ÉRTEKEZÉSEK

A

MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

KIADJA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

ELSŐ KÖTET. 1867–1872.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF,

OSZTÁLYTITKÁR.

PEST,

EGGENBERGER-FÉLE AKAD. KÖNYVKERESKEDÉS.

(Hoffmann és Molnár.)

1872.

Budapest, 1874. Nyomatott az Athenaeum nyomdájában.

ÉRTEKEZÉSEK

a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet. 1867—1872.

A MECHANIKAI HŐ-ELMÉLET

EGYENLETEINEK ÁLTALÁNOS ALAKJÁRÓL.

SZÉKFOGLALÓ ÉRTEKEZÉS

SZILY KÁLMÁN

M. AKAD. LEV. TAGTÓL.

ELŐADATOTT AZ 1866. DECEMBER 17-KI ÜLÉSBEN.

PEST,

EGGENBERGER FERDINÁND M. TUD. AKAD. KÖNYVÁRUSNÁL.

1867.

PEST,

NYOMATOTT EMICH GUSZTÁV MAGY. AKAD. KÖNYVNYOMDÁSZNÁL.

1867.

A MECHANIKAI HŐ-ELMÉLET EGYENLETEINEK ÁLTALÁNOS ALAKJÁRÓL.

SZÉKFOGLALÓ ÉRTEKEZÉS

SZILY KÁLMÁNTÓL.

1.

Ha a mathesisnek a természettudományok bármelyik részébe utat akarunk nyitni, az első, elénk gördülő s mindenekelőtt legyőzendő nehézség : mértéket találni a természettől abstrahált fogalmakra, melyeket a törvények értelmében képletbe igyekszünk foglalni. A mennyiségtan ugyanis a közvetlenül megmérteken és mérhetőkön kivül, csak oly közvetlenül nem mérhető dolgokra alkalmazható, melyekről tudjuk, hogy mérhető mennyiségek talán ismeretlen függvényének, de mindenesetre bizonyos egyjelentésű függvényének tekinthetők. Például a közvetlenül nem mérhető anyagmennyiségről a mathematikai physikában csak annyiban lehet szó, a mennyiben az a nyugvó, vízszintes alapra gyakorlott nyomásnak, a súlynak és az ez által létesíthető gyorsulásnak viszonyával, tehát egy megmérhető számmal aránylagos. Melegmennyiség, delej-villámmennyiség, s általában az erők csak azért juthatnak a mathematikai physikában szerephez, mivel hatásaikat, bizonyos mértékegységek szerint, meg tudjuk határozni.

Minél szabatosabb a *mérték*, mely a physikai fogalmat mathematikailag kifejezi, minél jobban fűzi az emezt könnyen érthető és kezelhető fogalmakkal egybe, annál jelentékenyebbek lesznek az eredmények, melyek a mathesis beavatkozásától várhatók. Míg a tudomány a melegség mértékét, a meleg-egységet, mint azon melegmennyiséget értelmezte, melylyel 1 kgrm vizet állandó külnyomás mellett, 0°-ról 1°-ra lehet hevíteni, míg tehát az ismeretlent ugyanazon ismeretlennel mérte, addig nem ereszkedhetett a hőtünemények alapjára, s el nem dönthető a régi vitás kérdést a melegség mivoltára nézve ; de mióta ki van mutatva, hogy a melegegység azon *munka*, melylyel 424 kgrmot 1 méter magasságra lehet emelni, — ámbár ennek alig husz éve — már is két természettörvény került napfényre, értem t. i. azon törvényeket, melyek a mechanikai hő-elmélet két főtételében vannak kifejezve.

A melegmennyiségnek szaporodása vagy megfogyatkozása valamely testben, a tapasztalás tanúságaként, mindig a test állapotának bizonyos változásával van kapcsolatban. A körülmények szerint majd a részecskék közép távolsága — a minek mértéke a térfogat, — majd a részecskék mozgásának eleven ereje, — a mit a mérséklettel mérünk, — majd végre a részecskék súlyegyeni helyzete, a halmaz-állapot szenved változást. E szerint, ha magát a test állapotát, mint szabatosan alig defineálható physikai fogalmat nem mérhetjük is meg, mindamellett módunkban áll az állapotváltozásokat mathematikai vizsgálódás alá vetni ; mert *a nyugvó test állapota* — legalább hőtani tekintetben — *teljesen meg van határozva, ha a súlyegység térfogata, vagyis a fajlagos térfogat és a mérséklet ismeretes.* Jelöljük tehát a test fajlagos térfogatát v-vel, mérsékletét t-vel, úgy állapota bizonyos F függvénye

$$F\ (v,\ t)$$

a v és t független változóknak. Az F függvény természetéről persze csak annyit tudunk, hogy *a mérséklet és térfogat által egyjelentésüleg van meghatározva,* s ez arra nézve elegendő is — mint fönnebb láttuk, — hogy a mathesis a physikának ezen ágába is beavatkozhassék.

Ha a test állapota meg van határozva v és t változók által, úgy meg vannak ezek által határozva mindazon tulajdonságok is, melyek a test állapotával kapcsolatban állanak. E szerint a test terjeszkedési törekvése, a mit a felület-egységre gyakorlott nyomással mérünk, s *feszély*nek nevezünk, hasonlókép egyjelentésű függvénye tartozik lenni a v és t független változóknak ; úgy hogy megadatván v és t, a feszély is — jelöljük azt p-vel — megadottnak tekintendő. Ebből viszont az következik, hogy ismeretes levén p és egyike az előbb említett változóknak, tehát vagy v, vagy t, a test állapota, szintén meg van határozva.

Összefoglalva az imént mondottakat: *a test állapota, hőtani tekintetben, meghatározottnak tartandó, ha a p, v, t állapotjelzők közül bármelyik kettő ismeretes. A harmadik, valamint maga a test állapota is, egyjelentésű függvénye a független változóul választott két állapotjelzőnek.*

2.

Az első értekezés, mely ha nem is egészen, de mondhatni félig már a mechanikai hő-elmélet terén áll, s a mellett a tárgyat mathematikailag vizsgálja, *Clapeyron*-tól jelent meg 1834-ben, az *Ecole polytechnique journal*-jában. Ismeretes, hogy e *mémoire* nem egyéb, mint remek mathematikai commentár *Sadi Carnot*-nak 1828-ban közzétett, nehezen érthető *reflexioi*-hoz, s hogy így ez is azon lényeges hibában sínylik, mely *Carnot* tételének későbbi módosítását vonta maga után. Ez értekezésben a *térfogat* és *feszély* azon állapotjelzők, melyek független változókul vannak tekintve, s az *akkori* fölfogáshoz híven — mely szerint a test által a végre igényelt melegmennyiség, hogy adott kezdetállapotából bizonyos más állapotba juthasson, csupán az illető állapotjelzők függvénye — maga a melegmennyiség is a v és p szabadon változók függvénye gyanánt van előállítva.

A mint ez most már általánosan el van ismerve, *Clausius* volt az, ki *Carnot* vizsgálódásainak positiv eredményeit *Mayer* elmélkedéseivel és *Joule* kisérleti vívmányaival összevetve, látszólagos ellenmondásaikat kiegyeztetve, a mechanikai hő-elmélet mathematikai részének alapját megvetette. Az e tekintetben úttörő értekezés 1850-ben jelent meg a *Poggendorff*-féle *Annalok*-ban. Valamint ebben, úgy mindazon értekezéseiben, melyeket 1864-ben „*Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie*“ czím alatt maga *Clausius* állított össze, független változókul a *mérséklet* és *térfogat* vannak elfogadva. Mindjárt első értekezésében kimutatja

Clausius, hogy az összes melegmennyiség, melyet a test bizonyos állapotváltozásra megkiván, nem adható meg a független változók függvényében, hanem hogy *azon* összeg bír ezzel a tulajdonsággal, melyre utóbb, a *Thomson* által ajánlott szó *energia* fogadtatott el.

A mechanikai hő-elmélet többi művelői is, nevezetesen *W. Thomson*, *Rankine*, *Reech*, *Zeuner* stb. mathematikai levezetéseikben vagy a térfogatot és feszélyt, vagy a mérsékletet és térfogatot vevék független változókul. Ez általánosssá vált szokástól *Kirchhoff* tért el legelőször.

Egyetlen értekezése, melyet a mechanikai hő-elméletre vonatkozólag közzétett, s mely 1858-ban *Poggendorff* folyóiratában jelent meg, nem csak az ott adott tételnél s éleseszű alkalmazásainál fogva nevezetes, hanem azon tárgyalási modornál fogva is, melyet ebben *Kirchhoff* bemutat. Egyik állapotjelzőül ő is, mint *Clausius*, a mérsékletet választja ; a másikat azonban nem határozza meg mindjárt eleinte, hanem azt x-szel jelölvén, föntartja magának a választást későbbre, hogy ezt úgy intézhesse, a mint épen a tárgyalt feladat egyszerűbb megoldása kivánja. Így x jelenthet nála térfogatot, feszélyt, vagy például, a telített gőzök vizsgálatánál tömeget stb., szóval *minden* oly mennyiséget, mely a mérséklettel kapcsolatban, a test állapotát egyjelentésűleg meghatározza.

Nem tagadhatni ugyan, hogy az ekkép nyert képletek, noha ugyanazt a physikai igazságot fejezik ki, mégis hosszabbak s talán kevésbé átnézetesek, mint azok, melyeket az állapotjelzők határozott megválasztásával vezethetni le, mindamellett megvan azon előnyük, hogy belőlük, a minden egyes, különös esetre szolgáló képlet egyszerűen, x választott értékének helyettezése által, megkapható.

A *Kirchhoff* ajánlta tárgyalási modor nem is maradt követők nélkül. *Bauschinger*, *Jochmann*, s többen a fiatalok közül, sőt még maga *Clausius* is elfogadta azt a taval s az idén közzétett értekezéseiben, azon különbséggel, vagyis inkább általánosítással, hogy *Clausius mind a két* állapotjelzőre föntartja magának a későbbi választást. Ő tehát a független változók megválasztásában egészen általánosan jár el, s ama két tulajdonságot, mely a test állapotát megadja, nem határozzá meg közelebbről, hanem csak egyszerűen fölteszi, hogy az x és y *független változók által a test állapota, s ennélfogva a feszély, térfogat, mérséklet és az energia is teljesen meg vannak határozva.*

Így a most említett négy mennyiség függvénye az x és y szabadon változóknak. Az általánosan hagyott változók használata által azon előnyben részesülünk, hogy x és y alatt mindig azon állapotjelzőket érthetjük, melyek a specialis feladat természetének legjobban megfelelnek.

Általánosan hagyván a változókat, a nyert egyenletek is általánosabb alakban tünnek elő, s ez az oka annak, hogy az ily egyenletek, *legalább alakra nézve, általánosabbaknak tekintetnek,* mint azon egyenletek, melyeket speciális állapotjelzők igénybevételével, vezethetünk le.

A jelen értekezésnek feladata megvizsgálni, mennyiben általánosabb alakúak azon egyenletek, melyeket az x, y változókkal vezetünk le, mint azok, melyekben az állapotjelzők határozottan meg vannak választva.

3.

Föltéve, hogy a külnyomás a test felületének minden elemében egyenlő nagy, és iránya mindenütt az illető felületelem normálisába esik, föltéve továbbá, hogy valahányszor a test feszélyét változtatja, a külnyomás is úgy van szabályozva, mikép a test feszélye minden pillanatban csak végetlen kevéssel különbözzék a külnyomástól — mind ezeket föltéve, *a mechanikai hö-elmélet elsö fötétele,* mathematikailag kifejezve, a következő :

$$dQ = dU + Apdv \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

hol dQ azon *melegmennyiséget* jelenti, melyet az illető test súlyegységével közölni kell, hogy *energiája* dU-val változzék, s hogy e közben *Apdv külső munkát* hajtson végre.

Ha ugyanezen, s ugyanoly módú állapotváltozás közben, az egyik állapotjelző x megváltozik dx-szel, a másik : y pedig dy-nal, úgy még

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial Q}{\partial y} \cdot dy$$

és:
$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dy$$

Jelöljük a melegmennyiségnek részletes differentiális quotienseit X- és Y-nal, vagyis legyen:
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = X; \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = Y.$$
s helyettesítsük dQ és dv értékeit (1) be, úgy ez a következő alakra hozható:
$$dU = \left(X - Ap \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot dx + \left(Y - Ap \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot dy$$

Ámde az energia:
$$U = f(x, y)$$
bizonyos függvénye az x és y független változóknak; állani fog tehát a következő relatio:
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(X - Ap \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(Y - Ap \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$
vagy ha a kijelölt müveleteket végrehajtjuk, és tekintetbe vesszük, hogy a térfogat is függvénye x és y-nak, leend még:
$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = A \cdot \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

Hátra van még X és Y differentiális quotienseket ismertebb mennyiségekben kifejezni. Alkalmazzuk e czélból az
$$dQ = Xdx + Y.dy \quad \ldots\ldots, \ldots\ldots \quad (2.)$$
általános egyenletet egyes speciális esetekre.

1-ör. Legyen például az állapotváltozás olyan, hogy a térfogat állandó maradjon, úgy:
$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dy = 0$$
és e szerint a:
$$dt = \frac{\partial t}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial t}{\partial y} \cdot dy$$
egyenlet átmegy a következőbe, ha dy küszöböltetik ki:
$$dt = \frac{\frac{\partial t}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}} \cdot dx$$
vagy átmegy a következőbe, ha dx küszöböltetik ki:

$$dt = -\frac{\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}}\cdot dy$$

Ha az utóbbi két egyenletből dx és dy értékeit (2.) be helyettesítjük, és a szükségelt melegmennyiséget, mint állandó térfogatra vonatkozót : $[dQ]_v$ által jelöljük, úgy :

$$\left[\frac{dQ}{dt}\right]_v = \frac{X\frac{\partial v}{\partial y}-Y\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}$$

hol a $\left[\frac{dQ}{dt}\right]_v$ symbolum azt jelenti, hogy a melegmennyiséget csupán t szerint kell differentiálni, állandónak tekintvén e közben a térfogatot. Az ily differentiális quotiens azonban nem egyéb, mint *a test fajmelege állandó térfogat mellett,* a mit ezentúl c-vel jelölendünk ; s így X, Y meghatározására van már egy egyenletünk, t. i.

$$c = \frac{X\frac{\partial v}{\partial y}-Y\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.)$$

2-or. *A* második egyenlet megszerzésére legyen most meg olyan az állapotváltozás, hogy *a feszély maradjon állandó ;* úgy az ez esetre is érvényes (2.) alatti egyenletből, az előbbihez tökéletesen hasonló uton járva, a következő egyenletre jutunk :

$$\left[\frac{dQ}{dt}\right]_p = \frac{X\frac{\partial p}{\partial y}-Y\cdot\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}}$$

hol a $\left[\frac{dQ}{dt}\right]_p$ symbolum azt jelenti, hogy a melegmennyiséget csupán t szerint kell differentiálni, állandónak tekintvén a közben a feszélyt. Az ily differentiális quotiens azonban nem egyéb, mint *a test fajmelege állandó feszély mellett,* a mit ezentúl C-vel jelölendünk ; s így X és Y kiszámítására van már egy második egyenletünk is, t. i.

$$C = \frac{X\frac{\partial p}{\partial y} - Y\cdot\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}} \quad \ldots\ldots\ldots (4.)$$

E két egyenletből, t. i. (3)- és (4)-ből X és Y meghatároztatván, leend :

$$X = C.\frac{\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + c\cdot\frac{\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} \ldots\ldots (5.)$$

$$Y = C.\frac{\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + c\cdot\frac{\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} \ldots\ldots (6.)$$

Ha X és Y ezen értékeit a I egyenletbe helyettesítve képzeljük, úgy megkapjuk *a mechanikai hő-elmélet első főtételének azon alakját, melyet legáltalánosabb alaknak nevezhetünk*, miután benne a változók egészen általánosan vannak hagyva, és semminemű speciális fölvétel által nincsenek közelebbről meghatározva.

4.

A megelőző szakaszban a mechanikai hő-elmélet első főegyenletének *általános alakját* vezettük le ; a jelen szakaszban ugyanezt *a második főegyenletre nézve* akarjuk végbevinni.

A második főtétel, *Clausius* fogalmazása szerint, a következő :

Valahányszor melegség munkává alakul, a nélkül, hogy az ezt közvetítő test állapotában maradandó változás állana be, mindannyiszor bizonyos melegmennyiségnek át is kell menni valamely melegebb testből egy hidegebbe, és e két melegmennyiség viszonya nem függ a közvetítő test minőségétől, hanem csupán annak a két testnek mérsékletétől, melyek között az átmenetel történik.

E tétel analytikailag

$$\frac{Q_1}{Q_2} = F(t_1, t_2)$$

egyenlet által van kifejezve, hol :

Q_1 a munkává alakult melegmennyiséget,

Q_2 a melegebbről hidegebbre átment melegmennyiséget,

t_1, t_2 a melegebb és a hidegebb test mérsékletét,

F pedig ezeknek bizonyos függvényét ábrázolja.

Miután $\frac{Q_1}{Q_2}$ azon melegséget fejezi ki, mely a melegegység átmeneténél munkává alakul, könnyen belátható — különösen az alább következő Clapeyronféle graphikus ábrázolás segélyével — hogy a t_1 és t_2 mérsékletek különbsége kisebbedvén, a munkává alakult melegség is, s így az F függvény értéke is kisebbedni fog. Ha e szerint a mérsékletek különbségét végtelen kicsinynyé teszszük

$$t_1 = t$$

és :

$$t_2 = t - dt$$

úgy a

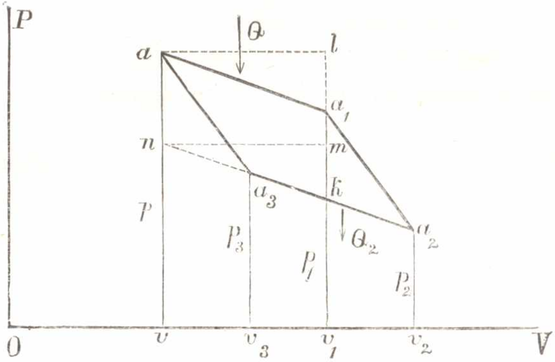
$$F(t, t - dt)$$

is végtelen kicsiny fog lenni, más szóval a dt-nek növekvő hatványai szerint kifejtett sor első, vagyis tiszta tagja szükségképen a zérussal egyenlő. Tekintetbe véve még, hogy dt magasabb hatványai az első mellett elenyésznek, leend a :

$$\frac{\text{munkává alakult meleg}}{\text{átment meleg}} = f(t).dt$$

hol a különben ismeretlen $f(t)$ mérséklet-függvényre sincs a közvetítő test anyagának semmi befolyása.

Hogy a munkává alakult meleg és az átment meleg ismertebb mennyiségekben legyenek kifejezhetők, a közvetítő test által leíratott végetlen kis körfolyamot tüntessük elé oly coordináta-rendszer által, melyben az abscissa a test mindenkori térfogatát, az ordináta a megfelelő feszélyt, s ezek következtében a síknak igy meghatározott pontja a test állapotát, s végre az ez által leirt út az állapot változásának módját ábrázolja.



Az állapotváltozásnak rendje álljon négy részből.

1-ör. Terjedjen ki a test, melynek kezdetállapota az idomban a pont által van ábrázolva, egészen a_1-ig, míg t. i. térfogata Ov_1-re növekszik, s e közben *maradjon a mérséklet változatlanul t* ; úgy kivülről a testbe apródonként annyi meleget kelle bevezetni, a mennyi a kiterjedés közben végrehajtott belső és külső munkának algebrai összegével aequivalens.

A bevezetett melegmennyiséget jelölje : Q

2-or. Terjedjen a test még tovább, egész a_2-ig, míg t. i. térfogata Ov_2-re növekszik, s e közben melegséget ne kapjon kivülről s ne adjon kifelé, vagyis legyen *az $a_1 a_2$ út adiabatikus*, úgy a test mérséklete sülyedni fog ; tegyük föl, hogy az e közben t-ről $(t—dt)$-re szálljon alá.

3-or. Innen kezdve nyomassék össze a test, és pedig először állandó $(t—dt)$ mérsékletnél mindaddig, míg térfogata Ov_3 (állapota a_3) az lesz, melyből, ha a test még tovább majd adiabatikus úton össze fog nyomatni, ismét kezdeti állapotára, az a pontba, térhessen vissza. Ezen *állandó mérsékletű* (isothermikus) összenyomás közben el kell a testből apródonként annyi meleget vezetni, a mennyi az összenyomásnál felhasznált belső és külső munka algebrai összegével aequivalens. Legyen ezen elvezetett melegség, a mint már fönnebb jelöltük, Q_2.

4-er. Ha a test az Ov_3 térfogatnak megfelelő a_3 pontból egész a-ig *adiabatikus* úton nyomatik össze, úgy mind feszélye, mind mérséklete annyira felnövekszik, a mennyire az a által jelölt kezdetállapot megkivánja.

Miután a test visszafordítható körfolyamot írt le, energiája ugyanaz — a mi a kezdeti volt. Csupán külső munka hajtatott végre, mely a

$$Q-Q_2=Q_1$$

melegmennyiséggel aequivalens, s melyet a

$$\int pdv$$

értelmében az $aa_1a_2a_3$ görbevonalú négyszög területe ábrázol.

Ha a körfolyamban bekövetkezett mérséklet-sülyedéseket és emelkedéseket végtelen kicsinyeknek vesszük, úgy az általában görbevonalú négyszög oldalai egyeneseknek tekintendők, s ha ekkor a területet, mint parallelogrammot számítjuk ki, csak harmadrendű végtelen kicsiny hibát követünk el — a mi a másodrendű végtelen kicsiny terület mellett elhanyagolandó.

A munkává alakult melegmennyiség Q_1 aránylagos tehát az $aa_1a_2a_3$ vagy a mi egyre megy, az $almn$ parallelogramm területével; ha t. i. e területet számértékileg W jelenti, úgy:

$$Q_1=A.W=A.\overline{al}.\overline{an} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8.)$$

A most behozott mennyiségek közül al a térfogatnak azon végtelen kis változása, melyet a test aa_1 úton, tehát állandó mérséklet mellett szenved, azaz:

$$\overline{al}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot dy$$

azon föltétel mellett, hogy

$$dt=\frac{\partial t}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial t}{\partial y}dy=0.$$

Ezekből pedig az következik, hogy:

$$\overline{al}=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}}{\frac{\partial t}{\partial y}}\cdot dx \quad \ldots\ldots \quad (9.)$$

A mi pedig az $\overline{an}$ végtelen kis feszélyfogyatkozást illeti, az nyilván nem egyéb, mint:

$$a_1v_1-kv_1$$

Úgyde:

a_1v_1 jelenti a feszélyt t mérsékletnél és Ov_1 térfogatnál, kv_1 pedig jelenti a feszélyt $(t-dt)$ mérsékletnél és ugyancsak Ov_1 térfogatnál.

E szerint $\overline{an}$, állandó térfogatnak és dt mérsékletcsökkenésnek megfelelő feszély-fogyatkozás:

$$\overline{an}=\frac{\partial p}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial p}{\partial y}\cdot dy$$

azon föltétel mellett, hogy:

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot dy=0\ , \quad \ldots \ldots (10.)$$

Ezekből pedig az következik, hogy:

$$\overline{an}=\frac{\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}}\cdot dx \quad \ldots \ldots (11.)$$

Kifejezendő, hogy a feszélyfogyatkozás *adott dt* mérsékletcsökkenésnek felel meg, czélszerü dx helyett dt változást vinni be $\overline{an}$ értékébe; e végre

$$dt=\frac{\partial t}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial t}{\partial y}\cdot dy$$

a (10.) egyenletben megszabott föltétellel kapcsolatban mutatja, hogy

$$dt=\frac{\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}}\cdot dx.$$

Ha dx innen nyerhető értékét (11)-be helyettesítjük,

$$\overline{an}=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}}\cdot dt \quad \ldots \ldots (12.)$$

A (9.) és (12.) alatti egyenletek tekintetbevételével, a munkává alakult melegség (8.)

$$Q_1 = A \cdot \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial t}{\partial y}} \cdot dx.dt \; . \; . \; . \; (13.)$$

Hátra van még Q_2 értékét analytikailag meghatározni. Ezen melegmennyiség a testtől $a_2\, a_3$ úton, *állandó mérséklet* mellett vétetett el. A testtel közlött vagy tőle elvett végtelen kicsiny melegség mindig megadható a

$$Xdx + Ydy$$

kifejezés által, melyben dx és dy az állapotjelzők változásait, és X, Y a melegségnek x, illetőleg y szerint vett részletes differentiális quotienseit ábrázolják. A jelen esetben dx és dy egymástól nem változhatnak függetlenül, miután ki van kötve, hogy *a melegség átmenetele állandó mérséklet mellett történt.* A dx és dy változásokat egybefűző relatio a

$$dt = \frac{\partial t}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial t}{\partial y} \cdot dy = 0$$

egyenlet által van megadva ; mert ebből az következik, hogy a jelen esetben :

$$dy = -\frac{\frac{\partial t}{\partial x}}{\frac{\partial t}{\partial y}} \cdot dx$$

Ennek folytán :

$$Q_2 = \frac{X\frac{\partial t}{\partial y} - Y\frac{\partial t}{\partial x}}{\frac{\partial t}{\partial y}} \cdot dx \; . \; . \; . \; . \; . \; (14.)$$

Összekapcsolván (13.) és (14)-et (7)-tel :

$$A \cdot \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}}{X \cdot \frac{\partial t}{\partial y} - Y \cdot \frac{\partial t}{\partial x}} = f(t)$$

Ebből pedig, ha $f(t)$ helyébe egy más alakú mérséklet-függvény :

$$T = \frac{1}{f(t)}$$

iratik, leend a mechanikai hő-elmélet *második főtétele* visz-szafordítható körfolyamokra vonatkozólag:

$$\text{II.}\ \ldots\ldots\ X\frac{\partial t}{\partial y}-Y\frac{\partial t}{\partial x}=AT\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

5.

Foglaljuk össze az eddigi fejtegetések eredményeit. Általánosan hagyván az állapotjelzőket, a mechanikai hő-elmélet

első főegyenlete:

$$\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}=A\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\right)\ldots\ldots\ldots\ \text{I.}$$

második főegyenlete:

$$X\frac{\partial t}{\partial y}-Y\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=AT\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\right)\ldots\ldots\text{II.}$$

hol X és Y rövidség okáért állanak a következő kifejezések helyett:

$$X=C\frac{\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+c\cdot\frac{\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\ldots\ldots(5).$$

$$Y=C\frac{\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+c\cdot\frac{\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}\ldots\ldots(6.)$$

s a hol p, t, v, C, c a test feszélyét, mérsékletét, térfogatát, állandó feszély mellett vett fajmelegét, és állandó térfogat mellett vett fajmelegét jelentik, s a hol T a mérsékletnek oly függvénye, melyre a test minősége s egyébkénti állapota nincsen befolyással, s végre A a munkának hőtani egyenértéke.

Ezen egyenleteknek — mint már fönnebb mondva volt — azon előnyük van, hogy belőlük a specialis állapotjelzőkre vonatkozókat egyszerű substitutio útján levezethetjük. Föltéve például, hogy a *térfogatot* és *feszélyt tekintjük független állapotjelzőknek*, úgy I. és II-ben, valamint (5.) és (6)-ban

x helyébe mindenütt v

y helyébe mindenütt p

leszen irandó, megjegyezvén, hogy ez esetben

$$\frac{\partial v}{\partial x}=1 \quad \text{és} \quad \frac{\partial v}{\partial y}=0$$

valamint

$$\frac{\partial p}{\partial y}=1 \quad \text{és} \quad \frac{\partial p}{\partial x}=0.$$

Ezen állapotjelzőkre vonatkozólag lesz az :

első főegyenlet egyszerübb alakja :

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(C\frac{\partial t}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(c\frac{\partial t}{\partial p}\right)=A \ldots\ldots\ldots (\mathrm{I_a}).$$

a második főegyenlet egyszerübb alakja pedig :

$$(C-c)\frac{\partial t}{\partial v}\cdot\frac{\partial t}{\partial p}=AT \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{II_a}).$$

A I- II-vel jelölt egyenletek azok, melyeket *általános alakoknak szokás nevezni*, ellentétben a például fölhozott ($\mathrm{I_a}$) és ($\mathrm{II_a}$) egyenletekkel, melyek legalább *alakra nézve specialisoknak tekintetnek.*

A részletes tanulmány azonban, melyet e tárgyra fordítók, s melyet a jelen értekezésben előterjesztek, azt mutatja, *hogy az I és II-vel jelölt egyenletek* — ellenkezőleg a most említett nézettel — *alakra nézve sem általánosabbak semmivel mint az (I_a) és (II_a) alatti egyenletek, s hogy ezek amazokkal tökéletesen identikus alakok, nem levén közöttük egyéb különbség, mint az, hogy az egyik párban a véghez viendő müveletek csak kijelölve, a másik párban pedig valóban végre vannak hajtva.*

Hogy ezt bebizonyíthassam, szabadjon előbb egy ritkábban használt differentiális kifejezésre emlékeztetnem.

6.

Ha u és w oly változókat jelentenek, melyek az egymástól független ősváltozóknak x-nek és y-nak functiói, úgy az x és y minden f függvényére nézve áll a

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}.dx+\frac{\partial f}{\partial y}.dy \ldots\ldots\ldots (15.)$$

identitáson kivül még a következő is:

$$df=\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_w.du+\left[\frac{\partial f}{\partial w}\right]_u.dw\ldots\ldots(16.)$$

s miután:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}.dx+\frac{\partial u}{\partial y}.dy$$

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}.dx+\frac{\partial w}{\partial y}.dy$$

a (16.) egyenlet igy is irható:

$$df=\left(\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_w\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\left[\frac{\partial f}{\partial w}\right]_u\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right).dx+$$
$$\left(\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_w\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\left[\frac{\partial f}{\partial w}\right]_u\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right).dy.$$

Összevetve ezt a (15.) egyenlettel, látjuk, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_w\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\left[\frac{\partial f}{\partial w}\right]_u\cdot\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_w\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\left[\frac{\partial f}{\partial w}\right]_u\cdot\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Ez utóbbi két egyenlet megoldása adja azon differentiális kifejezést, melyre emlékeztetni akartunk; t. i.

$$\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_w=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}}\ldots\ldots\ldots(17.)$$

7.

Az előbbi szakaszban levezetett s (17)-tel jelölt identitásnak többszörös alkalmazása a I. és II. egyenletekre mutatja, hogy az I, II alakok semmivel sem általánosabbak, mint (I_a) és (II_a).

Ha ugyanis X-nek (5.) alatt adott értékét összehasonlítjuk a (17)-dik egyenlettel, s fölteszszük, hogy ez utóbbiban

$$f=t;\quad w=p;\quad u=v$$

lesz:

$$\frac{\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}}=\left[\frac{\partial t}{\partial v}\right]_p \quad\ldots\ldots\ldots (18.)$$

vagy föltéve, hogy :

$$f=t;\quad w=v;\quad u=p$$

lesz :

$$\frac{\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}=\left[\frac{\partial t}{\partial p}\right]_v \quad\ldots\ldots\ldots (19.)$$

és így :

$$X=C\left[\frac{\partial t}{\partial v}\right]_p\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+c\left[\frac{\partial t}{\partial p}\right]_v\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\quad\ldots\ldots (20.)$$

hasonlókép :

$$Y=C\left[\frac{\partial t}{\partial v}\right]_p\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+c\left[\frac{\partial t}{\partial p}\right]_v\cdot\frac{\partial p}{\partial y}\quad\ldots\ldots (21.)$$

Helyettesítvén ezen értékeket I-be, és azután némileg rövidítvén, a következő egyenletre jutunk :

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(C\left[\frac{\partial t}{\partial v}\right]_p\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(C\left[\frac{\partial t}{\partial v}\right]_p\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}}-$$

$$-\frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(c\left[\frac{\partial t}{\partial p}\right]_v\right)\cdot\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(c\left[\frac{\partial t}{\partial p}\right]_v\right)\cdot\frac{\partial p}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}}=A.$$

Legyen már most a (17)-dik egyenletben :

$$f=C\left[\frac{\partial t}{\partial v}\right]_p;\quad u=p \quad\text{és}\quad w=v,$$

úgy :

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(C\left[\frac{\partial t}{\partial v}\right]_p\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(C\left[\frac{\partial t}{\partial v}\right]_p\right)\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}}=\frac{\partial}{\partial p}\left[C\left[\frac{\partial t}{\partial v}\right]_p\right]_v,$$

hasonlóképen, ha :

$$f=c\left[\frac{\partial t}{\partial p}\right]_v;\quad u=v:\quad w=p,$$

lesz :

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(c\left[\frac{\partial t}{\partial p}\right]_v\right)\cdot\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(c\left[\frac{\partial t}{\partial p}\right]_v\right)\cdot\frac{\partial p}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}}=\frac{\partial}{\partial v}\left[c\left[\frac{\partial t}{\partial p}\right]_v\right]_p.$$

Az I. egyenletből tehát csupa identikus kifejezések bevitele által a következőre vezettetünk :

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[C\left[\frac{\partial t}{\partial v}\right]_p\right]_v-\frac{\partial}{\partial v}\left[c\left[\frac{\partial t}{\partial p}\right]_v\right]_p=A,$$

vagy ha a differerentiálásnál állandókul veendő mennyiségek most már felesleges megjelölését elhagyjuk :

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(C\frac{\partial t}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(c\frac{\partial t}{\partial p}\right)=A\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\text{I-a.}$$

Ezen egyenlet e szerint nem különbözik egyébben **az általánosnak nevezett** *egyenlettől, mint abban, hogy I-a)-ban a* **p** *és* **v** *szerint veendő differentiálások csak kijelölve, I-ben pedig valóban végre vannak hajtva.*

Ugyan ezt kimutatandó a II. és IIa egyenletekre nézve, helyettezzük 20.) és 21.)-ből X és Y értékét II-be, és rendezzük ezt kevéssé másképp :

$$C.\left[\frac{\partial t}{\partial v}\right]_p.\frac{\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}-c\left[\frac{\partial t}{\partial p}\right]_v.\frac{\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}}=AT.$$

s vegyük tekintetbe a (18.) és (19.) alatti identitásokat

$$C\left[\frac{\partial t}{\partial v}\right]_p\cdot\left[\frac{\partial t}{\partial p}\right]_v-c\left[\frac{\partial t}{\partial p}\right]_v\cdot\left[\frac{\partial t}{\partial v}\right]_p=AT.$$

vagy ha a differentiálásnál állandókul veendő mennyiségek most már fölösleges megjelölését elhagyjuk :

$$(C-c)\frac{\partial t}{\partial v}\cdot\frac{\partial t}{\partial p}=AT\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\text{IIa.}$$

Ezen egyenlet e szerint nem különbözik egyébben **az általánosnak nevezett** *II. egyenlettől, mint abban, hogy IIa.)-ban a* **p** *és* **v** *szerint veendő differentiálások csak kijelölve, II-ben pedig valóban végre vannak hajtva.*