R\cos\vartheta \quad \text{és} \quad y^2 + z^2 = R^2\sin^2\vartheta\,.$$



221. ábra. A mozgó ponttöltés terének meghatározása

A tér erősségét az $\mathfrak{E}$ vektor négyzete adja meg

$$\mathfrak{E}^2 = \mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2 = \frac{e^2\gamma^2[(x-vt)^2 + y^2 + z^2]}{[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^3}\,.$$

Polárkoordinátákkal kifejezve

$$\mathfrak{E}^2 = \frac{e\gamma^2}{R^4(\gamma^2\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)}\,. \tag{15.2.10}$$

A térerősség a $\vartheta = 0$ irányban, tehát a mozgás irányában a legkisebb, ϑ-val fokozatosan nő, a legnagyobb térerősséget a mozgásirányra merőleges $\vartheta = \pi/2$ szögnél kapjuk.

3. §. Négyestenzorok

A 6.11.§-ban olyan matematikai módszert ismertettünk, mely a relativitáselmélet eredményeit rendkívül világos formába tudja önteni. Megbeszéltük nevezetesen azt, hogy a négyesvektorok közötti egyenletek automatikusan kielégítik az *Einstein*-féle relativitási elvet. Most az elektrodinamika egyenleteit kívánjuk ebbe a formába önteni.

Vizsgálatainkat kezdjük a potenciálokkal. Bevezetve az

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_x, \quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_y, \quad \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_z, \quad \mathfrak{A}_4 = i\Phi \tag{15.3.1}$$

jelöléseket, a potenciálok (1.6) transzformációja a következőképpen írható fel

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1' &= \mathfrak{A}_1 \cos\phi + \mathfrak{A}_4 \sin\phi, \\ \mathfrak{A}_2' &= \mathfrak{A}_2, \\ \mathfrak{A}_3' &= \mathfrak{A}_3, \\ \mathfrak{A}_4' &= -\mathfrak{A}_1 \sin\phi + \mathfrak{A}_4 \cos\phi, \end{aligned} \tag{15.3.2}$$

ahol szokás szerint $\operatorname{tg}\phi = i\frac{v}{c}$. Láthatjuk, hogy ez a transzformálódás pontosan követi a (6.11.4) formát, tehát a (3.1)-gyel bevezetett négy komponens tényleg négyesvektort képez. Neve: *négyespotenciál.*

Egy másik igen fontos négyesvektort a töltések sűrűségéből és mozgási sebességéből képezhetünk:

$$s_1 = \rho u_x, \quad s_2 = \rho u_y, \quad s_3 = \rho u_z, \quad s_4 = ic\rho. \tag{15.3.3}$$

Hogy ez a négy komponens valóban négyesvektort képez, arról a szokásos módon győződhetünk meg. (3.3)-at az (1.12) transzformációs képletekbe téve ismét a (6.11.4)-nek megfelelő egyenletekhez jutunk.

$$\begin{aligned} s_1' &= s_1 \cos\phi + s_4 \sin\phi, \\ s_2' &= s_2, \\ s_3' &= s_3, \\ s_4' &= -s_1 \sin\phi + s_4 \cos\phi. \end{aligned} \tag{15.3.4}$$

Az (s_1, s_2, s_3, s_4) négyesvektort négyes áramnak nevezzük.

Ezek után az elektrodinamika (1.1)–(1.3) alapegyenleteit könnyen négyesvektor-egyenletek formájába önthetjük. Az (1.1) *Lorentz*-feltétel, ha bevezetjük a (6.11.1) négyes koordinátákat és a (3.1) négyes potenciált, a következő lesz:

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial x_4} = 0,$$

vagy röviden

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial x_k} = 0. \tag{15.3.5}$$

Ez tehát azt mondja ki, hogy a négyespotenciál négyes divergenciája zérus.

Az (1.2) és (1.3) alapegyenletek, mint már (1.9)-nél megbeszéltük, a

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \tag{15.3.6}$$

invariáns differenciáloperátorral fejezhetők ki. Láthatjuk, hogy $\Box$ nem más, mint

a Δ *Laplace*-operátor négydimenziós általánosítása. Az (1.9) egyenleteknek a négyes potenciállal és a négyes árammal kifejezett alakja

$$\Box \mathfrak{A}_k = -\frac{4\pi}{c} s_k . \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{15.3.7}$$

Itt a bal- és jobboldalon egyaránt négyesvektor áll. A potenciálokra vonatkozó alapegyenletek tehát négyesvektor-egyenletek és ezért a relativitáselmélet minden követelményének eleget tesznek.

A továbbiakban az elektromos térerősségek transzformációs szabályaival és a *Maxwell*-egyenletekkel fogunk foglalkozni. Az $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$ térerősségkomponensek *Lorentz*-transzformációját (2.6) adja meg. Ez semmiképpen sem felelhet meg egy négyesvektor-transzformációnak, már csak az egyenletek száma miatt sem, hiszen most nem négy, hanem hat mennyiséggel van dolgunk. Hogy a térerősségek transzformációját is áttekinthető alakba öntsük, a négyesvektor fogalmát általánosítanunk kell.

A négyesvektorokat a 6. fejezet 11.§-ban a következőképpen definiáltuk: négy komponens által adott mennyiség, amelyeket egyik inerciarendszerből a másikba úgy kell áttranszformálni, mint az x_k ($k = 1, 2, 3, 4$) koordinátákat. A négyesvektorok természetszerű általánosításai a *négyestenzorok*. Az n-ed rendű tenzor legáltalánosabb definíciója: 4^n komponens által adott mennyiség, a komponensek úgy transzformálódnak, mint az

$$x_{k1} x_{k2} \ldots x_{kn} \qquad (k_1, k_2, \ldots, k_n = 1, 2, 3, 4)$$

koordinátaszorzatok.

Az $n = 0$ esetben a komponensek száma mindössze egy, és ez a mennyiség minden inerciarendszerben ugyanolyan számértékű. A nulladrendű tenzor tehát az invariáns skalár. Ilyen pl. az e elektromos töltés. Az $n = 1$ eset nyilván a négyesvektoroknak felel meg, az elsőrendű tenzorok maguk a négyesvektorok. Az alábbiakban elsősorban az $n = 2$ esettel, a másodrendű tenzorokkal fogunk foglalkozni.

Az általános másodrendű tenzornak $4^2 = 16$ komponense van, szkémája a következő

$$\begin{array}{cccc} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} . \end{array} \tag{15.3.8}$$

Épp úgy, mint a vektoroknál, a tenzorok fizikai jelentése is a legkülönbözőbb lehet. A tenzorjelleget egyedül az a követelmény szabja meg, hogy a T_{kl} komponens úgy transzformálódjék, mint az $x_k x_l$ koordinátaszorzat. Írjuk fel részlete-

sen a transzformációs szabályokat speciálisan a (6.4.8) *Lorentz*-transzformáció esetére.

$$
\begin{aligned}
T'_{11} &= T_{11}\cos^2\phi + T_{14}\sin\phi\cos\phi + T_{41}\sin\phi\cos\phi + T_{44}\sin^2\phi,\\
T'_{12} &= T_{12}\cos\phi + T_{42}\sin\phi,\\
T'_{13} &= T_{13}\cos\phi + T_{43}\sin\phi,\\
T'_{14} &= -T_{11}\sin\phi\cos\phi + T_{14}\cos^2\phi - T_{41}\sin^2\phi + T_{44}\sin\phi\cos\phi,\\
T'_{21} &= T_{21}\cos\phi + T_{24}\sin\phi,\\
T'_{22} &= T_{22},\\
T'_{23} &= T_{23},\\
T'_{24} &= -T_{21}\sin\phi + T_{24}\cos\phi,\\
T'_{31} &= T_{31}\cos\phi + T_{34}\sin\phi,\\
T'_{32} &= T_{32},\\
T'_{33} &= T_{33},\\
T'_{34} &= -T_{31}\sin\phi + T_{34}\cos\phi,\\
T'_{41} &= -T_{11}\sin\phi\cos\phi - T_{14}\sin^2\phi + T_{41}\cos^2\phi + T_{44}\sin\phi\cos\phi,\\
T'_{42} &= -T_{12}\sin\phi + T_{42}\cos\phi,\\
T'_{43} &= -T_{13}\sin\phi + T_{43}\cos\phi,\\
T'_{44} &= T_{11}\sin^2\phi - T_{14}\sin\phi\cos\phi - T_{41}\sin\phi\cos\phi + T_{44}\cos^2\phi.
\end{aligned}
\tag{15.3.9}
$$

A másodrendű tenzoroknak két speciális fajtájáról külön szólnunk kell. Szimmetrikusnak nevezzük a tenzort, ha a (3.8) szkéma a fődiagonálisra nézve szimmetrikus, azaz ha $T_{kl} = T_{lk}$. A szimmetrikus tenzornak csak tíz komponense független egymástól. A (3.9) transzformációs szabály szimmetrikus tenzorok esetén a következőképpen alakul:

$$
\begin{aligned}
T'_{11} &= T_{11}\cos^2\phi + 2T_{14}\sin\phi\cos\phi + T_{44}\sin^2\phi,\\
T'_{12} &= T_{12}\cos\phi + T_{24}\sin\phi,\\
T'_{13} &= T_{13}\cos\phi + T_{34}\sin\phi,\\
T'_{14} &= T_{14}(\cos^2\phi - \sin^2\phi) - (T_{11} - T_{44})\sin\phi\cos\phi,\\
T'_{22} &= T_{22},\\
T'_{23} &= T_{23},\\
T'_{24} &= -T_{12}\sin\phi + T_{24}\cos\phi,
\end{aligned}
\tag{15.3.10}
$$

$$T'_{33} = T_{33},$$
$$T'_{34} = -T_{13}\sin\phi + T_{34}\cos\phi,$$
$$T'_{44} = T_{11}\sin^2\phi - 2T_{14}\sin\phi\cos\phi + T_{44}\cos^2\phi.$$

A másik speciális típus az antiszimmetrikus tenzor. Ez a fődiagonálisra való tükrözésnél jelet vált, tehát $T_{kl} = -T_{lk}$. Az antiszimmetrikus tenzornak csak hat független komponense van, fődiagonálisában zérusok állanak. Az antiszimmetrikus tenzor transzformációs szabálya:

$$\begin{aligned} T'_{12} &= T_{12}\cos\phi - T_{24}\sin\phi, \\ T'_{13} &= T_{13}\cos\phi - T_{34}\sin\phi, \\ T'_{14} &= T_{14}, \\ T'_{23} &= T_{23}, \\ T'_{24} &= T_{12}\sin\phi + T_{24}\cos\phi, \\ T'_{34} &= T_{13}\sin\phi + T_{34}\cos\phi. \end{aligned} \tag{15.3.11}$$

Megjegyezzük, hogy egy általános másodrendű tenzor mindig felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus összetevőre

$$T_{kl} = T^S_{kl} + T^A_{kl}, \tag{15.3.12}$$

ahol a szimmetrikus összetevő

$$T^S_{kl} = \frac{1}{2}(T_{kl} + T_{lk}) \tag{15.3.13}$$

és az antiszimmetrikus

$$T^A_{kl} = \frac{1}{2}(T_{kl} - T_{lk}). \tag{15.3.14}$$

A tenzorok megbeszélése után rátérhetünk az elektromágneses térerősségek transzformációs szabályának és a *Maxwell*-egyenletek kovariáns formájának megfogalmazására. Nem nehéz felismernünk, hogy az $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ térerősségek komponenseiből egy antiszimmetrikus tenzor építhető fel. A pontos megfeleltetés a következő:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= iF_{14}, & \mathfrak{H}_x &= F_{23}, \\ \mathfrak{E}_y &= iF_{24}, & \mathfrak{H}_y &= F_{31}, \\ \mathfrak{E}_z &= iF_{34}, & \mathfrak{H}_z &= F_{12}. \end{aligned} \tag{15.3.15}$$

Az F_{kl} tenzor szkémája tehát

$$\begin{matrix} 0 & \mathfrak{H}_z & -\mathfrak{H}_y & -i\mathfrak{E}_x \\ -\mathfrak{H}_z & 0 & \mathfrak{H}_x & -i\mathfrak{E}_y \\ \mathfrak{H}_y & -\mathfrak{H}_x & 0 & -i\mathfrak{E}_z \\ i\mathfrak{E}_x & i\mathfrak{E}_y & i\mathfrak{E}_z & 0 \end{matrix} \tag{15.3.16}$$

Ezt az antiszimmetrikus tenzort *elektromágneses tértenzor*nak nevezzük. Hogy az F_{kl} komponensek tényleg tenzormódra transzformálódnak, azt igen egyszerűen beláthatjuk. Vezessük be ugyanis a (3.15) jelöléseket a (2.6) transzformációs képletekbe

$$\begin{aligned} F'_{14} &= F_{14}, \\ F'_{24} &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left[F_{24} + i\frac{v}{c}F_{12}\right], \\ F'_{34} &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left[F_{34} + i\frac{v}{c}F_{13}\right], \\ F'_{23} &= F_{23}, \\ F'_{13} &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left[F_{13} - i\frac{v}{c}F_{34}\right], \\ F'_{12} &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left[F_{12} - i\frac{v}{c}F_{24}\right]. \end{aligned}$$

Ha itt még bevezetjük a szokásos $\operatorname{tg}\phi = i\frac{v}{c}$ jelölést, akkor pontosan a (3.11) transzformációs szabály áll előttünk. Ezzel bebizonyítottuk, hogy az elektromágneses tértenzor valóban tenzor módra transzformálódik. Aláhúzzuk, hogy a tértenzorban mind az elektromos, mind pedig a mágneses térerősség komponensei helyet foglalnak. Külön-külön egyik térnek sincs koordinátarendszertől független fizikai jelentése. Az objektív megállapítás az, hogy a térerősségek antiszimmetrikus tenzort képeznek.

Most fejezzük ki az elektromágneses tér (14.3.1–7) alapegyenleteit a tértenzor segítségével. A (14.3.1) és (14.3.3) *Maxwell*-egyenletek komponensenként részletezett alakja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\rho u_x = \frac{4\pi}{c}s_1, \\ -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\rho u_y = \frac{4\pi}{c}s_2, \end{aligned} \tag{15.3.17}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\rho u_z = \frac{4\pi}{c}s_3,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = 4\pi\rho = \frac{4\pi}{ic}s_4.$$

A jobboldalon bevezettük a (3.3) négyesáram komponenseit. A (3.15) jelölésekkel egyenleteink a következő alakot öltik

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c}s_1,$$

$$\frac{\partial F_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c}s_2,$$

$$\frac{\partial F_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c}s_3,$$

$$\frac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_3} = \frac{4\pi}{c}s_4.$$

Az egyenleteket azzal tesszük formai szempontból teljessé, hogy rendre kiegészítjük őket $\frac{\partial F_{11}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F_{44}}{\partial x_4}$-gyel, ami antiszimmetrikus tenzor esetében természetesen zérus. Az egyenleteket ekkor a következő alakban foglalhatjuk össze:

$$\sum_{l=1}^{4} \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_l} = \frac{4\pi}{c}s_k. \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \qquad (15.3.18)$$

Az első *Maxwell*-csoport tehát azt mondja ki, hogy az F_{kl} tértenzor négyes divergenciája a négyesáram $4\pi/c$-szeresével egyenlő.

A második *Maxwell*-csoportot a (14.3.2) és (14.3.4) egyenletek képezik. Komponensekben:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} &= 0,\\
-\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} &= 0,\\
\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} &= 0,\\
\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} &= 0.
\end{aligned} \qquad (15.3.19)$$

A (3.15) tértenzorral kifejezve és az egyenleteket rendezve

$$\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4}+\frac{\partial F_{34}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{42}}{\partial x_3}=0,$$

$$\frac{\partial F_{13}}{\partial x_4}+\frac{\partial F_{34}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{41}}{\partial x_3}=0,$$

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_4}+\frac{\partial F_{24}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{41}}{\partial x_2}=0,$$

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_2}=0.$$

Ezek az egyenletek a következő egységes formában foglalhatók össze:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}=0, \tag{15.3.20}$$

ahol i, k és l az 1, 2, 3, 4 számokból kiválasztott négy számhármas:

$$(ikl) = (234), (341), (412), (123).$$

A *Maxwell*-egyenletek tenzoralakba öntése után még a tértenzor és a négyespotenciál kapcsolatát kell megbeszélnünk. A (14.3.6) és (14.3.7) összefüggéseket komponensenként kiírjuk:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_x &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t}, & \mathfrak{H}_x &= \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y}-\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z},\\
\mathfrak{E}_y &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y}-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial t}, & \mathfrak{H}_y &= \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z}-\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}, \qquad (15.3.21)\\
\mathfrak{E}_z &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z}-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial t}, & \mathfrak{H}_z &= \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x}-\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Bevezetve a (3.1) és a (3.15) jelöléseket, a következő egyenletcsoportot kapjuk

$$F_{kl}=\frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial x_k}-\frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial x_l}. \qquad (k,l=1,2,3,4) \tag{15.3.22}$$

A tértenzor tehát a négyespotenciál (négydimenziós) rotációjával egyenlő.

Végül még az elektromágneses térben fellépő erőhatásokkal és feszültségekkel kell foglalkoznunk. A térfogategységre ható erőt (14.3.5) alatt jegyeztük fel. Első, azaz x-irányú komponense

$$f_1=\rho\mathfrak{E}_x+\frac{\rho}{c}u_y\mathfrak{H}_z-\frac{\rho}{c}u_z\mathfrak{H}_y.$$

(3.3) és (3.15) alapján

$$f_1 = \frac{1}{c}(F_{12}s_2 + F_{13}s_3 + F_{14}s_4).$$

A gömbölyű zárójeles kifejezést kiegészítve még a zérus értékű $F_{11}s_1$ taggal kapjuk

$$f_1 = \frac{1}{c}\sum_{l=1}^{4} F_{1l}s_l .$$

Hasonló alakú az erősűrűség többi komponense is. Általában tehát

$$f_k = \frac{1}{c}\sum_{l=1}^{4} F_{kl}s_l . \tag{15.3.23}$$

Ez az egyenlet csak akkor tekinthető szabályos négyesvektor egyenletnek, ha k felveheti a $k = 4$ értéket is. Vizsgáljuk meg f_4 fizikai jelentését.

$$f_4 = \frac{1}{c}(F_{41}s_1 + F_{42}s_2 + F_{43}s_3),$$

$$= \frac{i}{c}\rho(\mathfrak{E}_x u_x + \mathfrak{E}_y u_y + \mathfrak{E}_z u_z) = \frac{i}{c}\rho\mathfrak{E}\mathbf{u}.$$

Az $\mathfrak{E}\mathbf{u}$ szorzat nem más, mint az $\mathfrak{E}$ térerősségnek az $\mathbf{u}$ sebességgel mozgó egységnyi töltésen 1s alatt végzett munkája, $\rho\mathfrak{E}\mathbf{u}$ pedig a térerősség teljesítménysűrűsége. Mivel a mágneses tér $\frac{\rho}{c}[\mathbf{u}, \mathfrak{H}]$ ponderomotoros ereje mindig merőleges a sebességre, ezért mágneses munkavégzése nincsen. f_4 tehát a teljes elektromágneses teljesítménysűrűség i/c-szerese.

Következő feladatunk a (14.5.6–7) alatti

$$\begin{matrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{matrix} \tag{15.3.24}$$

Maxwell-féle feszültségtenzor kifejezése az F_{kl} elektromágneses tértenzorral. E célból képezzük F_{kl}-ből a következő szimmetrikus négyestenzort

$$T_{kl} = -\frac{1}{4\pi}\left[\sum_{r=1}^{4} F_{kr}F_{lr} - \frac{1}{4}\delta_{kl}\sum_{r,s=1}^{4} F_{rs}^2\right], \tag{15.3.25}$$

ahol δ_{kl} a *Kronecker*-féle szimbólum, melynek értéke 1, ha $k = l$ és zérus, ha $k \neq l$.

A (3.15) definíciók alapján számítsuk ki ezen tenzor egyes komponenseit. Elő-

ször tekintsük a $\sum_{r,s=1}^{4} F_{rs}^2$ összeget. Elemi számítás szerint

$$\sum_{r,s=1}^{4} F_{rs}^2 = 2(\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2).$$

A T_{11} tenzorkomponensnél $k = l = 1$. Ekkor $\delta_{11} = 1$ és

$$T_{11} = -\frac{1}{4\pi}\left[\mathfrak{H}_z^2 + \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{E}_x^2 - \frac{1}{2}(\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2)\right] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left[-\mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{E}_x^2 + \frac{1}{2}(\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{E}^2)\right] = X_x.$$

Hasonlóképpen beláthatjuk, hogy T_{22} és T_{33} a (3.24) szkéma másik két diagonális elemével, Y_y-nal és Z_z-vel egyezik meg. A nemdiagonális elemeknél $\delta_{kl} = 0$. Legyen a prototípus

$$T_{12} = -\frac{1}{4\pi}(-\mathfrak{H}_y\mathfrak{H}_x - \mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y) = X_y.$$

Hasonlóan határozhatjuk meg a T tenzor többi elemét. Így arra a megállapításra juthatunk, hogy a T tenzor szkémájának

$$\begin{array}{cccc} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ \hline T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{array} \qquad (15.3.26)$$

bal felső 3×3 méretű tartománya éppen a (3.24) *Maxwell*-féle feszültségtenzorral azonos. A (3.25) szimmetrikus négyestenzor tehát a *Maxwell*-féle feszültségtenzor négydimenziós általánosítása.

Jól tudjuk, hogy egyik inerciarendszerből a másikba való áttérésnél a teljes T_{kl} tenzor transzformálódik. A transzformációból nem lehet kizárni azokat az elemeket, melyekben a négyes index előfordul. Kötelességünk ezért ezen elemek fizikai jelentését tisztázni Számítsuk ki először T_{41}-et: $k = 4$, $l = 1$ és $\delta_{41} = 0$. Kapjuk tehát

$$T_{41} = -\frac{i}{4\pi}(\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z - \mathfrak{H}_y\mathfrak{E}_z) = -\frac{i}{4\pi}[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]_x = -\frac{i}{c}S_x.$$

T_{41} tehát az $\mathbf{S}$ sugárvektor x komponensének $-i/c$-szerese. Hasonlóképpen $T_{42} = -\frac{i}{c}S_y$ és $T_{43} = -\frac{i}{c}S_z$.

A (3.25) tenzor szimmetrikus volta miatt a T_{14}, T_{24} és T_{34} tenzorkomponensek rendre megegyeznek a fenti T_{41}, T_{42} és T_{43} komponensekkel. A 14. fejezet 6. §-ban láttuk, hogy az elektromágneses impulzus sűrűsége $\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2$. A (3.26) szkéma negyedik oszlopát $\mathbf{g}$ komponenseivel fogjuk kifejezni:

$$T_{14} = -icg_x,\ T_{24} = -icg_y,\ T_{34} = -icg_z.$$

Hátra van még a T_{44} tenzorkomponens. Ennek értéke (3.25) szerint, ha $k = l = 4$ és $\delta_{44} = 1$, a következő lesz:

$$T_{44} = -\frac{1}{4\pi}\left[-\mathfrak{E}^2 - \frac{1}{2}(\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2)\right] = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) = w.$$

T_{44} tehát a tér energiasűrűsége. Ezzel a T_{kl} tenzor valamennyi elemének fizikai jelentését tisztáztuk. Eredményeinket a következő szkéma foglalja össze:

$$T_{kl} = \begin{matrix} X_x & X_y & X_z & -icg_x \\ Y_x & Y_y & Y_z & -icg_y \\ Z_x & Z_y & Z_z & -icg_z \\ -\frac{i}{c}S_x & -\frac{i}{c}S_y & -\frac{i}{c}S_z & w \end{matrix} \qquad (15.3.27)$$

E tenzor neve: *energia-impulzus tenzor*. Magába foglalja a *Maxwell*-féle feszültségtenzort, az impulzussűrűséget, a sugárvektort és az energiasűrűséget. Jelentős eredményünk, hogy ezek együttesen és szimmetrikus mátrix mintájára transzformálandók.

Képezzük az energia-impulzus tenzor négyes divergenciáját, tehát a $\sum_{l=1}^{4} \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l}$ kifejezést. (3.25) differenciálásával kapjuk:

$$\sum_{l=1}^{4} \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{l,r=1}^{4} \left[\frac{\partial F_{kr}}{\partial x_l} F_{lr} + F_{kr}\frac{\partial F_{lr}}{\partial x_l} - \frac{1}{2}\delta_{kl} \sum_{s=1}^{4} F_{rs}\frac{\partial F_{rs}}{\partial x_l}\right].$$

Az utolsó tag csak akkor lesz zérustól különböző, ha $k = l$, tehát tulajdonképpen x_k szerint kell differenciálnunk. Végrehajtva még az utolsó tagban az $r \to l$ és $s \to r$ jelölésváltozásokat, nyerjük hogy

$$\sum_{l=1}^{4} \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{l,r=1}^{4} \left[\frac{\partial F_{kr}}{\partial x_l} F_{lr} + F_{kr}\frac{\partial F_{lr}}{\partial x_l} - \frac{1}{2} F_{lr}\frac{\partial F_{lr}}{\partial x_k}\right].$$

Átalakítva

$$\sum_{l=1}^{4} \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{l,r=1}^{4} \left[\frac{1}{2} F_{lr}\left(\frac{\partial F_{kr}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{lk}}{\partial x_r} + \frac{\partial F_{rl}}{\partial x_k}\right) - F_{kl}\frac{\partial F_{lr}}{\partial x_r}\right]. \qquad (15.3.28)$$

Az energia-impulzus tenzor divergenciáját kifejeztük az elektromágneses tértenzor komponenseivel és azok deriváltjaival. Most használjuk fel a *Maxwell*-

egyenleteket magukba sűrítő (3.18) és (3.20) tenzoregyenleteket. (3.28)-ban szereplő gömbölyű zárójeles kifejezés értéke a második *Maxwell*-csoport értelmében zérus, az utolsó tagban előforduló $\sum_r \frac{\partial F_{lr}}{\partial x_r}$ összeg az első *Maxwell*-csoport szerint $\frac{c}{4\pi} s_l$-lel egyenlő. Tehát

$$\sum_{l=1}^{4} \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} = \frac{1}{c} \sum_{l=1}^{4} F_{kl} s_l . \tag{15.3.29}$$

Figyelembe véve (3.24)-et írhatjuk:

$$\sum_{l=1}^{4} \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} = f_k . \tag{15.3.30}$$

Tehát az energia-impulzus tenzor divergenciája a ponderomotoros erősűrűséggel egyezik meg. Ez szabályos négyesvektor egyenlet, mely minden inerciarendszerben érvényes. Fizikai tartalmát a (3.27) tenzorkomponensek behelyettesítésével állapítjuk meg. $k = 1$ esetén fenti törvényünk a következőt adja:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - \frac{\partial g_x}{\partial t} = f_x .$$

Ez pedig a (14.5.8) egyenletcsoport első egyenletével azonos, $k = 2$ és 3 esetén pedig ugyanezen egyenletcsoport y és z komponensét kapjuk meg. A (3.30) divergenciatörvény tehát a *Maxwell*-féle feszültségtenzor divergenciájára vonatkozó eredményünk invariáns megfogalmazása. Természetesen azonnal felvetődik, hogy mi a fizikai tartalma a divergenciatörvény negyedik komponensének. $k = 4$ esetén (3.30) a következőt mondja ki:

$$-\frac{i}{c}\frac{\partial S_x}{\partial x} - \frac{i}{c}\frac{\partial S_y}{\partial y} - \frac{i}{c}\frac{\partial S_z}{\partial z} + \frac{1}{ic}\frac{\partial w}{\partial t} = f_4 = \frac{i}{c}\rho \mathfrak{E}\mathbf{u} .$$

Vagyis

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \mathfrak{E}\mathbf{u} = 0 . \tag{15.3.31}$$

Az első tag a térfogategységből másodpercenként kiáramló elektromágneses energiával egyenlő, a második tag a térfogategységben másodpercenként felhalmozódó energia, az utolsó tag pedig az elektromágneses tér teljesítménysűrűsége. Egyenletünk tehát az elektrodinamika energiatörvénye.

4. §. Doppler-effektus és aberráció

A relativisztikus elektrodinamika általános elveinek megbeszélése után speciális feladatok megoldására térünk át. Egy igen távoli fényforrás fényét az észlelő már síkhullámnak tekinti. A fényforráshoz képest mozdulatlan megfigyelő sze-

rint a fényrezgés körfrekvenciája ω, haladási irányának három iránykoszinusza pedig α, β és γ. Ha azonban a megfigyelő a fényforráshoz képest mozog, úgy más, ω', frekvenciát és más, α', β', γ', haladási irányt észlel. A mozgó megfigyelő által észlelt frekvenciaváltozást *Doppler-effektus*nak, az irányváltozást pedig *aberráció*nak nevezzük.

E jelenségek elméletét természetszerűleg a *Lorentz*-transzformációból vezethetjük le. A fényforráshoz rögzített inerciarendszer legyen K, a megfigyelő koordinátarendszere pedig K'. A fény síkhullámot (13.2.11) mintájára írjuk fel

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= Ae^{i\varepsilon_x}\Phi\,, & \mathfrak{H}_x &= Fe^{i\delta_x}\Phi\,, \\ \mathfrak{E}_y &= Be^{i\varepsilon_y}\Phi\,, & \mathfrak{H}_y &= Ge^{i\delta_y}\Phi\,, \\ \mathfrak{E}_z &= Ce^{i\varepsilon_z}\Phi\,, & \mathfrak{H}_z &= He^{i\delta_z}\Phi\,, \end{aligned} \tag{15.4.1}$$

ahol Φ a hullám fázisa. Ha egyszerűség kedvéért vákuumot tételezünk fel, akkor a hullám terjedési sebessége c lesz és

$$\Phi = e^{i\omega\left(t-\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{c}\right)}. \tag{15.4.2}$$

Bevezetve a (6.4.9) *Lorentz*-transzformációt, vagyis feltételezve, hogy a megfigyelő a K-rendszer x-tengelye mentén mozog konstans v sebességgel, a fázis kifejezése a következő lesz

$$\Phi = e^{i\omega\left[\frac{\left(1-\frac{\alpha v}{c}\right)t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-\frac{\left(\alpha-\frac{v}{c}\right)x'}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}-\frac{\beta y'}{c}-\frac{\gamma z'}{c}\right]}. \tag{15.4.3}$$

A fényhullám fázisát tehát a K' inerciarendszerben is (4.2)-höz analóg kifejezés írja le,

$$\Phi = e^{i\omega'\left(t'-\frac{\alpha' x'+\beta' y'+\gamma' z'}{c}\right)}, \tag{15.4.4}$$

ahol

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega\frac{1-\frac{\alpha v}{c}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \\ \omega'\alpha' &= \omega\frac{\alpha-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \\ \omega'\beta' &= \omega\beta, \\ \omega'\gamma' &= \omega\gamma. \end{aligned} \tag{15.4.5}$$

Az első egyenlet a *Doppler*-effektust írja le. E formulában α a fénysugárnak az x-tengellyel, tehát a megfigyelő mozgásirányával bezárt szögének koszinusza.

Ennélfogva αv a megfigyelő és a fényforrás viszonylagos sebessége. Ha αv pozitív, úgy a megfigyelő távolodik a fényforrástól, ha pedig αv negatív, akkor közelednek egymáshoz.

Tranzverzális *Doppler*-effektusról akkor beszélünk, ha a fénysugár merőleges a megfigyelő mozgásirányára, azaz ha $\alpha = 0$. Ekkor

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx \omega\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right). \tag{15.4.6}$$

A tranzverzális *Doppler*-effektust Ives nek sikerült kísérletileg kimutatnia.

Longitudinális *Doppler*-effektusról $\alpha = \pm 1$ esetén beszélünk. A megfigyelt frekvencia

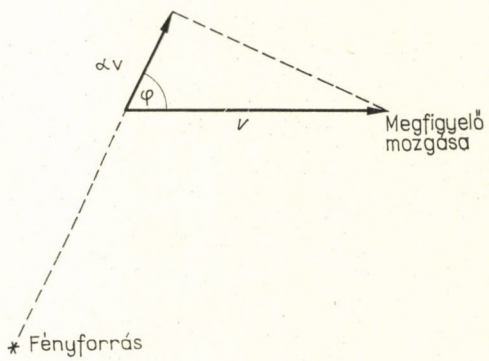
$$\omega' = \omega \frac{1 \mp v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \omega \sqrt{\frac{1 \mp v/c}{1 \pm v/c}} \approx \omega\left(1 \mp v/c + \frac{1}{2}v^2/c^2\right). \tag{15.4.7}$$

Távolodáskor a frekvencia csökken, közeledéskor növekszik.

A fénysugár irányát, a mozgó megfigyelő szerint, az α', β' és γ' iránykoszinuszok jellemzik. (4.5) utolsó három egyenletét elosztva az elsővel, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{\alpha - v/c}{1 - \alpha v/c}, \\ \beta' &= \frac{\beta\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \alpha v/c}, \\ \gamma' &= \frac{\gamma\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \alpha v/c}. \end{aligned} \tag{15.4.8}$$

Könnyen beláthatjuk, hogy $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$, tehát a vesszős iránykoszinuszok is kielégítik az iránykoszinuszokra kötelező feltételt. A (4.8) formulák írják le az aberráció jelenségét.



222. ábra. A *Doppler*-effektus

Az aberráció részletes megvizsgálásához célszerű a koordinátarendszerek z-tengelyét a 222. ábra síkjára merőlegesen felvenni. Ekkor a fényirányt egyetlen adattal, a ϕ szöggel adhatjuk meg:

$$\alpha = \cos\phi, \quad \beta = \sin\phi, \quad \gamma = 0 .$$

A mozgó megfigyelő által észlelt fényirány

$$\alpha' = \frac{\cos\phi - v/c}{1 - \frac{v}{c}\cos\phi},$$

$$\beta' = \frac{\sin\phi \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c}\cos\phi},$$

$$\gamma' = 0 .$$

Az észlelt fényiránynak az x-tengellyel bezárt ϕ' szögét pedig az alábbi formula adja:

$$\operatorname{tg}\phi' = \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\sin\phi \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\cos\phi - v/c} . \tag{15.4.9}$$

Az aberráció jelenségére első ízben BRANDLEY angol csillagász figyelt fel, aki észrevette, hogy az összes állócsillag évi elliptikus mozgást végez. Ez a látszólagos mozgás nyilván tükörképe a Föld Nap körüli mozgásának és onnan származik, hogy a Föld mozgásának iránya az év folyamán változik és ezért a mozgó Földön végzett megfigyelésnél az aberráció okozta szögeltérülés szintén változni fog.

HARMADIK RÉSZ

TERMODINAMIKA

Bevezetés

A termodinamika sok szempontból különbözik a fizika más fejezeteitől. Legelsőnek említendő, hogy – legalábbis a klasszikus értelemben vett – termodinamikában az idő fogalma nem szerepel és a vizsgálatok csak az egyensúly feltételének tisztázására és a különböző egyensúlyi rendszerek egymásba való átalakulásának tárgyalására terjednek ki.* A termodinamika egyik fő célja, hogy a vizsgált rendszer állapothatározóinak egyensúlyi értékét meghatározza. Ezek az állapothatározók – mint pl. a nyomás, hőmérséklet, sűrűség, belső energia, stb. – nem adnak olyan részletes képet a rendszerről, mint amilyet a mechanikában és az elektrodinamikában megszoktunk. A mechanikában pl. egy erőtérben mozgó tömegpont mozgását kimerítően leírtuk azáltal, hogy $\mathbf{r}$ helyzetvektorát mint a t idő függvényét meghatároztuk. Ebből aztán a mozgás sok egyéb jellemzője is kiszámítható, pl. az energia $E = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r})$. Ha viszont az adott erőtérben mozgó tömegpontról csak annyit tudunk, hogy energiája E, akkor bár egy igen fontos adat birtokában vagyunk, a tömegpont pályájáról vajmi keveset tudunk mondani. A termodinamika pedig éppen az energiának és néhány más hasonló karakterű állapothatározónak megadására szorítkozik.

A termodinamikai tárgyalásmódnak ez a hiányosabb jellege természetesen visszatükröződik a termodinamika alaptörvényeiben is. A termodinamika alaptörvényei – főtételeknek szoktuk nevezni őket – néhány alapvető és általános érvényességű fizikai törvényt fejeznek ki. Az első főtétel pl. az energia megmaradását posztulálja. Láttuk, hogy az energiatétel fontos szerepet játszott a mechanikában és az elektrodinamikában is. Amíg azonban az energiatétel a mechanikában és az elektrodinamikában levezethető volt a mozgásegyenletekből, ill. a *Maxwell*-egyenletekből, addig a termodinamikában *axióma*ként szerepel. Az energiatételből önmagában, a mozgás-, ill. a *Maxwell*-egyenletek nélkül, aligha tudunk valamit is mondani a mechanikai és az elektromágneses rendszerekben lezajló folyamatok részleteiről.

A termodinamikai tárgyalásmódnak – éppen fenti jellegzetességei miatt – van egy igen nagy előnye: eredményei teljesen általános érvényűek. A termodina-

* A termodinamika modern eredményei a termikus folyamatok időbeli lefutásának problémáját is vizsgálják. Ez a kérdés ma még nem tekinthető lezártnak és könyvünkben nem tárgyaljuk.

mika alkalmazásához nem kell semmit tudnunk a vizsgált rendszer belső struktúrájáról, anyagi felépítéséről. A mechanikában, pl. egy pontrendszer leírásánál éppen a részletes leírás miatt, elengedhetetlen az egyes pontpárok közt ható $\mathbf{K}_{ij}$ erők ismerete. Ennek megadása sokszor nehézségekbe ütközik. A termodinamikai tárgyaláshoz a belső erők ismerete szükségtelen, elegendő az állapotjelzők közötti néhány összefüggés megadása. A termodinamikának ez a széles körű általánossága ad különös fontosságot. Külön kiemeljük, hogy a termodinamika törvényei kézenfekvő módon kiterjeszthetők olyan rendszerekre is, melyek a kvantummechanika törvényeinek engedelmeskednek.

TIZENHATODIK FEJEZET

A TERMODINAMIKA FŐTÉTELEI

1. §. A hőmérséklet fogalma és a hőmérsékleti skála

Termodinamikai fejtegetéseinket a hőmérséklet fogalmának megbeszélésével kezdjük. Mindennapos tapasztalat, hogy a testek között különbséget veszünk észre, melyet úgy fejezünk ki, hogy az egyik test hideg, a másik meleg. Termodinamikai szóhasználattal úgy mondjuk, hogy a testek hőmérséklete különböző. A testeknek ezt a tulajdonságát a mechanikában és az elektrodinamikában figyelmen kívül hagyjuk. Termodinamikában a hőmérséklet döntő fontosságú.

A hőmérsékletnek legszembeötlőbb tulajdonsága, hogy kiegyenlítődésre törekszik. Ha két testet, pl. A-t és B-t huzamosabb ideig érintkezésbe (termikus kontaktusba) hozunk, úgy hőmérsékleteik között különbséget már nem észlelünk, hőmérsékletük azonos lesz. Ez teljesen független az A és B testek speciális tulajdonságaitól és az érintkezés módjától. Így rögtön megadhatunk egy eljárást arra, hogy egy testet egy meghatározott hőmérsékletre hozzunk: ha a testet a kívánt hőmérsékletű termosztátba vagy hőfürdőbe helyezzük, akkor elegendően hosszú idő után hőmérséklete (per definitionem) a hőfürdőével azonos lesz.

A termodinamika kiépítésében az első lépés a hőmérséklet számszerű jellemzése. Erre lehetőséget az a tapasztalat nyújt, hogy a hőmérséklet változásával megváltozik a testek szinte minden tulajdonsága, pl. a térfogat, a nyomás, az elektromos ellenállás, stb. A hőmérsékleti skála elvben természetesen teljesen szabadon állapítható meg. Úgy járunk el, hogy önkényesen kiválasztunk egy testet, A-t, melynek egy jól mérhető tulajdonsága a hőmérséklettel folytonosan és reprodukálhatóan változik. A-t *hőmérő*nek fogjuk nevezni és hőmérsékletét a fent említett tulajdonság számértékével azonosítjuk. Egy B test hőmérsékletének mérése ezek után úgy történik, hogy A-t és B-t érintkezésbe hozzuk egymással és megvárjuk, míg A állapota nem változik. Ekkor A és B hőmérséklete azonos és a hőmérséklet az A hőmérő állapotából számszerűleg megállapítható.

A termodinamika történeti fejlődése folyamán sokféle hőmérő és több hőmérsékleti skála alakult ki. Jól ismert pl. a higanyhőmérő. Egy higannyal töltött üvegedény felül kapilláris szárban folytatódik, a higany beleér a kapilláris csőbe. Ha melegítjük, a higany is és az edény is kitágul, de a higany jóval nagyobb mértékben. Melegítéskor tehát a higany a kapillárisban emelkedik. Minden hőmérséklethez a higanyszál meghatározott állása tartozik. A Celsius skála 0°-át az olvadó jég, 100°-át a forrásban levő víz gőzének hőmérsékleténél jelöljük be, a közbenső intervallumot 100 egyenlő részre osztjuk.

A gázhőmérő a gázoknak azt a tulajdonságát használja ki, hogy az állandó térfogaton tartott gáz nyomása növekvő hőmérséklettel folytonosan növekszik. Zárjunk egy gázt V térfogatú edénybe és mérjük meg a nyomását az olvadó jég, valamint a forrásban levő víz hőmérsékletén. Jelöljük e nyomásokat p_0- ill. p_{100}-zal. A gázhőmérő skálája úgy készül, hogy a gáz nyomásának növekedését a hőmérséklettel arányosnak tekintjük, azaz ha a nyomás mért értéke p, úgy a hőmérséklet

$$t = \frac{100}{p_{100} - p_0}(p - p_0). \tag{16.1.1}$$

Ebből

$$p = p_0(1 + \alpha t), \tag{16.1.2}$$

ahol

$$\alpha = \frac{p_{100} - p_0}{100\, p_0}. \tag{16.1.3}$$

Igen fontos kísérleti tény, hogy α fenti értéke jó közelítéssel független a V térfogattól, a gáz mennyiségétől, sőt anyagi minőségétől is, ha a hőmérséklet eléggé a kondenzációs hőmérséklet felett van. α számértéke a mérések szerint

$$\alpha = \frac{1}{273{,}16\,^\circ\mathrm{C}}. \tag{16.1.4}$$

Ez a konstans a gázoknak közös jellemzője.

A későbbiekben igen fontos szerephez jut a *Kelvin-féle hőmérsékleti skála*, mely a Celsius skálán mért hőmérséklettől $T_0 = 1/\alpha = 273{,}16$ °C-kal tér el. A Kelvin-skálán mért hőmérsékletet T-vel jelöljük

$$T = t + T_0 = t + 273{,}16^\circ. \tag{16.1.5}$$

A Kelvin-skála bevezetésével (1.2) a következő alakban írható

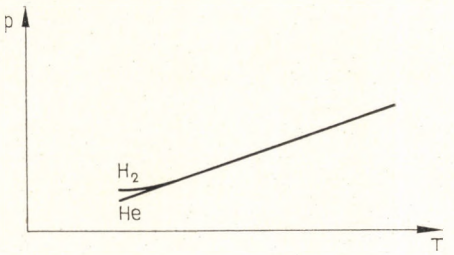
$$p = \frac{p_0}{T_0} T, \tag{16.1.6}$$

a nyomás tehát egyenesen arányos a T hőmérséklettel.

Még egyszer kiemeljük, hogy ez az arányosság egyrészt a hőmérsékleti skála *definíciójának* következménye, másrészt implikálja azt a tapasztalati tényt, hogy a különböző gázokkal bevezetett hőmérsékleti skálák praktice egybeesnek. A 223. ábrán a He és a H_2 gáz nyomás-hőmérséklet összefüggését láthatjuk. Ha etalonnak a He-ot választjuk, úgy (1.6) He-ra egzaktul érvényes, a $p - T$ összefüggést egy egyenes ábrázolja. Az ábra jól mutatja, hogy a H_2 gáz $p - T$ összefüggése csak egész alacsony hőmérsékleteken, a kondenzációs pont környékén tér el a He-étól.

A termodinamika második főtételének felhasználásával definiálni fogjuk *az abszolút vagy termodinamikai hőmérsékleti skálát*. Ez praktice egybeesik a Kelvin-skálával, de definíciója nincs semmiféle specifikus anyaghoz kötve. Ha (1.6)-

ban T az abszolút hőmérsékletet jelöli, úgy a gázok p nyomásának és T hőmérsékletének aránossága már nem a hőmérsékleti skála definíciójának következménye, hanem egy igen fontos tapasztalati tény megfogalmazása. Természetesen ki kell emelnünk, hogy az abszolút skála esetében (1.6) már egyik gázra sem lesz egzaktul igaz, de elegendően magas hőmérséklet esetén a gázok igen jó közelítéssel eleget tesznek ennek a törvénynek.



223. ábra. A hélium és a hidrogén nyomás—hőmérséklet összefüggése

2. §. Termodinamikai rendszerek. Állapotjelzők és állapotfüggvények

A termodinamika szabatos tárgyalása szükségessé teszi, hogy néhány alapfogalmat pontosan definiáljunk. *Termodinamikai rendszer* alatt mindig egy véges kiterjedésű anyagi rendszert értünk, melyet meghatározott tulajdonságú falak burkolnak. *Homogén* a rendszer, ha belsejében minden pontban ugyanazon fizikai állapotok uralkodnak. *Izotrop* rendszer egyetlen pontjában sincs egyik térbeli irány sem kitüntetve. Pl. egy kristályos szilárd test homogén, de nem izotrop, mert a kristálytani tengelyek bizonyos irányokat kitüntetnek. Ha a rendszer sajátságai helyről helyre változnak, akkor *inhomogén* rendszernek nevezzük. Ennek fontos speciális esete a *heterogén* rendszer, mely több homogén fázisból áll, amelyeket makroszkopikus határfelületek választanak el egymástól. Ilyen rendszer pl. a folyadék és vele érintkező gőze.

Külön kell szólnunk a termodinamikai rendszereket burkoló falak tulajdonságairól. Ha a rendszert merev és mindenféle fizikai hatás számára áthatolhatatlan burok határolja, akkor a rendszert *zártnak* nevezzük. *Merevnek* az olyan burkolófalat nevezzük, mely a mechanikai kölcsönhatásokat megakadályozza. *Nem áteresztő* vagy *félig áteresztő* falon semmiféle anyag, ill. bizonyos anyagok nem tudnak áthatolni. *Hőszigetelő* (*adiatermikus*) fal a hőhatásoktól szigeteli el a rendszert. Ellentétje a *diatermikus* fal, mely a hőhatásokat lehetővé teszi. *Árnyékoló* fal a külső erőterek befolyását teszi lehetetlenné. *Adiabatikus* falnak a hőszigetelő, árnyékoló és egyben át nem eresztő falat nevezzük. Az adiabatikus fal tehát csak a mechanikai hatások számára teszi hozzáférhetővé a rendszert.

Egy termodinamikai rendszer *állapotjelzői* azok a fizikai mennyiségek, melyek a rendszer állapotát termodinamikai értelemben meghatározzák. Ilyenek lehetnek pl. a rendszer térfogata, a belsejében uralkodó nyomás, a hőmérséklet, a rend-

szer tömege, belső energiája, a különböző kémiai anyagok koncentrációi, stb.

Az állapotjelzőket két nagy csoportba soroljuk. Azokat az állapotjelzőket, melyek értéke az egyensúlyban levő rendszer minden pontjában ugyanaz és független a rendszer méreteitől, *intenzív állapotjelzőknek* nevezzük. Intenzív mennyiség pl. a nyomás és a hőmérséklet. *Extenzív állapotjelzők* azok a fizikai mennyiségek, melyeket a rendszer részeihez tartozó állapotjelzők összegezésével kapunk és így arányosak a rendszer méreteivel. Extenzív mennyiségek pl. a rendszer térfogata, tömege vagy energiája.

Egy termodinamikai rendszer állapotjelzői általában nem függetlenek egymástól, hanem bizonyos összefüggések állnak fenn közöttük. Ezek az összefüggések két fajtájúak lehetnek. Vannak olyan összefüggések, melyek bizonyos állapotjelzők *definíciójául* szolgálnak. Ilyen pl. egy homogén test m tömege, V térfogata és ρ sűrűsége között fennálló

$$\rho = \frac{m}{V}$$

kapcsolat, mely a sűrűséget definiálja. Vannak azonban az állapotjelzők között olyan összefüggések is, melyek a rendszer fontos fizikai tulajdonságait írják le. Az ilyen típusú összefüggést *állapotegyenlet*nek nevezzük. Állapotegyenlet pl. egy adott tömegű gáz térfogata, nyomása és hőmérséklete között fennálló kapcsolat.

Az állapotjelzők között fennálló összefüggések lehetővé teszik az állapotjelzők számának redukálását és a *független állapotjelzők teljes rendszeré*nek megállapítását. Azokat a fizikai mennyiségeket, melyek a független állapotjelzők egyértékű függvényei, *állapotfüggvények*nek nevezzük. Természetesen a független állapotjelzők kiválasztásában mindig van bizonyos szabadságunk. Pl. a gázok vagy a folyadékok esetében független állapotjelző lehet a térfogat és a hőmérséklet, ekkor a nyomás állapotfüggvény. De választhatjuk független állapotjelzőnek a nyomást és a hőmérsékletet, ekkor a térfogat válik állapotfüggvénnyé.

Legyenek $x_1, \ldots, x_n$ valamely termodinamikai rendszer független állapotjelzői és f egy állapotfüggvény

$$f = f(x_1, \ldots, x_n). \tag{16.2.1}$$

Az állapotjelzők és az f függvény kapcsolatát gyakran nem a fenti explicit függvénykapcsolattal fejezzük ki, hanem f differenciális növekményét adjuk meg az állapotjelzők megváltozása esetén.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n . \tag{16.2.2}$$

Az állapotfüggvényt tehát a $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n$ differenciálhányadosokkal adjuk meg.

A (2.2) jobboldalán álló kifejezés speciális esete a *Pfaff*-féle kifejezésnek:

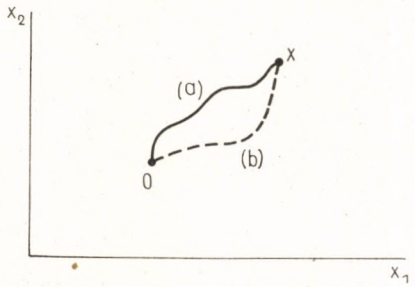
$$\delta g = A_1(x_1, \ldots, x_n)dx_1 + \ldots + A_n(x_1, \ldots, x_n)dx_n. \tag{16.2.3}$$

A *Pfaff*-féle kifejezés tehát a $dx_1, \ldots, dx_n$ infinitezimális változások lineáris kombinációja, az A_i együtthatók az állapotjelzők függvényei.

Az általános *Pfaff*-féle kifejezés nem minden esetben definiál egy állapotfüggvényt. Ennek szükséges és elegendő feltétele az, hogy a *Pfaff*-kifejezés *integrálható* legyen, vagyis az

$$\int_0^x \delta g = \int_0^x (A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n) \tag{16.2.4}$$

integrál az $x_1, \ldots, x_n$ koordinátarendszer egy kiválasztott $O = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$ kezdőpontjától egy tetszőleges $x = (x_1, \ldots, x_n)$ pontig független legyen az integ-



224. ábra. Az O és az X pontokat összekötő két különböző integrációs út

ráció útjától. Ez a követelmény nyilvánvaló, hiszen ha az integrál értéke egy tetszőleges (*b*) úton ugyanaz, mint az (*a*) úton, akkor a (2.4) integrál értéke egyértelmű módon csak az x végponttól függ és ezért az integrál egy állapotfüggvényt definiál.

Tudjuk jól, hogy a (2.4) integrál tetszés szerinti $A_1, \ldots, A_n$ együtthatók esetén *nem* lesz független az úttól. A Hetedik Fejezetben a háromdimenziós tér esetére részletesen megvizsgáltuk annak feltételét, hogy egy vektor vonalintegrálja független legyen az úttól. Eredményünk szerint ennek szükséges és elegendő feltétele az, hogy a vektor rotációja zérus legyen. Nagyon könnyű ezt a tételt az n-dimenziós tér esetére is bebizonyítani. Eredményül azt kapjuk, hogy a (2.4) integrál akkor és csakis akkor lesz független az úttól, ha

$$\frac{\partial A_i(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = 0\,. \tag{16.2.5}$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

A mondottak értelmében tehát, ha ezek a relációk fennállnak, akkor a (2.3) *Pfaff*-kifejezés egy állapotfüggvényt definiál.

Megjegyezzük, hogy a termodinamikában az olyan *Pfaff*-kifejezéseknek is igen fontos szerep jut, melyek nem integrálhatók, azaz nem értelmeznek egy állapotfüggvényt. Ilyen típusú mennyiség pl. a termodinamikai rendszer által végzett elemi munka vagy a felvett elemi hőmennyiség. Természetesen a nem integrál-

ható *Pfaff*-kifejezések esetében is az

$$\int_{(a)} \delta g = \int_{(a)} (A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n) \tag{16.2.6}$$

integrálnak egy jól definiált értéke van, de az integrál értéke megváltozik, ha az integráció (*a*) útját pl. a (*b*) úttal cseréljük ki.

Befejezésül foglalkozzunk röviden olyan egyszerű anyagok esetével, melyek semmiféle külső erőtérrel nem tudnak kölcsönhatásba lépni és melyekben kémiai reakciók sem tudnak bekövetkezni. Ilyen egyszerű esetben, ha a tömeget adottnak tekintjük, a független állapotjelzők száma kettő. Legyenek ezek a térfogat és a hőmérséklet. A nyomás ekkor egy állapotegyenletből kapható meg,

$$p = p(V, T), \tag{16.2.7}$$

vagy differenciális alakban

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT. \tag{16.2.8}$$

Elsősorban az itt fellépő differenciálhányadosok fizikai jelentését kell megbeszélnünk. A vizsgált rendszer *kompresszibilitása* alatt az egységnyi nyomásnövekedésnek megfelelő relatív térfogatcsökkenést értjük. Az *izoterm kompresszibilitást* tehát a következő egyenlet definiálja

$$\frac{1}{\kappa} = -V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T. \tag{16.2.9}$$

A $K = \frac{1}{\kappa}$ mennyiséget a *kompresszibilitás modulusá*nak nevezzük. A másik igen fontos jellemzője a rendszernek a hőtágulási együttható, mely az egységnyi hőmérsékletnövekedésnek megfelelő relatív térfogatnövekedés. Az *izobár hőtágulási együttható* tehát

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \tag{16.2.10}$$

A (2.8)-ban fellépő deriváltak közül az első a kompresszibilitás modulusával áll szoros kapcsolatban. A második az állandó térfogatú rendszer egységnyi hőmérsékletemelkedéséhez tartozó nyomásnövekedést adja meg. Kondenzált testek esetében ez igen nehezen határozható meg kísérleti úton. Ezzel szemben kiszámítása a fenti formulák alapján könnyen elvégezhető. Legyen (2.8)-ban a baloldalon $dp = 0$ és osszunk végig dT-vel. Kapjuk

$$0 = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V.$$

Ebből a nyomásnövekedési együttható

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \alpha K. \tag{16.2.11}$$

Nézzünk egy számpéldát. 20 °C-on az ólom hőtágulási együtthatója $\alpha = 8{,}4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{grad}^{-1}$ és a kompresszibilitási modulusa $K = 4{,}1 \cdot 10^{5}$ atm. Ebből

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = 34{,}3\ \mathrm{atm\ grad}^{-1}.$$

Tehát, ha az ólom hőmérsékletének 20 °C-ról 21 °C-ra való emelésénél a térfogatát változatlanul akarjuk hagyni, úgy 34,3 atm nyomást kell alkalmaznunk.

3. §. Az ideális gáz állapotegyenlete

Az alábbiakban a gázokra vonatkozó néhány általános törvényszerűséget beszélünk meg. Elsőnek BOYLE (1669) törvényét említjük, mely szerint egy adott mennyiségű és állandó hőmérsékleten tartott gázra

$$pV = \mathrm{konst.},$$

azaz ha a gázt pl. fele, harmada, ... térfogatra nyomjuk össze, úgy a nyomása kétszeresére, háromszorosára, ... növekszik. Általánosságban a törvényt

$$pV = F(T) \tag{16.3.1}$$

alakban írhatjuk, hiszen a pV szorzat függ a T hőmérséklettől. A *Boyle*-törvény ebben a formájában még független a hőmérsékleti skála definíciójától. Az abszolút hőmérsékleti skálát épp úgy vezettük be, hogy (3.1) jobboldala arányos legyen T-vel:

$$pV = CT, \tag{16.3.2}$$

ahol C már csak a gáz mennyiségétől és anyagi minőségétől függ.

A második alapvető törvény felismerése AVOGADRO nevéhez fűződik. Eszerint 1 mól mennyiségű gáz adott hőmérsékleten és adott nyomáson az anyagi minőségtől függetlenül ugyanazt a térfogatot foglalja el. Ezt a térfogatot *móltérfogat*nak nevezzük. A móltérfogat normálállapotban, azaz az olvadó jég hőmérsékletén,

$$T_0 = 273{,}16\ ^\circ\mathrm{K} \tag{16.3.3}$$

és

$$p_B = 1\ \mathrm{atm} \tag{16.3.4}$$

nyomáson a kémia elemeiből ismert $22{,}41 \cdot 10^3\ \mathrm{cm}^3$ érték. Egy m tömegű és M molekulasúlyú gáz m/M mólt tartalmaz, ezért térfogata normálállapotban

$$V_{0B} = 22{,}41 \cdot 10^3 \frac{m}{M}\ \mathrm{cm}^3. \tag{16.3.5}$$

Behelyettesítve a (3.3–5) adatokat a (3.2) állapotegyenletbe, a C konstansra a következő értéket kapjuk

$$C = \frac{p_B V_{0B}}{T_0} = \frac{m}{M} R, \tag{16.3.6}$$

ahol

$$R = \frac{22{,}41 \cdot 10^3}{273{,}16} \cdot \frac{\text{cm}^3 \cdot \text{atm}}{\text{mól grad}} = 8{,}31 \cdot 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{mól grad}}. \qquad (16.3.7)$$

Az R konstans neve: *álltalános gázállanaó*. Értéke minden gázra a fenti univerzális konstans. A (3.2) állapotegyenlet ezek után a következőképpen alakul

$$pV = \frac{m}{M} RT. \qquad (16.3.8)$$

Ezt az állapotegyenletet hívjuk *ideális gáztörvénynek* és az olyan gázt, mely pontosan követi ezt a törvényt, *ideális gáznak*. A természetben előforduló gázok egyike sem ideális, de a kondenzációs hőmérsékletnél jóval magasabb hőmérsékleteken a gázok igen jó közelítéssel eleget tesznek az ideális gáztörvénynek.

Foglalkoznunk kell még a *gázkeverékek* állapotegyenletével. Kiindulópontunk DALTON kísérletileg felismert törvénye, mely szerint egy V térfogatba bezárt gázkeverék nyomása az egyes gázkomponensek parciális nyomásának összege lesz. (*Parciális nyomáson* az illető gázkomponens nyomását értjük, ha egyedül töltené be a V térfogatot.) A gázkeverék nyomása tehát

$$p = \sum_\lambda p_\lambda, \qquad (16.3.9)$$

ahol a λ-ik komponens parciális nyomását a (3.8) gáztörvény határozza meg:

$$p_\lambda V = \frac{m_\lambda}{M_\lambda} RT.$$

Összegezve ezeket az egyenleteket minden gázkomponensre, a *Dalton*-törvény értelmében kapjuk, hogy

$$pV = \left(\sum \frac{m_\lambda}{M_\lambda} \right) RT = \frac{m}{M} RT. \qquad (16.3.10)$$

Itt $m = \sum_\lambda m_\lambda$, a gázkeverék össztömege és az M effektív molekulasúlyt a következő egyenlet határozza meg

$$\frac{1}{M} = \frac{\sum_\lambda (m_\lambda / M_\lambda)}{\sum_\lambda m_\lambda}. \qquad (16.3.11)$$

Arra az igen fontos megállapításra jutunk tehát, hogy a gázkeverékek is kielégítik a (3.8) gáztörvényt, ha molekulasúlyukat a (3.11) formula szerint értelmezzük. Ez az eredményünk az ideális gáztörvény széles körű alkalmazhatóságát biztosítja.

Nézzük példaképp a levegő esetét. A levegő, eltekintve a nyomokban fellépő anyagoktól, nitrogén és oxigén keveréke, mégpedig olyan arányban, hogy 1 g levegő 0,8 g nitrogént és 0,2 g oxigént tartalmaz. Az N_2 molekulasúlya 28, az O_2-é pedig 32. A levegő effektív molekulasúlya (3.11) szerint $M = 28{,}7$. Ezt az adatot kell a gáztörvénybe helyettesítenünk, ha azt a levegőre akarjuk alkalmazni.

4. §. A termodinamika első főtétele

A termodinamika első főtétele tulajdonképpen nem más, mint az energia megmaradásának kísérletileg sokszorosan igazolt törvénye. Mint az 1. §-ban említettük, ezt a törvényt az elméleti termodinamika axióma rangjára emeli.

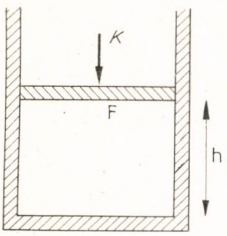
Tekintsünk egy zárt, minden külső hatástól elszigetelt rendszert. Ennek energiája az energiatétel értelmében egy időben változatlan E érték lesz. Az energia csak úgy változhat meg, ha a rendszer zártságát feloldjuk és környezetével kölcsönhatásba hozzuk. Ha a rendszer környezetéből δQ hőenergiát vesz fel és a környezet munkát végez a rendszeren, úgy a rendszer energianövekedése

$$dE = \delta Q + \delta A. \tag{16.4.1}$$

Ezt a törvényt nevezzük az *első főtétel*nek. Kiemeljük, hogy sem a rendszerbe bevezetett összes hő, sem a rendszeren végzett munkák nem tekinthetők állapotfüggvényeknek. Ezért a rendszer által felvett elemi hő és munka az állapotjelzők általános *Pfaff*-féle kifejezése, ezért is jelöltük δQ, ill. δA-val. A rendszer energiatartalma viszont állapotfüggvény, ezért dE megváltozása integrálható *Pfaff*-kifejezés.

Az alábbiakban a δA munka néhány fontos típusával ismerkedünk meg.

Kompresszió. Legyen a tekintetbe vett rendszer gáz vagy folyadék, mely egy hengerszerű edénybe van bezárva. A henger fedőlapját egy mozgatható dugattyú helyettesíti, melyre K nagyságú erőt kell gyakorolnunk, hogy a rendszer p nyomását kompenzáljuk: $K = pF$, ahol F a dugattyú felülete.



225. ábra. A kompressziós munka meghatározására szolgáló készülék

Nyomjuk a dugattyút dh távolsággal beljebb. Ekkor a K erő által végzett munka

$$\delta A = Kdh = pFdh = -pdV \tag{16.4.2}$$

lesz, ahol $dV = -Fdh$ a rendszer térfogatnövekménye. Ha véges kompresszióról van szó, amikor a térfogat V_0-ról V_1-re változik, akkor a rendszeren végzett teljes munka

$$A = -\int_{V_0}^{V_1} p(V)dV = \int_{V_1}^{V_0} p(V)dV \tag{16.4.3}$$

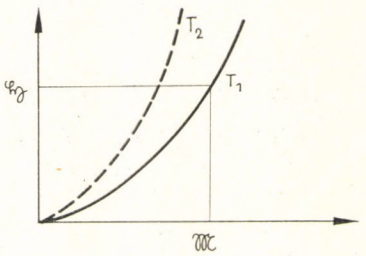
lesz. Az integrál kiszámításához természetesen tudnunk kell a $p=p(V)$ térfogat–nyomás összefüggést, ami függ attól, hogy kompresszió közben a rendszer milyen állapotokon megy keresztül. A 224. ábrán szemléltetett helyzettel állunk szemben: az integrál értéke függ az úttól és ezért az A munka nem állapotfüggvény. Más értéket kapunk A-ra, ha pl. a kompresszió alatt a hőmérséklet állandó marad (izotermikus kompresszió), mint ha a kompressziót adiabatikusan, tehát adiabatikus falakkal burkolt edényben végezzük és ismét mást, ha arról gondoskodunk, hogy a komprimálás alatt a rendszer p nyomása ne változhassék (izobár kompresszió).

Mágnesezés. Homogén anyagot tekintünk, mely külső mágneses térrel mágnesezett állapotba hozható. Ilyen esetben a független állapotjelzők közé az $\mathfrak{M}$ mágnesezettséget, tehát a térfogategység mágneses momentumát is fel kell vennünk.

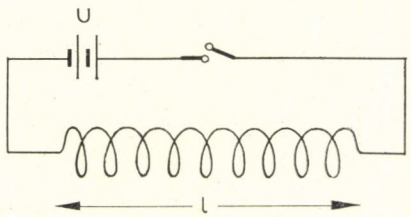
Azt a $\mathfrak{H}$ mágnesező teret, mely éppen az $\mathfrak{M}$ mágnesezettséget idézi elő

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\mathfrak{M}, T) \tag{16.4.4}$$

-vel jelöljük. A mágnesező tér értéke függ a T hőmérséklettől; ezt a jobboldalon explicite feltüntettük. A mágnesező tér és a mágnesezettség ezen összefüggését sokszor a mágnesezési diagramon adjuk meg. A diagramon minden hőmérséklethez tartozik egy $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ összefüggést ábrázoló görbe.



226. ábra. Különböző hőmérsékletekhez tartozó mágnesezési diagramok



227. ábra. Szolenoid

Az alábbiakban azt a kérdést vizsgáljuk meg, hogy mekkora munkát kell végeznünk ahhoz, hogy az $\mathfrak{M}$ mágnesezettséget előidézzük. Gondoljuk el pl., hogy a mágnesezést egy szolenoid segítségével végezzük el, melynek belsejébe helyezzük a mágnesezendő anyagot. A szolenoid hossza l, keresztmetszete F, menetszáma N, ellenállása R. Áramforrásul egy U feszültségű telep szolgál, melyet a $t = 0$ időpillanatban kapcsolunk be. Az elektrodinamikában tanultak szerint az áramkör egyenletét úgy kapjuk meg, hogy a telep feszültségét egyenlővé tesszük az IR ohmikus feszültségesés és az $\frac{N}{c}\dot{\Phi} = \frac{N}{c} F \dot{\mathfrak{B}}$ indukált feszültséggel:

$$U = IR + \frac{N}{c} F \dot{\mathfrak{B}}. \tag{16.4.5}$$

Itt $\mathfrak{B}$ a mágneses indukció értékét jelöli, mely, mint tudjuk,

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M} \tag{16.4.6}$$

-mel egyenlő, ahol $\mathfrak{H}$ a tekercsben uralkodó mágneses tér és $\mathfrak{M}$ az anyagunk megfelelő mágnesezettsége. A tekercs mágneses terét az elemekből jól ismert formula adja meg

$$\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\frac{N}{l}I. \tag{16.4.7}$$

Az áramforrás által végzett munka kiszámításához szorozzuk meg (4.5)-öt az I áramerősséggel és integráljunk $t = 0$-tól addig a t időig, míg az anyagunk mágnesezettsége $\mathfrak{M} = 0$-tól $\mathfrak{M}$-ig növekszik.

$$\int_0^t UIdt = R\int_0^t I^2dt + \frac{N}{c}F\int_0^t I\dot{\mathfrak{B}}dt.$$

A második integrálba helyettesítsük $\mathfrak{B}$-t (4.6)-ból, I-t pedig (4.7)-ből

$$\int_0^t UIdt = R\int_0^t I^2dt + \frac{V}{4\pi}\int_0^t \mathfrak{H}(\dot{\mathfrak{H}} + 4\pi\dot{\mathfrak{M}})dt,$$

ahol $V = Fl$ a szolenoid és egyben a vizsgált anyagunk térfogata. A második integrálban a gömbölyű zárójelet felbontva és t helyett a $\mathfrak{H}$, ill. $\mathfrak{M}$ integrációs változókat vezetve be, kapjuk

$$\int_0^t UIdt = R\int_0^t I^2dt + \frac{V}{8\pi}\mathfrak{H}^2 + V\int_0^{\mathfrak{M}} \mathfrak{H}d\mathfrak{M}. \tag{16.4.8}$$

A baloldalon UI a telep pillanatnyi teljesítménye, a baloldali integrál tehát a telep t idő alatt végzett munkája. A jobboldal első tagja az ohmikus veszteség miatt fellépő *Joule*-féle hő, a második tag pedig a szolenoidban kialakult mágneses tér energiája. Az energia megmaradásának tétele szerint a harmadik tag kell, hogy az az energia legyen, ami az anyag mágnesezéséhez szükséges. Ahhoz tehát, hogy az anyagot a mágnesezetlen $\mathfrak{M} = 0$ állapotból az $\mathfrak{M}$ mágnesezettségű állapotba hozzuk

$$A = V\int_0^{\mathfrak{M}} \mathfrak{H}(\mathfrak{M}, T)d\mathfrak{M} \tag{16.4.9}$$

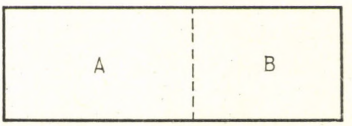
munkát kell végeznünk Ez a munka szintén *nem* tekinthető állapotjelzőnek, hiszen az integrál értéke nemcsak a végső $\mathfrak{M}$ értéktől függ, hanem attól is, hogy közben a hőmérséklet hogyan változik. Beszélhetünk izotermikus mágnesezésről, amikor T konstans marad, vagy pl. adiabatikus mágnesezésről, amikor a rendszert adiabatikus burokban mágnesezzük, stb.

Az elemi munkavégzés, ami a mágnesezettség kismértékű megváltoztatásához szükséges, (4.9) szerint

$$\delta A = V\mathfrak{H}(\mathfrak{M}, T)d\mathfrak{M} \tag{16.4.10}$$

lesz. Ez a munka szintén általános, tehát nem integrálható *Pfaff*-kifejezés.

Gay—Lussac-kísérlet. Egy V térfogatú zárt tartályt egy választófal két részre, A-ra és B-re oszt. Legyen az A rész gázzal megtöltve, melynek térfogata V_0, hőmérséklete T_0. A B részben vákuum van. Ha a válaszfalat hirtelen eltávolítjuk,



228. ábra. *Gay—Lussac*-kísérlet

úgy a gáz átterjed B-be és — bizonyos idő eltelte után — az egész $A + B$ tartályt megtöltve, nyugalomba jut. Ekkor térfogata V, hőmérséklete T. Miután az egész folyamat zárt falakkal burkoltan ment végbe, ezért a rendszer energiája nem változhat meg

$$E(V_0, T_0) = E(V, T). \tag{16.4.11}$$

Ez az összefüggés lehetőséget ad arra, hogy meghatározzuk az $E = E(V, T)$ állapotfüggvény „nívógörbéit", azaz megkeressük V és T azon összetartozó értékeit, amelyek mellett az E energia mindig ugyanazon $E_0 = E(V_0, T_0)$ konstanssal egyenlő.

A *Gay—Lussac*-kísérlet arra az érdekes eredményre vezet, hogy (4.11)-ben

$$T = T_0, \tag{16.4.12}$$

azaz a gáz hőmérséklete expanziónál nem változik meg. Ezt az eredményt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a gáz energiája konstans hőmérsékleten történő expanziónál állandó marad. A gáz E energiája ezek szerint független a V térfogattól, csak a T hőmérséklettől függ,

$$E = E(T). \tag{16.4.13}$$

Megjegyezzük, hogy az egészen pontos mérések szerint (4.12) nem teljesül egzakt pontossággal a gázokra, hanem csak közelítő eredményt jelent. A továbbiakban a *Gay—Lussac*-kísérlet eredményét az ideális gázoknál egzakt pontosságúnak tekintjük. Ezzel tulajdonképpen az ideális gáz definícióját tettük teljessé. Az ideális gázt két tulajdonság jellemez: kielégíti a (3.8) állapotegyenletet és energiája független a térfogattól. Sokszor (3.8)-at termikus, (4.13)-at pedig kalorikus állapotegyenletnek nevezik.

5. §. Hőkapacitás

Tekintsünk egy termodinamikai rendszert, melyet az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ független állapotjelzők jellemeznek. Az egyik állapotjelző lehet a rendszer T hőmérséklete, de általános esetben ez nem kötelező, és ezért a hőmérsékletet állapotfüggvénynek tekintjük,

$$T = T(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

A rendszer energiája szintén állapotfüggvény, azaz

$$E = E(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Változtassuk meg a rendszer állapotát infinitezimális mértékben, azaz az állapotjelzők változása

$$dx_1, dx_2, \ldots, dx_n \tag{16.5.1}$$

legyen. A hőmérséklet és az energia megváltozása ekkor

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial T}{\partial x_2}\right) dx_2 + \ldots + \left(\frac{\partial T}{\partial x_n}\right) dx_n, \tag{16.5.2}$$

ill.

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial E}{\partial x_2}\right) dx_2 + \ldots + \left(\frac{\partial E}{\partial x_n}\right) dx_n \tag{16.5.3}$$

fesz. Az állapotváltozás közben a rendszer a környezetétől munkát és hőt vehet lel, ezek, mint tudjuk, általános (tehát nem integrálható) *Pfaff*-kifejezések. A munkát jelölje

$$\delta A = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_n dx_n, \tag{16.5.4}$$

ahol az A_i együtthatók még az állapotjelzők függvényei. A δQ hő kifejezése már nem független a fentiektől, hiszen az első főtétel szerint $dE = \delta Q + \delta A$, tehát

$$\delta Q = \left(\frac{\partial E}{\partial x_1} - A_1\right) dx_1 + \left(\frac{\partial E}{\partial x_2} - A_2\right) dx_2 + \ldots + \left(\frac{\partial E}{\partial x_n} - A_n\right) dx_n. \tag{16.5.5}$$

A rendszer *hőkapacitásán* a felvett δQ hőmennyiség és dT hőmérsékletemelkedés viszonyát értjük,

$$C = \frac{\delta Q}{dT}.$$

(5.5) és (5.2) felhasználásával a hőkapacitásra a következő formulát nyerjük:

$$C = \frac{\left(\frac{\partial E}{\partial x_1} - A_1\right) dx_1 + \left(\frac{\partial E}{\partial x_2} - A_2\right) dx_2 + \ldots + \left(\frac{\partial E}{\partial x_n} - A_n\right) dx_n}{\left(\frac{\partial T}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial T}{\partial x_2}\right) dx_2 + \ldots + \left(\frac{\partial T}{\partial x_n}\right) dx_n}. \tag{16.5.6}$$

Az itt előforduló $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ és $\left(\frac{\partial E}{\partial x_i} - A_i\right)$ mennyiségek a rendszer tulajdonságaitól függenek, hiszen ezek szabják meg a hőmérséklet, az energia és az elemi munka kifejezéseit. Látjuk azonban, hogy a hőkapacitás ezen kívül függ az állapotjelzők megváltozásának

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n \tag{16.5.7}$$

arányától, azaz az *állapotváltozás irányától*. A hőkapacitás tehát a rendszer tulajdonságain kívül attól is függ, hogy milyen termodinamikai folyamat megy végbe a rendszerben.

Megemlítjük, hogy a gyakorlatban sokat használt fogalmak a rendszer *fajhője* és a *mólhője*. Az első az 1 g-nyi anyag, a másik az 1 mól-nyi anyag hőkapacitása. Természetesen ezek is az anyagi tulajdonságokon kívül az állapotváltozás irányától függő mennyiségek.

Fontos példaképp tárgyaljuk az ideális gáz esetét. Itt, ha a gáz m tömegét konstansnak tekintjük, két független állapotjelző van, a térfogat és a hőmérséklet

$$x_1 = V \quad \text{és} \quad x_2 = T. \tag{16.5.8}$$

Az ideális gáz energiája független a térfogatától, tehát

$$E = E(T). \tag{16.5.9}$$

Az állapotváltozáskor fellépő elemi munkát most (4.2) adja meg, hiszen csak mechanikai munkavégzésről lehet szó:

$$\delta A = -p dV. \tag{16.5.10}$$

A *Pfaff*-kifejezés együtthatói tehát most

$$A_1 = -p = -\frac{m}{M} R \frac{T}{V} \quad \text{és} \quad A_2 = 0. \tag{16.5.11}$$

Ha ezeket a formulákat behelyettesítjük a hőkapacitás képletébe, úgy kapjuk, hogy

$$C = p \frac{dV}{dT} + \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{mRT}{MV} \left(\frac{dV}{dT}\right) + \frac{\partial E}{\partial T}. \tag{16.5.12}$$

Az első tagban fellépő (dV/dT) differenciálhányados jelzi, hogy a hőkapacitás függ az állapotváltozás irányától.

Vizsgáljuk először a merev falú edénybe zárt, tehát konstans térfogatú gáz esetét. Ekkor $dV = 0$ lesz és az állandó térfogathoz tartozó hőkapacitás

$$C_V = \frac{\partial E}{\partial T}.$$

Jelöljük a T hőmérsékletű gáz fajhőjét $c_V(T)$-vel, azaz

$$c_V(T) = \frac{C_V}{m} = \frac{1}{m}\frac{\partial E}{\partial T}. \tag{16.5.13}$$

Ennek felhasználásával a hőkapacitás általános képlete a következőképpen írható

$$C = m\left[\frac{RT}{MV}\left(\frac{dV}{dT}\right) + c_V(T)\right]. \tag{16.5.14}$$

Az állandó térfogatú melegítés mellett a másik igen fontos speciális eset az állandó nyomáson történő hőfelvétel. Állandó nyomás esetén

$$p = \frac{mR}{M}\cdot\frac{T}{V} = \text{konst.}, \text{ tehát } \frac{T}{V} = \text{konst}.$$

Differenciálva

$$\left(\frac{dV}{dT}\right)_p = \frac{V}{T}. \tag{16.5.15}$$

Az állandó nyomású folyamat hőkapacitása tehát

$$C_p = m\left[\frac{R}{M} + c_V(T)\right]. \tag{16.5.16}$$

Ebből azt az érdekes eredményt olvashatjuk le, hogy az állandó nyomáshoz és az állandó térfogathoz tartozó hőkapacitás különbsége,

$$C_p - C_V = \frac{m}{M}R, \tag{16.5.17}$$

független az állapotjelzőktől. 1 móI anyag, tehát $m = M$ esetében ez a különbség éppen az R általános gázállandóval egyezik meg.

A gáznak egyik igen fontos jellemzője a kétféle hőkapacitás viszonya, amit κ-val jelölünk: $\kappa = C_p/C_V$. (5.16) erre a következő kifejezést szolgáltatja

$$\kappa = 1 + \frac{R}{Mc_V(T)}. \tag{16.5.18}$$

Fenti tárgyalásunkban a $c_V(T)$ fajhőt tapasztalati adatnak tekintettük, ami elvben a hőmérséklet függvénye lehet. A gázok molekuláris elmélete arra az eredményre vezet, hogy nem túlságosan nagy hőmérsékleteken az ideális gáz fajhője független a hőmérséklettől, értéke

$$c_V = \frac{1}{2}f\frac{R}{M}, \tag{16.5.19}$$

ahol f a molekula szabadsági fokainak száma:

$f = 3$ egyatomos gázokra,

$f = 5$ kétatomos gázokra,

$f = 6$ többatomos gázokra.

Ha ezt az eredményt (5.18)-ban figyelembe vesszük, úgy a hőkapacitások viszonyára a következő érték adódik

$$\kappa = \frac{2+f}{f}. \tag{16.5.20}$$

Tehát

$\kappa = 5/3$ egyatomos gázokra,

$\kappa = 7/3$ kétatomos gázokra,

$\kappa = 4/3$ többatomos gázokra.

Ezeket az adatokat a C_p/C_V viszonyra vonatkozó mérések is megerősítik.

6. §. Adiabatikus folyamatok

*Adiabatikus folyamat*nak az adiabatikus burokban lejátszódó folyamatokat értjük, ekkor a rendszer a környezettel csak mechanikai kölcsönhatásban áll. Adiabatikus folyamatnál hőfelvétel (és leadás) lehetetlen, tehát

$$\delta Q = 0. \tag{16.6.1}$$

(5.5) egyenletünket adiabatikus folyamatokra alkalmazva, kapjuk, hogy

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x_1} - A_1\right) dx_1 + \left(\frac{\partial E}{\partial x_2} - A_2\right) dx_2 + \ldots + \left(\frac{\partial E}{\partial x_n} - A_n\right) dx_n = 0. \tag{16.6.2}$$

Ebből az egyenletből meghatározhatjuk az állapotjelzők változásának

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n \tag{16.6.3}$$

arányát, tehát az állapotváltozás irányát. (6.2)-t *az adiabatikus folyamat differenciálegyenletének* nevezzük. Az egyenletben fellépő $\left(\frac{\partial E}{\partial x_i} - A_i\right)$ együtthatók természetesen a rendszer belső tulajdonságaitól, azaz az állapotegyenletektől függenek.

Tárgyaljuk speciális esetként az ideális gáz adiabatikus folyamatait. (5.8–10) szerint az adiabatikus folyamat differenciálegyenlete a következőképpen alakul

$$pdV + \frac{\partial E}{\partial T} dT = 0.$$

p-t az állapotegyenletből, $\partial E/\partial T$-t pedig a c_V fajhővel kifejezve kapjuk:

$$\frac{mRT}{MV}\,dV + mc_V(T)dT = 0\,.$$

Ebből

$$\left(\frac{dV}{dT}\right)_{ad} = -\frac{Mc_V(T)}{R}\,\frac{V}{T}\,. \tag{16.6.4}$$

Ez az egyenlet határozza meg az adiabatikus folyamat irányát. Integrálása a változók szétválasztásának módszerével történhet.

$$\ln V + \frac{M}{R}\int \frac{c_V(T)}{T}\,dT = \text{konst}\,. \tag{16.6.5}$$

Az itt fellépő integrált természetesen csak $c_V(T)$ ismeretében lehet kiszámítani (5.19) esetében

$$\ln V + \frac{1}{2}f \ln T = \text{konst}.,$$

azaz

$$TV^{2/f} = \text{konst}. \tag{16.6.6}$$

Ideális gáz adiabatikus változásánál tehát a hőmérséklet és a térfogat $2/f$-edik hatványának szorzata állandó marad.

Ha az adiabatikus változást a térfogat és a nyomás mint független állapotjelzők segítségével akarjuk tárgyalni, úgy (6.6) és (3.8)-ból a hőmérsékletet ki kell küszöbölnünk. Ekkor a

$$pV^{1+\frac{2}{f}} = \text{konst}.$$

összefüggést kapjuk, ami (5.20) miatt a

$$pV^{\kappa} = \text{konst}. \tag{16.6.7}$$

alakban is írható.

7. §. A termodinamika második főtétele

Mindennapos tapasztalataink mutatják, hogy az első főtétel nem elegendő a termodinamikai jelenségek teljes leírásához. Sok olyan folyamat, amit az első főtétel megenged, nem valósítható meg a természetben. Hogy ezt világosabban megértsük, foglalkozzunk egy kicsit részletesebben a természetben végbemenő termodinamikai folyamatokkal.

A tapasztalat szerint a természetben végbemenő folyamatok egy része reverzibilis, más része pedig irreverzibilis. Reverzibilisnek vagy megfordíthatónak egy olyan folyamatot nevezünk, amely minden részletében és minden kihatásával együtt visszafelé is lefolytatható, és ezáltal a folyamat kiinduló állapota vissza-

állítható. Irreverzibilis folyamat lefolytatása után a rendszert nem tudjuk úgy visszavinni eredeti állapotába, hogy a rendszerben vagy környezetében ne jöjjön létre az eredeti állapothoz képest változás. A természetben végbemenő folyamatok általában irreverzibilisek. A reverzibilis folyamatokat legfeljebb megközelíteni tudjuk, de megvalósítani nem.

Az elmondottakat néhány példával világítjuk meg. Két különböző hőmérsékletű test összeérintésénél a melegebb a hidegebbnek hőt ad át, míg a közös egyensúlyi hőmérséklet be nem áll. Ez a hőkiegyenlítődés irreverzibilis folyamat. Hőmennyiség alacsonyabb hőmérsékletű helyről magasabb hőmérsékletű helyre magától nem megy át. Ez csak külső munka árán, tehát a környezetben létrejövő változás árán lehetséges. Egy másik példa az irreverzibilis folyamatra a mechanikai munkavégzést kísérő *súrlódási hő* keletkezése. Ez a hő mechanikai szempontból többé nem hasznosítható.

Amint látjuk, a természetben végbemenő folyamatoknak határozott irányuk van. Általában a mechanikai munka teljes egészében hővé alakítható, de egy hőtartály energiája nem alakítható át teljes egészében mechanikai munkává anélkül, hogy a környezetben maradandó változásokat ne okozna. Egy olyan gép, amely egy hőtartály energiáját külső beavatkozás nélkül munkává alakítaná, technikai szempontból felérne a perpetuum mobilével. Hiszen akkor építhető lenne pl. egy olyan óceánjáró, mely minden üzemanyag felhasználása nélkül, csupán az óceán vizének igen csekély mérvű lehűtésével a tengeren közlekedni tudna. *Tapasztalati tény*, hogy ilyen gépet nem lehet előállítani. Ezt a tételt PLANCK a következő precíz formában fogalmazta meg: *Nem lehet olyan periodikusan működő készüléket szerkeszteni, amelynek működése kizárólag abból állna, hogy egy hőtartály hőtartalmát teljes egészében mechanikai munkává alakítja át.* Egy ilyen gépet másodfajú perpetuum mobilének nevezünk.

Ezt a tételt a termodinamika második főtételének nevezzük és a tapasztalásból leszűrt axiómaként az elmélet élére állítjuk. A második főtétel fontos következményeit a következő §-okban fogjuk tárgyalni.

8. §. A Carnot-féle körfolyamat

Körfolyamaton az állapotváltozásoknak olyan sorozatát értjük, amelynek következtében egy termodinamikai rendszer egy bizonyos kezdeti állapotból kiindulva, a folyamat elvégzése után, az eredeti kiinduló állapotába tér vissza.

A körfolyamatok vizsgálata a hőgépek elméleti tárgyalásának alapját képezi. Amint a második főtételnél láttuk, egyetlen hőtartály birtokában munkát végző gépet szerkeszteni nem tudunk. A legegyszerűbb olyan periodikus folyamat, amely hőből munkát képes előállítani, a *Carnot*-körfolyamat. Ennél két hőtartály kell, hogy rendelkezésünkre álljon, a melegebb hőmérséklete legyen T_1, a hidegebbé T_2. A *Carnot*-körfolyamat a következő négy lépésből áll:

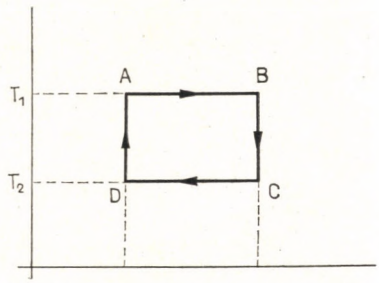
1. A körfolyamatot végző rendszer a T_1 hőmérsékletű hőtartállyal állandóan érintkezve – azaz állandó T_1 hőmérsékleten – a hőtartályból Q_1 mennyiségű hőt vesz fel.

2. A rendszer ezután adiabatikus állapotváltozással T_1 hőmérsékletről T_2-re hűl le.

3. Állandó T_2 hőmérsékleten a rendszer hőt ad le a második hőtartálynak.

4. Végül adiabatikus állapotváltozással a rendszer T_2-ről T_1-re melegszik és visszajut a kiinduló állapotba.

A körfolyamatot a 229. ábra szemlélteti. Az *AB* és a *CD* szakaszok jelentik az izotermikus, *BC* és *DA* az adiabatikus folyamatokat.



229. ábra. A *Carnot*-féle körfolyamat

A *Carnot*-körfolyamat alapvetően fontos tulajdonsága, hogy *megfordítható körfolyamat*. Ez abból következik, hogy a *Carnot*-körfolyamat csak izotermikus és adiabatikus állapotváltozásokból épül fel. Az adiabatikus állapotváltozások nyilván megfordíthatók, hiszen ezeknél a rendszer csak mechanikai kölcsönhatásban áll a környezetével és a mechanikai folyamatok mindig megfordíthatók. De idealizált esetben megfordíthatók az izotermikus állapotváltozások alatti hőfelvételek, ill. hőleadások is. Hiszen ha a rendszer hőmérséklete az *AB* szakaszon pontosan megegyezik a hőtartály T_1 hőmérsékletével, akkor a hőtartályból a rendszerbe éppúgy lehetséges hőáramlás, mint fordítva.

Ha a *Carnot*-körfolyamatot a fentiekben leírt módon, azaz az ábrán nyíllal bejelölt *ABCDA* irányban folytatjuk le, úgy pozitív *Carnot*-körfolyamatnak nevezzük. A nyílakkal ellentétes *ADCBA* irányban lefolytatott körfolyamat neve pedig negatív *Carnot*-körfolyamat. A pozitív *Carnot*-körfolyamat alatt a rendszer által végzett összes munkát jelölje *A*. Mivel a körfolyamat végén a rendszer a kezdeti állapotába kerül vissza, ezért a kiinduló és a végállapotban a rendszer energiája ugyanaz az érték lesz. A termodinamika első főtétele szerint így a körfolyamat alatt végzett *A* munka a felvett Q_1 és a leadott Q_2 hő különbségével kell, hogy egyenlő legyen

$$A = Q_1 - Q_2 . \tag{16.8.1}$$

A pozitív *Carnot*-körfolyamat nyilván mint *hőgép* működik. A melegebb hőtartályból felvett hő egy részét *A* mennyiségű munkává alakítja, a maradék Q_2 hő formájában a hidegebb hőtartályba kerül át. A körfolyamat *hatásfokán* az elő-

állított A munka és a felvett Q_1 hő viszonyát értjük.

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \tag{16.8.2}$$

A negatív *Carnot*-körfolyamatnál a rendszer a hidegebb hőtartályból von el Q_2 hőt és a melegebb hőtartályba ad le Q_1-et. Eközben a rendszeren munkát kell a külső erőknek végezni. A negatív *Carnot*-körfolyamat tehát *hűtőgép*ként viselkedik. A hűtés hatásfoka az elvont Q_2 hő és a befektetett A munka viszonya lesz:

$$\mu = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2/Q_1}{1 - Q_2/Q_1}. \tag{16.8.3}$$

A pozitív és a negatív *Carnot*-körfolyamat hatásfoka egyaránt csak a Q_2/Q_1 viszonytól függ. Azt is könnyen beláthatjuk, hogy η és μ között fennáll az

$$\eta(1 + \mu) = 1 \tag{16.8.4}$$

összefüggés.

Ezek után a második főtétel segítségével a *Carnot*-körfolyamat alapvetően fontos tulajdonságát fogjuk bebizonyítani.

1. *A Carnot-körfolyamat hatásfoka független a körfolyamatot végző termodinamikai rendszer anyagi minőségétől és speciális belső szerkezetétől, hanem csak a T_1 és T_2 hőmérsékletektől függ.* Tekintsünk ugyanis két különböző termodinamikai rendszert, melyek a T_1 és T_2 hőmérsékletű hőtartályok között *Carnot*-körfolyamatot végeznek, méghozzá az egyik pozitív, a másik negatív irányban. Legyenek a rendszerek úgy méretezve, hogy a T_1 hőtartályból a pozitív irányú körfolyamat ugyanannyi Q_1 hőt vegyen fel, mint amennyit a negatív körfolyamat lead. A T_2 hőtartályba a pozitív körfolyamat Q_2 hőt ad le, a negatív által felvett hő ettől különböző Q_2' érték. A pozitív körfolyamat által végzett munka ezek szerint $A = Q_1 - Q_2$, a negatív körfolyamat munkaigénye pedig $A' = Q_1 - Q_2'$. A munkák különbsége

$$A - A' = Q_2' - Q_2. \tag{16.8.5}$$

Ez az $A - A'$ munka nem más, mint a két *Carnot*-körfolyamat összekapcsolásából kialakuló hőgép által adott munka. Ez a hőgép a T_1 hőtartályt tulajdonképpen nem használja fel, mert ugyanannyi hőt ad ott le, mint amennyit felvesz. Hőgépünk tehát a T_2 hőtartályból $Q_2' - Q_2$ hőt vesz fel és ezt alakítja át $A - A'$ munkává. Ha $Q_2' > Q_2$ és így $A > A'$, úgy a felvett hő és a termelt munka egyaránt pozitív, hőgépünk tehát másodfajú perpetuum mobileként működik. De a második főtétel szerint ez lehetetlen, következésképpen

$$Q_2 \geq Q_2' \quad \text{és} \quad A \leq A'$$

kell, hogy legyen.

Vegyük azonban most figyelembe, hogy hőgépünk járása megfordítható, hiszen a *Carnot*-körfolyamatok megfordítható körfolyamatok. Az ellenkező irány-

ban működő gép csak akkor nem lesz másodfajú perpetuum mobile, ha

$$Q_2 \leq Q_2' \quad \text{és} \quad A \geq A' .$$

Tehát az egyedüli lehetőség

$$Q_2 = Q_2' \quad \text{és} \quad A = A'. \tag{16.8.6}$$

Ez azonban azt is jelenti, hogy ha mindkét körfolyamatot pozitív irányban működtetjük, akkor a körfolyamatok a T_1 hőtartályból egyenlő mennyiségű hőt vesznek fel és egyenlő mértékű A munkát végeznek, következésképpen hatásfokaik is azonosak:

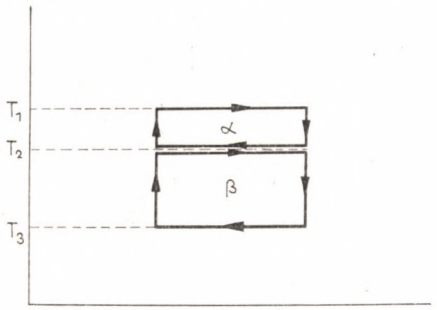
$$\eta' = \eta = F(T_1, T_2). \tag{16.8.7}$$

A közös hatásfokot a T_1 és T_2 hőmérsékletek egyértelműen meghatározzák, a hatásfok független attól, hogy a *Carnot*-körfolyamatot milyen rendszer végzi.

2. (8.7) jobboldalán szereplő $F(T_1, T_2)$ függvény a mondottak értelmében univerzális, tehát minden termodinamikai rendszerre ugyanaz. Most bebizonyítjuk, hogy ez az $F(T_1, T_2)$ *kétváltozós függvény visszavezethető egy egyváltozós* $f(T)$ *függvényre a következő formula segítségével*

$$F(T_1, T_2) = \frac{f(T_2) - f(T_1)}{f(T_2)} . \tag{16.8.8}$$

E célból tekintsünk három hőtartályt, melyek hőmérséklete rendre T_1, T_2 és T_3. Két pozitív *Carnot*-körfolyamatot hozzunk működésbe, egyiket a T_1 és T_2 hőtartályok, másikat a T_2 és T_3 hőtartályok között. Az α és β rendszerek úgy van-



230. ábra. Két *Carnot*-körfolyamat egyesítése

nak méretezve, hogy amennyi hőt α lead a T_2 hőtartálynak, ugyanennyit vesz fel belőle β. Legyen Q_1 az a hőmennyiség, amit az α körfolyamat a T_1 hőtartályból felvesz. Az α körfolyamat által termelt munka előző tételünk értelmében

$$A_\alpha = Q_1 F(T_1, T_2) \tag{16.8.9}$$

lesz, és ez a körfolyamat T_2-be

$$Q_1 - A_\alpha = Q_1[1 - F(T_1, T_2)] \tag{16.8.10}$$

hőt ad le. A mondottak szerint ugyanennyi hőt vesz fel a β körfolyamat T_2-ből, és ezért a β által termelt munka

$$A_\beta = Q_1[1 - F(T_1, T_2)]\, F(T_2, T_3). \tag{16.8.11}$$

Kapcsoljuk össze a két körfolyamatot egyetlen hőgéppé. Ez az összekapcsolt rendszer a T_2 hőtartályt egyáltalán nem használja fel és úgy tekinthető, mint egy T_1 és T_3 között működő *Carnot*-körfolyamat. Ezért az egyesített folyamatok által termelt munka

$$A_\alpha + A_\beta = Q_1 F(T_1, T_3)$$

lesz. (16.8.9) és (16.8.11) behelyettesítésével

$$F(T_1, T_2) + F(T_2, T_3) - F(T_1, T_2)\, F(T_2, T_3) = F(T_1, T_3). \tag{16.8.12}$$

Egy ún. függvényegyenletet kaptunk az univerzális $F(T_1, T_2)$ függvényre. A függvényegyenlet megoldása céljából differenciáljunk T_3 szerint:

$$\frac{\partial F(T_2, T_3)}{\partial T_3} - F(T_1, T_2)\frac{\partial F(T_2, T_3)}{\partial T_3} = \frac{\partial F(T_1, T_3)}{\partial T_3}.$$

Rendezve

$$\frac{\partial F(T_1, T_3)/\partial T_3}{\partial F(T_2, T_3)/\partial T_3} = 1 - F(T_1, T_2). \tag{16.8.13}$$

A jobboldal független a T_3 változótól, ezért a baloldal is független kell, hogy legyen. Ez csak úgy lehetséges, ha a baloldalon álló törtből a T_3 változó egyszerűsítés révén kiesik, azaz ha

$$\frac{\partial F(T_1, T_3)}{\partial T_3} = f(T_1)\, g(T_3)$$

és természetesen

$$\frac{\partial F(T_2, T_3)}{\partial T_3} = f(T_2)\, g(T_3).$$

Ezeket (8.13)-ba írva az

$$\frac{f(T_1)}{f(T_2)} = 1 - F(T_1, T_2)$$

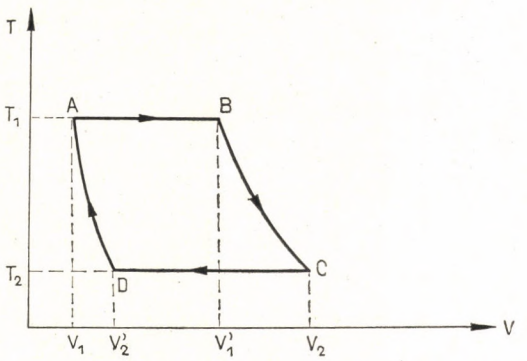
egyenletet kapjuk, ami ekvivalens a (8.8) alatti állításunkkal.

3. *Az ideális gázzal végzett Carnot-körfolyamat és a termodinamikai hőmérsékleti skála.*

Az előző tétellel bevezetett $f(T)$ univerzális függvény meghatározása céljából nézzük azt a speciális esetet, amikor a *Carnot*-körfolyamatot végző rendszer ideális gáz. A körfolyamatot most a V és T független állapotjelzők síkján ábrázoljuk. A hőmérséklet és a térfogat értékeit a körfolyamat A, B, C és D pontjaiban a 231. ábráról olvashatjuk le.

Írjuk fel a *Carnot*-körfolyamat egyes szakaszaihoz tartozó munkákat. Az AB szakaszon végzett munka kifejezése

$$A_{AB} = \int_A^B pdV = \frac{mR}{M} \int_A^B \frac{T}{V} dV .$$



231. ábra. Ideális gázzal végzett *Carnot*-körfolyamat

Mivel AB-n a hőmérséklet egy állandó T_1 érték, ezért

$$A_{AB} = \frac{mRT_1}{M} \int_{V_1}^{V_1'} \frac{dV}{V} = \frac{mRT_1}{M} \ln \frac{V_1'}{V_1} . \qquad (16.8.14)$$

A BC szakaszon végzett munka

$$A_{BC} = \int_B^C pdV = \frac{mR}{M} \int_B^C \frac{T}{V} dV$$

kifejezésénél az adiabatikus állapotváltozásokra jellemző (6.4) egyenletet kell tekintetbe vennünk

$$A_{BC} = -m \int_{T_1}^{T_2} c_V(T)dT = m \int_{T_2}^{T_1} c_V(T)dT . \qquad (16.8.15)$$

A CD szakasz ismét izotermikus folyamatot jelöl, melyhez tartozó munka (8.14) analógiájára

$$A_{CD} = \frac{mRT_2}{M} \ln \frac{V_2'}{V_2} . \qquad (16.8.16)$$

Végül pedig a DA adiabatikus szakaszon végzett munka

$$A_{DA} = -m \int_{T_2}^{T_1} c_V(T)dV \qquad (16.8.17)$$

lesz. A körfolyamat által termelt összes munka a fenti munkák összege lesz, azaz

$$A = \frac{mR}{M}\left(T_1 \ln \frac{V_1'}{V_1} + T_2 \ln \frac{V_2'}{V_2}\right). \tag{16.8.18}$$

Vegyük tekintetbe, hogy a BC és a DA adiabatikus állapotváltozásokra fennáll a (6.5) egyenlet. Ezt a BC szakaszra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\ln \frac{V_1'}{V_2} + \frac{M}{R} \int_{T_2}^{T_1} \frac{c_V(T)}{T}\, dT = 0,$$

a DA szakaszra pedig

$$\ln \frac{V_2'}{V_1} + \frac{M}{R} \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_V(T)}{T}\, dT = 0.$$

E két egyenletet összeadva nyerjük

$$\ln\left(\frac{V_1' V_2'}{V_1 V_2}\right) = 0,$$

azaz

$$\frac{V_1'}{V_1} = \frac{V_2}{V_2'}. \tag{16.8.19}$$

Ezt beírjuk a munka (8.18) képletébe:

$$A = \frac{mR}{M}(T_1 - T_2) \ln \frac{V_1'}{V_1}. \tag{16.8.20}$$

A hatásfok kiszámítása céljából még szükségünk van az AB szakaszon bevezetett Q_1 hő kifejezésére is. A termodinamika első főtétele szerint

$$Q_1 = E_B - E_A + A_{AB},$$

ahol E_B és E_A a gáz energiája a B, ill. az A pontokban. Mivel most ideális gázzal dolgozunk, ezért $E_B = E_A$ lesz, hiszen az AB szakasz izotermikus és az ideális gáz energiája csak a hőmérséklettől függ

$$Q_1 = A_{AB} = \frac{mRT_1}{M} \ln \frac{V_1'}{V_1}. \tag{16.8.21}$$

A *Carnot*-körfolyamat hatásfokát a fenti A munka és Q_1 hő hányadosából kapjuk:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \tag{16.8.22}$$

Bár ezt a hatásfok kifejezést az ideális gázra vezettük le, az 1. alatti tételünk értelmében ez lesz a hatásfok bármilyen anyaggal végzett *Carnot*-körfolyamat

esetében is. A hatásfokot a következő alakban is felírhatjuk

$$\eta = \frac{1/T_2 - 1/T_1}{1/T_2} . \tag{16.8.23}$$

Összehasonlítva (8.8)-al láthatjuk, hogy

$$f(T) = \frac{1}{T} . \tag{16.8.24}$$

Az ideális gázzal végzett *Carnot*-körfolyamat elemzése tehát kezünkbe adta az univerzális $f(T)$ függvény kifejezését.

A fenti eredmény levezetése ellen – elvi szempontból – egy kifogás emelhető. Az

$$f = f(T)$$

függvény alakját egy olyan anyaggal, nevezetesen az ideális gázzal végzett *Carnot*-körfolyamatból kaptuk meg, ami a természetben nem létezik. E nehézséget elkerülendő, a termodinamika szabatos felépítésénél a következőképpen járunk el: a különböző hőmérsékletű hőtartályok egy sorozatát vesszük, és minden hőtartálypár között egy-egy *Carnot*-körfolyamatot létesítünk. A második főtétel folyományaképpen az i-edik és a k-adik hőtartály között működő körfolyamat hatásfoka, mint (8.8) mutatja

$$\eta_{ik} = \frac{f_k - f_i}{f_k}$$

alakú lesz. Az egyes hőtartályokhoz tartozó f értékek a hatásfokok megmérése útján egyértelműen megállapíthatók. Ezután az i-edik hőtartály hőmérsékletét a (8.24)-nek megfelelő

$$T_i = \frac{1}{f_i}$$

összefüggéssel definiáljuk. Az így definiált hőmérsékleti skála nincs semmiféle specifikus anyaghoz kötve, neve: *termodinamikai abszolut hőmérséklet*. Ezek után a (8.24) képlet levezetésénél felhasznált

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

összefüggés az ideális gáz definiálásául szolgál és semmi köze többé a hőmérsékleti skála megállapításához.

4. *Irreverzibilis körfolyamatok hatásfoka.* Tekintsünk egy periodikusan működő hőgépet, amely két hőtartály, a T_1 és a T_2 hőmérsékletű hőtartály felhasználásával működik. Hőgépünk működéséről feltételezzük, hogy meg nem fordítható folyamat, ami megfelel a valóságban előforduló viszonyoknak. A hőgép a magasabb, T_1 hőmérsékletű hőtartályból felvesz Q_1' hőenergiát, a T_2 hőmérsékle-

tűben lead Q_2' hőenergiát. A hőgép által termelt munka

$$A' = Q_1' - Q_2' \tag{16.8.26}$$

lesz.

A hőgép hatásfokának megvizsgálására kapcsoljunk be egy negatív, tehát hűtőgépként működő *Carnot*-körfolyamatot a két hőtartály között. A *Carnot*-körfolyamat az alacsonyabb T_2 hőmérsékletű hőtartályból Q_2 hőt von el, és a T_1 hőtartályban Q_1 hőt ad le. A hűtőgép működtetéséhez szükséges munka

$$A = Q_1 - Q_2. \tag{16.8.26}$$

Méretezzük készülékeinket úgy, hogy $Q_1 = Q_1'$ legyen, azaz a hűtőgépként működő *Carnot*-körfolyamat pontosan ugyanannyi hőt szállítson a T_1 hőtartályba, mint amennyit a hőgép onnan elfogyaszt. Ekkor a hőgépből és a *Carnot*-körfolyamatból álló együttes rendszer a T_1 hőtartályt egyáltalán nem érinti, hanem működése abból áll, hogy a T_2 hőtartályba lead $Q_2' - Q_2$ hőenergiát és elfogyaszt $A - A'$ külső munkát. Természetesen

$$Q_2' - Q_2 = A - A'. \tag{16.8.27}$$

A termodinamika második főtétele megköveteli, hogy ennek az egyenletnek mindkét oldalán *pozitív* előjelű mennyiségek szerepeljenek, ellenkező esetben ugyanis készülékünk másodfajú perpetuum mobileként működne, mely a T_2 hőtartály hőjéből munkát állítana elő

$$Q_2' \geq Q_2 \quad \text{és} \quad A \geq A'. \tag{16.8.28}$$

A hőgépünk hatásfokán az

$$\eta' = \frac{A'}{Q_1'}$$

viszonyt értjük, a pozitív irányú *Carnot*-körfolyamat hatásfoka pedig

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Ha (8.28) második egyenlőtlenségét elosztjuk $Q_1' = Q_1$-gyel, úgy a következő eredményt kapjuk:

$$\eta' \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}. \tag{16.8.29}$$

Tehát egy irreverzibilis körfolyamat hatásfoka kisebb, vagy ideális esetben legfeljebb ugyanakkora, mint az ugyanazon hőmérsékleti határok között működő *Carnot*-körfolyamaté. A hőgépként működő *Carnot*-körfolyamat az elképzelhető legjobb hatásfokú hőgép.

Analóg gondolatmenettel bebizonyítható, hogy a negatív *Carnot*-körfolyamat pedig az elképzelhető legjobb hatásfokú hűtőgép. Egy irreverzibilis körfolyamat-

tal működő hűtőgép hatásfokára a

$$\mu' \leq \mu = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

tétel érvényes.

9. §. Az entrópia

Az előző §-ban a *Carnot*-körfolyamat elemzésénél az egyes Q hőmennyiségeket és A munkákat – az egyszerűbb tárgyalásmód kedvéért – mindig úgy definiáltuk, hogy pozitív mennyiségek legyenek. Mostantól kezdve azonban ahhoz a megállapodáshoz tartjuk magunkat, hogy pozitív előjelűnek tekintjük a rendszerbe bevezetett, negatív előjelűnek a rendszerből elvezetett hőt. Hasonlóképpen, ha a külső erők végeznek a rendszeren munkát, akkor a munka pozitív, ha a rendszer munkát termel, akkor a munka negatív lesz.

Ilyen előjelmegállapodás esetén a *Carnot*-körfolyamat (8.1) energiamérlege

$$Q_1 + Q_2 + A = 0$$

alakú lesz, a körfolyamat hatásfoka pedig

$$\eta = \frac{-A}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}.$$

(8.22) eredményünk szerint tehát

$$1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

azaz

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0. \tag{16.9.1}$$

Be fogjuk bizonyítani, hogy ez az eredmény általánosítható tetszőleges *reverzibilis* körfolyamatra, amely tetszőleges, pl. n számú hőtartályt használ fel. Legyenek a hőtartályok hőmérsékletei $T_1, T_2, \ldots, T_n$ és az általánosság sérelme nélkül tételezzük fel, hogy ez a sorrend a csökkenő hőmérsékletnek felel meg,

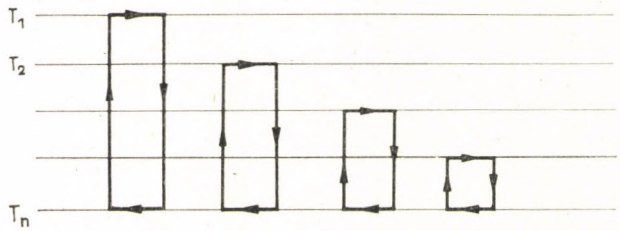
$$T_1 > T_2 > \ldots > T_n.$$

A körfolyamat alatt az egyes hőtartályokból felvett hőket $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$-nel jelöljük, a munkavégzés legyen A. Az első főtétel szerint a felvett hők és a munka algebrai összege zérus, hiszen a teljes körfolyamat végére a rendszer visszakerül eredeti állapotába és így energiatartalma nem változhat meg.

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i + A = 0. \tag{16.9.2}$$

Létesítsünk most $n-1$ számú *Carnot*-körfolyamatot, amelyek az n-edik, azaz a leghidegebb hőtartály és a többi hőtartály közt működnek és úgy vannak méretezve, hogy a $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ hőtartályokból rendre $-Q_1, -Q_2, \ldots, -Q_{n-1}$ hőenergiát vonnak el, azaz az általunk vizsgált általános körfolyamat hatását e hőtartályoknál kompenzálják. Az i-edik *Carnot*-körfolyamat fenntartásához szükséges munka

$$A_i = -(-Q_i)\eta_i = Q_i\left(1 - \frac{T_n}{T_i}\right)$$



232. ábra. Az általános körfolyamat hatását kompenzáló *Carnot*-körfolyamatok

lesz. Eredeti körfolyamatunk, valamint ezen *Carnot*-körfolyamatok összessége pedig a következőképpen működik: a környezettől felvesz összesen

$$\sum_{i=1}^{n} A_i + A = \sum_{i=1}^{n} Q_i\left(1 - \frac{T_n}{T_i}\right) + A = -T_n \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i} \tag{16.9.3}$$

munkát és az ezzel egyenértékű hőenergiát egyetlen hőtartálynak, a leghidegebbnek adja le. A második főtétel szerint (9.3) csak pozitív mennyiség lehet, ellenkező esetben rendszerünk másodfajú perpetuum mobile volna. Mivel $T_n > 0$, így

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \tag{16.9.4}$$

kell, hogy legyen.

Most vegyük figyelembe, hogy körfolyamatunk megfordítható. Ha körfolyamatunkat és az összes *Carnot*-körfolyamatot is az ellenkező irányban járatjuk, akkor az egész rendszer működtetéséhez szükséges munka (és a T_n hőtartályba leadott hő) (9.3) negatívja, azaz

$$T_n \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i}.$$

A második főtétel ezen mennyiségre sem enged meg negatív értéket, vagyis

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i} \geq 0.$$

Az egyedüli lehetőség tehát

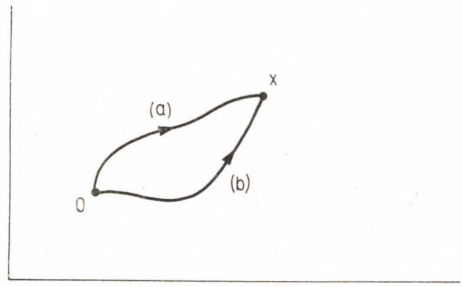
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i} = 0. \tag{16.9.5}$$

Megfordítható körfolyamatoknál tehát az egyes hőtartályokból felvett hők és a hőmérséklet viszonyából képezett algebrai összeg zérussal egyenlő. Ha a körfolyamat infinitezimális lépésekből áll, úgy (9.5)-öt a következőképpen írjuk

$$\oint \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = 0 . \tag{16.9.6}$$

A δQ alá írt „rev" jelzés arra utal, hogy a körfolyamatnak reverzibilisnek kell lennie.

Tekintsük most a rendszerünk két különböző termodinamikai állapotát, az egyiket O-val, a másikat X-szel jelöljük. Legyen a és b két olyan, külön-külön is



233. ábra. Az O és X állapotokat összekötő megfordítható folyamatok

megfordítható folyamat, mely a rendszert O-ból X-be viszi át. (9.6) eredményünk ekvivalens azzal, hogy

$$\int_{(a)} \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = \int_{(b)} \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = \int_{O}^{X} \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} , \tag{16.9.7}$$

tehát az integrál értéke független attól, hogy melyik utat választjuk, az integrál csak az O és X állapotoktól függ. Ez annyit jelent, hogy az integrál az X állapotnak *állapotfüggvénye* (ha O-t fixen tartjuk). Ezt az állapotfüggvényt *entrópiának* nevezzük, jele

$$S_x = S_0 + \int_{O}^{X} \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} . \tag{16.9.8}$$

Egy infinitezimális reverzibilis folyamatnál az entrópiaváltozás

$$dS = \frac{\delta Q}{T} . \tag{16.9.9}$$

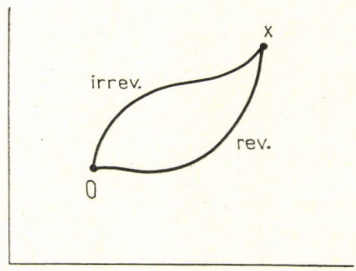
Látjuk tehát, hogy (9.6) eredményünk matematikai szempontból ekvivalens a következő kijelentéssel: *reverzibilis állapotváltozásra a $\delta Q/T$ mennyiség integrálható Pfaff-kifejezés kell, hogy legyen és ezért segítségével egy állapotfüggvény (az entrópia) definiálható.*

10. §. A második főtétel matematikai megfogalmazása

Az előző §-ban láttuk, hogy egy tetszőleges körfolyamat csak akkor nem egészíthető ki *Carnot*-körfolyamatok segítségével másodfajú perpetuum mobilévé, ha teljesül rá a (9.4) egyenlőtlenség. Ezen egyenlőtlenség levezetésénél még nem használtuk ki a körfolyamat megfordíthatóságát, tehát irreverzibilis körfolyamatra is érvényesnek kell lennie. A körfolyamatot infinitezimális lépésekre osztva írhatjuk tehát, hogy

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leqq 0, \tag{16.10.1}$$

és, mint tudjuk, reverzibilis folyamatra az egyenlőségjelnek kell érvényesnek lennie.



234. ábra. Az O és X állapotok közötti reverzibilis és irreverzibilis folyamat

Vegyünk ezek után az O és X állapotok között egy irreverzibilis állapotváltozást és egészítsük ki ezt egy X-től O-ig menő reverzibilis állapotváltozással teljes (de összesen nem reverzibilis) körfolyamattá. Most tehát

$$\int_O^X \frac{\delta Q_{\text{irrev}}}{T} + \int_X^O \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \leq 0.$$

De, mint (9.8) alatt láttuk,

$$\int_X^O \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = S_O - S_X$$

a két állapot közti entrópiakülönbséggel egyenlő, tehát

$$S_X - S_O \geq \int_O^X \frac{\delta Q_{\text{irrev}}}{T}. \tag{16.10.2}$$

Az X és O állapotok közötti entrópiakülönbség tehát nagyobb, mint az O-tól X-ig egy irreverzibilis állapotváltozásnál számított $\int_O^X \delta Q/T$ integrál. Az entrópiaváltozás és az integrál különbségét mint az irreverzibilitás mértékét foghatjuk fel.

Eredményünket differenciális alakban is felírjuk:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}, \tag{16.10.3}$$

ahol az egyenlőség a reverzibilis, az egyenlőtlenség pedig az irreverzibilis állapotváltozásokra érvényes. *Ez az egyenlőtlenség a termodinamika második főtételének matematikai megfogalmazása.* A második főtétel tehát a következő két állítást foglalja össze:

a) Reverzibilis állapotváltozások esetén a (9.9) mennyiség integrálható *Pfaff*-kifejezés. Segítségével tehát egy állapotfüggvény definiálható, melyet entrópiának nevezünk és S-sel jelölünk

b) Irreverzibilis állapotváltozásokra $\delta Q < TdS$. A természetben csak olyan állapotváltozások figyelhetők meg, melyekre ez az egyenlőtlenség teljesül. A második főtétel ezen megfogalmazása természetesen minden termodinamikai rendszerre érvényes. Ha termodinamikailag zárt rendszerre alkalmazzuk, ahol a környezetből hőfelvétel nincs, azaz $\delta Q = 0$, úgy

$$dS \geq 0 \tag{16.10.4}$$

lesz. *Termodinamikailag zárt, magára hagyott rendszer entrópiája reverzibilis állapotváltozás esetén nem változik, irreverzibilis állapotváltozás esetén pedig csak nőhet.*

Nézzünk egy igen egyszerű példát, a hőkiegyenlítődés folyamatát. Két, azonos anyagból készült és azonos C hőkapacitású test kerül érintkezésbe, az egyik hőmérséklete T_1, a másiké T_2. A környezettől el vannak szigetelve. Az érintkezéssel a melegebb test a hidegebbnek hőt ad át mindaddig, míg a hőmérsékletek ki nem egyenlítődnek. Az egyensúlyi hőmérséklet

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

lesz.

A hőkiegyenlítődés alatt a T_1 hőmérsékletű test hőfelvétele

$$Q_1 = C(T_0 - T_1) = -C\frac{T_1 - T_2}{2} = -C\vartheta,$$

ahol a $2\vartheta = T_1 - T_2$ jelölést alkalmaztuk. A T_2 hőmérsékletű test hőfelvétele

$$Q_2 = C(T_0 - T_2) = C\frac{T_1 - T_2}{2} = C\vartheta.$$

Q_1 és Q_2 algebrai összege természetesen zérus, hiszen külső hőfelvétel nincsen. Számítsuk ki az entrópiaváltozásokat! Az első test entrópiaváltozása $\delta Q = CdT$ miatt

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_0} \frac{CdT}{T} = C \ln \frac{T_0}{T_1} = -C \ln \left(1 + \frac{\vartheta}{T_0}\right),$$

ahol az egyszerűség kedvéért feltételeztük, hogy C a hőmérséklettől független konstans. A második test entrópiaváltozása

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T_0} \frac{CdT}{T} = C \ln \frac{T_0}{T_2} = -C \ln \left(1 - \frac{\vartheta}{T_0}\right).$$

Az egész rendszer entrópiaváltozása ΔS_1 és ΔS_2 összege lesz:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -C \ln \left(1 - \frac{\vartheta^2}{T_0^2}\right) > 0.$$

Az entrópiaváltozás határozottan pozitív, ami mutatja, hogy a spontán hőkiegyenlítődés irreverzibilis folyamat.

Látjuk tehát, hogy a második főtétel fontos információt ad a természetben megvalósuló folyamatok irányáról. A hőkiegyenlítődés lehetséges, mert entrópianövekedéssel jár, de az ellenkező folyamat, hogy egy zárt rendszerben két egyenlő hőmérsékletű test közül az egyik felmelegedjék a másik lehűlése árán, ez lehetetlen, mert entrópiacsökkenést okozna.

11. §. A termodinamika harmadik főtétele

Az entrópiaváltozást a

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}$$

egyenlettel definiáltuk. A $T = 0$ esetben ez a definíció határozatlanná válik és ezért külön kell azzal a kérdéssel foglalkoznunk, hogy mi történik a termodinamikai rendszerekkel az abszolút hőmérséklet zérus pontján. Erre vonatkozik a termodinamika harmadik főtétele.

Legyenek egy termodinamikai rendszer független állapotjelzői $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Az általánosság sérelme nélkül feltételezzük, hogy ezek egyike, pl. az n-edik az abszolút hőmérséklettel egyenlő: $x_n = T$. A rendszer entrópiája a független állapotjelzők függvénye lesz, tehát

$$S = S(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, T).$$

A harmadik főtétel, melyet NERNST annak idején bizonyos elektrokémiai reakciók

tanulmányozásából szűrt le, azt mondja ki, hogy $T \to 0$ esetén az entrópia a többi állapotjelzőtől független, konstans érték lesz.

$$\lim_{T \to 0} S(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, T) = S_0,$$

ahol S_0 független az x_i állapotjelzőktől. Mivel az entrópia, definíciójánál fogva, egy konstans erejéig határozatlan, ezért az S_0 konstanst zérusnak választhatjuk. Ebben az esetben szokás *abszolút entrópiáról* beszélni. A harmadik főtétel tehát

$$\lim_{T \to 0} S(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, T) = 0. \tag{16.11.1}$$

Mivel ez az x_i állapotjelzők minden szóba jövő értékére fenn kell, hogy álljon, ezért

$$\lim_{T \to 0} \frac{\partial S}{\partial x_i} = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{16.11.2}$$

is teljesül.

A harmadik főtétel egyik legfontosabb következménye, hogy *valamely termodinamikai rendszer hőmérsékletét lehetetlen az abszolút hőmérséklet zérus pontjára redukálni.* Ennek belátására először is megjegyezzük, hogy az abszolút zérus pont elérésére egyedül az adiabatikus állapotváltozás jöhet szóba. Ugyanis, ha bármilyen más módon, pl. hőelvonással akarjuk a rendszer hőmérsékletét csökkenteni, ahhoz szükségünk van egy olyan hőtartályra, mely hidegebb, mint az elérendő hőmérséklet. $T = 0$ eléréséhez ez a lehetőség ki van zárva, mert T zérusnál alacsonyabb nem lehet. Adiabatikus állapotváltozásnál – definíció szerint – $\delta Q = 0$, következésképpen $dS = 0$. Tehát

$$dS = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right) dx_i + \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right) dT = 0\,.$$

Így az adiabatikus állapotváltozással járó hőmérsékletváltozásra azt kapjuk, hogy

$$dT = - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right) dx_i}{\frac{\partial S}{\partial T}}\,. \tag{16.11.3}$$

A $T \to 0$ határesetben, mint (11.2)-ből látjuk, a számláló zérussá válik. Ez azt jelenti, hogy az abszolút zérus pont közelében az adiabatikus állapotváltozás – hacsak a külső erők munkája nem végtelen nagy – véges hőmérsékletcsökkenést nem okoz. Ezért a rendszer nem is hűthető le a $T = 0$ hőmérsékletre.

Megmutatható, hogy az abszolút zérus pont elérhetetlensége a harmadik főtétel teljes fizikai tartalmával ekvivalens kijelentés. Belőle az entrópiára vonatkozó (11.1) határérték levezethető.

TIZENHETEDIK FEJEZET

AZ ÁLLAPOTEGYENLETEK INTEGRÁLHATÓSÁGA

1. §. Az állapotegyenletek integrálhatóságának feltétele. Az entrópia meghatározása

Jelöljük a tekintetbe vett termodinamikai rendszer független állapotjelzőit x_i-vel ($i = 1, 2, \ldots, n$). Változtassuk meg a rendszer állapotát infinitezimális mértékben és reverzibilis módon; az állapotváltozást a dx_i differenciálok jellemzik. Az állapotváltozáshoz szükséges munka (16.5.4) mintájára

$$\delta A = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_n dx_n$$

lesz. Az itt fellépő A_i együtthatók az x_i állapotjelzők függvényei.

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ A_2 &= A_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ A_n &= A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{17.1.1}$$

Ezt az egyenletrendszert nevezzük a tekintetbe vett termodinamikai rendszer *termikus állapotegyenletének*. *A kalorikus állapotegyenlet* pedig a rendszer energiáját adja meg mint az állapotjelzők függvényét,

$$E = E(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{17.1.2}$$

A termodinamika főtételeinek egyik igen fontos következménye, hogy a termikus és kalorikus állapotegyenletek egymástól nem függetlenek, hanem közöttük bizonyos összefüggések állnak fenn. Ezeket az összefüggéseket az állapotegyenletek integrálhatósági feltételeinek nevezzük.

Az integrálhatósági feltételek levezetése céljából írjuk fel az első két főtételt a dx_i reverzibilis állapotváltozásra. Az első főtétel szerint $dE = \delta Q + \delta A$, azaz

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial E}{\partial x_i}\right) dx_i = \delta Q + \sum_{i=1}^{n} A_i dx_i . \tag{17.1.3}$$

A második főtétel szerint $\delta Q = T dS$, ahol dS egy integrálható *Pfaff*-kifejezés

$$\delta Q = T \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right) dx_i , \tag{17.1.4}$$

ahol $T = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

A fenti két egyenletből következik, hogy

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)dx_i=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial E}{\partial x_i}-A_i\right)dx_i.$$

Mivel ez tetszőleges dx_i-k esetén fenn kell, hogy álljon, ezért

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}=\frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial x_i}-A_i\right). \qquad (i=1,2,,\ldots,n) \qquad (17.1.5)$$

Differenciáljuk ezt az egyenletet az x_j állapotjelző szerint

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}=-\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x_j}\left(\frac{\partial E}{\partial x_i}-A_i\right)+\frac{1}{T}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j}-\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right). \qquad (17.1.6)$$

A baloldalon álló mennyiség szimmetrikus az i és j indexekben, hiszen $\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}=$
$=\frac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial x_i}$. Következésképpen a jobboldal sem változhat meg, ha az i és j indexeket felcseréljük.

$$-\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x_j}\left(\frac{\partial E}{\partial x_i}-A_i\right)+\frac{1}{T}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j}-\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)$$
$$=-\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x_i}\left(\frac{\partial E}{\partial x_j}-A_j\right)+\frac{1}{T}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x_j \partial x_i}-\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right).$$

Rendezve

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j}-\frac{\partial A_j}{\partial x_i}=\frac{\partial \ln T}{\partial x_i}\left(\frac{\partial E}{\partial x_j}-A_j\right)-\frac{\partial \ln T}{\partial x_j}\left(\frac{\partial E}{\partial x_i}-A_i\right). \qquad (17.1.7)$$
$$(i,j=1,2,\ldots,n.)$$

Ezek az egyenletek az állapotegyenletek integrálhatósági feltételei. A természetben csak olyan termodinamikai rendszer létezik, melyre (1.7) fennáll. Ellenkező esetben a termodinamikai rendszerre vagy az első, vagy a második főtétel nem teljesülne és így a rendszer első- vagy másodfajú perpetuum mobileként volna működtethető.

Az (1.7) egyenletek az entrópia parciális deriváltjait meghatározó (1.5) egyenletek integrálhatóságát biztosítják. Az állapotegyenletek ismeretében tehát az entrópiát (1.5)-ből számítjuk ki.

Vizsgáljuk meg még azt a fontos speciális esetet, amikor a T abszolút hőmérsékletet választjuk az egyik független állapotjelzőnek. Legyen pl.

$$x_n=T.$$

Ha (1.6)-ban sem i, sem j nem egyezik meg n-nel, azaz x_i és x_j a hőmérséklettől független állapotjelzők, úgy (1.6) jobboldala zérus lesz és az integrálhatósági fel-

tétel

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = 0 . \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{17.1.8a}$$

Ha pedig $j = n$-t írunk, úgy azt kapjuk, hogy

$$\frac{A_i}{T} - \frac{\partial A_i}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{E}{T} - A_T\right). \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{17.1.8b}$$

Itt A_T a hőmérsékletnek megfelelő A_n koefficienst jelöli.

Az entrópia meghatározására szolgáló (1.5) egyenletek speciális esetünkben a következőképpen alakulnak:

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial x_i} - A_i\right),$$

amit (1.8b) felhasználásával a következő alakban is írhatunk:

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = \frac{\partial A_T}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial T} . \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{17.1.9a}$$

Továbbá

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial T} - A_T\right). \tag{17.1.9b}$$

2. §. Az ideális gáz entrópiája

Alkalmazzuk az előző § eredményeit az ideális gáz esetére. Mint tudjuk, egy adott mennyiségű gáznak két független állapotjelzője lehet, legyen ez a V térfogat és a T hőmérséklet. Ha az elemi munka (16.5.4)-nek megfelelő

$$\delta A = A_V dV + A_T dT$$

általános kifejezését összevetjük (16.4.2)-vel, úgy leolvashatjuk, hogy

$$A_V = -p \quad \text{és} \quad A_T = 0. \tag{17.2.1}$$

A termikus állapotegyenlet tehát a p nyomást kell, hogy megadja mint a V és T független állapotjelzők kifejezését. Ideális gázra ezt (16.3.8) alatt írtuk fel:

$$p = \frac{m}{M} R \frac{T}{V} . \tag{17.2.2}$$

Az ideális gáz kalorikus állapotegyenlete pedig (16.4.13), mely szerint

$$E = E(T). \tag{17.2.3}$$

Vizsgáljuk meg elsősorban, hogy teljesülnek-e az integrálhatósági feltételek! Mivel a hőmérséklettől független állapotjelzők száma most mindössze egy (a V

térfogat), ezért (1.8a) semmitmondó egyenlet lesz. (1.8b) szerint

$$-\frac{p}{T}+\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V=\frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T. \tag{17.2.4}$$

A baloldal a termikus állapotegyenlet szerint zérussal egyenlő, a jobboldal zérus voltát a kalorikus állapotegyenlet biztosítja. Látjuk tehát, hogy az ideális gáztörvények kielégítik az integrálhatósági feltételeket.

Megjegyezzük, hogy a kalorikus állapotegyenlet esetünkben közvetlenül levezethető a termikus állapotegyenletből. Hisz ha a termikus állapotegyenletet (2.4) baloldalába helyettesítjük, mint fentebb mondottuk, a

$$0=\frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T$$

egyenletet kapjuk, amiből $(\partial E/\partial V)_T = 0$, azaz $E = E(T)$. Az ideális gázt tehát a (2.2) állapotegyenlet egyértelműen jellemzi.

Érdekes megvizsgálni, hogy mit ad az integrálhatósági feltétel, ha az ideális gáz kalorikus állapotegyenletéből indulunk ki. (2.4) szerint ekkor

$$-\frac{p}{T}+\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V=0$$

lesz, amiből

$$p(V,T)=Tf(V),$$

ahol $f(V)$ a térfogatnak tetszőleges függvénye lehet. A kalorikus állapotegyenletből tehát egyértelműen következik, hogy egy rögzített térfogatú gáz nyomása egyenesen arányos a T abszolút hőmérséklettel, amit az 1.§-ban, a hőmérsékleti skála bevezetésénél már megbeszéltünk. *Nem* következik azonban a (16.3.1) *Boyle*-törvény, ez a kalorikus állapotegyenlettől független tulajdonsága az ideális gáznak.

Ezek után térjünk rá az ideális gáz entrópiájának kiszámítására. Az (1.9) egyenleteket esetünkre alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T&=\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V=\frac{m}{M}R\frac{1}{V},\\ \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V&=\frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial T}=\frac{mc_V(T)}{T}.\end{aligned} \tag{17.2.5}$$

A második egyenletnél felhasználtuk (16.5.13)-at. Ezen egyenletek integrálása az entrópiára a következő kifejezést adja

$$S(V,T)=m\left[\frac{R}{M}\ln V+\int\frac{c_V(T)}{T}\,dT\right]+S_0, \tag{17.2.6}$$

ahol S_0 egy tetszőleges integrációs állandó. Ha a fajhőre a hőmérséklettől független (16.5.19) formulát használjuk, úgy

$$S(V, T) = \frac{m}{M} R\left[\ln V + \frac{1}{2} f \ln T\right] + S_0 \tag{17.2.7}$$

vagy

$$S(V, T) = \frac{1}{2} f \frac{m}{M} R \ln (TV^{2/f}) + S_0. \tag{17.2.8}$$

Látjuk tehát, hogy az entrópia csak a $TV^{2/f}$ kombinációtól függ. Ez a kombináció, mint (16.6.6)-ban láttuk, az adiabatikus folyamatokra állandó. Az adiabatikus folyamatok tehát entrópiaváltozás nélküli folyamatok. Ez az eredmény természetesen nemcsak ideális gázra érvényes, hiszen $dS = \delta Q/T$ miatt az adiabatikus folyamatokat jellemző $\delta Q = 0$ egyenletből $dS = 0$ is következik, azaz az entrópia változatlan marad bármely termodinamikai rendszer adiabatikus állapotváltozásánál.

Természetesnek látszana, hogy a fenti formulákban fellépő S_0 entrópiakonstanst a harmadik főtétel alapján úgy válasszuk meg, hogy S az abszolút entrópiát jelölje, azaz

$$S(V, T = 0) = 0$$

legyen. Ezt azonban nem lehet elérni, mert (2.8) a $T \to 0$ határesetben értelmetlenné válik. Ki kell tehát jelentenünk, hogy *az ideális gáztörvények ellentmondásban vannak a termodinamika harmadik főtételével.* Valóban, a természetben előforduló gázok csak elég magas hőmérsékleteken követik az ideális gáztörvényt és nincs a természetben egyetlen olyan anyag sem, mely az abszolút nulla pont környékén is gázszerűen viselkedne. Annak felismerése, hogy a gázoknak elegendően alacsony hőmérsékleteken kondenzálódniuk kell, döntő fontosságú volt az anyagszerkezeti kutatások fejlődése szempontjából.

Ha a gáz állapotváltozásait csak a kondenzációs pont felett vizsgáljuk, úgy az ideális gáztörvények és az ezeken alapuló (2.6) formula jól használható. Az S_0 konstansnak nem lesz fizikai szerepe, hisz az állapotváltozásokhoz tartozó entrópiaváltozás számításakor S_0 kiesik.

Egészen megváltozik a helyzet, ha olyan állapotváltozásokat is megengedünk, melyeknél a gáz m tömege is megváltozik, azaz S-et három változó, V, T és m függvényeként keressük. $S(V, T, m)$ meghatározásánál abból indulunk ki, hogy az entrópia extenzív mennyiség, tehát S/m független az anyagmennyiségtől, csak a T hőmérséklettől és a V/m fajlagos térfogattól függhet. Ha (2.6)-ban

$$S_0 = m\left(-\frac{R}{M} \ln m + \sigma\right)$$

kifejezést írunk, úgy

$$S(V, T, m) = m\left[\frac{R}{M} \ln \frac{V}{m} + \int \frac{c_V(T)}{T} dT + \sigma\right]. \tag{17.2.9}$$

Az entrópia extenzivitása megköveteli, hogy a szögletes zárójel csak V/m és T függvénye legyen. De mivel σ nem függhet sem V-től, sem T-től, ezért σ-nak m-től is független állandónak kell lennie. A σ entrópiakonstans értéke tetszőleges, ez már olyan állapotváltozásoknál sem játszik szerepet, ahol m megváltozik.

3. §. A van der Waals-féle állapotegyenlet

Az előzőekben már többször hangsúlyoztuk, hogy az ideális gáztörvény a gázok viselkedését csak közelítőleg írja le. A valóságos gázok állapotegyenlete az ideálishoz képest kiegészítésre szorul, méghozzá elsősorban a kondenzációs hőmérséklethez közeli hőmérsékleteken. Az első ilyen állapotegyenletet 1873-ban VAN DER WAALS vezette le a kinetikai gázelméletből. A *van der Waals*-féle állapotegyenlet a következő

$$\left(p + \frac{a}{V_M^2}\right)(V_M - b) = RT\,, \tag{17.3.1}$$

ahol V_M az ún. móltérfogat:

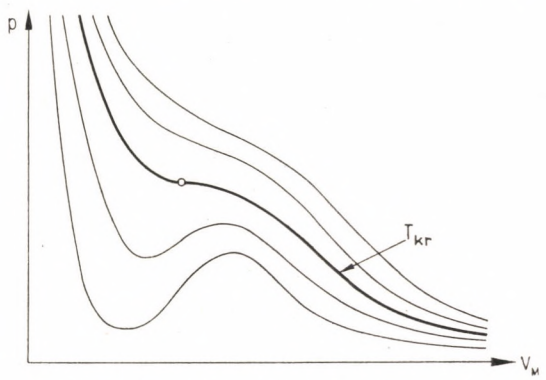
$$V_M = \frac{M}{m} V\,. \tag{17.3.2}$$

A (17.3.1) állapotegyenletben a és b az ún. *van der Waals*-konstansok, melyek a gáz anyagi minőségétől függenek. Ha a és b helyébe zérust írunk, úgy $pV_M = RT$, azaz

$$pV = \frac{m}{M} RT\,,$$

tehát visszakapjuk az ideális gáz állapotegyenletét.

Vegyük a *van der Waals*-egyenletet alaposabb vizsgálat alá. E célból rajzoljuk fel a gáz izotermáit, vagyis egy $p - V_M$ koordinátarendszerben a $T = \text{konst.}$ görbéket. Az ábrán látjuk, hogy magasabb hőmérsékletek esetén növekvő V_M-



235. ábra. A *van der Waals*-izoterma

hez monoton csökkenő p tartozik, egész magas hőmérsékleteken a megfelelő görbék egyre inkább megközelítik az ideális gáztörvénynek megfelelő egyenlőszárú hiperbolákat.

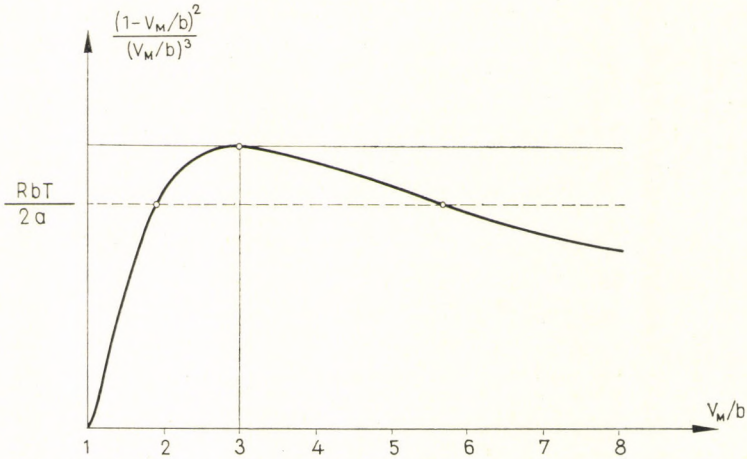
Alacsonyabb hőmérséklet esetén az izotermának maximuma és minimuma van. E szélső értékek helyét meghatározó egyenlet

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V_M}\right)_T = -\frac{RT}{(V_M - b)^2} + \frac{2a}{V_M^3} = 0 .$$

Ebből

$$\frac{(1 - V_M/b)^2}{(V_M/b)^3} = \frac{Rb}{2a} T . \tag{17.3.3}$$

A 236. ábrán ennek az egyenletnek baloldalát, mint V_M/b függvényét mutatjuk be. Ennek a függvénynek a $V_M/b = 3$ helyen maximuma van, a maximum értéke



236. ábra. A *van der Waals*-izoterma szélső értékeit meghatározó görbe

4/27. A *van der Waals*-izoterma szélső értékeit úgy kapjuk meg, ha $RbT/2a$ magasságban az abszcisszával párhuzamos egyenest húzunk és megnézzük, hogy ez hol metszi a görbét. Ha $RbT/2a < 4/27$, úgy két metszéspontot kapunk, az első a minimumnak, a második a maximumnak felel meg. Ha $RbT/2a = 4/27$, úgy a két szelső érték már egybe esik, az ennek megfelelő

$$T_{kr} = \frac{8}{27} \frac{a}{Rb} \tag{17.3.4}$$

hőmérsékletet az anyag *kritikus hőmérséklet*ének nevezzük. A kritikus hőmérséklethez tartozó izotermát az ábrán vastagon húztuk ki. Látjuk, hogy ezen a görbén már nincs külön maximum-és minimumpont, a kettő egybeesik egy inflexiós pontba. Ezt a pontot az anyag *kritikus pont*jának nevezzük. A T_{kr} kritikus hőmérséklet felett p monoton csökkenő függvénye már V_M-nek.

A kritikus ponthoz tartozó móltérfogatot (3.3) és (3.4)-ből számíthatjuk ki:

$$V_{kr} = 3b. \tag{17.3.5}$$

A kritikus ponthoz tartozó nyomás pedig

$$p_{kr} = \frac{1}{27}\frac{a}{b^2}. \tag{17.3.6}$$

A *van der Waals*-konstansok kísérleti meghatározása a gáz kritikus pontjának megkeresésével és T_{kr}, p_{kr} megmérésével történik. T_{kr} és p_{kr} ismeretében a-t és b-t a (3.4) és (3.6) egyenletek határozzák meg. Az alábbi táblázat néhány fontosabb gázra vonatkozó adatot tartalmaz.

Gáz	T_{kr} (°K)	p_{kr} (atm)	a(atm cm^6)	b(cm^3)
He	5,19	2,26	$0{,}0335 \cdot 10^6$	23,5
H	33,2	12,8	$0{,}246 \cdot 10^6$	26,7
N	126,0	34	$1{,}345 \cdot 10^6$	38,6
O	154,3	50	$1{,}36 \cdot 10^6$	31,9
CO	304,1	73	$3{,}6 \cdot 10^6$	42,7

Az előző §-ban láttuk, hogy az állapotegyenletek integrálhatósági feltétele gázok (és folyadékok) esetében, ha a független állapotjelzők V és T, a (2.4) egyenlet lesz, mely szerint

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p. \tag{17.3.7}$$

Számítsuk ki a jobboldali kifejezést a *van der Waals*-állapotegyenlet segítségével.

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = \frac{a}{V_M^2} = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{a}{V^2}.$$

Integrálva megkapjuk a reális gáz kalorikus állapotegyenletét.

$$E(V,T) = -\left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{a}{V} + f(T), \tag{17.3.8}$$

ahol $f(T)$ a hőmérsékletnek egyelőre határozatlan függvénye.

A gáz állandó térfogathoz tartozó fajhőjét (16.5.13) szerint

$$c_V = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_T = \frac{1}{m} f'(T)$$

adja meg, és ebből az $f(T)$ függvényre az

$$f(T) = m \int c_V(T) dT$$

kifejezést kapjuk. A reális gáz kalorikus állapotegyenlete tehát

$$E(V,T) = m\int c_V(T)dT - \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{a}{V}. \tag{17.3.9}$$

Az $E(V, T)$ energia egy hőmérséklettől és egy térfogattól függő tag összege. A hőmérsékletfüggő rész ugyanaz, mint amit az ideális gáznál megszoktunk,a térfogattól függő rész pedig fordítottan arányos V-vel és arányos az *a van der Waals*-konstanssal.

A gáz entrópiáját meghatározó egyenletek

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V_M - b} = \frac{R}{\frac{M}{m}V - b},$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{mc_V(T)}{T}. \tag{17.3.10}$$

Ezen egyenletek integrálása semmilyen problémát sem okoz. Kapjuk, hogy

$$S(V,T,m) = m\left[\frac{R}{M}\ln\left(\frac{M}{m}V - b\right) + \int \frac{c_V(T)}{T}dT + \sigma\right]. \tag{17.3.11}$$

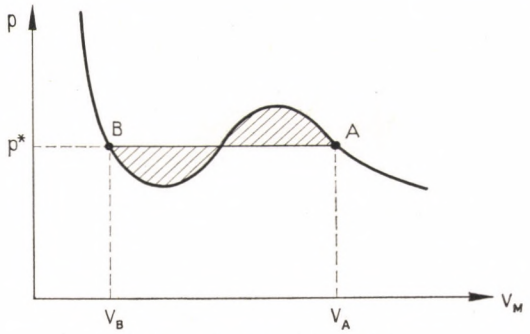
Itt a σ entrópiakonstans nemcsak V- és T-től, hanem m-től is független, mert különben S nem lenne arányos m-mel. Látjuk, hogy az entrópia is két olyan tagból áll, melyek közül az egyik csak T-t, a másik csak V-t tartalmazza.

4. §. Kondenzáció

Vegyük alaposabb vizsgálat alá, hogy egy gáz izotermikus állapotváltozása a kritikus hőmérséklet alatt hogyan megy végbe. A 235. ábrán látjuk, hogy a *van der Waals*-egyenlet szerint egy ilyen izotermának maximuma és minimuma van. Ez azt jelentené, hogy pl. összenyomás esetén lenne egy olyan szakasz, amikor bár a térfogat tovább csökken, a nyomás nem növekedne, hanem csökkenne. Ez labilis állapotot jelentene és a gázok nem is követik végig ezeket az izotermákat, hanem egy bizonyos A ponton túl az állapotváltozás egy a V tengellyel párhuzamos egyenes mentén történik, míg újra el nem éri a görbe felmenő ágát a B pontnál (237. ábra). Az A pontban ugyanis a gáz kezd lecsapódni és a légnemű halmazállapot mellett megjelenik a cseppfolyós is. A térfogatot V_A-ról tovább csökkentve, a gáz nyomása változatlanul p^* marad, ellenben a gőzből mind több és több csapódik le, míg B-ben már csak folyadék van jelen. Ettől kezdve a térfogat további csökkentése igen erős nyomásnövekedéssel jár, ami az izoterma erősen felfelé hajló ágának felel meg.

A valóságos gázok viselkedése tehát a *van der Waals*-állapotegyenletet követi, de az izotermákat az előbbiek szerint korrigálni kell a V tengellyel párhuzamos

egyenesdarabokkal. Természetesen azonnal felmerül a kérdés, hogy milyen magasságban kell ezt a vízszintes szakaszt meghúzni, azaz mekkora lesz az adott T hőmérséklethez tartozó p^* gőznyomás. Ezt az ún. *Maxwell*-kritérium adja meg, mely szerint a p^* gőznyomásnak megfelelő egyenes szakasz úgy helyezkedik el,



237. ábra. A *Maxwell*-kritérium

hogy a 237. ábrán a két vonalkázott területrész egyenlő legyen. Képlettel kifejezve:

$$\int_{V_B}^{V_A} p(V_M, T)\, dV_M = p^*\,(V_A - V_B)\,. \tag{17.4.1}$$

Itt természetesen V_A, V_B és p^* is a T hőmérséklet függvényei.

A *Maxwell*-kritérium bizonyítása céljából mindenekelőtt megjegyezzük, hogy (4.1) nyilvánvalóan igaz a $T = T_{kr}$ kritikus hőmérsékleten, hiszen ott az A és B pontok egyetlen ponttá esnek össze, következésképp $V_A = V_B$ és (4.1) jobb- és baloldalán egyaránt zérus áll. Elegendő tehát azt igazolni, hogy az

$$M(T) = \int_{V_B}^{V_A} p(V_M, T)\, dV_M - p^*\,(V_A - V_B) \tag{17.4.2}$$

mennyiség független a T hőmérséklettől, hiszen értéke a fentiek szerint minden T-re zérus. Képezzük dM/dT-t:

$$\frac{dM}{dT} = \int_{V_B}^{V_A} \frac{\partial p(V_M, T)}{\partial T}\, dV_M + p(V_A, T)\frac{dV_A}{dT} - p(V_B, T)\frac{dV_B}{dT} -$$

$$- \frac{dp^*}{dT}(V_A - V_B) - p^*\left(\frac{dV_A}{dT} - \frac{dV_B}{dT}\right).$$

Figyelembe véve, hogy $p(V_A, T) = p(V_B, T) = p^*(T)$, kapjuk, hogy

$$\frac{dM}{dT} = \int_{V_A}^{V_B} \frac{\partial p(V_M, T)}{\partial T}\, dV_M - \frac{dp^*}{dT}(V_A - V_B)\,.$$

Az integrál alatt szereplő $\partial p/\partial T$ differenciálhányadost (3.7)-ből kifejezve, a fenti formula a következőképpen alakul:

$$\frac{dM}{dT} = \frac{1}{T}\int_{V_A}^{V_B} \frac{\partial \mathrm{E}(V_M, T)}{\partial V_M}\, dV_M + \frac{1}{T}\int_{V_A}^{V_B} p(V_M, T) dV_M - \frac{dp^*}{dT}(V_A - V_B)\,. \tag{17.4.3}$$

Az első integrálban E egy mól gáz energiáját, tehát $\frac{M}{m}E$-t jelöli. Ez az integrál természetesen

$$\int_{V_A}^{V_B} \frac{\partial \mathrm{E}(V_M, T)}{\partial V_M}\, dV_M = \mathrm{E}(V_A, T) - \mathrm{E}(V_B, T) = \mathrm{E}_A - \mathrm{E}_B$$

-vel egyenlő, azaz nem más, mint az 1 mólnyi gőz és folyadék belső energiájának különbsége, amit röviden $\mathrm{E}_A - \mathrm{E}_B$-vel jelölünk. (4.3) második integrálját (4.2) alapján M-mel fejezhetjük ki. Így kapjuk, hogy

$$\frac{dM}{dT} - \frac{M}{T} = \frac{\mathrm{E}_A - \mathrm{E}_B + p^*(V_A - V_B)}{T} - \frac{dp^*}{dT}\,. \tag{17.4.4}$$

Az első tag számlálójának fizikai jelentése igen egyszerű. Miközben a B-pontból A-ba megyünk a vízszintes izoterma szakaszon, azaz mialatt a folyadék elpárolog, belső energiája $\mathrm{E}_A - \mathrm{E}_B$-vel változik meg. Az első főtétel szerint ez az energiaváltozás a párolgáshoz szükséges Q hőenergia és közben a rendszeren végzett $-p^*(V_A - V_B)$ munka összegével egyenlő:

$$\mathrm{E}_A - \mathrm{E}_B = Q - p^*(V_A - V_B).$$

Ezt tekintetbe véve (4.4) a következőt adja

$$\frac{dM}{dT} - \frac{M}{T} = \frac{Q}{T} - \frac{dp^*}{dT}(V_A - V_B)\,. \tag{17.4.5}$$

A jobboldal második tagjában fellép a $\frac{dp^*}{dT}$ differenciálhányados, ami a $p^* = p^*(T)$ gőznyomásgörbe meredekségét jelenti. A Tizennyolcadik Fejezet 6. §-ban le fogjuk vezetni az erre vonatkozó *Clausius–Clapeyron*-egyenletet, mely szerint

$$\frac{dp^*}{dT} = \frac{Q}{T(V_A - V_B)}\,.$$

Ha ezt tekintetbe vesszük, úgy (4.5) jobboldalán zérust kapunk. Tehát

$$\frac{dM}{dT} - \frac{M}{T} = 0\,. \tag{17.4.6}$$

E differenciálegyenlet általános megoldása

$$M(T) = \beta T,$$

ahol β egy integrációs állandó. Minthogy azonban a kritikus hőmérsékleten $M(T_k) = 0$, ezért $\beta = 0$ és így

$$M(T) = 0$$

minden T-re. Ezzel a *Maxwell*-kritériumot bebizonyítottuk.

5. §. Mágneses anyagok termikus viselkedése

Mágnesezhető anyagok esetében a termikus állapotegyenletnek a $\mathfrak{H}$ külső mágneses tér, a T hőmérséklet és az anyag $\mathfrak{M}$ mágnesezettsége közötti

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathfrak{H}, T) \tag{17.5.1}$$

összefüggés felel meg. Ezt az összefüggést tapasztalati úton kell felderítenünk és segítségével $\mathfrak{H}$, T és $\mathfrak{M}$ közül bármely kettőből a harmadik meghatározható. Mi a továbbiakban a $\mathfrak{H}$ mágneses teret és a T hőmérsékletet tekintjük független állapotjelzőknek. Ezeknek lesz függvénye az anyag E energiája is:

$$E = E(\mathfrak{H}, T). \tag{17.5.2}$$

Ez utóbbi összefüggés a mágneses anyagok kalorikus állapotegyenlete.

Foglalkozzunk most az állapotegyenletek integrálhatóságának kérdésével. Ehhez fel kell írnunk az elemi munka *Pfaff*-féle kifejezését. Esetünkben az elemi munkát (16.4.10) adja meg, ennek alapján

$$\delta A = V\mathfrak{H}d\mathfrak{M} = V\mathfrak{H}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \mathfrak{H}}\right)d\mathfrak{H} + V\mathfrak{H}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial T}\right)dT\,. \tag{17.5.3}$$

Itt V az anyag térfogata, melyet nem tekintünk állapotjelzőnek, hanem egy változatlan konstansnak. Ha az elemi munka fenti kifejezését a (16.5.4)-nek megfelelő

$$\delta A = A_{\mathfrak{H}}d\mathfrak{H} + A_T dT$$

Pfaff-féle alakban kívánjuk felírni, úgy természetesen az együtthatók helyébe az

$$A_{\mathfrak{H}} = V\mathfrak{H}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \mathfrak{H}}\right) \quad \text{és} \quad A_T = V\mathfrak{H}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial T}\right) \tag{17.5.4}$$

kifejezéseket kell helyettesítenünk. Ezek az együtthatók tehát az (5.1) állapotegyenlet ismeretében egyszerűen számíthatók.

Írjuk fel ezek után az integrálhatósági feltételeket. Az (1.8a) egyenlet esetünkben semmitmondó lesz, hiszen a T-től független állapotjelzőink száma mindössze 1.

(1.8b)-ben az i index most csak a $\mathfrak{H}$ térerősségre vonatkozhat.

$$\frac{A_{\mathfrak{H}}}{T} - \frac{\partial A_{\mathfrak{H}}}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{H}} \left(\frac{E}{T} - A_T \right).$$

Behelyettesítve az (5.4) kifejezéseket és rendezve az egyenletet, kapjuk, hogy

$$\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{H}} = V \left(\mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \mathfrak{H}} + T \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial T} \right). \tag{17.5.5}$$

Tehát azt, hogy az E energia hogyan függ a mágneses tértől, az (5.1) mágnesezési görbéből kiszámíthatjuk.

Az entrópia kiszámításához első lépésünk az entrópia parciális differenciálhányadosainak felírása. Az (1.9) formulákat esetünkre alkalmazva

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{H}} &= V \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial T}, \\ \frac{\partial S}{\partial T} &= \frac{1}{T} \left(\frac{\partial E}{\partial T} - V \mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial T} \right). \end{aligned} \tag{17.5.6}$$

A második egyenletben szerepel a $\partial E/\partial T$ mennyiség, ami elvben a kalorikus állapotegyenletből határozható meg. Általában a kalorikus állapotegyenletet nem lehet közvetlenül a tapasztalatból leolvasni, helyette a rendszer hőkapacitását szoktuk kísérletileg megállapítani. A hőkapacitás általános formuláját (16.5.6) alatt írtuk fel, esetünkben ebből

$$C = \frac{\left(\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{H}} - A_{\mathfrak{H}} \right) d\mathfrak{H} + \left(\frac{\partial E}{\partial T} - A_T \right) dT}{dT}$$

lesz, vagyis

$$C = \left(\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{H}} - A_{\mathfrak{H}} \right) \frac{d\mathfrak{H}}{dT} + \frac{\partial E}{\partial T} - A_T.$$

Az első tagban fellépő $\frac{d\mathfrak{H}}{dT}$ mutatja, hogy a hőkapacitás függ az állapotváltozás irányától. Konstans mágneses tér mellett történő hőközlésnél $\frac{d\mathfrak{H}}{dT} = 0$ és a hőkapacitás

$$C_{\mathfrak{H}} = \frac{\partial E}{\partial T} - A_T = \frac{\partial E}{\partial T} - V \mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial T},$$

Ebből a minket érdeklő parciális derivált

$$\frac{\partial E}{\partial T} = C_{\mathfrak{H}} + V \mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial T}. \tag{17.5.7}$$

Ezt (5.6)-ba téve, az entrópiaegyenletek a következők lesznek

$$\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{H}} = V\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial T} \quad \text{és} \quad \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{1}{T}C_{\mathfrak{H}}. \tag{17.5.8}$$

A mágneses anyagok termikus viselkedésének alapformulái kerültek ezzel kezünkbe. Az (5.5) és (5.7) egyenletek az E energiát, (5.8) pedig az S entrópiát teszik kiszámíthatóvá, ha ismerjük egyrészt $\mathfrak{M}$-et, másrészt $C_{\mathfrak{H}}$-t mint a $\mathfrak{H}$ és T független állapotjelzők függvényeit. Mint már mondottuk, ezeket a relációkat tapasztalatilag kell felderítenünk.

Még egy fontos összefüggésre hívjuk fel a figyelmet. Ha (5.5)-öt differenciáljuk T szerint és (5.7)-et pedig $\mathfrak{H}$ szerint, akkor a baloldalon mindkét esetben a $\partial^2 E/\partial\mathfrak{H}\partial T$ vegyes második deriváltat kapjuk. A jobboldalak egyenlősége pedig a

$$\frac{\partial C_{\mathfrak{H}}}{\partial \mathfrak{H}} = VT\frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial T^2} \tag{17.5.9}$$

összefüggésre vezet. Ugyanezt kapjuk akkor is, ha (5.8)-ból képezzük az entrópia $\partial^2 S/\partial\mathfrak{H}\partial T$ vegyes második deriváltját és a kapott két kifejezést egymással összevetjük.

A fentiek tetszés szerinti mágneses anyagra érvényes megállapítások. Az alábbiakban néhány – a gyakorlatban igen fontos – mágneses állapotegyenletet fogunk megbeszélni és eredményeinket ezekre alkalmazni.

Diamágneses anyagok és paramágneses fémek esetén a mágnesezettség arányos a mágnesező térrel,

$$\mathfrak{M} = \chi\mathfrak{H} \tag{17.5.10}$$

és a χ szuszceptibilitás az anyagra jellemző állandó, független a $\mathfrak{H}$ térerősségtől és a T hőmérséklettől. (Diamágneses anyagokra $\chi < 0$, paramágnesesekre $\chi > 0$.) Mivel $\mathfrak{M}$ most a hőmérséklettől nem függ, ezért (5.9) szerint $\partial C_{\mathfrak{H}}/\partial\mathfrak{H} = 0$, tehát

$$C_{\mathfrak{H}} = C_{\mathfrak{H}}(T),$$

azaz a hőkapacitás csak a hőmérséklettől függ, a mágneses tértől nem.

Az energiát meghatározó (5.5) és (5.7) egyenletek esetünkben a következőképpen alakulnak:

$$\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{H}} = V\chi\mathfrak{H} \quad \text{és} \quad \frac{\partial E}{\partial T} = C_{\mathfrak{H}}(T)\,.$$

Integrálva kapjuk, hogy

$$E(\mathfrak{H}, T) = \frac{1}{2}V\chi\mathfrak{H}^2 + \int C_{\mathfrak{H}}(T)dT\,. \tag{17.5.11}$$

Az energia tehát két tagból áll, melyek közül az egyik csak a mágneses tértől, a másik pedig csak a hőmérséklettől függ.

Az entrópia deriváltjait (5.8) alapján képezzük,

$$\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{H}} = 0 \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{C_{\mathfrak{H}}(T)}{T},$$

melyből integrálással az

$$S(\mathfrak{H}, T) = \int \frac{C_{\mathfrak{H}}(T)}{T} dT \tag{17.5.12}$$

eredményre jutunk. Az entrópia tehát nem tartalmazza a mágneses teret, csak a hőmérséklettől függ. Állandó hőmérséklet mellett történő mágnesezés ezek szerint nem jár entrópiaváltozással, következésképpen a mágnesezéssel kapcsolatos $\delta Q = TdS$ hő zérussal lesz egyenlő. A mágnesezéskor végzett $\delta A = V\mathfrak{H}d\mathfrak{M} = V\chi\mathfrak{H}d\mathfrak{H}$ munka teljes egészében az E energiát növeli, hőfejlődés nincs.

Paramágneses gázok szuszceptibilitása, a *Curie*-törvény szerint, a hőmérséklettel fordítva arányos. A mágnesezettség képlete tehát

$$\mathfrak{M} = \frac{B\mathfrak{H}}{T}, \tag{17.5.13}$$

ahol B egy anyagi minőségtől függő állandó. Ezt a mágnesezettségi törvényt (5.9)-be helyettesítve a

$$\frac{\partial C_{\mathfrak{H}}}{\partial \mathfrak{H}} = \frac{2VB\mathfrak{H}}{T^2}$$

relációt kapjuk, amiből

$$C_{\mathfrak{H}} = \frac{BV\mathfrak{H}^2}{T^2} + C_0(T), \tag{17.5.14}$$

ahol C_0 a zérus mágneses térhez tartozó hőkapacitás. (5.5) és (5.7) most a

$$\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{H}} = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial T} = C_0(T)$$

energiaderiváltakat szolgáltatja, amiből

$$E(\mathfrak{H}, T) = \int C_0(T) dT. \tag{17.5.15}$$

Az energia tehát csak a hőmérséklettől függ, a mágneses tértől nem.

Az entrópiára (5.8)-ból kapjuk, hogy

$$\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{H}} = -\frac{BV\mathfrak{H}}{T^2} \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{BV\mathfrak{H}^2}{T^3} + \frac{C_0(T)}{T}.$$

Ebből

$$S(\mathfrak{H}, T) = -\frac{BV\mathfrak{H}^2}{2T^2} + \int \frac{C_0(T)}{T} dT. \tag{17.5.16}$$

Mivel az E energia csak T-től függ, ezért konstans hőmérsékleten történő mágnesezésnél az energia változatlan marad. A mágnesezéskor végzett

$$\delta A = V\mathfrak{H}d\mathfrak{M} = \frac{BV}{T}\mathfrak{H}d\mathfrak{H}$$

munka és a

$$\delta Q = TdS = -\frac{BV}{T}\mathfrak{H}d\mathfrak{H}$$

hő algebrai összege zérus, tehát a *Curie*-törvényt követő anyagoknál a mágnesezésre fordított munka teljes egészében hővé alakul.

Ferromágneses anyagok a *Curie*-pont felett a *Curie – Weiss*-törvényt követik:

$$\mathfrak{M} = \frac{B\mathfrak{H}}{T-\Theta}, \quad T > \Theta . \tag{17.5.17}$$

B és Θ anyagi állandók, Θ az ún. *Curie*-pont hőmérséklete. (Vasra $\Theta = 1050\ ^\circ\mathrm{K}$) A törvény csak $T > \Theta$ esetén érvényes.

(5.9)-ből

$$\frac{\partial C_{\mathfrak{H}}}{\partial \mathfrak{H}} = \frac{2BVT\mathfrak{H}}{(T-\Theta)^3},$$

melyet integrálva kapjuk, hogy

$$C_{\mathfrak{H}} = \frac{BVT\mathfrak{H}^2}{(T-\Theta)^3} + C_0(T), \tag{17.5.18}$$

ahol $C_0(T)$ ismét a $\mathfrak{H} = 0$-hoz tartozó hőkapacitást jelöli.

Jegyezzük fel az energiaderiváltakat. (5.5) és (5.7)-ből

$$\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{H}} = -\frac{BV\Theta\mathfrak{H}}{(T-\Theta)^2}, \qquad \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{BV\Theta\mathfrak{H}^2}{(T-\Theta)^3} + C_0(T).$$

Ezek integrálása a következő eredményre vezet

$$E(\mathfrak{H}, T) = -\frac{BV\Theta\mathfrak{H}^2}{2(T-\Theta)^2} + \int C_0(T)dT . \tag{17.5.19}$$

Az entrópiaderiváltak kifejezéseit (5.8) alapján képezzük

$$\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{H}} = -\frac{BV\mathfrak{H}}{(T-\Theta)^2} \quad \text{és} \quad \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{BV\mathfrak{H}^2}{(T-\Theta)^3} + \frac{C_0(T)}{T}.$$

Integrálva kapjuk, hogy

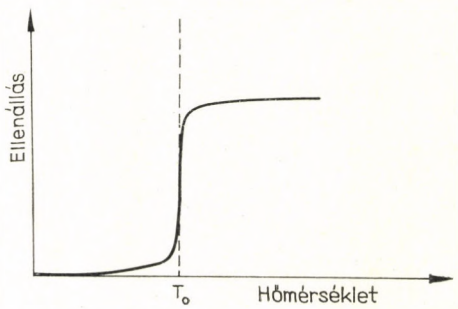
$$S(\mathfrak{H}, T) = -\frac{BV\mathfrak{H}^2}{2(T-\Theta)^2} + \int \frac{C_0(T)}{T} dT . \tag{17.5.20}$$

E képletnek fontos szerepe van az adiabatikus mágnesezés vizsgálatánál. Adiabatikus mágnesezéskor a környezettel hőcsere nincs és ezért az entrópia változatlan marad. Ha a mágneses teret pl. megnöveljük, akkor (5.20) első, negatív előjelű tagja lecsökken és ezt a második tagnak kell kompenzálnia ahhoz, hogy S változatlan maradjon. $\int (C_0/T)dT$ növekedése csakis a hőmérséklet növekedésével lehet kapcsolatban, tehát adiabatikus mágnesezéskor az anyag felmelegszik. Hasonlóan látható be, hogy adiabatikus lemágnesezésnél ($\mathfrak{H}$ csökkentésekor) az anyag lehűl. Ennek a jelenségnek az igen alacsony hőmérsékletek előállításánál van fontos szerepe. Van ugyanis néhány olyan anyag, mely rendkívül alacsony hőmérsékletig az (5.17) *Curie – Weiss*-törvényt (vagy ahhoz közel hasonlót) követi és ezen anyagok adiabatikus lemágnesezésével igen alacsony hőmérsékleteket lehet elérni.

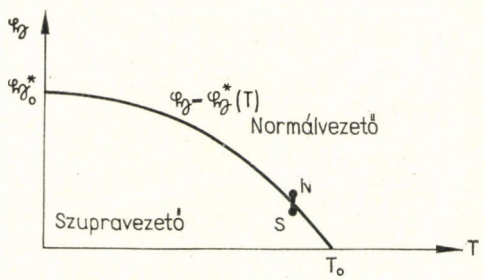
6. §. A szupravezető átmenet termodinamikája

Alapvető kísérleti eredmények

Az abszolút zérus fok közelében a legtöbb fém elveszti elektromos ellenállását és szupravezetővé válik. Az átmenetet a normális vezetőképességről a szupravezető állapotba a 238. ábra mutatja. Látjuk, hogy az átmenet igen éles, egy bizonyos T_0 átmeneti hőmérséklet igen szűk környezetén belül megtörténik.



238. ábra. Átmenet a normális vezetőképességből a szupravezető állapotba



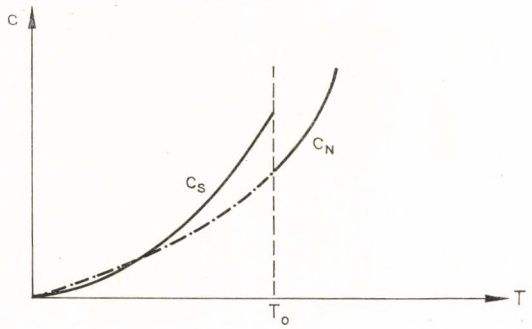
239. ábra. A szupravezetés küszöbérték görbéje

A szupravezetés elegendően erős mágneses tér alkalmazásával megszüntethető. A szupravezetés megszüntetéséhez szükséges mágneses térerősség küszöbértéke, $\mathfrak{H}^*(T)$ függ a hőmérséklettől. Ezt a küszöbérték-görbét láthatjuk a 239. ábrán. A $T - \mathfrak{H}$ síknak ez a görbéje választja el egymástól a szupravezető és a normál állapotot. A görbe T_0-nál véges szög alatt metszi a T-tengelyt, $T = 0$-nál pedig vízszintes érintővel éri el a $\mathfrak{H}_0^*$ maximális küszöbértéket.

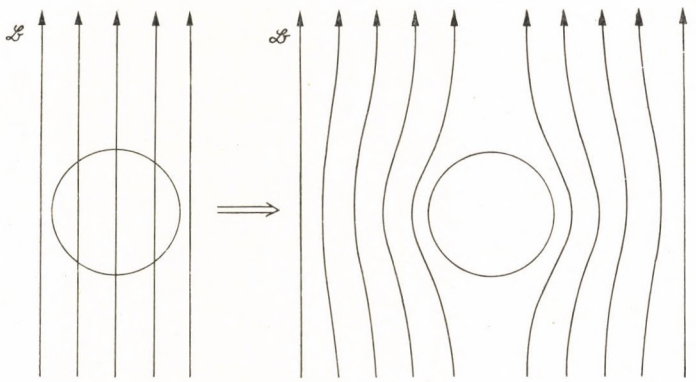
A küszöbérték-görbe „átlépéséhez", tehát az ábrán az S-sel jelölt pontból N-be való átmenethez, egy meghatározott $Q(T)$ hőmennyiségre van szükség. Ez a jelenség analóg a jól ismert fázisátalakulásokat (pl. a halmazállapotváltozásokat) kísérő hőfelvétellel.

A tapasztalat szerint a fajhő a szupravezető és a normál állapotban különböző, a T_0 átmeneti hőmérsékletnél a fajhőnek határozott ugrása van (240. ábra).

A szupravezetőkkel kapcsolatos egyik legérdekesebb tapasztalat a *Meissner*-effektus. Ha mágneses térbe helyezett fémet lehűtve szupravezető állapotba ho-



240. ábra. A szupravezető és a normál állapotú fajhő hőmérsékletfüggése



241. ábra. A *Meissner*-effektus

zunk, úgy belőle az átmenet során a mágneses indukcióvonalak kiszorulnak (241. ábra). A szupravezető anyag belsejében tehát $\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M} = 0$, azaz

$$\mathfrak{M} = -\frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}. \tag{17.6.1}$$

A szupravezető mágneses szuszceptibilitása eszerint $\chi = -1/4\pi$, tehát tökéletes diamágnesként viselkedik. A szupravezetőknek ez a tulajdonsága nem vezethető le abból az alapvető jellegzetességből, hogy a ρ fajlagos ellenállás zérus. A szupravezető állapotot tehát a

$$\rho = 0 \quad \text{és} \quad \chi = -\frac{1}{4\pi}$$

adatok jellemzik, ezek egymástól független megállapítások.

Energia és entrópia. A szupravezető anyag energiáját és entrópiáját az (5.11) és (5.12) formulákból kapjuk, ha a szuszceptibilitás helyébe a $\chi = -1/4\pi$ értéket írjuk. A szupravezető hőkapacitását C_s-sel jelölve

$$E_s(\mathfrak{H}, T) = -\frac{V}{8\pi}\mathfrak{H}^2 + \int C_s(T)\,dT + E_{0s},$$

$$S_s(\mathfrak{H}, T) = \int \frac{C_s(T)}{T}\,dT + S_{0s}. \tag{17.6.2}$$

Itt E_{0s} és S_{0s} integrációs állandók, melyek az energia-, ill. az entrópiaskála zéruspontjának megválasztásától függnek.

Hasonló módon írhatjuk fel a normál állapot energia- és entrópiakifejezését is. Ha a normál állapot igen csekély mértékű mágnesezhetőségétől eltekintünk, úgy normál állapotban a szuszceptibilitást $\chi = 0$-nak vesszük és (5.11) és (5.12) a következő kifejezéseket adja

$$E_N(\mathfrak{H}, T) = \int C_N(T)\,dT + E_{0N},$$

$$S_N(\mathfrak{H}, T) = \int \frac{C_N(T)}{T}\,dT + S_{0N}. \tag{17.6.3}$$

A jobboldali kifejezések nem tartalmazzák $\mathfrak{H}$-t, E_N és S_N tehát független $\mathfrak{H}$-tól. Ez természetes is, hiszen a normál állapot mágnesezhetőségétől eltekintünk.

A küszöbérték-görbe egyenlete. A szupravezető és normál állapotokat elválasztó $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^*(T)$ küszöbérték-görbe alakjának megállapítása céljából vizsgáljuk meg részletesen a görbén való átlépéskor, vagyis a 239. ábra S pontjából az N pontba való átmenetkor fellépő jelenségeket. Írjuk fel először is az S és N pontok közötti energia- és entrópiakülönbségeket. (6.2) és (6.3) szerint

$$\Delta E = E_N(\mathfrak{H}^*(T), T) - E_s(\mathfrak{H}^*(T), T) = \int (C_N(T) - C_s(T))\,dT + \frac{V}{8\pi}(\mathfrak{H}^*(T))^2 + \\ + (E_{0N} - E_{0s}),$$

$$\Delta S = S_N(\mathfrak{H}^*(T), T) - S_s(\mathfrak{H}^*(T), T) = \int \frac{C_N(T) - C_s(T)}{T}\,dT + (S_{0N} - S_{0s}).$$

Mivel az átmenet reverzibilis, ezért az entrópiaváltozás

$$\Delta S = \frac{Q(T)}{T}$$

lesz, ahol $Q(T)$ az átmenethez szükséges hő. Írhatjuk tehát, hogy

$$Q(T) = T\int \frac{C_N(T) - C_s(T)}{T}\,dT + T(S_{0N} - S_{0s}). \tag{17.6.4}$$

Az átmenethez külső munkára is szükség van, mert az átmenetkor a mágnesezettség erősen megváltozik. A munka kifejezése

$$A(T) = V \int_S^N \mathfrak{H} d\mathfrak{M} = V\mathfrak{H}^*(T) \int_S^N d\mathfrak{M} = V\mathfrak{H}^*(T)(\mathfrak{M}_N - \mathfrak{M}_s).$$

Az előzőek szerint a normál állapot mágnesezettsége $\mathfrak{M}_N = 0$, a szupravezetőé $\mathfrak{M}_s = -\frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}^*(T)$. Az átmenethez szükséges munka tehát

$$A(T) = \frac{V}{4\pi}(\mathfrak{H}^*(T))^2. \tag{17.6.5}$$

Az első főtétel szerint a ΔE energiaváltozás a felvett $Q(T)$ hő és $A(T)$ munka összege lesz

$$\Delta E = Q(T) + A(T).$$

Beírva ΔE, $Q(T)$ és $A(T)$ fenti kifejezéseit, kapjuk, hogy

$$\int (C_N(T) - C_s(T))\, dT + \frac{V}{8\pi}(\mathfrak{H}^*(T))^2 + (E_{0N} - E_{0s})$$

$$= T \int \frac{C_N(T) - C_s(T)}{T}\, dT + \frac{V}{4\pi}(\mathfrak{H}^*(T))^2 + T(S_{0N} - S_{0s}).$$

Ebből

$$(\mathfrak{H}^*(T))^2 = \frac{8\pi}{V}\left\{\int (C_N(T) - C_s(T))\, dT - T\int \frac{C_N(T) - C_s(T)}{T}\, dT + \right.$$

$$\left. + (E_{0N} - E_{0s}) - T(S_{0N} - S_{0s})\right\}. \tag{17.6.6}$$

Ez az egyenlet a küszöbérték-görbe alakját megadó egyenlet. Két, egyelőre határozatlan konstans szerepel benne,

$$\varepsilon = E_{0N} - E_{0s} \quad \text{és} \quad \sigma = S_{0N} - S_{0s}.$$

Ezeket úgy kell megválasztani, hogy a görbe kezdeti érintője $T = 0$-nál vízszintes legyen, és a T_0 átmeneti hőmérsékletnél $\mathfrak{H}^*$ zérus legyen:

$$\left(\frac{d\mathfrak{H}^*}{dT}\right)_{T=0} = 0 \quad \text{és} \quad \mathfrak{H}^*(T_0) = 0. \tag{17.6.7}$$

A küszöbérték-görbe alakját meghatározó egyenlet egy másik alakját kapjuk, ha (6.6)-ot kétszer differenciáljuk T szerint. Ekkor az állandók kiesnek és a következő egyenletet nyerjük:

$$\left(\frac{d\mathfrak{H}^*}{dT}\right)^2 + \mathfrak{H}^*(T)\frac{d^2\mathfrak{H}^*}{dT^2} = \frac{4\pi}{V}\,\frac{C_s(T) - C_N(T)}{T}. \tag{17.6.8}$$

E másodrendű differenciálegyenlet megoldásánál (6.7)-et mint peremértékeket kell figyelembe venni és ezáltal $\mathfrak{H}^*(T)$ egyértelműen meghatározható.

Alkalmazzuk (6.8)-at a küszöbérték-görbének a T-tengellyel való metszéspontjára, vagyis $T = T_0$-ra. $\mathfrak{H}^*(T_0) = 0$ miatt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{d\mathfrak{H}^*}{dT}\right)^2_{T=T_0} = \frac{4\pi}{V}\,\frac{C_s(T_0) - C_N(T_0)}{T_0}\,. \tag{17.6.9}$$

Ez az ún. *Rutgers*-formula, mely összefüggést állapít meg a küszöbérték-görbének a T-tengellyel való metszési szöge, valamint a $\Delta C = C_s(T_0) - C_N(T_0)$ hőkapacitásdifferencia között. Ez az eredmény a kísérleti adatokkal kitűnően egyezik.

TIZENNYOLCADIK FEJEZET

A TERMODINAMIKAI EGYENSÚLY

1. §. Az egyensúly feltételei

Tekintsünk egy általános termodinamikai rendszert; független állapotjelzői legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ .A rendszer T hőmérsékletét, E energiáját és S entrópiáját ezen állapotjelzők ismert függvényeinek tekintjük.

Írjuk fel az első és a második főtételt egy infinitezimális állapotváltozás esetére. Az első főtétel szerint az energiaváltozás

$$dE = \delta Q + \delta A,$$

ahol, szokás szerint, δQ az állapotváltozás során a rendszerbe vezetett hőt, δA a rendszeren végzett külső munkát jelöli. A második főtétel matematikai alakja (16.10.3) szerint

$$\delta Q \leq TdS,$$

ahol az egyenlőségjel a reverzibilis, az egyenlőtlenség az irreverzibilis állapotváltozásokra vonatkozik. A fenti két formulából δQ-t kiküszöbölve kapjuk, hogy

$$\delta A \geq dE - TdS. \tag{18.1.1}$$

A valóságban tehát csak olyan állapotváltozások történhetnek, melyekre ez az egyenlőtlenség teljesül. Egy bizonyos $x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ$ állapot akkor lesz egyensúlyi állapot, ha a környezetében nincs olyan $dx_1, \ldots, dx_n$ infinitezimális állapotváltozás, melyre (1.1) teljesülne. Ez a termodinamikai egyensúly feltételének legáltalánosabb megfogalmazása.

Egy általános mechanikai rendszer egyensúlyának feltétele, mint ismeretes, az, hogy potenciális energiája mint a független koordináták függvénye minimum legyen. Felmerülhet az az igény, hogy a termodinamikai egyensúly feltételét is mint valamely $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ állapotfüggvény szélsőértékfeltételét fogalmazzuk meg. Ez általános esetben nem lehetséges, azaz általában nem lehet olyan $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ függvényt találni, amely a termodinamikai egyensúly esetén szélsőértékkel bírna. Ezzel szemben néhány speciális, de a gyakorlat szempontjából fontos esetben a termodinamikai egyensúly feltételét lehetséges egy alkalmasan választott állapotfüggvény szélsőértékfeltételével azonosítani. Az alábbiakban ezekkel az esetekkel foglalkozunk.

1. Zárt rendszerek a környezetüktől minden szempontból el vannak szigetelve. Ekkor külső munkavégzés nincs: $\delta A = 0$ és a rendszer energiája állandó: $dE = 0$. A virtuális állapotváltozásokra vonatkozó (1.1) egyenlőtlenség ekkor $dS \geq 0$

alakú lesz. Tehát zárt rendszerekben csak olyan folyamatok mehetnek végbe, melyek entrópianövekedéssel járnak. A stabilis egyensúly szükséges és elegendő feltétele, hogy az $S(x_1, \ldots, x_n)$ entrópia maximális legyen (mert ekkor tovább már nem nőhet).

2. Ha a rendszeren külső erők munkát végezni nem tudnak: $\delta A = 0$, és a rendszer a környezettel való *reverzibilis* hőcsere lehetőségétől meg van fosztva: $dS = 0$, úgy (1.1) szerint $dE \leq 0$. Csak olyan állapotváltozás lehetséges, mely energiacsökkenéssel jár. A stabilis egyensúly feltétele, hogy $E(x_1, \ldots, x_n)$ minimális legyen. A rendszer tehát addig fog irreverzibilis módon hőt átadni környezetének, míg energiája minimum nem lesz.

3. Gyakorlati szempontból kiemelkedő fontosságúak az izotermikus, azaz állandó hőmérsékletű állapotváltozások, hiszen számtalan olyan folyamatot vizsgálunk, melyek a környezet (pl. a laboratórium) állandó hőmérsékletén mennek végbe. Ilyen folyamatok vizsgálatánál célszerű egy új állapotfüggvény, az

$$F = E - TS \tag{18.1.2}$$

mennyiség bevezetése. F neve: *a rendszer szabad energiája.* Ennek segítségével (1.1)-et a következőképpen írhatjuk fel

$$\delta A \geq dF + SdT. \tag{18.1.3}$$

Ez az általános képlet az állandó hőmérsékletű folyamatoknál, azaz $dT = 0$ esetben

$$\delta A \geq dF \tag{18.1.4}$$

alakú lesz. Izotermikus folyamatoknál tehát legalább annyi külső munkát kell végeznünk, mint amennyivel a rendszer szabad energiája megnő. Ezzel természetesen ekvivalens az a kijelentés, hogy *izotermikus állapotváltozásnál egy rendszer legfeljebb annyi munkát végez, mint amennyivel a szabad energiája lecsökken.* A szabad energia tehát a teljes energiának izotermikus munkavégzéssel maximálisan hasznosítható része.

Ha külön gondoskodunk arról, hogy a rendszeren külső munkavégzés ne legyen lehetséges, tehát csak olyan izotermikus állapotváltozásokat nézünk, melyekre $\delta A = 0$, úgy (1.4)-ből $dF \leq 0$ marad. Azaz $dT = 0$ és $\delta A = 0$ esetén csak olyan állapotváltozás lehetséges, mely a szabad energia csökkenésével jár. A stabilis egyensúly feltétele pedig az, hogy $F(x_1, \ldots, x_n)$ minimális legyen.

4. Fontos speciális esetként külön tárgyaljuk az olyan rendszereket, melyeknél a külső munkavégzés csak a rendszer térfogatváltozásával kapcsolatos $\delta A = -pdV$ munka lehet. (Tehát nem mágnesezzük a rendszert és nem bocsátunk áramot rajta keresztül, stb.) (1.1) szerint ekkor a lehetséges állapotváltozásokat

$$dE - TdS + pdV \leq 0 \tag{18.1.5}$$

jellemzi.

Laboratóriumi vizsgálatok során igen gyakran az a helyzet, hogy a rendszer állandó hőmérsékleten (szobahőmérsékleten) és állandó nyomáson (légköri nyo-

mások) van, tehát T = konst. és p = konst. Ilyen esetekben célszerű a

$$G = E - TS + pV \tag{18.1.6}$$

állapotfüggvénynek, az ún. *szabad entalpiának* bevezetése. Ennek infinitezimális változása

$$dG = dE - TdS - SdT + pdV + Vdp.$$

Ezt kombinálva (1.5)-tel, a lehetséges állapotváltozások kritériuma

$$dG + SdT - Vdp \leq 0.$$

Ha ezt alkalmazzuk az állandó hőmérsékletű ($dT = 0$) és állandó nyomású ($dp = 0$) folyamatokra, akkor a $dG \leq 0$ feltételt kapjuk. Az izotermikus és egyben izobár folyamatokat tehát az entalpia csökkenése jellemzi. A stabilis egyensúly feltétele pedig ilyen esetben az, hogy a szabad entalpia tovább ne csökkenhessen, tehát a $G(x_1, \ldots, x_n)$ függvénynek minimuma legyen. G minimumának megkeresése az elméleti termokémia egyik centrális feladata.

2. §. Homogén rendszerek

Tekintsünk egy homogén, tehát egyetlen fizikai fázisból álló termodinamikai rendszert, mely több kémiai komponensből épül fel. (Kémiai komponensen egy meghatározott kémiai anyagot értünk, mint pl. H_2O, HCl, O_2, stb. Ha a rendszerben pl. atomos hidrogén (H) és molekuláris hidrogén (H_2) egyaránt előfordul, úgy ezeket különböző komponenseknek tekintjük.) Legyenek a tekintetbe vett rendszer kémiai komponenseinek vegyjelei rendre $Y_1, Y_2, \ldots, Y_s$. Az egyes komponensek tömegeit $m_1, m_2, \ldots, m_s$-sel, molekulasúlyaikat pedig $M_1, M_2, \ldots, M_s$-sel jelöljük. A λ-ik komponens *mólszámán* az

$$n_\lambda = \frac{m_\lambda}{M_\lambda} \tag{18.2.1}$$

viszonyt értjük. Egy komponens anyagmennyiségét általában a mólszámával fogjuk jellemezni. Használni fogjuk még a rendszer összmólszámát,

$$n = \sum_{\lambda=1}^{s} n_\lambda, \tag{18.2.2}$$

ami a rendszer teljes anyagmennyiségére jellemző mennyiség, továbbá az egyes komponensek koncentrációit:

$$c_\lambda = \frac{n_\lambda}{V}. \tag{18.2.3}$$

A tekintetbe vett homogén rendszer független állapotjelzőinek a következő mennyiségeket választjuk: a rendszer V térfogata, T hőmérséklete és az egyes komponensek $n_1, n_2, \ldots, n_s$ mólszáma.

Jelölje

$$dV, dT, dn_1, dn_2, \ldots, dn_s \tag{18.2.4}$$

a rendszernek egy reverzibilis állapotváltozását. Az állapotváltozáshoz tartozó munkát a következő alakban írjuk fel

$$\delta A = -pdV + \mu_1 dn_1 + \mu_2 dn_2 + \ldots + \mu_s dn_s. \tag{18.2.5}$$

Ez abban különbözik az általános (16.5.4) képlettől, hogy nem szerepel benne a dT hőmérsékletváltozás. Ennek oka a független állapotjelzők célszerű megválasztásában rejlik, hiszen a rendszeren csak úgy tudunk munkát végezni, ha vagy a térfogatát változtatjuk meg, vagy az egyes kémiai komponensekből újabb anyagmennyiséget juttatunk a rendszerbe. Ha a rendszert úgy melegítjük fel dT-vel, hogy közben sem V, sem az anyagmennyiségekre jellemző $n_1, n_2, \ldots, n_s$ mólszámok nem változnak, úgy munkavégzés sem lesz, hanem a hőmérsékletnöveléskor közölt hő teljes egészében a rendszer energiáját növeli. (Nem maradna el a dT-vel arányos tag a munkakifejezésből, ha pl. a térfogat helyett a p nyomást választanánk független állapotjelzőnek. Állandó nyomáson és állandó mólszámok mellett való hőmérsékletnövelésnél a rendszer kitágulhat, és közben a külső nyomás munkát végez.)

(2.5)-ben a $dn_1, dn_2, \ldots, dn_s$ mólszámváltozások együtthatóit rendre $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$-sel jelöltük. Ezeket a mennyiségeket az egyes kémiai komponensek *kémiai potenciáljainak* nevezzük. A kémiai potenciál definíciójául természetesen maga a (2.5) képlet szolgál. Ebből leolvasható, hogy μ_λ *az a munka, amit 1 mólnyi* Y_λ *anyagnak a rendszerbe való reverzibilis juttatásakor végeznünk kell,* feltéve, hogy közben sem a térfogat, sem a többi komponens mennyisége nem változik.

A (2.5) munkakifejezésben fellépő p nyomás és $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ kémiai potenciálok természetesen mind a független állapotjelzők függvényei lesznek

$$\begin{aligned} p &= p(V, T, n_1, n_2, \ldots, n_s), \\ \mu_1 &= \mu_1(V, T, n_1, n_2, \ldots, n_s), \\ \mu_2 &= \mu_2(V, T, n_1, n_2, \ldots, n_s), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu_s &= \mu_s(V, T, n_1, n_2, \ldots, n_s). \end{aligned} \tag{18.2.6}$$

Ugyancsak állapotfüggvény, tehát a független állapotjelzők függvénye a rendszer energiája és entrópiája

$$\begin{aligned} E &= E(V, T, n_1, n_2, \ldots, n_s), \\ S &= S(V, T, n_1, n_2, \ldots, n_s). \end{aligned} \tag{18.2.7}$$

A tizenhetedik §-ban bevezetett definíció szerint (2.6) lesz a homogén rendszerünk termikus, (2.7) pedig a kalorikus állapotegyenlete. Ezen állapotegyenletek között fenn kell állniuk az integrálhatósági feltételeknek. Mivel a hőmérsékletet az egyik

független állapotjelzőnek választottuk, ezért a (17.1.8) formulákat alkalmazhatjuk. (17.1.8a) felírásánál két esetet kell megkülönböztetnünk: vagy az i, j indexek mindegyike egy-egy kémiai komponensre utal, vagy pedig az egyik index a térfogatváltozásnak felel meg, a másik pedig valamelyik kémiai komponensnek. Ily módon a következő egyenleteket kapjuk:

$$\frac{\partial \mu_\lambda}{\partial n_\nu} - \frac{\partial \mu_\nu}{\partial n_\lambda} = 0, \qquad (\lambda, \nu = 1, 2, \ldots, s) \tag{18.2.8}$$

$$\frac{\partial n_\lambda}{\partial V} + \frac{\partial p}{\partial n_\lambda} = 0. \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, s) \tag{18.2.9}$$

A (17.1.8b) egyenlet felírásánál figyelembe kell vennünk, hogy esetünkben $A_T = 0$ és az egyenletben szereplő i index egyaránt vonatkozhat a térfogatra vagy valamelyik kémiai komponens mennyiségére.

$$\frac{\mu_\lambda}{T} - \frac{\partial \mu_\lambda}{\partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial n_\lambda}, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, s) \tag{18.2.10}$$

$$\frac{p}{T} - \frac{\partial p}{\partial T} = -\frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial V}. \tag{18.2.11}$$

Az integrálhatósági feltételek megbeszélése után az entrópiát meghatározó egyenleteket írjuk fel. (17.1.9a) esetünkben a következőképpen alakul

$$\frac{\partial S}{\partial n_\lambda} = -\frac{\partial \mu_\lambda}{\partial T}, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, s) \tag{18.2.12}$$

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\partial p}{\partial T}. \tag{18.2.13}$$

Végül (17.1.9b)-ből

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial T}. \tag{18.2.14}$$

Az így kapott összefüggéseket egy parciális differenciálegyenletrendszernek tekinthetjük, melyben a (2.6–7) függvények lesznek az ismeretlenek. A (2.8–14) egyenletrendszer megoldását egy viszonylag egyszerű matematikai feladatra lehet visszavezetni.

Vezessük be ugyanis a következő jelöléseket: $x_1 = V$, $x_2 = T$, $x_3 = n_1, \ldots,$ $x_{s+2} = n_s$ és $f_1 = -p$, $f_2 = -S$, $f_3 = \mu_1, \ldots, f_{s+2} = \mu_s$. Ezekkel a jelölésekkel a (2.8–9) és a (2.12–13) egyenletek a következő szimmetrikus alakot öltik:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = 0, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, s+2) \tag{18.2.15}$$

Ha az $f_1, f_2, \ldots, f_{s+2}$ mennyiségeket egy $s+2$ dimenziós vektor komponenseinek tekintjük, úgy (2.15) ezen vektor $s+2$ dimenziós rotációjának zérus voltát fejezi

ki. Ekkor viszont – éppúgy mint a közönséges háromdimenziós térben – a vektorkomponensek egy „potenciálfüggvény" deriválásával képezhetők.

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{s+2}) = \frac{\partial F(x_1, x_2, \ldots, x_{s+2})}{\partial x_i} \quad . \qquad (i = 1, 2, \ldots, s+2) \quad (18.2.16)$$

Az így képezett f_i függvények *tetszőleges* $F(x_1, x_2, \ldots, x_{s+2})$ esetén kielégítik (2.15)-öt. (2.16) lesz a (2.15) parciális differenciálegyenletrendszer általános megoldása.

Visszatérve eredeti jelöléseinkhez, a nyomást, az entrópiát és a kémiai potenciálokat a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} p &= -\frac{\partial F}{\partial V}, \\ S &= -\frac{\partial F}{\partial T}, \\ \mu_\lambda &= \frac{\partial F}{\partial n_\lambda}, \end{aligned} \qquad (18.2.17)$$

ahol $F = F(V, T, n_1, n_2, \ldots, n_s)$ egy tetszőleges függvény lehet. Hátra van még az E energia meghatározása. E célból írjuk be (2.17)-et a (2.11, 14, 10) egyenletekbe. Kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial V} &= \frac{\partial F}{\partial V} - T\frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} = \frac{\partial}{\partial V}\left(F - T\frac{\partial F}{\partial T}\right), \\ \frac{\partial E}{\partial T} &= -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = \frac{\partial}{\partial T}\left(F - T\frac{\partial F}{\partial T}\right), \\ \frac{\partial E}{\partial n_\lambda} &= \frac{\partial F}{\partial n_\lambda} - T\frac{\partial^2 F}{\partial n_\lambda \partial T} = \frac{\partial}{\partial n_\lambda}\left(F - T\frac{\partial F}{\partial T}\right). \end{aligned}$$

Ebből azonnal látszik, hogy E legfeljebb egy konstansban térhet el az $F - T\dfrac{\partial F}{\partial T}$ mennyiségtől. De mivel F-hez tetszőleges konstanst hozzávéve az F-et értelmező (2.17) egyenletek nem változnak meg, ezért írhatjuk, hogy

$$E = F - T\frac{\partial F}{\partial T}. \qquad (18.2.18)$$

A (2.8–14) parciális differenciálegyenletrendszert ezzel maradéktalanul megoldottuk. A (2.6–7) állapotfüggvényeket sikerült *egyetlen* állapotfüggvényből, az

$$F(V, T, n_1, n_2, \ldots, n_s)$$

kifejezésből leszármaztatni. F alakját az integrálhatósági feltételek már nem szabják meg, hanem a rendszerre vonatkozó mérések útján, a tapasztalatból kell meghatároznunk. Ehhez elsősorban tisztáznunk kell az F függvény fizikai jelentését.

Ha az entrópia (2.17) kifejezését (2.18)-ba tesszük, úgy az $E = F + TS$ összefüggést kapjuk, tehát

$$F = E - TS.$$

Ez megegyezik (1.2)-vel, tehát F éppen a rendszer szabad energiája. A szabad energia tapasztalati meghatározásának alapjául (1.4) szolgál, ami reverzibilis állapotváltozásoknál a

$$dF = \delta A$$

egyenlőséget mondja ki. Izoterm reverzibilis állapotváltozásnál a végzett munka a rendszer szabad energiáját növeli, δA mérésével a szabad energia meghatározható.

Az alábbiakban még külön foglalkozunk a homogén rendszerek egy fontos speciális esetével, nevezetesen az *igen nagy kiterjedésű* rendszerekkel. Akkor tekintünk egy rendszert igen nagynak, ha a határfelületén fellépő jelenségek a rendszer belsejében elhanyagolhatóan kis változásokat okoznak.

Gondoljunk el két, pontosan egyforma homogén rendszert. Mindegyiknek V a térfogata, T a hőmérséklete és az egyes kémiai komponensekből is egyforma $n_1, n_2, \ldots, n_s$ mennyiségeket tartalmaznak. A két rendszert egymással érintkezésbe hozva, képezzünk belőlük egyetlen homogén rendszert. Az így kialakuló eredő rendszer térfogata $2V$ lesz, hőmérséklete megegyezik részeinek közös T hőmérsékletével, az egyes kémiai anyagokból pedig $2n_1, 2n_2, \ldots, 2n_s$ mennyiségeket fog tartalmazni. A két rész egyesítésénél legfeljebb az érintkezési felületen léphetnek fel bizonyos fizikai változások, ezek azonban, nagy kiterjedésű rendszerekről lévén szó, elhanyagolhatók. Éppen ezért a két rendszer összekapcsolása reverzibilis folyamat lesz, mely sem munkavégzést, sem hőt nem igényel, következésképpen a szabad energia sem fog megváltozni. Az összekapcsolás előtt mindkét résznek $F(V, T, n_1, n_2, \ldots, n_s)$ volt a szabad energiája, az eredő rendszeré tehát ennek duplája lesz. Írhatjuk tehát, hogy

$$F(2V, T, 2n_1, 2n_2, \ldots, 2n_s) = 2F(V, T, n_1, n_2, \ldots, n_s).$$

Természetesen ez a gondolatmenet nemcsak a rendszer megkétszerezésére, hanem tetszőleges τ-szorosára való növelésére is alkalmazható.

$$F(\tau V, T, \tau n_1, \tau n_2, \ldots, \tau n_s) = \tau F(V, T, n_1, n_2, \ldots, n_s). \qquad (18.2.19)$$

Differenciáljuk ezt az egyenletet τ szerint, majd írjunk $\tau = 1$-et

$$V \frac{\partial F}{\partial V} + \sum_{\lambda=1}^{s} n_\lambda \frac{\partial F}{\partial n_\lambda} = F. \qquad (18.2.20)$$

Az $F(V, T, n_1, n_2, \ldots, n_s)$ függvény eleget kell, hogy tegyen ezen parciális differenciálegyenletnek. A parciális differenciálegyenletek elmélete a fenti egyenletet mint az elsőfokú homogén függvények differenciálegyenletét tartja számon,

melynek általános megoldása

$$F(V, T, n_1, n_2, \ldots, n_s) = V\mathrm{F}^*\left(T, \frac{n_1}{V}, \frac{n_2}{V}, \ldots, \frac{n_s}{V}\right), \qquad (18.2.21)$$

ahol a jobboldalon szereplő

$$\mathrm{F}^*(T, c_1, c_2, \ldots, c_s)$$

függvény változóinak még tetszőleges kifejezése lehet. Ez az F* függvény azonban már csak $s + 1$ változót tartalmaz, eggyel kevesebbet, mint az eredeti F. Éppen ezért kísérleti meghatározása is kevesebb munkát igényel.

Hogy (2.21) valóban kielégíti (2.20)-at, arról egyszerű behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk. Végeredményben arra a fontos megállapításra jutunk, hogy egy igen nagy kiterjedésű homogén rendszer szabad energiája arányos a V térfogattal. Az F* arányossági tényező, amit a szabad energia sűrűségének nevezünk, csak a T hőmérséklettől és az egyes kémiai komponensek c_λ koncentrációitól függ.

Az F* szabadenergia sűrűség helyett sokszor az

$$\mathrm{F} = \frac{F}{n}$$

mennyiséget, az 1 mól anyagra jutó szabad energiát használjuk. Az F* szabadenergia sűrűség és az F moláris szabad energia összefüggése

$$\mathrm{F} = \frac{V\mathrm{F}^*}{n} = \frac{\mathrm{F}^*(T, c_1, c_2, \ldots, c_s)}{c_1 + c_2 + \ldots + c_s}. \qquad (18.2.22)$$

A moláris szabad energia tehát szintén csak a T hőmérséklettől és a c_λ koncentrációktól függ. Az F teljes szabad energia pedig így írható fel

$$F(V, T, n_1, n_2, \ldots, n_s) = n\mathrm{F}\left(T, \frac{n_1}{V}, \frac{n_2}{V}, \ldots, \frac{n_s}{V}\right), \qquad (18.2.23)$$

ahol természetesen $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_s$.

Számítsuk most ki a p, μ_λ, S és E állapotfüggvényeket, tehát a rendszer termodinamikai viselkedését leíró legfontosabb mennyiségeket. A nyomást (2.17) alapján, (2.23) felhasználásával képezzük:

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = n \sum_{\lambda=1}^{s} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial c_\lambda} \frac{n_\lambda}{V^2} = c \sum_{\lambda=1}^{s} c_\lambda \frac{\partial \mathrm{F}(T, c_1, c_2, \ldots, c_s)}{\partial c_\lambda}, \qquad (18.2.24)$$

ahol

$$c = \frac{n}{V} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_s}{V} = c_1 + c_2 + \ldots + c_s \qquad (18.2.25)$$

az összkoncentráció. Az eredmény mutatja, hogy p csak a hőmérséklettől és a

koncentrációktól, tehát az n_λ/V viszonyoktól függ, de nem függ külön a V térfogattól.

Hasonlóan számítjuk a kémiai potenciálokat is. (2.23)-at a μ_λ kémiai potenciál (2.17) képletébe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\mu_\lambda = \frac{\partial F}{\partial n_\lambda} = \mathrm{F} + \frac{n}{V}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial c_\lambda} = \mathrm{F}(T, c_1, \ldots, c_s) + c\,\frac{\partial \mathrm{F}(T, c_1, \ldots, c_s)}{\partial c_\lambda}. \qquad (18.2.26)$$

Mint látjuk, a kémiai potenciál is csak a hőmérséklet és a koncentrációk függvénye.

Az entrópiára (2.23) felhasználásával a következő eredményt kapjuk

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = -n\,\frac{\partial \mathrm{F}(T, c_1, \ldots, c_s)}{\partial T} = n\mathrm{S}(T, c_1, \ldots, c_s). \qquad (18.2.27)$$

Az entrópia tehát arányos az n mólszámmal. Az $\mathrm{S} = -\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial T}$ arányossági tényező, amit moláris entrópiának nevezünk, a hőmérséklet és a koncentrációk függvénye. Lényegében ugyanilyen eredményt kapunk a rendszer energiájára is

$$E = F - T\frac{\partial F}{\partial T} = n\left(\mathrm{F} - T\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial T}\right) = n\mathrm{E}(T, c_1, \ldots, c_s). \qquad (18.2.28)$$

Itt $\mathrm{E} = \mathrm{F} - T\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial T}$ a moláris energia, ami a hőmérséklet és a koncentrációk függvénye.

Végül még egy fontos összefüggést írunk fel a nagy kiterjedésű homogén rendszerekre. Szorozzuk meg (2.26)-ot c_λ-val és összegezzünk λ szerint

$$\sum_{\lambda=1}^{s} c_\lambda \mu_\lambda = c\mathrm{F} + c\sum_{\lambda=1}^{s} c_\lambda \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial c_\lambda}.$$

A második tag (2.24) szerint éppen a p nyomással egyenlő, tehát

$$c\mathrm{F} = -p + \sum_{\lambda=1}^{s} c_\lambda \mu_\lambda. \qquad (18.2.29)$$

Ez az ún. *Duhem–Gibbs*-egyenlet. Ennek másik, ismertebb alakját V-vel való szorzással kapjuk. Mivel $Vc_\lambda = n_\lambda$ és $Vc\mathrm{F} = n\mathrm{F} = F$, ezért a *Duhem–Gibbs*-egyenlet a következő lesz

$$F = -pV + \sum_{\lambda=1}^{s} n_\lambda \mu_\lambda. \qquad (18.2.30)$$

Ugyanezt az eredményt megkaphatjuk (2.20)-ból is, ha F parciális deriváltjait (2.17)-ből vesszük.

3. §. Az ideális gáz termodinamikája

Az előző § eredményeinek illusztrálására tekintsünk egy gáz halmazállapotú homogén rendszert, sőt – egyszerűség kedvéért – tételezzük fel, hogy a gáz ideális gázként viselkedik.

Először azt az egyszerű esetet tárgyaljuk, amikor a gáz egyetlen kémiai komponensből áll. Ekkor a független állapotjelzők V, T és n lesznek. (Tárgyalásunkban előfordul még a gáz koncentrációja: $c = n/V$ és tömege: $m = nM$, ahol M a molekulasúly.)

Láttuk, hogy a nagy kiterjedésű, homogén rendszerek termodinamikájának centrális feladata az F moláris szabad energia megállapítása. Ebből ugyanis az összes többi termodinamikai jellemző már egyszerűen leszármaztatható. F-et viszont teljes mértékben a rendszerre vonatkozó tapasztalati adatokból kell meghatároznunk, ugyanis F alakjára a termodinamika alaptörvényei semmi megszorítást nem adnak.

Ideális gázok esetében az egyik legfontosabb tapasztalati törvény, a jól ismert ideális gáztörvény,*

$$pV = \frac{m}{M} RT.$$

V-vel osztva és a jobboldalon a $c = \frac{m}{MV}$ koncentrációt vezetve be:

$$p(T, c) = RcT. \tag{18.3.1}$$

A nyomás és a moláris szabad energia összefüggését (2.24) adja meg, ami egyetlen kémiai komponens esetén a következő lesz

$$p(T, c) = c^2 \frac{\partial \mathrm{F}(T, c)}{\partial c}, \tag{18.3.2}$$

A nyomásra az ideális gáztörvényből kapott (3.1) kifejezést behelyettesítve, a moláris szabad energiára egy parciális differenciálegyenletet kapunk:

$$\frac{\partial \mathrm{F}(T, c)}{\partial c} = R \frac{T}{c}. \tag{18.3.3}$$

F meghatározásánál ebből az egyenletből kell kiindulnunk. Az egyenlet minden további nélkül integrálható, az eredmény

$$\mathrm{F}(T, c) = RT \ln c + f(T), \tag{18.3.4}$$

ahol $f(T)$ tetszőleges függvénye T-nek.

* Természetesen nem feledkezhetünk meg arról, hogy ideális gáz a természetben nem fordul elő, a fenti gáztörvényt a valóságos gázok viselkedésének „idealizálásával", tehát a lehető legegyszerűbb matematikai képlettel való leírásával kapjuk.

Miután meghatároztuk a moláris szabad energiát, könnyűszerrel képezhetjük a p nyomás, a μ kémiai potenciál, az S entrópia és az E energia kifejezéseit. A (2.24, 26, 27, 28) képletek rendre a következő eredményeket szolgáltatják:

$$
\begin{aligned}
p &= c^2 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial c} = RcT\,, \\
\mu &= \mathrm{F} + c \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial c} = RT(1 + \ln c) + f(T)\,, \\
S &= -n \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial T} = n[-R \ln c - f'(T)]\,, \\
E &= n\left(\mathrm{F} - T \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial T}\right) = n[f(T) - Tf'(T)]\,.
\end{aligned}
\tag{18.3.5}
$$

A nyomásra kapott kifejezés megegyezik (3.1)-gyel, ami természetes is, hiszen F képletének levezetésénél éppen (3.1)-ből indultunk ki. Az E energiára kapott formulából látjuk, hogy adott anyagmennyiség, tehát adott n esetén a gáz energiája csak a T hőmérséklettől függ, de nem függ a c koncentrációtól. Ez az eredmény megegyezik az ideális gázok kalorikus állapotegyenletére vonatkozó korábbi megállapításainkkal.

A moláris szabad energiára vonatkozó (3.4) eredményünk még tartalmaz egy ismeretlen $f(T)$ függvényt. Ezt is természetesen csak a tapasztalat mondhatja meg nekünk, hiszen F teljes kifejezését mindig kísérleti módon kell megállapítani. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy $f(T)$ kapcsolatba hozható a gáz hőkapacitásával, ill. mólhőjével. A mólhő mért értékeinek felhasználásával $f(T)$ kiszámítható lesz.

Mindenekelőtt képezzük a gáz hőkapacitásának kifejezését. Az általános definíció szerint a C hőkapacitás

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{T dS}{dT}\,.$$

A továbbiakban mindig meghatározott mennyiségű gázról fogunk beszélni, tehát az n mólszám minden folyamatnál változatlanul maradó konstans. Ilyen körülmények között az entrópiaváltozás

$$dS = \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial c} dc = -n\left[f''(T)dT + \frac{R}{c} dc\right]$$

és a hőkapacitás

$$C = -n\left[Tf''(T) + \frac{RT}{c} \frac{dc}{dT}\right]. \tag{18.3.6}$$

Nézzünk két fontos speciális esetet. Először az állandó térfogaton történő hőközléshez tartozó hőkapacitást számítjuk ki. Mivel az n mólszám konstans, ezért az

állandó térfogat egyben állandó c koncentrációt is jelent. Ekkor $\frac{dc}{dT} = 0$ és a hőkapacitás $-nTf''(T)$ lesz. A másik speciális eset az állandó nyomáson történő hőközlés. Ekkor (3.1) miatt $\frac{dc}{dT} = -\frac{c}{T}$ lesz és a hőkapacitás $-n[Tf''(T) - R]$. Az $n = 1$-hez, tehát az 1 mól anyaghoz tartozó hőkapacitásokat mólhőknek nevezzük. Az állandó térfogathoz és az állandó nyomáshoz tartozó mólhők tehát

$$C_V = -Tf''(T), \qquad C_p = -Tf''(T) + R = C_V + R. \tag{18.3.7}$$

Az állandó nyomáshoz tartozó mólhő tehát az univerzális gázállandóval nagyobb, mint az állandó térfogathoz tartozó.

A mólhők (3.7) kifejezéseiben szerepel az $f(T)$ függvény, tehát a mólhők kísérletileg megállapított értékéből $f(T)$ kiszámítható. Legyen $C_V(T)$ az állandó térfogathoz tartozó tapasztalati mólhő. (3.7) integrálásával kapjuk, hogy

$$f(T) = \int_0^T C_V(T)dT - T\int_0^T \frac{C_V(T)}{T}\,dT + \alpha T + \beta, \tag{18.3.8}$$

ahol α és β két integrációs állandó. Behelyettesítve ezt (3.5)-be, kapjuk, hogy

$$\mu = RT(1 + \ln c) + \int_0^T C_V(T)dT - T\int_0^T \frac{C_V(T)}{T}\,dT + \alpha T + \beta\,,$$

$$S = n\left[-R\ln c + \int_0^T \frac{C_V(T)}{T}\,dT - \alpha\right], \tag{18.3.9}$$

$$E = n\left[\int_0^T C_V(T)dT + \beta\right].$$

Hátra van még az α és β konstansok meghatározása. A fenti formulák mutatják, hogy α az entrópia-, β pedig az energiaskála nullpontjával van kapcsolatban, azaz e konstansok a $T = 0$ hőmérséklethez tartozó entrópia, ill. energiaértékkel fejezhetők ki. De ezzel egy súlyos nehézség lép fel: hiszen a 17.-ik fejezet 2.§-ban megbeszéltük, hogy az ideális gáztörvények nem extrapolálhatók a $T \to 0$ határesetre, mert e törvények ellentmondásban vannak a harmadik főtétellel és ezért $T \to 0$ esetén értelmüket vesztik. Azt is tudjuk, hogy a tapasztalat valóban igazolja ezt a megállapítást: nincs a természetben olyan anyag, amely $T \to 0$ esetén ideális gázként viselkedne.

Szerencsére azonban a termodinamikai folyamatok elemzésénél minket mindig az energia és entrópia megváltozása érdekel. Az energia- és entrópiaváltozás pedig,

feltéve, hogy a gáz n anyagmennyisége nem változik, nem tartalmazza az α és β konstansokat, ezek a különbség képzésekor kiesnek.

Az α és β konstansok csak olyan termodinamikai folyamatok leírásánál jutnak szerephez, amikor a gáz n anyagmennyisége megváltozik. Ennek legfontosabb esetei a következő §-ban tárgyalásra kerülő kémiai folyamatok. Ezek tárgyalásánál valóban szükség van α és β értékére. Megállapításuk kívül esik a fenomenologikus termodinamika keretein, az csak az anyag korpuszkuláris elméletének és a statisztikus mechanika törvényeinek felhasználásával lehetséges. Viszonylag egyszerű a helyzet a β energiakonstanssal. Ennek megállapításánál abból indulunk ki, hogy egy nyugalomban levő atom energiája zérussal egyenlő. Egy atomokból felépülő és nyugalomban levő molekula energiája $-\varepsilon$, ahol ε a molekulának atomokra való bontásához szükséges munka, amit disszociációs energiának szoktunk nevezni. $T = 0$ hőmérsékletű ideális gáz energiája pedig $-\varepsilon$-nak annyiszorosa, ahány molekula van a gázban. $n = 1$ mól gázban $L = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ molekula van (*Loschmidt*-szám), tehát a zérus hőmérsékletű gáz energiája $-nL\varepsilon$ lesz. Összevetve (3.9) energiakifejezésével, látjuk, hogy

$$\beta = -L\varepsilon. \tag{18.3.10}$$

Az entrópiára kapott (3.9) eredményünk természetesen meg kell, hogy egyezzen (17.2.9)-cel. Valóban, ha (3.9)-ben az

$$n = \frac{m}{M}, \qquad c = \frac{m}{MV} \qquad \text{és} \qquad C_V = Mc_V$$

helyettesítéseket elvégezzük, úgy az

$$S = m\left[\frac{R}{M}\ln\left(\frac{V}{m}\right) + \int_0^T \frac{c_V(T)}{T}\,dT - \frac{\alpha - \ln M}{M}\right]$$

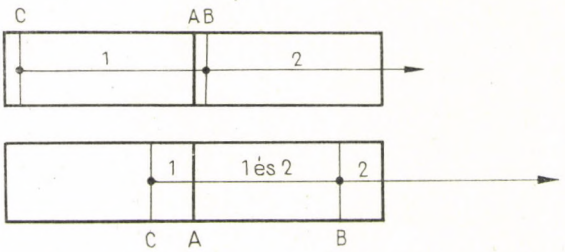
entrópiakifejezést kapjuk. Ez teljes egyezésben van (17.2.9)-cel, az α és σ integrációs állandók kapcsolatát a

$$\sigma = -\frac{\alpha - \ln M}{M} \tag{18.3.11}$$

egyenlet fejez ki. α, ill. σ meghatározására a következő §-ban még visszatérünk.

Az egyetlen kémiai komponenst tartalmazó ideális gáz elméletének megbeszélése után most térjünk át a gázkeverékek tárgyalására. A V térfogatú és T hőmérsékletű gáz tartalmazzon az egyes kémiai komponensekből rendre $n_1, n_2, \ldots, n_s$ mólnyi mennyiségeket; a $V, T, n_1, n_2, \ldots, n_s$ változók lesznek a rendszer független állapotjelzői. A termodinamikai tárgyalásmód első és legfontosabb lépése az F moláris szabad energia megállapítása. Mint tudjuk, ezt a tapasztalatból kell vennünk. A gázkeverék szabad energiájának meghatározása céljából készítsünk egy berendezést, amely a gázkeveréket az egyes kémiai komponensekből *reverzibilis* módon hozza létre. A berendezés sematikus rajza a 242. ábrán látható. (Az egy-

szerűség kedvéért csak két komponenst tételezünk fel, de az eredmények akárhány komponensre általánosíthatók.) A berendezés hengeres edényből áll, melyet egy *A* lemez pontosan két egyforma részre oszt, mindkét rész térfogata egyaránt *V*. Az *A* lemez félig áteresztő hártya, mely átengedi az 1 jelű gázkomponenst, de nem engedi át a 2 jelűt. A hengerben egy kettős dugattyúrendszer mozoghat, amelyet az ábrán a vékony vonalak mutatnak. A *B* dugattyúlemez szintén féligáteresztő



242. ábra. A gázkeveréket reverzibilis módon létrehozó készülék

hártya, amely azonban a 2 jelű gázt engedi át és áthatolhatatlan az 1 jelű számára. A *C* dugattyúlemez, valamint a henger falai semmilyen anyagot, sem hőt nem engednek át. Nyilvánvaló, hogy a dugattyúrendszer balról jobbra való mozgatásával a két gázkomponens összekeverhető, visszafelé tolásával pedig szétválasztható. Ha a dugattyúrendszert nagyon lassan mozgatjuk, akkor a folyamat alatt *B* két oldalán a 2 jelű, *A* két oldalán az 1 jelű gáz minden pillanatban egyensúlyban van. A tapasztalat szerint az egyensúly feltétele az, hogy az *A* lemez két oldalán az 1 jelű, a *B* lemez két oldalán a 2 jelű gáz parciális nyomása megegyezzék. Ellenkező esetben a féligáteresztő hártyákon azonnal anyagáramlás indulna meg, amely addig tart, míg a parciális nyomások ki nem egyenlítődnek. Mivel *B* két oldalán a 2 jelű gáz parciális nyomása ugyanaz, ezért a *B* dugattyúlemez által végzett munkát a 2 jelű gáz nem befolyásolja, *B* munkája $-p_1V$ lesz, ahol p_1 az 1 jelű gáz parciális nyomása. Ugyanakkor a *C* dugattyúlemez munkája p_1V, következésképp az eredő munkavégzés zérus. Ha az összekeverés előtt a gázok egyforma *T* hőmérsékletűek voltak, úgy a tapasztalat szerint a keverék hőmérséklete is *T* marad. A gázok fenti módon leírt összekeverése tehát izoterm, reverzibilis folyamat. Tudjuk azonban, hogy izoterm, reverzibilis folyamatok esetén a végzett munka a szabad energia megnövekedésével lesz egyenlő. Mivel esetünkben a munkavégzés zérus, ezért kimondhatjuk, hogy a gázok összekeverésénél a szabad energia változatlan marad. *A gázkeverék szabad energiája egyenlő az egyes gázkomponensek szabad energiáinak összegével*, hiszen az összekeverés előtti állapotban a szabad energiák egyszerűen összeadódnak, a keveredés pedig már nem változtat az eredő értékén.

Az egyes gázkomponensek szabad energiáit (3.4), (3.8) és (3.10) alapján könnyen felírhatjuk. A λ-ik komponens teljes szabad energiája

$$F_\lambda = n_\lambda \left[RT \ln c_\lambda + \int_0^T C_{V\lambda} dT - T \int_0^T \frac{C_{V\lambda}}{T} dT + \alpha_\lambda T - L\varepsilon_\lambda \right], \quad (18.3.12)$$

a gázkeverék szabad energiája pedig $F = \sum_{\lambda} F_\lambda$ lesz. Minket elsősorban a moláris szabad energia érdekel, ennek kifejezése

$$\mathrm{F} = \frac{F}{n} = \frac{\sum_{\lambda=1}^{s} F_\lambda}{\sum_{\lambda=1}^{s} n_\lambda}.$$

Ha F_λ (3.12) kifejezését behelyettesítjük, és az eredményt a koncentrációkkal fejezzük ki, úgy a következő végeredményt kapjuk

$$\mathrm{F} = \sum_{\lambda=1}^{s} \frac{c_\lambda}{c}\left[RT \ln c_\lambda + \int_0^T C_{V\lambda}(T)dT - T\int_0^T \frac{C_{V\lambda}(T)}{T} dT + \alpha_\lambda T - L\varepsilon_\lambda\right]. \qquad (18.3.13)$$

A moláris szabad energia tehát nem más, mint az egyes kémiai komponensek moláris szabad energiáinak a c_λ koncentrációkkal súlyozott számtani közepe.

A moláris szabad energia megállapítása után képezhetjük a legfontosabb termodinamikai függvényeket. Először (2.26)-ból a μ_λ kémiai potenciált számítjuk ki.

$$\mu_\lambda = RT(1 + \ln c_\lambda) + \int_0^T C_{V\lambda}(T)\, dT - T\int_0^T \frac{C_{V\lambda}(T)}{T} dT + \alpha_\lambda T - L\varepsilon_\lambda . \qquad (18.3.14)$$

Tehát a λ-adik komponens kémiai potenciálja független a többi komponens jelenlététől, értéke a (3.9) formulának felel meg, amit egyetlen komponens esetére vezettünk le.

Most számítsuk ki az $\mathrm{s} = -\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial T}$ moláris entrópiát. (3.13)-at a hőmérséklet szerint differenciálva kapjuk, hogy

$$S = \sum_{\lambda=1}^{s} \frac{c_\lambda}{c}\left[-R \ln c_\lambda + \int_0^T \frac{C_{V\lambda}(T)}{T} dT + \alpha_\lambda T - L\varepsilon_\lambda\right]. \qquad (18.3.15)$$

A moláris entrópia tehát az egyes kémiai komponenseknek megfelelő moláris entrópiáknak a c_λ koncentrációkkal súlyozott számtani közepe. Hasonló eredményt kapunk az $\mathrm{E} = \mathrm{F} - T\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial T} = \mathrm{F} + T\mathrm{s}$ moláris energia értékére is:

$$\mathrm{E} = \sum_{\lambda} \frac{c_\lambda}{c}\left[\int_0^T C_{V\lambda}(T)dT - L\varepsilon_\lambda\right]. \qquad (18.3.16)$$

Végül a gázkeverék nyomását határozzuk meg. Leggyorsabban úgy érünk célhoz, ha a (2.29) *Duhem–Gibbs*-egyenletet használjuk fel. Ebbe beírva a (3.13–14)

képleteket, kapjuk, hogy

$$p = RcT, \tag{18.3.17}$$

ami teljesen megegyezik (3.1)-gyel, az egy komponensből álló gáz állapotegyenletével. Esetünkben természetesen $c = \sum_{\lambda} c_\lambda$, tehát az összkoncentrációt jelenti. A nyomást így is felírhatjuk:

$$p = \sum_{\lambda=1}^{s} p_\lambda, \tag{18.3.18}$$

ahol

$$p_\lambda = Rc_\lambda T,$$

a λ-ik komponens parciális nyomása. (3.18) az ún. *Dalton*-törvény, melyet DALTON kísérletileg ismert fel. A Tizenhatodik Fejezet 3. §-ban a gázkeverék állapotegyenletének levezetésénél a *Dalton*-törvényt, mint tapasztalati törvényt vezettük be. Most látjuk, hogy ez a törvény következménye a gázkeverék (3.13) szabad energiájára vonatkozó megállapításainknak. Természetesen a gázkeverék (3.17) állapotegyenlete is egyezésben van a *Dalton*-törvény alapján kapott (16.3.10) állapotegyenlettel.

A reverzibilis és irreverzibilis folyamatokra tett megállapításaink jól illusztrálhatók a gázkeverékek térfogatváltozásának tanulmányozásával. Tekintsünk egy V térfogatú és T hőmérsékletű gázkeveréket, mely két kémiai komponensből áll. A mólszámok legyenek n_1 és n_2. A vizsgált folyamat abból áll, hogy a gáz térfogatát V-ről $2V$-re növeljük, mégpedig konstans T, n_1 és n_2 mellett, azaz izotermikusan és a gázkomponensek mennyiségének megváltoztatása nélkül.

Mindenekelőtt állapítsuk meg az energia- és entrópiaváltozást! A gázkeverékre vonatkozó (3.15–16) képletekből, a koncentrációk helyett a mólszámokat vezetve be, kapjuk

$$E = n_1\left[\int_0^T C_{V1}(T)dT - L\varepsilon_1\right] + n_2\left[\int_0^T C_{V2}(T)dT - L\varepsilon_2\right],$$

$$S = n_1\left[R \ln \frac{V}{n_1} + \int_0^T \frac{C_{V1}(T)}{T}\, dT - \alpha_1\right] + n_2\left[R \ln \frac{V}{n_2} + \int_0^T \frac{C_{V2}(T)}{T}\, dT - \alpha_2\right]. \tag{18.3.19}$$

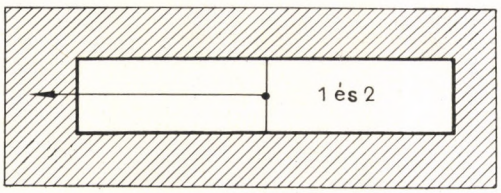
A térfogatváltozás utáni értékeket úgy kapjuk meg, hogyha a fenti formulákban V helyébe $2V$-t írunk. Az energia egyáltalán nem függ V-től (*Gay–Lussac*-effektus), az entrópia pedig csak a logaritmikus tagban tartalmazza V-t. Az energia-, ill. entrópiaváltozás tehát a következő lesz

$$\Delta E = 0.$$

$$\Delta S = n_1\left[R \ln \frac{2V}{n_1} - R \ln \frac{V}{n_1}\right] + n_2\left[R \ln \frac{2V}{n_2} - R \ln \frac{V}{n_2}\right] = (n_1 + n_2)R \ln 2\,. \tag{18.3.20}$$

Az energia és entrópia állapotfüggvények. Megváltozásaik függetlenek az állapotváltozás folyamatától, csak a kezdeti és végállapottól függenek. Az alábbiakban gázkeverék izoterm térfogatváltozásának két különböző folyamatát fogjuk megvizsgálni.

Az első folyamat végrehajtására szolgáló készülék a 243. ábrán látható. A $2V$ térfogatú hengeres edényben egy dugattyú mozoghat. Kezdeti állapotában a dugattyú éppen a henger közepén helyezkedik el, tehát a gázkeverék rendelkezésére



243. ábra. A gázkeverék izoterm és reverzibilis térfogatváltozása

álló térfogat V. A henger falai diatermikusak és a berendezés a T hőmérsékletű hőfürdőben van, ami biztosítja, hogy a gáz hőmérséklete állandóan T legyen. Ha a dugattyúkat lassan kihúzzuk egészen a henger fedőlapjáig, úgy a gáz el fogja foglalni a teljes $2V$ térfogatot. Ez a térfogatnövelési folyamat természetesen megfordítható, a dugattyú visszatolásával a térfogat ismét V-re csökkenthető. Számítsuk ki, hogy mennyi lesz a dugattyú kihúzásakor végzett munka. A $\delta A = -pdV$ elemi munkák integrálját kell képeznünk, a p nyomást a gázkeverék (3.17) állapotegyenlete szolgáltatja. A $c = \frac{n_1 + n_2}{V}$ koncentrációt behelyettesítve kapjuk, hogy

$$A = -\int_V^{2V} pdV = -\int_V^{2V} \frac{(n_1 + n_2)RT}{V}\, dV = -(n_1 + n_2)\, RT(\ln 2V - \ln V)$$

$$= -(n_1 + n_2)RT \ln 2\,.$$

Az első főtétel szerint az energiaváltozás egyenlő a végzett munka és a közölt hő összegével, $\Delta E = A + Q$. Mivel (3.20) szerint $\Delta E = 0$, ezért a gáz kitágulása közben a hőfürdőtől $Q = -A$ munkát fog felvenni

$$Q = (n_1 + n_2)RT\, ln2.$$

Összehasonlítva a (3.20) entrópiaváltozással, láthatjuk, hogy e folyamatnál

$$\Delta S = \frac{Q}{T}. \qquad (18.3.21)$$

A második főtétel szerint éppen ez az egyenlőség mutatja, hogy a folyamat reverzibilis.

A másik folyamat, amivel a gázkeverék térfogatát megduplázzuk, két szakaszból áll. Első lépésként a gázkeverék kémiai komponenseit reverzibilis módon szétválasztjuk a 242. ábrán látható készülékkel. Ez a folyamat, mint már megbeszéltük,

sem munkát, sem hőt nem igényel, tehát sem energia-, sem entrópiaváltozással nem jár. A szétválasztott gázkomponensekből álló rendszer energiáját és entrópiáját tehát továbbra is (3.19) adja meg. Ez összhangban is van az egykomponensű gázokra kapott (3.19) eredménnyel.

A szétválasztás után rendszerünk a 242. ábra felső rajzának megfelelő állapotba kerül. Ezután a két gázt elválasztó lemezrendszert átlyukasztjuk, ami a gázok diffúzióval való összekeveredését idézi elő. E keveredés irreverzibilis folyamat és ehhez sincs sem munkavégzésre, sem hőkezelésre szükség. A diffúz keveredés lezajlása után előáll a $2V$ térfogatú gázkeverék, tehát a kívánt végállapot. Most a térfogatnövelés egész folyamata alatt nem történt sem munkavégzés, sem hőközlés, tehát:

$$A = 0 \quad \text{és} \quad Q = 0.$$

A diffúz keveredés természetesen a (3.20) energia- és entrópiaváltozással jár. Az első főtételt kifejező $\Delta E = A + Q$ egyenlőségnek most minden tagja zérussal egyenlő. Mivel a (3.20) entrópianövekedés határozottan pozitív: $\Delta S > 0$ és a közölt hő zérus: $Q = 0$, ezért írhatjuk, hogy

$$\Delta S > \frac{Q}{T}. \tag{18.3.22}$$

A második főtétel szerint ez az egyenlőtlenség fejezi ki a folyamat irreverzibilis voltát.

4. §. Kémiai folyamatok és kémiai egyensúly

Tekintsünk egy tetszőleges halmazállapotú homogén termodinamikai rendszert, mely az $Y_1, Y_2, \ldots, Y_s$ kémiai komponenseket tartalmazza. A független állapotjelzők legyenek $V, T, n_1, n_2, \ldots, n_s$. Ha az egyes komponensek egymással kémiailag reagálni képesek, úgy a rendszerben kémiai folyamatok játszódnak le. Ezek tárgyalásával fogunk az alábbiakban foglalkozni.

A kémiai reakciókat az ún. reakcióegyenletekkel szoktuk jellemezni. Felsorolunk néhány jól ismert reakciót:

$$\begin{aligned} 2H_2 + O_2 &\rightleftarrows 2H_2O, \\ H_2 + Cl_2 &\rightleftarrows 2HCl, \\ 2SO_2 + O_2 &\rightleftarrows 2SO_3, \\ J_2 &\rightleftarrows 2J. \end{aligned} \tag{18.4.1}$$

Ezek a reakcióegyenletek felvilágosítást adnak arról, hogy milyen kiinduló anyagokból milyen végtermékek keletkeznek és hogy az egyes kémiai komponensek milyen arányokban vesznek részt a reakcióban. A reakcióegyenlet általános formáját „nullára redukált" alakban írjuk fel,

$$\nu_1 Y_1 + \nu_2 Y_2 + \ldots + \nu_s Y_s \rightleftarrows 0.$$

Itt a ν_λ-k kis egész számok, melyek az egyes komponenseknek a reakcióban résztvevő mennyiségét adják meg. A kezdőtermékekre ezek pozitív, a végtermékekre pedig negatív számok. A stöchiometria szabályai szerint a mólszámok ν_λ egész számok arányában változnak meg:

$$dn_1 : dn_2 : \ldots : dn_s = \nu_1 : \nu_2 : \ldots : \nu_s . \tag{18.4.2}$$

A kémiai folyamatok tehát a rendszernek egy speciális, (4.2)-nek eleget tevő állapotváltozásaival azonosak. Természetesen a kémiai folyamatok közben a V és T állapotjelzők is megváltozhatnak, ezek változási módját a kémiai folyamat külső körülményei szabják meg. Pl. állandó hőmérsékleten és térfogaton tartott rendszernél V és T egyáltalán nem változik. Zárt rendszerben lefolytatott kémiai reakciónál V állandó marad, de a hőmérséklet megváltozik oly módon, hogy a rendszer energiája maradjon konstans. Állandó hőmérséklet és nyomás mellett végrehajtott reakciónál T állandó marad, viszont V változik oly módon, hogy a nyomás konstans érték maradjon, stb.

Kémiai egyensúlyról akkor beszélünk, ha a rendszerben semmilyen kémiai folyamat sem játszódik le, bár a komponensek egymással reagálni képesek. Ilyen egyensúly akkor áll be, ha a kémiai komponensek koncentrációi egy meghatározott összefüggést elégítenek ki. A továbbiakban ezt az összefüggést akarjuk meghatározni.

A kémiai egyensúly meghatározásánál feltételezzük, hogy a rendszer egy konstans térfogatú, anyagot át nem eresztő falú edénybe van zárva, és hogy a hőmérsékletét is állandó értéken tartjuk. Ilyen körülmények között külső munkavégzés nem lehetséges és ezért az egyensúly feltétele az, hogy az F szabad energia minimális legyen. F tehát nem csökkenhet, akár a kezdeti, akár a végtermékek irányában tolódnak el az n_λ mólszámok. Az egyensúly feltétele

$$dF = \frac{\partial F}{\partial n_1} dn_1 + \frac{\partial F}{\partial n_2} dn_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial n_s} dn_s = 0 .$$

Az itt fellépő $\partial F/\partial n_\lambda$ parciális deriváltak (2.17) szerint a μ_λ kémiai potenciálokkal azonosak. A $dn_1, \ldots, dn_s$ mólszámváltozások arányát pedig (4.2) egyértelműen megszabja. A kémiai egyensúly feltétele tehát a következő lesz:

$$\nu_1\mu_1 + \nu_2\mu_2 + \ldots + \nu_s\mu_s = 0 . \tag{18.4.3}$$

Nagy kiterjedésű rendszer esetében a μ_λ kémiai potenciálok a hőmérsékleten kívül az egyes $c_1, c_2, \ldots, c_s$ koncentrációk függvényei. Kémiai egyensúly esetén a koncentrációk ki kell, hogy elégítsék a (4.3) egyenletet.

Alkalmazásként a gázkeverékek kémiai egyensúlyával fogunk foglalkozni. Ideális gázt tételezve fel, a kémiai potenciálok kifejezését (3.14) adja meg. Gázkeverékek kémiai egyensúlyát tehát a következő egyenlet írja le:

$$\sum_{\lambda=1}^{s} \nu_\lambda \left[RT(1 + \ln c_\lambda) + \int_0^T C_{V\lambda}(T)dT - T \int_0^T \frac{C_{V\lambda}(T)}{T} dT + \alpha_\lambda T - L\varepsilon \right] = 0 .$$

Ebből a koncentrációk közötti összefüggést az alábbi módon írhatjuk fel:

$$\sum_{\lambda=1}^{s} \nu_\lambda \ln c_\lambda = B(T), \tag{18.4.4}$$

ahol

$$B(T) = \sum_{\lambda=1}^{s} \nu_\lambda \left[\frac{1}{R} \int_0^T \frac{C_{V\lambda}(T)}{T} dT - \frac{1}{RT} \int_0^T C_{V\lambda}(T) dT - \left(\frac{\alpha_\lambda}{RT} + 1 \right) + \frac{L\varepsilon}{RT} \right]. \tag{18.4.5}$$

A (4.4) összefüggést a *tömeghatás törvényének* nevezzük. A kémiai egyensúly természetesen – a kezdeti mennyiségek megválasztásától függően – más és más koncentrációértéknél állhat be, az egyensúlyi koncentrációk azonban ki kell hogy elégítsék a tömeghatás törvényét. Ennek a törvénynek több alakja ismeretes a termokémiai irodalomban. Mindenekelőtt (4.4)-et felírhatjuk a következőképpen

$$c_1^{\nu_1} c_2^{\nu_2} \ldots c_s^{\nu_s} = e^{B(T)}. \tag{18.4.6}$$

Kifejezhetjük a tömeghatás törvényét a p_λ parciális nyomásokkal is. $p_\lambda = Rc_\lambda T$ felhasználásával írhatjuk, hogy

$$p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots p_s^{\nu_s} = (RT)^{\nu} e^{B(T)}, \tag{18.4.7}$$

ahol $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_s$. Végül feljegyezzük a tömeghatás törvényének egy harmadik alakját, mely a kémiai egyensúlyt az ún. móltörtek segítségével fejezi ki. A λ-adik komponens móltörtjén az

$$x_\lambda = \frac{n_\lambda}{n} = \frac{c_\lambda}{c}$$

viszonyszámot értjük. Ezek között fennáll az

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_s = 1$$

összefüggés, tehát a móltörtek csak $s - 1$ független adatot tartalmaznak. Az s-edik független adat lehet pl. a c összkoncentráció vagy a $p = RcT$ nyomás. (4.6)-ot $c^{-\nu}$-vel szorozva kapjuk, hogy

$$x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_s^{\nu_s} = c^{-\nu} e^{B(T)}.$$

A jobboldalon c helyébe a nyomást vezetve be, a következő összefüggésre jutunk

$$x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_s^{\nu_s} = K(T, p), \tag{18.4.8}$$

ahol

$$K(T, p) = \left(\frac{RT}{p} \right)^{\nu} e^{B(T)}. \tag{18.4.9}$$

Megjegyezzük, hogy a (4.8) összefüggés, bár levezetése ideális gázok keverékére

vonatkozott, általánosabban is érvényes, de a $K(T,p)$ függvény konkrét alakja ekkor bonyolultabb kifejezés lesz.

Nézzünk néhány példát. Elsőként az azonos atomokból felépülő kétatomos molekulák disszociációját vizsgáljuk. Tipikus példák erre a

$$2J \rightleftarrows J_2, \qquad 2H \rightleftarrows H_2, \qquad 2O \rightleftarrows O_2 \tag{18.4.10}$$

kémiai reakciók. Az atomos komponensre $\nu_A = +2$, a molekulárisra $\nu_M = -1$ lesz. A móltörtek között most az $x_A + x_M = 1$ összefüggés áll fenn. (4.8)-ból

$$\frac{x_A^2}{x_M} = K(T,p)$$

vagy

$$\frac{x_A^2}{1-x_A} = K(T,p)\,.$$

Ennek az egyenletnek a $0 < x_A < 1$ tartományban csak egy megoldása van. A nyomás és a hőmérséklet egyértelműen megszabja x_A-t, tehát a disszociáció mértékét.

Másik példaként a

$$2H_2 + O_2 \rightleftarrows 2H_2O \tag{18.4.11}$$

kémiai reakciót vizsgáljuk. Most

$$\nu_{H_2} = 2\,, \qquad \nu_{O_2} = 1 \qquad \text{és} \qquad \nu_{H_2O} = -2.$$

A kényelmesebb írásmód kedvéért legyen

$$x_{H_2} = x\,, \qquad x_{O_2} = y \qquad \text{és} \qquad x_{H_2O} = 1 - x - y\,.$$

A tömeghatás törvénye szerint

$$\frac{x^2 y}{(1-x-y)^2} = K(T,p)\,.$$

Ez az összefüggés nem határozza meg egyértelműen x-et és y-t, tehát a koncentrá
viszonyokat. Egy adat még szabadon választható. Ha pl. a gázkeverék kém
ekvivalens mértékben tartalmazza a hidrogént és az oxigént, úgy mól
között fennáll a $2x = y$ összefüggés. Természetesen rendszerünk nem
képp ekvivalens mennyiségű gázokat tartalmaz. Az ekvivalens gázkever
eltérést az $\alpha = 2x - y$ mennyiséggel jellemezhetjük, ezt adottnak té
Ezzel

$$\frac{x^2(2x-\alpha)}{(1-3x+\alpha)^2} = K(T,p).$$

Ebből a hidrogén x móltörtje egyértelműen kiszámítható és
koncentrációviszonyai meghatározhatók.

Végül térjünk vissza az ideális gázokra vonatkozó t
Ekkor a $K(T,p)$ függvény konkrét alakját (4.9) állítja elő

jut a $B(T)$ függvény. Írjuk fel $B(T)$ konkrét alakját abban a speciális esetben, amikor a C_V mólhők hőmérsékletfüggésétől eltekinthetünk. A

$$C_V = \frac{1}{2} fR$$

értéket (4.5)-be téve kapjuk, hogy

$$B(T) = \sum_{\lambda=1}^{s} \nu_\lambda \left[\frac{f}{2} \ln T - \frac{f+2}{2} - \frac{\alpha_\lambda}{R} + \frac{L\varepsilon_\lambda}{RT} \right]. \qquad (18.4.12)$$

Ezt (4.9)-be írva és az egyenlet logaritmusát képezve, a tömeghatási konstansra a következő kifejezés adódik

$$K(T,p) = \sum_{\lambda=1}^{s} \nu_\lambda \left[\frac{f+2}{2} (\ln T - 1) + \left(\ln R - \frac{\alpha_\lambda}{R} \right) + \frac{L\varepsilon_\lambda}{RT} \right]. \qquad (18.4.13)$$

E kifejezésben fellépő

$$Q_0 = - \sum_{\lambda=1}^{s} \nu_\lambda L\varepsilon_\lambda$$

nem más, mint a zérus abszolút hőmérsékletre extrapolált reakcióhő. Ez tehát termokémiai kísérletekkel meghatározható. Problematikusabb a helyzet az

$$I = \sum_{\lambda=1}^{s} \nu_\lambda \alpha_\lambda$$

összeggel, ami szintén fellép a $K(T,p)$ kifejezésben. Mint már utaltunk rá, az α_λ entrópiaállandók egyértelmű meghatározását csak a kvantummechanika és a statisztikus mechanika teszi lehetővé. A fenomenologikus termodinamika keretei között az α_λ entrópiaállandók éppen a kémiai egyensúlyok vizsgálata útján kísérletileg határozandók meg.

5. §. Heterogén rendszerek

Egy heterogén termodinamikai rendszer több homogén fázisból áll, melyeket makroszkopikus határfelületek választanak el egymástól. Ilyen rendszer pl. a jég és vele érintkező gőze, vagy pl. a konyhasó vizes oldata és a belé merített kanál. Általános esetben a rendszer r darab fázisból áll, ezeket $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$-rel jelölni. Maguk az egyes fázisok pedig az $Y_1, Y_2, \ldots, Y_s$ kémiai komponensek. Első feladatunk a független állapotjelzők kijelölése. Ezek a következők: a rendszer hőmérséklete, az egyes fázisok $V^{(1)}, V^{(2)}, \ldots, V^{(r)}$ térfogatai és a fázisokban előforduló különböző kémiai komponensek mólszámai. A ν-edik fázis λ-adik komponensének mólszámát $n_\lambda^{(\nu)}$-val jelöljük. Ezek a mól-

számok az alábbi sémában rendezhetők el

	Y_1	Y_2	...	Y_s
Z_1	$n_1^{(1)}$	$n_2^{(1)}$	...	$n_s^{(1)}$
Z_2	$n_1^{(2)}$	$n_2^{(2)}$	...	$n_s^{(2)}$
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
Z_r	$n_1^{(r)}$	$n_2^{(r)}$	...	$n_s^{(r)}$

Ha e sémában a λ-adik oszlop tagjait összeadjuk, úgy az Y_λ kémiai komponens

$$n_\lambda = \sum_{\nu=1}^{r} n_\lambda^{(\nu)} \tag{18.5.1}$$

teljes mólszámát kapjuk eredményül. A rendszer teljes térfogatát pedig az egyes fázisok térfogatainak összegezésével kapjuk:

$$V = \sum_{\nu=1}^{r} V^{(\nu)} . \tag{18.5.2}$$

Következő feladatunk a rendszer F szabad energiájának meghatározása. Ez természetesen a független állapotjelzők függvénye lesz:

$$F = F(T, V^{(1)}, \ldots, V^{(r)}; n_1^{(1)}, \ldots, n_s^{(r)}). \tag{18.5.3}$$

A szabad energia meghatározásánál fel fogjuk tételezni, hogy minden egyes fázis nagy kiterjedésűnek tekinthető. Az egyes fázisok egymástól való szétválasztása és elszigetelése általában munkát, ill. hőt igényel. Ez azonban a fázisokat határoló felületekkel arányos és nagykiterjedésű rendszerek esetén elhanyagolhatóan kicsinek tekinthető a rendszer energiájához képest, mert ez utóbbi az egyes fázisok térfogatával arányos. Nagy kiterjedésű rendszerek esetén tehát a fázisok szétválasztása sem munkát, sem hőt nem igénylő folyamatnak tekinthető, következésképpen a szabad energiát sem változtatja meg. Megállapíthatjuk tehát, hogy a heterogén rendszerünk szabad energiája az egyes fázisok szabad energiáinak egyszerű összege lesz. A ν-edik fázis szabad energiája

$$F^{(\nu)} = F^{(\nu)}(T, V^{(\nu)}, n_1^{(\nu)}, \ldots, n_s^{(\nu)})$$

a hőmérséklettől, a fázis térfogatától és a fázis mólszámaitól függ. A teljes rendszer szabad energiája pedig

$$F = \sum_{\nu=1}^{r} F^{(\nu)}(T, V^{(\nu)}, n_1^{(\nu)}, \ldots, n_s^{(\nu)}). \tag{18.5.4}$$

A heterogén rendszerben lejátszódó folyamatok két csoportba oszthatók. Egyrészt az egyes fázisokon belül kémiai folyamatok játszódhatnak le, másrészt valamely Y_λ kémiai komponens egy bizonyos mennyisége az egyik fázisból a másikba

kerülhet át. Ez utóbbi típusú folyamatot „fizikai" folyamatnak szokás nevezni. Ilyen pl. a konyhasó kikristályosodása a telített vizes oldatból, vagy pl. a folyadék párolgása, stb. Mi most figyelmünket elsősorban az ilyen fizikai folyamatok felé fordítjuk és ezért az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy rendszerünk kémiai komponensei egymással nem képesek reagálni, tehát nincsenek kémiai folyamatok. Ekkor az egyes kémiai komponensek mennyisége a teljes rendszeren belül nem változhat meg, tehát az (5.1) alatti n_λ mólszámok a fizikai folyamatoknál változatlan konstansok maradnak.

Határozzuk meg a heterogén rendszer egyensúlyi állapotát! E célból tartsuk a rendszert állandó T hőmérsékleten és a teljes V térfogatát is tartsuk konstansnak. Ez utóbbi lehetetlenné teszi, hogy a rendszer kifelé munkát végezzen és így az egyensúly feltétele az lesz, hogy az F szabad energia minimális legyen.

Feladatunk – matematikai szempontból – most már az, hogy az (5.3) alatti F-nek, mint a $V^{(1)}, \ldots, V^{(r)}$; $n_1^{(1)}, \ldots, n_s^{(r)}$ változók függvényének minimumát megkeressük, figyelembevéve az (5.1–2) egyenleteket, mint mellékfeltételeket, hiszen V és n_λ adott értékek. Vezessük be a p és μ_λ Lagrange-multiplikátorokat, akkor a minimum helyét, tehát az egyensúly feltételét meghatározó egyenlet a következő lesz:

$$\delta\left\{F + p\sum_{\nu=1}^{r} V^{(\nu)} - \sum_{\lambda=1}^{s} \mu_\lambda \sum_{\nu=1}^{r} n_\lambda^{(\nu)}\right\} = 0\,.$$

Felhasználva (5.4)-et

$$\delta\left\{\sum_{\nu=1}^{r} F^{(\nu)}(T, V^{(\nu)}, n_1^{(\nu)}, \ldots, n_s^{(\nu)}) - p\sum_{\nu=1}^{r} V^{(\nu)} - \sum_{\lambda,\nu} \mu_\lambda n_\lambda^{(\nu)}\right\} = 0\,.$$

E variáció akkor fog eltűnni, ha a kapcsos zárójelben levő kifejezésnek egyrészt a $V^{(\nu)}$ térfogatok, másrészt az $n_\lambda^{(\nu)}$ mólszámok szerinti parciális deriváltjai eltűnnek. Tehát

$$\frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial V^{(\nu)}} + p = 0\,, \qquad \frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial n_\lambda^{(\nu)}} - \mu_\lambda = 0\,. \tag{18.5.5}$$

Itt $F^{(\nu)}$ a ν-edik homogén fázis szabad energiája. A homogén rendszerekre kapott (2.17) eredményünk szerint az itt fellépő parciális derivált nem más, mint

$$\frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial V^{(\nu)}} = p^{(\nu)}\,,$$

azaz a ν-edik fázisban uralkodó nyomás. És hasonlóan

$$\frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial n_\lambda^{(\nu)}} = \mu_\lambda^{(\nu)}$$

a λ-adik komponens kémiai potenciálja a ν-edik fázisban. Ennek alapján (5.5) a következőt jelenti

$$p^{(\nu)} = p \qquad \text{és} \qquad \mu_\lambda^{(\nu)} = \mu_\lambda\,. \tag{18.5.6}$$

Tehát *a heterogén rendszer egyensúlyának feltétele az, hogy az egyes fázisok nyomása és kémiai potenciálja megegyezzen.* Részletesen kiírva

$$\begin{aligned} p^{(1)} &= p^{(2)} = \ldots = p^{(r)}, \\ \mu_1^{(1)} &= \mu_1^{(2)} = \ldots = \mu_1^{(r)}, \\ \mu_2^{(1)} &= \mu_2^{(2)} = \ldots = \mu_2^{(r)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu_s^{(1)} &= \mu_s^{(2)} = \ldots = \mu_s^{(r)}. \end{aligned} \tag{18.5.7}$$

Ez összesen $(r-1)(s+1)$ egyenletet jelent. Emlékeztetünk arra, hogy egy homogén fázisban a nyomás és a kémiai potenciálok csak a hőmérséklettől és a koncentrációktól függenek:

$$\begin{aligned} p^{(v)} &= p^{(v)}(T, c_1^{(v)}, c_2^{(v)}, \ldots, c_s^{(v)}), \\ \mu_1^{(v)} &= \mu_1^{(v)}(T, c_1^{(v)}, c_2^{(v)}, \ldots, c_s^{(v)}), \\ \mu_2^{(v)} &= \mu_2^{(v)}(T, c_1^{(v)}, c_2^{(v)}, \ldots, c_s^{(v)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu_s^{(v)} &= \mu_s^{(v)}(T, c_1^{(v)}, c_2^{(v)}, \ldots, c_s^{(v)}). \end{aligned} \tag{18.5.8}$$

Az előforduló változók száma tehát $rs + 1$, mert az rs számú koncentráción kívül a hőmérséklet is szerepel függvényeink argumentumában. Az egyensúlyt meghatározó (5.7) egyenletek általános esetben csak akkor oldhatók meg, ha az egyenletek száma nem haladja meg a változók számát, azaz ha

$$(r-1)(s+1) \leq rs + 1.$$

Vagy egyszerűbb alakban írva, ha

$$r \leq s + 2. \tag{18.5.9}$$

Ezt az igen fontos egyenlőtlenséget *Gibbs*-féle fázisszabálynak nevezzük. Ha az egyenlőtlenségjel van érvényben, úgy az (5.7) egyenletrendszer

$$f = s + 2 - r \tag{18.5.10}$$

számú változót határozatlanul hagy. f-et a rendszer *termodinamikai szabadsági fokának* nevezzük.

A mondottak érzékeltetésére tekintsünk egy olyan rendszert, mely egyetlen kémiai komponensből és két fázisból áll. Ilyen rendszer pl. a folyadék és a vele érintkező gőze. A folyadék koncentrációját $c^{(1)}$-gyel, a gőzét $c^{(2)}$-vel jelölve, az (5.7) egyensúlyi feltételek a következők lesznek:

$$\begin{aligned} p^{(1)}(T, c^{(1)}) &= p^{(2)}(T, c^{(2)}), \\ \mu^{(1)}(T, c^{(1)}) &= \mu^{(2)}(T, c^{(2)}). \end{aligned} \tag{18.5.11}$$

A termodinamikai szabadsági fok most $s = 1$, $r = 2$ miatt $f = 1$ lesz. Egy változó

tehát (5.11)-ben határozatlan marad, legyen ez a T hőmérséklet. Akkor (5.11)-ből a koncentrációk mint a hőmérséklet függvényei kiszámíthatók:

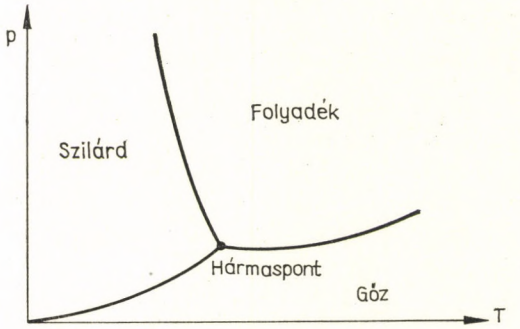
$$c^{(1)} = c^{(1)}(T) \qquad \text{és} \qquad c^{(2)} = c^{(2)}(T).$$

Természetesen (5.11) egyben megadja a fázisok közös p nyomását és közös μ kémiai potenciálját is mint a T hőmérséklet függvényét:

$$p = p(T) \quad \text{és} \quad \mu = \mu(T). \tag{18.5.12}$$

A nyomás és a hőmérséklet közti összefüggést a $p - T$ síkban ábrázolva megkapjuk a *gőznyomási görbét.*

Hasonló egyensúlyi állapot alakulhat ki folyékony és szilárd fázis, valamint a gőz és a szilárd fázis között is. Az előbbi esetben az *olvadási,* az utóbbi esetben a *szublimációs görbét* vezethetjük le az egyensúlyi feltételekből. A viszonyokat a 244. ábra szemlélteti. Lehet-e egyensúlyban egyszerre a szilárd, a folyékony és a



244. ábra. Fázisdiagram

gőz fázis? Egy kémiai komponens ($s = 1$) és három fázis ($r = 3$) esetén a termodinamikai szabadsági fok $f = 0$. Ekkor az egyensúlyi egyenletek valamennyi fázis koncentrációját és a hőmérsékletet egyértelműen megszabják

$$\begin{aligned} p^{(1)}(T, c^{(1)}) &= p^{(2)}(T, c^{(2)}) = p^{(3)}(T, c^{(3)}), \\ \mu^{(1)}(T, c^{(1)}) &= \mu^{(2)}(T, c^{(2)}) = \mu^{(3)}(T, c^{(3)}). \end{aligned} \tag{18.5.13}$$

Ebből a négy egyenletből T, $c^{(1)}$, $c^{(2)}$, $c^{(3)}$ kiszámítható, és természetesen meghatározható a fázisok p nyomása és μ kémiai potenciálja. A háromfázisú rendszer egyensúlyát a 244. ábrán egyetlen pont, az ún. *hármaspont* reprezentálja.

6. §. A Clausius–Clapeyron egyenlet

Az előző §-ban láttuk, hogy egykomponensű rendszerben két fázis csak akkor lehet egyensúlyban egymással, ha a nyomás és a hőmérséklet között meghatározott összefüggés áll fenn. Most ezen $p = p(T)$ összefüggéssel akarunk részletesebben foglalkozni.

Mindenekelőtt még egyszer feljegyezzük az egykomponensű, kétfázisú rendszer egyensúlyának egyenleteit:

$$p = p^{(1)}(T, c^{(1)}) = p^{(2)}(T, c^{(2)}),$$
$$\mu^{(1)}(T, c^{(1)}) = \mu^{(2)}(T, c^{(2)}). \tag{18.6.1}$$

Mint tudjuk, ebből a három egyenletből $c^{(1)}$ és $c^{(2)}$ kiküszöbölése után kapjuk meg a p és T közti összefüggést. Fejezzük ki a fenti egyenleteket a két fázis $\mathrm{F}^{(1)}(T, c^{(1)})$, ill. $\mathrm{F}^{(2)}(T, c^{(2)})$ moláris szabad energiájával. (2.24) és (2.26) alapján írhatjuk, hogy

$$p = (c^{(1)})^2 \frac{\partial \mathrm{F}^{(1)}}{\partial c^{(1)}} = (c^{(2)})^2 \frac{\partial \mathrm{F}^{(2)}}{\partial c^{(2)}}, \tag{18.6.2a}$$

$$\mathrm{F}^{(1)} + c^{(1)} \frac{\partial \mathrm{F}^{(1)}}{\partial c^{(1)}} = \mathrm{F}^{(2)} + c^{(2)} \frac{\partial \mathrm{F}^{(2)}}{\partial c^{(2)}}. \tag{18.6.2b}$$

(6.2a)-ból a moláris szabad energiáknak a koncentrációk szerinti deriváltjait kifejezve kapjuk

$$\frac{\partial \mathrm{F}^{(1)}}{\partial c^{(1)}} = \frac{p}{(c^{(1)})^2} \quad \text{és} \quad \frac{\partial \mathrm{F}^{(2)}}{\partial c^{(2)}} = \frac{p}{(c^{(2)})^2}. \tag{18.6.3}$$

Behelyettesítve (6.26)-ba és rendezve az egyenletet

$$\left(\frac{1}{c^{(1)}} - \frac{1}{c^{(2)}}\right) p = \mathrm{F}^{(2)} - \mathrm{F}^{(1)}. \tag{18.6.4}$$

A $c^{(1)}$ koncentráció, definíciója szerint, a mólszám és a térfogat viszonya: $c^{(1)} = n^{(1)}/V^{(1)}$. A koncentráció reciproka ezek szerint az egységnyi mólszámra jutó térfogat, amit móltérfogatnak nevezünk

$$\frac{1}{c^{(1)}} = \frac{V^{(1)}}{n^{(1)}} = V_M^{(1)}.$$

A (6.4) összefüggésnek a móltérfogatokkal kifejezett alakja a következő lesz

$$p = -\frac{\mathrm{F}^{(1)} - \mathrm{F}^{(2)}}{V_M^{(1)} - V_M^{(2)}}. \tag{18.6.5}$$

Ezt az összefüggést közvetlenül, szemléletes úton is beláthatjuk. Az egyensúlyban levő egykomponensű, kétfázisú rendszerünkben vigyünk át 1 mólnyi anyagot a 2 fázisból az 1 fázisba. (Pl. a folyadék-gőz rendszer esetén párologtassunk el 1 mól folyadékot.) E folyamathoz szükséges külső munka a nyomás és a térfogatváltozás negatív szorzatával egyenlő:

$$A = -p(V_M^{(1)} - V_M^{(2)}).$$

Ugyanakkor tudjuk, hogy izotermikus és reverzibilis folyamat esetén a munka a szabad energia növekményével egyenlő.

$$A = \mathrm{F}^{(1)} - \mathrm{F}^{(2)}.$$

E két egyenlet összevetéséből azonnal megkapjuk (6.5)-öt.

A $p(T)$ görbe meredekségének megállapítása céljából differenciáljuk (6.4)-et a T hőmérséklet szerint.

$$\left(\frac{1}{c^{(1)}} - \frac{1}{c^{(2)}}\right)\frac{dp}{dT} - \left(\frac{1}{(c^{(1)})^2}\frac{dc^{(1)}}{dT} - \frac{1}{(c^{(2)})^2}\frac{dc^{(2)}}{dT}\right)p$$
$$= \frac{\partial \mathrm{F}^{(2)}}{\partial T} + \frac{\partial \mathrm{F}^{(2)}}{\partial c^{(2)}}\frac{dc^{(2)}}{dT} - \frac{\partial \mathrm{F}^{(1)}}{\partial T} - \frac{\partial \mathrm{F}^{(1)}}{\partial c^{(1)}}\frac{dc^{(1)}}{dT}.$$

Felhasználva (6.3)-at, egyenletünk egyszerűsíthető:

$$\left(\frac{1}{c^{(1)}} - \frac{1}{c^{(2)}}\right)\frac{dp}{dT} = \frac{\partial \mathrm{F}^{(2)}}{\partial T} - \frac{\partial \mathrm{F}^{(1)}}{\partial T}. \tag{18.6.6}$$

(2.27) szerint a moláris szabad energiának a hőmérséklet szerinti deriváltja a negatív moláris entrópiával egyenlő. Ha ismét a móltérfogatokat vezetjük be, úgy (6.6) a következő alakot ölti

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\mathrm{S}^{(1)} - \mathrm{S}^{(2)}}{V_M^{(1)} - V_M^{(2)}}. \tag{18.6.7}$$

Ha 1 mól anyagot a 2. fázisból az 1. fázisba viszünk át, úgy $\mathrm{S}^{(1)} - \mathrm{S}^{(2)}$ entrópiaváltozás történik. Reverzibilis folyamat esetén a fázisátalakuláshoz szükséges hő

$$Q^{(12)} = T(\mathrm{S}^{(1)} - \mathrm{S}^{(2)})$$

lesz. (6.7) ennek figyelembevételével a következő végeredményt szolgáltatja

$$\frac{dp}{dT} = \frac{Q^{(12)}}{T(V_M^{(1)} - V_M^{(2)})}. \tag{18.6.8}$$

Ez az ún. *Clausius–Clapeyron*-egyenlet. Érvényes természetesen bármilyen két fázis egyensúlyának esetére.

Példaként vizsgáljuk meg a szilárd és a folyékony fázis egyensúlyát. Normális esetben az olvadás térfogatnövekedéssel jár és hőt igényel. Ha 1-gyel a folyadék, 2-vel a szilárd fázist jelöljük, úgy általában $Q^{(12)} > 0$ és $V_M^{(1)} > V_M^{(2)}$. Ekkor dp/dT is pozitív lesz, azaz ha növekszik a nyomás, úgy növekszik az olvadáspont is.

Kivételes viszonyokat találunk a víz esetében. Itt ugyanis a jég térfogata nagyobb, mint a vízé, az olvadás térfogatcsökkenéssel jár. A *Clausius–Clapeyron*-egyenlet szerint ekkor dp/dT negatív lesz, tehát ha a jégre kellő nyomást gyakorlunk,

úgy az megolvad. Közöljük a számadatokat is. $T = 273\ ^\circ K$ és $p = 1$ atm közelében.

$$V_M^{(\text{víz})} = 18{,}0\,\frac{\text{cm}^3}{\text{mól}}, \qquad V_M^{(\text{jég})} = 19{,}6\,\frac{\text{cm}^3}{\text{mól}}, \qquad Q^{(12)} = 1440\,\frac{\text{cal}}{\text{mól}}.$$

Ebből

$$\frac{dT}{dp} = -\,0{,}0075\,\frac{\text{fok}}{\text{atm}}.$$

Tehát 1 atm nyomás 0,0075 $^\circ K$-kal csökkenti a jég olvadáspontját.

A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Fülöp Antal

Burkoló és kötés: Rudas Klára munkája

71.70484 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

Ára: I-II. 226,— Ft

Gombás Pál

FIZIKA MÉRNÖKÖK SZÁMÁRA

Ez a kötet mérnökök számára ad bevezetést a fizika alapjaiba. Azokat a fizikai alapismereteket, törvényeket tartalmazza, amelyekre a műszaki egyetemek hallgatói — a felsőoktatási reform kívánalmainak megfelelően — további tanulmányaik során támaszkodhatnak, és amely ismeretanyag feleleventése a már működő mérnökök és más szakemberek számára is hasznos.

Több, egymástól függetlenül is tanulmányozható részből áll, melyek a következők: mechanika, relativitáselmélet, hangtan, hőtan, elektromosságtan, fénytan és atomfizika. A könyv végén található függelék egyrészt néhány alkalmazott matematikai tételt foglal össze a vektoranalízis köréből, másrészt áttekintést ad a gyakorlatban legelterjedtebb mértékrendszerekről.

A terjedelem korlátozása érdekében a mű tömör fogalmazású. A szerző főcélja volt, hogy a legfontosabb alapfogalmakat és törvényeket minél egyszerűbben, de teljes precizitással ismertesse.

A fizika egyes fejezeteinek feldolgozásában a szerző minden esetben a tapasztalatból indul ki, így módszere logikai szempontból az egyesről az általánosra való következtetés, tehát az indukció.

Szerves kiegészítője lesz a könyvnek a szerzőnek a jelen művel párhuzamosan megjelenő Bevezetés az elméleti fizikába c. munkája.

AKADÉMIAI KIADÓ
BUDAPEST